Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Educação - FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE
Doutorado em Educação

TESE DE DOUTORADO

As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

LÍVIAM SANTANA FONTES

BRASÍLIA 2021

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Educação - FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE
Doutorado em Educação

TESE DE DOUTORADO

As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Tese apresentada à Linha de Pesquisa Educação em Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutora em Educação.

LÍVIAM SANTANA FONTES

BRASÍLIA 2021

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fontes, Líviam Santana
FF683m As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral / Líviam Santana Fontes; orientador Cleyton Hércules Gontijo. -- Brasília, 2021.
172 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Educação) -- Universidade de Brasília, 2021.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Metodologias Ativas de Aprendizagem. 3. Engenharia Didática. 4. Aulas Remotas . I. Gontijo, Cleyton Hércules, orient. II. Título.

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Educação - FE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE
Doutorado em Educação

TESE DE DOUTORADO

As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo – Orientador
Faculdade de Educação – FE
Universidade de Brasília – UnB

Prof.ª Dr. ª Sandramara Matias Chaves – Membro
Faculdade de Educação – FE
Universidade Federal de Goiás – UFG

Prof. Dr. Mateus Gianni Fonseca – Membro
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – IFB

Prof.ª Dr. ª Raquel Carneiro Dörr – Membro
Universidade de Brasília – UnB

Prof. Dr. Wescley Well Vicente Bezerra– Suplente
Universidade de Brasília – UnB

Brasília, 30 de novembro de 2021

Eu agradeço por ter pés pra caminhar
Agradeço por ter mãos pra trabalhar
Agradeço por ter mente pra pensar
Agradeço por ter voz para louvar [...]

Eu agradeço a tempestade que passou
Agradeço a bonança que chegou
Agradeço porque Deus me abençoou

Elaine Martins

DECLARAÇÃO DE ORIGINALIDADE DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO OU TESE DE DOUTORADO

Declaro que a presente tese é original, elaborada especialmente para este fim, não tendo sido apresentada para obtenção de qualquer título e que identifico e cito devidamente todas as autoras e todos os autores que contribuíram para o trabalho, bem como as contribuições oriundas de outras publicações de minha autoria.

Declaro estar ciente de que a cópia ou o plágio podem gerar responsabilidade civil, criminal e disciplinar, consistindo em grave violação à ética acadêmica.

Brasília, 30 de novembro de 2021.

Assinatura do/a discente: Líviam Santana Fontes

Programa: Programa de Pós-Graduação em Educação

Nome completo: Líviam Santana Fontes

Título do Trabalho: As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Nível: ( ) Mestrado (x) Doutorado

Orientador/a: Cleyton Hércules Gontijo

Brasília, 30 de novembro de 2021.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para esse momento, a finalização de uma pesquisa de doutorado, especialmente meus pais Wilson e Ivanete pois, como sempre, me apoiaram incondicionalmente. Meus amigos e amigas, companheiros nos momentos difíceis e na partilha de minhas conquistas, também foram fundamentais.

Ao professor Cleyton Hércules Gontijo, agradeço imensamente por suas orientações, contribuições com a tese e palavras sábias nos momentos certos. Ainda mais valioso que as orientações, foi o exemplo de educador matemático, que inspira a todos seus alunos a fazerem diferença no espaço acadêmico e profissional que atuam.

Agradeço ao professor Cristiano Alberto Muniz, que foi meu primeiro contato na Universidade de Brasília, quando me interessei pelo Doutorado em Educação dessa instituição, e me ajudou com as primeiras escritas de meu projeto. Minha amiga Roseli Araújo Barros também contribuiu muito, e sou muito grata por seus conselhos.

Sou grata pelo apoio de todos os componentes do Grupo De Estudos e Pesquisa ‘O conhecimento produzido sobre o professor e sua formação nas dissertações do Programa Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFG 2009-2014’. Participar desse Grupo Foi fundamental para minha constituição como pesquisadora, pois trouxe muitas contribuições durante todo meu processo de escrita. Agradeço em especial a professora Dalva Eterna Gonçalves Rosa, coordenadora do grupo, que me orientou no mestrado e se tornou uma grande amiga.

Agradeço a todos os integrantes do Grupo PI por compartilharem seus projetos e trabalhos, enriquecendo meus conhecimentos sobre a criatividade em matemática, e pelos trabalhos que desenvolvemos juntos.

Às professoras Liliane Campos Machado, Sandramara Matias Chaves e ao professor Mateus Gianni Fonseca, gratidão por terem dedicado tempo e energia na leitura da tese e por suas contribuições na banca de qualificação.

Meu agradecimento à Universidade Estadual de Goiás que me concedeu licença parcial no início do doutorado, ao Coordenador Elton Fialho dos Reis que autorizou o desenvolvimento da pesquisa na instituição, e a todos que contribuíram com a análise de juízes, Dalva Eterna Gonçalves Rosa, Regina

Alves Costa Fernandes, Renato Medeiros e Tiago de Lima Bento Pereira. E deixo ainda um agradecimento todo especial aos meus alunos e alunas da disciplina Cálculo I, pela generosidade de participarem da pesquisa.

RESUMO

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral é, historicamente, responsável por altos índices de reprovações e evasão, em diversos cursos de Ciências Exatas e da Natureza. Dentre as justificativas para este fato, destaca-se a metodologia de ensino inadequada, uma vez que a concepção tradicional de ensino que permeia esses cursos não atende às necessidades do atual contexto social e educacional. Considerando estes fatores, esta pesquisa apresenta uma proposta de utilização das metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a fim de contribuir para a formação crítica do indivíduo, favorecendo sua autonomia, despertando a curiosidade e estimulando tomadas de decisões. É uma pesquisa qualitativa, com aproximação ao método fenomenológico e com o objetivo avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial na perspectiva da Engenharia Didática, empregando metodologias ativas na fase de experimentação, buscando apreender as impressões dos sujeitos da pesquisa. Os sujeitos investigados foram estudantes dessa disciplina, de uma instituição pública de ensino superior, em contexto de aulas remotas, que realizam atividades preparadas e conduzidas pela própria pesquisadora, como professora da turma. Essa fase de investigação foi orientada pela Engenharia Didática, que se caracteriza por um esquema baseado nas realizações didáticas em sala de aula, e registros de estudos de caso. Com a análise das informações obtidas infere-se que a utilização de metodologias ativas, orientadas pela Engenharia Didática, oferece opções de tarefas abertas e com estratégias comunicativas para desenvolver a argumentação matemática e interpretação de resultados, oportuniza ao estudante tempo para refletir sobre seus resultados e apresentar respostas elaboradas e fundamentadas e traz informações sobre os erros dos estudantes para que seja possível elaborar estratégias de ensino mais pontuais. De acordo com a percepção discente as atividades desenvolvidas estimularam a participação dos envolvidos e contribuíram com a aprendizagem, que a professora teve um papel importante nesse processo, e que apresentar os resultados para os colegas de classe foi um desafio para os participantes. Na perspectiva docente, as atividades desenvolvidas proporcionaram envolvimento dos participantes no decorrer das aulas, estímulo a autonomia do estudante, engajamento na resolução das tarefas e no compartilhamento de resultados. Destaca-se que para o trabalho com metodologias ativas na perspectiva da Engenharia Didática exige do professor tempo e criatividade para planejar e elaborar as atividades, bom relacionamento com os alunos para estimular a participação e envolvimento nas tarefas e apoio institucional. Considerando as análises das informações coletadas, confirma-se a tese que o ensino guiado pela Engenharia Didática, com o uso de metodologias ativas de ensino, pode promover a aprendizagem dos estudantes como também contribuir com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e desenvolver sua autonomia.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Metodologias Ativas de Aprendizagem. Engenharia Didática. Aulas Remotas

ABSTRACT

The Differential and Integral Calculus has been, historically, responsible for high rates of failure and evasion, in many degree courses of Exact and Natural Sciences. Among the justifications for this fact, the inadequate teaching methodology stands out, since the traditional conception of teaching that permeates Science courses does not meet the needs of the current social and educational context. Considering these factors, this research presents a proposal for the use of active methodologies in teaching Differential and Integral Calculus, to contribute to the critical formation of the individual, favoring their autonomy, arousing curiosity, and stimulating decisions. It is qualitative research, approaching the phenomenological method and aiming to evaluate a teaching proposal for Differential Calculus from the perspective of Didactic Engineering, using active methodologies in the experimentation phase, seeking to apprehend the impressions of the research subjects. The subjects investigated were students of this discipline, from a public institution of higher education, in the context of remote classes, who perform activities prepared and conducted by the researcher teacher. This investigation phase was guided by Didactic Engineering, which stands out for a scheme based on didactic achievements in the classroom, and case study records. Based on the analysis of the collected information, it is possible to infer that the use of active methodologies, guided by didactic engineering, offers options of open tasks and communicative strategies to develop mathematical reasoning and interpretation of results, gives students time to reflect on their results and present elaborate and reasoned answers, and provides information about the students' errors so that it is possible to develop more specific teaching strategies. According to the students' perception, the developed activities stimulated the participation of those involved and contributed to learning, the teacher played an important role in this process, and that presenting the results to classmates was a challenge for the participants. From the teacher's perspective: the activities developed provided involvement from the participants during the classes, stimulated student autonomy, engagement in solving the tasks, and sharing the results. It is noteworthy that working with active methodologies from the perspective of Didactic Engineering requires time and creativity from the teacher to plan and prepare activities, a good relationship with students to encourage participation and involvement in tasks, and institutional support. The results confirmed that teaching guided by Didactic Engineering, with the use of active teaching methodologies, can promote student learning as well as contribute to the involvement of subjects in carrying out activities and developing their autonomy.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Active Learning Methodologies. Didactic Engineering. Remote Classes

LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

ABP/PBL – Aprendizagem Baseada em Problemas / Problem Based Learning

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior,

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

CEP/CHS – Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais

DFO – Dialética Ferramenta-Objeto

IDD – Ingénierie de Développement Didactique

IDR – Ingénierie Didactique pour la Recherche

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IREM – Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MIT – Massachusetts Institute of Technology

MUV – Movimento Uniformemente Variado

PCAST – Conselho de Assessores de Ciência e Tecnologia

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

SD – Situações Didáticas

STAD – Student-Teams-Achievement Divisions

STEM – Science, Technology, Engineering and Mathematics

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

TGT – Teams-Games-Tournament

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

TSD – Teoria das Situações Didáticas

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Toda pesquisa começa com uma inquietação, uma pergunta, um problema. Acredito que esse seja o caminho natural de uma investigação. A partir disso são definidas as metas para encontrar respostas aos questionamentos, traçando os objetivos, algumas vezes estabelecendo hipóteses, escolhendo o método adequado e decidindo sobre as demais etapas metodológicas que conduzirão aos resultados que podem ou não estar de acordo com o esperado. Seria ingenuidade do investigador, ou inexperiência, achar que cada etapa de execução ocorre exatamente como o planejado, uma vez que vários fatores interferem no desenvolvimento da pesquisa, sendo muitas vezes necessário mudanças no caminho. Sendo assim, eu estava ciente que ao desenvolver essa pesquisa os planos iniciais poderiam mudar, sendo preciso fazer adaptações e replanejamentos, mas eu não estava preparada para um caminho tão tortuoso como o que foi traçado pela pandemia causada pelo novo Coronavírus. Ao longo dos capítulos dessa tese apresentarei como essa pesquisa foi planejada, os caminhos metodológicos, os resultados obtidos e minhas considerações, como também mostrarei as necessárias modificações para que a investigação se adequasse à nova realidade educativa causada pela pandemia.

A inquietação que me motivou a dar início à esta investigação foram minhas experiências com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), que como será mostrado adiante, é disciplina com altos índices de reprovação e evasão no Brasil e em outras partes do mundo. Na área das Ciências Exatas outras disciplinas podem ser consideradas difíceis e apresentar resultados semelhantes, mas por estar presente nas matrizes curriculares de vários cursos de graduação e ser considerada como “base” para outras disciplinas, ela tem um impacto significativo na vida acadêmica dos estudantes e, em função disso, diversas pesquisas trataram do ensino e da aprendizagem de CDI e, algo comum à maioria delas, é a constatação do fraco desempenho dos estudantes e os possíveis responsáveis por esse quadro. Para exemplificar, uma pesquisa realizada na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, por Rezende (2003), mostra que no período de 1990 a 1995 não foram aprovados mais do que 55% em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa de Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013) expõe que no primeiro semestre de 2005, 42% dos alunos da Universidade Federal do Rio de Janeiro não foram aprovados em Cálculo para engenharias. Bezerra (2019), Jesus, Lucas e Mapa (2011), Lopez e Segadas (2014) e Souza Júnior (2000) trazem resultados semelhantes em outras universidades brasileiras, e o mesmo se constata em outras instituições de ensino pelo mundo, como por exemplo em Kennesaw State University, na Geórgia (VANDENBUSSCHE; RITTER; SCHERRER, 2018).

Uma das justificativas à essa situação está na relação de aprovação em CDI e a boa qualidade do curso, como destacam Oliveira e Raad (2012, p. 135)

> Em alguma medida, a relação entre um bom professor/ um bom curso de Cálculo se dá na mesma proporção do índice de reprovação dos estudantes. A reprovação ainda está muito mais associada à qualidade do curso do que à inequação do mesmo ao Grupo De estudantes ou ao momento sociocultural. Assim, um curso considerado bom é sinônimo de forte, o que implica em significativo número de reprovados.

Outras causas, como ensino insuficiente na educação básica, a falta de motivação por parte do aluno devido ao pouco tempo para estudo, interação professor-aluno insatisfatória e tipo de metodologia utilizada inadequada, são assinaladas como responsáveis por esse resultado (SANTOS; BORGES NETO, 2005). Quanto aos problemas em matemática na educação básica, os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, que é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala, aplicadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, mostram o baixo desempenho dos estudantes brasileiros. Os resultados de 2017 indicaram que o nível de aprendizagem médio, no ensino fundamental, se situa no limite inferior do nível básico, conforme intepretação do Ministério da Educação e Cultura (nível 4 de 10), e com relação ao ensino médio apenas cerca de 4,5% dos estudantes que participaram do SAEB apresentaram aprendizagem adequada (níveis 7 a 10) (BRASIL, 2018a).

No que diz respeito à metodologia de ensino, é comum nas aulas de CDI a abordagem tradicional, ou tecnicista de ensino, que definimos como aquela em que predomina a aula expositiva seguida de resolução de exercícios, com valorização na acumulação de informações e na reprodução de fórmulas e conceitos. Ao tratar do ensino de Cálculo, Salinas e Alanís (2009, p. 361, tradução nossa) afirmam que:

> O conteúdo matemático se apresenta estruturado de maneira formal e rigorosa. Por formal entendemos uma ausência de significados reais associados com as noções e procedimentos deste ramo da matemática. Por rigoroso entendemos uma sequência de definições, teoremas e demonstrações logicamente validadas, todo organizado de tal forma que as noções e procedimentos anteriores dão sentido aos subsequentes. Essa apresentação formal e rigorosa (resultado da fundamentação) culmina com aplicações do conteúdo matemático que deixam a impressão de que são consequência natural do domínio da teoria.

Essa forma de ensinar não tem se mostrado eficiente no que diz respeito a aprendizagem do aluno, uma vez que as pesquisas citadas anteriormente apontam várias dificuldades dos estudantes de CDI, impedindo-os de terem sucesso no curso. Como destaca Moretto (2007, p.133), a escola tradicional teve o seu valor em determinado momento histórico, mas “[...] essa mesma escola parece não responder mais às exigências de um novo contexto social e educacional”. Destacamos que a predominância desse método de ensino nos cursos de formação docente reforça sua manutenção, uma vez que os futuros professores tenderão a reproduzir as práticas experienciadas em sua vida acadêmica (FONTES; ROSA, 2016).

Como professora de CDI nos cursos de licenciatura em Física e Matemática, vivencio esses problemas desde o ano 2009, o que me levou à primeira investigação sobre o tema no mestrado em Educação em Ciências e Matemática, na Universidade Federal de Goiás. Minha pesquisa versou sobre a avaliação da aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral (FONTES, 2015), concluindo que os procedimentos avaliativos que efetivamente contribuem para a compreensão de conceitos em CDI são aqueles capazes de orientar o trabalho docente, que fornecem ao aluno a devolutiva sobre seu desempenho, e que são contínuos, de maneira a oferecer aos estudantes e ao professor a possibilidade de aprimoramento. Outra conclusão foi que ensino, aprendizagem e avaliação são processos indissociáveis, ou seja, não há como promover mudanças nos processos avaliativos sem mudar o modo de ensinar. Partindo dos resultados da pesquisa de mestrado e da leitura de trabalhos a respeito do ensino de CDI, surgiram questionamentos a respeito de metodologias de ensino que pudessem contribuir com a aprendizagem dos alunos, e sobre as possibilidades do uso dessas metodologias em aulas de CDI. Assim, como continuação da pesquisa, surge o interesse pelas metodologias de ensino que possam favorecer a aprendizagem dos estudantes, sendo o problema de pesquisa enunciado em como conceber metodologias de ensino que promovam a aprendizagem, levando a uma mudança na atual situação de reprovações e desistências em CDI.

Na metodologia de ensino tradicional em matemática, os alunos assistem as aulas expositivas ministradas pelos professores, considerando que nessas exposições é possível obter todo o conhecimento teórico que necessitam, e realizam exercícios com o objetivo de fixar o conteúdo. A aprendizagem acontece, nessa perspectiva, por meio da resolução e repetição desses exercícios, do treinamento, e recai sobre o estudante, quase que exclusivamente, a responsabilidade de aprender, pois parte da premissa que quanto mais esforçado for o indivíduo, melhor será seu desempenho escolar. O professor assume o papel de detentor do conhecimento, e controla todo o processo pedagógico, não podendo ser questionado.

Por entender que esse modelo de ensino pode ser superado, principalmente por não favorecer o desenvolvimento do sujeito como um todo, como propiciar sua autonomia, estimular a criatividade, prepará-lo para o enfrentamento de situações novas e desafiadoras, dentre outas, buscamos outras propostas metodológicas. Uma proposição diferente da tradicional são as metodologias ativas de aprendizagem, que têm sido utilizadas em cursos superiores brasileiros, como nas engenharias e cursos da área da Saúde. Segundo Berbel (2011) é uma metodologia em que se desenvolve o processo de aprender, utilizando experiências reais ou simuladas. Por meio da problematização ou resolução de problemas, o aluno exercita sua autonomia na tomada de decisões, além de apreender os conteúdos de sua área de formação. O interesse pelas metodologias ativas se deu por constatar, por meio do levantamento bibliográfico, que estas contribuem com a aprendizagem dos alunos (CRONHJORT; FILIPSSON; WEURLANDER, 2017; JUNGIĆ *et al*., 2014; STANBERRY, 2018) , geram mais envolvimento dos estudantes nas aulas (BENAKLI *et al*., 2017; STANBERRY, 2018) e melhoram o entendimento de conceitos matemáticos (BENAKLI *et al*., 2017), o que é muito vantajoso nos processos de ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. Desse modo, essa metodologia se mostra adequada para proporcionar aos alunos um ensino em que se valorize não apenas a utilização correta de fórmulas matemáticas, o cálculo de limites de funções e aplicações de regras de derivação e integração, mas que também contribua para a apropriação dos conceitos de CDI e que promova nos estudantes a capacidade de resolver situações-problema que envolvam esses conceitos, a autonomia para gerenciar a própria aprendizagem, e o desenvolvimento de seu potencial criativo.

Essa pesquisa tem como premissa que a utilização de metodologias ativas adequadas pode proporcionar a aprendizagem do aluno em Cálculo Diferencial e Integral, na perspectiva supracitada. Desse modo, não podem ser utilizadas apenas como um procedimento técnico, em uma perspectiva prática. Ao elaborar as atividades a serem desenvolvidas na sala de aula, é necessário o planejamento cuidadoso, considerando as características específicas dos sujeitos envolvidos no processo. Como apoio à essa perspectiva de trabalho contamos com a Didática da Matemática, especificamente a Engenharia Didática, para planejamento, execução e análise das atividades realizadas. Defendemos a tese que o ensino guiado pela Engenharia Didática, com o uso de metodologias ativas de ensino, pode promover a aprendizagem dos estudantes como também contribuir com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e desenvolver sua autonomia.

Destaco ainda que não apenas vantagens circundam a utilização de metodologias ativas em sala de aula, como será mostrado ao longo desse texto. Exige-se do professor considerável tempo para planejamento e acompanhamento do progresso dos estudantes, o que pode ser um fator que dificulte sua implementação, devido às condições do trabalho docente no Brasil, com muitas horas em sala de aula e infraestrutura nem sempre adequada ao bom desenvolvimento de atividades diferenciadas. Também não há garantias de que as metodologias ativas alcancem todos os estudantes, principalmente os que apresentam necessidades educativas especiais. Mas a dúvida a respeito da efetividade dessas metodologias é o motivador dessa pesquisa, pois corroborando com a ideia de Bicudo e Klüber (2013), é necessário perguntar, em um processo de busca e esclarecimento.

> O ato de *buscar pela estrutura do buscado* é um modo de considerá-lo, em parte, desconhecido, mas já presente, ou seja, já há uma pré-compreensão daquilo que o pesquisador pretende compreender. E isso *abre possibilidades para que o processo de produção do conhecimento se instaure.* É uma possibilidade que rompe tanto com o dogmatismo, pois se afasta do tido como certo, quanto com o ceticismo, pois sai da zona de dúvida que pode se impor, a qual não permite avançar em direção à crítica.

> A postura do pesquisador, ao mesmo tempo, não segue a dogmática, nem se deixa sucumbir na dúvida. Instaura-se um diálogo crítico entre ambas as posições. Abre possibilidades para uma busca abrangente e aponta para aspectos genéticos da constituição do conhecimento. Afasta-nos da compreensão vaga e mediana que impera quando estamos no espaço mundano, sendo com todos e como todos que, nas palavras de Heidegger (2002, p. 31), a "compreensão do ser vaga e mediana é um fato". (BICUDO; KLÜBER, 2013, p.26, grifo dos autores).

Em busca por esclarecimento foi elaborada a seguinte pergunta de pesquisa: em que medida as metodologias ativas podem contribuir para a aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral? No processo de procurar por respostas à essa pergunta, o objetivo da investigação é avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial[1] na perspectiva da Engenharia Didática, empregando metodologias ativas na fase de experimentação, buscando apreender as impressões dos sujeitos da pesquisa. Os objetivos específicos da pesquisa são:

- Analisar em que medida os problemas e exercícios disponíveis em livros didáticos, ou em outras fontes, são apropriados em um trabalho com metodologias ativas.
- Analisar em que medida as atividades elaboradas segundo as orientações da Engenharia Didática, com uso de metodologias ativas contribuem para a aprendizagem.
- Analisar a percepção docente e discente acerca da utilização das metodologias ativas levando em contas a realização de atividades matemáticas individuais e grupais, os registros das aulas, os formulários de autoavaliação dos estudantes e de avaliação dos grupos.

