



**INVESTIGAÇÃO DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS EM
COMPRESSORES ALTERNATIVOS DE DUPLO
EFEITO NA PRESENÇA DE NÃO-LINEARIDADES**

Nícolas da Silva Dias

**Dissertação de Mestrado
Ciências Mecânicas**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INVESTIGAÇÃO DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS EM
COMPRESSORES ALTERNATIVOS DE DUPLO EFEITO NA
PRESENÇA DE NÃO-LINEARIDADES

Nícolas da Silva Dias

Orientadora: Aline Souza de Paula, Dra. Univ (ENM/ UnB)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - XXX.XXX

BRASÍLIA/DF: 01 de junho de 2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Investigação de vibrações torcionais em compressores
alternativos de duplo efeito na presença de não-linearidades

Nícolas da Silva Dias

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNI-
VERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂN-
ICAS.

APROVADA POR:

Aline Souza de Paula, Dra. Univ (ENM/ UnB)
(Orientadora)

Adriano Todorovic Fabro, Dr. Univ (ENM/ UnB)
(Examinador Interno)

Suzana Moreira Ávila, Dra. Univ (FGA/ UnB)
(Examinadora Externa)

BRASÍLIA/DF, 01 DE JUNHO DE 2021.

FICHA CATALOGRÁFICA

Dias, N. S.

Investigação de vibrações torcionais em compressores alternativos de duplo efeito na presença de não-linearidades

[Distrito Federal] 2021.

xvii, 91p. (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2021).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

1. Não-linearidades

2. Vibração torcional

3. Compressor alternativo

4. Inércia não-constante

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Dias, N. S.(2021). Investigação de vibrações torcionais em compressores alternativos de duplo efeito na presença de não-linearidades. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM - XXX.XXX, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xvii, 91p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Nicolas da Silva Dias.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Investigação de vibrações torcionais em compressores alternativos de duplo efeito na presença de não-linearidades.

GRAU / ANO: MESTRE / 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Nícolas da Silva Dias

Aos meus pais, Antônio e Gardênia.

Agradecimentos

Nesta seção eu gostaria de agradecer a todas as pessoas que de alguma forma, me ajudaram a construir este trabalho durante esses últimos dois anos. Aqui vai ser a parte mais pessoal e informal possível desta dissertação. Então, sem delongas vamos lá.

Quero agradecer em primeiro lugar a Deus por estar vivo e em sã consciência, não sei como aguentei errar tanto e me manter persistente em toda essa jornada.

A melhor professora desta Terra em dinâmica não-linear, Aline Souza de Paula. Esse trabalho também é fruto de seus esforços. Sou muito grato por ter me incentivado em toda essa jornada, sem a sua orientação e conselhos nada disso teria se tornado realidade. Também vale mencionar que a sua abordagem foi tão excelente que resolvi denominar de “De Paulazismo”. Te admiro muito por ser uma pessoa maravilhosa e que sempre está empenhada em ajudar quem quer que seja. Não posso nem reclamar da orientação porque foi a melhor que tive, mas você pode reclamar de mim e muito. . . (risos). Muito obrigado por ter acreditado em mim e no meu trabalho.

Aos amigos, professores e funcionários do GDS que foram uma família para mim e me acolheram de braços abertos e com uma boa xícara de café (sem açúcar é claro).

Em especial aos meus amigos mais próximos com quem pude conviver e aprender, José Airton (Paizão) e Reginaldo que são meus conterrâneos e sempre me ajudaram muito em toda minha estadia em Brasília.

Ao meu amigo Rickson que é um irmão que a vida me deu. Perdi as contas de quantas vezes sua amizade e ajuda foram necessárias para que este trabalho fosse concluído. Muito obrigado pelo empréstimo do seu notebook que me ajudou muito a fazer as simulações e a evitar olhar pro Youtube. Aliás, hoje em dia, quem não é viciado nesse site ?

Também não posso esquecer de agradecer minha amiga Wang Fe Yen que ainda realizou algumas simulações, uma pena que estavam erradas... mas a intenção era boa e eu aprecio muito isso.

Aos amigos de moradia da Asa Sul que compartilhei uma experiência maravilhosa, na qual tudo era resenha e acabava em bolo e cuscuz. Tenho saudades da convivência e da companhia de vocês, guardo com grande carinho todo esse tempo. Espero voltar em breve à Brasília para relembrar esses tempos e concretizar novos. Em especial, agradeço muito

a Dona Maria por ser uma mãe para mim. Aprendi tanto com você sobre a vida nesse período, do que em muitos anos.

A minha família, por todo apoio em momentos bons e ruins. Ao meu pai, Antônio, por sempre me incentivar a lutar pelos meus objetivos, mesmo que eu mude de cidade. A minha mãe, Dona Gardênia por ser a mulher mais guerreira que eu conheço, por sempre encarar os desafios da vida sem reclamar de nada e fazer tudo com muita dedicação. A minhas irmãs, Nadine e Marília, pela companhia engraçada e apoio.

A minha mãe de criação, Meirelene por sempre me ajudar seja com os almoços e cafés da tarde com biscoitos de goma (meus favoritos por sinal). Também por sempre conversar comigo em tempos difíceis e me manter com pensamentos positivos. A Elyvânia minha amiga pela sua generosidade e carinho, sou muito grato a tudo que você fez por mim e minha família.

Aos amigos Neves e seu filho Francisco pelo apoio financeiro no início desta caminhada que foi fundamental. Sou muito grato a vocês por tudo.

A FAPEMA por ter acreditado no nosso projeto e pela bolsa, sem vocês isso só seria uma devaneio da minha mente.

*"Discipline equals freedom."
-Jocko Willink*

Resumo

Investigação de vibrações torcionais em compressores alternativos de duplo efeito na presença de não-linearidades

Autor: Nícolas da Silva Dias

Orientadora: Aline Souza de Paula, Dra. Univ (ENM/ UnB)

Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 01 de junho de 2021

Vibrações torcionais estão geralmente presentes em algum nível em máquinas rotativas. Este trabalho tem o objetivo de avaliar a vibração torcional de um eixo de compressor alternativo na presença de não-linearidades através de dois modelos simplificados não-lineares, sendo um de 2 GDL (1 cilindro) e o outro possui 5 GDL (4 cilindros), além de identificar as situações críticas de operação. A não-linearidade é proveniente da consideração de uma inércia variável de acordo com a rotação do eixo, comportamento usualmente desconsiderado na literatura. Os eixos dos compressores estão sujeitos a dois diferentes tipos de excitação, a primeira é oriunda do cilindro, sendo um torque periódico causado pela força de compressão no pistão, e a segunda é proveniente do motor de indução que aciona o compressor alternativo. Os sistemas não-lineares são resolvidos numericamente usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Uma análise paramétrica é executada e os resultados mostraram que a não-linearidade devido a inércia não-constante não causa comportamentos complexos. No entanto, a influência da não-linearidade fica evidente nos comportamentos observados através dos espaços de fase. O aumento do número de GDL com a consideração de 4 cilindros com inércia variável possibilitou o surgimento de comportamentos não periódicos, porém estas respostas não apresentaram muita complexidade. Entretanto, com a introdução da excitação adicional, respostas complexas surgiram para determinados valores de amplitudes e frequências do torque harmônico.

Palavras-chaves: Não-linearidades, Vibração torcional, Compressor alternativo, Inércia não-constante.

Abstract

INVESTIGATION OF TORSIONAL VIBRATIONS AT DOUBLE EFFECT COMPRESSORS IN THE PRESENCE OF NONLINEARITIES

Author: Nicolás da Silva Dias

Supervisor: Aline Souza de Paula, Dra. Univ (ENM/ UnB)

Master in Mechanical Sciences

Brasília, 2021

Torsional vibrations are generally present at some level in rotating machines. This work aims to evaluate the torsional vibration of a reciprocating compressor's shaft in the presence of nonlinearities through two simplified nonlinear models, one with 2 DOF (1 cylinder) and the other with 5 DOF (4 cylinders), in addition to identifying critical operating situations. The nonlinearity comes from the consideration of variable inertia according to the rotation of the axis, behavior that is usually disregarded in the literature. The compressor's shafts are subject to two different types of excitation, the first is from the cylinder, which is a periodic torque caused by the force of compression in the piston, and the second is from the induction motor that drives the reciprocating compressor. The nonlinear systems are solved numerically by employing the fourth-order Runge-Kutta method. A parametric analysis is executed and the results show that the nonlinearity due to non-constant inertia does not cause complex behaviors. However, the influence of nonlinearity is evident in the behaviors observed through the phase spaces. The increase in the number of GDL with the consideration of 4 cylinders with variable inertia allowed the emergence of non-periodic behaviors, but these responses did not present much complexity. However, with the introduction of additional excitation, complex responses emerged for certain amplitude values and harmonic torque frequencies.

Key-words: Nonlinearities, Torsional vibration, Reciprocating compressor, Non-constant inertia.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.1.1	Objetivo geral	2
1.1.2	Objetivos específicos	2
1.2	Metodologia	3
1.3	Contribuições	3
1.4	Organização do trabalho	4
2	REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1	Vibrações torcionais em máquinas alternativas	5
2.2	Modelos dinâmicos de máquinas alternativas	8
3	TEORIA GERAL DE COMPRESSORES	11
3.1	Fundamentos	11
3.2	Compressores alternativos	13
3.2.1	Classificação	15
3.2.1.1	Compressor de pistão automotivo ou sem cruzeta	15
3.2.1.2	Compressor com cruzeta	15
3.2.2	Arranjo	16
3.2.3	Vantagens e desvantagens	17
3.2.4	Acionamento	18
3.2.5	Ciclo de compressão	19
3.2.6	Principais componentes	20
4	DINÂMICA-NÃO LINEAR E SUAS FERRAMENTAS DE ANÁLISE	24
4.1	Comportamento caótico	24
4.2	Espaço de fase	26
4.3	Seção de Poincaré	27
4.4	Diagrama de bifurcação	28
5	MODELAGEM MATEMÁTICA	30

5.1	Modelo de 2 GDL com um cilindro	30
5.1.1	Derivação da inércia equivalente para um único cilindro	31
5.1.2	Torque resistivo do cilindro	34
5.1.3	Torque do motor elétrico	36
5.1.4	Equações do movimento adimensionalizadas	37
5.1.5	Equações de estado	38
5.1.6	Modelo de 2 GDL com excitação harmônica	39
5.2	Modelo de 5 GDL com quatro cilindros	40
5.2.1	Modelo de 5 GDL com excitação harmônica	42
6	ANÁLISE NUMÉRICA DOS MODELOS NÃO-LINEARES	44
6.1	Resultados do modelo de 2 GDL	44
6.1.1	Avaliação da amplitude de resposta de acordo com a velocidade de rotação do eixo	48
6.1.2	Influência da rigidez na amplitude relativa	49
6.1.3	Análise paramétrica da inércia equivalente do cilindro	51
6.1.4	Resultados com excitação harmônica	55
6.2	Resultados do modelo de 5 GDL	60
7	CONCLUSÃO	65
7.1	Trabalhos futuros	66
	REFERÊNCIAS	67

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Classificação dos compressores.	12
Figura 3.2 – Representação esquemática: a) compressor alternativo de simples-efeito e b) compressor alternativo de duplo-efeito.	14
Figura 3.3 – Compressor alternativo do tipo automotivo com três estágios. Adaptado de (BORREMANS, 2019).	15
Figura 3.4 – Compressor alternativo do tipo cruzeta. Adaptado de (STEWART, 2018).	16
Figura 3.5 – Compressor alternativo com cilindros opostos na horizontal. Adaptado de (BLOCH; GODSE, 2006).	17
Figura 3.6 – Ciclo ideal de compressão.	19
Figura 3.7 – Ciclo real de compressão.	20
Figura 3.8 – Cárter. Adaptado de (STEWART, 2018).	20
Figura 3.9 – Virabrequim de um compressor feito de aço SAE 4140 tratado termicamente e forjado. Adaptado de (GIAMPAOLO, 2010).	21
Figura 3.10–Elementos constituintes: a) biela de um compressor velocidade moderada. Adaptado de (BLOCH; GEITNER, 2012); b) acoplamento da cruzeta e biela. Adaptado de (BLOCH; GEITNER, 2012).	21
Figura 3.11–Pistão com seus anéis e banda de desgaste. Adaptado de (BROWN, 2011).	22
Figura 3.12–Cilindro de duplo-efeito. Adaptado de (BORREMANS, 2019).	23
Figura 3.13–Válvulas: a) componentes típicos de uma válvula de placa. Adaptado de (BRUN; KURZ, 2019); b) válvula reguladora de pressão. Adaptado de (BLOCH; GODSE, 2006).	23
Figura 4.1 – Evolução temporal de uma resposta caótica.	26
Figura 4.2 – Espaço de fases.	26
Figura 4.3 – Construção da Seção de Poincaré. Adaptado de (WIGGINS, 2003).	27
Figura 4.4 – Seção de Poincaré.	28
Figura 4.5 – Diagrama de bifurcação: amplitude de forçamento (B) e amplitude da resposta (x).	29
Figura 5.1 – Modelo equivalente para um compressor alternativo de um cilindro.	31
Figura 5.2 – Mecanismo manivela-biela-pistão.	31
Figura 5.3 – Curva torque-velocidade para um motor de indução.	37

Figura 5.4 – Modelo equivalente para um compressor alternativo de quatro cilindros em série: cilindros 1 e 4 em fase e cilindros 2 e 3 fora de fase.	40
Figura 6.1 – Deslocamento angular, rotação do eixo e espaço de fase: a) deslocamento angular da manivela, b) rotação do virabrequim e c) espaço de fase com restrição de movimento.	46
Figura 6.2 – Amplitude relativa: a) evolução temporal e b) espaço de fase.	47
Figura 6.3 – Ciclo P-V e torque resistivo: a) ciclo de compressão ideal e b) torque resistivo do cilindro.	47
Figura 6.4 – Torque do motor elétrico.	48
Figura 6.5 – Amplitudes máximas: a) amplitude máxima e rotação média do eixo e b) amplitude máxima em relação C_0	49
Figura 6.6 – Espaços de fase para valores diferentes de rigidez.	50
Figura 6.7 – Espaços de fase para diferentes valores da rigidez nos pontos de amplitude máxima.	50
Figura 6.8 – Efeito das inércias I_c e I_2 na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$: a) inércia da manivela e b) inércia adicional de um sistema simplificado de duas massas.	51
Figura 6.9 – Efeito das massas na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$: a) massa do pistão - m_p , b) massa da biela - m_r , c) massa da extremidade maior da biela - m_1 e d) massa da extremidade menor da biela - m_2	52
Figura 6.10 – Efeito do comprimento da manivela na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$	53
Figura 6.11 – Espaços de fase para distintos valores do comprimento da manivela.	54
Figura 6.12 – Espaços de fase para diferentes valores do comprimento da manivela avaliados nas condições de amplitude máxima.	55
Figura 6.13 – Respostas do sistema sob a ação de diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad e $C_0 = 11000$ N.m.	56
Figura 6.14 – Respostas do sistema sob ação de diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.	57
Figura 6.15 – Diagrama de bifurcação para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.	58
Figura 6.16 – Respostas do sistema sob diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.	59
Figura 6.17 – Resposta do sistema com $T_0 = 650000$ N.m e $r = 150$ mm para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.	60
Figura 6.18 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 72,5$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.	61
Figura 6.19 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 150$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.	62
Figura 6.20 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 72,5$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, $C_0 = 2500$ N.m e $T_0 = 60000$ N.m.	63
Figura 6.21 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 150$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, $C_0 = 2500$ N.m e $T_0 = 60000$ N.m.	64

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação entre os compressores centrífugo e alternativo. Adaptado de (STEWART, 2018).	18
Tabela 2 – Parâmetros do sistema dinâmico.	45

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>DOF</i>	<i>Degree of Freedom</i> (Graus de Liberdade)
<i>GDL</i>	Graus de Liberdade
<i>MEF</i>	Método de Elementos Finitos
<i>PMI</i>	Ponto Morto Inferior
<i>PMS</i>	Ponto Morto Superior
<i>VAS</i>	Velocidade Angular Instantânea
<i>VDL</i>	Velocimetria Doppler à Laser
<i>VTL</i>	Vibrômetro de Torção à Laser

Lista de Símbolos

Arábicos

A_c	Área da base do cilindro [m^2]
c	Amortecimento viscoso do virabrequim [$N.m.s/rad$]
c_0	Amortecimento viscoso torcional equivalente do eixo de acoplamento [$N.m.s/rad$]
C_0	Constante que intercepta a curva torque-velocidade [$N.m$]
c_1	Amortecimento viscoso torcional equivalente do eixo entre os cilindros [$N.m.s/rad$]
C_1	Inclinação da curva torque-velocidade [$N.m.s$]
c_E	Amortecimento viscoso torcional do cilindro [$N.m.s/rad$]
c_L	Amortecimento viscoso torcional da carga [$N.m.s/rad$]
D_p	Diâmetro do cilindro [m]
$F_p(\varphi_1)$	Força exercida pela compressão do gás no interior do cilindro [N]
h	Passo de integração numérica do Runge-Kutta de 4 ^a ordem
I_0	Quantidade de inércia [$kg.m^2$]
I_2	Momento de inércia adicional de um sistema simplificado de duas massas [$kg.m^2$]
I_c	Momento de inércia da manivela [$kg.m^2$]
$I_E(\varphi_n)$	Inércia equivalente do cilindro (com $n = 1, 2, 3, 4$) [$kg.m^2$]
I_G	Momento de inércia do centro de massa da biela [$kg.m^2$]
I_L	Inércia da carga [$kg.m^2$]
k	Coefficiente de expansão adiabática

k_0	Rigidez torcional equivalente do eixo de acoplamento [$N.m/rad$]
k_1	Rigidez torcional equivalente do eixo entre os cilindros [$N.m/rad$]
K_x	Coefficiente de velocidade [m]
l	Comprimento total da biela [m]
l_G	Distância do final da manivela até o centro de massa da biela [m]
m_1	Massa da extremidade maior da biela [kg]
m_2	Massa da extremidade menor da biela [kg]
M_L	Torque do compressor transmitido à carga [$N.m$]
m_p	Massa do pistão [kg]
m_r	Massa da biela [kg]
p	Pressão desenvolvida no cilindro [Pa]
p_{atm}	Pressão atmosférica [Pa]
p_{des}	Pressão de descarga [Pa]
r	Comprimento da manivela [m]
RC	Razão de compressão
s_n	Coordenada de estado (com $n = 1, 2, 3, 4$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ para 5 GDL) [rad]
s'_n	Derivada da coordenada de estado (com $n = 1, 2, 3, 4$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ para 5 GDL) [rad]
S_p	Curso do pistão no cilindro [m]
t	Tempo [s]
T_0	Amplitude do torque harmônico [$N.m$]
T_E	Energia cinética do mecanismo manivela-biela-pistão [J]
T_{har}	Torque harmônico [$N.m$]
T_m	Torque do motor elétrico [$N.m$]
$T_r(\varphi_1)$	Torque resistivo do cilindro [$N.m$]
T_{r_n}	Torque resistivo do cilindro (com $n = 1, 2, 3, 4$) [$N.m$]
V	Volume que o gás ocupa no cilindro [m^3]

V_c Volume morto do cilindro [m^3]

x_p Deslocamento do pistão [m]

\dot{x}_p Velocidade do pistão [m/s]

Matrizes

C Matriz de amortecimento

I Matriz identidade

K Matriz de rigidez

M Matriz de inércia

M^{-1} Inversa da matriz de inércia

Z Matriz de zeros

Vetores

F Vetor de torques

s Vetor de deslocamento angular em coordenadas de estado

s' Vetor de velocidade angular em coordenadas de estado

φ Vetor de deslocamento angular

φ' Vetor de velocidade angular

φ'' Vetor de aceleração angular

Gregos

β Ângulo entre a biela e o eixo x [rad]

$\dot{\beta}$ Derivada do ângulo entre a biela e o eixo x [rad]

$\Delta\varphi$ Amplitude relativa para 1 cilindro [rad]

$\Delta\varphi'$ Velocidade relativa para 1 cilindro [rad]

$\Delta\varphi_n$ Amplitude relativa (com $n = 1, 2, 3, 4$) para 4 cilindros em série [rad]

$\Delta\varphi'_n$ Velocidade relativa (com $n = 1, 2, 3, 4$) para 4 cilindros em série [rad]

$\Delta\varphi_{max}$ Amplitude máxima [rad]

ζ_0 Fator de amortecimento

$\kappa(\varphi_1)$ Função que relaciona φ_1 e λ

λ	Razão de comprimento da manivela e comprimento da biela
τ	Tempo adimensional
φ_n	Deslocamento angular da manivela (com $n = 1$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, 4$ para 5 GDL) [rad]
φ_n	Deslocamento angular da carga (com $n = 2$ para 2 GDL ou $n = 5$ para 5 GDL) [rad]
$\dot{\varphi}_n$	Velocidade angular da manivela (com $n = 1$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, 4$ para 5 GDL) [rad/s]
$\dot{\varphi}_n$	Velocidade angular da carga (com $n = 2$ para 2 GDL ou $n = 5$ para 5 GDL) [rad]
$\ddot{\varphi}_n$	Aceleração angular da manivela (com $n = 1$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, 4$ para 5 GDL) [rad/s^2]
$\ddot{\varphi}_n$	Aceleração angular da carga (com $n = 2$ para 2 GDL ou $n = 5$ para 5 GDL) [rad/s^2]
φ'_n	Velocidade angular da manivela adimensionalizada (com $n = 1$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, 4$ para 5 GDL) [rad]
φ'_n	Velocidade angular da carga adimensionalizada (com $n = 2$ para 2 GDL ou $n = 5$ para 5 GDL)
φ''_n	Aceleração angular da manivela adimensionalizada (com $n = 1$ para 2 GDL ou $n = 1, 2, 3, 4$ para 5 GDL) [rad]
φ''_n	Aceleração angular da carga adimensionalizada (com $n = 2$ para 2 GDL ou $n = 5$ para 5 GDL) [rad]
$\varphi'_{1,med}$	Velocidade de rotação média do eixo [rad]
ω	Frequência de rotação do virabrequim [rad/s]
ω_0	Frequência de adimensionalização [rad/s]

1 Introdução

Os compressores são máquinas que convertem energia mecânica em energia de gás. Este processo está coerente com a Primeira Lei da Termodinâmica, em que a energia não pode ser destruída, apenas transformada. Uma parcela desta transformação é convertida também em energias não-utilizáveis, como por exemplo, em perdas de calor. A conversão de energia nestas máquinas pode acontecer por duas possibilidades: deslocamento positivo para redução de volume do gás ou por deslocamento dinâmico impondo uma velocidade ao gás para que ele passe por uma seção específica. Logo, a partir dessas duas categorias de transformação de energia, os compressores são classificados em deslocamento positivo e deslocamento dinâmico. Os compressores alternativos são largamente utilizados em diversas aplicações que variam de uso residencial a industrial, também são os mais conhecidos compressores de deslocamento positivo. Seu funcionamento deve-se à um pistão que se move dentro de um cilindro e comprime o ar ou gás em um volume menor, desta forma aumentando a pressão. Os compressores alternativos podem ser de simples ou duplo efeito, com um ou mais estágios (BLOCH; HOEFNER, 1996).

Em todas máquinas rotativas, como no caso de compressores alternativos, há a presença de algum nível de vibrações torcionais, que estão intrinsicamente relacionadas ao seu comportamento durante a partida (*startup*), operação (*continuous operation*) ou no desligamento (*shutdown*) do equipamento. Logo, é imprescindível a análise da resposta torcional do sistema para garantir uma alta confiabilidade e uma elevada vida útil do maquinário (WACHEL; SZENASI, 1993). Em geral essas vibrações são causadas pelas forças e momentos excessivos provenientes da dinâmica do movimento, e pela velocidade de rotação do sistema, resultando em falhas de componentes mecânicos tais como o virabrequim e mancais (WACHEL; TISON et al., 1994).

Os modelos dinâmicos de compressores alternativos podem ser lineares ou não-lineares. Sendo os primeiros mais empregados pela sua fácil resolução e simplicidade das equações do movimento. Nesses modelos, as inércias dos cilindros são consideradas constantes, o que pode acarretar em respostas numéricas que não condizem com o comportamento físico, tendo em vista que essa quantidade é variável. Por outra via, alguns modelos não-lineares consideram a inércia dos cilindros sendo uma função do ângulo de rotação do eixo (virabrequim), como pode ser visto nos trabalhos de Metallidis e Natsiavas (2003) e Huang et al. (2012). A introdução dessa inércia variável dos cilindros na modelagem

matemática possibilita um modelo mais representativo e, como consequência, pode haver uma maior variedade de comportamentos dinâmicos.

Sistemas não-lineares estão presentes nos casos mais simples como em um pêndulo simples (Nayfeh e Balachandran (1989)) até na biologia com o crescimento de populações (May (1974)). Todavia, a presença de não-linearidades pode resultar em um comportamento totalmente imprevisível denominado caos, onde uma mudança sutil em um parâmetro pode proporcionar mudanças drásticas no comportamento global do sistema. Como exemplo pode-se citar o trabalho de Huang et al. (2012), no qual o aumento progressivo da rotação do virabrequim causa uma resposta caótica do sistema. Portanto, a análise dinâmica tem um papel fundamental quando um sistema apresenta não-linearidades, pois na maioria das vezes a resposta não é intuitiva, e desta forma pode-se identificar as situações indesejáveis para propiciar um bom funcionamento do sistema.

Nesta pesquisa propõe-se uma análise dinâmica de dois modelos não-lineares, sendo o primeiro representado por um eixo do compressor com um cilindro (2 GDL) e o segundo descreve um eixo com quatro cilindros em série (5 GDL). Ambos os modelos são simulados numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem em diversas condições de operação. Os resultados demonstraram que a não-linearidade proveniente da inércia não-constante do cilindro não é capaz de desencadear respostas complexas, até mesmo nas regiões de ressonância. Entretanto, com a introdução de uma excitação harmônica adicional de forma a representar outras causas que aumentam a amplitude de resposta. Nessas condições, as amplitudes maiores fazem com que as não-linearidades sejam mais evidentes, aumentando a complexidade de resposta no sistema em diversas configurações.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Avaliar a vibração torcional de um eixo de compressor alternativo na presença de não-linearidades na inércia através de dois modelos dinâmicos não-lineares em situações críticas de operação.

1.1.2 Objetivos específicos

a) Estudar dois modelos do eixo de um compressor alternativo para um sistema não-linear inércia-mola-amortecedor torcional equivalente sendo um de 2 GDL (1 cilindro) e outro de 5 GDL (4 cilindros);

b) A partir de análises paramétricas, avaliar com ferramentas qualitativas da dinâmica não-linear, se a não-linearidade da inércia não-constante do cilindro é capaz de produzir comportamentos complexos nos sistemas estudados.

1.2 Metodologia

Os dois modelos estudados são provenientes do trabalho feito por Metallidis e Natsiavas (2003), que representam duas configurações do eixo de um compressor alternativo com um cilindro (2 GDL) e com quatro cilindros em série (5 GDL). Para obter as respostas dos sistemas não-lineares é utilizado o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem, o qual foi implementado em linguagem C++ e os parâmetros dos sistemas foram extraídos de Metallidis e Natsiavas (2003), Huang et al. (2012) e Doughty (1988).

A análise dinâmica é realizada a partir do emprego das ferramentas qualitativas da dinâmica não-linear, as quais são o espaço de fase, seção de Poincaré e o diagrama de bifurcação. Estas determinam se o sistema apresenta comportamento complexo a partir da influência de não-linearidades da inércia do cilindro. Essa análise é realizada em duas etapas, a primeira é destinada a tratar das respostas do modelo de 2 GDL, e a segunda é responsável por investigar os resultados produzidos pelo modelo com 5 GDL. Ambos os modelos são analisados em duas configurações principais, com e sem excitação harmônica. Em um primeiro momento, o eixo do compressor com um cilindro (2 GDL) tem seu comportamento analisado pelas ferramentas qualitativas não-lineares. Adiante, introduz-se um torque harmônico adicional no sistema e verificam-se as respostas nas condições críticas de operação para diferentes valores da amplitude do torque harmônico (T_0), rigidez torcional equivalente (k_0) e comprimento da manivela (r). Na segunda parte da análise o eixo do compressor com quatro cilindros em série (5 GDL) é investigado. Usando a mesma abordagem da etapa inicial, o sistema é analisado com e sem a influência do torque harmônico adicional para diferentes tamanhos da manivela (r).

1.3 Contribuições

Esta dissertação tem como sua principal contribuição a análise da influência da não-linearidade devido a presença de uma inércia variável do cilindro na resposta da vibração torcional de um eixo de compressor alternativo. Outros pesquisadores também utilizaram esta abordagem, entretanto, a análise feita no presente trabalho diferencia-se dos demais pois na maioria dos trabalhos, tal como Huang et al. (2012), a inércia é linearizada, assim como as equações governantes apresentam simplificações na sua construção. Metallidis e Natsiavas (2003) também consideram a inércia variável, no entanto, a análise dinâmica é realizada somente no regime transiente.

Uma outra contribuição que difere desses trabalhos é que introduz-se uma excitação harmônica adicional, de tal forma a descrever um fenômeno que aumenta a amplitude da resposta, desta forma, as não-linearidades presentes no sistema são realçadas e resultam em comportamentos complexos.

