



**MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE FRATURA EM MATERIAIS QUASE FRÁGEIS COM  
APLICAÇÕES EM FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO ELEMENTOS FINITOS**

**Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva**

**DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE FRATURA EM  
MATERIAIS QUASE FRÁGEIS COM APLICAÇÕES EM  
FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO ELEMENTOS  
FINITOS**

**Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva**

**ORIENTADOR: Raúl Darío Durand Farfán**

**DOCTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO:**

**BRASÍLIA/DF: MAIO - 2021.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE FRATURA EM MATERIAIS  
QUASE FRÁGEIS COM APLICAÇÕES EM FRATURAMENTO  
HIDRÁULICO USANDO ELEMENTOS FINITOS**

**FERNANDO HIPÓLITO BARROS TRINDADE DA SILVA**

**TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Prof. Raúl Darío Durand Farfán, Dr. (UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Márcio Muniz de Farias, Dr. (UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, Dr. (UFPE)  
(Examinador Externo)**

---

**Prof. Osvaldo Luiz Manzoli, Dr. (UNESP)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, MAIO DE 2021**

## FICHA CATALOGRÁFICA

SILVA, FERNANDO HIPÓLITO BARROS TRINDADE DA

Modelagem tridimensional de fratura em materiais quase frágeis com aplicações em fraturamento hidráulico usando elementos finitos [Distrito Federal] 2021.

xxvi, 241p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2021).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método dos Elementos Finitos

2.Elemento de interface

I.ENC/FT/UnB

3.Elementos coesivos

4.Fratura hidráulica

II.Título (Doutor)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, F. H. B. T. (2021). Modelagem tridimensional de fratura em materiais quase frágeis com aplicações em fraturamento hidráulico usando elementos finitos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação **E.TD-06A/21**, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 241p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva.

TÍTULO: Modelagem tridimensional de fratura em materiais quase frágeis com aplicações em fraturamento hidráulico usando elementos finitos.

GRAU: Doutor

ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva  
SQN 404 Bloco M Apt. 305  
70.845-130 Brasília – DF – Brasil.  
hipolitofernando@outlook.com

## **AGRADECIMENTOS**

A conclusão de um curso de doutorado implica, ao seu final, o dever de agradecer. Agradecer sim, pois às vezes esquecemos de retribuir, mesmo que com palavras simples, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, ajudaram na concretização deste objetivo.

Ao meu orientador professor Raúl Darío Durand Farfán, pelo apoio e incentivo na busca do meu crescimento acadêmico. Sua dedicação para com seus orientandos é admirável, algo que irei levar como exemplo a seguir na minha carreira profissional. Só tenho gratidão por toda ajuda e amizade.

Ao Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil por me permitir a realização do sonho de cursar o doutorado. Aos professores do programa que ajudaram a sedimentar o caminho transmitindo seus valiosos ensinamentos.

A minha família, em especial a minha mãe Salette pelo amor e carinho incondicional, fundamental para suportar os percalços da jornada. Ao meu irmão Ítalo pelo apoio, carinho e conselhos valorosos imprescindíveis para o meu sucesso. A Thayse pelo amor e carinho. Aos meus amigos por sempre estarem ao meu lado.

# **MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE FRATURA EM MATERIAIS QUASE FRÁGEIS COM APLICAÇÕES EM FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO ELEMENTOS FINITOS**

**Autor: Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva**

**Orientador: Raúl Darío Durand Farfán**

**Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil**

**Brasília, maio de 2021**

## **RESUMO**

Este trabalho apresenta uma abordagem tridimensional discreta baseada na utilização de elementos de interface coesivos com espessura zero para modelar a formação e propagação de fraturas em material quase frágil no modo I e modo misto. O modelo constitutivo para esses elementos é baseado na teoria da plasticidade e apresenta uma função de plastificação baseada em Coulomb, regra de fluxo não associada e um esquema de integração de tensões implícito. Este modelo também incorpora conceitos da mecânica da fratura não linear para modelar o comportamento de amolecimento causado pelo fraturamento do material. Duas leis de amolecimento são investigadas, uma lei bilinear e uma lei exponencial. O modelo de fratura foi verificado por meio de testes de extensão e cisalhamento. Em seguida, é aplicado à simulação de ensaios experimentais em corpos de prova de concreto onde pode-se observar excelente concordância. Visando estender a modelagem para simular o problema da fratura hidráulica, as equações de elementos finitos correspondentes são derivadas das equações de equilíbrio mecânico e continuidade. Além disso, um elemento coesivo modificado com graus de liberdade de poropressão é considerado. Como parte da validação da implementação do elemento finito para a fase fluida, o modelo é testado em problemas de infiltração e drenagem com soluções analíticas conhecidas. Em seguida, a modelagem hidromecânica acoplada é aplicada a diversos casos, incluindo problemas de fratura hidráulica, também com soluções analíticas conhecidas. Em todos os casos, os resultados mostram uma concordância muito boa com as soluções analíticas. Por fim, é apresentada a simulação de um caso experimental de fratura hidráulica. Além disso, dois casos hipotéticos são simulados para estudar o desenvolvimento da abertura da trinca e os campos de tensão e pressão do fluido.

**Palavras chave: Elementos finitos, elemento interface, fratura, fratura hidráulica**

# **THREE-DIMENSIONAL FRACTURE MODELING IN QUASI-BRITTLE MATERIALS WITH HYDRAULIC FRACTURING APPLICATIONS USING FINITE ELEMENTS**

**Author: Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva**

**Supervisor: Raúl Darío Durand Farfán**

**Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil**

**Brasília, May of 2021**

## **ABSTRACT**

This work presents a discrete three-dimensional approach based on the use of cohesive interface elements with zero thickness to model the formation and propagation of cracks in quasi-brittle material in mode I and mixed-mode. The constitutive model for these elements is based on the plasticity theory and presents a Coulomb-based yield function, non-associated flow rule, and an implicit stress integration scheme. This model also incorporates non-linear fracture mechanics concepts to model the softening behavior caused by the material fracturing. Two softening laws are investigated, a bilinear and an exponential law. The fracture model was verified using extension and shear patch tests. Next, it is applied to the simulation of experimental tests on concrete specimens where excellent agreement can be observed. To extend the modeling to simulate the hydraulic fracture problem, the corresponding finite element equations are derived from the mechanical equilibrium and continuity equations. Also, a modified cohesive element with pressure degrees of freedom is considered. As part of the validation of the finite element implementation for the fluid phase, the model is tested in seepage and drainage problems with known analytical solutions. Next, the coupled hydro-mechanical modeling is applied to several cases, including hydraulic fracture problems, also with known analytical solutions. In all cases, the results show very good agreement with the analytical solutions. Finally, the simulation of an experimental case of hydraulic fracture is presented. Also, two hypothetical cases are simulated to study the development of the crack opening and the stress and fluid pressure fields.

**Keywords: Finite elements, interface element, fracture, hydraulic fracture**

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>xii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xix</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES</b>	<b>xx</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	6
1.2 Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>9</b>
2.1 Perfuração de poços e estimulação por fraturamento hidráulico . . . . .	9
2.1.1 Desenvolvimento histórico do faturamento hidráulico . . . . .	10
2.1.2 Processo de fraturamento hidráulico . . . . .	11
2.1.3 Fluido de fratura . . . . .	13
2.1.4 Material de suporte . . . . .	15
2.1.5 Impactos ambientais . . . . .	16
2.2 Mecânica da fratura . . . . .	18
2.2.1 Modos de ruptura dos materiais . . . . .	19
2.2.2 Mecânica da fratura elástico-linear (MFEL) . . . . .	19
2.2.3 Tipos de comportamento à fratura e a limitação da MFEL . . . . .	23
2.2.4 Mecânica da fratura não linear (MFNL) . . . . .	24
2.3 Teoria da poroelasticidade linear . . . . .	27
2.3.1 Desenvolvimento histórico da teoria da poroelasticidade . . . . .	28
2.3.2 Equações básicas da elasticidade isotrópica . . . . .	29
2.3.3 Princípio da tensão efetiva . . . . .	31
2.3.4 Lei de Darcy . . . . .	32
2.3.5 Equação do equilíbrio do meio poroso . . . . .	34
2.3.6 Equação da conservação de massa do meio poroso . . . . .	35
2.3.7 Equação da conservação da massa do fluido na fratura . . . . .	38
2.3.8 Incremento do conteúdo fluido . . . . .	41
2.3.9 Difusão do fluido . . . . .	42
2.3.10 Coeficiente de armazenamento . . . . .	43
2.4 Considerações sobre o fluxo do fluido na fratura . . . . .	44
2.4.1 O atraso do fluido de fratura e a pressão do fluido na ponta da fissura . . . . .	44
2.4.2 Efeito da rugosidade da fratura no fluxo do fluido . . . . .	45

2.4.3	Perda de fluido por vazamento nas faces da fratura . . . . .	47
2.5	Modelos analíticos de fraturamento hidráulico . . . . .	49
2.5.1	Fraturamento hidráulico em um poço . . . . .	49
2.5.2	Modelo de Khristianovic-Geertsma-de Klerk (KGD) . . . . .	51
2.5.3	Modelo de Perkins-Kern-Nordgren (PKN) . . . . .	53
2.5.4	Modelo de fratura circular . . . . .	56
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DA FRATURA EM MATERIAIS QUASE FRÁGEIS</b>	<b>60</b>
3.1	Geração da malha com elementos de interface de camada dupla . . . . .	62
3.2	Formulação do elemento de interface isoparamétrico . . . . .	64
3.2.1	Formulação do elemento finito . . . . .	64
3.2.2	Cálculo do comprimento representativo dos elementos . . . . .	67
3.3	Modelagem constitutiva do elemento de interface . . . . .	68
3.3.1	Curvas de amolecimento . . . . .	69
3.3.2	Matriz constitutiva . . . . .	71
3.3.3	Atualização da tensão . . . . .	73
3.3.4	Atualização plástica quando $u_p \geq u_c$ . . . . .	75
3.4	Procedimento de solução . . . . .	76
3.4.1	Aplicação do método Runge-Kutta . . . . .	76
3.4.2	Passo automático . . . . .	77
3.4.3	Correção do desvio ( <i>Drift</i> ) . . . . .	78
3.5	Análise numéricas . . . . .	79
3.5.1	Geração da malha . . . . .	80
3.5.2	Parâmetro do material . . . . .	80
3.5.3	Teste de verificação . . . . .	81
3.5.4	Avaliação do efeito do fator $\zeta$ . . . . .	83
3.5.5	Teste de refinamento de malha . . . . .	84
3.5.6	Exemplo 1 - Viga com entalhe submetida a torção . . . . .	86
3.5.7	Exemplo 2 - Amostra de seção circular com entalhe sujeito a torção . . . . .	89
3.5.8	Exemplo 3 - Viga com entalhe central . . . . .	91
3.5.9	Exemplo 4 - Painel em formato de L . . . . .	92
3.5.10	Exemplo 5 - Viga com entalhe central e com carregamento assimétrico . . . . .	95
3.5.11	Exemplo 6 - Viga com entalhe e carregamento assimétrico . . . . .	97
3.5.12	Exemplo 7 - Placa quadrada com entalhe duplo . . . . .	99
3.6	Discussão . . . . .	102
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DA FRATURA HIDRÁULICA</b>	<b>104</b>
4.1	Geração da malha com elementos de interface de camada tripla . . . . .	106
4.2	Topologia do elemento de interface de camada tripla . . . . .	107
4.3	Equações governantes do fraturamento hidráulico no meio poroso . . . . .	109

4.3.1	Condições iniciais e de contorno . . . . .	110
4.3.2	Equilíbrio mecânico no meio poroso . . . . .	111
4.3.3	Equilíbrio mecânico na fratura . . . . .	115
4.3.4	Fluxo de fluido através do meio poroso . . . . .	117
4.3.5	Fluxo de fluido na fratura . . . . .	119
4.4	O procedimento de solução e discretização no domínio do tempo . . . . .	123
4.5	Análise numéricas . . . . .	124
4.5.1	Geração da malha . . . . .	125
4.5.2	Teste de verificação . . . . .	125
4.5.3	Exemplo 1 - Adensamento bidimensional do meio poroelástico . . . . .	126
4.5.4	Exemplo 2 - Infiltração instável . . . . .	128
4.5.5	Exemplo 3 - Adensamento lateralmente confinado do meio poroelástico	130
4.5.6	Exemplo 4 - Adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído . . . . .	134
4.5.7	Exemplo 5 - Simulação de fratura hidráulica de deformação plana (KGD)	137
4.5.8	Exemplo 6 - Simulação do problema de fratura hidráulica radial ( <i>Penny- Shaped</i> ) . . . . .	140
4.5.9	Exemplo 7 - Ensaio de fraturamento hidráulico do concreto . . . . .	143
4.5.10	Exemplo 8 - Fratura hidráulica em uma amostra confinada . . . . .	144
4.5.11	Exemplo 9 - Estudo da influencia das propriedades do material e da vazão nas características da fratura hidráulica . . . . .	147
4.6	Discussão . . . . .	149
<b>5</b>	<b>MODELAGEM DE DRENOS</b>	<b>151</b>
5.1	Modelagem de dreno pelo método discreto . . . . .	151
5.2	Modelagem de dreno pelo método semi-embutido . . . . .	153
5.2.1	Discretização do elemento de dreno . . . . .	154
5.2.2	Elemento de interface . . . . .	156
5.3	Simulações numéricas . . . . .	158
5.3.1	Geração da malha . . . . .	159
5.3.2	Exemplo 1 - Verificação da implementação do elemento de dreno pelo método semi-embutido . . . . .	159
5.3.3	Exemplo 2 - Sistema de tubo e drenos no interior dos elementos sólidos	160
5.3.4	Exemplo 3 - Adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído . . . . .	162
5.4	Discussão . . . . .	165
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>167</b>
6.1	Conclusões . . . . .	167
6.1.1	Com relação a preparação da malha de elementos finitos . . . . .	167

6.1.2	Com relação às análises mecânicas . . . . .	167
6.1.3	Com relação às análises hidromecânicas . . . . .	169
6.2	Recomendações para pesquisas futuras . . . . .	170
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>186</b>
<b>APÊNDICES</b>		<b>187</b>

## LISTA DE TABELAS

2.1	Coeficiente de Biot para solos e rochas. Adaptado de Mitchell e Soga (2005). . . . .	32
2.2	Permeabilidade versus condutividade para diferentes tipos de rochas. Adaptado de Wang (2000). . . . .	34
3.1	Parâmetros do material para o exemplo de verificação. . . . .	81
3.2	Resumo das informações da malha usada no teste de avaliação do efeito do fator $\zeta$ . . . . .	83
3.3	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do teste de avaliação do efeito do fator $\zeta$ . . . . .	83
3.4	Resumo das informações da malha usada no teste de refinamento. . . . .	84
3.5	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do teste de refinamento. . . . .	86
3.6	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 1. . . . .	87
3.7	Resumo das informações da malha usada no exemplo 1. . . . .	87
3.8	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 1. . . . .	88
3.9	Resumo das informações da malha usada no exemplo 2. . . . .	89
3.10	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 2. . . . .	90
3.11	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 3. . . . .	91
3.12	Resumo das informações da malha usada no exemplo 3. . . . .	91
3.13	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 3. . . . .	92
3.14	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 4. . . . .	93
3.15	Resumo das informações da malha usada no exemplo 4. . . . .	93
3.16	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 4. . . . .	94
3.17	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 5. . . . .	95
3.18	Resumo das informações da malha usada no exemplo 5. . . . .	96
3.19	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 5. . . . .	96
3.20	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 6. . . . .	97
3.21	Resumo das informações da malha usada no exemplo 6. . . . .	97
3.22	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 6. . . . .	98
3.23	Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 7. . . . .	99
3.24	Resumo das informações da malha usada no exemplo 7. . . . .	100
3.25	Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 7. . . . .	101
4.1	Parâmetros do material para o exemplo de verificação. . . . .	125
4.2	Parâmetros do material para o exemplo 1. . . . .	127
4.3	Parâmetros do material para o exemplo 2. . . . .	129
4.4	Parâmetros do material para o exemplo 3. . . . .	132

4.5	Parâmetros do material para o exemplo 3. . . . .	135
4.6	Parâmetros do material para o exemplo 5. . . . .	139
4.7	Parâmetros do material para o exemplo 6. . . . .	142
4.8	Parâmetros do material para o exemplo 7. . . . .	143
4.9	Parâmetros do material para o exemplo 8. . . . .	145
4.10	Parâmetros do material para o exemplo 9. . . . .	147
5.1	Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 1. . . . .	159
5.2	Comparação dos resultado analíticos e numéricos no exemplo 1. . . . .	160
5.3	Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 2. . . . .	161
5.4	Comparação dos resultado analíticos e numéricos no exemplo 2. . . . .	161
5.5	Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 3. . . . .	163

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Processo de fraturamento hidráulico. Adaptado de National Geographic (2013).	13
2.2	Material de suporte resistindo a pressão de fechamento da fratura. Adaptado de Society of Petroleum Engineers (2017).	15
2.3	Materiais de suporte e suas características. Adaptado de Saldungaray e Terry (2012).	16
2.4	Processo de fraturamento hidráulico e os possíveis impactos ambientais. Adaptado de Rodriguez e Sarmiento (2018).	18
2.5	Modos de fissuração: (a) modo I (ou modo de abertura), (b) modo II (ou modo de escorregamento), (c) modo III (ou modo de rasgamento). Adaptado de Kumar e Barai (2011).	19
2.6	(a) Placa idealizada infinita com um furo elíptico, submetida à tração, (b) sistemas de coordenadas polares e componentes de tensão à frente da fissura. Adaptado de Mindess et al. (2003).	20
2.7	Tipos de zonas não lineares em materiais com comportamento: (a) elástico linear, (b) plástico não linear e (c) quase frágil não linear. Adaptado de Bazant e Planas (1998).	24
2.8	Curvas de tensão-deslocamento para materiais submetido à tração uniaxial que possuem comportamentos: (a) elástico linear, (b) plástico não linear e (c) quase frágil não linear. Adaptado de Kumar e Barai (2011).	24
2.9	Representação da fissura em materiais quase frágeis (a) Zona de processo de fratura e (b) Distribuição da tensão coesiva na ZPF.	25
2.10	Idealização da fissura em materiais quase frágeis: (a) fissura coesiva com as superfícies da fissura em contato ( $w_t < w_c$ ), e (b) fissura coesiva com separação parcial das superfícies da fissura ( $w_t \geq w_c$ ). Adaptado de Bazant e Planas (1998).	26
2.11	Tensor tensão atuante em um volume infinitesimal.	34
2.12	Conservação da massa do fluido no meio poroso.	36
2.13	Fluxo do fluido viscoso entre duas placas paralelas lisas. Modificado de Weber (2016).	39
2.14	Representação esquemática de uma fratura hidráulica tridimensional. Modificado de Weber (2016).	40
2.15	A condição de continuidade local em um volume de controle. A área cinza indica o crescente volume de controle, que é o aumento na largura da fratura $w$ ao longo do tempo $t$ . Modificado de Weber (2016).	41
2.16	Representação do fluxo do fluido na fratura (a) com atraso e (b) sem atraso.	45

2.17	Representação da abertura média ( $\bar{w}$ ) e da abertura hidráulica ( $w_h$ ). Modificado de Lhomme (2005) . . . . .	46
2.18	Perfis de poropressão nas zonas invadidas pelo fluido de fraturamento. Modificado de Lhomme (2005) . . . . .	48
2.19	Propagação da fratura hidráulica em um poço submetido a ação da tensão <i>in situ</i> . . . . .	50
2.20	Registro da pressão do fluido em um poço durante o processo de fraturamento hidráulico. Adaptado de Yew e Weng (2015). . . . .	51
2.21	Desenho esquemático do modelo KGD com altura constante. Adaptado de Yew e Weng (2015). . . . .	52
2.22	Desenho esquemático do modelo PKN com altura constante. Adaptado de Yew e Weng (2015). . . . .	54
2.23	Desenho esquemático do modelo fratura radial KGD. . . . .	57
3.1	Geração da malha com elementos de interface de camada dupla: a) malha inicial; b) separação dos elementos (novos nós são gerados); c) geração dos elementos de interface por meio da conexão dos pares das faces dos elementos vizinhos. . . . .	64
3.2	Elemento de interface de oito nós: a) sistema global $x y z$ e referência global dada pelos vetores $n$ , $s$ e $t$ ; b) sistema de coordenadas paramétricas. . . . .	64
3.3	Numeração global (em preto) e local (em vermelho) dos nós do elemento de interface. . . . .	66
3.4	Cálculo do comprimento representativo dos elementos sólidos: a) em uma malha com elementos retangulares iguais; b) em uma malha com elementos retangulares de diferentes tamanhos; c) em uma malha não estruturada. . . . .	67
3.5	Modelo do elemento de interface: a) Superfície de plastificação; b) Superfície do potencial plástico . . . . .	68
3.6	Curva de amolecimento: a) Curva de amolecimento bilinear; b) Curva de amolecimento de Hordijk. . . . .	69
3.7	Evolução da superfície de plastificação: a) localização inicial ( $u_p = 0$ ); b) localização intermediária ( $0 < u_p < u_c$ ); c) localização final ( $u_p \geq u_c$ ). . . . .	69
3.8	Atualização da tensão no regime elastoplástico: a) retorno da tensão a superfície de plastificação quando $\sigma_n^{tr} > 0$ ; b) retorno da tensão a superfície de plastificação quando $\sigma_n^{tr} < 0$ . . . . .	74
3.9	Atualização da tensão para condição $w_n^{n+1} \geq u_c$ (fissura aberta): a) as faces da fissura faces ainda estão em contato no passo $n$ ; b) as faces da fissura já estão separadas no passo $n$ . . . . .	76

3.10	Desenho esquemático dos ensaios de extensão e cisalhamento; a) configuração inicial; b) configuração deformada para o teste de extensão; c) configuração deformada para o teste de cisalhamento 1; d) configuração deformada para teste de cisalhamento 2; . . . . .	81
3.11	Teste de extensão: a) abertura versus tensão normal; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão normal. . . . .	82
3.12	Testes de cisalhamento: a) deslocamento relativo cisalhante versus tensão cisalhante; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão cisalhante. . . . .	82
3.13	Configuração do teste de avaliação do efeito do fator $\zeta$ . Todas as medidas em milímetros. . . . .	83
3.14	Testes de avaliação do efeito do fator $\zeta$ : a) utilizando valores de $\zeta$ entre 1 e 9; b) utilizando valores de $\zeta$ entre 1 e 40. . . . .	84
3.15	Configuração do teste de refinamento. Todas as medidas em milímetros. . . . .	85
3.16	Malhas de elementos finitos utilizadas no teste de refinamento. . . . .	85
3.17	Resultado numérico do teste de refinamento. . . . .	86
3.18	Trajeto da fissura para cada malha do teste de refinamento. . . . .	86
3.19	Configuração do ensaio da viga com entalhe submetida a torção investigado por Brokenshire (1995). Todas as medidas em milímetros. . . . .	87
3.20	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 1. . . . .	88
3.21	Malha deformada exibindo o campo de deslocamento $u_z$ para simulação de Hordijk do exemplo 1. . . . .	88
3.22	Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 1. . . . .	89
3.23	Configuração do ensaio da amostra de seção circular com entalhe submetida a torção investigado por Brokenshire (1995). Todas as medidas em milímetros. . . . .	89
3.24	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 2. . . . .	90
3.25	Malha deformada exibindo o campo de deslocamento $u_z$ para simulação de Hordijk do exemplo 2. . . . .	90
3.26	Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 2. . . . .	91
3.27	Configuração do ensaio da viga com entalhe central investigado por Roesler et al. (2007). Todas as medidas em milímetros. . . . .	91
3.28	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 3. . . . .	92
3.29	Malha deformada exibindo o campo de deslocamento $u_z$ para simulação de bilinear do exemplo 3. . . . .	93
3.30	Configuração do ensaio do painel em formato de L investigado por Winkler (2001). Todas as medidas em milímetros. . . . .	93
3.31	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 4. . . . .	94

3.32	Malha deformada exibindo o campo de tensão $\sigma_{zz}$ para simulação de bilinear do exemplo 4. . . . .	95
3.33	Configuração do ensaio da viga com entalhe central e com carregamento assimétrico investigada por Galvez et al. (1998). Todas as medidas em milímetros. . . . .	95
3.34	Resultado experimental e predição numérica do experimento 5. . . . .	96
3.35	Malha deformada exibindo o campo de tensão $\sigma_{xx}$ para simulação de bilinear do exemplo 5. . . . .	97
3.36	Configuração do ensaio da viga com entalhe e carregamento assimétrico investigada por Feist e Hofstetter (2007). Todas as medidas em milímetros. . .	97
3.37	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 6. . . . .	98
3.38	Malha deformada exibindo o campo de deslocamento $u_z$ para simulação de Hordijk do exemplo 6 . . . . .	99
3.39	Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 6. . . . .	99
3.40	Configuração do ensaio da placa quadrada com entalhe duplo. Todas as medidas em milímetros. . . . .	100
3.41	Resultado experimental e predição numérica do exemplo 7. . . . .	100
3.42	Malha deformada exibindo o campo de tensão $\sigma_{xx}$ para simulação de bilinear do exemplo 7. . . . .	101
3.43	Malha composta de elementos hexaedros exibindo o campo de tensão $\tau_{xz}$ . . . .	102
4.1	Geração de malha com elementos de interface: a) malha inicial; b) separação dos elementos sólidos e geração de novos nós; c) geração dos nós intermediários; d) malha final incluindo elementos de interface. . . . .	109
4.2	Elemento de interface de doze nós: a) sistema global $x y z$ e referencia global dada pelos vetores $\mathbf{n}$ , $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ ; b) sistema de coordenadas paramétricas. . . . .	109
4.3	As condições de contorno de um meio poroso saturado $\Omega$ com descontinuidade $\Gamma_d$ . Modificado de Nguyen et al. (2017). . . . .	110
4.4	Fluxo do fluido na fratura do meio poroso. Modificado de Zielonka et al. (2014)	120
4.5	Desenho esquemático dos ensaios de fraturamento hidráulico; a) configuração inicial; b) configuração deformada; . . . . .	125
4.6	Ensaio de fraturamento hidráulico: a) abertura versus tensão normal; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão normal. . . . .	126
4.7	Configuração do ensaio de adensamento bidimensional do meio poroelástico. Todas as medidas em metros. . . . .	127
4.8	Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento bidimensional do meio poroelástico para vários intervalos de tempo. . . . .	128

4.9	Predição numérica da poropressão do ensaio de adensamento bidimensional: a) Final da primeira etapa ao atingir o equilíbrio hidrostático; b) Após a aplicação da carga $T = 1/8$ ; c) Após a aplicação da carga $T = 4/8$ ; d) Após a aplicação da carga $T = 6/8$ . . . . .	128
4.10	Configuração do ensaio de infiltração instável. Todas as medidas em milímetros.	129
4.11	Curvas analíticas e previsão numérica da distribuição de pressão do fluido na descontinuidade para diferentes tempos. . . . .	130
4.12	Predição numérica da poropressão no interior da fratura do ensaio de infiltração instável: a) Após a aplicação da poropressão no tempo $T=0.1$ ; b) Após a aplicação da poropressão no tempo $T=0.3$ ; b) Após a aplicação da poropressão no tempo $T=0.5$ . . . . .	130
4.13	Analogia hidromecânica para ilustrar a distribuição de carga no adensamento: a) exemplo físico; b) estado inicial em equilíbrio; c) Incremento de carga aplicado com a válvula fechada; d) Abertura da válvula e início da drenagem da amostra; e) estado final em equilíbrio após a drenagem da amostra. . . . .	131
4.14	Configuração do ensaio de adensamento lateralmente confinado do meio poroelástico. Todas as medidas em metros. . . . .	132
4.15	Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento lateralmente confinado da amostra não fraturada: a) Profundidade normalizada versus excesso de poropressão normalizado; b) Grau de consolidação versus fator tempo. . . . .	133
4.16	Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento lateralmente confinado da amostra fraturada: a) Profundidade normalizada versus excesso de poropressão normalizado; b) Grau de consolidação versus fator tempo. . . . .	133
4.17	Predição numérica da poropressão do ensaio de adensamento: a) Após a aplicação da carga no tempo $T=0.05$ da amostra não fraturada; b) Após a aplicação da carga no tempo $T=0.05$ da amostra fraturada. . . . .	134
4.18	Configuração do ensaio de adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído. Todas as medidas em metros. . . . .	135
4.19	Vista em planta da localização dos elementos de interface para a simulação de drenos verticais. . . . .	136
4.20	Comparação de resultados numéricos e curvas analíticas para o grau de consolidação. . . . .	137
4.21	Campo de poropressão da análise de adensamento radial para $T = 0.02$ e $r_d = 0.25$ m. . . . .	137
4.22	Representação esquemática do modelo de fratura hidráulica KGD. . . . .	138
4.23	Configuração do ensaio de fratura hidráulica KGD. Todas as medidas em metros.	139

4.24	Resultado analítico e predição numérica de fratura hidráulica KGD: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo. . . . .	139
4.25	Predição numérica do deslocamento $u_z$ do ensaio de fratura hidráulica KGD. . .	140
4.26	Representação esquemática do modelo de fratura hidráulica radial. . . . .	141
4.27	Configuração do ensaio de fratura hidráulica radial. Todas as medidas em metros.	142
4.28	Resultado analítico e predição numérica de fratura hidráulica radial: a) Raio da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo. . . . .	142
4.29	Predição numérica do deslocamento $u_z$ do ensaio de fratura hidráulica radial. . .	143
4.30	Configuração do ensaio de fratura hidráulica no concreto. Todas as medidas em metros. . . . .	143
4.31	Resultado analítico e predição numérica do fraturamento hidráulico do concreto.	144
4.32	Predição numérica da poropressão do fraturamento hidráulico do concreto. . . .	144
4.33	Fratura hidráulica em uma amostra confinada. Todas as medidas em milímetros	145
4.34	Resultados numéricos na boca da fratura. . . . .	146
4.35	Resultados numéricos ao longo do plano da fratura. . . . .	146
4.36	Configuração do ensaio de fratura hidráulica. Todas as medidas em metros. . .	147
4.37	Predição numérica da fratura hidráulica para diferentes vazões: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo. . . . .	148
4.38	Predição numérica da fratura hidráulica para diferentes viscosidade do fluido de fratura : a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo. . . . .	148
4.39	Predição numérica da fratura hidráulica em meios porosos com diferentes permeabilidades: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo. . . . .	149
5.1	Posição do elemento de dreno com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto. Modificado de Durand (2008). . . . .	151
5.2	Discretização do dreno. Modificado de Durand e Farias (2014). . . . .	154
5.3	Gráfico da função de contorno para um elemento triangular 2D de seis nós; a) variação do sinal da função de contorno; b) plotagem 3D da função de contorno correspondente. Modificado de Durand e Farias (2014). . . . .	155
5.4	Mapeamento inverso. Modificado de Durand e Farias (2014). . . . .	156
5.5	Método da bissecção para encontrar pontos de interseção e subsequentemente os elementos discretos de dreno. Modificado de Durand e Farias (2014). . . . .	156
5.6	Configuração do ensaio de validação do elemento de dreno pelo método semi-embutido. . . . .	159

5.7	Resultado da análise numérica: a) campo de poropressão hidrostático após o primeiro estágio; b) velocidade axial durante o segundo estágio. . . . .	160
5.8	Configuração do ensaio do sistema de tubo e drenos no interior dos elementos sólidos. . . . .	161
5.9	Resultado da análise numérica: a) campo de poropressão hidrostático após o primeiro estágio; b) velocidade axial durante o segundo estágio. . . . .	162
5.10	Configuração do ensaio de adensamento radial: a) geometria da amostra utilizada no ensaio de adensamento radial; b) vista lateral apresentando as condições de contorno. . . . .	163
5.11	Vista em planta da localização das linhas drenantes para a simulação de drenos verticais e do ponto de monitoramento. . . . .	164
5.12	Resultado analítico e predição numérica do experimento de adensamento radial.	165
5.13	Campo de poropressão da análise de adensamento radial para $T = 0.02$ e $r_d = 0.10$ m. . . . .	165

# LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

## Abreviaturas

CMOD Crack Mouth Opening Displacement

HOWCO Halliburton Oil Well Cementing Company

KGD Khristianovic-Geertsma-de Klerk

LVDT Linear Variable Differential Transformer

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFPU Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade

MFEL Mecânica da Fratura Elástico Linear

MFNL Mecânica da Fratura Não Linear

PKN Perkins-Kern-Nordgren

XFEM Método dos Elementos Finitos Estendido

ZPF Zona de Processo de Fratura

## Símbolos do alfabeto grego

$\alpha$  Coeficiente de Biot

$\beta$  Coeficiente de compressibilidade do fluido

$\sigma$  Vetor de tensão

$\sigma^{tr}$  Vetor de tensão tentativa da interface

$\varepsilon$  Vetor de deformação

$\Delta\lambda$  Incremento do multiplicador plástico

$\delta_{ij}$  Delta de Kronecker

$\eta$  Coordenadas paramétrica

$\Gamma$  Superfície do domínio

$\Gamma_d$  Superfície da fratura

$\gamma_f$	Peso específico do fluido
$\kappa$	Permeabilidade intrínseca do material poroso
$\lambda$	Coefficiente de Lamé
$\mu$	Viscosidade do fluido
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\Omega$	Domínio
$\Phi$	Ângulo de atrito
$\psi$	Coefficiente que especifica um ponto no intervalo
$\rho$	Densidade
$\rho_f$	Densidade do fluido
$\rho_s$	Densidade do sólido
$\sigma_m$	Tensão média
$\sigma_s$	Tensão do ponto de inflexão do modelo bilinear de amolecimento
$\sigma_{ij}$	Termos do tensor tensão
$\sigma_{max}$	Tensão equivalente a resistência do material à tração
$\sigma_{max}^0$	Tensão inicial equivalente a resistência do material à tração
$\tau_{max}$	Tensão equivalente a resistência do material ao cisalhamento
$\tau_{max}^0$	Tensão inicial equivalente a resistência do material ao cisalhamento
$\varepsilon_v$	Deformação volumétrica
$\varepsilon_{ij}$	Termos do tensor deformação
$\xi$	Coordenadas paramétrica
$\zeta$	Fator de dimensionamento dos deslocamentos elástico
$\zeta_f$	Incremento do conteúdo fluido

### **Símbolos do alfabeto latino minúsculo**

<b>a</b>	Vetor de deslocamentos nodais
----------	-------------------------------

$\bar{\mathbf{a}}_{int}$	Vetor de deslocamentos nodais do elemento de interface
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor de tensão prescrito
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor dos deslocamentos prescritos
$\bar{k}$	Drenabilidade do elemento conector sólido-dreno
$\bar{p}$	Poropressões prescritas
$\bar{q}$	Fluxo do fluido prescrito
$\mathbf{b}$	Vetor da aceleração gravitacional
$\mathbf{b}_f$	Vetor da aceleração gravitacional referente ao fluido da fratura
$\mathbf{f}_q^{ext}$	Vetor de volume externo do dreno
$\mathbf{f}_q^{in}$	Vetor de volume interno do dreno
$\mathbf{f}_u^{ext}$	Vetor de forças externas aplicada no sólido
$\mathbf{f}_{q,int}^{ext}$	Vetor de força externa devido injeção de fluido
$\mathbf{f}_{q,s}^{ext}$	Vetor de força externa de fluxo no sólido
$\mathbf{m}$	Tensor de identidade, em notação de Voigt
$\mathbf{p}$	Vetor de poropressão nodal
$\mathbf{p}_b$	Vetor de pressão nodal da camada inferior do elemento de interface
$\mathbf{p}_f$	Vetor de pressão nodal da camada intermediária do elemento de interface
$\mathbf{p}_t$	Vetor de pressão nodal da camada superior do elemento de interface
$\mathbf{p}_{dren}$	Vetor de pressões nodais do elemento dreno
$\mathbf{p}_{int}$	Vetor de pressão nodal do elemento de interface
$\mathbf{p}_{sol}$	Vetor de poropressões nodais do elemento sólido
$\mathbf{q}$	Descarga específica
$\mathbf{q}_f$	Taxa de fluxo na fratura por unidade de comprimento
$\mathbf{r}$	Vetor normal a superfície do potencial plástico
$\mathbf{t}$	Tensão transferida através da descontinuidade

$\mathbf{t}^c$	Tensão coesiva
$\mathbf{u}$	Vetor dos deslocamentos
$\mathbf{u}_{int}$	Vetor dos deslocamentos relativo do elemento de interface
$\mathbf{v}_f$	Vetor velocidade da fase fluida
$\mathbf{v}_s$	Vetor velocidade da fase sólida
$c_v$	Coefficiente de consolidação
$g$	Aceleração da gravidade
$h$	Comprimento característico escalar dos elementos finitos
$h_f$	Altura da fratura
$k$	Permeabilidade intrínseca
$k_l$	Coefficiente de condutividade longitudinal da fratura
$k_t$	Coefficiente de permeabilidade transversal da fratura
$l$	Comprimento do dreno
$m$	Derivadas parcial de $\sigma_{max}$ em relação a $u_p$
$m_v$	Coefficiente de variação volumétrica
$n$	Porosidade
$p$	Poropressão
$p_b$	Pressão do fluido na camada inferior do elemento de interface
$p_f$	Pressão do fluido na camada intermediária do elemento de interface
$p_t$	Pressão do fluido na camada superior do elemento de interface
$p_{dren}$	Pressão no elemento dreno
$p_{rel,b}$	Pressão relativa entre o fluido da fratura e o fluido no meio poroso próximo a face inferior da fratura
$p_{rel,t}$	Pressão relativa entre o fluido da fratura e o fluido no meio poroso próximo a face superior da fratura
$p_{rel}$	Poropressão relativa entre o elemento dreno e o elemento sólido atravessado

$p_{sol}$	Poropressão do elemento sólido
$t$	Tempo
$u_c$	Deslocamento relativo plástico crítico
$u_i$	Componentes do vetor de deslocamento
$u_p$	Deslocamento plástico relativo da interface
$u_s$	Deslocamento do ponto de inflexão do modelo bilinear de amolecimento
$v_b$	Velocidade de vazamento do fluido na superfície inferior da fratura
$v_t$	Velocidade de vazamento do fluido na superfície superior da fratura
$w$	Abertura da fratura
$w_c$	Abertura crítica da fratura
$y$	Derivadas parcial da função de plasticidade em relação a $\sigma_{max}$
$\mathbf{v}$	Vetor das derivadas parciais da função de plasticidade em relação a $\sigma$

### **Símbolos do alfabeto latino maiúsculo**

$\mathbf{B}_0$	Matriz preenchida com zeros
$\mathbf{B}_f$	Matriz das primeiras derivadas das funções de forma das poropressões do elemento de interface
$\mathbf{B}_p$	Matriz das primeiras derivadas das funções de forma das poropressões
$\mathbf{B}_u$	Matriz deformação-deslocamento
$\mathbf{B}_{int}$	Matiz das funções de forma dos deslocamentos do elemento de interface
$\mathbf{B}_{pp}$	Matriz das primeiras derivadas das funções de forma das poropressões de uma camada do elemento de interface
$\mathbf{C}_{int}$	Matriz de compressibilidade do fluido do elemento de interface
$\mathbf{C}_{pp}$	Matriz de compressibilidade
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva
$\mathbf{D}_{ep}$	Matriz constitutiva elasto-plástica do elemento de interface
$\mathbf{D}_e$	Matriz constitutiva elástica do elemento de interface

$\mathbf{D}_{int}$	Matriz constituinte do elemento de interface
$\mathbf{H}_{int}$	Matriz de permeabilidade do elemento de interface dreno-sólido
$\mathbf{H}_{long}$	Matriz de permeabilidade longitudinal do elemento de interface
$\mathbf{H}_{pp}$	Matriz de permeabilidade
$\mathbf{H}_{trans}$	Matriz de permeabilidade transversal do elemento de interface
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana
$\mathbf{K}_{int}$	Matriz de rigidez do elemento de interface
$\mathbf{K}_{uu}$	Matriz de rigidez do meio poroso
$\mathbf{M}$	Matriz das funções de forma das poropressões do sólido
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de forma das poropressões do dreno
$\mathbf{N}_0$	Matriz preenchida com zeros
$\mathbf{N}_f$	Matriz das funções de forma das poropressões do elemento de interface
$\mathbf{N}_{int}$	Matriz das funções de forma dos deslocamentos do elemento de interface
$\mathbf{N}_{pp}$	Matriz das funções de forma das poropressões de uma camada do elemento de interface
$\mathbf{N}_p$	Matriz das funções de forma das poropressões
$\mathbf{N}_u$	Matriz das funções de forma dos deslocamentos
$\mathbf{Q}_{int}$	Matriz de acoplamento do elemento de interface
$\mathbf{Q}_{up}$	Matriz de acoplamento
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento de interface
$C_f$	Coefficiente de compressibilidade da fase fluida
$C_L$	Coefficiente de vazamento de Carter
$C_p$	Coefficiente de compressibilidade do meio poroso
$C_s$	Coefficiente de compressibilidade da fase sólida
$E$	Módulo de Young
$G$	Módulo de cisalhamento

$G_{\sigma}$	Taxa de energia consumida para superar a tensão coesiva
$G_F$	Energia da fratura total
$G_f$	Energia da fratura inicial
$G_{Ic}$	Taxa de energia consumida durante o fraturamento do material na criação de duas superfícies
$K$	Módulo volumétrico
$K_f$	Módulo volumétrico da fase fluida
$K_p$	Módulo volumétrico do meio poroso
$K_s$	Módulo volumétrico da fase sólida
$K_{Ic}$	Fator de intensidade crítico de tensão para o modo I
$K_{IIc}$	Fator de intensidade crítico de tensão para o modo II
$K_{IIIc}$	Fator de intensidade crítico de tensão para o modo III
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensão para o modo III
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão para o modo II
$K_I$	Fator de intensidade de tensão para o modo I
$Q$	Módulo de Biot
$Q_0$	Taxa de fluxo do fluido
$S$	Coefficiente de armazenamento
$S'$	Coefficiente de armazenamento uniaxial

# 1 - INTRODUÇÃO

O concreto é o material construtivo mais usado no mundo (Gagg, 2014), portanto a compreensão do seu comportamento é imprescindível para obtenção dos parâmetros utilizados no projeto estrutural. O comportamento desse material é afetado drasticamente pelo processo de fratura, uma vez que altera os campos de tensão e deformação. De fato, a formação e propagação das fraturas são as principais responsáveis pela degradação e colapso das estruturas de concreto. Os ensaios experimentais desempenham um importante papel na compreensão do comportamento do concreto, entretanto são considerados caros, demorados e dependem de equipamentos especiais para serem realizados. Além disso, apenas configurações limitadas podem ser testadas em experimentos, uma vez que algumas situações de carregamentos complexos podem inviabilizar a execução do ensaio (Mier, 2017). Visando superar as limitações da abordagem experimental, pesquisadores desenvolveram modelos analíticos e numéricos que permitem analisar o problema por outra perspectiva fornecendo importantes informações que de outra forma seria impossível de obter.

Os pesquisadores Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) desenvolveram, de forma independente e para diferentes aplicações, uma solução para a redistribuição de tensões ao longo de uma faixa à frente da ponta da fratura, válida para materiais elásticos perfeitamente plásticos. Posteriormente, esses conceitos básicos foram usados para modelar a fratura coesiva para materiais quase frágeis, aplicáveis ao concreto e as rochas (Hillerborg et al., 1976; Bazant e Oh, 1983). Neste modelo, presume-se que uma fratura se propaga quando a tensão na ponta da trinca atinge a resistência à tração do material. Além disso, a zona coesiva inclui uma zona de processo de fratura (FPZ) que permite a transferência de tensões através da descontinuidade. Essas tensões podem ser relacionadas à abertura da fratura por meio de curvas de amolecimento, também chamadas de relações de tensão-separação. Os modelos bilinear (Wittmann et al., 1988; Yang e Chen, 2005; Roesler et al., 2007; Park et al., 2008; Park e Paulino, 2011) e exponencial (Hordijk, 1992; Xu e Needleman, 1994) são exemplos de curvas de tensão-separação.

Os modelos teóricos sofrem das limitações inerentes das análises analíticas, a incapacidade de representar um problema evolutivo em um domínio com complexidade real. Essas limitações podem ser superadas por meio da aplicação dos métodos numéricos no estudo da fratura, uma vez que esses métodos são ferramentas que possibilitam encontrar soluções aproximadas para problemas complexos. A literatura de elementos finitos fornece uma grande variedade de modelos que geralmente podem ser classificadas como abordagens contínuas e descontínuas. Na abordagem contínua, as fissuras são representadas de maneira distribuída sobre o elemento

finito, ver por exemplo Gupta e Akbar (1984), Barros e Figueiras (2001) e Cunha et al. (2012). Modelos de danos isotrópicos e anisotrópicos também são exemplos de modelos de fissuras distribuídas (Mazars e Pijaudier-Cabot, 1996; Comi e Perego, 2001; Basaran e Nie, 2007; Pituba e Fernandes, 2011). No entanto, a abordagem contínua tem capacidade limitada de modelar descontinuidades nítidas, funcionando melhor quando as fissuras são espalhadas por todo o material, como em algumas aplicações de concreto armado. Por outro lado, na abordagem descontínua, as fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamento entre elementos finitos; ver por exemplo Ngo e Scordelis (1967), Gerstle e Xie (1992), Carol et al. (1997), Cendón et al. (2000), Pandolfi e Ortiz (2002), Song et al. (2006) e Xie (2006). Essa abordagem geralmente requer a adição de elementos de interface com espessura zero destinados a modelar as aberturas das fissuras e, dessa forma, possibilita representações das fissuras mais realistas quando comparadas com modelos contínuos, pois permite visualizar as aberturas das fissuras devido à separação progressiva dos elementos sólidos. O método dos elementos finitos estendidos (XFEM) (Wells e Sluys, 2001; Fries e Belytschko, 2006; Simone, 2007; Belytschko et al., 2009; Gupta et al., 2012) é outra técnica que pode ser classificado como uma abordagem discreta, pois rastreia os caminhos das fissuras durante a análise usando funções de forma do elemento finito como partições da unidade (Wells e Sluys, 2001).

A compreensão do processo de fraturamento dos materiais possui importância não apenas na definição dos parâmetros de projeto estrutural, mas também em aplicações industriais como no processo de fraturamento hidráulico que são descontinuidades geradas e propagadas devido à influência da pressão do fluido agindo ao longo da superfície da fratura. A aplicação mais conhecida do fraturamento hidráulico é a estimulação de poços de petróleo e gás visando aumentar a produção de hidrocarbonetos (Economides e Nolte, 2000). Outras aplicações industriais incluem disposição de resíduos (Abou-Sayed et al., 1989), pré-condicionamento na mineração de rochas (Jeffrey e Mills, 2000) e na produção de energia geotérmica (Nemat-Nasser et al., 1982). Neste trabalho, maior destaque é dado ao processo de fraturamento hidráulico na produção de hidrocarbonetos, em virtude do impacto e importância econômica. A estimulação de reservatórios de hidrocarbonetos de baixa permeabilidade mostra-se extremamente ineficiente devido ao alcance limitado do poço a reserva de hidrocarbonetos. Neste contexto, a indústria do petróleo e gás desenvolveu técnicas de estimulação das formações rochosas como fraturamento hidráulico para aumentar a permeabilidade dos reservatórios não convencionais, e assim obter uma maior recuperação de hidrocarbonetos dos poços de produção. De fato, o fraturamento hidráulico em conjunto com a perfuração de poços horizontais revelaram-se tecnologias disruptivas para indústria do petróleo, uma vez que permitiram desenvolver vastos recursos não convencionais que de outra forma estariam inacessíveis em formações de baixa permeabilidade (Agarwal et al., 1979).

A necessidade de otimização do processo fraturamento hidráulico, visando gerar fraturas com comprimento e alturas adequadas para permitir o fluxo dos hidrocarbonetos, estimulou o

desenvolvimento da pesquisa nessa área. Nesse contexto, os pesquisadores desenvolveram soluções analíticas para o problema de fraturamento hidráulico como o modelo KGD e de fratura circular desenvolvidos pelos pesquisadores Khristianovic e Zheltov (1955) e Geertsma e Klerk (1969) e o modelo PKN desenvolvido por Perkins e Kern (1961) e Nordgren (1972). Por meio desses modelos, conhecendo-se as propriedades da rocha e do fluido, pode-se obter uma previsão precisa da pressão do fluido na fratura, assim como da abertura e do comprimento da fratura induzida hidráulicamente para uma taxa de bombeamento aplicado durante um determinado tempo. Esses modelos forneceram importantes informações sobre o processo de fraturamento e, por isso, tornaram-se clássicos.

Por outro lado, diferentes abordagens numéricas foram propostas para simular o fraturamento hidráulico no meio poroso. Wang et al. (2009) utilizaram dano para modelar em 2D o fraturamento hidráulico em geomateriais heterogêneos. Secchi e coautores (Simoni e Secchi, 2003; Schrefler et al., 2006; Secchi et al., 2007; Secchi e Schrefler, 2012; Secchi e Schrefler, 2014) modelaram a fratura hidráulica em meios porosos, tanto em 2D quanto em 3D, usando o MEF, o modelo de fratura coesiva e a remalhagem adaptativa. Carrier e Granet (2012) e Nguyen et al. (2017) modelaram o fraturamento hidráulico em 2D utilizaram elementos de interface coesivos de fluxo de espessura zero entre os elementos sólidos, visando prover o domínio com possíveis caminhos da fratura por onde também é permitido o fluxo do fluido. Gao e Ghassemi (2020) também utilizaram elementos de interface coesivos de fluxo de espessura zero, mas para realizar análises de fratura hidráulica em 3D. Shen et al. (2013) usaram o método dos elementos de contorno para analisar problemas 2D de fraturamento hidráulico com acoplamento termo-hidro-mecânico. Gupta e Duarte (2014) apresentaram simulações de propagação de fraturas hidráulicas não planares em 3D usando um MEF generalizado adaptativo. Khoei (2015) empregou o método de elementos finitos estendidos (XFEM) para a simulação de fratura hidráulica em meios porosos multifásicos usando acoplamento termo-hidro-mecânico. Paul et al. (2018), usando o XFEM, desenvolveram modelagem hidromecânica acoplada em 3D com modelo de zona coesiva, com o objetivo de simular a propagação de fraturas hidráulicas não planares e a interferência de múltiplas fraturas hidráulicas.

Este trabalho busca desenvolver uma modelagem tridimensional de fratura em materiais quase frágeis e posteriormente aplicar esse modelo na simulação da fratura hidráulica usando elementos finitos. Na literatura, como já citado anteriormente, existe uma grande variedade de modelos para simular fratura em materiais quase frágeis, entretanto a maior parte desses modelos faz parte de abordagens bidimensionais (Yang e Chen, 2005; Song et al., 2006; Roesler et al., 2007; Park et al., 2008; Lens et al., 2009; Kumar e Barai, 2011; García-Álvarez et al., 2012; Zivaljic et al., 2014; Khoei, 2015). Isso limita a aplicação desses modelos a simulação de problemas com deformação plana. Já os modelos tridimensionais de fratura, obtidos da literatura, tendem a sofrer com dois problemas graves, a incapacidade de simular

adequadamente os ensaios tridimensionais, ou seja, que não podem ser simplificado por análises bidimensionais(Gasser e Holzapfel, 2006; Khoei et al., 2012; Xu et al., 2016) e a instabilidade numérica que faz com que a análise seja interrompida antes que todo o ensaio experimental tenha sido simulado (Jefferson et al., 2004; Areias e Belytschko, 2005; Ferté et al., 2016). O modelo de fratura proposto busca solucionar esses dois problemas.

Neste trabalho, apresenta-se a metodologia adotada para modelagem tridimensional das fraturas em materiais quase frágeis. Para tanto, considera-se três etapas: a formulação, implementação e aplicação das abordagens propostas. A abordagem discreta é adotada para simular a fratura em materiais quase frágeis, para isso é necessário a inserção de elemento de interface de camada dupla entre os elementos sólidos da malha de elementos finitos. O modelo constitutivo dos elementos de interface desenvolvido nesse trabalho utiliza conceitos da mecânica da fratura como a zona de processo de fratura. Nessa região, a abertura da fratura é pequena o suficiente para permitir a transferência das tensões coesivas (tensões normais e de cisalhamento) entre as faces da fratura. Além disso, o modelo faz uso da teoria da plasticidade cuja superfície de plastificação é baseada na lei de Coulomb e possui uma regra de fluxo não associada. Essas características permitem que o modelo simule a formação e propagação de fissuras simples e múltiplas em modo I e modo misto (I e II). Duas curvas não lineares de amolecimento são investigada para modelar o comportamento do concreto a fissuração: uma curva bilinear e uma curva exponencial, proposta por Hordijk (1992). O modelo foi verificado em ensaios de extensão e cisalhamento e posteriormente aplicado na simulação de diversos experimentos clássicos de amostras concreto. Os resultados numéricos usando o modelo proposto mostram uma concordância muito boa quando comparados com os resultados experimentais. Nenhum problema de convergência foi apresentado durante a execução das simulações. Todos os aspectos do modelo são cuidadosamente explorados de forma a permitir a reprodução das técnicas de solução e o desenvolvimento de ferramentas de elementos finitos. O trabalho também apresenta um procedimento detalhado para introduzir elementos de interface em uma malha convencional. Em relação aos modelos existentes na literatura, o modelo proposto possui uma série de vantagens como: a simplicidade do modelo uma vez que necessita de poucos parâmetros para realizar as análises; a capacidade de simular uma grande variedade de problemas com diferentes condições de contorno; a capacidade de simular problemas complexos que não podem ser simplificados por uma modelagem bidimensional como a torção; a capacidade de ser reduzido para uma versão do modelo bidimensional; a estabilidade numérica em problemas com elevado grau de não linearidade, o que proporciona a obtenção de toda a curva de amolecimento do material.

Visando simular a fratura hidráulica é adotada, novamente, a abordagem discreta que requer a adição do elemento de interface de camada tripla a uma malha convencional com o objetivo de dotar o domínio de possíveis caminhos da fratura por onde o fluxo do fluido também seja permitido. Nesse trabalho, as formulações fracas são derivadas para as equações governantes

do meio poroso saturado e fraturado e, a seguir, são associadas à discretização de elementos finitos. Como o meio poroso saturado é um sistema de duas fases em que os poros do esqueleto sólido são completamente preenchidos com o fluido, as equações são desenvolvidas em termos de deslocamentos dos sólidos  $u$  e poropressão  $p$ , conhecida como formulação  $u - p$ . O modelo de fratura para materiais quase frágeis, desenvolvido nesse trabalho, é aplicado para simular a fratura hidráulica. Para tanto, aplicou-se o princípio da tensão efetiva à equação do equilíbrio mecânico na fratura, visando obter o acoplamento hidromecânico dessa equação. A abordagem foi verificada por meio de um ensaio reduzido de fratura hidráulica e, posteriormente, a abordagem foi validada por meio da comparação dos resultados numéricos com seis problemas clássicos cujas respostas analíticas são conhecidas. Por fim realizou-se uma simulação do ensaio experimental da fratura hidráulica no concreto e um estudo de caso. Os resultados numéricos e analíticos estão em ótima concordância, demonstrando, dessa forma, que a formulação e implementação da abordagem da fratura hidráulica está correta. Além disso, o resultado numérico e experimental da fratura hidráulica no concreto possui boa concordância, isso demonstra a capacidade e versatilidade do modelo de fratura hidráulica. Todos os aspectos da abordagem são cuidadosamente explorados, visando permitir a reprodução dos resultados obtidos. O trabalho também apresenta um procedimento detalhado para introduzir elementos de interface de camada tripla em uma malha convencional. Em relação às abordagens existentes na literatura, a abordagem aqui apresentada possui as seguintes vantagens: considera-se as componentes da compressibilidade do fluido e do peso do fluido da fratura na formulação de elementos finitos, enquanto a maioria das abordagens adotam simplificações que tendem a desprezar esses termos; O modelo de fratura utilizado na abordagem da fratura hidráulica é robusto e possui a capacidade de simular uma grande variedade de problemas.

Utilizou-se a formulação desenvolvida e implementada do meio poroso saturado para estudar a aplicação de drenos nesse meio. A abordagem semi-embutido que foi proposta por Durand e Farias (2014) para simular elementos de reforço e é aqui adaptada para simular elementos de drenos. No desenvolvimento da formulação é possível verificar que a abordagem semi-embutido utiliza a formulação do método discreto em conjunto com o elemento de interface. Dessa forma, essa abordagem permite maior flexibilidade na disposição dos drenos na malha de elementos finitos, uma vez que os nós dos elementos de dreno são distintos dos nós dos elementos sólidos. Além disso, essa abordagem possibilita a aplicação de condições de contorno, como poropressão ou volume imposto, diretamente nos nós do elemento de dreno. Após o desenvolvimento e implementação das equações do dreno, a abordagem é verificada por meio de duas análises hidráulicas e, em seguida, é validada através do ensaio hidromecânico de adensamento radial de uma camada submetida a um carregamento distribuído. Esses ensaios demonstram que a abordagem semi-embutido possui a capacidade de simular de forma apropriada os drenos. Os detalhes sobre a discretização dos elementos de drenos, a formulação do dreno e do elemento de interface são apresentados visando permitir a

reprodução dos resultados obtidos.

Esse trabalho foi desenvolvido utilizando o programa de elementos finitos Amaru escrito na linguagem de programação Julia (uma linguagem dinâmica de alto nível, apropriada para computação numérica e científica). O programa Amaru permite realizar análises mecânica e hidromecânica lineares e não lineares em duas ou três dimensões utilizando elementos isoparamétricos. A contribuição deste trabalho foi o desenvolvimento e implementação de um novo modelo de fratura para materiais quase frágeis e a aplicação deste para simulação do fraturamento hidráulico. Além disso, são apresentados um conjunto de procedimentos para resolução das equações de elementos finitos que visam facilitar a convergência de problemas com elevada não linearidade. Outra contribuição deste trabalho é a adaptação e implementação da abordagem semi-embutido proposta por Durand e Farias (2014) visando simular drenos. Todos as implementações das abordagens apresentadas nesse trabalho podem ser acessada por meio do site <https://github.com/NumSoftware/Amaru>.

## **1.1 - OBJETIVOS**

O objetivo desse trabalho é desenvolver e implantar a formulação de elementos finitos para modelagem tridimensional de fraturas em materiais quase frágeis, como o concreto, e, em seguida, aplicar o modelo em problemas de fratura hidráulica.

Para atingir estes objetivos as etapas abaixo foram estabelecidas:

1. Realizar uma ampla revisão bibliográfica fornecendo os subsídios necessários para o entendimento do problema estudado, assim como para a compreensão das abordagens utilizadas nas análises numéricas.
2. Desenvolver e implementar o modelo constitutivo tridimensional em elementos finitos, visando simular fraturas coesivas em materiais quase frágeis.
3. Desenvolver e implementar uma abordagem tridimensional em elementos finitos para simulação da fratura hidráulica no meio poroso saturado, aplicando o modelo de fratura coesiva proposto. Nesta etapa é necessário realizar a implementação para análises acopladas de equilíbrio e fluxo.
4. Adaptar e implementar a abordagem semi-embutido em elementos finitos, desenvolvido por Durand e Farias (2014), para simular drenos contidos no meio poroso saturado, como uma forma de verificação das implementações utilizadas nas análises acopladas de equilíbrio e fluxo.

5. Validar as implementações, assim como as abordagens propostas, por meio das comparações com soluções analíticas e ensaios experimentais obtidos na literatura.

## **1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Os tópicos nesse trabalho são convenientemente apresentados em uma sequência que busca a melhor compreensão sobre o assunto abordado. Dessa forma, é inicialmente apresentado a revisão bibliográfica com o objetivo de fornecer os subsídios necessários para o entendimento do problema estudado. Posteriormente, são apresentados o desenvolvimento matemático, a validação e aplicação das abordagens utilizadas. Visando prover uma visão geral do trabalho é apresentado um breve resumo de cada capítulo.

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica sobre o processo de fraturamento hidráulico e os subsídios necessários para o entendimento dos modelos numéricos empregados neste trabalho. Inicialmente, abordam-se os detalhes do processo de fraturamento hidráulico, visando prover o melhor entendimento do problema estudado. Em seguida, aborda-se a mecânica da fratura, matéria fundamental para a compreensão do modelo coesivo, utilizado nesse trabalho para simular o comportamento mecânico da fratura. Posteriormente, apresentam-se as equações governantes da teoria da poroelasticidades linear que regem o comportamento do meio poroso saturado. Por fim, aborda-se detalhes sobre o fluxo do fluido na fratura e sobre os modelos analíticos do fraturamento hidráulico.

O Capítulo 3 apresenta a abordagem utilizada para modelagem da fratura em materiais quase frágeis. Inicialmente, descreve-se o procedimento utilizado para a inserção dos elementos de interface de camada dupla em uma malha convencional de elementos finitos. Em seguida, aborda-se a formulação necessária para implementar o elemento de interface isoparamétrico. Posteriormente, apresenta-se a modelagem constitutiva do elemento de interface e o procedimento de solução das equações dos elementos finitos. Apresenta-se, ainda, as simulações de ensaios experimentais extraídos da literatura e, por fim, discute-se sobre a abordagem proposta e os resultados das análises numéricas.

O Capítulo 4 apresenta a abordagem utilizada para modelagem da fratura hidráulica. Inicialmente, descreve-se o procedimento utilizado para a inserção dos elementos de interface de camada tripla em uma malha convencional de elementos finitos e, em seguida, aborda-se sobre a topologia desse elemento. Posteriormente, apresenta-se as equações governantes do fraturamento hidráulico no meio poroso e o seu desenvolvimento em elementos finitos. Aborda-se, ainda, os ensaios numéricos visando validar a implementação e a abordagem proposta. Por fim, discute-se sobre a abordagem proposta e os resultados das análises numéricas.

O Capítulo 5 apresenta a abordagem utilizada para simular os drenos no meio poroso. Inicialmente, aborda-se a formulação do dreno pelo método discreto. Em seguida, é apresentado o método semi-embutido. Para tanto, são abordado a discretização do elemento de dreno e a formulação do elemento de interface. Posteriormente, apresentam-se os ensaios numéricos, visando validar a implementação e a abordagem proposta. Por fim, apresenta-se uma breve discussão sobre a abordagem proposta e os resultados das análises numéricas.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas neste trabalho. As conclusões são divididas em três grupos. O primeiro com relação a preparação da malha de elementos finitos, enquanto o segundo com relação às análises mecânicas e a terceira com relação às análises hidromecânicas. Por fim, são apresentadas recomendações para pesquisas futuras.

## **2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo realiza-se uma breve revisão bibliográfica sobre o fraturamento hidráulico. Abordando-se o desenvolvimento histórico, o processo de fraturamento hidráulico, os tipos de fluido de fratura e materiais de suporte e os principais impactos ambientais. Posteriormente, apresentam-se conceitos importantes da mecânica da fratura necessários para a compreensão do processo da fraturamento nos materiais. Para tanto, abordam-se os modos de ruptura dos materiais, conceitos da mecânica da fratura elástico linear (MFEL), os tipos de comportamento dos materiais à fratura, a limitação da MFEL e a mecânica da fratura não linear (MFNL). Após a discussão sobre a mecânica da fratura, apresenta-se, conceitos da teoria da poroelasticidade importantes para a compreensão da interação entre o fluxo do fluido e a deformação do meio poroso. Inicia-se a discussão pelo desenvolvimento histórico da teoria da poroelasticidade e, em seguida, apresenta-se as equações básicas da elasticidade, o princípio da tensão efetiva, a lei de Darcy e as equações da conservação da massa no meio poroso e na fratura. Aborda-se ainda sobre o incremento de conteúdo fluido e coeficiente de armazenamento. Em seguida, apresenta-se considerações sobre o fluxo do fluido na fratura, como o atraso do fluido, o efeito da rugosidade no fluxo e a perda de fluido por filtração. Por fim, são apresentados os principais modelos analíticos do fraturamento hidráulico.

### **2.1 - PERFURAÇÃO DE POÇOS E ESTIMULAÇÃO POR FRATURAMENTO HIDRÁULICO**

A extração tradicional de óleo e gás envolve a perfuração vertical de rochas impermeáveis que aprisionam concentradas reservas no subsolo de petróleo e gás natural. Entretanto, muito dos recursos de óleo e gás não estão localizados em reservas convencionais e acessíveis. Em vez disso, grande parte desses recursos encontra-se preso nos poros e nas fissuras dentro de formações sedimentares. Esses reservatórios podem variar em espessura, entretanto tendem a possuir camadas relativamente finas (embora profundas sob o solo), mas que cobrem extensas áreas horizontais. Assim sendo, poços perfurados verticalmente possuem acesso a uma pequena área do reservatório e uma parte mínima do recurso devido à natureza impermeável da formação. No entanto, quando a operação de perfuração deriva de um plano vertical para um plano horizontal, muito mais do recurso da reserva torna-se acessível (Ely, 1985). Essa técnica possibilitou a diminuição do número de poços perfurados, reduzindo assim o custo econômico e ambiental.

No final da década de 1940, as empresas de perfuração começaram a induzir pressão hidráulica em poços visando criar um sistema de fratura com elevada condutividade que permitisse o

fluxo de gás e/ou óleo através da formação. O processo de fraturamento hidráulico possibilitou a produção adicional pelo efetivo aumento do contato do poço com a formação. A utilização da fratura hidráulica com a perfuração direcional mostrou-se uma tecnologia disruptiva, pois essencialmente redefine o acesso as reservas de hidrocarbonetos (Uddameri et al., 2016). Apesar de serem tecnologias antigas e estabelecidas, a combinação das duas iniciou-se apenas em 1974 com elevada aceitação em formações convencionais na década de 1990, o que deu origem a uma nova era de produção de gás e óleo.

### **2.1.1 - Desenvolvimento histórico do faturamento hidráulico**

Conforme Montgomery e Smith (2010), desde que Stanolind introduziu o fraturamento hidráulico em 1949, mais de 2.5 milhões de faturamentos foram realizados em todo o mundo. Atualmente, cerca de 60% de todos os poços perfurados são fraturados. A combinação das tecnologias de perfuração de poços horizontais e de fraturamento hidráulico, possibilitaram a viabilidade econômica da exploração de reservas em formações de baixa permeabilidade. Em virtude disso, a utilização dessas tecnologias não só aumentou a taxa de produção, como também foi creditada pela adição de 9 bilhões de barris de petróleo e 20 trilhões de metros cúbicos de gás para reservas americanas que de outra forma não teria sido econômico para se desenvolver.

O fraturamento não é uma tecnologia nova. O uso dessa tecnologia pode ser rastreado até a década de 1860, quando a nitroglicerina líquida (e mais tarde, solidificada) foi usada para estimular poços na Pensilvânia, Nova York, Kentucky e West Virginia. O uso de nitroglicerina é extremamente perigoso e foi frequentemente utilizado (ilegalmente) para a estimulação de poço por meio da ruptura de uma formação para aumentar o fluxo inicial e a recuperação final do óleo. Este mesmo princípio logo foi aplicado com igual eficácia para poços de água e gás. De fato, a ruptura de uma formação é uma forma mais completa de fraturamento que resulta na destruição da rocha em comparação com a fraturamento hidráulico que cria canais de fratura dentro da rocha (Speight, 2016).

Apenas na década de 1930, a ideia de injetar um fluido não explosivo no solo para estimular um poço começou a ser testada. Operações injetavam fluido ácido sob elevada pressão visando o fraturamento da rocha. Ao final das operações, quando a pressão do fluido era reduzida, as fraturas permaneciam abertas devido a corrosão gerada pelo ácido. Isso permitiu a criação de canais de fluxo da rocha para o poço, aumentando assim a produtividade. Esse fenômeno foi confirmado no campo, não apenas com tratamentos ácidos, mas também com tratamento de injeção de água e nas operações de cimentação sob pressão.

Entretanto, a ruptura da formação durante a acidificação, injeção de água e operações de

cimentação sob pressão tornou-se melhor entendida apenas depois do estudo aprofundado realizado por Floyd Farris da *Stanolind Oil and Gas Corporation*. Este estudo estabeleceu uma relação entre o desempenho do poço observado e as pressões de tratamento. Farris concebeu a ideia de fraturar hidráulicamente uma formação para aumentar a produção dos poços de petróleo e gás.

O primeiro tratamento experimental utilizando o fraturamento hidráulico, em um poço para estimulação, foi realizado no campo de gás de Hugoton no Condado de Grant, Kansas, em 1947 por *Stanolind*. Nesse tratamento, injetou-se um total de 3.78 metros cúbicos da mistura de ácido naftênicos com óleo de palma, seguido de um gel, para estimular a produção de gás em uma formação de calcário a 731 metros de profundidade. Entretanto a estimulação não alterou de forma apreciável a produção. Em 1948, o processo de fraturamento hidráulico foi introduzido mais amplamente na indústria em um artigo escrito por J. B. Clark de *Stanolind* (Montgomery e Smith, 2010).

Uma patente foi emitida com uma licença exclusiva concedida à *Halliburton Oil Well Cementing Company* (HOWCO) em 1949 para um novo processo de fratura hidráulica. Neste mesmo ano, a HOWCO realizou os dois primeiros tratamentos comerciais de fraturamento no Condado de Stephens, Oklahoma e no Condado de Archer, Texas utilizando uma mistura de petróleo bruto, gasolina e aproximadamente 55 quilogramas de areia. No primeiro ano, foram tratados 332 poços com aumento médio de produção de 75%. Durante a década de 1950 houve um aumento significativo da utilização da fratura hidráulica pela indústria do petróleo, havendo períodos dessa década que em média 3000 poços por mês eram tratados utilizando essa técnica.

Nas últimas seis décadas, desde os primeiros tratamentos comerciais, um avanço significativo foi alcançado no aprimoramento da técnica de fraturamento hidráulico. A melhor compreensão do processo de fratura hidráulica permitiu o desenvolvimento de fluidos mais adequados a cada tipo de formação e o aumento da qualidade e da variedade dos materiais de suporte. Além disso, houve a evolução nos equipamentos de bombeamento e monitoramento que foram melhorados e computadorizados. Esses avanços permitiram que as técnicas de design e avaliação de fraturas crescessem em sofisticação, o que se refletiu no aumento da produção de óleo e gás.

### **2.1.2 - Processo de fraturamento hidráulico**

Uma vez identificado o reservatório de hidrocarbonetos, um poço é perfurado, como pode ser visto na etapa 1 da Figura 2.1. A profundidade da perfuração de poços de extração de petróleo e gás, normalmente, ultrapassa a profundidade das camadas que contém aquíferos. As reservas de gás e petróleo estão, tipicamente, a uma profundidade de 1600 metros ou mais da superfície. Enquanto as camadas contendo os aquíferos de água doce encontram-se, geralmente, a uma

profundidade de 300 metros da superfície. Como uma precaução ambiental, a porção superior do poço é perfurada com um sistema de lama à base de água que protege os aquíferos de água doce, ao mesmo tempo arrefece a broca de perfuração.

Após a perfuração do poço ultrapassar a camada do aquífero, uma tubulação de aço é inserida no poço (etapa 2 da Figura 2.1) e em seguida é bombeada argamassa dentro do revestimento metálico e para fora através do orifício inferior da tubulação, com o objetivo de cimentar a região entre a parede do poço e a tubulação de aço. Essa argamassa cria uma barreira entre o poço e o aquífero. Posteriormente, a perfuração do poço continua abaixo do revestimento metálico até o ponto inflexão no qual a inclinação da direção da perfuração do poço é alterada de forma gradativa. Isto permite a transição da perfuração vertical para perfuração horizontal, visando aumentar a área de contato do poço com a formação que contém as reservas de hidrocarbonetos. Essa perfuração horizontal pode continuar por 1500 até 3000 metros.

Depois de finalizada a perfuração do poço, insere-se mais uma tubulação de aço. Esse revestimento metálico também é cimentado no lugar, criando uma barreira adicional de proteção em todo o comprimento do poço, visando proteger tanto o meio ambiente quanto a estrutura do poço. Uma vez que a perfuração é concluída e o revestimento é cimentado no lugar, a plataforma de perfuração é liberada e inicia-se a preparação para a próxima etapa, acabamento. A etapa de acabamento começa com a instalação de uma válvula na superfície e, em seguida, utiliza-se uma mistura de água e gel para limpar o poço visando prepará-lo para a utilização da arma de perfuração.

A arma de perfuração é então inserida na seção horizontal da caixa através de tubulação de revestimento e é disparada, como pode ser visto na etapa 3 da Figura 2.1. O disparo perfura a tubulação metálica, a região cimentada e a rocha a uma profundidade predeterminada de, aproximadamente, 76 centímetros de comprimento e 0.84 centímetros de diâmetro. A arma de perfuração é removida em preparação a próxima etapa, fratura hidráulica. Nessa etapa, uma frota de caminhões bombas capazes de atingir até 40 mil cavalos de potência é utilizada para enviar por meio do poço uma mistura de fluido de fratura e material de suporte até região perfurada pela arma (etapa 4 da Figura 2.1).

Este processo fratura a rocha e preenche as fraturas com material de suporte transportada pelo fluido para evitar que sejam fechadas quando a pressão é aliviada. Normalmente o comprimento das fraturas variam entre 61 e 122 metros. Isso proporciona ao óleo e/ou gás que anteriormente estavam presos na rocha, um caminho de fluxo condutor até o poço. Após o tratamento de fratura hidráulica, o líquido utilizado nesse processo é bombeado para fora do poço. Em seguida, uma arma de perfuração com um plugue é posicionada na parte horizontal do poço, porém agora em uma região anterior aquela perfurada. O plugue é enviado para isolar o estágio um (já perfurado e fraturado) do estágio dois, no qual a arma de perfuração é posicionada para

realizar o disparo. O tratamento de fratura hidráulica do estágio dois é então bombeado para tratar o segundo conjunto de perfurações. Este processo é repetido ao longo de toda a seção horizontal do poço. Uma vez que os estágios de estimulação da rocha estão concluídos, os plugues que isolavam os estágios são removidos permitindo o fluxo de óleo e/ou gás pelo poço, como pode-se observar na etapa 5 da Figura 2.1. Finalmente, é instalado, na parte superficial do poço, um equipamento conhecido como “arvore de natal” (*Christmas tree*) responsável pela extração dos hidrocarbonetos.

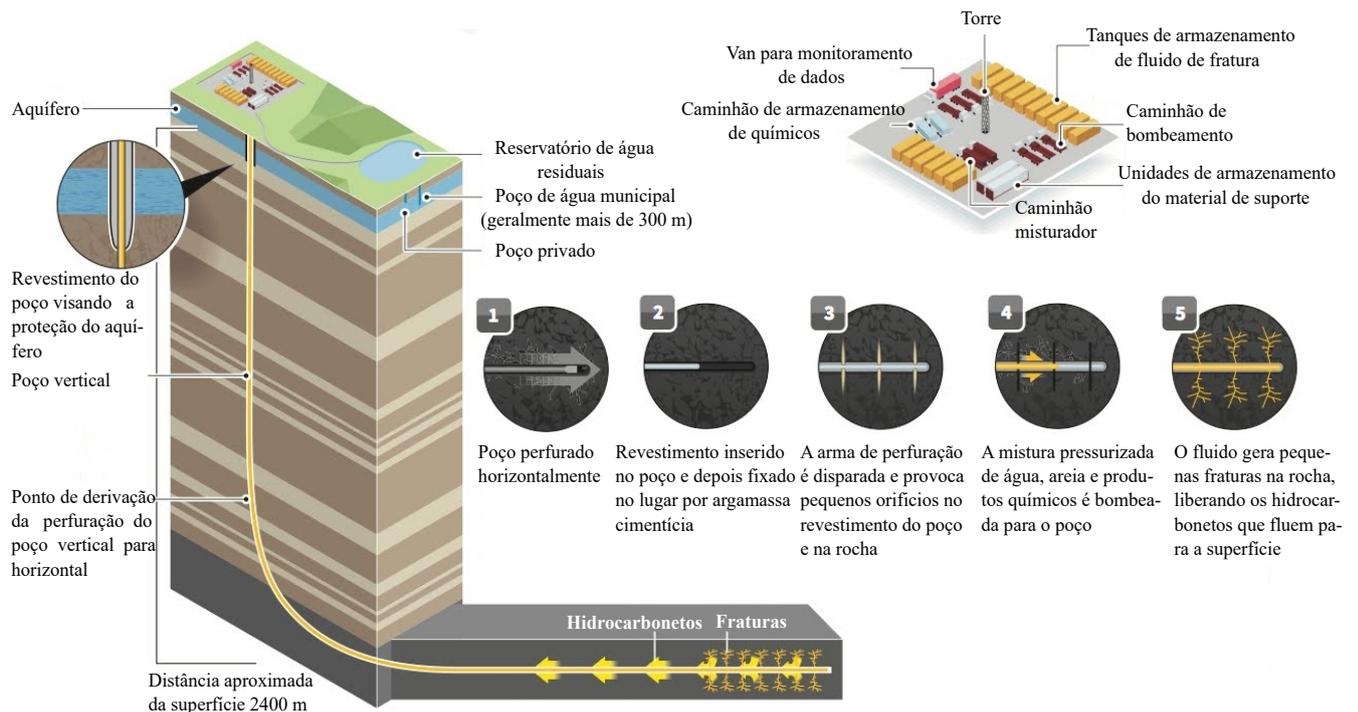


Figura 2.1 – Processo de fraturamento hidráulico. Adaptado de National Geographic (2013).

### 2.1.3 - Fluido de fratura

O processo de fraturamento hidráulico é realizado utilizando duas classes de materiais: o fluido de fratura e o material de suporte. O fluido de fratura refere-se ao fluido base e aos aditivos. Os aditivos são uma ampla gama de produtos químicos utilizados para alterar as propriedades gerais do fluido base visando torná-lo adequado para ser utilizado como fluido de fratura (Speight, 2016). Por outro lado, o material de suporte tem a função de manter aberto o caminho de fluxo condutor até o poço evitando que as fraturas sejam fechadas quando a pressão do fluido é aliviada.

A eficácia da operação de fraturamento hidráulico é influenciada por muitas variáveis, mas apenas algumas são facilmente controladas: as propriedades do fluido de fratura, a taxa de

injeção e a qualidade dos agentes de suporte (Pye e Smith, 1973). Por isso, o projeto do fluido de fratura é uma parte essencial do tratamento de estimulação por fraturamento hidráulico. As propriedades desejáveis para os fluidos de fratura incluem baixa taxa de vazamento, capacidade de transporte do agente de suporte até as fraturas e baixa perda por fricção de bombeamento. A baixa taxa de vazamento permite que o fluido inicie a fratura na rocha e influencie sua extensão. Enquanto a capacidade de transporte do agente de suporte é influenciada pela densidade, viscosidade e velocidade do fluido, sendo a viscosidade o parâmetro mais crítico para o transporte do material de suporte.

Os fluidos de fratura podem ser classificados em seis divisões principais conforme suas bases fluidas: fluidos à base de água, espuma, óleo, ácido, álcool e emulsão (Smith e Montgomery, 2015). Durante décadas, utilizaram-se preferencialmente fluidos à base de óleo, uma vez que se acreditava que o uso de fluidos à base de água em formações sensíveis à água, como em reservatórios de óleo, obstruiria o fluxo. No entanto, o sucesso do fluido à base de água levou ao seu eventual uso comum, com a maioria dos poços atualmente sendo fraturados utilizando água com fluido base. De fato, os fluidos à base de água possuem vantagens consideráveis em relação a outras bases, incluindo: não ser inflamável, baixa viscosidade (o que facilita o bombeamento), geralmente possui elevada disponibilidade e baixo custo. No entanto, existem razões para considerar fluidos que contêm pouca ou nenhuma água como sensibilidade da formação à água (que pode prejudicar a produção de hidrocarbonetos), baixa capacidade de transporte do material de suporte e baixa disponibilidade em algumas regiões.

Os fluidos bases não possuem todas as características necessárias para desempenhar, de forma adequada, as funções do fluido de fratura. Em virtude disso, foram desenvolvidas uma ampla variedade de produtos químicos (aditivos), visando adequar as propriedades dos fluidos bases as necessidades do processo de fratura hidráulica. Entre os principais tipos de aditivos pode-se citar os aditivos ácidos que possuem a função de desgastar a rocha e assim criar canais para facilitar a extração dos hidrocarbonetos (empregados principalmente em reservatórios de carbonato). Além dos ácidos, outros aditivos incluem biocidas que previnem o crescimento de microrganismos e reduzem a incrustação biológica nas fraturas. Enquanto o aditivo inibidor de corrosão elimina o oxigênio visando prevenir a corrosão dos tubos de metálico do poço. Pode-se citar ainda o aditivo redutor de fricção que permite que um fluido de fratura e o material de suporte sejam bombeados para a zona alvo a uma taxa maior e com a pressão reduzida. Por fim, os aditivos géis são usados em fluidos de fratura para aumentar a viscosidade do fluido visando elevar a capacidade de transporte do material de suporte até a fratura.

O fluido de fratura é projetado para atender às necessidades específicas de cada local, levando-se em consideração as características da formação geológica do reservatório, assim como a disponibilidade dos materiais que compõe o fluido de fratura. Uma vez que os volumes empregados no processo de fraturamento hidráulico são da ordem de 20 mil metros cúbicos.

Isso implica que mesmo os fluidos de fratura contendo em volume, aproximadamente, 98 a 99.5 % de fluido base e 2 a 0,5% de aditivos químicos (Speight, 2016), uma grande quantidade de aditivos é utilizada, o que pode representar um risco ambiental.

#### 2.1.4 - Material de suporte

O objetivo principal do tratamento de fraturamento hidráulico é garantir a permeabilidade da formação para que o poço seja capaz de alcançar sua máxima produtividade ao longo da sua vida econômica (Smith e Montgomery, 2015). Durante o bombeamento, a fratura é mantida aberta pela pressão do fluido. Entretanto, quando o bombeamento é interrompido a pressão reduz devido à perda de fluido e como consequência a fratura tende a fechar sobre si mesma e perder a maior parte da permeabilidade que foi criada durante o processo de fraturamento. Para evitar que isso ocorra, o material de suporte (*proppant*) é incluído no fluido de fraturamento o que permite que fratura permaneça aberta mesmo com a redução da pressão do fluido, uma vez que a pressão de fechamento da fratura é suportada pelo material de suporte (Figura 2.2).



O material de suporte garante que a fratura permaneça aberta

Figura 2.2 – Material de suporte resistindo a pressão de fechamento da fratura. Adaptado de Society of Petroleum Engineers (2017).

Embora a seleção do suporte seja um dos aspectos mais importantes no projeto do tratamento é frequentemente negligenciado. Em muitos casos, pode-se alcançar melhorias significativas na condutividade da fratura (portanto, na produtividade) simplesmente passando pelo processo de seleção do suporte apropriado. O material de suporte vem em muitas variedades com grandes variações nas propriedades e custos do material, mas o objetivo é sempre o mesmo, isto é, proporcionar um caminho condutor do reservatório para o poço. Os três principais tipos de materiais de suporte são areia de sílica, suporte com revestimento de resina e materiais cerâmicos (Speight, 2016). Esse suportes são apresentados na Figura 2.3.

Existe uma enorme variedade de tipos de areias, cada uma com sua própria composição e

propriedades únicas. Entretanto, a areia utilizada como material de suporte é a areia de sílica que possui elevada pureza em quartzo e a sua qualidade depende principalmente do ambiente de deposição original. As principais características que a indústria de petróleo busca na areia de sílica é que seja de preferencia esférica e possua elevada resistência, visando suportar as pressões de fechamento da fratura. Além disso, a pureza química da areia a torna não reativa com os fluidos utilizados para transportá-la, resultando na entrega de areia inalterada aos pontos de fratura.

Já o suporte com revestimento de resina é, tipicamente, areia de sílica seca que foi revestida com resina líquida num sistema de mistura na presença de um catalisador e posteriormente a areia revestida é passada através de uma câmara de aquecimento para cura completa. O uso de resina líquida possibilita um revestimento uniforme sobre os grãos de areia. As duas principais funções do revestimento de resina são distribuir a pressão de forma mais uniforme o que melhora a resistência ao esmagamento das partículas de areia de sílica e manter as peças juntas quando o grão de areia quebrar devido à elevada tensão de fechamento da fratura. Isso evita que as peças quebradas retornem para a superfície durante a operação de produção.

Os suportes de materiais cerâmicos são, tipicamente, produzidos com bauxita ou argila de caulino e geralmente possuem formato esférico, elevada resistência e baixa reatividade química, o que proporciona maior desempenho se comparado com outro tipo de suporte (Speight, 2016). Por isso, os poços fraturados com o suporte cerâmico exibem, consistentemente, uma produção melhorada de óleo e gás.



Figura 2.3 – Materiais de suporte e suas características. Adaptado de Saldungaray e Terry (2012).

### 2.1.5 - Impactos ambientais

Além das questões ambientais normalmente associadas à exploração e produção convencional de petróleo e gás, a exploração de reservas de hidrocarbonetos não convencionais inclui seu

próprio conjunto exclusivo de questões ambientais. O fraturamento hidráulico e outros métodos de estimulação de poços possibilitaram uma rápida expansão do desenvolvimento das reservas não convencionais de hidrocarbonetos em todo o mundo. Entretanto, as regulamentações responsáveis por estabelecer regras que regem esse setor, muitas vezes, mostraram-se incapaz de acompanhar a evolução da indústria, resultando em proteção insuficiente ao meio ambiente.

Os produtos químicos adicionados aos fluidos de fratura para facilitar o processo de fraturamento variam dependendo da localização do poço e das condições geológicas das formações e cobrem uma ampla gama de tipos químicos. Além dos aditivos químicos, os fluidos de fratura ainda podem conter substâncias químicas extraídas das formações subterrâneas, como metais pesados (mercúrio, chumbo) e, ocasionalmente, materiais radioativos de ocorrência natural (rádio, tório, urânio). Assim, os principais impactos ambientais associados ao fraturamento hidráulico resultam do uso do fluido de fratura que possui um elevado potencial de contaminação das fontes de água. Falhas no revestimento do poço podem propiciar a contaminação do aquífero, além disso as piscinas utilizadas para armazenar as águas residuais (fluido de fratura recuperado do poço) podem contaminar o solo e as águas superficiais caso haja falha no armazenamento (Figura 2.4). Dessa forma, é necessário um monitoramento químico cuidadoso dos fluidos de fraturamento hidráulico, incluindo o fluido de refluxo e a água resultante do seu tratamento, para mitigar os riscos de contaminação das fontes de água.

A emissão de gases e vapores para a atmosfera resultante dos produtos químicos utilizados no fluido de fratura, dos contaminantes arrastados da formação e do metano liberado pelo processo de fraturamento hidráulico também representam um elevado risco ambiental. De fato, a taxa de vazamento de metano durante o processo de fraturamento é um dos aspectos mais importantes da produção de gás das reservas não convencionais, pois o metano é um potente gás de efeito estufa que contribui com o aquecimento global. Isso significa que uma operação de fraturamento hidráulico que não possui o adequado controle sob a quantidade de metano liberado na atmosfera, pode superar os impactos ambientais gerados por operações convencionais de recuperação de gás natural, bem como outras operações de recuperação de combustíveis fósseis. Por tanto, essas operações devem ser cuidadosamente monitoradas e os limites de emissão impostos para minimizar as emissões para a atmosfera. Além disso, os químicos voláteis do fluido de fratura são motivo de preocupação, pois a exposição humana, mesmo que em pequena quantidade, a esses produtos químicos podem resultar em câncer e efeitos adversos nos sistemas reprodutivo, neurológico e endócrino.

Além dos relevantes impactos ambientais do processo de fraturamento hidráulico, essa tecnologia pode ter uma grande influência na redução dos investimentos em energia renováveis, uma vez que seu uso aumenta consideravelmente o acesso a reservas de

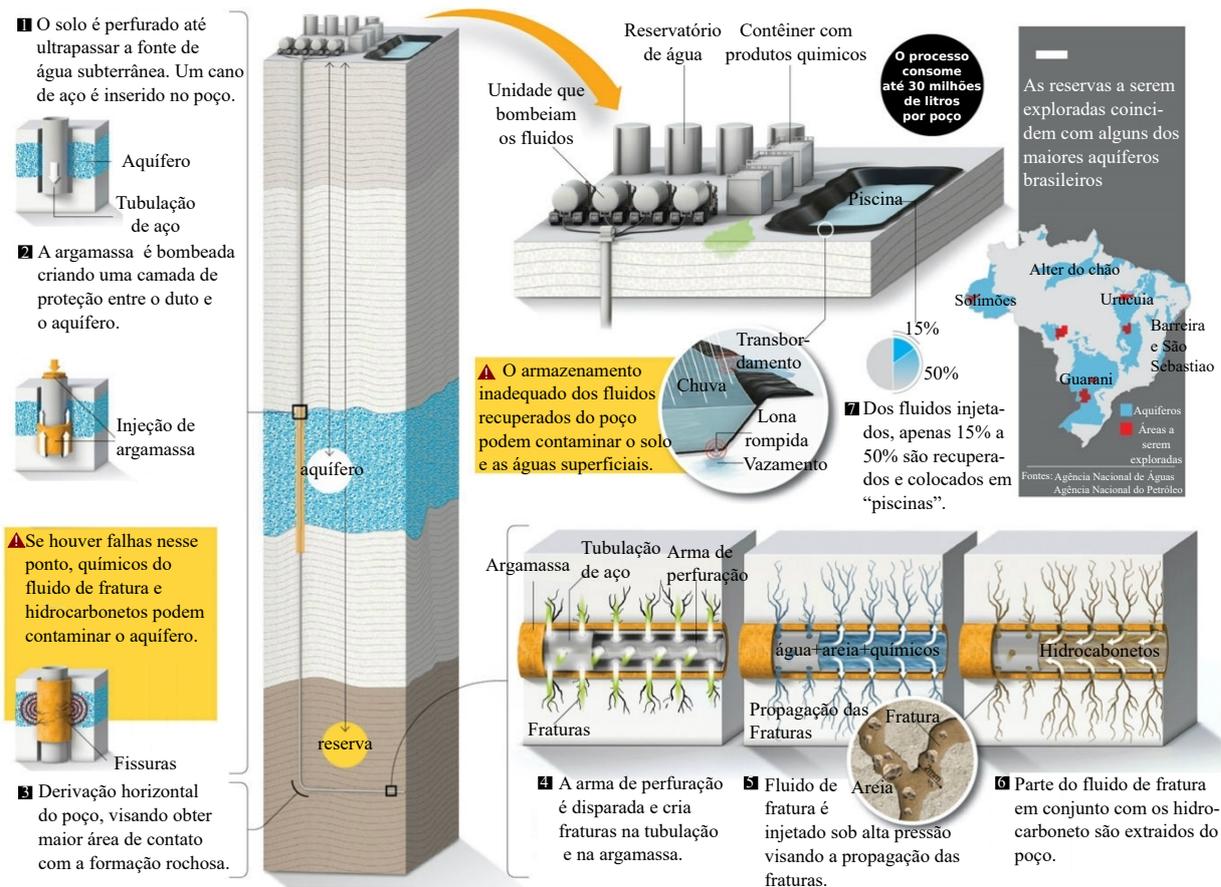


Figura 2.4 – Processo de fraturamento hidráulico e os possíveis impactos ambientais. Adaptado de Rodríguez e Sarmiento (2018).

hidrocarbonetos. Em resumo, o fraturamento hidráulico continua sendo uma questão de política pública altamente controversa devido as preocupações com os efeitos ambientais e de saúde de seu uso. Em virtude disso, as agências responsáveis por regulamentar e monitorar os impactos ambientais do desenvolvimento das reservas não convencionais precisam estar bem informadas, visando estabelecer diretrizes e recomendações para proteção ambiental das operações de fraturamento.

## 2.2 - MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura é a área da mecânica responsável por estudar o comportamento e propagação das fraturas nos materiais, utilizando métodos analíticos da mecânica dos sólidos para calcular as forças atuantes e prever a resistência à fratura. Em virtude disso, a mecânica da fratura é frequentemente utilizada no desenvolvimento dos modelos computacionais para simulação das fissuras.

## 2.2.1 - Modos de ruptura dos materiais

Os campos de tensão e deslocamento na ponta da trinca são dependentes dos esforços que deram origem à fissura. Portanto, torna-se de suma importância entender e classificar os diferentes modos de ruptura dos materiais. Basicamente, são três os modos de ruptura, denominados de modo I, modo II e modo III. O esforço predominante na formação das fissuras de modo I é a tensão normal  $\sigma_{yy}$  (Figura 2.5 a); para fissuras de modo II, a tensão cisalhante  $\tau_{yx}$  é a predominante (Figura 2.5 b); para as fissuras de modo III, a tensão cisalhante  $\tau_{yz}$  é a predominante (Figura 2.5 c). Na prática, os sólidos são usualmente solicitados ao fraturamento de forma que os diferentes modos de ruptura ocorrem simultaneamente. Sendo que a interação entre os modos de ruptura e suas intensidades determinam, dentre outras coisas, a trajetória da fissura até o colapso (Ferreira e Hanai, 2010).

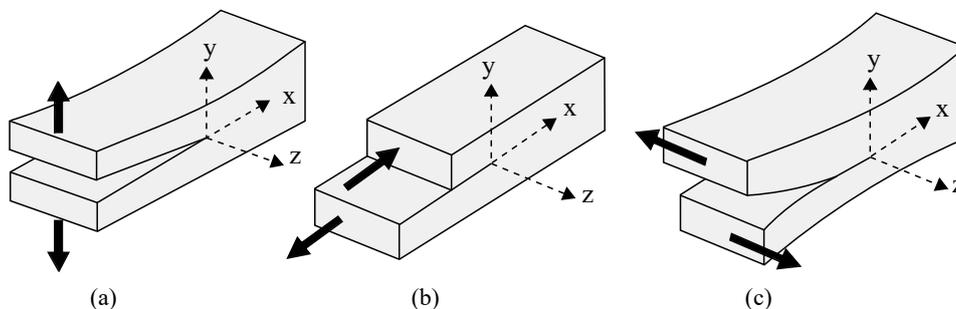


Figura 2.5 – Modos de fissuração: (a) modo I (ou modo de abertura), (b) modo II (ou modo de escorregamento), (c) modo III (ou modo de rasgamento). Adaptado de Kumar e Barai (2011).

## 2.2.2 - Mecânica da fratura elástico-linear (MFEL)

A mecânica da fratura elástica linear pode ser definida como o estudo dos campos de tensão e deslocamento na região da ponta da fissura em material predominantemente elástico, homogêneo e isotrópico, particularmente no início do crescimento instável da fratura. Este conceito é aplicável para materiais frágeis cujo comportamento inelástico é mínimo.

### Campos de tensão à frente da ponta da fissura

Para melhor compreensão dos campos de tensão e deslocamento na ponta da trinca, foi analisado uma fissura em uma placa idealizada infinita de material elástico e com um furo elíptico submetida à tração (Figura 2.6), conhecido como problema de Griffith (Mindess et al., 2003).