O presente texto da tese está sistematizado em quatro capítulos e considerações finais. O primeiro, apresenta o estado do conhecimento das metodologias ativas no ensino, em especial no ensino de Cálculo Diferencial e Integral e suas características, destacando as que oferecem potencial para esta pesquisa. O segundo é dedicado ao campo de estudo da Didática da Matemática, seu surgimento e os personagens que se destacam nesse campo. A ênfase é dada à Engenharia Didática, que conduziu as atividades realizadas

---

[1] Como a proposta de ensino aborda os conteúdos Limites e Derivadas de funções, diz respeito apenas ao Cálculo Diferencial. Por esse motivo omitimos aqui o termo Integral.

em sala de aula. O percurso metodológico é descrito no terceiro capítulo, que traz o método e a abordagem da pesquisa, bem como os instrumentos de coleta de informações para análise e as características dos sujeitos que participaram da pesquisa. O capítulo seguinte apresenta os resultados, de acordo com as fases da Engenharia Didática, a saber, análises preliminares e a *priori*, em que é abordada a origem do Cálculo Diferencial e Integral e as dificuldades no ensino da disciplina, a fase da experimentação, com a sequência didática sobre o estudo de Limites e Derivadas, com as atividades utilizadas para promover a aprendizagem desse conceito, e a análise a posteriori e validação, em que as informações coletadas são descritas e analisadas. Em considerações finais são apresentadas as conclusões da pesquisadora sobre a investigação realizada.

CAPÍTULO 1- AS METODOLOGIAS ATIVAS

As metodologias ativas podem ser entendidas como formas de desenvolver o processo de aprender, utilizadas para conduzir a formação crítica do indivíduo, favorecendo a autonomia do estudante, despertando a curiosidade e estimulando tomadas de decisões individuais e coletivas (BORGES; ALENCAR, 2014). De acordo com Berbel (2011, p.29) utilizam “[...] experiências reais ou simuladas, visando às condições de solucionar, com sucesso, desafios advindos das atividades essenciais da prática social, em diferentes contextos.” Nessa metodologia espera-se do aluno um papel mais ativo frente à sua aprendizagem e do professor uma atitude de facilitador desse processo, oferecendo ao estudante um ambiente de liberdade e apoio. (MITRE *et al*., 2008).

A fim de identificar pesquisas sobre metodologias ativas, mais especificamente no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, neste capítulo é apresentado o estado do conhecimento sobre as metodologias ativas em CDI, os diferentes tipos de metodologias ativas e suas características. Estas informações fornecem subsídios para o planejamento das atividades realizadas com os estudantes.

1.1 ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE AS METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

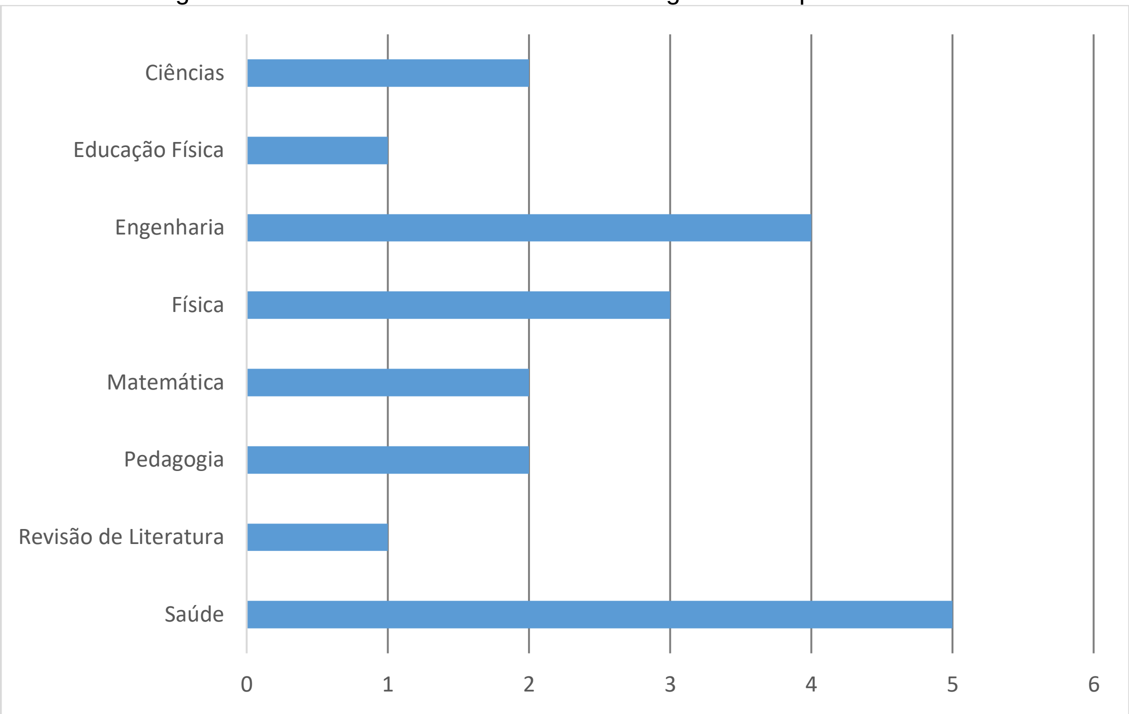
A fim de se conhecer o que já foi produzido cientificamente sobre a utilização de metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, foi feita a busca por artigos científicos, dissertações e teses publicadas sobre esse assunto, no procedimento denominado estado do conhecimento, por abordar apenas um setor das publicações sobre o tema estudado (ROMANOWSKI; ENS, 2006). A busca foi realizada em duas bases de dados, buscando artigos científicos na Plataforma Sucupira (BRASIL, 2019), e teses de doutorado e dissertações de mestrado sobre esse tema no catálogo de teses e dissertações da CAPES (BRASIL, 2018b).

O primeiro levantamento foi realizado no ano 2016, quando surgiu o interesse pelo estudo do tema, mas a busca foi sistematizada no início do doutorado. Como o interesse era por trabalhos voltados ao ensino em CDI, por meio dessas metodologias, a estratégia foi buscar os artigos que tratam de metodologias ativas diretamente em periódicos científicos na área Ensino, além de teses e dissertações com esse tema. A pesquisa foi realizada no mês de março de 2018, e para atualizar esse levantamento no início de 2020 foram incluídos os resultados de publicações dos anos 2018 e 2019. Na Plataforma Sucupira (BRASIL, 2019) foram selecionadas apenas as revistas das áreas Matemática e Ciências Exatas, com qualis A1 até B2[2] e excluídas as duplicações, uma vez que havia duas versões para uma mesma revista, impressa e digital, e obteve-se como resultado 93 periódicos, sendo 48 revistas brasileiras e 45 estrangeiras.

Nas revistas selecionadas foi realizada a busca por trabalhos completos e de livre acesso que abordam as metodologias ativas no ensino, em especial as que tratam do tema em Cálculo Diferencial e Integral. Utilizando os termos ‘metodologia ativa’ e ‘metodologias ativas’ nos sites de busca das revistas nacionais obteve-se um total de 79 artigos, mas ao fazer a leitura dos resumos, e algumas vezes recorrendo ao texto completo do trabalho, apenas 20 traziam pesquisas relacionadas ao tema. Os demais apenas faziam referência aos termos para, por exemplo, indicar uma possibilidade metodológica de ensino. Um artigo trata de uma revisão bibliográfica sobre as metodologias ativas e os demais foram classificados por área de conhecimento, como mostrado no gráfico 1 a seguir.

[2] Classificação de acordo com *Qualis* Periódicos da CAPES do quadriênio 2013-2016.

Gráfico 1: Artigos de revistas nacionais sobre metodologias ativas por área de conhecimento.



Fonte: Elaborado pela autora

Nas revistas estrangeiras foram utilizadas para a busca as expressões '*active learning'* e '*active methodologies'* para as de língua inglesa, 'metodología activa' e ''metodologías activas' para as de língua espanhola e '*apprentissage actif'* para as revistas de língua francesa. Como se obteve um grande número de publicações científicas (781 artigos no primeiro levantamento, realizado em 2018) foram adotados outros critérios para selecionar os artigos. Retirou-se as revistas de extrato B2, ficando com extrato A1 até B1, e selecionou-se as publicações mais recentes, a partir de 2014, obtendo com isso 390 resultados. Como o interesse era a utilização das metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a busca se deu pelos artigos que continham os termos '*calculus*' ou '*mathematics*' no título, palavras-chave ou resumo, totalizando 20 resultados. Ao fazer a leitura desses artigos, foi possível identificar que em 5 deles as metodologias ativas são citadas, mas não trabalhadas em sala de aula, 3 produções se referem à disciplina Pré-Cálculo, em que são explorados conteúdos de matemática básica como funções, por exemplo, e um artigo discute a estrutura padrão dos cursos de Ciências Exatas. Com isso, o resultado se reduziu a 11 produções que apresentam a utilização dessas metodologias, mostrando as contribuições e limitações para a aprendizagem em CDI. Sete artigos exibem trabalhos com a sala de aula invertida, muitas vezes combinada com outras metodologias: aprendizagem baseada em investigação, aprendizagem baseada em pesquisa, aprendizagem cooperativa, instrução por pares, *just-in-time* (ensino sob medida), *think-pair-share* (pensar-dispor aos pares-compartilhar) ou *short reflective writing prompt* (prompts de escrita reflexiva curta). Os outros trabalhos utilizam aprendizagem baseada em pesquisa, aprendizagem baseada em projetos, *think-pair-share* e instrução por pares.

Três artigos aludem a propostas para cursos de Engenharia (sendo um Engenharia e Ciências), dois para cursos de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (sigla em inglês STEM), um em Ciências, um em cursos de Economia e Comércio, um para curso de Matemática para Professores e três não especificam o curso em que a metodologia foi realizada. Os artigos científicos nacionais e internacionais que descrevem trabalhos com metodologias ativas em CDI estão listados no quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Artigos científicos em revistas nacionais e internacionais sobre metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Título do Artigo	**Autor(es)**	**Ano**	**Metodologia Utilizada**
Teaching methods comparison in a large calculus class	Code *et al.*	2014	Sala de Aula Invertida; Instrução por pares; Aprendizagem Baseada em Pesquisa
On flipping the classroom in large first year calculus courses	Jungić *et al.*	2014	Sala de Aula Invertida; Instrução por pares; Ensino sob medida
Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction	Keene; Hall; Duca	2014	Aprendizagem Baseada em Pesquisa
On flipping first-semester calculus: a case study	Petrillo	2015	Sala de Aula Invertida
Exploring Flipped Classroom Instruction in Calculus III	Wasserman *et al.*	2015	Sala de Aula Invertida
Introducing computational thinking through hands-on projects using R with applications to calculus, probability and data analysis	Benakli *et al.*	2016	Aprendizagem Baseada em Projetos
Flipping the calculus classroom: an evaluative study	Maciejewski	2016	Sala de Aula Invertida

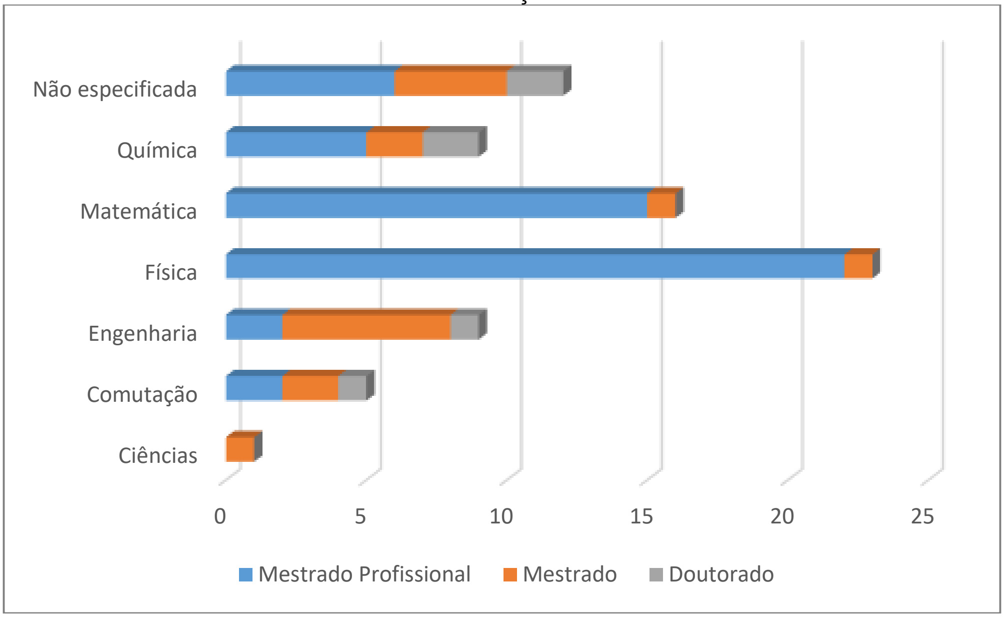
Improved engagement and learning in flipped-classroom calculus	Cronhjort *et al*	2017	Sala de Aula Invertida; Instrução por pares
Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e Integral.	Souza; Fonseca	2017	Aprendizagem baseada em problemas
Active learning: a case study of student engagement in college Calculus	Stanberry	2018	Sala de Aula Invertida; Aprendizagem baseada em pesquisa; Instrução por pares, entre outras
Addressing common errors and misconceptions in Integral calculus with clickers and classroom voting	Cline et al.	2019	Instrução por pares
Establishing the link between the graph of a parametric curve and the derivatives of its component functions	Çekmez	2020[3]	*Think-pair-share*

Fonte: Elaborado pela autora

No catálogo de teses e dissertações da CAPES (BRASIL, 2018b), a busca foi realizada em setembro de 2018. Utilizando os termos ‘metodologia ativa’ e ‘metodologias ativas’, nas áreas de Engenharia, Ciências Exatas e da Terra e Ciências Humanas, selecionando as áreas de conhecimento afins a esse estudo (Educação, Ensino e Aprendizagem, Engenharias, Física, Química e Matemática). Assim como se procedeu com os artigos em periódicos científicos, no ano 2020 foi feita uma atualização incluindo trabalhos dos meses finais de 2018 e do ano 2019, obtendo 169 resultados. Retiradas as duplicações e trabalhos que não tratavam de atividades realizadas em sala de aula ou que eram de áreas como Saúde e Administração, por exemplo, resultaram 75 produções, sendo 6 teses de doutorado, 17 dissertações de mestrado e 52 trabalhos de mestrado profissional. As produções apresentam trabalhos com metodologias ativas em diversas áreas, como representado no gráfico 2 a seguir.

[3] Publicado online em setembro de 2019

Gráfico 2. Área de conhecimento de trabalhos com metodologias ativas em teses e dissertações.



Fonte: Elaborado pela autora

Como pode ser observado no gráfico 2 a maioria dos trabalhos são dissertações em programas de mestrado profissional e a área da Física concentra o maior número de produções. Também foi apurado que 50 teses e dissertações apresentam pesquisas realizadas na educação básica, 6 no ensino técnico ou profissionalizante e 19 no ensino superior, sendo que apenas uma dissertação se refere ao ensino de Cálculo. Outra informação considerada importante foi o ano das publicações, mostrado no quadro 2 a seguir.

Quadro 2: Produções científicas sobre metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Ano de Publicação	Quantidade
1994	1
2014	1
2015	8
2016	12
2017	12
2018	25
2019	16

Fonte: Elaborado pela autora

Há um considerável aumento das produções no ano 2018, e cogita-se que a partir de 2020 será crescente a quantidade de teses e dissertações sobre metodologias ativas, pois com o ensino remoto adotado por muitas instituições de ensino pública e privada no país, em decorrência da pandemia causada pela COVID-19, como será abordado no capítulo 4, o tema metodologias ativas esteve em evidência nas chamadas "*lives*", que são eventos transmitidos ao vivo remotamente. Acredita-se que esse crescimento também se dará nos artigos em periódicos científicos. O resultado final da busca por produções sobre metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral em artigos científicos nacionais e internacionais e em teses e dissertações de Programas de Pós-Graduação brasileiros está apresentado no quadro 3 a seguir.

Quadro 3: Produções científicas sobre metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Produção Científica	Nome da revista / Programa	Quantidade
Revista Nacional	Educação Matemática Pesquisa	1
Revista Estrangeira	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	6
	International Journal of Science and Mathematical Education	1
	Teaching Mathematics and Its Applications	2
	ZDM Mathematics Education	2
Teses e Dissertações	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado do Mato Grosso	1
Total		13

Fonte: Elaborado pela autora

A apresentação dos conteúdos das publicações pelos artigos sobre as metodologias ativas no ensino de CDI se inicia pelo que consta na revista nacional Educação Matemática Pesquisa, de Souza e Fonseca (2007). Com o título 'Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e Integral', apresenta uma proposta de atividade utilizando a aprendizagem baseada em problemas. Os autores apresentam um problema realístico, relacionado ao Meio Ambiente, para trabalhar com Limites e Derivadas em cursos de Biologia e Química, por exemplo. Seguindo a metodologia da aprendizagem baseada em problemas, os alunos devem se organizar em grupos, formados por 4 ou 5 pessoas, contendo um líder e um relator, e as aulas tradicionais são substituídas por tutorias, em que o professor auxilia os estudantes a resolverem o problema, seguindo as etapas "[...] análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios." (SOUZA; FONSECA, 2007, p.212). Nesse processo o professor faz questionamentos tanto para identificar conhecimentos prévios dos alunos, quanto para levantar hipóteses, sendo que as considerações mais importantes são registradas. De acordo com os autores, essa metodologia pode fornecer maior significação em relação aos conceitos trabalhados, colaborar com a motivação dos alunos à aprendizagem, além de desenvolver outras habilidades, como o trabalho em equipe. Os autores alertam para a possibilidade de frustração dos alunos com o trabalho em grupo, com possíveis imprecisões conceituais, e dificuldade do professor em elaborar problemas motivadores e que se relacionem com a vida profissional do acadêmico.

Quanto aos artigos das revistas estrangeiras, a maioria (64%) utiliza como metodologia a sala de aula invertida, como pode ser observado no quadro 1. Os autores das propostas com essa metodologia mostram vantagens em relação as aulas tradicionais de CDI em que o professor explica a teoria, faz alguns exemplos e os alunos em seguida resolvem exercícios. Essa constatação foi feita observando os resultados de testes realizados com dois grupos de estudantes, em que em um grupo utiliza a metodologia tradicional, e em outro a sala de aula invertida (CODE *et al*., 2014; CRONHJORT; FILIPSSON; WEURLANDER, 2017; MACIEJEWSKI, 2016; WASSERMAN *et al*., 2015), ou comparado com turmas de períodos anteriores (JUNGIĆ *et al*., 2014; PETRILLO, 2016; STANBERRY, 2018). Para os autores Code *et al*. (2014) e Wasserman *et al*. (2015) os ganhos em aprendizagem estão principalmente relacionados a questões conceituais, e para Maciejewski (2016) os estudantes com boas habilidades em matemática básica, mas pouca experiência em CDI, são os que mais se beneficiam com a metodologia da sala de aula invertida.

Os autores Jungić *et al*. (2014) e Petrillo (2016) destacam que é preciso investir tempo para o planejamento e execução das aulas na metodologia da sala de aula invertida. Observa-se ainda que, para alguns alunos, o tempo em sala de aula parece ser improdutivo (WASSERMAN *et al*., 2015), e que essa metodologia pode ser muito exigente para determinados alunos, não favorecendo, por exemplo, estudantes com necessidades especiais (CRONHJORT; FILIPSSON; WEURLANDER, 2017). Maciejewski (2016) alerta que nem todas as implementações de inversão de classe melhoraram os ganhos acadêmicos dos alunos, sendo necessárias mais pesquisas para garantir a eficácia da sala de aula invertida.

Çekmez (2020) utilizou a metodologia *think-pair-share* em uma intervenção instrucional, com o objetivo de apoiar os alunos no reconhecimento da relação entre o gráfico de uma curva paramétrica e as derivadas de primeira ordem de suas funções componentes. Com o apoio do software GeoGebra[4] os estudantes realizaram uma atividade composta em três fases, sendo a primeira denominada "pensar", que consistiu em três tarefas a serem realizadas pelos estudantes individualmente. Na segunda fase, "dispor aos pares", os alunos se organizaram em grupos de três componentes para compartilhar suas respostas na atividade realizada individualmente, e chegar a um consenso, em caso de contradição. Após as discussões dos grupos foi entregue uma segunda atividade para que, após sua conclusão, partissem para a terceira fase, "compartilhar", na qual um estudante de cada grupo se voluntaria a apresentar a toda classe suas conclusões. Para finalizar o professor discutiu com a turma os resultados obtidos para direcioná-los à compreensão sobre as funções componentes de uma curva paramétrica e sua relação com a derivadas de primeira ordem. Com a realização de pré e pós-teste, o autor pôde constatar melhor desempenho nos resultados de aprendizagem devido a utilização da tecnologia e a interação dos estudantes com seus pares.

Com base na aprendizagem baseada em projetos, Benakli *et al*. (2017) propõem experimentos computacionais utilizando o software R. São propostos quatro projetos que foram trabalhados com alunos de STEM: (1) visualização do gráfico de uma função não diferenciável para construir uma intuição visual e obter compreensão sobre a não-diferenciabilidade; (2) explorar visualmente a família de funções de Weiertrass e a curva paramétrica de Weiertrass que não possui uma tangente em nenhum ponto de seu gráfico; (3) aplicar as simulações de Monte Carlo para estimar volumes de hipérboles e elipsoides; (4) aplicar as simulações de Monte Carlo para estimar integrais difíceis em apenas algumas linhas de código. De acordo com os autores, o trabalho com projetos promove a motivação e engajamento dos alunos no processo de aprendizagem, e melhor compreensão de conceitos abstratos.

Keene, Hall e Duca (2014) trabalham com o *design research*, que entende-se por uma metodologia de aprendizagem baseada em pesquisa, com alunos de Cálculo. A pesquisa foi realizada em um curso de formação de

[4] *Software* gratuito de matemática dinâmica, criado por Markus Hohenwarter.

professores para a educação básica que tinha como objetivo, além de preparar os estudantes para o ensino nas áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharias e Matemática, aumentar a confiança dos alunos no aprendizado de matemática e, assim, influenciar a maneira de ensiná-la no nível elementar. Os pesquisadores realizaram atividades voltadas para a compreensão de limite de uma sequência durante o curso, embasados por uma teoria do design instrucional denominada *Realistic Mathematics Education*, desenvolvida no Instituto Freudenthal. Um dos princípios dessa teoria é a reinvenção guiada, que foi empregada pelos autores nessa pesquisa. Eles utilizaram pontos de partida realistas, ou seja, os problemas matemáticos utilizados estavam inseridos em um contexto, para que fosse possível a compreensão do conceito Limite. Segundo os autores, ao final do curso os alunos entenderam o conceito informal de Limite por meio das tarefas, o que posteriormente contribuiu para a compreensão dos conceitos Derivada e Integral.

A dissertação de mestrado que apresenta uma pesquisa com metodologias ativas em Cálculo tem como título ‘Proposta de sequência didática para o ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e Integral’ (FARIA, 2019). O autor apresenta uma sequência didática em que a sala de aula invertida é utilizada com uma turma de licenciatura em Matemática, na disciplina Cálculo, com os seguintes conteúdos: Revisão de números reais, Funções e construção de gráficos; Limites e Derivadas. Para a sequência proposta foram escolhidos vídeos sobre os temas abordados, disponíveis no *YouTube*, para serem compartilhados com os estudantes a fim de que os assistissem antes dos encontros presenciais. O momento da aula era destinado à resolução de exercícios em grupos e correção realizada pelo professor que é o autor da dissertação. A sequência didática foi organizada em cinco etapas

> ➢ Primeira etapa – Apresentação: o professor faz uma pequena discussão para verificar se os alunos assistiram aos vídeos.
> ➢ Segunda etapa – Proposição de problema ou questões: o professor divide a turma em grupos e propõe os exercícios a serem resolvidos. Os grupos deveram ter no máximo quatro alunos e o agrupamento deverá conter alunos que estejam em uma mesma etapa de estudo.
> ➢ Terceira etapa – Diálogo entre professor e alunos: o professor visita cada um dos grupos formados estabelecendo um diálogo com os alunos e entre eles promovendo o surgimento de dúvidas, questões e problemas relacionado ao tema.
> ➢ Quarta etapa – Aplicação: os alunos desenvolvem as atividades com o auxílio do professor.