1.4 Organização do trabalho

Esta dissertação está estruturada em 7 capítulos. Neste primeiro capítulo apresenta-se uma introdução ao tema, os objetivos e as contribuições da pesquisa, além da organização deste trabalho.

O capítulo 2 trata da revisão de literatura apresentando os trabalhos precursores relacionados aos temas centrais deste estudo. São abordados trabalhos sobre a presença de vibrações torcionais em máquinas alternativas, e os tipos de modelos dinâmicos mais usuais pelos pesquisadores.

Adiante tem-se o capítulo 3 oferecendo uma compreensão geral sobre a teoria de compressores. Sendo apresentados os fundamentos, como o princípio de funcionamento, suas principais aplicações, como também é discutido sua classificação. Os compressores alternativos são descritos com mais detalhes por meio dos seus tipos mais usados, suas vantagens e desvantagens, tipos de acionamentos, como também seus ciclos de compressão ideal e real.

No capítulo 4 são discutidas e conceituadas as principais ferramentas de análise dinâmica de sistemas não-lineares, que são o espaço de fase, seção de Poincaré e diagrama de bifurcação. Destaca-se que estas ferramentas são de natureza qualitativa, e empenham papel fundamental para a análise global do comportamento do sistema.

Em sequência tem-se o capítulo 5, que apresenta os dois modelos dinâmicos não-lineares (2 GDL e 5 GDL) a serem estudados. Neste capítulo, são tratados em detalhes todos parâmetros, equações de movimento e a adimensionalização empregada para a análise dinâmica subsequente.

O capítulo 6 emprega as ferramentas qualitativas para realizar a análise dinâmica a partir de simulações numéricas. Os modelos são submetidos a duas configurações principais, com e sem excitação harmônica adicional.

Por fim, o capítulo 7 sintetiza as principais conclusões atingidas ao longo desta pesquisa, além de apresentar propostas para a continuidade deste trabalho.

2 Revisão da Literatura

Neste capítulo é apresentada uma análise crítica da evolução do tema de vibrações torcionais em máquinas alternativas. São explorados aspectos importantes tais como: a presença de vibrações torcionais, problemas associados ao comportamento vibratório torcional e suas propostas de mitigação, além da apresentação dos modelos mais empregados na literatura.

A primeira seção aborda as vibrações torcionais presentes nos mais diferentes tipos de equipamentos rotativos, os problemas gerados e os métodos de redução de vibrações propostos. O surgimento de novos métodos de medição de vibrações torcionais desempenhou um papel importante para o crescimento de pesquisas relacionadas à esta área, visto que, os métodos usados até então não forneciam uma precisão satisfatória. Ao longo dos anos, os pesquisadores propuseram formas de reduzir ou controlar os níveis de vibração torcional por meio de controladores ativos e passivos, que podem ser absorvedores, atuadores, estruturas com dupla massa ou por balanço de torques no sistema. Existe também interesse sobre a dinâmica do acoplamento de modos na presença de vibração torcional-flexural e longitudinal-flexural.

Em seguida, explorando uma camada mais específica, a segunda seção apresenta os modelos dinâmicos mais usados para representar o comportamento destas máquinas. Os modelos variam de linear a não-linear, sendo que o último grupo tem a capacidade de retratar os fenômenos oscilatórios de forma mais realista. Os modelos mais elementares simplificam a variação de inércia por uma inércia constante, a adoção desta hipótese resulta em erros significativos como apontam os pesquisadores. Desta forma, a variação de inércia é um fator chave que muitos autores levam em consideração nos seus modelos para representar a dinâmica de máquinas alternativas. Os métodos de resolução mais frequentes são os numéricos pela sua facilidade de implementação computacional e acurácia. No entanto, em alguns casos como os lineares, existem soluções analíticas.

2.1 Vibrações torcionais em máquinas alternativas

As vibrações torcionais produzidas pela dinâmica de compressores alternativos causam efeitos também nos motores elétricos que os acionam, conforme afirma o trabalho conduzido por Grasso, Fusi e Ussi (2015). Estas oscilações torcionais produzem harmônicos

na corrente de entrada, sendo assim um defeito para o funcionamento do motor elétrico. A partir da investigação deste problema, os autores elaboraram uma nova técnica de mitigação da corrente harmônica baseada em um filtro híbrido ativo.

Segundo Wachel e Szenasi (1993), a agressividade das oscilações torcionais e das tensões geradas em máquinas rotativas depende da relação entre a velocidade de operação e as frequências de excitação dos torques instáveis e, das frequências naturais torcionais e os modos de vibrar. Desta forma, a análise de vibrações tem papel primordial para que o equipamento não tenha uma vida útil diminuída.

Drew e Stone (1997) apresentaram resultados experimentais usando um amplificador eletrônico, que pode ser combinado com um motor de acionamento e um excitador torcional usados para a excitação de máquinas rotativas pequenas. Foram empregadas duas configurações otimizadas do amplificador e a capacidade máxima de torque dinâmico senoidal descarregada (abaixo de 1400 rpm) foi medida entre 1 e 10 N.m (RMS), em frequências de pelo menos 2 kHz. A excitação aleatória também foi possível em frequências mais baixas. Os pesquisadores conseguiram ter um alto nível de consistência entre os resultados obtidos usando diferentes técnicas sob apropriadas condições. Logo, verifica-se que este estudo foi fundamental para o avanço de melhores técnicas de excitações torcionais de estruturas pequenas, e assim contribuir para uma análise mais precisa de vibrações torcionais, visto que, naquela época vários estudos apresentaram procedimentos experimentais inconsistentes.

Ao invés do uso da medição convencional de vibração torcional para estruturas com eixos, Lv et al. (2016) propuseram um método indireto e mais preciso. Neste trabalho, uma viga em formato de T foi acoplada a um lado da estrutura, por meio da qual são produzidos torques através de forças, e são usados acelerômetros lineares em posições estratégicas da viga. Empregando um modelo de elementos finitos para a viga, a receptância torcional que conecta o torque ao ângulo de torção da estrutura com eixo é determinada a partir dos dados de entrada da aceleração linear para a força de excitação. A validação deste modelo foi realizada através de simulações numéricas e experimentos que verificaram a sua acurácia e praticidade. Xiang, Yang e Gan (2012) também trabalharam em uma nova técnica de medição de vibrações torcionais em estruturas com eixos rotativos. Esta técnica é largamente empregada pela literatura e utiliza-se um instrumento chamado de Vibrômetro de Torção à Laser (VTL), o qual fundamenta-se na Velocimetria Doppler à Laser (VDL). O sistema de estudo foi analisado por duas vias: com o uso do VTL e por uma modificação do Método da Matriz de Transferência de Torção de Riccati. Em ambos os métodos foram determinadas as frequências naturais da estrutura. Os resultados da medição utilizando o VTL são consistentes com os obtidos analiticamente.

O estudo conduzido por Kang et al. (1998) realiza uma investigação de modos acoplados, incluindo os acoplamentos das vibrações torcional-flexural e longitudinal-flexural para virabrequins não rotativos que são livre-livre e suspensos. Usando o Método de Elementos Finitos (MEF), a estrutura foi modelada em dois tipos de elementos: elemento

de viga e elemento de sólido. Foram determinadas as frequências naturais e os modos de vibrar dos virabrequins nesses dois casos e, os resultados foram comparados com a análise modal experimental. A análise concluiu que o elemento de sólido é mais apropriado na análise modal de virabrequins.

Controladores ativos e passivos de vibrações torcionais para sistemas dinâmicos não-lineares é o foco do trabalho de El-Sayed e Bauomy (2015). Nesta pesquisa, o sistema é submetido à excitação de forças multi-paramétricas, e é modelado por equações diferenciais não-lineares acopladas. O modelo apresenta 3 GDL incluindo o absorvedor torcional. A técnica de perturbação em múltipla escala é empregada para obter uma solução aproximada e investigar a resposta do sistema. Os resultados numéricos verificaram que a vibração torcional de um sistema não-linear pode ser controlada passivamente através do uso de um absorvedor linear.

Segundo Levecque et al. (2011) um compressor alternativo pode ser descrito em linhas em gerais por três subconjuntos mecânicos: o invólucro hermético, o cárter e o conjunto rotor-*virabrequim*. Comumente após o processo de fabricação do equipamento, podem ser verificados níveis excessivos de vibração produzidos por massas desbalanceadas no *virabrequim*. A análise conduzida por este grupo propõe um balanceamento analisando o comportamento dinâmico dos três subconjuntos. Para investigar possíveis soluções foi posto em uso o Método do Coeficiente de Influência. Os resultados experimentais validaram a solução numérica e demonstrou-se que este processo integrado de balanceamento é mais eficiente do que o procedimento clássico, o qual somente balanceia o *virabrequim*.

Um método para a redução de vibrações torcionais no *virabrequim* foi proposto por Östman e Toivonen (2008). A técnica descrita pelos autores balanceia as contribuições de torque nos cilindros utilizando as velocidades angulares medidas do sistema. Os resultados demonstram que os níveis de vibração torcional das frequências relevantes foram reduzidas em até 90%. Song et al. (2014) propõem uma nova estrutura da volante de dupla massa com rigidez continuamente variável para a redução de oscilações torcionais. Este estudo baseia-se no princípio da compensação com finalidade de redução do impacto produzido por mudanças de rigidez. A proposta, por meio dos cálculos e experimentos, provou ser viável para a amenização de vibrações torcionais de sistemas de transmissão de potência em veículos com motores de alta potência e alto torque. Logo, como o eixo de um compressor alternativo é similar ao de motores de combustão interna, este tipo de estrutura também pode ser utilizado nesses equipamentos para a suavização do comportamento vibratório torcional. Wenzhi e Zhiyong (2010) propuseram a criação de um controle ativo de vibrações por meio de um atuador, que age diminuindo as vibrações torcionais com a detecção de perturbações eletromagnéticas e fluxo turbulento em um rotor de uma turbina de geração de vapor. Os resultados preliminares teóricos e numéricos demonstraram que houve uma significativa redução da amplitude da resposta.

Oscilações torcionais em compressores alternativos de grande porte provocam, com frequência, o desgaste do primeiro e segundo mancais da manivela, que por sua vez

impactam diretamente na falha do virabrequim por fadiga, conforme apontam Zhao e Wang (2014). Neste estudo, esse problema foi corrigido através uma montagem de interferência utilizando duas placas conectando o segundo e terceiro eixo do virabrequim. Foi realizada uma análise modal numérica para verificar a resposta dinâmica dos sistemas com e sem interferência. Os resultados demonstraram que a montagem com a interferência alterou a primeira frequência natural torcional, e assim evitou-se que a estrutura entrasse em colapso em sua operação. Wang, Xu e Li (2012) também empregaram uma montagem análoga, e determinaram que esta interferência possibilitou o aumento da massa de inércia rotacional, fazendo com que a região de interesse não apresente ressonância.

Uma contribuição importante da análise de vibrações torcionais em máquinas alternativas é a detecção de falhas de combustão em motores diesel, conforme destaca a pesquisa conduzida por Charles et al. (2009). Para realizar o diagnóstico de falhas foi utilizado um sensor *encoder* para medir e construir a forma de onda da velocidade angular instantânea (VAS) do virabrequim, a qual representa a assinatura do comportamento oscilatório torcional. Segundo os autores, estudos precedentes mostraram que o sinal da VAS e sua análise via Transformada Rápida de Fourier são eficazes para monitorar motores com menos de oito cilindros. A equipe concluiu que a partir da análise do espectro da VAS ficou evidente a distinção entre um motor com combustão adequada e um com falha de ignição.

2.2 Modelos dinâmicos de máquinas alternativas

A análise dinâmica de máquinas alternativas é complexa e lida com uma série de considerações simplificadoras segundo afirma Brusa, Delprete e Genta (1997). Uma hipótese bastante utilizada pelo campo de pesquisa é que as propriedades inerciais do sistema são constantes e compensadas via adição de torques inerciais. Logo, o foco dos autores é estudar a vibração torcional de virabrequins considerando a variação da geometria do sistema com o ângulo da manivela, para as respostas livre e forçada. A resolução da análise foi linearizada e o modelo matemático apresenta um conjunto de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos.

Modelos que representam vibrações torcionais em máquinas alternativas com equações diferenciais lineares com coeficientes constantes não retratam com fidelidade a dinâmica destes equipamentos, conforme explica Pasricha e Carnegie (1979). O sistema vibra com variação de inércia e grandes flutuações de torques inerciais que podem aumentar a chance de ocorrer o fenômeno da segunda ressonância em vibrações torcionais. Portanto, estes fatores são pontos relevantes para a proposição de um modelo mais preciso e que represente de maneira mais adequada o seu comportamento dinâmico. Em um trabalho anterior de Pasricha e Carnegie (1976), foi proposta uma análise de vibrações torcionais amortecidas em máquinas de combustão interna, incluindo o efeito da variação da inércia

do sistema. Com a inserção deste fator somada ao amortecimento, produziu uma equação do movimento não-linear. Para pequenos deslocamentos, a solução deste modelo pode ser linearizada.

O método linear da massa concentrada tem sido aplicado amplamente pelos pesquisadores para modelar a dinâmica de virabrequins em máquinas rotativas, no entanto, Huang et al. (2012) afirma que esta modelagem conduz à erros significativos. Este grupo de pesquisa propõe um modelo não-linear que, utiliza uma expressão geral para a variação não-constante da inércia do virabrequim, derivada de um método de equivalência de energia cinética instantânea, além de adicionar o amortecimento estrutural dos componentes acoplados ao eixo. Os resultados deste modelo revelam que o torque adicional produzido pela variação da inércia excita o segundo modo torcional e, a adição do torque de amortecimento também gerado por esta mudança é o principal fator não-linear.

Boysal e Rahnejat (1997) trabalham uma abordagem não-linear usada para representar a dinâmica de um cilindro de motor de combustão interna. Esta modelagem numérica inclui todos os componentes inerciais do corpo rígido, além de analisar o amortecimento das vibrações torcionais no virabrequim. Os resultados numéricos apresentaram coerência com outras soluções analíticas reportadas por vários autores pertencentes à literatura.

No trabalho de Hu, Mourelatos e Vlahopoulos (2003) foi desenvolvido um modelo dinâmico da rotação de um eixo flexível apoiado por estruturas flexíveis. O efeito do acoplamento entre a rotação do corpo rígido e a deformação flexível do eixo, foi levado em consideração e são representados por termos não-lineares na matriz de massa, e no vetor de forçamento do sistema de equações globais. Sendo que, a rotação do corpo rígido é tratada como um dos graus de liberdade do sistema, e que os GDL flexíveis do eixo e da estrutura são representados como um conjunto de GDL retidos e internos pela formulação de *Craig-Bampton*. As equações do movimento são resolvidas no domínio do tempo usando uma modificação do método de *Newmark* e com o método de *Newton-Raphson*. Esta análise foi validada com o desenvolvimento de diferentes combinações de carga, tipo de mola e rotação de corpo rígido.

Estudos de modelos dinâmicos para o comportamento de máquinas alternativas que envolvem flexibilidade torcional do virabrequim foram apresentados por Metallidis e Natsiavas (2003). Estes modelos apresentam equações do movimento com forte presença da não-linearidade. Uma solução analítica aproximada foi descrita para caracterizar uma versão linearizada das equações do movimento, através da aplicação de método assintótico adequado. Também foram apresentados resultados numéricos para os modelos lineares e não-lineares levando em consideração à determinação direta de ramos completos da resposta em estado estacionário.

Conforme Wang e Lim (2000), para que o modelo proposto seja efetivamente utilizado é necessário ter um conhecimento alicerçado nos parâmetros de inércia, rigidez e amortecimento, ou seja, a validade do modelo é proporcional à precisão destes parâmetros.

Desta forma, o estudo desenvolvido por estes cientistas apresenta uma abordagem de energia vibratória equivalente para analisar e quantificar com uma acurácia satisfatória os coeficientes de amortecimento. Portanto, pesquisas relacionadas à este tema se justificam para obter informações relevantes e parâmetros essenciais para projetos de vibrações.

A modelagem do comportamento dinâmico de um virabrequim de motores de combustão interna é descrita por Mourelatos (2001). O modelo acopla a dinâmica estrutural do virabrequim, a lubrificação hidrodinâmica do mancal principal e a rigidez do bloco do motor usando uma abordagem sistêmica. A predição da resposta dinâmica é determinada através do uso de uma técnica de subestruturação dinâmica de dois níveis baseada no uso do MEF. Os resultados experimentais demonstraram a eficiência do modelo e os resultados numéricos apresentam as capacidades e significâncias do modelo no projeto de virabrequins para motores.

Seguindo um viés alternativo e diferente da maioria dos trabalhos citados até então, Li (2003) utiliza uma abordagem analítica para a análise de vibração torcional de uma barra não-uniforme com elementos concentrados tais como discos rígidos. A vantagem da adoção deste modelo é que a equação das frequências naturais torcionais para este conjunto pode ser determinada por uma equação algébrica homogênea. Os resultados numéricos verificaram que esta proposta é eficaz e conveniente.

3 Teoria Geral de Compressores

Este capítulo tem o propósito de fornecer em linhas gerais os principais fundamentos teóricos dos compressores. A primeira seção destina-se a abordar o funcionamento destas máquinas, suas principais aplicações que variam de uso doméstico a industrial, além de apresentar sua classificação mais usual com base no seu fluxo de trabalho, que se divide em duas categorias principais: intermitente ou contínuo.

Adiante, a segunda seção é mais específica e descreve os compressores alternativos, visto que são o tema focal desta pesquisa, além de serem os compressores mais utilizados dentre todos os outros. Tratam-se os dois tipos mais utilizados, os possíveis arranjos dos cilindros, assim como suas vantagens e desvantagens. Em seguida, os tipos de acionamentos mais comuns são apresentados, assim como os ciclos de compressão ideal e real. Por fim, são demonstrados os seus principais elementos constituintes e suas devidas funções.

3.1 Fundamentos

Os compressores são máquinas mecânicas projetadas para aumentar a pressão de um ar, gás ou vapor que são encaminhados de um local para o outro. A pressão de sucção ou de entrada pode variar de nível subatmosférico até um nível que seja compatível aos limites de operação do equipamento (GIAMPAOLO, 2010). A compressão do gás é realizada através da adição de trabalho para aumentar a sua pressão, à medida que ele escoar pelo equipamento. Eles são usados em muitas aplicações desde as mais cotidianas tais como aspiradores de pó e ar condicionados a larga escala industrial para processos químicos, propulsão de motores a jato, processamento e transmissão de gás natural (BRUN; KURZ, 2019).

A compressão de gases em altas pressões resultam em altas temperaturas criando problemas no compressor. Todos os seus componentes básicos, independente do tipo, têm um limite para as condições de operação. Quando alguma limitação é envolvida, torna-se necessário que o processo de compressão seja realizado em mais de uma etapa, ou seja, em multiestágio. Estas limitações variam com o tipo de compressor, porém as mais importantes incluem: pressão de descarga, aumento de pressão ou diferencial de pressão, razão de compressão, efeito do espaço livre e desejo de economia de potência (BLOCH; HOEFNER, 1996).

Compressores alternativos são usados em diferentes indústrias, tais como: refinarias de óleo e gás, coleta de gás e processamento, gasodutos, indústrias químicas e de refrigeração (GIAMPAOLO, 2010). Em plantas industriais, na maior parte do tempo os sistemas de compressão trabalham além do regime de carga máxima, e os ciclos do compressores são ajustados pelos termostatos. O controle da velocidade de trabalho também pode ajudar no ajuste das condições de trabalho, pois tem-se a equivalência da carga máxima para cada rotação. Logo, a determinação da frequência é um parâmetro que permite um melhor controle para que os compressores trabalhem em condições favoráveis e, sua prática tem tido uma grande economia de energia (APREA; MASTRULLO; RENNO, 2009).

A classificação dos tipos de compressores pode ser feita em dois grandes grupos separados pelo modo de compressão usado: intermitente ou contínuo. A compressão intermitente é caracterizada por sua natureza cíclica, ou seja, um volume de gás é injetado na máquina, comprimido, e sua descarga acontece antes do ciclo se repetir. No modo contínuo, o gás é succionado, trabalhado, transportado ao longo do compressor, e expelido sem interrupção do escoamento em nenhum ponto do processo. Compressores que trabalham com o modo intermitente de trabalho são conhecidos como compressores de deslocamento positivo, sendo divididos em duas categorias: alternativos e rotativos. E compressores de modo contínuo também são separados em dois tipos: dinâmicos e ejetores (BROWN, 2011). De modo mais usual, esta é classificação mais difundida pela literatura no estudo de compressores, como demonstra a Figura 3.1.

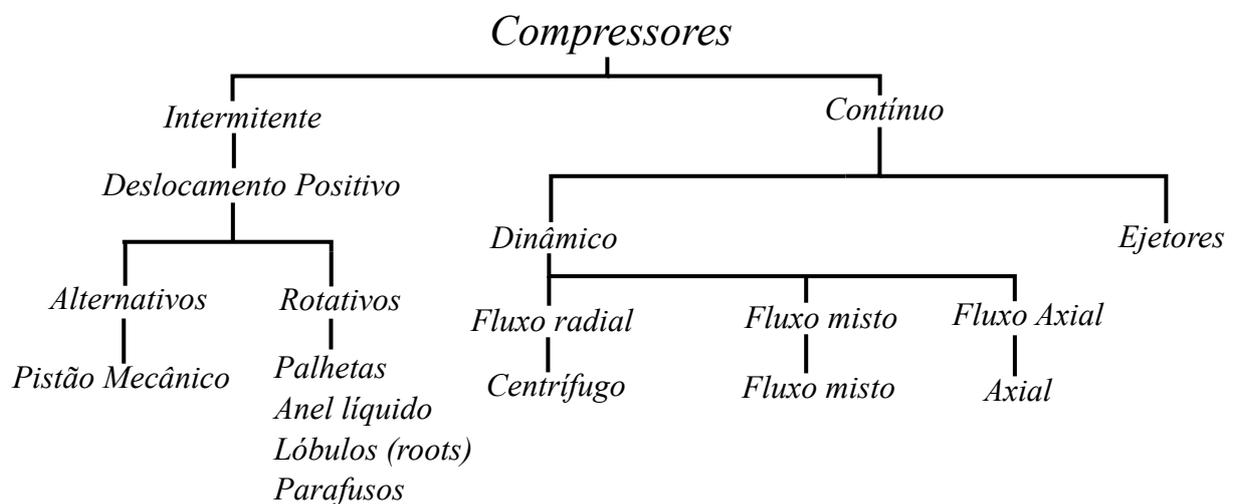


Figura 3.1 – Classificação dos compressores.

Compressores de deslocamento positivo trabalham diminuindo o volume de um gás em um ambiente fechado. Desta forma, estas máquinas operam em diferentes porções do fluido a cada instante de tempo, tais como seu comportamento mecânico, velocidade de trabalho. São exemplos de compressores deste tipo o alternativo, parafusos e o de palhetas. Por outro lado, os compressores dinâmicos funcionam através do contínuo aumento do momento do gás conforme ele flui pelo compressor. Como exemplos pode-se

citar compressores centrífugos, axiais e de fluxo misto (BRUN; KURZ, 2019).

Por serem o coração de refrigeradores, ar condicionados e aquecedores, os compressores de deslocamento positivo ganham um destaque especial pelo fato que são encontrados em qualquer lugar. Eles fornecem ar comprimido para ferramentas, equipamentos de construção, dispositivos de saúde como brocas usadas por dentistas e para acessórios de mergulho. Além de que, podem trabalhar em serviços pesados como transporte gás natural em gasodutos e na compressão de oxigênio e nitrogênio. Desta forma, a sua potência pode variar de pequenas frações de HP (*Horse Power*) para milhares de HP dependendo da demanda de trabalho. Logo, estes tipos de compressores não são somente os maiores consumidores de energia, mas também são os principais poluidores sonoros (SOEDEL, 2006).

Ao contrário de compressores centrífugos, compressores de deslocamento positivo continuam a gerar pressão até ultrapassar o limite máximo. Esta característica pode causar sérios problemas em sistemas de ar comprimido. Sistemas projetados para operar com pressão de 689.476 kPa, podem receber nas linhas uma pressão superior que 1034.21 kPa. Desta forma, é comum nesses sistemas a presença de válvulas para aliviar o excesso de pressão, além de um sistema de controle automatizado de pressão que permite descarregar o compressor de forma periódica (MOBLEY, 2000).

Na seção seguinte, os compressores alternativos serão apresentados e discutidos com mais detalhes. São abordados sua classificação, os possíveis arranjos, suas vantagens e desvantagens, tipos de acionamento, os ciclos de compressão ideal e real, além dos seus principais elementos constituintes.

3.2 Compressores alternativos

São os compressores mais conhecidos, como também os mais utilizados dentre todos os tipos de compressores. O movimento alternativo é transmitido ao pistão que se desloca no sentido vertical no interior do cilindro. A ação do pistão, em conjunto com as válvulas de entrada, determina a quantidade de gás que entra no cilindro onde é comprimida e expelida. As válvulas de descarga trabalham para prevenir que o retorno de gás proveniente da descarga entre no próximo ciclo de compressão. Quando a compressão é realizada em somente um lado do pistão, o compressor é de único-efeito (Figura 3.2a), porém, quando a compressão acontece em ambos os lados do pistão, o compressor é chamado de duplo-efeito (Figura 3.2b). Estes compressores podem ter um único cilindro ou múltiplos cilindros na mesma estrutura. Se a montagem for formada por um cilindro ou múltiplos cilindros conectados em paralelo, o arranjo é nomeado de estágio único. E quando múltiplos cilindros são interligados em série na mesma estrutura, normalmente com auxílio de arrefecedor, a montagem é referenciada de múltiplo estágio (BROWN, 2011).

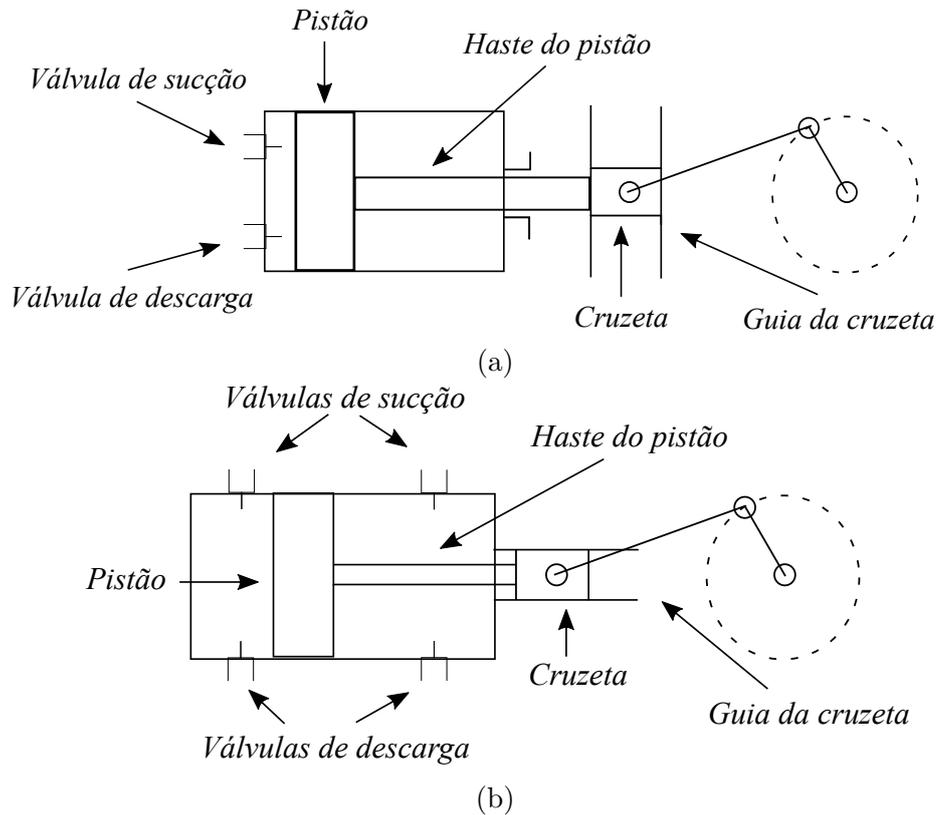


Figura 3.2 – Representação esquemática: a) compressor alternativo de simples-efeito e b) compressor alternativo de duplo-efeito.

Estes compressores têm sido usados com frequência por mais de 200 anos desde que os gases necessitassem ser comprimidos. Entretanto, nos últimos 50 anos sua dominância sofreu uma redução, visto que novos tipos de compressores foram desenvolvidos. Ainda assim, eles podem ser empregados em qualquer aplicação de compressão, porém outros tipos podem ser preferíveis em certas ocasiões. Por exemplo, os compressores centrífugos tendem a ser utilizados quando a potência requerida é maior que 2 MW e a pressão de descarga é menor que 100 MPa. Compressores do tipo parafuso são recomendados quando a potência está compreendida entre 10 a 500 kW e a pressão de descarga é abaixo de 30 bar (BRUN; KURZ, 2019).

Os compressores de deslocamento positivo são conhecidos como máquinas de volume constante e pressão variável. Ressalta-se ainda que, os compressores alternativos são os mais eficientes, pelo fato de que sua relação de pressão (em inglês, *pressure ratio*) é de um valor aproximadamente maior de 1.5 a 1. Podem ser empregados para cargas parciais ou aplicações de capacidade reduzidas. Além disso, em operações de múltiplo estágio, cada cilindro pode trabalhar com um tipo de gás diferente. Por exemplo, um cilindro pode atuar na refrigeração de propano enquanto os outros podem ser responsáveis pela produção de um outro gás (BROWN, 2011; MOBLEY, 2000).