De forma geral, nos problemas planos de elasticidade linear, a questão central é encontrar uma

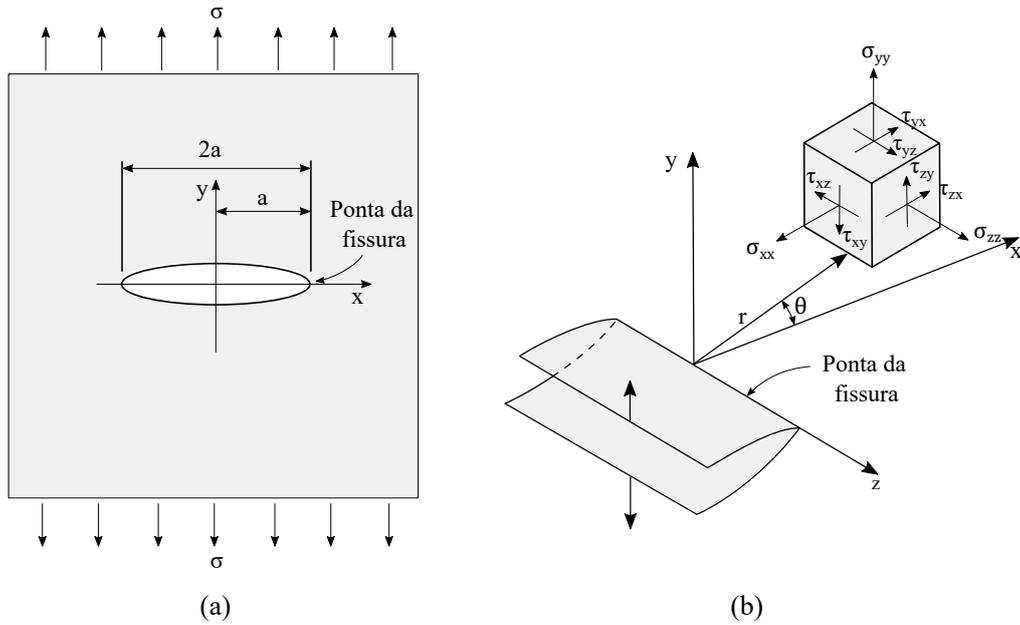


Figura 2.6 – (a) Placa idealizada infinita com um furo elíptico, submetida à tração, (b) sistemas de coordenadas polares e componentes de tensão à frente da fissura. Adaptado de Mindess et al. (2003).

função de tensão de Airy  $\Phi$ , que satisfaça à equação bi-harmônica (Ferreira e Hanai, 2010):

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1)$$

Para a solução do problema de Griffith, adota-se uma função de variáveis complexas que satisfaz também às condições de contorno estabelecidas no problema. Assim, todas as componentes de tensão (em um ponto próximo à ponta da fissura) ficam determinadas. Para o modo I de solitação ao fraturamento, as tensões são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $r$  é a distância do ponto onde se deseja obter as tensões em relação à ponta da fissura (ver Figura 2.6) e  $\nu$  representa o coeficiente de Poisson, enquanto  $\theta$  é a inclinação desse ponto em relação ao eixo  $x$  (ver Figura 2.6) e  $K_I$  representa o fator de intensidade de tensão para o modo I. O fator de intensidade de tensão pode ser entendido como o fator que associa o campo de tensão à frente da ponta da fissura com a singularidade. Essa relação pode ser expressa

conforme a equação:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2.3)$$

Para o modo II de fraturamento, o estado de tensão em um ponto genérico é determinado pelas equações:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} (2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}) \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Para o modo III de fraturamento, o estado de tensão é dado pelas equações:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Os fatores de intensidade de tensão dependem das dimensões do sólido fissurado, das condições de contorno do problema (tipo/forma de carregamento e vinculação externa) e da extensão da fissura (Ferreira e Hanai, 2010). Para o modo I, obtém-se a seguinte relação:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} f(a; W) \quad (2.6)$$

onde  $\sigma$  e  $a$  representam, respectivamente, a tensão externa aplicada e a extensão da fissura (Figura 2.6), e  $W$  é uma dimensão significativa do sólido fissurado. A função adimensional de dependência geométrica e de condição de contorno  $f(a; W)$  é usualmente determinada para geometrias específicas utilizando técnicas numéricas, como Método dos Elementos Finitos. Para uma estrutura de dimensões "infinitas", como a chapa do problema de Griffith, a função  $f(a, W)$  terá valor unitário.

### **Campo de deslocamento à frente da ponta da fissura**

Por sua vez, o campo de deslocamento para o modo I de fraturamento pode ser determinado pela equação:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} (1 - 2\nu' + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}) \\ \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} (2 - 2\nu' - \cos^2\frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes de deslocamento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $G$  representa o módulo de cisalhamento e  $\nu'$  denota o coeficiente de Poisson. Para análise em estado plano de deformação,  $\nu' = \nu$ , enquanto que para análise em estado plano de tensão, adota-se  $\nu' = \nu/(1 + \nu)$ .

O campo de deslocamento para o modo II de fraturamento pode ser expresso conforme a equação:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu' + \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (-1 + 2\nu' - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Por fim, o campo de deslocamento para o modo III de fraturamento é dado pela equação:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

### **Critério de estabilidade da fratura**

Para um material com comportamento linear-elástico ao fraturamento, o crescimento do fator de intensidade de tensão ocorrerá até que se atinja um nível crítico a partir do qual a fissura passa a propagar de forma instável, isto é, sem que haja crescimento da sollicitação externa (Ferreira e Hanai, 2010). Neste caso, tem-se uma situação limite de resistência:

$$K_I = K_{Ic}; \quad K_{II} = K_{IIc}; \quad K_{III} = K_{IIIc} \quad (2.10)$$

onde  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$  e  $K_{IIIc}$  representam, respectivamente, a resistência ao fraturamento do material para o modo I, modo II e modo III.

A resistência ao fraturamento do material pode ser calculada por meio da energia de fratura  $G_F$  (Bazant e Planas, 1998), conforme as equações:

$$K_{Ic} = \sqrt{E' G_{FI}}; \quad K_{IIc} = \sqrt{E' G_{FII}}; \quad K_{IIIc} = \sqrt{\frac{E G_{FIII}}{1 + \nu}} \quad (2.11)$$

onde  $E' = E$  para o estado plano de tensão ou  $E' = E/(1 - \nu^2)$  para o estado plano de deformação.

### 2.2.3 - Tipos de comportamento à fratura e a limitação da MFEL

A zona de processo de fratura é caracterizado pelo progressivo "amolecimento" do material (Bazant e Planas, 1998), para o qual ocorre diminuição da tensão de plastificação para o aumento da deformação plástica. Essa zona é cercada por uma zona de endurecimento plástico, para o qual ocorre aumento da tensão (ou permanece constante) para o aumento da deformação. Juntas, essas duas zonas formam a zona não linear. Dependendo do tamanho relativo dessas duas zonas e da estrutura, pode-se distinguir três tipos de comportamento da fratura (Figura 2.7).

O primeiro tipo de comportamento (Figura 2.7 a), a zona não linear é pequena se comparada com o tamanho da estrutura. Assim, o processo de fratura ocorre praticamente em um ponto (na ponta da fratura), e o restante do material se comporta de forma elástica. Neste caso a mecânica da fratura elástico linear pode ser aplicada. Esse tipo de modelo é uma boa aproximação para materiais frágeis como vidro, cerâmicas frágeis e metais frágeis. É importante enfatizar que a aplicação da MFEL é relativo a materiais cujas dimensões devem ser suficientemente grandes se comparado com a zona de processo de fratura.

O segundo e o terceiro tipo de comportamento (Figura 2.7 b, c) a razão entre a tamanho da zona não linear e o tamanho da estrutura não é suficientemente pequena, desse modo a MFEL não pode ser aplicada a esses casos. No segundo tipo de comportamento (Figura 2.7 b), a maior parte da zona não linear consiste da zona de endurecimento plástico, enquanto a zona de processo de fratura (zona de amolecimento) - onde ocorre a ruptura do material - permanece pequena. Em geral os materiais que possuem esse comportamento são conhecidos como dúcteis e a parte da mecânica da fratura que melhor modela esse tipo de comportamento é a mecânica da fratura elasto-plástica.

O terceiro tipo de comportamento (Figura 2.7 c), a maior parte da zona não linear consiste da zona de amolecimento, região que sofre dano progressivo devido a formação de microfissuras e vazios, ruptura de interfaces e outros fenômenos similares. A zona de endurecimento plástico é frequentemente negligenciada devido sua pouca influencia. Esse comportamento ocorre em materiais como o concreto, rochas, gelo entre outros. Esses materiais são conhecidos como quase frágeis devido a deformação plástica considerável em virtude da grande zona de processo de fratura.

Outra forma de representar o comportamento não linear dos três diferentes tipos de materiais sujeitos à tração uniaxial é por meio das relações de tensão-deslocamento (Figura 2.8) (Kumar e Barai, 2011). Para um material frágil ideal, a curva de tensão-deslocamento é linearmente elástica até a tensão máxima, em que uma falha inicial catastrófica se propaga, levando a estrutura ao colapso. Uma curva típica tensão-deslocamento para um material elástico e frágil

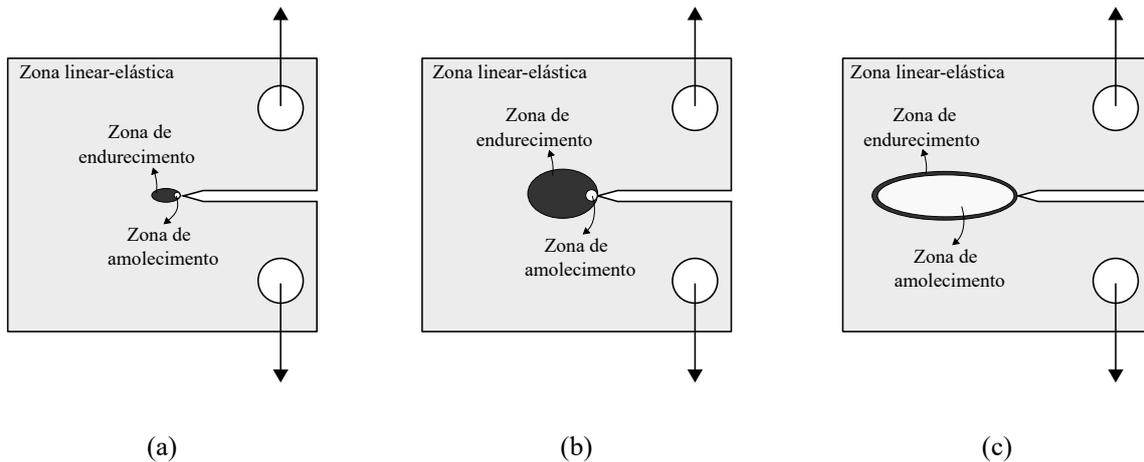


Figura 2.7 – Tipos de zonas não lineares em materiais com comportamento: (a) elástico linear, (b) plástico não linear e (c) quase frágil não linear. Adaptado de Bazant e Planas (1998).

ideal na qual a mecânica da fratura elástica linear é válida é apresentada na Figura 2.8 a. Para materiais dúcteis a curva tensão-deslocamento (Figura 2.8 b) é caracterizada por um patamar de escoamento pronunciado, ocasionando, com isso, o comportamento não linear da amostra anterior ao início da fissuração localizada. Por fim, para um material quase frágil, uma não linearidade é verificada antes da tensão máxima ser atingida (Figura 2.8 c). Em algum momento antes da tensão de pico, microfissuras começam a localizar-se em uma macro fissura que se propaga criticamente na tensão de pico. Sob teste de deslocamento controlado, observa-se que o deslocamento durante a fase de pós-pico consiste na abertura da fissura principal acompanhada de descarga do resto da amostra.

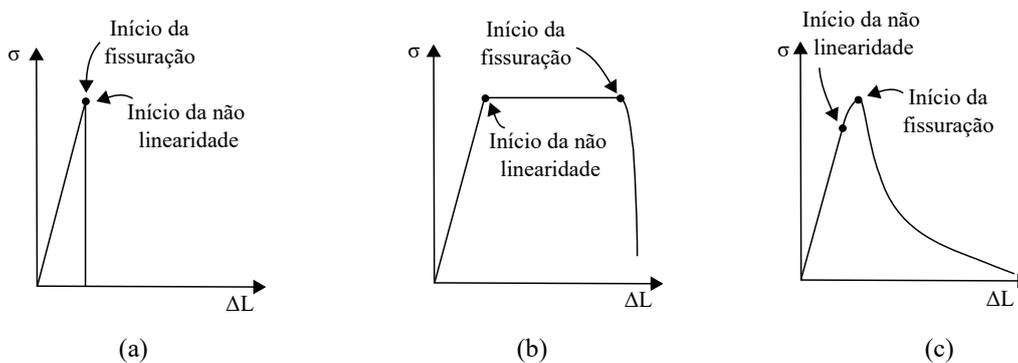


Figura 2.8 – Curvas de tensão-deslocamento para materiais submetido à tração uniaxial que possuem comportamentos: (a) elástico linear, (b) plástico não linear e (c) quase frágil não linear. Adaptado de Kumar e Barai (2011).

## 2.2.4 - Mecânica da fratura não linear (MFNL)

A MFEL descreve bem as fissuras em materiais que apresentam comportamento predominantemente elástico linear, cuja zona não linear da fratura é muito pequena.

Entretanto, não se aplica para materiais quase frágeis como as rochas. Em virtude disso, surgiu a necessidade de ampliar os conceitos da MFEL por meio da mecânica da fratura não linear com o objetivo de descrever a fratura em materiais que possuem o comportamento não linear.

### Zona de processo de fratura

À frente da fissura existe uma zona de dano que é conhecida como zona de processo de fratura (ZPF). A ZPF possui capacidade de transferência de tensão que tende a fechar as faces da fissura (Kumar e Barai, 2011). Essa capacidade diminui à medida que aumenta a distância entre as faces da fratura (Figura 2.9). Muitos mecanismos de micro falhas como a matriz de microfissuras, a descolagem das interfaces e ramificação das fissuras são responsáveis pelo consumo de energia durante a propagação da fissura, assim como pela transferência de tensão na ZPF.

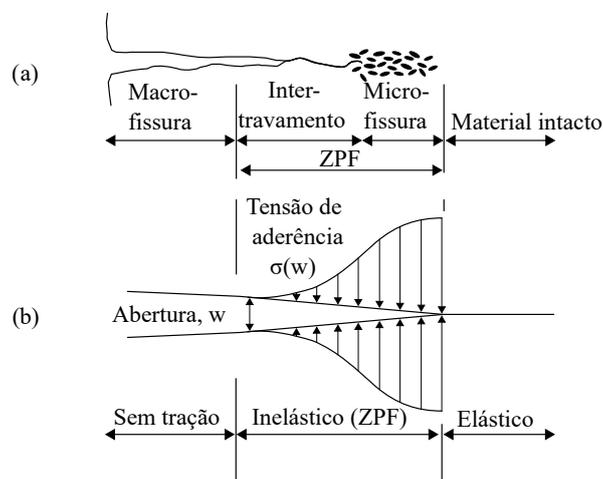


Figura 2.9 – Representação da fissura em materiais quase frágeis (a) Zona de processo de fratura e (b) Distribuição da tensão coesiva na ZPF.

### Mecânica da fratura não linear para fratura de modo I em materiais quase frágeis

Uma descrição mais acurada da fratura dos materiais quase frágeis deve incluir o seu caminho tortuoso, os aspectos tridimensionais do perfil da fissura e a resposta inelástica do material dentro da zona de processo de fratura (Bazant e Planas, 1998). O desenho esquemático da Figura 2.10 mostra o modelo idealizado de uma fissura inicial e da zona de processo de fratura em um material quase frágil. Nessa figura, pode-se observar que os mecanismos de amolecimento na ZPF são modelados pela tensão coesiva,  $\sigma(w)$ , que é uma função decrescente da separação da fissura,  $w$ . Esta função atinge seu valor máximo (igual à resistência a tração do material,  $f_t$ ) na ponta da fissura quando  $w = 0$ , enquanto seu valor mínimo (igual a zero) é obtido quando a abertura da fissura,  $w$ , é maior ou igual a abertura crítica,  $w_c$ .

Quando um material quase frágil com uma fissura é submetida ao carregamento, a aplicação

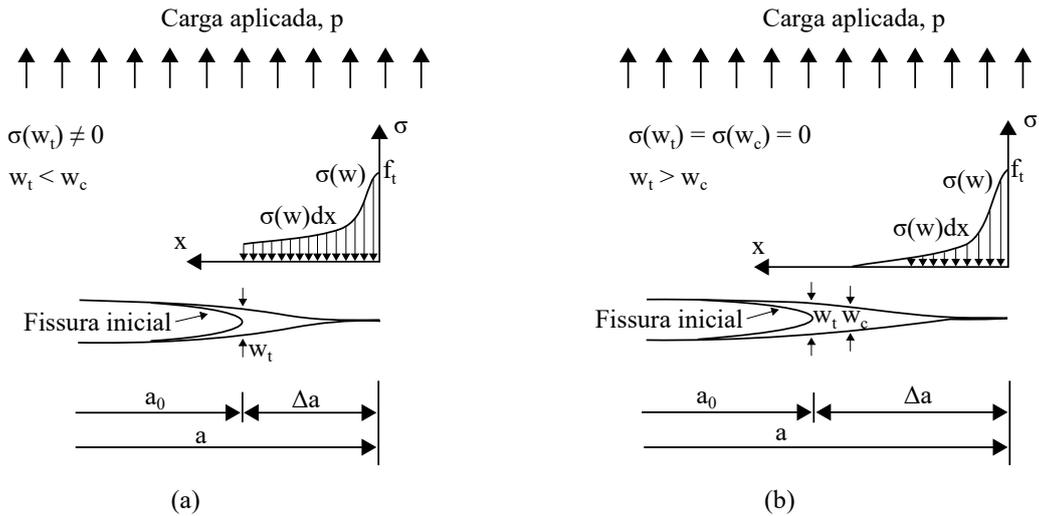


Figura 2.10 – Idealização da fissura em materiais quase frágeis: (a) fissura coesiva com as superfícies da fissura em contato ( $w_t < w_c$ ), e (b) fissura coesiva com separação parcial das superfícies da fissura ( $w_t \geq w_c$ ). Adaptado de Bazant e Planas (1998).

de carga resulta em uma taxa de liberação de energia,  $G_F$  (Bazant e Planas, 1998). A taxa de liberação de energia pode ser dividida em duas parcelas: a taxa de energia consumida durante o fraturamento do material na criação de duas superfícies  $G_{Ic}$  (equivalente à energia de superfície do material) e da taxa de energia para superar a tensão coesiva  $\sigma(w)$  na separação das superfícies  $G_\sigma$ . Como resultado, a taxa de liberação de energia para o modo I de uma fissura quase frágil,  $G_F$ , pode ser expressa como:

$$G_F = G_{Ic} + G_\sigma \quad (2.12)$$

O valor do  $G_{Ic}$  pode ser avaliado com base nos conceitos da MFEL e chama-se taxa de liberação de energia crítica. Considerando-se que  $G_\sigma$  é igual ao trabalho realizado pela tensão coesiva sobre uma unidade de comprimento da fissura para estrutura com uma unidade de espessura, o seu valor pode ser calculado como:

$$G_\sigma = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \int_0^w \sigma(w) dx dw = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} dx \int_0^w \sigma(w) dw = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2.13)$$

onde  $\sigma(w)$  é a tensão coesiva normal e  $w_t$  é o deslocamento da separação na ponta inicial da fissura (Figura 2.10). Como  $dx$  é retirado da integral em relação a  $w$  (Eq. 2.13) implica que o perfil (forma) do deslocamento da abertura da fenda,  $w$ , não varia significativamente com a mudança de comprimento da fissura. É importante ressaltar que a Eq. 2.13 somente é válida se o material na ponta inicial da fissura ainda mantém contato. Caso a separação da fissura seja grande o suficiente, para que uma parte da recém-formada superfície da fratura esteja separada ( $w_t \geq w_c$  como mostrado na Figura 2.10 b), o limite superior da integral  $w$ , na Eq. 2.13 deve

ser substituído pelo  $w_c$ . Substituindo a Eq. 2.13 na Eq. 2.12 conduz a seguinte equação:

$$G_F = G_{Ic} + \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2.14)$$

A Eq. 2.14 é uma condição de equilíbrio energético para a propagação de uma fissura quase frágil no modo I, ou seja, esta equação indica que para o fraturamento quase frágil, a taxa de liberação de energia  $G_F$  devido à carga aplicada é equilibrada pelos dois mecanismos de dissipação de energia de fratura ( $G_{Ic}$  e  $G_\sigma$ ).

Embora a propagação de uma fissura quase frágil possa ser descrita pela Eq. 2.14, utilizou-se uma aproximação usando apenas uma das duas parcelas dos mecanismos de dissipação de energia. Tendo em vista isso, o mecanismo de Griffith-Irwin assume que  $G_\sigma = 0$ , enquanto o mecanismo de Dugdale-Barenblatt assume que  $G_{Ic} = 0$ . Com base nos diferentes mecanismos de dissipação de energia utilizados, modelos de mecânica da fratura não linear para materiais quase frágeis podem ser classificados como abordagem de fissuração fictícia (mecanismo de Dugdale-Barenblatt) ou como uma abordagem de fissuração elástico equivalente (o mecanismo de Griffith-Irwin).

A abordagem de fissuração fictícia (ou coesiva) pressupõe que a energia necessária para criar novas superfícies é pequena se comparado com a energia necessária para separá-las e por esse motivo desconsidera a parcela da taxa de liberação de energia crítica,  $G_{Ic}$ . Essa abordagem é ilustrada na Figura 2.9, onde as superfícies recém-formadas da fissura e a correspondente zona de processo de fratura são simuladas por meio de uma zona coesiva, localizada na parte da frente da ponta da fissura inicial. Como resultado, a dissipação da energia para a propagação da fissura pode ser completamente caracterizada pela relação tensão-deslocamento. Desde que toda a energia produzida pela carga aplicada seja completamente equilibrada pela tensão coesiva, neste caso a Eq. 2.14 é reduzida para (com  $G_{Ic} = 0$ ):

$$G_F = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (2.15)$$

A Eq. 2.15 é válida para estruturas com unidade de espessura constante. Presume-se que para uma fissura fictícia iniciar e propagar seja necessário que a tensão de tração principal atinja a resistência à tração do material,  $f_t$ .

### 2.3 - TEORIA DA POROELASTICIDADE LINEAR

A teoria da poroelasticidade linear é um campo da mecânica dos materiais que descreve a interação entre o fluxo do fluido e a deformação do meio poroso linear. Neste tópico, inicia-se a apresentação da teoria da poroelasticidade pelo desenvolvimento histórico, seguido pelas

equações básicas da elasticidade. Posteriormente, aborda-se o princípio da tensão efetiva e a lei de Darcy que é empregada para descrever o fluxo do fluido no meio poroelástico. Em seguida, apresenta-se a equação do equilíbrio do meio poroso e da conservação da massa no meio poroso e na fratura. Por fim, descreve-se a equação do incremento do conteúdo fluido, da difusão do fluido e do coeficiente de armazenamento. As equações apresentadas neste tópico podem ser encontradas nos trabalhos de Verruijt (2013), Weber (2016) e Merxhani (2016).

### **2.3.1 - Desenvolvimento histórico da teoria da poroelasticidade**

Meios porosos são uma composição de partículas de diferentes tamanhos e formas (também conhecidas como esqueleto sólido ou matriz), juntamente com pelo menos um meio fluido preenchendo os poros (Khoei, 2015). O comportamento mecânico do meio poroso é resultado da interação entre o fluido e o esqueleto sólido. A teoria da poroelasticidade estuda a deformação do material poroso em conjunto com o fluxo do fluido nos poros.

Essa teoria foi desenvolvida originalmente por Terzaghi (1925) e Terzaghi (1943) para o caso unidimensional e ampliado para três dimensões por Biot (1941), e tem sido estudado extensivamente desde então. Em sua teoria original, Terzaghi postulou que as deformações de um solo são causadas principalmente pelo rearranjo do sistema das partículas e que a compressão do fluido dos poros e das partículas sólidas podem ser desconsideradas na prática. Em um solo saturado, isso significa que a mudança de volume do solo pode ocorrer apenas pelo fluxo do fluido em relação às partículas sólidas. Essa suposição é, muitas vezes, uma boa aproximação do comportamento real de solos moles, especialmente argila, e também areias macias. Tais solos são altamente compressíveis, enquanto que as partículas sólidas e os fluidos são bastante rígidos.

Em apresentações posteriores da teoria, começando com as de Biot (1941), a limitação de constituintes incompressíveis foi removida. Esta generalização permitiu também considerar as deformações de materiais mais rígidos, como arenito e outras rochas porosas, que são muito importantes na engenharia de reservatórios profundos de petróleo e gás. Em Biot (1955), a teoria foi estendida ao caso elástico anisotrópico, enquanto em Biot (1956) as equações para a resposta dinâmica de meios porosos foram derivadas e em Biot (1973) as extensões para a elasticidade não linear foram apresentadas.

Rice e Cleary (1976) reformularam as equações de consolidação em termos de coeficientes não drenados. Dessa forma, a distinção entre a descrição drenada e não drenada das equações de consolidação foi introduzida. Já as extensões para o uso da lei constitutiva não linear foram propostas entre outros por Zienkiewicz et al. (1980), Prevost (1980) e Prevost (1982). Um tratamento geral da teoria de Biot para o comportamento não linear do material para

grandes deformações pode ser encontrado em Coussy (1991) e Coussy (2004), onde a teoria é reformulada usando uma abordagem termodinâmica.

### 2.3.2 - Equações básicas da elasticidade isotrópica

A teoria da poroelasticidade utiliza as equações básicas da elasticidade em conjunto com o princípio da tensão efetiva para descrever o comportamento do meio poroso saturado. O modelo elástico linear mostra-se extremamente simples, uma vez que necessita apenas de duas constantes do material: o módulo de Young,  $E$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ . Por meio dessas duas constantes é possível deduzir outras constantes importantes como o módulo volumétrico  $K$ , o módulo de cisalhamento  $G$  e a constante de Lamé  $\lambda$ , conforme as equações:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.16)$$

Outras relações úteis entre as constantes são dadas pelas equações:

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G; \quad \lambda = G \frac{2\nu}{1-2\nu}; \quad K = G \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (2.17)$$

Utilizando-se notação indicial, os componentes do tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  são definidos como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

onde  $u_i$  representa as componentes do deslocamento.

A lei constitutiva é expressa por meio da seguinte relação tensão-deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.19)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são os componentes do tensor de tensão,  $\sigma_m$  representa a tensão média ( $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ ) e  $\delta_{ij}$  denota o delta de Kronecker. Invertendo-se a relação tensão-deformação da Eq. 2.19, obtém-se o tensor de tensão de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

sendo  $\varepsilon_v$  a deformação volumétrica, que é o primeiro invariante do tensor de deformação, definido como  $\varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . A relação entre a tensão média e a deformação volumétrica pode ser expressa como:

$$\sigma_m = K \varepsilon_v \quad (2.21)$$

Por outro lado, a equação do equilíbrio é dado por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.22)$$

onde  $b_i$  representa as componentes da força de corpo.

### Elasticidade compressível

As equações de equilíbrio (Eq. 2.22) podem ser expressas em termos dos deslocamentos, fazendo uso da lei constitutiva (Eq. 2.20) e das equações cinemáticas (Eq. 2.18). Inicialmente, substitui-se a Eq. 2.20 na Eq. 2.22, obtendo-se:

$$2G \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.23)$$

Em seguida, promove-se a substituição do termo  $\varepsilon_{ij}$  na Eq. 2.23 pela relação dada na Eq. 2.18, obtendo-se desse modo:

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.24)$$

Considerando-se as seguintes relações:

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}; \quad \varepsilon_v = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

a Eq. 2.24 pode ser expressa como:

$$G \nabla^2 u_i + (G + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.26)$$

### Elasticidade incompressível

No limite do comportamento incompressível do material, o módulo de Poisson vale 0.5. Neste caso, as equações de equilíbrio (Eq. 2.26) não se mantêm, uma vez que a constante de Lamé  $\lambda$  torna-se infinita. Para contornar este problema, as equações de equilíbrio podem ser reformuladas em termos dos deslocamentos e da tensão média  $e$ , portanto, permanecem válidas no limite de incompressibilidade. Para tanto, reescreve-se a relação constitutiva (Eq. 2.20), substituindo-se  $\varepsilon_v$  por  $\sigma_m/K$  e aplicando-se a relação  $\lambda/K$  dada pela Eq. 2.16:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.27)$$

Empregando-se a Eq. 2.27 nas equações de equilíbrio (Eq. 2.22), obtém-se:

$$2G \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.28)$$

ou em termo dos deslocamentos:

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.29)$$

Utilizando-se as relações dadas pelas Eqs. 2.25, a Eq. 2.29 torna-se:

$$G \nabla^2 u_i + G \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_v + \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.30)$$

O módulo de volumétrico tende ao infinito ( $K \rightarrow \infty$ ) quando no limite o material é incompressível ( $\nu = 1/2$ ). Em virtude disso, a relação  $\varepsilon_v = 0$  deve ser mantida. Portanto, para o comportamento incompressível do material as equações de equilíbrio em notação vetorial podem ser expressas como:

$$G \nabla^2 u_i + \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad (2.31)$$

sendo que  $\varepsilon_v = 0$  expressa a condição de incompressibilidade.

### 2.3.3 - Princípio da tensão efetiva

Em termos físicos, a teoria da poroelasticidade postula que quando um material poroso é submetido a tensão, a deformação da matriz sólida leva a mudanças volumétricas nos poros. Como os poros são preenchidos com fluido, a presença do fluido não apenas atua como um enrijecedor do material, mas também resulta no fluxo do fluido dos poros (difusão) entre as regiões que possuam diferenças de poropressão. O princípio da tensão efetiva descreve matematicamente a decomposição das tensões aplicadas a um meio poroso saturado na qual parte das tensões é resistida pelo esqueleto sólido, denominada de tensão efetiva, e o restante da tensão é resistida pelo fluido dos poros. Como consequência, as equações de equilíbrio são as mesmas da elasticidade clássica, apenas expressa em termo da tensão efetiva. O princípio da tensão efetiva pode ser expresso em notação indicial como:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (2.32)$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma'_{ij}$  são, respectivamente, as componentes da tensão total e efetiva, enquanto  $p$  representa a poropressão (a pressão do fluido nos poros) e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. O parâmetro  $\alpha$  é conhecido como coeficiente de Biot. A tensão média total (ou isotrópicas) pode

ser obtida, por meio da Eq. 2.32, em termo da tensão média efetiva e da poropressão:

$$\sigma_m = \sigma'_m - \alpha p \quad (2.33)$$

O coeficiente de Biot,  $\alpha$ , foi expresso pelos pesquisadores Biot e Willis (1957) em termos de dois coeficientes de compressibilidade, de acordo com a equação:

$$\alpha = 1 - \frac{C_s}{C_p} = 1 - \frac{K_p}{K_s} \quad (2.34)$$

onde  $C_p$  e  $C_s$  denotam, respectivamente, a compressibilidade do meio poroso e do constituinte sólido do meio poroso, enquanto  $K_p$  e  $K_s$  representam, respectivamente, os módulos volumétricos do meio poroso e do constituinte sólido do meio poroso.

Para solos, o valor de  $\alpha$ , geralmente, é adotado como sendo 1 e o princípio da tensão efetiva reduz-se a:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2.35)$$

Esta é a forma na qual o princípio da tensão efetiva é, frequentemente, expresso na mecânica do solo, com base nos trabalhos originais de Terzaghi (1925) e Terzaghi (1943). Isto é justificado, porque a prática da mecânica do solo geralmente lida com argilas ou areias altamente compressíveis, nas quais a compressibilidade das partículas sólidas é muito pequena em comparação com a compressibilidade do material poroso como um todo devido ao rearranjo das particular sólidas. A Tabela 2.1 apresenta valores típicos do coeficiente de Biot para alguns tipos de solos e de rochas.

Tabela 2.1 – Coeficiente de Biot para solos e rochas. Adaptado de Mitchell e Soga (2005).

Material	$C_s/C_p$	$\alpha$
Areia densa	0.00150	0.99850
Areia solta	0.00030	0.99970
Argila de Londres	0.00025	0.99975
Arenito quartzítico	0.46	0.54
Granito de Quincy	0.25	0.75
Mármore de Vermont	0.08	0.92

### 2.3.4 - Lei de Darcy

Na teoria da consolidação de Biot, o fluxo do fluido no meio poroso é assumido como governando pela lei de Darcy. Essa lei foi obtida por Darcy (1856) por meio de uma serie de experimentos no qual a água fluía através de um tubo preenchido com areia. A lei generalizada

de Darcy expressa a descarga específica  $\mathbf{q}$  conforme a equação:

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{\mu}(\nabla p - \rho_f g z) \quad (2.36)$$

onde  $\kappa$  é a permeabilidade intrínseca do material poroso,  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $\rho_f$  é a densidade do fluido e  $g$  representa a aceleração da gravidade. A Eq. 2.36 contém duas propriedades físicas importante, a permeabilidade e a viscosidade, que são intrínsecos a rocha e o fluido, respectivamente. A permeabilidade intrínseca é a medida da geometria dos poros da estrutura do meio poroso e possui unidade de área (isto é,  $m^2$ ). Por outro lado, a viscosidade dinâmica é a medida da resistência do fluido ao cisalhamento e possui unidade de tensão multiplicado pelo tempo (isto é,  $Pa \cdot s$ ).

As componentes do vetor descarga específica são expressos como:

$$q_x = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad q_z = -\frac{\kappa}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_f \right) \quad (2.37)$$

onde  $\gamma_f$  é igual ao produto  $\rho_f g$  e representa o peso específico do fluido.

Na mecânica do solo, a lei de Darcy é frequentemente expressa em termo da condutividade hidráulica (ou a permeabilidade específica),  $k$ , em vez da permeabilidade intrínseca,  $\kappa$ . A condutividade hidráulica é definida como:

$$k = \frac{\kappa \gamma_f}{\mu} \quad (2.38)$$

Dessa forma, a lei de Darcy pode ser reescrita como:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\gamma_f} \nabla(p + \gamma_f z) \quad (2.39)$$

ou

$$q_x = -\frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad q_z = -\frac{k}{\gamma_f} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_f \right) \quad (2.40)$$

A conversão aproximada entre condutividade hidráulica e a permeabilidade para água em diferentes tipos de rochas é dado na Tabela 2.2, considerando-se que a viscosidade da água é  $10^{-3} Pa \cdot s$ , enquanto a densidade da água é  $1000 kg/m^3$  e a aceleração da gravidade é  $10 m/s^2$ .

O vetor de descarga específica pode ser expresso, também, como a velocidade relativa do componente fluido do meio poroso  $\mathbf{v}_f$  em relação à velocidade do componente sólido  $\mathbf{v}_s$  multiplicado pela porosidade  $n$ , conforme a equação:

$$\mathbf{q} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \quad (2.41)$$

Tabela 2.2 – Permeabilidade versus condutividade para diferentes tipos de rochas. Adaptado de Wang (2000).

Tipo de rocha	Permeabilidade intrínseca [m <sup>2</sup> ]	Permeabilidade intrínseca [Darcy]	Condutividade hidráulica [m/s]
Areia ou arenito	10 <sup>-12</sup>	1	10 <sup>-5</sup>
Calcário	10 <sup>-15</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-8</sup>
Granito	10 <sup>-18</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-11</sup>

### 2.3.5 - Equação do equilíbrio do meio poroso

Aplicando-se a segunda lei de Newton a um volume infinitesimal (Figura 2.11) cujo volume é dado por  $dv = dx dy dz$ , definindo-se o vetor  $\langle \rho b_x, \rho b_y, \rho b_z \rangle$  como vetor das forças de corpo e o vetor  $\langle \rho a_x, \rho a_y, \rho a_z \rangle$  como vetor das forças inerciais e considerando-se que as componentes do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$  são funções contínuas e diferenciáveis em relação as variáveis  $(x, y, z)$ , pode-se deduzir a equação de equilíbrio. Na direção x:

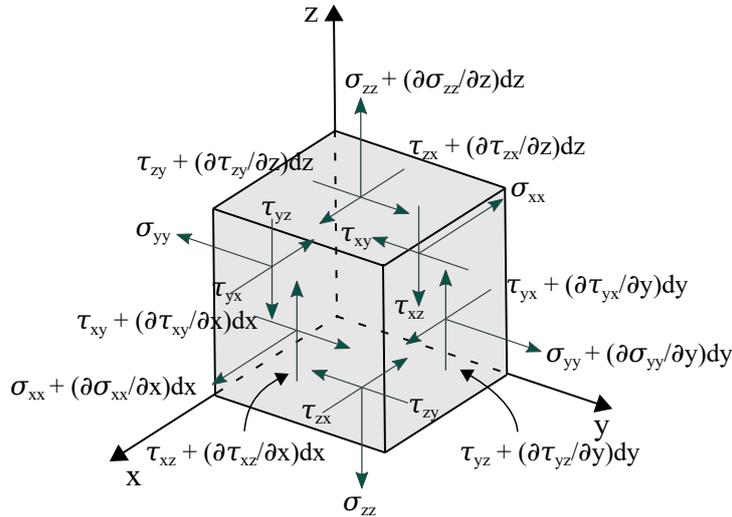


Figura 2.11 – Tensor tensão atuante em um volume infinitesimal.

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\
 & (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho b_x dx dy dz - \rho a_x dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho b_x = \rho a_x \tag{2.43}$$

na direção y:

$$\begin{aligned} (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dydz - \tau_{xy} dydz + (\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy) dx dz - \sigma_{yy} dx dz + \\ (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zy} dx dy + \rho b_y dx dy dz - \rho a_y dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho b_y = \rho a_y \quad (2.45)$$

na direção z:

$$\begin{aligned} (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx) dydz - \tau_{xz} dydz + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yz} dx dz \\ + (\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz) dx dy - \sigma_{zz} dx dy + \rho b_z dx dy dz - \rho a_z dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho b_z = \rho a_z \quad (2.47)$$

As Equações 2.43, 2.45 e 2.47 podem ser expressa em notação indicial como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho a_j \quad (2.48)$$

As equações de equilíbrio estático são obtidas quando as forças nas direções  $(x, y, z)$  são nulas, portanto as forças inerciais são iguais a zero:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad (2.49)$$

Aplicando-se o princípio da tensão efetiva (Eq. 2.32) na Eq. 2.49 obtém-se as equações de equilíbrio em função da tensão efetiva e da poropressão:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} - \alpha \delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad (2.50)$$

### 2.3.6 - Equação da conservação de massa do meio poroso

Um dos mais importantes princípios da teoria da consolidação é que a massa dos dois componentes do meio poroso deve ser conservada. A equação da conservação da massa do sólido e do fluido pode ser estabelecida considerando o fluxo em um volume elementar do meio poroso, fixo no espaço (Figura 2.12).

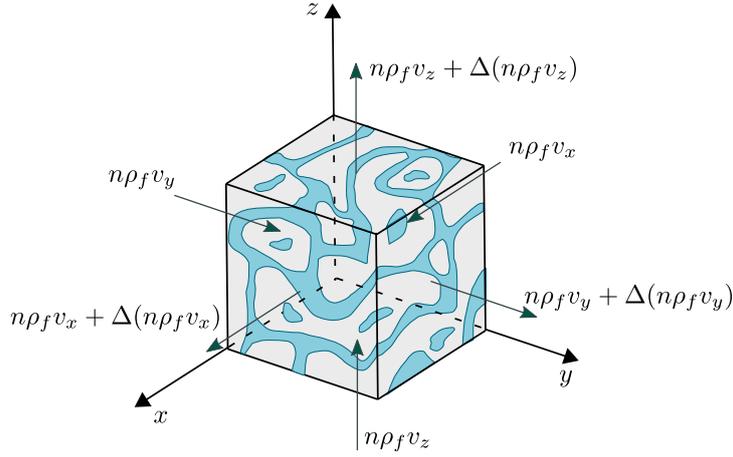


Figura 2.12 – Conservação da massa do fluido no meio poroso.

A massa do fluido,  $m_f$ , em um volume elementar ( $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ) é dado por  $m_f = n \rho_f V$ , onde  $n$  é a porosidade e  $\rho_f$  é a densidade do fluido. O incremento da massa do fluido por unidade de tempo é determinado pelo fluxo de entrada do líquido através das superfícies do elemento. Na direção  $y$  do fluxo através das faces esquerda e direita do elemento mostrado na Figura 2.12 (ambos com área igual a  $\Delta x \Delta z$ ), conduz a um fluxo líquido externo de magnitude:

$$\Delta(n \rho_f v_y) \Delta x \Delta z = \frac{\Delta(n \rho_f) v_y}{\Delta y} V \quad (2.51)$$

onde  $v_y$  representa a a velocidade do fluido na direção  $y$ .

Considerando o fluxo do fluido em todas as direções, a equação de balanço de massa do fluido pode ser expresso como:

$$\frac{\partial(n \rho_f)}{\partial t} + \frac{\partial(n \rho_f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n \rho_f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n \rho_f v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.52)$$

Usando a notação vetorial, a Eq. 2.52 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial(n \rho_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (n \rho_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (2.53)$$

onde  $\mathbf{v}_f$  é o vetor de velocidade do fluido dado por  $\mathbf{v}_f = \langle v_x, v_y, v_z \rangle$ .

Aplicando a integração por partes na Eq. 2.53 obtém-se:

$$\rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (n \rho_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (2.54)$$

Por outro lado, a equação constitutiva do fluido pode ser expressa conforme a equação:

$$\frac{d\rho_f}{dp} = \rho_f C_f \quad (2.55)$$

onde  $C_f$  é compressibilidade do fluido.

Utilizando-se a relação dada nas Eqs. 2.54 e 2.55, resulta em:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + nC_f \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}_f) = 0 \quad (2.56)$$

onde um termo expressando o produto da velocidade do fluido pelo gradiente da pressão foi desconsiderado, assumindo que ambos são pequenas quantidades.

A equação de balanço para o material sólido é dado por:

$$\frac{\partial[(1-n)\rho_s]}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-n)\rho_s\mathbf{v}_s] = 0 \quad (2.57)$$

Aplicando a integração por partes na Eq. 2.57 obtém-se:

$$\rho_s \frac{\partial(1-n)}{\partial t} + (1-n) \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-n)\rho_s\mathbf{v}_s] = 0 \quad (2.58)$$

Assume-se agora que a densidade das partículas sólidas,  $\rho_s$ , é uma função da tensão média  $\sigma_m$  e da pressão do fluido  $p$ , de modo que:

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \frac{\rho_s C_s}{1-n} \left( -\frac{\partial\sigma_m}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (2.59)$$

onde o termo  $C_s$  representa a compressibilidade das partículas sólidas.

Utilizando-se a relação dada nas Eqs. 2.58 e 2.59, resulta em:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + C_s \left( -\frac{\partial\sigma_m}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \nabla \cdot [(1-n)\mathbf{v}_s] = 0 \quad (2.60)$$

onde novamente o termo expressando o produto da velocidade pelo gradiente de tensão foi desconsiderado, assumindo que ambos são pequenas quantidades.

Somando-se as equações de balanço de massa do fluido (Eqs. 2.56) e do sólido (Eq. 2.60), obtém-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s + \nabla \cdot [n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)] + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial\sigma_m}{\partial t} = 0 \quad (2.61)$$

O termo  $n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$  representa a descarga específica  $\mathbf{q}$  (Eq. 2.41) na lei de Darcy para o fluxo do fluido através do meio poroso. Além disso, o termo  $\nabla \cdot \mathbf{v}_s$  pode ser reescrito como  $\partial\varepsilon_v/\partial t$ , onde  $\varepsilon_v$  é a deformação volumétrica. Dessa forma, a Eq. 2.61 pode ser reescrita conforme a equação:

$$\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial\sigma_m}{\partial t} = 0 \quad (2.62)$$

Utilizando-se a relação dada na equação da tensão média total (Eq. 2.33) na Eq. 2.62 obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial \sigma'_m}{\partial t} + C_s \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.63)$$

A tensão média efetiva pode ser relacionada à deformação volumétrica por meio da equação  $\sigma'_m = \varepsilon_v / C_p$ , onde  $C_p$  é a compressibilidade do meio poroso. Utilizando a relação apresentada, na Eq. 2.63 resulta em:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{C_s}{C_p}\right)}_{\alpha} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \underbrace{(nC_f + (\alpha - n)C_s)}_S \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.64)$$

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.65)$$

onde  $S$  representa o coeficiente de armazenamento (*storativity*).

De acordo com Verruijt (2013), a Eq. 2.65 admite uma interpretação simples: a compressão do meio poroso consiste na compressão do fluido dos poros e das partículas sólidas somada a quantidade de fluido expelido do elemento pelo fluxo. Como mostra a derivação, a equação realmente expressa a conservação da massa do fluido e do sólido, juntamente com algumas noções sobre as compressibilidades. Pode-se notar que, na Eq. 2.65, várias suposições foram feitas, de modo que a equação não é completamente exata, mas todas as suposições são muito realistas. Assim, assumiu-se que as partículas sólidas e o fluido são linearmente compressíveis, e alguns termos de segunda ordem, consistindo do produto de pequenas quantidades, foram desconsiderados. A equação de armazenamento pode, portanto, ser considerada como uma aproximação precisa da realidade física.

### 2.3.7 - Equação da conservação da massa do fluido na fratura

O fluxo do fluido incompressível newtoniano é governado pela equação de Navier-Stokes que representa a aplicação da segunda lei de Newton (força = massa x aceleração) aos fluidos:

$$\mathbf{b} - \frac{1}{\rho_f} \nabla p_f + \frac{\mu}{\rho_f} \nabla^2 \mathbf{v}_f = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \quad (2.66)$$

onde  $\mathbf{b}$  é a força de corpo por unidade de massa,  $\rho_f$  é densidade do fluido,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $p_f$  é a pressão do fluido e  $\mathbf{v}_f$  é o vetor da velocidade do fluido. Junto com a equação da continuidade do fluido:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0 \quad (2.67)$$

formam um sistema que pode ser resolvido para os campos de velocidade e a pressão, com um conjunto apropriado de condições iniciais e de contorno (Lhomme, 2005).

O fluxo de um fluido viscoso na fratura é tipicamente descrito como o fluxo em estado estacionário de um fluido incompressível newtoniano entre duas placas paralelas lisas (Figura 2.13).

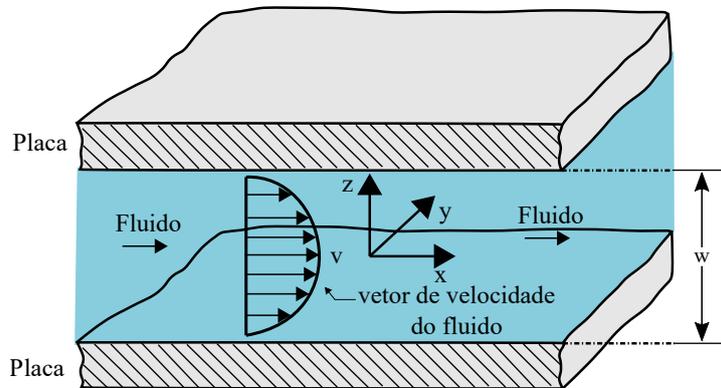


Figura 2.13 – Fluxo do fluido viscoso entre duas placas paralelas lisas. Modificado de Weber (2016).

As forças de corpo na Eq. 2.66 são negligenciadas devido à alta pressão necessária para propagar uma fratura. Dessa forma, a equação geral de Navier-Stokes é simplificada conforme a equação:

$$-\Delta p_f + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_f = \rho_f (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f \quad (2.68)$$

Devido a fratura ser estreita, a variação da pressão através da largura da fratura (direção  $z$ ) é negligenciável. A solução da Eq. 2.68 pode ser obtida considerando as condições de contorno no qual a velocidade do fluido na direção normal ao canal é negligenciável ( $v_z = 0$ ) e que  $v_x$  e  $v_y$  são iguais a 0 quando  $z = \pm \frac{w}{2}$ , onde  $w$  representa a abertura da fissura. Com isso é possível obter o perfil de velocidade dado pela equação:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \left[ z^2 - \left( \frac{w}{2} \right)^2 \right], \quad v_y = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_f}{\partial y} \left[ z^2 - \left( \frac{w}{2} \right)^2 \right] \quad (2.69)$$

conhecido como plano de fluxo de Poiseuille. Os termos  $v_x$  e  $v_y$  representam, respectivamente, as componentes da velocidades do fluxo do fluido na direção  $x$  e  $y$ .

O fluxo do fluido  $Q$  é uma função da forma transversal do canal. Para uma fratura com altura muito maior que o comprimento, uma seção transversal retangular pode ser assumida (veja a Figura 2.14). Para um problema unidimensional, a área é dada por  $A(x, t) = h_f \Delta w(x, t)$ , com altura transversal constante  $h_f$  e uma largura variável  $w(x, t)$ . Desse modo, pode-se obter o fluxo do fluido conforme a equação:

$$Q = \int_A \mathbf{v}_f dA = \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} \mathbf{v}_f h_f dz = -h_f \frac{w^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) \quad (2.70)$$

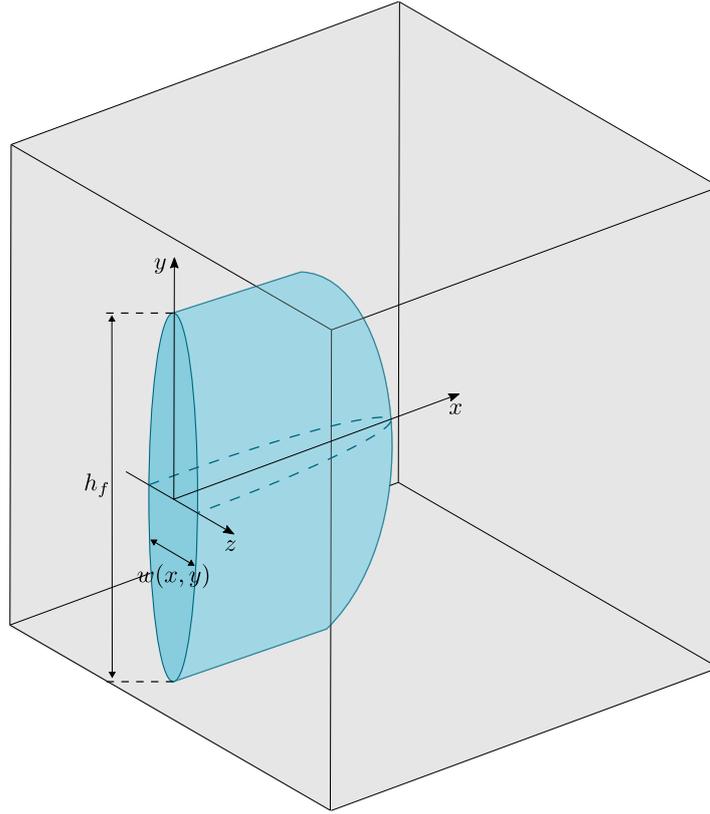


Figura 2.14 – Representação esquemática de uma fratura hidráulica tridimensional. Modificado de Weber (2016).

A taxa do fluxo na fratura por unidade de comprimento na terceira dimensão é obtida integrando a Eq. 2.69 na largura da fratura  $w$  que é equivalente ao uso da Eq. 2.70:

$$\mathbf{q}_f = \frac{Q}{h_f} \quad (2.71)$$

Consequentemente, as taxas do fluxo na direção  $x$  e  $y$  são dados por:

$$q_{fx} = -\frac{w^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p_f}{\partial x} \right), \quad q_{fy} = -\frac{w^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p_f}{\partial y} \right) \quad (2.72)$$

Aplicando a equação de continuidade local no volume de controle 3D (Figura 2.15) de lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{w^3}{12\mu} \nabla p_f \right) + v_t + v_b = 0 \quad (2.73)$$

onde  $v_t$  e  $v_b$  representam as velocidades de vazamento de fluido da fratura, para o meio poroso circundante, referente a face superior e inferior da fratura, respectivamente. Uma taxa de injeção de fonte  $Q(t)$  é incorporada a formulação como uma condição de contorno de entrada.

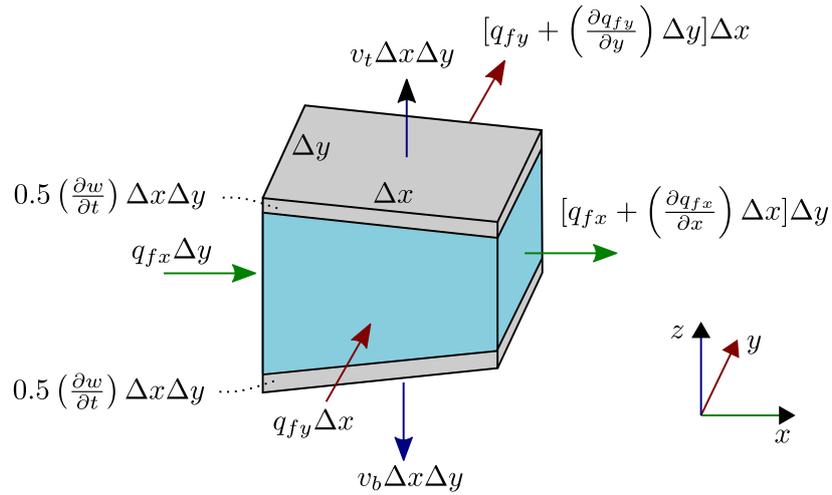


Figura 2.15 – A condição de continuidade local em um volume de controle. A área cinza indica o crescente volume de controle, que é o aumento na largura da fratura  $w$  ao longo do tempo  $t$ . Modificado de Weber (2016).

### 2.3.8 - Incremento do conteúdo fluido

A variável conjugada da poropressão é o incremento do conteúdo fluido  $\zeta_f$  que é definido como a alteração do volume de fluido por unidade de volume de referência. Em Biot e Willis (1957), o incremento do conteúdo fluido é definido como:

$$\zeta_f = -n \nabla \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s) \quad (2.74)$$

onde  $\mathbf{u}_f$  e  $\mathbf{u}_s$  significam, respectivamente, o deslocamento médio das fases fluida e sólida no volume de controle. A Eq. 2.74 sustenta-se no pressuposto de que a porosidade não varia no espaço.

Derivando-se a Eq. 2.74 em relação ao tempo, verifica-se que o lado direito resulta na velocidade de descarga específica definida na Eq. 2.41, dessa forma a equação da continuidade do fluido pode ser deduzida:

$$\frac{\partial \zeta_f}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.75)$$

A Eq. 2.65 pode ser reescrita conforme a equação a seguir:

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.76)$$

Utilizando-se a relação dada nas Eqs. 2.75 e 2.76 e, em seguida, integrando-se o resultado no tempo, obtém-se a relação constitutiva para o incremento do conteúdo fluido:

$$\zeta_f = \alpha \varepsilon_v + S p \quad (2.77)$$

Introduzindo-se o módulo de Biot  $Q$  como:

$$Q = \frac{1}{S} \quad (2.78)$$

a lei constitutiva do incremento do conteúdo fluido Eq. 2.77 assume a forma:

$$\zeta_f = \alpha \varepsilon_v + \frac{1}{Q} p \quad (2.79)$$

### 2.3.9 - Difusão do fluido

A equação da conservação de massa pode ser expressa em termos do incremento do conteúdo fluido, resultando em uma equação do tipo difusão. Especificamente, quando a equação de armazenamento (Eq. 2.75) é considerada pela lei de Darcy (Eq. 2.39) sob a suposição de que  $k/\gamma_f$  não varia no espaço, esta equação assume a forma:

$$\frac{\partial \zeta_f}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_f} \nabla^2 p \quad (2.80)$$

Em seguida, o lado direito da Eq. 2.80 é expressa em termos do incremento do conteúdo fluido. A expressão necessária pode ser derivada das equações de equilíbrio, conforme a equação:

$$\nabla^2 \left( p - \frac{\lambda + 2G}{\alpha} \varepsilon_v \right) = 0 \quad (2.81)$$

Substituindo a Eq. 2.77 na Eq. 2.81, a expressão a seguir é obtida:

$$\nabla^2 p = \frac{\lambda + 2G}{\alpha^2 + (\lambda + 2G)S} \nabla^2 \zeta_f \quad (2.82)$$

Combinando as Eqs. 2.80 e 2.82, a equação de conservação de massa toma a forma de uma equação de difusão como:

$$\frac{\partial \zeta_f}{\partial t} = c \nabla^2 \zeta_f \quad (2.83)$$

onde  $c$  representa o coeficiente de consolidação em três dimensões e é igual a:

$$c = \frac{k}{\gamma_f} \cdot \frac{\lambda + 2G}{\alpha^2 + (\lambda + 2G)S} \quad (2.84)$$

A Eq. 2.81 usada para derivar a Eq. 2.83 foi obtida negligenciando as forças do corpo. No caso geral em que as forças do corpo e a fonte de fluido estão presentes, a Eq. 2.83 assume a forma:

$$\frac{\partial \zeta_f}{\partial t} = c \nabla^2 \zeta_f + \alpha m_v c \nabla \cdot \mathbf{b} + Q_0 \quad (2.85)$$

onde  $m_v$  é o coeficiente de compressibilidade unidimensional dado por  $m_v = 1/(\lambda + 2G)$ .

### 2.3.10 - Coeficiente de armazenamento

Dois coeficientes de armazenamento são examinados nesta seção, o coeficiente de armazenamento e o coeficiente de armazenamento uniaxial. O coeficiente de armazenamento,  $S$ , foi introduzida na equação da conservação de massa (Eq. 2.65) e seu significado físico é mostrado nesta seção. O coeficiente de armazenamento uniaxial,  $S'$ , é o coeficiente de armazenamento equivalente para deformações confinadas lateralmente e também é introduzido nesta seção.

#### Interpretação física do coeficiente de armazenamento

Combinando-se a equação de conservação da massa (Eq. 2.65) com a Eq. 2.75, obtém-se:

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_f}{\partial t} \quad (2.86)$$

A poropressão e a deformação volumétrica dependem do tempo. Já o incremento do conteúdo fluido  $\zeta_f(p(t), \varepsilon_v(t))$  pode ser derivado parcialmente em relação ao tempo conforme a equação:

$$\frac{\partial \zeta_f}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_f}{\partial \varepsilon_v} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (2.87)$$

Para o volume de controle constante, a derivada temporal da deformação volumétrica desaparece das duas Eqs. 2.86 e 2.87. Além disso, utilizando as relações dadas nas Eqs. 2.86 e 2.87, resulta em:

$$\left( S - \frac{\partial \zeta_f}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.88)$$

A Eq. 2.88 envolve a multiplicação de quantidades escalares, das quais está implícita a seguinte relação:

$$S = \frac{\partial \zeta_f}{\partial p} \Big|_{\varepsilon_v=0} \quad (2.89)$$

A Eq. 2.89 fornece ao coeficiente de armazenamento,  $S$ , a interpretação de ser a variação do volume de fluido por unidade de volume de controle e por unidade de mudança de pressão, enquanto o volume de controle permanece constante.

#### Coeficiente de armazenamento uniaxial

O coeficiente de armazenamento para deformação uniaxial é definido nesta seção por meio da Eq. 2.86 e considerando que o volume de controle está confinado lateralmente, ou seja,  $\varepsilon_{xx} = 0$

e  $\varepsilon_{yy} = 0$ . A Eq. 2.86 assume a forma:

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_f}{\partial t} \quad (2.90)$$

Usando a lei constitutiva unidimensional ( $\varepsilon_{zz} = m_v \sigma'_{zz}$ ) e o princípio da tensão efetiva ( $\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} + \alpha p$ ), a Eq. 2.90 torna-se:

$$\alpha m_v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + (S + \alpha^2 m_v) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_f}{\partial t} \quad (2.91)$$

Dessa forma, o coeficiente de armazenamento uniaxial pode ser definido como:

$$S' = S + \alpha^2 m_v \quad (2.92)$$

Considerando que a tensão vertical total  $\sigma_{zz}$  é constante, então o termo que contém  $\sigma_{zz}$  na Eq. 2.91 desaparece. Por meio da Eq. 2.91 e usando argumentos semelhantes à derivação da Eq. 2.89,  $S'$  pode ser definido como:

$$S' = \left. \frac{\partial \zeta_f}{\partial p} \right|_{\varepsilon_{xx}=0, \varepsilon_{yy}=0, \sigma_{zz}=c} \quad (2.93)$$

A Eq. 2.93 fornece ao coeficiente de armazenamento uniaxial,  $S'$ , a interpretação de ser a variação do volume de fluido por unidade de volume de controle e por unidade de mudança de pressão, enquanto o volume de controle é confinado em um estado de deformação lateral igual a zero e tensão vertical constante.

## 2.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O FLUXO DO FLUIDO NA FRATURA

Neste tópico, aborda-se os fatores que influenciam o fluxo do fluido na fratura como: o atraso do fluido em relação a ponta da fratura, o efeito da rugosidade e a perda de fluido por vazamento nas faces da fratura.

### 2.4.1 - O atraso do fluido de fratura e a pressão do fluido na ponta da fissura

O acoplamento entre as equações da elasticidade e de fluxo, para descrever a fratura hidráulica gerada por um fluido viscoso em um material elástico linear, produz uma singularidade no campo de pressão do fluido na ponta da fissura (Lhomme, 2005). Uma vez que o fluido não é capaz de sustentar uma pressão negativa infinita, essa singularidade matemática é removida pela existência de uma zona não molhada na ponta da fratura (Figura 2.16 a) o que provoca o atraso do fluido em relação a ponta da fissura.

A existência do atraso do fluido foi verificada tanto por ensaios numéricos como ensaios experimentais (Desroches et al., 1994; Carbonell et al., 1999; Van Dam et al., 2000). Geertsma e Klerk (1969) estimou o tamanho do atraso do fluido em um sólido elástico linear impermeável como parte da solução do problema de fratura hidráulica, no entanto esse modelo mostrou-se incapaz de prever as altas pressões observadas no campo (Medlin e Fitch, 1983; Palmer e Veatch, 1987). Estudos posteriores conduziram a formas mais apropriadas de modelar de forma explícita ou implícita a existência do atraso do fluido em materiais elásticos linear e impermeável. E estabeleceram as condições sob as quais o atraso do fluido pode ser negligenciado como para casos no qual a propagação da fratura ocorre em um meio impermeável submetido a deformação plana (Garagash e Detournay, 2000). Entretanto, para casos no qual o material é permeável, o atraso do fluido continua uma questão aberta.

Adachi (2001) observou que em reservatórios muito permeáveis a sucção e a troca de fluido com o reservatório podem ter efeito importante no tamanho do atraso do fluido. Na mecânica clássica, a consideração da existência da zona de "rendimento" ou da zona de processo de fratura elimina a singularidade no campo de tensão na ponta da fratura, dessa forma cancela o argumento matemático para a existência do atraso do fluido (Lhomme, 2005). O fluido pode alcançar a ponta da fratura (Figura 2.16 b) e a pressão pode ter um valor finito sem violar o acoplamento entre as equações de fluxo e da elasticidade. Entretanto, as perdas gerada pela fricção no fluxo do fluido viscoso na fratura podem evitar que o fluido alcance a ponta da fissura e o atraso do fluido pode se desenvolver. O tamanho da camada não molhada da fratura é determinada por uma combinação de restrições físicas mensurada por meio da condutividade da fratura. Conforme The SCR Geomechanics Group (1993), o tamanho da zona coesiva pode desempenhar um importante papel no tamanho da camada não molhada, pois evita que fluido alcance a ponta da fratura ao limitar a condutividade da fratura.

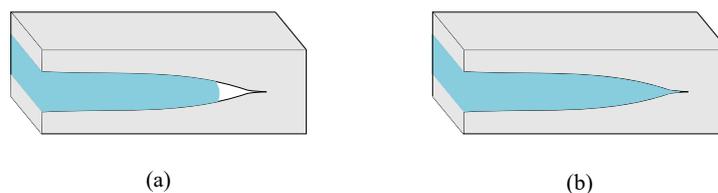


Figura 2.16 – Representação do fluxo do fluido na fratura (a) com atraso e (b) sem atraso.

#### 2.4.2 - Efeito da rugosidade da fratura no fluxo do fluido

A equação de Reynolds é frequentemente empregada para calcular o fluxo do fluido nas fraturas hidráulicas. A resolução analítica dessa equação só é possível quando adota-se geometrias simples para a fratura. No entanto, soluções numéricas podem ser obtidas usando geometrias complexas da fratura, para tanto adotando-se uma função para descreve o campo da abertura da

fratura. Uma grande variedade de publicações foram realizadas visando encontrar as relações entre a geometria rugosa da fratura e suas propriedades hidráulicas, com base nas soluções numéricas da equação de Reynolds. Capasso (2001) escreveu uma revisão abrangente dos resultados relacionados à matéria.

Visando estudar a influência de superfícies rugosas no escoamento, Patir e Cheng (1978) resolveram a equação de Reynolds usando o método da diferença finita, empregando superfícies Gaussianas geradas aleatoriamente com função de autocorrelação linearmente decrescente. O objetivo do trabalho foi o cálculo, através da equação de Reynolds, dos fatores de fluxo de pressão que representam correções à lei cúbica, e são definidos como a terceira potência da relação entre a abertura hidráulica e abertura média (Figura 2.17). Com base na solução obtida usando muitas superfícies simuladas, eles descobriram que os dados poderiam ser melhor ajustados pela seguinte equação:

$$\frac{w_h^3}{\bar{w}^3} = 1 - 0.90e^{-0.56\bar{w}/\sigma_w} \quad (2.94)$$

onde  $\bar{w}$  é a abertura média,  $w_h$  representa a abertura hidráulica e  $\sigma_w$  representa o desvio padrão da abertura da fratura. À medida que a relação  $\bar{w}/\sigma_w$  diminui, isto é, a rugosidade aumenta e a abertura hidráulica diminui. Para uma razão  $\bar{w}/\sigma_w > 6$  o fluxo é o mesmo que aquele entre placas lisas, enquanto para razão  $\bar{w}/\sigma_w < 3$ , a rugosidade da fratura formam barreiras ao fluxo, pois as regiões de contato começam a se formar, resultando em uma diminuição acentuada no fluxo.

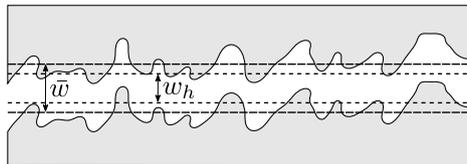


Figura 2.17 – Representação da abertura média ( $\bar{w}$ ) e da abertura hidráulica ( $w_h$ ). Modificado de Lhomme (2005)

Brown (1987) usou superfícies fractais para representar a rugosidade das fraturas empregando o método de diferenças finitas para resolver a equação de Reynolds. Neste estudo as duas superfícies da fratura foram geradas com a mesma dimensão fractal que varia entre 2 e 2,5, e então variou-se a abertura média  $\bar{w}$ . Brown verificou que a dimensão fractal não tem efeito apreciável no fluxo do fluido. Além disso, observou, assim como já descrito por Patir e Cheng (1978), que a abertura média sempre superestima a taxa de fluxo e dá uma concordância pior com a lei cúbica, à medida que a separação é diminuída. As transmissividades de Brown estão muito próximas das encontradas por Patir e Cheng (1978), independentemente da dimensão fractal das superfícies.

Zimmerman e Bodvarsson (1996), com base na análise de várias investigações teóricas, descobriram que a abertura hidráulica pode ser expressa como:

$$\frac{w_h^3}{\bar{w}^3} = 1 - 1.5 \frac{\sigma_w^2}{\bar{w}^2} \quad (2.95)$$

Conforme Zimmerman e Bodvarsson (1996), as similaridades dos resultados obtidos nos trabalhos de Patir e Cheng (1978), Brown (1987) e Zimmerman e Bodvarsson (1996) sugere que a correlação entre os parâmetros adimensionais  $w_h/\bar{w}$  e  $\bar{w}/\sigma_w$  não são sensível às estatísticas da distribuição da abertura consideradas diferentes em cada uma das obras citadas.

### 2.4.3 - Perda de fluido por vazamento nas faces da fratura

O modelo de vazamento de Carter é geralmente utilizado para a previsão de perdas de fluidos a partir das faces da fratura. A derivação desse modelo requer o uso de premissas específicas, como a suposição que a perda de fluido da face da fratura pode ser aproximada a um fluxo unidimensional e perpendicular à face da fissura (Lhomme, 2005). Essa suposição é baseada no fato de que o tamanho da zona na difusão do fluido de fraturamento ocorre geralmente dentro de alguns milímetros, isso implica que essa região possui dimensão muito menor que o comprimento da fratura. Nos estágios iniciais do desenvolvimento da fratura, é provável que a infiltração de fluido da fratura dependa do campo de poropressão na rocha, resultante da invasão prévia de fluido da seção do furo do poço. Isso implica que as perdas de fluido da fratura e do poço devem ser acopladas em um único problema de fluxo bidimensional. No entanto, o vazamento do fluido deve ser pequeno se o comprimento da fratura for menor que o raio da zona invadida pelo fluido ao redor do poço (Figura 2.18). Se a fratura ultrapassar essa zona, o processo de vazamento de sua face pode ser descrito como um processo unidimensional. Nesse caso, o perfil de pressão ao longo de um cilindro de raio  $r$  perpendicular ao plano de fratura pode ser descrito por:

$$p(r, z, t) = a(r, t)z + b(r, t) \quad (2.96)$$

onde  $z$  é a distância ao longo da direção perpendicular à face da fratura.

A função desconhecida  $a(t)$  e  $b(t)$  são determinadas pelas condições de contorno na face da fratura e na frente do fluido:

$$p(r, 0, t) = p_f(r, t) \quad (2.97)$$

$$p(r, l, t) = 0 \quad (2.98)$$

Por meio das Equações 2.97 e 2.98, é possível obter os valores das funções  $a(t)$  e  $b(t)$ . Dessa

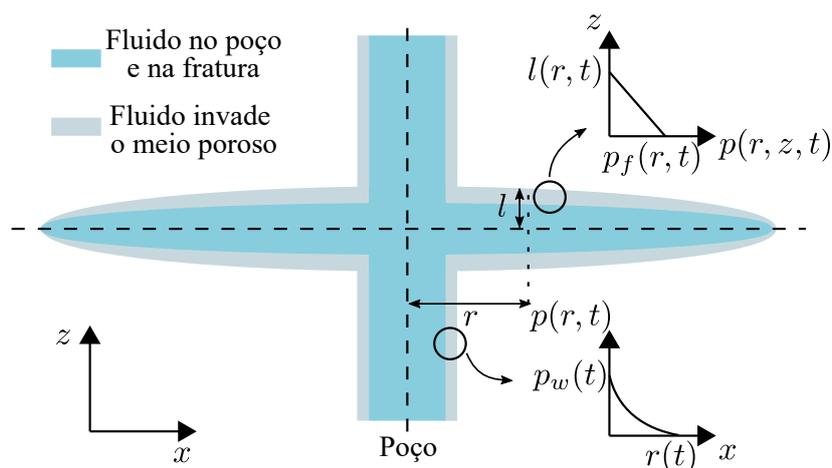


Figura 2.18 – Perfis de poropressão nas zonas invadidas pelo fluido de fraturamento. Modificado de Lhomme (2005)

forma, a Eq. 2.96 resulta em:

$$p(r, z, t) = p_f(r, t) \left( 1 - \frac{z}{l(r, t)} \right) \quad (2.99)$$

A distância  $l(r, t)$  entre a face da fratura e a frente do fluido esta relacionada à velocidade de vazamento  $v_t$  na face da fratura, conforme a equação:

$$v_t = \phi \frac{\partial l}{\partial t} \Big|_r \quad (2.100)$$

que combinado com a lei de Darcy e Eq. 2.96, produz:

$$\frac{\partial l}{\partial t} \Big|_r l(r, t) = \frac{\kappa}{\mu \phi} p_f(t) \quad (2.101)$$

e integrando sobre t:

$$l(r, t) = \sqrt{\frac{2\kappa}{\mu \phi} \int_{t_0(r)}^t p_f(u, r) du} \quad (2.102)$$

onde  $t_0(r)$  é o tempo decorrido desde que a frente do fluido atingiu o ponto de raio  $r$  na fratura. Combinando a lei de Darcy com a Eq. 2.99 e Eq. 2.102, obtém-se uma expressão para a velocidade de vazamento em um ponto de raio  $r$  na face da fratura:

$$v_l(t, r) = \frac{p_f(t, r)}{\sqrt{\frac{2\mu}{\kappa \phi} \int_{t_0(r)}^t p_f(u, r) du}} \quad (2.103)$$

A taxa de vazamento de fluido da face da fratura a partir da integração de toda a área da fratura:

$$Q(t) = 4\pi \int_{R_w}^{R_f(t)} r \frac{p_f(t, r)}{\sqrt{\frac{2\mu}{\kappa\phi} \int_{t_0(r)}^t p_f(u, r) du}} \quad (2.104)$$

e o fator 4 é responsável pelas duas faces fraturadas. Um paralelo pode ser traçado entre a Eq. 2.103 e o modelo clássico de Carter para a velocidade de vazamento de fluido das faces de uma fratura hidráulica. Se a pressão do fluido na fratura pode ser aproximada pelo seu valor médio  $\bar{p}_f$  durante o tempo de injeção, Eq. 2.103 pode ser escrito como:

$$v_t(t, r) = \frac{C_L}{\sqrt{t - t_0(r)}} \quad (2.105)$$

onde  $C_L$  é o coeficiente de vazamento de Carter, que nesse caso é definido como:

$$C_L = \sqrt{\frac{\kappa\phi\bar{p}_f}{2\mu}} \quad (2.106)$$

## 2.5 - MODELOS ANALÍTICOS DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO

A dimensão e as características da propagação da fratura hidráulica são informações importantes no projeto das operações de fraturamento hidráulico. Conhecendo-se as propriedades da rocha, do fluido de fratura e a magnitude e a direção das tensões *in situ*, pode-se obter uma previsão precisa da dimensão da fratura (largura da abertura, comprimento e altura) induzida hidráulicamente para uma taxa de bombeamento durante um determinado tempo (Yew e Weng, 2015). A seguir é apresentado uma breve explanação do processo de fratura em poços e os principais modelos bidimensionais de fraturamento hidráulico.

### 2.5.1 - Fraturamento hidráulico em um poço

A Figura 2.19 apresenta um poço vertical não revestido sob a ação de tensões horizontais *in situ*  $\sigma_{min}$  e  $\sigma_{max}$ . Supondo que a rocha é um meio elástico e tenha uma resistência a tração  $\sigma_t$ , a pressão de ruptura  $p_r$  para a introdução de uma fratura na superfície do poço pode ser calculada aplicando a teoria da elasticidade (Timoshenko e Goodier, 1951):

$$p_r = 3\sigma_{min} - \sigma_{max} + \sigma_t \quad (2.107)$$

onde  $\sigma_{min}$  e  $\sigma_{max}$  são, respectivamente, a tensão mínima e máxima *in situ*, enquanto  $\sigma_t$  representa a resistência a tração da rocha.

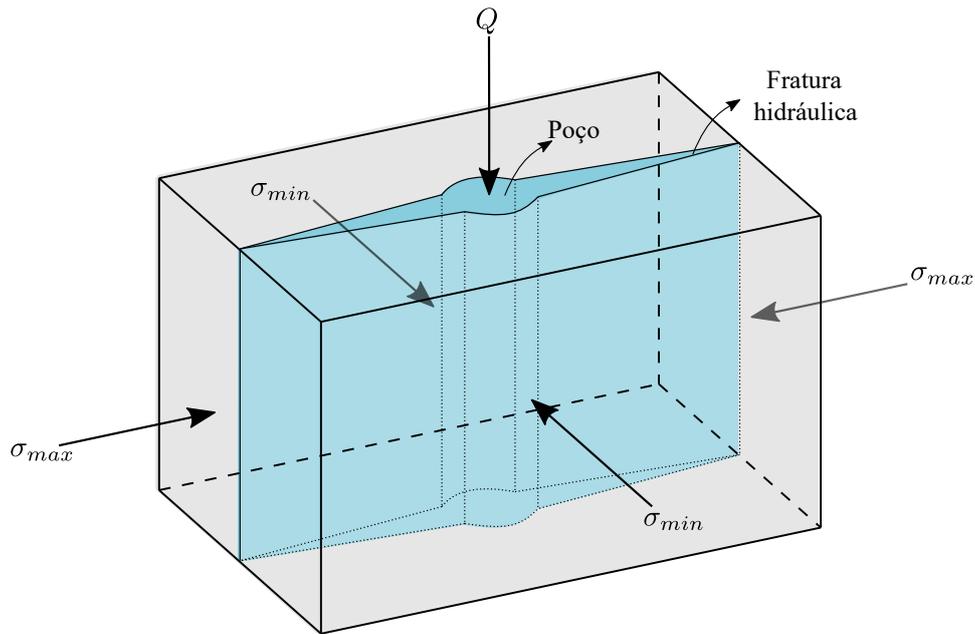


Figura 2.19 – Propagação da fratura hidráulica em um poço submetido a ação da tensão *in situ*.

A fratura hidráulica possui a característica de ser vertical e perpendicular à tensão horizontal mínima *in situ*. A Equação 2.107 é independente do tamanho do furo e dos módulos elásticos do meio rochoso. Para uma seção do poço a uma profundidade de 3000 metros, os valores típicos para as tensões horizontais mínimas e máximas *in situ* são da ordem de 34 e 48 MPa, respectivamente (Yew e Weng, 2015). Já as rochas possuem uma resistência a tração da ordem de 3.4 a 10 MPa (Yew e Weng, 2015). Por tanto, pode-se concluir por meio da Eq. 2.107 que a resistência a tração da rocha tem um pequeno efeito sobre a magnitude da pressão de ruptura e que a maior parte dessa pressão é necessária para superar a tensão circunferencial de compressão do aro produzido por tensões *in situ*.

O registro da pressão do fluido próximo a fratura hidráulica, em um meio homogêneo e isotrópico, durante o bombeamento contínuo é apresentado na Figura 2.20. Inicialmente, a pressão do fluido de fratura no poço atinge a poropressão do reservatório e, em seguida, aumenta rapidamente de forma linear até um pouco antes de atingir a pressão de ruptura, quando a fratura se forma. Após a formação da fratura esta se propaga, e como consequência o volume interno e a permeabilidade da fratura aumentam. Portanto, o nível de pressão do fluido diminui e permanece estável na pressão de propagação da fratura, enquanto o fluido é bombeado para o fundo do poço. Quando o bombeamento cessa, a pressão cai instantaneamente para um valor mais baixo, devido à perda de pressão de fricção no poço e continua a diminuir lentamente até atingir a pressão do reservatório devido ao fechamento da fratura que tende expulsar o fluido. Essa curva considera o caso ideal, no entanto, a pressão no fundo do poço pode variar significativamente durante a realização do fraturamento hidráulico na formação. Essa diferença se deve principalmente à irregularidade da formação, como a

inclusão de fraturas naturais pré-existent. O sistema de fratura natural não apenas causa distribuição de tensão não uniforme perto da fratura hidráulica, mas também aumenta o volume interno da rede de fraturas, de modo que a pressão do fluido que atua ao longo da superfície da fratura pode diminuir quando a fratura hidráulica cruza as fraturas naturais. Portanto, os dados da curva da pressão do fluido podem ser usados para monitorar o processo de fraturamento hidráulico do reservatório.

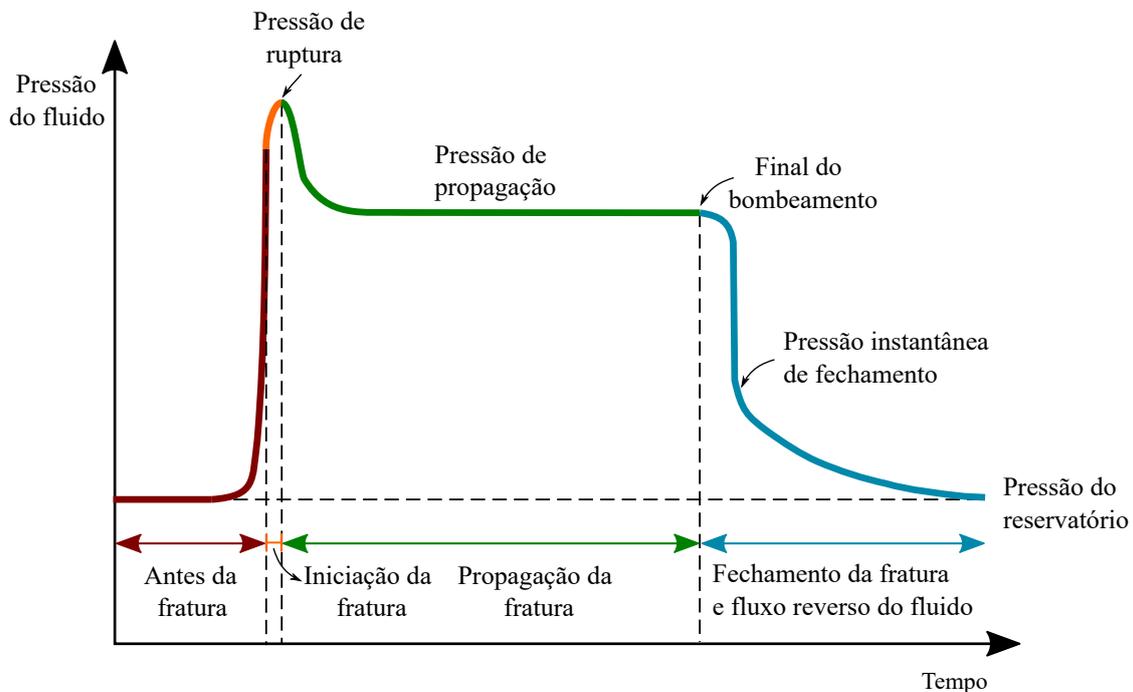


Figura 2.20 – Registro da pressão do fluido em um poço durante o processo de fraturamento hidráulico. Adaptado de Yew e Weng (2015).

### 2.5.2 - Modelo de Khristianovic-Geertsma-de Klerk (KGD)

O modelo Kristianovich-Geertsma-de Klerk (KGD) é um modelo clássico de fraturamento hidráulico 2D, nomeado em homenagem a três pesquisadores que contribuíram para sua criação (Khristianovic e Zheltov, 1955; Geertsma e Klerk, 1969). As hipóteses adotadas para o desenvolvimento do modelo são: a fratura está submetida à condição de deformação plana no plano horizontal; a altura da fratura é constante; o meio em que se encontra a fratura possui o comportamento elástico linear e isotrópico; o fluxo do fluido ocorre entre placas paralelas; não há perda de fluido da fratura para o meio poroso por filtração; a tensão na ponta da fratura é obtida por meio da formulação proposta por Barenblatt. Essa última hipótese, elimina a singularidade no campo da tensão na ponta da fratura decorrente da aplicação da teoria da elasticidade a esse problema.

Conforme Geertsma e Klerk (1969), a fratura pode ser aproximada como um canal de largura

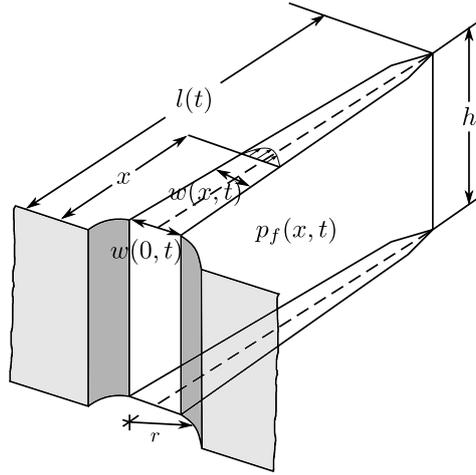


Figura 2.21 – Desenho esquemático do modelo KGD com altura constante. Adaptado de Yew e Weng (2015).

de abertura  $w$ , desse modo a distribuição de pressão para o fluxo de um fluido viscoso (fluido newtoniano) dentro da fratura é expressa por meio da equação:

$$p_f - p = \frac{12 \mu Q_0 l}{h} \int_{f_{lw}}^{f_l} \frac{df_l}{w^3} \quad (2.108)$$

onde  $p_f$  é a pressão do fluido no poço,  $p$  denota a pressão local do fluido,  $h$  representa a altura da fratura,  $l$  é o comprimento total da fratura, enquanto  $Q_0$  é a vazão de injeção do fluido,  $r$  é o raio do poço e  $\mu$  representa a viscosidade do fluido de fratura. Por fim,  $f_l$  e  $f_{lw}$  podem ser expressos por meio das equações  $f_l = x/l$  e  $f_{lw} = r/l$ .

A Eq. 2.108 possui duas incógnitas,  $p$  e  $w$ , portanto outra equação é necessária para obtenção da solução. Em vista disso, England e Green (1963) propuseram a equação para uma fratura plana em um meio elástico infinito:

$$w = \frac{4(1-\nu)l}{\pi G} \left[ \int_{f_l}^l \frac{f_2 df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_l^2}} \int_0^{f_2} \frac{p f_1 df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_1^2}} - \frac{\pi}{2} \sigma_{min} \sqrt{1 - f_l^2} \right] \quad (2.109)$$

onde  $G$  representa o módulo de cisalhamento,  $\nu$  denota o coeficiente de Poisson, os termos  $f_1$  e  $f_2$  representam frações do comprimento de fratura ( $x/l$ ) e  $\sigma_{min}$  representa a menor tensão *in situ*.

O comportamento da abertura da fratura  $w(t)$  e da pressão do fluido  $p(t)$  podem ser obtidos resolvendo-se as Eqs. 2.108 e 2.109 para condições de contorno adequadas. A seguinte condição de suavização na ponta da fissura proposta Barenblatt (1962) foi utilizada por

Geertsma e de Klerk:

$$\left(\frac{dw}{df_l}\right)_{f_l=1} = 0 \quad (2.110)$$

Note que a Eq. 2.109 foi obtida aplicando-se a Teoria da Elasticidade, por tanto as condições de contorno adequadas para a extremidade da fratura seriam  $f_l = 1$ ,  $w = 0$  e não a proposta pela Eq. 2.110. Por tanto, há uma inconsistência matemática na ponta da fratura. Geertsma and de Klerk argumentaram que como a extremidade da fratura é uma singularidade local, seu efeito global seria pequeno e que a solução proposta é uma boa aproximação para a abertura da fratura e seu comportamento global.

Assumindo-se a existência de uma pequena área seca nas proximidades da ponta da fratura e que o formato da porção molhada possa ser aproximado por uma elipse, as seguintes soluções aproximadas (sem filtração) do comprimento da fratura  $l(t)$ , da abertura máxima da fratura  $w(0, t)$  e da pressão do fluido no poço  $p_f(0, t)$  foram obtidas por Geertsma e de Klerk (Yew e Weng, 2015):

$$l(t) = 0.68 \left[ \frac{G Q_0^3}{(1 - \nu) \mu} \right]^{1/6} t^{2/3} \quad (2.111)$$

$$w(0, t) = 1.87 \left[ \frac{(1 - \nu) Q_0^3 \mu}{G} \right]^{1/6} t^{1/3} \quad (2.112)$$

$$p_f(0, t) = \sigma_{min} + 1.38 \left[ \frac{G^3 Q_0 \mu}{(1 - \nu)^3 l^2} \right]^{1/4} \quad (2.113)$$

Por meio das equações, verifica-se que a pressão do fluido no poço diminui com o aumento do comprimento da fratura, aproximando do valor in situ da tensão para grandes valores de  $l$ . Além disso, por assumir a condição de deformação plano no plano horizontal, o modelo KGD se adapta melhor as fraturas cuja relação comprimento/altura é próxima ou menor que a unidade (Yew e Weng, 2015).

### 2.5.3 - Modelo de Perkins-Kern-Nordgren (PKN)

O modelo Perkins-Kern-Nordgren (PKN) é outro modelo clássico de fraturamento hidráulico 2D, nomeado também em homenagem a três pesquisadores que contribuíram para sua criação (Perkins e Kern, 1961; Nordgren, 1972). Este modelo adota as seguintes hipóteses: a fratura está submetida à condição de deformação plana no plano vertical; a altura da fratura é constante e sua seção transversal é elíptica; o meio em que se encontra a fratura possui o comportamento elástico linear e isotrópico; a resistência à fratura não possui influência na sua

geometria, ou seja, assume-se que  $K_{IC}$  do meio rochoso é nulo, pois a energia necessária para a propagação da fratura é significativamente menor do que a necessária para o fluido fluir ao longo do comprimento da fratura.

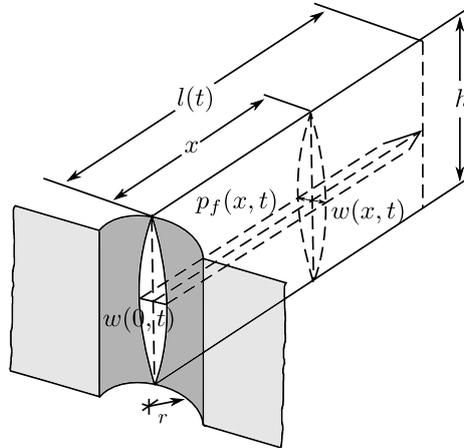


Figura 2.22 – Desenho esquemático do modelo PKN com altura constante. Adaptado de Yew e Weng (2015).

Conforme Nordgren (1972), a equação da continuidade para o fluxo do fluido incompressível pela fratura pode ser expressa como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + q_l = 0 \quad (2.114)$$

onde  $q(x, t)$  é a taxa de volume através da seção transversal da fratura,  $q_l(x, t)$  a taxa de volume de vazamento do fluido por unidade de comprimento de fratura,  $A(x, t)$  representa a área transversal da fratura e  $t$  representa o tempo.

A abertura (elíptica) da fratura  $w$  é diretamente proporcional à pressão do líquido  $p_f$  e pode ser calculada conforme a equação:

$$w = \frac{1 - \nu}{G} p_f \sqrt{h^2 - 4z^2} \quad (2.115)$$

onde  $G$  representa o módulo de cisalhamento,  $\nu$  denota o coeficiente de Poisson e  $h$  representa a altura da fratura.

Conhecendo-se a geometria da fratura, a área de sua seção transversal pode ser escrita como:

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} w dz = \frac{\pi}{4} w_{max} h \quad (2.116)$$

onde  $w_{max}$  é a abertura da região central da fratura.

O calculo da taxa de volume transversal do fluido  $q$  pode ser relacionado ao gradiente de pressão por meio da solução para fluxo laminar de um fluido newtoniano em um tubo elíptico:

$$q = -\frac{\pi w^3 h}{64 \mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \quad (2.117)$$

onde  $\mu$  é viscosidade do fluido de fratura.

Enquanto, a taxa de vazamento do fluido (ou perda por filtração),  $q_l$ , pode ser expressa como:

$$q_l = \frac{2 c_l h}{\sqrt{t - \tau(x)}} \quad (2.118)$$

onde  $c_l$  é o coeficiente de perda do fluido e  $\tau(x)$  é o tempo em que se inicia a filtração na coordenada  $x$ .

Substituindo as Equações 2.116, 2.117 e 2.118 na Equação 2.114, obtém-se a equação que governa a propagação da fratura hidráulica

$$\frac{G}{64(1-\nu)\mu h} \frac{\partial w^4}{\partial x^2} = \frac{8 c_l}{\pi \sqrt{t - \tau(x)}} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.119)$$

Aplicando-se a Eq. 2.119 a condição inicial  $w(x, 0) = 0$  e a condição de contorno  $w(x, t) = 0$  para  $x \geq l(t)$ , obtém-se a equação:

$$\left[ \frac{\partial w^4}{\partial x} \right]_{x=0} = -\frac{256(1-\nu)\mu}{\pi G} Q_0 \quad (2.120)$$

Esta equação foi resolvida numericamente por Nordgren. É importante ressaltar que a pressão do poço prevista pelo modelo PKN, ao contrario do modelo KGD, aumenta com o aumento do comprimento da fratura. Em casos extremos de pequena ou grande filtração, uma solução analítica pode ser derivada da Eq. 2.119.

Para grandes perdas de fluido por filtração o comprimento da fratura  $l(t)$ , a abertura máxima da fratura  $w(0, t)$  e a pressão do fluido no poço  $p_f(0, t)$  podem ser obtidos por meio das equações (Yew e Weng, 2015):

$$l(t) = \frac{Q_0}{\pi c_l h} t^{1/2} \quad (2.121)$$

$$w(0, t) = 4 \left[ \frac{2(1-\nu)\mu Q_0^2}{\pi^3 G c_l h} \right]^{1/4} t^{1/8} \quad (2.122)$$

$$p_f(0, t) = 4 \left[ \frac{2 G^3 \mu Q_0^2}{\pi^3 (1 - \nu)^3 c_l h^5} \right]^{1/4} t^{1/8} \quad (2.123)$$

Por outro lado, para pequenas perdas de fluido por filtração  $l(t)$ ,  $w(0, t)$  e  $p_f(0, t)$  podem ser obtidos por meio das equações (Yew e Weng, 2015):

$$l(t) = 0.68 \left[ \frac{G Q_0^3}{(1 - \nu) \mu h^4} \right]^{1/5} t^{4/5} \quad (2.124)$$

$$w(0, t) = 2.5 \left[ \frac{(1 - \nu) \mu Q_0^2}{G h} \right]^{1/5} t^{1/5} \quad (2.125)$$

$$p_f(0, t) = 2.5 \left[ \frac{G^4 \mu Q_0^2}{(1 - \nu)^4 h^6} \right]^{1/5} t^{1/5} \quad (2.126)$$

Devido à hipóteses de deformação plana no plano vertical, o modelo PKN tem sido geralmente considerado como melhor modelo 2D para fraturas com grande relação comprimento/altura (Yew e Weng, 2015).

#### 2.5.4 - Modelo de fratura circular

A fratura hidráulica deve assumir a forma circular quando a distribuição de tensão mínima *in situ* é uniforme (Yew e Weng, 2015). Geometricamente, uma fratura circular é uma fratura 3D, no entanto, é matematicamente semelhante uma fratura 2D de altura constante. Geertsma e Klerk (1969) demonstraram que as equações governantes da fratura KGD podem ser facilmente convertidas para descrever a fratura circular (Figura 2.23). Para tanto adotaram as seguintes hipóteses: o meio em que se encontra a fratura possui o comportamento elástico linear e isotrópico; A fratura é considerada radialmente simétrica e gerada a partir de uma fonte pontual em seu centro. A periferia da fratura é circular, conforme mostrado na Figura 2.23; O fluido de fraturamento newtoniano é injetado com uma vazão constante,  $Q_0$ , e seu fluxo é laminar;

$$p_f - p = \frac{6 \mu Q_0}{\pi} \int_{f_{r_0}}^{f_r} \frac{df_r}{f_r w^3} \quad (2.127)$$

onde  $p_f$  denota a pressão do fluido no poço,  $p$  representa a pressão local do fluido,  $Q_0$  é a vazão de injeção do fluido,  $\mu$  é a viscosidade do fluido de fratura e  $w$  é a abertura da fratura. Os termos  $r_0$  e  $r$  representam, respectivamente, o raio do poço e o raio da fratura, enquanto  $R$  representa a máxima extensão da fratura e os termos  $f_r$  e  $f_{r_0}$  podem ser expressos por meio das equações  $f_r = r/R$  e  $f_{r_0} = r_0/R$ .

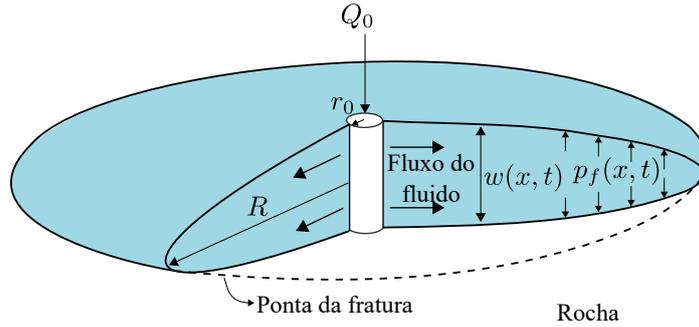


Figura 2.23 – Desenho esquemático do modelo fratura radial KGD.

De forma similar ao cálculo da fratura KGD a Eq. 2.127 possui duas incógnitas,  $p$  e  $w$ , portanto outra equação é necessária para obtenção da solução:

$$w = \frac{4(1-\nu)R}{\pi G} \left[ \int_{f_{r0}}^1 \frac{df_2}{\sqrt{f_2^2 - f_r^2}} \int_{f_{r0}}^{f_2} \frac{f_1 p(f_1) df_1}{\sqrt{f_2^2 - f_r^2}} - \sigma \sqrt{1 - f_r^2} \right] \quad (2.128)$$

onde  $G$  representa o módulo de cisalhamento,  $\nu$  denota o coeficiente de Poisson, os termos  $f_1$  e  $f_2$  representam frações do comprimento de fratura e  $\sigma$  representa a tensão normal ao plano da fratura.

As equações de Geertsma-de Klerk indicam que a tenacidade do material é desprezível (Geertsma e Klerk, 1969). Entretanto, outros pesquisadores chegaram à conclusão oposta, afirmando que a proporção da energia usada para criar novas superfícies da fratura com a energia dissipada do fluxo de fluido viscoso ajuda a decidir se a tenacidade pode ser negligenciada. Se a proporção for pequena, a tenacidade pode ser desprezada e, se for grande, devemos levar a tenacidade em consideração. Para o modelo radial KGD sem vazamento, este critério produz um valor crítico denominado tenacidade adimensional,  $\kappa$ , que é o único parâmetro contido nas equações em escala que determina os três regimes diferentes para a análise adimensional do modelo radial KGD (FrackOptima, 2014):

1. Regime dominado pela viscosidade ( $\kappa = 0$ ): a tenacidade pode ser desprezada
2. Regime dominado por tenacidade ( $\kappa = \infty$ ): a viscosidade pode ser desprezada
3. Regime transitório: ambos os parâmetros devem ser levados em consideração

A tenacidade adimensional,  $\kappa$ , é definida como:

$$\kappa = K' \left( \frac{t^2}{\mu^{15} Q_0 E^{13}} \right)^{1/18} \quad (2.129)$$

onde  $K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{IC}$ , o termo  $K_{IC}$  representa a tenacidade à fratura do material,  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $t$  é o tempo e  $\mu' = 12\mu$ .