> ➢ Quinta etapa – Correção: o professor corrige as atividades. (FARIA, 2019, p.26).

O autor relata que foi gratificante trabalhar com a aula invertida, uma vez que despertou o interesse de alguns alunos pelos temas estudados, ainda que tenha sido desafiador. Ele destaca que muitas aulas aconteceram sem que todos os alunos tivessem assistido ao vídeo, o que comprometia o momento de resolução de exercícios em sala e desmotivava os alunos na realização das tarefas propostas. Os participantes da pesquisa alegaram não assistir os vídeos por falta de tempo e problemas com acesso à internet. Uma sugestão do autor para que essa metodologia tenha melhores resultados seria treinar os estudantes para assistir os vídeos de forma adequada, como também disponibilizá-los de modo a serem acessados sem a necessidade de internet.

A leitura desses trabalhos possibilitou identificar as metodologias ativas trabalhadas em turmas de Cálculo Diferencial e Integral, verificando que há vantagens em sua utilização, como maior envolvimento dos alunos nas aulas, e como consequência maior aprendizagem (STANBERRY, 2018), mas que é preciso um planejamento cuidadoso para ter sucesso com sua implementação, pois nem todos os alunos estão dispostos a encarar um processo novo de aprendizagem (CRONHJORT; FILIPSSON; WEURLANDER, 2017), e que é exigido um certo esforço do professor no planejamento e organização das atividades a serem realizadas (JUNGIĆ *et al*., 2014; PETRILLO, 2016; WASSERMAN *et al*., 2015). Todas essas questões foram consideradas para elaborar a proposta de ensino com estudantes de CDI. A seguir são apresentados os tipos e características das metodologias ativas, destacando as que estiveram presente no estado do conhecimento realizado.

1.2 TIPOS E CARACTERÍSTICAS DAS METODOLOGIAS ATIVAS

A origem das metodologias ativas não é recente. Para Mattar (2017) o processo de questionamento de Sócrates (469-399 a.C.), denominado *maiêutica*, pode ser uma referência às metodologias ativas. Lovato *et al*. (2018) e Diesel, Baldez e Martins (2017) indicam como fundamentos dessa metodologia a concepção de aprendizagem de Maria Montessori, o iteracionismo de Jean Piaget e Lev Vygotsky, a aprendizagem pela experiência de Célestin Frenet e

John Dewey, a educação para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico de Paulo Freire, e a aprendizagem significativa de David Ausubel. Nos Estados Unidos a utilização dessas metodologias teve um crescimento acentuado a partir do ano 2012, após a publicação do relatório do Conselho de Assessores de Ciência e Tecnologia – PCAST, do Presidente dos Estados Unidos da América, afirmando que um aumento do número de estudantes nas áreas de Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática (sigla em inglês STEM) é fator determinante para o crescimento econômico contínuo do país. Com isso instituições de ensino passaram a exigir Cálculo Diferencial e Integral para futuros professores do ensino fundamental e cursos significativos para os alunos de outras áreas de conteúdo STEM (ELLIS; KELTON; RASMUSSEN, 2014; KEENE; WILLIAM; DUCA, 2014).

No Brasil tem sido muito utilizada em cursos da área da Saúde por oferecer ao estudante um ensino que o aproxima da prática, e por favorecer a autonomia, que é o alicerce das metodologias ativas “[...] algo explícito na **invocação** de Paulo Freire. A educação contemporânea deve pressupor um discente capaz de autogerenciar ou autogovernar seu processo de formação.” (MITRE *et al*., 2008, p.2135, grifo dos autores). Além da autonomia, Diesel, Baldez e Martins (2017) elencam outros princípios das metodologias ativas, indicadas na figura 1 a seguir.

Figura 1: Princípios que constituem as metodologias ativas de ensino.

Fonte: Diesel; Baldez; Martins (2017, p.273)

Considerando os princípios elencados na figura 1, as metodologias ativas contribuem para a aprendizagem por ter o estudante como protagonista, favorecer maior interação entre os estudantes e promover motivação. Entretanto, Mattar (2017) destaca que essas metodologias não geram resultados melhores em avaliações tradicionais, que intencionam mensurar retenção imediata de conhecimento. O autor sugere atividades que avaliem o desenvolvimento de habilidades mais complexas. “A avaliação precisa ser, antes de tudo, processual e formativa para a inclusão, autonomia, diálogo e reflexões coletivas, na busca de respostas e caminhos para os problemas detectados.” (MITRE *et al*., 2008, p. 2138).

Ao se atentar para a coesão entre ensino e avaliação, muitas são as possibilidades do uso de metodologias ativas em sala de aula. Lovato *et al*. (2018) e Mattar (2017) apresentam algumas delas: aprendizagem baseada em games e gamificação, aprendizagem baseada em pesquisa, aprendizagem baseada em problemas, aprendizagem baseada em projetos, aprendizagem baseada em times, *design thinking*, divisão de alunos por equipes para o sucesso (*Student-Teams-Achievement Divisions* – STAD), instrução por pares (*peer instruction*), *jigsaw*, método do caso, problematização, sala de aula invertida e torneio de jogos em equipes (*Teams-Games-Tournament* – TGT). As características dessas metodologias são apresentadas no quadro 4 a seguir.

Quadro 4. Características das metodologias ativas

Metodologias ativas	Características
Aprendizagem baseada em games	É uma metodologia que utiliza jogos (games) ou a produção de jogos no ambiente escolar. Os jogos desenvolvem o pensamento crítico, a resolução criativa de problemas e o trabalho em grupo. A aprendizagem se constitui porque foi necessária para jogar ou para desenvolver o jogo.
Aprendizagem baseada em pesquisa	É a pesquisa acadêmica ou científica, realizada tanto na educação básica quanto superior, sobre um determinado tema. O resultado da pesquisa é apresentado pelo aluno individualmente ou em grupo. Essa metodologia cria uma cultura de indagação, investigação, questionamento e reflexão.
Aprendizagem baseada em problemas (*Problem Based Learning*)	Fundamentada na Pedagogia Construtivista, surge nos anos 1960 nos cursos de medicina canadenses. Nessa metodologia o professor elabora problemas para que os alunos não apenas os resolvam, mas que identifiquem suas próprias necessidades de aprendizagem.

Aprendizagem baseada em projetos	Desenvolvido por John Dewey em meados dos anos 1900, proporciona ao aluno aquisição de conhecimento e habilidades por meio da investigação. Os problemas, autênticos do mundo real, são Elaborados de forma colaborativa. Para solucionar o problema, os alunos buscam informações em diferentes fontes, a fim de articularem uma solução.
Aprendizagem baseada em times	Nessa metodologia os alunos são organizados em grupos heterogêneos, e são distribuídos temas para cada um deles. Após as discussões entre si, os grupos apresentam os resultados para toda a classe.
Design thinking	Originada no mundo dos negócios, mas que recentemente tem se aproximado da educação. É uma metodologia para propor soluções criativas e inovadoras para problemas. Geralmente realizado em grupos, tem basicamente duas fases, a de propor ideias (ideação) e a de criação de protótipos (prototipagem).
Divisão de alunos por equipes para o sucesso	Desenvolvida por Robert Slavin e associados, na Universidade Johns Hopkins em 1970, propõe a realização de atividades em grupos. Os alunos auxiliam uns aos outros na realização das tarefas e, após testados, o grupo que tiver o melhor desempenho é premiado.
Instrução por pares	Desenvolvida por Eric Mazur nos anos de 1990, na universidade de Harvard, é uma metodologia na qual o aluno faz a leitura do conteúdo antes das aulas, e responde questões que orientam o planejamento do professor. Na sala de aula os estudantes resolvem individualmente testes conceituais, e os resultados das respostas são divulgados, sem revelar qual é o item correto. Em seguida, os alunos conversam com os colegas, tentando convencê-los de que sua resposta é a correta, e um novo teste é realizado para verificar se a resposta certa foi obtida.
Jigsaw	Metodologia de trabalho em grupo, desenvolvida por Elliot Aronson, no Texas, em 1978. A classe é dividida em grupos e cada integrante recebe um tema a ser estudado, para que ele se torne um especialista no assunto. Cada estudante apresenta ao grupo o que aprendeu, e todos são testados ao final, recebendo recompensas.
Método do caso	Desenvolvida em Harvard, em 1870, por Christopher C. Langdell, é uma metodologia influenciada pelo construtivismo. Os alunos discutem e apresentam soluções para casos propostos pelos professores, atuando como tomadores de decisão.
Problematização	Surge na década de 1970 e tem seus fundamentos na metodologia do "Arco de Maguerez", de Charles Maguerez, e nas obras de Paulo Freire. Nessa metodologia os problemas são identificados pelos alunos por meio da observação da realidade. A busca pela solução

	do problema promove o desenvolvimento do raciocínio crítico e reflexivo do aluno, na medida que propõe algum tipo de intervenção na realidade.
Sala de aula invertida	Criada por professores norte-americanos (em 1996 já era utilizado em cursos da Universidade de Miami), propõe que os alunos tenham acesso ao conteúdo a ser estudado antes das aulas, por meio de vídeos, por exemplo, e o tempo em sala de aula é destinado a resolução de atividades e discussões. A tecnologia é uma aliada nesse tipo de metodologia, com a produção e divulgação de vídeos e questionários online.
Torneio de jogos em equipes	Desenvolvido em 1972 na Universidade Johns Hopkins por David Devries e Keith Edwards, consiste no ensino por meio de jogos em equipes. Os estudantes são organizados em equipes heterogêneas, e os membros das equipes competem em mesas de torneios. Os pontos obtidos individualmente são contabilizados por equipe, e ao final do torneio a que tiver mais pontos é premiada.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Lovato *et al*. (2018) e Mattar (2017).

O levantamento da produção científica realizado, como já apresentado anteriormente, possibilitou identificar as metodologias ativas mais utilizadas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. A sala de aula invertida foi a mais utilizada, estando presente em 7 artigos, e muitas vezes utilizou outras metodologias combinadas a ela, para o desenvolvimento do trabalho. A instrução por pares esteve presente em 4 artigos e a aprendizagem baseada em pesquisa em 3 trabalhos. A seguir apresentaremos mais detalhadamente sobre essas metodologias, além da aprendizagem baseada em problemas e do *think-pair-share*, que apesar de constar em apenas um trabalho cada, no levantamento realizado (quadro 1), serão consideradas para utilização no momento de intervenção em sala de aula.

1.2.1 A sala de aula invertida

A origem da metodologia da sala de aula invertida tem sido atribuída aos autores Jonathan Bergmann e Aaron Sams, que a utilizaram em suas aulas de ciências no ano 2007 em uma escola rural dos Estados Unidos, mas o conceito de aula invertida já era empregado por outros professores antes dessa data, como em cursos de economia da Miami University no final dos anos 1990, por exemplo. Essa metodologia se popularizou nos anos 2000 e tem sido utilizada em instituições americanas de renome como Massachusetts Institute of Technology (MIT), Havard University, Duke University e Stanford University (LACERDA, 2018; MATTAR, 2017; PAVANELO; LIMA, 2017). Valério e Moreira (2018) *apud* Valério e Beleti Junior (2019) destacam como pioneiros, além de Bergmann e Samas, os autores Lage, Platt e Treglia, que no ano 2000 publicaram um artigo sobre sala de aula invertida, e Eric Mazur que abordou essa metodologia em sua comunicação de sobre instrução por pares, na revista Science.

A principal premissa da sala de aula invertida é a melhor utilização do tempo em aula, como práticas conceituais e interação entre alunos e professor-aluno, promovendo um aprendizado mais profundo, enquanto o acesso ao conteúdo acontece fora da sala de aula (MACIEJEWSKI, 2016; WASSERMAN *et al*., 2015). Ou seja, nesse modelo o estágio de coleta de informações a respeito do conteúdo a ser estudado, que geralmente é realizado pelo professor e transmitida aos alunos por meio de aulas expositivas, passa a ser de responsabilidade do aluno, fora da sala de aula. Em classe, acontece o estágio da assimilação do conteúdo, com a orientação do professor (JUNGIĆ *et al*., 2014), por isso o termo 'invertida'. Em entrevista ao portal Desafios da Educação, Bergmann esclarece que:

> A sala de aula invertida está mudando a maneira como pensamos a educação. Digo que ela é uma meta-estratégia que apoia todas as outras, porque dá aos professores algo que pode parecer difícil de dimensionar: tempo. Tempo para fazer métodos de aprendizado mais ativos, como os baseados em projetos, em pesquisa ou competências. Se um professor gasta muito tempo lecionando, não sobra tempo para fazer essas outras coisas. [...] Assim, qual seria o melhor uso do tempo em sala de aula? Fazendo tarefas mais complexas, auxiliando os alunos com o que eles têm mais dificuldade, ajudando-os a analisar, a aplicar e a avaliar conceitos cada vez mais complexos (LACERDA, 2018)

Apesar do crescimento do número de pesquisas sobre a sala de aula invertida nos últimos anos, principalmente na América do Norte, há muitas críticas quanto a ausência constante de referenciais teóricos nessas investigações, falta de rigor e objetividade, estudos baseados em evidências discutíveis e pouca presença de pesquisas qualitativas (VALÉRIO; BELETI JUNIOR, 2019). No Brasil as pesquisas sobre esse tema são recentes e estão em crescimento, "O portfólio bibliográfico em análise, indica que a sala de aula invertida vem se estabelecendo como tema de interesse e principiando um tema de investigação educacional também no Brasil.” (VALÉRIO; BELETI JUNIOR, 2019, p.30).

Um fator que tem contribuído para que a sala de aula invertida tivesse popularidade nos últimos anos é a disponibilidade e versatilidade das tecnologias de mídia e comunicação (JUNGIĆ *et al*., 2014). É possível obter ou disponibilizar conteúdos por meio textos, hipertextos, bibliotecas virtuais, entrevistas com especialistas, vídeos, entre outras fontes, além de ser relativamente acessível a utilização de aplicativos e redes sociais para comunicação e interação entre estudantes e professores. Isso facilita a utilização dessa metodologia para favorecer o interesse e aprendizado dos alunos.

Mas para que a aula invertida seja bem-sucedida, é importante que os papeis de aluno e professor sejam claramente definidos, e ambos estejam cientes de todo trabalho envolvido. Pavanelo e Lima (2017) utilizaram essa metodologia no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) em 2015, e orientam que para adotar a sala de aula invertida é importante ter um material de apoio consistente para os estudantes, como vídeo aulas e textos complementares, por exemplo, mudanças na postura do professor e dos alunos nas aulas presenciais, como também a afetividade positiva nas relações professor-aluno e entre os sujeitos e o conteúdo acadêmico, para se obter sucesso nesse novo ambiente de aula. Segundo Mattar (2017) há uma grande demanda de atividades para docentes e discentes, cabe ao professor produzir o material a ser utilizado com atividades que envolvam os alunos; planejar e conduzir as aulas considerando que pode ser preciso reorganizar tempo, espaço ou até mesmo a estrutura física das aulas presenciais e que o papel de transmissor de conhecimento deve ser substituído pelo de orientador; observar continuamente os alunos fornecendo-lhes feedback relevante; e elaborar atividades avaliativas utilizando uma diversidade de instrumentos para acompanhar o progresso dos estudantes. Compete ao aluno realizar as atividades propostas para os momentos fora da sala de aula, como assistir vídeos ou fazer tarefas em ambiente online de aprendizagem; ter um papel mais ativo em aula, trabalhando em grupos, colaborativamente; e realizar avaliações antes ou após as aulas.

Cronhjort, Filipsson e Weurlander (2017) trabalharam com experimentos de ensino interativo, incluindo a sala de aula invertida. Os autores, após realizarem entrevistas e grupos focais com estudantes que participaram de uma de suas pesquisas, elencaram os elementos-chave para o sucesso com essa metodologia, que são

> [...] filmes preparatórios com foco em conceitos básicos, questionários conectados aos filmes para estimular o pensamento crítico, respostas individuais aos testes para fazer que os alunos se sintam vistos e encorajados a se preparar, interatividade em sala de aula oferecendo desafios ao desempenho e feedback, e graus adequados de dificuldade para fazer com que se sintam confiantes e desafiados (CRONHJORT; FILIPSSON; WEURLANDER, 2017, tradução nossa).

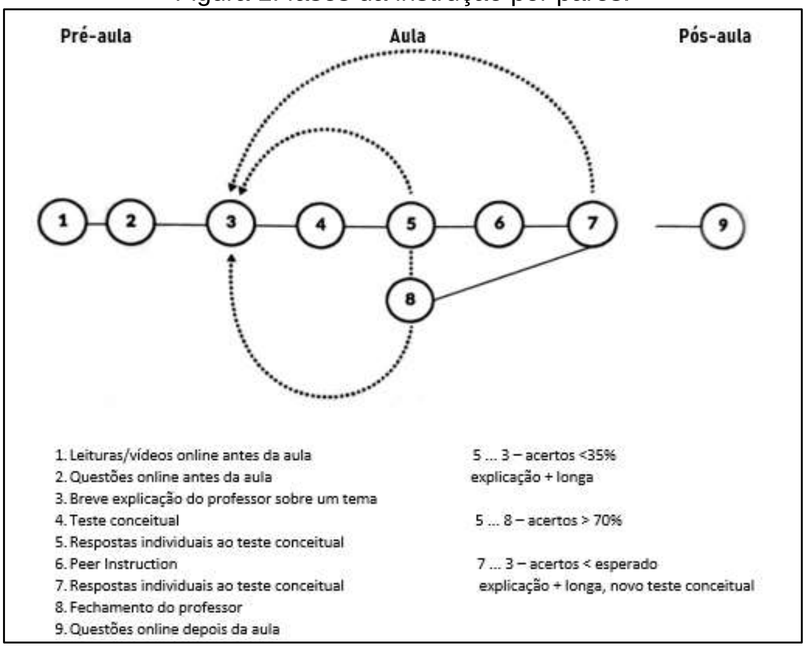
Como se pode observar nessa citação, a utilização dessa metodologia envolve muito trabalho para os professores, pelo menos no início, com a grande quantidade de atividades e testes a serem elaborados, e para os alunos, pois realizam tarefas fora do horário de aula. Entretanto, consideramos que há vantagens em sua utilização, pois as pesquisas supracitadas sobre a sala de aula invertida elencam resultados positivos, como melhora das notas em CDI, ganho na aprendizagem dos alunos, principalmente quanto a questão conceitual, e atitudes positivas dos estudantes com relação à essa metodologia.

1.2.2 Instrução por pares

De acordo com Mattar (2017) a instrução por pares incentiva os alunos a resolverem problemas e a adquirir conhecimento a partir da leitura de fontes primárias, e contribui para a autonomia, pois têm potencial para que os estudantes tornem-se gestores de sua aprendizagem. Podem envolver experiências em laboratórios e estúdios de arte, e tem a utilização das tecnologias digitais como facilitadora do processo, sendo que a falta desse recurso não impede sua implementação. Essa metodologia segue várias fases, com atividades realizadas antes da sala de aula (pré-aula), durante e após a aula. Na pré-aula os alunos fazem a leitura do material selecionado pelo professor, e respondem a perguntas abertas via Web, para validar a leitura realizada. O professor tem acesso a estas respostas, e os resultados o auxilia no planejamento da aula, definindo quais aspectos necessitam de mais ênfase. Essa etapa do processo é chamada de *just-in-time*, ou ensino sob medida.

Em sala de aula há uma rápida explanação do professor, preparada de acordo com o resultado das perguntas previamente respondidas pelos alunos, e problematiza o tópico em estudo. Em seguida é aplicado um teste conceitual, que consiste na proposição de uma questão que leve entre um a dois minutos para ser resolvida. Os alunos refletem individualmente sobre a questão e registram suas respostas, podendo contar com o uso de diferentes tecnologias nessa etapa, e o resultado é apresentado a classe de modo que todos possam visualiza-lo. A próxima fase depende do resultado desse teste conceitual, pois se o índice de acerto estiver entre 35% e 70%, o que é esperado, os alunos se organizam em grupos para discutirem os temas propostos, sendo que o objetivo da discussão é fazer com que cada estudante defenda que sua resposta é a correta. Durante esse momento, que deve durar de dois a quatro minutos, o professor circula pela sala participando de algumas discussões. Se no teste conceitual menos de 35% dos estudantes acertarem a questão proposta, a explanação do conteúdo será repetida pelo professor, com mais detalhes, e será novamente realizado o teste. Caso o acerto seja superior a 70%, o professor faz uma breve explicação para o tema e passa para outro, não sendo necessário o momento discussão, pois seria pouco profícuo. O período de sala de aula também é destinado a resolução de problemas, denominado *workshop*, em que os alunos trabalham coletivamente. No momento pós-aula é proposto aos alunos a solução de problemas praticados no *workshop*, para serem resolvidos individualmente em casa (MATTAR, 2017). A figura 1 traz o fluxo da instrução por pares, para melhor visualização das fases.

Figura 1: fases da instrução por pares.



Fonte: Mattar (2017, p.42)

Ao trabalhar com a instrução por pares, Cronhjort, Filipsson e Weurlander (2017) constataram que muitos alunos estavam engajados com a nova proposta de ensino, mas outros se mostraram céticos ou frustrados, o que provavelmente, segundo os autores, foi devido à grande demanda de trabalho exigida pela metodologia, ou pelo fato das aulas não possuírem o formato tradicional ao qual estavam acostumados. Para minimizar o possível descontentamento dos alunos, os autores inseriram no trabalho seguinte, vídeos preparatórios, que consideraram ter um efeito positivo no processo.

1.2.3 Aprendizagem baseada em pesquisa

Desenvolvida por John Dewey nos anos 1900, tem por princípio a aquisição de conhecimento através de questões, situações problema, ou desafios, que são apresentadas em forma de projetos, e segue as seguintes diretrizes para seu desenvolvimento

> a) grupos de trabalho com número reduzido de participantes (4 – 6 alunos); b) definição de prazos (2 – 4 meses); c) definição de temas por meio da negociação entre aluno e professor, levando em conta interesses e objetivos didáticos; d) uso de múltiplos recursos, incluindo aqueles que os próprios alunos podem providenciar dentro ou fora do ambiente escolar; e) socialização dos resultados dos projetos em diversos níveis, como a sala de aula, a escola e a comunidade. (LOVATO *et al.*, 2018, p. 163).

Os projetos devem ser elaborados de forma colaborativa, com tarefas desafiadoras e problemas do mundo real. Por meio do processo de investigação ocorre a aprendizagem, além de favorecer o interesse e envolvimento cognitivo dos estudantes (MATTAR, 2017). Na pesquisa de Keene, William e Duca (2014) realizada com estudantes do curso de Cálculo para Professores, os autores concluíram que a aprendizagem baseada em pesquisa possibilitou, entre outras vantagens, maior engajamento físico e intelectual dos participantes na realização das tarefas. Os autores também fornecem algumas orientações para que a implementação dessa metodologia seja bem-sucedida. Os textos das tarefas precisam ser construídos com muito cuidado, a fim de fornecer o alicerce adequado na construção do conhecimento, as atividades devem ter maior ênfase nos conceitos que em manipulações algébricas, deve ser considerado, no planejamento das tarefas, que os estudantes compreendem todos os processos matemáticos como igualmente valiosos em termo de tempo e de esforço, e que a metodologia é melhor implementada em ambientes em que os alunos possam trabalhar em grupos.