3.2.1 Classificação

Compressores de pistão mecânico podem ser divididos em diferentes tipos, porém, existem dois que são os mais empregados em aplicações de pequeno e grande porte. A diferença entre os tipos depende da forma do pistão e do elemento conector entre o pistão e o virabrequim, conforme apresentam as seções a seguir.

3.2.1.1 Compressor de pistão automotivo ou sem cruzeta

O primeiro é conhecido como pistão automotivo, onde o pistão é conectado à biela, a qual é acoplada diretamente no virabrequim, como demonstra a Figura 3.3. Este tipo de compressor utiliza somente um cilindro, podendo trabalhar com um estágio ou vários estágios dependendo de sua aplicação. É o principal tipo de compressor utilizado em sistemas de refrigeração de pequena escala (BROWN, 2011). São usados em serviços mais leves que possuem o pistão de simples-efeito lubrificado pelo cárter, e sem a presença da cruzeta. (STEWART, 2018).

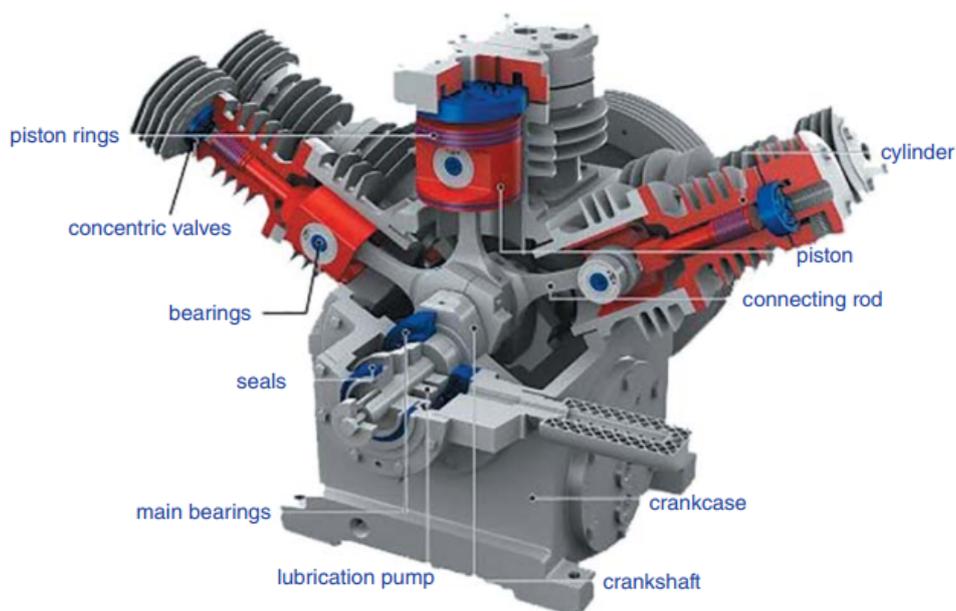


Figura 3.3 – Compressor alternativo do tipo automotivo com três estágios. Adaptado de (BORREMANS, 2019).

3.2.1.2 Compressor com cruzeta

A segunda categoria representa os compressores alternativos que são usados em aplicações pesadas, como nas operações de petróleo e gás natural. Estas máquinas são conhecidas como do tipo cruzeta, onde cada pistão é em geral de duplo-efeito e está conectado ao moente pela haste do pistão, cruzeta e biela (STEWART, 2018). O pistão é movimentado por uma barra que passa por uma caixa de gaxeta e é conectada à cruzeta. Esta por sua vez, é acoplada indiretamente ao virabrequim pela biela, conforme mostra

a Figura 3.4. Desta forma, o cilindro está isolado do cárter mantendo sua lubrificação intacta da exposição de gases. O cilindro pode ser simples ou de duplo-efeito, em aplicações industriais os de duplo-efeito são mais empregados (BROWN, 2011).

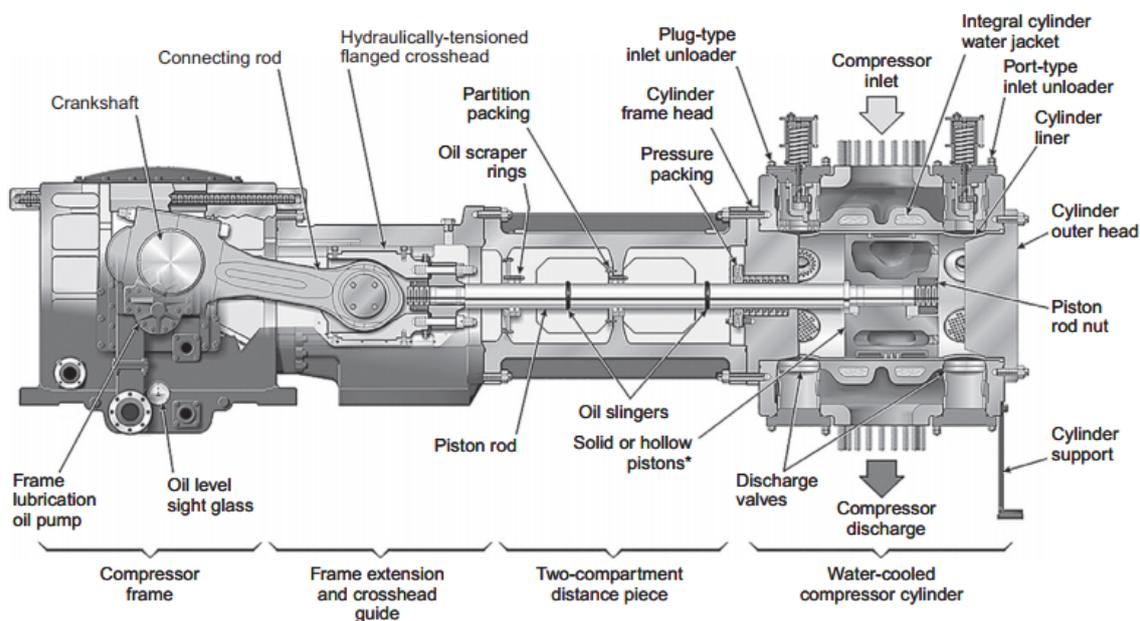


Figura 3.4 – Compressor alternativo do tipo cruzeta. Adaptado de (STEWART, 2018).

3.2.2 Arranjo

Na maioria dos casos o arranjo de um compressor de pistão automotivo é com o cilindro na vertical, isto para um único estágio. A configuração de múltiplos estágios é posicionada na vertical em linha, com no máximo dois cilindros. Arranjos com múltiplos cilindros são postos em pares com formato de V, formando um ângulo de 45 graus. Com este tipo de arranjo, o número máximo de cilindros é oito e são aplicados à compressão de refrigerantes orgânicos (BROWN, 2011).

Os compressores do tipo cruzeta de simples-efeito trabalham em um único estágio e possuem o cilindro na vertical. No entanto, os duplo-efeito quando usados com um estágio, em grande parte das situações o cilindro é posicionado na horizontal. Estes podem trabalhar tanto na vertical quanto na horizontal, sendo esta uma característica vantajosa, pois levando em consideração a alocação física e problemas de manutenção, o arranjo horizontal é predominante na maioria das instalações e plantas industriais (BROWN, 2011). Nesta configuração, pode se ter dois, quatro e até seis estágios, sendo esta última a que apresenta maior estabilidade na operação. Além disso, este arranjo pode ser empregado para aplicações de baixa (200 a 600 rpm) e alta velocidade (acima de 600 rpm) (BRUN; KURZ, 2019). Porém, os compressores com múltiplos cilindros opostos balanceados apresentam fatores limitantes ao número de cilindros instalados, tais como a capacidade de carregamento da estrutura, a habilidade de manter o alinhamento dos

principais mancais e a sua velocidade. Compressores com cilindros opostos com mais de 12 cilindros não são normais. Geralmente, compressores com dois a seis cilindros operam em uma velocidade maior que 1200 rpm, com oito cilindros ou mais, a velocidade reduz para 300 rpm (GIAMPAOLO, 2010). A Figura 3.5 ilustra um típico compressor alternativo com cilindros opostos na horizontal.

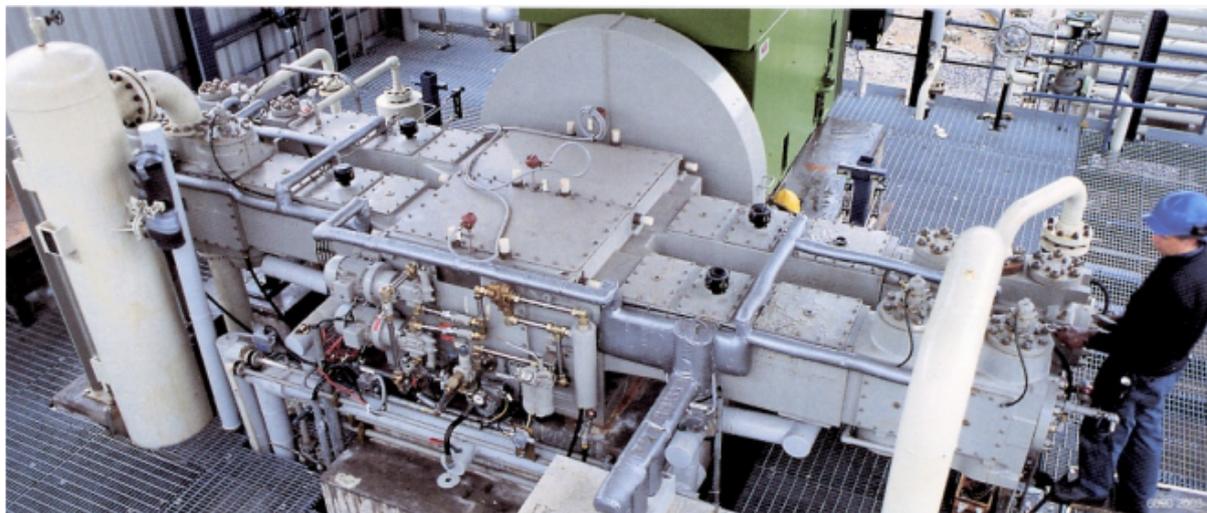


Figura 3.5 – Compressor alternativo com cilindros opostos na horizontal. Adaptado de (BLOCH; GODSE, 2006).

A configuração para multiestágios em compressores do tipo cruzeta é ampla. Os arranjos mais utilizados são os vertical e horizontal, porém existem outras variações tais como em V, Y, ângulo ou até mesmo em L, no entanto, tais arranjos não são empregados com tanta frequência (BROWN, 2011).

3.2.3 Vantagens e desvantagens

Os compressores alternativos são muito eficientes, possuem anéis de retenção no pistão que fornecem uma boa vedação para evitar vazamentos, além de que, sendo a transferência de calor baixa, a eficiência de sua compressão aproxima-se para um ciclo de compressão adiabática. Sabendo-se que, a eficiência de uma compressão adiabática varia entre 85 a 95% para baixas velocidades e 80 a 90% em altas velocidades de compressão. Sua eficiência mecânica também é alta tal que, as perdas devido ao atrito dentro do cilindro e em sua estrutura e caixa engrenagem é de 97 a 98% em velocidades baixas e em altas velocidades pode-se atingir até 97%. Estes números são expressivos mesmo quando são comparado à outros tipos de compressores de deslocamento positivo, tais como os de parafuso, que apresentam uma maior vazamento e eficiência menor (BRUN; KURZ, 2019). Para exemplificar de forma mais abrangente as vantagens e desvantagens de um compressor alternativo, a Tabela 1 mostra uma comparação em relação à um compressor centrífugo.

Tabela 1 – Comparação entre os compressores centrífugo e alternativo. Adaptado de (STEWART, 2018).

Fator	Centrífugo	Alternativo
Investimento inicial	Baixo	Alto
Custo de operação (excluindo o combustível)	Menor	Maior
Consumo de combustível	Alto	Baixo
Flexibilidade	Menor	Maior
Eficiência	Melhor em baixas RC	Melhor em altas RC
Vida projetada	Vida curta favorável	Vida longa favorável
Requisitos de espaço	Menor	Maior
Realocação	Mais fácil	Mais difícil

*RC - Razão de Compressão

3.2.4 Acionamento

Uma outra característica dos compressores alternativos que os tornam tão únicos quando comparados aos outros é a variedade disponível de acionamentos, que podem ser complexos tanto como os arranjos dos cilindros. Compressores de pequeno porte de simples estágio ou de múltiplos, em particular do tipo automotivo, são acionados por motores elétricos com acoplamento feito por correias em V. Os pequenos do tipo cruzeta e de único estágio, também possuem um acionamento de maneira similar. Compressores automotivos de grande porte com múltiplos estágios, podem ser projetados para operar em faixa de trabalho compatível com as velocidades produzidas pelos motores e, são acoplados de forma direta. Se acoplamento for indireto pela presença de um eixo que conecta o motor ao compressor, à este tipo de arranjo denomina-se tipo de motor. Nesses compressores o acoplamento com motor elétrico pode ser projetado de diversas maneiras diferentes, tal como a utilização de caixas de engrenagens para compatibilidade de velocidade. Motores com frequencímetros se tornaram popular pela capacidade de controle na operação (BROWN, 2011).

Os compressores alternativos usados na indústria de óleo e gás são acionados por motores elétricos ou motores a gás natural. Os motores elétricos podem ser tanto de indução ou síncronos. Para aplicações com velocidades de 400 rpm ou mais, os de indução são recomendados, e para velocidades abaixo de 400 rpm e potência maior que 2 MW, os motores síncronos são desejáveis. Estes motores de forma geral trabalham em velocidades constantes, porém o uso de frequencímetros pode ser incorporado para permitir um range maior de variação de velocidades, tal que se obtenha a velocidade adequada para cada ocasião. Ressalta-se que, compressores alternativos impõem um torque cíclico que é transmitido pelo virabrequim ao eixo do motor, e vibrações laterais que são transmitidas ao motor pela fundação. Desta forma, a escolha do motor de acionamento deve considerar todos os requisitos necessários por se tratar de uma operação pesada de serviço (BRUN; KURZ, 2019).

3.2.5 Ciclo de compressão

A Figura 3.6 apresenta o ciclo de compressão ideal de compressores alternativos. No início, o pistão está situado no Ponto Morto Inferior (PMI) que é representado pelo ponto 1 do gráfico. Neste ponto, o cilindro é abastecido com gás em uma pressão P_1 e as válvulas (sucção e descarga) estão fechadas. A compressão inicia-se com a movimentação do pistão, sendo este processo representado por 1-2. Quando o pistão atinge o ponto 2, a válvula de descarga começa a abrir, este processo é simbolizado por 2-3. Ressalta-se que a válvula de descarga está aberta neste tempo e a de sucção está fechada. O gás é expelido com pressão P_2 . No ponto 3, o pistão alcança o Ponto Morto Superior (PMS), sendo o seu ponto máximo. O espaço compreendido entre o pistão no PMS e topo do cilindro é chamado de volume morto. Em seguida, o pistão faz o movimento reverso e inicia o processo de expansão (3-4), onde o gás é alocado dentro do volume morto e é reexpandido pela pressão de sucção. A válvula de descarga se fecha e a válvula de sucção ainda permanece fechada. A expansão finda-se em 4 e a válvula de sucção é aberta conforme mostra o processo 4-1. O cilindro preenche-se com o gás em uma pressão P_1 . No ponto 1 o ciclo termina e inicia-se um novo ciclo (BROWN, 2011).

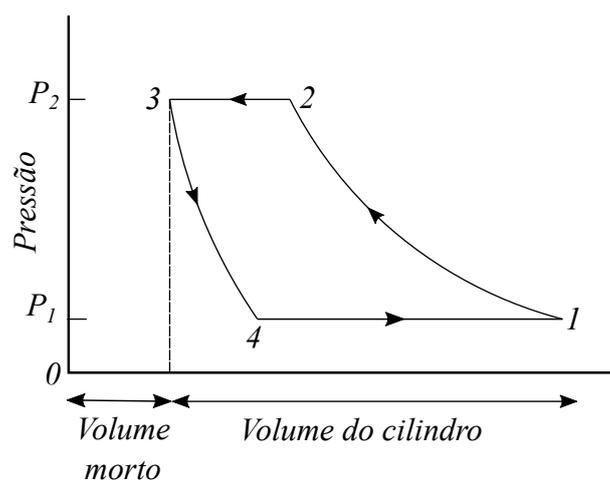


Figura 3.6 – Ciclo ideal de compressão.

Em um ciclo de compressão real o gráfico apresenta variações nos pontos 2 e 4 (Figura 3.7), que representam as transições dos processos de descarga e sucção. O fator determinante para a diminuição da eficiência da compressão é a perda nas válvulas ou a queda de pressão através das válvulas de sucção e descarga. Tais perdas fluidas são em função da densidade do gás e da velocidade da válvula. Sendo a densidade resultante das pressões de sucção e descarga com a presença do peso molecular (BLOCH; HOEFNER, 1996).

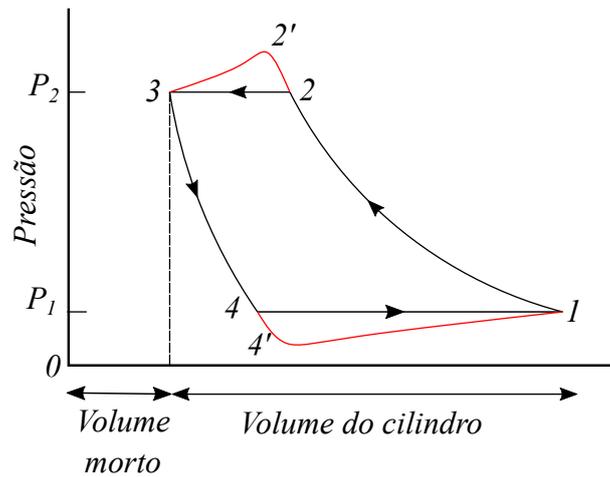


Figura 3.7 – Ciclo real de compressão.

3.2.6 Principais componentes

Os principais elementos construtivos de um compressor alternativo são: cárter, virabrequim, biela, cruzeta, haste do pistão, pistão e cilindro. Sendo que a força ou a capacidade de potência do compressor são definidos pelos três primeiros e a haste do pistão. O cárter (Figura 3.8) tem formato em U podendo ser fabricado a partir de ferro fundido ou de aço. É projetado para suportar o virabrequim, cilindros, e outras partes rotativas, além de mantê-las em perfeito alinhamento sob ação de altas forças impostas durante a operação. Ressalta-se também que ele serve como reservatório de óleo para a lubrificação de todo o conjunto (BLOCH; GODSE, 2006; BLOCH; HOEFNER, 1996; GIAMPAOLO, 2010).



Figura 3.8 – Cárter. Adaptado de (STEWART, 2018).

A árvore de manivelas ou virabrequim é o coração da máquina, e costuma ser o componente mais caro do sistema. De forma geral, é constituído em pequenos blocos que são forjados e os contrapesos são parafusados para equilibrar a massa alternativa da cruzeta e pistão (BLOCH; GODSE, 2006). Enquanto pequenos virabrequins tenham sido fabricados de um único forjamento, a maioria dos virabrequins são fabricados a partir de três partes: mancais, moentes e peças de interconexão. A função desse elemento é converter o movimento de rotação em movimento linear com auxílio da biela (GIAMPAOLO, 2010).

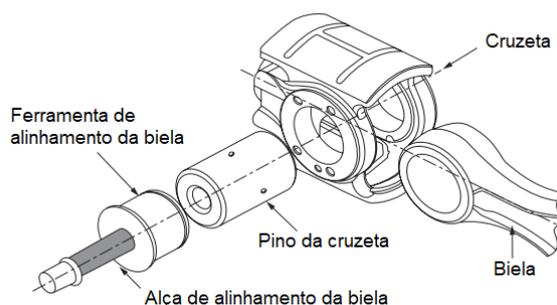


Figura 3.9 – Virabrequim de um compressor feito de aço SAE 4140 tratado termicamente e forjado. Adaptado de (GIAMPAOLO, 2010).

Em seguida, tem-se a biela (Figura 3.10a) que é o elemento conector entre o virabrequim e a cruzeta (Figura 3.10b). Esta por sua vez converte o movimento de rotação da biela em linear enquanto aciona a haste do pistão (STEWART, 2018). Ressalta-se que, as cruzetas são elementos pesados de modo que a massa de todas as partes alternativas seja suficiente para reverter a tensão no pino do pulso, mesmo quando uma das extremidades do pistão está sob pressão (BLOCH; GEITNER, 2012).



(a)



(b)

Figura 3.10 – Elementos constituintes: a) biela de um compressor velocidade moderada. Adaptado de (BLOCH; GEITNER, 2012); b) acoplamento da cruzeta e biela. Adaptado de (BLOCH; GEITNER, 2012).

A haste do pistão conecta a cruzeta ao pistão, sendo rosqueada em ambas as extremidades e podendo até ter um colar que conecta-se ao pistão. Sua fixação deve ser de modo que o carregamento inercial alternado criado pela aceleração, desaceleração e

parada do pistão em cada revolução não adicione tensões indevidas na haste ou final do pistão. A compressão é realizada pelo pistão que a cada rotação do virabrequim desloca-se linearmente em direções alternadas. Podem ser classificados em dois tipos: simples-efeito ou duplo-efeito. Os primeiros fazem a compressão do gás somente à medida que o pistão desloca-se em direção ao PMS. Por outro lado, os de duplo-efeito podem comprimir em ambas direções. A fabricação deste componente é feita por fundição a partir de uma peça ou de um conjunto (GIAMPAOLO, 2010).

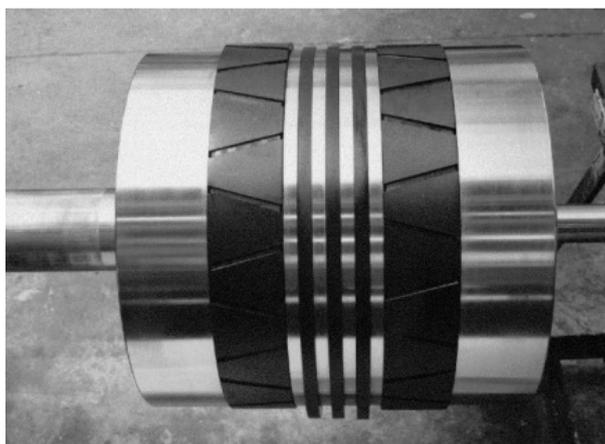


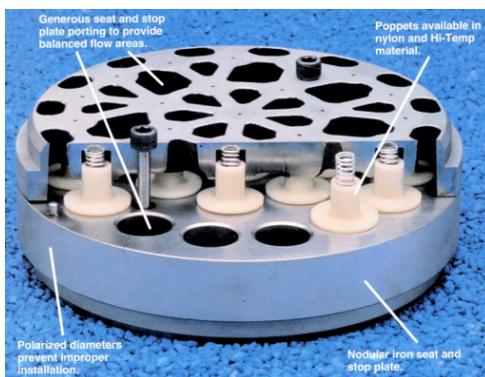
Figura 3.11 – Pistão com seus anéis e banda de desgaste. Adaptado de (BROWN, 2011).

Os cilindros podem ser fabricados de ferro fundido, aço fundido e aço forjado, sendo a pressão de trabalho que determina o material adequado em cada aplicação. Em operações que a pressão varia de 6895 a 8274 kPa, o ferro fundido é preferível. Acima de 10342 kPa, recomenda-se o ferro nodular, e no range de 6895 a 17237 kPa o aço fundido é a melhor opção. O aço forjado é geralmente empregado para pressões acima de 17237 kPa (STEWART, 2018). Destaca-se que cada cilindro deve ser projetado de modo que atenda a capacidade, pressão, temperatura e as propriedades do gás que compressor trabalha. Em geral, estes componentes têm um sistema próprio de lubrificação que utiliza óleos especiais, porém há sistemas sem lubrificação que alimentam com gás que é muito limpo devido uma filtragem rigorosa. Grande maioria dos cilindros são de duplo-efeito (Figura 3.12), entretanto, podem ser feitos de simples-efeito para condições específicas de operação como para altas pressões, similar aos usados em compressão de gás combustível automotivo, onde é apenas requerido um pequeno deslocamento (BLOCH; GODSE, 2006).

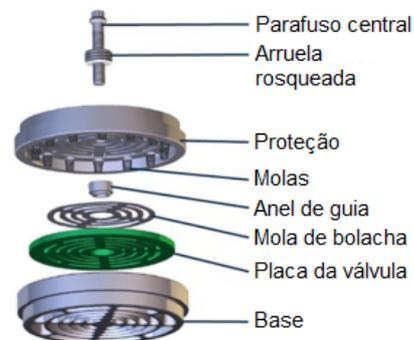


Figura 3.12 – Cilindro de duplo-efeito. Adaptado de (BORREMANS, 2019).

As válvulas dos compressores são de retenção simples com mola (Figura 3.13a), também são chamadas de placa-mola, quando acionadas são abertas ou fechadas devido ao diferencial de pressão nos processos de sucção e descarga. O papel da mola é fornecer a força necessária para ajudar no deslocamento do selo mecânico (Figura 3.13b) da posição de aberto para fechado (BRUN; KURZ, 2019). Desta forma, o propósito das válvulas é controlar a entrada (sucção) e saída (descarga) de gás no cilindro. As de sucção abrem no início do ciclo para permitir que o gás seja aspirado para o cilindro, e fecham no início do processo de compressão. Por outro lado, as válvulas de descarga abrem quando há pressão suficiente no cilindro para superar a combinação da carga da(s) válvula(s) de placa-mola e a pressão a jusante. No final do processo de compressão a pressão estabiliza e a válvula(s) de placa-mola fecha a válvula de descarga (GIAMPAOLO, 2010).



(a)



(b)

Figura 3.13 – Válvulas: a) componentes típicos de uma válvula de placa. Adaptado de (BRUN; KURZ, 2019); b) válvula reguladora de pressão. Adaptado de (BLOCH; GODSE, 2006).

4 Dinâmica-não linear e suas ferramentas de análise

Este capítulo é dedicado à apresentar o alicerce teórico que permitirá analisar as possibilidades das respostas apresentadas por sistemas não-lineares. Os fundamentos sobre caos e suas ferramentas de análise são devidamente apresentados e desenvolvidos nesta seção, objetivando construir em capítulos seguintes, uma análise dinâmica qualitativa, de tal maneira que se compreenda o comportamento global do sistema. A princípio, faz-se uma revisão histórica da evolução do estudo do caos, desde o seu nascimento até a modernidade. Logo após, as principais ferramentas de análise dinâmica qualitativas são brevemente apresentadas, as quais são: espaço de fase, seção de Poincaré e diagrama de bifurcação.

4.1 Comportamento caótico

Três séculos após a publicação da obra-prima de Newton, Principia (1687), a dinâmica conhecia novos sistemas, que apesar de simples apresentam uma rica dinamicidade e imprevisibilidade no seu comportamento. Tais sistemas foram denominados de caóticos, e seu estudo promoveu uma discussão excitante de novas ideias matemáticas no mundo da dinâmica (MOON, 1992). O caos foi descoberto na mecânica pelo matemático francês Henri Poincaré no final dos anos 1800, quando este se propôs a estudar a dinâmica das órbitas de três corpos celestiais sujeitos à força de atração gravitacional mútua (OTT, 2002). Entretanto, o desenvolvimento deste campo de pesquisa somente iniciou-se com a publicação de Lorenz sobre um estudo da convecção na atmosfera, no qual os resultados numéricos apresentaram um comportamento totalmente irregular do fluido (escoamento turbulento) (HAKEN, 1985).

A chegada dos computadores de alta velocidade em 1950 foi um divisor de águas na história da dinâmica. Através desta máquina foi possível realizar simulações numéricas com equações de uma maneira jamais vista, e também ajudou a melhorar no entendimento sobre o estudo de sistemas não-lineares. Em 1963, Lorenz deparou-se com o movimento caótico em um atrator estranho. Suas soluções nunca chegavam a um ponto de equilíbrio ou a um estado periódico, ao invés disso, o sistema continuava a oscilar de forma irregular e aperiódica. Ele também observou que, se as simulações fossem executadas com duas

condições iniciais quase idênticas, produzem comportamentos totalmente distintos após um certo período de tempo, desta forma, o sistema era inerentemente imprevisível e sensível às condições iniciais (STROGATZ, 2018).

Ao longo das décadas seguintes, importantes trabalhos investigaram a presença do caos nas demais áreas das ciências, tais como: o estudo da natureza do comportamento turbulento por Ruelle e Takens (1971); May (1976) fez uma revisão de vários modelos matemáticos que aparecem da biologia às ciências sociais; Denton et al. (1990) demonstram que o comportamento caótico também está presente na cardiologia. Uma descoberta extraordinária foi realizada por Feigenbaum (1983), na qual apresentou leis universais sobre sistemas não-lineares que descrevem a transição para o regime caótico.

O termo caótico é reservado aos problemas determinísticos que não possuem entradas ou parâmetros aleatórios ou imprevisíveis (MOON, 1992). Isto é, sistemas determinísticos são aqueles que as condições são precisamente conhecidas em um instante de tempo, tal que, permita em princípio a sua predição exata no futuro. Cabe ressaltar que existe a diferença entre um sistema apresentar comportamento caótico ou aleatório, em ambos a saída produzida é a mesma, aperiodicidade, no entanto, para comportamento aleatório as entradas ou parâmetros são desconhecidos. O problema no entendimento do caos é a reconciliação de noções totalmente distintas: imprevisibilidade e determinismo. A chave que faz o elo entre esses conceitos é a não-linearidade (HILBORN, 2000).