Na análise adimensional do modelo radial KGD, a condição na ponta da fratura de Barenblatt é substituída pela teoria da lubrificação. Portanto, a equação que rege a pressão do fluido (Eq. 2.127) é substituída pela equação não linear da teoria de lubrificação, enquanto a Eq. 2.128 ainda se mantém:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.130)$$

A solução analítica aproximada, conforme Savitski e Detournay (2002), para o raio da fratura  $r(t)$ , para a abertura da fratura  $w(r, t)$  e para a pressão do fluido  $p_f(r, t)$  são dadas pelas equações:

$$r(t) = \gamma [P(t)] L(t) \quad (2.131)$$

$$w(r, t) = \varepsilon(t) L(t) \Omega[\rho, P(t)] \quad (2.132)$$

$$p_f(r, t) = \varepsilon(t) E' \Pi[\rho, P(t)] \quad (2.133)$$

$\varepsilon(t)$  é um número pequeno sem dimensão,  $L(t)$  representa um comprimento da mesma ordem do raio de fratura  $r(t)$ ,  $P(t)$  é um parâmetro dependente do tempo,  $\rho = r_0/r(t)$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) é a coordenada radial adimensional,  $r_0$  é o raio do poço e  $E' = E/(1 - \nu^2)$ .

Na regime dominado pela viscosidade, o parâmetro  $P(t)$  pode ser interpretado como uma tenacidade adimensional,  $\kappa$ , enquanto o termo  $\varepsilon(t)$  e o comprimento  $L(t)$  podem ser expressos como:

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{\mu'}{E't} \right)^{1/3} \quad (2.134)$$

$$L(t) = \left( \frac{E' Q_0^3 t^4}{\mu'} \right)^{1/9} \quad (2.135)$$

A aproximação de primeira ordem da solução de tenacidade zero é dado por:

$$\gamma = 0.6955 \quad (2.136)$$

$$\Omega = (C_1 + C_2 \rho)(1 - \rho)^{2/3} + B_1 [(1 - \rho^2)^{1/2} - \rho \arccos \rho] \quad (2.137)$$

$$\Pi = A_1 \left( \omega_1 - \frac{2}{3(1-\rho)^{1/3}} \right) - B_2 \left( \ln \frac{\rho}{2} + 1 \right) \quad (2.138)$$

onde  $A_1 = 0.3581$ ,  $B_1 = 0.1642$ ,  $B_2 = 0.09269$ ,  $C_1 = 1.034$ ,  $C_2 = 0.6378$  e  $\omega_1 = 2.479$ .

### 3 - MODELAGEM DA FRATURA EM MATERIAIS QUASE FRÁGEIS

A modelagem de materiais quase frágeis, como concreto e rochas, mostra-se uma tarefa desafiadora, pois deve-se levar em conta os efeitos causados pelas fraturas nos campos de tensão e deslocamento. Para esse fim, a literatura de elementos finitos oferece diversos modelos baseados nas abordagens contínuas e descontínuas.

Na abordagem contínua, as fissuras são representadas de maneira distribuída sobre o elemento finito. Essa classe de modelos é frequentemente formulada considerando fissuras ortogonais e não ortogonais; ver por exemplo Gupta e Akbar (1984), Borst e Nauta (1985), Barros e Figueiras (2001), Cunha et al. (2011), Cunha et al. (2012) e Červenka et al. (2018). Modelos de danos isotrópicos e anisotrópicos também são exemplos de modelos de fissuras distribuídas (Mazars, 1986; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1996; Comi e Perego, 2001; Basaran e Nie, 2007; Pituba e Fernandes, 2011). No entanto, a abordagem contínua tem capacidade limitada de modelar descontinuidades nítidas, funcionando melhor quando as fissuras são espalhadas por todo o material, como em algumas aplicações de concreto armado. Por outro lado, na abordagem descontínua, as fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamento entre elementos finitos; ver por exemplo Ngo e Scordelis (1967), Nilson (1968), Bocca et al. (1990), Gerstle e Xie (1992), Li (1993), Carol et al. (1997), Pandolfi et al. (1999), Cendón et al. (2000), Roy e Dodds (2001), Pandolfi e Ortiz (2002), Jin et al. (2003), Song et al. (2006), Xie (2006) e Manzoli et al. (2016). Essa abordagem geralmente requer a adição de elementos de interface de espessura zero destinados a modelar as aberturas das fissuras e, dessa forma, possibilita representações das fissuras mais realistas quando comparadas com modelos contínuos, pois permite visualizar as aberturas das fissuras devido a separação progressiva dos elementos sólidos. O método dos elementos finitos estendidos (X-FEM) (Melenk e Babuska, 1996; Wells e Sluys, 2001; Moës e Belytschko, 2002; Mariani e Perego, 2003; Asferg, 2006; Fries e Belytschko, 2006; Simone, 2007; Belytschko et al., 2009; Gupta et al., 2012) é outra técnica que pode ser classificada como uma abordagem discreta, pois rastreia os caminhos das fissuras durante a análise usando funções de forma do elemento finito como partições da unidade (Wells e Sluys, 2001). A descontinuidade no campo de deslocamento de uma fissura é representado por graus extras de liberdade nos nós existentes. Dessa forma, permite a simulação da evolução das fissuras sem a necessidade de remalhagem.

No que diz respeito ao uso de elementos coesivos na modelagem de materiais quase frágeis, a escolha do modelo constitutivo é essencial para uma representação precisa do processo de fratura. A maioria dos modelos constitutivos utiliza conceitos da mecânica da fratura como o modelo de zona coesiva (Dugdale, 1960; Barenblatt, 1962; Hillerborg et al., 1976) para

descrever a relação entre as tensões coesivas e a abertura das fissuras, bem como para identificar o desenvolvimento de novas trincas. O modelo de zona coesiva inclui uma zona de processo de fratura (ZPF) que tem a capacidade de transferir tensões através da descontinuidade. Essas tensões coesivas podem ser estimadas por meio das curvas de amolecimento do material. Além disso, presume-se que a fratura se propague quando a tensão na ponta da fratura atinge a resistência à tração do material.

Este capítulo enfoca o desenvolvimento de um modelo constitutivo do elemento de interface para ser utilizado na simulação de materiais quase frágeis como o concreto. O modelo foi elaborado usando a teoria da plasticidade com a superfície de plastificação baseada em Coulomb, uma regra de fluxo não associada e um esquema de integração de tensões implícitas. Duas curvas não lineares são usadas como leis de amolecimento tensão-abertura: uma lei bilinear e a lei de Hordijk exponencial (Hordijk, 1992). O modelo constitutivo aplicado aos elementos de interface permite simular a transferência de tensões normal e cisalhantes em uma fissura. Essas características permitem a modelagem da formação de fissuras simples e múltiplas em modo I e modo misto (I e II). Simulações de elementos finitos usando o modelo proposto funcionam para diferentes níveis de refinamento da malha. O modelo foi validado em ensaios de extensão e cisalhamento e posteriormente aplicado na simulação de diversos experimentos clássicos de amostras de concreto. Esses experimentos foram amplamente simulados por abordagens anteriores usando elementos coesivos e outros métodos avançados como XFEM. No entanto, vários resultados das simulações, freqüentemente, apresentam discrepâncias ao tentar prever o ramo de amolecimento das curvas experimentais. Os resultados numéricos usando o modelo proposto mostram uma boa concordância quando comparados aos resultados experimentais. A abordagem proposta foi utilizada para simular uma grande variedade de experimentos diferentes, mostrando a versatilidade e a capacidade do modelo de representar adequadamente o processo de fratura em materiais quase frágeis. Além disso, o modelo fornece estabilidade numérica. Nenhum problema de convergência foi apresentado durante a execução das simulações. Todos os aspectos do modelo são explorados cuidadosamente de forma a permitir a reprodução das técnicas de solução.

Neste capítulo é apresentada a metodologia utilizada para a modelagem da fratura em materiais quase frágeis. Inicialmente é apresentando o procedimento empregado pelo algoritmo para a inserção de elementos de interface de camada dupla entre os elementos sólidos em malha convencional de elementos finitos. Posteriormente, aborda-se a formulação do elemento interface isoparamétrico necessária para implementação. Em seguida, aborda-se o modelo constitutivo empregado para o elemento de interface e o procedimento para a solução das equações provenientes dos elementos finitos. Por fim, são apresentadas as análises numéricas utilizando o modelo proposto e a discussão sobre utilização da abordagem proposta.

### 3.1 - GERAÇÃO DA MALHA COM ELEMENTOS DE INTERFACE DE CAMADA DUPLA

Considerando uma malha convencional de elementos finitos (Figura 3.1 a), este procedimento trata da inserção de elementos de interface entre os elementos sólidos. Isso, em princípio, é um problema geométrico. Como cada elemento de interface liga dois elementos sólidos por lados que compartilham o mesmo local, esses lados devem ser identificados adequadamente. O procedimento de adição de elementos de interface é apresentado no Algoritmo 1 e pode ser explicado em três etapas principais. Essas etapas são descritas no contexto da programação orientado objeto, portanto, assume-se que a malha pode ser descrita em termos de nó e objeto do elemento. Além disso, assume-se que cada objeto do elemento contém uma lista com ponteiros para seus nós correspondentes. As etapas mencionadas são:

1. **Separação dos elementos:** Nesta etapa, todos os elementos da malha são destacados de seus vizinhos para evitar o compartilhamento de nós (Figura 3.1 b). Para este propósito, em cada elemento, os ponteiros nodais são substituídos por cópias dos ponteiros dos nós originais. Em outras palavras, para cada elemento, novos nós são criados e vinculados em substituição aos originais. Esse procedimento fornece um conjunto completamente novo de nós para a malha, portanto, os nós originais podem ser descartados.
2. **Emparelhamento das faces:** Para cada elemento, uma lista de faces é gerada. Cada face contém uma lista de ponteiros nodais correspondente. Em seguida, um valor de *hash* é calculado para cada face em todos os elementos. O propósito de usar um valor de *hash* é verificar facilmente se duas faces têm a mesma localização, que é o caso no lado comum de dois elementos vizinhos. Assim, a função *hash* deve ser definida de uma maneira que retorne o mesmo valor para duas faces que contenha a mesma posição. Quando duas faces com o mesmo valor de *hash* são detectadas, um objeto de par de faces é gerado e armazenado em uma lista.
3. **Geração dos elementos de interface:** Para cada par de faces encontrado na etapa anterior, um novo elemento de interface é gerado (Figura 3.1 c). A conectividade de um elemento interface é dada por uma lista com ponteiros nodais obtidos das faces correspondentes. Finalmente, a malha é atualizada para incluir os elementos de interface recém-gerados.

---

**Algorithm 1:** Algoritmo de adição dos elementos de interface de duas camadas.

---

**Input:** Uma malha convencional chamada *Malha*

**Output:** A versão atualizada da *Malha* incluindo elementos de interface localizados entre os elementos 3D

*! Etapa 1: Separação dos elementos*

obter uma lista *Elementos* com todos os elementos da *Malha*

**foreach** *elem* em *Elementos* **do**

┌ copie os dados dos nós em *elem* para novos objetos dos nós

┌ substitua os ponteiros nodais em *elem* por correspondentes cópias dos ponteiros

┌ descartar objetos dos nós originais

*! Etapa 2: emparelhamento das faces com o mesmo valor de hash*

*ParesFaces* = [ ] *! Uma lista dos pares das faces correspondentes*

*Faces* = [ ] *! Uma lista de todas as faces*

**foreach** *elem* em *Elements* **do**

┌ crie uma lista *ElemFaces* com todas as faces dos *elem*

┌ **forall** face *f* em *ElemFaces* **do**

┌┌ calcule um valor de hash para *f*

┌┌ **if** uma face  $\bar{f}$  da *Faces* tem o mesmo valor de hash que a face *f* **then**

┌┌┌ adicione o par (*f*,  $\bar{f}$ ) a *ParesFaces*

┌┌┌ remova *f* de *Faces*

┌┌ **else**

┌┌┌ adicione *f* a *Faces*

*! Etapa 3: geração dos elementos de interface*

*InterFaces* = [ ] *! Lista para elementos de interface recém gerados*

**foreach** *par* em *ParesFaces* **do**

┌ *INodes* = [ ] *! Uma lista com ponteiros para os nós de um elemento de interface*

┌ **foreach** face *f* em *par* **do**

┌┌ obtenha todos os nós de *f* e adicione seus ponteiros a *INodes*

┌ gere um elemento de interface *I* com conectividade baseada em *INodes*

┌ adicione *I* a *InterFaces*

atualize a lista dos nós em *Malha* com todos os nós encontrados em *InterFaces*

atualize a lista dos elementos em *Malha* com os elementos em *InterFaces*

renumere todos os nós e elementos em *Malha*

---

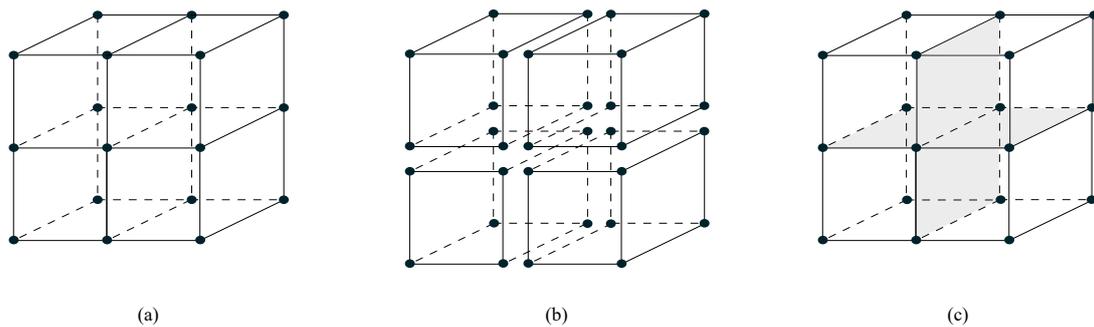


Figura 3.1 – Geração da malha com elementos de interface de camada dupla: a) malha inicial; b) separação dos elementos (novos nós são gerados); c) geração dos elementos de interface por meio da conexão dos pares das faces dos elementos vizinhos.

### 3.2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE INTERFACE ISOPARAMÉTRICO

Esta seção apresenta a formulação do elemento de interface isoparamétrico em três dimensões, além de apresentar a equação para determinar o comprimento representativo dos elementos sólidos, necessário na etapa de modelagem constitutiva.

#### 3.2.1 - Formulação do elemento finito

A Figura 3.2 apresenta um elemento de interface de camada dupla de oito nós, com área  $A$  e espessura zero. A Figura 3.2a apresenta o elemento locado no sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$ , enquanto a Figura 3.2b mostra o elemento no sistema de coordenadas paramétrica  $(\eta, \xi)$ . É importante ressaltar que o elemento de interface pode ter interpolação quadrática caso ocorra o acréscimo de mais nós as faces do elemento. Além disso, as faces do elemento de interface pode ter formato triangular.

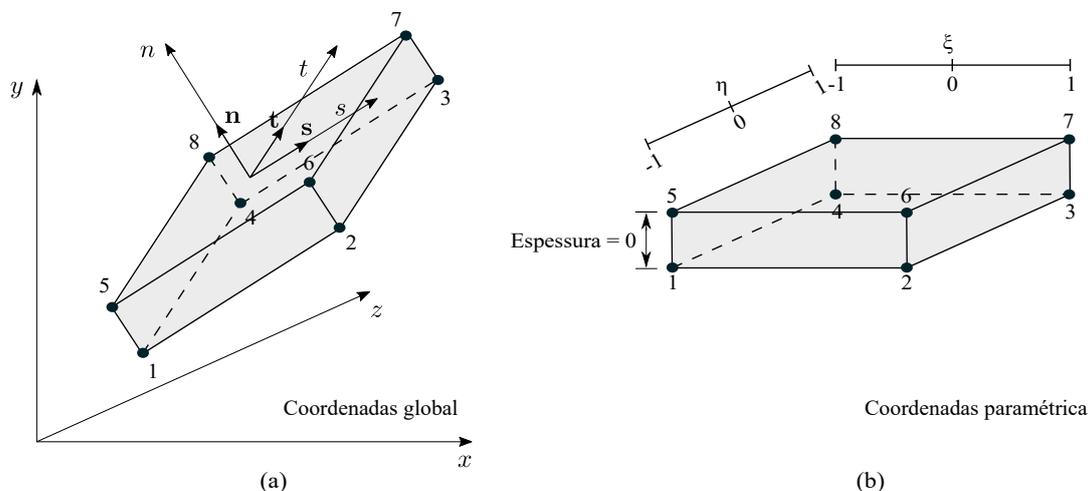


Figura 3.2 – Elemento de interface de oito nós: a) sistema global  $x y z$  e referência global dada pelos vetores  $n, s$  e  $t$ ; b) sistema de coordenadas paramétricas.

O vetor de deslocamento para o presente elemento de interface pode ser escrito como:

$$\mathbf{a}_{int} = \left\langle u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{z1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{z2} \quad \cdots \quad u_{x7} \quad u_{y7} \quad u_{z7} \quad u_{x8} \quad u_{y8} \quad u_{z8} \right\rangle \quad (3.1)$$

Por outro lado, o deslocamento relativo entre as faces  $\langle w_n \quad w_s \quad w_t \rangle$  no sistema de coordenadas paramétrica  $(\eta, \xi)$  pode ser calculado por interpolação como:

$$\mathbf{u}_{int}(\xi, \eta) = \mathbf{R}(\xi, \eta) \mathbf{N}_{int}(\xi, \eta) \mathbf{a}_{int}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{N}_{int}(\xi, \eta)$  representa a matriz das funções de forma e  $\mathbf{R}(\xi, \eta)$  denota a matriz de rotação utilizada para expressar os deslocamentos global no sistema local. A matriz de rotação  $\mathbf{R}$  pode ser expressa por meio dos termos  $n_i$ ,  $s_i$  e  $t_i$  que são as componentes dos vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , respectivamente:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A matriz de rotação é facilmente calculada por meio da matriz Jacobiana do elemento quadrilateral considerando-se apenas os quatros primeiros nós do elemento de interface. A matriz Jacobiana pode ser definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O jacobiano resulta em uma matriz não quadrada uma vez que o mapeamento ocorre entre os sistemas  $(x, y, z)$  e  $(\eta, \xi)$ . Cada linha do vetor jacobiano representa um vetor tangente a superfície da face. Essa propriedade é usada para encontrar o conjunto de vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ . O vetor  $\mathbf{n}$  é calculado como um vetor unitário do resultado do produto dos vetores das duas linhas da matriz jacobiana. Por outro lado os vetores  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  podem ser escolhidos de forma arbitrária desde que sejam perpendicular ao vetor  $\mathbf{n}$ . O vetor  $\mathbf{s}$  é escolhido como o unitário do vetor da primeira linha da matriz jacobiana. Finalmente, o vetor  $\mathbf{t}$  é encontrado como o vetor unitário do produto  $\mathbf{n} \times \mathbf{s}$ .

A matriz de interpolação  $\mathbf{N}$ , é dada por:

$$\mathbf{N}_{int} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \cdots & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \cdots & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \cdots & 0 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  e  $N_4$  são as mesmas funções de forma do elemento quadrilateral. A Figura 3.3

apresenta um exemplo de dois elementos sólidos ligados por um elemento de interface. Neste caso, a conectividade do elemento de interface é dado pelos nós 2, 3, 7, 6, 9, 12, 16 e 13.

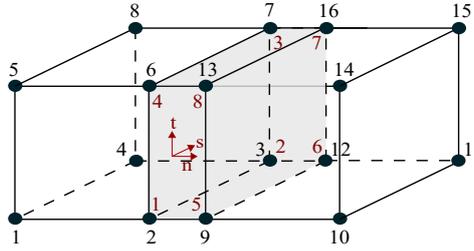


Figura 3.3 – Numeração global (em preto) e local (em vermelho) dos nós do elemento de interface.

O estado de tensão ao longo do elemento de interface é representado pelo vetor  $\boldsymbol{\sigma}_{int} = \langle \sigma_n, \tau_s, \tau_t \rangle$ , onde  $\sigma_n$ ,  $\tau_s$  e  $\tau_t$  representam, respectivamente, as componentes de tensão nas direções  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ . O incremento do vetor tensão  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{int}$  é relacionado com o incremento do vetor deslocamento  $\Delta\mathbf{u}_{int}$  por meio da matriz constitutiva  $\mathbf{D}_{int}$ :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{int} = \mathbf{D}_{int} \Delta\mathbf{u}_{int}. \quad (3.6)$$

Usando, o procedimento convencional de elemento finito, como método de trabalho virtual, pode-se chegar facilmente à seguinte equação para a matriz de rigidez de um elemento de interface:

$$\mathbf{K}_{int} = \int_A \mathbf{B}_{int}^T \mathbf{D}_{int} \mathbf{B}_{int} dA \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{B}_{int} = \mathbf{R}\mathbf{N}_{int}$ . A matriz  $\mathbf{K}_{int}$  pode ser calculada usando a integração numérica; para este propósito o número de pontos de integração deve ser definido de acordo com o grau do integrando. Por exemplo, neste trabalho, elementos coesivos quadrilaterais de oito nós são integrados usando quatro pontos de integração e elementos coesivos triangulares de seis nós são integrados usando três pontos de integração. Para  $m$  pontos de integração, a matriz de rigidez é aproximada como:

$$\mathbf{K}_{int} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \text{norm}(\mathbf{J}_i) \quad (3.8)$$

Como  $\mathbf{J}$  é uma matriz não quadrada, sua norma é calculada como:

$$\text{norm}(\mathbf{J}) = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} J_{13} & J_{11} \\ J_{23} & J_{21} \end{array} \right|^2} \quad (3.9)$$

onde  $J_{ij}$  são as componentes da matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ .

### 3.2.2 - Cálculo do comprimento representativo dos elementos

A simples adição dos elementos coesivos a uma malha convencional tornaria o domínio mais flexível devido a adição de graus de liberdade e a deformabilidade dos elementos de interface. Para reduzir a dependência da malha, a rigidez do elemento de interface necessita estar relacionado ao tamanho dos elementos sólidos vizinhos, ou seja, a um comprimento representativo. Por tanto, utiliza-se no cálculo da rigidez do elemento de interface o comprimento representativo  $h$  que representa o comprimento médio do elemento sólido na direção perpendicular ao elemento coesivo. Considere, por exemplo, as malhas da Figura 3.4 e assumamos que todos os elementos sólidos estão ligados por elementos coesivos. No primeiro caso, o comprimento representativo é dado pela largura dos elementos, pois todos os elementos sólidos são iguais. No segundo caso, o comprimento representativo do elemento coesivo entre os dois elementos sombreados será a média entre as larguras  $h_1$  e  $h_2$ . No último caso, o valor de  $h$  para os elementos sombreados é calculado considerando dois elementos prismáticos com volumes equivalentes,  $V_1$  e  $V_2$ . Isso permite calcular duas larguras equivalentes:  $h_1 = V_1/A$  e  $h_2 = V_2/A$ . Finalmente, o comprimento representativo é dado pela média destes valores:

$$h = \frac{V_1 + V_2}{2A}, \quad (3.10)$$

uma vez que a formulação satisfaz os casos anteriores, esta pode ser usada para calcular o comprimento representativo para qualquer par de elementos sólidos.

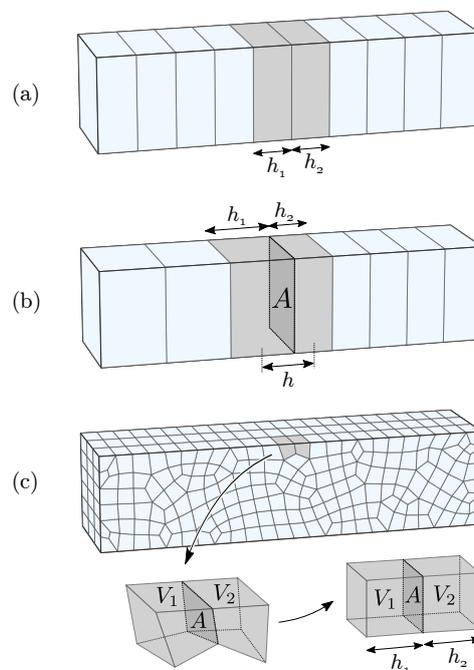


Figura 3.4 – Cálculo do comprimento representativo dos elementos sólidos: a) em uma malha com elementos retangulares iguais; b) em uma malha com elementos retangulares de diferentes tamanhos; c) em uma malha não estruturada.

### 3.3 - MODELAGEM CONSTITUTIVA DO ELEMENTO DE INTERFACE

Neste trabalho, propõe-se um modelo 3D constitutivo do elemento de interface (Durand e Silva, 2021) que é uma extensão do modelo 2D apresentado no trabalho de Durand e Silva (2019) (ver apêndice). Este modelo é desenvolvido usando a teoria da plasticidade, apresentando uma superfície de plastificação baseada na lei de Coulomb, uma regra de fluxo não associada e um esquema implícito de integração de tensões. A superfície de plastificação do modelo é dado pela formulação:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{max}) = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2} + (\sigma_n - \sigma_{max}) \tan \phi = 0 \quad (3.11)$$

onde  $\sigma_n$ ,  $\tau_s$  and  $\tau_t$  são, respectivamente, as componente de tensão do elemento de interface nas direções dos vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , enquanto  $\sigma_{max}$  é a variável interna, isto é, a resistência a tração do material, e  $\phi$  é ângulo de atrito do material. A Figura 3.5a mostra a superfície de plastificação. Nessa figura é possível observar  $\sigma_{max}^{(0)}$  e  $\tau_{max}^{(0)}$  que representam, respectivamente, a resistência inicial à tração e ao cisalhamento do material. O modelo proposto utiliza uma regra de fluxo não associada. A função do potencial plástico é apresentada na Figura 3.5b e sua equação é dada por:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{max}) = \begin{cases} \tau_s^2 + \tau_t^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{para } \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n^2 \tan^2 \phi + \tau_s^2 + \tau_t^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{para } \sigma_n > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

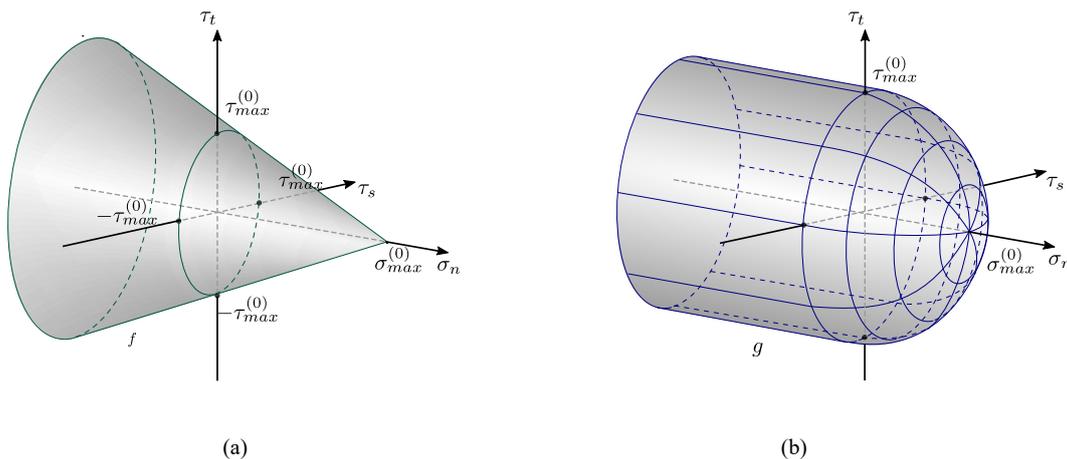


Figura 3.5 – Modelo do elemento de interface: a) Superfície de plastificação; b) Superfície do potencial plástico

A variável interna  $\sigma_{max}$  define a localização da superfície de plastificação, visando simular a perda de rigidez devido a fissuração. Esta variável é uma função do deslocamento plástico

relativo efetivo que é definido como:

$$u_p = \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_p\| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{w}_{np}^2 + \dot{w}_{sp}^2 + \dot{w}_{tp}^2} dt \quad (3.13)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}_p = \langle \dot{w}_{np}, \dot{w}_{sp}, \dot{w}_{tp} \rangle$ , enquanto  $\dot{w}_{np}$ ,  $\dot{w}_{sp}$  e  $\dot{w}_{tp}$  são as componentes do incremento do deslocamento plástico relativo nas direções dos vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , respectivamente. Existem várias curvas de amolecimento disponíveis na literatura para relacionar  $\sigma_{max}$  e  $u_p$ . Neste trabalho, duas curvas de amolecimento são investigada: uma bilinear e uma exponencial, proposta por Hordijk (1992). As duas curvas são apresentadas na Figura 3.6 onde  $u_c$  representa a abertura crítica de fissura. Nessas curvas, o  $\sigma_{max}$  reduz quando  $u_p$  aumenta; isso causa o deslocamento da superfície de plastificação conforme mostra a Figura 3.7.

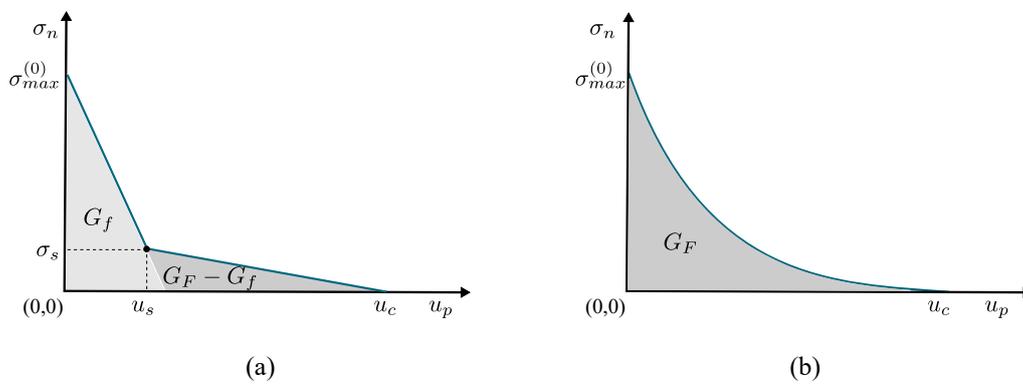


Figura 3.6 – Curva de amolecimento: a) Curva de amolecimento bilinear; b) Curva de amolecimento de Hordijk.

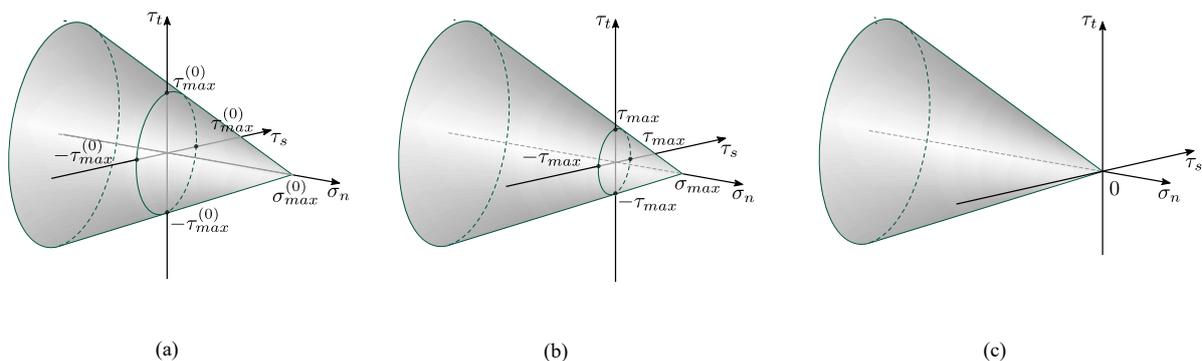


Figura 3.7 – Evolução da superfície de plastificação: a) localização inicial ( $u_p = 0$ ); b) localização intermediária ( $0 < u_p < u_c$ ); c) localização final ( $u_p \geq u_c$ ).

### 3.3.1 - Curvas de amolecimento

A curva bilinear possui dois segmentos lineares conforme apresenta a Figura 3.6a, onde  $(u_s, \sigma_s)$  reapresenta o ponto no qual a inclinação da curva muda. Além disso, o termo  $u_c$

representa a abertura crítica da fissura, onde  $\sigma_{max}$  é igual a zero. Apesar da curva bilinear ser considerada uma razoável aproximação para curva de amolecimento, não há concordância sobre a localização do ponto  $(u_s, \sigma_s)$ . Neste trabalho, assume-se  $\sigma_s$  como  $0.25\sigma_{max}^{(0)}$  como proposto por Wittmann et al. (1988) e os termos  $u_s$  e  $u_c$  são calculados de tal maneira que a área abaixo da curva seja igual a energia de fratura  $G_F$ :

$$u_c = \frac{5 G_F}{\sigma_{max}^{(0)}} \quad \text{e} \quad (3.14)$$

$$u_s = 0.15u_c. \quad (3.15)$$

Quando a energia de fratura inicial  $G_f$  também está disponível,  $u_c$  e  $u_s$  são calculados como:

$$u_c = \frac{8 G_F - 6 G_f}{\sigma_{max}^{(0)}} \quad \text{e} \quad (3.16)$$

$$u_s = \frac{1.5 G_f}{\sigma_{max}^{(0)}}. \quad (3.17)$$

Posteriormente,  $\sigma_{max}$  pode ser calculado como uma função de  $u_p$  que varia de acordo com:

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \sigma_{max}^{(0)} - u_p \left( \frac{\sigma_{max}^{(0)} - \sigma_s}{u_s} \right) & \text{for } 0 < u_p \leq u_s \\ \frac{u_c \sigma_s}{u_c - u_s} - u_p \left( \frac{\sigma_s}{u_c - u_s} \right) & \text{for } u_s < u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (3.18)$$

A derivada parcial de  $\sigma_{max}$  com relação a  $u_p$  é dado por:

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} = \begin{cases} - \left( \frac{\sigma_{max}^{(0)} - \sigma_s}{u_s} \right) & \text{for } 0 < u_p \leq u_s \\ - \left( \frac{\sigma_s}{u_c - u_s} \right) & \text{for } u_s < u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (3.19)$$

Por outro lado, a curva de amolecimento de Hordijk (1992) é apresentada na Figura 3.6b. Esta curva é dada por uma função exponencial e depende apenas de dois parâmetros  $\sigma_{max}^{(0)}$  e  $u_c$ . De forma similar a curva bilinear de amolecimento,  $u_c$  representa o deslocamento relativo plástico crítico e é calculado para fornecer uma área abaixo da curva igual à energia da fratura  $G_F$  do material. A curva de amolecimento de Hordijk, de acordo com Zivaljic et al., 2014, é dado por:

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \left[ \left( 1 + 27 \left( \frac{u_p}{u_c} \right)^3 \right) e^{-6.93 \frac{u_p}{u_c}} - 28 \frac{u_p}{u_c} e^{-6.93} \right] \sigma_{max}^{(0)} & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (3.20)$$

Após a integração da Eq. 3.20 de 0 a  $u_c$  e igualando a  $G_F$  obtém-se:

$$u_c = \frac{G_F}{0.1947 \sigma_{max}^{(0)}}. \quad (3.21)$$

A derivada parcial de  $\sigma_{max}$  com relação a  $u_p$  é dado por:

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} = \begin{cases} \left( \frac{81 u_p^2 e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c^3} - \frac{6.93 \left( 1 + \frac{27 u_p^3}{u_c^3} \right) e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c} - \frac{0.02738402432}{u_c} \right) \sigma_{max}^{(0)} & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.3.2 - Matriz constitutiva

Nesta seção é apresentado a matriz constitutiva elástica e elastoplástica  $\mathbf{D}$ . Esta matriz relaciona os incrementos de deslocamento relativo  $\dot{\mathbf{u}}$  com os incrementos de tensão  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  no ponto de integração. Para o regime elástico, a matriz constitutiva é dada por:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde  $k_n$  e  $k_t$  representam, respectivamente, a rigidez normal e tangencial no plano da interface. Estas rigidezes são definidas como:

$$k_n = E \frac{\zeta}{h} \quad \text{e} \quad k_t = G \frac{\zeta}{h} \quad (3.24)$$

onde  $h$  é o comprimento representativo dos elementos sólidos ligados ao elemento de interface (descrito na Seção 3.2.2),  $E$  é o modulo de Young,  $G$  é o modulo cisalhante e  $\zeta$  é o fator que controla os deslocamentos relativos elásticos. O fator  $\zeta$  pode ser usado para estimar o máximo deslocamento relativo elástico normal e tangenciais de acordo com as equações:

$$w_{ne(max)} = \frac{\sigma_{max}^{(0)}}{\zeta E} h; \quad w_{se(max)} = w_{te(max)} = \frac{\tau_{max}^{(0)}}{\zeta G} h. \quad (3.25)$$

O valor de  $\zeta$  deve ser escolhido de maneira a prover valores deslocamentos negligenciáveis no regime elástico, onde não é esperado abertura da fissura. Valores muito elevados para  $\zeta$  pode provocar elevado coeficiente de rigidez e como consequência gerar um sistema de equações mal condicionado. Neste trabalho,  $\zeta = 5$  promoveu resultados satisfatórios para todos os exemplos.

Para o domínio elastoplástico, a matriz constitutiva  $\mathbf{D}_{ep}$  é formulada com base na teoria

convencional da plasticidade. De acordo com a decomposição aditiva, o incremento dos deslocamentos relativos em um ponto da interface é expresso como a soma das componentes elástico e plástico:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_e + \dot{\mathbf{u}}_p. \quad (3.26)$$

O incremento do deslocamento plástico relativo é calculado pela lei de fluxo de acordo com a equação:

$$\dot{\mathbf{u}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{r}, \quad (3.27)$$

onde  $\mathbf{r}$  é um vetor normal a superfície do potencial plástico  $g$  e  $\dot{\lambda}$  é o multiplicador plástico. Assim o deslocamento relativo plástico efetivo  $\dot{u}_p$  é calculado como:

$$\dot{u}_p = \|\dot{\mathbf{u}}_p\| = \dot{\lambda} \|\mathbf{r}\|. \quad (3.28)$$

Depois de multiplicar a Eq. 3.26 por  $\mathbf{D}_e$  e considerando  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{u}}_e$  e a Eq. 3.27, obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{u}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}. \quad (3.29)$$

Por outro lado, a condição de consistência, de acordo com a Eq. 3.11, e dada por:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \dot{\sigma}_{max} = 0, \quad (3.30)$$

que pode ser expandido como:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{D}_e \dot{\mathbf{u}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \dot{u}_p = 0. \quad (3.31)$$

Usando a Eq. 3.28 e isolando o incremento do multiplicador plástico, obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{u}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{u}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|} \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $y = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}}$  e  $m = \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p}$ . Posteriormente, substituindo a Eq. 3.32 na Eq. 3.29 é possível encontrar a matriz constitutiva elastoplástica  $\mathbf{D}_{ep}$ :

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{r} \mathbf{v}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|}. \quad (3.33)$$

As derivadas necessárias são calculadas como:

$$y = -\tan \Phi \quad (3.34)$$

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial f}{\partial \tau_s}, \frac{\partial f}{\partial \tau_t} \right\rangle = \left\langle \tan \Phi, \frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \frac{\tau_t}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}} \right\rangle \quad (3.35)$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau_s}, \frac{\partial g}{\partial \tau_t} \right\rangle = \langle 2\sigma_n \tan^2 \phi, 2\tau_s, 2\tau_t \rangle \quad \text{para } \sigma_n > 0 \quad (3.36)$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau_s}, \frac{\partial g}{\partial \tau_t} \right\rangle = \langle 0, 2\tau_s, 2\tau_t \rangle \quad \text{para } \sigma_n < 0 \quad (3.37)$$

### 3.3.3 - Atualização da tensão

O objetivo do processo de atualização da tensão é encontrar o incremento do vetor de tensão  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  para um determinado incremento de deslocamentos relativos  $\Delta \mathbf{u}$ . Inicialmente, um vetor de tensão tentativa é encontrado usando a matriz constitutiva elástica conforme a equação:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}_e \Delta \mathbf{u}, \quad (3.38)$$

onde o sobrescrito  $n$  representa o passo atual.

Visando determinar se o incremento de deslocamentos relativos está no regime elástico ou elastoplástico, o sinal da função de plastificação é avaliado em  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ . Assim, se  $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{max}^n) \leq 0$  o incremento é elástico e o novo estado de tensão é  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}$ . Já no caso de  $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{max}^n) > 0$ , o incremento será elastoplástico. Devido à plastificação do elemento de interface, a resistência a tração do material  $\sigma_{max}$  reduz. Isso implica que a superfície de plastificação se desloca para a esquerda no passo  $n + 1$ . Além disso, o estado de tensão dado por  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$  deve retornar à superfície de plastificação de forma perpendicular à superfície do potencial plástico  $g$ , conforme a Figura 3.8.

A formulação necessária para atualização de  $u_p$ ,  $\sigma_{max}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  para um dado incremento de deslocamento relativo  $\Delta \mathbf{u}$  no regime elastoplástico é dado por:

$$u_p^{n+1} = u_p^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{u}_p dt = u_p^n + \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{max}^{n+1} = \sigma_{max}^n + \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{r}^{n+1}. \quad (3.41)$$

A Eq. 3.41 foi obtida substituindo  $\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_e^{n+1} + \Delta \mathbf{u}_p^{n+1}$  e  $\Delta \mathbf{u}_p^{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{r}^{n+1}$  na Eq. 3.38. Note que de acordo com a Eq. 3.40 e o fato que  $\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} < 0$  o termo  $\Delta \lambda$  deve ser positivo para

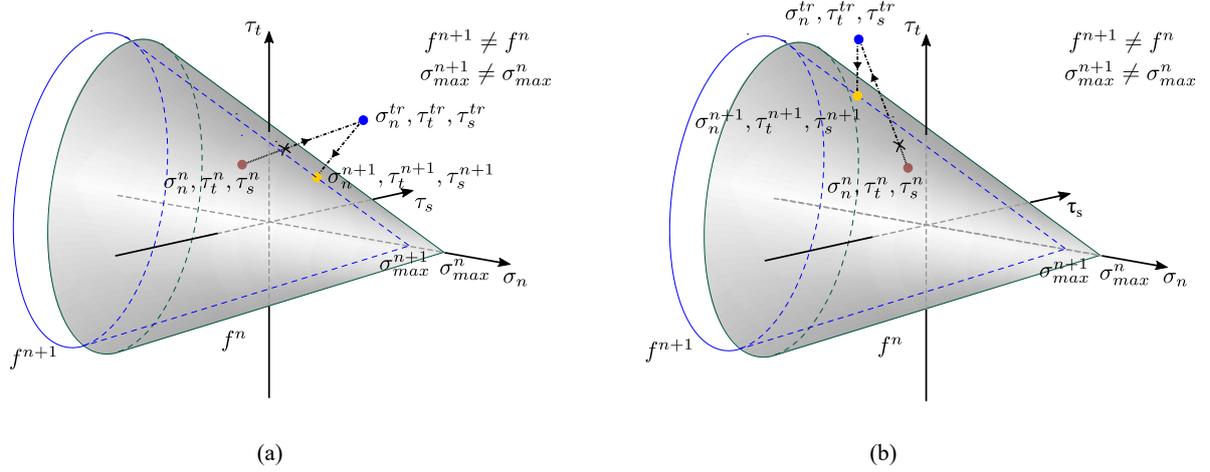


Figura 3.8 – Atualização da tensão no regime elastoplástico: a) retorno da tensão a superfície de plastificação quando  $\sigma_n^{tr} > 0$ ; b) retorno da tensão a superfície de plastificação quando  $\sigma_n^{tr} < 0$ .

ser consistente com a perda de rigidez devido a fissuração.

As componentes do vetor de tensão no passo  $n + 1$  são obtidas pela substituição das Equações 3.36 e 3.37 na Eq. 3.41:

$$\langle \sigma_n^{n+1}, \tau_s^{n+1}, \tau_t^{n+1} \rangle = \left\langle \frac{\sigma_n^{tr}}{1 + 2\Delta\lambda k_n \tan^2 \phi}, \frac{\tau_s^{tr}}{1 + 2\Delta\lambda k_s}, \frac{\tau_t^{tr}}{1 + 2\Delta\lambda k_s} \right\rangle \quad \text{para } \sigma_n^{n+1} > 0, \quad (3.42)$$

$$\langle \sigma_n^{n+1}, \tau_s^{n+1}, \tau_t^{n+1} \rangle = \left\langle \sigma_n^{tr}, \frac{\tau_s^{tr}}{1 + 2\Delta\lambda k_s}, \frac{\tau_t^{tr}}{1 + 2\Delta\lambda k_s} \right\rangle \quad \text{para } \sigma_n^{n+1} < 0 \quad (3.43)$$

Verifica-se por meio da Eq. 3.42 e 3.43 que  $\text{sgn}(\sigma_n^{n+1}) = \text{sgn}(\sigma_n^{tr})$ , isso implica que o sinal de  $\sigma_n^{tr}$  pode ser usado para avaliar qual  $r$  deve ser empregado durante o processo de atualização da tensão. Visando o cálculo de  $\Delta\lambda$ , atualiza-se  $u_p$ ,  $\sigma_{max}$  e  $\sigma$  na equação de consistência no passo  $n + 1$ :

$$f(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1}) = \sqrt{(\tau_s^{n+1})^2 + (\tau_t^{n+1})^2} + (\sigma_n^{n+1} - \sigma_{max}^{n+1}) \tan \phi = 0 \quad (3.44)$$

Após a obtenção da Eq. 3.44, pode-se calcular o  $\Delta\lambda$  empregando o método numérico de Newton-Raphson de acordo com a equação:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \Delta\lambda_i - \frac{f(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i}{f'(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i} \quad (3.45)$$

onde  $i$  representa a  $i$ -ésimo iteração,  $\Delta\lambda_0$  é o palpite inicial (nesse trabalho foi usado  $\Delta\lambda_0 = 0$ ) e  $f'(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})$  pode ser expresso como:

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \sigma^{n+1}} \cdot \frac{\partial \sigma^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \sigma_{max}^{n+1}} \frac{\partial \sigma_{max}^{n+1}}{\partial \Delta\lambda}. \quad (3.46)$$

Para calcular  $f'(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})$ , as seguintes derivadas são necessárias, onde o subscrito  $n + 1$  foi omitido visando maior clareza na apresentação da formulação:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle \frac{-2k_n \tan^2 \Phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \Phi)^2}, \frac{-2k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-2k_t \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_t)^2} \right\rangle \quad \text{for } \sigma_n^{tr} > 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle 0, \frac{-2k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-2k_t \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_t)^2} \right\rangle \quad \text{for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle \frac{-4k_n \tan^4 \Phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \Phi)^2}, \frac{-4k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-4k_t \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_t)^2} \right\rangle \quad \text{for } \sigma_n^{tr} > 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle 0, \frac{-4k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-4k_t \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_t)^2} \right\rangle \quad \text{for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\sigma_{max}}{u_p} \left( \|\mathbf{r}\| + \Delta \lambda \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} \right) \quad (3.51)$$

### 3.3.4 - Atualização plástica quando $u_p \geq u_c$

Este procedimento é um aspecto essencial do modelo constitutivo proposto. Quando uma fissura atinge a abertura crítica ( $u_p \geq u_c$ ), não há mais resistência à tração, portanto,  $\sigma_{max} = 0$ . Isso faz com que a superfície do potencial colapse em uma linha e seus derivados se tornem indeterminados na origem. Para lidar com essa situação, verifica-se, na etapa  $n + 1$ , a fissura estará aberta o suficiente para não poder transferir tensões, ou seja,  $w_n^{n+1} \geq u_c$ . Utiliza-se  $u_c$  e não zero na condição, pois assume-se que, devido à irregularidades na superfície, a trinca é capaz de transferir tensões compressivas e de cisalhamento se suas faces não estiverem completamente separadas. Assim, se  $w_n^{n+1} \geq u_c$ , as tensões normal e de cisalhamento na etapa  $n + 1$  devem ser iguais a zero. A Figura 3.9 mostra o processo de atualização de tensão para dois estados possíveis na etapa  $n$ : quando as faces da trinca estão em contato ( $w_n^n < u_c$ , por exemplo, por descarga anterior) e quando as faces da trinca estão separadas ( $w_n^n \geq u_c$ ). Nos dois casos, as tensões na etapa  $n + 1$  são definidas como zero e Eq. 3.41 é reescrito como:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_n^{tr} \\ \tau_s^{tr} \\ \tau_t^{tr} \end{Bmatrix} - \Delta \lambda \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_n^{n+1} \\ r_s^{n+1} \\ r_t^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Posteriormente, o vetor  $\mathbf{r}$  pode ser expresso como:

$$\mathbf{r}^{n+1} = \begin{Bmatrix} r_n^{n+1} \\ r_s^{n+1} \\ r_t^{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta \lambda} \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_n^{tr}}{k_n} \\ \frac{\tau_s^{tr}}{k_t} \\ \frac{\tau_t^{tr}}{k_t} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Assumindo  $\mathbf{r}^{n+1}$  como um vetor unitário,  $\Delta\lambda$  é calculado como a norma do vetor  $\left\langle \frac{\sigma_n^{tr}}{k_n}, \frac{\tau_s^{tr}}{k_s}, \frac{\tau_t^{tr}}{k_s} \right\rangle$  e o processo de atualização da tensão pode ser realizado usando a Eq. 3.41. Como a fissura está aberta na etapa  $n + 1$ , deve-se considerar  $\mathbf{D}_{ep} = 0$  para o calcula da matriz de rigidez do elemento na próxima etapa de carregamento.

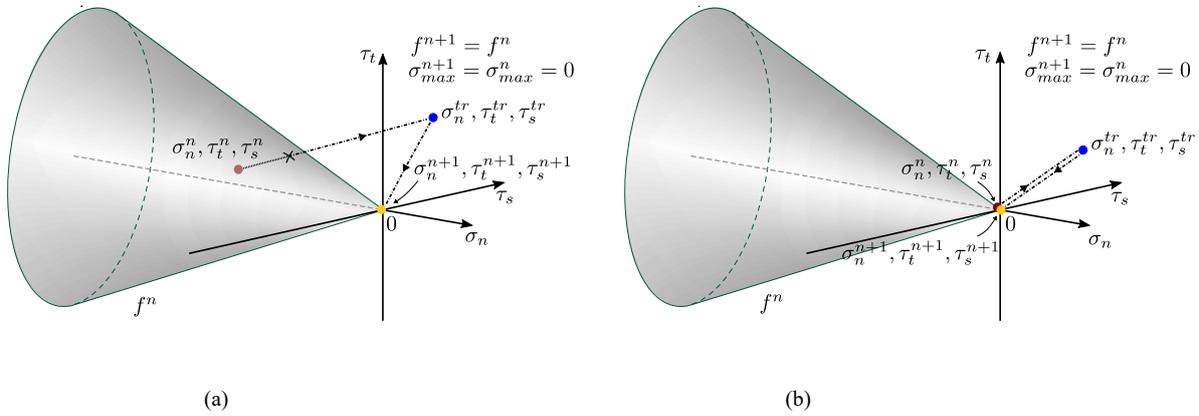


Figura 3.9 – Atualização da tensão para condição  $w_n^{n+1} \geq u_c$  (fissura aberta): a) as faces da fissura faces ainda estão em contato no passo  $n$ ; b) as faces da fissura já estão separadas no passo  $n$ .

### 3.4 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

O procedimento de solução das equações dos elementos finitos utilizado neste trabalho é bastante convencional, porém alguns procedimentos foram incluídos para melhorar a convergência, reduzir o número de incrementos e corrigir o desvio (*drift*) do caminho de equilíbrio.

#### 3.4.1 - Aplicação do método Runge-Kutta

Um procedimento de solução simples para um sistema de equações não lineares usará, por exemplo, um esquema incremental combinado com o método de Newton-Raphson e aproximando a matriz de rigidez no início de cada etapa de carregamento. Esta abordagem aplicada com controle de deslocamento é capaz de resolver sistemas não lineares que apresentam comportamento de amolecimento, porém pode falhar em problemas fortemente não lineares devido a erros de truncamento elevados, por exemplo, quando a análise está próxima do pico de carga onde a rigidez do material muda severamente.

Por outro lado, a aplicação dos métodos de Runge-Kutta à solução de sistemas de equações visa melhorar a precisão com base em duas ou mais avaliações da matriz de rigidez. Por

exemplo, usando o método de Euler modificado, duas avaliações para a matriz de rigidez são necessárias, que são  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^n)$  e  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^n + \Delta\mathbf{U})$ , onde  $\mathbf{U}^n$  é o vetor de deslocamento global no início da etapa e  $\Delta\mathbf{U}$  é o vetor de incremento de deslocamento. Posteriormente, uma aproximação final de rigidez é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \quad (3.54)$$

Outro método que envolve a mesma quantidade de cálculos que o anterior, mas oferece maior precisão, é o método de Ralston (1962). Nesse caso, as duas aproximações são  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^{(n)})$  e  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^{(n)} + \frac{2}{3}\Delta\mathbf{U})$ , e a matriz de rigidez final é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{4}\mathbf{K}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{K}_2 \quad (3.55)$$

As Eqs. 3.54 e 3.55 são usadas no sistema  $\bar{\mathbf{K}} \Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}_{ext}$  que fornece os deslocamentos desconhecidos. Neste trabalho, a aplicação particular do método de Ralston, não só permitiu obter maior precisão, mas também facilitar o processo de convergência.

### 3.4.2 - Passo automático

Em uma análise incremental não linear, os incrementos de carga e deslocamento em uma determinada etapa são geralmente dados por:

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta T \mathbf{F}_{ext} \quad (3.56)$$

$$\Delta\mathbf{U} = \Delta T \mathbf{U} \quad (3.57)$$

onde  $T \in [0, 1]$  é um pseudo tempo para o estágio de análise atual,  $\Delta T$  é o tamanho do passo usado para escalar as forças externas  $\mathbf{F}_{ext}$  e  $\mathbf{U}$  representa os deslocamentos. Quando  $\Delta T$  é constante, normalmente valores muito pequenos são necessários para obter o erro de truncamento  $err$  de todos os incrementos sob a tolerância especificada  $tol$ , pois a análise irá parar no primeiro caso em que  $err > tol$ . Por outro lado, um algoritmo de escalonamento automático modifica  $\Delta T$  para que seja aumentado após um incremento bem-sucedido ( $err \leq tol$ ) e diminuído quando uma tentativa de incremento falha. Neste esquema, o tamanho do incremento na etapa  $n + 1$  pode ser calculado com base no incremento anterior como:

$$\Delta T_{n+1} = q \Delta T_n \quad (3.58)$$

onde  $q$  é um fator que visa limitar o erro de truncamento definido aqui como  $err = \|\Delta\mathbf{F}_{ext} - \Delta\mathbf{F}_{int}\|$ . A ideia básica é usar  $q \geq 1$  quando a última tentativa de incremento foi bem-sucedida e  $q < 1$  caso contrário. A expressão para  $q$  geralmente assume a forma  $c \sqrt{\frac{tol}{err}}$ , onde  $c$  é um

coeficiente ajustável (ver, por exemplo, Abbo e Sloan (1996), Ho et al. (1997) e Sheng et al. (2002)). Neste trabalho, propõem-se a expressão:

$$q = \left( 1 + \tanh \left( \log_{10} \frac{tol}{err} \right) \right) \quad (3.59)$$

A Eq. 3.59 é bastante arbitrária, mas possui as seguintes propriedades. Primeiro, é uma função contínua com limites  $(0, 2)$ . A Eq. 3.59 resulta em 2 quando  $err = 0$  e 1 quando  $err = tol$ , e valores menores que 1 quando  $err > tol$ . Além disso, esta expressão varia suavemente, portanto, pode ser usada para ajustar gradualmente o tamanho de um incremento da seguinte forma: Quando a última tentativa de incremento convergiu com sucesso ( $err \leq tol$  e  $q \geq 1$ ), o tamanho do incremento cresce seguindo a Eq. 3.58, caso contrário ( $err > tol$  e  $q < 1$ ), o tamanho do incremento diminui de acordo com:

$$\Delta T_{n+1} = \max(0.2, \min(0.9, q)) \Delta T_n \quad (3.60)$$

Neste caso, o fator de escala é limitado a 0.2 para evitar incrementos muito pequenos e a 0.9 para favorecer a convergência nos casos em que  $tol \approx err$ .

### 3.4.3 - Correção do desvio (*Drift*)

Soluções de equações não lineares, especialmente aquelas obtidas a partir de esquemas incrementais, tendem a se desviar da equação de equilíbrio à medida que forças residuais (forças desequilibradas entre as forças aplicadas externamente e as forças suportadas pelas tensões internas) são acumuladas ao longo dos incrementos. Para reduzir o desvio, uma estratégia é adicionar as forças residuais ao próximo incremento. No entanto, como apontado por Abbo e Sloan (1996), este procedimento não é eficiente quando combinado com um esquema de passo automático, pois a contribuição das forças residuais é independente de  $\Delta T$ . Além disso, para comportamento fortemente não linear, o erro no novo incremento frequentemente excede a tolerância especificada devido ao efeito das forças residuais. Por esta razão, a estratégia usada neste trabalho é espalhar as forças residuais de cada incremento sobre uma fração  $\Delta T_{cr}$  do estágio de análise atual, que pode envolver vários incrementos ascendentes.

$$\Delta T_{cr} = \min(\Delta T_{rspan}, 1 - T) \quad (3.61)$$

onde  $\Delta T_{rspan}$  é a fração máxima do estágio atual para aplicar as forças residuais de um incremento (por exemplo, 0,01 ou 1%).

Assumindo que  $\mathbf{R}_c^n$  é um vetor contendo os resíduos acumulados até o final da etapa  $n$ , na etapa

$n + 1$ , o incremento das forças externas é modificado para incluir apenas um fração de  $\mathbf{R}_c^n$ :

$$\Delta \mathbf{F}_{ext}^{n+1} = \Delta T^{n+1} \mathbf{F}_{ext} + \gamma \mathbf{R}_c^n \quad (3.62)$$

onde  $\gamma = \min(1, \Delta T^{n+1}/\Delta T_{cr})$  é o coeficiente para forças residuais acumuladas correspondentes ao incremento  $n + 1$ .

Se a etapa  $n + 1$  for bem-sucedida, o vetor de resíduos acumulados é atualizado considerando a fração restante ainda não aplicada e o resíduo da etapa  $n + 1$ , dessa forma:

$$\mathbf{R}_c^{n+1} = \mathbf{R}_c^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{R}_c^n \quad (3.63)$$

Em caso de falha na etapa  $n + 1$ , o vetor residual acumulado não é modificado e o incremento é rejeitado. Finalmente, um novo tamanho de passo para o próximo incremento é calculado de acordo com o algoritmo de passo automático.

O procedimento de correção de deriva apresentado aqui reduz a chance de falha de incrementos devido à adição de forças residuais permitindo a operação normal do algoritmo de passo automático.

### 3.5 - ANÁLISE NUMÉRICAS

Antes da simulação dos exemplos de aplicação, o modelo constitutivo proposto foi verificado por meio de ensaios de extensão e cisalhamento e, na sequência, é apresentado um teste de refinamento da malha para estudar a dependência da malha. Posteriormente, o modelo foi aplicado à simulação de ensaios de fratura em amostras de concreto. Os resultados foram comparados com os dados experimentais disponíveis. Alguns dos exemplos apresentados mostram mais de uma curva experimental de laboratório. Nesses casos, as curvas representam experimentos repetidos usando o mesmo material e geometria.

Durante as simulações, o comportamento mecânico dos elementos sólidos foi considerado linear elástico. Por sua vez, todos os elementos coesivos foram simulados utilizando o modelo proposto considerando a curva de Hordijk e bilinear de amolecimento. As simulações foram realizadas utilizando a biblioteca Amaru (<https://github.com/NumSoftware/Amaru>) que inclui a implementação do modelo proposto.

### 3.5.1 - Geração da malha

Todas as malhas foram geradas por meio do software Gmsh. Após o estágio de geração, os elementos de interface foram introduzidos usando o algoritmo explicado na Seção 3.1. A geração dos elementos de interface em todas análises demoraram menos de um segundo. Embora seja possível limitar a localização dos elementos de interface, optou-se por colocá-los sobre toda a malha como uma forma de verificar se as trincas só aconteceriam na região esperada. As malhas de todos os exemplos foram refinadas o suficiente para fornecer uma boa concordância com os dados experimentais.

Em relação aos elementos da malha, os tipos de elementos sólidos usados foram tetraedros de 4 nós com 4 pontos de integração, pirâmides de 5 nós com 5 pontos de integração, cunhas de 6 nós com 9 pontos de integração e hexaedros de 8 nós com 8 pontos de integração. Quanto aos elementos coesivos, foram utilizados interfaces triangular de 6 nós com 3 pontos de integração e interfaces quadrilátero de 8 nós com 4 pontos de integração. Vale ressaltar que alguns ensaios foram realizados utilizando elementos de interface de 6 nós com um ponto de integração. Entretanto, foram obtidos deslocamentos inconsistentes, semelhantes às deformações espúrias observadas em malhas com elementos com integração reduzida. Embora os elementos triangulares requeiram apenas um ponto de integração em análises de tensão bidimensionais, isso não é suficiente para elementos de interface de 6 nós devido ao grau mais alto do integrando para calcular a matriz de rigidez.

### 3.5.2 - Parâmetro do material

Os parâmetros dos materiais para o modelo apresentado podem ser relacionados aos elementos sólidos e interface. Considerando elementos sólidos com comportamento elástico linear, apenas o módulo de Young  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  são necessários. Para os elementos de interface, além dos parâmetros elásticos, são necessários: a tangente do ângulo de atrito interno  $\tan(\phi)$ , a resistência à tração  $\sigma_{max}^0$  e a energia de fratura  $G_F$ . Nos exemplos numéricos, exceto de  $\tan(\phi)$  e  $\zeta$ , todos os outros parâmetros foram retirados da publicação do experimento correspondente ou publicações que realizam as simulações numéricas.

Em relação ao ângulo de atrito interno para o concreto, os resultados experimentais (ver por exemplo Fujita et al., 1997; Stone and Webster Engineering Corporation, 1992; Jebli et al., 2018) mostram valores que variam de  $54^\circ$  a  $57^\circ$ . Esses ângulos fornecem tangentes entre 1,37 e 1,53, aproximadamente. Nesse sentido, e sem informações adicionais, adota-se  $\tan(\phi) = 1.4$  para todos os exemplos de aplicação. Em relação a este valor, não foram observados os efeitos negativos nos resultados durante as simulações. Por sua vez, o parâmetro  $\zeta$ , conforme declarado na Seção 3.3.2, visa proporcionar deslocamentos elásticos desprezíveis antes da

formação de fissuras. Valores muito pequenos para este parâmetro fornecem deslocamentos elásticos excessivos, enquanto valores muito altos fornecem coeficientes de rigidez elevados que levam a um sistema de equações mal condicionado. Durante as análises foi observado que  $\zeta = 5$  fornece deslocamentos elásticos desprezíveis enquanto evita problemas numéricos.

### 3.5.3 - Teste de verificação

Para verificar o comportamento do modelo proposto, são apresentados testes no qual a amostra é submetida a extensão e cisalhamento. Nessas análises são considerados apenas dois elementos sólidos vinculados por um elemento de interface. Os elementos sólidos são dados por hexaedros regulares de 8 nós com 10 mm de comprimento. Para cada caso, um elemento sólido é mantido contido enquanto o outro é submetido ao movimento do corpo rígido; assim, restringindo todas as deformações ao elemento de interface para simular extensão e cisalhamento. A Figura 3.10 apresenta a configuração inicial e as diferentes condições de deslocamento que foram estudadas. Os parâmetros de material usados nessas análises são apresentados na Tabela 3.1.

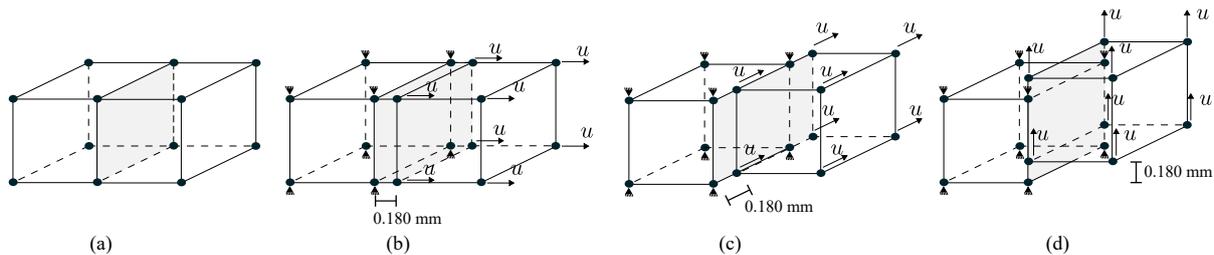


Figura 3.10 – Desenho esquemático dos ensaios de extensão e cisalhamento; a) configuração inicial; b) configuração deformada para o teste de extensão; c) configuração deformada para o teste de cisalhamento 1; d) configuração deformada para teste de cisalhamento 2;

Tabela 3.1 – Parâmetros do material para o exemplo de verificação.

Softening curve	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$ [MPa]	$G_F$ [N/m]	$u_s$ [mm]	$u_c$ [mm]
Bilinear	27.0	0.20	1.4	5	2.40	80	0.0250	0.1667
Hordijk	27.0	0.20	1.4	5	2.40	80	-	0.1712

Durante a análise do teste de extensão, foram aplicados deslocamentos horizontais iguais a  $u = 0.180$  mm, enquanto as tensões e deslocamentos relativos foram registrados em um dos pontos de integração do elemento de interface. Como resultado obteve-se as curvas  $w_n - \sigma_n$  e  $u_p - \sigma_n$  (Figura 3.11) para o teste de extensão usando os dois modelos de amolecimento estudados. Inicialmente, a interface apresenta um comportamento rígido durante o regime elástico e fornece deslocamentos pequenos. Após atingir a resistência à tração do material, a tensão normal é dominada pelo comportamento de amolecimento. Ambos os modelos de amolecimento se comportam conforme o esperado, mostrando valores menores para a tensão

normal conforme a interface plástica. Como pode-se observar na Figura 3.11b os resultados numéricos reproduzem qualitativamente as duas curvas teóricas.

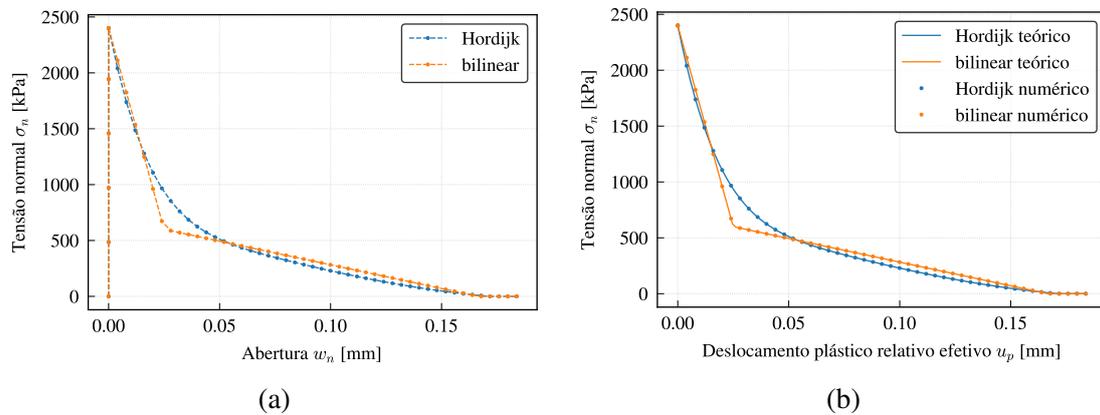


Figura 3.11 – Teste de extensão: a) abertura versus tensão normal; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão normal.

Para os testes de cisalhamento os deslocamentos foram aplicados de acordo com a Figura 3.10 c e d. Durante a análise, as tensões e deslocamentos relativos foram registrados em um dos pontos de integração do elemento de interface e os resultados são apresentados na Figura 3.12. Como esperado, os resultados dos dois testes de cisalhamento são similares. A partir destes, pode-se concluir que o elemento da interface se comportou conforme o esperado. Inicialmente, a tensão de cisalhamento aumenta em um regime elástico até atingir o valor da resistência ao cisalhamento do material. Posteriormente, a interface começa a romper e ocorre a redução de capacidade de transferir tensões entre os elementos sólidos, simulando assim o processo de fissuração. Novamente, os valores obtidos nas análises numéricas estão de acordo com os valores teóricos, como pode ser observado através da Figura 3.12b .

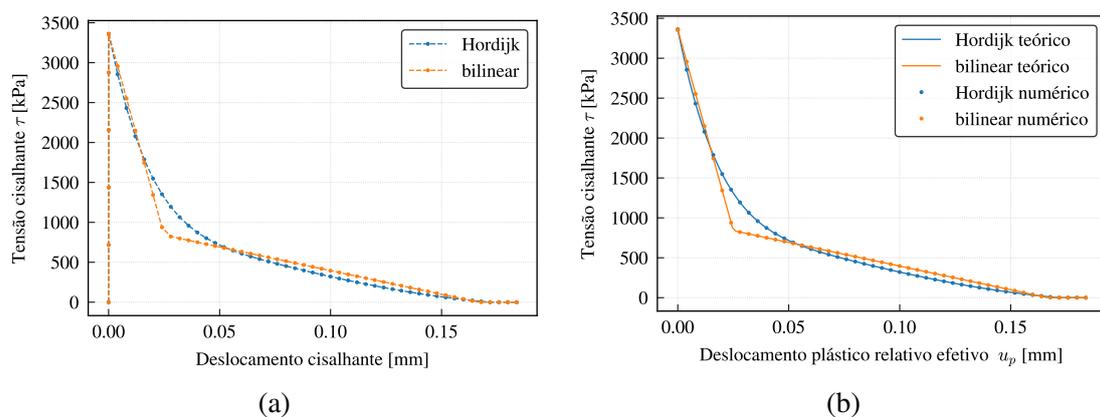


Figura 3.12 – Testes de cisalhamento: a) deslocamento relativo cisalhante versus tensão cisalhante; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão cisalhante.

### 3.5.4 - Avaliação do efeito do fator $\zeta$

Neste ensaio numérico, busca-se verificar o efeito que o fator  $\zeta$  possui sobre o resultado da análise. A Figura 3.13 apresenta as dimensões e condições de contorno utilizado no ensaio numérico. Como pode ser visto, o corpo de prova é fixado na parte inferior e apresenta uma placa de aço na parte superior usada para aplicar os deslocamentos controlados. A figura também mostra as posições onde os deslocamentos foram registrados. A Tabela 3.2 apresenta um resumo das informações da malha de elementos finitos, enquanto a Tabela 3.3 apresenta os parâmetros dos materiais usados nas simulações.

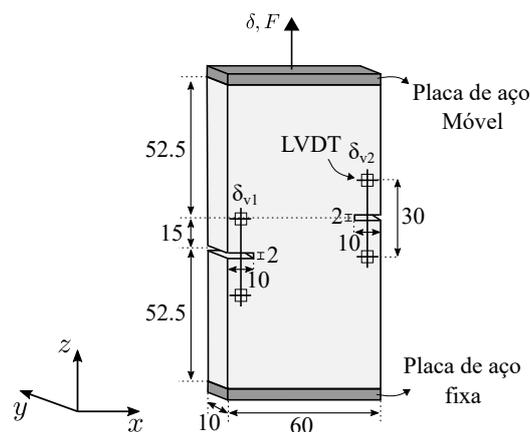


Figura 3.13 – Configuração do teste de avaliação do efeito do fator  $\zeta$ . Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.2 – Resumo das informações da malha usada no teste de avaliação do efeito do fator  $\zeta$ .

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Tetraédrico	2910	5020	11640	34272

Tabela 3.3 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do teste de avaliação do efeito do fator  $\zeta$ .

$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$ [MPa]	$G_F$ [N/m]
31.0	0.20	1.4	Variável	3.00	51.0

Durante a análise de elementos finitos, a força de reação  $F$  na placa de aço foi registrada, bem como os deslocamentos verticais relativos ( $\delta_{v1}$  e  $\delta_{v2}$ ) nas posições consistentes com as localizações dos LVDTs, de acordo com a Figura 3.13. Oito análises foram realizadas mantendo todos os parâmetros apresentados na Tabela 3.3 e variando apenas o parâmetro  $\zeta$ . A Figura 3.14 apresenta a curva carga versus deslocamento vertical médio para todas as análises executadas. Pode-se observar por meio da Figura 3.14a que os resultados das análises são similares quando utiliza-se valores de  $\zeta$  entre 1 e 9, por outro lado a Figura 3.14b demonstra que valores elevados de  $\zeta$  (entre 20 e 40) causam resultados espúrios, pois provocam o mal condicionamento das matrizes.

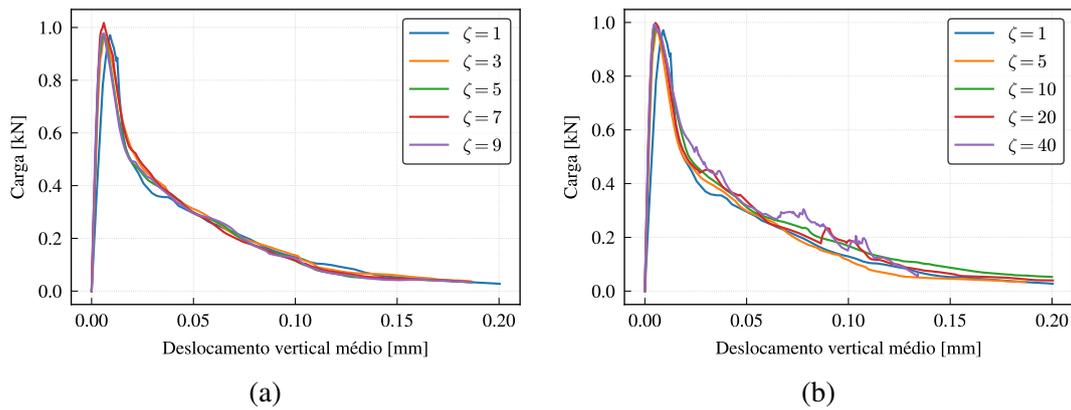


Figura 3.14 – Testes de avaliação do efeito do fator  $\zeta$ : a) utilizando valores de  $\zeta$  entre 1 e 9; b) utilizando valores de  $\zeta$  entre 1 e 40.

### 3.5.5 - Teste de refinamento de malha

Os resultados das simulações de elementos finitos utilizando a abordagem discreta são suscetíveis ao grau de discretização da malha, por tanto medidas para conter a dependência da malha devem ser adotadas. Em vista disso, a rigidez do elemento de interface depende do tamanho dos elementos sólidos circundantes (comprimento representativo). Na prática, isso faz com que os elementos de interface menores forneçam um comportamento ligeiramente mais rígido do que os maiores. Para avaliar melhor esta abordagem para combater a dependência da malha, um teste de refinamento é apresentado. A Figura 3.15 apresenta as dimensões e as condições de contorno do ensaio. Cinco malhas tetraédricas não estruturadas compreendendo diferentes tamanhos de elementos foram utilizadas, como apresentado na Figura 3.16. Por sua vez, a Tabela 3.4 apresenta um resumo dos atributos da malha. Devido às restrições de geometria e ao refinamento próximo ao entalhe, o tamanho do elemento varia dentro de cada malha. Por esta razão, o valor mediano  $h_{med}$  é mostrado na Tabela 3.4. Por exemplo, observe que na primeira malha (grosseira),  $h_{med}$  é mais que o dobro do que na quinta (mais refinada). Também pode-se notar uma grande diferença nos graus de liberdade. Quanto aos parâmetros de materiais usados nas simulações, eles são apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.4 – Resumo das informações da malha usada no teste de refinamento.

Malha	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade	$h_{med}$
Malha 1	659	1112	2636	7908	0.0079
Malha 2	1685	2977	6740	20220	0.0059
Malha 3	2556	4548	10224	30672	0.0051
Malha 4	5337	9696	21348	64044	0.0041
Malha 5	9234	17078	36936	110808	0.0031

Durante a análise, a base da placa é mantida fixa enquanto os deslocamentos verticais prescritos são aplicados na placa superior. A abertura do entalhe (*crack mouth opening*

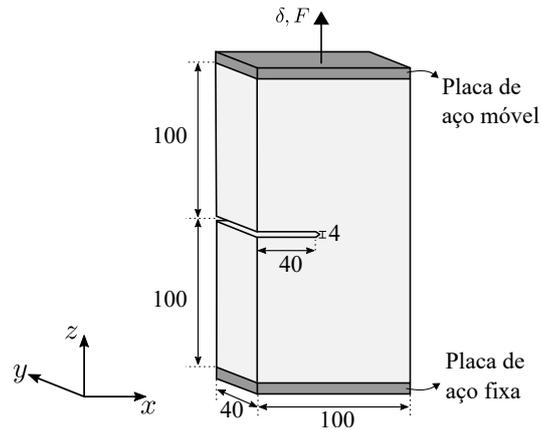


Figura 3.15 – Configuração do teste de refinamento. Todas as medidas em milímetros.

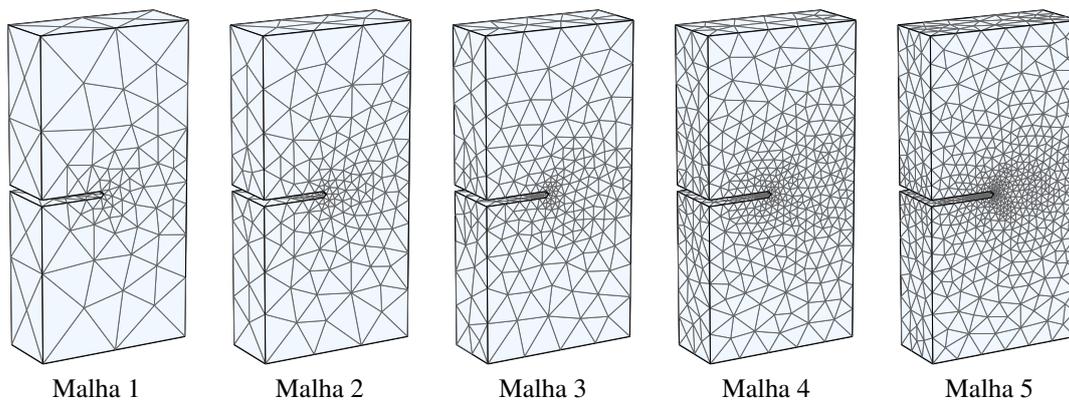


Figura 3.16 – Malhas de elementos finitos utilizadas no teste de refinamento.

*displacement, CMOD*), bem como a força resultante na placa superior, foram registrados. Embora as malhas compreendam diferentes números de elementos de interface, espera-se obter curvas de carga - *CMOD* semelhantes antes e depois da carga de pico, conforme apresentado na Figura 3.17. Isso pode ser explicado pelos seguintes motivos. Antes da carga de pico, a deformabilidade é controlada principalmente pelos elementos sólidos, enquanto elementos de interface apresentam deformabilidade insignificante. Por outro lado, após a carga de pico, a deformabilidade é controlada principalmente pelas fissuras. Observe que antes da carga de pico, todas as curvas seguem praticamente o mesmo caminho. Isso demonstra que a formulação proposta praticamente elimina a dependência da malha em relação ao regime elástico. Em relação ao pico de carga, as malhas 2 a 5 forneceram valores semelhantes em torno de 5.6 kN. Este não é o caso da primeira malha (grosseira), que apresentou um valor de pico menor. Após o pico de carga, todas as curvas estão próximas e mostram o mesmo padrão não linear. Pode-se observar também que as malhas mais refinadas, 4 e 5, apresentam valores de pico semelhantes e curvas pós-pico quase idênticas. Esses resultados demonstram que o método proposto tende a fornecer resultados convergentes em testes de refinamento. Uma vista das superfícies das fissuras, Figura 3.18, mostra que elas tendem a evoluir para uma geometria plana. Este comportamento era esperado uma vez que os tamanhos dos elementos estão

Tabela 3.5 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do teste de refinamento.

$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ [MPa]	$G_F$ [N/m]
32.0	0.20	1.4	5	3.30	60.0

diminuindo e o domínio está sujeito a condições simétricas.

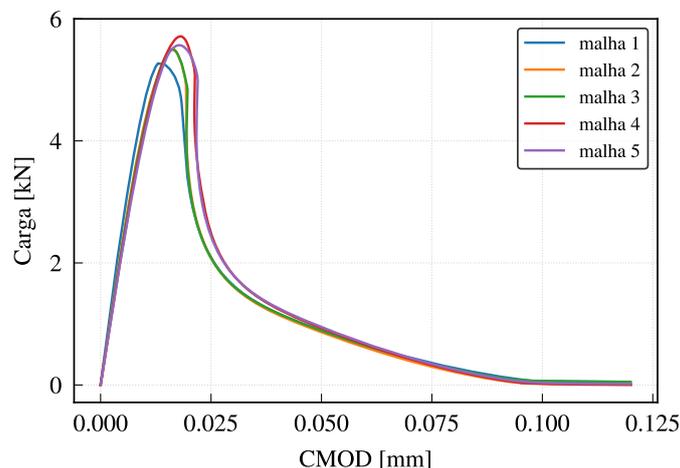


Figura 3.17 – Resultado numérico do teste de refinamento.

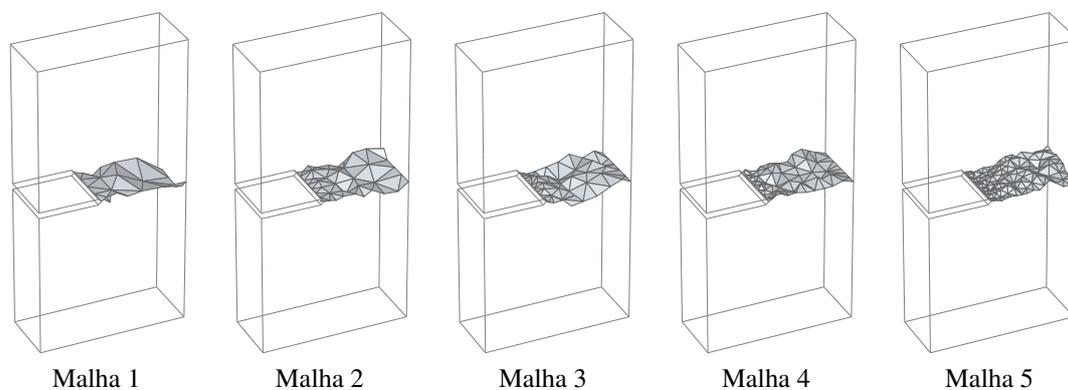


Figura 3.18 – Trajeto da fissura para cada malha do teste de refinamento.

### 3.5.6 - Exemplo 1 - Viga com entalhe submetida a torção

Este exemplo simula o ensaio experimental, investigado por Brokenshire (1995), de uma viga com entalhe submetida a torção. A configuração típica deste ensaio é apresentado na Figura 3.19, onde uma viga entalhada é presa por duas estruturas metálicas. A viga é suportada nas extremidades da estrutura, exceto em um canto em que um deslocamento prescrito é aplicado para induzir torção na amostra. Devido à falta de simetria, esse experimento não pode ser simulado por uma simplificação bidimensional; portanto, a modelagem tridimensional é

obrigatória. Os parâmetros do material utilizados na simulação foram extraídos do trabalho de Ferté et al. (2016) e são apresentados na Tabela 3.6.

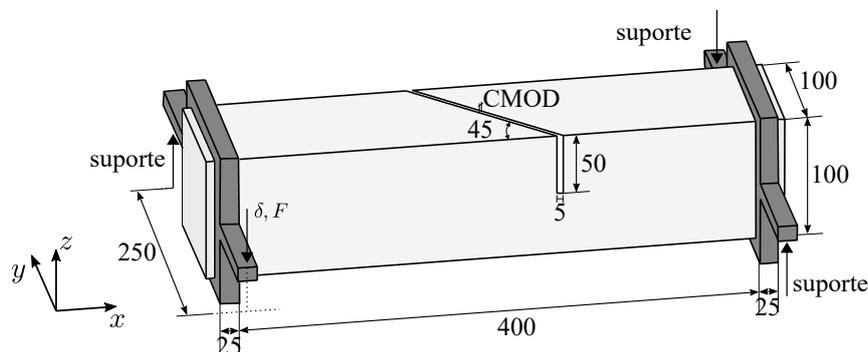


Figura 3.19 – Configuração do ensaio da viga com entalhe submetida a torção investigado por Brokenshire (1995). Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.6 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 1.

$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$ [MPa]	$G_F$ [N/m]
35.0	0.20	1.4	5	2.30	82.5

Duas simulações numéricas foram realizadas utilizando as curvas de amolecimento de Hordijk e a bilinear. Visando introduzir aleatoriedade na forma do caminho da fissura, foi utilizada uma malha não estruturada. A Tabela 3.7 apresenta um resumo da malha de elementos finitos.

Tabela 3.7 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 1.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Tetraédrico	8706	15964	34824	104472

Durante a análise de elementos finitos, a força de reação devido ao deslocamento imposto e CMOD foram registrados para análises posteriores. A Figura 3.20 apresenta as curvas carga versus CMOD dos resultados numéricos e experimentais. Além disso, para fins de comparação, a figura apresenta os resultados numéricos em 3D de Jefferson et al. (2004), Gasser e Holzapfel (2006) e Ferté et al. (2016) que foram obtidos usando o modelo plástico em conjunto com dano, o MEFPU (Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade) e XFEM (Método dos Elementos Finitos Estendido), respectivamente. Comparando com as curvas experimentais, pode-se verificar que o resultado de Jefferson et al. (2004) mostra uma boa previsão do pico de carga e um comportamento frágil depois disso, no entanto, os dados só estão disponíveis até CMOD = 0.4 mm. Por outro lado, a curva de Ferté et al. (2016) tende a superestimar o ramo de amolecimento quando comparado com as curvas experimentais. Por sua vez, Gasser e Holzapfel (2006) apresentaram duas curvas para este teste obtidas usando dois conjuntos diferentes de parâmetros de material. Como pode ser visto, uma curva de Gasser e Holzapfel (2006) superestima o ramo de amolecimento, enquanto o outro subestima

a carga de pico. A tabela 3.8 apresenta uma análise comparativa da carga de pico ( $P_{max}$ ) e o CMOD correspondente ( $\delta$ ) em relação aos resultados experimentais apresentados por Brokenshire (1995).

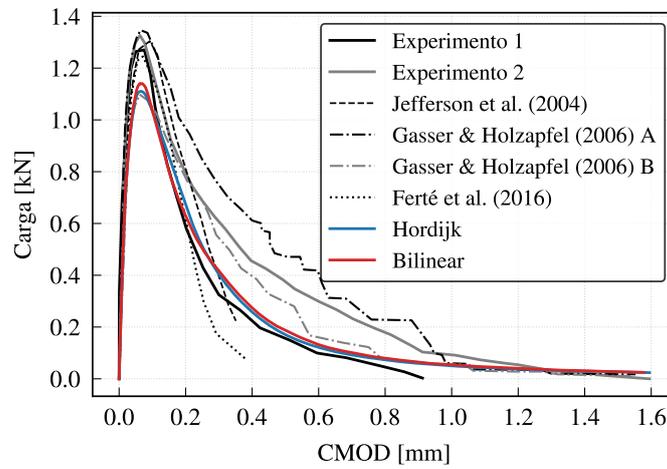


Figura 3.20 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 1.

Tabela 3.8 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 1.

Análise	Incremento	$F_{max}$ [kN]	CMOD [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta CMOD }{CMOD}$ %
Experimento 1	-	1.27	0.0759	-	-
Experimento 2	-	1.33	0.0627	4.7	17.3
Hordijk	504	1.11	0.0663	15.6	12.6
Bilinear	229	1.14	0.0621	10.2	18.1

A Figura 3.21 mostra a malha deformada ao final da análise que utiliza a curva de Hordijk. A malha exibe o campo de deslocamento vertical e a deformação foi ampliada usando um fator de escala de 15. Além disso, a Figura 3.22 apresenta a evolução da superfície da fissura para diferentes níveis de deslocamento prescritos considerando que a abertura média dos elementos de interface coesivos  $w_n$  foi maior que  $0.5 u_c$ .

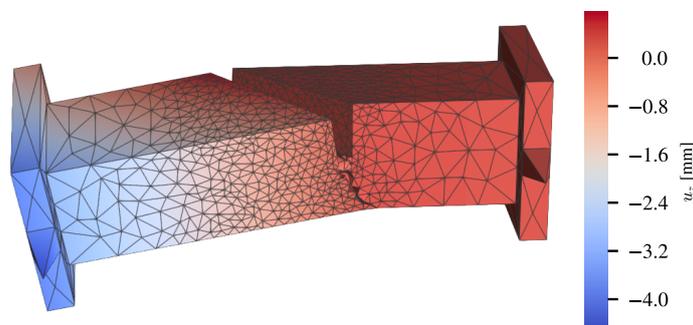


Figura 3.21 – Malha deformada exibindo o campo de deslocamento  $u_z$  para simulação de Hordijk do exemplo 1.

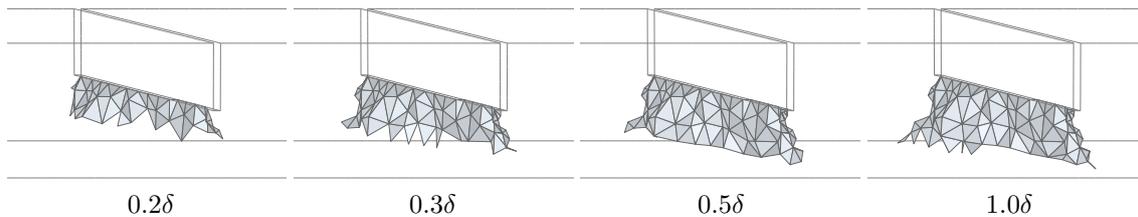


Figura 3.22 – Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 1.

### 3.5.7 - Exemplo 2 - Amostra de seção circular com entalhe sujeito a torção

O segundo exemplo simula uma amostra entalhada com uma seção circular ensaiada por Brokenshire (1995). Duas armações circulares prendem a amostra, e toda a configuração é suportada em três pontos, como apresentado na Figura 3.23. De forma semelhante à viga de seção quadrada, um deslocamento prescrito é aplicado em uma extremidade da armação visando induzir a torção da amostra. Os parâmetros do material utilizados na simulação são os mesmos do exemplo 1, visto que os dois experimentos foram realizados pelo mesmo autor com o mesmo material. A Tabela 3.9 apresenta um resumo das características da malha utilizada na análise.

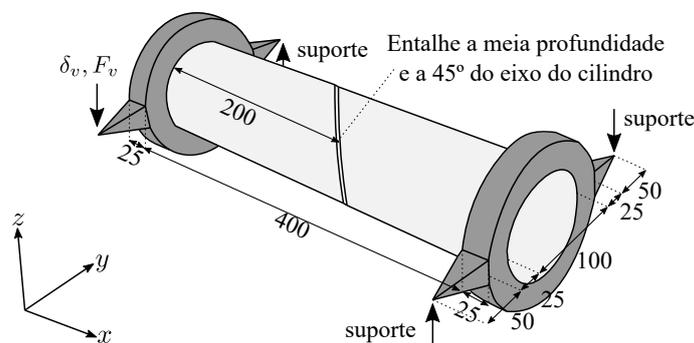


Figura 3.23 – Configuração do ensaio da amostra de seção circular com entalhe submetida a torção investigado por Brokenshire (1995). Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.9 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 2.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Tetraédrico	4398	8578	17926	53778

Durante a simulação, a força de reação devido ao deslocamento imposto e o CMOD no entalhe foram registradas. A Figura 3.24 mostra as curvas numéricas e experimentais de carga versus CMOD. Para fins de comparação com outro autor, a Figura 3.24 também apresenta o resultado numérico de Jefferson et al. (2004) que usou um modelo de contato plástico em conjunto com dano. Observe que o pico e os valores CMOD correspondentes foram superestimados. Além disso, apenas parte da curva de amolecimento estava disponível. Por meio dos resultados

numéricos, pode-se observar boa concordância entre as curvas numéricas e experimentais, principalmente quando comparadas com o primeiro experimento. A Tabela 3.10 apresenta uma análise comparativa da carga de pico ( $F_{max}$ ) e o CMOD ( $\delta$ ) correspondente contra a primeira curva experimental. Uma excelente concordância pode ser observada entre os valores de pico. Por outro lado, os valores CMOD correspondentes mostram diferenças entre 10 e 15%, aproximadamente.

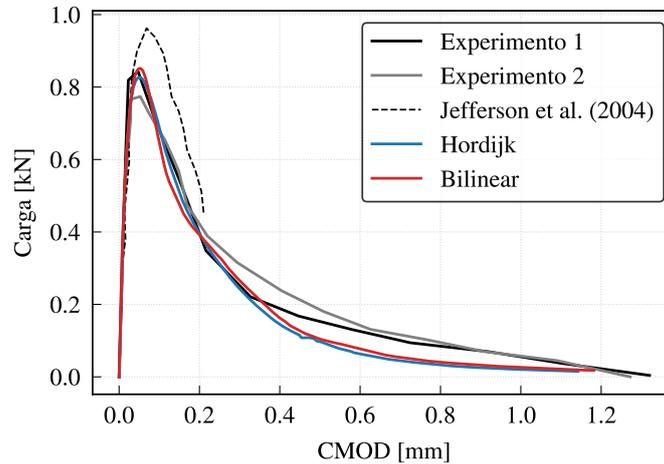


Figura 3.24 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 2.

Tabela 3.10 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 2.

Análise	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	CMOD $\delta$ [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experimento 1	-	0.844	0.0470	-	-
Experimento 2	-	0.774	0.0528	8.2	12.3
Hordijk	196	0.827	0.0521	1.9	10.9
Bilinear	200	0.852	0.0538	0.9	14.5

A Figura 3.25 apresenta a malha deformada usando um fator de ampliação de 15 no final da análise que utiliza a curva de amolecimento de Hordijk. A Figura 3.25 também mostra o campo  $u_z$  para melhor visualização. Como forma de observar a evolução da fissura na análise, a Figura 3.26 mostra os elementos de interface onde o valor médio de  $w_n$  foi maior que  $0.5 u_c$ .

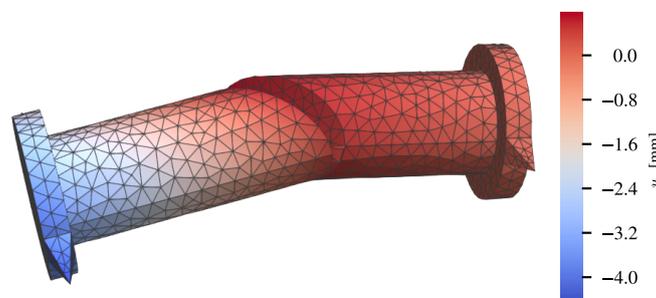


Figura 3.25 – Malha deformada exibindo o campo de deslocamento  $u_z$  para simulação de Hordijk do exemplo 2.

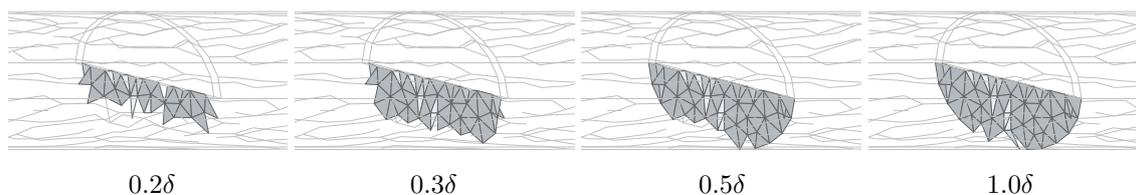


Figura 3.26 – Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 2.

### 3.5.8 - Exemplo 3 - Viga com entalhe central

Uma viga de concreto com entalhe central ensaiada por Roesler et al. (2007), é simulada numericamente aplicando-se as dimensões e as condições de contorno apresentadas na Figura 3.27. Neste ensaio experimental, um deslocamento controlado é aplicado sob uma placa de aço localizada na parte superior da viga. Isso visa induzir uma fratura central na viga com objetivo de estudar o comportamento mecânico dessa peça a fissuração no modo I. Os parâmetros requeridos nas análises foram extraídos do trabalho de Roesler et al. (2007) e são apresentados na Tabela 3.11. A Tabela 3.12 apresenta um resumo das informações da malha utilizada neste exemplo.