1.2.4 Aprendizagem baseada em problemas

A aprendizagem baseada em problemas, também conhecida pelo seu termo em inglês *problem based learning* (ABP/PBL) é uma metodologia com base construtivista (LOVATO *et al*., 2018; MITRE *et al*., 2008) que propõe a abordagem de um problema relacionado com a futura profissão do estudante ou com situações do cotidiano, reais ou simuladas, a fim de que o processo de investigação para solucioná-lo gere aprendizagem. Nesse processo, tão importante quanto obter a solução do problema é o desenvolvimento das habilidades que são necessárias no processo de investigação, que é realizada em grupos com a orientação do professor. Para a resolução dos problemas os alunos recorrem aos conhecimentos prévios, discutem em grupos, estudam, identificam e exploram novas áreas, adquirindo assim ferramentas para obter habilidades técnicas, cognitivas e atitudinais para a prática profissional e para a vida (BORGES; ALENCAR, 2014; BUSTAMANTE; PRIETO; TORRES, 2012).

> Desta forma, a ABP caracteriza-se por fomentar a aprendizagem significativa, a articular os conhecimentos prévios com os de outros estudantes do grupo, a indissociabilidade entre teoria e prática, o respeito à autonomia do estudante, o trabalho em pequenos grupos, o desenvolvimento do raciocínio crítico e de habilidades de comunicação, e a educação permanente. Além disso, à medida que estimula uma atitude ativa do aluno em busca do conhecimento e não meramente informativa, como é o caso da prática pedagógica tradicional, a ABP caracteriza-se como uma metodologia formativa (BORGES *et al*., 2014, p.303).

Nessa metodologia os problemas são o ponto de partida para a discussão, e a escolha do problema é fundamental, pois influencia o desenvolvimento da atividade, portanto, precisam ser relevantes a fim de estimular os estudantes a aprender (BORGES et al., 2014). Essa metodologia pode fornecer maior significação em relação aos conceitos trabalhados, colaborar com a motivação dos alunos à aprendizagem e com o trabalho em equipe (SOUZA; FONSECA, 2007).

Em uma pesquisa realizada com 83 professores em uma oficina em um curso de pós-graduação, Rocha (2012) destacou como vantagens na utilização da ABP/PBL a motivação, capacidade de análise e decisão e desenvolvimento de competências como organização e liderança. O autor salienta que o problema escolhido deve considerar a realidade dos envolvidos; que apesar de não depender de tecnologias para sua implementação, seu uso pode enriquecer a formulação dos problemas e discussão das soluções propostas; que a falta de conhecimento do estilo de aprendizagem dos estudantes pode influenciar negativamente nos resultados esperados; e que o perfil desejado para um bom desenvolvimento da ABP/PBL envolve competência nas relações interpessoais, hábito de leitura, administração de tempo e espírito de cooperação.

1.2.5 *Think-pair-share*

O *think-pair-share* (pensar - dispor aos pares – compartilhar) é uma metodologia ativa desenvolvida por Frank Lyman na Universidade de Maryland em 1981 (REIS; BARRETO, 2017) que consiste em três fases para a resolução de uma situação-problema. Na primeira os estudantes dispõem de tempo para pensar sobre a situação apresentada, na segunda eles discutem entre pares suas observações sobre o problema e na terceira compartilham com toda a classe suas respostas. De acordo com Reis e Barreto (2017) é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que tem vantagens sobre a estrutura de questionamento tradicional quando, por exemplo, oferece ao estudante tempo para pensar sobre o problema, primeiro individualmente e depois em grupos, o que possibilita respostas mais elaboradas e que justifiquem suas razões e suas escolhas de forma mais segura.

De acordo com Prahl (2017) as questões para o *think-pair-share* devem estar alinhadas aos objetivos da atividade e fatores que contribuam para uma boa discussão devem ser consideradas. Para a autora, os problemas utilizados nessa metodologia devem ter muitas respostas possíveis, sendo as questões abertas as mais adequadas para as atividades. Além disso, o professor precisa decidir como irá interagir com os estudantes, que vai depender do nível de dificuldade a ser discutida. (PRAHL, 2017).

A tecnologia pode ser uma boa aliada à essa metodologia, a exemplo da pesquisa desenvolvida por Çekmez (2020), sobre a relação entre o gráfico de uma curva paramétrica e as derivadas de suas funções realizada com futuros professores de matemática. O autor afirma ter tido melhor desempenho nos resultados de aprendizagem utilizando o *software* GeoGebra.

Os trabalhos apresentados nesse capítulo mostram que é possível empregar metodologias ativas em aulas de Cálculo Diferencial e Integral, devido ao potencial de gerar envolvimento dos estudantes e promover a aprendizagem, ainda que existam limitações e desafios em sua utilização. Entretanto esses trabalhos trazem poucos resultados sobre a perspectiva dos alunos, o que indica que essa pesquisa tem a contribuir nesse aspecto. Outra questão a se considerar é a utilização dessas metodologias como um procedimento, em uma perspectiva prática. Sob o olhar fenomenológico espera-se avançar na compreensão do fenômeno, rejeitando "[...] uma visão ingênua sobre o factual, a qual poderia ser dada na produção sobre o intuído, isto é, sobre compreensões rasas formuladas sobre ela. (BICUDO; KLÜBER, 2013, p. 33). Como os fundamentos teóricos são essenciais para conduzir uma investigação, fez-se a escolha pela Didática da Matemática, mais especificamente a Engenharia Didática, para orientar o trabalho com metodologias ativas. O próximo capítulo traz os fundamentos dessa teoria, suas características e seus principais teóricos.

CAPÍTULO 2 – A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Como já enunciado, defendemos a tese que as metodologias ativas de ensino, com o olhar da Didática da Matemática, podem promover a aprendizagem dos estudantes, como também contribuir com seu envolvimento na realização das atividades e desenvolver sua autonomia. A Didática da Matemática abordada nesse trabalho é um campo de estudo que surgiu na França e está baseada na teoria construtivista do conhecimento, em especial nas ideias de Jean Piaget. Neste capítulo apresentamos brevemente a origem da Didática da Matemática e as principais teorias deste campo, com destaque à Engenharia Didática, que é a metodologia de pesquisa utilizada no planejamento, execução e análise das atividades realizadas com alunos de Cálculo Diferencial e Integral nesta investigação.

2.1 AS PRINCIPAIS TEORIAS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A origem da Didática da Matemática tratada nesse texto, também denominada Didática Francesa, está relacionada com a preocupação com o sistema de ensino e com os modelos de ensinar matemática na França, no final da década de 1960. Em um movimento questionador sobre o ensino de conceitos, em razão das exigências próprias do saber matemático, essa área de conhecimento passou por modificações. Desse movimento resultou, na década de 1980, na criação dos Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM - Institut Universitaire de Recherche sur L´Enseignement des Mathématiques), que possibilitaram a pesquisa em matemática de modo a considerar a tríade aluno, professor e sistema de ensino. Unindo esse contexto ao sucesso da teoria de desenvolvimento da inteligência de Jean Piaget, se desenvolve a Didática da Matemática (ALMOULOUD, 2007; ALVES, 2016). De acordo com Souza (2013) esse sistema de teorias iniciado na França alcançou diversos países, incluindo o Brasil, e teve como personagens mais importantes Guy Brousseau, Yves Chevallard, Gaston Bachelard, Gérard Vergnaud, Michèle Artigue e Régine Douady. Além destes, Almouloud (2007) também coloca em destaque Raymond Duval.

A Didática da Matemática adentra no quadro das ciências cognitivas, e os personagens supracitados desenvolveram suas teorias e metodologias, a saber, a Teoria das Situações Didáticas (TSD), a Dialética Ferramenta-Objeto (DFO), a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e Teoria Antropológica do Didático (TAD), bem como a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática, destacando que,

> Apesar de cada teoria analisar e modelar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de maneiras diferentes, a articulação entre elas promove condições de desenvolver e analisar situações que favorecem um ensino e uma aprendizagem significativos. A articulação dessas teorias permite empreender uma reflexão aprofundada sobre os fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos e desenvolver situações (contratos e *milieux*[5]) que permitem ao aprendiz ganhar o jogo, ou seja, aprender a aprender. (ALMOULOUD, 2007, p.207, grifo do autor).

Esta pesquisa tem como foco a Engenharia Didática, mas como destacado no excerto acima, outros enfoques podem ser úteis para o desenvolvimento do trabalho. Com isso, abordaremos os principais conceitos das teorias e metodologias mencionadas.

Bachelard desenvolveu a noção de obstáculos epistemológicos, nome dado pelo autor ao que ele chama de causas da inércia. A opinião, por exemplo, seria uma delas, um obstáculo a ser superado para se obter o conhecimento científico. Tais obstáculos podem estar relacionados ao desenvolvimento histórico do pensamento científico ou à prática da educação (BACHELARD, 1996). Mais tarde, Guy Brousseau, inspirado nessas ideias de Bachellard e na teoria de equilibração de Piaget, elaborou uma classificação para os obstáculos epistemológicos (ALMOULOUD, 2007).

Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, que tem como objetivo modelar os processos de ensino e aprendizagem matemática por uma série de situações, identificáveis e reprodutíveis, com a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do aluno. Pode-se definir a situação didática (SD) como todo o contexto de aprendizagem, incluindo o aluno, o professor e o meio em que a aprendizagem deve acontecer (*milieu*). A SD tem como componente essencial a situação adidática, que se refere a toda situação de aprendizagem,

---

[5] *Milieux*, plural de *milieu*. O *milieu* refere-se ao meio, as ferramentas necessárias organizadas pelo professor, para que a aprendizagem aconteça.

planejada, executada e acompanhada pelo professor, mas que não é revelada ao aluno como tal. A situação adidática busca a aprendizagem do aluno no processo de adaptação ao meio, na resolução de um problema em que o aluno sabe que foi “[...] escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, [mas que é] inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. ” (BROSSEAU, 2008, p.35). O professor não fornece as respostas aos problemas, mas atua como mediador da situação para promover a aprendizagem do aluno (BROUSSEAU, 2008). Para o bom andamento desse processo é preciso que se estabeleça em sala o contrato didático, que define os papéis do aluno e do professor, no decorrer das situações didáticas.

> A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas regras, porém, quase nunca são explícitas, mas se revelam principalmente quando se dá a transgressão das mesmas. O conjunto das cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantém com o saber, constitui o chamado contrato didático (SILVA, 1999, p.43).

De acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas observa e decompõe o processo de aprendizagem em quatro fases. A primeira, denominada dialética da ação, consiste em colocar o aluno em uma situação de ação, de modo que a melhor solução do problema a ser resolvido por ele seja o conhecimento que se quer ensinar, e que ao agir sobre essa situação, ela retorne a esse aluno informações sobre sua ação. Essa situação provocará a aprendizagem por adaptação, pois ao manipulá-la livremente, o aluno julgará o resultado de sua ação, podendo ajustá-la, não pela intervenção do professor, mas por meio da retroação do *milieu*. A segunda fase, dialética de formulação, se refere às mensagens trocadas com uma ou várias pessoas, com o objetivo de explicitar as ferramentas utilizadas para a solução encontrada ao problema proposto. Essa fase proporciona ao aluno condições para que “[...] construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática” (Almouloud, 2007, p.38). A dialética da validação é a terceira fase, a que se promove o debate científico para que o aluno mostre a validade da sua solução. O receptor pode solicitar informações ao interlocutor, aceitando ou rejeitando suas explicações. A última fase é a dialética da institucionalização, em que o professor oficializa o saber, que passa a fazer parte do patrimônio matemático da classe.

A Teoria das Situações Didáticas tem referências nas teorias de Piaget, porém rejeita a ideia de que a aquisição do conhecimento está baseada nas estruturas do pensamento. Na TSD a construção do conhecimento ocorre no processo de gerar o desequilíbrio por meio de situações criadas pelo professor, para que ocorra adaptação e acomodação, gerando novo equilíbrio, sem se desconsiderar o aspecto social nesse processo. A Teoria das Situações Didáticas fundamentou os pressupostos da Engenharia Didática, que será apresentada mais adiante (ALMOULOUD, 2007).

Outro personagem em destaque na Didática da Matemática é Gérard Vergnaud, que desenvolveu uma teoria a respeito dos conteúdos conceituais da atividade, denominada Teoria dos Campos Conceituais. É uma teoria cognitivista que apresenta princípios de base para o estudo e desenvolvimento da aprendizagem, que tem como principal finalidade compreender as ligações e rupturas entre conhecimentos (VERGNAUD, 1990). De acordo com Moreira (2002), é uma teoria neopiagetiana que tem a conceitualização do real como núcleo do conhecimento cognitivo. O campo conceitual pode ser entendido como unidades de estudo para dar sentido aos problemas de aquisição, e às observações feitas em relação à conceitualização. De acordo com a teoria, o conhecimento está organizado em campos conceituais, e ocorre em um longo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem (MOREIRA, 2002).

Régine Douady desenvolveu as concepções da Dialética Ferramenta-Objeto e de Jogo de Quadros. São ferramentas de construção e gerenciamento da Engenharia Didática, podendo ter uma dimensão epistemológica, quando utilizadas como instrumentos de análise, ou didática. Um conceito matemático pode ter o estatuto de ferramenta, quando intervém na resolução de um problema, ou de objeto, como conteúdo da aprendizagem. A Dialética Ferramenta-Objeto estabelece que um objeto matemático pode servir como ferramenta para a elaboração de um novo conceito, no processo de solução de um problema matemático. A outra concepção está relacionada à mudança de contexto no tratamento de questões matemáticas, denominada mudança de quadro. Para facilitar a resolução de um problema ou o entendimento de um procedimento matemático, uma mudança de quadro (quadro geométrico, quadro algébrico, quadro vetorial, entre outros) oferece formulações diferentes para o problema, podendo facilitar a compreensão. Quando a mudança de quadros é provocada para fazer avançar fases de uma pesquisa, ou pelo professor para contribuir com a aprendizagem de conceitos, denomina-se jogos de quadros (ALMOULOUD, 2007; TEIXEIRA, 2015).

Assim como na TSD, na Dialética Ferramenta-Objeto e de Jogo de Quadros, a construção do conhecimento ocorre por meio das situações de desequilíbrio e novo equilíbrio, e a relação professor-aluno se estabelece por meio do contrato didático, cabendo ao aluno a participação ativa no processo de aprendizagem, e ao professor o planejamento e execução das situações didáticas.

Raymond Duval desenvolveu a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, que concebe a aprendizagem do aluno, em matemática, por meio das representações semióticas do objeto matemático.

> [...] o sujeito precisa mobilizar tais representações para verdadeiramente conhecer, ou seja, operar com elas, “converter” instantaneamente uma representação do objeto matemático, dado num sistema semiótico, em outra representação de um outro sistema semiótico, que seja mais econômico cognitivamente, na resolução de um dado problema.(COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p.45).

Em entrevista à Revista Paranaense de Educação Matemática, Duval diz que seus estudos sobre representações se iniciaram com seu interesse pela abordagem da psicologia cognitivista centrada na representação de conhecimentos em memórias. No início sofreu forte oposição, pois suas ideias eram contrárias à que os professores e pesquisadores envolvidos na reforma do ensino da matemática acreditavam, e da noção de conceituação da teoria de Piaget. Anos depois, com mais experiência e com consciência a respeito do caráter fundamentalmente semiótico da atividade matemática, retornou à essa linha de estudos. Em suas pesquisas sobre a importância da variedade das formas de linguagem nas atividades matemáticas, constatou que “[...] do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais, e, portanto, assemióticos” (FREITAS; REZENDE, 2013, p.14). Também propôs que as dificuldades em matemática “[...] não estão relacionadas aos conceitos, mas à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso “confuso” que fazem delas” (FREITAS; REZENDE, 2013, p.15).

Para Duval, a matemática possui duas faces, a que ele denomina de face exposta, que corresponde aos objetos matemáticos, suas propriedades e as demonstrações, e a face oculta, que não é diretamente perceptível ao se observar o trabalho do aluno em sala de aula, que são os gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico próprios da matemática.

> A teoria dos registros de representação semiótica diz respeito à face oculta da atividade matemática. Ela visa à modelagem do funcionamento semio-cognitivo que está subjacente ao pensamento matemático. Sem o desenvolvimento deste não podemos nem compreender e nem conduzir uma atividade matemática (FREITAS; REZENDE, 2013, p.18).

Outro teórico de destaque é Ives Chevallard, que desenvolveu a Teoria da Transposição Didática na década de 1980, inicialmente abordada por Michel Verret e que foi ampliada, alguns anos depois, para a Teoria Antropológica do Didático. Para explicar a Teoria da Transposição Didática , Chevallard (2013) diferencia dois tipos de conhecimento, os que são usáveis e os que são ensináveis. O primeiro está relacionado ao conhecimento para fazer alguma coisa, como o conhecimento profissional ou acadêmico, não sendo necessário justificá-lo ou atribuir-lhe relevância social. No conhecimento profissional, se utiliza o conhecimento para realizar uma tarefa, não sendo necessário explicar como se faz, apenas a executa, e no acadêmico, o conhecimento é utilizado para a produção de novos conhecimentos, ou para a organização de um corpo teórico coerente. O segundo tipo diz respeito ao conhecimento que a sociedade elege para ser ensinado, por meio da sua cultura. Nesse caso o conhecimento deve aparecer socialmente como um meio para um fim. Ainda segundo o autor, o processo de ensino desse conhecimento socialmente eleito não é fácil nem natural, por isso é preciso que se faça a transição do conhecimento usável, para algo a ser ensinado e aprendido, processo denominado transposição didática do conhecimento.

O conceito de transposição didática evoluiu para a Teoria Antropológica do Didático, que “[...] estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber, [...] estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas” (ALMOULOUD, 2007, p.111). Destaca-se nessa teoria o conceito de praxeologia, uma entidade formada por quatro componentes, um tipo de tarefa (T), uma técnica (τ), uma tecnologia (θ) e uma teoria (Θ), podendo ser representada pelo conjunto $P = [T\ /\ \tau\ /\ \theta / \Theta]$ (P indica uma praxeologia pontual, em torno do ponto). A tarefa está associada a um objeto, e é organizada por um verbo de ação. A técnica é a aptidão que possibilita realizar as tarefas, ou seja, o modo de fazer a tarefa. A tecnologia descreve, explica a técnica utilizada, e a teoria é um discurso da tecnologia, que procura justificá-la (ALMOULOUD, 2007; CHEVALLARD, 2011).

Para Almouloud (2007) as noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria permitem modelar a atividade matemática, uma vez que toda prática institucional pode ser analisada em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas, e que o cumprimento dessas tarefas resulta do desenvolvimento de uma técnica. A praxeologia “[...] reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão” (ALMOULOUD, 2007, p.117, grifo do autor).

Destacamos, por fim, as contribuições de Michèle Artigue, que de acordo com Souza (2013), foi responsável pelo desenvolvimento da Engenharia Didática, no final da década de 1980. Chevallard e Brousseau já trabalhavam com essa metodologia, mas coube a Artigue sua ampla divulgação. É uma forma particular de organização de procedimentos metodológicos da pesquisa, no campo da Didática da Matemática, que possibilita a sistematização de práticas investigativas em sala de aula, articulando pesquisa e ação pedagógica (PAIS, 2002). Como esta pesquisa é orientada pela Engenharia Didática, no tópico seguinte será abordado com mais detalhes suas características.

2.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática foi inicialmente fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, e emergiu da Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard. É uma metodologia de pesquisa que agrega teoria e prática pedagógica, pois exige uma sistematização teoricamente fundamentada, denominada fases da Engenharia Didática, e a realização de atividades em sala de aula. Teoria e prática são articuladas de modo a promover as aprendizagens, portanto, é uma metodologia coerente com a presente investigação, que objetiva avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial, empregando metodologias ativas na fase de experimentação, buscando apreender as impressões dos sujeitos da pesquisa.

Para os autores Almouloud (2007) e Machado (1999), a Engenharia Didática é uma pesquisa experimental, ou seja, é aquela em que o investigador define hipóteses e trabalha manipulando as variáveis referentes ao fenômeno observável, para avaliar as relações referidas pelas hipóteses. Tem como características o registro de estudos de caso em sala de aula, na construção, observação e análise de sessões de ensino, e na validação, que é de processo interno. Teve seu início nos anos 1980 e recebeu esse nome por ser comparada ao trabalho de um engenheiro, tendo nesse caso, a aprendizagem dos estudantes como projeto. Pode ser utilizada como uma metodologia de investigação, ou uma produção para o ensino, pois está voltada à realização de sequências de ensino, denominadas realizações didáticas. (ALMOULOUD, 2007; ARTIGUE, 1995a; MACHADO, 1999).

Almouloud e Silva (2012) categorizam três tipos de Engenharia Didática, a Clássica, ou de primeira geração, Engenharia Didática de segunda geração, e a Engenharia dos Domínios de Experiência. A Clássica é atribuída aos trabalhos de Chevallard, Brousseau e Artigue, que de acordo com os autores, tem características de pesquisa-ação, pois o pesquisador descreve e analisa os resultados de sua aplicação em situações de sala de aula, ponderando as generalizações. A Engenharia Didática de segunda geração “[...] tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores. O que, consequentemente, necessita de vários níveis de construção.” (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p.28), e se distinguem em dois tipos, a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). O terceiro tipo é a Engenharia Didática apresentada por Paolo Bolero, que é voltada para as contribuições de Vygotsky sobre o desenvolvimento da criança.

Esta pesquisa segue a direção da Engenharia Didática clássica, que é composta por quatro fases. Com base nos textos de Artigue (1995), Pais (2002) e Almouloud (2007), descreve-se cada uma delas. A primeira, denominada fase de análises preliminares, se estrutura em torno da análise do funcionamento de um sistema de ensino e aprendizagem que parece pouco satisfatório, para torná-lo mais eficiente. Nesta fase se identificam os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, se definem as hipóteses, e se faz o levantamento de um quadro teórico em que se fundamentam as categorias. Essa etapa deve permitir a elaboração das sequências de situações-problema a serem trabalhadas em sala de aula, e fazer a escolha das variáveis de comando, que são aquelas responsáveis por provocar as mudanças desejadas.

Esta fase se baseia na identificação dos quadros algébrico, numérico e geométrico do campo matemático em questão, e na análise é preciso considerar as dimensões epistemológica, cognitiva e didática do sistema em estudo, como destaca Artigue (1995, p.42, tradução nossa),

> • A dimensão epistemológica associada às características do saber em jogo
> • A dimensão cognitiva associada às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino
> • A dimensão didática associada às características do funcionamento do sistema de ensino

Assim como nas demais fases da Engenharia Didática, caso haja necessidade, essa etapa pode ser retomada e aprofundada ao longo da investigação.

A segunda fase é a de construção das situações e análise *a priori*. Ela se caracteriza pela definição das variáveis de comando do sistema de ensino, que são aquelas que se referem ao planejamento específico de uma seção da sequência didática, chamada de variáveis locais ou microdidáticas, e as que aludem à organização geral da Engenharia Didática, denominadas globais ou macrodidáticas. As situações à que esta fase da Engenharia Didática se refere, são as atividades realizadas em sala de aula, as situações-problema que auxiliem os alunos no processo de construção do conhecimento, que favoreçam o desenvolvimento de habilidades matemáticas e do raciocínio dedutivo.

> Entendemos por situação-problema a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema (ALMOULOUD, 2007, p.174).

A análise *a priori* tem como objetivo determinar quais variáveis, tanto as que dizem respeito ao problema em si, quanto as associadas ao meio que estrutura o fenômeno, é possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo em estudo com as atividades a serem desenvolvidas, para apreensão dos conceitos. Essa análise se em baseia um conjunto de hipóteses que são validadas entre a análise *a priori* e *posteriori*, e é composta por uma parte descritiva e uma preditiva, centradas em uma situação a-didática.