A diferença entre sistemas lineares e não-lineares pode ser visualizada através da evolução das respostas no tempo. Se uma entrada for periódica, um sistema linear responde de forma periódica, no entanto, para um sistema não-linear podem existir diferentes saídas: periódica, quase-periódica, sub-harmônica ou caótica (MOON, 1992). Em sistemas não-lineares uma mudança de um parâmetro pode conduzir dramáticas transformações no comportamento qualitativo e quantitativo do sistema, ou seja, para um valor sua resposta pode ser periódica, para um outro valor bem próximo pode apresentar aperiodicidade (HILBORN, 2000). O escoamento turbulento é um exemplo clássico no qual o parâmetro (Número de Reynolds) é variável no conjunto de equações determinísticas (Equações de Navier-Stokes), o movimento do fluido pode ir abruptamente de uma configuração estável (regime laminar) para um regime aparentemente estocástico (regime turbulento) (MAY, 1976). A Figura 4.1 apresenta um exemplo de um sistema caótico com a evolução de sua resposta no tempo.

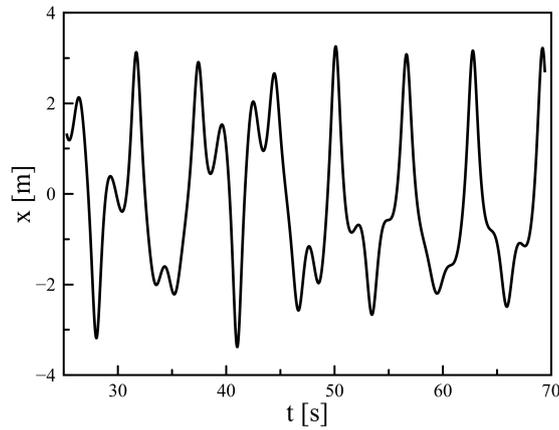


Figura 4.1 – Evolução temporal de uma resposta caótica.

4.2 Espaço de fase

O espaço de fase ou espaço de estado é a representação vetorial que possibilita o conhecimento do estado do sistema em qualquer instante de tempo através do gráfico de $x(t)$ (posição) versus $\dot{x}(t)$ (velocidade). Conforme a evolução temporal do sistema dinâmico ocorre, uma trajetória descreve a fase do sistema (HILBORN, 2000). Desta forma, pode-se investigar qualitativamente a natureza do comportamento apresentado pelo sistema.

Quando a resposta é periódica, o plano apresenta uma curva fechada conhecida como atrator periódico, tal como apresenta a Figura 4.2a. Entretanto, se a resposta for caótica, as órbitas nunca se fecham ou repetem pela característica aperiódica inerente do sistema, este tipo de representação geométrica é nomeado de atrator estranho (MOON, 1992), como representa a Figura 4.2b.

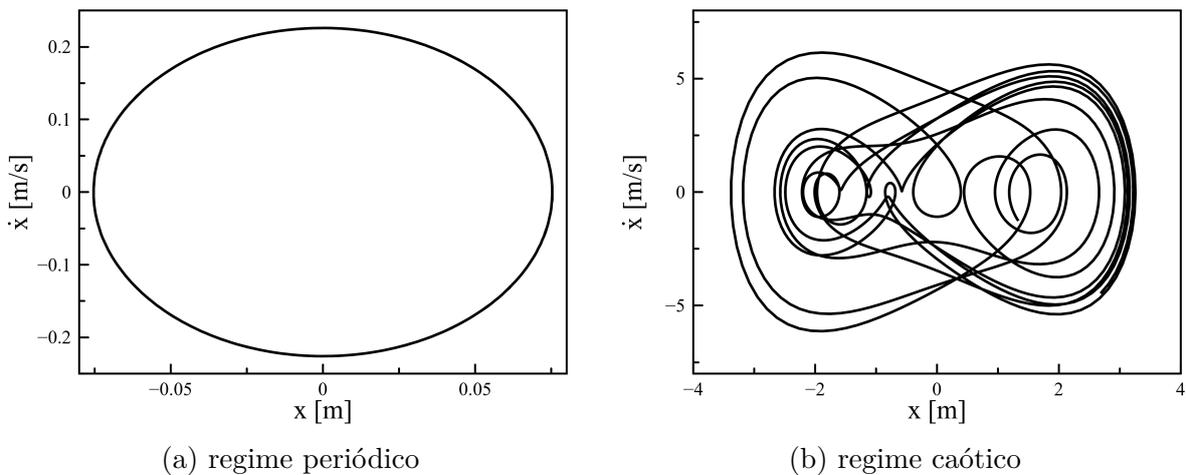


Figura 4.2 – Espaço de fases.

4.3 Seção de Poincaré

A investigação da dinâmica de três corpos celestiais realizada por Poincaré (1899), resultou em uma ferramenta importante na análise qualitativa de sistemas dinâmicos não-lineares (WIGGINS, 2003). Ao invés de analisar o comportamento contínuo do sistema no espaço de fase, sua proposta é verificar sob uma ótica discreta seccionado este espaço, e verificando sua projeção em um plano a cada período T que a órbita do sistema o cruza. Logo, a representação espacial no plano passa a ser um conjunto de pontos e esta técnica é chamada de Seção de Poincaré ou Mapa de Poincaré em sua homenagem. A construção desta seção não segue uma regra geral, no entanto, é habitual na literatura adotar um período múltiplo de $T = 2\pi/\omega_f$, com base na frequência de forçamento (ω_f) que o sistema é excitado (THOMPSON; STEWART, 2002). A Figura 4.3 exemplifica o desenvolvimento deste mapeamento.

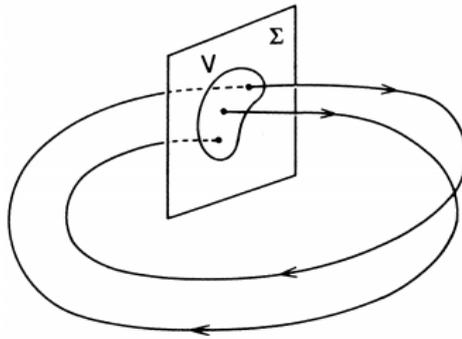


Figura 4.3 – Construção da Seção de Poincaré. Adaptado de (WIGGINS, 2003).

Esta técnica oferece vantagens interessantes no estudo de equações diferenciais ordinárias tais como: redução de pelo menos uma dimensão do problema; proporciona um entendimento do global do sistema e apresenta clareza conceitual na análise do estado dinâmico (WIGGINS, 2003).

A análise dinâmica do sistema através desta ferramenta é simples. Se o plano apresenta um único ponto, a resposta é periódica de período 1. Se a saída resultar em dois pontos, a resposta é periódica de período 2. Logo, se a seção for representada por um conjunto finitos de pontos, o sistema tem comportamento periódico ou sub-harmônico, que são frequências múltiplas de ω_f . Os sistemas quase-periódicos são figuras fechadas ou órbitas fechadas no plano, também são nomeados de "movimento em toro". Se a seção não apresentar um conjunto finito de pontos ou uma trajetória fechada, o sistema pode ser caótico. Entretanto, existe uma diferença de resposta em sistemas amortecidos e com pouco ou sem amortecimento no regime caótico. Sistemas com baixo ou sem amortecimento são representados por uma nuvem de pontos desorganizados, tal padrão de resposta é chamada com frequência de estocástica. Por outro lado, em sistemas amortecidos, o mapa demonstra

um conjunto infinito de pontos altamente organizados tais como linhas paralelas (MOON, 2004).

Essa estrutura organizada é proveniente dos fractais, que são formas geométricas complexas com estrutura fina (STROGATZ, 2018). Quando este tipo de estrutura geométrica apresenta-se no mapa, o sistema comporta-se como um atrator estranho (MOON, 1992). Foi com esta configuração que Lorenz se deparou em 1963, porém ele não conseguiu visualizar a estrutura fractal em suas simulações. Nos anos seguintes, Hénon (1976) propôs um mapeamento que possuía as mesmas propriedades do sistema estudado por Lorenz, e verificou a existência da hierarquia das linhas paralelas que se repetiam dentro do atrator estranho.

A Figura 4.4 apresenta duas seções de Poincaré representando um sistema periódico de período 1 (Figura 4.4a) e um sistema caótico (Figura 4.4b).

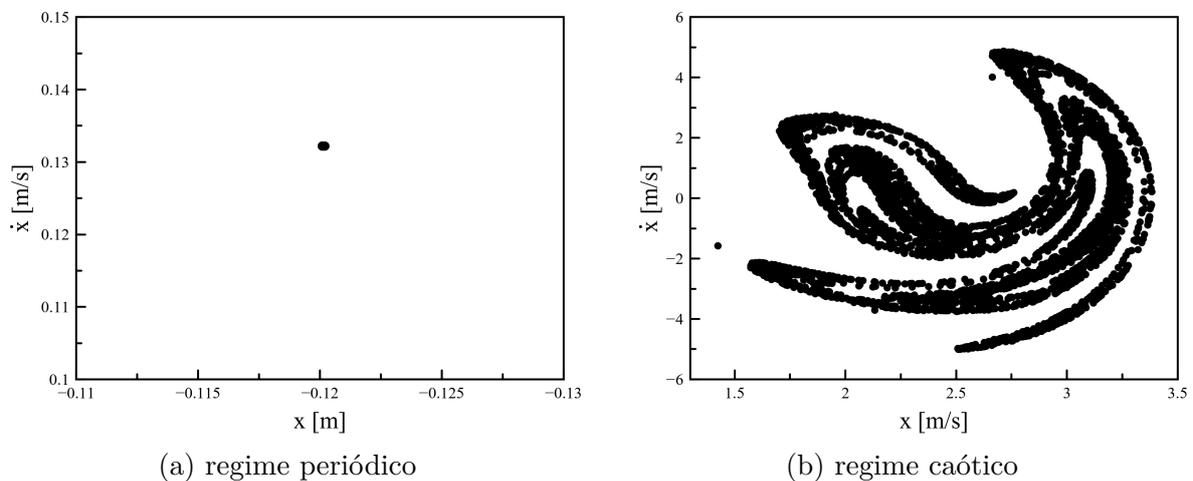


Figura 4.4 – Seção de Poincaré.

4.4 Diagrama de bifurcação

Sistemas físicos tipicamente têm parâmetros de interesse no estudo de suas equações do movimento. À medida que tais parâmetros mudam, pode ocorrer uma mudança qualitativa na estrutura da resposta para determinados valores. Essas mudanças são nomeadas bifurcações e os valores dos parâmetros são chamados de valores de bifurcação (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983).

Essas mudanças podem resultar da colisão de uma órbita periódica instável e a coexistência de um atrator caótico, tais colisões são nomeadas de crises. Fenômenos associados com crises incluem a mudança drástica no tamanho dos atratores caóticos, bruscas aparições de atratores caóticos (possível rota para o caos) e destruições repentinas de atratores caóticos e suas bacias (GREBOGI; OTT; YORKE, 1983).

A teoria de bifurcações está dividida em duas categorias: locais e globais. As bifur-

cações locais trabalham com análise das bifurcações em uma área limitada do espaço de fase, por exemplo, os pontos fixos. Por outro lado, as bifurcações globais representam uma mudança qualitativa na estrutura das órbitas em uma região do espaço de estado. Graficamente, diagramas de bifurcação podem ser construídos de diversas maneiras diferentes. Um método bastante empregado é o da força bruta, no qual, se varia um parâmetro de interesse e avalia-se sua resposta na seção de Poincaré. Para cada valor simulado, despreza-se o regime transiente e coleta-se um conjunto de pontos, desta forma, tem-se uma curva da variável do sistema (posição, velocidade, etc.) em relação à variação deste parâmetro (frequência do forçamento, amplitude do forçamento, etc.) (SAVI, 2006). A Figura 4.5 exemplifica um diagrama de bifurcação de um sistema não-linear.

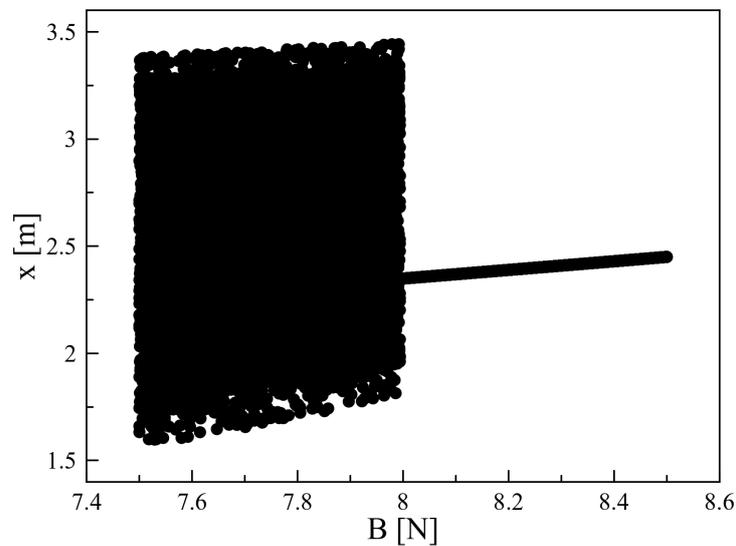


Figura 4.5 – Diagrama de bifurcação: amplitude de forçamento (B) e amplitude da resposta (x).

A existência de bifurcações está intrínsecamente associada ao comportamento caótico, tal que, qualquer sistema dinâmico que não apresenta bifurcação não responde caoticamente. No entanto, a recíproca não é concreta, logo, um sistema que produz bifurcações não obrigatoriamente desenvolve uma resposta caótica (SAVI, 2006). Para garantir a existência de resposta caótica é necessário a aplicação de ferramentas quantitativas, sendo que as duas mais usuais são o Expoente de Lyapunov e a Dimensão Fractal.

5 Modelagem Matemática

Neste capítulo os sistemas dinâmicos que representam o objeto de estudo são apresentados. Em um primeiro momento, um modelo de 2 GDL é abordado descrevendo um eixo do compressor com apenas um cilindro. Adiante, um compressor com quatro cilindros em série é retratado por um modelo de 5 GDL. Ambos os modelos são não-lineares e apresentam uma carga acoplada, além de que, suas equações do movimento são desenvolvidas em duas configurações: com e sem excitação harmônica adicional.

As equações matemáticas que representam o compressor alternativo de duplo-efeito são fundamentadas na pesquisa realizada por Metallidis e Natsiavas (2003). É comum na literatura o uso de modelos de motores de combustão interna para representar compressores alternativos, pelo fato que esses maquinários são de movimento alternativo e apresentam componentes em comum, tais como: virabrequim, manivela, biela, pistão e cilindros. Entretanto, grande parte desses modelos não considera a variação de inércia produzida pelo conjunto manivela-biela-pistão. A não inclusão desse fator pode prejudicar a representação física do sistema real. Portanto, os modelos dinâmicos do presente trabalho são não-lineares pela consideração de uma inércia do cilindro variável, a qual possibilita uma melhor representatividade da dinâmica deste sistema.

5.1 Modelo de 2 GDL com um cilindro

Segundo a modelagem proposta por Metallidis e Natsiavas (2003), assume-se que máquinas alternativas são divididas em duas partes. A primeira é o compressor em si e a segunda representa a carga. A Figura 5.1 apresenta um esquema simplificado que representa um compressor alternativo de um único cilindro.

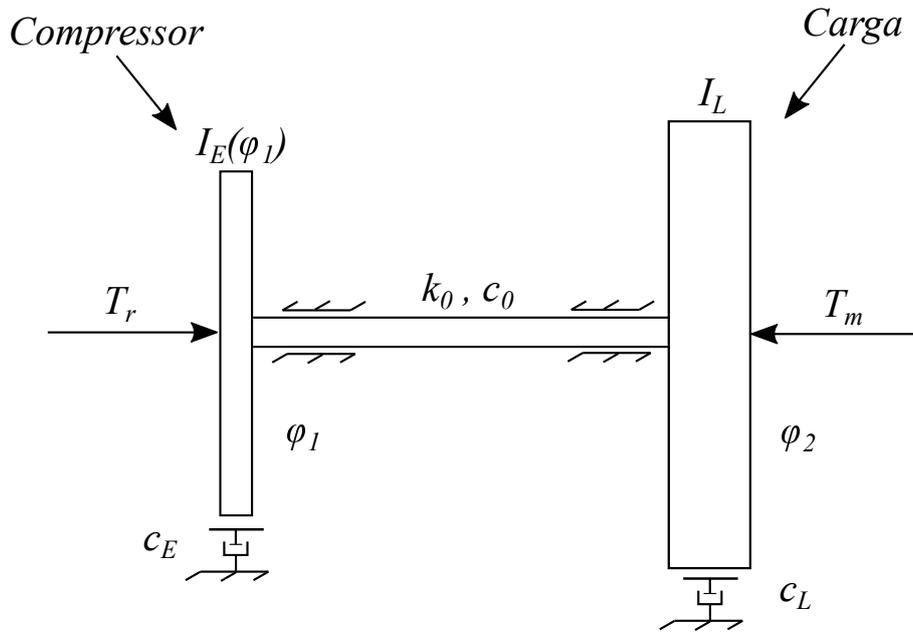


Figura 5.1 – Modelo equivalente para um compressor alternativo de um cilindro.

Como mostra a Figura 5.1, tem-se que a inércia variável do cilindro é simbolizada por $I_E(\varphi_1)$ que depende do ângulo da manivela (φ_1). A carga possui inércia constante representada por I_L que está relacionada com parâmetros da transmissão, tais como a sua inércia e razão numérica de transmissão (METALLIDIS; NATSIAVAS, 2003). Além disso, o deslocamento angular da carga é representado por φ_2 . O eixo que acopla estas partes possui uma rigidez torcional equivalente k_0 e amortecimento viscoso c_0 . Também existe um amortecimento associado a cada parte, c_E e c_L , além de que, os torques aplicados ao sistema são representados por $T_r(\varphi_1)$, sendo o torque resistivo desenvolvido pela compressão do gás no cilindro e T_m é o torque de acionamento do motor elétrico.

5.1.1 Derivação da inércia equivalente para um único cilindro

A manivela rotaciona ao longo do eixo de rotação (virabrequim) transmitindo movimento e potência à biela, que por sua vez aciona o pistão a executar um movimento alternativo (HUANG et al., 2012). Este conjunto é representado pelo mecanismo da Figura 5.2.

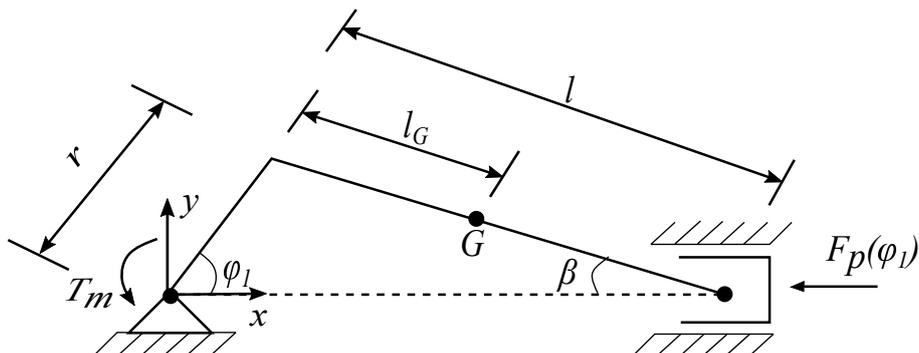


Figura 5.2 – Mecanismo manivela-biela-pistão.

No mecanismo manivela-biela-pistão representado pela Figura 5.2, tem-se que o comprimento da manivela é descrito por r , l_G é a distância do final da manivela até o centro de massa da biela, l é o comprimento total da biela, $F_p(\varphi_1)$ é a força resultante da compressão no cilindro, além de que β é o ângulo entre a biela e o eixo x .

A energia cinética total deste mecanismo é dada por:

$$T_E = \frac{1}{2}(I_c + m_1 r^2)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_p)\dot{x}_p^2 \quad (5.1)$$

onde I_c é o momento de inércia da manivela, I_G e m_r são respectivamente, o momento de inércia do centro de massa e a massa da biela. Além de que, m_p representa a massa do pistão e \dot{x}_p é a sua velocidade. Os parâmetros m_1 , m_2 e I_2 são descritos pelas equações:

$$m_1 = \left(1 - \frac{l_G}{l}\right) m_r \quad (5.2)$$

$$m_2 = \frac{l_G}{l} m_r \quad (5.3)$$

$$I_2 = I_G - m_1 l_G^2 - m_2 (l - l_G)^2 \quad (5.4)$$

onde a razão l_G/l tem valor de 0.29.

Da análise das relações cinemáticas do mecanismo da Figura 5.2, tem-se as seguintes expressões:

$$r \text{sen}(\varphi_1) = l \text{sen}(\beta) \quad (5.5)$$

$$\dot{\beta} = \kappa(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \quad (5.6)$$

o deslocamento do pistão, $x_p(\varphi_1)$, e a sua velocidade, $\dot{x}_p(\varphi_1)$ são obtidas pelas equações 5.7 e 5.8.

$$x_p(\theta) = r \cos(\varphi_1) + l \cos(\beta) \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_p = -r \text{sen}(\varphi_1)[1 + \kappa(\varphi_1)]\dot{\varphi}_1 \quad (5.8)$$

Sendo que, $\kappa(\varphi_1)$ e λ são dados por:

$$\kappa(\varphi_1) = \frac{\lambda \cos(\varphi_1)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\varphi_1)}} \quad (5.9)$$

$$\lambda = \frac{r}{l}. \quad (5.10)$$

Após algumas manipulações matemáticas, a energia cinética de um único cilindro é determinada pela equação 5.11.

$$T_E = \frac{1}{2} \{ I_c + m_1 r^2 + I_2 \kappa^2(\varphi_1) + (m_2 + m_p) r^2 \text{sen}^2(\varphi_1) [1 + \kappa(\varphi_1)]^2 \} \dot{\varphi}_1^2 \quad (5.11)$$

No entanto, a energia cinética é equivalente à $\frac{1}{2} I_E(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2$, logo, a inércia equivalente de um cilindro é dada por:

$$I_E(\varphi_1) = I_c + m_1 r^2 + I_2 \kappa^2(\varphi_1) + (m_2 + m_p) r^2 \text{sen}^2(\varphi_1) [1 + \kappa(\varphi_1)]^2. \quad (5.12)$$

A equação do movimento é desenvolvida pelo emprego da Formulação Lagrangeana, utilizando-se a coordenada generalizada φ_1 e considerando-se a presença de amortecimento viscoso. Então, o resultado final da equação do movimento é

$$I_E(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + c \dot{\varphi}_1 = -T_r(\varphi_1) + M_L \quad (5.13)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso, $T_r(\varphi_1)$ é o torque resistivo do cilindro e M_L é o torque do compressor transmitido à carga, contando com a inclusão da volante.

A equação do movimento da carga é obtida tal que:

$$I_L \ddot{\varphi}_2 = -M_L + T_m. \quad (5.14)$$

Quando o eixo do compressor é considerado rígido, tem-se que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, desta forma, a equação do movimento para este caso é produzida através das equações 5.13 e 5.14.

$$[I_E(\varphi_1) + I_L] \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + c \dot{\varphi}_1 = -T_r(\varphi_1) + T_m \quad (5.15)$$

A equação diferencial 5.15 é não-linear pela presença do termo $\dot{\varphi}_1^2$, além de que, o momento de inércia equivalente ($I_E(\varphi_1)$), e o torque resistivo (T_r) são funções dependentes do ângulo da manivela (φ_1).

É importante ressaltar que o sistema apresenta flexibilidade torcional devido ao movimento de rotação do virabrequim. Sua inclusão pode ser representada de forma simples através de uma rigidez torcional k_0 e um coeficiente de amortecimento c_0 no eixo que

conecta o compressor ao motor, conforme a Figura 5.1 apresenta. Desta forma, tem-se um modelo de dois graus de liberdade com equações do movimento acopladas não-lineares.

$$I_E(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + c_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_E\dot{\varphi}_1 + k_0(\varphi_1 - \varphi_2) = -T_r(\varphi_1) \quad (5.16)$$

$$I_L\ddot{\varphi}_2 + c_0(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_L\dot{\varphi}_2 + k_0(\varphi_2 - \varphi_1) = T_m \quad (5.17)$$

No entanto, existe um equívoco na equação 5.16 proveniente da abordagem utilizada no desenvolvimento das equações do movimento. Conforme afirmam Pesce, Tannuri e Casetta (2006), as equações do movimento de Lagrange não podem ser aplicadas diretamente à sistemas que possuem variação de massa explicitamente com a posição. Neste contexto, mesmo em simples casos, sem considerar a presença de nenhuma força generalizada não-conservativa, estabelecem-se equações do movimento com falta ou excesso de termos na forma $1/2(\partial m/\partial q)\dot{q}^2$, onde q é a coordenada generalizada. Desta forma, o termo $\frac{1}{2} \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2$ deve ser corrigido com a retirada da constante 1/2, logo as equações do movimento do modelo são:

$$I_E(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + c_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_E\dot{\varphi}_1 + k_0(\varphi_1 - \varphi_2) = -T_r(\varphi_1) \quad (5.18)$$

$$I_L\ddot{\varphi}_2 + c_0(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_L\dot{\varphi}_2 + k_0(\varphi_2 - \varphi_1) = T_m. \quad (5.19)$$

5.1.2 Torque resistivo do cilindro

Segundo Metallidis e Natsiavas (2003), o torque resistivo $T_r(\varphi_1)$ é resultante da força $F_p(\varphi_1)$ exercida pela compressão da mistura de gás no interior do cilindro, tal força é proporcional à pressão vezes a área transversal do cilindro:

$$F_p(\varphi_1) = pA_c \quad (5.20)$$

onde p é a pressão desenvolvida no cilindro e A_c é a área da base do cilindro.

Assume-se que a mistura gasosa respeita a lei politrópica, logo, a relação entre a pressão e volume é dada pela equação:

$$pV^k = \text{conste} \quad (5.21)$$

onde V é o volume que o gás ocupa no cilindro e k é o coeficiente de expansão adiabática com valor de 1.4 para o ar. O volume V é determinado em função de φ_1 , conforme segue:

$$V(\varphi_1) = V_c + [r + l - x_p(\varphi_1)] \frac{\pi D_p^2}{4} \quad (5.22)$$

sendo V_c o volume morto do cilindro e D_p o diâmetro do cilindro.

O volume morto do cilindro é determinado a partir da equação:

$$V_c = \frac{(\pi/4) D_p^2 S_p}{RC - 1} \quad (5.23)$$

onde S_p é o curso do pistão no cilindro e RC é a razão de compressão.

Para reproduzir o ciclo de compressão ideal, separaram-se as regiões de pressão constante (sucção e descarga) e variável (compressão e expansão) em intervalos dependentes do ângulo da manivela (φ_1). A construção desses espaços obedece a posição que o pistão se encontra nos pontos onde se iniciam e findam suas fases dentro do ciclo. A etapa de compressão está compreendida entre $0 \leq \varphi_1 < 0.771$ rad, sendo a pressão calculada usando a equação 5.21. Em seguida, a fase de descarga possui pressão constante e é delimitada por $0.771 \leq \varphi_1 < \pi$ rad. Na expansão, assim como na compressão, a pressão é variável e obtida pela equação 5.21, tendo sua fase descrita em $\pi \leq \varphi_1 < 5.362$ rad. Ressalta-se que, embora os processos de compressão e expansão utilizem a mesma equação, suas constantes são diferentes, assim como os volumes também. Por último, a fase de sucção fecha o ciclo com pressão constante igual a pressão atmosférica, e sua faixa está contida no intervalo de $5.362 \leq \varphi_1 < 2\pi$ rad.

Neste modelo, assume-se que o cárter do compressor é aberto ou possui influência da ventilação proveniente da atmosfera. Desta forma, a pressão submetida no pistão é determinada através da subtração da pressão decorrente da compressão e da pressão atmosférica. Sendo $F_p(\varphi_1)$ a força resultante exercida sobre o pistão, tem-se:

$$F_p(\varphi_1) = (p - p_{atm}) A_c \quad (5.24)$$

onde p é a pressão do ciclo de compressão, p_{atm} é a pressão atmosférica.

A partir da geometria do mecanismo manivela-biela-pistão representado na Figura 5.2, tem-se as seguintes relações:

$$r \cos(\varphi_1) + l \cos(\beta) = x_p \quad (5.25)$$

$$r \sin(\varphi_1) - l \sin(\beta) = 0. \quad (5.26)$$

O ângulo entre a biela e o eixo x , β , pode ser reescrito através de φ_1 com uso da equação 5.27.

$$\beta = \text{sen}^{-1}(\lambda \text{sen}(\varphi_1)) \quad (5.27)$$

Para obter-se as velocidades do sistema em relação a coordenada generalizada de análise, deriva-se no tempo as equações 5.25, 5.26. Então, tem-se:

$$-r\dot{\varphi}_1 \text{sen}(\varphi_1) - l\dot{\beta} \text{sen}(\beta) - \dot{x}_p = 0 \quad (5.28)$$

$$r\dot{\varphi}_1 \text{cos}(\varphi_1) - l\dot{\beta} \text{cos}(\beta) = 0. \quad (5.29)$$

Definindo-se K_x como sendo o coeficiente de velocidade que relaciona a velocidade do pistão com a velocidade da coordenada generalizada, $K_x = \dot{x}_p / \dot{\varphi}_1$. Com a manipulação algébrica das equações 5.28 e 5.29 obtém-se:

$$K_x = -r[\text{sen}(\varphi_1) + \text{cos}(\varphi_1)\text{tg}(\beta)]. \quad (5.30)$$

Portanto, define-se o torque resistivo do cilindro como sendo:

$$\begin{aligned} T_r(\varphi_1) &= -K_x F_p(\varphi_1) \\ T_r(\varphi_1) &= r[\text{sen}(\varphi_1) + \text{cos}(\varphi_1)\text{tg}(\beta)](p - p_{atm})A_c. \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.1.3 Torque do motor elétrico

Em muitos modelos o torque do motor de acionamento do compressor é uma função periódica, como no trabalho apresentado por Morillo (2017) que usa uma série de Fourier truncada. No entanto, nesta pesquisa o torque será modelado a partir de uma linearização da curva torque-velocidade, conforme é abordada em Doughty (1988). A Figura 5.3 demonstra uma curva típica torque-velocidade de um motor de indução.