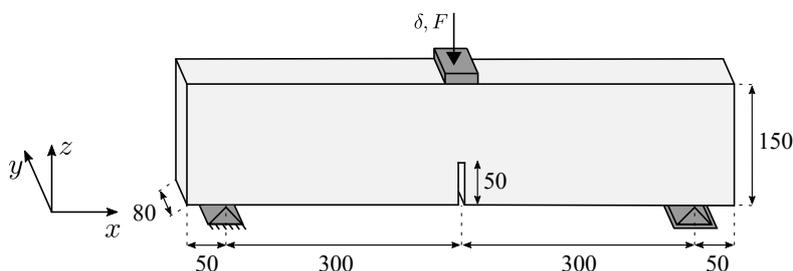


Figura 3.27 – Configuração do ensaio da viga com entalhe central investigado por Roesler et al. (2007). Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.11 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 3.

E	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$	$G_f$	$G_F$
[GPa]				[MPa]	[N/m]	[N/m]
32.0	0.20	1.4	5	4.15	56.6	167

Tabela 3.12 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 3.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Hexaedros	2802	6566	21111	63333

Durante as análises de elementos finitos, a força de reação devido ao deslocamento imposto e o CMOD foram monitorados. Com esses dados foi possível obter as curvas carga versus CMOD

apresentado na Figura 3.28. Esta figura também apresenta os resultados numéricos de outros autores usando elementos coesivos (Roesler et al., 2007; Gaedicke e Roesler, 2010). Dentre os resultados disponíveis, foram considerados os melhores de cada autor. Em ambos os casos, as curvas mostram boa concordância com os dados experimentais. Ainda assim, os resultados do primeiro autor são limitados a CMOD igual a 0.5 mm.

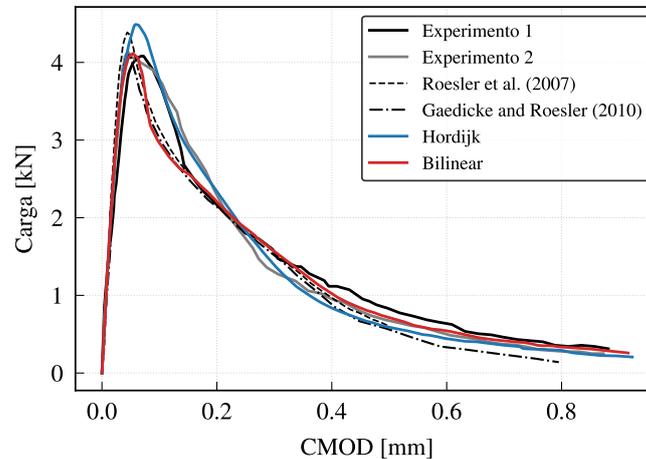


Figura 3.28 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 3.

A Tabela 3.13 apresenta uma análise comparativa da carga de pico ( $F_{max}$ ) e o CMOD correspondente em relação ao resultado experimental 1 apresentado por Roesler et al. (2007). Pode-se observar que a análise que utilizou a curva bilinear de amolecimento apresentou um comportamento mais próximo do experimento. Isso se deve ao maior controle sobre a inclinação dos dois trechos da curva bilinear obtida por meio das energias de fratura  $G_f$  e  $G_F$ . De qualquer forma, o comportamento geral das curvas numéricas estão de acordo com os dados experimentais.

Tabela 3.13 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 3.

Modelos	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	CMOD [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta CMOD }{CMOD}$ %
Experimento 1	-	4.081	0.0683	-	-
Experimento 2	-	4.138	0.0444	1.4	35.0
Hordijk	207	4.490	0.0583	10.0	14.6
Bilinear	226	4.116	0.0539	0.8	21.1

A Figura 3.29 apresenta a malha deformada para a análise que utiliza a curva bilinear usando um fator de escala de 15. O padrão de fissuração da análise numérica é similar ao obtido no ensaio experimental. Além disso, o campo de deslocamento  $u_z$  é exibido na figura.

### 3.5.9 - Exemplo 4 - Painel em formato de L

No exemplo 4, o painel em concreto com formato de L ensaiado por Winkler (2001) é simulado. Esse ensaio visa estudar as propriedades mecânicas do concreto a fratura no Modo I.

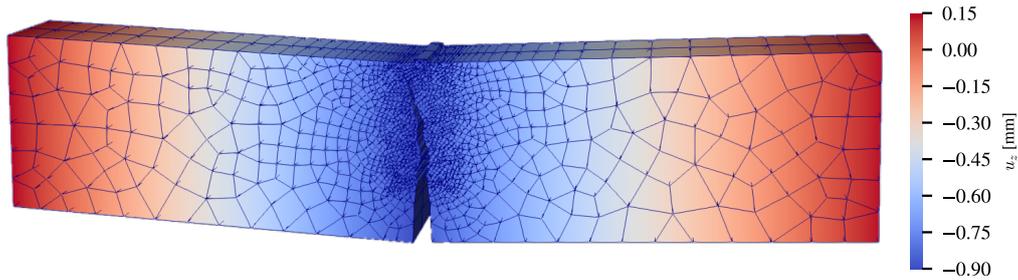


Figura 3.29 – Malha deformada exibindo o campo de deslocamento  $u_z$  para simulação de bilinear do exemplo 3.

A Figura 3.30 apresenta as dimensões da peça, assim como as condições de contorno do ensaio. Nessa figura, pode-se observar que a base da amostra é fixa, enquanto deslocamento vertical controlado é imposto em uma pequena placa de aço no lado direito, visando induzir a fissuração da peça.

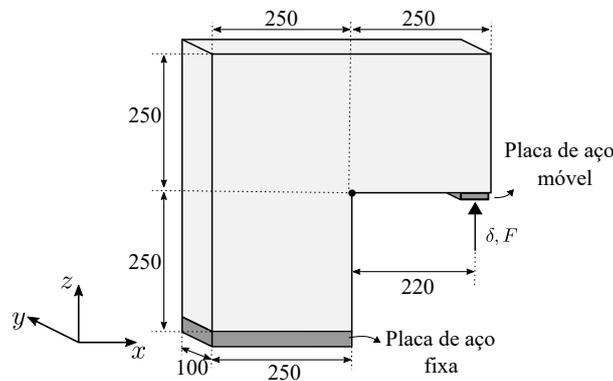


Figura 3.30 – Configuração do ensaio do painel em formato de L investigado por Winkler (2001). Todas as medidas em milímetros.

As propriedades do material foram extraídas do trabalho de Ghosh e Chaudhuri (2013) e são apresentadas na Tabela 3.14. A Tabela 3.15 apresenta um resumo contendo dos atributos da malhas.

Tabela 3.14 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 4.

E [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$ [MPa]	$G_F$ [N/m]
20.0	0.20	1.4	5	2.80	140

Tabela 3.15 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 4.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Cunha	1467	3075	8772	26316

No curso das análises numéricas, a força de reação devido ao deslocamento imposto foi registrada. Posteriormente, essa força foi plotada contra o deslocamento prescrito e comparada

com as curvas experimentais e as curvas numéricas obtidas por Winkler et al. (2004), Penna (2011) e Du et al. (2013), como pode ser visto na Figura 3.31. Pode-se observar que há uma boa concordância entre os resultados numéricos e os dados experimentais. Em relação à comparação com outros resultados numéricos, Winkler et al. (2004) usaram um modelo de fissura "manchada" (*smeared crack*), enquanto Penna (2011) utilizou um modelo baseado na mecânica do dano e Du et al. (2013) usaram uma formulação baseada no método *XFEM*. Quando mais de um resultado estava disponível para cada autor, os melhores foram considerados na figura. Como pode-se observa, entre essas abordagens, o método *XFEM* apresentou melhores resultados que os demais, apesar de apresentar oscilações não realistas no ramo de amolecimento da curva. Por outro lado, os resultados obtidos nesse trabalho apresentam boa concordância com os resultados experimentais.

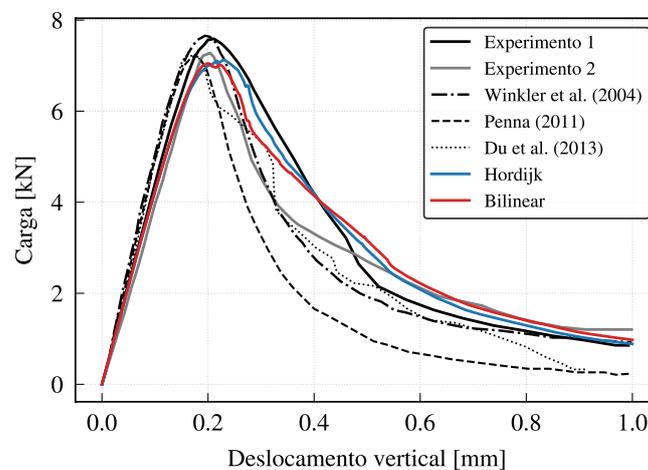


Figura 3.31 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 4.

A Tabela 3.16 apresenta uma análise comparativa para a carga de pico ( $F_{max}$ ) e o deslocamento correspondente ( $\delta$ ) das duas simulações em relação aos dados experimentais. Os valores máximos de carga e do deslocamento demonstram que as análises numéricas atingiram resultados bem próximos aos valores obtidos no experimento.

Tabela 3.16 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 4.

Modelos	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	$\delta$ [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experimento 1	-	7.59	0.2112	-	-
Experimento 2	-	7.27	0.2037	4.2	3.5
Hordijk	1228	7.10	0.2174	6.4	2.9
Bilinear	1296	7.05	0.1991	7.1	5.7

Por fim, a Figura 3.32 apresenta o estado deformado da malha da análise que utiliza a curva bilinear usando um fator de escala de 30. O padrão de fissuração apresentada é similar a obtida no ensaio experimental. Além disso, a figura inclui o campo de tensão  $\sigma_{zz}$  que é condizente com o processo de fissuração ao mostra tração na ponta da fratura e compressão no lado oposto.

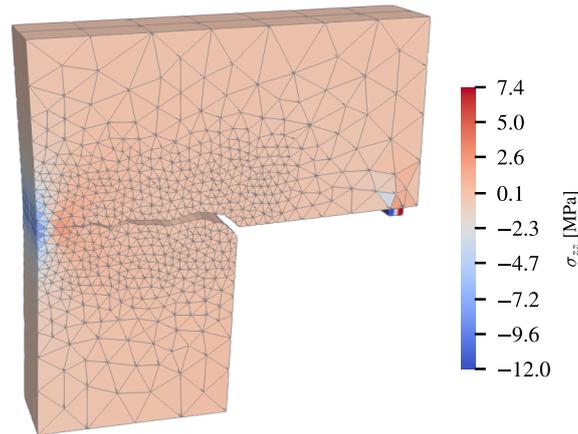


Figura 3.32 – Malha deformada exibindo o campo de tensão  $\sigma_{zz}$  para simulação de bilinear do exemplo 4.

### 3.5.10 - Exemplo 5 - Viga com entalhe central e com carregamento assimétrico

Neste exemplo, simula-se uma viga de concreto com entalhe central submetida a um carregamento assimétrico ensaiada por Galvez et al. (1998). As dimensões da viga, assim como as condições de contorno são apresentadas na Figura 3.33. Neste ensaio um deslocamento controlado é aplicado sob uma placa de aço na parte superior da viga com objetivo de estudar o comportamento do concreto a fissuração no modo misto. Os parâmetros utilizados nas análises foram extraídos do trabalho de Gálvez et al. (2002) e são apresentados na Tabela 3.17. A Tabela 3.18 apresenta um resumo contendo dos atributos da malha.

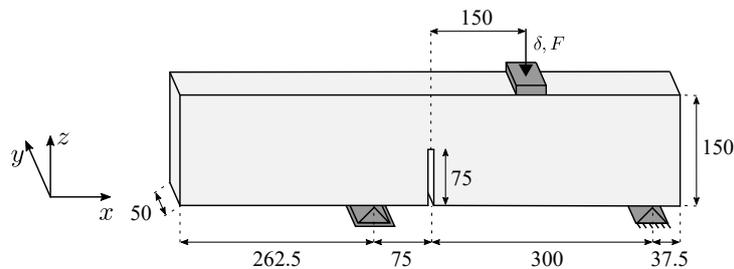


Figura 3.33 – Configuração do ensaio da viga com entalhe central e com carregamento assimétrico investigada por Galvez et al. (1998). Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.17 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 5.

E	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$	$G_F$
[GPa]				[MPa]	[N/m]
38.0	0.20	1.4	5	3.00	69

Durante as análises numéricas, a força de reação devido ao deslocamento imposto, bem como o CMOD foram registrados para análise posterior. Por meio desses dados, obteve-se a curva carga versus CMOD. O resultado numérico é comparado ao experimental obtido por Galvez et al. (1998) e com os resultados numéricos obtidos por Cendón et al. (2000) e Gálvez et al.

Tabela 3.18 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 5.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Cunha	2188	4298	13132	39396

(2002), conforme a Figura 3.34. A partir dos resultados, pode-se observar excelente concordância entre a curva experimental e as curvas numéricas, inclusive no ramo de amolecimento. Observe que as duas curvas numéricas seguem o mesmo padrão da experimental. As análises numéricas dos autores Cendón et al. (2000) e Gálvez et al. (2002) utilizaram elementos coesivos. Novamente, os melhores resultados de cada autor foram considerados. Embora eles estivessem disponíveis apenas para valores de CMOD em torno de 0.5 mm, ambas as curvas apresentam boa concordância com os dados experimentais e são semelhantes aos resultados obtidos nesse trabalho. A Tabela 3.19 apresenta uma comparação entre a análise experimental e numérica da carga de pico ( $F_{max}$ ) e do CMOD correspondente.

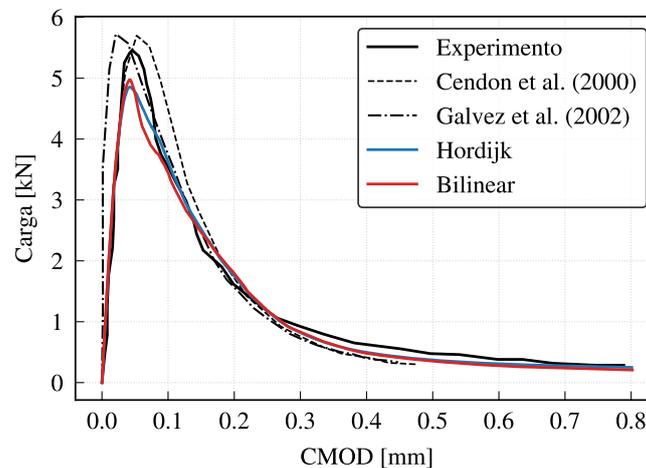


Figura 3.34 – Resultado experimental e predição numérica do experimento 5.

Tabela 3.19 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 5.

Modelo	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	CMOD [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta CMOD }{CMOD}$ %
Experimento	-	5.46	0.0457	-	-
Hordijk	1081	4.86	0.0418	11.0	8.6
Bilinear	1109	4.98	0.0421	8.9	7.9

A Figura 3.35 apresenta o estado deformado da viga que faz uso da curva bilinear no fim da análise, empregando-se um fator de escala 30. A figura apresenta, ainda, o campo de tensão  $\sigma_{xx}$  que se mostra consistente com o processo de fissuração, uma vez que há concentração de tração na ponta da fissura e de compressão na face oposta.

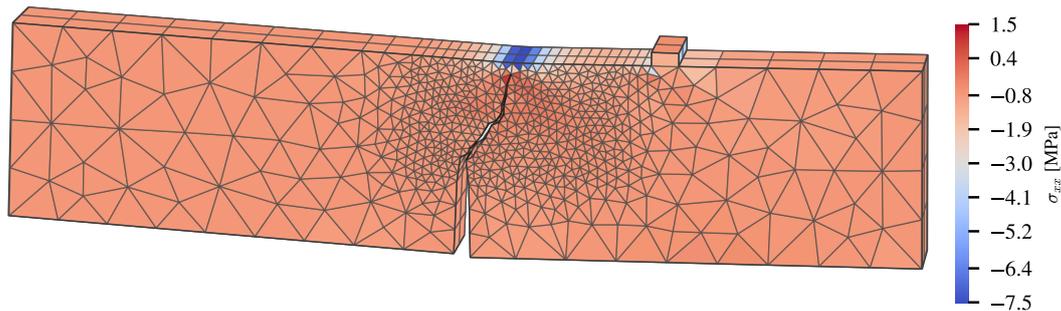


Figura 3.35 – Malha deformada exibindo o campo de tensão  $\sigma_{xx}$  para simulação de bilinear do exemplo 5.

### 3.5.11 - Exemplo 6 - Viga com entalhe e carregamento assimétrico

O quinto exemplo analisa a viga com entalhe e carregamento assimétrico investigado por Feist e Hofstetter (2007). As condições de contorno do ensaio e as dimensões da viga são apresentados na Figura 3.36. Neste ensaio um deslocamento controlado é aplicado sob uma placa de aço localizado na parte de baixo da viga, induzindo, dessa forma, a fissuração na peça. Observe que este exemplo não é simétrico e não pode ser simplificado para uma modelagem bidimensional. Os parâmetros do material necessários foram extraídos do trabalho de Gasser (2007) e são apresentados na Tabela 3.20. Os dados sobre a malha podem ser vistos na Tabela 3.21.

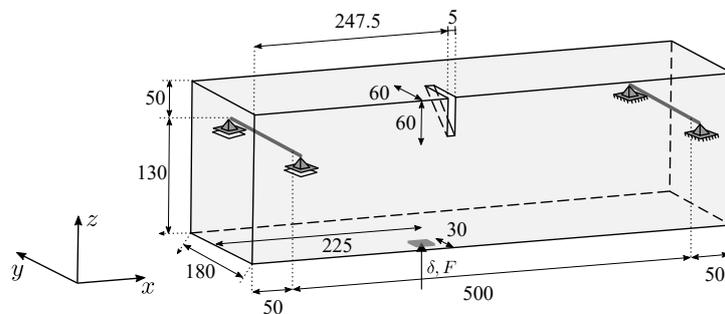


Figura 3.36 – Configuração do ensaio da viga com entalhe e carregamento assimétrico investigada por Feist e Hofstetter (2007). Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.20 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 6.

E [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$ [MPa]	$G_F$ [N/m]
37.3	0.19	1.4	5	3.05	106

Tabela 3.21 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 6.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Tetraedro	5766	10621	23026	69078

As curvas carga versus CMOD dos resultados numéricos e experimentais são apresentadas na Figura 3.37. Como pode ser visto, as análises numéricas apresentam resultados bastante semelhantes e boa concordância quando comparados aos experimentos. A Figura 3.37 também inclui a curva numérica obtida por Gasser (2007) que usou o Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade. Essa curva também mostra boa concordância com os dados experimentais; no entanto, o modelo apresentado neste trabalho é muito mais simples uma vez que possui menos variáveis. A Tabela 3.22 apresenta uma comparação entre os resultados experimental e numéricos da carga de pico ( $F_{max}$ ) e a CMOD correspondente. Pode-se observar uma boa concordância para os valores de carga de pico.

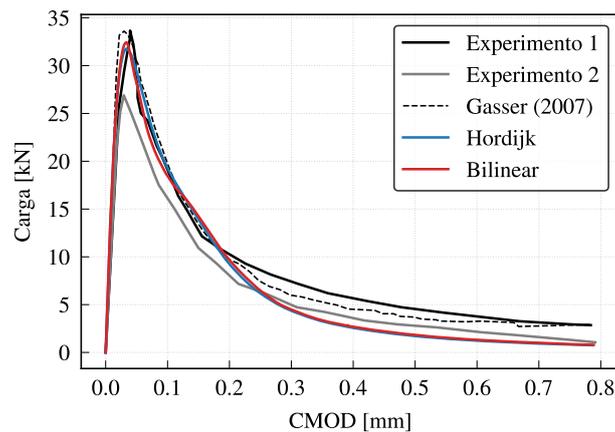


Figura 3.37 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 6.

Tabela 3.22 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 6.

Modelo	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	CMOD [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta CMOD }{CMOD}$ %
Experimento 1	-	33.66	0.0394	-	-
Experimento 2	-	26.90	0.0293	20.1	25.6
Hordijk	1544	31.54	0.0320	6.3	18.7
Bilinear	1742	32.41	0.0323	3.7	18.0

A Figura 3.38 apresenta o estado deformado no fim da análise da viga que emprega a curva de Hordijk, utilizando um fator de escala 20. A figura apresenta, ainda, o campo de deslocamento  $u_z$ . Além disso, a Figura 3.39 apresenta a evolução da superfície da fissura para diferentes níveis de deslocamento prescritos considerando que a abertura média dos elementos de interface coesivos  $w_n$  foi maior que  $0.5 u_c$ .

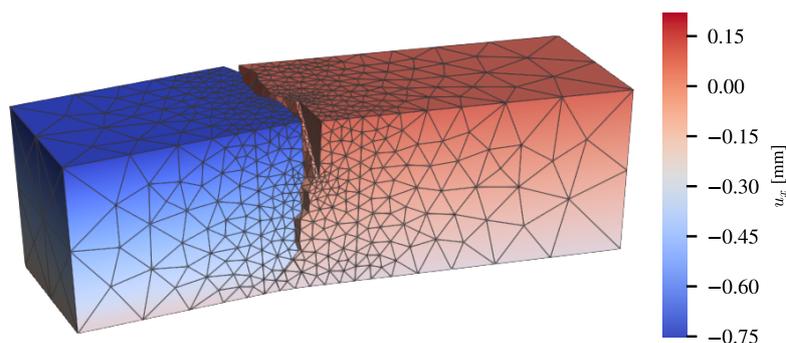


Figura 3.38 – Malha deformada exibindo o campo de deslocamento  $u_z$  para simulação de Hordijk do exemplo 6

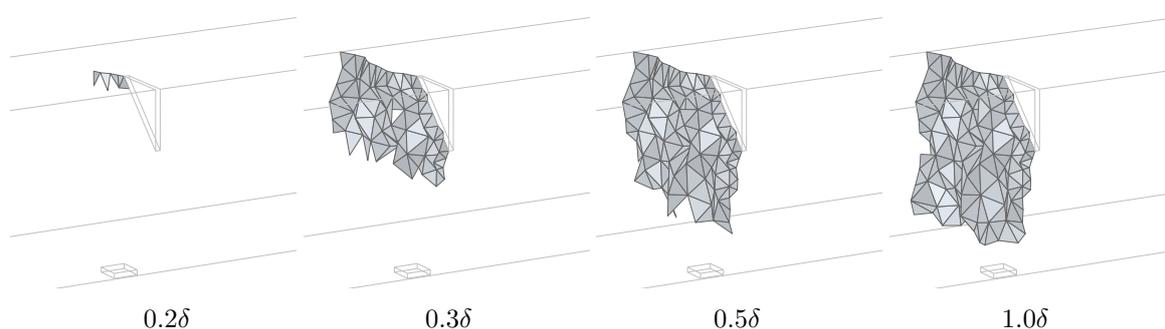


Figura 3.39 – Evolução da fissura de acordo com o deslocamento prescrito para a análise Hordijk do exemplo 6.

### 3.5.12 - Exemplo 7 - Placa quadrada com entalhe duplo

A placa quadrada de concreto com entalhe duplo ensaiada por Nooru-Mohamed (1992), é simulada numericamente aplicando-se as condições de contorno apresentadas na Figura 3.40. Neste ensaio, as faces inferior e inferior direita encontram-se engastadas, enquanto as faces superior e superior esquerda estão submetidas ao deslocamento imposto de mesma magnitude ( $\delta_h = \delta_v$ ). Essa configuração do ensaio tem como objetivo estudar o comportamento da peça de concreto a fissuração no modo misto ao criar duas fraturas inclinadas que partem dos entalhes e tendem a seguir em direção a face oposta. Na Figura 3.40 é possível visualizar, ainda, a posição dos LVDTs (*Linear Variable Differential Transformer*) no qual os deslocamentos são monitorados. Os parâmetros utilizados nas análises foram extraídos do trabalho de Nooru-Mohamed (1992) e são apresentados na Tabela 3.23. Por outro lado, os dados sobre a malha utilizada podem ser obtidos na Tabela 3.24.

Tabela 3.23 – Parâmetros do material para os elementos sólidos e coesivos do exemplo 7.

E	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}^{(0)}$	$G_f$	$G_F$
[GPa]				[MPa]	[N/m]	[N/m]
30.0	0.20	1.4	5	3.30	40	100

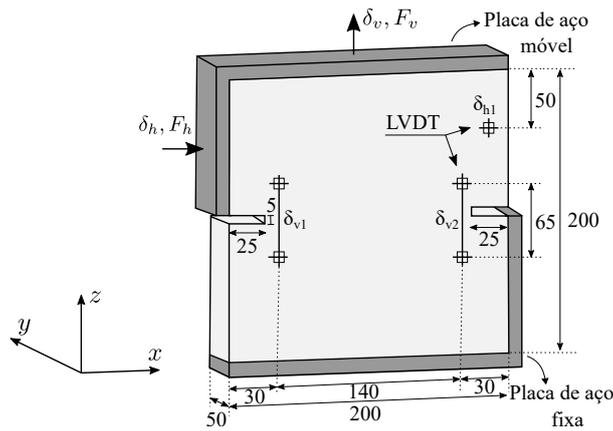


Figura 3.40 – Configuração do ensaio da placa quadrada com entalhe duplo. Todas as medidas em milímetros.

Tabela 3.24 – Resumo das informações da malha usada no exemplo 7.

Elementos	Elementos sólidos	Elementos de interface	Nós	Graus de liberdade
Cunha	1907	2822	11458	34374

Durante a análise de elementos finitos, as forças de reação  $F_h$  e  $F_v$  correspondentes aos deslocamentos impostos  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , respectivamente, foram registradas para posterior análise. Além disso, os deslocamentos verticais  $\delta_{v1}$  e  $\delta_{v2}$  e o deslocamento horizontal  $\delta_{h1}$  foram registrados em posições compatíveis com as localizações dos LVDTs no experimento. Com essas informações, foram elaboradas duas curvas. A Figura 3.41a apresenta a curva da carga vertical  $F_v$  versus o deslocamento vertical médio,  $\bar{\delta} = (\delta_{v1} + \delta_{v2})/2$ , enquanto Figura 3.41b apresenta a curva da carga horizontal  $F_h$  versus deslocamento horizontal  $\delta_{h1}$ . Como visto, ambos os modelos de amolecimento fornecem resultados bastante semelhantes. Além disso, todas as curvas numéricas estão em boa concordância com os experimentos. A Tabela 3.25 apresenta uma comparação entre a análise experimental e numérica da carga de pico ( $F_{max}$ ) e do deslocamento vertical médio correspondente.

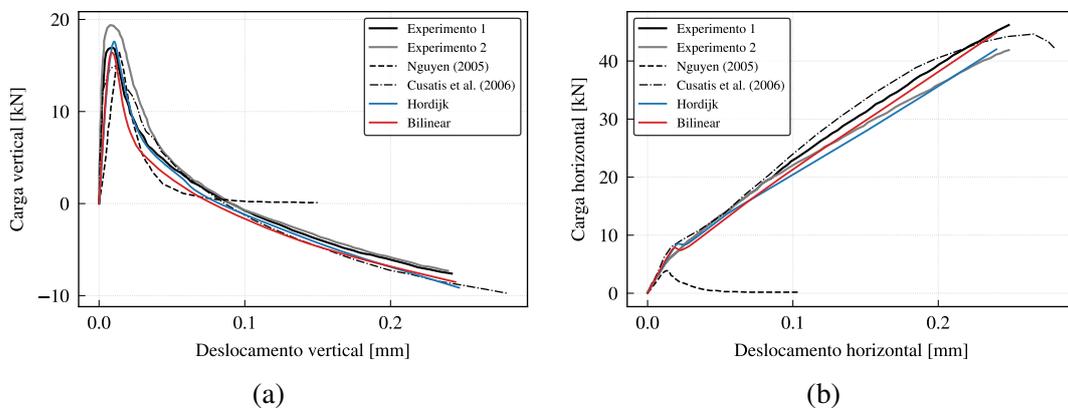


Figura 3.41 – Resultado experimental e predição numérica do exemplo 7.

Tabela 3.25 – Comparação dos resultados numéricos e experimental para o exemplo 7.

Modelo	Incrementos	$F_{max}$ [kN]	$\bar{\delta}$ [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \bar{\delta} }{\bar{\delta}}$ %
Experimento 1	-	16.96	0.0091	-	-
Experimento 1	-	19.39	0.0076	14.3	16.7
Hordijk	1037	17.65	0.0107	4.1	16.7
Bilinear	1968	16.38	0.0094	3.4	2.8

A Figura 3.41 também mostra os resultados numéricos de Nguyen (2005) e Cusatis et al. (2006). Embora esses autores não usem elementos coesivos, seus resultados oferecem uma chance de comparar o modelo proposto com outras abordagens. O autor Nguyen utiliza elementos sólidos convencionais e simula fraturas usando um modelo de dano não-local. Por sua vez, os autores Cusatis et al. usam um modelo em que o material é representado por um conjunto de partículas conectadas. Como pode ser visto na figura, o método proposto por Nguyen (2005) foi incapaz de prever o surgimento de força vertical negativa ao longo do ramo amolecimento. Além disso, a curva de carga horizontal não foi bem prevista. Por outro lado, Cusatis et al. (2006) forneceram melhores resultados, mas a curva para a carga horizontal apresenta um padrão ligeiramente diferente do experimento.

A Figura 3.42 apresenta o estado deformado multiplicado por um fator de escala de 20 no final da análise. Uma boa concordância nos padrões de fissuramento é observada. A Figura 3.42 também mostra o campo de tensão  $\sigma_{xx}$ , onde é possível observar uma descontinuidade no campo de tensões gerada pelo fissuramento da amostra.

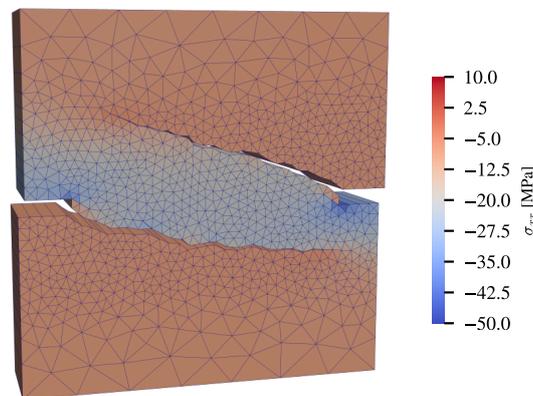


Figura 3.42 – Malha deformada exibindo o campo de tensão  $\sigma_{xx}$  para simulação de bilinear do exemplo 7.

A análise numérica foi repetida utilizando os mesmos parâmetros e uma malha de elementos finitos composta por elementos hexaedros. Por meio do resultado dessa análise, observou-se que as duas curvas numéricas tiveram comportamento similar aos resultados numéricos obtidos utilizando malha composta por elementos de cunha. Apesar da malha com elementos hexaedros ser mais refinada, o padrão de fissuração experimental é melhor reproduzido pela malha composta por elementos de cunha. Pode-se observar, por meio da Figura 3.43, que sob as condições de cisalhamento impostas nesta malha, o intertravamento evitou a propagação de

trincas do entalhe esquerdo levando mais níveis de tensões aos elementos coesivos próximos, o que, por sua vez, favoreceu o desenvolvimento de novas trincas.

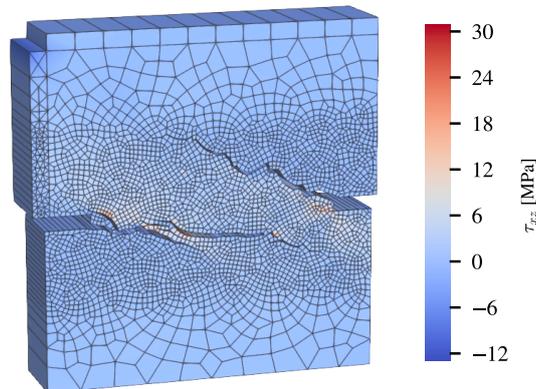


Figura 3.43 – Malha composta de elementos hexaedros exibindo o campo de tensão  $\tau_{xz}$ .

### 3.6 - DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta uma abordagem tridimensional discreta visando simular a fratura em materiais quase frágeis. Para tanto, é necessário a inclusão dos elementos de interface de camada dupla na malha de elementos finitos. O algoritmo, apresentado na Seção 3.1, demonstrou-se eficiente ao permitir a inserção dos elementos de interface em todas as malhas utilizadas de forma rápida e utilizando poucos recursos computacionais. Além disso, o algoritmo é versátil, pois permite que o usuário escolha aonde deseja colocar os elementos de interface (em toda malha ou em apenas parte dela), permitindo dessa forma maior flexibilidade nas análises numéricas.

Os testes de verificação realizados demonstraram que a formulação e a implementação do modelo de fratura estão corretos, uma vez que o modelo se comportou conforme esperado. Já o teste de refinamento demonstrou que o modelo consegue reduzir, a partir de um certo grau de discretização, o efeito da malha no resultado da análise. Isso se deve, principalmente, a utilização do comprimento representativo e do fator que controla os deslocamentos elásticos na formulação do modelo de fratura. Uma vez que o comprimento representativo possui a função de regular a rigidez de cada elemento coesivo da malha, reduzindo assim o efeito na rigidez global do acréscimo ou diminuição de elementos coesivos gerada pela diferença de discretização da malha. Enquanto, o fator que controla os deslocamentos relativos influencia a rigidez elástica dos elementos coesivos com objetivo de reduzir a abertura destes elementos na fase elástica.

Após os testes de verificação e refinamento, foram realizadas simulações de sete ensaios experimentais em amostras de concreto obtidos na literatura. Em todos os casos, foram

observados boa concordância entre as curvas numéricas e experimentais, principalmente na verificação das cargas de pico e na forma das curvas de amolecimento. Além disso, os padrões de fissuração nas malhas foram similares aos obtidos nos experimentos, enquanto a distribuição de tensão foram compatíveis com processo de fraturamento. O efeito do uso de diferentes curvas de amolecimento foi estudado em cada exemplo. Os resultados demonstram que as duas curvas de amolecimento são adequadas para simular o concreto e que a diferença é sutil no resultado da análise. Em relação ao uso de diferentes elementos sólidos, observou-se que os elementos hexaédricos interferem no desenvolvimento das fissuras (Figura 3.43) e, dependendo do nível de discretização, pode levar ao aumento das cargas de pico ou à formação de várias fissuras nas regiões onde se esperava uma fissura. Por outro lado, o uso de elementos tetraédricos e piramidais tende a favorecer padrões de fissuração mais realistas.

O modelo de fratura demonstrou-se robusto ao conseguiu simular uma grande variedade de problemas com diferentes geometrias, condições de contorno e problemas que não podem ser simplificados por modelagem bidimensional demonstrando, assim, a importância de possuir um modelo 3D de fratura. Verificou-se, ainda, que o modelo possui estabilidade numérica e como resultado consegue simular as curvas completas de todos os problemas analisados. Por outro lado, o modelo possui a limitação de não romper quando a amostra é submetida a compressão e, por consequência, não consegue simular adequadamente carregamentos cíclicos que envolvam níveis elevados de compressão. Além disso a abordagem proposta necessita de níveis razoáveis de refinamento da malha para representar de forma adequada o processo de fratura.

Em relação ao procedimento de solução, verificou-se que o solucionador com passo automático, utilizado neste trabalho, fornece incrementos que otimizam a convergência do modelo e é essencial para obtenção da solução dos problemas analisados. Por outro lado, o método de Ralston avalia a matriz de rigidez para diferentes vetores de deslocamento global e, dessa forma, consegue obter uma melhor estimativa dessa matriz, o que se reflete na melhora dos resultados obtidos. Por fim, vale ressaltar que a estratégia de reaplicação dos resíduos utilizado nesse trabalho demonstrou-se eficaz ao favorecer a convergência das análises e reduzir, significativamente, os resultados espúrios ocasionados pelos desvios do equilíbrio.

## 4 - MODELAGEM DA FRATURA HIDRÁULICA

Meios porosos são uma composição de partículas de diferentes tamanhos e formas (também conhecidas como esqueleto sólido ou matriz), juntamente com pelo menos um meio fluido preenchendo os poros restantes (Khoei, 2015). O comportamento mecânico do meio poroso total ou parcialmente saturado é resultado da interação entre o fluido e o esqueleto sólido. De fato, meios porosos são descritos, pela teoria da poroelasticidade, como meios multifásicos. Em termos físicos, a teoria postula que, quando um material poroso é submetido a tensão, a deformação da matriz resultante leva a alterações volumétricas nos poros. Como os poros são preenchidos com fluido, a mudança de pressão resulta no fluxo do fluido entre as regiões que apresentam diferenças na poropressão.

O problema do fluxo em meios porosos deformados tem despertado o interesse dos pesquisadores, por um longo período, devido à grande importância desse tema para a estabilidade das estruturas e para a indústria como de petróleo e gás e de energia geotérmica. Um dos primeiros estudos sobre o tema foi realizado por Terzaghi (1923) e Terzaghi (1925), que resultou no desenvolvimento da teoria unidimensional de consolidação. Em sua teoria original, Terzaghi postulou que os constituintes do meio poroso (esqueleto sólido e fluido) são considerados incompressíveis e que as deformações de um solo provêm do rearranjo do sistema das partículas. Essas suposições são uma boa aproximação para o comportamento real de solos moles, onde os constituintes são bastante rígidos e os solos apresentam alta compressibilidade devido à redução do volume dos poros (Verruijt, 2013). Essa teoria foi estendida a problemas tridimensionais por Biot (1941), em que a limitação de constituintes incompressíveis foi removida. Em Biot (1955), a teoria foi estendida ao caso elástico anisotrópico, enquanto em Biot (1956), foram apresentadas as equações para a resposta dinâmica dos meios porosos. Já em Biot (1973), as extensões à elasticidade não linear foram derivadas. As equações de consolidação em termos de coeficientes não drenados foram reformuladas por Rice e Cleary (1976). Zienkiewicz et al. (1980), Prevost (1980) e Prevost (1982) propuseram as extensões ao uso de constituintes não lineares. Fredlund e Morgenstern (1977) e Chang e Duncan (1983) estenderam a teoria de Biot a condições trifásicas, com o ar dos poros sendo a terceira fase. Coussy (1991) e Coussy (2004) reformulou a teoria de Biot, usando uma abordagem termodinâmica, na faixa de comportamento não linear do material e grandes deformações.

Devido principalmente ao avanço das técnicas de fraturamento hidráulico realizadas pela indústria de petróleo, surgiu a necessidade de se obter uma maior compreensão do comportamento do meio poroso fraturado. Como resultado, vários pesquisadores se dedicaram

a investigar esse fenômeno. O processo de fraturamento hidráulico em um meio poroso saturado possui um alto grau de complexidade, pois envolve o acoplamento de vários fenômenos físicos, incluindo deformação do esqueleto sólido, fluxo de fluido através do meio poroso e dentro da fratura, troca de fluidos entre a fratura e o meio poroso circundante e a propagação da fratura hidráulica (Khoei, 2015). De fato, as fraturas afetam o padrão de fluxo e as deformações nas proximidades da descontinuidade. As primeiras tentativas de modelar fraturas acionadas por fluido se concentraram no desenvolvimento de soluções analíticas, como o modelo KGD desenvolvido pelos pesquisadores Khristianovic e Zheltov (1955) e Geertsma e Klerk (1969) e o modelo PKN desenvolvido por Perkins e Kern (1961) e Nordgren (1972) visando prever a forma e o tamanho de uma fratura hidráulica com base nas propriedades da rocha e do fluido. Esses modelos tornaram-se clássicos e costumam ser usados para validar modelos numéricos, porém sofrem com as limitações inerentes das análises analíticas, como a incapacidade de representar um problema evolutivo em um domínio com complexidade real.

Com o objetivo de superar as limitações dos modelos analíticos, várias abordagens numéricas foram propostas para a simulação do meio poroso fraturado. Boone e Ingraffea (1990) apresentaram um procedimento numérico para a simulação de fraturas acionadas hidráulicamente em meios poroelásticos empregando o método dos elementos finitos (MEF) em conjunto com o método das diferenças finitas. Secchi e coautores (Simoni e Secchi, 2003; Schrefler et al., 2006; Secchi et al., 2007; Secchi e Schrefler, 2012; Secchi e Schrefler, 2014) modelaram a fratura hidráulica em meios porosos, tanto em 2D quanto em 3D, usando o MEF, o modelo de fratura coesiva e a remalhagem adaptativa. Yang e Chen (2005) desenvolveram um modelo de dano hidromecânico para simular o fluxo do fluido durante a fraturamento progressivo de rochas heterogêneas. Li et al. (2012) estenderam o modelo bidimensional apresentado por Yang e Chen (2005) para 3D. Shen et al. (2013) usaram o método dos elementos de contorno para analisar problemas 2D de fraturamento hidráulico com acoplamento termo-hidro-mecânico. Gupta e Duarte (2014) apresentaram simulações de propagação de fraturas hidráulicas não planares em 3D usando um MEF generalizado adaptativo. Khoei (2015) empregou o método de elementos finitos estendidos (XFEM) para a simulação de fratura hidráulica em meios porosos multifásicos usando acoplamento termo-hidro-mecânico. Paul et al. (2018), usando o XFEM, desenvolveram modelagem hidromecânica acoplada em 3D com modelo de zona coesiva, com o objetivo de simular a propagação de fraturas hidráulicas não planares e a interferência de múltiplas fraturas hidráulicas.

A abordagem de fratura hidráulica, desenvolvida nesse trabalho, é baseada no trabalho de Nguyen et al. (2017) que apresenta uma modelagem computacional bidimensional que faz uso de elementos de interface de espessura zero para simular fratura hidráulica em meio poroso saturado e permeável. Este trabalho apresenta um método tridimensional totalmente acoplado e trata dos vários fenômenos físicos envolvidos na fratura hidráulica. O meio poroso foi modelado

usando a conhecida formulação  $u-p$  com base na teoria de poroelasticidade de Biot. Elementos de interface de camada tripla com espessura zero foram empregados na abordagem, visando fornecer ao domínio possíveis caminhos da fratura por onde também é permitido o fluxo do fluido. A lei cúbica (Snow, 1969; Witherspoon et al., 1980) é usada para relacionar o fluxo do fluido no plano com a abertura da trinca. Para modelar a geração de trinca, o modelo de zona coesiva (Dugdale, 1960; Barenblatt, 1962; Hillerborg et al., 1976) foi considerado.

Entre as contribuições além do trabalho de Nguyen et al. (2017) tem-se: (a) Componentes de tensão adicionais em os elementos sólidos e de interface. É necessário cuidado especial ao lidar com os elementos de interface, uma vez que o fluxo nas fraturas pode ocorrer em qualquer direção no plano; (b) Correção do termo de compressibilidade na equação de continuidade. Isso permite obter corretamente os perfis de pressão do fluido ao longo do comprimento da fratura em problemas de injeção; (c) Consideração do peso do fluido dentro das fissuras. Embora a massa de fluido possa ser considerada desprezível, essa consideração é útil para obter distribuições corretas de pressão dentro das fratura; (d) Um modelo constitutivo baseado em plasticidade para os elementos de interface que consideram os componentes normais e de cisalhamento; (e) Uso de um solucionador de passo de tempo totalmente acoplado e automático com um esquema de correção de predição que fornece estabilidade de solução; (f) Uso de um comprimento representativo para os elementos sólidos visando combater a dependência da malha; (g) Apresentação de um algoritmo para introdução de elementos de interface de três nós em malhas 3D;

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia adotada para a modelagem da fratura hidráulica em meios porosos. Para tanto, adota-se a abordagem discreta que requer a adição do elemento de interface de camada tripla a uma malha convencional de elementos finitos. Inicialmente, aborda-se sobre o algoritmo utilizado para gerar os elementos interface de camada tripla em uma malha convencional de elementos finitos, ademais discute-se sobre a topologia do elemento de interface. Em seguida, apresenta-se o desenvolvimento das equações que governam o fenômeno do fraturamento hidráulico no meio poroso visando a obtenção da forma fraca dessas equações. Posteriormente, apresenta-se a discretização do domínio em relação ao tempo e o procedimento de soluções das equações dos elementos finitos. Por fim, são apresentadas as simulações numéricas e a discussão sobre a abordagem proposta.

#### **4.1 - GERAÇÃO DA MALHA COM ELEMENTOS DE INTERFACE DE CAMADA TRIPLA**

A abordagem discreta para simular o fraturamento hidráulico envolve a adição dos elementos de interface de camada tripla entre os elementos sólidos de uma malha convencional de elementos finitos (Figura 4.1a). Para tanto, é utilizado o algoritmo 2, uma versão modificada do algoritmo

1 apresentada no Capítulo 3. As etapas empregadas no algoritmo são descritas no contexto da programação orientado objeto, portanto, assume-se que a malha pode ser descrita em termos de nó e objeto do elemento. Também considera-se que cada objeto do elemento contém uma lista de ponteiros para seus nós correspondentes. As etapas necessárias para introduzir elementos de interface em uma malha são:

1. **Separação dos elementos:** Inicialmente, todos os elementos sólidos da malha são destacados de seus vizinhos (Figura 4.1b). Para isso, em cada elemento, os ponteiros nodais são substituídos por cópias dos ponteiros dos nós originais. Em outras palavras, para cada elemento, novos nós são criados e vinculados em substituição aos originais. Este procedimento fornece um conjunto inteiramente novo de nós para a malha e eles farão parte da conectividade dos elementos da interface.
2. **Emparelhamento das faces:** Para cada elemento sólido, uma lista de todas as faces é gerada. Cada face contém uma lista de ponteiros nodais correspondentes. Em seguida, um valor hash é calculado para todas as faces obtidas da malha. O objetivo de usar um valor hash é verificar facilmente se duas faces estão sobrepostas. Esse é o caso em lados comuns de dois elementos sólidos vizinhos. A função hash deve ser definida de forma que retorne o mesmo valor numérico para duas faces sobrepostas. Quando duas faces com o mesmo valor hash são detectadas, um objeto de par de faces é gerado e armazenado em uma lista.
3. **Geração dos elementos de interface:** Os nós de cada par de faces encontrados na etapa anterior são usados para definir as conectividades correspondentes aos nós externos dos elementos de interface. Em seguida, para cada elemento de interface, os nós da primeira face são selecionados (ou seja, metade dos nós da lista de conectividade atual). Esses nós são então copiados e adicionados como nós intermediários. Mais tarde, os nós centrais nas interseções são fundidos em um único nó. Finalmente, a malha é atualizada adicionando os elementos de interface de camada tripla gerados (Figura 4.1 d).

## 4.2 - TOPOLOGIA DO ELEMENTO DE INTERFACE DE CAMADA TRIPLA

O elemento de interface tem a função de simular o desenvolvimento da fratura (descontinuidade), o fluxo do fluido dentro da fratura e a troca de fluido entre a fratura e o meio circundante. A Figura 4.2 apresenta um elemento típico de interface de camada tripla com formato quadrilateral. A Figura 4.2a mostra o elemento localizado no sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$ , enquanto a Figura 4.2b mostra o elemento no sistema paramétrico  $(\xi, \eta)$ . Os vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  representam vetores unitários em um sistema de

---

**Algorithm 2:** Algoritmo de adição dos elementos de interface de três camadas.

---

**Input:** Uma malha convencional chamada *Malha*

**Output:** A versão atualizada da *Malha* incluindo elementos de interface localizados entre os elementos 3D

*! Etapa 1: Separação dos elementos*

obter uma lista *Elementos* com todos os elementos da *Malha*

**foreach** *elem* em *Elementos* **do**

- ┌ copie os dados dos nós em *elem* para novos objetos dos nós
- ┌ substitua os ponteiros nodais em *elem* por correspondentes cópias dos ponteiros
- └ descartar objetos dos nós originais

*! Etapa 2: emparelhamento das faces com o mesmo valor de hash*

*ParesFaces* = [ ] *! Uma lista dos pares das faces correspondentes*

*Faces* = [ ] *! Uma lista de todas as faces*

**foreach** *elem* em *Elements* **do**

- ┌ crie uma lista *ElemFaces* com todas as faces dos *elem*

- ┌ **forall** face *f* em *ElemFaces* **do**

- ┌ ┌ calcule um valor de hash para *f*

- ┌ ┌ **if** uma face  $\bar{f}$  da *Faces* tem o mesmo valor de hash que a face *f* **then**

- ┌ ┌ ┌ adicione o par (*f*,  $\bar{f}$ ) a *ParesFaces*

- ┌ ┌ ┌ remova *f* de *Faces*

- ┌ ┌ **else**

- ┌ ┌ ┌ adicione *f* a *Faces*

*! Etapa 3: geração dos elementos de interface*

*Interfaces* = [ ] *! Lista para elementos de interface recém gerados*

**foreach** *par* em *ParesFaces* **do**

- ┌ *INodes* = [ ] *! Uma lista com ponteiros para os nós de um elemento de interface*

- ┌ **foreach** face *f* em *par* **do**

- ┌ ┌ obtenha todos os nós de *f* e adicione seus ponteiros a *INodes*

- ┌ gere um elemento de interface *I* com conectividade baseada em *INodes*

- ┌ adicione *I* a *Interfaces*

*! Etapa 4: adição de nós intermediários aos elementos de interface*

*NoMeio* = [ ] *! Uma lista de nós intermediários*

**foreach** *I* em *Interfaces* **do**

- ┌ obter uma lista *NoFaces* com nós da primeira face de *I*

- ┌ **foreach** nó *n* em *NoFaces* **do**

- ┌ ┌ calcular um valor de hash para *n*

- ┌ ┌ **if** um nó  $\bar{n}$  de *NoMeio* tem o mesmo valor de hash que *n* **then**

- ┌ ┌ ┌ adicionar nó  $\bar{n}$  ao elemento de interface *I*

- ┌ ┌ **else**

- ┌ ┌ ┌ faça uma cópia *nc* do nó *n*

- ┌ ┌ ┌ adicione *nc* a *NoMeio*

- ┌ ┌ ┌ adicione *nc* ao elemento de interface *I*

atualize a lista dos nós em *Malha* com todos os nós encontrados em *Interfaces*

atualize a lista dos elementos em *Malha* com os elementos em *Interfaces*

renumere todos os nós e elementos em *Malha*

---

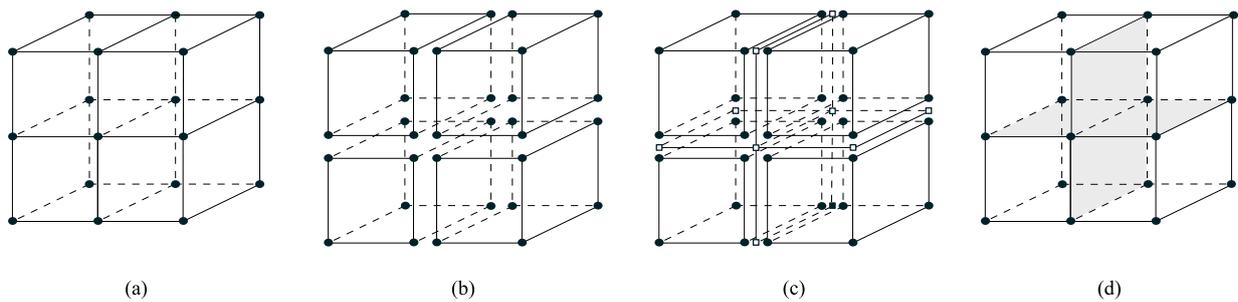


Figura 4.1 – Geração de malha com elementos de interface: a) malha inicial; b) separação dos elementos sólidos e geração de novos nós; c) geração dos nós intermediários; d) malha final incluindo elementos de interface.

coordenadas local  $(n, s, t)$ . Os nós das camadas externas (1 a 8) contêm quatro graus de liberdade (três deslocamentos e um de pressão), enquanto os nós da camada intermediária (9 a 12) contêm apenas um grau de liberdade de pressão. Para a análise mecânica, apenas os nós com graus de liberdade de deslocamento são considerados. Por esse motivo, a formulação do elemento de interface de camada dupla (desenvolvida na Seção 3.2) para análises mecânicas pode ser usada como parte da formulação para simular fratura hidráulica.

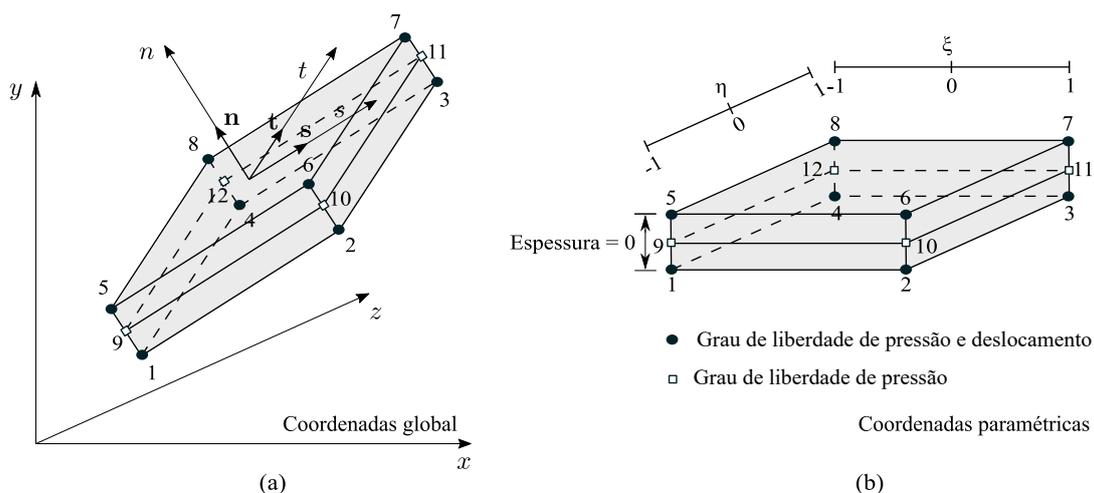


Figura 4.2 – Elemento de interface de doze nós: a) sistema global  $x y z$  e referência global dada pelos vetores  $n, s$  e  $t$ ; b) sistema de coordenadas paramétricas.

### 4.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO NO MEIO POROSO

As equações diferenciais parciais que governam a fratura hidráulica são as equações do equilíbrio mecânico e da continuidade para o meio poroso fraturado. Neste trabalho, a teoria da proelasticidade de Biot (1941) é empregada para descrever o comportamento do meio poroso deformável com a lei de Darcy (1856) sendo usada para o fluxo de fluido no meio poroso. Por

outro lado, o modelo de zona coesiva é usado para caracterizar o processo de fraturamento, enquanto a teoria de lubrificação de Reynolds (1886), que idealiza o fluxo laminar do fluido viscoso newtoniano através de fraturas com paredes lisas e paralelas, é empregada para o fluxo de fluido na fratura. Como o meio poroso saturado é um sistema de duas fases em que os poros do esqueleto sólido são completamente preenchidos com o fluido, as equações são desenvolvidas em termos de deslocamentos dos sólidos  $\mathbf{u}$  e pressão dos poros  $p$ , conhecida como formulação  $u - p$ . Neste trabalho, as seguintes hipóteses são assumidas: meio poroso saturado, condições isotérmicas, o fluxo do fluido não possui atraso e pequenos deslocamentos e deformações. Esta seção apresenta a derivação detalhada das formas fracas e das equações de elementos finitos para o equilíbrio mecânico e equações diferenciais de fluxo de fluido.

#### 4.3.1 - Condições iniciais e de contorno

A Figura 4.3 apresenta as condições de contorno para o problema de fraturamento hidráulico em um domínio  $\Omega$ , onde  $\Gamma$  e  $\Gamma_d$  representam, respectivamente, as superfícies do domínio e da fratura.

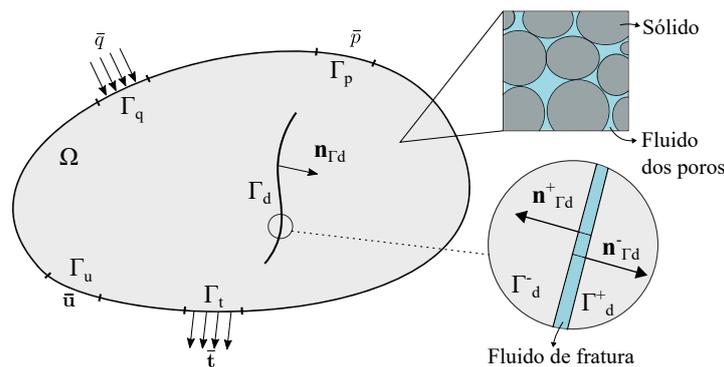


Figura 4.3 – As condições de contorno de um meio poroso saturado  $\Omega$  com descontinuidade  $\Gamma_d$ . Modificado de Nguyen et al. (2017).

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t = 0) &= \mathbf{u}_0, \\ p(t = 0) &= p_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{u}_0$  e  $p_0$  representam, respectivamente, os deslocamentos iniciais do sólido e a poropressão inicial.

As condições de contorno essenciais para o meio poroso são expressas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \Gamma_u \\ p &= \bar{p} \quad \text{em} \quad \Gamma_p \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{p}$  representam, respectivamente, os deslocamentos e as poropressões prescritos.

As condições de contorno naturais para o meio poroso são dadas por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em} \quad \Gamma_t \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \bar{q} \quad \text{em} \quad \Gamma_q\end{aligned}\quad (4.3)$$

onde  $\bar{\mathbf{t}}$  e  $\bar{q}$  representam, respectivamente, a tensão e o fluxo do fluido prescritos, enquanto  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma$ .

As condições de contorno naturais da descontinuidade do domínio são expressas como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d^+} &= \mathbf{t}^+ \quad \text{em} \quad \Gamma_d^+ \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d^-} &= \mathbf{t}^- \quad \text{em} \quad \Gamma_d^- \\ \mathbf{t}^+ &= -\mathbf{t}^- = \mathbf{t}\end{aligned}\quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{t}$  representa a tensão transferida através da descontinuidade  $\Gamma_d$ , enquanto  $\mathbf{n}_{\Gamma_d}$  representa os vetores unitários normais às faces da descontinuidade  $\Gamma_d$ . O termo  $\mathbf{t}$  pode ser reescrito em função da tensão coesiva  $\mathbf{t}^c$  e da pressão do fluido na descontinuidade  $p_f$ , conforme a equação:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^c - \mathbf{m}_f p_f \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{m}_f = \langle 1, 0, 0 \rangle$  para análises 3D e  $\mathbf{m}_f = \langle 1, 0 \rangle$  para análises 2D.

Por fim, as condições de contorno para o fluxo do fluido na fratura são dadas por:

$$\begin{aligned}q &= Q_0 \quad \text{no incio da fissura} \\ q &= 0 \quad \text{na ponta da fissura}\end{aligned}\quad (4.6)$$

onde  $Q_0$  representa a taxa de fluido aplicado à fratura.

### 4.3.2 - Equilíbrio mecânico no meio poroso

A equação para conservação do momento linear, negligenciando a aceleração do meio poroso, pode ser expresso conforme a equação:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

onde  $\nabla$  é o divergente,  $\boldsymbol{\sigma}$  denota o tensor de tensão total,  $\rho \mathbf{b}$  representa o vetor das forças de corpo com  $\mathbf{b} = \langle 0, 0, g \rangle$  e  $g$  [m/s<sup>2</sup>] denota a aceleração da gravidade. O termo  $\rho$  [Kg/m<sup>3</sup>]

representa a densidade do meio poroso expresso como:

$$\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_f \quad (4.8)$$

onde  $n$  é a porosidade, enquanto  $\rho_s$  [Kg/m<sup>3</sup>] e  $\rho_f$  [Kg/m<sup>3</sup>] denotam, respectivamente, a densidade intrínseca da fase sólido e da fase do fluido.

Visando derivar a forma fraca da equação de conservação do momento, uma função de teste  $\delta u$  é multiplicada pela Eq. 4.7 e integrada no domínio. Em notação indicial, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\dot{\sigma}_{ij,j} + \rho b_i) d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Aplicando-se a integração por partes ao primeiro termo da Eq. 4.9, resulta em:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i \dot{\sigma}_{ij})}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}}_{\delta \varepsilon_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega \quad (4.10)$$

A aplicação do teorema da divergência (também conhecido como teorema de Gauss) ao problema descontínuo, considerando as superfícies de domínio  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_d$ , conduz a:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u_i \dot{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta \llbracket u \rrbracket_i \dot{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega \quad (4.11)$$

onde o operador  $\llbracket \cdot \rrbracket$  é usado para avaliar quantidades em ambos os lados da descontinuidade ( $\llbracket X \rrbracket = X^+ - X^-$ ). O termo  $\llbracket u \rrbracket$  representa o salto no campo de deslocamento através da descontinuidade, isto é, representa o deslocamento relativo entre as duas faces da fratura. Na ausência da descontinuidade, o deslocamento do meio poroso é contínuo e, portanto,  $\llbracket u \rrbracket = 0$ .

Substituindo-se a Eq. 4.11 na Eq. 4.9, resulta em:

$$\int_{\Gamma_t} \delta u_i \dot{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta \llbracket u \rrbracket_i \dot{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Deve-se notar que devido à continuidade da tensão através da fratura, a integral a seguir é igual a zero (Khoei, 2015), isto é:

$$\int_{\Gamma_d} \delta \llbracket u \rrbracket_i \dot{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma_d} (\delta u_i^+ - \delta u_i^-) \dot{t}_i d\Gamma = 0 \quad (4.13)$$

A Eq. 4.13 representa o equilíbrio mecânico na fratura. Para fins de clareza, este termo será omitido, mas será detalhado na próxima seção. Em seguida, a Eq. 4.12 é reescrita em notação

matricial como:

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

O princípio da tensão efetiva, introduzido por Terzaghi (1923), define que as tensões totais,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , podem ser decompostas como a soma das tensões efetivas,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ , e da pressão da fase fluida,  $p$ . A tensão efetiva representa a componente da tensão total que governa a deformação do meio poroso e pode ser expressa conforme a equação:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \alpha \mathbf{m} \dot{p} \quad (4.15)$$

onde o termo  $\mathbf{m}$  indica o tensor de identidade, em notação de Voigt, expresso por  $\mathbf{m} = \langle 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle$  para análises 3D e  $\mathbf{m} = \langle 1, 1, 0 \rangle$  para análises 2D, enquanto o parâmetro  $\alpha$  é o coeficiente de Biot (Biot, 1941; Biot e Willis, 1957) definido como:

$$\alpha = 1 - \frac{K_p}{K_s} \quad (4.16)$$

onde  $K_p$  [N/m<sup>2</sup>] é o módulo volumétrico do meio poroso e  $K_s$  [N/m<sup>2</sup>] é o módulo volumétrico do sólido que constitui o meio poroso. Para solos,  $\alpha \approx 1$  uma vez que a compressibilidade das partículas sólidas é muito pequena em comparação com a compressibilidade do meio poroso. Note que a Eq. 4.15 corresponde à convenção de sinais no qual a tensão de tração positiva e pressão de compressão é positiva.

Utilizando a relação dada pela Eq. 4.15 na Eq. 4.14, tem-se:

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}' d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \alpha \mathbf{m} \dot{p} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

A fim de resolver as equações integrais, as aproximações por elementos finitos para o deslocamento,  $\mathbf{u}$ , e pressão,  $p$ , são aplicados de acordo com as equações:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{a} \quad (4.18)$$

$$p = \mathbf{N}_p \mathbf{p} \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{p}$  representam, respectivamente, o vetor de deslocamento nodal e o vetor de poropressão nodal dos elementos sólidos, enquanto  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_p$  denotam, respectivamente, a matriz de funções de forma dos deslocamentos e o matriz de funções de forma da poropressão. Os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{p}$ , para elementos sólidos 3D com  $n$  nós, podem ser expressos como:

$$\mathbf{a} = \langle u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \dots, u_{xn}, u_{yn}, u_{zn} \rangle \quad (4.20)$$

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \quad (4.21)$$

Enquanto os termos  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_p$  são dados por:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{N}_p = \left[ N_1, N_2, \dots, N_n \right] \quad (4.23)$$

As mesmas funções de forma para  $u$  e  $p$  podem ser usadas no caso de elementos sólidos lineares. Entretanto, no caso de elementos com aproximação quadrática dos deslocamentos, a interpolação linear deve ser utilizada para aproximar o campo de poropressão.

Por outro lado, a aproximação por elementos finitos do gradiente do campo de deslocamento  $\varepsilon$  é dado por meio da equação:

$$\varepsilon = \mathbf{B}_u \mathbf{a} \quad (4.24)$$

onde  $\mathbf{B}_u$  representa a matriz deformação-deslocamento. A matriz  $\mathbf{B}_u$  para elementos sólidos 3D com  $n$  nós, pode ser expressa como:

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Por sua vez, o tensor de tensão efetivo  $\boldsymbol{\sigma}'$  se relaciona com tensor de deformação  $\varepsilon$  por meio da matriz constitutiva  $\mathbf{D}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \varepsilon \quad (4.26)$$

Introduzindo a aproximação por elementos finitos (Eqs. 4.18, 4.19, 4.24 e 4.26) na Eq. 4.17, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u \dot{\mathbf{a}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}_u^T \alpha \mathbf{m} \mathbf{N}_p \dot{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

Uma vez que a função teste  $\delta \mathbf{a}$  é arbitrária, resulta em:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u d\Omega \dot{\mathbf{a}} - \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \alpha \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \dot{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (4.28)$$

A Eq. 4.28 pode ser reescrita de forma compacta conforme a equação:

$$\mathbf{K}_{uu}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{Q}_{up}\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{f}}_u^{ext} \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}$  representa a matriz de rigidez da fase sólida, enquanto  $\mathbf{Q}_{uw}$  denota a matriz de acoplamento e  $\dot{\mathbf{f}}_u^{ext}$  é o vetor de forças externas aplicada no sólido. Esses termos são expressos como:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u d\Omega \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Q}_{up} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \alpha \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.31)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_u^{ext} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_u^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (4.32)$$

### 4.3.3 - Equilíbrio mecânico na fratura

Conforme apresentado nas Eqs. 4.5 e 4.13, o equilíbrio mecânico na fratura é dado por:

$$\int_{\Gamma_d} \delta[\mathbf{u}]^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \delta[\mathbf{u}]^T (\dot{\mathbf{t}}^c - \mathbf{m}_f \dot{p}_f) d\Gamma = 0 \quad (4.33)$$

A aproximação por elementos finitos do deslocamento relativo entre as faces da fratura,  $[\mathbf{u}]$ , é dado por:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} \mathbf{a}_{int} \quad (4.34)$$

onde  $\mathbf{a}_{int}$  é o vetor contendo os deslocamentos nodais do elemento de interface com  $3m$  nós e é dado por:

$$\mathbf{a}_{int} = \langle u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \dots, u_{x2m}, u_{y2m}, u_{z2m} \rangle \quad (4.35)$$

Enquanto,  $\mathbf{N}_{int}$  é a matriz usada para encontrar os deslocamentos relativos entre as faces da fratura e é definido como:

$$\mathbf{N}_{int} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \dots & -N_m & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \dots & 0 & -N_m & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \dots & 0 & 0 & -N_m & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Por outro lado,  $\mathbf{R}$  denota a matriz de rotação usada para expressar deslocamentos globais na referência local e é expandida em:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

onde  $n_i$ ,  $s_i$  e  $t_i$  são os componentes dos vetores unitários  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , conforme apresentado na Figura 4.2.

A tensão coesiva na descontinuidade  $t_c$  pode ser aproximada por meio dos elementos finitos usando a equação:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{D}_{int}[\mathbf{u}] = \mathbf{D}_{int}\mathbf{R}\mathbf{N}_{int}\mathbf{a}_{int} \quad (4.38)$$

onde  $\mathbf{D}_{int}$  representa a matriz constitutiva do elemento da interface.

A aproximação por elementos finitos da pressão do fluido na fratura,  $p_f$ , é dada por:

$$p_f = \mathbf{N}_f\mathbf{p}_{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_f \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

onde  $\mathbf{p}_{int}$  é o vetor com as pressões de fluido nodal do elemento de interface. Este vetor é composto por  $\mathbf{p}_b$ ,  $\mathbf{p}_t$  e  $\mathbf{p}_f$  que representam, respectivamente, vetores contendo os valores de pressão nodal das camadas inferior, superior e intermediária do elemento de interface.

$$\mathbf{p}_b = \langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle \quad (4.40)$$

$$\mathbf{p}_t = \langle p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{2m} \rangle \quad (4.41)$$

$$\mathbf{p}_f = \langle p_{2m+1}, p_{2m+2}, \dots, p_{3m} \rangle \quad (4.42)$$

Já  $\mathbf{N}_f$  pode ser subdividido em submatrizes  $\mathbf{N}_{pp}$  e  $\mathbf{N}_0$ .  $\mathbf{N}_{pp}$  é uma matriz linha contendo as funções de forma relativas à forma do elemento; por exemplo, se o elemento de interface é quadrilateral,  $\mathbf{N}_{pp}$  contém as funções de forma de um elemento quadrilateral convencional de quatro nós. Por sua vez,  $\mathbf{N}_0$  é uma matriz com as mesmas dimensões de  $\mathbf{N}_{pp}$ , mas preenchida com zeros.  $\mathbf{N}_{pp}$  é dado por:

$$\mathbf{N}_{pp} = \langle N_1, N_2, \dots, N_m \rangle \quad (4.43)$$

Introduzindo a aproximação por elementos finitos (Eqs. 4.34, 4.38 e 4.39) na Eq. 4.33, obtém-

se:

$$\int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{a}_{int}^T \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{D}_{int} \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} \dot{\mathbf{a}}_{int} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{a}_{int}^T \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_f \mathbf{N}_f \dot{\mathbf{p}}_{int} d\Gamma = 0 \quad (4.44)$$

Uma vez que a função teste  $\delta \mathbf{a}_{int}$  é arbitrária, a Eq. 4.44 resulta em:

$$\int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{D}_{int} \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} d\Gamma \dot{\mathbf{a}}_{int} - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_f \mathbf{N}_f d\Gamma \dot{\mathbf{p}}_{int} = 0 \quad (4.45)$$

A Eq. 4.45 pode ser reescrita de forma compacta conforme a equação:

$$\mathbf{K}_{int} \dot{\mathbf{a}}_{int} + \mathbf{Q}_{int} \dot{\mathbf{p}}_{int} = 0 \quad (4.46)$$

onde  $\mathbf{K}_{int}$  representa a matriz de rigidez do elemento de interface, enquanto  $\mathbf{Q}_{int}$  denota a matriz de acoplamento do elemento de interface. Esses termos são expressos como:

$$\mathbf{K}_{int} = \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{D}_{int} \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} d\Gamma \quad (4.47)$$

$$\mathbf{Q}_{int} = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_{int}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_f \mathbf{N}_f d\Gamma \quad (4.48)$$

#### 4.3.4 - Fluxo de fluido através do meio poroso

A equação da conservação da massa do meio poroso (equação da continuidade) pode ser expressa como:

$$\frac{1}{Q} \dot{p} + \alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4.49)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}$  [m/s] denota a velocidade da fase sólida,  $\mathbf{q}$  [m/s] representa o vetor de descarga específica e  $\frac{1}{Q}$  [m<sup>2</sup>/N] representa o coeficiente de compressibilidade expresso por:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \quad (4.50)$$

onde  $K_f$  [N/m<sup>2</sup>] representa o módulo volumétrico do fluido e o termo  $Q$  é conhecido como módulo de Biot.

De acordo com a lei de Darcy que descreve o fluxo do fluido através de um meio poroso,  $\mathbf{q}$  é expresso como:

$$\mathbf{q} = - \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} (\nabla p + \rho_f \mathbf{b}) \quad (4.51)$$

Na Eq. 4.51,  $\gamma_f = \rho_f g$  [N/m<sup>3</sup>] denota o peso específico do fluido,  $\rho_f$  [Kg/m<sup>3</sup>] é a massa específica do fluido e  $\mathbf{k} = \mathbf{Ik}$  [m/s] representa a matriz de permeabilidade específica do meio

poroso.

A forma fraca da equação de conservação da massa do meio poroso pode ser obtida por meio da multiplicação da Eq. 4.49 (agora escrita em notação indicial) pela função de teste  $\delta p$  e, em seguida, integrando-se sobre o domínio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \delta p \left( \frac{1}{Q} \dot{p} + \alpha \dot{u}_{i,i} + q_{i,i} \right) d\Omega = 0 \quad (4.52)$$

Aplicando-se a integração por partes ao último termo da Eq. 4.52, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta p q_{i,i} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta p q_i)}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x_i} q_i d\Omega \quad (4.53)$$

Em seguida, aplica-se o teorema da divergência a Eq. 4.53 em conjunto com a condição de contorno na superfície do domínio  $\Gamma_q$ , resulta em:

$$\int_{\Omega} \delta p q_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma_q} \delta p \underbrace{q_i n_i}_{\bar{q}} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x_i} q_i d\Omega \quad (4.54)$$

Por outro lado, o segundo termo da Eq. 4.49 pode ser reescrito como:

$$\delta p \alpha \dot{u}_{i,i} = \delta p \alpha \delta_{ij} \dot{u}_{i,j} = \delta p \alpha \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \delta p \alpha \mathbf{m}^T \dot{\epsilon} \quad (4.55)$$

Usando a notação matricial e as relações dadas pelas Eqs. 4.51, 4.54 e 4.55, a Eq. 4.52 pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \delta p \alpha \mathbf{m}^T \dot{\epsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta p \frac{1}{Q} \dot{p} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta p \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \delta p \left[ \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} (\nabla p + \rho_f \mathbf{b}) \right] d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

A aproximação por elementos finitos do gradiente de poropressão,  $\nabla p$ , é dada por:

$$\nabla p = \mathbf{B}_p \mathbf{p} \quad (4.57)$$

onde  $\mathbf{B}_p$  é a matriz das primeiras derivadas das funções de forma e pode ser expandida em:

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Introduzindo-se a aproximação por elementos finitos (Eqs. 4.19, 4.24 e 4.57) na Eq. 4.56,

tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \dot{\mathbf{a}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p \dot{\mathbf{p}} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} (\mathbf{B}_p \mathbf{p} + \rho_f \mathbf{b}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

Uma vez que a função teste  $\delta \mathbf{p}$  é arbitrária, a Eq. 4.59 resulta em:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u d\Omega \dot{\mathbf{a}} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d\Omega \dot{\mathbf{p}} - \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} \mathbf{B}_p d\Omega \mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} \rho_f \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma \quad (4.60)$$

A Eq. 4.60 pode ser reescrita de forma compacta conforme a equação:

$$\mathbf{Q}_{up}^T \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}_{pp} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H}_{pp} \mathbf{p} = \dot{\mathbf{f}}_{q,s}^{ext} \quad (4.61)$$

onde  $\mathbf{C}_{pp}$  representa a matriz de compressibilidade, enquanto  $\mathbf{H}_{pp}$  denota a matriz de permeabilidade e  $\dot{\mathbf{f}}_{q,s}^{ext}$  é o vetor de força externa de fluxo. Esses termos são dados por:

$$\mathbf{Q}_{up}^T = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u d\Omega \quad (4.62)$$

$$\mathbf{C}_{pp} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.63)$$

$$\mathbf{H}_{pp} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} \mathbf{B}_p d\Omega \quad (4.64)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_{q,s}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} \rho_f \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma \quad (4.65)$$

### 4.3.5 - Fluxo de fluido na fratura

A Figura 4.4 mostra uma representação esquemática do fluxo do fluido em uma fratura hidráulica. A equação de continuidade para o fluxo do fluido dentro da fratura, governada pela teoria de lubrificação de Reynold, pode ser escrita de acordo com:

$$\dot{w} + \beta w \dot{p}_f + \nabla \cdot \mathbf{q}_f + (v_t + v_b) = Q(t) \quad (4.66)$$

onde  $w$  [m] é a abertura da fratura,  $\beta$  [1/Pa] é o coeficiente de compressibilidade do fluido,  $\mathbf{q}_f$  [m<sup>3</sup>/(m s)] representa a taxa de fluxo na fratura por unidade de comprimento,  $v_t$  [m/s] e  $v_b$  [m/s] são, respectivamente, as velocidades de vazamento do fluido nas superfícies superior e inferior da fratura (para superfícies impermeáveis,  $v_t = v_b = 0$ ) e  $Q(t)$  representa a fonte de fluido. O termo  $\mathbf{q}_f$  é dado pela lei cúbica (Snow, 1969; Witherspoon et al., 1980) que é derivada da equação do momento para o fluxo do fluido newtoniano incompressível através de

placas paralelas estreitas (isto é, a equação de Poiseuille):

$$\mathbf{q}_f = -\frac{w^3}{12\mu}(\nabla p_f + \rho_f \mathbf{b}_f) \quad (4.67)$$

onde  $\mu$  [Pa s] é a viscosidade do fluido de fratura,  $\nabla p_f$  [Pa/m] é o gradiente de pressão do fluido ao longo da fratura e o termo  $\rho_f \mathbf{b}_f$  é o vetor das forças de corpo do fluido relacionado ao plano da fratura. O termo  $\mathbf{b}_f$  é dado por  $\mathbf{b}_f = \langle t_3 g, s_3 g \rangle$  [m/s<sup>2</sup>] e é calculado conforme a equação:

$$\mathbf{b}_f = \mathbf{R}^{(2,3)} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

onde  $\mathbf{R}^{(2,3)}$  é uma matriz contendo a segunda e terceira linhas da matriz  $\mathbf{R}$ .

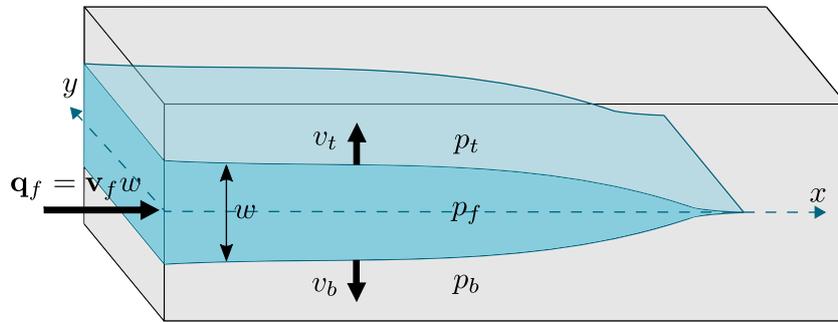


Figura 4.4 – Fluxo do fluido na fratura do meio poroso. Modificado de Zielonka et al. (2014)

As velocidades de vazamento do fluido nas superfícies superior e inferior da fratura podem ser expressos como:

$$v_t = k_t p_{rel,t} = k_t (p_f - p_t) \quad (4.69)$$

$$v_b = k_t p_{rel,b} = k_t (p_f - p_b) \quad (4.70)$$

onde  $k_t$  [m/(Pa s)] representa o coeficiente de permeabilidade transversal, que pode ser interpretado como a permeabilidade da superfície fraturada (Wang, 2015). Os termos  $p_{rel,t}$  [Pa] e  $p_{rel,b}$  [Pa] denotam, respectivamente, a pressão relativa entre o fluido da fratura e o fluido no meio poroso próximo a face superior e inferior da fratura. Os valores de pressão das camadas do elemento de interface podem ser expressos de acordo com as equações:

$$p_f = \mathbf{N}_{pp} \mathbf{p}_f \quad (4.71)$$

$$p_t = \mathbf{N}_{pp} \mathbf{p}_t \quad (4.72)$$

$$p_b = \mathbf{N}_{pp} \mathbf{p}_b \quad (4.73)$$

Dessa forma, pode-se expressar os termos  $p_{rel,t}$  e  $p_{rel,b}$  em função dos valores de pressão nodal das camadas do elemento da interface de acordo com as equações:

$$p_{rel,t} = \mathbf{N}_t \mathbf{p}_{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & -\mathbf{N}_{pp} & \mathbf{N}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_f \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

$$p_{rel,b} = \mathbf{N}_b \mathbf{p}_{int} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{pp} & \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_f \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

A aproximação por elementos finitos da abertura da fratura,  $w$ , é dada por:

$$w = \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{m}_f^T \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} \mathbf{a}_{int} \quad (4.76)$$

Enquanto a aproximação do gradiente do campo de pressão da fratura,  $\nabla p_f$ , pode ser expresso por:

$$\nabla p_f = \mathbf{B}_f \mathbf{p}_{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_f \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

onde  $\mathbf{B}_f$  é a matriz das primeiras derivadas das funções de forma e é composta pelas submatrizes  $\mathbf{B}_{pp}$  e  $\mathbf{B}_0$ . A matriz  $\mathbf{B}_{pp}$  é dada por:

$$\mathbf{B}_{pp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

e  $\mathbf{B}_0$  é uma matriz com as mesmas dimensões de  $\mathbf{B}_{pp}$ , mas preenchida com zeros.

A forma fraca da equação da continuidade para fluido de fratura é obtida por meio da multiplicação da Eq. 4.66 pela função de teste  $\delta p_f$  e, em seguida, integrando o resultado no domínio da fratura  $\Gamma_d$ :

$$\int_{\Gamma_d} \delta p_f (\dot{w} + \beta w \dot{p}_f + \nabla \cdot \mathbf{q}_f + v_t + v_b - Q(t)) d\Gamma = 0 \quad (4.79)$$

Aplicando-se a integração por partes ao terceiro termo da Eq. 4.79, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p_f (\nabla \cdot \mathbf{q}_f) d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \nabla \cdot (\delta p_f \mathbf{q}_f) d\Gamma - \int_{\Gamma_d} (\nabla \delta p_f) \cdot \mathbf{q}_f d\Gamma \quad (4.80)$$

Aplicando-se o teorema da divergência na Eq. 4.80 resulta em:

$$\int_{\Gamma_d} \delta p_f (\nabla \cdot \mathbf{q}_f) d\Gamma = \int_{\bar{\Gamma}_d} \delta p_f \mathbf{q}_f \cdot \bar{\mathbf{n}} d\bar{\Gamma} - \int_{\Gamma_d} (\nabla \delta p_f) \cdot \mathbf{q}_f d\Gamma \quad (4.81)$$

onde  $\bar{\mathbf{n}}$  é um vetor perpendicular ao limite do plano da fratura. Observe que, uma vez que nenhum fluxo externo é aplicado no limite, o segundo termo da Eq. 4.81 é igual a zero.

Utilizando-se as relações apresentadas, a Eq. 4.79 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_d} \delta p_f \dot{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta p_f \beta w \dot{p}_f d\Gamma + \int_{\Gamma_d} (\nabla \delta p_f) \cdot k_l \nabla p_f d\Gamma + \int_{\Gamma_d} (\nabla \delta p_f) \cdot k_l \rho_f \mathbf{b}_f d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_d} \delta p_f k_t (p_f - p_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta p_f k_t (p_f - p_b) d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \delta p_f Q_0 d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde  $k_l = \frac{w^3}{12\mu}$  [m<sup>3</sup>/(Pa s)] representa o coeficiente de condutividade longitudinal.

Introduzindo-se a aproximação por elementos finitos (Eqs. 4.39, 4.74, 4.75, 4.76 e 4.77) na Eq. 4.82, obtém-se:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{N}_f^T \mathbf{m}_f^T \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} \dot{\mathbf{a}}_{int} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{N}_f^T \beta w \mathbf{N}_f \dot{\mathbf{p}}_{int} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{B}_f^T k_l \mathbf{B}_f \mathbf{p}_{int} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{N}_t^T k_t \mathbf{N}_t \mathbf{p}_{int} d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{N}_b^T k_t \mathbf{N}_b \mathbf{p}_{int} d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{B}_f^T k_l \rho_f \mathbf{b}_f d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_d} \delta \mathbf{p}_{int}^T \mathbf{N}_f^T Q_0 d\Gamma \end{aligned} \quad (4.83)$$

Uma vez que  $\delta \mathbf{p}_{int}$  é arbitrário, a Eq. 4.83 resulta em:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T \mathbf{m}_f^T \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} d\Gamma \dot{\mathbf{a}}_{int} - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T \beta w \mathbf{N}_f d\Gamma \dot{\mathbf{p}}_{int} - \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}_f^T k_l \mathbf{B}_f d\Gamma \mathbf{p}_{int} \\ - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_t^T k_t \mathbf{N}_t d\Gamma \mathbf{p}_{int} - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_b^T k_t \mathbf{N}_b d\Gamma \mathbf{p}_{int} = \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}_f^T k_l \rho_f \mathbf{b}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T Q_0 d\Gamma \end{aligned} \quad (4.84)$$

A Eq. 4.84 pode ser reescrita de forma compacta de acordo com a equação:

$$\mathbf{Q}_{int}^T \dot{\mathbf{a}}_{int} + \mathbf{C}_{int} \dot{\mathbf{p}}_{int} + (\mathbf{H}_{long} + \mathbf{H}_{trans}^t + \mathbf{H}_{trans}^b) \mathbf{p}_{int} = \mathbf{f}_{q,int}^{ext} \quad (4.85)$$

onde  $\mathbf{C}_{int}$  representa a matriz de compressibilidade do fluido na interface,  $\mathbf{H}_{long}$  e  $\mathbf{H}_{trans}$  representam, respectivamente, as matrizes de permeabilidade longitudinal e transversal do elemento de interface, enquanto  $\mathbf{f}_{q,int}^{ext}$  é o vetor de força externa devido injeção de fluido. Estes

termos podem ser expressos como:

$$\mathbf{Q}_{int}^T = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T \mathbf{m}_f^T \mathbf{R} \mathbf{N}_{int} d\Gamma \quad (4.86)$$

$$\mathbf{C}_{int} = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T \beta w \mathbf{N}_f d\Gamma \quad (4.87)$$

$$\mathbf{H}_{long} = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}_f^T k_l \mathbf{B}_f d\Gamma \quad (4.88)$$

$$\mathbf{H}_{trans}^t = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_t^T k_t \mathbf{N}_t d\Gamma \quad (4.89)$$

$$\mathbf{H}_{trans}^b = - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_b^T k_t \mathbf{N}_b d\Gamma \quad (4.90)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_{q,int}^{ext} = \int_{\Gamma_d} \mathbf{B}_f^T k_l \rho_f \mathbf{b}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_f^T Q(t) d\Gamma \quad (4.91)$$

#### 4.4 - O PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO E DISCRETIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Antes do procedimento de solução, as equações dos elementos finitos obtidas para o meio poroso fraturado são resumidas abaixo:

$$\mathbf{K}_{uu} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{Q}_{up} \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{f}}_u^{ext} \quad em \quad \Omega \quad (4.92)$$

$$\mathbf{K}_{int} \dot{\mathbf{a}}_{int} + \mathbf{Q}_{int} \dot{\mathbf{p}}_{int} = \mathbf{0} \quad em \quad \Gamma_d \quad (4.93)$$

$$\mathbf{Q}_{up}^T \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}_{pp} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H}_{pp} \mathbf{p} = \dot{\mathbf{f}}_{q,s}^{ext} \quad em \quad \Omega \quad (4.94)$$

$$\mathbf{Q}_{int}^T \dot{\mathbf{a}}_{int} + \mathbf{C}_{int} \dot{\mathbf{p}}_{int} + (\mathbf{H}_{long} + \mathbf{H}_{trans}^t + \mathbf{H}_{trans}^b) \mathbf{p}_{int} = \dot{\mathbf{f}}_{q,int}^{ext} \quad em \quad \Gamma_d \quad (4.95)$$

Combinando as Eqs. 4.92 com 4.93 e Eqs. 4.94 com 4.95 chega-se ao seguinte sistema composto pelas equações de equilíbrio mecânico e continuidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{f}}_u^{ext} \\ \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} &= \dot{\mathbf{f}}_q^{ext} \end{aligned} \quad (4.96)$$

As equações acima estão em forma de taxa e devem ser integradas usando um número discreto de incrementos de tempo. Assumindo um incremento de tempo  $\Delta t$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{p}$  podem ser expressos no tempo  $t + \psi \Delta t$  como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}_{t+\psi\Delta t} \approx \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}_t + \psi \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

onde  $\psi$  é um coeficiente que especifica um ponto no intervalo. Por sua vez, as taxas dos vetores

$\mathbf{a}$  e  $\mathbf{p}$  em um determinado intervalo de tempo são aproximadas usando diferenças finitas como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (4.98)$$

Introduzindo-se as relações dadas nas Eqs. 4.97 e 4.98 na Eq. 4.96, o sistema de equações a ser resolvido pode ser expresso como:

$$\mathbf{K}\Delta \mathbf{a} + \mathbf{Q}\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{f}_u^{ext} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{a} + \mathbf{C}\Delta \mathbf{p} + \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{p}_t + \psi \Delta \mathbf{p}) = \Delta \mathbf{f}_q^{ext} \quad (4.100)$$

Essas equações representam o sistema a ser resolvido em cada etapa de tempo e podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{C} + \psi \Delta t \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}_u^{ext} \\ \Delta \mathbf{f}_q^{ext} - \Delta t \mathbf{H} \mathbf{p}_t \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

Neste trabalho o valor de  $\psi = 1$  é adotado (ou seja, esquema implícito de Euler).

## 4.5 - ANÁLISE NUMÉRICAS

Esta seção apresenta um teste de verificação do modelo constitutivo do elemento de interface em simulações de fratura hidráulica. Em seguida, são apresentados seis análises numéricas que simulam problemas com soluções analíticas com objetivo de validar a implementação e a abordagem proposta. Posteriormente, simula-se um ensaio experimental de fratura hidráulica de uma peça de concreto e realiza-se dois estudos de casos. As simulações numéricas foram realizadas usando um solucionador de elementos finitos com passo automático.

Durante as simulações, o comportamento hidromecânico dos elementos sólidos foi considerado de acordo com a teoria da poroelasticidade, ou seja, com comportamento elástico linear e saturado. Por sua vez, todos os elementos coesivos foram simulados utilizando a abordagem proposta considerando a curva linear e bilinear de amolecimento. A curva bilinear foi utilizada apenas nas análises de verificação e de simulação do ensaio experimental. As simulações foram realizadas utilizando a biblioteca Amaru (<https://github.com/NumSoftware/Amaru>) que inclui a implementação da abordagem proposta.

#### 4.5.1 - Geração da malha

Todas as malhas foram geradas por meio do software Gmsh. Após o estágio de geração, os elementos de interface foram introduzidos usando o algoritmo explicado na Seção 4.1. A geração dos elementos de interface em todas análises demoraram menos de um segundo. Em relação aos elementos da malha, os tipos de elementos sólidos usados foram cunhas de 6 nós com 9 pontos de integração e hexaedros de 8 nós com 8 pontos de integração. Quanto aos elementos de interface, foram utilizados interfaces triangular de 9 nós com 3 pontos de integração e interfaces quadrilateral de 12 nós com 4 pontos de integração.

#### 4.5.2 - Teste de verificação

Visando verificar o comportamento da abordagem proposta, é apresentado um teste no qual a amostra é submetida a fraturamento hidráulico. Nessas análises são considerados apenas dois elementos sólidos vinculados por um elemento de interface. Os elementos sólidos são dados por hexaedros regulares de 8 nós com 10 mm de comprimento, enquanto o elemento de interface possui doze nós e quatro pontos de integração. A Figura 4.5 apresenta a configuração inicial e a deformada após o ensaio de fraturamento hidráulico. Os parâmetros do material são apresentados na Tabela 4.1.

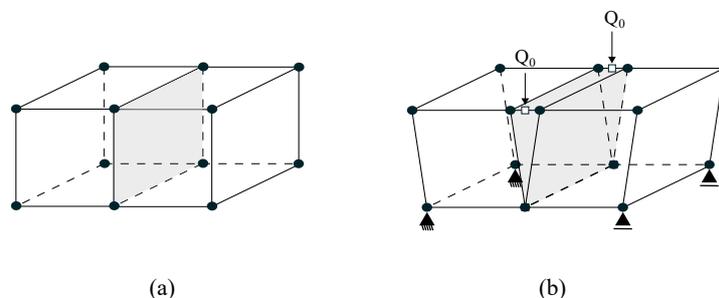


Figura 4.5 – Desenho esquemático dos ensaios de fraturamento hidráulico; a) configuração inicial; b) configuração deformada;

Tabela 4.1 – Parâmetros do material para o exemplo de verificação.

Material	$E$ [MPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kJ/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kJ/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$k_t$ [m/(m·s)]
Meio poroso	27000	0.20	-	-	-	-	$10^{-13}$	1.0	0.0	10	-	-
fratura	27000	0.20	1.4	5	2400	0.10	-	-	-	10	$10^{-6}$	$10^{-8}$

Como pode-se observar na Figura 4.5 b, o elemento sólido da esquerda possui dois nós inferiores com restrição de deslocamento em todas as direções, enquanto o elemento da direita possui dois nós inferiores com restrição apenas no deslocamento vertical. O fluido foi injetado a uma taxa de  $10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$  durante 7 segundos diretamente nos dois nós centrais e superiores do elemento de interface, por meio de 30 incrementos. Durante a análise de fraturamento

hidráulico, monitorou-se os pontos de integração do elemento de interface e verificou-se que dois pontos de integração retornam tensão de tração, enquanto os outros dois pontos retornam tensão de compressão, o que é condizente com o processo de fraturamento. Visando verificar a degradação do elemento de interface ocasionada pela fratura, as tensões e os deslocamentos relativos foram registrados em um dos pontos de integração que retornaram tensão de tração. Como resultado obteve-se as curvas  $w_n - \sigma_n$  e  $u_p - \sigma_n$  (Figura 4.6). Inicialmente, a interface apresenta um comportamento rígido durante o regime elástico, fornecendo deformações pequenas. Após atingir a resistência à tração do material, a tensão normal é dominada pelo comportamento de amolecimento. Esses resultados foram comparados com os valores teóricos do modelo bilinear, fornecendo uma boa concordância.

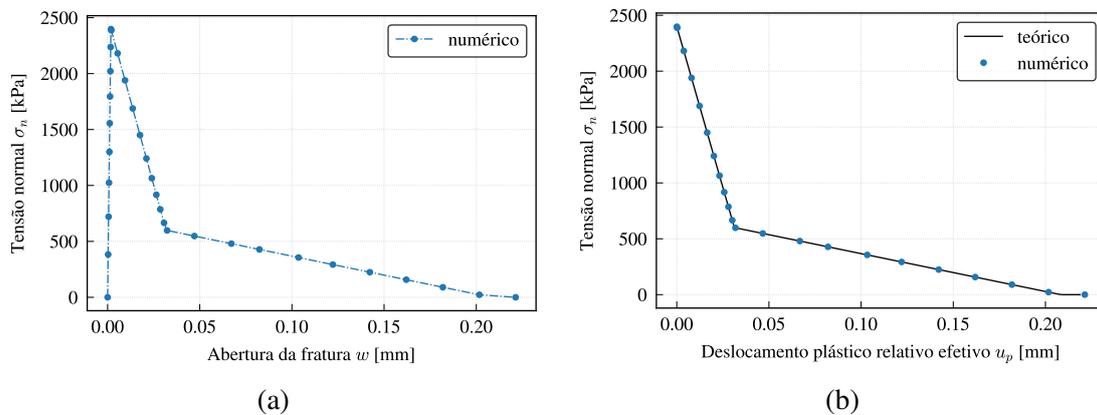


Figura 4.6 – Ensaio de fraturamento hidráulico: a) abertura versus tensão normal; b) deslocamento plástico relativo efetivo versus tensão normal.

#### 4.5.3 - Exemplo 1 - Adensamento bidimensional do meio poroelástico

Objetivando validar a implementação do modelo numérico do meio poroelástico, simulou-se o adensamento bidimensional em estado plano de deformação de uma camada de solo com comprimento semi-infinito, elástico linear, saturado e homogêneo. O adensamento decorre da drenagem do fluido pela parte superior da amostra ocasionado pela aplicação de uma carga distribuída  $q$  na largura  $l$ . A solução analítica desse problema foi obtida por Biot (1941) que determinou a seguinte expressão para o cálculo do recalque superficial por adensamento  $u_z$  para um tempo  $t$ :

$$u_z = 2 m_v q \sqrt{\frac{c_v t}{\pi}} \left[ f\left(\frac{x+b}{\sqrt{c_v t}}\right) - f\left(\frac{x-b}{\sqrt{c_v t}}\right) \right] \quad (4.102)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \xi \ln\left(1 + \frac{4}{\pi \xi^2}\right) + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi} \xi}{2}\right) + \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}(3.24 + \xi^2)} \quad (4.103)$$

onde  $c_v$  é o coeficiente de adensamento,  $m_v$  é o coeficiente de variação volumétrica,  $l$  é o comprimento no qual é aplicada a carga distribuída, enquanto  $b = l/2$  e  $t$  é o tempo decorrido após aplicação da carga distribuída. O coeficiente de adensamento e o coeficiente de variação volumétrica podem ser expressos conforme as equações:

$$c_v = \frac{k}{m_v \gamma_f} \quad (4.104)$$

$$m_v = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \quad (4.105)$$

Por se tratar de problema simétrico optou-se por simular apenas uma metade. As condições de contorno do ensaio e as dimensões da amostra são apresentado no desenho esquemático da Figura 4.7. É importante ressaltar que apesar de ser uma análise 3D as restrições foram aplicadas para representar o estado plano de deformações. Os parâmetros do material são apresentados na Tabela 4.2.