A terceira fase é da experimentação, que é a aplicação da sequência didática definida na fase teórica da pesquisa. As informações podem ser obtidas por meio de observação direta, filmagens, gravações, entre outras, que são escolhidas de acordo com as variáveis de comando definidas na fase anterior. O importante é que o tipo de registro seja capaz de apresentar uma fiel descrição da realidade observada.

A análise *a posteriori* e validação é a última fase, diz respeito ao tratamento das informações obtidas na sequência didática. Com as informações obtidas na experimentação, constrói-se o protocolo de pesquisa para a análise, que pode ser complementada com outros instrumentos de coleta de dados, como questionários, entrevistas, diálogos, entre outros. De acordo com Almouloud (2007, p.177, grifos do autor),

> A análise a *posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a *priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa [...].

O processo de validação das hipóteses formuladas na investigação, como já mencionado, é realizado mediante o confronto entre as informações obtidas na análise *a priori* e *a posteriori*. Artigue (1995) apresenta alguns problemas comuns à validação, como a ausência de retorno às hipóteses para avaliar distorções, modificações na estrutura da Engenharia Didática, para que a validação não seja necessária, e a definição de hipóteses relativas à aprendizagem a longo prazo, impossibilitando tempo hábil para realizar o processo de validação. Desse modo, para evitar problemas nessa etapa da investigação, “[...] a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico” (PAIS, 2002, p.103).

Para obter êxito na realização das fases da Engenharia Didática, é preciso que haja um planejamento cuidadoso, e sempre que necessário, retornar à uma etapa anterior para adequação. No capítulo dos resultados da pesquisa são descritas cada fase realizada, no contexto da intervenção com a turma de Cálculo Diferencial e Integral, com o uso das metodologias ativas.

CAPÍTULO 3 – PERCURSO METODOLÓGICO

Como já anunciado na introdução dessa tese, o Cálculo Diferencial e Integral, disciplina presente nos cursos de ciências exatas, tem se caracterizado pelos altos índices de reprovação e evasão nos cursos. A metodologia tradicional, centrada no professor, baseada no ensino por meio de memorização e reprodução de conceitos, é apontada como uma das causas do mal desempenho dos estudantes em CDI. Desse modo, o intuito da pesquisa é avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial na perspectiva da Engenharia Didática, empregando metodologias ativas na fase de experimentação, buscando apreender as impressões dos sujeitos da pesquisa. A abordagem qualitativa é a mais adequada para este intento, pois parte de questões amplas que vão se definindo ao longo da investigação, e fornece dados descritivos para compreender os fenômenos, de acordo com a perspectivas dos sujeitos da situação em estudo (GODOY, 1995).

Na pesquisa qualitativa a escolha da unidade a ser investigada é feita tendo em vista o problema ou questão que preocupa o investigador (GODOY, 1995). Como as metodologias ativas e sua utilização no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral são objetos de pesquisa, a investigação se desenvolveu em uma sala de aula dessa disciplina. O *locus* foi uma universidade pública do Estado de Goiás, escolhida por ser o local de trabalho da pesquisadora, e pelo fato de oferecer vários cursos em que o Cálculo Diferencial e Integral é disciplina obrigatória, como nas licenciaturas em Física, Química e Matemática, e nas engenharias, sendo possível ampliar o trabalho investigativo, caso fosse necessário. Os sujeitos selecionados foram os estudantes do curso de Licenciatura em Física, por ser uma turma em que a pesquisadora ministrava aulas de CDI.

Para a condução dessa investigação a escolha foi pela Engenharia Didática como tipo de pesquisa, por ser adequada ao estudo "[...] dos processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático [...]" (ALMOULOUD, 2007, p.171). Como já descrito no capítulo anterior, tem como referência a teoria das situações de Guy Brousseau, e se caracteriza por um esquema baseado nas realizações didáticas em sala de aula e nos registros de estudos de caso, de validação interna (ARTIGUE, 1995a). O trabalho com a Engenharia Didática se organiza em quatro fases, que podem ser retomadas e aprofundadas no decorrer da pesquisa, sendo uma delas a validação, que é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. Não há necessidade de aplicação de testes antes e após a intervenção didática, pois se dá mediante a confrontação das informações obtidas na análise *a priori* e análise *a posteriori* (ALMOULOUD, 2007; PAIS, 2002).

Toda técnica utilizada pela Engenharia Didática deve ser acompanhada de um método, entendido como posição filosófica da investigação em curso, pois é ele que explicita “[...] como o pesquisador visualiza o fenômeno educacional como um todo [e suas] concepções quanto aos saberes, valores e procedimentos para a condução da busca do conhecimento” (PAIS, 2001, p.106). Esta pesquisa é guiada pela fenomenologia, que compreende os processos de ensino e aprendizagem para além da transmissão de conteúdos, pois tem seu interesse nos sentidos e significados atribuídos pelos sujeitos.

> Assumir uma postura fenomenológica ao trabalhar-se com Educação Matemática significa buscar sentido daquilo que se faz ao ensinar e ao aprender matemática […]. É buscar compreender o sentido que o mundo faz para cada participante de um processo específico de ensino e de aprendizagem, procurando pontos de intersecção de horizontes de compreensão […]. (BICUDO, 1999, p.31).

A intenção foi avaliar se a proposta de ensino guiada pela Engenharia Didática, com uso de metodologias ativas contribui para a aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial, buscando apreender as impressões dos estudantes e da professora/pesquisadora. Na investigação apoiada na fenomenologia pesquisa-se a realidade mediante suas manifestações, dando destaque às descrições, uma vez que as vivências são dadas pelas expressões daqueles que as experenciam. O intuito era o de atingir aspectos humanos sem se prender a quantificadores (BICUDO, 2004), avaliar as metodologias ativas por meio de observações das aulas, de análise de resolução de problemas propostos e por registros dos estudantes. A análise volta-se para as descrições obtidas pelos instrumentos de coleta de informações que são o questionário, formulários de autoavaliação dos estudantes e avaliação dos grupos, as atividades por eles realizadas e gravações das aulas ministradas.

Para garantir a validade dos instrumentos utilizados na pesquisa, foram seguidas as orientações de Pasquali (2010) e Moreira e Caleffe (2008), realizando o teste piloto do questionário e submetendo os instrumentos de coleta de informações à análise de juízes, para atestarem a pertinência e sugerir melhorias para os instrumentos. O projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP/CHS) da Universidade de Brasília (anexo 2).

O primeiro instrumento utilizado para coleta de dados foi o questionário (apêndice A), um documento constituído por um determinado número de perguntas padronizadas, que fornece anonimato aos respondentes e possibilita uma alta taxa de retorno ao pesquisador (MOREIRA; CALEFFE, 2008). Por meio dele é possível conhecer o perfil dos sujeitos da pesquisa, antes de elaborar as atividades a serem realizadas em sala, com o intuito de que sejam adequadas à realidade do público a ser trabalhado, como a possibilidade ou não de propor atividades a serem realizadas fora do período de aula, escolher os tipos de questões a serem resolvidas, para que sejam contextualizadas, por exemplo.

Foi realizado um estudo-piloto do questionário no final do segundo semestre de 2019, com estudantes de Cálculo I do curso de Matemática, para descobrir se havia alguma característica no instrumento que colaborasse para que algumas pessoas não respondessem, para ajudar o pesquisador a eliminar itens ou palavras não entendidas, e verificar se as questões possibilitariam aos respondentes expressarem as respostas satisfatoriamente, como orientam Moreira e Caleffe (2008). Os dezenove alunos da disciplina responderam ao questionário do teste piloto, que também continha três questões para identificar dificuldades em CDI, que não fizeram parte do questionário utilizado para esta pesquisa, mas contribuiu para a escolha dos conteúdos para a intervenção. O questionário também passou pela análise de dois juízes, sendo uma professora doutora em Educação, com formação e atuação na Pedagogia, e uma professora doutora em Educação em Ciências e Matemática, com formação e atuação nos cursos de Pedagogia e Matemática.

No que se refere às atividades realizadas nas aulas conduzidas pela pesquisadora, foi utilizada a gravação das aulas pelo *Google Meet*[6], compondo o conjunto de informações para a análise e a validação das metodologias ativas utilizadas. Ao final das atividades os estudantes de CDI, sujeitos da pesquisa, preencheram formulários de autoavaliação a fim de coletar as opiniões a respeito

---

[6] Ferramenta de comunicação por vídeo, gratuito para um número limitado de participantes, que no meio acadêmico e escolar é utilizado para transmitir aulas em tempo real ou disponibiliza-las após gravação.

das metodologias utilizadas e se estas foram capazes de gerar aprendizagem. Para a análise desses registros lançou-se mão da análise do conteúdo, que de acordo com Bardin (2011) é um conjunto de técnicas de análises de comunicações, que possui duas funções, uma heurística e outra de administração de prova. Para essa pesquisa o interesse foi pela de segunda função, “hipóteses sob a forma de questões ou de afirmações provisórias, servindo de diretrizes, apelarão para o método de análise sistemática para serem verificadas no sentido de uma confirmação ou de uma informação” (BARDIN, 2011, p.36).

Tendo a fenomenologia em seus fundamentos, a análise de conteúdo preconiza a valorização do sujeito e suas manifestações e a descrição, seguida de interpretação, como parte do esforço de expressar a compreensão do fenômeno investigado (MORAES; GALIAZZI, 2016). Se organiza em três fases, sendo a primeira denominada pré-análise, composta pelas atividades de leitura flutuante, escolha dos documentos, formulação de hipóteses e objetivos, referenciação dos índices e elaboração de indicadores, e a preparação do material (BARDIN, 2011).

Como esta pesquisa se orienta pela Engenharia Didática, foram pré-definidos os documentos de análise, que são os registros das aulas ministradas e os questionários e formulários preenchidos pelos estudantes, as hipóteses[7] relacionadas à contribuição das metodologias ativas para a aprendizagem, descritas nas análises preliminares (capítulo 4), e o objetivo da pesquisa que é avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial, por meio da análise das atividades realizadas e das falas dos estudantes, se essas hipóteses se confirmam. Na pré-análise faz-se a leitura flutuante dos registros coletados, para “conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2011, p.126), seguida da edição desses registros. A segunda fase da análise de conteúdo é a exploração do material, que integra procedimentos como codificação, decomposição ou enumeração, e a fase de tratamento dos resultados obtidos e interpretação, que se refere à síntese e seleção dos resultados.

Para o tratamento e interpretação dos resultados obtidos, de acordo com Bardin (2011), é preciso que se realize operações estatísticas simples ou

[7] A hipótese descrita faz parte da fase de análises preliminares da Engenharia Didática, não é hipótese de pesquisa.

complexas, seguido de provas estatísticas para um maior rigor. Nesta pesquisa não se realizou esta etapa, uma vez que na perspectiva fenomenológica, com a técnica da Engenharia Didática, o tratamento e interpretação dos resultados se dá na busca dos sentidos e da percepção dos sujeitos, por meio dos referenciais teóricos, e a validados internamente.

3.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Como já anunciado, a fase de intervenção da pesquisa aconteceu em uma universidade pública de Goiás, após autorização prévia do gestor, mediante a assinatura do Termo de Aceite Institucional (anexo 1). Os sujeitos participantes da intervenção foram os estudantes da disciplina Cálculo I, do curso de Física, modalidade Licenciatura, ofertada no turno noturno. Como a instituição permite que discentes de outros cursos se matriculem nessa disciplina, também participam estudantes dos cursos de Matemática, modalidade Licenciatura e Sistemas de Informação, modalidade Bacharelado. Todos os 33 alunos matriculados na disciplina Cálculo 1 foram convidados a participar da investigação e manifestaram seu consentimento por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo 3). Os estudantes responderam a um questionário (apêndice A) a fim de fornecer informações a respeito de sua trajetória estudantil, sua situação socioeconômica, o tempo disponível para se dedicar aos estudos e sua relação com a matemática.

A fase de intervenção da pesquisa com a utilização das metodologias ativas foi planejada para iniciar no final de março de 2020, desse modo, no início do semestre letivo, os estudantes foram informados sobre a pesquisa, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e receberam o questionário supracitado, sendo que quinze foram devolvidos no mesmo dia e os demais alunos levaram para casa para terminar de preencher. Como as aulas presenciais foram suspensas, como descrito no capítulo 4 (item 4.4.2), e alguns estudantes não tinham devolvido os questionários preenchidos, foi decidido reenviar os questionários por meio do *Google Forms*[8] a todos os alunos, obtendo o retorno de 16 respondentes. Para manter o anonimato dos participantes os

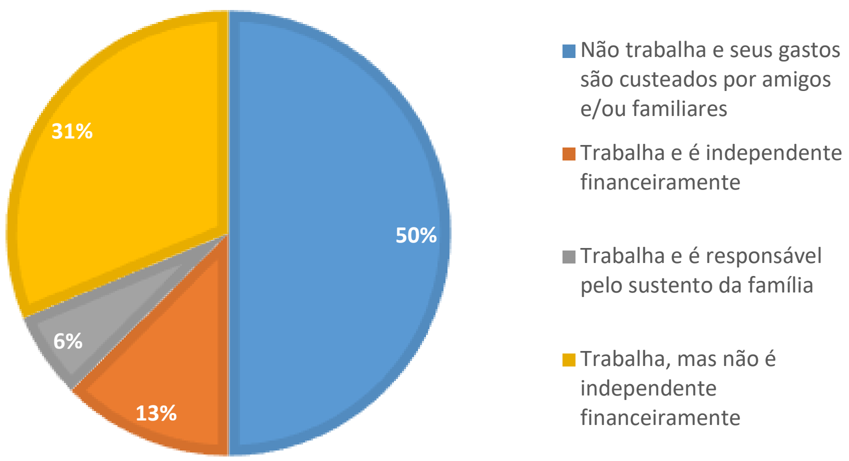
[8] Ferramenta que possibilita criar formulários online gratuitos.

formulários foram codificados, de modo que cada respondente foi identificado pela letra ‘R’ seguida de um número (R1 à R16).

Dos estudantes que responderam ao questionário, onze tinham idade entre 18 e 20 anos, dois estudantes entre 21 e 30 anos e três mais de 30 anos. A quantidade de homens e mulheres no curso é equilibrada, sendo 7 mulheres e 9 homens, o que neste caso contraria a predominância masculina em cursos de Ciências Exatas, como indica ao pesquisa de Pinto, Carvalho e Rabay (PINTO; CARVALHO; RABAY, 2017). De acordo com os autores “[...] as estudantes mulheres têm mais sucesso do que os homens [...]., todavia, estão concentradas em áreas de conhecimento distintas dos homens: elas em cursos das Ciências Humanas, Sociais, Educação e Saúde, eles em cursos das Ciências Exatas e Tecnologias (INEP, 2015).”

A maioria dos discentes moram com os pais (62.5%), metade não trabalha, 25% dos estudantes têm emprego fixo, 12.5% são autônomos e 12.5% fazem estágio. A participação do estudante na vida econômica familiar está indicada no gráfico 3 a seguir.

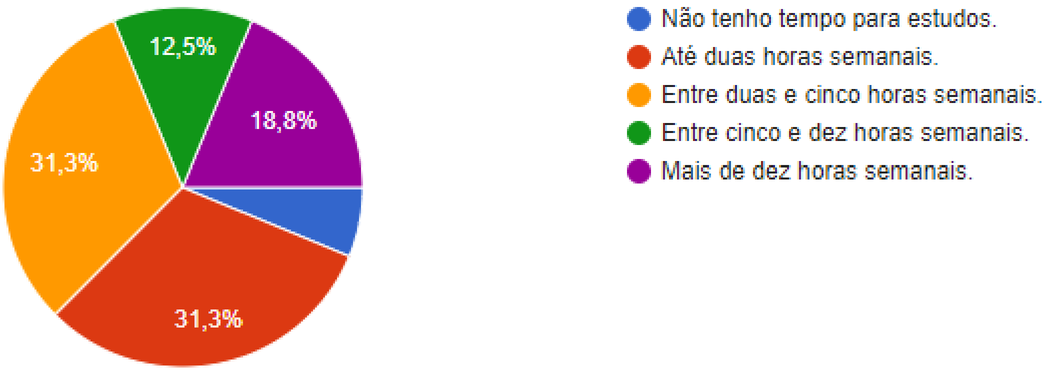
Gráfico 3: Participação do discente na vida econômica familiar.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como se observa no gráfico 3, uma pequena parte dos discentes são responsáveis pelo sustento familiar, o que pode ser um fator importante no desempenho acadêmico, uma vez que o estudante trabalhador tem pouco tempo para as atividades do seu curso. Desse modo a turma investigada tem tempo disponível para se dedicar ao curso, sendo que a quantidade de horas para esse fim está indicada no gráfico 4.

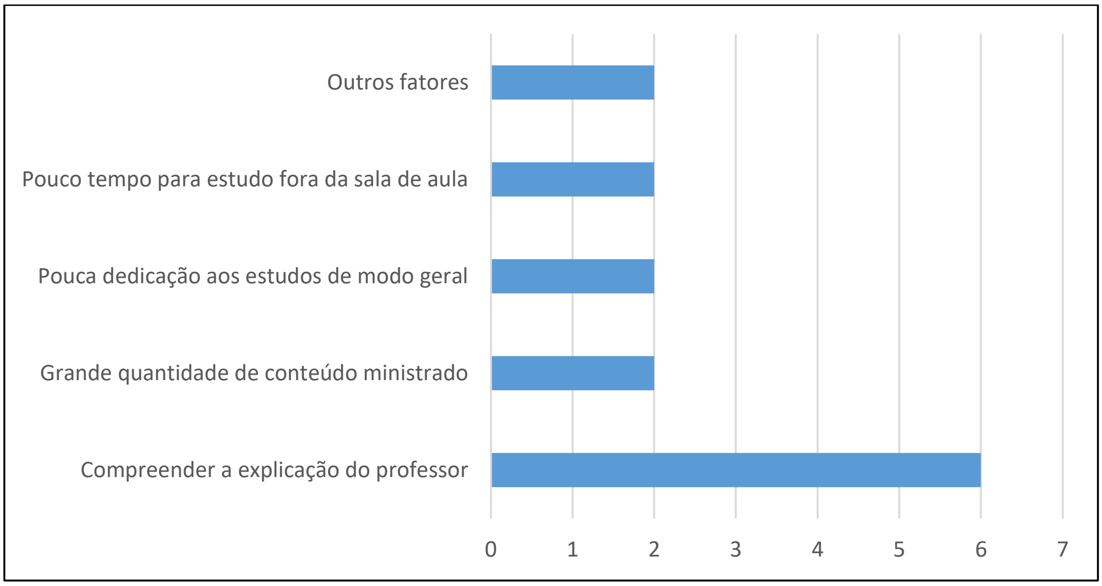
Gráfico 4: Tempo disponível para se dedicar aos estudos.



Fonte: Formulários *Google* a partir de questionário criado pelos autores.

No que se refere à vida estudantil dos respondentes, a maioria é proveniente da escola pública, 75% no ensino fundamental e 62% no ensino médio, 56,3% dos estudantes afirmam ter alguma dificuldade com conteúdos matemáticos básicos, e a natureza dessa dificuldade está representada no gráfico 5 a seguir.

Gráfico 5: Natureza da dificuldade do discente com a matemática básica.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A maioria dos estudantes indicou dificuldade em compreender a explicação do professor. Isso reforça a necessidade de metodologias que descentralizem os processos de ensino e aprendizagem do professor, que no ensino tradicional é o centro do processo. Para finalizar o questionário, foi pedido que os acadêmicos descrevessem brevemente sua relação com a matemática ao longo da sua vida estudantil, e para a maioria dos estudantes as experiências com a matemática foram boas. Dez alunos fizeram comentários relativos à preferência por essa disciplina, facilidade com os conteúdos ou que tiveram bons professores, como destacado abaixo.

> Sempre tive bons professores na matemática, era uma boa aluna, só algumas matérias que não tinha domínio. (R4).
>
> Matemática sempre foi minha matéria preferida, sempre tive grande aptidão com números. Apresentei facilidade com as disciplinas exatas e que exigiam um raciocínio mais exato é lógico. (R6).
>
> Ao longo da minha vida estudantil, nunca precisei estudar matemática, só na faculdade mesmo que tem mais conteúdos mais aprofundado! (R7).

Para quatro estudantes, ainda que afirmassem boa relação com a matemática, houve alguma dificuldade, como na resolução de problemas ou na compreensão de algum conteúdo. O trecho a seguir traz uma das falas.

> Foi uma boa relação, sempre me esforçava nos estudos, porém tinhas algumas dificuldades no entendimento e ainda tenho às vezes! (R9).

Destaca-se as falas de dois alunos, uma que descreve que não teve uma boa relação com a matemática no início da vida escolar e outra em que o estudante explica sua dificuldade com o conteúdo.

> Não tive uma relação boa com a matemática no ensino fundamental, a partir do ensino médio, a relação melhorou, pois resolvi estudar a matemática desde o início. (R12)
>
> Muito difícil devido a não conseguir criar uma linha de raciocínio eficiente para a resolução dos problemas. (R16)

Por se tratar de um curso de Cálculo, de alunos oriundos de cursos de Ciências Exatas, e por não ter nenhum comentário negativo com relação à matemática, pode-se inferir que os estudantes da turma pesquisada têm uma imagem positiva da disciplina e gostam de estudá-la, ainda que encontrem alguma dificuldade em seu aprendizado.

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS

Esse capítulo é destinado aos resultados da investigação, seguindo as orientações da Engenharia Didática em que são descritas suas fases, análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

4.1 ANÁLISES PRELIMINARES

Nas análises preliminares da Engenharia Didática se identificam os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, se definem as hipóteses e se faz o levantamento de um quadro teórico em que se fundamentam as categorias. Como o Cálculo Diferencial e Integral é objeto de estudo, apresenta-se um breve histórico e as dificuldades de aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina, em especial ao conceito de Limite, que geralmente é o primeiro conceito do estudante universitário em CDI. O conjunto desse quadro apresentado é o que dá subsídios para definir as variáveis macrodidáticas e microdidáticas da pesquisa, e orientar o planejamento das sequências de situações-problema a serem trabalhadas em sala de aula.

4.1.1 Um breve histórico do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral

É atribuído ao inglês Isaac Newton (1643-1727) e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a origem do Cálculo, mas seu desenvolvimento teve início séculos antes, com questões levantadas por filósofos, como as do paradoxo de Zenão, que “[...] incluem um conjunto de problemas que criam dúvidas sobre o movimento. Existe algum movimento? E se sim, como? Nós chegamos ao nosso destino?” (FIGUEROA; ALMOULOUD, 2018, p.149). A necessidade de resolver problemas práticos também contribuiu para uma mudança de pensamento que, no decorrer do desenvolvimento matemático, culminou em conceitos como Limites, Integrais e Derivadas. De acordo com Eves (1989), a fim de resolver o problema da quadratura do círculo, Antífon, o Sofista (430 a.C.) propunha sucessivas duplicações do número de lados de um polígono inscrito em um círculo, até que a área do polígono se aproximasse da área do círculo. Essa seria uma antecipação ao método de exaustão de Eudoxo de Cnido (408 a.C.- 355 a.C.), que tornou esse processo rigoroso. Boyer (1996) denomina esse método de equivalente grego do Cálculo Integral, que antecede historicamente ao Cálculo Diferencial.