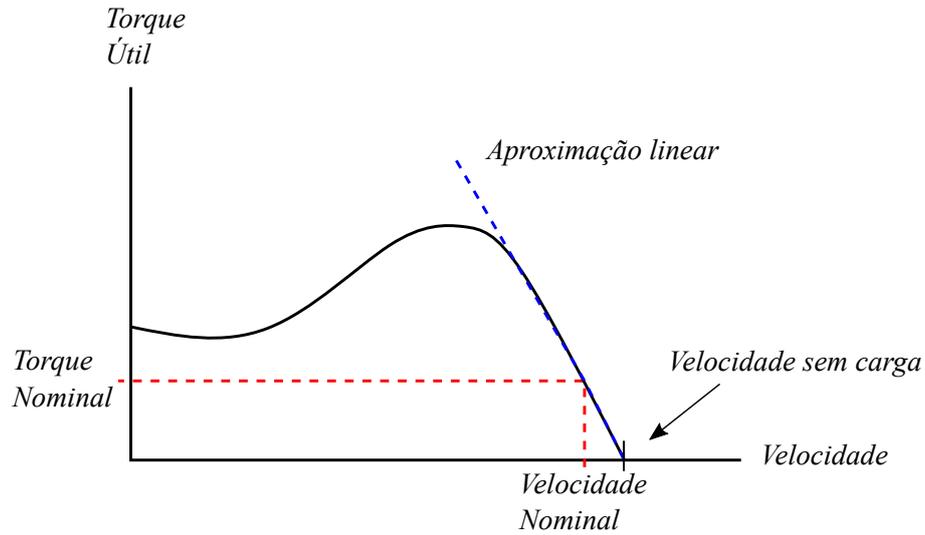


Figura 5.3 – Curva torque-velocidade para um motor de indução.

Motores de indução são conhecidos por apresentarem uma relação quase linear entre torque e velocidade na faixa próxima da velocidade síncrona. Essa característica peculiar permite que seu torque possa ser representado por uma função linear, tal conforme pode ser visualizado na Figura 5.3. No ponto de velocidade sem carga, o motor não produz torque útil, somente o torque requerido para superar as perdas mecânicas internas. A potência útil gerada pelo motor é alcançada no cruzamento dos pontos de velocidade nominal e torque nominal, a qual pode ser observada pelas linhas tracejadas no gráfico da Figura 5.3. Desta forma, tem-se dois pontos de valores conhecidos na parte linear da curva torque-velocidade, a partir desses pontos pode-se determinar a função governante aproximada do torque do motor de indução (DOUGHTY, 1988).

Então, tem-se que o torque do motor é modelado por:

$$T_m = C_0 + C_1\dot{\varphi}_2 \quad (5.32)$$

onde C_0 é a constante que intercepta a curva torque-velocidade e C_1 é a inclinação da curva torque-velocidade.

5.1.4 Equações do movimento adimensionalizadas

Para diminuir o tempo de integração do sistema, as equações governantes (5.18 e 5.19) foram adimensionalizadas pela introdução do tempo adimensional $\tau = \omega_0 t$, com $\omega_0 = \sqrt{k_0(I_L + I_0)/I_L I_0}$ conforme é realizado por Metallidis e Natsiavas (2003). Sendo I_0 a quantidade de inércia dada pela linearização da inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$.

$$I_0 = I_c + m_1 r^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_p)r^2 \quad (5.33)$$

O coeficiente de amortecimento torcional c_0 é determinado a partir do fator de amortecimento (ζ_0), rigidez torcional (k_0) e da quantidade de inércia (I_0):

$$c_0 = 2\zeta_0\sqrt{k_0I_0}. \quad (5.34)$$

Tem-se que as derivadas temporais de φ_1 e φ_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_0 \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \omega_0\varphi'_1 & \dot{\varphi}_2 &= \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_0 \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \omega_0\varphi'_2 \\ \ddot{\varphi}_1 &= \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} = \omega_0^2\varphi''_1 & \ddot{\varphi}_2 &= \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} = \omega_0^2\varphi''_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Então, substituindo as equações 5.35 em 5.18 e 5.19, tem-se as equações do movimento no domínio de τ :

$$\begin{aligned} I_E(\varphi_1)\omega_0^2\varphi''_1 + \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1}\omega_0^2\varphi_1'^2 + c_0\omega_0(\varphi'_1 - \varphi'_2) + c_E\omega_0\varphi'_1 + k_0(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ r[\text{sen}(\varphi_1) + \text{cos}(\varphi_1)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(\varphi_1)))](p - p_{atm})A_c \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$I_L\omega_0^2\varphi''_2 + c_0\omega_0(\varphi'_2 - \varphi'_1) + c_L\omega_0\varphi'_2 + k_0(\varphi_2 - \varphi_1) = C_0 + C_1\omega_0\varphi'_2. \quad (5.37)$$

5.1.5 Equações de estado

Sistemas dinâmicos de dois graus de liberdade ou mais, são governados por um conjunto de equações acopladas com igual número de GDL. Logo, uma forma mais conveniente de representar este conjunto de equações é usando a notação matricial. Então, as equações do movimento são reescritas tal que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_E(\varphi_1)\omega_0^2 & 0 \\ 0 & I_L\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1'' \\ \varphi_2'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1}\omega_0^2\varphi_1' + c_0\omega_0 + c_E\omega_0 & -c_0\omega_0 \\ -c_0\omega_0 & c_0\omega_0 + c_L\omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r[\text{sen}(\varphi_1) + \text{cos}(\varphi_1)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(\varphi_1)))](p - p_{atm})A_c \\ C_0 + C_1\omega_0\varphi_2' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.38)$$

logo, a equação de movimento do sistema na forma matricial é dada por:

$$\mathbf{M}\varphi'' + \mathbf{C}\varphi' + \mathbf{K}\varphi = \mathbf{F} \quad (5.39)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de inércia, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez e \mathbf{F} é o vetor de torques. Além de que, φ'' , φ' e φ , representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento angular respectivamente.

O modelo dinâmico é governado por equações diferenciais não-lineares de segunda ordem, entretanto, para a aplicação do método numérico proposto, Runge-Kutta de quarta ordem, estas equações necessitam ser de primeira ordem ou serem reescritas de forma a representar um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Para tal, utiliza-se as equações de estado, de modo que:

$$\{s\}_{4x1} = \left\{ \begin{array}{l} \{\varphi\}_{2x1} \\ \{\varphi'\}_{2x1} \end{array} \right\} \quad \{s'\}_{4x1} = \left\{ \begin{array}{l} \{\varphi'\}_{2x1} \\ \{\varphi''\}_{2x1} \end{array} \right\} \quad (5.40)$$

onde s é o vetor de estados e s' é sua a derivada temporal.

Partindo-se da equação 5.38, as equações de movimento são reescritas na forma:

$$\{s'\}_{4x1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \{s\}_{4x1} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \{F\}_{2x1} \quad (5.41)$$

onde \mathbf{Z} é a matriz de zeros e \mathbf{I} é a matriz identidade e a ordem de ambas é $2x2$.

5.1.6 Modelo de 2 GDL com excitação harmônica

Máquinas rotativas são uma fonte comum de problemas vibratórios por terem componentes giratórios, e que normalmente estão sendo acionados por motores elétricos, como são os compressores. Pequenas irregularidades na distribuição de massa desses elementos podem causar vibrações substanciais (INMAN, 2008). Desta forma, nesta seção um torque harmônico é adicionado ao sistema, o qual pode simular efeitos que aumentam a amplitude da resposta do sistema.

Assumindo que o eixo do compressor gira com frequência angular ω , o torque harmônico é definido por:

$$T_{har} = T_0 \cos(\omega t) \quad (5.42)$$

onde T_0 é a amplitude do torque.

Sendo $\omega = \dot{\varphi}_1 = \omega_0 \varphi'_1$ e $t = \frac{\tau}{\omega_0}$, tem-se o torque no tempo adimensional:

$$T_{har} = T_0 \cos(\varphi'_1 \tau). \quad (5.43)$$

Logo, inserindo o torque nas equações do movimento em τ tem-se:

$$I_E(\varphi_1)\omega_0^2\varphi''_1 + \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1}\omega_0^2\varphi_1'^2 + c_0\omega_0(\varphi'_1 - \varphi'_2) + c_E\omega_0\varphi'_1 + k_0(\varphi_1 - \varphi_2) = r[\text{sen}(\varphi_1) + \cos(\varphi_1)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(\varphi_1)))](p - p_{atm})A_c + T_0\cos(\varphi'_1\tau) \quad (5.44)$$

$$I_L\omega_0^2\varphi''_2 + c_0\omega_0(\varphi'_2 - \varphi'_1) + c_L\omega_0\varphi'_2 + k_0(\varphi_2 - \varphi_1) = C_0 + C_1\omega_0\varphi'_2. \quad (5.45)$$

Reescrevendo as equações do sistema dinâmico em coordenadas de estado, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 s'_0 &= s_1 & (5.46) \\
 s'_1 &= \left(r[\text{sen}(s_0) + \text{cos}(s_0)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_0)))](p - p_{atm})A_c + T_0\text{cos}(s_1\tau) - \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1}\omega_0^2 s_1^2 \right. \\
 &\quad \left. - c_0\omega_0(s_1 - s_3) - c_E\omega_0 s_1 - k_0(s_0 - s_2) \right) / I_E(\varphi_1)\omega_0^2 \\
 s'_2 &= s_3 \\
 s'_3 &= \left(C_0 + C_1\omega_0 s_3 - c_0\omega_0(s_3 - s_1) - c_L\omega_0 s_3 - k_0(s_2 - s_0) \right) / I_L\omega_0^2.
 \end{aligned}$$

5.2 Modelo de 5 GDL com quatro cilindros

Compressores alternativos de um único cilindro são poucos e trabalham em aplicações leves, a maioria destas máquinas apresentam dois ou mais cilindros. Nesta seção, apresenta-se um modelo do eixo de um compressor alternativo com quatro cilindros em série e com 5 GDL, que possuem inércias variáveis ($I_E(\varphi_n)$ com $n = 1, 2, 3$ e 4) e uma carga acoplada com inércia I_L , como mostra a Figura 5.4.

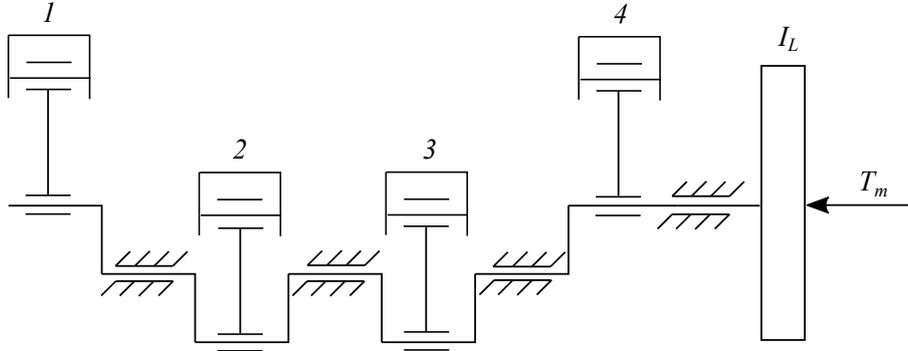


Figura 5.4 – Modelo equivalente para um compressor alternativo de quatro cilindros em série: cilindros 1 e 4 em fase e cilindros 2 e 3 fora de fase.

As equações do movimento são adaptadas do trabalho desenvolvido por Metallidis e Natsiavas (2003), e são descritas no tempo adimensional τ tal que:

$$\begin{aligned}
I_E(\varphi_1)\omega_0^2\varphi_1'' + \frac{dI_E(\varphi_1)}{d\varphi_1}\omega_0^2\varphi_1'^2 + c_1\omega_0(\varphi_1' - \varphi_2') + c_E\omega_0\varphi_1' + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= -T_{r_1} \\
I_E(\varphi_2 - \varphi_1)\omega_0^2\varphi_2'' + \frac{dI_E(\varphi_2 - \varphi_1)}{d\varphi_2}\omega_0^2\varphi_2'^2 + c_1\omega_0(2\varphi_2' - \varphi_1' - \varphi_3') + c_E\omega_0\varphi_2' + k_1(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) &= -T_{r_2} \\
I_E(\varphi_3 - \varphi_1)\omega_0^2\varphi_3'' + \frac{dI_E(\varphi_3 - \varphi_1)}{d\varphi_3}\omega_0^2\varphi_3'^2 + c_1\omega_0(2\varphi_3' - \varphi_2' - \varphi_4') + c_E\omega_0\varphi_3' + k_1(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4) &= -T_{r_3} \\
I_E(\varphi_4)\omega_0^2\varphi_4'' + \frac{dI_E(\varphi_4)}{d\varphi_4}\omega_0^2\varphi_4'^2 + c_0\omega_0(\varphi_4' - \varphi_5') + c_1\omega_0(\varphi_4' - \varphi_3') + c_E\omega_0\varphi_4' + k_0(\varphi_4 - \varphi_5) + \\
k_1(\varphi_4 - \varphi_3) &= -T_{r_4} \\
I_L\omega_0^2\varphi_5'' + c_0\omega_0(\varphi_5' - \varphi_4') + c_L\omega_0\varphi_5' + k_0(\varphi_5 - \varphi_4) &= -T_m
\end{aligned} \tag{5.47}$$

onde c_1 e k_1 são o coeficiente de amortecimento torcional e a rigidez torcional dos eixos entre os cilindros. As posições angulares dos cilindros 2 e 3 estão defasadas de φ_1 , por isso tem-se $I_E(\varphi_2 - \varphi_1)$ e $I_E(\varphi_3 - \varphi_1)$ nas equações do movimento. Enquanto que, os cilindros 1 e 4 estão em fase. Os torques resistivos dos cilindros T_{r_n} são dados por:

$$T_{r_n} = r[\text{sen}(\varphi_n) + \text{cos}(\varphi_n)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(\varphi_n)))](p - p_{atm})A_c, n = 1, 2, 3, 4. \tag{5.48}$$

As equações do sistema dinâmico em coordenadas de estado são dadas por:

$$\begin{aligned}
s'_0 &= s_1 \\
s'_1 &= \left(r[\text{sen}(s_0) + \text{cos}(s_0)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_0)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_0)}{ds_0}\omega_0^2 s_1^2 - c_1\omega_0(s_1 - s_3) - c_E\omega_0 s_1 \right. \\
&\quad \left. - k_1(s_0 - s_2) \right) / I_E(s_1)\omega_0^2 \\
s'_2 &= s_3 \\
s'_3 &= \left(r[\text{sen}(s_2) + \text{cos}(s_2)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_2)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_2 - s_0)}{ds_2}\omega_0^2 s_3^2 - c_1\omega_0(2s_3 - s_1 - s_5) \right. \\
&\quad \left. - c_E\omega_0 s_3 - k_1(2s_2 - s_0 - s_4) \right) / I_E(s_2 - s_0)\omega_0^2 \\
s'_4 &= s_5 \\
s'_5 &= \left(r[\text{sen}(s_4) + \text{cos}(s_4)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_4)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_4 - s_0)}{ds_4}\omega_0^2 s_5^2 - c_1\omega_0(2s_5 - s_3 - s_7) \right. \\
&\quad \left. - c_E\omega_0 s_5 - k_1(2s_4 - s_2 - s_6) \right) / I_E(s_4 - s_0)\omega_0^2 \\
s'_6 &= s_7 \\
s'_7 &= \left(r[\text{sen}(s_6) + \text{cos}(s_6)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_6)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_6)}{ds_6}\omega_0^2 s_7^2 - c_0\omega_0(s_7 - s_9) \right. \\
&\quad \left. - c_1\omega_0(s_7 - s_5) - c_E\omega_0 s_7 - k_0(s_6 - s_8) - k_1(s_6 - s_4) \right) / I_E(s_6)\omega_0^2 \\
s'_8 &= s_9 \\
s'_9 &= (C_0 + C_1\omega_0 s_9 - c_0\omega_0(s_9 - s_7) - c_L\omega_0 s_9 - k_0(s_8 - s_6)) / I_L\omega_0^2.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

5.2.1 Modelo de 5 GDL com excitação harmônica

Assim como o modelo de 2 GDL, o compressor com quatro cilindros também será analisado com a adição de uma excitação harmônica. Desta forma, as equações governantes do eixo do compressor com a excitação harmônica são descritas em coordenadas de estado:

$$s'_0 = s_1 \quad (5.50)$$

$$s'_1 = \left(r[\text{sen}(s_0) + \cos(s_0)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_0)))](p - p_{atm})A_c + T_0\cos(s_1\tau) - \frac{dI_E(s_0)}{ds_0}\omega_0^2 s_1^2 - c_1\omega_0(s_1 - s_3) - c_E\omega_0 s_1 - k_1(s_0 - s_2) \right) / I_E(s_1)\omega_0^2$$

$$s'_2 = s_3$$

$$s'_3 = \left(r[\text{sen}(s_2) + \cos(s_2)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_2)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_2 - s_0)}{ds_2}\omega_0^2 s_3^2 - c_1\omega_0(2s_3 - s_1 - s_5) - c_E\omega_0 s_3 - k_1(2s_2 - s_0 - s_4) \right) / I_E(s_2 - s_0)\omega_0^2$$

$$s'_4 = s_5$$

$$s'_5 = \left(r[\text{sen}(s_4) + \cos(s_4)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_4)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_4 - s_0)}{ds_4}\omega_0^2 s_5^2 - c_1\omega_0(2s_5 - s_3 - s_7) - c_E\omega_0 s_5 - k_1(2s_4 - s_2 - s_6) \right) / I_E(s_4 - s_0)\omega_0^2$$

$$s'_6 = s_7$$

$$s'_7 = \left(r[\text{sen}(s_6) + \cos(s_6)\text{tg}(\text{sen}^{-1}(\lambda\text{sen}(s_6)))](p - p_{atm})A_c - \frac{dI_E(s_6)}{ds_6}\omega_0^2 s_7^2 - c_0\omega_0(s_7 - s_9) - c_1\omega_0(s_7 - s_5) - c_E\omega_0 s_7 - k_0(s_6 - s_8) - k_1(s_6 - s_4) \right) / I_E(s_6)\omega_0^2$$

$$s'_8 = s_9$$

$$s'_9 = (C_0 + C_1\omega_0 s_9 - c_0\omega_0(s_9 - s_7) - c_L\omega_0 s_9 - k_0(s_8 - s_6)) / I_L\omega_0^2.$$

Portanto, as equações de movimento foram deduzidas neste capítulo, assim como também utilizou-se a abordagem de equações de estados para propiciar a aplicação do método de integração numérica adotado. Com esta etapa concluída, o próximo capítulo irá discutir os resultados das simulações numéricas dos presentes modelos.

6 Análise numérica dos modelos não-lineares

Neste capítulo é feita uma análise do comportamento dinâmico do sistema a partir de simulações numéricas de dois modelos não-lineares, avaliando-se a influência de alguns parâmetros na vibração torcional, e empregando-se as ferramentas qualitativas apresentadas no capítulo 4. O método de integração usado nas simulações é o Runge-Kutta de quarta ordem, o qual foi adotado ao longo de toda esta pesquisa. Inicia-se com o modelo de 2 GDL a partir de uma situação em que o eixo do compressor está girando pelo acionamento do motor elétrico. Em seguida, estuda-se a amplitude máxima em relação a velocidade média do eixo e a influência da rigidez na amplitude. Adiante, realiza-se uma análise paramétrica da inércia não-constante do cilindro para verificar que parâmetros têm mais influência na sua variação. Por fim, avalia-se a resposta do eixo do compressor na presença de uma excitação harmônica adicional que visa representar efeitos que aumentem a amplitude de resposta do sistema.

A segunda seção é destinada a tratar das respostas para um compressor com quatro cilindros em série, o qual é representado por modelo de 5 GDL. Duas configurações são analisadas e discutidas, a primeira mostra os efeitos que a inércia variável dos cilindros exercem no comportamento do sistema, e a segunda aborda os resultados com a adição de um torque harmônico em conjunto com as situações da etapa inicial. Em ambos os modelos, o acréscimo de uma excitação harmônica tende a causar complexidade na resposta do sistema.

6.1 Resultados do modelo de 2 GDL

A análise inicia-se a partir de uma situação na qual o eixo do compressor está girando e sob influência dos torques resistivo do cilindro e do motor elétrico. As equações do movimento (equações 5.41) foram integradas numericamente, considerando-se o tempo adimensional τ , com passo $h = 0,01256637$ e usando as condições iniciais: $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = 0,5$ rad, $\varphi_2(0) = 0$ e $\varphi_2'(0) = 0$. Os parâmetros utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 2, sendo provenientes de Huang et al. (2012), Doughty (1988) e Metallidis e Natsiavas (2003).

Tabela 2 – Parâmetros do sistema dinâmico.

Parâmetro [Unidade]	Valor
I_c [kg.m ²]	0,01783
I_L [kg.m ²]	0,165
I_G [kg.m ²]	0,0458
m_r [kg]	3,8
m_p [kg]	4,026
l_G/l	0,29
r [mm]	72,5
l [mm]	262
D_p [mm]	132
S_p [mm]	145
RC	17,5
k	1,4
k_0 [N.m/rad]	$0,3 \times 10^8$
c_E [N.m.s/rad]	0,004
c_L [N.m.s/rad]	0,004
ζ_0	0,3
p_{atm} [Pa]	101325
p_{des} [Pa]	618459,9720
C_0 [N.m]	5000
C_1 [N.m.s]	-0,5

A Figura 6.1a apresenta o deslocamento angular da manivela mostrando que o eixo está girando no sentido anti-horário (positivo). Sendo assim, o deslocamento ultrapassa 2π rad. Para melhor entendimento do comportamento dinâmico, consideram-se os valores dos ângulos entre 0 e 2π uma vez que, fisicamente, valores fora dessa região possuem ângulos equivalentes. Com essa restrição (Figura 6.1c), a visualização da resposta temporal e no espaço de fase fica mais representativa por limitar os valores dos ângulos ao invés de ter um aumento indefinido, além disso, pode-se reproduzir o ciclo de compressão ideal. Na Figura 6.1b tem-se a rotação do eixo em radianos, que apresenta característica periódica e varia em região satisfatória.

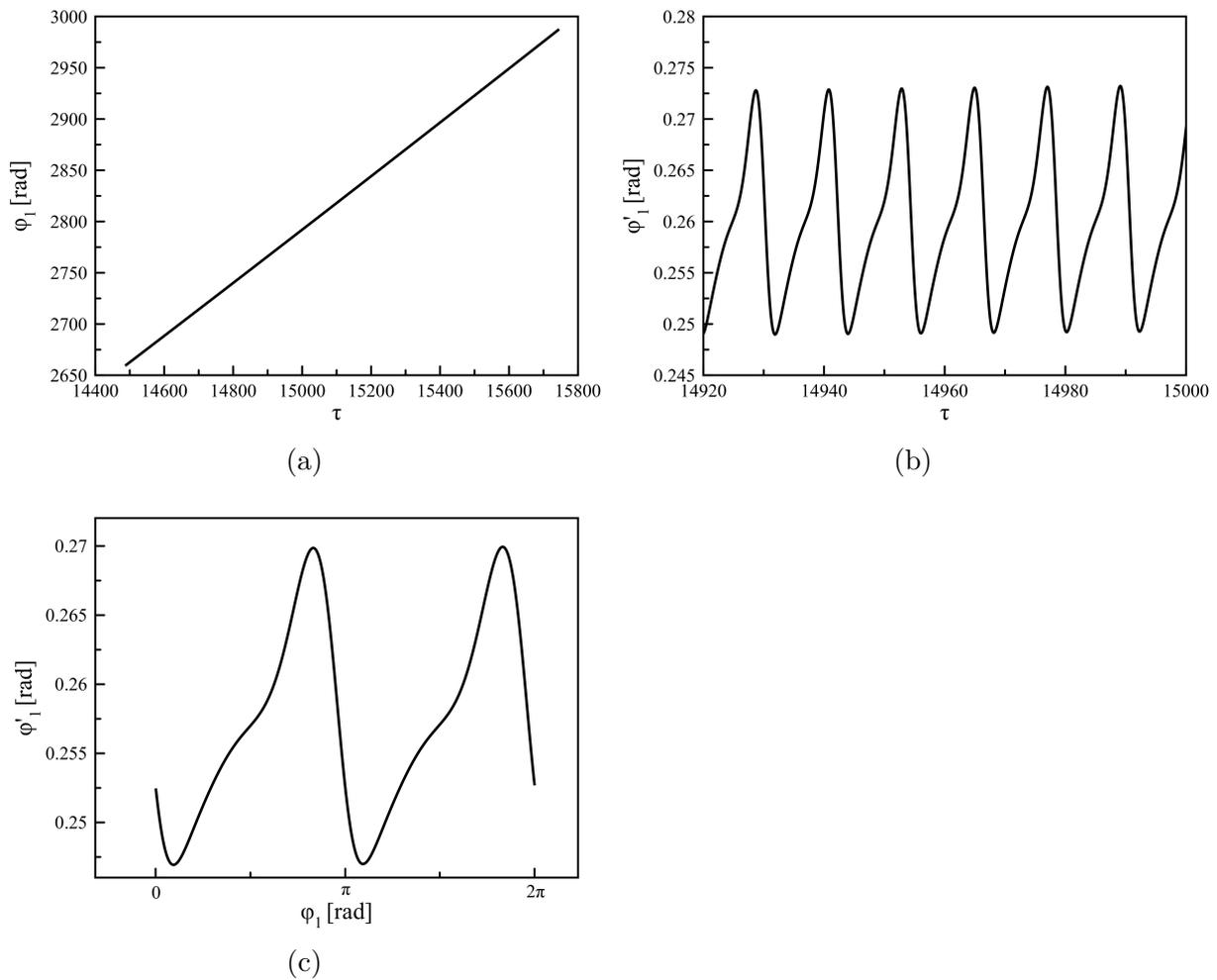


Figura 6.1 – Deslocamento angular, rotação do eixo e espaço de fase: a) deslocamento angular da manivela, b) rotação do virabrequim e c) espaço de fase com restrição de movimento.

Para avaliar a vibração torcional no eixo do compressor, define-se a amplitude relativa como sendo $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. A Figura 6.2a apresenta o comportamento temporal de $\Delta\varphi$ para o caso analisado acima, enquanto a Figura 6.2b apresenta o seu espaço de fase, onde verifica-se uma curva fechada que pode estar associada a um comportamento quase periódico.

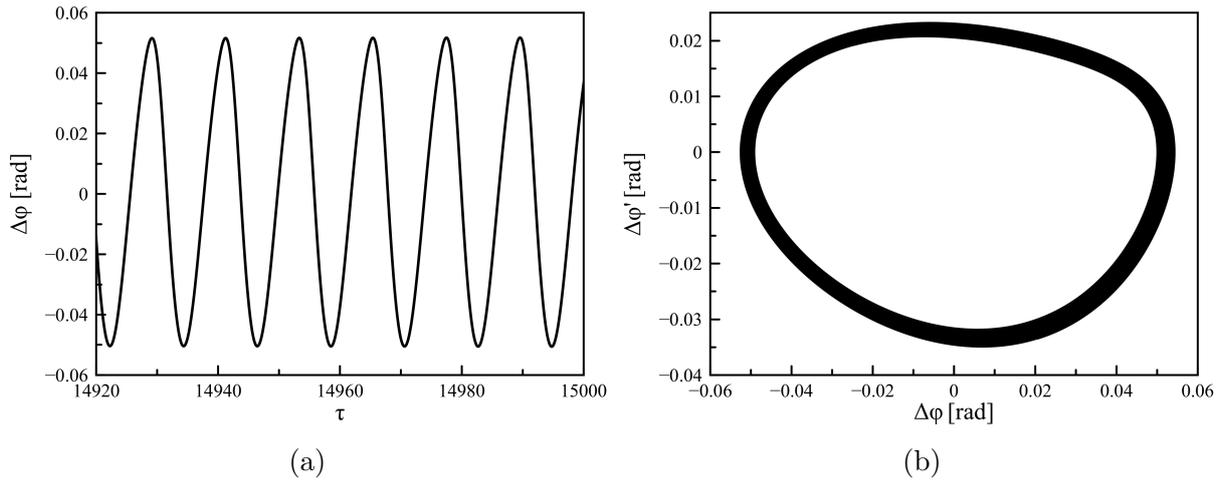


Figura 6.2 – Amplitude relativa: a) evolução temporal e b) espaço de fase.