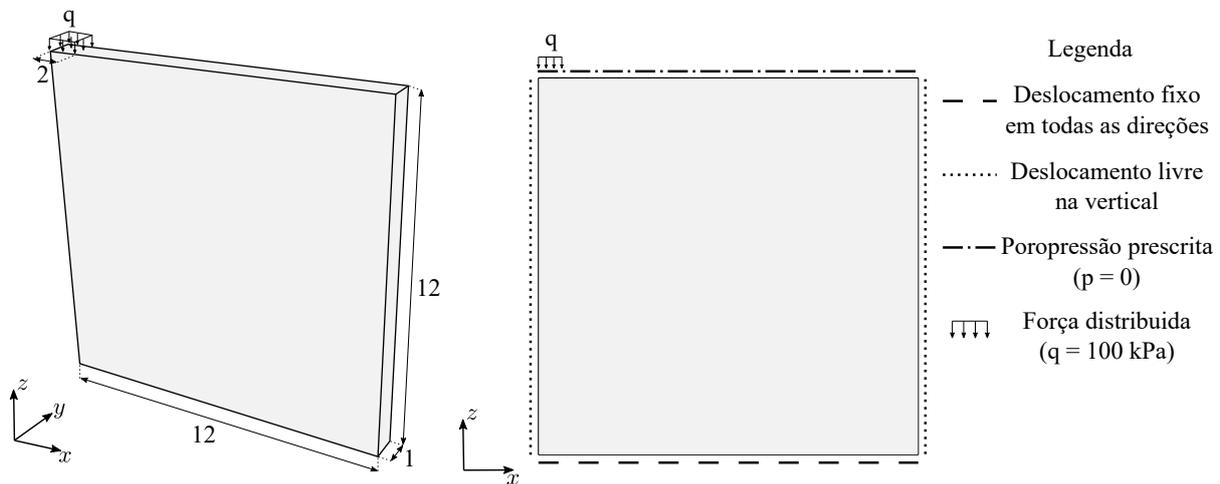


Figura 4.7 – Configuração do ensaio de adensamento bidimensional do meio poroelástico. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.2 – Parâmetros do material para o exemplo 1.

Material	$E$ [MPa]	$\nu$	$k$ [m/s]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]
Meio poroso	10	0.0	$10^{-6}$	10	1	0

A análise foi realizada em dois estágios. No primeiro estágio, foi aplicado poropressão igual a 0 kPa na parte superior da amostra visando gerar um estágio hidrostático. Em seguida, no segundo estágio aplica-se a carga distribuída inicialmente em um tempo suficientemente pequeno para que a drenagem no topo seja desprezível. Posteriormente, considera-se tempos mais longos para permitir a drenagem da amostra.

A Figura 4.8 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pela Eq. 4.102 e os obtidos pela simulação numérica para diferentes tempos de adensamento. Os intervalos de tempo para

análise foram calculado por meio da equação  $t = \frac{T^2 l^2}{c_v}$ , enquanto os recalques verticais foram normalizado pela quantidade  $u_f = \frac{m_v q l}{4\sqrt{\pi}}$ . É importante ressaltar que os resultado obtidos são referentes apenas aos deslocamentos verticais gerados pelo adensamento da amostra, por tanto na análise numérica deve-se remover os deslocamentos elásticos geradas pela aplicação da carga. Pode-se verificar por meio dos resultados que o modelo numérico do meio poroelástico é uma boa aproximação do modelo teórico utilizado para deduzir as curvas analíticas.

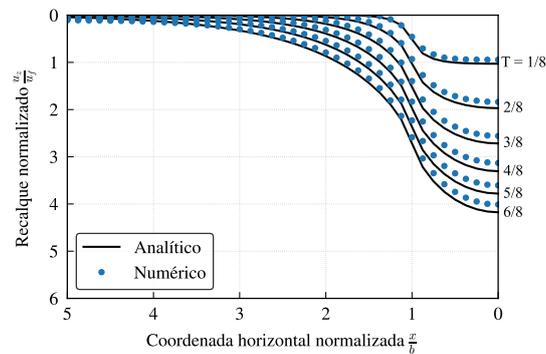


Figura 4.8 – Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento bidimensional do meio poroelástico para vários intervalos de tempo.

A Figura 4.9 apresenta o campo de poropressão durante o ensaio de adensamento. Pode-se observar que o equilíbrio hidrostático é atingido com sucesso. Além disso, é possível observar a perturbação no campo de poropressão gerada pela aplicação da carga distribuída que provoca o aumento considerável da poropressão logo abaixo da região na qual a carga é aplicada. Esse excesso de poropressão é dissipada com o passar do tempo por meio da drenagem do fluido.

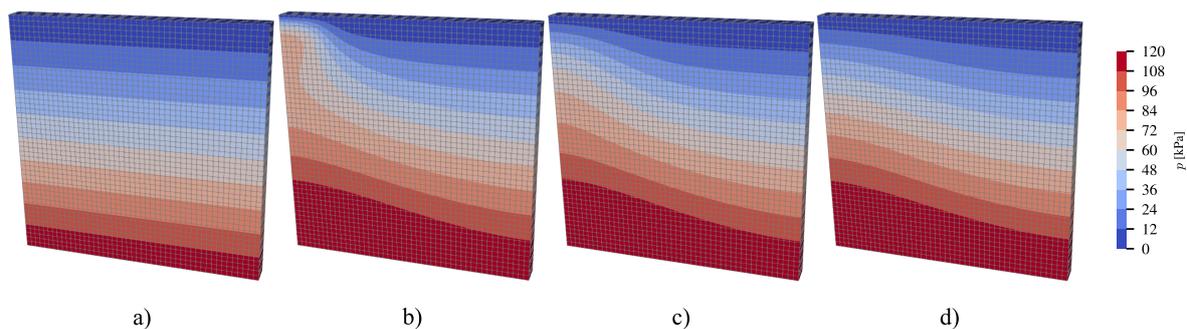


Figura 4.9 – Predição numérica da poropressão do ensaio de adensamento bidimensional: a) Final da primeira etapa ao atingir o equilíbrio hidrostático; b) Após a aplicação da carga  $T = 1/8$ ; c) Após a aplicação da carga  $T = 4/8$ ; d) Após a aplicação da carga  $T = 6/8$ .

#### 4.5.4 - Exemplo 2 - Infiltração instável

O ensaio de infiltração instável através de uma descontinuidade plana tem por objetivo verificar o fluxo longitudinal do fluido em uma fratura, levando em consideração a

compressibilidade do fluido. Nesta análise, a pressão do fluido é aplicada repentinamente em uma extremidade da descontinuidade pré-existente, então os perfis de pressão do fluido na descontinuidade são registrados ao longo do tempo. A Figura 4.10 apresenta a geometria e as condições de contorno utilizadas nesta análise numérica. É importante ressaltar que os limites da amostra são impermeáveis e que nesse ensaio apenas análise hidráulica é realizada. Os parâmetros do material utilizados na análise foram extraídos do trabalho de Yan e Zheng (2017) e são apresentados na Tabela 4.3.

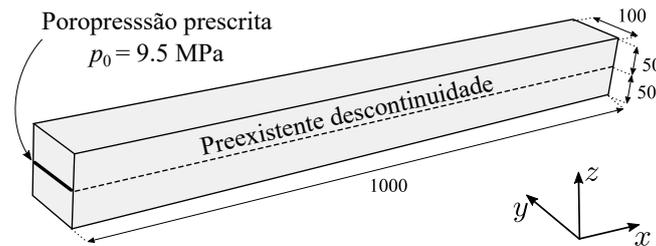


Figura 4.10 – Configuração do ensaio de infiltração instável. Todas as medidas em milímetros.

Tabela 4.3 – Parâmetros do material para o exemplo 2.

Material	$k$ [m/s]	$S$	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa.s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/kPa.s]	$k_l$ [m <sup>3</sup> /(kPa.s)]
Meio poroso	$1.2 \times 10^{-8}$	0	10	-	-	-	-
Fratura	-	-	10	$10^{-6}$	$4.55 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-8}$	$2.25 \times 10^{-9}$

A solução analítica para a pressão normalizada na descontinuidade foi obtida por Carslaw e Jaeger (1959) conforme a equação:

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \exp(-(2n+1)^2(T/4)\pi^2) \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi(L-x)}{2L} \right] \cdot \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right] \right) \quad (4.106)$$

onde  $p_0$  é a pressão prescrita do fluido no limite da descontinuidade, enquanto  $T$  é o tempo adimensional que é dado por:

$$T = \frac{[w^2/(12\mu)]t}{\beta L^2} \quad (4.107)$$

onde  $w$  é a abertura da descontinuidade,  $\beta$  é o coeficiente de compressibilidade do fluido,  $L$  é o comprimento da descontinuidade e  $t$  é o tempo decorrido.

A Figura 4.11 apresenta as curvas da pressão de fluido normalizada ao longo da descontinuidade para  $T$  igual a 0.1, 0.3 e 0.5. Por meio dessa figura, pode-se observar uma boa concordância entre as curvas numéricas e analíticas. Por outro lado, a Figura 4.12 apresenta a malha utilizada na análise, assim como o campo de poropressão no interior da fratura do ensaio de infiltração instável para  $T$  igual a 0.1, 0.3 e 0.5. A poropressão no interior da fratura é interpolada para os elementos sólidos da malha visando possibilitar, dessa forma, a visualização nos elementos sólidos do campo de poropressão do interior da fratura.

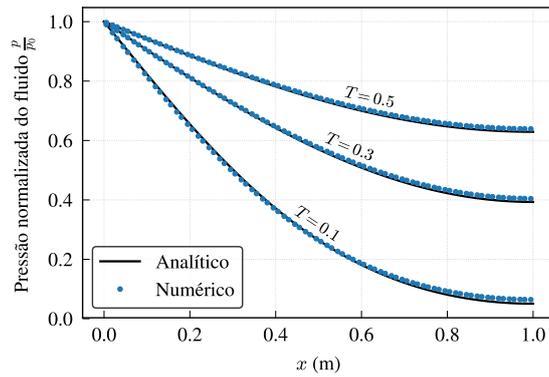


Figura 4.11 – Curvas analíticas e previsão numérica da distribuição de pressão do fluido na descontinuidade para diferentes tempos.

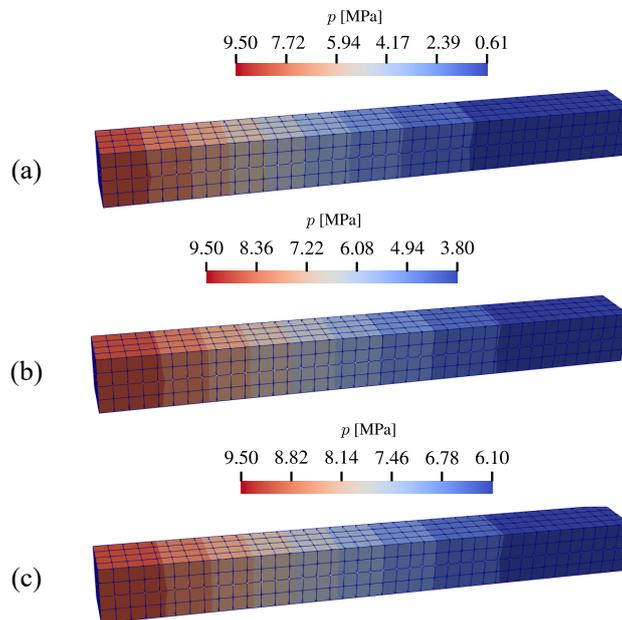


Figura 4.12 – Predição numérica da poropressão no interior da fratura do ensaio de infiltração instável: a) Após a aplicação da poropressão no tempo  $T=0.1$ ; b) Após a aplicação da poropressão no tempo  $T=0.3$ ; b) Após a aplicação da poropressão no tempo  $T=0.5$ .

#### 4.5.5 - Exemplo 3 - Adensamento lateralmente confinado do meio poroelástico

O ensaio edométrico, também conhecido como ensaio de adensamento lateralmente confinado, mede as propriedades mecânicas do solo como as deformações verticais para uma dada sollicitação. O ensaio edométrico do meio poroelástico é idealizado de acordo com a teoria de Terzaghi (1943). Nessa teoria, o solo saturado pode ser representado por uma mola dentro de um cilindro cheio de água que possui um êmbolo com um pequeno furo, por onde a água pode sair. Inicialmente, o solo saturado, está em equilíbrio, conforme apresentado na Figura 4.13 b. Após a aplicação de um incremento de carregamento sobre o pistão, água suporta toda a carga, uma vez que esse fluido pode ser considerado incompressível (Figura 4.13 c). À medida que a água é drenada pelo orifício, parte do carregamento passa a ser suportado pela estrutura sólida

do solo (representada pela mola) que vai adensando, ou seja, reduzindo a porosidade e aumentando a sua resistência a compressão (Figura 4.13 d). No final do adensamento, o sistema volta ao equilíbrio quando a pressão da água é dissipada pela drenagem do fluido e a carga passa a ser resistida apenas pela estrutura sólida do solo (Figura 4.13 e).

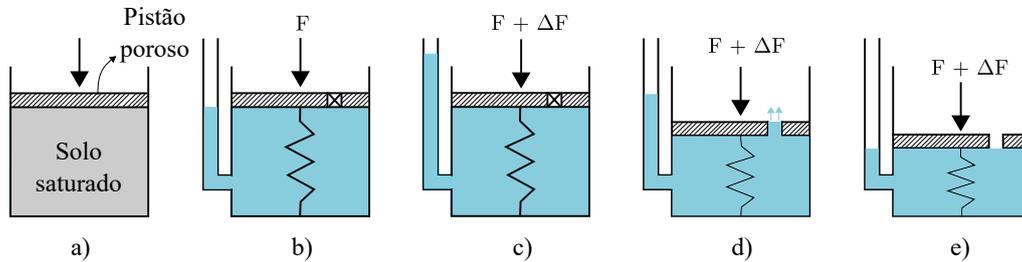


Figura 4.13 – Analogia hidromecânica para ilustrar a distribuição de carga no adensamento: a) exemplo físico; b) estado inicial em equilíbrio; c) Incremento de carga aplicado com a válvula fechada; d) Abertura da válvula e início da drenagem da amostra; e) estado final em equilíbrio após a drenagem da amostra.

A solução analítica para este problema foi obtida por Terzaghi (1943) usando as seguintes hipóteses (Tewatia et al., 2012): o solo é homogêneo e totalmente saturado; o fluido e o solo são incompressíveis; A lei de Darcy é válida; a carga é aplicada em uma direção. O excesso de poropressão  $p$  e o cálculo do recalque superficial por adensamento  $u_z$  para um tempo  $t$ , podem ser expressos como:

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2q}{M} \text{sen} \left( M \frac{z}{h} \right) \exp(-M^2 T) \quad (4.108)$$

$$u_z = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T) \quad (4.109)$$

$$M = \frac{\pi(2m + 1)}{2}; \quad (4.110)$$

onde  $z$  representa a profundidade,  $h$  denota a altura total da amostra,  $T$  é o fator de tempo e  $q$  é a carga distribuída. O fator de tempo é calculado como:

$$T = \frac{c_v t}{h^2} \quad (4.111)$$

onde  $c_v$  é o coeficiente de consolidação (Eq. 4.104) e  $t$  é o tempo decorrido após a aplicação da carga distribuída  $q$ .

A Figura 4.14 apresenta as condições de contorno empregada nas análises numéricas, onde pode-se observar que a base e as laterais da amostra são impermeáveis, enquanto no topo da amostra são aplicados a poropressão igual a zero e a carga distribuída. Duas análises foram realizadas. Uma utilizando malha de elementos finitos composta por apenas elementos sólidos, visando simular o problema de adensamento unidimensional. Enquanto a outra análise utiliza

malha de elementos finitos composto por elementos sólidos interpostos na região central da amostra por elementos de interface (ver Figura 4.14), visando simular o adensamento de uma amostra com fissura central. Este último problema foi proposto originalmente por Ng e Small (1997) e posteriormente simulado por diversos pesquisadores como Segura e Carol (2008), Khoei (2015) e Nguyen et al. (2017) com objetivo de demonstrar a performance dos seus elementos de interface na análise de elementos finitos. Os parâmetros empregados nas duas análises são apresentados na Tabela 4.4.

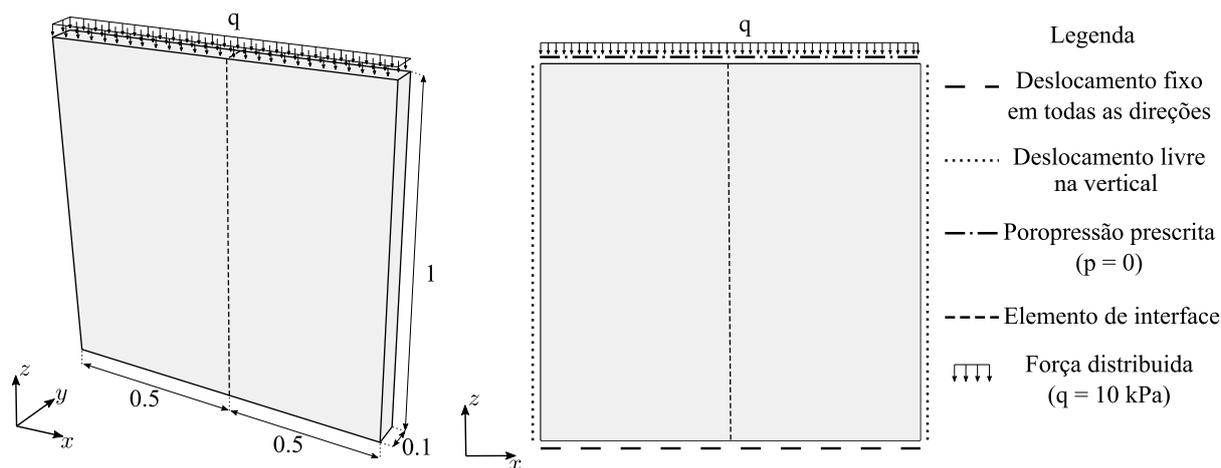


Figura 4.14 – Configuração do ensaio de adensamento lateralmente confinado do meio poroelástico. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.4 – Parâmetros do material para o exemplo 3.

Material	$E$ [MPa]	$\nu$	$\zeta$	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m s]	$k_l$ [m <sup>3</sup> /kPa s]
Meio poroso	1	0.20	-	$1.15 \times 10^{-5}$	1	0	10	-	-	-	-
Fratura	1	0.20	5	-	-	-	10	$10^{-6}$	0	$1.15 \times 10^{-5}$	$4.09 \times 10^{-7}$

As análises foram realizadas em dois estágios. O primeiro estágio a amostra atinge o equilíbrio hidrostático devido a ação da gravidade. Já no segundo estágio, aplica-se a carga distribuída no topo da amostra em um tempo reduzido para que dessa forma não ocorra a drenagem de forma significativa, em seguida, considera-se tempos maiores visando a drenagem da amostra.

Durante a análise numérica monitorou-se o adensamento da amostra não fraturada, assim como o excesso de poropressão. A Figura 4.15 apresenta uma comparação entre os resultados do ensaio numérico e os resultado analíticos obtidos por meio das Eqs. 4.108 e 4.109. Os recalques verticais foram normalizado pela quantidade  $u_\infty = m_v h q$ . Boa concordância entre as curvas numéricas e analítica pode ser observada.

O ensaio de adensamento é repetido com amostra que contém uma fratura central, visando demonstra o efeito da descontinuidade no meio poroso deformado. Na análise numérica foi considerado uma fratura com abertura de 0.17 milímetros dessa forma o coeficiente permeabilidade longitudinal foi obtido por meio da lei cúbica  $k_l = w^3/12\mu$ . A fratura no

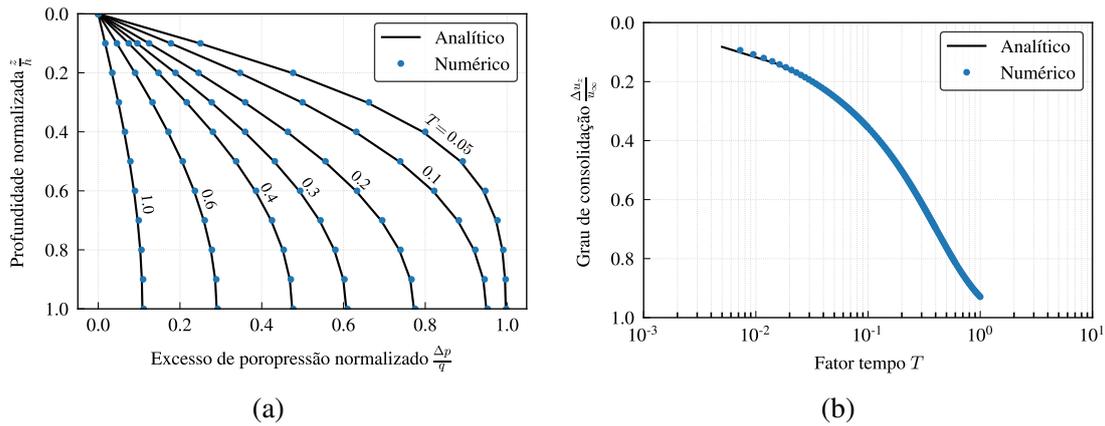


Figura 4.15 – Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento lateralmente confinado da amostra não fraturada: a) Profundidade normalizada versus excesso de poropressão normalizado; b) Grau de consolidação versus fator tempo.

centro da amostra gera um caminho preferencial de elevada permeabilidade, o que favorece a drenagem. Isso se reflete nas curvas numéricas obtidas do ensaio. O resultado numérico da amostra fraturada é comparada com o resultado analítico da amostra não fraturada. Pode-se observa por meio da Figura 4.16a que o excesso de poropressão é dissipada mais rapidamente quando comparado com a amostra sem a fratura. Além disso, a Figura 4.16b demonstra que amostra fraturada consolida mais que amostra não fraturada, uma vez que a fratura permite que um maior volume do fluido seja drenado.

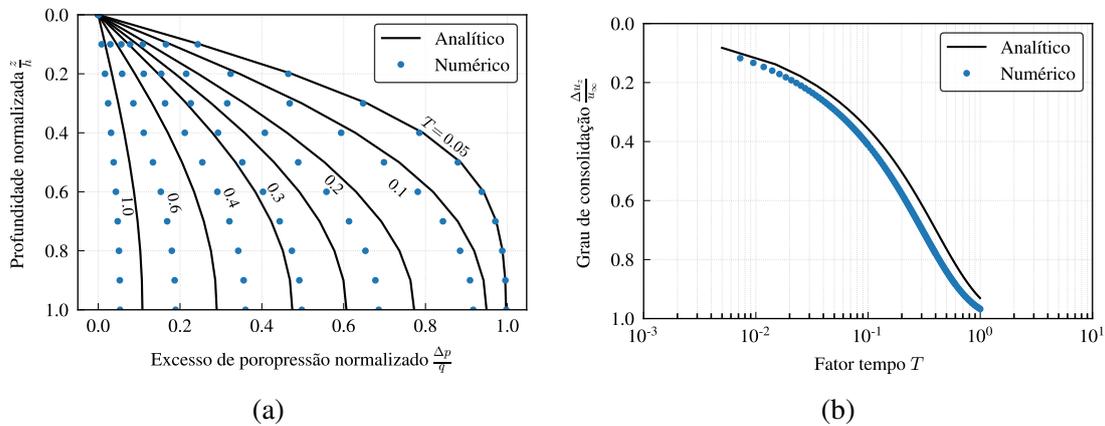


Figura 4.16 – Resultado analítico e predição numérica do ensaio de adensamento lateralmente confinado da amostra fraturada: a) Profundidade normalizada versus excesso de poropressão normalizado; b) Grau de consolidação versus fator tempo.

A Figura 4.17 apresenta a predição numérica da poropressão da amostra fratura e não fraturada referente ao tempo  $T$  igual a 0.05. Por meio dessa imagem é possível observar que o problema de consolidação lateralmente confinado passa de um problema unidimensional (ver Figura 4.17a) para um problema bidimensional (ver Figura 4.17b) quando o teste é realizado usando a amostra fratura. Isso ocorre devido ao caminho preferencial de elevada permeabilidade gerada pela fratura que provoca uma redução no campo da poropressão nas proximidades da

descontinuidade.

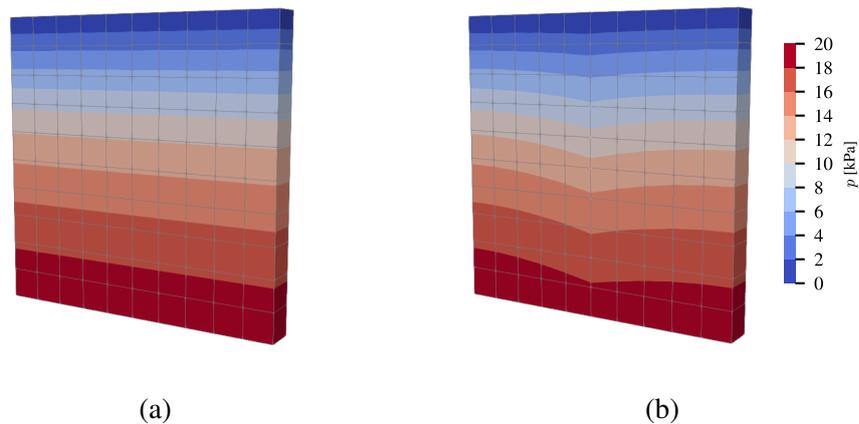


Figura 4.17 – Predição numérica da poropressão do ensaio de adensamento: a) Após a aplicação da carga no tempo  $T=0.05$  da amostra não fraturada; b) Após a aplicação da carga no tempo  $T=0.05$  da amostra fraturada.

#### 4.5.6 - Exemplo 4 - Adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído

Este exemplo estuda a aplicação do elemento de interface para simular a consolidação radial de uma camada de solo devido ao uso de dreno vertical. A solução analítica para a consolidação radial foi obtida por Barron (1948) utilizando as seguintes hipóteses (Tewatia et al., 2012): o solo está totalmente saturado, as partículas de solo e água são incompressíveis, a lei de Darcy é válida e pode ser generalizada para meio anisotrópico, o solo é homogêneo e o incremento de pressão é aplicado instantaneamente. O valor analítico do grau de adensamento radial é dado por:

$$U_r = 1 - \exp\left(\frac{-8T}{F(n)}\right); \quad n = \frac{r_d}{r} \quad (4.112)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (4.113)$$

onde  $T$  é o fator de tempo radial e  $n = r_d/r$  representa a razão dada pelo raio do dreno  $r_d$  e o raio da região drenada  $r$ . O fator de tempo radial pode ser calculado conforme as equações:

$$T = \frac{c_v t}{(2r_d)^2} \quad (4.114)$$

onde  $t$  é o tempo e  $c_v$  representa o coeficiente de consolidação (Eq. 4.104).

A Figura 4.18 apresenta a geometria e as condições de contorno utilizadas no ensaio de densamento radial. Devido a simetria do ensaio, optou-se por simular apenas a quarta parte do

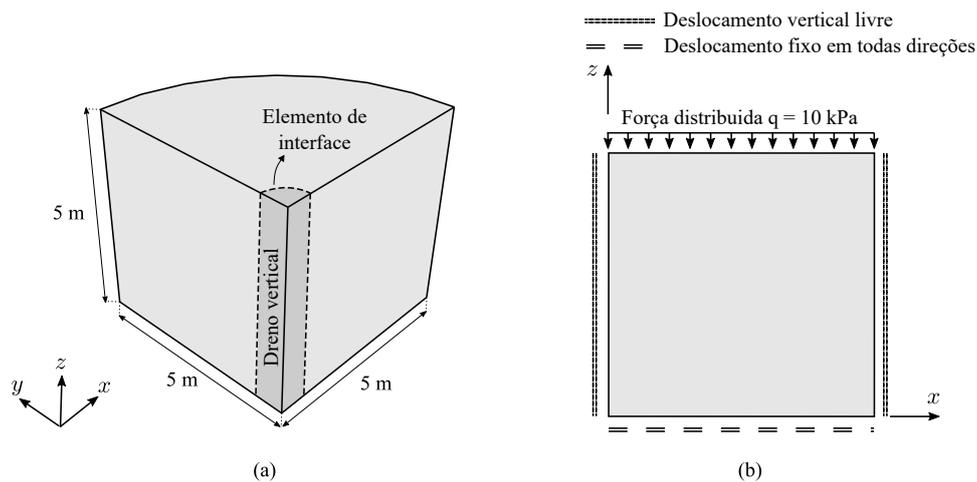


Figura 4.18 – Configuração do ensaio de adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.5 – Parâmetros do material para o exemplo 3.

Material	$E$ [MPa]	$\nu$	$\bar{\alpha}$	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa·s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/(kPa·s)]	$k_l$ [m <sup>3</sup> /kPa·s]
Meio poroso	5	0.25	-	$1.15 \times 10^{-5}$	1	0	10	-	-	-	-
Fratura	5	0.25	5	-	-	-	10	$10^{-6}$	0	$10^{-1}$	$10^{-1}$

volume drenado. Nesta análise, não foi considerada a drenagem vertical através do solo, uma vez que apenas o adensamento radial causado pela presença dos drenos é de interesse. Assim sendo, considera-se que as superfícies do domínio são impermeáveis. Por outro lado, nas extremidades superiores dos drenos (aqui simulado por meio do elemento de interface) impõe-se poropressão igual a 0 kPa, estabelecendo dessa forma as condições de descarga. Na superfície superior da amostra impõe-se uma força distribuída de 10 kPa, possibilitando assim o adensamento e consequente drenagem da amostra através dos drenos.

Os parâmetros dos materiais utilizados nas análises são apresentados na Tabela 4.5. Os coeficientes de condutividade longitudinal,  $k_l$ , e o coeficiente de permeabilidade transversal,  $k_t$ , do elemento de interface foram ajustados para valores elevados a fim de simular o dreno vertical. Observou-se que valores de  $k_l$  e  $k_t$  maiores do que os apresentados na Tabela 4.5 não afetaram os resultados.

Os elementos de interface foram localizados entre o dreno vertical e o solo. A Figura 4.19 apresenta em planta a localização dos elementos de interface para representar os drenos verticais com raios iguais 0.10 m, 0.25 m e 0.50 m. Na formulação analítica, a previsão do adensamento radial refere-se ao valor médio da camada, por tanto na análise numérica deve-se escolher um ponto adequado de monitoramento do grau de adensamento, uma vez que este varia com a distância ao dreno vertical. O ponto de monitoramento, apresentado na Figura 4.19, foi obtido por meio da determinação do raio correspondente a uma área de setor circular igual a metade do setor circular da amostra. Dessa forma, o arco determinado por este raio separa a área drenada

em duas partes iguais.

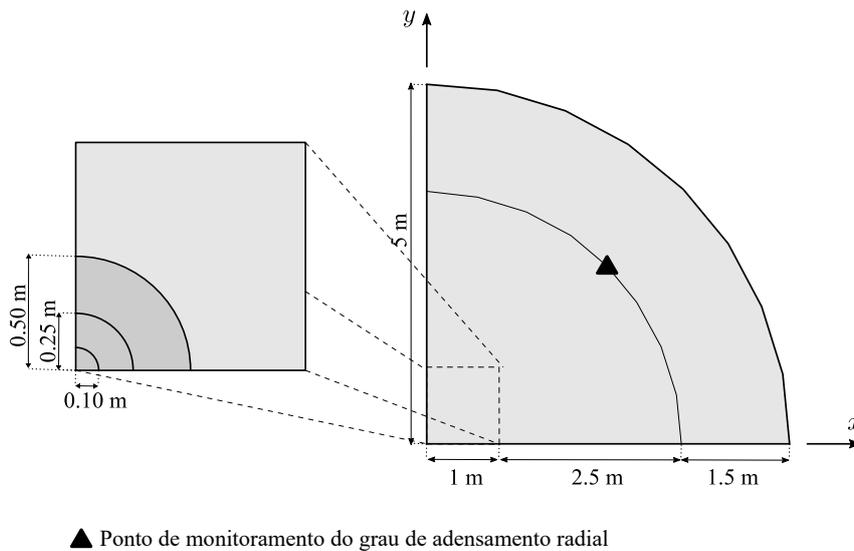


Figura 4.19 – Vista em planta da localização dos elementos de interface para a simulação de drenos verticais.

A análise é realizada em duas etapas. Na primeira etapa, um longo tempo é aplicado visando obter o campo de poropressões corresponde ao estado hidrostático. Nesta etapa, os drenos já se encontram ativos. Posteriormente na segunda etapa, aplica-se, em um tempo muito pequeno, uma carga distribuída ( $q = 10$  kPa) na camada superior do solo. Este carregamento gera um excesso de poropressão no solo. Com o passar do tempo, o excesso de poropressão é dissipado pela drenagem radial realizada pelos drenos, permitindo assim a consolidação do solo. O grau de adensamento radial é avaliado por meio da equação  $U_r = u_z/u_\infty$ , onde  $u_z$  é a consolidação medida na face superior e  $u_\infty$  é a consolidação final da amostra sendo calculado conforme a equação  $u_\infty = m_v h q$ .

A Figura 4.20 apresenta os resultados analíticos e numéricos do grau de adensamento versus o fator de tempo para diferentes valores de  $n$ , os quais correspondem aos raios dos drenos 0.10 m, 0.25 m e 0.50 m. Os resultados numéricos estão em excelente acordo com os analíticos. Isto verifica o correto funcionamento do acoplamento hidromecânico nos elementos sólidos e de interface, bem como o fluxo da interface nas direções longitudinal e transversal.

A Figura 4.21 apresenta o campo de poropressão da amostra para raio de drenagem igual a 0.25 metro e para o fator de tempo  $T = 0.02$ . Pode-se observar por meio dessa figura que há uma redução de poropressão na região aonde o dreno esta localizado, devido ao caminho de elevada permeabilidade gerada pelo dreno que permite a dissipação do excesso de poropressão.

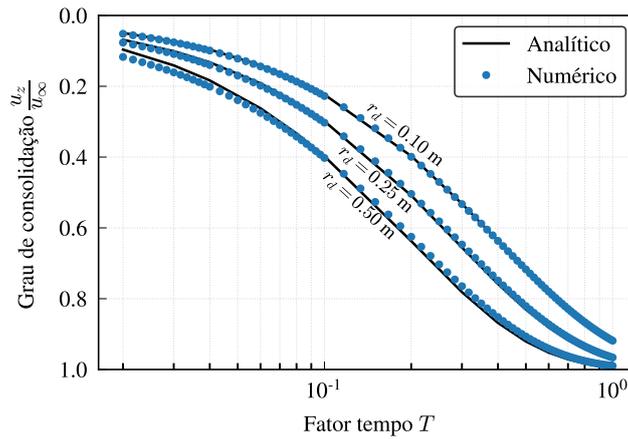


Figura 4.20 – Comparação de resultados numéricos e curvas analíticas para o grau de consolidação.

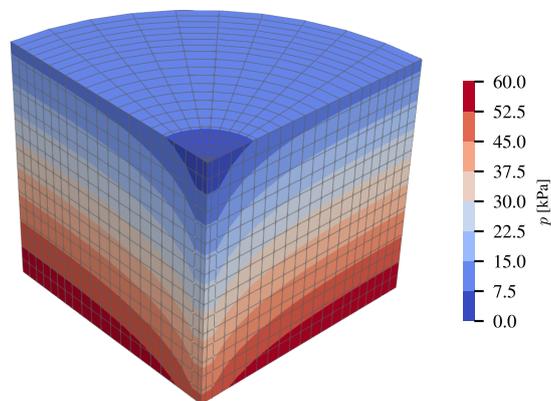


Figura 4.21 – Campo de poropressão da análise de adensamento radial para  $T = 0.02$  e  $r_d = 0.25$  m.

#### 4.5.7 - Exemplo 5 - Simulação de fratura hidráulica de deformação plana (KGD)

O modelo de fratura hidráulica KGD foi desenvolvido por Khristianovich, Geertsma e de Klerk (Khristianovic e Zheltov, 1955; Geertsma e Klerk, 1969; Geertsma e Haafkens, 1979) para investigar a propagação de uma única fratura em um sólido elástico devido a injeção de um fluido incompressível a uma taxa constante (Figura 4.22). A solução analítica para o problema KGD considera as seguintes hipóteses: a fratura está sujeita à condição de deformação plana no plano horizontal; o meio é linear elástico, isotrópico, impermeável e não possui tenacidade; o fluxo ocorre entre placas paralelas e o fluido é incompressível. A partir das hipóteses acima, as soluções para o comprimento da fratura  $l(t)$ , a abertura da fratura  $w(x, t)$  e a pressão do fluido

$p_f(x, t)$  são dadas pelas seguintes equações (Geertsma e Klerk, 1969; Spence e Sharp, 1985):

$$l(t) = C_1 \left[ \frac{G Q_0^3}{\mu (1 - \nu)} \right]^{1/6} t^{2/3} \quad (4.115)$$

$$w(0, t) = C_2 \left[ \frac{\mu (1 - \nu) Q_0^3}{G} \right]^{1/6} t^{1/3} \quad (4.116)$$

$$p_f(0, t) = C_3 \left[ \frac{\mu G^3 Q_0}{(1 - \nu)^3 l(t)^2} \right]^{1/4} + \sigma_0 \quad (4.117)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $Q_0$  é a taxa de injeção de fluido,  $t$  é o tempo decorrido e  $\sigma_0$  é a tensão externa aplicada à amostra. De acordo com Geertsma e Klerk (1969)  $C_1 = 0.68$ ,  $C_2 = 1.87$  e  $C_3 = 1.38$ . Posteriormente, Spence e Sharp (1985) propuseram os seguintes valores  $C_1 = 0.65$ ,  $C_2 = 2.14$  e  $C_3 = 1.97$ .

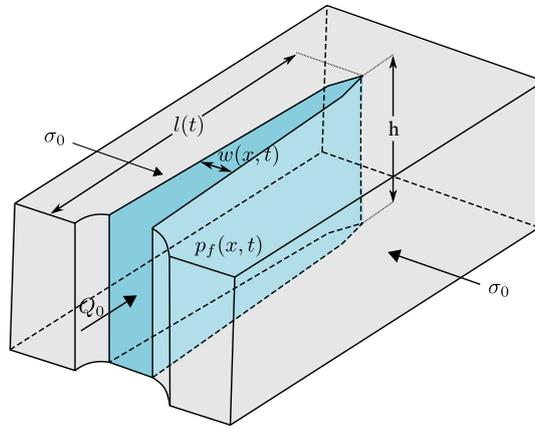


Figura 4.22 – Representação esquemática do modelo de fratura hidráulica KGD.

Neste exemplo, é analisado numericamente o problema de fratura hidráulica KGD e os resultados são comparados com a solução analítica correspondente. A geometria e as condições de contorno são mostradas na Figura 4.23, enquanto os parâmetros do material são apresentados na Tabela 4.6. Tanto as condições de contorno quanto os parâmetros dos materiais usados no ensaio foram escolhidos para corresponder adequadamente às hipóteses adotadas nas soluções analíticas. Por exemplo, as dimensões do domínio são muito maiores do que o comprimento da fratura e a abertura. Além disso, pequenos valores de permeabilidade ( $k$  e  $k_t$ ) são escolhidos para minimizar a infiltração no meio poroso. Já as propriedades mecânicas do elemento de interface são selecionadas para garantir uma pequena zona coesiva em comparação com o tamanho da fratura com o objetivo de manter as condições de mecânica da fratura elástica linear (ver Nguyen et al., 2017). Na análise, uma taxa de fluxo  $Q_0 = 0.005$  [m<sup>3</sup>/s] foi injetada no sistema usando os nós centrais do elemento de interface mais externo, conforme mostrado na Figura 4.23.

Durante a análise numérica monitorou-se o comprimento e a abertura da fratura, assim como

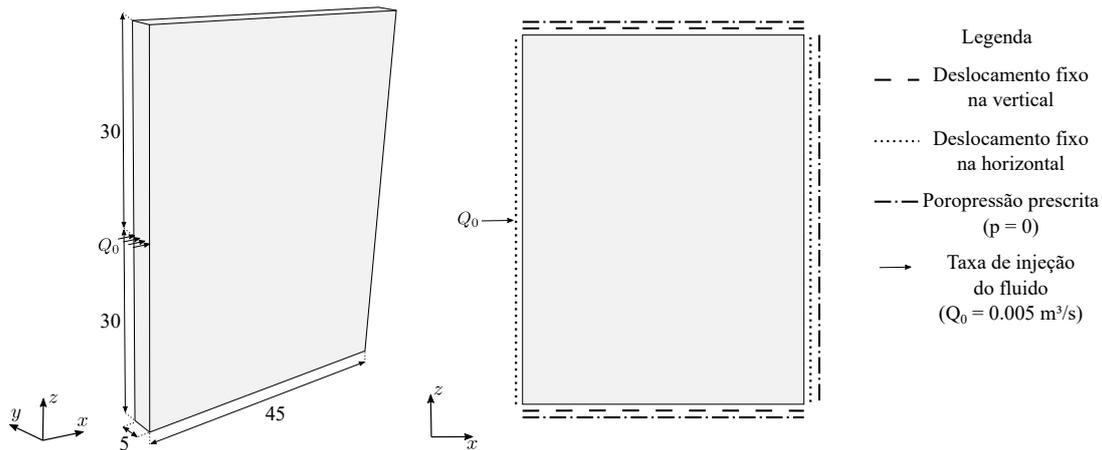


Figura 4.23 – Configuração do ensaio de fratura hidráulica KGD. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.6 – Parâmetros do material para o exemplo 5.

Material	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kJ/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kJ/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m·s]
Meio poroso	17	0.2	-	-	-	-	$10^{-16}$	0.75	$2.41 \times 10^{-8}$	10	-	-	-
Fratura	17	0.2	1.4	5	900	0.05	-	-	-	10	$10^{-4}$	0	$10^{-8}$

a pressão do fluido na fratura. Com esses dados foi possível plotar as curvas dos resultados numéricos e compará-las com os resultados analíticos obtidos por meio das Eqs. 4.115, 4.116 e 4.117, conforme mostra a Figura 4.24. Uma boa concordância entre as curvas numéricas e analíticas pode ser observada, principalmente quando compara-se com as curvas analíticas obtidas por Spence e Sharp (1985). Observe que o ramo ascendente da curva tempo vs pressão foi omitido (Figura 4.24c) para fornecer uma melhor comparação com a solução analítica. A Figura 4.25 apresenta o estado deformado da malha no final da análise, utilizando um fator de escala de 300. Além disso, essa figura apresenta o campo de deslocamento  $u_z$ .

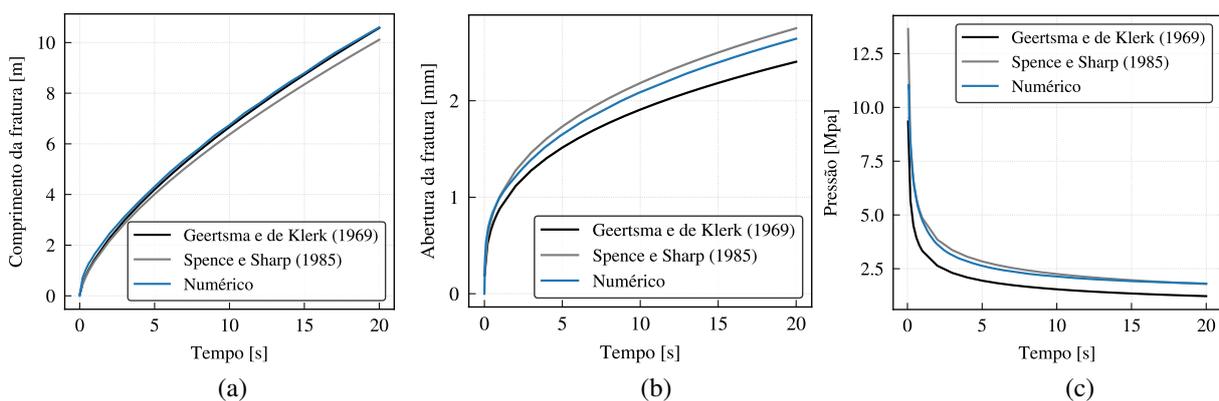


Figura 4.24 – Resultado analítico e predição numérica de fratura hidráulica KGD: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo.

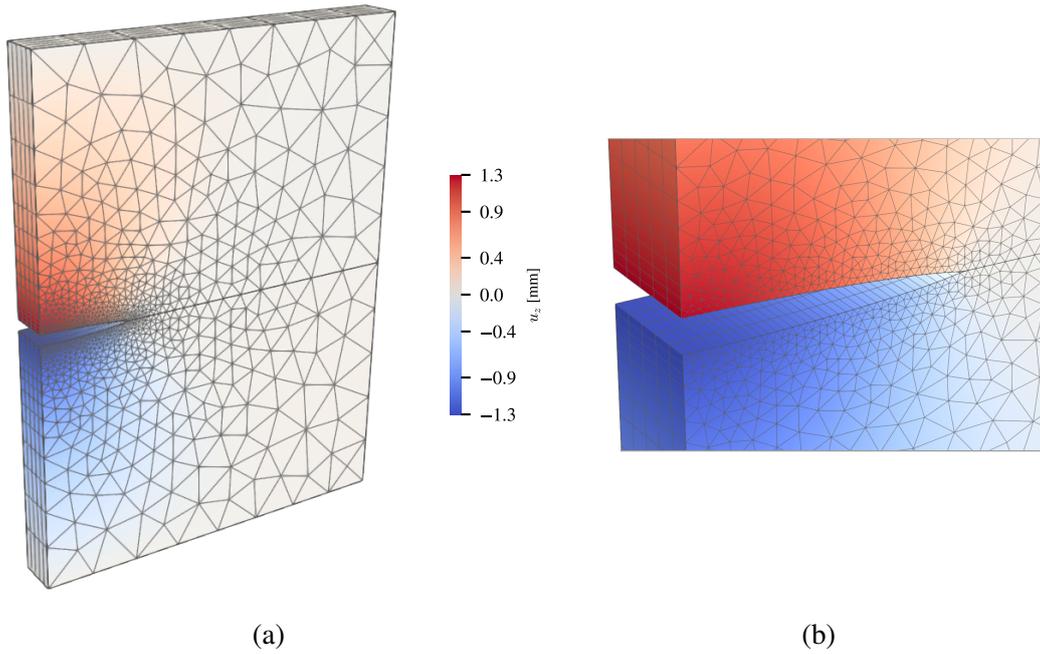


Figura 4.25 – Predição numérica do deslocamento  $u_z$  do ensaio de fratura hidráulica KGD.

#### 4.5.8 - Exemplo 6 - Simulação do problema de fratura hidráulica radial (*Penny-Shaped*)

O modelo de fratura hidráulica radial ou *Penny-Shaped* visa investigar a propagação de uma única fratura radial em um sólido elástico devido a injeção de um fluido incompressível a uma taxa constante (ver Figura 4.26). As hipóteses adotadas para formular este modelo são: o material é isotrópico, linear elástico, impermeável e sem tenacidade; o fluxo ocorre entre placas paralelas; o fluido é incompressível; não há perda de fluido das faces de fratura para o meio poroso. Com base nessas hipóteses, a solução analítica para o raio da fratura  $r(t)$ , abertura de fratura  $w(r, t)$  e pressão de fluido  $p_f(r, t)$  foram apresentadas por Savitski e Detournay (2002) como:

$$r(t) = \gamma[P(t)] L(t) \quad (4.118)$$

$$w(r, t) = \varepsilon(t) L(t) \Omega[\rho, P(t)] \quad (4.119)$$

$$p_f(r, t) = \varepsilon(t) E' \Pi[\rho, P(t)] \quad (4.120)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\varepsilon(t)$  é um número pequeno sem dimensão,  $L(t)$  representa um comprimento da mesma ordem do raio de fratura  $r(t)$ ,  $P(t)$  é um parâmetro dependente do tempo,  $\rho = r_0/r(t)$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) é a coordenada radial adimensional,  $r_0$  é o raio do poço e  $E' = E/(1 - \nu^2)$ .

Para a escala de viscosidade, o parâmetro  $P(t)$  pode ser interpretado como uma tenacidade

adimensional  $\kappa$ , enquanto o termo  $\varepsilon(t)$  e o comprimento  $L(t)$  podem ser expressos como:

$$\kappa = K' \left( \frac{t^2}{\mu'^5 Q_0 E'^{13}} \right)^{1/18} \quad (4.121)$$

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{\mu'}{E't} \right)^{1/3} \quad (4.122)$$

$$L(t) = \left( \frac{E' Q_0^3 t^4}{\mu'} \right)^{1/9} \quad (4.123)$$

onde  $K' = \left(\frac{32}{\pi}\right)^{0.5} K_{IC}$ , o termo  $K_{IC}$  representa a tenacidade à fratura do material,  $Q_0$  é a taxa de injeção do fluido e  $\mu' = 12\mu$ .

A aproximação de primeira ordem da solução de tenacidade zero é dado por:

$$\gamma = 0.6955 \quad (4.124)$$

$$\Omega = (C_1 + C_2\rho)(1 - \rho)^{2/3} + B_1 [(1 - \rho^2)^{1/2} - \rho \arccos \rho] \quad (4.125)$$

$$\Pi = A_1 \left( \omega_1 - \frac{2}{3(1 - \rho)^{1/3}} \right) - B_2 \left( \ln \frac{\rho}{2} + 1 \right) \quad (4.126)$$

onde  $A_1 = 0.3581$ ,  $B_1 = 0.1642$ ,  $B_2 = 0.09269$ ,  $C_1 = 1.034$ ,  $C_2 = 0.6378$  e  $\omega_1 = 2.479$ .

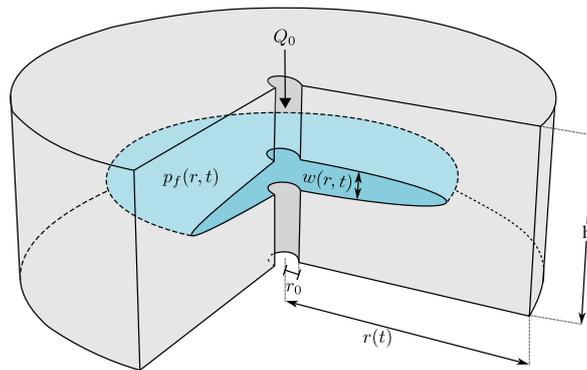


Figura 4.26 – Representação esquemática do modelo de fratura hidráulica radial.

Neste exemplo, é analisado numericamente o problema fratura hidráulica radial e os resultados são comparados com a solução analítica correspondente. A Figura 4.27 apresenta as condições de contorno do ensaio e as dimensões da amostra, enquanto os parâmetros do material são apresentados na Tabela 4.7. O raio do poço utilizado na análise foi de  $r_0 = 0.10$  m. De forma similar ao que foi feito na análise KGD, as condições de contorno e os parâmetros dos materiais foram escolhidos para corresponder adequadamente às hipóteses adotadas na dedução

das equações analíticas. A taxa de fluxo total de injeção é igual a  $Q_0 = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ , mas desde que um quarto do domínio é considerado, devido à simetria,  $Q_0 = 0.0025 \text{ m}^3/\text{s}$  é aplicado como condição de contorno.

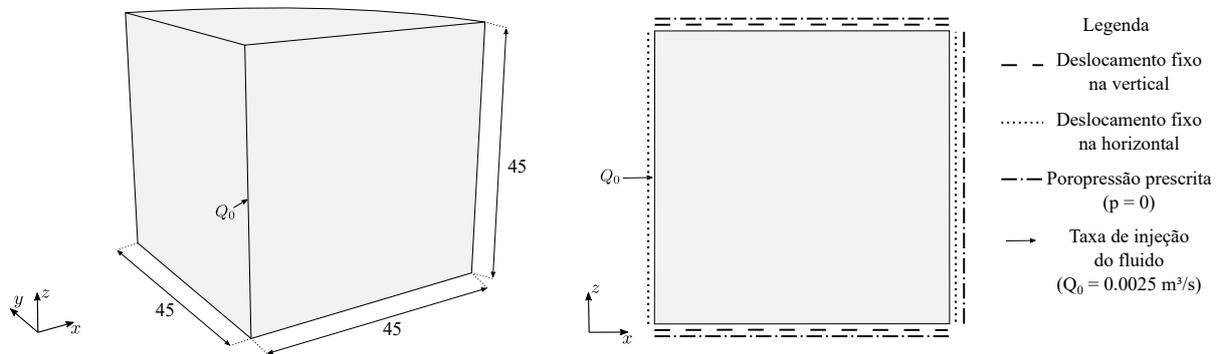


Figura 4.27 – Configuração do ensaio de fratura hidráulica radial. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.7 – Parâmetros do material para o exemplo 6.

Material	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kJ/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kJ/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m·s]
Meio poroso	17	0.2	-	-	-	-	$10^{-16}$	0.75	$2.41 \times 10^{-8}$	10	-	-	-
Fratura	17	0.2	1.4	5	900	0.05	-	-	-	10	$10^{-4}$	0	$10^{-8}$

Durante a análise numérica monitorou-se o raio e a abertura da fratura, assim como a pressão do fluido na fratura circular. Os resultados numéricos e analíticos obtidos por meio das Eqs. 4.118, 4.119 e 4.120, são apresentados na Figura 4.28. Pode-se verificar que os resultados numéricos estão em boa concordância com os resultados analíticos. Note que a parte referente a elevação da pressão do fluido da curva numérica (Figura 4.28c) foi omitida, visando fornecer melhor comparação com a solução analítica. A Figura 4.29 apresenta o estado deformado da malha no final da análise, utilizando um fator de escala de 300. Essa figura apresenta, ainda, o campo de deslocamento  $u_z$ .

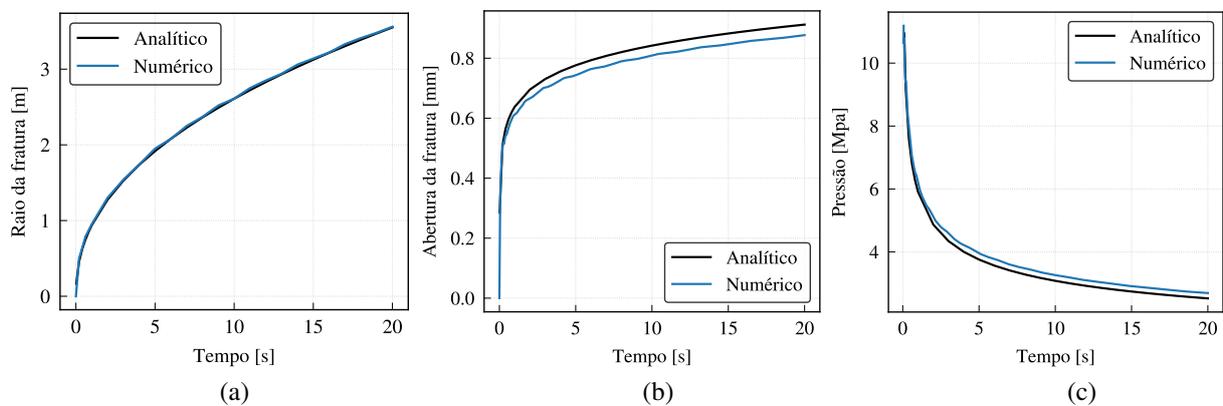


Figura 4.28 – Resultado analítico e predição numérica de fratura hidráulica radial: a) Raio da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo.

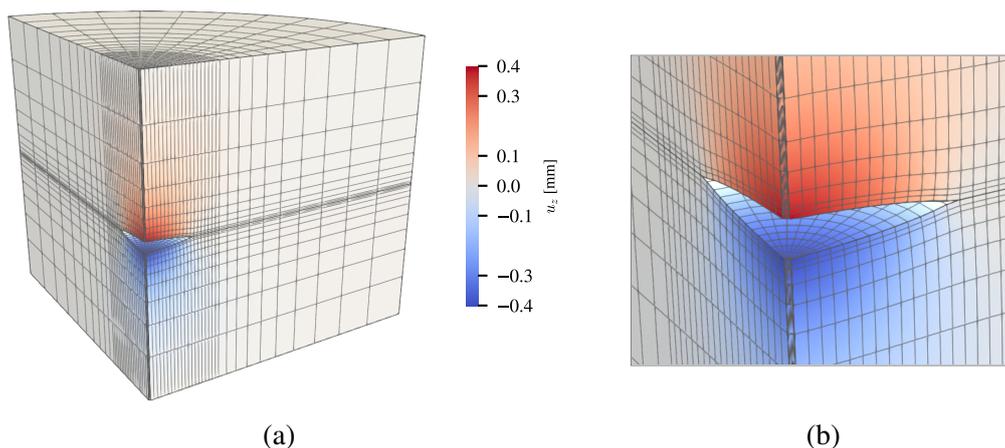


Figura 4.29 – Predição numérica do deslocamento  $u_z$  do ensaio de fratura hidráulica radial.

#### 4.5.9 - Exemplo 7 - Ensaio de fraturamento hidráulico do concreto

Neste exemplo um espécime de concreto ensaiado por Slowik e Saouma (2000) é simulado numericamente. Durante o ensaio, um deslocamento controlado de  $2 \mu\text{m/s}$  é aplicado nas faces internas do espécime, enquanto no entalhe central da amostra é aplicado um fluido sob pressão de 210 kPa. Essa configuração visa estudar o comportamento do espécime de concreto quando submetido, de forma simultânea, ao carregamento mecânico e hidráulico. As dimensões e as condições de contorno do ensaio são apresentadas na Figura 4.30. Os parâmetros requeridos na análise foram extraídos do trabalho de Barani et al. (2016) e são apresentados na Tabela 4.8.

Durante a análise numérica monitorou-se a abertura do maior entalhe, assim como a força

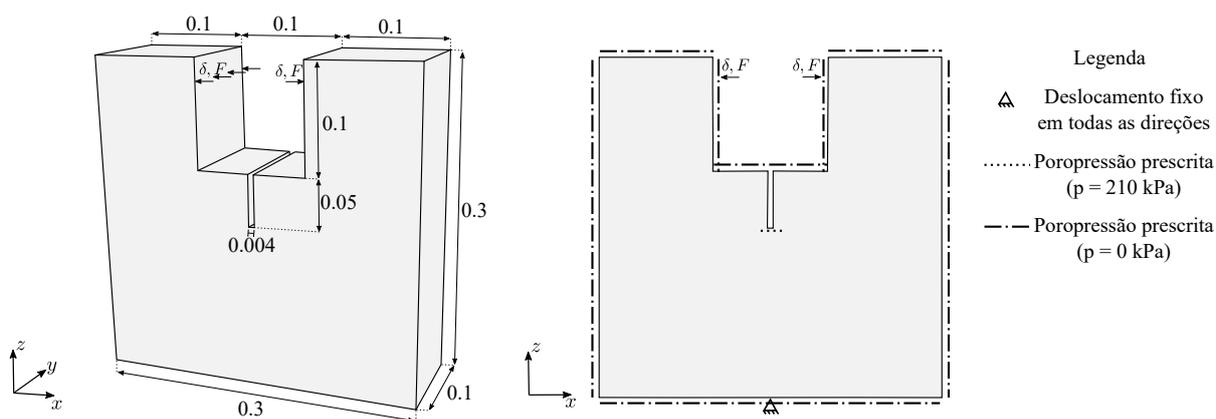


Figura 4.30 – Configuração do ensaio de fratura hidráulica no concreto. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.8 – Parâmetros do material para o exemplo 7.

Material	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kJ/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kJ/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m·s]
Meio poroso	15.5	0.17	-	-	-	-	$10^{-11}$	0.78	$1.23 \times 10^{-8}$	10	-	-	-
Fratura	15.5	0.17	1.4	5	1600	0.15	-	-	-	10	$10^{-6}$	0	$10^{-8}$

aplicada nas paredes do entalhe. Os resultados numéricos e experimentais são apresentados na Figura 4.31. Como pode-se verificar boa concordância entre os resultados numéricos e experimental é obtida apesar do distanciamento do trecho final da curva. O resultado demonstra que o modelo conseguiu simular de forma adequada o fluxo do fluido no interior da fratura, assim como a pressão exercida pelo fluido nas paredes da fratura.

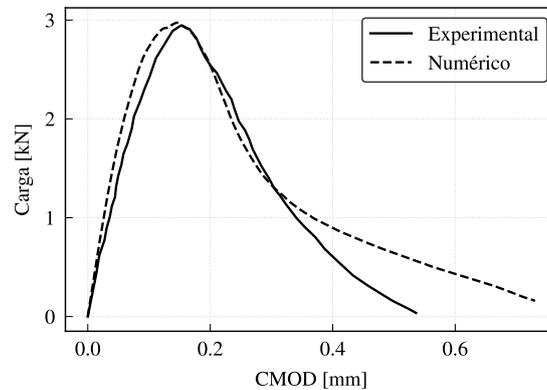


Figura 4.31 – Resultado analítico e predição numérica do fraturamento hidráulico do concreto.

A Figura 4.32 apresenta o estado deformado da malha no final da análise, aplicando um fator de escala de 20. Além disso, essa figura mostra predição numérica da poropressão do fraturamento hidráulico do concreto.

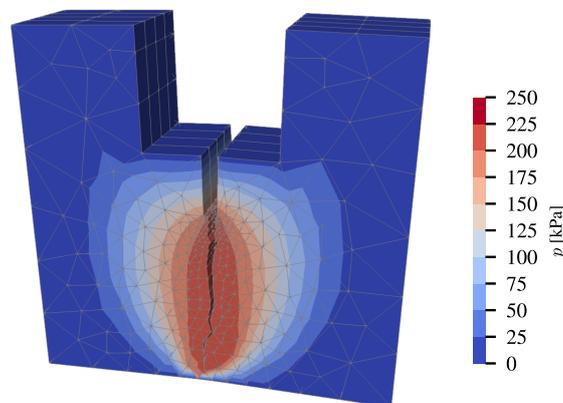


Figura 4.32 – Predição numérica da poropressão do fraturamento hidráulico do concreto.

#### 4.5.10 - Exemplo 8 - Fratura hidráulica em uma amostra confinada

Este exemplo apresenta a análise de um caso hipotético que visa estudar o comportamento da fratura hidráulica em uma amostra confinada e com baixa permeabilidade. Para simular as condições de confinamento, os deslocamentos das faces superior e inferior da amostra são restringidos na direção vertical, enquanto os deslocamentos das faces laterais são restringidos

na direção horizontal. A Figura 4.33 apresenta a configuração do ensaio numérico, enquanto os parâmetros do material utilizados na análise são apresentados na Tabela 4.9. Na malha de elementos finitos os elementos de interface são colocados na parte central da amostra com objetivo de representar o plano preferencial da fratura. A análise é realizada aplicando-se uma taxa de fluxo constante  $Q_0$  durante 2 segundos na região pré-fraturada que possui 5 mm de comprimento e de abertura.

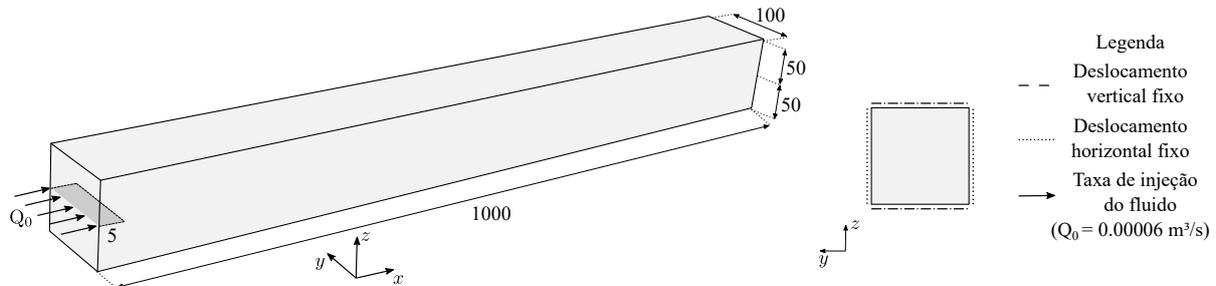


Figura 4.33 – Fratura hidráulica em uma amostra confinada. Todas as medidas em milímetros

Tabela 4.9 – Parâmetros do material para o exemplo 8.

Material	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kJ/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kJ/m³]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m·s]
Meio poroso	17	0.2	-	-	-	-	$10^{-16}$	0.75	$2.41 \times 10^{-8}$	10	-	-	-
Fratura	17	0.2	1.4	5	900	0.05	-	-	-	10	$10^{-4}$	0	$10^{-8}$

Durante a análise, monitorou-se os pontos de integração dos elementos de interface no plano da fratura. Com esses dados foi possível obter as informações na boca da fratura, assim como ao longo do plano da fratura. A Figura 4.34 apresenta os resultados numéricos obtidos na boca da fratura. A Figura 4.34a apresenta a curva tensão coesiva versus a abertura da fratura. Pode-se observar por meio dessa curva que há uma excelente concordância com o modelo de amolecimento linear que fornece a tensão máxima de  $\sigma_{max} = 900$  kPa e da abertura crítica  $u_c = 0.11$  mm. Isso demonstra que o modelo aqui aplicado está simulando de forma adequada a perda de rigidez devido a fissuração da amostra. A Figura 4.34b apresenta a curva abertura da fratura versus o tempo. Pode-se observar que a fratura abre-se rapidamente no início da injeção do fluido e a velocidade de abertura tende a se estabilizar ao longo do tempo devido a propagação da fratura. A Figura 4.34c apresenta a curva da pressão do fluido ao longo do tempo. Através dessa curva é possível observar que a pressão do fluido se eleva abruptamente no início, durante o regime elástico da amostra, entretanto quando o material atinge a resistência à tração a pressão tem uma pequena queda. Posteriormente, conforme mais fluido é injetado a pressão tende a se elevar novamente, entretanto a velocidade da elevação da pressão é bem menor quando comparada com a velocidade de início, devido a propagação da fratura.

A Figura 4.35 apresenta os resultados numéricos ao longo do plano de fratura. A Figura 4.35a mostra as curvas da abertura da fratura versus o comprimento da fratura para diferentes tempos. Por meio dessas curvas, pode-se observar o crescimento gradual da abertura e do

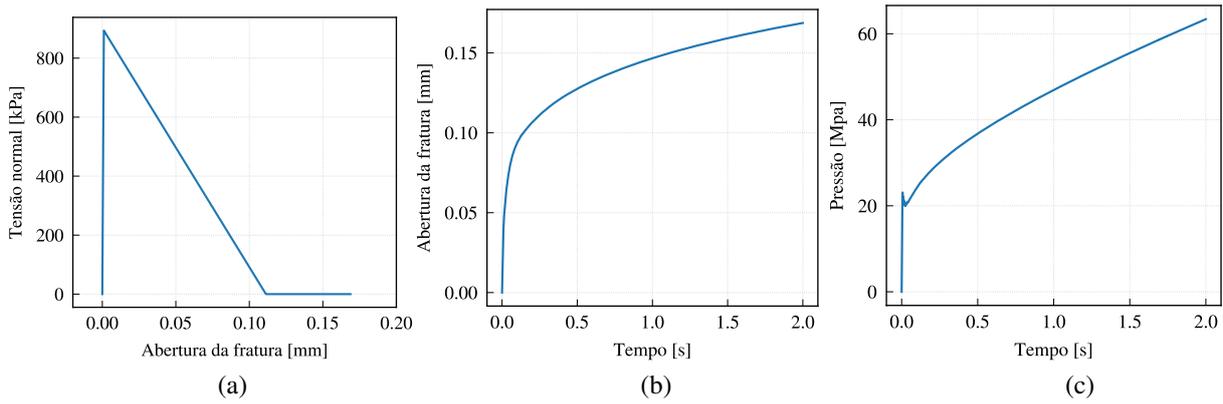


Figura 4.34 – Resultados numéricos na boca da fratura.

comprimento da fratura. A Figura 4.35b apresenta a evolução da tensão coesiva no comprimento da fratura para diferentes tempos. Pode-se verificar que o pico de todas as curvas correspondem aproximadamente à resistência à tração do material  $\sigma_{max}$  como esperado e que após a fratura atingir a abertura crítica a tensão coesiva é igual a zero. Por fim, a Figura 4.35c mostra a evolução da pressão do fluido ao longo do eixo  $x$ , compreendendo o comprimento da fratura, a zona do processo de fratura e o comprimento restante atrás da fratura. Pode-se observar que a pressão do fluido é elevada na boca da fratura e tende à diminuir a medida que se afasta da dessa região até o momento em que ocorre uma queda abrupta na pressão. Essa queda ocorre na região da zona de processo de fratura, onde a tensão coesiva atua. Em alguns casos a queda da pressão levam a pressões negativas. Além disso, pode-se verificar que a pressão por trás da trinca tende a aumentar ao longo do tempo devido as faces da amostra serem impermeáveis (o que evita dissipação da pressão) e à compressão da fase sólida.

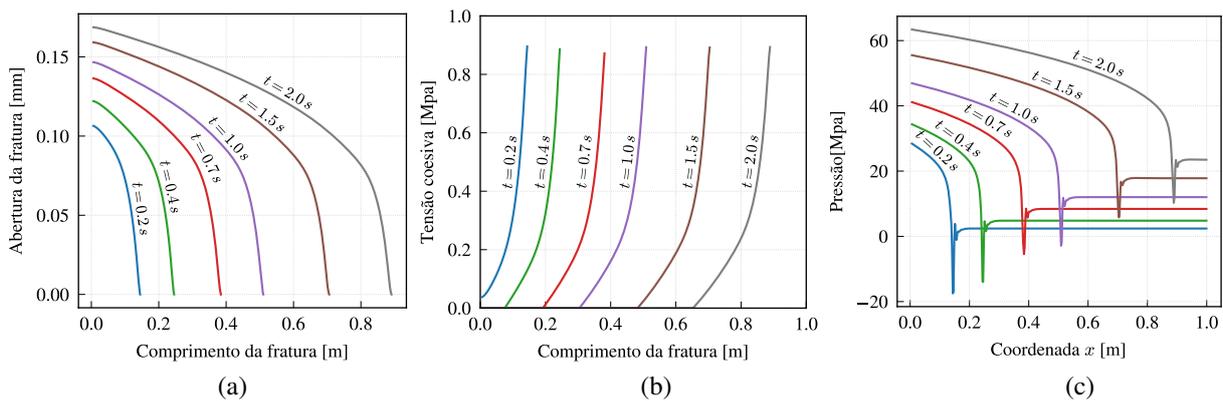


Figura 4.35 – Resultados numéricos ao longo do plano da fratura.

#### 4.5.11 - Exemplo 9 - Estudo da influencia das propriedades do material e da vazão nas características da fratura hidráulica

Neste exemplo, é analisado um problema similar ao KGD, visando estudar o comportamento da fratura hidráulica a medida que são alterados o valor da vazão aplicada ou as propriedades do meio poroso e do fluido. A Figura 4.36 apresenta a configuração do ensaio numérico, enquanto os parâmetros base do material utilizados na análise são apresentados na Tabela 4.10.

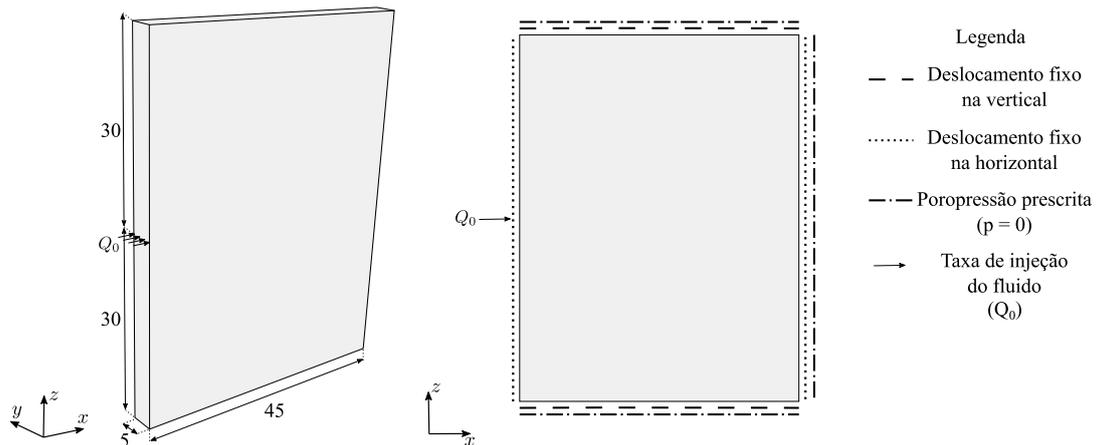


Figura 4.36 – Configuração do ensaio de fratura hidráulica. Todas as medidas em metros.

Tabela 4.10 – Parâmetros do material para o exemplo 9.

Material	$E$ [GPa]	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\zeta$	$\sigma_{max}$ [kPa]	$G_F$ [kN/m]	$k$ [m/s]	$\alpha$	$S$ [1/kPa]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [kPa s]	$\beta$ [1/kPa]	$k_t$ [m/m·s]
Meio poroso	17	0.2	-	-	-	-	$10^{-16}$	0.75	$2.41 \times 10^{-8}$	10	-	-	-
Fratura	17	0.2	1.4	5	900	0.05	-	-	-	10	$10^{-4}$	0	$10^{-8}$

#### Estudo da influencia da vazão aplicada no meio poroso nas características da fratura hidráulica

Esse estudo visa verificar como a alteração da vazão aplicada no meio poroso influencia o processo de fraturamento hidráulico. Para tanto, realizou-se quatro análises numéricas variando apenas a vazão aplicada e mantendo constante todos os parâmetros da Tabela 4.10. As vazões  $Q_0$  aplicadas nas análises foram  $10^{-3}$ ,  $2.5 \times 10^{-3}$ ,  $5 \times 10^{-3}$  e  $10^{-2}$  m<sup>3</sup>/s. Por meio dos resultados, apresentados na Figura 4.37, é possível concluir que quanto maior a vazão maior será o comprimento e abertura da fratura. Por outro lado, as curvas da pressão na fratura em relação ao tempo não variam significativamente, uma vez que o aumento do volume de fluido aplicado no meio poroso é contrabalanceado pelo aumento do volume da fratura preenchido pelo fluido.

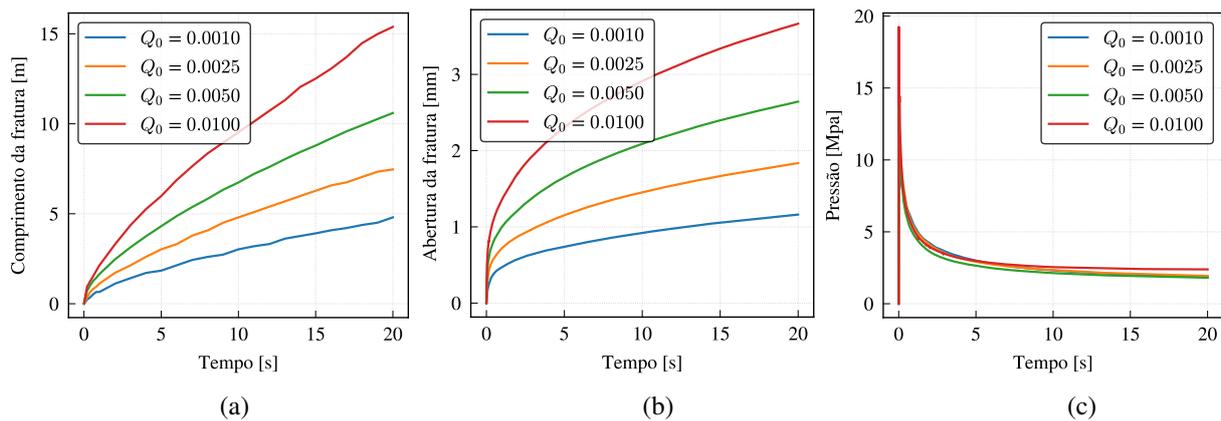


Figura 4.37 – Predição numérica da fratura hidráulica para diferentes vazões: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo.

### Estudo da influencia da viscosidade do fluido de fratura nas características da fratura hidráulica

Esse estudo visa verificar como a alteração da viscosidade do fluido de fratura influencia o processo de fraturamento hidráulico. Para tanto, realizou-se quatro análises numéricas variando apenas a viscosidade do fluido de fratura e mantendo constante os outros parâmetros contidos na Tabela 4.10. As viscosidades do fluido  $\mu$  utilizadas nas análises foram  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$  kPa s. Além disso, aplicou-se em todas as análises uma vazão de  $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$ . Por meio dos resultados, apresentados na Figura 4.38, pode-se verificar que quanto maior a viscosidade menor é o comprimento da fratura e maior é abertura da fratura. Esse resultado é coerente, uma vez que quanto maior a viscosidade maior é a resistência do fluido ao escoamento. Além disso, a pressão do fluido na fratura tende a ser maior quanto maior for a viscosidade, pois o acúmulo do fluido em um volume menor de fratura faz a pressão do fluido se elevar.

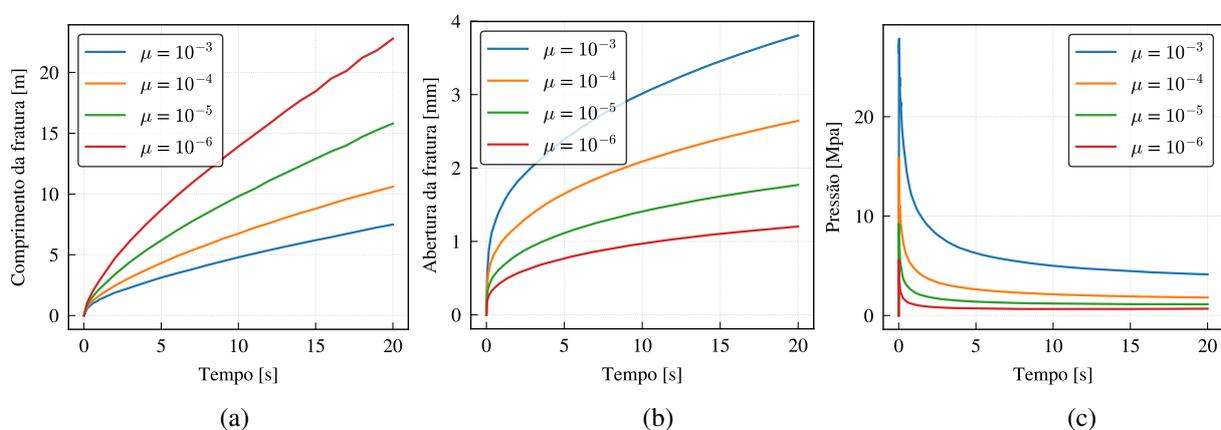


Figura 4.38 – Predição numérica da fratura hidráulica para diferentes viscosidade do fluido de fratura : a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo.

## Estudo da influencia da permeabilidade do meio poroso nas características da fratura hidráulica

Esse estudo visa verificar como a alteração da permeabilidade do meio poroso influencia o processo de fraturamento hidráulico. Para tanto, realizou-se quatro análises numéricas variando a permeabilidade do meio poroso. As permeabilidades  $k$  utilizadas nas análises foram  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$  e  $10^{-8}$  m s. Além disso definiu-se, para todos os casos, a permeabilidade transversal da fratura igual  $10^{-4}$  m/m·s e manteve-se constante os outros parâmetros contidos na Tabela 4.10. As análises foram realizadas aplicando uma vazão de  $0.005$  m<sup>3</sup>/s. Por meio dos resultados, apresentados na Figura 4.39, pode-se observa que quando a permeabilidade do meio poroso é muito elevada, o fluido injetado infiltra no sólidos, portanto é incapaz de se acumular em uma região e gerar pressões necessárias para romper a amostra. Verifica-se ainda que quanto menor a permeabilidade menor é o comprimento da fratura e maior é a abertura da fratura. Vale ressaltar que as curvas do comprimento e da abertura da fratura tendem a convergir a medida que a permeabilidade diminui. Já as curvas da pressão do fluido vesus o tempo estão bastante próximas, com exceção da curva do meio poroso com elevada permeabilidade ( $k = 10^{-4}$ ).

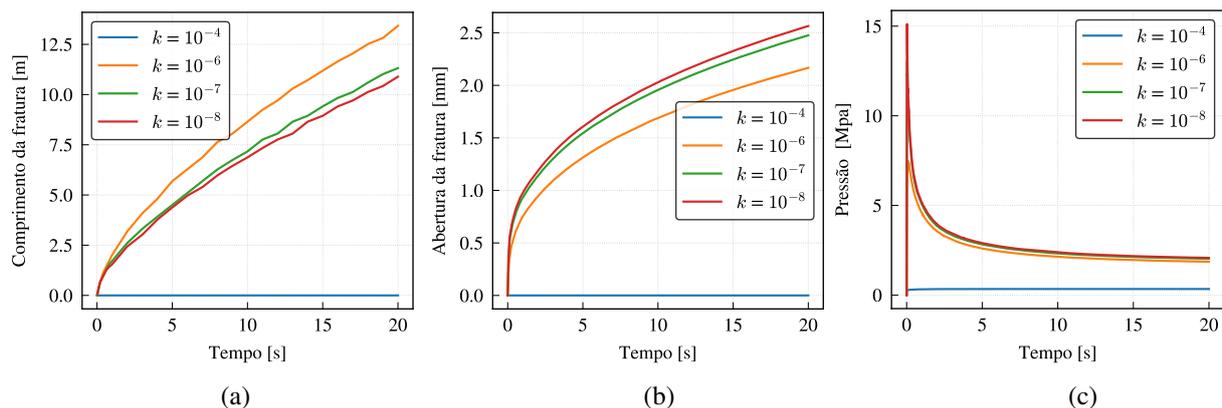


Figura 4.39 – Predição numérica da fratura hidráulica em meios porosos com diferentes permeabilidades: a) Comprimento da fratura versus tempo; b) Abertura da fratura versus tempo; c) Pressão do fluido na fratura versus tempo.

## 4.6 - DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta a modelagem tridimensional em elementos finitos da fratura hidráulica em meio poroso saturado usando elementos de interface coesivos de fluxo. A inclusão dos elementos de interface de camada tripla na malha de elementos finitos é realizada por meio do algoritmo apresentado na Seção 4.1. Esse algoritmo é uma versão modificada do algoritmo apresentado no Capítulo 3 e, em virtude disso, compartilha as características de eficiência e versatilidade, pois permite gerar os elementos de interface de forma rápida utilizando poucos recursos computacionais. Além disso, o algoritmo permitir que o usuário escolha aonde deseja

colocar os elementos de interface (em toda malha ou em apenas parte dela).

O teste de verificação demonstrou que o acoplamento hidromecânico do modelo de fratura para materiais quase frágeis, desenvolvido no Capítulo 3, foi realizado com sucesso, uma vez que o modelo conseguiu simular o processo de fratura hidráulica. Após o teste de verificação, foram realizadas seis análises de validação da abordagem utilizada para modelar a fratura hidráulica. Os resultados analíticos e numéricos das análises de validação apresentaram ótima concordância. Isso demonstra que o desenvolvimento da formulação e a implementação da abordagem para simular o meio poroso fraturado foram realizadas corretamente. Em seguida, o modelo é utilizado para simular um ensaio experimental de fratura hidráulica no concreto. A concordância entre o resultado numérico e experimental demonstra que o modelo é capaz de simular o processo de fratura hidráulica em materiais quase frágeis como o concreto.

Os bons resultados obtidos nas análises de validação e do ensaio experimental permitem que o modelo seja usado em estudos de casos. No total foram realizados dois estudos de casos. No primeiro, estudou-se a evolução da fratura hidráulica com o passar do tempo em uma amostra confinada. Para tanto, monitorou-se plano da fratura visando examinar a abertura da fratura, a tensão coesiva no meio poroso e a pressão do fluido. Por outro lado no segundo, estudou-se o impacto que a taxa de injeção do fluido e as propriedades do fluido e do meio poroso possuem na propagação da fratura. Os resultados obtidos nos dois estudos forneceram informações importantes que possibilitam uma melhor compreensão sobre o processo de fratura hidráulica. É importante ressaltar que essa abordagem possui a limitação de ser aplicada apenas ao meio poroso saturado e permitir apenas uma fase de fluido. É importante destacar que essa abordagem possui a limitação de ser aplicada apenas ao meio poroso saturado.

## 5 - MODELAGEM DE DRENOS

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da formulação utilizada na modelagem do elemento de dreno, assim como aspectos associados ao Método dos Elementos Finitos. Inicialmente, apresenta-se a modelagem do dreno pelo método discreto. Em seguida, aborda-se a modelagem do dreno pelo método semi-embutido. Para tanto, descreve-se a discretização do elemento de dreno na malha de elementos finitos e a formulação do elemento de interface. Posteriormente, apresenta-se simulações numéricas no qual é utilizado o método semi-embutido para simular drenos no meio poroso. Por fim, é apresentada a discussão sobre a abordagem adotada e as análises numéricas.

### 5.1 - MODELAGEM DE DRENO PELO MÉTODO DISCRETO

A análise com drenos pelo método discreto corresponde à utilização convencional de elementos tipo barra (ou neste caso dreno) numa análise de fluxo pelo MEF. Neste método a posição do elemento de dreno é limitada aos nós dos elementos sólidos circundantes como mostra esquematicamente a Figura 5.1.

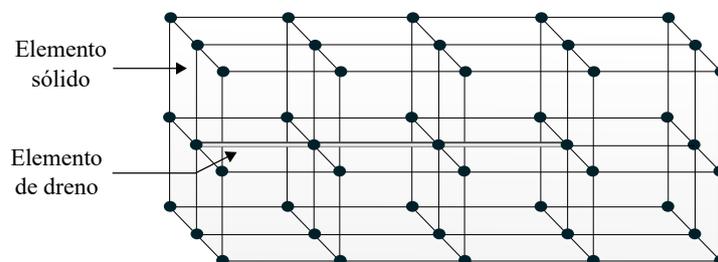


Figura 5.1 – Posição do elemento de dreno com relação aos elementos sólidos numa análise pelo Método Discreto. Modificado de Durand (2008).

A formulação do elemento de dreno pode ser derivada da equação de continuidade (Eq. 5.1), considerando-se que o fluxo é dado somente no sentido axial do dreno:

$$\frac{\partial q}{\partial l} = 0 \quad (5.1)$$

onde  $l$  denota o comprimento do dreno e  $q$  representa a velocidade do fluxo em um dado ponto no interior do dreno e é dado por:

$$q = -k \left( \frac{1}{\gamma_f} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial l} \right) \quad (5.2)$$

onde  $\gamma_f$  [N/m<sup>3</sup>] denota o peso específico do fluido e é igual ao produto da massa específica do fluido  $\rho_w$  [Kg/m<sup>3</sup>] pela aceleração da gravidade  $g$  [m/s<sup>2</sup>], enquanto  $k$  [m/s] representa a permeabilidade específica do dreno. O termo  $\frac{\partial p}{\partial l}$  é associado ao gradiente por poropressão, enquanto o termo  $\frac{\partial z}{\partial l}$  é associado ao gradiente por elevação. O termo  $\frac{\partial z}{\partial l}$  pode ser obtido por meio do último componente da matriz linha normalizada do jacobiano do elemento de dreno.

A forma fraca da equação da continuidade é obtida por meio da multiplicação da Eq. 5.1 pela função de teste  $\delta p$  e, em seguida, integrando-se o resultado no domínio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial q}{\partial l} d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Aplicando-se a integração por partes a Eq. 5.3, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial q}{\partial l} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta p q)}{\partial l} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial l} q d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

Em seguida, aplica-se o teorema da divergência a Eq. 5.4:

$$\int_{\Omega} \delta p \frac{\partial q}{\partial l} d\Omega = \int_{\Gamma_q} \delta p \underbrace{q \mathbf{n}}_{\bar{q}} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial l} q d\Omega = 0 \quad (5.5)$$

Na Eq. 5.5, o diferencial  $d\Gamma$  está associado com a superfície lateral do elemento de dreno. Posteriormente, utiliza-se a relação dada na Eq. 5.2 na Eq. 5.5, o que resulta na equação:

$$\int_{\Gamma_q} \delta p \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial l} \frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial p}{\partial l} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta p}{\partial l} k \frac{\partial z}{\partial l} d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

A aproximação por elementos finito da poropressão  $p$  do dreno e do gradiente de poropressão  $\frac{\partial p}{\partial l}$  são dados por:

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{N}_p \mathbf{p} \\ \frac{\partial p}{\partial l} &= \mathbf{B}_p \mathbf{p} \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o vetor de poropressão nodal do elemento de dreno, enquanto  $\mathbf{N}_p$  denota o matriz das funções de forma da poropressão e  $\mathbf{B}_p$  representa o matriz das primeiras derivadas das funções de forma da poropressão. Para elementos de dreno com  $n$  nós,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{N}_p$  e  $\mathbf{B}_p$  são expressos como:

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \quad (5.8)$$

$$\mathbf{N}_p = \langle N_1, N_2, \dots, N_n \rangle \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{\|\mathbf{J}\|} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi}, \frac{\partial N_2}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right\rangle \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{J}$  representa o jacobiano do elemento de dreno.

Introduzindo-se a aproximação por elementos finitos na Eq. 5.6, tem-se:

$$\int_{\Gamma_q} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}_p^T \frac{k}{\gamma_f} \mathbf{B}_p \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}_p^T k \frac{\partial z}{\partial l} d\Omega = 0 \quad (5.11)$$

Uma vez que a função teste  $\delta \mathbf{p}$  é arbitrária, a Eq. 5.11 resulta em:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{k}{\gamma_f} \mathbf{B}_p d\Omega \mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T k \frac{\partial z}{\partial l} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma \quad (5.12)$$

A Eq. 5.12 pode ser reescrita de forma compacta conforme a equação:

$$\mathbf{H}_{pp} \mathbf{p} = \dot{\mathbf{f}}_q^{ext} \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{H}_{pp}$  denota a matriz de permeabilidade do elemento de dreno e  $\dot{\mathbf{f}}_q^{ext}$  é o vetor de volume externo. Esses termos são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{pp} &= -\int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T \frac{k}{\gamma_f} \mathbf{B}_p d\Omega \\ \dot{\mathbf{f}}_q^{ext} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T k \frac{\partial z}{\partial l} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_p^T \bar{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $d\Omega = A dl$ , sendo que  $A$  representa a seção transversal do dreno e  $l$  representa o comprimento longitudinal do dreno.

O vetor de volume interno associados ao elemento de dreno pode ser calculado conforme as equações:

$$\dot{\mathbf{f}}_q^{in} = -\int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T k \underbrace{\left( \frac{1}{\gamma_f} \mathbf{B}_p \mathbf{p} + \frac{\partial z}{\partial l} \right)}_G d\Omega \quad (5.15)$$

onde  $G$  representa o gradiente de poropressão, enquanto a velocidade do fluido é dado por  $V = -kG$ , o que resulta na equação:

$$\dot{\mathbf{f}}_q^{in} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_p^T V d\Omega \quad (5.16)$$

## 5.2 - MODELAGEM DE DRENO PELO MÉTODO SEMI-EMBTIDO

O método semi-embutido foi originalmente desenvolvido por Durand (2003) e aprimorado no trabalho de Durand e Farias (2014) com objetivo de simular os elementos de barra (reforço) no interior dos elementos sólidos. Neste trabalho, adaptou-se o método semi-embutido apresentado

no trabalho Durand e Farias (2014), visando simular drenos. O método semi-embutido utiliza o elemento de interface para conectar o elemento de dreno ao elemento sólido, permitindo dessa forma maior flexibilidade na disposição do dreno na malha de elementos finitos. Nessa abordagem, os elementos de dreno são discretos e possuem nós independentes, que adicionam graus de liberdade a malha de elementos finitos. A presença de um elemento adicional de interface permite regular a passagem de fluido entre os elementos sólidos e os drenos. Além disso, esse método permite a aplicação de condições de contorno, como poropressão ou volume imposto, diretamente nos nós do elemento de dreno. Vale ressaltar que o elemento de interface não adiciona graus de liberdade ao sistema, sendo o fluxo do fluido entre o sólido e o dreno computado por meio da interpolação dos nós dos elementos sólidos e dos drenos.

### 5.2.1 - Discretização do elemento de dreno

Durante o processo de geração da malha, os elementos drenos são definidos por seus pontos inicial ( $X_{inicial}$ ) e final ( $X_{final}$ ), dessa forma podem ser discretizados dentro dos limites dos elementos sólidos ultrapassados. Além disso, os elementos de interface devem ser gerados visando vincular os elementos de dreno aos elementos sólidos circundante.

Os nós dos elementos de dreno são obtidos a partir da interseção entre o dreno e os elementos sólidos, conforme ilustrado na Figura 5.2 . O algoritmo iterativo desenvolvido por Durand (2003) é usado para definir todos os elementos de dreno. Este algoritmo encontra todas as interseções entre o dreno e os elementos sólidos circundantes com base em "funções de contorno" e o método de biseccção.

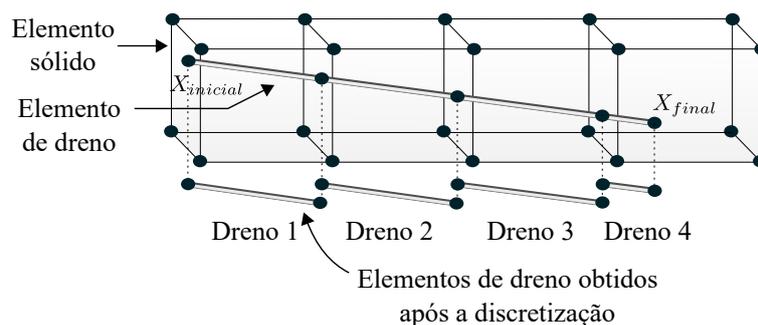


Figura 5.2 – Discretização do dreno. Modificado de Durand e Farias (2014).

A função de contorno ( $f^b$ ) é avaliada nas coordenadas locais ( $\eta, \xi, \zeta$ ) do ambiente circundante do elemento e determina se um ponto está dentro ( $f^b > 0$ ), fora ( $f^b < 0$ ) ou na borda ( $f^b = 0$ ) do elemento, como apresentado na Figura 5.3. Dependendo da forma do elemento finito, a

função de contorno adota as seguintes expressões (Durand e Farias, 2014):

$$f_{triangulo}^b = \min(\xi, \eta, 1 - \xi - \eta); \quad (5.17)$$

$$f_{quadrilateral}^b = \min(1 - \text{abs}(\xi), 1 - \text{abs}(\eta)); \quad (5.18)$$

$$f_{tetraedro}^b = \min(1 - \text{abs}(\xi), 1 - \text{abs}(\eta)); \quad (5.19)$$

$$f_{hexaedro}^b = \min(1 - \text{abs}(\xi), 1 - \text{abs}(\eta), 1 - \text{abs}(\zeta)); \quad (5.20)$$

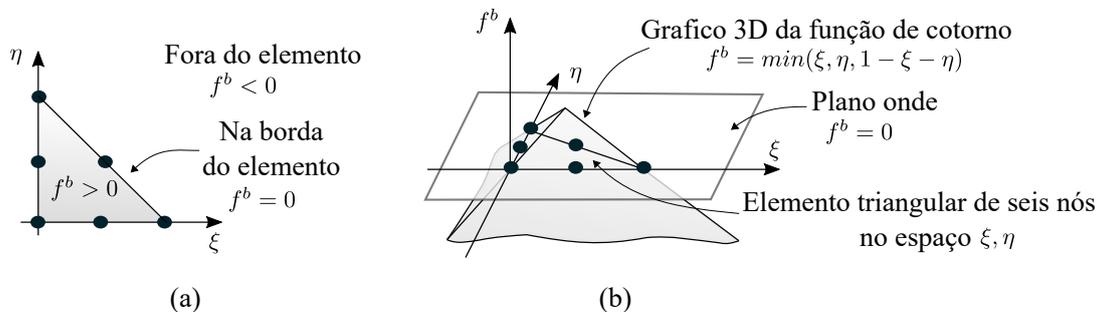


Figura 5.3 – Gráfico da função de contorno para um elemento triangular 2D de seis nós; a) variação do sinal da função de contorno; b) plotagem 3D da função de contorno correspondente. Modificado de Durand e Farias (2014).