Para Mateus (2007), o surgimento dos conceitos de Cálculo partiu da necessidade de resolver problemas práticos de quadraturas e tangentes, e foi se desenvolvendo ao longo de muito tempo. O autor destaca os estudos sobre variabilidade de quantidades de Nicole d'Oresme (1323-1382), a utilização sistemática de símbolos, como realizado por François Viète (1540-1603), a modificação do método de exaustão, por Simon Stevin (1548-1620), e sua extensão e generalização por James Gregory (1638-1675), e a discussão dos indivisíveis de Personne Gilles Roberval (1602-1675) e Blaise Pascal (1623-1662), como contribuições ao Cálculo Diferencial e Integral que se conhece hoje. Carvalho e D'Ottaviano (2006) também destacam alguns precursores do Cálculo, como Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre Simon de Fermat (1601-1655), Evangelista Torricelli (1608-1647), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Além destes, James Gregory (1638-1675) também trouxe contribuições ao Cálculo.

Arquimedes desenvolveu o método do equilíbrio, empregado para calcular o volume de sólidos, que foi demonstrado utilizando o método da exaustão de Eudoxo. Com esse método ele desenvolveu a fórmula para obter o volume da esfera $\frac{4\pi r^3}{3}$, sendo r o raio da esfera, e de sólidos como cônicas e cunha de um cilindro circular reto (BOYER, 1996). De acordo com Eves (1989, p.424) "[...] com o moderno método dos Limites, pode-se fazer com que o método de equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração.".

Galilei e Kepler contribuíram com o desenvolvimento do Cálculo ao trabalhar com o Infinitésimo. De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), Galilei foi o primeiro a utilizar esse termo, que aparece nas propriedades do estudo de mecânica e dinâmica. Para Eves (1989), Kepler desenvolveu as ideias relativas ao Infinitésimo em trabalhos com integração, e utilizou o procedimento de Cavalieri para estabelecer a área da região limitada por uma elipse. Os princípios de Cavalieri, utilizados como ferramentas para o cálculo de áreas e volumes, também foram uma contribuição ao Cálculo moderno.

A Fermat é atribuída a origem do Cálculo Diferencial por seus trabalhos com os problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e máximos e mínimos de funções (BOYER, 1996). Não é possível precisar sua influência, pois ele não tinha o hábito de publicar seus trabalhos, mas muitas foram suas contribuições. De acordo com Rezende (2003, p.165) Fermat

> [...] acrescenta às “propriedades específicas” (equações e definições analíticas) das curvas de sua geometria analítica o seu conhecimento acerca dos infinitesimais – obtido com o estudo das obras de Arquimedes, Kepler e Cavalieri -, criando, dessa forma, um instrumento infinitesimal analítico geral e poderoso para a resolução de problemas do Cálculo.

Torricelli também trouxe significativas contribuições ao Cálculo na demonstração da generalização do resultado do teorema de Cavalieri, em que, para n um número natural, $\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Torricelli também esteve bem próximo ao conceito de Limites, usando métodos com uso de indivisíveis e de exaustão para diferentes provas da quadratura da parábola (BOYER, 1996). Para Rezende (2003), se Torricelli tivesse desenvolvido um tratamento analítico das curvas e figuras geométricas, poderia ter se consagrado como um dos inventores do Cálculo.

Pascal também se destaca no processo de desenvolvimento do Cálculo com seu trabalho com integração da função seno num quadrante de um círculo. Boyer (1996, p.252) salienta que,

> Se Pascal não tivesse morrido, como Torricelli, logo depois de completar trinta e nove anos, ou se tivesse se dedicado mais constantemente à matemática, ou se fosse mais atraído por métodos algorítmicos que pela geometria e pela especulação sobre a filosofia da matemática, há pouco dúvida de que poderia ter-se antecipado a Newton e Leibniz em sua maior descoberta.

O entendimento da diferenciação e integração como processos inversos surge com Barrow. Além disso, com o denominado ‘triângulo diferencial’, ele traz uma abordagem muito próxima ao atual processo de diferenciação. Seu contemporâneo, o matemático John Wallis, na tentativa de resolver $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} dx$, que não podia ser calculada diretamente na época, trouxe contribuições com a teoria da integração (EVES, 1989). Os resultados de Wallis repercutem no trabalho de Gregory, que unificou a aritmética infinitesimal de Wallis e de Roberval, e obteve um método de tangentes semelhante ao de Fermat. Foi de Gregory a primeira publicação da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (REZENDE, 2003).

Ainda que diversos personagens contribuíssem para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, foram Newton e Leibniz, trabalhando de forma independente, que tornaram seus fundamentos consistentes. As descobertas de Newton são anteriores às de Leibniz cerca de dez anos, mas as primeiras publicações foram de Leibniz, em 1684, enquanto *Philosophiae naturalis principia mathematica*, em que Newton expõe suas ideias do Cálculo, foi publicado em 1987 (BOYER, 1996). Newton resolveu o problema de determinação de uma tangente à curva de uma função $f(x, y) = 0$, utilizando o método dos fluxos.

> Para ele [Newton], uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, a saber, x e y eram fluentes, isto é, quantidades que fluem com o tempo e a taxa de variação desses fluentes, chamou de fluxo dos fluentes. Fluxões eram as velocidades dos movimentos ou os acréscimos dos fluentes às quantidades geradas. Introduziu ainda o chamado momento de um fluente, que era o incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente em um intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Ele próprio declara que utiliza o método dos fluxões na quadratura de curvas. Assim ele estabeleceu a questão fundamental: dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente, fato esse que se traduz hoje pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que em termos da geometria significa resolver os dois problemas, o do cálculo de áreas sob uma curva e o do traçado da tangente à curva. Ressalta-se ainda que Newton apresenta idéias embrionárias sobre a noção de Limite, ao retomar os “infinitamente pequenos”, caídos no esquecimento desde a matemática grega. (SILVA, 2011, p.397).

Como já mencionado, Leibniz obteve as mesmas conclusões que Newton a respeito do Cálculo, mas foi ele quem desenvolveu linguagem e notações adequadas. Utilizou dx e dy para diferenciais em x e y, e os símbolos $\int y$ e $\int x$ para o sinal de integrais. Também desenvolveu fórmulas para os produtos $dxy = x\,dy + y\,dx$, quocientes $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ e potências $dx^n = nx^{n-1}$, com aplicações geométricas (BOYER, 1996). “O raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do cálculo que o de Leibniz, mas a plausibilidade da atividade de Leibniz e a eficácia de sua notação diferencial produziram uma maior aceitação das diferenciais que dos fluxos.” (BOYER, 1996, p.278).

Além de Newton e Leibniz, contribuíram com o Cálculo Diferencial e Integral, dentre outros, Jean le Rond d'Alembert (1044-1122), com o conceito de Limite no qual noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que concentrou seus estudos na teoria de Limites, apresentando resultados importantes, e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), a quem são creditadas a definição rigorosa de Limite, e as definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins. (CARVALHO; D’OTTAVIANO, 2006; FIGUEROA; ALMOULOUD, 2018).

Cauchy deu ao cálculo elementar o caráter que se tem hoje. Ele construiu uma definição de Limite mais clara do que se tinha na época, tornando fundamental o conceito de d’Alambert, que desconsiderava a lei do Infinitésimo. Seu conceito de Limite tinha um caráter mais aritmético, e considerava o Infinitésimo como uma variável dependente. Para o conceito de Derivada de uma função (f') utilizou o acréscimo $\Delta x = i$ para a variável x, tornando a definição de Derivada de y em relação a x, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quando i se aproxima de zero, sendo que essa Derivada não existe num ponto em que a função seja descontínua. A definição de Integral de Cauchy independe da diferenciação, e a relação de Integral e Antiderivada se deu pelo teorema do valor médio. A Integral foi definida em termo de Limites de somas, o que tornou possível muitas generalizações da Integral. Ideias semelhantes foram desenvolvidas por Bernhard Bolzano (1781-1848), cuja obra matemática foi ignorada por seus contemporâneos, sendo dado apenas a Cauchy o reconhecimento (BOYER, 1996).

A formalização do Cálculo utilizando a linguagem de épsilons e deltas foi feita por Weierstrass, que segundo Eves (1989), exerceu forte influência entre os matemáticos de sua época por suas aulas meticulosamente preparadas e pelo seu rigor matemático. É considerado o pai da Análise Matemática, e suas contribuições estão mais relacionadas à essa área que propriamente ao Cálculo.

4.1.2 O ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral

No século XVII se estabelecem os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, e ao final do século seguinte o ensino dessa disciplina ocorria através de Limite e Infinitésimos, perdurando essa lógica até o final do século XIX, em que passou a ter primazia a abordagem por Limites, devido a influência dos trabalhos de Cauchy. Ainda que o desenvolvimento histórico do Cálculo tenha seguido a ordem: Cálculo Integral, Cálculo Diferencial, Cálculo de Limites e noção de Número Real, o ensino da disciplina segue a ordem inversa: Números, Limites, Derivadas e Integrais (REIS, 2001).

No Brasil, o Cálculo Diferencial e Integral já estava presente nos currículos das escolas militares e politécnicas antes do ano 1808, em que surgem os primeiros cursos superiores de matemática no país, e seu ensino tinha um caráter prático, com ênfase em procedimentos algorítmicos. Com a criação do curso de Matemática da Universidade de São Paulo, em 1934, o Cálculo deixa o caráter prático de formação do engenheiro e do militar, e passa a ser voltado para o formalismo e o rigor matemático, a fim de fornecer aos estudantes dos primeiros anos do curso, a conceitualização de elementos matemáticos fundamentais, preparando-os para a disciplina Análise Matemática (LIMA; SILVA, 2012).

Para Lima e Silva (2012) os estudantes de Cálculo enfrentaram muitas dificuldades com esse modelo de ensino, o que levou alguns professores a defenderem a adequação no nível de rigor e formalismo com que os conceitos eram trabalhados nessa disciplina. Segundo os autores, uma das propostas de mudança foi feita pela professora Elza Furtado Gomide, que defendia um ensino de Cálculo com finalidade preparatória, que pudesse proporcionar ao estudante a capacidade de

> [...] compreender os significados dos conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento, as ideias que estiveram em sua gênese, e que soubessem utilizar aquilo que haviam estudado, por meio de técnicas operatórias, como ferramentas para a resolução de problemas. Neste sentido, as técnicas de cálculo de Limites, derivadas e integrais, que até então praticamente não tinham espaço na disciplina, embora não devessem ser o foco do curso, deveriam sim fazer parte deste estudo introdutório (LIMA; SILVA, 2012, p.7).

Não apenas no cenário brasileiro, mas em outras partes do mundo, a história do ensino de Cálculo apresenta conflitos e controvérsias resultantes de métodos que pretendem melhorar a aprendizagem dos alunos (CODE *et al*., 2014). Surgiram algumas propostas de adequação no ensino de CDI, como o *Calculus Reform* nos Estados Unidos na década de 1980, que enfatizava o uso da tecnologia e a abordagem numérica, algébrica e geométrica na resolução de problemas. De acordo com Rezende (2003), ao analisar as pesquisas em Educação Matemática é possível constatar que essa reforma influenciou o ensino de Cálculo no Brasil. Na França, a reforma dos liceus no início do século XX introduziu o Cálculo Diferencial e Integral na educação básica. Foi proposto um ensino adaptado às capacidades cognitivas dos estudantes, seguindo uma proposta filosófica positivista, que era dominante na época. Com a criação dos Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática, na década de 1980, foram propostas alterações no ensino de Cálculo, como modificar as relações entre teoria e aplicações, teorizar apenas o necessário e promover um enfoque construtivista da aprendizagem (ARTIGUE, 1995b).

Apesar das propostas de alterações nos cursos de CDI, de forma direta ou indireta (com reformas no ensino, de modo geral), tanto no Brasil como no exterior, as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina não foram abolidas, como mostramos na introdução desse texto, destacando pesquisas que revelam o baixo desempenho dos alunos em CDI. A exemplo do *Calculus Reform,* após trinta anos de sua implementação, segundo Rickard e Mills (2017), poucas foram as mudanças com relação às taxas de sucesso dos alunos, e o modelo de instrução não sofreu alteração, pois continua baseada em aulas, com turmas numerosas.

Para conhecer como o CDI tem sido ensinado nas universidades brasileiras atualmente, seria preciso uma extensa investigação sobre currículos e ementas, o que não é objetivo dessa pesquisa. Mas considerando que o trabalho do professor geralmente é guiado pelo livro didático adotado e que, como afirma Reis (2001), ainda que o professor não adote um livro e utilize suas próprias notas de aula, o que é uma prática bem comum, ele geralmente tem como base dois ou três livros didáticos, infere-se que esse material é capaz de fornecer indícios da organização do ensino dessa disciplina. Desse modo, buscou-se em pesquisas que analisaram livros de Cálculo, para que fosse possível identificar o que atualmente se ensina nessa disciplina. Também analisamos os livros indicados na bibliografia básica do curso em que se realizou a fase de intervenção da pesquisa, para planejamento das atividades a serem realizadas em sala de aula.

Em sua dissertação de mestrado, Mateus (2007) analisa oito livros de CDI, sendo o mais antigo de 1981, e o mais recente publicado em 2003, escolhidos por indicação de professores, por terem grande publicidade, serem muito utilizados nas universidades brasileiras, ou por constarem em outros estudos sobre o tema. De acordo com o autor "[...] nos livros analisados há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica do que outro tipo de atividades [...] " (MATEUS, 2007, p.113). Para o autor, na maioria desses livros, o conteúdo é expresso através da álgebra e suas transformações, ainda que haja um esforço de combinar procedimentos algébricos com a visualização gráfica. No que tange às atividades apresentadas nos livros, as que apresentam exercícios de repetição, visando a rotinização de técnicas, foram as mais encontradas. O autor ainda classificou essas atividades em dois tipos, as que dão ênfase a tarefas de reprodução de técnicas, com ligeiras variações para outros tipos, e outro grupo que apresenta uma quantidade significativa de tarefas de interpretação e de prova. Quanto à apresentação do conteúdo, em geral segue a sequência "Definição (ou teorema) → exemplos / algumas tarefas de discussão → exercícios (entre alguns de contexto)." (MATEUS, 2007, p. 175). O autor conclui que

> [...] os resultados apresentam-nos fatores relacionados com a organização praxeológica dos livros didáticos que interferem diretamente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esses fatores prendem-se com a formalização precoce dos conceitos, caracterizada pelo domínio do tecnicismo em detrimento da ênfase nos conceitos e na produção de técnicas, ênfase na algebrização durante a exposição do conteúdo, debilidade na articulação entre o algébrico e o visual-gráfico/figural. [...] Com este resultado, percebemos que algumas dificuldades do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão relacionadas com a organização praxeológica dos livros didáticos. (MATEUS, 2007, p. 175).

Em sua tese de doutorado 'A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos', Reis (2001) também analisa livros didáticos de Cálculo, que ele denomina manuais, concluindo que “[...] refletem uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo.”, e ainda que “[...] a proposta de ensino de Cálculo apresentada pelos livros didáticos é, ainda, predominantemente formalista e procedimental.” (REIS, 2001, p. 195). O autor sugere um ensino voltado para a problematização, ressignificação e sistematização de conceitos a partir de imagens conceituais dos estudantes, e que os professores encontrem um ponto de equilíbrio entre rigor e intuição.

Como um dos objetivos da pesquisa é analisar em que medida os problemas e exercícios disponíveis em livros didáticos, ou em outras fontes, são apropriados em um trabalho com metodologias ativas, foi realizada uma avaliação dos livros utilizados na turma selecionada para a intervenção. De acordo Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Física, na bibliografia básica da disciplina Cálculo I, estão elencados os livros “Cálculo” (STEWART, 2011), “Um Curso de Cálculo” (GUIDORIZZI, 2002) e “Cálculo com Geometria Analítica” (LEITHOLD, 2002). Ambos apresentam como abordagem o ensino por Limites, e tem a sequência de conteúdos que, segundo Alvarenga, Dörr e Vieira (2016, p.47), geralmente se apresentam os livros de CDI. Os conteúdos são:

> 1. Funções reais. Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, Derivada, regras básicas de derivação. Derivadas de funções transcendentes.
> 2. Derivadas de composições e inversas de funções. Derivação implícita e taxas relacionadas. Otimização. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos. Regra de L’Hôpital.
> 3. Integral definida e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida. Técnicas de integração: substituição, partes, frações parciais, substituição inversa, produtos de funções trigonométricas. Aplicações da Integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes de sólidos (ALVARENGA; DORR; VIEIRA, 2016, p.47).

As obras de Guidorizzi (2002) e Leithold (2002) se diferenciam, no quesito conteúdo, por conter no primeiro livro, um capítulo inicial sobre Números Reais. De acordo com a ementa que consta no PPC, a disciplina Cálculo I contempla o estudo de Funções, Continuidade, Limites e Derivadas, e Cálculo II o conteúdo Integrais.

A respeito do conteúdo Limites, conceito fundamental do Cálculo nessa abordagem, no livro de Stewart (2011) há uma introdução com problemas sobre reta tangente e velocidade instantânea, seguido da definição de Limite de uma função utilizando a ideia de aproximação. A definição formal por meio de ε e δ é apresentada após limites laterais e propriedades. O autor traz exemplos algébricos, tabelas e gráficos, e os exercícios trazem algumas atividades contextualizadas, interpretação e construção de gráficos, resolução de problemas e exercícios algébricos como calcule e determine. Ao final de cada capítulo traz exercícios de revisão com o objetivo de verificar conceitos e sugestão de projetos e desafios. Guidorizzi (2002) inicia o capítulo sobre Limites com as noções intuitivas de continuidade e Limite de funções, o Limite como coeficiente angular de uma reta e a ideia de Derivada como Limite, seguido da definição de função contínua e de Limite por meio de ε e δ. O autor apresenta uma linguagem matemática formal, trazendo as definições e exemplos algébricos com seus gráficos correspondentes, e os exercícios são voltados para operações algébricas e demonstrações. Leithold (2002) traz esse conceito por meio de um exemplo algébrico, ilustrado graficamente, e a definição formal por meio de ε e δ. Utiliza exemplos algébricos com tabelas e gráficos correspondentes, e muitos exercícios resolvidos, sendo às vezes uma situação-problema. Os exercícios propostos para os estudantes, assim como os do Guidorizzi (2002), são voltados para operações algébricas e demonstrações, mas traz alguns exercícios contextualizados e problemas.

Dos livros indicados como referência bibliográfica, avaliou-se que os exercícios que constam em Stewart (2011) poderiam ser inseridos nas tarefas com metodologias ativas, integralmente ou adaptados. Também foi considerado o livro “Cálculo”, do autor Thomas (2009), que tem a organização do conteúdo e abordagem similares ao de Stewart (2011), e também apresenta uma variedade de exercícios e problemas contextualizados. Além da análise dos livros didáticos, considerando que para compreender o fenômeno educativo é preciso a observação em diferentes aspectos, para um bom planejamento das ações de melhoria do ensino, fez-se a buscar por pesquisas desse campo de conhecimento que tratam dos problemas enfrentados nessa disciplina.

Artigue (1995) categoriza as dificuldades em CDI em três grupos, as que estão associados aos objetos básicos do cálculo, como números reais e funções; as que estão associadas à conceitualização e formalização da noção de Limite; e as vinculadas à ruptura entre álgebra e cálculo.

Os artigos em periódicos e publicações em eventos científicos mostram mais pontualmente os problemas com a aprendizagem em CDI, como pouca habilidade com os conteúdos da matemática básica (HIEB et al.., 2014; NASCIMENTO, 2000; PETRILLO, 2016; SANTOS; BORGES NETO, 2005; THOMPSON; HAREL, 2021; VANDENBUSSCHE; RITTER; SCHERRER, 2018); dificuldades inerentes aos conceitos de Cálculo (MATIĆ; DAHL, 2014; NASCIMENTO, 2000; SILVA, 2011; SOUZA; FONSECA, 2007; VANDENBUSSCHE; RITTER; SCHERRER, 2018); procedimentos didáticos ou metodológicos inadequados (REZENDE, 2003; SANTOS; BORGES NETO, 2005), em especial na ênfase ao modelo de ensino tradicional (SALINAS; ALANÍS, 2009); dificuldades na transição do ensino médio para o ensino superior (MATIĆ; DAHL, 2014; NASCIMENTO, 2000); falta de motivação, pouco tempo para estudo e iteração professor-aluno deficiente (SANTOS; BORGES NETO, 2005); e ainda dificuldades de natureza cognitiva ou epistemológica (REZENDE, 2003; SILVA, 2011).

Reis (2001) aponta alguns caminhos para a melhoria do ensino de Cálculo, apresentando as opiniões de alguns autores de livros didáticos dessa disciplina. Em sua tese relata que para o professor Roberto Ribeiro Baldino, um bom curso de Cálculo deve se desenvolver com base no conceito de Infinitésimos, e não baseado em Limites, com excesso de rigor na apresentação dos conceitos, como se faz geralmente. Para o professor Geraldo Severo de Souza Ávila, as dificuldades em CDI poderiam ser minimizadas com o auxílio de monitores nas aulas, que geralmente possuem turmas com muitos alunos. Propõe ainda uma metodologia de ensino centrada na resolução de problemas. O professor Elon Lages Lima sugere a utilização de recursos, como a visualização gráfica, para dar significado e entendimento às ideias do Cálculo. O autor da tese ainda sugere, como possibilidade de melhoria no ensino de CDI, a utilização do computador para conceber e representar as ideias ou conceitos do cálculo, o trabalho coletivo de professores e utilização de projetos de ensino.

Considerando as dificuldades assinaladas, e as indicações e sugestões para a melhoria no processo de ensino e de aprendizagem do aluno, defendemos a tese que o ensino guiado pela Engenharia Didática, com o uso de metodologias ativas de ensino, pode promover a aprendizagem dos estudantes como também contribuir com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e desenvolver sua autonomia.

4.1.3 O ensino de Limites de funções

Ao longo do desenvolvimento da humanidade o conceito de Limite foi necessário para estabelecer razões entre grandezas, para resolver problemas como os de tangência e quadratura, ainda que este saber não tivesse sido reconhecido na época (FIGUEROA; ALMOULOUD, 2018). Atualmente esse conceito ocupa posição central no ensino de Cálculo Diferencial e Integral (BARROSO et al.., 2009), uma abordagem que teve influência dos trabalhos de Cauchy, e está presente em muitos livros didáticos de Cálculo. Pela importância desse conceito, a escolha de conteúdo a ser trabalhado na intervenção em sala de aula foi o estudo de Limite de funções.

Há uma preferência da abordagem do Cálculo por meio de Limites desde o século XIX, e atualmente essa tendência é predominante no ensino (REIS, 2001). ´Também é comum que o Limite seja explorado no início do curso, seja de modo intuitivo, utilitário ou operacional, mas não ter ligação com novas definições, como Derivada e Integral, e nessa perspectiva o ensino de Limite torna-se desnecessário (BARROSO *et al*., 2009). É possível escolher uma abordagem de ensino em que o Limite seja dispensável, pois os conceitos podem ter como base os Infinitésimos, e mais adiante, no curso de Análise, se faça a opção pela Análise Não Standard[9]. Mas caso essa não seja a opção adotada pelo professor, os conceitos de Continuidade, Derivadas e Integrais devem se relacionar com os Limites.

Rezende (2003) argumenta que independente da escolha de abordagem, os conceitos devem ser introduzidos de forma intuitiva em um curso inicial de Cálculo. Ou seja, a noção formal de Limite, seguindo a teoria weierstrassiana de épsilons e deltas, ou a construção rigorosa de Infinitésimo elaborada por Robinson, não devem ser elementos construtores de conceitos nessa etapa do ensino. Outro problema relacionado à aprendizagem de Limites é a prevalência da técnica sobre o significado, como explica o autor:

> [...] as dificuldades de aprendizagem relacionadas a operação de limite estão associadas muito mais às suas dificuldades em manipulações algébricas (fatoração de polinômios, relações trigonométricas, simplificações algébricas, "produtos notáveis", etc.) do que à sua interpretação analítica. Assim, no contexto do ensino de Cálculo, pode-se dizer que a noção de limite de funções está mais caracterizada,

[9] Criada por Abraham Robinson (1918-1974) que propõe uma nova teoria para a Análise Matemática, baseada nos infinitésimos e na teoria do contínuo.