O ciclo pressão-volume obtido, correspondente a uma compressão ideal, é apresentado na Figura 6.3a. Nele estão representadas as suas quatro fases: compressão, descarga, expansão e sucção. Sendo que as pressões de sucção e descarga no compressor tem valores de 101325 Pa e 618459,9720 Pa segundo Doughty (1988). Ressalta-se que nas linhas adiabáticas representadas pelos processos de compressão e expansão, o coeficiente de expansão adiabática (k) utilizado foi de 1,4 para o ar. Como a pressão possui característica periódica relacionada com a posição angular da manivela, o torque resistivo do cilindro também possui, conforme apresenta a Figura 6.3b.

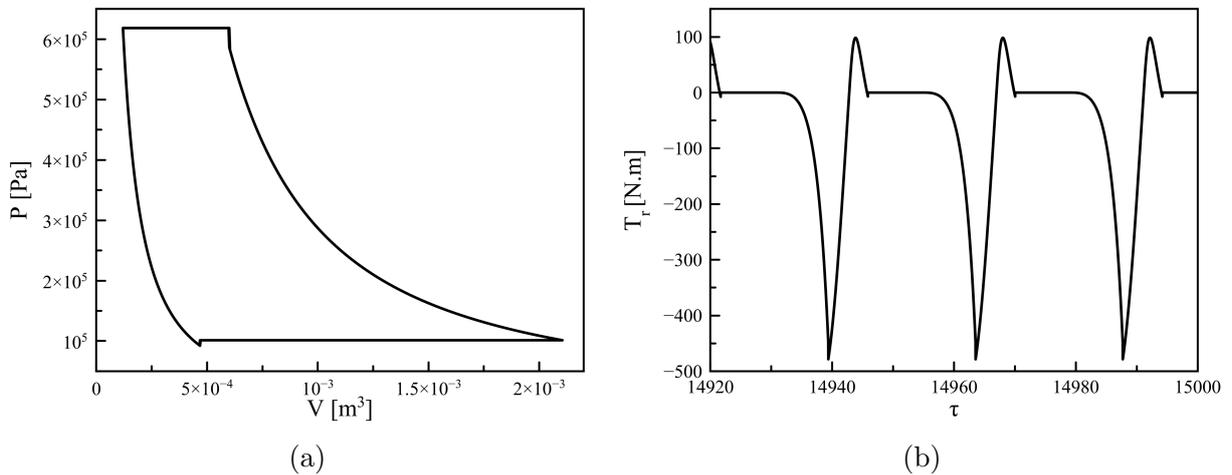


Figura 6.3 – Ciclo P-V e torque resistivo: a) ciclo de compressão ideal e b) torque resistivo do cilindro.

O torque que aciona o compressor é produzido pelo motor elétrico. Como apresentado no capítulo anterior, a equação que o governa é fundamentada em uma linearização e é dependente da rotação do eixo, tal que a constante C_0 é o coeficiente linear da reta e C_1 é o coeficiente angular da reta ou o valor aproximado para a inclinação. Os valores das

constantes utilizadas nesta simulação são adaptados de Doughty (1988), sendo $C_0 = 5000$ N.m e $C_1 = -0,5$ N.m.s. A Figura 6.4 apresenta o torque do motor elétrico (T_m).

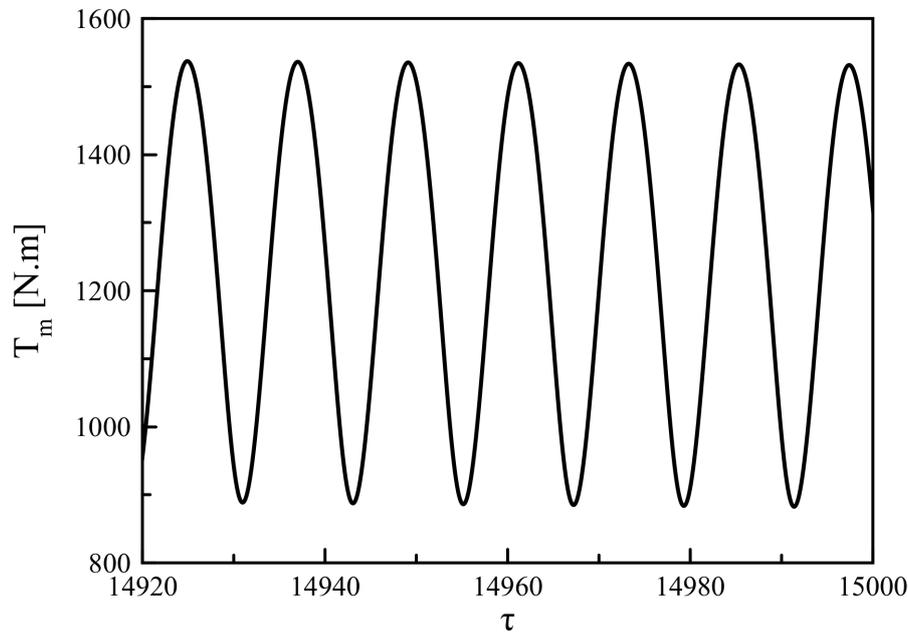


Figura 6.4 – Torque do motor elétrico.

6.1.1 Avaliação da amplitude de resposta de acordo com a velocidade de rotação do eixo

As situações críticas de operação consistem nos casos que merecem mais atenção do ponto de vista dinâmico. Esses pontos estão relacionados às maiores amplitudes de vibração, e ocorrem nas regiões de ressonância, localizados perto das frequências naturais. Logo, para a determinação destas condições ou frequências relacionadas às amplitudes máximas, realizou-se uma varredura da resposta variando-se o parâmetro C_0 , visto que, provoca-se uma variação da velocidade de rotação média do eixo ($\varphi'_{1,med}$). A Figura 6.5a apresenta as amplitudes máximas em relação a velocidade de rotação média do eixo na faixa de 0 a 4,41 rad, e a Figura 6.5b mostra a amplitude máxima em função de C_0 , considerando-se a região de 100 a 22000 N.m. Ressalta-se que em ambas as figuras são utilizados três valores distintos de rigidez torcional k_0 : $0,3 \times 10^6$, $0,3 \times 10^7$ e $0,3 \times 10^8$ N.m/rad.

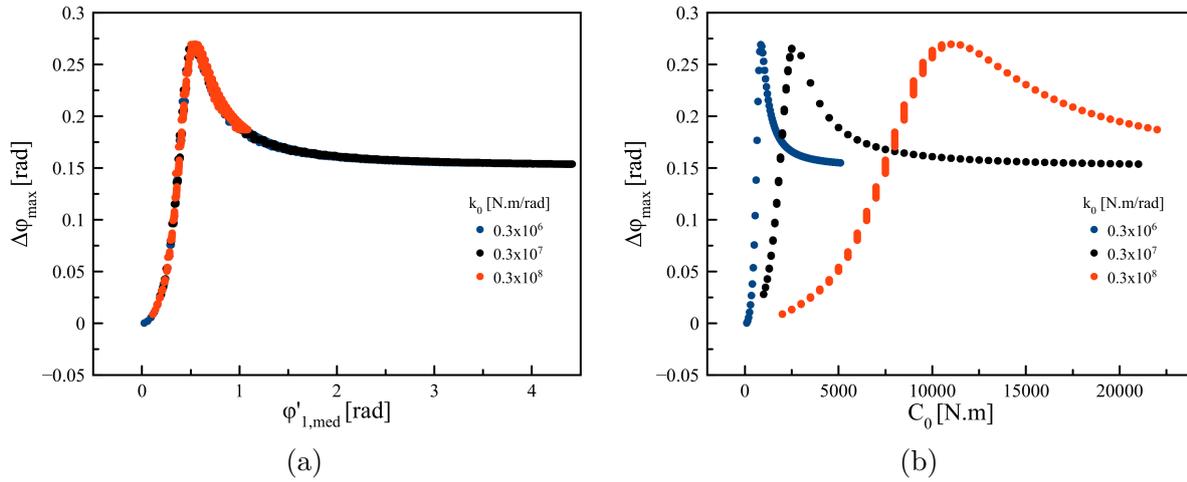


Figura 6.5 – Amplitudes máximas: a) amplitude máxima e rotação média do eixo e b) amplitude máxima em relação C_0 .

Observa-se a partir da análise da Figura 6.5a que a amplitude máxima está localizada na região próxima de $\phi'_{1,med} = 0,54$ rad, e possui valor de 0,2746 rad para os três casos de rigidez distintas. Em sistemas dinâmicos, a variação da rigidez altera a frequência natural e, conseqüentemente, a região de ressonância. Essa mudança não é percebida na Figura 6.5a pois o sistema está adimensionalizado no tempo, e neste processo utilizou-se o parâmetro ω_0 que também é dependente da rigidez e as equações 5.35. Entretanto, considerando valores dimensionais, as frequências naturais são diferentes. Apesar da amplitude máxima estar compreendida na mesma faixa de velocidade de rotação nos três casos, o valor da constante C_0 é diferente para cada caso, e seu valor associado a amplitude máxima aumenta conforme a rigidez, tendo valores de 850, 2500 e 11000 N.m para k_0 igual a $0,3 \times 10^6$, $0,3 \times 10^7$ e $0,3 \times 10^8$ N.m/rad, respectivamente como mostra a Figura 6.5b.

6.1.2 Influência da rigidez na amplitude relativa

Para avaliar a ação que a rigidez torcional k_0 exerce na amplitude do sistema, foram realizadas simulações com três valores distintos de rigidez ($0,3 \times 10^6$, $0,3 \times 10^7$ e $0,3 \times 10^8$ N.m/rad) para as mesmas condições iniciais anterior e com $C_0 = 5000$ N.m e $C_1 = 0,5$ N.m.s, como mostra a Figura 6.6. Percebe-se de forma nítida que, para um mesmo conjunto de parâmetros, ao diminuir uma ordem de grandeza da rigidez, a amplitude da resposta aumenta de maneira significativa. Isto é coerente pois, ao reduzir a rigidez permite-se que o eixo seja mais flexível e desta forma, o deslocamento relativo será maior, conforme é mostrado para os valores de rigidez de $0,3 \times 10^7$ e $0,3 \times 10^6$ N.m/rad quando comparado com o caso de referência ($0,3 \times 10^8$ N.m/rad).

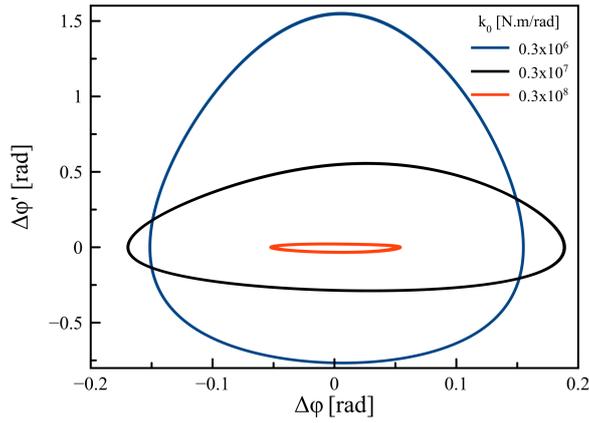
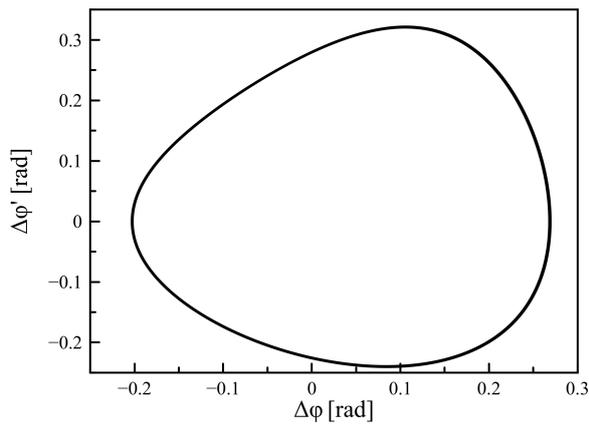
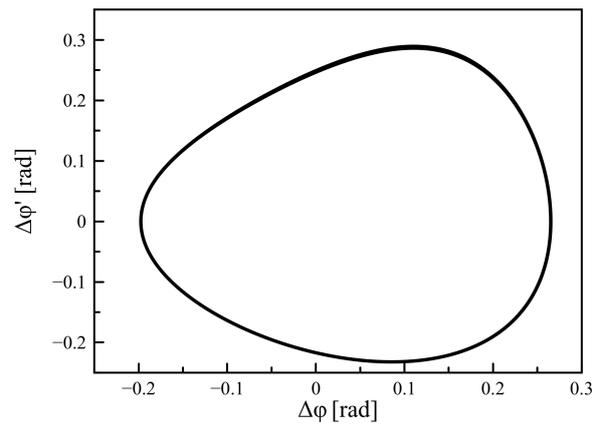


Figura 6.6 – Espaços de fase para valores diferentes de rigidez.

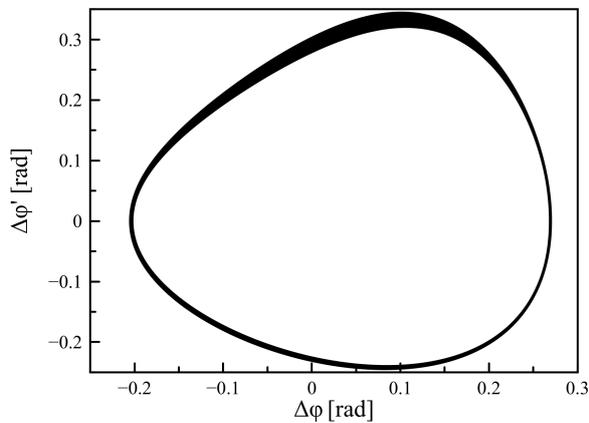
Também são avaliadas as repostas com C_0 referente às regiões de amplitude máxima para os três valores de rigidez da comparação anterior, conforme apresenta a Figura 6.7. Observa-se que, nesses conjuntos de parâmetros a resposta do sistema mantém-se periódica, conforme indicam as curvas fechadas no plano de fase, e não apresentam mudanças de amplitude, apesar que a rigidez é diminuída em duas ordens de grandeza.



(a) $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad, $C_0 = 850$ N.m



(b) $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, $C_0 = 2500$ N.m



(c) $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad, $C_0 = 11000$ N.m

Figura 6.7 – Espaços de fase para diferentes valores da rigidez nos pontos de amplitude máxima.

6.1.3 Análise paramétrica da inércia equivalente do cilindro

A inércia equivalente é uma variável que merece ser estudada, pois é o termo associado a não-linearidade presente na equação do movimento (equação 5.36). Além disso, a inércia não-constante (equação 5.12) apresenta parâmetros físicos que podem ser explorados para melhor entendimento do seu comportamento. Para isto, nesta seção é feita uma análise paramétrica para identificar de que forma cada parâmetro influencia na variação da inércia de acordo com a rotação do eixo.

Na Figura 6.8 são analisadas as inércias da manivela (I_c) e a inércia adicional I_2 . Verificou-se que a inércia da manivela provocou pequenas mudanças no comportamento da inércia equivalente, e somente o valor de 0,5 kg.m² mudou de forma abrupta a resposta, como pode ser visto na Figura 6.8a. Porém, este é um valor muito grande para as dimensões do sistema adotado sendo inviável fisicamente. Da mesma maneira, a inércia I_2 também produziu pouco efeito, como apresenta a Figura 6.8b. Logo, a influência que estes parâmetros exercem é baixa.

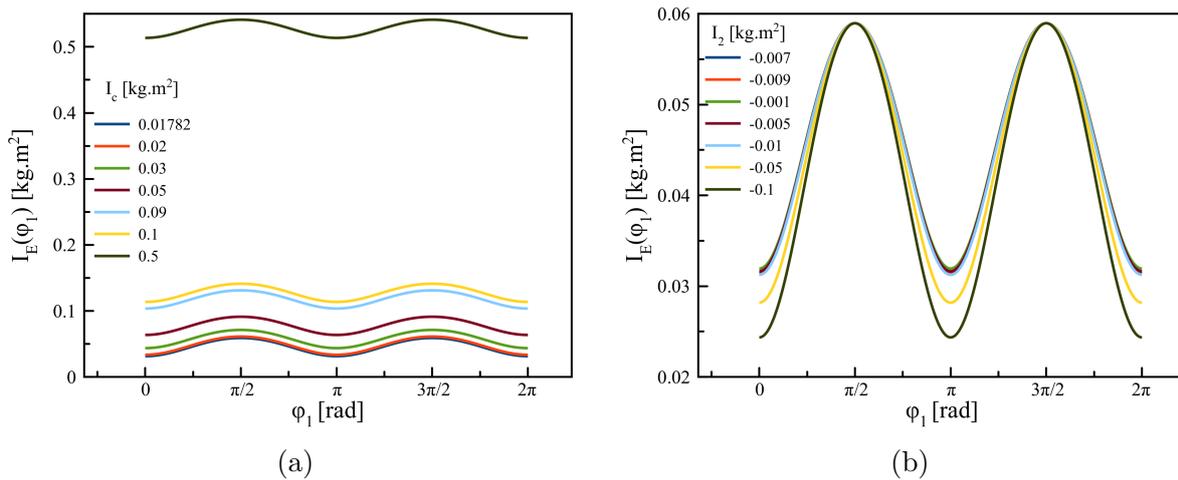


Figura 6.8 – Efeito das inércias I_c e I_2 na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$: a) inércia da manivela e b) inércia adicional de um sistema simplificado de duas massas.

Em seguida são avaliados os efeitos provenientes das massas do pistão, biela, m_1 e m_2 apresentados pela Figura 6.9. Variaram-se todos esses parâmetros em uma faixa similar, de no máximo 9 ou 10 kg. Em todos os gráficos percebe-se que o comportamento da inércia equivalente não ultrapassou o valor de 0,1 kg.m², que apesar de ser maior que o seu comportamento padrão, não houve mudanças qualitativas. Ressalta-se que, qualquer uma dessas massas com valor de 9 ou 10 kg é um caso extremo para este sistema e mesmo assim, como no caso anterior, não influenciou de forma significativa no padrão de resposta desenvolvido pela inércia.

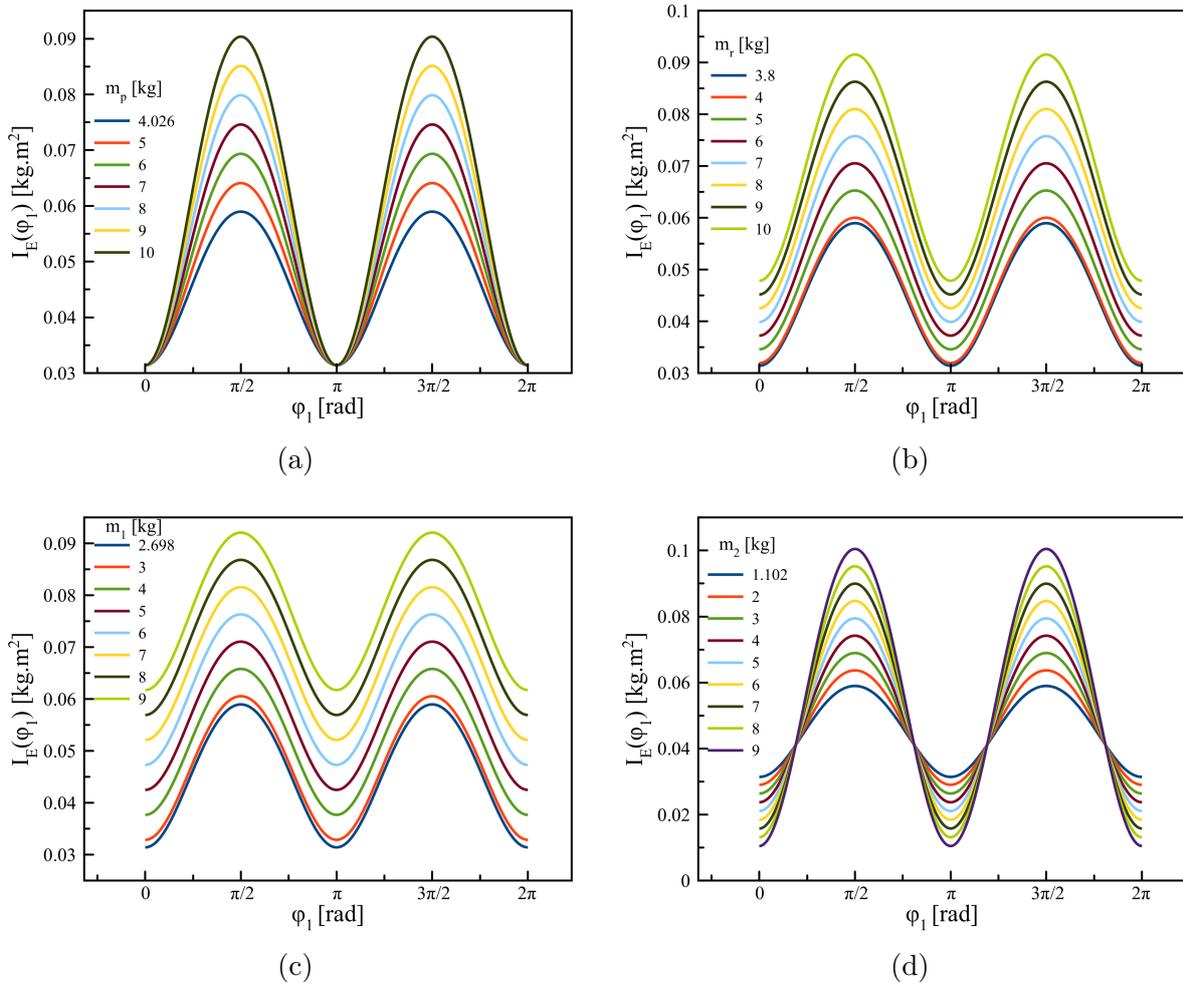


Figura 6.9 – Efeito das massas na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$: a) massa do pistão - m_p , b) massa da biela - m_r , c) massa da extremidade maior da biela - m_1 e d) massa da extremidade menor da biela - m_2 .

Por fim, analisou-se a influência do comprimento da manivela. Neste caso, percebe-se logo que o valor da inércia ultrapassa o patamar de 0,1 e aproxima-se de 0,2 kg.m^2 , como mostra a Figura 6.10. Outra característica observada é que, com o aumento do comprimento da manivela, há um achatamento nos picos da resposta da inércia, demonstrando que este parâmetro consegue promover mudanças mais evidentes no seu comportamento, sendo essa peculiaridade observada de forma mais nítida na curva de 150 mm. Portanto, a partir da análise paramétrica pode-se concluir que o parâmetro mais influente no comportamento da inércia não-constante do cilindro é o comprimento da manivela. Logo, a seguir investiga-se de que forma a variação desse fator influencia na resposta dinâmica do sistema em funcionamento.

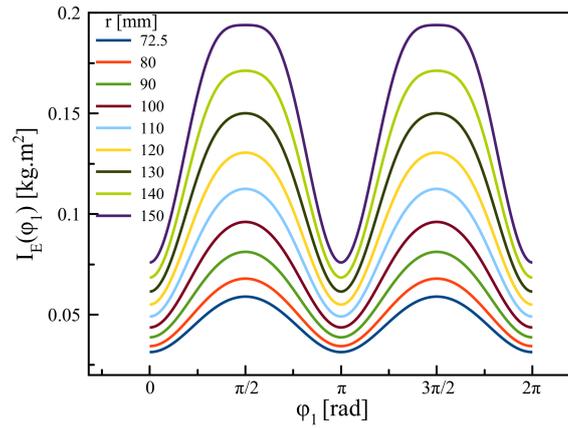


Figura 6.10 – Efeito do comprimento da manivela na inércia equivalente $I_E(\varphi_1)$.

A fim de avaliar como a variação do comprimento da manivela influencia na resposta, a Figura 6.11 apresenta os espaços de fase para valores diferentes de r . Sendo que, os parâmetros utilizados nesta simulação são $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad, $C_0 = 5000$ N.m e $C_1 = -0,5$ N.m.s. Observa-se que a amplitude aumenta à medida que o comprimento da manivela aumenta, e que o espaço de fase muda de forma. Apesar do sistema ainda apresentar um comportamento periódico, a influência da não-linearidade é evidente nos espaços de fase, que é deformado devido ao aparecimentos de outros componentes de frequência na resposta.

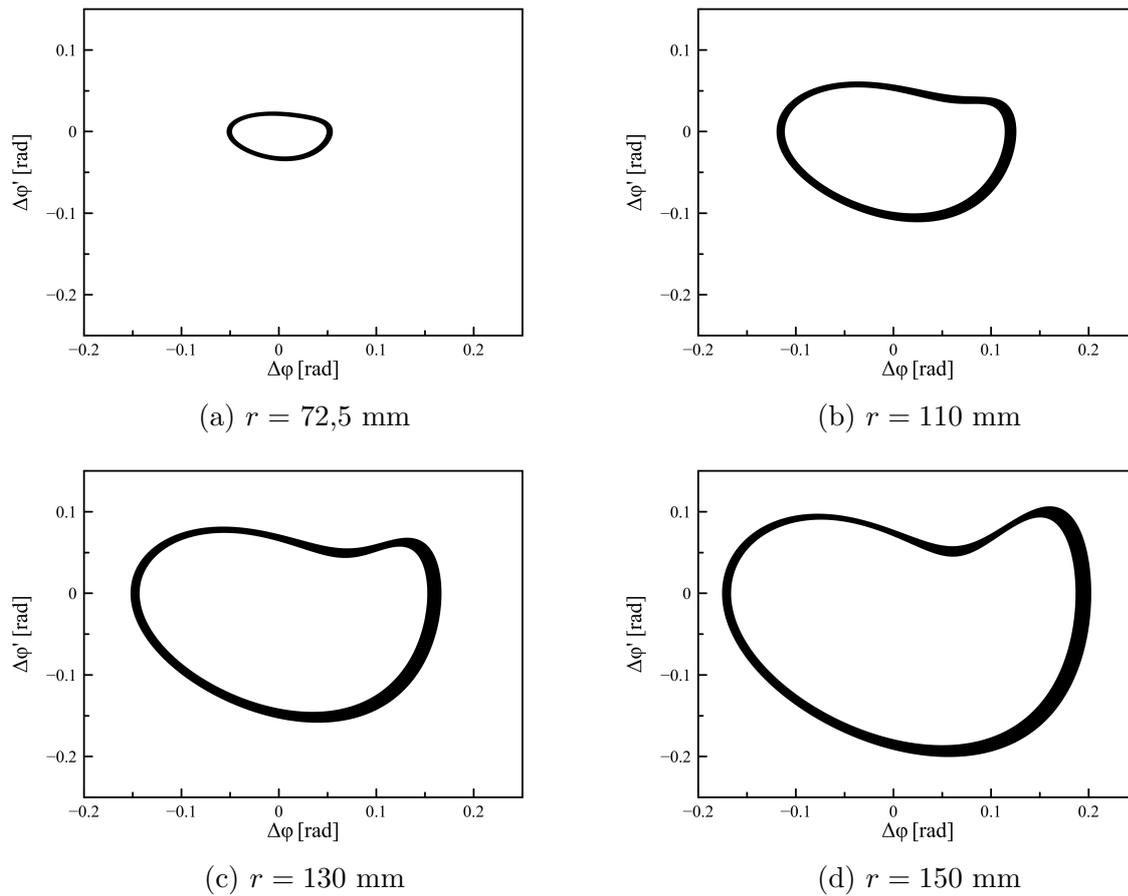


Figura 6.11 – Espaços de fase para distintos valores do comprimento da manivela.

A Figura 6.12 apresenta os espaços de fase para diferentes valores de rigidez e r nas situações de máxima amplitude de vibração. Verificou-se que apesar do aumento do comprimento da manivela, tanto a amplitude máxima como velocidade máxima sofrem pequenas alterações que não são significativas. Os valores de C_0 usados nas simulações foram 11000, 2500 e 850 N.m, os quais estão relacionados a cada valor de rigidez na ordem decrescente.