Usando o conceito da função de contorno, é fácil encontrar a posição relativa de um ponto em relação a um elemento sólido sem usar cálculos geométricos extensos. No entanto, para um ponto dado nas coordenadas globais, é necessário primeiro encontrar as coordenadas locais. Isso pode ser conseguido usando a técnica de mapeamento inverso (Farias e Naylor (1998), Hartl (2002) e Durand (2003)). A Figura 5.4 mostra a interpretação gráfica do mapeamento inverso:

Um algoritmo iterativo é usado para encontrar todos os pontos de interseção. Um ponto virtual viaja para frente e para trás ao longo do dreno procurando pontos de interseção, onde função de contorno avaliada para os elementos circundantes é igual a zero. Para cada ponto de interseção o algoritmo usa o método de bissecção para resolver a equação:

$$f_{Elemento\_atual}^b(\eta, \xi, \zeta) = 0 \quad (5.21)$$

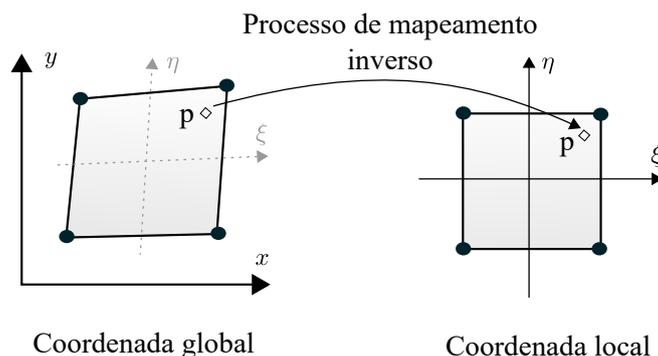


Figura 5.4 – Mapeamento inverso. Modificado de Durand e Farias (2014).

A Figura 5.5 mostra como o método de bissecção opera iterativamente para encontrar o ponto de interseção entre os elementos sólidos 1 e 2. Quando os pontos de interseção são encontrados, a geometria do elemento de dreno também é obtida.

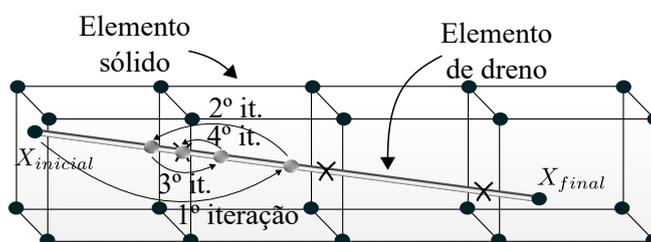


Figura 5.5 – Método da bissecção para encontrar pontos de interseção e subsequentemente os elementos discretos de dreno. Modificado de Durand e Farias (2014).

### 5.2.2 - Elemento de interface

O método semi-embutido utiliza a mesma formulação do método discreto para o elemento de dreno em conjunto com o elemento conector (elemento de interface) que faz a ligação do elemento de dreno ao elemento sólido atravessado sem adicionar novos graus de liberdade ao sistema. Na dedução da formulação do elemento de interface é necessário determinar a sua matriz de permeabilidade. Para tanto, considera-se que a velocidade do fluxo no elemento conector pode ser expressa como:

$$v_{rel} = -\frac{\bar{k}}{\gamma_f} p_{rel} \quad (5.22)$$

onde  $\bar{k}$  [m/(s m)] representa a drenabilidade do elemento conector sólido-dreno e possui unidade de velocidade por comprimento,  $\gamma_f$  [N/m<sup>3</sup>] denota o peso específico do fluido e  $p_{rel}$  [Pa] representa a propressão relativa entre o elemento dreno e o elemento sólido atravessado pelo dreno. Assim, o termo  $p_{rel}$  pode ser reescrito em função dos valores de propressão do elemento

de dreno  $p_{dren}$  [Pa] e do elemento sólido atravessado pelo dreno  $p_{sol}$  [Pa], conforme a equação:

$$p_{rel} = p_{sol} - p_{dren} \quad (5.23)$$

O termo  $p_{dren}$  pode ser expresso em função dos valores nodais de poropressão do dreno como:

$$p_{dren} = \mathbf{N} \mathbf{p}_{dren} \quad (5.24)$$

onde o termo  $\mathbf{p}_{dren}$  representa o vetor das poropressões de um elemento de dreno com  $n$  nós expresso como  $\mathbf{p}_{dren} = \langle p_{dren1}, p_{dren2}, p_{dren3}, \dots, p_{drenn} \rangle$ , enquanto o termo  $\mathbf{N}$  representa a matriz das funções forma do elemento de dreno dado por  $\mathbf{N} = \langle N_1, N_2, N_3, \dots, N_n \rangle$ . Por outro lado, o termo  $p_{sol}$  pode ser expresso em função dos valores nodais de poropressão do sólido como:

$$p_{sol} = \mathbf{NM} \mathbf{p}_{sol} \quad (5.25)$$

onde o termo  $\mathbf{p}_{sol}$  denota o vetor das poropressões de um elemento sólido atravessado pelo dreno com  $m$  nós expresso como  $\mathbf{p}_{sol} = \langle p_{atr1}, p_{atr2}, p_{atr3}, \dots, p_{atrm} \rangle$ , e o termo  $\mathbf{M}$  representa a matriz das funções de forma do elementos sólido que pode ser expressa como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \dots & M_{1,m} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \dots & M_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \dots & M_{n,m} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Utilizando-se as relações dadas nas Equações 5.24 e 5.25 na Equação 5.23, obtém-se:

$$p_{rel} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{NM} & -\mathbf{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{int}} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{sol} \\ \mathbf{p}_{dren} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

$$p_{rel} = \mathbf{B}_{int} \mathbf{p} \quad (5.28)$$

A forma fraca da Eq. 5.22 é obtida multiplicando esta equação pela função de teste  $p_{rel}^*$  e, em seguida, integrando-se o resultado na superfície  $\Gamma$ :

$$- \int_{\Gamma} p_{rel}^* \frac{\bar{k}}{\gamma_f} p_{rel} d\Gamma = f_q^{ext} \quad (5.29)$$

Em seguida, introduz-se a aproximação por elementos finitos na Eq. 5.29, resultando em:

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{int}^T \frac{\bar{k}}{\gamma_f} \mathbf{B}_{int} d\Gamma \mathbf{p} = \mathbf{f}_q^{ext} \quad (5.30)$$

onde o termo  $d\Gamma$  pode ser expresso como  $d\Gamma = P dl$ , considerando que  $P$  e  $l$  representam, respectivamente, o perímetro e o comprimento do dreno. A Eq. 5.30 pode ser reescrita de forma compacta conforme a equação:

$$\mathbf{H}_{int}\mathbf{P} = \dot{\mathbf{f}}_q^{ext} \quad (5.31)$$

onde  $\mathbf{H}_{int}$  denota a matriz de permeabilidade do elemento de interface e  $\dot{\mathbf{f}}_q^{ext}$  é o vetor de volume externo do elemento de interface.

A taxa de volumes internos associados ao elemento de interface do dreno pode ser calculado conforme as equações:

$$\dot{\mathbf{f}}_q^{in} = - \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{int}^T \underbrace{\frac{\bar{k}}{\gamma_f} \mathbf{B}_{int} \mathbf{P}}_{-V} d\Gamma \quad (5.32)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_q^{in} = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{int}^T V d\Gamma \quad (5.33)$$

### 5.3 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Esta seção apresenta três análises numéricas que visam verificar e validar o método semi-embutido para simulação de drenos no meio poroso saturado. A primeira análise é bastante simples e tem por objetivo apenas verificar se as velocidades e vazões do fluido no interior dos drenos são condizentes com os valores analíticos. Por outro lado, a segunda análise busca demonstrar a versatilidade da abordagem ao apresentar a utilização de tubo para injetar fluido no sólido e de drenos para drena-lo. Por fim, a última análise valida a abordagem proposta ao simular com sucesso o adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído.

Nos dois primeiros exemplos realiza-se apenas a análise hidráulica, enquanto no terceiro exemplo é performado uma análise hidromecânica. O comportamento hidromecânico dos elementos sólidos é considerado de acordo com a teoria da poroelasticidade, ou seja, com comportamento elástico linear e saturado. Por sua vez, todos os elementos de dreno e interface foram simulados utilizando o método semi-embutido. As simulações foram realizadas utilizando a biblioteca Amaru (<https://github.com/NumSoftware/Amaru>) que inclui a implementação da abordagem estudada.

### 5.3.1 - Geração da malha

Todas as malhas foram geradas por meio do software Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009), um gerador de malhas de elementos finitos 2D e 3D. Após o estágio de geração, os elementos de dreno e interface foram introduzidos usando o algoritmo explicado na Seção 5.2.1. A geração dos elementos de dreno em todas análises demoraram menos de um segundo. Em relação aos elementos da malha, o elemento sólido usado foi hexaedros de 8 nós com 8 pontos de integração, enquanto o elemento de dreno utilizado foi a linha de 3 nós com 2 pontos de integração.

### 5.3.2 - Exemplo 1 - Verificação da implementação do elemento de dreno pelo método semi-embutido

Neste exemplo, simula-se o fluxo através de dois drenos que são inseridos no interior dos elementos sólidos. O ensaio numérico foi feito em dois estágios. No primeiro estágio, foi aplicado poropressão igual a 0 kPa na parte superior (altura igual a 1 m) visando gerar um estágio hidrostático com o nível correspondente a 1 m de altura d'água. Após esta etapa, inicia-se o segundo estágio no qual um volume de  $1 \text{ m}^3$  é imposto ao nó superior do sólido durante o tempo de 100 s, enquanto os nós inferiores dos drenos são estabelecidas as condições de descarga impondo a poropressão igual a 0 kPa. A malha de elementos finitos, a disposição dos drenos e as condições de contorno do segundo estágio são apresentados na Figura 5.6, enquanto a Tabela 5.1 apresenta os parâmetros dos materiais e do elemento conector utilizados na análise.

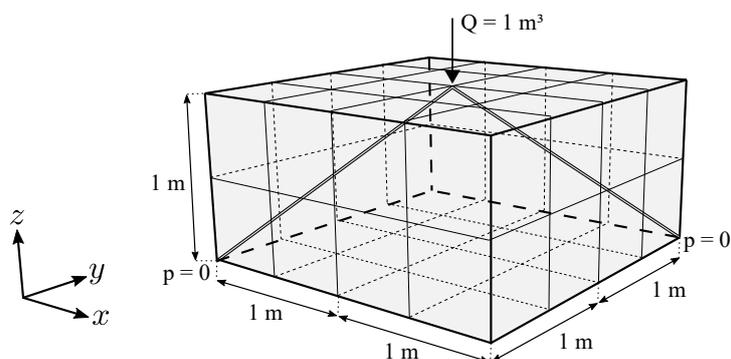


Figura 5.6 – Configuração do ensaio de validação do elemento de dreno pelo método semi-embutido.

Tabela 5.1 – Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 1.

Material	Modelo	$k$ [m/s]	$\bar{k}$ [m/m·s]	Área [m <sup>2</sup> ]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]
Sólidos	fluxo linear	$10^{-5}$	-	-	10.0
Dreno	fluxo linear	$10^2$	-	0.01	10.0
Conector	fluxo linear	-	$10^2$	0.01	10.0

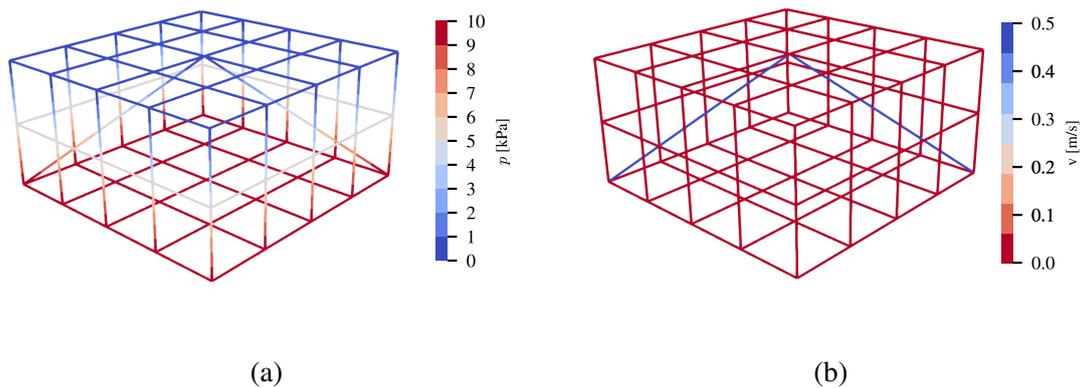


Figura 5.7 – Resultado da análise numérica: a) campo de poropressão hidrostático após o primeiro estágio; b) velocidade axial durante o segundo estágio.

No primeiro estágio, é possível verificar por meio da Figura 5.7a que o campo de poropressões hidrostático foi gerado tanto nos sólidos como nos drenos. Isso é possível devido a componente do gradiente gravitacional considerado na formulação do dreno, o que permite a simulação de fluxo por gravidade. No segundo estágio, a velocidade e as vazões do fluido nos drenos foram registrados e posteriormente comparados com os valores analíticos conforme apresenta a Tabela 5.2. Os resultados numéricos mostram total concordância com os resultados analíticos. A Figura 5.7b mostra os valores de velocidade ao longo dos drenos após a aplicação do volume imposto.

Tabela 5.2 – Comparação dos resultado analíticos e numéricos no exemplo 1.

Resultados	$v$ [m/s]	$q$ [m <sup>3</sup> /s]
Analítico	0.5	0.005
Numérico	0.5	0.005

### 5.3.3 - Exemplo 2 - Sistema de tubo e drenos no interior dos elementos sólidos

No segundo exemplo, simula-se o fluxo através de um tubo e quatro drenos que são inseridos no interior de um sólido cúbico. O ensaio foi feito em dois estágios. No primeiro estágio, foi aplicado poropressão igual a 0 kPa na parte superior do cubo, visando gerar um estágio hidrostático com o nível correspondente a 3 m de altura d'água. Em seguida, no segundo estágio um volume de 4 m<sup>3</sup> é imposto ao nó superior de um tubo durante o tempo de 1000 s. Esse fluido é transportado pelo tubo até a região central do cubo para o elemento sólido que posteriormente é drenado por quatro drenos, para tanto impõe-se poropressão igual a 0 kPa aos nós inferiores desses drenos estabelecendo dessa forma as condições de descarga. A Figura 5.8 apresenta a malha de elementos finitos, a disposição do tubo e dos drenos e as condições de

contorno do segundo estágio.

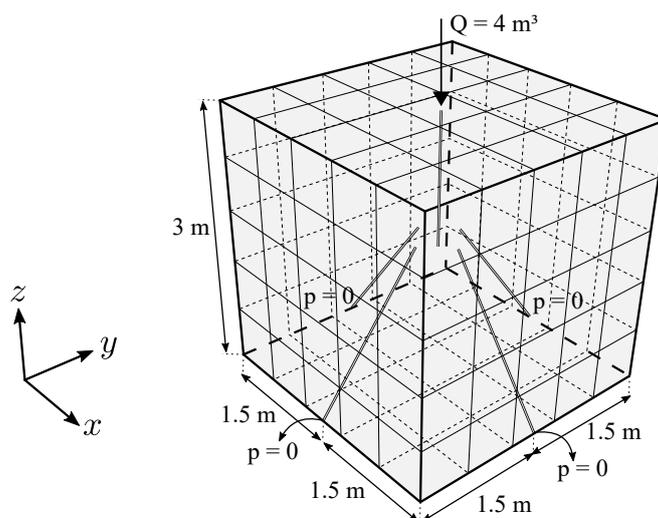


Figura 5.8 – Configuração do ensaio do sistema de tubo e drenos no interior dos elementos sólidos.

Os parâmetros dos materiais e do elemento conector (interface) são apresentados na Tabela 5.3. É importante ressaltar que a pensar da nomenclatura diferente do dreno e do tubo trata-se do mesmo elemento que possuem propósitos diferentes na análise. Enquanto o tubo injeta o fluido no sólido, o dreno possui a função de drenagem do sólido.

Tabela 5.3 – Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 2.

Material	Modelo	$k$ [m/s]	$\bar{k}$ [m/m·s]	Área [m <sup>2</sup> ]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]
Sólidos	fluxo linear	$10^{-5}$	-	-	10.0
Dreno/tubo	fluxo linear	$10^2$	-	0.01	10.0
Conector	fluxo linear	-	$10^2$	0.01	10.0

No primeiro estágio, o campo de poropressões hidrostático foi gerado conforme o esperado (Figura 5.9a). Enquanto no segundo estágio, as velocidades e as vazões do fluido no tubo e nos drenos foram registrados e posteriormente comparados com os valores analíticos conforme apresenta a Tabela 5.4. Os resultados numéricos mostram concordância com os resultados analíticos. A Figura 5.9b apresenta os valores de velocidade ao longo do tubo e dos drenos após a aplicação do volume imposto.

Tabela 5.4 – Comparação dos resultado analíticos e numéricos no exemplo 2.

Resultados do tubo	$v$ [m/s]	$q$ [m <sup>3</sup> /s]	Resultados dos drenos	$v$ [m/s]	$q$ [m <sup>3</sup> /s]
Analítico	0.4	0.004	Analítico	0.1	0.001
Numérico	0.4	0.004	Numérico	0.1	0.001

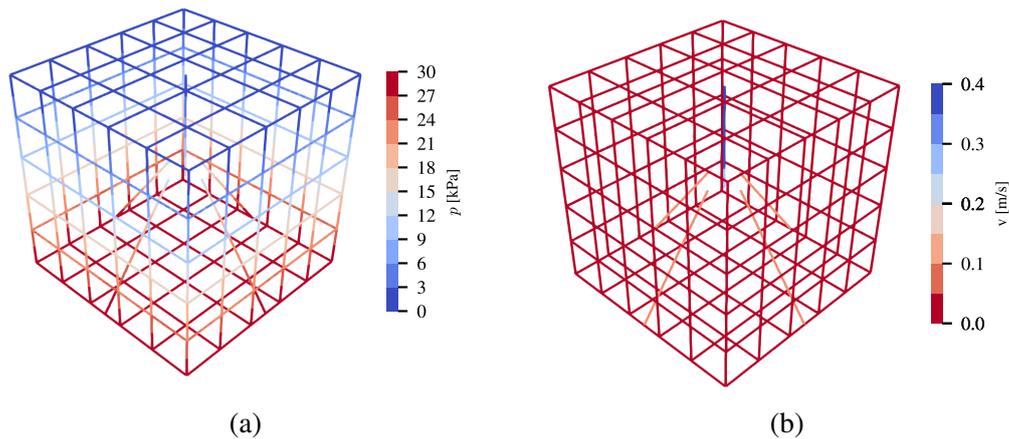


Figura 5.9 – Resultado da análise numérica: a) campo de poropressão hidrostático após o primeiro estágio; b) velocidade axial durante o segundo estágio.

### 5.3.4 - Exemplo 3 - Adensamento radial de uma camada de solo submetida a um carregamento distribuído

No exemplo 3 é analisado uma amostra de solo, no qual são instalados drenos verticais, submetido a carregamento distribuído aplicado na superfície. O grau de adensamento radial pode ser determinado analiticamente pela formulação apresentada por Barron (1948). Para tanto, adotando-se as seguintes hipóteses (Tewatia et al., 2012): o solo está totalmente saturado, as partículas de solo e água são incompressíveis, a lei de Darcy é válida e pode ser generalizada para meio anisotrópico, o solo é homogêneo e o incremento de pressão é aplicado instantaneamente. O valor analítico do grau de adensamento radial é dado por:

$$U_r = 1 - \exp\left(\frac{-8T}{F(n)}\right); \quad n = \frac{r_d}{r} \quad (5.34)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln(n) - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (5.35)$$

onde  $T$  é o fator de tempo radial e  $n$  representa a razão dada pelo raio da região drenada  $r$  e o raio do dreno  $r_d$ . O fator de tempo radial pode ser calculado conforme as equações:

$$T = \frac{c_v t}{(2r_d)^2}, \quad c_v = \frac{k}{m_v \gamma_f}, \quad m_v = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \quad (5.36)$$

onde  $t$  é o tempo,  $c_v$  representa o coeficiente de consolidação e  $m_v$  denota o coeficiente de variação volumétrica.

A Figura 5.10 apresenta a geometria e as condições de contorno utilizadas no ensaio de densamento radial. Devido a simetria do ensaio, optou-se por simular apenas a quarta parte do volume drenado. Nesta análise, não foi considerada a drenagem vertical através do solo, uma

vez que apenas o adensamento radial causado pela presença dos drenos é de interesse. Assim sendo, considera-se que as superfícies superior e inferior do domínio são impermeáveis. Por outro lado, nas extremidades superiores dos drenos impõe-se poropressão igual a 0 kPa, estabelecendo dessa forma as condições de descarga. Na superfície superior da amostra impõe-se uma força distribuída de 10 kPa, possibilitando assim o adensamento e consequente drenagem da amostra através dos drenos. Os parâmetros dos materiais e do elemento conector utilizados nas análises são apresentados na Tabela 5.5.

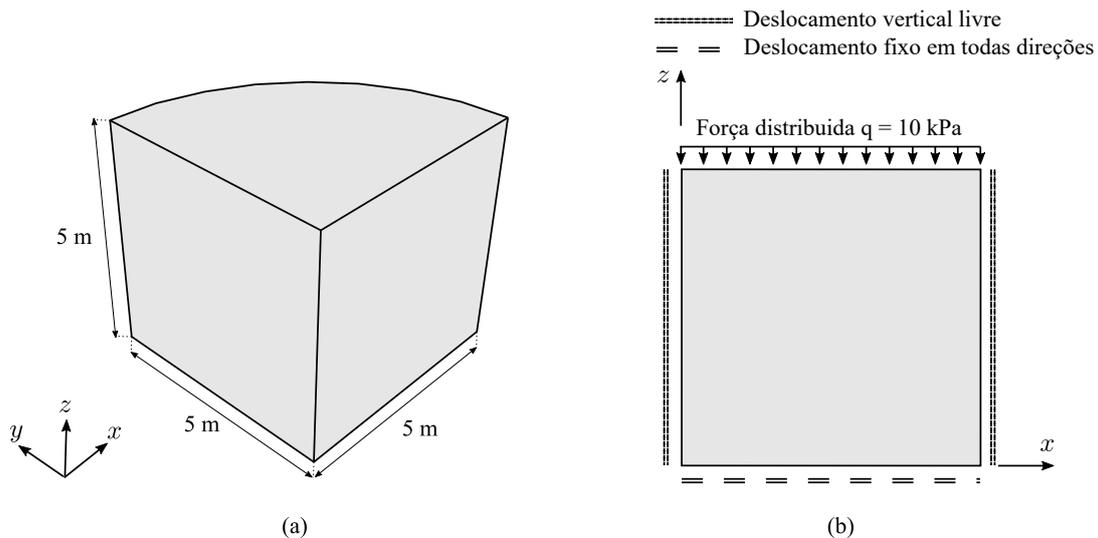


Figura 5.10 – Configuração do ensaio de adensamento radial: a) geometria da amostra utilizada no ensaio de adensamento radial; b) vista lateral apresentando as condições de contorno.

Tabela 5.5 – Parâmetros dos materiais e do elemento conector no exemplo 3.

Material	Modelo	$E$ [kPa]	$\nu$	$k$ [m/s]	$\bar{k}$ [m/m·s]	Área [m <sup>2</sup> ]	$\gamma_f$ [kN/m <sup>3</sup> ]
Sólidos	fluxo linear	5000	0.25	$10^{-5}$	-	-	10.0
Dreno/tubo	fluxo linear	-	-	$10^2$	-	$\frac{\pi r^2}{20}$	10.0
Conector	fluxo linear	-	-	-	$10^2$	$\frac{\pi r^2}{20}$	10.0

Os drenos quando formulados em elementos finitos não possuem dimensões axiais, por tanto para simular drenos como grandes diâmetros é necessário a instalação de linhas drenantes que representem a geometria espacial do dreno vertical. A Figura 5.11 apresenta em planta as distribuições das linhas drenantes para representar os drenos verticais com raios iguais 0.10 m, 0.25 m e 0.50 m. Nas análises verificou-se que a presença de cinco linhas drenantes é suficiente para representar adequadamente os drenos verticais estudados. A área de cada linha drenante foi obtida dividindo-se a área total do dreno  $\pi r^2$  por quatro, uma vez que a análise representa um quarto da amostra, e, em seguida, dividindo-se por cinco, uma vez que são cinco linhas drenantes.

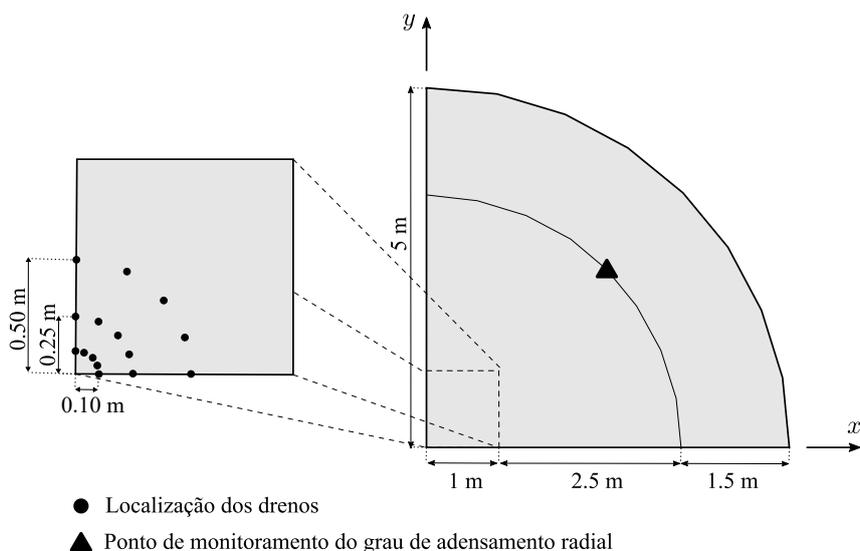


Figura 5.11 – Vista em planta da localização das linhas drenantes para a simulação de drenos verticais e do ponto de monitoramento.

Na formulação analítica, a previsão do adensamento radial refere-se ao valor médio da camada, por tanto na análise numérica deve-se escolher um ponto adequado de monitoramento do grau de adensamento, uma vez que este varia com a distância ao dreno vertical. O ponto de monitoramento, apresentado na Figura 5.11, foi obtido por meio da determinação do raio correspondente a uma área de setor circular igual a metade do setor circular da amostra. Dessa forma, o arco determinado por este raio separa a área drenada em duas partes iguais.

No início da análise, a amostra de solo encontra-se totalmente saturada e apresentando o campo de poropressões corresponde ao estado hidrostático. Nesta etapa, as linhas drenantes já se encontram ativas. Posteriormente, aplica-se, em um tempo muito pequeno, uma carga distribuída ( $q = 10$  kPa) na camada superior do solo. Este carregamento gera um excesso de poropressão no solo. Com o passar do tempo, o excesso de poropressão é dissipado pela drenagem radial realizada pelos drenos, permitindo assim a consolidação do solo. O grau de adensamento radial é avaliado por meio da equação  $U_r = u_z/u_\infty$ , onde  $u_z$  é a consolidação medida na face superior e  $u_\infty$  é a consolidação final da amostra sendo calculado conforme a equação  $u_\infty = m_v h q$ , onde  $h$  é a altura da camada de solo.

A Figura 5.12 apresenta os resultados analíticos e numéricos do grau de adensamento versus o fator de tempo para diferentes valores de  $n$ , os quais correspondem aos raios dos drenos de 0.10 m, 0.25 m e 0.50 m. Os resultados numéricos estão em excelente acordo com os analíticos.

A Figura 5.13 mostra o campo de poropressão da amostra para raio de drenagem igual a 0.10 metro e para o fator de tempo  $T = 0.02$ . Pode-se observar por meio dessa figura que há uma redução de poropressão na região aonde o dreno esta localizado, devido ao caminho de elevada permeabilidade gerada pelo dreno que permite a dissipação do excesso de poropressão.

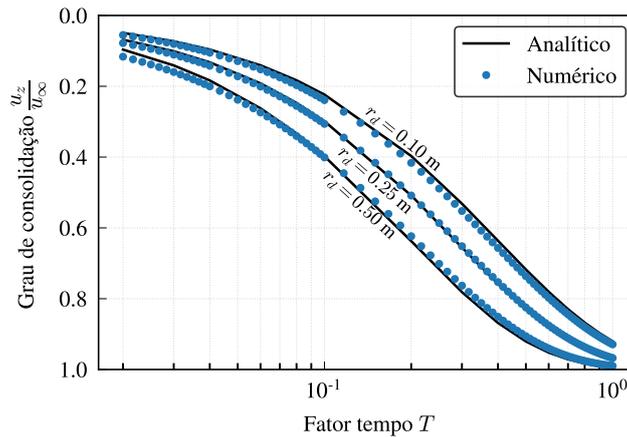


Figura 5.12 – Resultado analítico e predição numérica do experimento de adensamento radial.

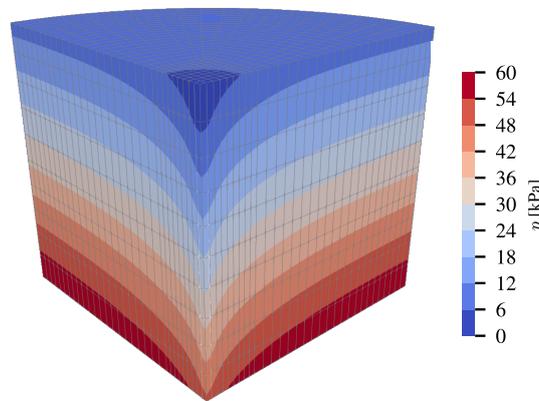


Figura 5.13 – Campo de poropressão da análise de adensamento radial para  $T = 0.02$  e  $r_d = 0.10\text{ m}$ .

## 5.4 - DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta o método semi-embutido que foi originalmente apresentado no trabalho de Durand e Farias (2014) para simular barras de reforço em elementos sólidos. Este método é adaptado, neste trabalho, para simular elementos de drenos no interior dos sólidos. Para tanto é necessário utilizar o procedimento, apresentado na Seção 5.2.1, para a discretização do dreno no interior dos elementos sólidos. Esse procedimento demonstra-se eficiente ao conseguir discretizar os drenos no interior das amostras analisadas em um tempo reduzido utilizando poucos recursos computacionais.

O método semi-embutido utiliza elementos de interface para fazer a ligação do sólido com o dreno. Em virtude disso, esse método possui uma série de vantagens em relação aos métodos convencionais como o discreto, pois permite maior flexibilidade na disposição do elemento de dreno no interior do elemento sólido. Além disso, pelo fato do elemento de dreno ter nós independentes em relação aos elementos sólidos, isso possibilita a aplicação de condições de

contorno diretamente nos nós do dreno, dando assim maior flexibilidade a análise. Outra vantagem é que o elemento de interface permite controlar, através da sua permeabilidade, o fluxo de fluido entre o sólido e o dreno. É importante ressaltar que o elemento de interface não acrescenta graus de liberdade ao sistema.

O método semi-embutido foi colocado a prova por meio da execução de três ensaios numéricos. O primeiro ensaio numérico teve por objetivo verificar a implementação do elemento de dreno através da análise do fluxo do fluido no dreno. Por outro lado, a segunda análise verifica a implementação do método semi-embutido, uma vez que testa o fluxo do fluido entre o dreno e o elemento sólido. Por fim, no último exemplo a abordagem proposta é validada por meio da comparação do resultado numérico e analítico do ensaio hidromecânico de adensamento radial. Os resultados demonstram que a abordagem é robusta e consegue simular adequadamente os problemas propostos.

## **6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

O principal objetivo desse trabalho foi desenvolver e implantar a formulação de elementos finitos para modelagem tridimensional de fraturas em materiais quase frágeis, como o concreto, e, em seguida, aplicar o modelo em problemas de fratura hidráulica. Além disso, utilizou-se a formulação desenvolvida e implementada do meio poroso saturado para estudar a aplicação de drenos nesse meio. Este capítulo apresenta as principais conclusões obtidas neste trabalho e também recomendações para pesquisas futuras.

### **6.1 - CONCLUSÕES**

As conclusões foram divididas em três partes. A primeira refere-se a preparação da malha de elementos finitos para a realização das análises. Enquanto, a segunda parte refere-se às análises mecânicas. Por fim, a terceira parte refere-se às análises hidromecânicas.

#### **6.1.1 - Com relação a preparação da malha de elementos finitos**

*O algoritmo utilizado para a inserção dos elementos de interface em uma malha convencional de elementos finitos é eficiente e versátil.* O tempo necessário para a inserção dos elementos de interface na malha é muito pequeno (menos de um segundo) demonstrando que o algoritmo é eficiente. Além disso, o algoritmo possibilita ao usuário escolher o tipo de elemento de interface (de duas ou três camadas) e aonde deseja colocá-los (em toda malha ou em apenas parte dela), permitindo dessa forma maior flexibilidade nas análises numéricas.

*O algoritmo utilizado para discretização do elemento de dreno no interior da malha de elementos finitos é eficiente.* Em todas as análises com dreno, o algoritmo conseguiu discretizar os elementos de dreno com sucesso em um tempo bastante reduzido (menos de um segundo).

#### **6.1.2 - Com relação às análises mecânicas**

*O modelo de fratura para materiais quase frágeis, desenvolvido neste trabalho, é robusto e consegue simular uma grande variedade de problemas.* No total foram simulados numericamente sete ensaios experimentais, em amostras de concreto, com diferentes dimensões e configurações de condição de contorno. Os resultados das análises numéricas e

dos ensaios experimentais apresentaram boa concordância, demonstrando assim a capacidade do modelo simular de forma adequada o processo de fratura em materiais quase-frágeis. Além disso, três dos sete ensaios analisados numericamente não podem ser simplificados através de uma modelagem bidimensional, demonstrando que o modelo não fica limitado a simular problemas de deformação plana.

*O modelo de fratura para materiais quase frágeis, desenvolvido neste trabalho, possui estabilidade numérica.* Em análises de problemas com elevada não linearidade, não é raro obter instabilidade nos modelos empregados, como pode ser visto nas curvas numéricas de Ferté et al. (2016) e Jefferson et al. (2004) na Figura 3.20 e na curva numérica de Jefferson et al. (2004) na Figura 3.24. Observe que todas as curvas citadas não conseguem simular até o final a análise experimental. Por outro lado, o modelo de fratura, desenvolvido neste trabalho, consegue simular os ensaios experimentais até o final demonstrando assim a estabilidade numérica do modelo.

*A adoção na formulação do modelo de fratura do comprimento representativo,  $h$ , e do fator que controla os deslocamentos reativos,  $\zeta$ , reduziu, significativamente, o efeito da malha nos resultados.* O comprimento representativo possui a função de regular a rigidez de cada elemento coesivo da malha, reduzindo assim o efeito na rigidez global do acréscimo ou diminuição de elementos coesivos gerada pela diferença de discretização da malha. Por outro lado, o fator que controla os deslocamentos reativos influencia a rigidez elástica dos elementos coesivos com objetivo de reduzir a abertura destes elementos na fase elástica. Por meio do teste de refinamento realizado, pode-se observar que o modelo, a partir de um certo grau de discretização da malha, forneceu resultados semelhantes, o que demonstra que a adoção de  $h$  e  $\zeta$  conseguiu reduzir o efeito da malha nos resultados das análises.

*A utilização do modelo de amolecimento bilinear e exponencial de Hordijk são válidos para simulação do concreto.* Os resultado das sete análises numéricas dos ensaios experimentais em amostra de concreto utilizando os dois modelos de amolecimento obtiveram resultados bem próximo e em concordância com os resultados experimentais. Isso demonstra que os dois modelos possuem a capacidade de simular a perda de rigidez do concreto devido ao processo de fraturamento.

*A aplicação do método de Ralston em conjunto com a correção dos desvios (Drift) favoreceram o processo de convergência e melhorou os resultados obtidos das análises de elementos finitos.* Nas análises mecânicas não lineares, uma aproximação da matriz de rigidez é necessária em cada iteração. O método de Ralston avalia a matriz de rigidez para diferentes vetores de deslocamento global e, dessa forma, consegue obter uma melhor estimativa dessa matriz, o que se reflete na melhora dos resultados obtidos. Por outro lado, as forças residuais não equilibradas no sistema resultante de cada iteração são reaplicada, visando reduzir o desvio

do equilíbrio. Entretanto, a reaplicação dessas forças devem ser feitas de forma adequada sob pena da não convergência dos resultados das análises. A estratégia adotada neste trabalho para reaplicação dos resíduos se mostrou eficaz ao favorecer a convergência das análises e reduzir, significativamente, os resultados espúrios ocasionados pelos desvios do equilíbrio.

*O solucionador com passo automático, utilizado neste trabalho, é essencial para obtenção da solução dos problemas analisados que possuem elevada não linearidade e fornece passos que otimizam a convergência do modelo.* Devido ao comportamento não linear da amostra, o ajuste no tamanho do passo do incremento é necessário, objetivando reduzir os resíduos resultantes em cada incremento e, conseqüentemente, minimizar os desvio do equilíbrio. Além disso, o passo automático deve ser formulado visando não fornecer passos muito grandes ou muito pequenos. Uma vez que passos muito grandes tendem a fornecer resultado não convergentes, enquanto passos muito pequenos inviabilizam a realização da análise em um tempo razoável.

### **6.1.3 - Com relação às análises hidromecânicas**

*A abordagem utilizada para modelagem da fratura hidráulica no meio poroso foi formulada e implementada com sucesso.* Os resultados numéricos e analíticos das análises de verificação e de validação da abordagem utilizada para modelar a fratura hidráulica apresentaram ótima concordância. Isso demonstra que abordagem é capaz de simular o processo de fraturamento hidráulico. Além disso, a abordagem utilizada se mostrou versátil ao conseguir simular com sucesso o ensaio experimental de fratura hidráulica no concreto.

*O elemento de interface de três camadas utilizado na abordagem discreta consegue simular com sucesso a propagação da fratura, fluxo do fluido na fratura e a troca de fluido entre o meio poroso e a fratura.* A topologia do elemento de interface de camada tripla permite simular a abertura da fratura por meio do deslocamento relativo entre as camadas mais externas, enquanto a camada intermediária possui a capacidade de simular o fluxo do fluido na fratura. Além disso, o elemento de interface possui a capacidade de simular o fluxo do fluido entre a fratura e o meio poroso decorrente da diferença de pressão entre a camada intermediária e as camadas mais externas do elemento de interface.

*O elemento de interface de três camadas pode ser aplicado na simulação de drenos.* O resultado do ensaio de consolidação com drenos verticais utilizando elementos de interface de três camadas demonstrou a capacidade desse elemento simular de forma adequada drenos.

*O método semi-embutido, utilizado neste trabalho para simular os drenos no meio poroso, possui uma serie de vantagens quando comparado com métodos convencionais como o discreto.* Uma das vantagens do método semi-embutido é a maior flexibilidade na disposição dos elementos de dreno no interior da malha de elementos finitos. Além disso, pode-se aplicar

condições de contorno diretamente nos nós do dreno, uma vez que estes são independentes dos nós dos sólidos. Outra vantagem é que o elemento de interface permite controlar, através da sua permeabilidade, o fluxo do fluido entre o sólido e o dreno.

## **6.2 - RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS**

*Recomenda-se utilizar o modelo de fratura para materiais quase frágeis, apresentado neste trabalho, para simular o concreto armado. O modelo de fratura demonstrou-se capaz de simular o concreto simples, portanto pode ser utilizado em conjunto com elementos de reforço para simular o concreto armado.*

*Recomenda-se alterar o modelo do elemento sólido utilizado para simular a fratura em materiais quase frágeis, visando adicionar a possibilidade de ruptura por compressão. O modelo elástico, utilizado no elemento sólido da abordagem proposta para simular a fratura em materiais quase frágeis, não permite que o material rompa por compressão. Portanto, um novo modelo deve ser desenvolvido, visando modelar de forma adequada o processo de fratura por compressão.*

*Recomenda-se ampliar a abordagem da fratura hidráulica, apresentada neste trabalho, visando incluir mais de uma fase de fluido. A abordagem da fratura hidráulica utilizada nesse trabalho apenas considera uma fase de fluido, entretanto há várias aplicações no qual é necessário considerar mais de uma fase de fluido para a adequada simulação do problema estudado.*

*Recomenda-se aplicar o método semi-embutido para simular drenos em meios não saturados. Nesse trabalho, considera-se que os drenos estão em meio saturado, entretanto há várias aplicações no qual é necessário considerar que o meio não está saturado para a adequada simulação do problema estudado.*

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abbo, A. J. e S. W. Sloan (1996). “An automatic load stepping algorithm with error control”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (10), pp. 1737–1759. ISSN: 0029-5981,1097-0207. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19960530\)39:10<1737::aid-nme927>3.0.co;2-5](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19960530)39:10<1737::aid-nme927>3.0.co;2-5).

Abou-Sayed, A. S., D. E. Andrews e I. M. Buhidma (1989). “Evaluation of oily waste injection below the permafrost in prudhoe bay field”. Em: *Society of Petroleum Engineers*, pp. 129–142. DOI: <https://doi.org/10.2118/18757-MS>.

Adachi, J. I. (2001). *Fluid-driven Fracture in Permeable Rock*. University of Minnesota, p. 162.

Agarwal, R. G., R. D. Carter e C. B. Pollock (1979). “Evaluation and performance prediction of low-permeability gas wells stimulated by massive hydraulic fracturing”. Em: *Journal of Petroleum Technology* 31, 362–372. DOI: <https://doi.org/10.2118/6838-PA>.

Areias, P. M. A. e T. Belytschko (2005). “Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63, pp. 760–788. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1305>.

Asferg, J. L. (2006). “Modeling of concrete fracture applying the extended finite element method”. Tese de dout. Technical University of Denmark, p. 168.

Barani, O. R., S. Majidaie e M. Mosallanejad (2016). “Numerical Modeling of Water Pressure in Propagating Concrete Cracks”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 142, pp. –. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001048](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001048).

Barenblatt, G. I. (1962). “The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle materials”. Em: *Advances in Applied Mechanics*. Ed. por H.L. Dryden e T. von Karman. Vol. 7. New York: Academic Press.

Barron, A. (1948). “Consolidation of fine-grained soils by drain wells”. Em: *ASCE* 113, pp. 718–742.

Barros, J. A.O. e J. A. Figueiras (2001). “Model for the analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade”. Em: *Computers and Structures* 79, pp. 97–106. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00061-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00061-4).

- Basaran, C. e S. Nie (2007). “A thermodynamics based damage mechanics model for particulate composites”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 44, pp. 1099–1114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.06.001>.
- Bazant, Z. P. e B. H. Oh (1983). “Crack band theory for fracture of concrete”. Em: *Matériaux et Construction* 16, 155–177. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02486267>.
- Bazant, Z. P. e J. Planas (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. 1ª ed. New York: Routledge, p. 640. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203756799>.
- Belytschko, T., R. Gracie e G. Ventura (2009). “A review of extended/generalized finite element methods for material modeling”. Em: *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 17. DOI: <https://doi.org/10.1088/0965-0393/17/4/043001>.
- Biot, M. A. (1941). “General theory of three dimensional consolidation”. Em: *Journal of Applied Physics* 155, pp. 155–164. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1712886>.
- (1955). “Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid”. Em: *Journal of Applied Physics* 26, pp. 182–185. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1721956>.
- (1956). “Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid”. Em: *The Journal of the Acoustical Society of America* 28, pp. 168–178. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1908241>.
- (1973). “Nonlinear and semilinear rheology of porous solids”. Em: *Journal of Geophysical Research* 78, pp. 4924–4937. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB078i023p04924>.
- Biot, M. A. e D. G. Willis (1957). “The elastic coefficients of the theory of consolidation”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 24, pp. 594–601.
- Bocca, P., A. Carpinteri e S. Valente (1990). “Size effects in the mixed mode crack propagation: Softening and snap-back analysis”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 35, pp. 159–170. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(90\)90193-K](https://doi.org/10.1016/0013-7944(90)90193-K).
- Boone, T. J. e A. R. Ingraffea (1990). “A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media”. Em: *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 14, pp. 27–47. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610140103>.
- Borst, R. de e P. Nauta (1985). “Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model”. Em: *Engineering Computations* 2, pp. 35–46. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb023599>.
- Brokenshire, D. R. (1995). “A study of torsion fracture tests”. Tese de dout. Cardiff University.

Brown, S. R. (1987). “Fluid flow through rock joints: The effect of surface roughness”. Em: *Journal of Geophysical Research* 92, pp. 1337–1347. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB092iB02p01337>.

Capasso, G. (2001). “Mechanical and hydraulic behavior of a rock fracture in relation to surface roughness”. Tese de dout. Universidade de Pádua, p. 122.

Carbonell, R., J. Desroches e E. Detournay (1999). “A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 36, pp. 4869–4888. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00269-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00269-8).

Carol, I., P. C. Prat e C. M. López (1997). “Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 123, pp. 765–773. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:8\(765\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:8(765)).

Carrier, B. e S. Granet (2012). “Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 79, pp. 312–328. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.11.012>.

Carslaw, H. S. e J. C. Jaeger (1959). *Conduction of heat in solids*. 2<sup>a</sup> ed. Clarendon Press.

Cendón, D. A. et al. (2000). “Modelling the fracture of concrete under mixed loading”. Em: *International Journal of Fracture* 103, pp. 293–310. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007687025575>.

Červenka, J., V. Červenka e S. Laserna (2018). “On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 197, pp. 27–47. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.04.010>.

Chang, C. S. e J. M. Duncan (1983). “Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic–plastic effective stress– strain model”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 7, pp. 39–55. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610070106>.

Comi, C. e U. Perego (2001). “Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 38, pp. 6427–6454. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00066-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00066-X).

Coussy, O. (1991). *Mécanique des milieux poreux*. Paris: Éditions Technip.

— (2004). *Poromechanics*. West Sussex: John Wiley & Sons. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/0470092718>.

Cunha, V. M. C. F., J. A. O. Barros e J. M. Sena-Cruz (2011). “An integrated approach for modelling the tensile behaviour of steel fibre reinforced self-compacting concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 41, pp. 64–76. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.09.007>.

Cunha, V. M.C.F., J. A. O. Barros e J. M. Sena-Cruz (2012). “A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites”. Em: *Computers and Structures* 94-95, pp. 22–33. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.12.005>.

Cusatis, G., Z. P. Bazant e L. Cedolin (2006). “Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, pp. 7154–7171. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.04.019>.

Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: Exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau; ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et a la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitume*. Victor Dalmont, Libraire des Corps imperiaux des ponts et chaussées et des mines.

Desroches, J et al. (1994). “The crack tip region in hydraulic fracturing”. Em: *Proceedings of the Royal Society* 447, pp. 39–48. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1994.0127>.

Du, X., L. Jin e G. Ma (2013). “Numerical modeling tensile failure behaviour of concrete at mesoscale using extended finite element method”. Em: *International Journal of Damage Mechanics* 23, pp. 872–898. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789513516028>.

Dugdale, D. S. (1960). “Yielding of steel sheets containing slits”. Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, pp. 100–104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).

Durand, R. (2003). “Embedded stiffness method in the three-dimensional analysis of reinforcements via finite elements”. Diss. de mest. Universidade de Brasília, p. 95.

— (2008). “Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem”. Universidade de Brasília, p. 176.

Durand, R. e M. Farias (2014). “Nonlinear Joint Element for the Analysis of Reinforcement”. Em: *10<sup>o</sup> World Congress on Computational Mechanics* 1. DOI: <https://doi.org/10.5151/meceng-wccm2012-19278>.

Durand, R. e F. H. B. T. Silva (2019). “A Coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements”. Em: *International Journal of Fracture* 220, pp. 17–43. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-019-00395-5>.

— (2021). “Three-dimensional modeling of fracture in quasi-brittle materials using plasticity and cohesive finite elements”. Em: *International Journal of Fracture* 228, pp. 45–70. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00514-1>.

Economides, M. J. e K. G. Nolte (2000). *Reservoir stimulation*. 3<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons.

Ely, J.W. (1985). *Handbook of stimulation engineering*. 1<sup>a</sup> ed. Tulsa: PennWell.

England, A. H. e A. E. Green (1963). “Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 59, 489–500. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100037099>.

Farias, M. M. e D. J. Naylor (1998). “Safety analysis using finite elements”. Em: *Computers and Geotechnics* 22, pp. 165–181. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(98\)00005-6](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(98)00005-6).

Feist, C. e G. Hofstetter (2007). “Validation of 3d crack propagation in plain concrete. Part I: Experimental investigation -the PCT3D test”. Em: *Computers and Concrete* 4, pp. 49–66. DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2007.4.1.049>.

Ferreira, L. E. T. e J. B. de Hanai (2010). “Mecânica da fratura”. Em: *Materiais de construção e princípios de ciência e engenharia de materiais*. São Carlos: IBRACON.

Ferté, G., P. Massin e N. Moes (2016). “3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300, pp. 347–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.018>.

FrackOptima (2014). *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. URL: <http://www.frackoptima.com/userguide/theory/kgd.html#>.

Fredlund, D. G. e N. R. Morgenstern (1977). “Stress state variables for unsaturated soils”. Em: *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 103, pp. 447–466.

Fries, T.-P. e T. Belytschko (2006). “The intrinsic XFEM: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68, pp. 1358–1385. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1761>.

- Fujita, Y. et al. (1997). “Study of internal friction angle and tensile strength of plain concrete”. Em: *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)* 494, pp. 7–14. DOI: [https://doi.org/10.3130/aijs.62.7\\_2](https://doi.org/10.3130/aijs.62.7_2).
- Gaedicke, C. e J. Roesler (2010). “Fracture-based method to determine flexural capacity of concrete beams on soil”. Em: *Road Materials and Pavement Design* 11, pp. 361–385. DOI: <https://doi.org/10.1080/14680629.2010.9690280>.
- Gagg, C. R. (2014). “Cement and concrete as an engineering material: An historic appraisal and case study analysis”. Em: *Engineering Failure Analysis* 40, pp. 114–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.02.004>.
- Galvez, J. C. et al. (1998). “Fracture of concrete under mixed loading. Experimental results and numerical prediction”. Em: *Fracture mechanics of concrete structures*, pp. 729–738.
- Gao, Q e A. Ghassemi (2020). “Finite element simulations of 3D planar hydraulic fracture propagation using a coupled hydro-mechanical interface element”. Em: *Numerical and analytical methods in geomechanics* 44, pp. 1999–2024. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.3116>.
- Garagash, D. e E. Detournay (2000). “The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 67, pp. 183–192. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.321162>.
- García-Álvarez, V., R. Gettu e I. Carol (2012). “Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model”. Em: *Sadhana - Academy Proceedings in Engineering Sciences* 37, pp. 187–205. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12046-012-0076-2>.
- Gasser, T. C. (2007). “Validation of 3d crack propagation in plain concrete. Part II: Computational modeling and predictions of the PCT3D test”. Em: *Computers and Concrete* 4, pp. 67–82. DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2007.4.1.067>.
- Gasser, T. C. e G. A. Holzapfel (2006). “3D crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, pp. 5198–5219. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.10.023>.
- Geertsma, J. e R. Haafkens (1979). “A Comparison of the Theories for Predicting Width and Extent of Vertical Hydraulically Induced Fractures”. Em: *Journal of Energy Resources Technology* 101, pp. 8–19. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3446866>.

- Geertsma, J. J. e F. F. de Klerk (1969). “A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures”. Em: *Journal of Petroleum Technology* 21, pp. 1571–1581. DOI: <https://doi.org/10.2118/2458-PA>.
- Gerstle, W. P. e M. Xie (1992). “FEM Modeling of Fictitious Crack Propagation in Concrete”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 118, pp. 416–434. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1992\)118:2\(416\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:2(416)).
- Geuzaine, C. e J. F. Remacle (2009). “Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-Processing Facilities”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79, pp. 1309–1331. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2579>.
- Ghosh, A. e P. Chaudhuri (2013). “Computational modeling of fracture in concrete using a meshfree meso-macro-multiscale method”. Em: *Computational Materials Science* 69, pp. 204–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.11.025>.
- Gálvez, J. C. et al. (2002). “A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 32, pp. 1567–1585. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00825-6](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00825-6).
- Gupta, A.K. e H. Akbar (1984). “Cracking in reinforced concrete analysis”. Em: *Journal of Structural Engineering* 110, pp. 1735–1746. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1984\)110:8\(1735\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:8(1735)).
- Gupta, P. e C. A. Duarte (2014). “Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 38, pp. 1397–1430. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2305>.
- Gupta, P. et al. (2012). “Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: a non-intrusive approach using a generalized finite element method”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 90, pp. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.04.014>.
- Hartl, H. (2002). “Development of a continuum-mechanics-based tool for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction”. Graz University of Technology, p. 250.
- Hillerborg, A., M. Modeer e P.-E. Peterson (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”. Em: *Cement and Concrete Research* 6, pp. 773–781. DOI: [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7).

- Ho, S.L., W.N. Fu e H.C. Wong (mar. de 1997). “Application of automatic choice of step size for time stepping finite element method to induction motors”. Em: *IEEE Transactions on Magnetics* 33 (2). DOI: <https://doi.org/10.1109/20.582511>.
- Hordijk, D. A. (1992). *Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experimentd, modelling and analyses*. Vol. 37. Netherlands: Delft University of Technology, p. 79.
- Jebli, M. et al. (2018). “Experimental characterization of mechanical properties of the cement-aggregate interface in concrete”. Em: *Construction and Building Materials* 161, pp. 16–25. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.11.100>.
- Jefferson, A. D. et al. (2004). “Three dimensional finite element simulations of fracture tests using the Craft concrete model”. Em: *Computers and Concrete* 1.3, pp. 261–284. ISSN: 1598-8198. DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2004.1.3.261>.
- Jeffrey, R. G. e K. W. Mills (2000). “Hydraulic Fracturing Applied to Inducing Longwall Coal Mine Goaf Falls”. Em: *American Rock Mechanics Association*, pp. 423–430.
- Jin, Z.-H., G. H. Paulino e R. H. Dodds (2003). “Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 70, pp. 1885–1912. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00130-9](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00130-9).
- Khoei, A. R. (2015). *Extended finite element method: Theory and Applications*. John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118869673>.
- Khoei, A. R., H. Moslemi e M. Sharifi (2012). “Three-dimensional cohesive fracture modeling of non-planar crack growth using adaptive FE technique”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 49, pp. 2334–2348. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.04.036>.
- Khristianovic, S. A. e Y. P. Zheltov (1955). “Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid”. Em: *Proceedings of the Fourth World Petroleum Congress. Rome*, pp. 579–586.
- Kumar, S. e S. V. Barai (2011). *Concrete Fracture Models and Applications*. 1ª ed. Berlin: Springer, p. 262. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-16764-5>.
- Lens, L. N., E. Bittencourt e V. M. R. d’Avila (2009). “Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 76, 2281–2297. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.07.020>.
- Lhomme, T. P. Y. (2005). “Initiation of hydraulic fractures in natural sandstones”. Diss. de mest. University of Minnesota, p. 281. ISBN: 90-9079300-6.

- Li, J. (1993). *Numerical simulation of interfaces in geomaterials: development of new zero-thickness interface elements*, p. 94.
- Li, L. C. et al. (2012). “Numerical Simulation of 3D Hydraulic Fracturing Based on an Improved Flow-Stress-Damage Model and a Parallel FEM Technique”. Em: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45, pp. 801–818. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0252-z>.
- Manzoli, O. L. et al. (2016). “On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 153, pp. 151–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.12.026>.
- Mariani, S. e U. Perego (2003). “Extended finite element method for quasi-brittle fracture”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58, pp. 103–126. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.761>.
- Mazars, J. (1986). “A description of micro- and macroscale damage of concrete structures”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 25, pp. 729–737. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944\(86\)90036-6](http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944(86)90036-6).
- Mazars, J. e G. Pijaudier-Cabot (1996). “From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 33, pp. 3327–3342. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(96\)00015-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(96)00015-7).
- Medlin, W. L. e J. L. Fitch (1983). “Abnormal treating pressures in massive hydraulic fracturing treatments”. Em: *Journal of Petroleum Technology* 40. DOI: <https://doi.org/10.2118/12108-PA>.
- Melenk, J. M. e L. Babuska (1996). “The partition of unity finite element method: basis theory and applications”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, pp. 289–314. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01087-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0).
- Merxhani, A. (2016). *An introduction to linear poroelasticity*.
- Mier, J. G. M. van (2017). *Concrete Fracture A Multiscale Approach*. CRC Press, p. 379.
- Mindess, S., J. F. Young e D. Darwin (2003). *Concrete*. 2<sup>a</sup> ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, p. 644.
- Mitchell, J.K. e K. Soga (2005). *Fundamentals of soil behavior*. 3<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, p. 592.

- Montgomery, C. T. e M. B. Smith (2010). “Hydraulic Fracturing: history of an enduring technology”. Em: *Journal of Petroleum Technology* 62. DOI: <https://doi.org/10.2118/1210-0026-JPT>.
- Moës, N. e T. Belytschko (2002). “Extended finite element method for cohesive crack growth”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 69, pp. 813–833. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00128-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X).
- National Geographic (2013). *Hydraulic fracturing - how it works*. URL: <http://energy-reality.org/wp-content/uploads/2013/08/fracking-diagram.jpg>.
- Nemat-Nasser, S., H. Abé e S. Hirakawa (1982). *Hydraulic fracturing and geothermal energy*. 1ª ed. Martinus Nijhoff Publishers.
- Ng, K. L. A. e J. C. Small (1997). “Behavior of joints and interfaces subjected to water pressure”. Em: *Computers and Geotechnics* 20, pp. 71–93. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(96\)00015-8](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(96)00015-8).
- Ngo, D. e A. C. Scordelis (1967). “Finite element analysis of reinforced concrete beams”. Em: *ACI Journal* 64, pp. 152–163.
- Nguyen, G. D. (2005). “A Thermodynamic Approach to Constitutive Modelling of Concrete using Damage Mechanics and Plasticity Theory”. Tese de dout. University of Oxford, p. 243.
- Nguyen, V. P. et al. (2017). “Modelling hydraulic fractures in porous media using flow cohesive interface elements”. Em: *Engineering Geology* 225, pp. 68–81. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2017.04.010>.
- Nilson, A. H. (1968). “Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method”. Em: *ACI Journal Proceeding* 65, pp. 757–766.
- Nooru-Mohamed, M. B. (1992). “Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach”. Tese de dout. Netherlands.
- Nordgren, R. P. (1972). “Propagation of a vertical hydraulic fracture”. Em: *Society of Petroleum Engineers* 12, pp. 306–314. DOI: <https://doi.org/10.2118/3009-PA>.
- Palmer, I. D. e R. W. Veatch (1987). “Abnormal high fracturing pressures in step-rate tests”. Em: *Society of Petroleum Engineers* 5, pp. 257–272. DOI: <https://doi.org/10.2118/16902-PA>.
- Pandolfi, A. e M. Ortiz (2002). “An Efficient Adaptive Procedure for Three-Dimensional Fragmentation Simulations”. Em: *Engineering with Computers* 18, pp. 148–159. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003660200013>.

- Pandolfi, A., P. Krysl e M. Ortiz (1999). “Finite element simulation of ring expansion and fragmentation: The capturing of length and time scales through cohesive models of fracture”. Em: *International Journal of Fracture* 95, pp. 279–297. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1018672922734>.
- Park, K. e G. H. Paulino (2011). “Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces”. Em: *Applied Mechanics Reviews* 64, p. 060802. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4023110>.
- Park, K., G. H. Paulino e J. R. Roesler (2008). “Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 75, pp. 3806–3818. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2008.02.002>.
- Patir, N. e H. S. Cheng (1978). “An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication”. Em: *Journal of Lubrication Technology* 100, pp. 12–17. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3453103>.
- Paul, B. et al. (2018). “3D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to non planar hydraulic fracture propagation and multiple hydraulic fractures interference”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 342, pp. 321–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.08.009>.
- Penna, S. S. (2011). “Formulacao multipotencial para modelos de degradacao elastica”. Tese de dout. Federal University of Minas Gerais, p. 325.
- Perkins, T. K. e L. R. Kern (1961). “Widths of hydraulic fractures”. Em: *Journal of Petroleum Technology* 13, pp. 937–949. DOI: <https://doi.org/10.2118/89-PA>.
- Pituba, J. J. C. e G. R. Fernandes (2011). “Anisotropic Damage Model for Concrete”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 137, pp. 610–624. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000260](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000260).
- Prevost, J. H. (1980). “Mechanics of continuous porous media”. Em: *International Journal of Engineering Science* 18, pp. 787–800. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(80\)90026-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(80)90026-9).
- (1982). “Nonlinear transient phenomena in saturated porous media”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 30, 3–18. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90052-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90052-4).
- Pye, D. S. e W. A. Smith (1973). “Fluid loss additive seriously reduces fracture proppant conductivity and formation permeability”. Em: *Society of Petroleum Engineers Journal*. DOI: <https://doi.org/10.2118/4680-MS>.

Ralston, Anthony (1962). “Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds”. Em: *Mathematics of Computation* 16 (80), pp. 431–437. ISSN: 0025-5718,1088-6842. DOI: <https://doi.org/10.2307/2003133>.

Reynolds, O. (1886). *On the Theory of Lubrication and Its Applications to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*. Royal Society. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1886.0005>.

Rice, J. R. e M. P. Cleary (1976). “Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents”. Em: *Reviews of Geophysics* 14, pp. 227–241. DOI: <https://doi.org/10.1029/RG014i002p00227>.

Rodriguez, D. A. e J. Sarmiento (2018). *Gás de xisto: Brasil começará a leiloar as suas reservas. Mas é seguro?* URL: <http://revistagalileu.globo.com/Revista/Galileu2/foto/0,,69834390,00.jpg>.

Roesler, J. et al. (2007). “Concrete fracture prediction using bilinear softening”. Em: *Cement and Concrete Composites* 29, pp. 300–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2006.12.002>.

Roy, Y. A. e R. H. Dodds (2001). “Simulation of ductile crack growth in thin aluminum panels using 3-D surface cohesive elements”. Em: *International Journal of Fracture* 110, pp. 21–45. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1010816201891>.

Saldungaray, P. e T. P. Terry (2012). “Hydraulic Fracture Optimization in Unconventional Reservoirs”. Em: *Society of Petroleum Engineers*. DOI: <https://doi.org/10.2118/151128-MS>.

Savitski, A. A. e E. Detournay (2002). “Propagation of penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 39, pp. 6311–6337. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00492-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00492-4).

Schrefler, B. A., S. Secchi e L. Simoni (2006). “On adaptive refinement techniques in multi-field problems including cohesive fracture”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, pp. 444–461. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.014>.

Secchi, S. e B. A. Schrefler (2012). “A method for 3-D hydraulic fracturing simulation”. Em: *International Journal of Fracture* 178, pp. 245–258. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9742-y>.

Secchi, S. e B. A. Schrefler (2014). “Hydraulic fracturing and its peculiarities”. Em: *Asia Pacific Journal on Computational Engineering* 1. DOI: <https://doi.org/10.1186/2196-1166-1-8>.

Secchi, S., L. Simoni e B. A. Schrefler (2007). “Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31, pp. 331–345. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.581>.

Segura, J. M. e I. Carol (2008). “Coupled HM analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. Part II: Verification and application”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 32, pp. 2103–2123. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.730>.

Shen, B. et al. (2013). “Coupling rock-fracture propagation with thermal stress and fluid flow”. Em: *International Journal of Geomechanics* 13, pp. 794–808. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000276](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000276).

Sheng, Daichao, Scott W. Sloan e Andrew J. Abbo (out. de 2002). “An Automatic Newton-Raphson Scheme”. Em: *International Journal of Geomechanics* 2 (4). DOI: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1532-3641\(2002\)2:4\(471\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1532-3641(2002)2:4(471)).

Simone, A. (2007). “Partition of unity-based discontinuous finite elements: GFEM, PUFEM, XFEM”. Em: *Revue Européenne de Génie Civil* 11, pp. 1045–1068. DOI: <https://doi.org/10.1080/17747120.2007.9692976>.

Simoni, L. e S. Secchi (2003). “Cohesive fracture mechanics for a multiphase porous medium”. Em: *Engineering Computations* 20, pp. 675–698. DOI: <https://doi.org/10.1108/02644400310488817>.

Slowik, V. e V. E. Saouma (2000). “Water pressure in propagating concrete cracks”. Em: *Journal of Structural Engineering* 126, pp. 235–242. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2000\)126:2\(235\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:2(235)).

Smith, M. B. e C. T. Montgomery (2015). *Hydraulic fracturing*. 1<sup>a</sup> ed. Boca Raton: CRC Press, p. 812.

Snow, D. T. (1969). “Anisotropic permeability of fractured media”. Em: *Water Resources Research* 5, pp. 1273–1289. DOI: <https://doi.org/10.1029/WR005i006p01273>.

Society of Petroleum Engineers (2017). *Hydraulic fracturing*. URL: <http://spebuesc.org/2017/02/12/hydraulic-fracturing/>.

Song, S. H., G. H. Paulino e W. G. Buttlar (2006). “Simulation of crack propagation in asphalt concrete using an intrinsic cohesive zone model”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 132, pp. 1215–1223. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:11\(1215\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:11(1215)).

Speight, J. G. (2016). *Handbook of hydraulic fracturing*. 1<sup>a</sup> ed. Hoboken: John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119225102>.

Spence, D. A. e P. Sharp (1985). “Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London* 400, pp. 289–313. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0081>.

Stone and Webster Engineering Corporation (1992). *Uplift Pressures, Shear Strengths and Tensile Strengths for Stability Analysis of Concrete Gravity Dams: Final Report*. Rel. técn.

Terzaghi, K. (1923). “Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus Dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen”. Em: *Sitzber. Akad. Wiss. Wien* 132, pp. 125–138.

— (1925). *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. Viena: Deuticke.

— (1943). *Theoretical soil mechanics*. John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470172766>.

Tewatia, S. K. et al. (2012). “Theoretical Equations of Vertical and Radial Consolidation by Equating Degrees of Consolidation by Settlement Analysis and Dissipation of Pore Pressure”. Em: *Geotechnical and Geological Engineering* 30, pp. 1037–1043. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10706-011-9485-y>.

The SCR Geomechanics Group (1993). “On the modelling of near tip processes in hydraulic fracture”. Em: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 30, pp. 1127–1134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(93\)90082-0](https://doi.org/10.1016/0148-9062(93)90082-0).

Timoshenko, S. e N. J. Goodier (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, p. 499.

Uddameri, V., A. Morse e K.J. Tindle (2016). *Hydraulic fracturing impacts and technologies*. 1<sup>a</sup> ed. Boca Raton: CRC Press.

Van Dam, D. B., C. J. de Pater e R. Romijn (2000). “Analysis of hydraulic fracture closure in laboratory experiments”. Em: *Society of Petroleum Engineer* 15, pp. 365–374. DOI: <https://doi.org/10.2118/65066-PA>.

Verruijt, A; (2013). *Theory and problems of poroelasticity*. Delft University of Technology.

Wang, H. (2015). “Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using XFEM with cohesive zone method”. Em: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 135, pp. 127–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2015.08.010>.

Wang, H. F. (2000). *Theory of linear poroelasticity, with applications to geomechanics and hydrogeology*. 1<sup>a</sup> ed. Princeton University Press, p. 304.

Wang, S.Y. et al. (2009). “2D-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials”. Em: *Construction and Building Materials* 23, pp. 2196–2206. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2008.12.004>.

Weber, N. (2016). “The XFEM for Hydraulic Fracture Mechanics”. Diss. de mestr. Universidade Técnica da Renânia, p. 149.

Wells, G. N. e L. J. Sluys (2001). “A new method for modelling cohesive cracks using finite elements”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50, pp. 2667–2682. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.143>.

Winkler, B. (2001). “Traglast untersuchungen von unbewehrten und bewehrten Beton strukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes fur Beton”. Diss. de mestr. Austria: University of Innsbruck.

Winkler, B., G. Hofstetter e H. Lehar (2004). “Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining”. Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28, pp. 797–819. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.362>.

Witherspoon, P. A. et al. (1980). “Validity of Cubic Law for fluid flow in a deformable rock fracture”. Em: *Water Resources Research* 16, pp. 1016–1024. DOI: <https://doi.org/10.1029/WR016i006p01016>.

Wittmann, F. H. et al. (1988). “Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens”. Em: *Materials and Structures* 21, pp. 21–32.

Xie, A. M. W. de (2006). “Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 73, pp. 1783–1796. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.03.006>.

Xu, W., M. Zang e J. Sakamoto (2016). “Modeling Mixed Mode Fracture of Concrete by Using the Combined Discrete and Finite Elements Method”. Em: *International Journal of Computational Methods* 13, p. 1650007. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219876216500079>.

Xu, X. P. e A. Needleman (1994). “Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids”. Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, pp. 1397–1434. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(94)90003-5).

Yan, C. e H. Zheng (2017). “Three-Dimensional Hydromechanical Model of Hydraulic Fracturing with Arbitrarily Discrete Fracture Networks using Finite-Discrete Element Method”. Em: *International Journal of Geomechanics* 17, pp. –. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000819](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000819).

Yang, Z. J. e J. F. Chen (2005). “Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 72, pp. 2280–2297. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.02.004>.

Yew, C. H. e X. Weng (2015). *Mechanics of hydraulic fracturing*. 2<sup>a</sup> ed. Oxford: Elsevier, p. 244. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-12927-3>.

Zielonka, M. G. et al. (2014). “Development and Validation of Fully-Coupled Hydraulic Fracturing Simulation Capabilities”. Em: *Simulia Community Conference*, pp. 1–31.

Zienkiewicz, O. C., C. T. Chang e P. Bettess (1980). “Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils.” Em: *Géotechnique* 30, 385–395.

Zimmerman, R. W. e G. S. Bodvarsson (1996). “Hydraulic conductivity of rock fractures”. Em: *Transport in porous media* 23, pp. 1–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00145263>.

Zivaljic, N., Z. Nikolic e H. Smoljanovic (2014). “Computational aspects of the combined finite-discrete element method in modelling of plane reinforced concrete structures”. Em: *Engineering Fracture Mechanics* 131, pp. 669–686. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.017>.

## **APÊNDICES**





# A Coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements

Raul Durand · Fernando Hipólito Barros Trindade da Silva

Received: 10 February 2019 / Accepted: 19 October 2019  
© Springer Nature B.V. 2019

**Abstract** This paper presents a constitutive model for cohesive elements to simulate crack formation and propagation in mode I and mixed mode in quasi-brittle materials. The model is based on the plasticity theory and features a Coulomb-based yield function, a non-associated flow rule and an implicit stress integration scheme. It also incorporates concepts of nonlinear fracture mechanics to model the softening behavior of the fracture process. Two softening laws are investigated, a bilinear and an exponential law. The results from concrete crack propagation simulations of several classical experiments are presented. Numerical load–CMOD and load–displacement curves showing softening behavior are in very good agreement when compared with experimental data. In summary, the model is able to provide accurate predictions of the whole fracture process on all cases studied.

**Keywords** Finite elements · Quasi-brittle materials · Concrete cracking · Cohesive elements · Plasticity

## 1 Introduction

Modeling of quasi-brittle materials, such as concrete and rocks, proves to be a challenging task since it must take into account the effects of displacements and tension discontinuities caused by cracks. For this purpose, the literature includes several finite element techniques based on continuous and discontinuous approaches.

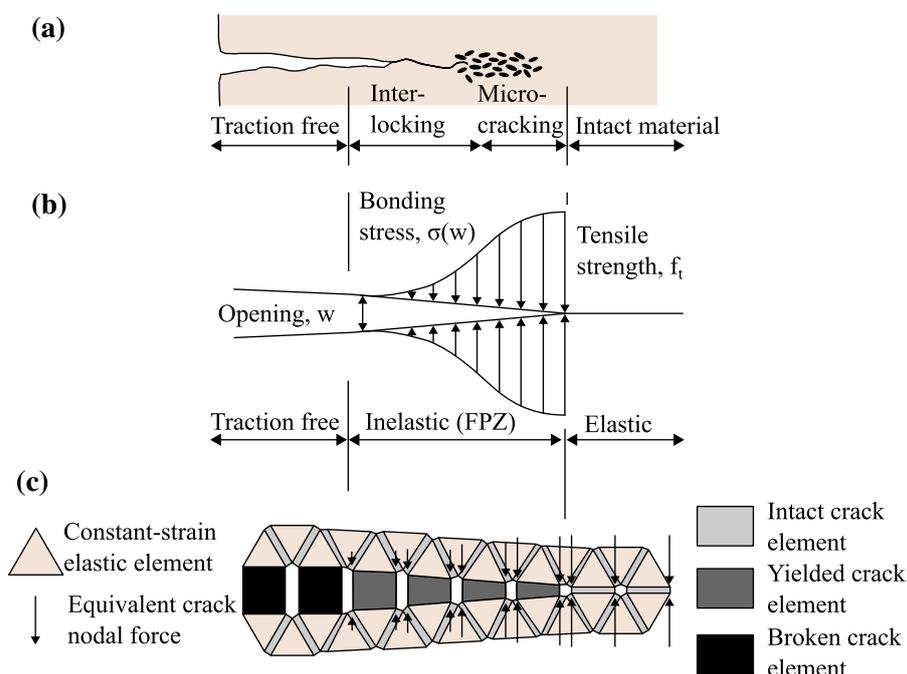
On the continuous approach, the cracks are represented in a smeared manner where the openings are distributed over the finite element. This class of models are frequently formulated considering orthogonal and non-orthogonal cracks; see e.g. (Gupta and Akbar 1984; de Borst and Nauta 1985; Barros and Figueiras 2001; Cunha et al. 2011, 2012; Dahlblom and Ottosen 1990; Červenka et al. 2018). Isotropic and anisotropic damage models are also examples of smeared crack models (Mazars 1986; Mazars and Pijaudier-Cabot 1996; Comi and Perego 2001; Basaran and Nie 2007; Pituba and Fernandes 2011). However, the continuous approach has limited ability to model crisp discontinuities, working better when cracks are scattered throughout the material as in some reinforced concrete (RC) applications. On the other hand, in the discontinuous approach, cracks are modeled as displacement discontinuities between finite elements; see e.g. (Ngo and Scordelis 1967; Nilson 1968; Bocca et al. 1990; Gerstle and Xie 1992; Li and Kaliakin 1993; Carol et al. 1997; Pandolfi et al. 1999; Cendón et al. 2000; Roy and Dodds 2001; Pandolfi and Ortiz 2002; Jin et al. 2003;

---

R. Durand (✉) · F. H. B. T. Silva  
Department of Civil and Environmental Engineering,  
University of Brasilia, Campus Darcy Ribeiro, Brasilia,  
DF CEP 70910-900, Brazil  
e-mail: durand@unb.br

F. H. B. T. Silva  
e-mail: hipolitofernando@outlook.com

**Fig. 1** Concrete crack modeling using cohesive elements after Mahabadi et al. (2014): **a** conceptual model of a tensile crack in plain concrete; **b** theoretical fracture process zone (FPZ) model of Hillerborg et al. (1976); **c** discrete approach implementation of fracture process zone (FPZ) using triangular elastic elements and four-noded interface elements to represent the bulk material and the fracture, respectively



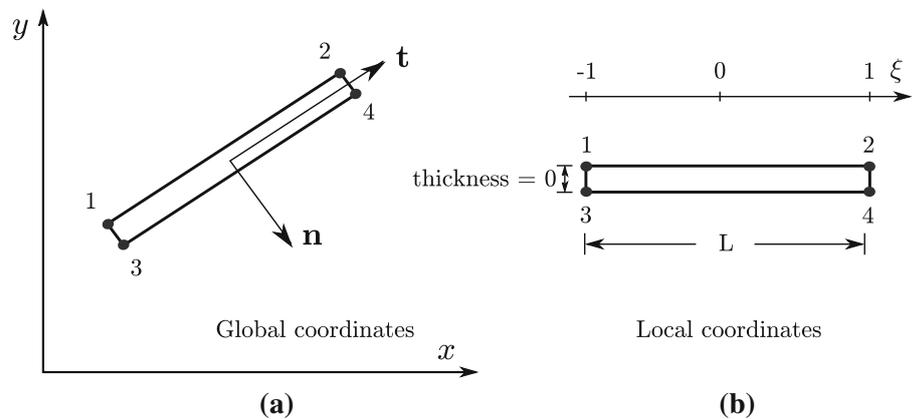
Song et al. 2006; Xie and Waas 2006; Roesler et al. 2007; Lens et al. 2009; Park et al. 2009; Segura and Carol 2010; Caggiano et al. 2012; Sánchez et al. 2014; Xu and Needleman 1994; Xu et al. 2015; Corona and Reedy 2011; Park and Paulino 2013; García-Álvarez et al. 2012; Morin et al. 2013; Xu et al. 2016; Tabiei and Zhang 2017). This approach usually requires the addition of zero-thickness interface elements intended to model the crack openings. This approach allows more realistic crack representations when compared with continuous models since it allows for the visualization of the crack openings due to the progressive detachment of bulk elements. The extended finite element method (X-FEM) (Melenk and Babuska 1996; Wells and Sluys 2001; Moës and Belytschko 2002; Mariani and Perego 2003; Asferg 2006; Fries and Belytschko 2006; Belytschko et al. 2009; Gupta et al. 2012; Simone 2007) is another technique that can be classified as a discrete approach since it tracks the crack paths during the analysis. By using finite element shape functions as partitions of unity (Wells and Sluys 2001), the displacement jump across a crack is represented by extra degrees of freedom at existing nodes. This allows for the convenient simulation of cracks evolutions without the need of remeshing. An additional discrete method that is worth mentioning is the one presented by (Manzoli et al. 2012, 2016)

where thin interface elements with high aspect ratio are used as an alternative to cohesive elements. A simple constitutive damage model is used to describe the crack formation controlled by a prevalent mode I of fracture.

Regarding the use of cohesive elements in the modeling of plain concrete, the choice of the constitutive model is essential for an accurate representation of the fracture process. Most constitutive models use fracture mechanics concepts as the cohesive zone model (CZM) (Dugdale 1960; Barenblatt 1962; Hillerborg et al. 1976) to describe the relationship between stresses and crack widths as well as to identify the development of new cracks. The CZM includes a fracture process zone (FPZ) that has the ability to transfer stresses across the discontinuity (see Fig. 1). These stresses can be estimated by softening stress-opening laws. Also, the crack is assumed to propagate when the stress at the crack tip reaches the tensile strength.

This paper focuses on the development of a constitutive model for cohesive elements to be used in the simulation of quasi-brittle materials such as concrete. The model was elaborated using the plasticity theory featuring a Coulomb-based yield function, a non-associated flow rule, and an implicit stress integration scheme. Two nonlinear curves are used as stress-opening softening laws: a bi-linear law and the exponential Hordijk's

**Fig. 2** Four-node interface element: **a** global coordinate system  $xy$  and local reference given by vectors  $\mathbf{n}$  and  $\mathbf{t}$ ; **b** parametric coordinate system



law (Hordijk 1992). The constitutive model applied to cohesive elements allows simulation of the transfer of normal and shear stresses in a crack as well as the development of friction and slip between crack faces. These features allow the modeling of single and multi-cracks formation in mode I and mixed mode (I and II). Finite element simulations using the proposed model work for different levels of mesh refinement and elements with different interpolation orders. The model was validated in extension and shear tests and later applied in the simulation of several classical experiments of notched beams. These experiments were widely simulated by previous approaches using cohesive elements and other advanced methods as XFEM. However, several simulation results frequently present discrepancies predicting the softening branch of load–CMOD curves. Numerical results using the proposed model show very good agreement when compared with experimental results. In fact, peak and residual loads and CMOD values were very well predicted showing that it is possible to simulate the complete fracture process. This shows that the proposed model can be applied to a wide range of experiments. In addition, due to the use of an implicit integration scheme, the model provides numerical stability. No convergence problems were presented while running the simulations. All aspects of the model are carefully explored in order to allow the reproduction of the solution techniques and the development of finite element tools for large scale simulations in fields such as reinforced concrete and rock mechanics. The paper also presents a detailed procedure to introduce interface elements in a conventional mesh and the calculation of a representative element size needed in the constitutive model formulation.

## 2 Isoparametric interface element

The fracture simulation by the discrete approach requires the addition of interface elements (cohesive elements) to a conventional finite element mesh in order to provide the domain with potential crack paths. In this regard, this section begins by presenting the formulation of the isoparametric interface element used in this work. Similar formulations are given in Beer (1985); Plesha et al. (1989); Hird and Kwok (1989); Roy and Dodds (2001); Jin et al. (2003). Later, this section shows the algorithm used to add interface elements between all bulk elements in a conventional mesh.

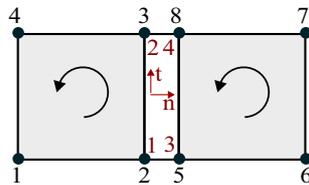
### 2.1 Formulation of the isoparametric interface element

Figure 2 shows a four-node interface element with length  $L$  and zero thickness. The figure at left shows the element located at the global coordinate system  $xy$  while the figure at right shows the element in the parametric space  $\xi$ . Although the figure shows an element with linear interpolation, more nodes can be considered to get, for example, quadratic interpolation, which allows the simulation of curved contacts.

The displacements vector of a four-node interface element is given by:

$$\mathbf{U} = \langle u_{x1}, u_{y1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{x3}, u_{y3}, u_{x4}, u_{y4} \rangle. \quad (1)$$

Since the faces of an interface element may have different displacement fields,  $\mathbf{U}$  can be used to calculate a vector with relative displacements  $\mathbf{w} = \langle w, v \rangle$  in the local reference (normal and tangent displacements) at a



**Fig. 3** Global (black) and local (red) numbering for the interface element nodes

point  $\xi$  (in parametric coordinates) along the interface element as:

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{T}(\xi)\mathbf{N}(\xi)\mathbf{U}, \tag{2}$$

where  $\mathbf{N}(\xi)$  is an interpolation matrix based on shape functions and  $\mathbf{T}(\xi)$  is a rotation matrix used to express global displacements in the local reference. The following equation shows matrix  $\mathbf{T}$ , where  $n_i$  and  $t_i$  are the components of the normal and tangential unitary vectors ( $\hat{\mathbf{n}}$  and  $\hat{\mathbf{t}}$ ), respectively:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

The tangential unitary vector is easily calculated as  $\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{J}^T}{\|\mathbf{J}^T\|}$ , where  $\mathbf{J}$  is the Jacobian matrix, i.e.  $[\frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}]$ , of a line element considering the nodes from one face of the interface. The normal vector, in turn, is given by  $\mathbf{n} = \langle J_2, -J_1 \rangle$ , where  $J_1$  and  $J_2$  are the components of  $\mathbf{J}$ . Figure 3 shows an example of two bulk elements linked by an interface element. In this case, the interface connectivity is given by the nodes 2, 3, 5, and 8. Note that the first nodes (2 and 3) are numbered following the same sequence as the first neighbor element (at left). Regarding the interpolation matrix  $\mathbf{N}$ , it is given by:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

where  $N_1$  and  $N_2$  are the same shape functions as those from a two-node line element considering the interface first two nodes.

Equation 2 can be rewritten incrementally as below where the symbol  $\xi$  was dropped for clarity:

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{N} \Delta \mathbf{U}. \tag{5}$$

The stress state at each point along the interface element is represented by the vector  $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_n, \tau \rangle$ , where  $\sigma_n$  and  $\tau$  represent the normal and shear stresses, respectively: the first one in the  $\hat{\mathbf{n}}$  direction and the second one in the  $\hat{\mathbf{t}}$  direction. The increments in stress components  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$

are related to the increment of relative displacements  $\Delta \mathbf{w}$  by means of a constitutive matrix  $\mathbf{D}$ :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{w}. \tag{6}$$

Using a conventional finite element procedure, as the virtual work method, we can quickly arrive at the following equation for the stiffness matrix of an interface element in two dimensions:

$$\mathbf{K} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dL, \tag{7}$$

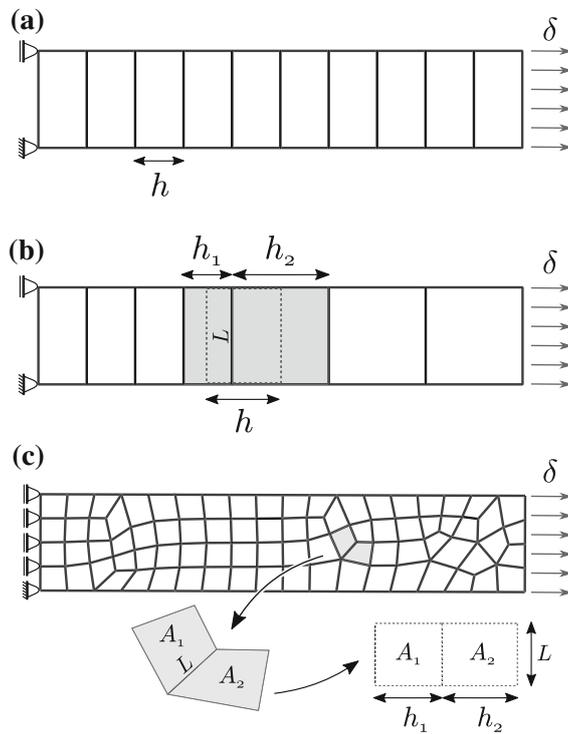
where  $\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{N}$ . Matrix  $\mathbf{K}$  can be calculated using numerical integration; for this purpose, a number of integration points must be defined according to the degree of the integrand. Equation 7 can be easily expanded to three-dimensional analyses by conveniently modifying matrices  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  and  $\mathbf{D}$ .

### 2.2 Computation of a representative length of bulk elements

The simple addition of cohesive elements to a conventional mesh would make the domain more flexible due to additional degrees of freedom and interface elements deformability. To reduce mesh dependency and to obtain convergent results in h-refinement analyses, the stiffness from interface elements needs to be related to the size of neighbor bulk elements, e.g. a representative length. We define this representative length  $h$  as the average bulk element length in the perpendicular direction to the cohesive element. Consider, for example, the meshes in Fig. 4 and assume that all bulk elements are linked by cohesive elements. In the first case, the representative length is given by the elements' width, since all bulk elements are equal. In the second case, the representative length for the cohesive element between the two shaded elements will be the average between the widths  $h_1$  and  $h_2$ . In the last case, the value of  $h$  for the shaded elements is computed considering two rectangular elements with equivalent areas,  $A_1$  and  $A_2$ . This allows to calculate two equivalent widths:  $h_1 = A_1/L$  and  $h_2 = A_2/L$ . Finally, the representative length is given by the average value of  $h_1$  and  $h_2$ :

$$h = \frac{A_1 + A_2}{2L}, \tag{8}$$

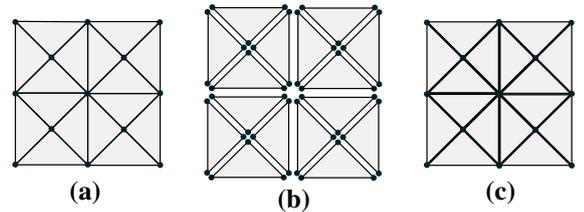
Since this formula satisfies previous cases, it can be used for any pair of bulk elements.



**Fig. 4** Computation of the representative length of bulk elements: **a** in a mesh with equal rectangular elements; **b** in a mesh with rectangular elements with different sizes; **c** in a unstructured mesh

### 2.3 Addition of cohesive elements to a finite element mesh

This procedure deals with the insertion of cohesive elements between bulk ones in a finite element mesh as is shown in Fig. 5. This is not a simple task since the faces of an interface element have the same set of coordinates, which makes them difficult to distinguish. Existing cohesive element formulations use algorithms of this kind to insert interface elements among all element boundaries (see e.g. Paulino et al. 2008; Nguyen 2014; Jiang and Meng 2018; Tabiei and Zhang 2017). In this section, we aim to provide a detailed explanation of the procedure used in this work. This procedure is presented in Algorithm 1 and can be explained in three main steps. These steps are described in the context of object oriented programming, thus we assume that a mesh is described in terms of node and element objects. We also assume that each element object contains a list of pointers to its corresponding nodes. The referred steps are:



**Fig. 5** Generation of mesh with interface elements: **a** initial mesh; **b** elements detachment (new nodes are generated and elements are detached); **c** interface elements are generated by connecting matching edges

1. Elements detachment: In this step all bulk elements in the mesh are detached from its neighbors to avoid the sharing of nodes (Fig. 5b). For this purpose, at each element, the nodal pointers are replaced with pointers to copies of the original nodes. In other words, for each element, new nodes are created and linked in substitution to the original ones. This procedure provides an entirely new set of nodes for the mesh thus the original nodes can be discarded.
2. Pairing of edges: For each element, a list of boundary edges is generated. Each edge contains a list of corresponding nodal pointers. Later, a hash value is calculated for each edge on all elements. The purpose of using a hash value is to easy checking whether two edges have the same location, which is the case at the common side of two neighbor elements. Thus, a hash function must be defined in a way that returns the same value for two edges placed at the same location. When two edges with the same hash value are detected, an edge pair object is generated and stored into a list.
3. Generation of interface elements: For each edge pair found in the previous step, a new interface element is generated. The connectivity of an interface element is given by a list with nodal pointers taken from the corresponding edges. Finally, the mesh is updated to include the generated interface elements.

### 3 Constitutive modeling

In this work, we propose a plasticity model to simulate the mechanical behavior of cohesive elements. The model is defined by the Coulomb law with adherence and, according to Lens et al. (2009), we define the yield surface as:

**Algorithm 1:** Interface elements addition algorithm.

**Input:** A conventional mesh called *Mesh*  
**Output:** The updated version of *Mesh* including interface elements located between 2D elements

*! Step 1: detachment of elements*  
 get a list *Elements* with all elements from *Mesh*

**foreach** *elem* in *Elements* **do**  
 | copy the data from the nodes in *elem* to new node objects  
 | replace nodal pointers in *elem* with pointers to corresponding copies  
 | discard original node objects

*! Step 2: pairing of edges with same hash value*  
*EdgePairs* = [] *! A list for pairs of matching edges*  
*Edges* = [] *! A list for all edges*

**foreach** *elem* in *Elements* **do**  
 | create a list *ElemEdges* with all edges of *elem*  
 | **forall the** edge *e* in *ElemEdges* **do**  
 | | calculate a hash value for *e*  
 | | **if** an edge  $\bar{e}$  from *Edges* has the same hash value as edge *e* **then**  
 | | | add the pair (*e*,  $\bar{e}$ ) to *EdgePairs*  
 | | | remove *e* from *Edges*  
 | | **else**  
 | | | add *e* to *Edges*

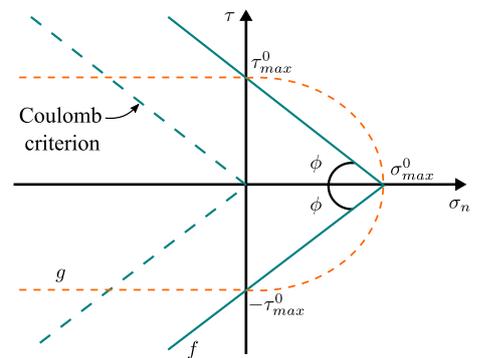
*! Step 3: generation of interface elements*  
*Interfaces* = [] *! List for newly generated interface elements*

**foreach** *pair* in *EdgePairs* **do**  
 | *INodes* = [] *! A list with pointers to nodes for an interface element*  
 | **foreach** edge *e* in *pair* **do**  
 | | get all nodes from *e* and add its pointers to *INodes*  
 | | generate an interface element *I* with connectivity based on *INodes*  
 | | add *I* to *Interfaces*

update the list of nodes in *Mesh* with all nodes found in *Interfaces*  
 update the list of elements in *Mesh* with the elements in *Interfaces*  
 renumerate all nodes and elements in *Mesh*

$$f(\sigma, \sigma_{max}) = |\tau| + (\sigma_n - \sigma_{max}) \tan \phi = 0, \quad (9)$$

where  $\sigma_n$  and  $\tau$  are, respectively, the normal and shear stresses in the crack plane while  $\sigma_{max}$  is the internal softening variable, i.e. the material tensile strength, and  $\phi$  is the material friction angle. Figure 6 shows the yield surface (solid line) in the  $\sigma_n - \tau$  space. In the figure  $\sigma_{max}^0$  and  $\tau_{max}^0$  represent the initial tensile and shear strength of concrete, respectively. The proposed model



**Fig. 6** Yield function (solid line) and plastic potential function (dashed line) after Lens et al. (2009)

uses a non associated flow rule. The plastic potential function is shown in Fig. 6 as an orange dashed line and its equation is given by:

$$g(\sigma, \sigma_{max}) = \begin{cases} \tau^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{for } \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n^2 \tan^2 \phi + \tau^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{for } \sigma_n > 0 \end{cases} \quad (10)$$

The internal variable  $\sigma_{max}$  defines the location of the yield surface aiming to simulate the loss of strength of concrete due to cracking. This variable is a function of the effective plastic relative displacement defined as:

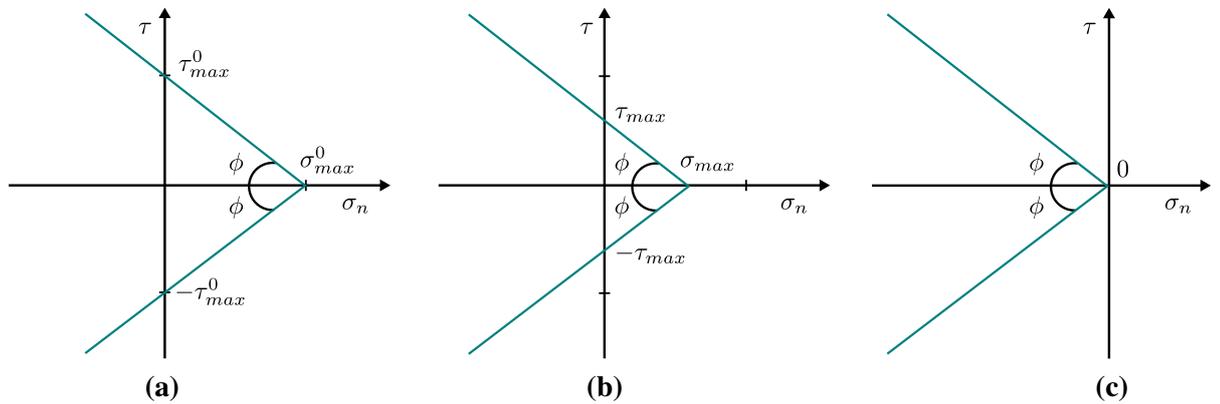
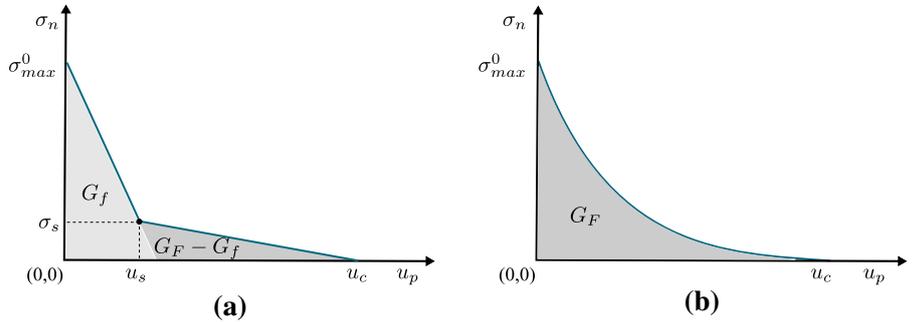
$$u_p = \int_0^t \|\dot{\mathbf{w}}_p\| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{w}_p^2 + \dot{v}_p^2} dt, \quad (11)$$

where  $\dot{w}_p$  and  $\dot{v}_p$  are the rate of normal and shear plastic relative displacements, respectively, and  $\dot{\mathbf{w}}_p = \langle \dot{w}_p, \dot{v}_p \rangle$ . There are several softening curves available in the literature to relate  $\sigma_{max}$  and  $u_p$ . In this work, two softening curves are investigated: a bilinear and an exponential function, the later proposed by Hordijk (1992). Both curves are presented in Fig. 7 where  $u_c$  represents the critical crack opening. As seen in these curves,  $\sigma_{max}$  reduces when  $u_p$  increases; this causes the displacement of the yield surface as shown in Fig. 8.