> portanto, como uma operação algébrica do que com uma operação analítica. Essa "algebrização exacerbada da operação de limite caracteriza bem o que queremos dizer com a "prevalência da técnica sobre o significado." (REZENDE, 2003, p.13).

Não apenas a abordagem escolhida influencia o ensino, como o modo de conduzi-lo, o que mostra o quanto é importante que o professor conheça o público com que vai trabalhar, podendo adequar o ensino para favorecer a aprendizagem de seus estudantes.

Diante do que foi até aqui apresentado, consideramos as dimensões epistemológica, cognitiva e didática, associado à experiência docente da pesquisadora nessa disciplina, e ao pressuposto inicial de que o ensino guiado pela Engenharia Didática, com uso de metodologias ativas de ensino, pode promover a aprendizagem dos estudantes, contribuir com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e desenvolver sua autonomia, para formular as seguintes hipóteses:

- o conteúdo Limites por meio da ideia intuitiva contribui para a compreensão do conceito;

- as atividades que envolvem o trabalho em equipe cooperam com a aprendizagem dos estudantes;

- situações problema que articulem teoria e prática estimulam a participação dos alunos;

- atividades que envolvem leitura e pesquisa contribuem para a compreensão de conceitos relacionados à Derivada de uma função e promovem a autonomia discente.

Com essas considerações, as aulas com metodologias ativas, ministradas no momento de intervenção dessa pesquisa, foram planejadas de modo a contribuir para a ideia intuitiva de Limite, em que prevaleça o significado à técnica e, ainda que processos algébricos sejam indispensáveis, o foco foi dado aos conceitos. O livro adotado foi Cálculo, volume 1, do autor James Stewart (2011) por ser, dentre os três indicados na bibliografia básica, o que traz uma abordagem mais conceitual, e trazer exercícios variados. As atividades selecionadas buscaram a participação ativa dos alunos, o trabalho em equipe, o desenvolvimento do raciocínio crítico e maior significação em relação aos conceitos trabalhados. Para tanto, foram escolhidas como metodologias a aprendizagem baseada em problemas, o *think-pair-share* e a instrução por pares, como está detalhado no capítulo seguinte.

4.2 ANÁLISE A PRIORI: AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A fim de verificar as contribuições das metodologias ativas nos processos de ensino e de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, foram planejadas algumas atividades para trabalhar os conteúdos Limites e Derivadas de funções de uma variável. Uma das constatações sobre o ensino de CDI descritas no capítulo anterior, em especial no ensino de Limites, foi que o emprego da rotinização de técnicas, a predominância da abordagem algébrica, e exercícios de repetição não têm contribuído para a aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina. As sugestões para a melhoria do ensino incluem um ensino voltado para a problematização, ressignificação e sistematização de conceitos, a utilização de recursos como uso de computador e *softwares* para visualização gráfica e o trabalho em grupo. Desse modo, destacam-se como variáveis macrodidáticas o ensino com foco em conceitos, a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, trabalho em Grupo E o uso da tecnologia.

4.2.1 O planejamento inicial da intervenção

Para trabalhar com a turma da disciplina Cálculo de um curso de Física no primeiro semestre de 2020, foram selecionadas as metodologias aprendizagem baseada em problemas (ABP/PBL) e o *think-pair-share* para o estudo de Limites e a instrução por pares no conteúdo Derivadas. Antes porém de utilizar as metodologias selecionadas, considerou-se o que foi apurado na etapa de análises preliminares sobre a dificuldade em CDI associada ao baixo domínio dos conteúdos da matemática básica, números reais e funções, logo a proposta inicial foi a de revisar o conceito de funções e suas diferentes representações, como sugerido no livro adotado no curso, Cálculo – volume 1 (STEWART, 2011). Além da aula expositiva e participativa, com o objetivo de verificar o que os estudantes conhecem sobre o conteúdo e revisar tópicos importantes, elaborou-se uma tarefa a partir da atividade desenvolvida na tese intitulada ‘Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche’ (ALMEIDA, 2017), para ser realizada com o auxílio do GeoGebra (apêndice B).

Na elaboração das atividades foram criadas duas situações-problema, para que estivessem contextualizados com o interesse da turma, e foram selecionados exercícios em livros didáticos de Cálculo como dos autores Stewart (2011) e Thomas (2009), que melhor se adequassem aos objetivos de cada atividade. Também foram consultados materiais disponíveis na internet, como por exemplo, os da *Khan Academy*[10], e os artigos obtidos no levantamento bibliográfico da pesquisa. Ainda que nos livros didáticos apresentem muitas atividades de repetição, voltados para a rotinização de técnicas, obteve-se exercícios que exploravam a interpretação gráfica, que atendia o objetivo de trabalhar com mudança de quadro algébrico para geométrico e vice-versa por exemplo, e outros que puderam ser adaptados.

Para facilitar a coleta de respostas dos exercícios de múltipla escolha, e divulgá-los aos alunos, foi planejada a utilização o *software* Plickers, em que é distribuído aos participantes da atividade um cartão com um *QR Code* para que seja possível identificar as respostas de todos rapidamente. As instruções para o uso do Plickers estão disponíveis em Passos e Leite (2019), e a escolha por esse *software* foi a facilidade de utilização e por proporcionar aos alunos a visualização dos resultados obtidos em cada questão, promovendo a discussão caso necessário. Entretanto, não foi necessário a utilização dessa ferramenta, uma vez que as atividades foram realizadas online.

No planejamento inicial das atividades não foi considerado abordar o conteúdo Derivadas. Ao organizar o cronograma das aulas foi verificada a possibilidade de utilizar metodologias ativas também para esse conteúdo, como descrito em 4.2.4 - Planejamento de atividades com utilização de metodologias ativas em aulas remotas.

4.2.2 A pesquisa em meio a uma pandemia

Após a escolha das metodologias a serem utilizadas e elaboração das atividades, estava tudo pronto para iniciar a primeira aula em março de 2020. Desse modo, no início do semestre letivo foi feita a apresentação da pesquisa aos alunos, a entrega do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo 3)

---

[10] Plataforma que disponibiliza gratuitamente textos, vídeos e exercícios de diversos conteúdos.

e do questionário (apêndice A), e realizada a fase preparatória de familiarização com o GeoGebra (apêndice B) e ao estudo de funções (apêndice C). Porém, a pesquisa foi interrompida devido às consequências da pandemia causada pelo novo Coronavírus, causando muitas mortes no mundo todo e mudando o comportamento das pessoas. A educação como um todo sofreu forte impacto, pois uma vez que foi necessário adotar isolamento social para conter a propagação do vírus, muitas instituições de ensino como a universidade em que a pesquisa foi realizada, optaram por ofertar aulas à distância, mediadas por tecnologias, em caráter emergencial, e outras optaram, no primeiro momento, pela suspensão das aulas.

O Coronavírus é uma família de vírus que causam infecções respiratórias, e foi identificado em humanos e isolado pela primeira vez no ano 1937. O que mais tarde foi chamado de Coronavírus 2019 ou novo Coronavírus, foi reportado pela primeira vez em 31 de dezembro de 2019 na cidade de Wuhan, na China, após identificarem um conjunto de casos de pneumonia inespecífica. Inicialmente foram 27 casos, sendo sete graves e uma morte, e em menos de duas semanas Tailândia, Japão, Coréia do Sul e Taiwan também registravam casos da doença, que foi denominada Covid-19. No dia 11 de março de 2020 a Organização Mundial de Saúde declarou que a contaminação causada pelo novo Coronavírus se caracterizava como pandemia, ou seja, uma doença epidêmica de grande disseminação (BRASIL, 2020a; FIGUEIREDO *et al*., 2020).

De acordo com o Boletim Epidemiológico Especial do Ministério da Saúde (BRASIL, 2020b), o primeiro caso confirmado da Covid-19 no Brasil ocorreu em 26 de fevereiro de 2020, o que também foi o primeiro registro na América Latina. Para conter a disseminação da doença foi adotado, assim como em outros países, o isolamento social, dentre outras medidas.

> Devido às limitações do conhecimento da doença e falta de uma vacina e medicamentos que permitam proteger ou curar as pessoas expostas ou doentes, vivemos um contexto paradoxal. Pois as medidas não farmacológicas são as mais eficientes até o momento, entre elas estão a higienização das mãos, a etiqueta respiratória, o distanciamento social seletivo ou ampliado e até mesmo o bloqueio total (*lockdown*). (BRASIL, 2020b, p.3, grifo nosso)

O distanciamento social passou a ocorrer em maior ou menor grau nas diferentes regiões do Brasil, e em Goiás, estado em que se localiza a turma selecionada para a pesquisa de doutorado, no dia 13 de março de 2020 foi decretada situação de emergência na Saúde Pública do Estado de Goiás, que levou ao fechamento de alguns setores do comércio e suspensão das aulas presenciais nas instituições públicas e privadas. Desse modo ficou estabelecido, por meio da Portaria 560/2020 (GOIÁS, 2020a), que as atividades presenciais fossem suspensas e que a qualquer momento os discentes seriam chamados para participar das atividades acadêmicas mediadas por tecnologias, com a realização de atividades remotas.

Nesse mesmo período a Universidade de Brasília suspendeu o calendário acadêmico, mas autorizou o funcionamento das atividades como as pesquisas nos programas de Pós-Graduação que pudessem ser realizadas de modo não presencial. Como na presente pesquisa seria iniciada a fase de intervenção presencial, foi preciso um novo planejamento de atividades, que dependia das novas orientações sobre o funcionamento das aulas por parte da Pró-Reitoria de Graduação da instituição de ensino em que a intervenção foi realizada.

4.2.3 O início das aulas remotas na turma investigada

Com o decreto de situação de emergência na Saúde Pública do Estado de Goiás era esperada a suspensão completa das aulas até que fosse possível o retorno presencial, nesse caso seria necessário a adequação do cronograma da pesquisa com o adiamento da intervenção em sala de aula. Entretanto as aulas na instituição em que se realizou a intervenção tiveram prosseguimento, de forma remota, conforme estabelecido pelo Plano Emergencial de Ensino e Aprendizagem para os cursos de graduação, por meio da Instrução Normativa nº 80/2020 (GOIÁS, 2020b). Esse Plano Emergencial estabeleceu que as aulas fossem ministradas de forma não presencial e que os docentes propusessem atividades mediadas por tecnologias, de modo a permitir atividades coletivas síncronas, e que pudessem ser repassadas para os discentes com dificuldades de acesso síncrono. Desse modo, todas as atividades planejadas para serem desenvolvidas com os alunos, que visavam trabalhar o conceito de Limite, não puderam ser desenvolvidas, uma vez que foram concebidas para um ambiente presencial, com a interação entre os estudantes e professora-estudantes.

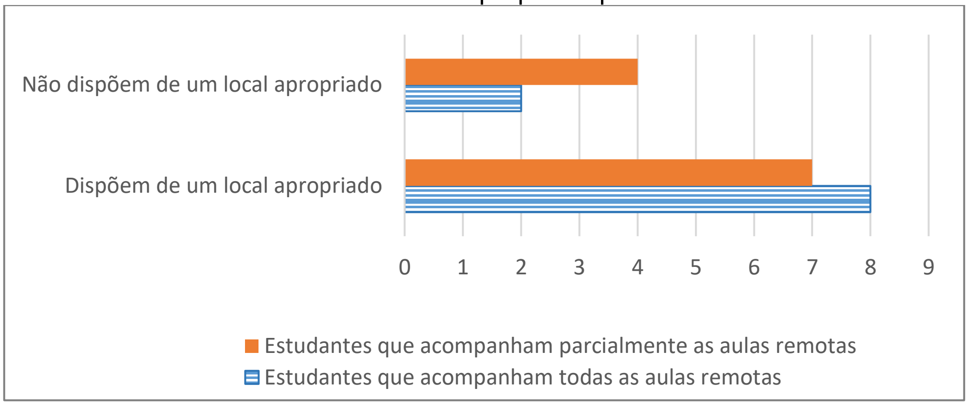
Em meio a esse turbilhão de acontecimentos a pesquisadora ficou muito angustiada, uma vez que a pesquisa estaria acontecendo com a turma em que ministrava aulas. As preocupações não se tratavam apenas do andamento da pesquisa, mas também com o desenvolvimento das aulas ofertadas de modo remoto. Algumas questões começavam a surgir. Como adaptar os conteúdos presenciais para atividades remotas, sem que fosse ofertada capacitação para esse processo? Como fazer para que todos os alunos tivessem acesso ao ensino? Que atividades disponibilizar a fim de favorecer a aprendizagem? E ainda, como levar o ensino para estudantes fragilizados pela possibilidade de contrair a Covid-19, ou até mesmo por ter casos na família de pessoas contaminadas pela doença, e pela insegurança econômica causada pela pandemia? As aulas remotas iniciaram assim que foi decretada a paralização das aulas presenciais e os professores não tiveram tempo para refletir sobre estas questões e se qualificarem para esse novo momento. Com isso, as aulas foram acontecendo enquanto o corpo docente buscava conhecer e trabalhar com as ferramentas para o ensino remoto, descobrindo os meios de alcançar os alunos.

O coordenador do curso de Sistemas de Informação dessa instituição, preocupado com o andamento das aulas remotas, propôs ouvir a opinião da comunidade acadêmica sobre o desenvolvimento aulas ministradas não presenciais, e como estava a participação dos discentes e docentes nesse regime. Como a pesquisadora estava na coordenadora pedagógica da instituição, teve a oportunidade de contribuir para a elaboração desse questionário, e mobilizar alunos e professores a participarem. Os questionários docente e discente foram divulgados pelos meios de comunicação virtuais da instituição e foi respondido por 167 professores e professoras, que representa 87% dos docentes e por 1359 discentes, que representa 70% dos estudantes matriculados.

O acesso às informações desse questionário possibilitou selecionar as respostas dos sujeitos inicialmente selecionados para a fase de intervenção da pesquisa que, como já descrito no capítulo 3, foram os 33 alunos matriculados na disciplina Cálculo 1 do curso de Física modalidade licenciatura. Destes, 21 estudantes responderam ao questionário sobre as atividades não presenciais desenvolvidas na instituição. Sobre os 12 estudantes que não responderam ao questionário, ao final do bimestre letivo foi possível averiguar que 7 participaram das aulas remotas e concluíram o bimestre letivo, 1 estudante participou de algumas dessas aulas e 4 estudantes não participaram das aulas remotas.

Quanto aos 21 discentes que responderam ao questionário, o gráfico 6 a seguir mostra o resultado da primeira questão, sobre o local ou ambiente disponível para estudo.

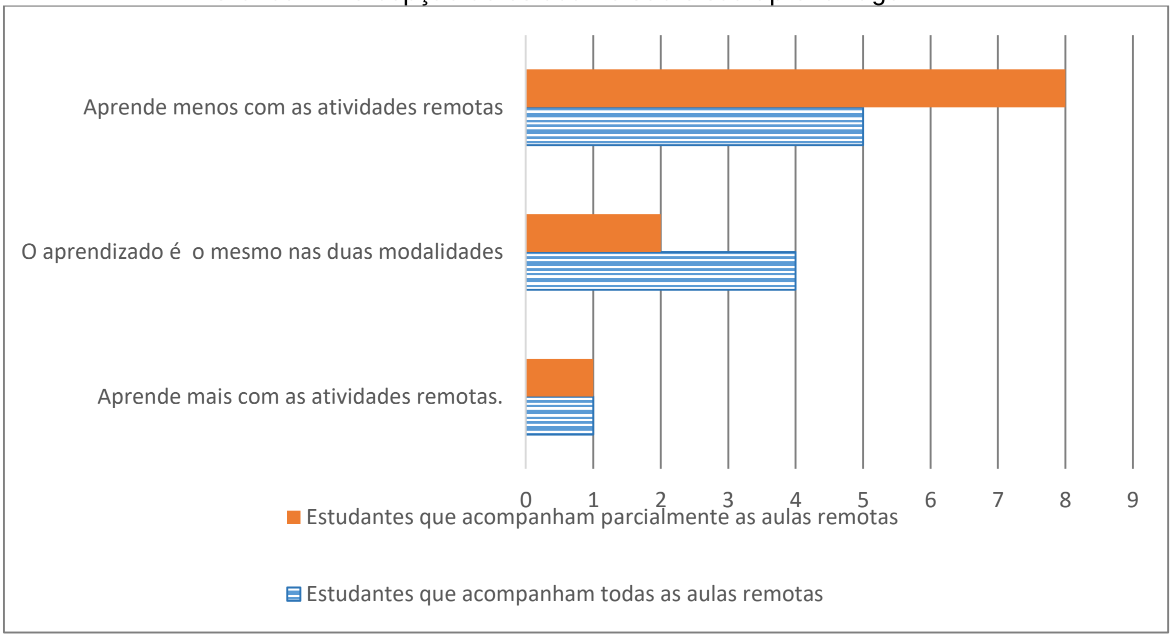
Gráfico 6: Ambiente apropriado para estudo.



Fonte: Elaborado pela autora.

A maioria dos estudantes (15) disseram ter local apropriado para desenvolver as atividades propostas em casa. Além disso, na questão sobre a participação das atividades remotas, todos os respondentes estavam participando totalmente ou parcialmente das atividades oferecidas em seu curso. O gráfico 7 a seguir apresenta as respostas desses estudantes sobre a percepção de aprendizagem, nesse contexto.

Gráfico 7: Percepção do estudante sobre sua aprendizagem.



Fonte: Elaborado pela autora.

No gráfico 7 destaca-se a informação de que a maioria dos respondentes alegaram aprender menos com as aulas remotas. Isso despertou a necessidade de buscar estratégias para facilitar a aprendizagem dos conteúdos nessa modalidade de ensino. Outro dado a ser considerado foi que 4 discentes que responderam ao questionário não participaram das atividades remotas na disciplina Cálculo 1. Três desses estudantes informaram no questionário não ter internet de qualidade ou ambiente apropriado para estudar, e um aluno declarou ser uma boa ideia cursar as disciplinas no próximo semestre.

Com as informações do questionário, foi elaborado um relatório indicando os percentuais quanto à participação dos estudantes nas aulas remotas, as dificuldades encontradas para a efetividade no processo e a opinião discente sobre a continuidade das aulas não presenciais. Identificou-se que 49% dos alunos que estavam participando total ou parcialmente das atividades remotas e que eles gostariam da continuidade nas atividades acadêmicas nessa modalidade e 37% preferiam que as aulas fossem suspensas. O relatório foi encaminhado à Pró-Reitoria de Graduação e contribuiu para mostrar a necessidade de rever todo o processo de aulas não presenciais da instituição, resultando na decisão de finalizar as atividades do primeiro bimestre letivo de 2020, realizando as avaliações e recuperação da aprendizagem, e suspensão temporária do segundo bimestre para identificar os discentes que não participaram das aulas remotas, propor um plano de recuperação para estes estudantes, planejar o segundo bimestre letivo e participar de programas de formação continuada.

Seguindo as orientações supracitadas, as aulas remotas da turma de Cálculo I se encerraram dia 16 de maio, e como as gravações das aulas síncronas e os materiais e atividades estavam disponíveis na plataforma *Google Classroom*, os alunos que não enviaram as atividades avaliativas ou de registro de frequência poderiam entregá-las até o final do mês. Com a finalização do bimestre foi apurado que 24% dos estudantes não participaram das aulas remotas e dos 25 discentes que participaram dessas aulas, 20% não realizaram todas as atividades propostas.

4.2.4 Planejamento de atividades com utilização de metodologias ativas em aulas remotas

Há muito se ouve falar na necessária mudança na educação brasileira, mas poucas ações efetivas são observadas. A falta de políticas públicas que promovam alterações significativas, a tradição escolar já arraigada na população e até mesmo o comodismo tem atuado para a manutenção das “coisas como são”. Com a COVID-19 vieram as crises na saúde e na economia mundial, mas como em toda crise também surgem as oportunidades. Escolas e universidades foram forçadas a se adaptar para a nova realidade, a do ensino remoto, que exige a inserção das tecnologias digitais e novo modo de conceber a sala de aula, possibilitando transformações importantes no ensino. De acordo com Moreira e Schlemmer (2020) o ensino remoto ou aula remota é uma modalidade de ensino ou de aula em que as atividades presenciais são transpostas para os meios digitais em uma sala de aula digital, e tem como objetivo principal fornecer acesso temporário às aulas durante o período de crise. Privilegia-se a aula em tempo síncrono, seguindo princípios do ensino presencial, mas tudo o que é concebido nesse espaço digital é registrado e disponibilizado para ser acessado e revisto posteriormente. (MOREIRA; SCHLEMMER, 2020). Essa nova modalidade de ensino pode ser utilizada para reproduzir as aulas tradicionais presenciais, como também modificar totalmente o espaço destinado às aulas, dependendo da intencionalidade do professor ao concebê-las.

Para os autores supracitados, no ensino remoto o processo é centrado no conteúdo, a comunicação é predominantemente bidirecional e protagonizada por uma vídeo-aula ou pelo professor no sistema de webconferência, e tem como foco as informações e as formas de transmissão dessas informações. Na proposta de intervenção dessa pesquisa, com utilização de metodologias ativas nas aulas remotas, essa perspectiva muda totalmente, pois o processo está centrado no aluno, tendo como foco suas aprendizagens. O espaço de ensino remoto precisa ser apropriado para a interação para que os estudantes possam se comunicar em grupos para a realização das atividades e incentivados a exporem suas opiniões.

Para trabalhar com as metodologias ativas na turma de Cálculo 1, na modalidade de ensino remoto, decidiu-se utilizar as mesmas atividades previamente selecionadas, com as adaptações necessárias para a nova dinâmica de aulas, e além do conteúdo Limite também explorar tópicos do conteúdo Derivadas. As ferramentas selecionadas para as aulas foram *o Google Classroom*, que estava sendo utilizado como sala virtual de apoio e se tornou o espaço principal de aula, as videoaulas utilizando o *Google Meet* e outras ferramentas como o *Poll Everywhere*[11] e *Padlet*[12] para momentos de interação.

A avaliação da aprendizagem, que em todo processo de ensino e aprendizagem se constitui como um elemento importante e orientador da atividade docente, também foi realizada remotamente. A avaliação é uma categoria da organização do trabalho pedagógico que direciona a atuação do professor e deve estar articulada às outras categorias: objetivos, conteúdos e métodos, a fim de promover a aprendizagem (FERNANDES *et al*., 2018). Assim fez-se necessário o planejamento das atividades avaliativas, realizadas no decorrer das aulas em que foram empregadas as metodologias ativas, para que fosse possível averiguar se estariam contribuindo com as aprendizagens dos estudantes.

Como as metodologias ativas preconizam a autonomia do estudante, a formação crítica do indivíduo, a problematização e reflexão e o trabalho em equipe, as avaliações estiveram alinhadas a esses princípios. Diferente do que é comum em aulas tradicionais de matemática, a avaliação deve ir além da reprodução e fórmulas e conceitos, em que o objetivo é apenas o de constatar o que o aluno sabe ou não. Nessa perspectiva,

> A avaliação deve se caracterizar como mais um momento do desenvolvimento da aprendizagem e não mais como um elemento de legitimação estanque, dissociado e isolado da composição construtiva da trama educativa, em que professor e estudante se apresentam como agentes sociais distantes, dicotomizados da comunhão inerente do processo avaliativo (SANTOS; GONTIJO, 2018, p.37).

Considerando estas questões, em todas as atividades realizadas os estudantes foram avaliados segundo os critérios definidos em cada tarefa.