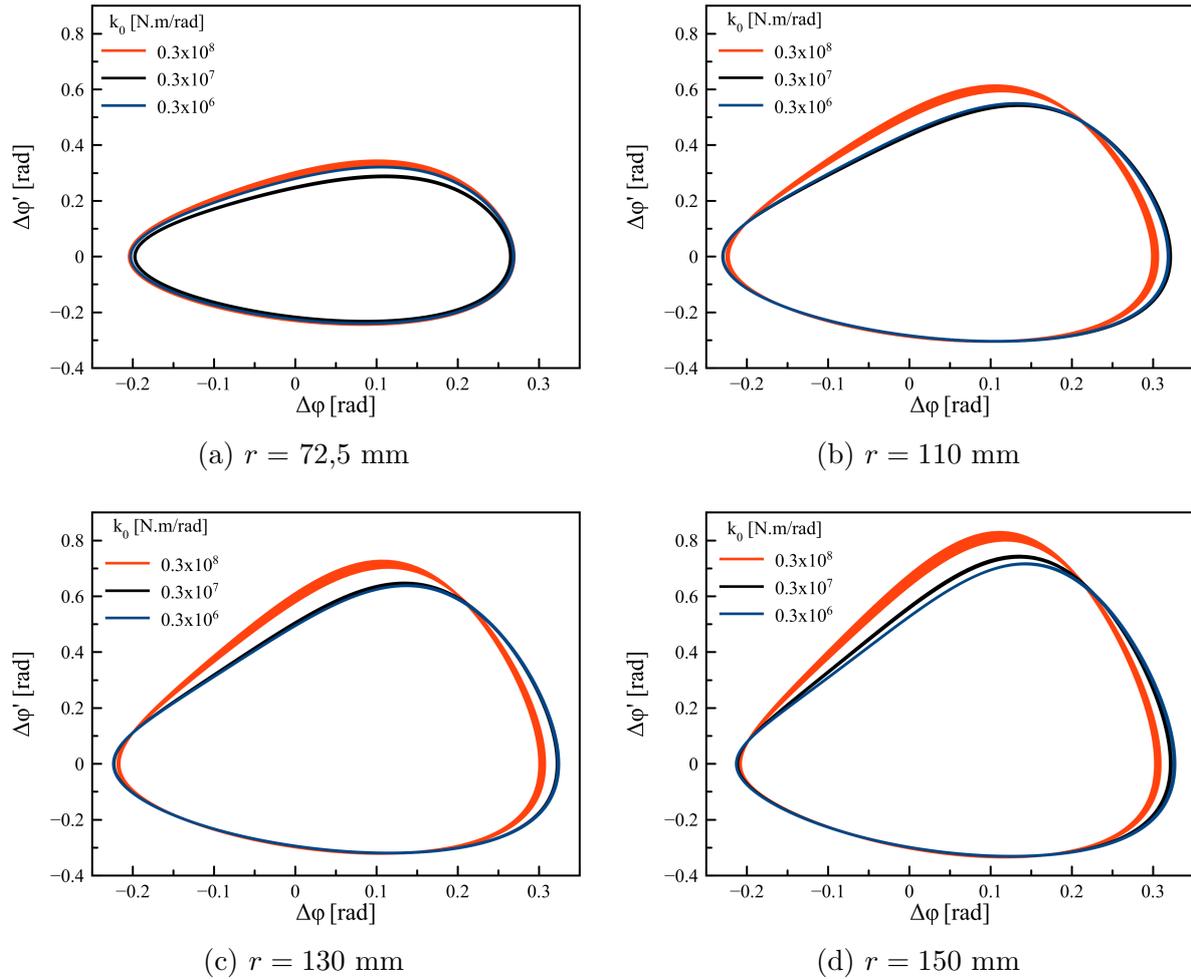


Figura 6.12 – Espaços de fase para diferentes valores do comprimento da manivela avaliados nas condições de amplitude máxima.

6.1.4 Resultados com excitação harmônica

Na seção anterior foram analisados diversos casos e nenhuma situação apresentou comportamento complexo, mostrando que a vibração torcional ocasionada pela variação de inércia combinada com a não-linearidade considerada não é suficiente para induzir respostas mais complexas. No entanto, como outros fenômenos físicos podem aumentar os níveis de vibração torcional do sistema, como por exemplo um desbalanceamento, decidiu-se nesta seção avaliar a influência da adição de um torque harmônico na resposta do sistema, sendo a frequência de excitação igual à frequência de rotação do eixo. Esta análise tem por finalidade uma abordagem mais conceitual do modelo dinâmico, visando identificar quais conjuntos de parâmetros são capazes de desencadear comportamentos complexos em três casos distintos de rigidez ($k_0 = 0,3 \times 10^8, 0,3 \times 10^7, 0,3 \times 10^6 \text{ N.m/rad}$) nos pontos de críticos de operação ($C_0 = 11000, 2500, 850 \text{ N.m}$). Todos os resultados desta seção foram obtidos a partir da integração numérica com passo $h = 0,00418879$ e com as mesmas condições iniciais utilizadas nas simulações anteriores ($\varphi_1(0) = 0, \varphi_1'(0) = 0,5 \text{ rad}$, $\varphi_2(0) = 0$ e $\varphi_2'(0) = 0$). A Figura 6.13 apresenta o primeiro caso, onde é avaliada

a resposta do sistema para diferentes valores da amplitude do torque harmônico, com $C_0 = 11000$ N.m e uma rigidez torcional de $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad.

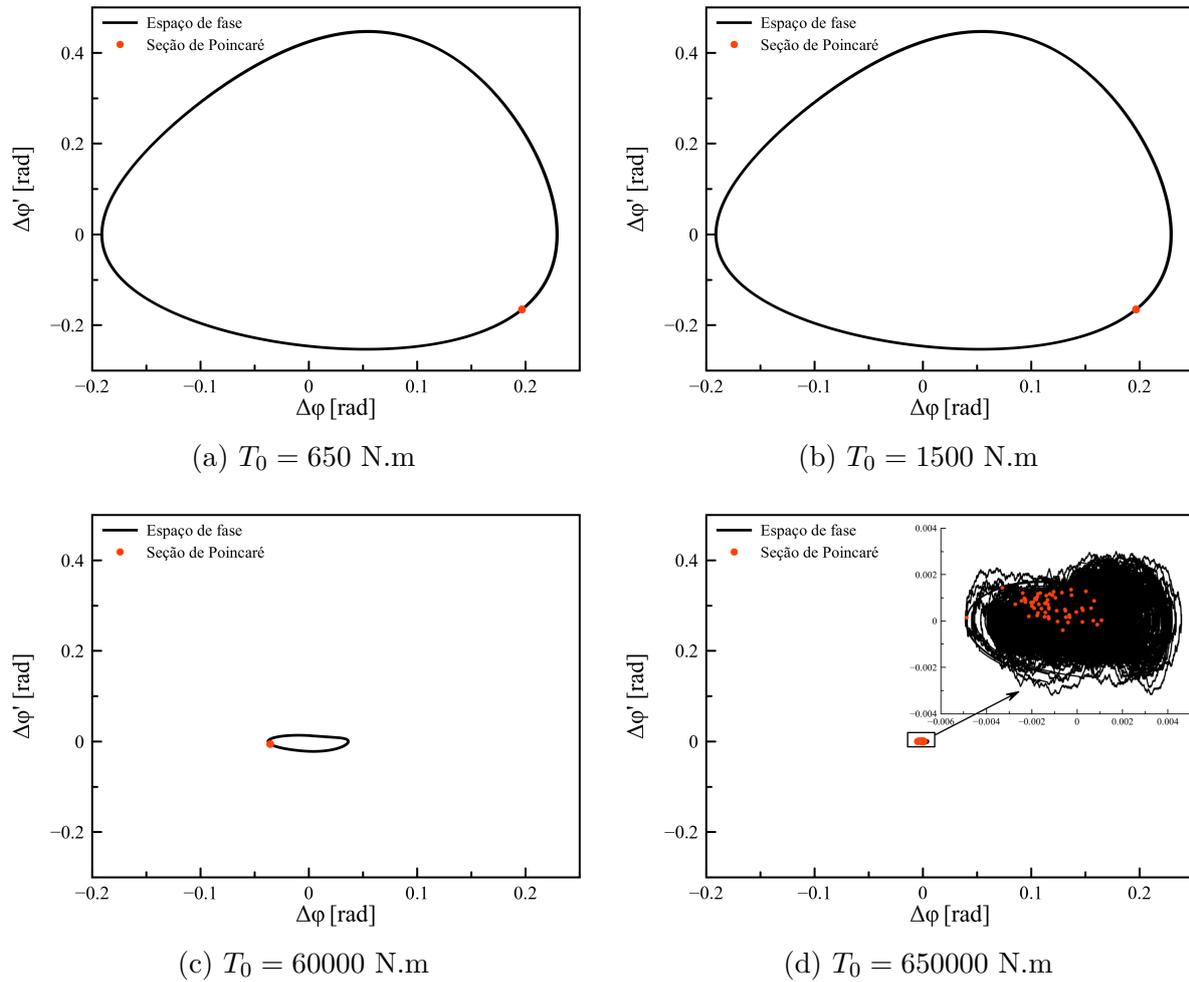


Figura 6.13 – Respostas do sistema sob a ação de diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad e $C_0 = 11000$ N.m.

Para os valores de $T_0 = 650, 1500$ e 60000 N.m (Figuras 6.13a, 6.13b e 6.13c), verificam-se respostas periódicas, visto que os espaços de fase apresentam curvas fechadas e as seções de Poincaré correspondentes apresentam somente um ponto no plano, mostrando que a inclusão do torque não aumenta a complexidade da resposta. No entanto, para $T_0 = 650000$ N.m (Figura 6.13d), a resposta apresenta um comportamento não periódico como pode ser visto em detalhes quando a imagem é ampliada, com o espaço de fase mostrando órbitas que não se fecham e a seção de Poincaré é formada por um conjunto de pontos, tal resposta pode ser caótica.

No segundo caso, a Figura 6.14 apresenta os resultados para $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m avaliados em quatro amplitudes do torque harmônico ($T_0 = 650, 1500, 60000$ e 650000 N.m).

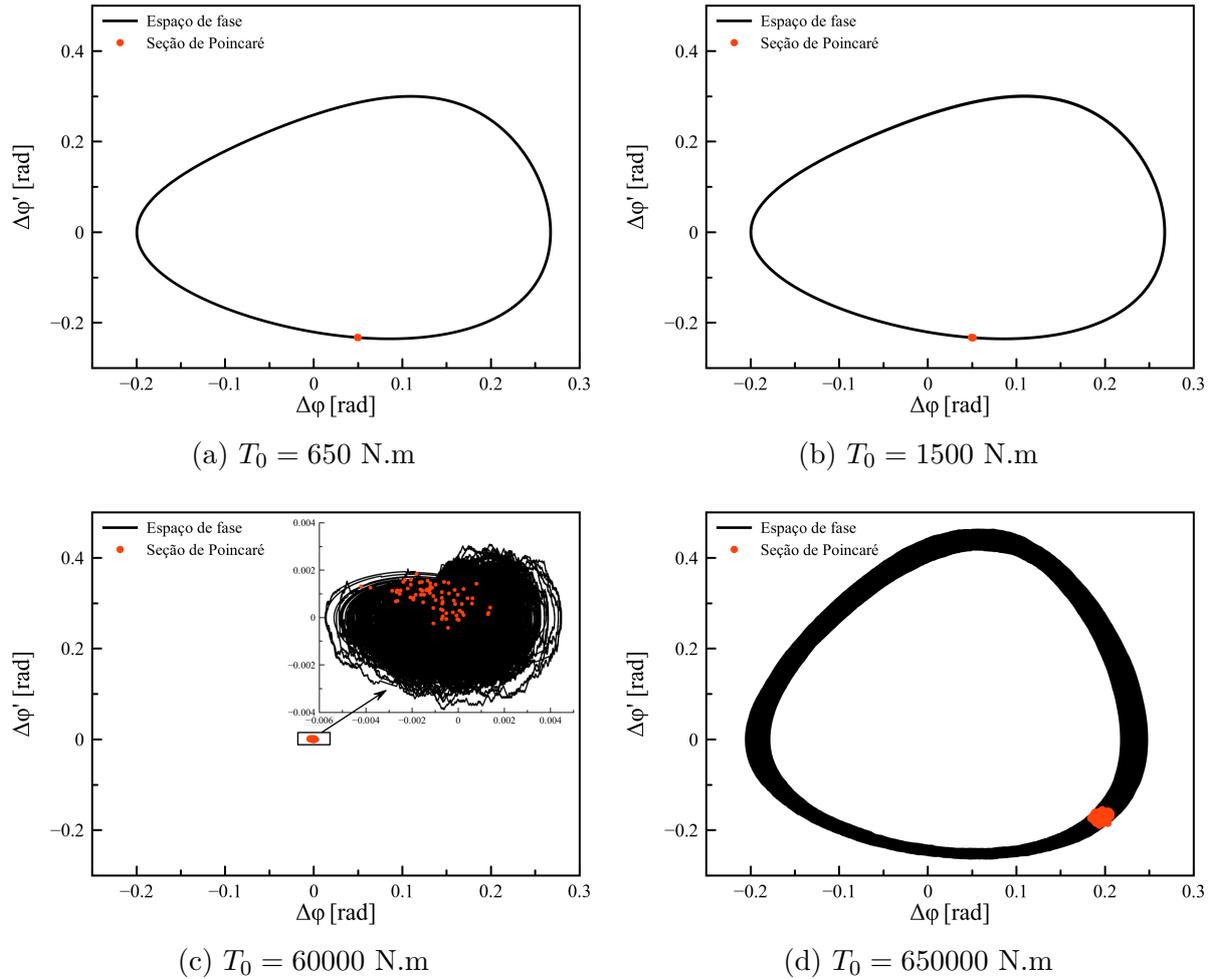


Figura 6.14 – Respostas do sistema sob ação de diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.

Assim como no primeiro caso, as respostas apresentadas pelo sistema com amplitude do torque até 1500 N.m (Figuras 6.14a e 6.14b) são periódicas. Porém, quando se aumenta T_0 para 60000 e 650000 N.m (Figuras 6.14c e 6.14d), tem-se respostas mais complexas como mostram seus espaços de fase e seções de Poincaré, sendo este resultado também observado para $k_0 = 0,3 \times 10^8$ N.m/rad, além disso, o comportamento de maior complexidade, Figura 6.14c, acarretou uma diminuição expressiva nas amplitudes máximas da resposta, evidenciando que a rigidez do sistema ainda não permite que comportamentos mais complexos sejam realçados.

O sistema com a adição da excitação harmônica resultou no aparecimento de respostas complexas para determinados valores de amplitude do torque, como foram vistos nos dois casos anteriores. Neste terceiro caso, para analisar de forma global as possíveis respostas que o sistema pode apresentar, construiu-se um diagrama de bifurcação (Figura 6.15), no qual tem-se o deslocamento angular relativo ($\Delta\varphi$) para diferentes valores da amplitude do torque harmônico (T_0). Este diagrama foi feito considerando-se a mesma condição inicial para cada amplitude do forçamento, sendo que foram desconsiderados os primeiros 9000 pontos. A partir da Figura 6.15, observa-se que existem regiões periódicas

(0 a $1,2 \times 10^5$ N.m) e possíveis regiões caóticas ($1,2 \times 10^5$ a 10^6 N.m) que são representadas por uma nuvem de pontos.

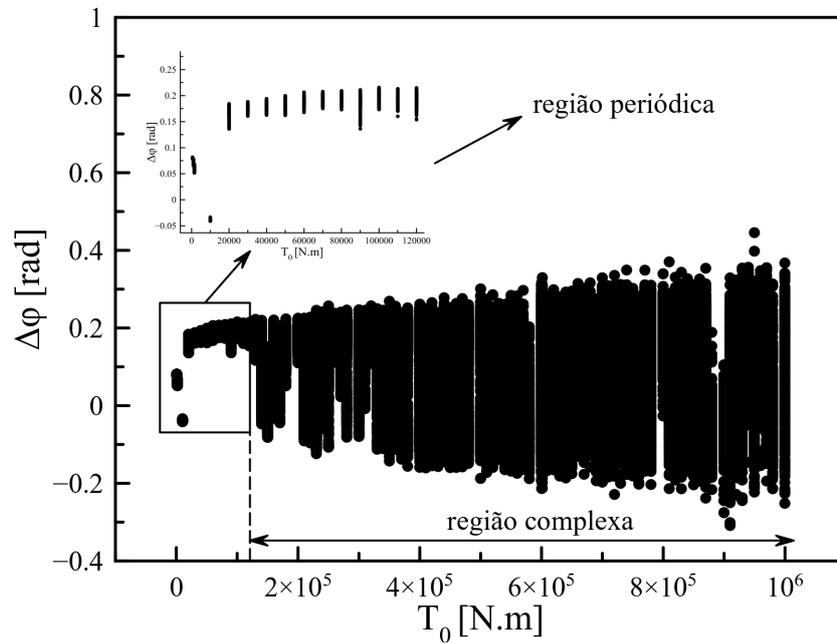


Figura 6.15 – Diagrama de bifurcação para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.

A seguir são apresentadas as resposta do sistema sob a atuação do torque harmônico com quatro amplitudes diferentes ($T_0 = 650, 1500, 60000$ e 650000 N.m) para uma rigidez torcional $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m, conforme mostra a Figura 6.16.

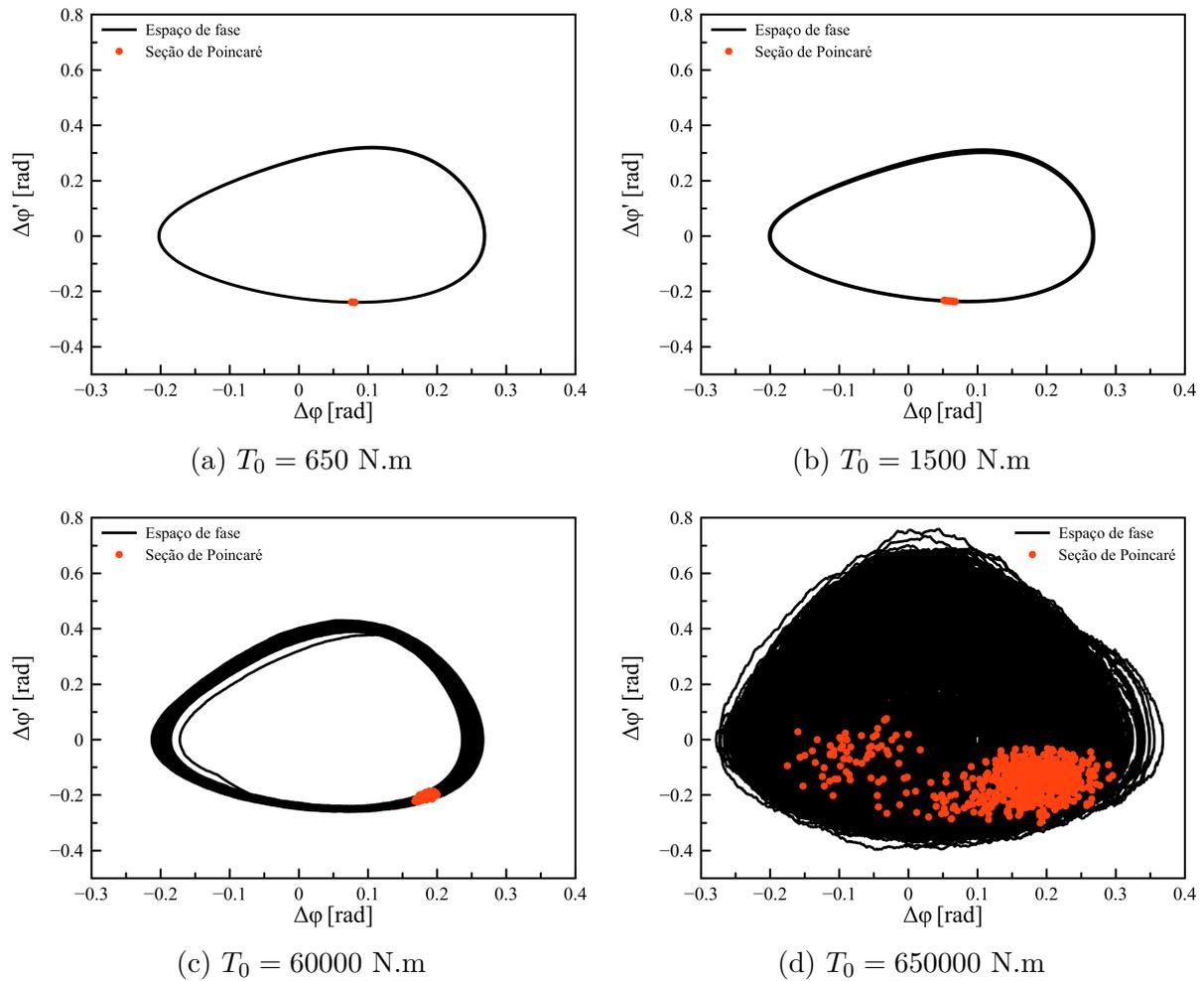


Figura 6.16 – Respostas do sistema sob diferentes valores de T_0 para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.

Para as amplitudes do torque harmônico de 650 e 1500 N.m (Figuras 6.16a e 6.16b), tem-se respostas periódicas, fato que se repetiu nos dois casos anteriores ($k_0 = 0,3 \times 10^8$ e $0,3 \times 10^7$ N.m/rad). Com $T_0 = 60000$ N.m (Figura 6.16c), um comportamento não periódico começa a se desenvolver, e em 650000 N.m (Figura 6.16d) apresenta uma resposta de maior complexidade que pode ser caótica, por ter um espaço de fase que preenche o plano com trajetórias que não se repetem, além de uma seção de Poincaré com uma nuvem de pontos. Ressalta-se também que, como comentado anteriormente, a diminuição da rigidez juntamente com a presença de uma fonte injetora de potência (excitação harmônica) pode induzir que o eixo do compressor desenvolva comportamentos mais complexos conforme foram apresentados nos três casos de rigidez torcional ($k_0 = 0,3 \times 10^8$, $0,3 \times 10^7$ e $0,3 \times 10^6$ N.m/rad).

Uma outra configuração possível também pode aumentar a complexidade da resposta do eixo do compressor. Quando se aumenta a não-linearidade da inércia variável através do aumento do valor do comprimento da manivela para $r = 150$ mm, e em conjunto com uma amplitude do torque harmônico de $T_0 = 650000$ N.m, para uma rigidez de $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad com $C_0 = 850$ N.m referente à zona crítica, tem-se um comportamento

que pode ser caótico, como mostra a Figura 6.17.

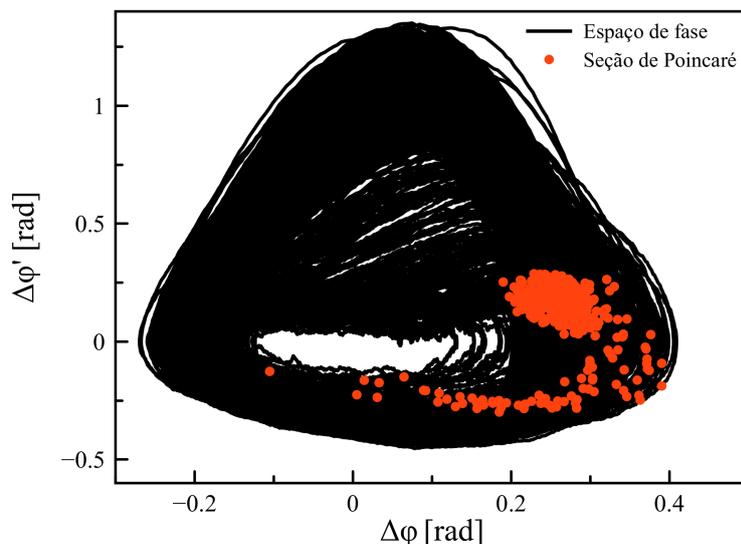


Figura 6.17 – Resposta do sistema com $T_0 = 650000$ N.m e $r = 150$ mm para $k_0 = 0,3 \times 10^6$ N.m/rad e $C_0 = 850$ N.m.

A inclusão do torque harmônico pode gerar comportamentos complexos dependendo da magnitude do torque (T_{har}) para diferentes combinações de parâmetros. Desta forma, a realização de uma análise global do comportamento do sistema se faz necessário para garantir um funcionamento adequado do eixo do compressor. Ressalta-se ainda que, o comportamento caótico somente é confirmado através de ferramentas quantitativas, tais como Expoente de Lyapunov e Dimensão Fractal, portanto, os resultados obtidos são apenas indicativos que o sistema pode apresentar caos nessas circunstâncias.

6.2 Resultados do modelo de 5 GDL

Nesta seção são analisadas as respostas do eixo de um compressor alternativo com quatro cilindros em série, com objetivo de determinar se a influência da inércia variável do cilindro pode resultar em comportamentos complexos quando há mais cilindros, visto que, como foi discutido na seção anterior, somente esta inércia como fonte de vibração não foi capaz de desencadear em respostas não periódicas. Esta análise se divide em duas partes, na primeira verifica-se a resposta do sistema com o aumento da não-linearidade da inércia ($I_E(\varphi_n)$) através do aumento do comprimento da manivela (r), e na segunda etapa adiciona-se um torque harmônico em conjunto com as configurações da etapa inicial. O eixo apresenta rigidez torcional $k_0 = k_1 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, e amortecimento torcional $c_1 = c_0$ igual ao do modelo de 2 GDL, os demais parâmetros estão descritos na Tabela 2. As equações governantes (equações 5.49) foram integradas numericamente em τ com passo $h = 0,00418879$, sendo as condições iniciais dadas por: $\varphi_1 = 0$, $\varphi'_1 = 0,5$ rad, $\varphi_2 = 0$, $\varphi'_2 = 0,5$ rad, $\varphi_3 = 0$, $\varphi'_3 = 0,5$ rad, $\varphi_4 = 0$, $\varphi'_4 = 0,5$ rad, $\varphi_5 = 0$ e $\varphi'_5 = 0,5$ rad.

O eixo do compressor agora tem quatro cilindros, logo, este é subdividido em quatro partes. Para analisar a vibração torcional em cada uma dessas partes, os deslocamentos angulares relativos são descritos por $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n+1}$ com $n = 1, 2, 3, 4$. De início, o sistema é submetido ao conjunto de parâmetros com $C_0 = 2500$ N.m e com $r = 72,5$ mm. A Figura 6.18 apresenta as respostas do sistema nestas condições.

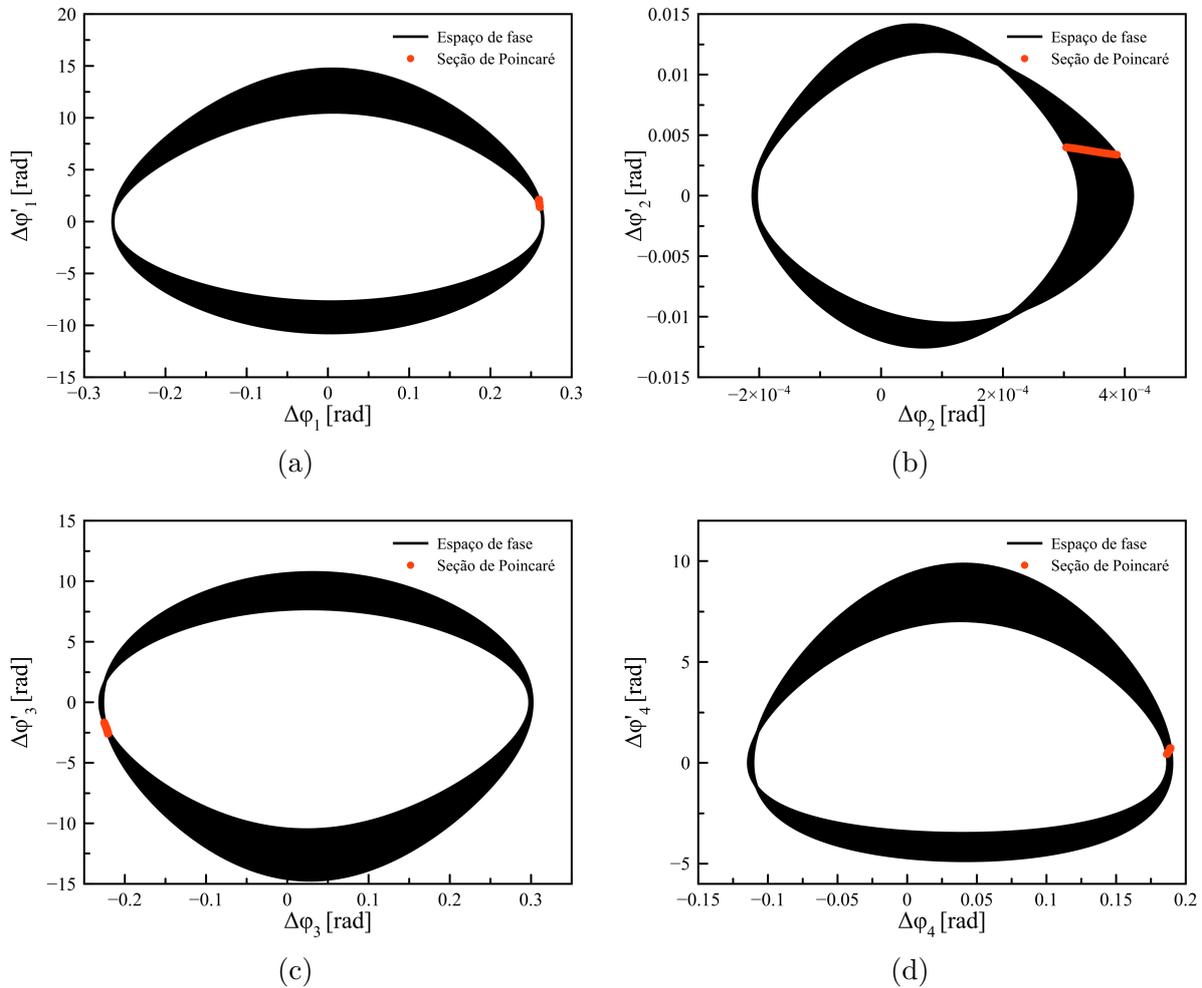


Figura 6.18 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 72,5$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.

Verifica-se que o eixo apresenta comportamento não periódico com o aumento do número de GDL e cilindros com inércia variável, como mostra a Figura 6.18. Apesar que as seções de Poincaré apresentam mais de um ponto no plano, porém o comportamento não apresenta muita complexidade, desta forma, esta inércia não exerce uma influência capaz de intervir de forma direta no desenvolvimento de comportamentos complexos. A seguir, a Figura 6.19 mostra as respostas do sistema quando aumenta-se a não-linearidade da inércia $I_E(\varphi_n)$ com o aumento do comprimento da manivela para $r = 150$ mm.