3.1 Bilinear softening curve

This curve presents two linear segments as shown in Fig. 7a where  $(u_s, \sigma_s)$  represent the point where the curve slope changes. Furthermore,  $u_c$  represents the

**Fig. 7** Softening curve of concrete: **a** bilinear softening curve; **b** Hordijk softening curve



**Fig. 8** Yield function evolution: **a** initial location ( $u_p = 0$ ); **b** intermediary location ( $0 < u_p < u_c$ ); **c** final location ( $u_p \geq u_c$ )

critical crack opening when  $\sigma_{max}$  is equal to zero. Bilinear curves are considered as reasonable approximations; see e.g. (Wittmann et al. 1988; Yang and Chen 2005; Roesler et al. 2007; Park et al. 2008; Park and Paulino 2013). Although there is no agreement about the location of the point  $(u_s, \sigma_s)$ , in this work  $\sigma_s$  is assumed as  $0.25 \sigma_{max}^0$  as proposed by Wittmann et al. (1988). The terms  $u_s$  and  $u_c$  are calculated in such a way that the area below the curve is equal to the fracture energy  $G_F$ :

$$u_c = \frac{5 G_F}{\sigma_{max}^0} \quad \text{and} \quad (12)$$

$$u_s = 0.15 u_c. \quad (13)$$

When the initial fracture energy  $G_f$  is also available,  $u_c$  and  $u_s$  are calculated as:

$$u_c = \frac{8 G_F - 6 G_f}{\sigma_{max}^0} \quad \text{and} \quad (14)$$

$$u_s = \frac{1.5 G_f}{\sigma_{max}^0}. \quad (15)$$

Later,  $\sigma_{max}$  as a function of  $u_p$  varies according to:

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \sigma_{max}^0 - u_p \left( \frac{\sigma_{max}^0 - \sigma_s}{u_s} \right) & \text{for } 0 < u_p \leq u_s \\ \frac{u_c \sigma_s}{u_c - u_s} - u_p \left( \frac{\sigma_s}{u_c - u_s} \right) & \text{for } u_s < u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (16)$$

The rate of change of  $\sigma_{max}$  with respect to  $u_p$  is given by:

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} = \begin{cases} - \left( \frac{\sigma_{max}^0 - \sigma_s}{u_s} \right) & \text{for } 0 < u_p \leq u_s \\ - \left( \frac{\sigma_s}{u_c - u_s} \right) & \text{for } u_s < u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (17)$$

### 3.2 Hordijk's softening curve

This softening curve is given by an exponential function Hordijk (1992) and depends only on two parameters,

$\sigma_{max}^0$  and  $u_c$ . As in the bilinear curve,  $u_c$  is calculated in order to provide an area under the curve equal to  $G_F$ . The Hordijk's softening curve, using the coefficients proposed by Zivaljic et al. (2014), is written as:

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \left[ \left(1 + 27 \left(\frac{u_p}{u_c}\right)^3\right) e^{-6.93 \frac{u_p}{u_c}} - 28 \frac{u_p}{u_c} e^{-6.93} \right] \sigma_{max}^0 & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (18)$$

After integration of Eq. 18 from 0 to  $u_c$  and equating to  $G_F$  we get:

$$u_c = \frac{G_F}{0.1947 \sigma_{max}^0}. \quad (19)$$

The rate of change  $\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p}$ , required in the constitutive model formulation, is given by:

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} = \begin{cases} \left( \frac{81 u_p^2 e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c^3} - \frac{6.93 \left(1 + \frac{27 u_p^3}{u_c^3}\right) e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c} - \frac{0.02738402432}{u_c} \right) \sigma_{max}^0 & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (20)$$

The value of  $\alpha$  should be appropriately chosen in order to provide negligible displacement values for  $w_{e(max)}$  and  $v_{e(max)}$  at the elastic regime where no crack openings are expected. Too high values for  $\alpha$  may provide high stiffness coefficients and consequently an ill-conditioned system of equations. In this work  $\alpha = 5$  provided satisfactory results for all examples. Bigger values for  $\alpha$  may provide a singular system of equations in some cases.

For the elastoplastic regime, the constitutive matrix  $\mathbf{D}_{ep}$  is formulated based on the conventional plasticity theory. According to the additive decomposition, the increment of relative displacements at a point along the cohesive element is expressed as the sum of the elastic and plastic components:

### 3.3 Constitutive matrix

This section presents the elastic and elastoplastic constitutive matrix  $\mathbf{D}$  that relates the relative displacement increment vector  $\dot{\mathbf{w}}$  with the stress increment vector  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  at an integration point of a cohesive element. At the elastic regime, the constitutive matrix is given by:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}, \quad (21)$$

where  $k_n$  and  $k_t$  are, respectively, related to the normal and tangential stiffness in the crack plane. They are defined as:

$$k_n = E \frac{\alpha}{h} \quad \text{and} \quad k_t = G \frac{\alpha}{h}, \quad (22)$$

where  $h$  is the representative length from bulk elements (described in item 2.2),  $E$  is the Young's modulus,  $G$  is the shear modulus and  $\alpha$  is a factor that controls the elastic relative displacements. The  $\alpha$  factor can be used to define the maximum elastic relative displacements allowed in the normal  $w_{e(max)}$  and tangential  $v_{e(max)}$  directions according to:

$$w_{e(max)} = \frac{\sigma_{max}^0}{\alpha E} h \quad \text{and} \quad v_{e(max)} = \frac{\tau_{max}^0}{\alpha G} h. \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_e + \dot{\mathbf{w}}_p. \quad (24)$$

Notice that plastic displacements are not reversible. Thus in an unloading process, only part of the displacements are reversible. Consequently, once plastic displacements occur, total displacements are no longer proportional to stresses.

The increment of plastic relative displacements is calculated by the flow rule according to:

$$\dot{\mathbf{w}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{r}, \quad (25)$$

where  $\mathbf{r}$  is a vector normal to the potential surface  $g$  and  $\dot{\lambda}$  is the plastic multiplier. Thus the increment of the effective plastic relative displacement is calculated as:

$$\dot{u}_p = \|\dot{\mathbf{w}}_p\| = \dot{\lambda} \|\mathbf{r}\|. \quad (26)$$

After multiplying Eq. 24 by  $\mathbf{D}_e$  and considering  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}}_e$  and Eq. 25 we get the stress increment vector as:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}. \quad (27)$$

On the other hand, according to Eq. 9, the consistency condition is given by:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \dot{\sigma}_{max} = 0, \quad (28)$$

which can be expanded as:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \dot{u}_p = 0. \tag{29}$$

Using Eq. 26 and isolating the increment of the plastic multiplier, we get:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \|\mathbf{r}\|} \\ &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|}, \end{aligned} \tag{30}$$

where  $\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $y = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}}$  and  $m = \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p}$ . Later, by substituting Eq. 30 into Eq. 27, it is possible to find the elastoplastic constitutive matrix  $\mathbf{D}_{ep}$  as:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{r} \mathbf{v}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|}. \tag{31}$$

The required derivatives for the calculation of the elastoplastic constitutive matrix are given by:

$$y = -\tan \Phi, \tag{32}$$

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial f}{\partial \tau} \right\rangle = (\tan \Phi, \text{sgn}(\tau)), \tag{33}$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau} \right\rangle = \langle 2\sigma_n \tan^2 \phi, 2\tau \rangle \text{ for } \sigma_n > 0, \tag{34}$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau} \right\rangle = \langle 0, 2\tau \rangle \text{ for } \sigma_n < 0. \tag{35}$$

### 3.4 Stress update

The purpose of the stress update process is to find the stress vector increment  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  for a given increment of relative displacements  $\Delta \mathbf{w}$ . Initially, a trial stress vector is found by using the elastic constitutive matrix as:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}_e \Delta \mathbf{w}, \tag{36}$$

where the superscript  $n$  represents the current step.

Aiming to find if the increment of relative displacements leads the stress state to the elastic or elastoplastic regime, the signal of the yield function is evaluated at  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ . Thus, if  $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{max}^n) \leq 0$  the increment is elastic and the new stress state is  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}$ . This occurs during initial loadings and unloading/reloading processes. In the case of  $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{max}^n) > 0$ , the increment

is elastoplastic and consequently the internal variable  $\sigma_{max}$  will decrease. This implies that the yield surface will displace to the left at step  $n+1$ . Also, the stress state given by  $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$  should return to the yield surface following a direction perpendicular to the potential surface  $g$  as shown in Fig. 9. The required equations to update  $u_p$ ,  $\sigma_{max}$  and  $\boldsymbol{\sigma}$  for a given increment of relative displacements  $\Delta \mathbf{w}$  in the elastoplastic regime are:

$$u_p^{n+1} = u_p^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{u}_p dt = u_p^n + \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \tag{37}$$

$$\sigma_{max}^{n+1} = \sigma_{max}^n + \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{r}^{n+1}. \tag{39}$$

Equation 39 was obtained by substituting  $\Delta \mathbf{w}^{n+1} = \Delta \mathbf{w}_e^{n+1} + \Delta \mathbf{w}_p^{n+1}$  and  $\Delta \mathbf{w}_p^{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{r}^{n+1}$  into Eq. 36. Note that, according to Eq. 38 and the fact that  $\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} < 0$ ,  $\Delta \lambda$  must be a positive number in order to be consistent with the loss of strength due to cracking.

From the plastic potential function  $g$  (Fig. 6) we verify that  $\text{sgn}(\sigma_n^{n+1}) = \text{sgn}(\sigma_n^{tr})$ . This implies that the signal of  $\sigma_n^{tr}$  can be used to choose the right expression for  $\mathbf{r}$  to be employed to find the stresses at step  $n+1$  (see Eqs. 34 and 35), thus we have:

$$(\sigma_n^{n+1}, \tau^{n+1}) = \left\langle \frac{\sigma_n^{tr}}{1+2\Delta \lambda k_n \tan^2 \phi}, \frac{\tau^{tr}}{1+2\Delta \lambda k_s} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} > 0, \tag{40}$$

$$(\sigma_n^{n+1}, \tau^{n+1}) = \left\langle \sigma_n^{tr}, \frac{\tau^{tr}}{1+2\Delta \lambda k_s} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} \leq 0. \tag{41}$$

To find  $\Delta \lambda$ , needed to update  $u_p$ ,  $\sigma_{max}$  and  $\boldsymbol{\sigma}$ , let's consider the consistency condition at the step  $n+1$ :

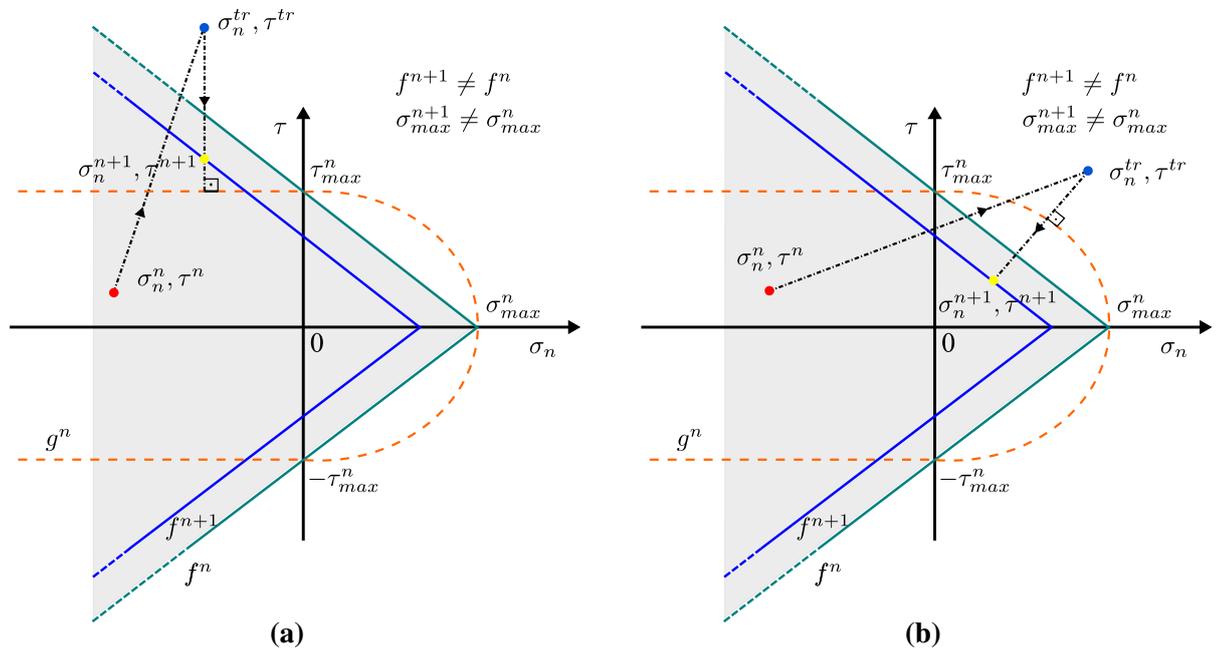
$$f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1}) = |\tau^{n+1}| + (\sigma_n^{n+1} - \sigma_{max}^{n+1}) \tan \phi = 0. \tag{42}$$

After substituting Eqs. 38, 40 and 41 in the equation above we get a nonlinear equation in terms of  $\Delta \lambda$  and can be solved by applying a root-finding numerical method. In this case we use the Newton method, thus:

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i - \frac{f(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i}{f'(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i}, \tag{43}$$

where  $i$  indicates the  $i$ -th iteration,  $\Delta \lambda_0$  is an initial guess (e.g.  $\Delta \lambda_0 = 0$ ) and  $f'(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})$  can be expressed as:

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \sigma_{max}^{n+1}} \frac{\partial \sigma_{max}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda}. \tag{44}$$



**Fig. 9** Stress update in the elastoplastic regime: **a** stress return to the yield surface when  $\sigma_n^{tr} < 0$ ; **b** stress return to the yield surface when  $\sigma_n^{tr} > 0$

To compute the yield function derivative, the following derivatives are required, where the superscript  $n + 1$  was dropped for clarity:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle \frac{-2k_n \tan^2 \Phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \Phi)^2}, \frac{-2k_s \tau^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} > 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle 0, \frac{-2k_s \tau^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle \frac{-4k_n \tan^4 \Phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \Phi)^2}, \frac{-4k_s \tau^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} > 0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} = \left\langle 0, \frac{-4k_s \tau^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\sigma_{max}}{u_p} \left( \|\mathbf{r}\| + \Delta \lambda \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} \right) \tag{49}$$

### 3.5 Plastic update when $u_p \geq u_c$

This procedure is one key aspect of the proposed constitutive model. When a crack achieves the critical opening ( $u_p \geq u_c$ ) there is no more tensile strength, thus  $\sigma_{max} = 0$ . This causes the potential surface to collapse into a line and its derivatives become undetermined at

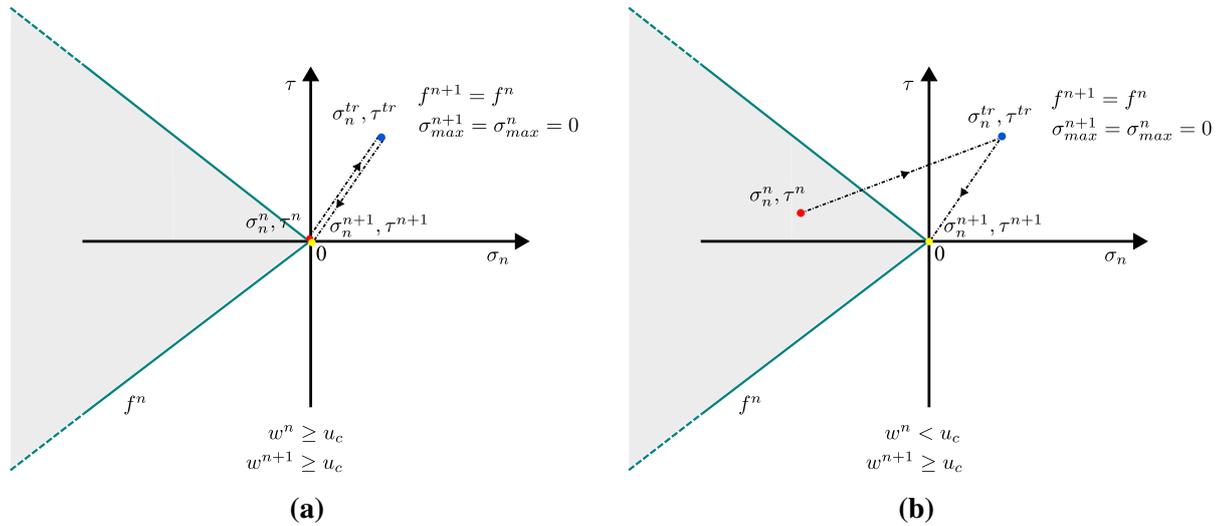
the origin. To deal with this situation, we start by checking whether, at step  $n + 1$ , the crack will be open enough to be unable to transfer stresses, that is  $w^{n+1} \geq u_c$ . We use  $u_c$  and not zero in the condition since we assume that, due to surface irregularities, the crack is able to transfer compressive and shear stresses if their faces are not completely separated. Thus, if  $w^{n+1} \geq u_c$  then the normal and shear stresses at step  $n + 1$  should be equal to zero. Figure 10 shows the stress update process for two possible states at step  $n$ : when the crack faces are separated ( $w^n \geq u_c$ ) and when the crack faces are in contact ( $w^n < u_c$ , e.g. by previous unloading). In both cases, stresses at step  $n + 1$  are set to zero and Eq. 39 is rewritten as:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^{tr} \\ \tau^{tr} \end{pmatrix} - \Delta \lambda \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} \\ r_2^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Later, vector  $\mathbf{r}^{n+1}$  can be expressed as:

$$\mathbf{r}^{n+1} = \frac{1}{\Delta \lambda} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_n^{tr}}{k_n} \\ \frac{\tau^{tr}}{k_t} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

By assuming  $\mathbf{r}^{n+1}$  as an unitary vector,  $\Delta \lambda$  is calculated as the norm of vector  $(\frac{\sigma_n^{tr}}{k_n}, \frac{\tau^{tr}}{k_t})$  and the stress update



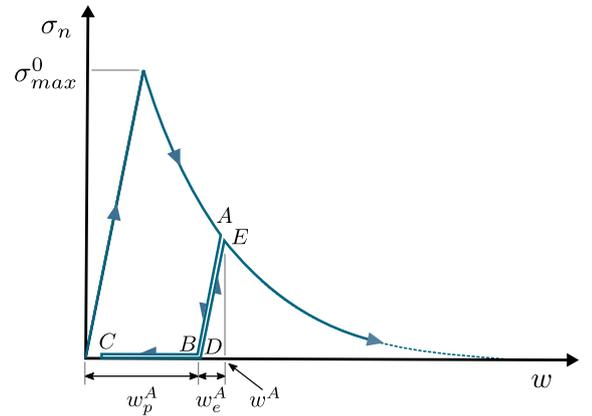
**Fig. 10** Stress update for the condition  $u_p^{n+1} \geq u_c$ : **a** the crack faces are separated at step  $n$ ; **b** the crack faces are in contact at step  $n$

process can be performed using Eq. 39. Since the crack is open at step  $n + 1$ , it should be considered  $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{0}$  for the next load step while computing the element stiffness matrix.

### 3.6 Crack opening during unloading and reloading

During the elastoplastic loading, the crack opening increment is given by the sum of its elastic and plastic components,  $\Delta w = \Delta w_e + \Delta w_p$ , where, according to the flow rule,  $\Delta w_p = \Delta \lambda r_1$ . Thus, the total plastic opening at step  $n + 1$  can be stated as  $w_p^{n+1} = w_p^n + \Delta \lambda r_1$ . In the case of subsequent unloading and reloading events,  $w_p$  remains unaltered in the same way as  $u_p$ .

Figure 11 shows an example of a normal stress versus crack opening path, which is based on the application of controlled displacements and includes unloading and reloading branches. The elastic and plastic components of the crack opening at point  $A$  are specified by  $w_e^A$  and  $w_p^A$ , respectively. The unloading event from point  $A$  follows a linear elastic path to point  $B$ , where  $\sigma_n$  is zero. Subsequent closing keeps  $\sigma_n$  unchanged from point  $B$  to  $C$ . Similarly, during reloading, the normal stress is kept constant, from point  $C$  to  $D$ , until the opening  $w$  reaches the value of  $w_p^A$ , then the path continues in a linear elastic fashion. Once the stress state reaches the yield function, which is compat-

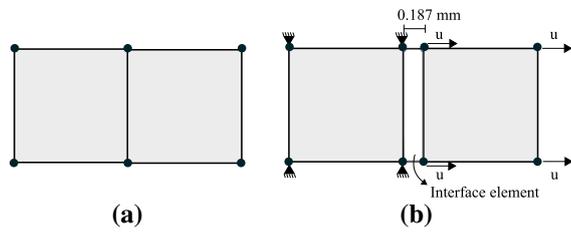


**Fig. 11** Normal stress versus crack opening in a typical unloading/reloading process

ible with point  $E$ , the elastoplastic behavior is recovered.

## 4 Numerical simulations

This section presents two validation tests and five application examples of the proposed model. The validation tests aim to verify the cohesive constitutive model behavior in extension and shear simulations. Also, a mesh objectivity test is presented to verify that the application of the proposed formulation minimizes mesh dependency. On the sequence, five application



**Fig. 12** Extension test; **a** initial configuration; **b** deformed configuration

examples deal with fracture simulation of experimental concrete specimens. The examples study the effect of softening curves (bilinear vs Hordijk’s), type of elements (triangular vs quadrilateral), element interpolation (linear or bilinear vs quadratic) and mesh refinement. For this purpose, a total of 28 analyses were carried out. In all cases, planes stress conditions are considered since specimens are fairly thin and no tractions are applied perpendicular to the  $xy$  plane. Also, linear-elastic properties are considered for all bulk elements. Although it is possible to place cohesive elements only in specific regions, we decided to place them among all elements boundaries as a means to verify that cracks only happen where expected. The numerical simulations were performed using a finite element solver with automatic load/displacement stepping.

4.1 Validation tests

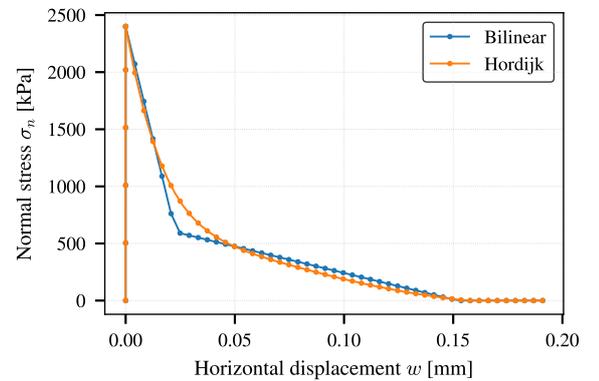
In this topic, we present two validations tests for the proposed constitutive model in order to verify the results when a cohesive element is submitted to extension and shear. Also, a simple mesh objectivity test is presented.

4.1.1 Extension and shear tests

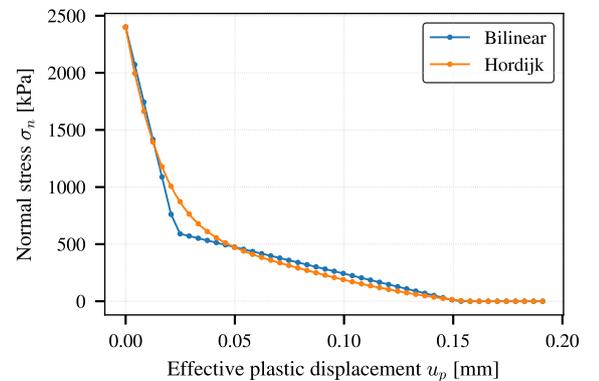
For the extension test, a mesh with two four-node quadrilateral elements and one four-node cohesive element was used. The mesh and boundary conditions are presented in Fig. 12 where the sides of the quadrilateral

**Table 1** Material parameters for the cohesive model used in the validation tests

Softening curve	$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$u_s$ (mm)	$u_c$ (mm)
Bilinear	27.0	0.20	1.4	5	2.40	0.0228	0.152
Hordijk	27.0	0.20	1.4	5	2.40	–	0.152



**(a)** Horizontal displacement vs normal stress



**(b)** Effective plastic displacement vs normal stress

**Fig. 13** Extension test results

elements are equal to 10 mm. As seen in Fig. 12b, the bulk element at left was constrained in all directions while the bulk element at right was subjected to rigid body movement; thus, all deformations are constrained to the cohesive element. The bilinear and Hordijk’s curves were used to model softening. The required parameters for these models are presented in Table 1 where  $\nu$  is the Poisson ratio and  $\sigma_{max}^0$  is the material tensile strength. Parameters  $u_s$  and  $u_c$  were obtained considering a concrete fracture energy  $G_F = 73$  N/m.

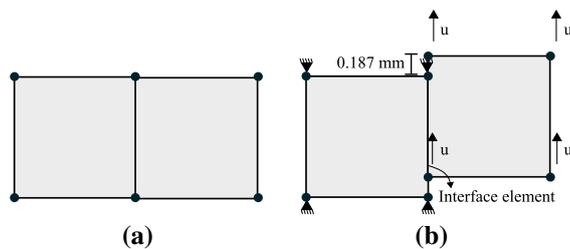
In this test, horizontal displacements equal to  $u = 0.187$  mm were applied in 50 increments. During the analysis, stresses and relative displacements were

**Table 2** Comparison of theoretical and numerical results for the extension test

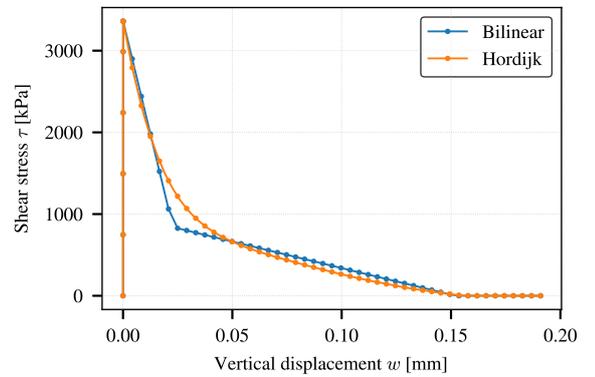
	$\sigma_{max}^0$ (kPa)	$\sigma_s$ (kPa)	$u_s$ (mm)	$u_c$ (mm)
Bilinear	2400.00	600.00	0.0228	0.152
Bilinear (numerical)	2399.93	590.19	0.0249	0.153
Hordijk	2400.00	–	–	0.156
Hordijk (numerical)	2399.90	–	–	0.157

logged at one of the integration points in the cohesive element. Figure 13 shows the curves  $w - \sigma_n$  and  $u_p - \sigma_n$  for the extension test using the two studied softening curves. Initially, the contact presents a stiff behavior during the elastic regime and provides small to negligible deformations. After reaching the concrete tensile strength, the normal stress is dominated by the softening behavior. Both softening curves behave as expected showing smaller values for  $\sigma_n$  as the contact plastifies. These results were compared with the theoretical values from both softening curves providing good agreement as shown in Table 2. Also it is worth to note that the overall behavior for both numerical results reproduces the theoretical curves qualitatively.

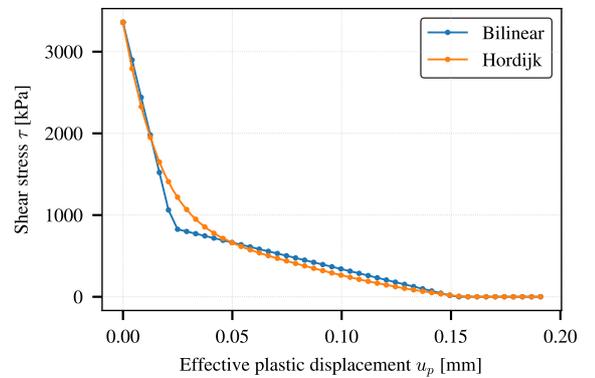
For the shear test, vertical displacements equal to  $u = 0.187$  mm were applied to all nodes of the bulk element at right according to Fig. 14 aiming to cause failure due to shear stresses. The results are presented in Fig. 15. After analysis, we can conclude that the cohesive element model behaved as expected. Initially, the shear stress increases in an elastic regime up to a value close to the material shear strength. On the sequence, the contact plastifies reducing its capacity to transfer stresses between the bulk elements. Once again, according to Table 3, the values obtained from the numerical analyses were in good



**Fig. 14** Shear test: **a** initial configuration; **b** deformed configuration



**(a)** Vertical displacement vs shear stress



**(b)** Effective plastic displacement vs shear stress

**Fig. 15** Shear test results

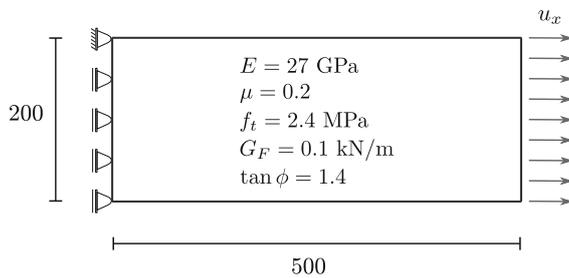
**Table 3** Comparison of theoretical and numerical results for the shear test

	$\tau_{max}^0$ (kPa)	$\tau_s$ (kPa)	$u_s$ (mm)	$u_c$ (mm)
Bilinear	3360.00	840.00	0.0228	0.152
Bilinear (numerical)	3359.26	826.07	0.0249	0.153
Hordijk	3360.00	–	–	0.156
Hordijk (numerical)	3359.00	–	–	0.157

agreement with the predictions from the softening curves. Also, it has been noted that the differences in the prediction of the maximum shear strength can be reduced by increasing the number of displacement increments.

#### 4.1.2 Mesh objectivity test

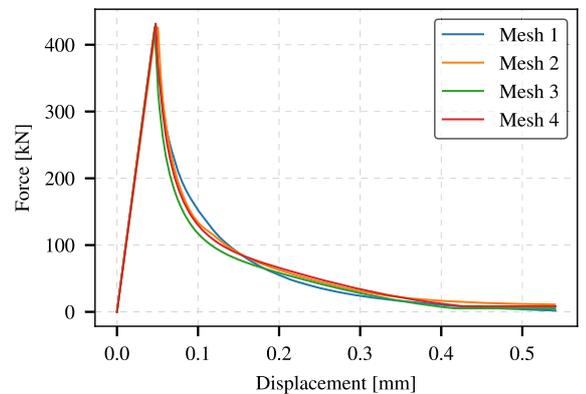
To verify that the application of the proposed formulation minimizes mesh dependency we present a simple mesh objectivity test similar to the one proposed by



**Fig. 16** Boundary conditions for the mesh objectivity test

Donadon and Iannucci (2006). Figure 16 shows the domain, boundary conditions and material properties used in this analysis. Prescribed displacements  $u_x$  at the right side were applied incrementally. Four relatively coarse meshes comprising triangular and quadrilateral elements were tested (Fig. 17). Although these discretizations, one structured and three unstructured, contain different numbers of cohesive elements we expect similar load–displacement curves before and after the peak load. Note that stiffness components from cohesive elements depend on the element’s representative length in order to reduce mesh dependency; otherwise meshes with greater quantity of elements would present a more flexible behavior.

During the analyses, the prescribed displacement was logged as well as the resultant force. The load–displacement curves are presented in Fig. 18. As can

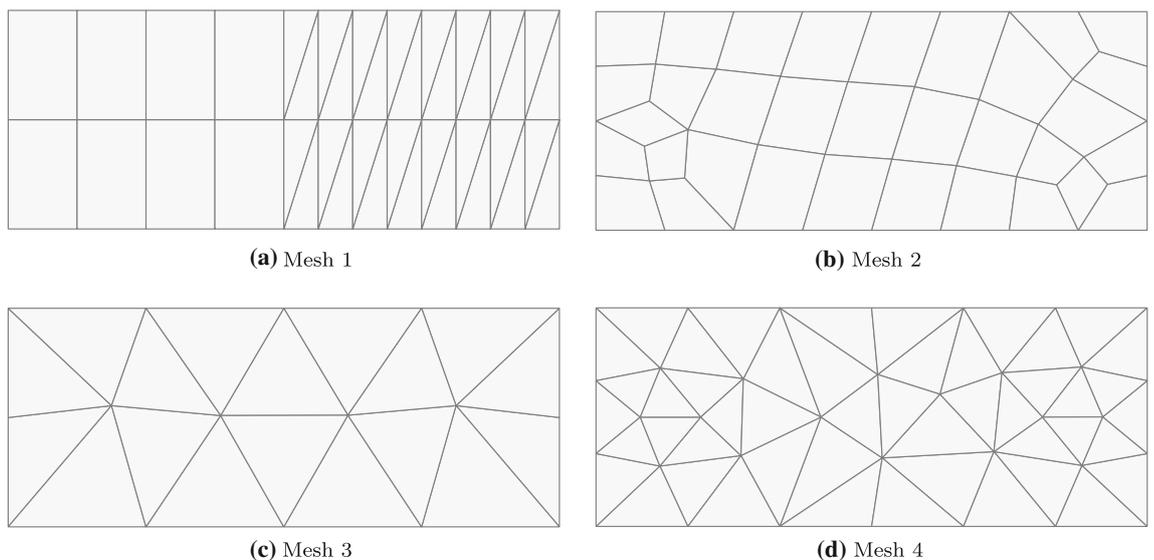


**Fig. 18** Numerical results using four different meshes

be seen, before the peak load all curves follow pretty much the same path. These results demonstrate that the element representative length used to calculate the stiffness of cohesive elements significantly reduce mesh dependency on the elastic behavior. Also after the peak load and despite the use of coarse meshes, all curves are pretty close, showing the same nonlinear pattern.

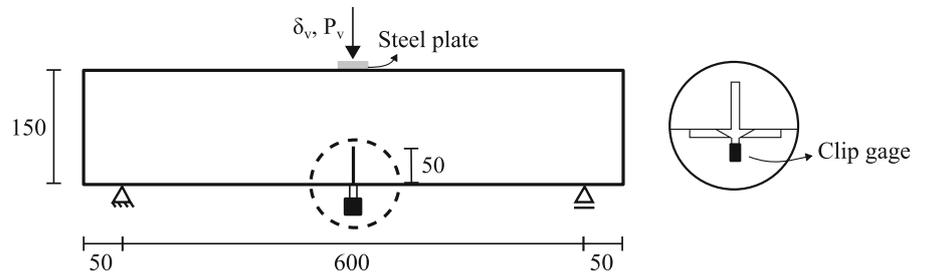
#### 4.2 Example 1—beam with a central notch

After validation, the proposed formulation is applied to the simulation of experimental tests. In this section, a beam with a central notch presented by Roesler et al.



**Fig. 17** Four different meshes studied in the objectivity test

**Fig. 19** Test setup for a typical beam presented by Roesler et al. (2007). All measures are in millimeters



**Table 4** Material parameters for bulk and cohesive elements in Example 1

Beam	$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_F$ (N/m)
V150-80	32.0	0.20	1.4	5	4.15	56.6	164

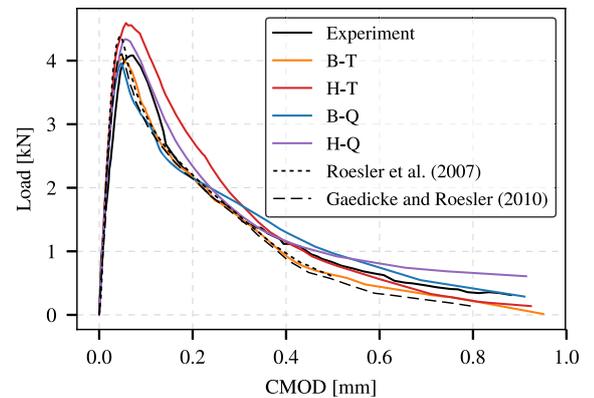
**Table 5** Mesh attributes for each model in Example 1

Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
B-T	1808	2651	5432	10864
H-T	1808	2651	5432	10864
B-Q	2108	4108	8432	16864
H-Q	2108	4108	8432	16864

(2007) is studied. The test setup is shown in Fig. 19 where the specimen thickness is equal to 80 mm. The experimental test aimed to induce a single crack in mode I. For this purpose, a controlled displacement was applied over a steel plate located at the middle top of the beam.

For the numerical analysis, the bilinear and Hordijk’s softening curves were used. The required material parameters are presented in Table 4. In order to promote some randomness in the shape of the crack path, an unstructured mesh was employed. Two types of elements were used to represent the concrete: quadrilateral elements with four integration points and triangular elements with a single integration point. For cohesive elements, four-node cohesive elements with two integration points were used. Table 5 presents a summary of all finite element models employed in this example. Letters B and H refer, respectively, to the bilinear and Hordijk’s curves. Likewise, letters T and Q refer to triangular and quadrilateral elements, respectively.

During the finite element analysis, the reaction force due to the imposed displacement and the notch gap (CMOD) were logged for further analysis. Figure 20



**Fig. 20** Experimental results and numerical predictions for Example 1

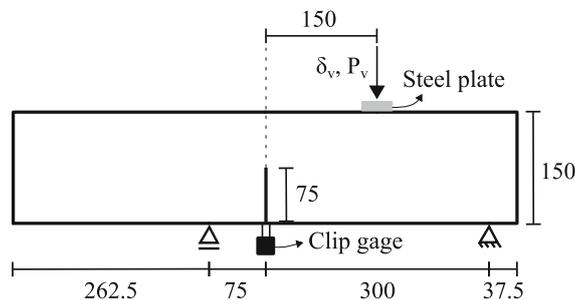
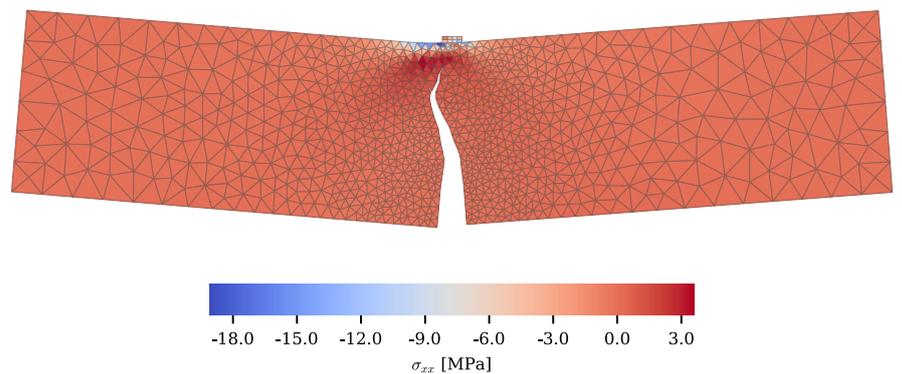
shows the results of load versus CMOD for all models. Table 6 shows a comparative analysis of the peak load ( $P_{max}$ ) and the corresponding CMOD ( $\delta$ ) against the experimental results presented by Roesler et al. (2007). We can see that peak loads presented values close to the experimental data where most discrepancies were under 5% while the corresponding CMOD values presented greater discrepancies. Note that in this case, the use of the Hordijk’s curve provided higher peak values. Also, the use of quadrilateral elements did not provide meaningful differences in the shape of the CMOD-load curve when compared to the results using triangular elements. In any case, the overall behavior of numerical curves was in good agreement with the experimental data.

In order to visualize the final deformation state, Fig. 21 shows the deformed mesh for model B-T at

**Table 6** Comparison of numerical and experimental results for Example 1

Model	Increments	$P_{max}$ (kN)	CMOD $\delta$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experimental	–	4.08	0.0683	–	–
B-T	1157	4.05	0.0506	0.8	25.9
H-T	1116	4.59	0.0574	12.5	15.9
B-Q	1006	3.96	0.0473	3.0	30.8
H-Q	1007	4.34	0.0565	6.4	17.2

**Fig. 21** Crack path of simulation B-T of the beam in Example 1



**Fig. 22** Notched beam with eccentric loading investigated by Galvez et al. (1998). All measures are in millimeters

the end of the analysis using a scale factor of 50. Also, the  $\sigma_{xx}$  stress field is displayed in the figure where it is possible to see a high concentration of tensile stresses at the crack tip, which is consistent with the fracture process.

Figure 20 also shows the numerical results from other authors using cohesive elements (Roesler et al. 2007; Gaedicke and Roesler 2010). Among the available results, the best ones from each author have been considered. In both cases, the curves show good agreement with the experimental data. Yet, it is worth to mention that the results from the first author were only available up to CMOD equal to 0.5 m.

**Table 7** Parameters of concrete and cohesive elements for Example 2

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
38.0	0.20	1.4	5	3.00	69

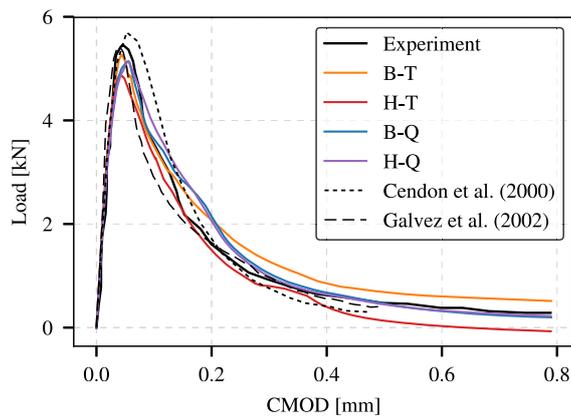
### 4.3 Example 2—notched beam with eccentric loading

In this example, we simulate an experimental beam test investigated by Galvez et al. (1998). Figure 22 shows the test setup where the beam features a central notch and non-symmetric supports. The specimen’s thickness is equal to 50 mm. This test aims to study the cracking properties of concrete in mixed mode; thus an eccentric displacement is imposed at the beam top with the aid of a steel plate. Also, in this case, the numerical analyses were performed using the bilinear and Hordijk’s curves. The required material parameters are presented in Table 7. The values of Young’s modulus, Poisson ratio, fracture energy and tensile strength of concrete were extracted from the work of Sancho et al. (2006).

For the finite element analysis, two unstructured meshes were generated. Those are composed of quadrilateral and triangular elements, respectively. Table 8 summarizes information for all studied models includ-

**Table 8** Summary of finite element models analyses in Example 2

Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
Mesh 1	264	383	792	1584
Mesh 2	1056	1558	3168	6336
Mesh 3	2376	3525	7128	14256
Mesh 4	4224	6284	12672	25344



**Fig. 23** Experimental results and numerical prediction for Example 2

ing mesh data. Note that we chose to use unstructured meshes since they tend to provide crack patterns compatible with cracks observed in concrete specimens. Also, the authors noticed that the use of structured meshes, in some cases, provide increased strength and unrealistic crack patterns due to interlocking between bulk elements, especially in cases of mixed mode fracture. During the numerical analysis, the reaction force at the steel plate location, as well as the CMOD at the notch, were logged for further analysis. The load versus CMOD curves from numerical results are presented in Fig. 23 and compared with the experimental curves. From the results, we can observe excellent agreement

**Table 9** Comparison of numerical results and experimental data for Example 2

Model	Increments	$P_{max}$ (kN)	CMOD $\delta$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experiment	–	5.46	0.0457	–	–
B-T	3396	5.27	0.0436	3.5	4.5
H-T	2586	4.89	0.0414	10.5	9.5
B-Q	1442	5.14	0.0540	5.9	18.1
H-Q	1389	5.14	0.0551	5.8	20.6

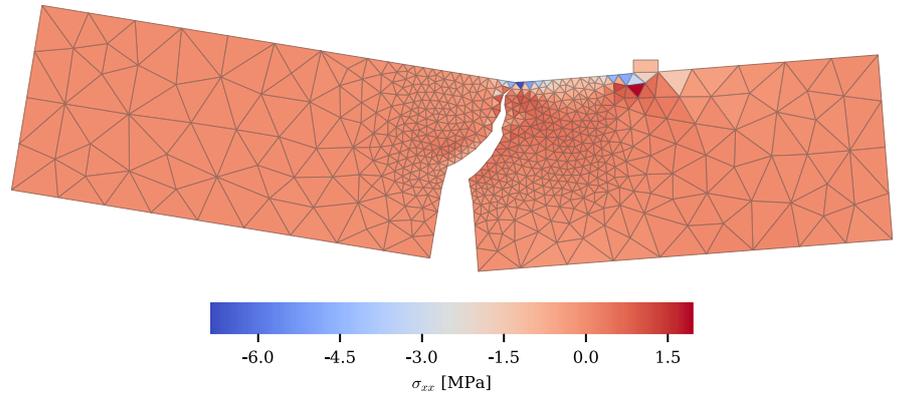
between experimental and numerical curves, including at the softening branch. Note that all numerical curves follow the same pattern of the experimental one. Table 9 shows a comparison of the peak load ( $P_{max}$ ) and corresponding CMOD ( $\delta$ ) where, as in the previous example, it is possible to verify the very good agreement.

Figure 24 shows the beam at the end of the B-T analysis (model with the bilinear softening curve for cohesive elements and triangular elements for bulk ones) with a deformation scale of 50. The figure also shows the  $\sigma_{xx}$  stress field where the stress concentrations are consistent with the loading and cracking process. Figure 23 also shows the numerical results from other authors (Cendón et al. 2000; Gálvez et al. 2002) that used cohesive elements. Again, the best results from each author have been considered. Although they were only available for CMOD values up to around 0.5 mm, both curves present good agreement with the experimental data and are similar to our results.

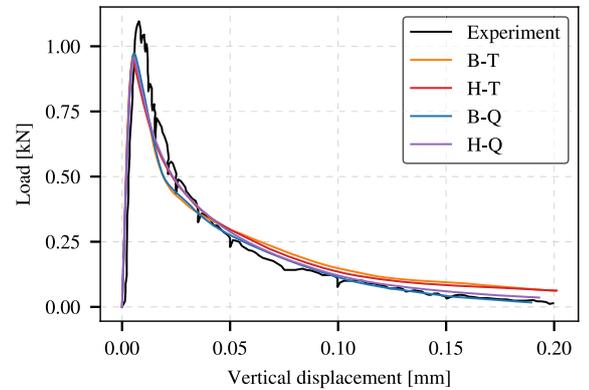
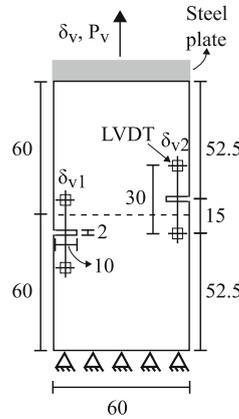
#### 4.4 Example 3—double notched rectangular plate

The third experimental test to be analyzed was investigated by Shi et al. (2000). This test aims to study the fracture properties of concrete in Mode I by inducing cracks that start at each notch and go towards the center of the specimen. Figure 25 presents the test diagram, including the boundary conditions. As can be seen, the specimen is fixed at the bottom and features a steel plate at the top used to apply controlled displacements and, consequently, tensile stresses. The figure also shows the positions where displacements were logged with the aid of LVDTs. The specimen thickness was equal to 10 mm. Four finite element analyses were carried out as a result of combining triangular and quadrilateral meshes with the bilinear and Hordijk’s curves. Table 10 shows the material parameters used in all analyses, and Table

**Fig. 24** Crack path of simulation B-T in Example 2



**Fig. 25** Test diagram for the double notched rectangular plate specimen. All measures are in millimeters



**Fig. 26** Experimental results and numerical prediction for Example 3

**Table 10** Material parameter for bulk and cohesive elements in Example 3

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
31.0	0.20	1.4	5	3.00	50

**Table 11** Summary of finite elements models analysed in Example 3

Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
B-T	1830	2682	5490	10980
H-T	1830	2682	5490	10980
B-Q	1722	3181	6507	13014
H-Q	1722	3181	6507	13014

**Table 12** Comparison of numerical results and experimental data for Example 3

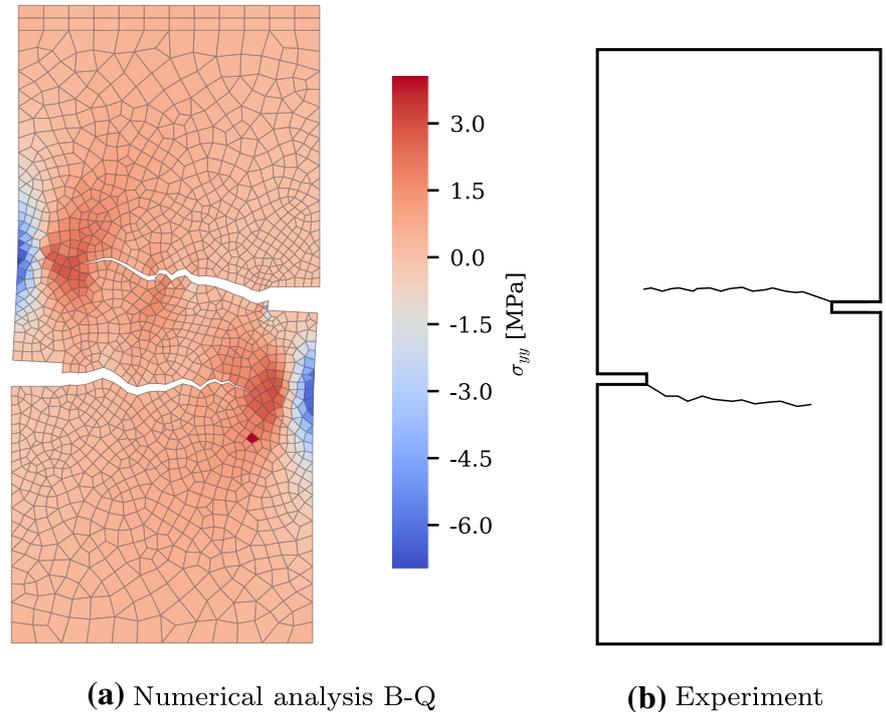
Model	Increments	$P_{max}$ (kN)	$\bar{\delta}$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \bar{\delta} }{\bar{\delta}}$ %
Experiment	–	1.10	0.0076	–	–
B-T	1712	0.97	0.0052	12.2	32.2
H-T	1392	0.95	0.0051	13.9	33.5
B-Q	1109	0.97	0.0056	11.5	26.8
H-Q	1132	0.96	0.0053	13.1	30.7

11 presents a summary of the studied finite element models.

During the finite element analysis, the reaction force  $P_v$  at the steel plate was logged as well as the ver-

tical displacements ( $\delta_{v1}$  and  $\delta_{v2}$ ) at positions consistent with the LVDTs locations, according to Fig. 25. Figure 26 shows a plot of the average vertical displacement,  $\bar{\delta} = (\delta_{v1} + \delta_{v2})/2$ , versus force  $P_v$  while Table 12 presents a comparative analysis of the peak load and corresponding displacements from numerical and experimental results as in previous examples. Once again, very good agreement can be observed. Finally, Fig. 27 shows the deformed state multiplied

**Fig. 27** Crack path of double notched rectangular plate



by a scale factor of 50 at the end of the B-Q model analysis together with the experimental crack paths. Good agreement in the crack pattern is observed. Also, the figure shows the  $\sigma_{yy}$  stress field where high tensile stress concentrations near the cracks tip are present.

In order to verify convergence of numerical analyses using the proposed model, the same experiment is analyzed using different meshes. Initially, a coarse mesh is proposed. Later, three new meshes are obtained by refinement using the h-method. Thus, elements in these meshes are obtained by subdivisions of elements from the initial mesh. Figure 28 shows all four meshes, whereas Table 13 shows a summary.

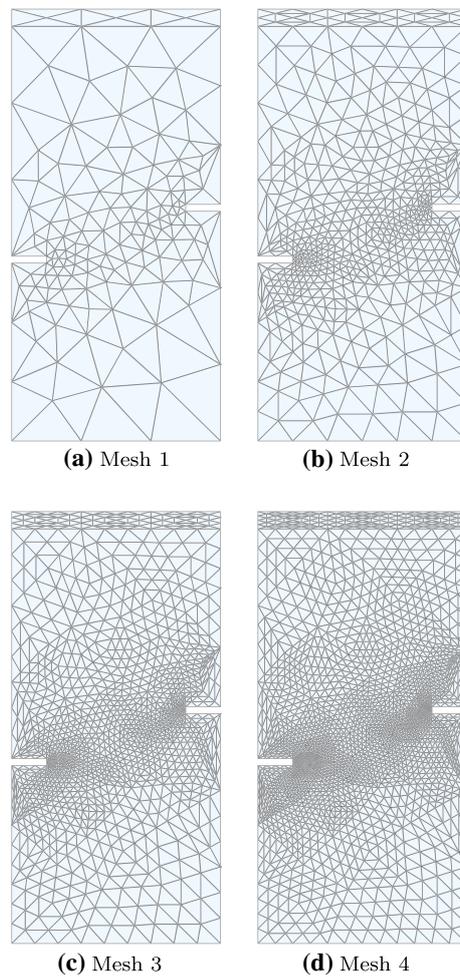
The load–displacement curves for the four cases are presented in Fig. 29. As can be seen, curves follow a convergence pattern. Notice that results from Mesh 3 and Mesh 4 are quite close. This demonstrates that the application of the proposed model leads to convergent results.

#### 4.5 Example 4—double notched square plate

The fourth example analyzes one experimental test studied by Nooru-Mohamed (1992). Among several plain concrete specimens with different sizes and load-

ing configurations studied by the author, we selected a 200 mm  $\times$  200 mm double notched square plate with 50 mm thickness where horizontal and vertical controlled displacements were applied simultaneously. The test induces slanted cracks that start at notches and go towards the center of the specimen with the purpose of studying the cracking properties of concrete in Mode I and II. Figure 30 shows the test setup. Note that the right side below the notch and the bottom of the specimen are bonded to a fixed steel plate. In turn, the left side above the notch and the top of the specimen are bonded to a movable steel plate. During the experimental test, a horizontal  $\delta_h$  and a vertical  $\delta_v$  controlled displacements (with equal rates) were simultaneously applied at the movable steel plate. Figure 30 also shows the positions where displacements were logged with the aid of LVDTs.

Four finite element analyses were carried out as the result of combining triangular and quadrilateral meshes with the bilinear and Hordijk's curves. Table 14 shows the material properties used in all analyses according to Nooru-Mohamed (1992) and Table 15 presents a summary containing the mesh attributes for all analyzed models. During the finite element analysis, displacements  $\delta_v$  and  $\delta_h$  were applied simultaneously at

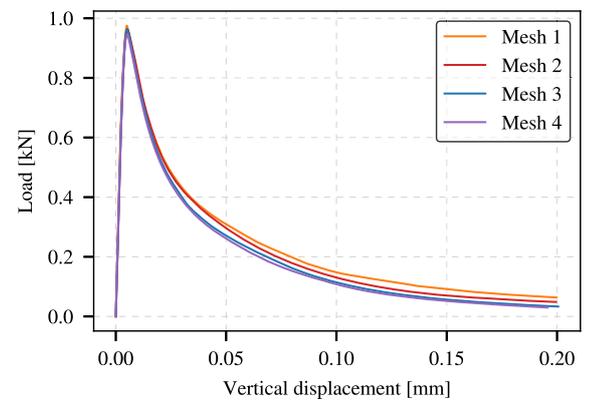


**Fig. 28** Four different meshes studied in the h-refinement convergence test

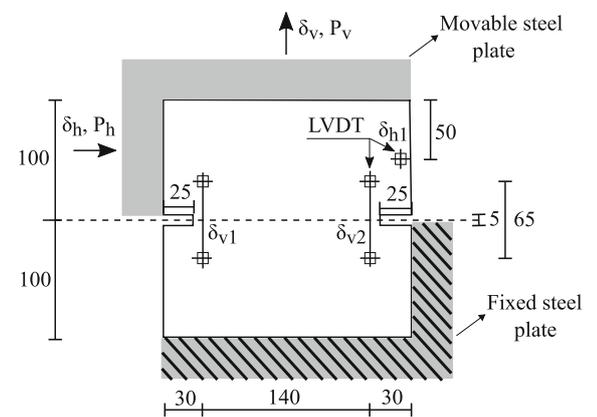
**Table 13** Summary of finite elements models analysed in the h-refinement convergence test

Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
Mesh 1	264	383	792	1584
Mesh 2	1056	1558	3168	6336
Mesh 3	2376	3525	7128	14256
Mesh 4	4224	6284	12672	25344

equal rates as in the experiment. The reaction forces  $P_h$  and  $P_v$  corresponding to the imposed displacements  $\delta_h$  and  $\delta_v$ , respectively, were logged for further analysis. Also, the vertical displacements  $\delta_{v1}$  and  $\delta_{v2}$  and the horizontal displacement  $\delta_{h1}$  were logged at positions compatible with the locations of LVDTs in the exper-



**Fig. 29** Results from the h-refinement convergence test using triangular elements



**Fig. 30** Test diagram for the double notched square plate. All measures are in millimeters

**Table 14** Material parameter for bulk and cohesive elements in Example 4

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_F$ (N/m)
30.0	0.20	1.4	5	3.30	40	100

iment (see Fig. 30). With this information, two plots were elaborated. Figure 31a shows a plot of the average vertical displacements,  $\bar{\delta} = (\delta_{v1} + \delta_{v2})/2$ , versus the vertical load  $P_v$  and Fig. 31b shows a plot of the horizontal displacement  $\delta_{h1}$  versus horizontal load  $P_h$ . As seen, both softening curves provide quite similar results. Also, most part of the numerical curves is in good agreement with the experimental ones. Table 16 presents a comparative analysis of the vertical peak load and corresponding displacements ( $\bar{\delta}$ ) from numer-

**Table 15** Summary of finite element models analysed in Example 4

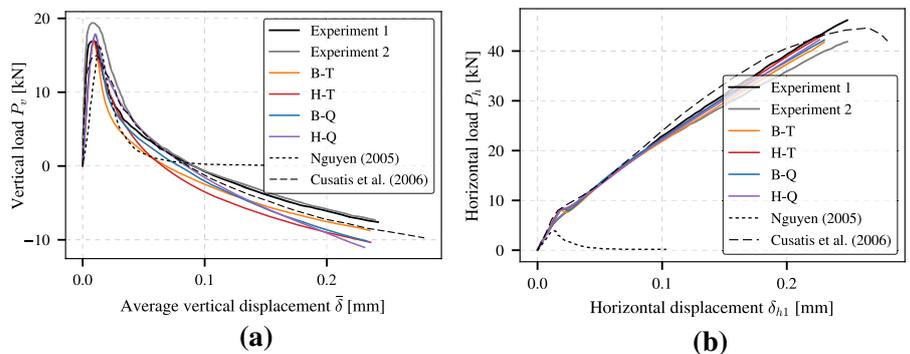
Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
B-T	3191	4739	9573	19146
H-T	3191	4739	9573	19146
B-Q	3281	6479	13124	26248
H-Q	3281	6479	13124	26248

ical and experimental results. An excellent agreement is observed.

Figure 32a shows the deformed state with a scale factor of 50 at 75% of the H-T model analysis. In turn, Fig. 32b shows the experimental crack paths. Good agreement in crack patterns can be observed. Also, note that extra finite elements were required to represent the rigid steel plates where displacements are applied. Figure 32a also shows the  $\tau_{xy}$  stress field where it is possible to see a concentration of shear stresses between the cracks due to the development of material discontinuity.

Figure 31 also shows the numerical results from Nguyen (2005) and Cusatis and Cedolin (2006). Although these authors do not use cohesive elements, their results provide a chance to compare the proposed model with other approaches. The first author uses conventional solid elements and simulates fracture by using a nonlocal damage model. In turn, the second authors use a confinement-shear lattice model where the material is represented by a set of connected particles. As can be seen in the figure, the method proposed by Nguyen (2005) was unable to predict the arise of negative vertical force along the softening branch. Also, the horizontal load curve was not well predicted.

**Fig. 31** Experimental data and numerical prediction for Example 4



**Table 16** Comparison of numerical results and experimental data for Example 4

Model	Increments	$P_{max}$ (kN)	$\bar{\delta}$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \bar{\delta} }{\bar{\delta}}$ %
Experiment 1	–	16.80	0.0105	–	–
B-T	3534	16.92	0.0088	0.7	15.8
H-T	2016	17.01	0.0088	1.3	15.7
B-Q	4516	17.84	0.0105	6.2	0.5
H-Q	4008	17.88	0.0105	6.5	0.1

On the other hand, Cusatis and Cedolin provided better results, yet the curve for the horizontal load presents a pattern slightly different from the experiment.

#### 4.6 Example 5—L-shaped panel

The last example analyzes the test investigated by Winkler (2011) where a 100 mm thick L-shaped specimen is loaded in order to study the concrete fracture properties in Mode I. Figure 33 shows the test setup. The bottom of the specimen is fixed, and a controlled vertical displacement is imposed in a small steel plate at the right side, aiming to induce tensile stress concentrations at point A.

For the finite element analyses, the material properties were taken from the work of Ghosh and Chaudhuri (2013) and are shown in Table 17. This test also aims to compare the performance of elements with linear and quadratic interpolations. A total of eight finite element analyses were performed by combining the two implemented softening curves with meshes composed by triangular and quadrilateral elements and different interpolation orders. Table 18 presents a summary containing the mesh attributes for all models. In this table LI, BI

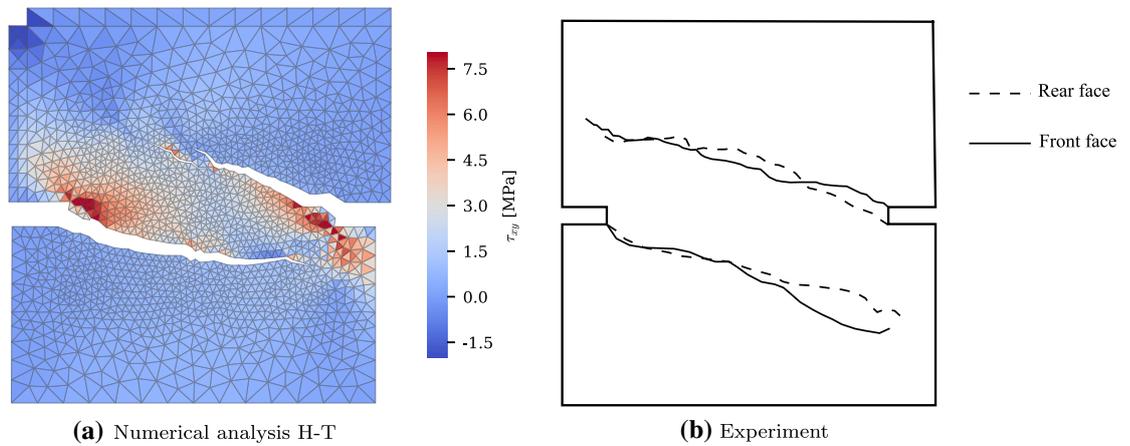


Fig. 32 Crack path for the double notched square plate

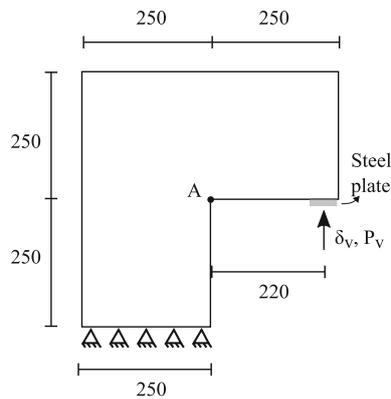


Fig. 33 Test setup for the L-shaped panel specimen. All measures are in millimeters

and QI refer to linear, bilinear, and quadratic interpolations, respectively, used for the bulk elements. For linear interpolation, 3-node triangles with one integration point were used. In turn, for bilinear interpolation, we considered 4-node quadrilaterals with four integration points. Finally, for quadratic interpolation, 6-node triangles with three integration points and 9-node quadrilaterals with four integration points were employed. For the case of elements with linear and bilinear interpolation, the corresponding cohesive elements were linear with two nodes per side and two integration points. Likewise, for quadratic interpolation, the corresponding quadratic cohesive elements featured 3 nodes and 2 integration points.

Table 17 Material parameter for bulk and cohesive elements in Example 5

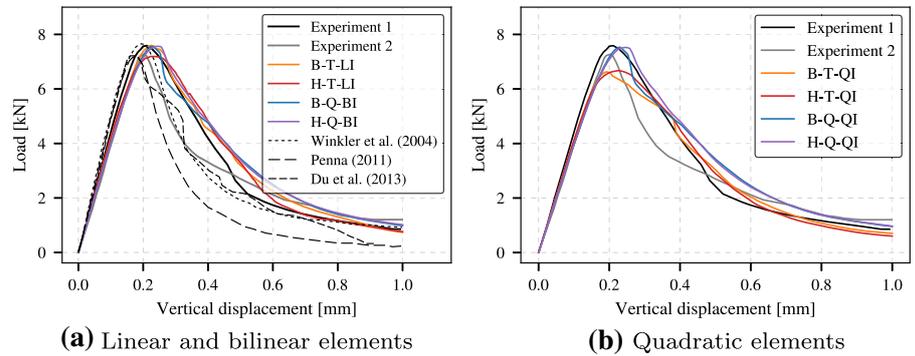
$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
20.0	0.20	1.4	5	2.80	140

Table 18 Summary of finite element models analysed in Example 5

Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
B-T-LI	1673	2464	5021	10042
H-T-LI	1673	2464	5021	10042
B-Q-BI	3518	6956	14072	28144
H-Q-BI	3518	6956	14072	28144
B-T-QI	1673	2464	10044	20088
H-T-QI	1673	2464	10044	20088
B-Q-QI	3518	6956	31662	63324
H-Q-QI	3518	6956	31662	63324

In the course of the finite element analyses, the reaction force due to the imposed displacement was logged. Later, this force was plotted against the prescribed displacement and compared with the experimental data. Figure 34a shows the results with the use of linear and bilinear elements. Likewise, Fig. 34b shows the results plot for quadratic elements. From the figures, we con-

**Fig. 34** Experimental results and numerical prediction for Example 5



**Table 19** Comparison of numerical results and experimental data for Example 5

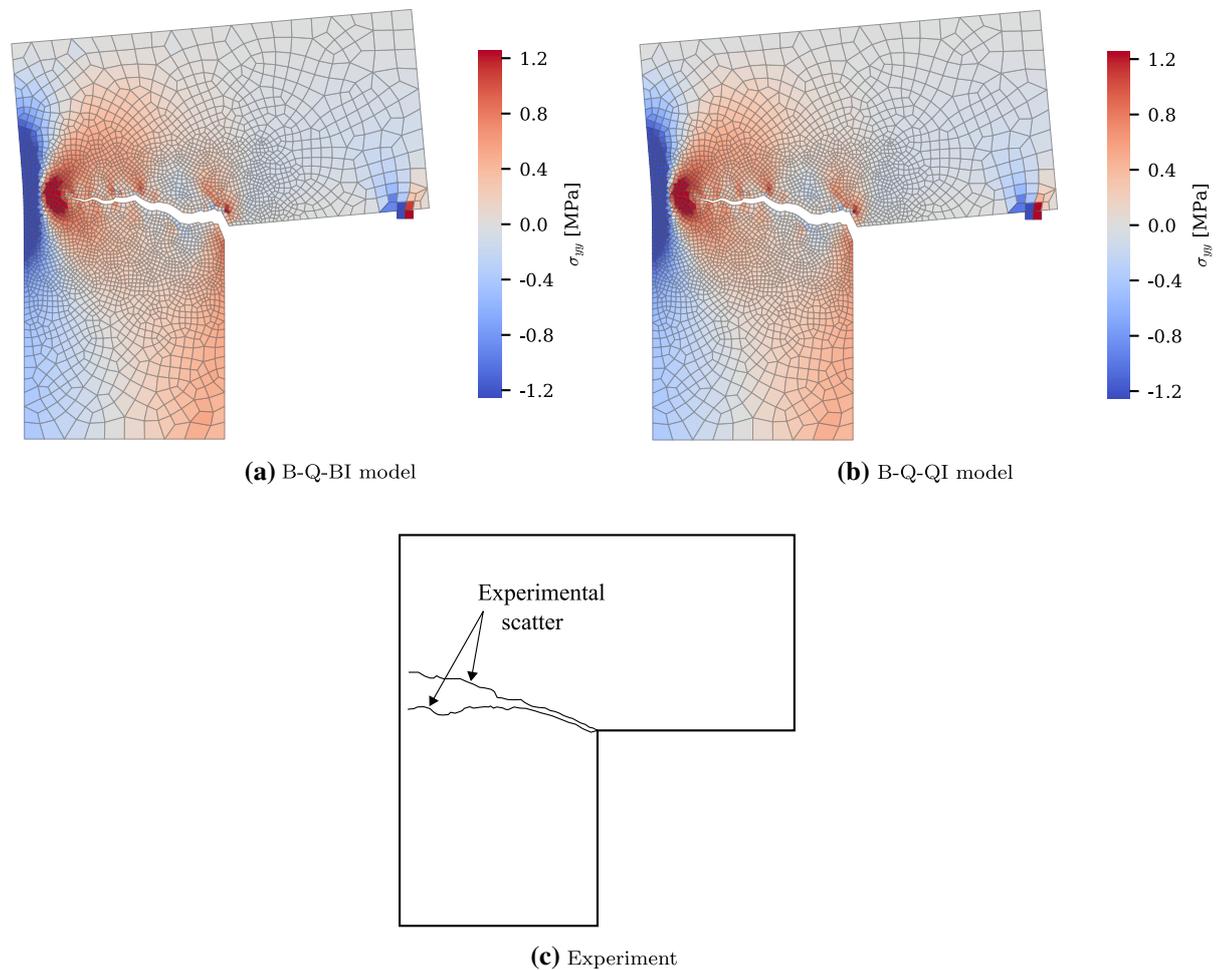
Model	Increments	$P_{max}$ (kN)	$\delta_v$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta_v }{\delta_v}$ %
Experiment	–	7.59	0.2112	–	–
B-T-LI	2205	7.60	0.2251	0.1	6.6
H-T-LI	2603	7.19	0.2244	5.2	6.2
B-Q-BI	1324	7.56	0.2260	0.4	7.0
H-Q-BI	1243	7.57	0.2463	0.3	16.6
B-T-QI	1581	6.63	0.1917	12.7	9.2
H-T-QI	1375	6.68	0.2218	12.1	5.0
B-Q-QI	1360	7.53	0.2290	0.8	8.4
H-Q-QI	1287	7.53	0.2427	0.8	14.9

clude that there is good agreement between the numerical results and experimental data. It is worth to note that there is no remarkable difference by the use of elements with linear and bilinear interpolation against their quadratic counterparts. Nonetheless, the use of quadratic elements presented a slightly more flexible behavior, especially during the loading stage, which is expected since quadratic elements present more deformation modes. Table 19 presents a comparative analysis for the peak load ( $P_{max}$ ) and corresponding displacement ( $\delta_v$ ) from all simulations against the experimental data. Again, despite the results from models B-T-QI and H-T-QI, the maximum load values show no significant differences between the use of linear and quadratic interpolations. Thus, we may conclude that, for this type of analysis, the quality of the results is more related to the discretization level rather than the order interpolation.

Finally, Fig. 35 shows a qualitative comparison of the crack paths for models B-Q-BI and B-Q-QI (using

a scale factor of 50) against the experimental crack. Note that there is no significant difference between the crack paths due to the interpolation order. The figure also includes the corresponding  $\sigma_{yy}$  stress fields where no significant differences are observed.

Regarding the comparison with other numerical results, Fig. 34a also shows the results from Winkler et al. (2004) that used a smeared crack model, Penna (2011) that used a damage mechanics model and Du et al. (2013) that used a formulation based on the XFEM method. When more than one result was available for each author, the best ones were considered in the figure. As can be seen, among these approaches, the XFEM method provided better results than the other despite presenting non-realistic oscillations in the softening branch of the load–displacement curve. On the other hand, our results seem to be closer to the experimental curves compared to the results of other numerical approaches.



**Fig. 35** Numerical and experimental results for Example 5

## 5 Conclusions

The paper presents a two-dimensional constitutive model for cohesive elements to be used in the simulation of cracking (mode I and mixed mode) in quasi-brittle materials. The model was elaborated using the plasticity theory featuring a Coulomb-based yield function, a non-associated flow rule, and an implicit stress integration scheme. Two softening laws were studied: a bi-linear law and the Hordijk's law. Finite element simulations using the proposed model work for fair levels of mesh refinement and elements with different interpolation orders. The model was validated in extension and shear tests and later applied in the simulation of several classical experiments of notched beams. In all cases, very good agreement between numerical and exper-

imental results was observed in CMOD versus load curves, especially when observing the softening behavior. It represents an important outcome since the proposed method is able to simulate a wide range of experiments while it is reasonably simple to be implemented in computer codes. Regarding the aspects studied along with the examples, we can say that no significant differences in the results were observed by the use of different types of elements, although triangular elements provided slightly better crack patterns. Also, it has been observed that elements with quadratic interpolation did not significantly improve the results other than small changes in stress distributions. Regarding the softening curves, the use of a bilinear curve did not provide significant differences in terms of deformability nor crack patterns when compared to Hordijk's curve. Due

to the high nonlinearity of the fracture problem, the authors recommend the use of a finite element solver with automatic load/displacement stepping. Finally, the authors consider future research to extend the model to three-dimensional conditions.

**Acknowledgements** The support from the Brazilian Research Council (CNPq) is gratefully acknowledged.

## References

- Asferg JL (2006) Modeling of concrete fracture applying the extended finite element method, Ph.D. thesis, Technical University of Denmark
- Barenblatt GI (1962) The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech* 7:55–129
- Barros JA, Figueiras JA (2001) Model for the analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade. *Comput Struct* 79(1):97–106 [arXiv:1012.5765](https://arxiv.org/abs/1012.5765)
- Basaran C, Nie S (2007) A thermodynamics based damage mechanics model for particulate composites. *Int J Solids Struct* 44(3):1099–1114
- Beer G (1985) An isoparametric joint/interface element for finite element analysis. *Int J Numer Methods Eng* 21(4):585–600
- Belytschko T, Gracie R, Venturav G (2009) A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Model Simul Mater Sci Eng* 17(4):043001
- Bocca P, Carpinteri A, Valente S (1990) Size effects in the mixed mode crack propagation: softening and snap-back analysis. *Eng Fract Mech* 35(1):159–170
- Caggiano A, Etse G, Martinelli E (2012) Zero-thickness interface model formulation for failure behavior of fiber-reinforced cementitious composites. *Comput Struct*. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.01.013>
- Carol I, Prat P, López C (1997) Normal/shear cracking model: application to discrete crack analysis. *J Eng Mech* 123:765–773
- Cendón DA, Gálvez JC, Elices M, Planas J (2000) Modelling the fracture of concrete under mixed loading. *Int J Fract* 103(3):293–310
- Červenka J, Červenka V, Laserna S (2018) On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice. *Eng Fract Mech* 197:27–47
- Comi C, Perego U (2001) Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *Int J Solids Struct* 38(36):6427–6454
- Corona E, Reedy ED (2011) Calculations of buckle-driven delamination using cohesive elements. *Int J Fract* 170(2):191–198
- Cunha VM, Barros JA, Sena-Cruz JM (2011) An integrated approach for modelling the tensile behaviour of steel fibre reinforced self-compacting concrete. *Cement Concrete Res* 41(1):64–76
- Cunha VM, Barros JA, Sena-Cruz JM (2012) A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites. *Comput Struct* 94–95:22–33
- Cusatis G, Cedolin L (2006) Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete. *Comput Methods Appl Mech Eng* 195:7154–7171
- Dahlblom O, Ottosen NS (1990) Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model. *J Eng Mech* 116:55–76
- de Borst R, Nauta P (1985) Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Eng Comput* 2:35–46
- Donadon MV, Iannucci L (2006) An objectivity algorithm for strain softening material models. In: Proceedings of the 9th international LS-DYNA users conference. (1):43–54
- Du X, Jin L, Guowei M (2013) Numerical modeling tensile failure behaviour of concrete at mesoscale using extended finite element method. *Int J Damage Mech* 23:872–898
- Dugdale DS (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys Solids* 8:100–104
- Fries T-P, Belytschko T (2006) The intrinsic XFEM: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. *Int J Numer Methods Eng* 68:1358–1385
- Gaedicke C, Roesler J (2010) Fracture-based method to determine flexural capacity of concrete beams on soil. *Road Mater Pavement Des* 11(2):361–385
- Galvez JC, Cendón D, Planas J, Guinea G, Elices M (1998) Fracture of concrete under mixed loading-experimental results and numerical prediction. *Fract Mech Concrete Struct* 3:729–738
- Gálvez JC, Červenka J, Cendón DA, Saouma V (2002) A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. *Cement Concrete Res* 32(10):1567–1585
- García-Álvarez VO, Gettu R, Carol I (2012) Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model. *Sadhana Acad Proc Eng Sci* 37(1):187–205
- Gerstle WH, Xie M (1992) FEM modeling of fictitious crack propagation in concrete. *J Eng Mech* 118:416–434
- Ghosh A, Chaudhuri P (2013) Computational modeling of fracture in concrete using a meshfree meso-macro-multiscale method. *Comput Mater Sci* 69:204–215
- Gupta A, Akbar H (1984) Cracking in reinforced concrete analysis. *J Struct Eng* 110:1735–1746
- Gupta P, Pereira J, Kim D-J, Duarte C, Eason T (2012) Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: a non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Eng Fract Mech* 90:41–64
- Hillerborg A, Modeer M, Peterson P (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res* 6:773–782
- Hird CC, Kwok CM (1989) Finite element studies of interface behaviour in reinforced embankments of soft ground. *Comput Geotech* 8(2):111–131
- Hordijk DA (1992) Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses. vol 37, 1st edn. Heron, Netherlands
- Jiang H, Meng D (2018) 3D numerical modelling of rock fracture with a hybrid finite and cohesive element method. *Eng Fract Mech* 199(April):280–293
- Jin Z-H, Paulino GH, Dodds RH (2003) Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Eng Fract Mech* 70(14):1885–1912

- Lens LN, Bittencourt E, D'Avila VM (2009) Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete. *Eng Fract Mech* 76(14):2281–2297
- Li J, Kaliakin VN (1993) Numerical simulation of interfaces in geomaterials: development of new zero-thickness interface elements, Master's thesis, University of Delaware
- Mahabadi O, Kaifosh P, Marschall P, Vietor T (2014) Three-dimensional fdem numerical simulation of failure processes observed in opalinus clay laboratory samples. *J Rock Mech Geotech Eng* 6:591–606
- Manzoli O, Gamino A, Rodrigues E, Claro G (2012) Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Comput Struct* 94:70–82
- Manzoli OL, Maedo MA, Bitencourt LAG, Rodrigues EA (2016) On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Eng Fract Mech* 153:151–170
- Mariani S, Perego U (2003) Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *Int J Numer Methods Eng* 58:103–126
- Mazars J (1986) A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Eng Fract Mech* 25(5):729–737
- Mazars J, Pijaudier-Cabot G (1996) From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach. *Int J Solids Struct* 33(20):3327–3342
- Melenk JM, Babuska L (1996) The partition of unity finite element method: basis theory and applications. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139:289–314
- Moës N, Belytschko T (2002) Extended finite element method for cohesive crack growth. *Eng Fract Mech* 69:813–833
- Morin D, Bourel B, Bennani B, Lauro F, Lesueur D (2013) A new cohesive element for structural bonding modelling under dynamic loading. *Int J Impact Eng* 53:94–105
- Ngo D, Scordelis AC (1967) Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Proc* 64:152–163
- Nguyen GD (2005) A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory, Ph.D. thesis, University of Oxford
- Nguyen VP (2014) An open source program to generate zero-thickness cohesive interface elements. *Adv Eng Softw* 74:27–39
- Nilson A (1968) Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI J* 65:757–766
- Nooru-Mohamed MB (1992) Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach, Ph.D. thesis, Delft University of Technology
- Pandolfi A, Ortiz M (2002) An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations. *Eng Comput* 18(2):148–159
- Pandolfi A, Krysl P, Ortiz M (1999) Finite element simulation of ring expansion and fragmentation: the capturing of length and time scales through cohesive models of fracture. *Int J Fract* 95(1):279–297
- Park K, Paulino GH (2013) Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl Mech Rev* 64(6):060802
- Park K, Paulino GH, Roesler JR (2008) Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete. *Eng Fract Mech* 75(13):3806–3818
- Park K, Paulino GH, Roesler JR (2009) A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J Mech Phys Solids* 57(6):891–908
- Paulino GH, Celes W, Espinha R, Zhang ZJ (2008) A general topology-based framework for adaptive insertion of cohesive elements in finite element meshes. *Eng Comput* 24(1):59–78
- Penna SS (2011) Formulacao multipotencial para modelos de degradacao elastica, Ph.D. thesis, Federal University of Minas Gerais, Brazil
- Pituba JJC, Fernandes GR (2011) Anisotropic damage model for concrete. *J Eng Mech* 137(9):610–624
- Plesha ME, Ballarini R, Parulekar A (1989) Constitutive model and finite element procedure for dilatant contact problems. *J Eng Mech* 115(12):2649–2668
- Roesler JR, Paulino G, Park K, Gaedicke C (2007) Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cement Concrete Compos* 29(4):300–312
- Roy YA, Dodds RH (2001) Simulation of ductile crack growth in thin aluminum panels using 3-D surface cohesive elements. *Int J Fract* 110(1):21–45
- Sánchez M, Manzoli O, Guimarães L (2014) Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. *Comput Geotech* 62:27–39
- Sancho JM, Planas J, Gálvez JC, Reyes E, Cendon DA (2006) An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 29:1056–1065
- Segura J, Carol I (2010) Numerical modelling of pressurized fracture evolution in concrete using zero-thickness interface elements. *Eng Fract Mech* 77:1386–1399
- Shi C, van Dam AG, van Mier JGM, Sluys LJ (2000) Crack interaction in concrete. *Mater Build Struct EUROMAT* 6:125–131
- Simone A (2007) Partition of unity-based discontinuous finite elements: GFEM, PUFEM, XFEM. *Revue Européenne de Génie Civil* 11:1045–1068
- Song SH, Paulino GH, Buttlar WG (2006) Simulation of crack propagation in asphalt concrete using an intrinsic cohesive zone model. *J Eng Mech* 132(11):1215–1223
- Tabiei A, Zhang W (2017) Cohesive element approach for dynamic crack propagation: artificial compliance and mesh dependency. *Eng Fract Mech* 180:23–42
- Wells GN, Sluys LJ (2001) A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int J Numer Methods Eng* 50(12):2667–2682
- Winkler B (2011) Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten betonstrukturen auf der grundlage eines objektiven werkstoffgesetzes fur beton, Master's thesis, University of Innsbruck
- Winkler B, Hofstetter G, Lehar H (2004) Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 28:797–819
- Wittmann FH, Rokugo K, Bruhwiler E, Mihashi H, Simopnin P (1988) Fracture energy and strain softening of concrete as determined by compact tension specimens. *Mater Struct* 21:21–32
- Xie D, Waas AM (2006) Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis. *Eng Fract Mech* 73(13):1783–1796
- Xu XP, Needleman A (1994) Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J Mech Phys Solids* 42(9):1397–1434

Xu W, Zang M, Sakamoto J (2015) Modeling mixed mode fracture of concrete by using the combined discrete and finite elements method. *Int J Comput Methods* 13(01):1650007

Xu W, Zang M, Sakamoto J (2016) Modeling mixed mode fracture of concrete by using the combined discrete and finite elements method. *Int J Comput Methods* 13(01):1650007

Yang ZJ, Chen JF (2005) Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams. *Eng Fract Mech* 72:2280–2297

Zivaljic N, Nikolic Z, Smoljanovic H (2014) Computational aspects of the combined finite-discrete element method in modelling of plane reinforced concrete structures. *Eng Fract Mech* 131:669–686

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



# Three-dimensional modeling of fracture in quasi-brittle materials using plasticity and cohesive finite elements

Raul Durand · Fernando Hipólito Barros Trinidad da Silva

Received: 19 May 2020 / Accepted: 1 January 2021 / Published online: 6 February 2021  
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V. part of Springer Nature 2021

**Abstract** This paper presents a three-dimensional discrete approach based on the use of interface cohesive elements with zero thickness to model the crack formation and propagation in quasi-brittle materials. The interface constitutive model incorporates concepts of nonlinear fracture mechanics and plasticity. A Coulomb-based surface is used as yield function, and an exponential traction–separation curve as softening law. The model features a non-associated flow rule with an implicit integration scheme and is able to simulate the propagation of single and multiple cracks in mode I and mixed-mode. The proposed model was tested through extension and shear paths and applied in the simulation of experimental tests in concrete specimens available in the literature. Also, a study on the effect of the use of different bulk elements was performed. Numerical results, including peak loads and load-CMOD curves showing softening behavior, are in good agreement with the experimental data.

**Keywords** Finite elements · Quasi-brittle materials · Concrete cracking · Cohesive elements · Plasticity

## 1 Introduction

There are several techniques to deal with the simulation of fracture in quasi-brittle materials within the context of finite elements. Those techniques can generally be classified as continuous and discontinuous approaches. On the continuous approach, the cracks are represented in a smeared manner where the openings are distributed over the finite elements. On the other hand, in the discontinuous approach, cracks are modeled as displacement discontinuities between finite elements. The use of cohesive elements (e.g. Ngo and Scordelis 1967; Nilson 1968; Bocca et al. 1990; Gerstle and Xie 1992) and the XFEM (e.g. Melenk and Babuska 1996; Wells and Sluys 2001; Belytschko et al. 1996) are examples of the discontinuous approach. One advantage of using cohesive elements over continuous models is the possibility of obtaining more realistic crack representations since it allows the visualization of crack openings due to the progressive detachment of bulk elements. Another advantage lies in the capacity to simulate and visualize a large number of cracks.

The use of cohesive elements has obtained an interest in different areas. Applications in two dimensions (2D) include areas as crack propagation in concrete (Gerstle and Xie 1992; Carol et al. 1997; Cendón et al. 2000; Yang and Chen 2005; López et al. 2008a,b; García-Álvarez et al. 2012; Lens et al. 2009; Tejchman and Bobński 2013; Benedetto et al. 2018), fiber-reinforced medium (Caggiano et al. 2012; Etse et al.

---

R. Durand (✉) · F. H. B. T. da Silva  
Department of Civil and Environmental Engineering,  
University of Brasilia, Campus Darcy Ribeiro, Brasilia,  
DF CEP 70910-900, Brazil  
e-mail: durand@unb.br; raul.durand@gmail.com

F. H. B. T. da Silva  
e-mail: hipolitofernando@outlook.com

2012), geomechanics (Day and Potts 1994; Garolera et al. 2020), flow through fractures (Ng and Small 1997; Segura and Carol 2004, 2010; Carrier and Granet 2012; Nguyen et al. 2017), delamination (Geubelle and Baylor 1998; Turon et al. 2007; Corona and Reedy 2011), and general crack propagation (Molinari et al. 2007; Park et al. 2009). In turn, three-dimensional (3D) applications also include areas as crack propagation in concrete (Evangelista et al. 2013; Xu et al. 2016; Ferté et al. 2016; Jiang and Meng 2018), geomechanics (Beer 1985; Coutinho et al. 2003; Cerfontaine et al. 2015; Cui et al. 2019), delamination (Roychowdhury et al. 2002; van den Bosch et al. 2008), composites (Jin et al. 2003; Segurado and LLorca 2004; Caballero et al. 2008; Khoei et al. 2012) and general crack propagation (Ortiz and Pandolfi 1999; Pandolfi and Ortiz 2002; Nguyen 2014; Morin et al. 2013; Tabiei and Zhang 2017). Although two-dimensional simulations provide important insight into the fracture process, those are limited to plane stress and plane strain problems. Besides that, general three-dimensional state problems such as torsion cannot be analyzed using two-dimensional models.

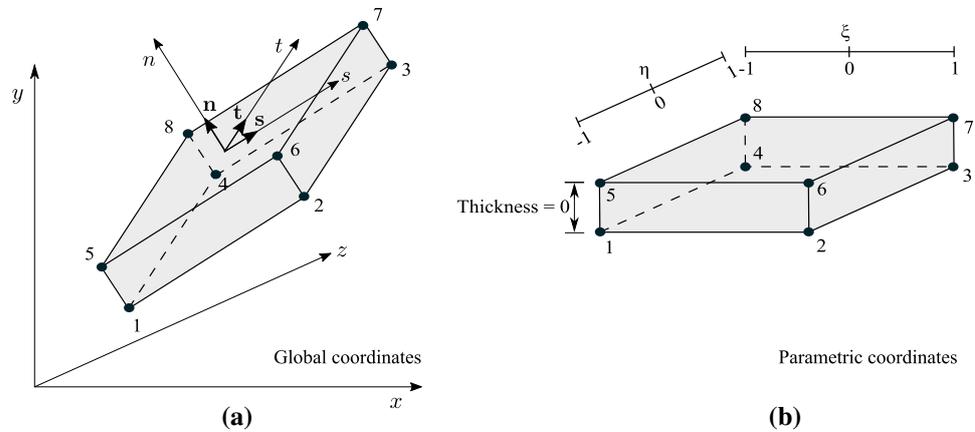
The prediction of crack openings and crack propagation using cohesive elements can be performed by the use of the cohesive zone model (CZM) (Dugdale 1960; Barenblatt 1962; Hillerborg et al. 1976). In this model, a crack is assumed to propagate when the stress at the crack tip reaches the tensile strength. Also, the CZM includes a fracture process zone (FPZ) that allows the transfer of stresses across the discontinuity. Those stresses can be related to the crack width by using softening curves, also called traction–separation relations. Bilinear (Wittmann et al. 1988; Yang and Chen 2005; Roesler et al. 2007; Park et al. 2008; Park and Paulino 2011) and exponential (Hordijk 1992; Xu and Needleman 1994) models are examples of traction–separation curves.

The failure of a cohesive element can be predicted using the Mohr-Coulomb theory. This theory is probably one of the simplest and practical theories due to the use of few material parameters that can be obtained using widely known experimental tests. Some authors (e.g. Carol et al. 1997; Segura and Carol 2010; Carey and Ma 1999; Lens et al. 2009; García-Álvarez et al. 2012) have investigated the use of yield functions based on this theory to simulate fracture in two-dimensional conditions within the context of plasticity and cohesive elements. In general, they present a good prediction

of the peak load in displacement driven crack tests. In some cases, few problems regarding the softening branch prediction can be pointed. For example, the lack of agreement with experimental data and no fully available curves. These results suggest the capability of a Coulomb-based law to predict the beginning of fracture and some difficulties related to plastic flow rules.

This work is a follow-up of a two-dimensional version (Durand and Silva 2019) where a Coulomb-based plasticity model was used. In that previous work, two different softening curves were studied (Bilinear and Hordijk's), verifying that the difference in finite element fracture simulations using these curves is negligible. Also, that study presented an analysis on the effect of different interpolation order in bulk elements, concluding that quadratic elements do not improve the results significantly. The 2D model was successfully applied in the fracture simulation of concrete specimens but restricted to plane stress conditions. On the other hand, this paper presents a 3D extension of the yield and plastic potential functions to include the additional shear stress component. As traction–separation law, the Hordijk's model is used in preference of the bilinear model. All the formulation, as well as necessary derivatives, are included in the paper. Along with the simulations, the effect of different bulk elements is also studied. The proposed model represents an alternative to 3D existing models (e.g. damage and XFEM models) due to the simplicity in terms of parameters and formulation which is given in the context of conventional plasticity. Also, it is capable of simulating, with good and fairly good agreement, a wide range of experimental tests from the literature.

Validation examples and simulations of classical experiments in 3D conditions are presented. Due to geometry and load asymmetry, most of the studied cases can only be simulated using a 3D model. Since the fracture problem is highly nonlinear, a finite element solver with automatic load/displacement stepping is used. The numerical load-CMOD curves present good and fairly good agreement with the experimental data, showing that our approach can simulate a range of cases involving mode I and mixed-mode fracture in 3D. Regarding the use of different types of bulk elements, we observed that hexahedral elements interfere with the development of cracks tending to increase the peak load or generate several cracks in regions where one crack was expected. On the other hand, the use of tetrahedral and pyramidal elements showed better



**Fig. 1** Eight-node interface element: **a** global coordinate system  $(x, y, z)$  and local reference given by vectors  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$ ; **b** parametric coordinate system  $(\xi, \eta)$

crack patterns. For problems that can be simplified to the plane stress state, wedge elements are enough to simulate the fracture process successfully.

The paper is organized as follows. Section 2 describes the basics of interface elements and the generation of interface elements in conventional meshes. Section 3 deals with the constitutive modeling for the cohesive elements. In turn, Sect. 4 deals with the numerical solution procedure. Finally, Sect. 5 presents some patch tests and application examples where laboratory experiments are successfully simulated using the proposed approach.

### 2 Isoparametric interface element

This section addresses the finite element formulation of an isoparametric interface element in three dimensions. Since the proposed approach requires introducing cohesive elements between bulk elements, the algorithm to generate interface elements into an existing conventional mesh is briefly described. This section also includes the procedure to compute a representative length for bulk elements linked to cohesive elements.

#### 2.1 Finite element formulation

Finite element formulations for isoparametric interface elements are quite standard and have been addressed in previous works (Beer 1985; Plesha 1989; Hird and Kwok 1989; Roy and Dodds 2001; Jin et al. 2003). This

paper presents the formulation, referring to a quadrilateral 8-node interface element; however, the equations can easily be modified to consider triangular interface elements and even higher interpolation order elements. Figure 1 presents a zero thickness interface element with contact area  $A$ . The figure at left shows the element located at the global coordinate system  $(x, y, z)$ . In contrast, the figure at right shows the element in the parametric system  $(\xi, \eta)$ .

The displacements vector for the element presented in Fig. 1 is written as

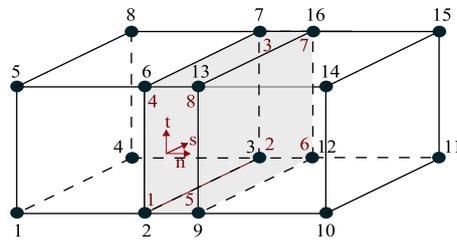
$$\mathbf{U} = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, \dots, u_{x8}, u_{y8}, u_{z8}\}. \tag{1}$$

For the given parametric coordinates  $(\xi, \eta)$ , the relative displacements between faces are represented by vector  $\mathbf{w} = \langle w_n, w_s, w_t \rangle$ . This vector is calculated by interpolation as

$$\mathbf{w}(\xi, \eta) = \mathbf{T}(\xi, \eta)\mathbf{N}(\xi, \eta)\mathbf{U}, \tag{2}$$

where  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  is a matrix based on shape functions and  $\mathbf{T}(\xi, \eta)$  is a rotation matrix used to express global displacements in the local reference. The following equation shows matrix  $\mathbf{T}$ , where  $n_i, s_i$  and  $t_i$  are the components of vectors  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$ , respectively

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$



**Fig. 2** Global (black) and local (red) nodal numbering for a cohesive element

The rotation matrix is easily calculated employing the Jacobian matrix of a quadrilateral element. The Jacobian matrix is defined as

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

This is a non-square matrix since the mapping occurs between  $(x, y, z)$  and  $(\xi, \eta)$  systems. Note that each row from the Jacobian matrix represents a vector that is tangent to the face surface. This property is used to find a set of perpendicular vectors ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$ ). The normal vector  $\mathbf{n}$  is obtained as the unitary vector from the cross product of the Jacobian matrix lines. Vectors  $\mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$  can be chosen arbitrarily as long they are perpendicular to  $\mathbf{n}$ . Vector  $\mathbf{s}$  is chosen as the unitary vector from the first line of the Jacobian matrix. Finally, vector  $\mathbf{t}$  is found as the unitary vector of the product  $\mathbf{n} \times \mathbf{s}$ . This last product is required since the rows of the Jacobian matrix are not necessarily perpendicular.

Regarding the displacement interpolation matrix  $\mathbf{N}$ , it is given by

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \dots & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \dots & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \dots & 0 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

where  $N_1, N_2, N_3$  and  $N_4$  are the same shape functions as those from a quadrilateral element. Figure 2 shows an example of two bulk elements linked by a cohesive element. In this case, the interface element connectivity is given by nodes 2, 3, 7, 6, 9, 12, 16 and 13.