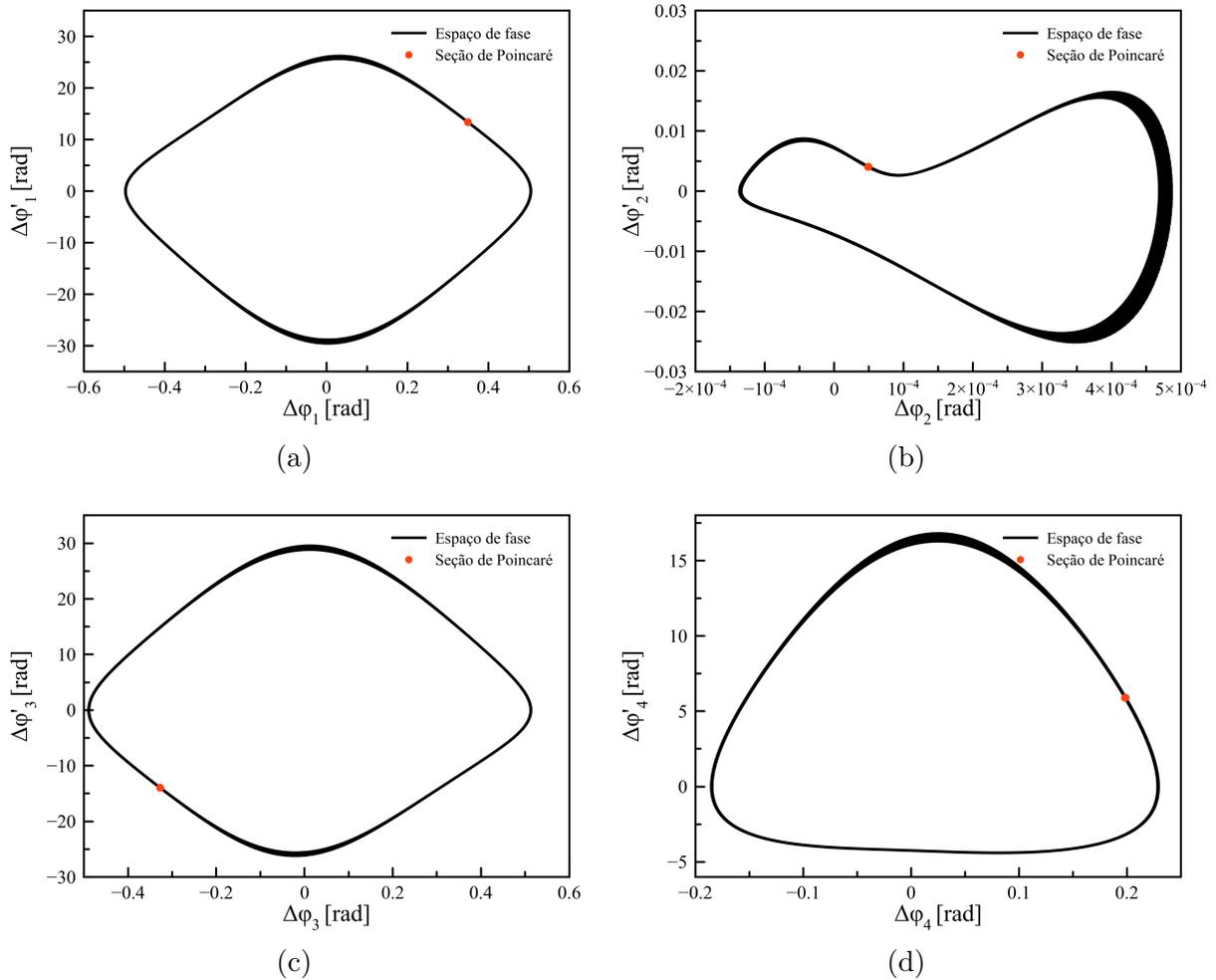


Figura 6.19 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 150$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad e $C_0 = 2500$ N.m.

Nesses resultados é possível perceber a influência do aumento da não-linearidade da inércia com a deformação geométrica dos espaços de fase, no entanto, os comportamentos permanecem no regime periódico. Mostrando que a não-linearidade considerada junto com a vibração torcional causada pela não uniformidade da inércia não são capazes de gerar comportamentos mais complexos. A seguir, a Figura 6.20 apresenta os resultados para um torque harmônico que foi acoplado ao eixo, com amplitude de $T_0 = 60000$ N.m, para $C_0 = 2500$ N.m e $r = 72,5$ mm.

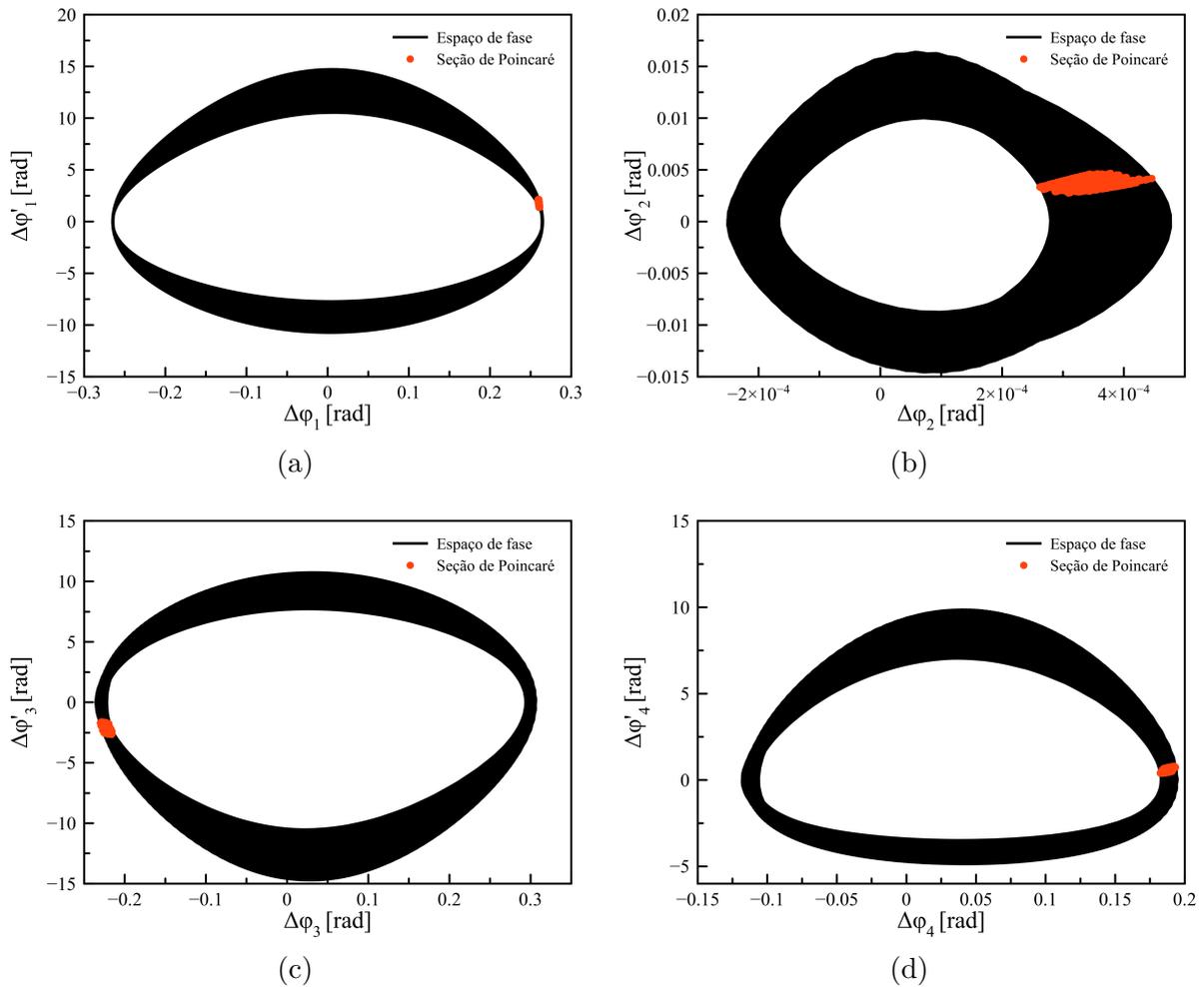


Figura 6.20 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 72,5$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, $C_0 = 2500$ N.m e $T_0 = 60000$ N.m.

Nessa configuração os comportamentos não periódicos começam a surgir, como pode ser visto nas Figuras 6.20c e 6.20d, embora a resposta na Figura 6.20b apresenta-se parada. As seções de Poincaré apresentam um conjunto de pontos, indicando que o sistema pode desenvolver uma resposta caótica nessa situação. Este resultado também foi registrado no modelo de 2 GDL, porém quando se aumenta o comprimento da manivela para $r = 150$ mm e com amplitude do torque harmônico igual, os resultados são diferentes, conforme apresenta a Figura 6.21.

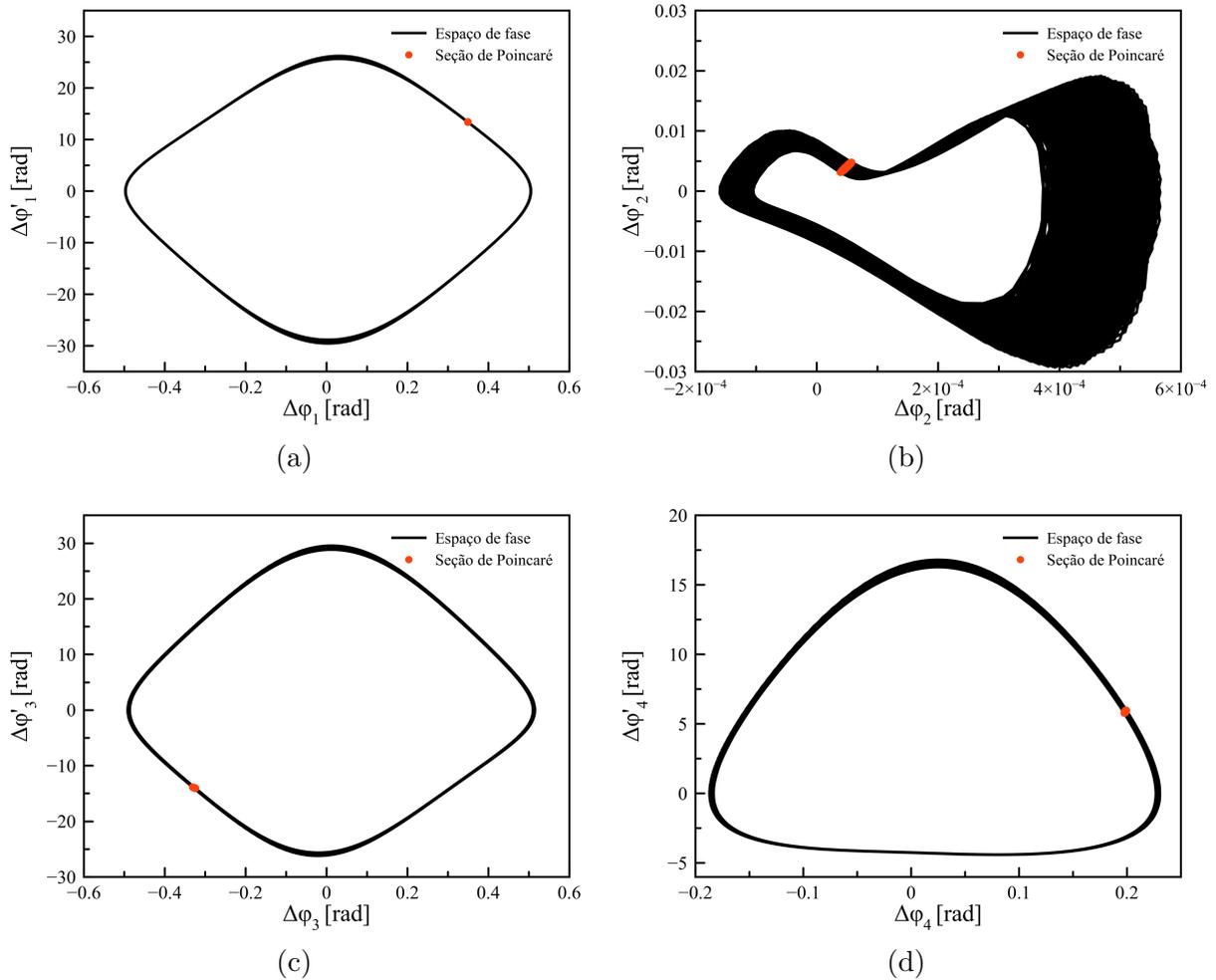


Figura 6.21 – Respostas do eixo com quatro cilindros para: $r = 150$ mm, $k_0 = 0,3 \times 10^7$ N.m/rad, $C_0 = 2500$ N.m e $T_0 = 60000$ N.m.

Com esse conjunto de parâmetros o sistema apresenta comportamentos periódicos (Figuras 6.21a, 6.21c e 6.21d), algo que a princípio não é intuitivo pois, a inércia do cilindro tem seus efeitos amplificados pelo aumento do comprimento da manivela, e uma excitação harmônica adicional insere potência no sistema. Por outro lado, a Figura 6.21b mostra um comportamento não periódico pelas deformações geométricas apresentadas no espaço de fase e, se as condições de construção da seção de Poincaré fossem alteradas, provavelmente existiria uma nuvem de pontos na região direita do plano. Este resultado, mais uma vez reforça a necessidade de explorar sistemas não-lineares em diversos contextos, visto que, estes tipos de sistemas apresentam uma grande variedade de respostas possíveis, além de que, em muitos casos não apresentam respostas intuitivas.

7 Conclusão

No presente trabalho fez-se uma análise dinâmica não-linear do eixo de um compressor alternativo de duplo-efeito, na qual usou-se uma abordagem qualitativa para propor uma compreensão do comportamento global do sistema nas condições críticas de operação.

O eixo do compressor foi representado por dois modelos não-lineares, sendo um de 2 GDL (1 cilindro) e outro de 5 GDL (4 cilindros). A inércia do conjunto rotativo manivela-biela-pistão é levada em consideração e obedece uma função dependente da rotação do ângulo da manivela, fazendo com que este modelo possa descrever com mais realidade os fenômenos vibratórios deste sistema. Desta forma, a inclusão deste termo faz com que as equações governantes sejam não-lineares, diferindo da maioria dos modelos utilizados na literatura que são lineares e usam a simplificação de inércia constante do cilindro.

Através da aplicação das ferramentas qualitativas (espaço de fase, seção de Poincaré e diagrama de bifurcação) na análise dinâmica foi possível avaliar os diferentes comportamentos apresentados pelo sistema com 2 GDL. O eixo do compressor apresentou respostas periódicas para diferentes conjuntos de parâmetros, até mesmo em situações críticas de operação e quando aumentou-se a não-linearidade da inércia com o aumento do tamanho da manivela, mostrando que a inércia não-constante do cilindro em conjunto com a não-linearidade considerada não são capazes de promover comportamentos complexos significativos. No entanto, a influência do aumento da não-linearidade ficou evidente na resposta do sistema, conforme verificado a partir da deformação dos espaços de fase como consequência do aparecimento de diferentes componentes de frequência na resposta. Quando o eixo foi submetido à uma excitação harmônica adicional, as respostas apresentaram uma maior variedade de comportamentos. Observou-se respostas periódicas e complexas, sendo que estas últimas apareceram à medida que a amplitude do torque harmônico e a não-linearidade da inércia aumentaram.

Os resultados do eixo do compressor com quatro cilindros (5 GDL) mostraram que com o aumento do número de GDL e cilindros com inércia variável podem surgir comportamentos não periódicos, porém estas respostas não apresentam muita complexidade, embora sejam notadamente não-lineares. O aumento da não-linearidade da inércia influencia na deformação geométrica dos espaços de fase, mas as respostas ainda permanecem no regime periódico, indicando que esta inércia não-constante não é capaz de desencadear

em comportamentos complexos nessas condições. Com a introdução do torque harmônico no sistema, obtiveram-se comportamentos não periódicos, como também foi mostrado para o modelo de 2 GDL. No entanto, quando se aumentou a não-linearidade da inércia em conjunto com a excitação harmônica, o sistema apresentou respostas periódicas e não periódicas. Este resultado reafirma que sistemas não-lineares precisam ser explorados nas mais diferentes condições de operação, visto que podem-se obter respostas que muitas vezes não são intuitivas. Embora estes resultados indiquem que comportamentos caóticos possam ser desencadeados em ambos os modelos, é necessário a presença de ferramentas quantitativas para comprovar de fato a existência de respostas caóticas.

7.1 Trabalhos futuros

Analisando o contexto desta pesquisa e sua extensão, há muitas propostas de continuidade que podem ser feitas para complementar este estudo. Logo, um ponto de implementação é o emprego de ferramentas quantitativas na análise dinâmica dos dois modelos, como por exemplo o Expoente de Lyapunov para assegurar que existem comportamentos caóticos quando se adiciona uma excitação harmônica ao eixo do compressor.

Outra sugestão é adotar um torque mais realista e que melhor descreve as características elétricas e magnéticas do torque desenvolvido pelo motor elétrico, visto que usou-se uma função linear para representar seu comportamento.

Seria interessante também a proposição de um modelo contínuo não-linear para descrever as vibrações torcionais e flexurais do eixo, no qual as equações governantes são solucionadas via MEF. Ressalta-se que pode-se fazer um estudo de caso para verificar em que situações um modelo discreto consegue retratar de forma eficiente a dinâmica do sistema, e comparar os resultados com a solução numérica do modelo contínuo.

Uma outra proposta é inserir uma rigidez não-linear no eixo de acoplamento entre o cilindro e a carga no modelo de 2 GDL. E a partir disso, verificar se comportamentos complexos são desenvolvidos em conjunto com a não-linearidade da inércia variável do cilindro nas regiões críticas de operação.

Pode-se também investigar o acoplamento de modos não-lineares, visto que, ao contrário do que acontece com os modos de sistemas lineares que não apresentam nenhuma interação mútua, os modos não-lineares podem compartilhar energia mecânica em determinadas ocasiões, e podem causar respostas ressonantes fora das zonas de operação. Estes modos não-lineares são estudados por diversos autores tais como Nayfeh e Nayfeh (1994); Rosenberg (1960), Rosenberg (1962), Rosenberg (1966); King (2016).

Referências

- APREA, C. et al. Determination of the compressor optimal working conditions. *Applied Thermal Engineering*, v. 29, n. 10, p. 1991–1997, 2009. ISSN 13594311. Citado na página 12.
- BLOCH, H. P.; GEITNER, F. K. *Compressors: How to Achieve High Reliability & Availability*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2012. Citado 2 vezes nas páginas xii e 21.
- BLOCH, H. P.; GODSE, A. *Compressors and modern process applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado 5 vezes nas páginas xii, 17, 20, 22 e 23.
- BLOCH, H. P.; HOEFNER, J. J. *Reciprocating compressors: operation and maintenance*. [S.l.]: Elsevier, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 1, 11, 19 e 20.
- BORREMANS, M. *Pumps and compressors*. [S.l.]: John Wiley & Sons Limited, 2019. Citado 3 vezes nas páginas xii, 15 e 23.
- BOYSAL, A.; RAHNEJAT, H. Torsional vibration analysis of a multi-body single cylinder internal combustion engine model. *Applied Mathematical Modelling*, v. 21, n. 8, p. 481–493, 1997. ISSN 0307904X. Citado na página 9.
- BROWN, R. *Compressors: Selection and Sizing*. [S.l.]: Elsevier Science, 2011. ISBN 9780080476650. Citado 10 vezes nas páginas xii, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 22.
- BRUN, K.; KURZ, R. (Ed.). *Compression Machinery for Oil and Gas*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2019. 627 p. ISBN 9780128146835. Citado 8 vezes nas páginas xii, 11, 13, 14, 16, 17, 18 e 23.
- BRUSA, E. et al. Torsional vibration of crankshafts: Effects of non-constant moments of inertia. *Journal of Sound and Vibration*, v. 205, n. 2, p. 135–150, 1997. ISSN 0022460X. Citado na página 8.
- CHARLES, P. et al. Detecting the crankshaft torsional vibration of diesel engines for combustion related diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 321, n. 3-5, p. 1171–1185, 2009. ISSN 0022460X. Citado na página 8.
- DENTON, T. A. et al. Fascinating rhythm: a primer on chaos theory and its application to cardiology. *American heart journal*, Elsevier, v. 120, n. 6, p. 1419–1440, 1990. Citado na página 25.
- DOUGHTY, S. *Mechanics of machines*. New York: John Wiley a. Sons, 1988. Citado 6 vezes nas páginas 3, 36, 37, 44, 47 e 48.
- DREW, S. J.; STONE, B. J. Torsional (rotational) vibration: Excitation of small rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, v. 201, n. 4, p. 437–463, 1997. ISSN 0022460X. Citado na página 6.

- EL-SAYED, A. T.; BAUOMY, H. S. Passive and active controllers for suppressing the torsional vibration of multiple-degree-of-freedom system. *JVC/Journal of Vibration and Control*, v. 21, n. 13, p. 2616–2632, 2015. ISSN 17412986. Citado na página 7.
- FEIGENBAUM, M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier Science, v. 7, p. 16–39, 1983. ISSN 0167-2789. Citado na página 25.
- GIAMPAOLO, T. *Compressor handbook: principles and practice*. [S.l.]: The Fairmont Press, Inc., 2010. Citado 8 vezes nas páginas xii, 11, 12, 17, 20, 21, 22 e 23.
- GRASSO, F. et al. New harmonics current mitigation technique in induction motor driving reciprocating compressor. In: *1st IEEE International Symposium on Systems Engineering, ISSE 2015*. Dept. of Information Engineering, University of Firenze, Via S. Marta, 3, Firenze, (FI), 50139, Italy: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015. p. 82–88. Citado na página 5.
- GREBOGI, C. et al. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 7, n. 1-3, p. 181–200, 1983. Citado na página 28.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983. Citado na página 28.
- HAKEN, H. Order in chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 52, n. 1-3, p. 635–652, 1985. Citado na página 24.
- HÉNON, M. A Two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, p. 69–77, 1976. Citado na página 28.
- HILBORN, R. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- HU, K. et al. Computational analysis for dynamic response of a rotating shaft on flexible support structure with clearances. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, v. 267, n. 1, p. 1–28, oct 2003. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X02013925>>. Citado na página 9.
- HUANG, Y. et al. Non-linear torsional vibration characteristics of an internal combustion engine crankshaft assembly. *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition)*, v. 25, n. 4, p. 797–808, 2012. ISSN 10009345. Citado 6 vezes nas páginas 1, 2, 3, 9, 31 e 44.
- INMAN, D. J. *Engineering vibration*. 3. ed. New Jersey: Pearson Education, Inc., 2008. Citado na página 39.
- KANG, Y. et al. Modal analyses and experiments for engine crankshafts. *Journal of Sound and Vibration*, v. 214, n. 3, p. 413–430, 1998. ISSN 0022460X. Citado na página 6.
- KING, M. E. An Energy-Based Approach to Computing Resonant Nonlinear Normal Modes. *Journal of Applied Mechanics*, v. 63, n. September 1996, p. 810–819, 2016. Citado na página 66.
- LEVECQUE, N. et al. Vibration reduction of a single cylinder reciprocating compressor based on multi-stage balancing. *Mechanism and Machine Theory*, v. 46, n. 1, p. 1–9, 2011. ISSN 0094114X. Citado na página 7.

LI, Q. Torsional vibration of multi-step non-uniform rods with various concentrated elements. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, v. 260, n. 4, p. 637–651, feb 2003. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X02010106>>. Citado na página 10.

LV, B. et al. An indirect torsional vibration receptance measurement method for shaft structures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 372, p. 11–30, 2016. ISSN 10958568. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2016.02.020>>. Citado na página 6.

MAY, R. M. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 186, n. 4164, p. 645–647, 1974. Citado na página 2.

MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976. Citado na página 25.

METALLIDIS, P.; NATSIAVAS, S. Linear and nonlinear dynamics of reciprocating engines. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Pergamon, v. 38, n. 5, p. 723–738, jul 2003. ISSN 0020-7462. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746201001299>>. Citado 9 vezes nas páginas 1, 3, 9, 30, 31, 34, 37, 40 e 44.

MOBLEY, R. K. *Fluid power dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

MOON, F. C. *Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied scientists and engineers*. New York: John Wiley & Sons, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 26 e 28.

MOON, F. C. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 28.

MORILLO, A. H. V. *Dinâmica, Vibrações Torcionais e Fadiga em Compressores Alternativos de Duplo-Efeito*. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas. Citado na página 36.

MOURELATOS, Z. P. A crankshaft system model for structural dynamic analysis of internal combustion engines. *Computers and Structures*, v. 79, n. 20-21, p. 2009–2027, 2001. ISSN 00457949. Citado na página 10.

NAYFEH, A.; BALACHANDRAN, B. Modal interactions in dynamical and structural systems. *Applied Mechanics Reviews*, v. 42, n. 11, p. 175–201, 1989. Cited By 255. Citado na página 2.

NAYFEH, A. H.; NAYFEH, S. A. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, v. 116, n. 1, p. 129–136, 1994. ISSN 15288927. Citado na página 66.

ÖSTMAN, F.; TOIVONEN, H. T. Active torsional vibration control of reciprocating engines. *Control Engineering Practice*, v. 16, n. 1, p. 78–88, 2008. ISSN 09670661. Citado na página 7.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 24.

PASRICHA, M. S.; CARNEGIE, W. D. EFFECTS OF VARIABLE TORSIONAL VIBRATIONS INERTIA ON THE DAMPED OF DIESEL ENGINE SYSTEMS. *Journal of Sound and Vibration*, v. 46, n. 3, p. 339–345, 1976. Citado na página 8.

PASRICHA, M. S.; CARNEGIE, W. D. Formulation of the equations of dynamic motion including the effects of variable inertia on the torsional vibrations in reciprocating engines, part I. *Journal of Sound and Vibration*, v. 66, n. 2, p. 181–186, 1979. ISSN 10958568. Citado na página 8.

PESCE, C. P. et al. The Lagrange Equations for Systems with Mass Varying Explicitly with Position: Some Applications to Offshore Engineering. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, n. 4, p. 496–504, 2006. ISSN 18063691. Citado na página 34.

ROSENBERG, R. M. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, v. 27, n. 2, p. 263–268, 1960. ISSN 15289036. Citado na página 66.

ROSENBERG, R. M. The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 29, n. 1, p. 7–14, 1962. Citado na página 66.

ROSENBERG, R. M. On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom. *Advances in Applied Mechanics*, v. 9, n. C, p. 155–242, 1966. ISSN 00652156. Citado na página 66.

RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 20, p. 167–192, 1971. ISSN 0010-3616,1432-0916. Citado na página 25.

SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado na página 29.

SOEDEL, W. *Sound and vibrations of positive displacement compressors*. [S.l.]: CRC press, 2006. Citado na página 13.

SONG, L. Q. et al. Design and analysis of a dual mass flywheel with continuously variable stiffness based on compensation principle. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier Ltd, v. 79, n. 174, p. 124–140, 2014. ISSN 0094114X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.004>>. Citado na página 7.

STEWART, M. *Surface Production Operations: pumps and compressors*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2018. v. 4. Citado 8 vezes nas páginas xii, xiv, 15, 16, 18, 20, 21 e 22.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. Citado na página 27.

WACHEL, J. et al. Vibrations in reciprocating machinery and piping systems. In: TEXAS A&M UNIVERSITY. TURBOMACHINERY LABORATORIES. *Proceedings of the 23rd Turbomachinery Symposium*. [S.l.], 1994. Citado na página 1.

WACHEL, J. C.; SZENASI, F. R. Analysis of torsional vibrations in rotating machinery. *Proceedings of the twenty-second Turbomachinery Symposium*, p. 127–151, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

WANG, S. et al. Modification design of large-scale compressor crankshaft based on modal and dynamic response analysis. In: *2012 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, ICQR2MSE 2012*. School of Mechanical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang, China: [s.n.], 2012. p. 843–847. Citado na página 8.

WANG, Y.; LIM, T. PREDICTION OF TORSIONAL DAMPING COEFFICIENTS IN RECIPROCATING ENGINE. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, v. 238, n. 4, p. 710–719, dec 2000. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X00930177>>. Citado na página 9.

WENZHI, G.; ZHIYONG, H. Active control and simulation test study on torsional vibration of large turbo-generator rotor shaft. *Mechanism and Machine Theory*, Pergamon, v. 45, n. 9, p. 1326–1336, sep 2010. ISSN 0094-114X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X10000728>>. Citado na página 7.

WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. Citado 2 vezes nas páginas xii e 27.

XIANG, L. et al. Torsional vibration measurements on rotating shaft system using laser doppler vibrometer. *Optics and Lasers in Engineering*, Elsevier, v. 50, n. 11, p. 1596–1601, 2012. ISSN 01438166. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2012.05.018>>. Citado na página 6.

ZHAO, J.; WANG, S. Analysis for fatigue failure causes on a large-scale reciprocating compressor vibration by torsional vibration. In: *17th International Colloquium on Mechanical Fatigue of Metals, ICMFM 2014*. Shenyang University of Technology, No.111, shenliaoxi street, Shenyang, China: Elsevier Ltd, 2014. v. 74, p. 170–174. ISBN 18777058 (ISSN). Citado na página 8.