Subsequently, Eq. (2) can be rewritten incrementally as follows, where the symbols  $\xi$  and  $\eta$  were dropped for clarity. Thus,

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{N} \Delta \mathbf{U}. \tag{6}$$

The stress state at each point along the interface element is represented by the vector  $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_n, \tau_s, \tau_t \rangle$ , where  $\sigma_n, \tau_s$  and  $\tau_t$  represent the stress components in the  $\mathbf{n}, \mathbf{s}$  and  $\mathbf{t}$  directions, respectively. The stress increment vector  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  is related to the relative displacements increment vector  $\Delta \mathbf{w}$  by means of the constitutive matrix  $\mathbf{D}$ ; thus,  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{w}$ .

Using a conventional finite element procedure, as the virtual work method, the stiffness matrix for an interface element is found as

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA, \tag{7}$$

where  $\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{N}$ . Matrix  $\mathbf{K}$  is calculated using numerical integration; for this purpose, a number of integration points must be defined. For instance, in this work, quadrilateral interface elements are integrated using four integration points, and triangular interface elements are integrated using three integration points. For  $m$  integration points, the stiffness matrix is approximated as

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \text{norm}(\mathbf{J}_i). \tag{8}$$

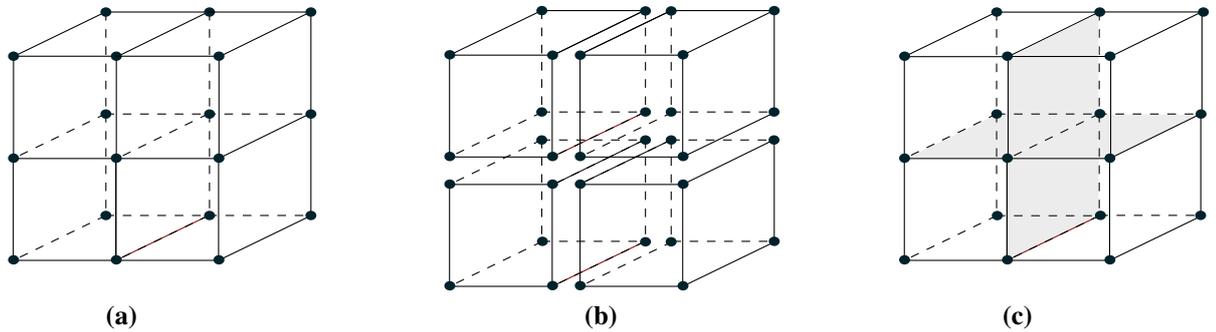
Since  $\mathbf{J}$  is a non-square matrix, the corresponding norm is calculated as

$$\text{norm}(\mathbf{J}) = \sqrt{\left| \begin{matrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} J_{13} & J_{11} \\ J_{23} & J_{21} \end{matrix} \right|^2}, \tag{9}$$

where the terms  $J_{ij}$  are components of the Jacobian matrix  $\mathbf{J}$ , as presented in Eq. (4).

## 2.2 Generation of interface elements

In the discrete approach for fracture modeling used in this work, all bulk elements are connected to their neighbors through zero-thickness cohesive elements. Therefore, a pre-processing procedure is required to insert cohesive elements into an existing conventional mesh (see e.g. Paulino et al. 2008; Nguyen 2014; Jiang and Meng 2018; Tabiei and Zhang 2017; Durand and Silva 2019). In this work, we extend the algorithm presented by Durand and Silva (2019) to 3D conditions.



**Fig. 3** Generation of interface elements: **a** initial mesh; **b** detached elements; **c** final mesh including the generated interface elements

Basically, given a conventional mesh (Fig. 3a), the algorithm starts by detaching all bulk elements from their neighbors by replacing existing connectivities with new nodes (Fig. 3b). Once all elements are detached, a hash value is found for each face of all elements. A face’s hash value is calculated based on its nodal coordinates. Next, for each face pair found with the same hash value (i.e., faces at the same position but from different elements), a new interface element is generated. Finally, the mesh is updated to include all generated interface elements (Fig. 3c).

### 2.3 Computation of a representative length for bulk elements

In non-local constitutive modeling, the size of the corresponding finite element is required to counter mesh dependency. In the case of interface elements, the proposed formulation considers the size of the two bulk elements linked by a cohesive element. Since these sizes may be different, an individual representative length  $h$  is used for each cohesive element. Consider, for example, the meshes in Fig. 4 and assume that cohesive elements link all bulk elements. In the first case, the representative length is given by the elements’ width since all bulk elements are equal. In the second case, the representative length for the cohesive element between the two shaded elements will be the average between the widths  $h_1$  and  $h_2$ . In the last case, the value of  $h$  for the shaded elements is computed considering two prismatic elements with equivalent volumes,  $V_1$  and  $V_2$ . This allows us to compute two equivalent widths:  $h_1 = V_1/A$  and  $h_2 = V_2/A$ . Finally, the representative length is given, for all cases, by the average of these

values. Thus,

$$h = \frac{V_1 + V_2}{2A}. \tag{10}$$

By using equivalent volumes, this procedure applies to other types of elements, as wedges, tetrahedrons and pyramids.

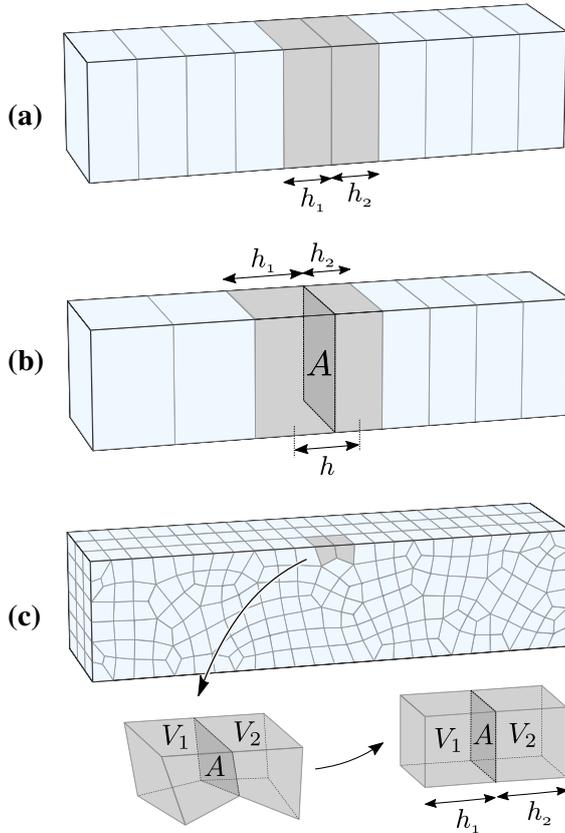
The representative length adopted here is used to reduce mesh dependency by countering mesh-related undesired interface displacements. Consequently, this also improves the model accuracy. The introduction of the representative length into the formulation is presented in the next section.

### 3 Constitutive modeling

The constitutive model for the cohesive elements is formulated using the plasticity theory and is an extension of the 2D model presented by Durand and Silva (2019). In this case, the yield function is given by a Coulomb-based surface that includes two shear stress components as

$$f(\sigma, \sigma_{max}) = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2} + (\sigma_n - \sigma_{max}) \tan \phi = 0, \tag{11}$$

where  $\sigma_n$ ,  $\tau_s$  and  $\tau_t$  are, respectively, the stress components at an integration point of a cohesive element, while  $\sigma_{max}$  is the internal variable, i.e. the material tensile strength, and  $\phi$  is the material friction angle. Figure 5a shows the yield surface where  $\sigma_{max}^{(0)}$  and  $\tau_{max}^{(0)}$  represent, respectively, the initial tensile and shear strength of the material. Assuming a non-associated flow rule, the proposed plastic potential surface (Fig. 5b) is given by



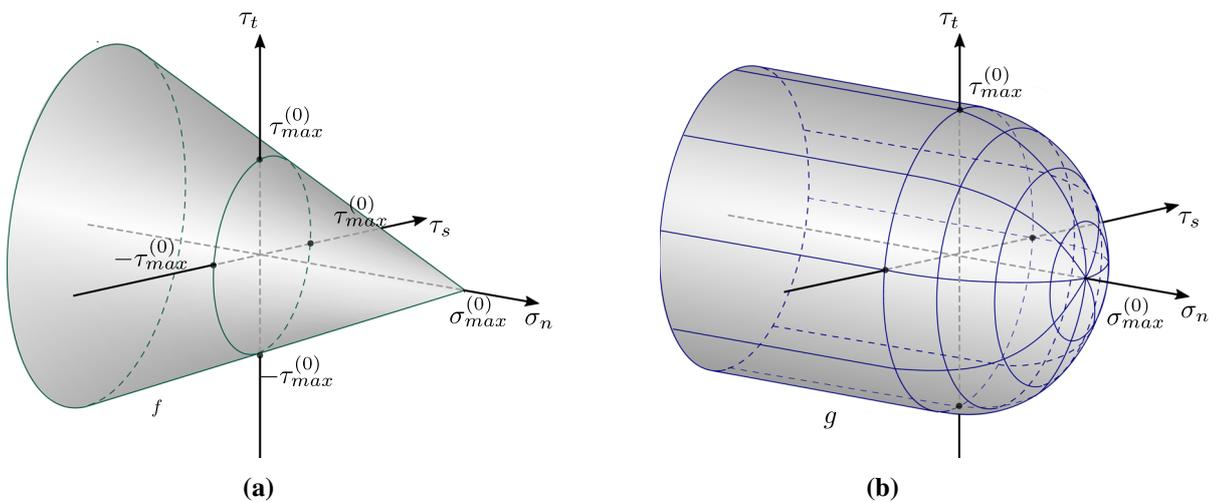
**Fig. 4** Computation of the representative length of bulk elements: **a** in a mesh with equal hexahedral elements; **b** in a mesh with elements with different sizes; **c** in an unstructured mesh

$$g(\sigma, \sigma_{max}) = \begin{cases} \tau_s^2 + \tau_t^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{for } \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n^2 \tan^2 \phi + \tau_s^2 + \tau_t^2 - \tau_{max}^2 = 0 & \text{for } \sigma_n > 0 \end{cases} \quad (12)$$

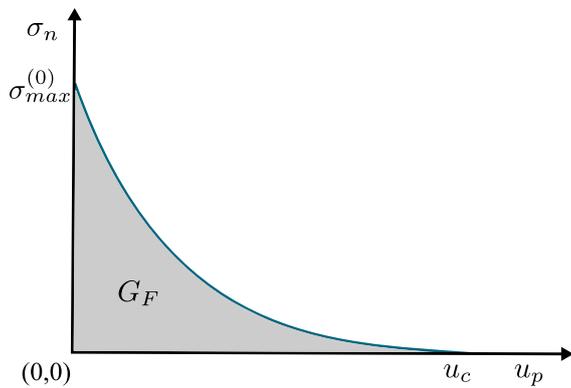
The internal variable  $\sigma_{max}$  defines the location of the yield surface. The displacement of the surface tip towards the origin aims to simulate the loss of strength due to cracking.  $\sigma_{max}$  is a function of the effective relative plastic displacement defined as

$$u_p = \int_0^t \|\dot{\mathbf{w}}_p\| dt = \int_0^t \sqrt{\dot{w}_{np}^2 + \dot{w}_{sp}^2 + \dot{w}_{tp}^2} dt, \quad (13)$$

where  $\dot{\mathbf{w}}_p = \langle \dot{w}_{np}, \dot{w}_{sp}, \dot{w}_{tp} \rangle$  is a vector containing the rates of relative displacements in the local system  $(n, s, t)$ . There are several traction–separation curves available in the literature to relate  $\sigma_{max}$  and  $u_p$ . For example, bilinear softening curves are widely used in the literature (see, e.g. Wittmann et al. 1988; Yang and Chen 2005; Roesler et al. 2007; Park et al. 2008; Park and Paulino 2011) due to their simplicity and ability to provide accurate results in finite element analyses. Other softening models are worth mentioning, as exponential and polynomial models (see e.g. Xu and Needleman (1994), Park et al. (2009)); although they were not investigated as part of the formulation proposed in this paper. In this work, we opted to use the exponential curve proposed by Hordijk (1992) (see Fig. 6), because it provides a closed-form expression to represent the post-peak softening curve. Nevertheless, the proposed



**Fig. 5** Constitutive model surfaces: **a** yield function; **b** plastic potential function



**Fig. 6** Hordijk's softening curve

approach is not limited to this particular model and a different model can be used as the softening law. The Hordijk's curve depends only on two parameters,  $\sigma_{max}^0$  and  $u_c$ . The term  $u_c$  represents the critical crack opening when  $\sigma_{max}$  reaches zero. Its value is calculated so as to achieve an area under the curve equal to the material fracture energy  $G_F$ . The Hordijk's softening curve, using the coefficients proposed by Zivaljic et al. (2014), is written as

$$\sigma_{max}(u_p) = \begin{cases} \left[ \left( 1 + 27 \left( \frac{u_p}{u_c} \right)^3 \right) e^{-6.93 \frac{u_p}{u_c}} - 28 \frac{u_p}{u_c} e^{-6.93} \right] \sigma_{max}^0 & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (14)$$

After integration of Eq. (14) from 0 to  $u_c$  and equating to  $G_F$  we get

$$u_c = \frac{G_F}{0.1947 \sigma_{max}^0}. \quad (15)$$

Consequently, the rate of change of  $\sigma_{max}$  with respect to  $u_p$  is given by

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} = \begin{cases} \left( \frac{81 u_p^2 e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c^3} - \frac{6.93 \left( 1 + \frac{27 u_p^3}{u_c^3} \right) e^{-\frac{6.93 u_p}{u_c}}}{u_c} - \frac{0.02738402432}{u_c} \right) \sigma_{max}^0 & \text{for } u_p \leq u_c \\ 0 & \text{for } u_p > u_c \end{cases} \quad (16)$$

As can be seen from the curve in Fig. 6,  $\sigma_{max}$  reduces when  $u_p$  increases; this causes the displacement of the yield surface, as seen in Fig. 7, allowing the simulation of loss of strength.

### 3.1 Constitutive matrix

The constitutive matrix  $\mathbf{D}$  relates the relative displacement increment vector  $\dot{\mathbf{w}}$  with the stress increment vector  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  at an interface integration point of the cohesive element. For the elastic regime, the constitutive matrix is given by

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix}, \quad (17)$$

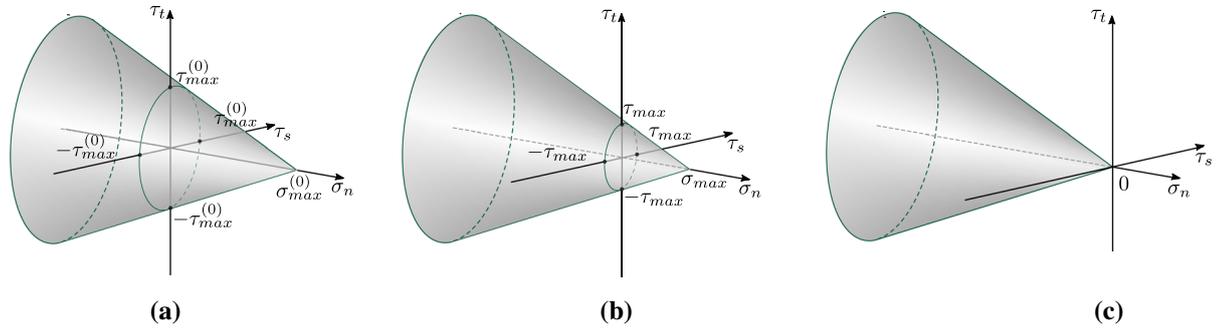
where  $k_n$  and  $k_t$  are components in the normal and tangential directions. Considering the approach proposed by Lens et al. (2007) to take into account mesh effects, the elastic coefficients can be defined as

$$k_n = E \frac{\alpha}{h} \quad \text{and} \quad k_t = G \frac{\alpha}{h}, \quad (18)$$

where  $h$  is the representative length of bulk elements as described in Sect. 2.3,  $E$  is the Young's modulus,  $G = E/(2(1 + \nu))$  is the shear modulus, and  $\alpha$  is a factor that controls the relative elastic displacements. The  $\alpha$  factor can be used to estimate the maximum relative elastic displacements allowed in the normal and tangential directions according to

$$w_{ne(max)} = \frac{\sigma_{max}^0}{\alpha E} h \quad \text{and} \quad w_{se(max)} = w_{te(max)} = \frac{\tau_{max}^0}{\alpha G} h. \quad (19)$$

For the elasto-plastic regime, the constitutive matrix  $\mathbf{D}_{ep}$  is formulated based on the conventional plasticity



**Fig. 7** Yield function evolution: **a** initial location ( $u_p = 0$ ); **b** intermediary location ( $0 < u_p < u_c$ ); **c** final location ( $u_p \geq u_c$ )

theory. According to the additive decomposition, the increment of relative displacements in a point along the interface is expressed as the sum of the elastic and plastic components:

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_e + \dot{\mathbf{w}}_p. \tag{20}$$

In turn, the increment of relative plastic displacements is calculated by the flow rule according to:

$$\dot{\mathbf{w}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{r}, \tag{21}$$

where  $\mathbf{r}$  is a vector normal to the potential surface  $g$  and  $\dot{\lambda}$  is the plastic multiplier. Thus, the increment of the effective plastic relative displacement is calculated as

$$\dot{u}_p = \|\dot{\mathbf{w}}_p\| = \dot{\lambda} \|\mathbf{r}\|. \tag{22}$$

After multiplying Eq. (20) by  $\mathbf{D}_e$ , considering  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}}_e$  and Eq. (21), we get the stress increment vector as

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}. \tag{23}$$

On the other hand, the consistency condition, according to Eq. (11), is given by

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \dot{\sigma}_{max} = 0, \tag{24}$$

which can be expanded as

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}} \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \dot{u}_p = 0. \tag{25}$$

Substituting Eq. (22) into (25) and isolating the increment of the plastic multiplier, we get

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{w}}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|}, \tag{26}$$

where  $\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $y = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{max}}$  and  $m = \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p}$ . Next, by substituting Eq. (26) into Eq. (23), it is possible to find the elasto-plastic constitutive matrix  $\mathbf{D}_{ep}$  as

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{r} \mathbf{v}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{v}^T \mathbf{D}_e \mathbf{r} - y m \|\mathbf{r}\|}. \tag{27}$$

The required derivatives for the calculation of  $\mathbf{D}_{ep}$  are given by

$$y = -\tan \phi \tag{28}$$

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial f}{\partial \tau_s}, \frac{\partial f}{\partial \tau_t} \right\rangle = \left\langle \tan \phi, \frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \frac{\tau_t}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}} \right\rangle \tag{29}$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau_s}, \frac{\partial g}{\partial \tau_t} \right\rangle = \langle 2\sigma_n \tan^2 \phi, 2\tau_s, 2\tau_t \rangle \text{ for } \sigma_n > 0 \tag{30}$$

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial g}{\partial \tau_s}, \frac{\partial g}{\partial \tau_t} \right\rangle = \langle 0, 2\tau_s, 2\tau_t \rangle \text{ for } \sigma_n \leq 0 \tag{31}$$

### 3.2 Stress update

The trial stress vector is found by using the elastic constitutive matrix, thus

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}_e \Delta \mathbf{w}, \tag{32}$$

where the superscript  $n$  represents the current step. If  $f(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_{max}^n) \leq 0$ , the increment is elastic and the new

stress state is given by  $\sigma^{n+1} = \sigma^{tr}$ ; otherwise, the increment will be elasto-plastic.

In unloading/reloading conditions, the elastic matrix  $\mathbf{D}_e$  is considered to update the stresses. This is different from fracture damage models (e.g. Alfano and Crisfield 2001; Liu et al. 2012) where a secant stiffness is frequently used. Besides that, according to experimental data (Reinhardt and Cornelissen 1984; Chen et al. 2016; Stone and Webster Engineering Corporation 1992), specimens subjected to pure tension exhibit unloading curves with slopes varying between secant and almost initial stiffness. Also, unloading/reloading curves show considerable residual opening. For this reason, we consider that it is acceptable to use the elastic constitutive matrix under unloading/reloading conditions.

In turn, when the increment is elasto-plastic, the internal variable  $\sigma_{max}$  is modified and, the tip of the yield surface moves towards the origin. Also, the stress state, initially approximated by  $\sigma^{tr}$ , will return to the yield surface following a direction perpendicular to the potential surface  $g$ , as shown in Fig. 8. The values of  $u_p$ ,  $\sigma_{max}$  and  $\sigma$ , as functions of the increment of relative displacements  $\Delta \mathbf{w}$ , are given by the following equations

$$u_p^{n+1} = u_p^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{u}_p dt = u_p^n + \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (33)$$

$$\sigma_{max}^{n+1} = \sigma_{max}^n + \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial u_p} \Delta \lambda \|\mathbf{r}^{n+1}\|, \quad (34)$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^{tr} - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{r}^{n+1}. \quad (35)$$

Note that the identities  $\Delta \mathbf{w}^{n+1} = \Delta \mathbf{w}_e^{n+1} + \Delta \mathbf{w}_p^{n+1}$  and  $\Delta \mathbf{w}_p^{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{r}^{n+1}$  were used in Eq. (32) in order to find Eq. (35).

According to the shape of the potential function  $g$ , we verify that  $\text{sgn}(\sigma_n^{n+1}) = \text{sgn}(\sigma_n^{tr})$ . This allows us to choose the right expression for  $\mathbf{r}$  (see Eqs. 30 and 31). By substituting Eqs. (30) and (31) into Eq. (35) and isolating the stress components at step  $n + 1$  we get

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_n^{n+1}, \tau_s^{n+1}, \tau_t^{n+1} \rangle \\ &= \left\langle \frac{\sigma_n^{tr}}{1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \phi}, \frac{\tau_s^{tr}}{1 + 2\Delta \lambda k_s}, \frac{\tau_t^{tr}}{1 + 2\Delta \lambda k_s} \right\rangle \\ & \text{for } \sigma_n^{tr} > 0, \end{aligned} \quad (36)$$

and

$$\langle \sigma_n^{n+1}, \tau_s^{n+1}, \tau_t^{n+1} \rangle$$

$$= \left\langle \sigma_n^{tr}, \frac{\tau_s^{tr}}{1 + 2\Delta \lambda k_s}, \frac{\tau_t^{tr}}{1 + 2\Delta \lambda k_s} \right\rangle \text{ for } \sigma_n^{tr} < 0. \quad (37)$$

Equations (33) through (37) depend on  $\Delta \lambda$ , which in turn can be found using the consistency condition at step  $n + 1$ ,

$$\begin{aligned} & f(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1}) \\ &= \sqrt{(\tau_s^{n+1})^2 + (\tau_t^{n+1})^2} + (\sigma_n^{n+1} - \sigma_{max}^{n+1}) \tan \phi = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

This provides a nonlinear equation on  $\Delta \lambda$  that can be solved using an iterative method. Applying the Newton-Raphson method we get

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i - \frac{f(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i}{f'(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})_i}, \quad (39)$$

where  $i$  indicates the  $i$ -th iteration and  $f'(\sigma^{n+1}, \sigma_{max}^{n+1})$  is given by

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \sigma^{n+1}} \cdot \frac{\partial \sigma^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial f^{n+1}}{\partial \sigma_{max}^{n+1}} \frac{\partial \sigma_{max}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda}. \quad (40)$$

We consider  $\Delta \lambda_0 = 0$  as the initial guess for the iterative process. The corresponding derivatives are presented below, where the superscript  $n + 1$  was dropped for clarity:

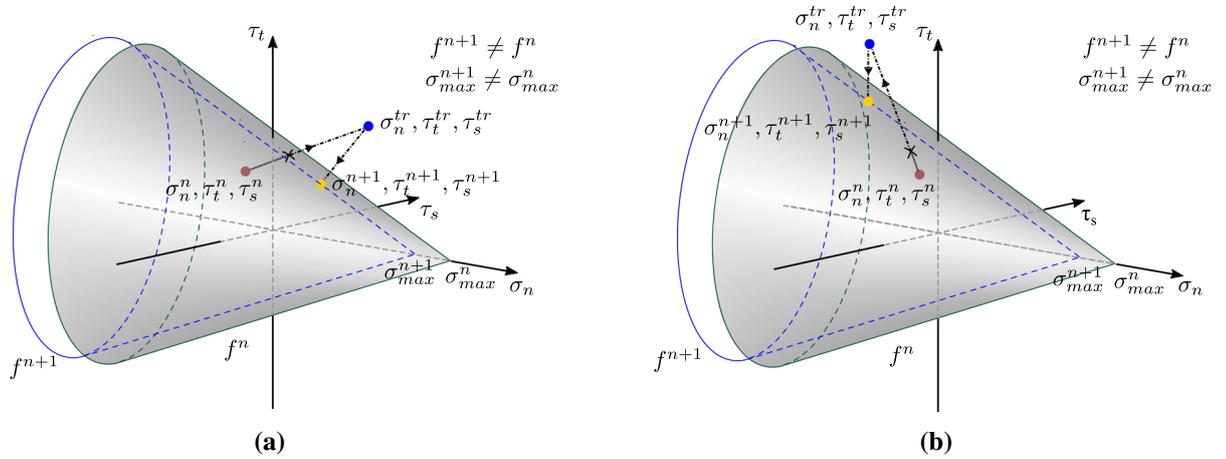
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \lambda} &= \left\langle \frac{-2k_n \tan^2 \phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \phi)^2}, \frac{-2k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-2k_s \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \\ & \text{for } \sigma_n^{tr} > 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \lambda} &= \left\langle 0, \frac{-2k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-2k_s \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \\ & \text{for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} &= \left\langle \frac{-4k_n \tan^4 \phi \sigma_n^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_n \tan^2 \phi)^2}, \frac{-4k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-4k_s \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \\ & \text{for } \sigma_n^{tr} > 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} &= \left\langle 0, \frac{-4k_s \tau_s^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2}, \frac{-4k_s \tau_t^{tr}}{(1 + 2\Delta \lambda k_s)^2} \right\rangle \\ & \text{for } \sigma_n^{tr} \leq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{\sigma_{max}}{u_p} \left( \|\mathbf{r}\| + \Delta \lambda \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \lambda} \right) \quad (45)$$



**Fig. 8** Stress update in the elasto-plastic regime: **a** return to the yield surface when  $\sigma_n^{tr} > 0$ ; **b** return to the yield surface when  $\sigma_n^{tr} \leq 0$

### 3.3 Plastic update for $u_p \geq u_c$

When the crack achieves the critical opening ( $u_p \geq u_c$ ), there is no more tensile strength, thus  $\sigma_{max} = 0$ . Then, if at step  $n + 1$  the crack gets open ( $w^{n+1} \geq u_c$ ) the trial stress should return to the origin (Fig. 9). However, at this stage, the potential function is reduced to a line and the derivatives at the origin are undefined. To handle this situation, an expression for  $\|\mathbf{r}^{n+1}\| \Delta\lambda$  is required in order to finalize the stress update process applying Eqs. (33) and (34). Thus, in this case, expanding Eq. (35) we obtain

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^{tr} \\ \tau_s^{tr} \\ \tau_t^{tr} \end{pmatrix} - \Delta\lambda \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_n^{n+1} \\ r_s^{n+1} \\ r_t^{n+1} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

which leads to

$$\|\mathbf{r}^{n+1}\| \Delta\lambda = \left\| \left\langle \frac{\sigma_n^{tr}}{k_n}, \frac{\tau_s^{tr}}{k_t}, \frac{\tau_t^{tr}}{k_t} \right\rangle \right\|. \quad (47)$$

Besides, and not less important, it is worth noting that while the crack is open, it should be considered  $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{0}$  at the stage of computing the element stiffness matrix.

## 4 Solution procedure

The solution of the system of nonlinear equations can be performed using a conventional incremental solver. Nevertheless, this work's solution procedure includes

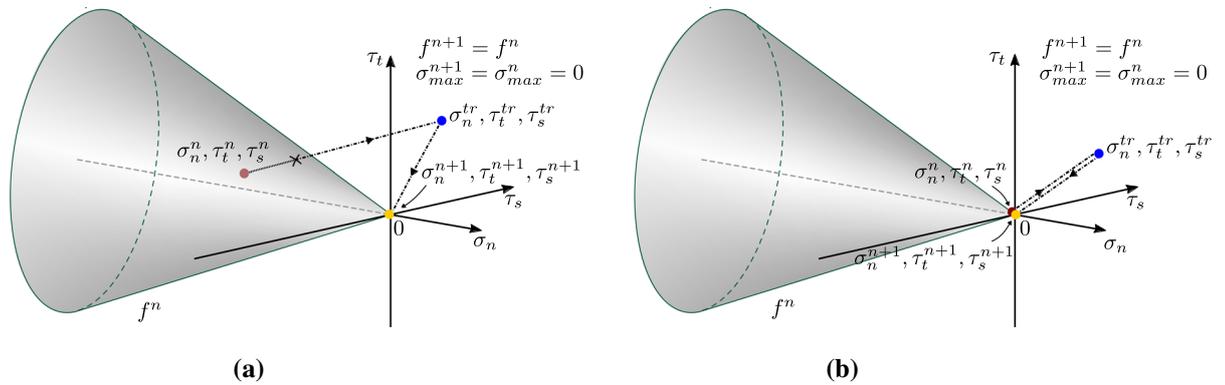
some techniques to improve convergence, reduce the number of increments, and correct the results drift from the equilibrium path. They are described in the following subsections.

### 4.1 Application of Runge–Kutta methods

A simple solution procedure for a finite element system of nonlinear equations will use, for example, an incremental scheme combined with the Newton–Raphson method, approximating the stiffness matrix at the beginning of each loading step. This approach applied with displacement control can solve nonlinear systems that present softening behavior. However, it may fail in strongly nonlinear problems due to high truncation errors; for example, when the analysis approaches the peak load, where the material stiffness changes drastically.

On the other hand, the application of Runge–Kutta methods to the solution of systems of equations aims to improve the accuracy based on two or more evaluations of the stiffness matrix. For example, using the modified Euler method, two evaluations for the stiffness matrix are required. They can be written as  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^n)$  and  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}(\mathbf{U}^n + \Delta\mathbf{U})$ , where  $\mathbf{U}^n$  is the global displacements vector at the beginning of the step and  $\Delta\mathbf{U}$  is the displacements increment vector. In this case, the final approximation of the stiffness matrix is given by

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2). \quad (48)$$



**Fig. 9** Stress update when the crack is open at step  $n + 1$  : **a** the crack faces are still in contact at step  $n$ ; **b** the crack faces are already separated at step  $n$

Another method that involves the same amount of calculations as the previous one but provides greater accuracy is the Ralston’s method (Ralston 1962). In this case, the two stiffness matrices are  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1(\mathbf{U}^n)$  and  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1(\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\Delta\mathbf{U})$ , and the final stiffness matrix is given by

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{4}\mathbf{K}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{K}_2. \tag{49}$$

In this paper, the Ralston method (Eq. 49) was employed to improve the approximation of the global stiffness matrix which is later used to find the unknown displacements. The use of this method allowed us to obtain improved accuracy which was reflected in a fewer number of increments.

#### 4.2 Automatic stepping

In a nonlinear incremental analysis, the load and displacement increments at a given step are usually given by

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= \Delta T \mathbf{F}_{ext} \quad \text{and} \\ \Delta\mathbf{U} &= \Delta T \mathbf{U}. \end{aligned} \tag{50}$$

where  $T \in [0, 1]$  is the pseudo-time for the current analysis stage and  $\Delta T$  is the step size used to scale the external forces  $\mathbf{F}_{ext}$  and displacements  $\mathbf{U}$  vectors. When constant step size is employed, usually, very small  $\Delta T$  values are required to get the truncation error ( $err$ ) from all increments under the specified tolerance ( $tol$ ) since the analysis will stop at the first case where

$err > tol$ . On the other hand, an automatic stepping algorithm modifies  $\Delta T$  such that it is increased after a successful increment ( $err \leq tol$ ) and decreased when an increment trial fails. In this scheme, the increment size at step  $n + 1$  can be calculated based on the previous increment as

$$\Delta T^{n+1} = q \Delta T^n, \tag{52}$$

where  $q$  is a factor that aims to limit the truncation error defined here as  $err = \|\Delta\mathbf{F}_{ext} - \Delta\mathbf{F}_{int}\|$ . The basic idea is to use  $q \geq 1$  when the last increment trial was successful and  $q < 1$  otherwise. The expression for  $q$  usually takes the form  $c \sqrt{\frac{tol}{err}}$ , where  $c$  is an adjustable coefficient (see e.g. Abbo and Sloan 1996; Ho et al. 1997; Sheng et al. 2002). In this research we propose the expression

$$q = \left( 1 + \tanh \left( \log_{10} \frac{tol}{err} \right) \right). \tag{53}$$

The equation above is quite arbitrary but has the following properties. First, it is a continuous function with values in the interval  $(0, 2)$ . It yields 1 when  $err = tol$  and values smaller than 1 when  $err > tol$ . Also, it tends to 2 when  $err$  tends to 0. Since, this expression varies smoothly, it can be used to gradually adjust the increment size as follows. When the last increment trial converged successfully ( $err \leq tol$  and  $q \geq 1$ ), the increment size grows following Eq. (52), otherwise ( $err > tol$  and  $q < 1$ ), the increment size decreases according to

$$\Delta T_{n+1} = \max(0.2, \min(0.9, q)) \Delta T_n. \tag{54}$$

In this case, the scaling factor is limited to 0.2 to avoid tiny increments, and to 0.9 to favor convergence when  $err \approx tol$ .

### 4.3 Drift correction

Solutions of nonlinear equations, especially those obtained from incremental schemes, tend to drift from the equilibrium path as residual forces (unbalanced forces between the externally applied forces and the forces supported by the internal stresses) are accumulated along with the increments. To reduce drifting, one strategy is to add the residual forces from one increment to the next. However, as pointed out by [Abbo and Sloan \(1996\)](#), this procedure is not efficient when combined with an automatic stepping scheme since the residual forces contribution is independent of the step size  $\Delta T$ . Also, for strongly nonlinear behavior, the new increment error frequently exceeds the specified tolerance due to the residual forces effect. To deal with this problem, the strategy used in this paper is to spread cumulated residues over a fraction ( $\Delta T_{cr}$ ) of the analysis time, which may involve several upcoming increments. This fraction can be defined as

$$\Delta T_{cr} = \min(\Delta T_{rspan}, 1 - T), \quad (55)$$

where  $\Delta T_{rspan}$  is the maximum fraction of the analysis to apply the residual forces obtained from one increment (e.g. 0.01 or 1%).

Assuming that  $\mathbf{R}_c^n$  is a vector containing the cumulated residues up to the end of step  $n$ , at step  $n + 1$ , the vector with the increments of external forces is modified according to

$$\Delta \mathbf{F}_{ext}^{n+1} = \Delta T^{n+1} \mathbf{F}_{ext} + \gamma \mathbf{R}_c^n, \quad (56)$$

where  $\gamma = \min(1, \Delta T^{n+1}/\Delta T_{cr})$  is the coefficient used to obtain a fraction of  $\mathbf{R}_c^n$  to be applied at increment  $n + 1$ . If step  $n + 1$  is successful, then the cumulated residues vector is updated considering the residue from step  $n + 1$  and the remaining fraction, not yet applied, from  $\mathbf{R}_c^n$ . Thus,

$$\mathbf{R}_c^{n+1} = \mathbf{R}_c^{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{R}_c^n. \quad (57)$$

In the case of failure, the cumulated residual vector is not modified and the increment is rejected. Finally, in both cases, a new step size for the next increment is calculated according to the automatic stepping algorithm.

Besides providing results with a better agreement with experimental data, the drift correction procedure

presented here reduces the chance of increments failure caused by the reapplication of residual forces.

## 5 Numerical simulations

Prior to the simulation of application examples, the proposed constitutive model was verified using patch tests (extension and shear) and, in the sequence, a mesh refinement test is presented to study mesh dependency. Later, the model was applied to the fracture simulation of concrete specimens. The results were compared with the experimental data available. All the examples present two laboratory experimental curves. These curves represent repeated experiments using the same material and geometry.

During the simulations, the mechanical behavior of bulk elements was considered as linear elastic. In turn, all cohesive elements were simulated using the proposed model considering the Hordijk's traction–separation curve. The simulations were performed using the Amaru library (<https://github.com/NumSoftware/Amaru>) which includes the implementation of the proposed model.

### 5.1 Mesh generation

All meshes were elaborated with the aid of Gmsh ([Geuzaine and Remacle 2009](#)), a 2D and 3D finite element mesh generator. After the generation stage, cohesive elements were introduced using the algorithm explained in Sect. 2.2. Although it is possible to limit the location of cohesive elements, we decided to place them over the whole mesh as a way to verify that cracks will only happen where expected. The meshes from all examples were refined enough to provide good, or fairly good, agreement with the experimental data.

It is worth mentioning that the mesh elaboration process can take into consideration the minimum number of elements within the FPZ (see e.g. [Davila et al. 2001](#); [Falk et al. 2001](#); [Turon et al. 2007](#); [Harper and Hallett 2008](#)). Considering the material properties from the simulated examples, the estimates for the cohesive length, as proposed by [Hillerborg et al. \(1976\)](#), provided values greater than 27 cm. In all cases, this length was enough to contain more than three elements, as suggested by [Harper and Hallett \(2008\)](#). In this regard, we

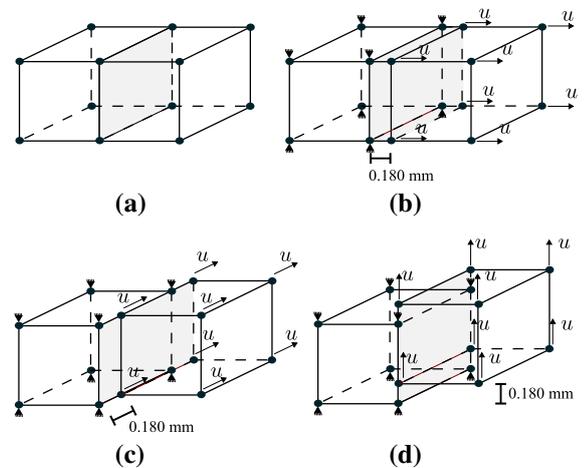
consider a good practice to perform local refinements in regions where cracks are expected.

Regarding the mesh elements, the type of bulk elements used were 4-node tetrahedrons with 4 integration points, 5-node pyramids with 5 integration points, 6-node wedges with 9 integration points and 8-node hexahedrons with 8 integration points. As for the cohesive elements, we used 6-node joints with 3 integration points and 8-node joints with 4 integration points. It is worth mentioning that some trials were performed using 6-node interface elements (triangular shape) with one integration point. However, inconsistent displacements were obtained, similar to the spurious deformations observed in meshes with elements with reduced integration. Although triangular elements require only one integration point in two-dimensional stress analyses, this is not enough for 6-node interface elements due to the higher degree of the integrand used to compute the stiffness matrix.

## 5.2 Material parameters

For the numerical analysis, the material parameters for the presented model can be related to bulk and the cohesive elements. Since bulk elements are considered linear elastic, only Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$  are required. For the cohesive elements, in addition to the elastic parameters, the following are required: the tangent of the internal friction angle  $\tan(\phi)$ , the tensile strength  $\sigma_{max}^0$ , and the fracture energy  $G_F$ . In the numerical examples, except from  $\tan(\phi)$  and  $\alpha$ , all other parameters were taken from the corresponding experiment publication or publications that perform the numerical simulations.

Regarding the internal friction angle for concrete, experimental results (see e.g. Fujita et al. 1997; Stone and Webster Engineering Corporation 1992; Jebli et al. 2018) show values ranging from  $54^\circ$  to  $57^\circ$ . These angles provide  $\tan \phi$  between 1.37 and 1.53, approximately. In this sense, and with no additional information, we found reasonable to adopt  $\tan(\phi) = 1.4$  for all application examples. Regarding this value, no negative effects in the results were observed during the simulations. In turn, the  $\alpha$  parameter, as stated in Sect. 3, aims to provide negligible elastic displacements prior to the crack formation. Too small values provide excessive elastic displacements, while too high values provide high stiffness coefficients that lead to ill-conditioned



**Fig. 10** Patch tests: **a** initial configuration; **b** extension test; **c** first shear test; **d** second shear test

systems of equations. During the analyses, we observed that  $\alpha = 5$  effectively provides negligible elastic displacements while avoids numerical problems.

## 5.3 Patch tests

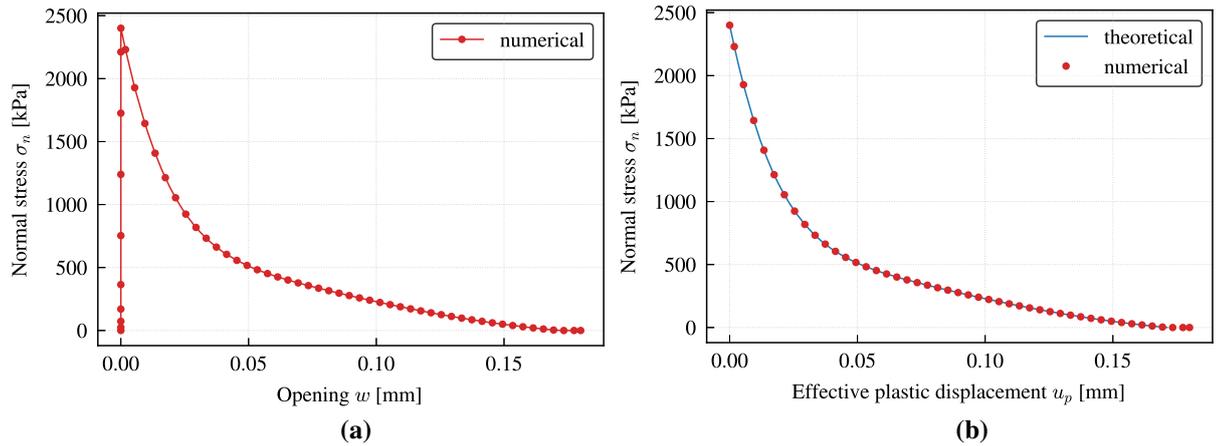
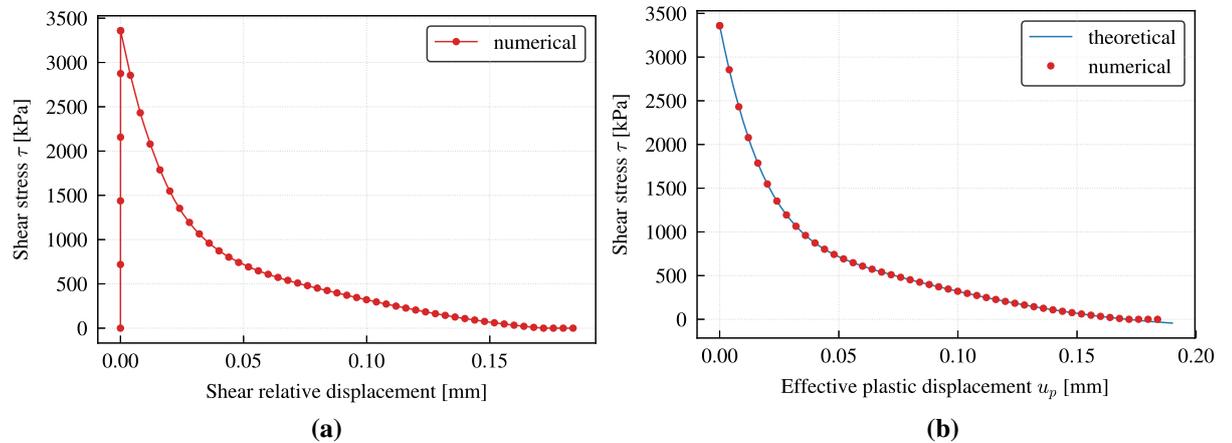
To verify the behavior of the proposed model, patch tests in extension and shear are presented. In these analyses, only two bulk elements linked by one cohesive element are considered. The bulk elements are given by 8-noded regular hexahedrons with 10 mm length. For each case, one bulk element is kept restrained while the other one is submitted to rigid body motion; thus, restraining all deformations to the cohesive element to simulate extension and shear. Figure 10 shows the initial configuration and different displacement conditions that have been studied. The material parameters used in these analyses are presented in Table 1.

For the extension analysis, an imposed displacement  $u = 0.180$  mm was applied (Fig. 10b). The relative displacements and corresponding stresses were logged at one integration point from the cohesive element. Figure 11 shows the resulting curves  $w - \sigma_n$  and  $u_p - \sigma_n$ . As seen, the interface starts showing a highly stiff behavior, and once the tensile strength is reached, it shows a softening behavior comparable to Hordijk's model.

As for the shear analysis, two tests were performed, as shown in Figs. 10c and d. In both cases, a displacement ( $u = 0.180$  mm) was applied in a direction parallel to the interface. As expected, the results from both

**Table 1** Patch tests: parameters of the material and interface elements

Softening curve	$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)	$u_c$ (mm)
Hordijk	27.0	0.20	1.4	5	2.40	80.0	0.1712

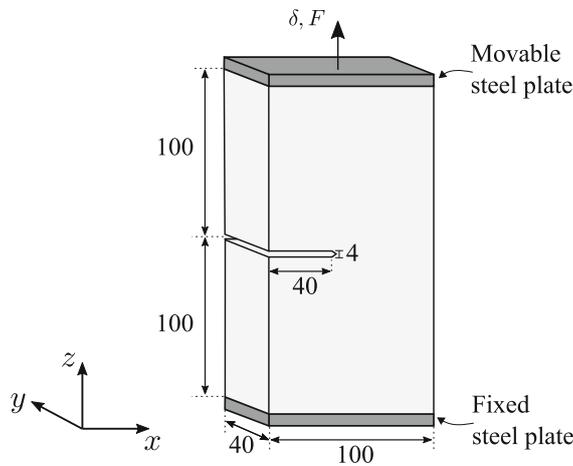
**Fig. 11** Extension test: **a** crack opening versus normal stress; **b** effective plastic displacement versus normal stress**Fig. 12** Shear test: **a** displacement parallel to the interface plane versus shear stress; **b** effective plastic displacement versus shear stress

shear tests were similar. Figure 12 presents the results of shear stress ( $\tau_s$ ) versus shear displacement and effective plastic displacement. Again, the numerical values are in good agreement with the theoretical values.

#### 5.4 Mesh refinement test

Finite element simulations using the discrete approach may suffer from mesh sensitivity, where different mesh

discretizations provide different results. To avoid this issue, the stiffness from a cohesive element depends on the surrounding bulk element sizes (representative length). In practice, this means that smaller cohesive elements provide slightly stiffer behavior than larger ones. To better evaluate this approach to counter mesh dependency, we perform a mesh refinement test. Figure 13 shows the domain given by a notched block subjected to tensile cracking. Five tetrahedral non-



**Fig. 13** Refinement test: boundary conditions and material properties. All measures are in millimeters

**Table 2** Refinement test: summary of mesh attributes

Mesh	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs	$h_{med}$
Mesh 1	659	1112	2636	7908	0.0079
Mesh 2	1685	2977	6740	20,220	0.0059
Mesh 3	2556	4548	10,224	30,672	0.0051
Mesh 4	5337	9696	21,348	64,044	0.0041
Mesh 5	9234	17,078	36,936	110,808	0.0031

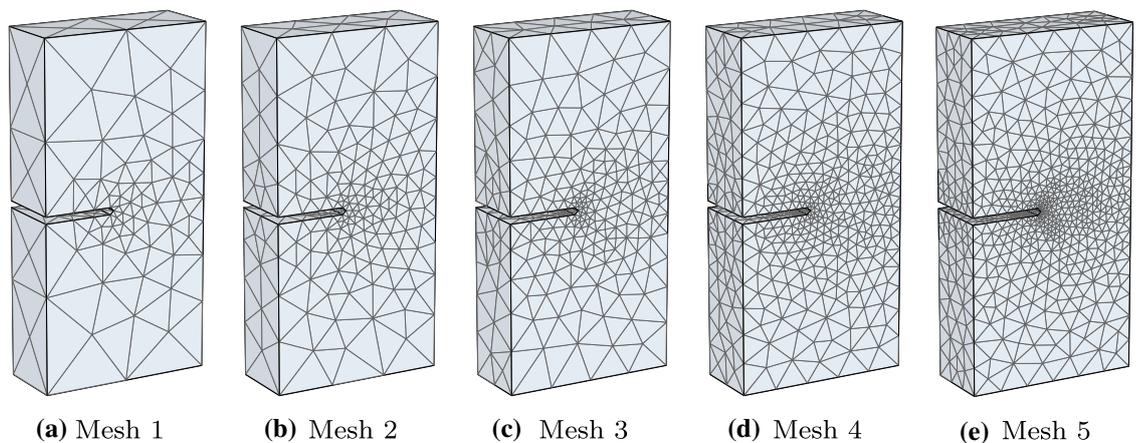
**Table 3** Refinement test: material parameter for bulk and cohesive elements

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
32.0	0.20	1.4	5	3.30	60.0

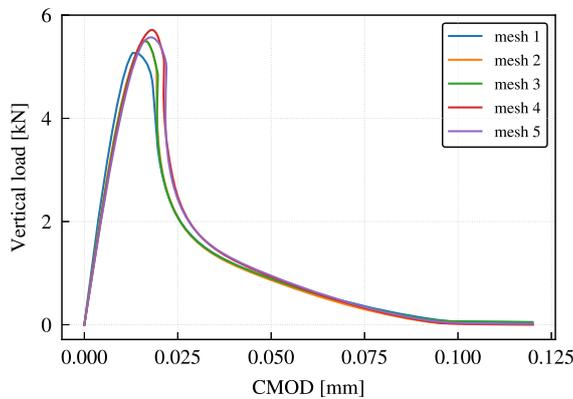
structured meshes comprising different element sizes were used, as shown in Fig. 14. In turn, Table 2 presents a summary of the mesh attributes. Due to geometry constraints and the refinement near the notch, the element size varies within each mesh. For this reason, the median value  $h_{med}$  is shown in Table 2. For example, note that in the first mesh (coarse),  $h_{med}$  is more than twice compared to the fifth mesh (most refined). We can also note a huge difference in degrees of freedom. As for the material parameters used in the simulations, they are shown in Table 3.

During the analysis, the base plate is kept fixed, while prescribed vertical displacements are applied at the top plate. The resultant force at the top plate as well

as the crack mouth opening displacement (CMOD) were logged. Although the meshes comprise different numbers of cohesive elements, it is expected to get similar load–CMOD curves before and after the peak load, as shown in Fig. 15. This can be explained by the following reasons. Before the peak, the deformability is mainly controlled by bulk elements while cohesive elements present negligible deformability. On the other hand, after the peak, the deformability is mainly controlled by the cracks. Note that before the peak, all curves follow pretty much the same path. This demonstrates that the proposed formulation practically eliminates mesh dependency on the elastic regime. Regarding the peak load, meshes 2 to 5 provided sim-

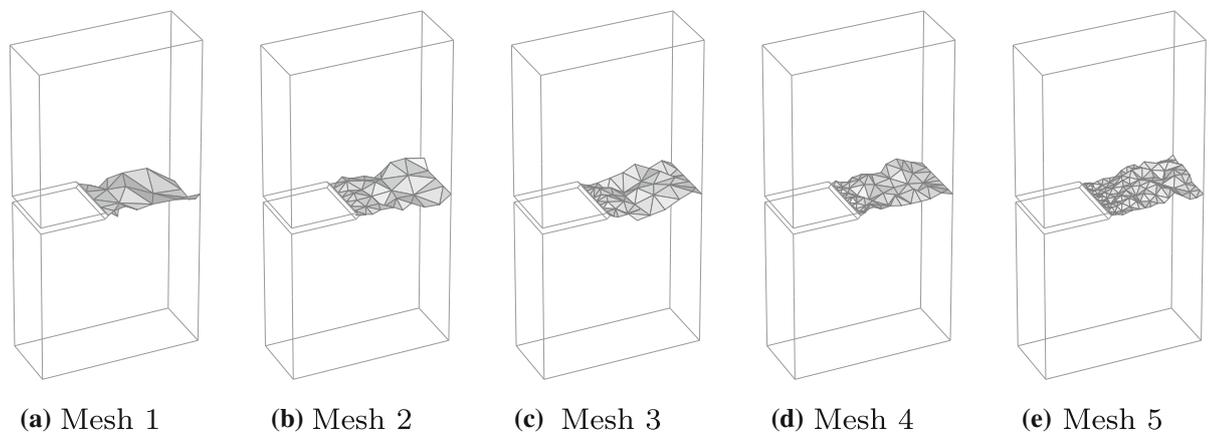


**Fig. 14** Refinement test: finite element meshes

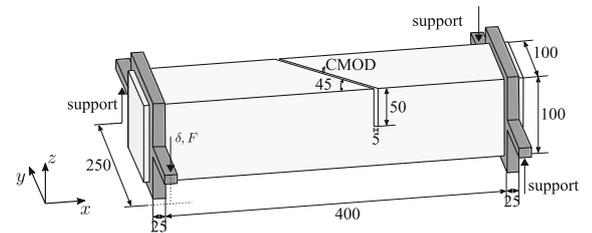


**Fig. 15** Refinement test: load-CMOD curves

ilar values, around 5.6 kN. This is not the case for the first mesh (coarse), which presented a smaller peak value. After the peak load, all curves are close and show the same nonlinear pattern, with no waves nor sudden changes. We can also observe that the most refined meshes, 4 and 5, present similar peak values and almost identical post-peak curves. These results show that the proposed method tends to reduce mesh dependency. A specific study on the limit of element sizes was not performed. Thus, for practical numerical analyses, as in other finite element applications, a refinement test is suggested in order to obtain a functional mesh. A view of the crack surfaces, Fig. 16, shows that they tend to evolve towards a flat geometry. This behavior was expected since the element sizes are decreasing and the domain is subjected to symmetrical conditions.



**Fig. 16** Refinement test: final crack for each mesh



**Fig. 17** Example 1: test setup. All measures are in millimeters

**Table 4** Example 1: material parameter for bulk and cohesive elements

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
35.0	0.20	1.4	5	2.30	80.0

### 5.5 Example 1: beam with a notch subjected to torsion

This example simulates the experimental test presented by Brokenshire (1995). The typical test setup is shown in Fig. 17 where a notched beam is clamped by two metallic frames. The beam is supported at the frame extremities, except at one corner where a prescribed displacement is applied to induce torsion in the sample. Due to the lack of symmetry, this experiment cannot be simulated by a two-dimensional simplification; thus, three-dimensional modeling is mandatory. The material parameters used in the simulation were extracted from the work of Jefferson et al. (2004) and are presented in Table 4.

Two numerical simulations were performed using different element types. In order to introduce randomness in the shape of the crack path, unstructured meshes were used. Table 5 presents a summary of the finite element meshes. The first mesh uses tetrahedral elements, while the second one uses a combination of tetrahedral and pyramidal elements.

During the finite element analysis, the reaction force due to the imposed displacement and CMOD at the notch were logged for further analysis. Figure 18 shows the numerical and experimental curves of load versus CMOD. The overall behavior of the numerical curves is in fair agreement with the experimental data. Both numerical curves underestimate the peak load but present a good representation of the softening branch, especially when compared with the first experimental curve. Few differences can be observed between the use of tetrahedrons and the combination of tetrahedrons and pyramids. Although, in this case, the latter permitted using fewer elements. Table 6 shows a summary of peak loads ( $F_{max}$ ) and corresponding CMOD values ( $\delta$ ) obtained from the numerical results and the experimental curves presented by Brokenshire. Taking the first experiment results as reference, the relative differences are computed and included in the table. Note that the discrepancies between experiments and between the first experiment and numerical results are all less than one order of magnitude. Therefore, we can consider that the obtained numerical results are within an acceptable range. Furthermore, Fig. 18 also shows numerical curves from Jefferson et al. (2004), Gasser and Holzzapfel (2006) and Ferté et al. (2016), which were obtained using the plastic-damage model, PUFEM (Partition Unity Finite Element Method) and XFEM, respectively. Comparing with the experimental curves, we can see that results from Jefferson et al. show a good prevision of the peak load and a brittle behavior after that; however, the data is only available up to  $CMOD = 0.4$  mm. On the other hand, Gasser et al. presented two curves for this test obtained using two

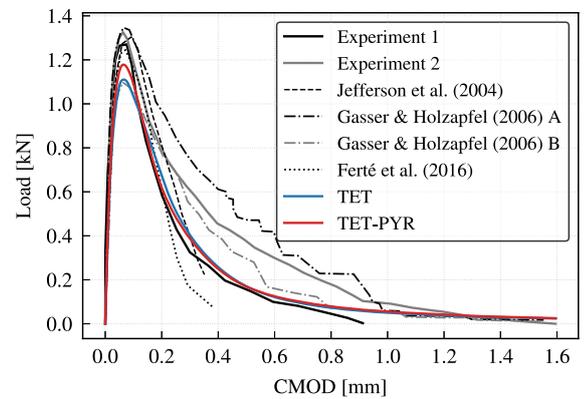


Fig. 18 Example 1: experimental and numerical results

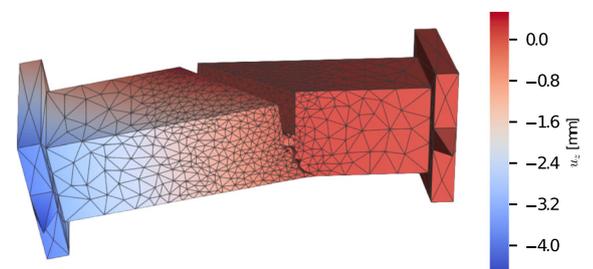


Fig. 19 Example 1: deformed mesh displaying the  $u_z$  field for the TET analysis

different sets of material parameters. As can be seen, one curve from Gasser et al. overestimates the softening branch while the other underestimates the peak load. Finally, the results from Ferté et al. present a peak load compatible with the experiments, but only part of the softening branch is available.

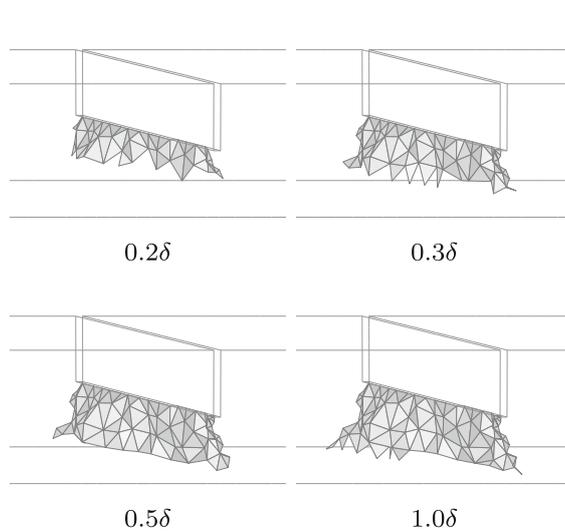
Figure 19 shows the deformed mesh at the end of the analysis that uses tetrahedral elements. The mesh displays the vertical displacement field and the deformation was amplified using a scale factor of 15. Furthermore, Fig. 20 presents the crack surface evolution for different prescribed displacement levels considering the cohesive elements where the average value of  $w_n$  was greater than  $0.5 u_c$ .

Table 5 Example 1: summary of mesh attributes

Model	Element types	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
TET	Tetrahedral	8706	15,964	34,824	104,472
TET-PYR	Tetrahedral + pyramidal	7744	15,349	31,585	94,755

**Table 6** Example 1: comparison of numerical and experimental results

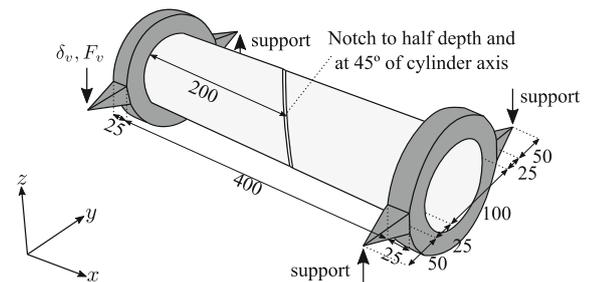
Experiment/model	Increments	$F_{max}$ (kN)	CMOD $\delta$ (mm)	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experiment 1	–	1.27	0.0759	–	–
Experiment 2	–	1.33	0.0627	4.4	17.4
TET	504	1.11	0.0663	12.6	12.7
TET-PYR	710	1.18	0.0647	7.2	14.7

**Fig. 20** Example 1: crack evolution according to the prescribed displacement for the TET analysis

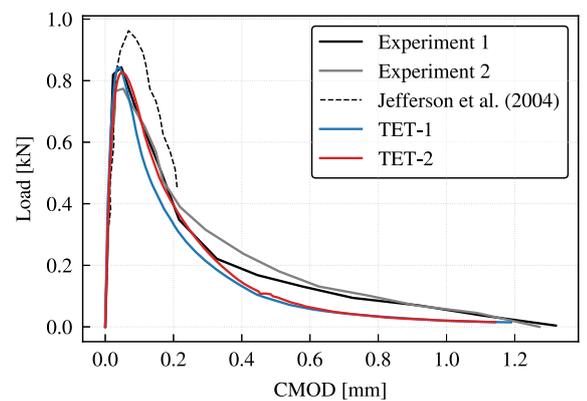
### 5.6 Example 2: circular section beam with a notch subjected to torsion

This second application example simulates a notched beam with a circular section tested by Brokenshire (1995). Two circular frames clamp the beam, and the whole setup is supported at three points, as shown in Fig. 21. In a similar fashion to the square section beam, a prescribed displacement is applied at one end of the leftmost frame to induce torsion to the sample. The material parameters used in the simulation are the same as in Example 1, given that both experiments were performed by the same author using the same material. Two tetrahedral meshes with different refinement levels are employed. Table 7 presents a summary of mesh features, including the median value of the element size  $h_{med}$ .

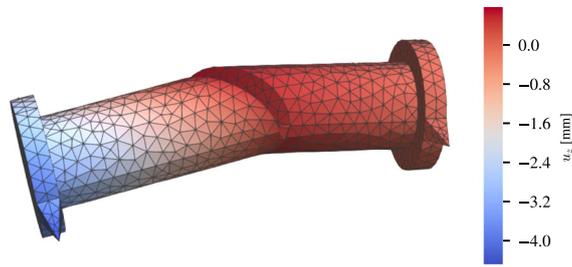
Along with the simulation, the reaction force due to the imposed displacement and the CMOD at the notch

**Fig. 21** Example 2: test setup. All measures are in millimeters**Table 7** Example 2: summary of mesh attributes

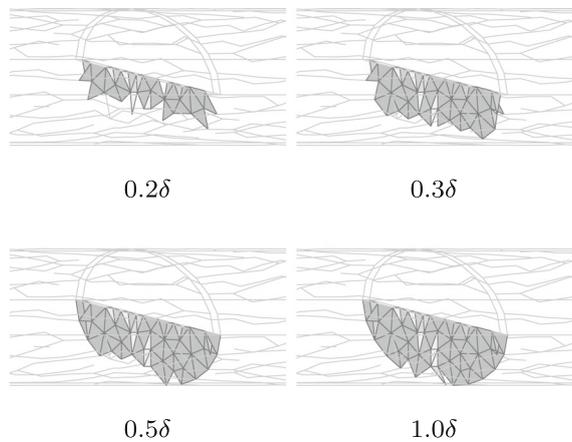
Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs	$h_{med}$ (m)
TET1	1795	3104	7180	21,540	0.0130
TET2	4398	8578	17,926	53,778	0.0088

**Fig. 22** Example 2: experimental and numerical results

were logged. Figure 22 shows the numerical and experimental curves of load versus CMOD. We can observe good agreement between numerical and experimental curves from the results, especially when compared with the first experiment. Also, both numerical curves are very similar, even though the second analysis has



**Fig. 23** Example 2: deformed mesh displaying the  $u_z$  field for the TET2 analysis



**Fig. 24** Example 2: crack surface evolution according to the prescribed displacement for the TET2 analysis

more than double the elements. This suggests that both curves are close to a convergent curve.

Table 8 shows a comparative analysis of the peak load ( $F_{max}$ ) and the corresponding CMOD ( $\delta$ ) against the first experimental curve. Numerical peak loads show excellent agreement. In turn, corresponding CMOD values show differences between 10 and 15%, approximately. Nonetheless, note that the discrepancies between experimental curves are also in a similar range. For the sake of comparison with other authors, Fig. 22 also shows the numerical results from Jefferson

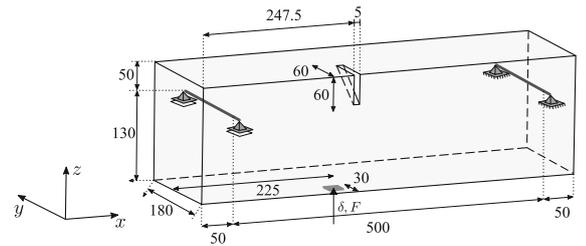
et al. (2004) that used a plastic-damage-contact model. Note that the peak and corresponding CMOD values were overestimated. Also, only part of the softening curve was available.

Figure 23 shows the deformed mesh at the end of the TET2 analysis using a magnification factor of 15. The figure also shows the  $u_z$  field for better visualization. As a means to observe the crack evolution in the TET2 analyses, Fig. 24 shows the cohesive elements where the average value of  $w_n$  was greater than  $0.5 u_c$ .

### 5.7 Example 3: beam with an eccentric notch and loading

The third example analyzes the experimental test of a notched beam investigated by Feist and Hofstetter (2007). The corresponding setup is shown in Fig. 25, where an eccentric displacement is imposed at the beam bottom with the aid of a steel plate. The sample is mainly subjected to mode I fracture; however, note that this example is not symmetrical and cannot be simplified into a two-dimensional representation. The required material parameters were extracted from the work of Gasser (2007) and are presented in Table 9.

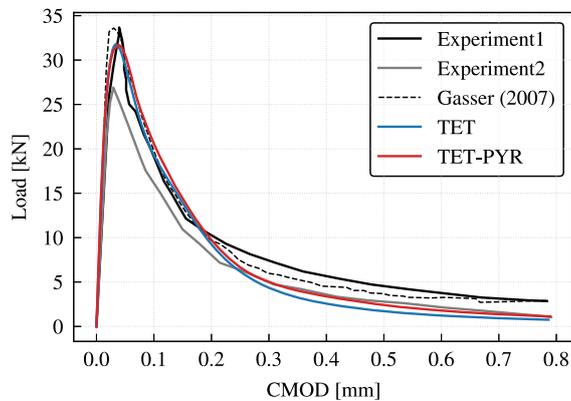
For the finite element analysis, two unstructured meshes were used. Table 10 presents a summary of the corresponding element meshes. During the numerical analysis, the reaction force at the steel plate location and



**Fig. 25** Example 3: test setup. All measures are in millimeters

**Table 8** Example 2: comparison of numerical results and experimental data

Experiment/model	Increments	$P_{max}$ (kN)	CMOD $\delta$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experiment 1	–	0.844	0.0470	–	–
Experiment 2	–	0.774	0.0528	8.25	12.4
TET1	530	0.843	0.0398	0.04	15.3
TET2	196	0.827	0.0521	1.94	10.9



**Fig. 26** Example 3: experimental and numerical results

**Table 9** Example 3: material parameter for bulk and cohesive elements

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ [N/m]
37.3	0.19	1.4	5	3.05	106

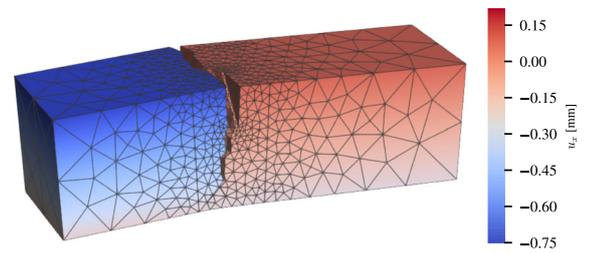
the CMOD at the notch were logged. The load versus CMOD curves from the numerical and experimental results are presented in Fig. 26. As can be seen, both numerical analyses present quite similar results and good agreement compared to the experiments. In this case, the introduction of pyramid elements allows fewer elements and consequently, fewer degrees of freedom without compromising the results. Table 11 shows a comparison of the peak load ( $F_{max}$ ) and corresponding CMOD ( $\delta$ ), taking the first experiment as reference.

**Table 10** Example 3: summary of mesh attributes

Model	Element types	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs
TET	Tetrahedral	5766	10,621	23,026	69,078
TET-PYR	Tetrahedral + Pyramidal	3871	7705	15,798	47,394

**Table 11** Example 3: comparison of numerical results and experimental data

Experiment/model	Increments	$F_{max}$ [kN]	CMOD $\delta$ [mm]	$\frac{ \Delta F_{max} }{F_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \delta }{\delta}$ %
Experiment 1	–	33.67	0.0395	–	–
Experiment 2	–	26.90	0.0293	20.1	25.6
TET	1037	31.78	0.0338	5.6	14.5
TET-PYR	1046	31.68	0.0389	5.9	1.5



**Fig. 27** Example 3: deformed mesh of the TET analysis displaying the horizontal displacement field

Good agreement can be observed for the peak load values. More significant differences will be observed if the numerical results are compared with the second experiment curve. Nonetheless, it is worth to mention that there is a considerable difference between experiment curves in terms of peak loads and corresponding CMOD values. Figure 26 also includes the numerical curve obtained by Gasser (2007), who used the PUFEM. This curve also shows good agreement with the experiments data; however, we consider that the model presented here is more straightforward in terms of formulation since it is based on conventional finite elements and conventional plasticity.

Figure 27 shows the deformed mesh of the TET analyses at 90% of applied displacements. For better crack visualization, the figure shows the  $u_x$  field, and the deformation is amplified using a factor of 20. In turn, Fig. 28 allows seeing the crack evolution by displaying all cohesive elements where  $w_n > 0.5 u_c$ .

**Table 12** Example 4: material parameter for bulk and cohesive elements

$E$ (GPa)	$\nu$	$\tan(\phi)$	$\alpha$	$\sigma_{max}^0$ (MPa)	$G_F$ (N/m)
30.0	0.20	1.4	5	3.30	100

5.8 Example 4: double notched square plate

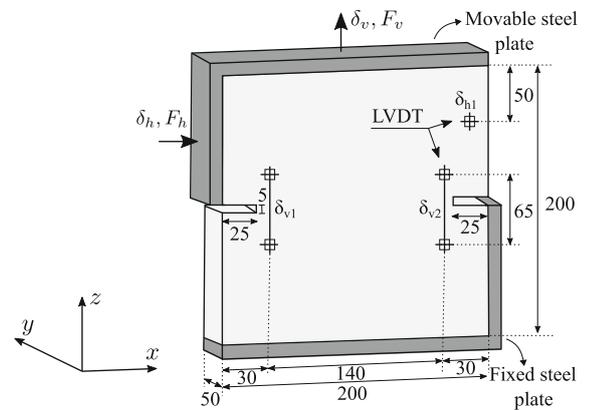
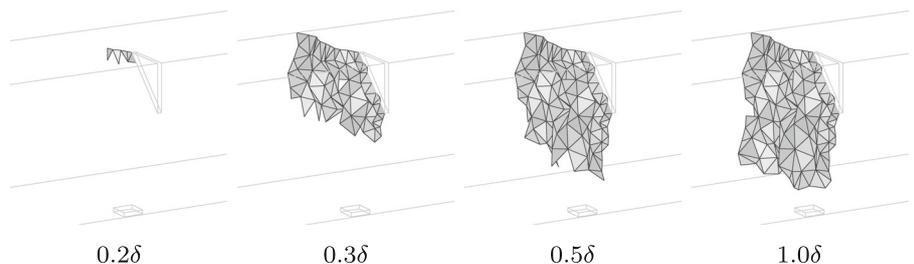
This example analyzes the experimental test studied by Nooru-Mohamed (1992). The experiment’s purpose was to study the cracking properties of concrete in mixed mode, so it induces slanted cracks that start at notches and go towards the specimen’s center. The test setup is shown in Fig. 29. Note that the right side below the notch and the bottom are bonded to a fixed steel plate. In turn, the left side above the notch and the top are bonded to a movable steel plate. During the experiment, horizontal  $\delta_h$  and vertical  $\delta_v$  controlled displacements (with equal rates) were simultaneously applied at the movable steel plate. The figure also shows the positions where displacements were logged with the aid of LVDTs. The required material parameters were extracted from the original work of Nooru-Mohamed and are presented in Table 12.

In the numerical analyses, two unstructured meshes were used using wedge and hexahedral elements. Table 13 presents a summary containing the mesh attributes. Note that the minimum  $r_{min}$  and maximum  $r_{max}$  values for the elements aspect ratio are included. In this work, the aspect ratio is defined as the length of the largest edge divided by the shortest one.

**Table 13** Example 4: summary of mesh attributes

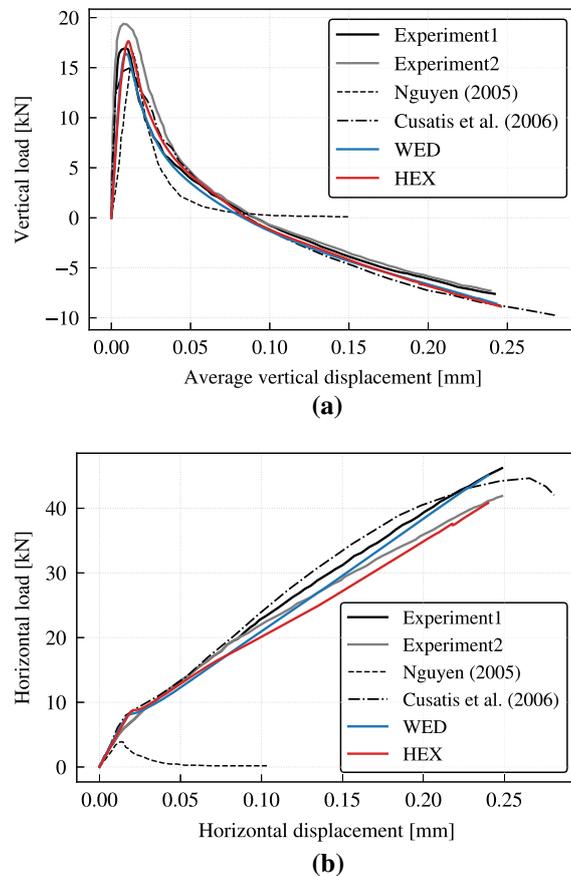
Model	Bulk elements	Cohesive elements	Nodes	DOFs	$h$ (median) (m)	$r_{min}$	$r_{max}$
WED	1907	2822	11,458	34,374	0.0088	2.46	14.17
HEX	3396	6654	26,912	80,736	0.0071	3.40	44.05

**Fig. 28** Example 3: crack surface evolution for different levels of the prescribed displacement for the TET analysis



**Fig. 29** Example 4: test setup. All measures are in millimeters

During the finite element analysis, the reaction forces  $F_h$  and  $F_v$  corresponding to the imposed displacements  $\delta_h$  and  $\delta_v$ , respectively, were logged for post-processing purposes. Also, the vertical displacements  $\delta_{v1}$  and  $\delta_{v2}$  and the horizontal displacement  $\delta_{h1}$  were logged at positions compatible with the locations of LVDTs in the experiment (see Fig. 29). Figure 30a shows a plot of the average vertical displacements,  $\bar{\delta} = (\delta_{v1} + \delta_{v2})/2$ , versus vertical load  $F_v$  and Fig. 30b shows a plot of the horizontal displacement  $\delta_{h1}$  versus horizontal load  $F_h$ . The experiment curves were plotted for reference, as well as the numerical results from Nguyen (2005) and Cusatis et al. (2006). Nguyen used a non-local damage model, whereas Cusatis et al. used a confinement-shear lattice model where a set of connected particles represents the material. Both studies were able to simulate the fracture process at some



**Fig. 30** Example 4: experimental and numerical results

level. However, Nguyen's results were unable to predict the rise of negative vertical force along the softening branch. Also, the horizontal load curve was not well predicted. On the other hand, the numerical curves from the current study agree with the experimental ones. The numerical curves also show similar patterns despite the differences in the type of elements and the number of degrees of freedom. Table 14 presents a comparison of the vertical peak load and corresponding

displacements ( $\bar{\delta}$ ), taking the first experiment as reference. Good agreement can be observed, especially at peak loads. Note that the discrepancies with the second experiment and the numerical results are within an order of magnitude. Regarding the elements shape, the results suggest that the proposed model can deal with elements with a high aspect ratio.

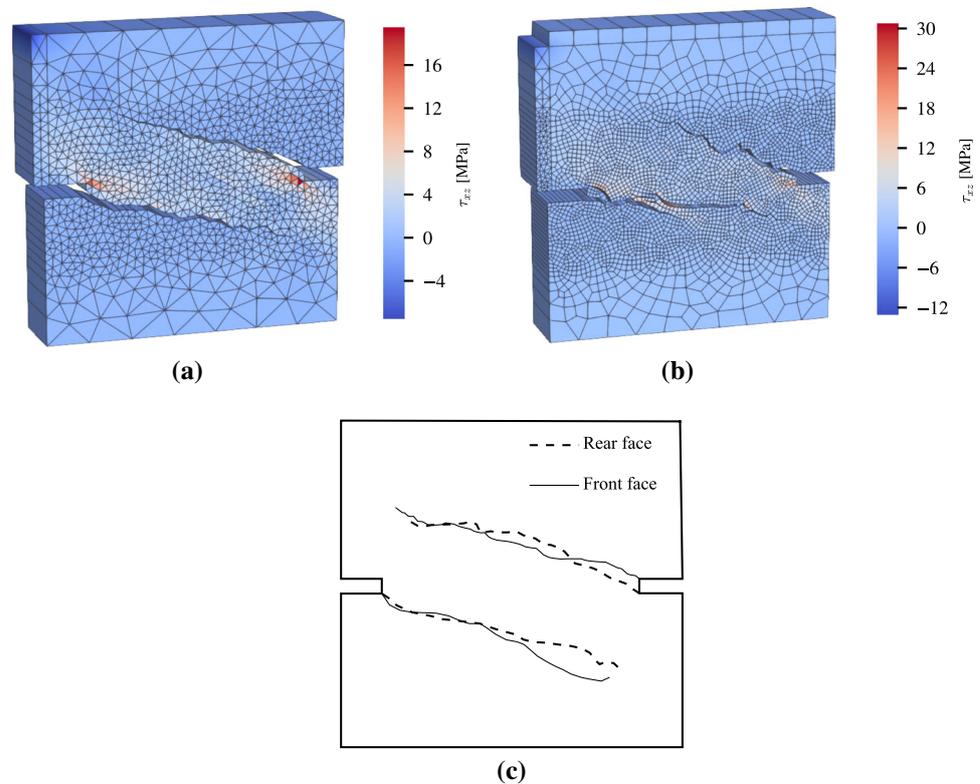
Figs. 31a and b present the deformed state, multiplied by a scale factor of 15, at the end of the two simulations. The figures also displays the  $\tau_{xz}$  stress field where it is possible to see stress concentrations between the cracks as a result of the material discontinuity. Figure 31c shows the experiment crack paths for comparative purposes. Good agreement in crack patterns can be observed. Despite a finer mesh using hexahedral elements, the cracking pattern is better reproduced (the experiment crack pattern) by the mesh with wedge elements. For example, note that more than one crack appears near the left notch for the mesh with hexahedral elements. We consider that under the imposed shear conditions, interlocking prevented the crack propagation from the left notch driving more stress levels to nearby cohesive elements, which, in turn, favored the development of new cracks. For this reason and for more refined analyses, the authors suggest avoiding the use of cohesive elements combined with hexahedral elements. In addition, since this example is basically a 2D problem, and the mesh was generated by extrusion of the  $xz$  face, the obtained crack patterns are the same along the  $y$  direction. That will not be the case if, for example, unstructured meshes were used due to mesh-induced anisotropy.

## 6 Conclusions

This paper presents a 3D elasto-plastic constitutive model for cohesive elements to simulate fracture in quasi-brittle materials. The paper also presents some

**Table 14** Example 4: comparison of numerical results and experimental data

Experiment/model	Increments	$P_{max}$ (kN)	$\bar{\delta}$ (mm)	$\frac{ \Delta P_{max} }{P_{max}}$ %	$\frac{ \Delta \bar{\delta} }{\bar{\delta}}$ %
Experiment 1	–	16.96	0.0091	–	–
Experiment 2	–	19.39	0.0076	14.3	16.7
WED	992	16.38	0.0094	3.4	2.8
HEX	2090	17.65	0.0107	4.1	16.7



**Fig. 31** Example 4: deformed meshes and experimental crack paths: **a** analysis WED; **b** analysis HEX; **c** experimental crack paths

techniques to aid the solution of the resulting nonlinear system of equations. The proposed model requires few material parameters and is able to simulate, with good and fairly good agreement, a wide range of experiments. It was tested by verifying stress components and displacements in extension and shear patch tests. Also, the results from a refinement test show little mesh dependency. This is possible thanks to variable elastic coefficients used to regulate the interface elements displacements.

Four experiments involving shear and torsion were simulated using the proposed model. In all cases, good agreement was observed in load-CMOD curves, especially when verifying peak loads and the shape of softening branches. The modeling was able to provide complete and smooth softening curves. Also, the obtained crack patterns were compatible with the experimental ones when available. Each numerical application (Examples 1 to 4) were analyzed using two different meshes. The results provided quite similar curves, demonstrating good repeatability even when working with different bulk elements types. Nonetheless, it was

observed that hexahedral elements interfere with the development of cracks and, depending on the mesh refinement level, may lead to the formation of several cracks in regions where only one crack is expected. On the other hand, the use of tetrahedral and pyramidal elements tends to favor the occurrence of more realistic crack patterns.

**Acknowledgements** The authors gratefully acknowledge the financial support from the Brazilian Research Council (CNPq) and the Federal District's Research Support Foundation (FAP-DF).

## References

- Abbo AJ, Sloan SW (1996) An automatic load stepping algorithm with error control. *Int J Numer Methods Eng* 39:1737–1759. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960530\)39:101737:AID-NME9273.0.CO;2-5](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960530)39:101737:AID-NME9273.0.CO;2-5)
- Alfano G, Crisfield MA (2001) Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *Int J Numer Methods Eng* 50:1701–1736. <https://doi.org/10.1002/nme.93>

- Barenblatt GI (1962) The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech* 7(1):55–129
- Beer G (1985) An isoparametric joint/interface element for finite element analysis. *Int J Numer Methods Eng* 21:585–600. <https://doi.org/10.1002/nme.1620210402>
- Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, adn Fleming M, Krysl P (1996) Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139:3–47
- Benedetto MF, Caggiano A, Etse G (2018) Virtual elements and zero thickness interface-based approach for fracture analysis of heterogeneous materials. *Comput Methods Appl Mech Eng* 338:41–67. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.001>
- Bocca P, Carpinteri A, Valente S (1990) Size effects in the mixed mode crack propagation: Softening and snap-back analysis. *Eng Fract Mech* 35(1):159–170
- Brokenshire DR (1995) A study of torsion fracture tests. Ph.D. thesis, Cardiff University
- Caballero A, Willam KJ, Carol I (2008) Consistent tangent formulation for 3d interface modeling of cracking/fracture in quasi-brittle materials. *Comput Methods Appl Mech Eng* 197:2804–2822. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.01.011>
- Caggiano A, Etse G, Martinelli E (2012) Zero-thickness interface model formulation for failure behavior of fiber-reinforced cementitious composites. *Comput Struct* 98–99:23–32. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.01.013>
- Carey GF, Ma M (1999) Joint elements, stress post-processing and superconvergent extraction with application to mohr-coulomb failure. *Commun Numer Methods Eng* 15:335–347. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199905\)15:5335::AID-CNM2483.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199905)15:5335::AID-CNM2483.0.CO;2-I)
- Carol I, Prat PC, López CM (1997) Normal/shear cracking model: application to discrete crack analysis. *J Eng Mech* 123(8):765–773. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:8\(765\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:8(765))
- Carrier B, Granet S (2012) Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. *Eng Fract Mech* 79:312–328. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.11.012>
- Cendón DA, Gálvez JC, Elices M, Planas J (2000) Modelling the fracture of concrete under mixed loading. *Int J Fract* 103:293–310. <https://doi.org/10.1023/A:1007687025575>
- Cerfontaine B, Dieudonné AC, Radu JP, Collin F, Charlier R (2015) 3d zero-thickness coupled interface finite element: formulation and application. *Comput Geotech* 69:124–140. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.04.016>
- Chen X, Bu J, Xu L (2016) Effect of strain rate on post-peak cyclic behavior of concrete in direct tension. *Constr Build Mater* 124:746–754. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.08.012>
- Corona E, Reedy ED (2011) Calculations of buckle-driven delamination using cohesive elements. *Int J Fract* 170(2):191–198
- Coutinho ALGA, Martins MAD, Sydenstricker RM, Alves JLD, Landau L (2003) Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. *Comput Geotech* 30:347–374. [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(03\)00013-2](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(03)00013-2)
- Cui W, Potts DM, Zdravković L, Gawecka KA, Tsiampousi A (2019) Formulation and application of 3d thm-coupled zero-thickness interface elements. *Comput Geotech* 116:103204. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2019.103204>
- Cusatis G, Bazant ZP, Cedolin L (2006) Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete. *Comput Methods Appl Mech Eng* 195:7154–7171. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.04.019>
- Davila C, Camanho P, de Moura M (2001) Mixed-mode decohesion elements for analyses of progressive delamination. In: *Proceedings of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures. Structural dynamics and materials conference*. <https://doi.org/10.2514/6.2001-1486>
- Day RA, Potts DM (1994) Zero thickness interface elements—numerical stability and application. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 18:689–708. <https://doi.org/10.1002/nag.1610181003>
- Dugdale DS (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys Solids* 8:100–104
- Durand R, Silva FHBT (2019) A coulomb-based model to simulate concrete cracking using cohesive elements. *Int J Fract* 220:17–43. <https://doi.org/10.1007/s10704-019-00395-5>
- Etse G, Caggiano A, Vrech S (2012) Multiscale failure analysis of fiber reinforced concrete based on a discrete crack model. *Int J Fract* 178:131–146. <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9733-z>
- Evangelista F, Roesler JR, Proença SP (2013) Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Eng Fract Mech* 97:261–280. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.10.023>
- Falk ML, Needleman A, Rice JR (2001) A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture. *J Phys Arch* 11:543–550. <https://doi.org/10.1051/jp4:2001506>
- Feist C, Hofstetter G (2007) Validation of 3d crack propagation in plain concrete part I: experimental investigation—the pct3d test. *Comput Concr* 4:49–66. <https://doi.org/10.12989/cac.2007.4.1.049>
- Ferté G, Massin P, Moes N (2016) 3d crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Comput Methods Appl Mech Eng* 300:347–374. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.018>
- Fujita Y, Ishimaru R, Hanai S, Suenaga Y (1997) Study of internal friction angle and tensile strength of plain concrete. *J Struct Constr Eng* 494:7–14. [https://doi.org/10.3130/aijs.62.7\\_2](https://doi.org/10.3130/aijs.62.7_2)
- García-Álvarez VO, Gettu R, Carol I (2012) Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model. *Sadhana* 37:187–205. <https://doi.org/10.1007/s12046-012-0076-2>
- Garolera D, Carol I, Papanastasiou P (2020) Application of zero-thickness interface elements to sanding prediction analysis. *J Petrol Sci Eng* 190:107052. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107052>
- Gasser TC (2007) Validation of 3d crack propagation in plain concrete part II: computational modeling and predictions of the pct3d test. *Comput Concr* 4:67–82. <https://doi.org/10.12989/cac.2007.4.1.067>
- Gasser TC, Holzapfel GA (2006) 3d crack propagation in unreinforced concrete. a two-step algorithm for tracking 3d crack paths. *Comput Methods Appl Mech Eng* 195:5198–5219. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.10.023>

- Gerstle WH, Xie M (1992) Fem modeling of fictitious crack propagation in concrete. *J Eng Mech* 118:416–434. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1992\)118:2\(416\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:2(416))
- Geubelle PH, Baylor JS (1998) Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation. *Composites B* 29(5):589–602. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(98\)00013-4](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(98)00013-4)
- Geuzaine C, Remacle JF (2009) Gmsh: a 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int J Numer Methods Eng* 79:1309–1331. <https://doi.org/10.1002/nme.2579>
- Harper PW, Hallett SR (2008) Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination. *Eng Fract Mech* 75:4774–4792. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2008.06.004>
- Hillerborg A, Modeer M, Peterson P (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem Concr Res* 6:773–782
- Hird CC, Kwok CM (1989) Finite element studies of interface behaviour in reinforced embankments of soft ground. *Comput Geotech* 8(2):111–131
- Ho S, Fu W, Wong H (1997) Application of automatic choice of step size for time stepping finite element method to induction motors. *IEEE Trans Magn*. <https://doi.org/10.1109/20.582511>
- Hordijk DA Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experimentd, modelling and analyses, vol 37, 1 edn. Heron, Netherlands (1992)
- Jebli M, Jamin F, Malachanne E, Garcia-Diaz E, El Youssoufi MS (2018) Experimental characterization of mechanical properties of the cement-aggregate interface in concrete. *Constr Build Mater* 161:16–25. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.11.100>
- Jefferson AD, Barr BIG, Bennett T, Hee SC (2004) Three dimensional finite element simulations of fracture tests using the Craft concrete model. *Comput Concr* 1(3):261–284. <https://doi.org/10.12989/cac.2004.1.3.261>
- Jiang H, Meng D (2018) 3d numerical modelling of rock fracture with a hybrid finite and cohesive element method. *Eng Fract Mech* 199:280–293. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2018.05.037>
- Jin ZH, Paulino GH, Dodds RH (2003) Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Eng Fract Mech* 70(14):1885–1912
- Khoei AR, Moslemi H, Sharifi M (2012) Three-dimensional cohesive fracture modeling of non-planar crack growth using adaptive FE technique. *Int J Solids Struct* 49(17):2334–2348. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.04.036>
- Lens LN, Bittencourt E, D'Avila VMR (2007) Cohesive laws to model concrete rupture—a methodology that takes mesh effects into consideration. *Mecánica Comput* 13:1440–1452
- Lens LN, Bittencourt E, D'Avila VM (2009) Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete. *Eng Fract Mech* 76(14):2281–2297
- Liu X, Duddu R, Waisman H (2012) Discrete damage zone model for fracture initiation and propagation. *Eng Fract Mech* 92:1–18. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2012.04.019>
- López CM, Carol I, Aguado A (2008a) Meso-structural study of concrete fracture using interface elements. I: numerical model and tensile behavior. *Mater Struct* 41:583–599. <https://doi.org/10.1617/s11527-007-9314-1>
- López CM, Carol I, Aguado A (2008b) Meso-structural study of concrete fracture using interface elements. II: compression, biaxial and Brazilian test. *Mater Struct* 41:601–620. <https://doi.org/10.1617/s11527-007-9312-3>
- Melenk JM, Babuska L (1996) The partition of unity finite element method: basis theory and applications. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139:289–314
- Molinari JF, Gazonas GA, Raghupathy R, Rusinek A, Zhou F (2007) The cohesive element approach to dynamic fragmentation: the question of energy convergence. *Int J Numer Methods Eng* 69:484–503. <https://doi.org/10.1002/nme.1777>
- Morin D, Bourel B, Bennani B, Lauro F, Lesueur D (2013) A new cohesive element for structural bonding modelling under dynamic loading. *Int J Impact Eng* 53:94–105. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2012.02.003>
- Ng K, Small JC (1997) Behavior of joints and interfaces subjected to water pressure. *Comput Geotech* 20:71–93. [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(96\)00015-8](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(96)00015-8)
- Ngo D, Scordelis AC (1967) Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI J Proc* 152–163
- Nguyen GD (2005) A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory. doctoral thesis, University of Oxford
- Nguyen VP (2014) An open source program to generate zero-thickness cohesive interface elements. *Adv Eng Softw* 74:27–39. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2014.04.002>
- Nguyen VP, Lian H, Rabczuk T, Bordas S (2017) Modelling hydraulic fractures in porous media using flow cohesive interface elements. *Eng Geol* 225:68–81. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2017.04.010>
- Nilson A.H (1968) Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI J Proc* 757–766
- Nooru-Mohamed MB (1992) Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. doctoral thesis, Delft University of Technology
- Ortiz M, Pandolfi A (1999) Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *Int J Numer Methods Eng* 44:1267–1282. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990330\)44:9<1267::AID-NME4863.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990330)44:9<1267::AID-NME4863.0.CO;2-7)
- Pandolfi A, Ortiz M (2002) An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations. *Eng Comput* 18:148–159. <https://doi.org/10.1007/s003660200013>
- Park K, Paulino GH (2011) Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl Mech Rev* 64(6):060802. <https://doi.org/10.1115/1.4023110>
- Park K, Paulino GH, Roesler JR (2008) Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete. *Eng Fract Mech* 75:3806–3818. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2008.02.002>
- Park K, Paulino GH, Roesler JR (2009) A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J Mech Phys Solids* 57(6):891–908
- Paulino GH, Celes W, Espinha R, Zhang ZJ (2008) A general topology-based framework for adaptive insertion of cohe-

- sive elements in finite element meshes. *Eng Comput* 24:59–78. <https://doi.org/10.1007/s00366-007-0069-7>
- Plesha ME, R., B., A., P (1989) Constitutive model and finite element procedure for dilatant contact problems. *J Eng Mech* 115(12):2649–2668
- Ralston A (1962) Runge-kutta methods with minimum error bounds. *Math Comput* 16:431–437. <https://doi.org/10.2307/2003133>
- Reinhardt HW, Cornelissen HAW (1984) Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading. *Cem Concr Res* 14:263–270. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(84\)90113-3](https://doi.org/10.1016/0008-8846(84)90113-3)
- Roesler J, Paulino GH, Park K, Gaedicke C (2007) Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cem Concr Compos* 29:300–312. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2006.12.002>
- Roy YA, Dodds RH (2001) Simulation of ductile crack growth in thin aluminum panels using 3-D surface cohesive elements. *Int J Fract* 110(1):21–45
- Roychowdhury S, Roy YDA, Dodds RH Jr (2002) Ductile tearing in thin aluminum panels: experiments and analyses using large-displacement, 3-d surface cohesive elements. *Eng Fract Mech* 69:983–1002. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00113-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00113-8)
- Segura JM, Carol I (2004) On zero-thickness interface elements for diffusion problems. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 28:947–962. <https://doi.org/10.1002/nag.358>
- Segura JM, Carol I (2010) Numerical modelling of pressurized fracture evolution in concrete using zero-thickness interface elements. *Eng Fract Mech* 77:1386–1399. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.03.014>
- Segurado J, LLorca J (2004) A new three-dimensional interface finite element to simulate fracture in composites. *Int J Solids Struct* 41:2977–2993. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.01.007>
- Sheng D, Sloan SW, Abbo AJ (2002) An automatic newton-raphson scheme. *Int J Geomech*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1532-3641\(2002\)2:4\(471\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1532-3641(2002)2:4(471))
- Stone and Webster Engineering Corporation (1992) Uplift pressures, shear strengths and tensile strengths for stability analysis of concrete gravity dams: Final report. Tech. rep
- Tabiei A, Zhang W (2017) Cohesive element approach for dynamic crack propagation: artificial compliance and mesh dependency. *Eng Fract Mech* 180:23–42. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.05.009>
- Tejchman J, Bobříski J (2013) Continuous and discontinuous modelling of fracture in plain concrete under monotonic loading. In: Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-28463-2\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-28463-2_5)
- Turon A, Dávila CG, Camanho PP, Costa J (2007) An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Eng Fract Mech* 74(10):1665–1682. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.08.025>
- van den Bosch MJ, Schreurs PJG, Geers MGD (2008) On the development of a 3d cohesive zone element in the presence of large deformations. *Comput Mech* 42:171–180. <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0184-8>
- Wells GN, Sluys LJ (2001) A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int J Numer Methods Eng* 50(12):2667–2682
- Wittmann FH, Rokugo K, E, B, Mihashi H, Simopnin P (1988) Fracture energy and strain softening of concrete as determined by compact tension specimens. *Mater Struct* 21:21–32. <https://doi.org/10.1007/BF02472525>
- Xu XP, Needleman A (1994) Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J Mech Phys Solids* 42:1397–1434. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(94)90003-5)
- Xu W, Zang M, Sakamoto J (2016) Modeling mixed mode fracture of concrete by using the combined discrete and finite elements method. *Int J Comput Methods* 13(01):1650007
- Yang ZJ, Chen JF (2005) Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams. *Eng Fract Mech* 72:2280–2297. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.02.004>
- Zivaljic N, Nikolic Z, Smoljanovic H (2014) Computational aspects of the combined finite-discrete element method in modelling of plane reinforced concrete structures. *Eng Fract Mech* 131:669–686. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.017>

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.