Para a fase de experimentação foi mantida a utilização da metodologia aprendizagem baseada em problemas, já selecionada no primeiro planejamento, unindo-a com o *think-pair-share* (pensar - dispor aos pares – compartilhar), para

---

[11] Plataforma online com versão gratuita que permite a criação de testes, questionários, entre outros, em que os resultados são coletados e apresentados em tempo real.

[12] Ferramenta online com versão gratuita que permite a criação, entre outros, de murais virtuais compartilhados, para apresentação de trabalhos.

o ensino de Limites. A escolha por unir as duas metodologias ativas se deu porque, de acordo com Berbel (2011, p. 37):

> Uma só forma de trabalho pode não atingir a todos os alunos na conquista de níveis complexos de pensamento e de comprometimento em suas ações, como desejados, ao mesmo tempo e em curto tempo. Essa é a razão da necessidade de se buscar diferentes alternativas que contenham, em sua proposta, as condições de provocar atividades que estimulem o desenvolvimento de diferentes habilidades de pensamento dos alunos e possibilitem ao professor atuar naquelas situações que promovem a autonomia, substituindo, sempre que possível, as situações evidentemente controladoras.

A aprendizagem baseada em problemas oferece possibilidades de discussão, que está alinhada com o *think-pair-share,* que de acordo com Prahl (2017) está adequada a atividades que envolvam questões metacognitivas ou de aplicação, e não a tarefas em que o objetivo de aprendizagem seja adquirir informações básicas e factuais. Para explorar os conceitos de Máximos e Mínimos de Funções, do conteúdo Derivadas, optou-se pela instrução por pares, que também tinha sido elegida no planejamento inicial da intervenção. Essa metodologia é voltada ao domínio conceitual, por meio de questões desafiadoras a serem discutidas em pares, visando o entendimento por meio da linguagem mais simples utilizada entre os estudantes. (PINTO *et al*., 2012).

A disciplina foi ministrada semanalmente, com duração de 4 horas-aula, na modalidade remota, transmitidas pelo *Google Meet*. As aulas foram gravadas para que os alunos que não conseguissem fazer o acompanhamento síncrono pudessem acessá-las posteriormente. Essas gravações serviram ainda como instrumento para coleta de informações para análise. Também forma utilizadas como fonte de informações as atividades realizadas pelos estudantes e os formulários por eles preenchidos. Para o conteúdo Limites, em que foram trabalhadas duas situações-problema, foram necessárias sete horas-aula de 55 minutos cada para a atividade com o conteúdo Derivadas, cinco horas-aula de 55 minutos cada.

4.3 EXPERIMENTAÇÃO

A fase de experimentação da Engenharia Didática consiste na apresentação da sequência didática realizada. Para o desenvolvimento dessa fase foi preciso retomar os objetivos de pesquisa, o quadro teórico e levantamento de hipóteses definidos nas análises preliminares e as variáveis macrodidáticas da fase de análise *a priori*. Esse movimento é necessário para justificar a escolha das atividades desenvolvidas e o encadeamento das fases de experimentação (ALMOULOUD, 2007).

Como o objetivo da pesquisa é avaliar uma proposta de ensino para Cálculo Diferencial na perspectiva da Engenharia Didática, empregando metodologias ativas na fase de experimentação, buscando apreender as impressões dos sujeitos da pesquisa, foi elaborado um formulário com questões sobre as impressões dos estudantes para cada atividade realizada, para que o ponto de vista do aluno pudesse ser analisado. No que se refere às atividades escolhidas para trabalhar o conceito Limites, o apoio teórico foi de Artigue (1995), Reis (2001) e Rezende (2003) para que as tarefas não considerassem apenas a aplicação de fórmulas e memorização, mas apreensão de conceitos, que precisariam ser introduzidos de forma intuitiva. Para a atividade envolvendo as Derivadas foi preparada uma atividade de leitura e resolução de exercícios em pares, considerando que o trabalho em equipe contribui com a aprendizagem, como defendem os autores Costa (2005), Diesel, Baldez e Martins (2017) e Fragelli e Fragelli (2017).

Na fase das análises preliminares estabelecemos quatro hipóteses:

- o conteúdo Limites por meio da ideia intuitiva contribui para a compreensão do conceito;

- atividades que envolvem o trabalho em equipe cooperam com a aprendizagem dos estudantes;

- situações problema que articulem teoria e prática estimulam a participação dos alunos;

- atividades que envolvem leitura e pesquisa contribuem para a compreensão de conceitos relacionados à Derivada de uma função e promovem a autonomia discente.

Como já mencionado, o planejamento para a fase de experimentação foi realizado com base em aulas presenciais e seguindo o cronograma de conteúdos estabelecido para essa modalidade de ensino. Com a suspensão das aulas presenciais realizou-se novo planejamento para adequar às aulas remotas, e para acompanhar o cronograma de conteúdos, foram consideradas as três primeiras hipóteses para o trabalho com Limites, e atividade de leitura e pesquisa, da quarta hipótese, para o ensino de Derivadas.

Nesta fase da pesquisa também foram consideradas as variáveis macrodidáticas, que são o ensino com foco em conceitos, a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, trabalho em Grupo E o uso da tecnologia.

4.3.1 Atividades iniciais com a turma investigada e as aulas ministradas com o uso de metodologias ativas

Antes de iniciar as aulas com as metodologias ativas na turma investigada, os estudantes realizaram duas atividades com o objetivo de se familiarizarem com o GeoGebra e para trabalhar a mudança de quadro algébrico para geométrico e vice-versa. As duas atividades aconteceram presencialmente no mês de março (período anterior à suspensão de aulas por conta da pandemia do covid-19) e foram realizadas no laboratório de informática, em duplas, devido à pouca quantidade de computadores disponíveis.

Na primeira atividade (apêndice B) os alunos plotaram no GeoGebra os gráficos de algumas funções, e deveriam representar algebricamente uma função conhecendo seu gráfico. Não houve muitas dificuldades com o *software* e a maioria dos estudantes concluiu a atividade no período da aula, com o auxílio da professora no esclarecimento das dúvidas. A segunda atividade (apêndice C) foi realizada na semana seguinte, após a aula expositiva de revisão de funções de uma variável. Alguns alunos não tinham participado da aula anterior e foram orientados a formar duplas com colegas que fizeram a primeira atividade, para que fossem capazes de se familiarizarem com o GeoGebra. Foram disponibilizadas duas aulas para a realização dessa atividade, mas a maioria não a concluiu nesse período, ficando a entrega da folha de respostas para a semana seguinte.

Como já anunciado, as aulas presenciais na instituição de ensino da pesquisa foram substituídas por aulas remotas, devido à pandemia causada pelo novo Coronavírus, e a atividade realizada pelos estudantes com o auxílio do GeoGebra (apêndice C) foi enviada pela plataforma *Google Classroom*. Apenas um estudante não enviou a atividade por alegar não ser capaz de utilizar o *software* sem o auxílio de outra pessoa. As demais aulas do primeiro semestre letivo seguiram com o conteúdo de funções e introdução ao estudo de Limites.

Antes de iniciar as tarefas com metodologias ativas, os estudantes foram orientados sobre a dinâmica das aulas, com o trabalho em grupos e avaliação contínua. Para os momentos em Grupo Foram disponibilizadas salas virtuais pelo *Google Meet* e murais virtuais, os *Padlets*, para compartilhamento e apresentação de respostas, sendo que os estudantes poderiam utilizar outros recursos, caso preferissem.

A primeira atividade com estudo de Limites seguiu a metodologia ativa aprendizagem baseada em problemas em conjunto com o *think-pair-share*. Como o problema escolhido deveria considerar a realidade dos envolvidos, na perspectiva dessa metodologia, foi elaborada uma situação que descreve um evento possível de acontecer com um carrinho construído para uma Corrida de Arrancada. A aula começou com um vídeo fornecido pelo Centro Acadêmico do Curso de Física, mostrando cenas da etapa final da Corrida de Arrancada da Semana da Física, que ocorreu em novembro de 2019, seguido do convite aos estudantes para participarem da próxima edição desse torneio. Logo após a situação-problema foi apresentada, como enunciada a seguir:

Marcelo e sua equipe construíram um carrinho para participar do Torneio de Robótica da UEG, de modo que pudesse atingir uma velocidade de 2 m/s. Ao realizar os testes, constataram que o carrinho atingiu a velocidade desejada após 7 segundos, tendo percorrido 9 metros. Após este momento o carrinho apresentou um deslizamento no eixo fazendo com que, a partir desse ponto, a cada 10 metros reduzia sua velocidade pela metade.

a) O carrinho vai parar? Caso ele pare, qual será a distância percorrida, a partir do momento que apresentou o defeito?
b) Represente essa situação por meio de uma tabela.
c) Represente essa situação por meio de um gráfico.
d) Escreva uma função que representa essa situação.

Foi destinado um tempo para que os alunos o resolvessem individualmente, que é a primeira parte da metodologia *think-pair-share*, a etapa ‘pensar’, e enviarem suas respostas pelo *Google Classroom*. Na aula seguinte a turma foi dividida em grupos compostos por quatro estudantes para ‘dispor aos pares’ suas resoluções, com o objetivo de chegar a um consenso sobre a resposta correta. Alguns estudantes tiveram dificuldade em trabalhar com o *Padlet*, e foi necessário a intervenção da professora para auxiliá-los. No momento da intervenção eles solicitaram mais tempo do que foi estipulado para concluir a atividade, desse modo foi destinado o restante do período da aula para finalização das discussões e envio das respostas, e as apresentações ficaram para a semana seguinte, sendo necessário que os estudantes preenchessem o formulário com a autoavaliação e avaliação dos grupos.

Na apresentação das equipes, cada uma elegeu um relator para ‘compartilhar’ os resultados a todos na videoaula, e um Grupo Expos seus resultados. Para finalizar a tarefa, a professora questionou os estudantes sobre quais respostas estariam corretas, fez algumas observações sobre as resoluções e comentários apresentados, e solicitou que os estudantes realizassem, oralmente, a avaliação das apresentações. A avaliação entre pares não é uma etapa dessa metodologia ativa, mas foi considerada importante para estimular a participação dos estudantes. Para guiar essa avaliação foram apresentadas frases que poderiam ser utilizadas pelos estudantes, denominadas Frases Orientadoras (apêndice G), como por exemplo, “Eu gostei da apresentação do grupo ___ porque ___”, “Eu discordo da solução da questão ___ do grupo ___ porque ___”, entre outras. Em seguida o enunciado do problema foi retomado e apresentada uma solução possível, sendo nesse momento destacados erros e acertos apresentados pelos grupos. Utilizando a metodologia da ABP/PBL foi retomado o conceito de Limites, partindo da situação-problema em que o espaço percorrido pelo carrinho se aproxima do zero no decorrer do tempo. Posteriormente essa situação foi retomada para discutir Limites no infinito. Ao final da atividade os estudantes foram orientados a preencher o formulário de avaliação da atividade pelo *Google Forms* (apêndice H).

Ainda para contribuir com a ideia de Limite, outra situação-problema com o carrinho foi apresentada para discussão e resolução em grupos. A diferença desse segundo problema é que se forneceu a função do espaço percorrido, para que fosse possível se chegar ao conceito de Limite de função, como enunciado a seguir:

Eduarda montou uma equipe para participar do Torneiro de Robótica da Semana da Física na UEG. Ao realizar os testes, a equipe constatou que a velocidade média do carrinho foi de 2,5 m/s. Com os conhecimentos físicos e matemáticos, a equipe conseguiu obter uma fórmula para o espaço percorrido pelo carrinho: $s(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$, sendo s o espaço percorrido e t o tempo.

1. Considerando essas informações:

a) represente o espaço percorrido pelo carrinho por tabela e graficamente.

b) qual será a velocidade do carrinho no instante 5 segundos após largada?

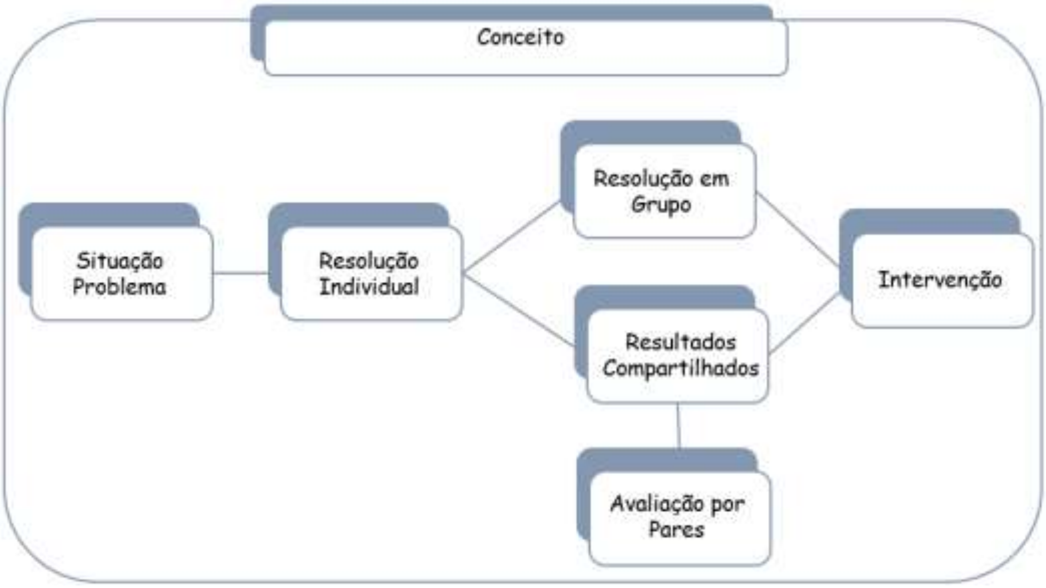
2. A equipe também obteve a fórmula para a velocidade (v) do carrinho em função do tempo (t), que é $v(t) = \frac{t^2}{9}$,

a) represente graficamente a função.

b) essa fórmula obtida para a velocidade está correta?

Deu-se seguimento com as mesmas etapas da primeira atividade, sendo que todos os grupos apresentaram suas respostas. Os alunos precisaram representar a situação por meio de tabela e gráfico, obter o valor da velocidade em um determinado tempo, para que a partir dessas informações fosse feita a discussão sobre o que acontece com a velocidade do carrinho à medida que os intervalos de tempo ficam cada vez menores, utilizando uma planilha de Excel para auxiliar nos cálculos. A fórmula para a velocidade do carrinho foi apresentada para que fosse possível discutir o Limite de uma função em um ponto. Como anteriormente mencionado, o propósito da atividade foi a apreensão de conceitos a partir de uma situação-problema, como mostra o organograma da atividade representado na figura 2.

Figura 2: Organograma da atividade.



Fonte: Elaborado pelos autores

Para avaliar as duas atividades, foram estabelecidos critérios, considerando os objetivos de aprendizagem estabelecidos no planejamento das aulas, descritos a seguir.

Na resolução do problema do carrinho I, foi avaliado se o grupo:

- representou a situação por meio de tabela;

- representou a situação por meio de gráfico;

- apresentou argumentos coerentes em sua resposta;

- identificou que a função que representa a situação é a exponencial;

- foi capaz de apresentar seus resultados de forma clara e compreensível;

Na resolução do problema do carrinho II, foi avaliado se o grupo:

- representou a situação por meio de tabela;

- representou a situação por meio de gráfico;

- obteve a velocidade instantânea;

- apresentou argumentos para justificar que a fórmula da velocidade está correta;

- foi capaz de apresentar seus resultados de forma clara e compreensível;

Os critérios supracitados foram avaliados a partir das seguintes respostas: sim, não ou parcialmente, sendo posteriormente convertidas em uma nota. Também foi atribuída uma pontuação para os estudantes que preencheram o formulário de avaliação.

A terceira atividade explorou o conteúdo Máximos e Mínimos de Funções (apêndice F), utilizando como metodologia de ensino e aprendizagem a instrução por pares. Os estudantes foram orientados a fazer a leitura do um texto “Valores máximo e mínimo” (STEWART, 2011, p.253), e responder algumas questões de múltipla escolha, para que a professora pudesse verificar se os alunos fizeram a leitura do texto e o compreenderam. Na aula seguinte foi realizada a correção dessas questões, dando destaque aos itens com o maior índice de erros, e disponibilizado aos estudantes uma lista de exercícios sobre o conteúdo, extraídas dos livros didáticos de Stewart (2011) e Thomas (2009), com algumas adaptações. Após um tempo determinado para resolução individual os estudantes foram organizados em grupos, para discutir entre os pares as respostas obtidas e chegarem a um acordo sobre o resultado correto. Os resultados foram novamente coletados, mas agora pelos grupos. Para finalizar a atividade a professora fez a correção dos exercícios, dando destaque aos itens com maior percentual de erro (respostas obtidas no formulário de respostas individuais), e solicitou que o formulário de avaliação (apêndice J) fosse preenchido. Todos os alunos que fizeram a atividade individual e em grupo receberam pontuação correspondente.

4.4 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Neste capítulo é apresentada a fase de análise a posteriori e validação da Engenharia Didática, que consiste na exploração das informações recolhidas, contribuindo para a melhoria dos conhecimentos didáticos, tendo como base a análise *a priori*, os fundamentos teóricos e a problemática da pesquisa (ALMOULOUD, 2007). A referida fase apresenta elementos da análise de conteúdo, um conjunto de técnicas de análise das comunicações (BARDIN, 2011), com o intuito de apreender o fenômeno investigado, em uma perspectiva qualitativa. A ênfase é dada aos significados por meio dos relatos contidos nos questionários e formulários preenchidos pelos alunos, e pelas experiências das aulas nas perspectivas dos estudantes e da professora.

Seguindo com as diretrizes da análise de conteúdo, a primeira etapa da organização das informações é denominada por Bardin (2011, p.125) de pré-análise, que “[...] tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir um esquema preciso de desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise.” Para tal foi realizada a organização e leitura de todo material coletado na pesquisa, a saber, questionários, atividades realizadas pelos estudantes, registros das aulas, formulários de autoavaliação e de avaliação dos grupos de trabalho. Ainda que como professora da turma pesquisada já tenha conhecimento do conteúdo desse material, esse procedimento auxiliou na visão geral do que foi produzido e no planejamento dos próximos passos da análise. Para manter o anonimato dos estudantes, e para diferenciar da codificação realizada no questionário inicial, os alunos participantes foram identificados pela letra ‘E’ seguida de um número (E1 à E20). Todas as informações produzidas foram submetidas à análise, uma vez que a turma investigada era composta por poucos alunos e que a variedade de elementos contribui para se chegar a conclusões.

Outra missão da pré-análise é a formulação das hipóteses e dos objetivos (BARDIN, 2011). Não foram traçadas hipóteses de pesquisa, uma vez que se optou pela abordagem qualitativa, mas como parte da fase de análises preliminares da Engenharia Didática foram estabelecidas quatro hipóteses para as atividades desenvolvidas na turma investigada, relacionadas à contribuição das metodologias ativas para a aprendizagem dos estudantes de CDI. Desse modo um dos objetivos da análise foi obter elementos para identificar a contribuição ou não das atividades desenvolvidas com o uso de metodologias ativas na aprendizagem dos alunos participantes da pesquisa.

As informações foram organizadas em duas partes, uma com as atividades realizadas pelos alunos e resultado das questões objetivas da autoavaliação, e outra com os comentários dos estudantes nas questões subjetivas. Esse material foi explorado de modo a se definir as Unidades de Contexto e Unidades de Registro, que são parte da Unidade de Análise. As Unidades de Contexto são “[...] consideradas como o ‘pano de fundo’ que imprimi significado às Unidades de Análise. ” (FRANCO, 2008, p. 43). Por meio das respostas dos questionários dos estudantes, definiu-se a Unidade de Contexto com vista a que

> [...] fique claro o contexto a partir do qual as informações foram elaboradas, concretamente vivenciadas e transformadas em mensagens personalizadas, socialmente construídas e expressas via linguagem (oral, verbal ou simbólica) que permitam identificar o contexto específico de vivência, no bojo do qual foram construídas, inicialmente, e, com certeza, passiveis de transformações e reconstruções. (FRANCO, 2008, p. 41).

Para tanto, analisou-se o questionário respondido por 16 estudantes dos 33 matriculados na disciplina Cálculo 1, que como descrito no capítulo 3, a maioria tem idade entre 18 e 20 anos, a quantidade de homens e mulheres é equilibrada (44% são mulheres e 56% homens) e a maioria não é responsável pelo sustento familiar, que permite inferir ser um fator importante no desempenho acadêmico, uma vez que têm mais tempo disponível para estudo. A maioria dos participantes são oriundos de escolas públicas e 56% dizem ter alguma dificuldade com conteúdos matemáticos básicos, mas descreveram ter boa relação com a matemática ao longo da vida estudantil.

Também foi considerado o contexto de aulas remotas na realização das atividades da investigação, com base no questionário respondido por 21 discentes da turma investigada, que como descrito no capítulo 4, todos os respondentes afirmaram estar participando totalmente ou parcialmente das atividades oferecidas em seu curso e que a maioria (15 estudantes) dispunham de local apropriado para desenvolver as atividades acadêmicas. Desse modo, o Grupo De estudantes de Cálculo 1 de uma universidade pública goiana em aulas remotas é a Unidade de Contexto.

As Unidades de Registro, "[...] menor parte do conteúdo, cuja ocorrência é registrada de acordo com as categorias levantadas" (FRANCO, 2008, p. 37), são as palavras-chave ou expressões extraídas das falas dos estudantes. Dessas falas emergiram as categorias que são "[...] rubricas ou classes, as quais reúnem um Grupo De elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos. " (BARDIN, 2011, p. 147). Nos tópicos a seguir são elencadas as categorias dessa pesquisa.

Destaca-se que as análises foram realizadas mediante as interpretações das informações coletadas, sendo que

> [...] tudo o que é visto e compreendido por uma pessoa sempre o é nesse movimento em que a consciência, pelos atos intencionais, enlaça o visto trazendo-o como tal para si. Desse modo, opera mediante seus atos de compreensão, interpretação e organização concernentes *ao isto* que foi enlaçado na percepção, de modo a possibilitar a comunicação. (BICUDO; KLÜBER, 2013, p. 35, grifo dos autores).

Assim, não se assume uma postura neutra diante do que é apresentado, pois a pesquisadora traz consigo as concepções de mundo, de educação, de sociedade, que mesmo de modo inconsciente, influenciam suas interpretações. Entretanto, buscou-se o olhar para o fenômeno, com vistas a compreendê-lo em sua essência.

4.4.1 Análise das atividades desenvolvidas com a turma investigada

No primeiro bimestre letivo da turma investigada foram trabalhados os conteúdos Funções e conceito de Limites. Geralmente esses conteúdos são estudados nas primeiras aulas de Cálculo I, mas, em função da atipicidade do contexto de aulas remotas, esses conteúdos foram explorados de forma intensiva, ocupando quase todo o bimestre com o objetivo de dedicar mais tempo para resolução de problemas e exercícios durante as aulas. Além disso, os estudantes precisaram se familiarizar com as ferramentas das aulas remotas e também não contavam com o apoio das monitorias, como geralmente é ofertado para auxiliá-los na superação de dificuldades com a matemática básica. Desse modo, o conteúdo Limites foi apresentado no final do primeiro bimestre de aulas, abordado a partir do estudo da velocidade de um carro, com a utilização de cálculos algébricos, tabelas e gráficos. As metodologias ativas foram inseridas no segundo bimestre letivo, após o período de recesso para adequação às aulas remotas e férias acadêmicas. Dando sequência do conteúdo de Cálculo I, o tema Derivadas também foi iniciado com metodologias ativas de ensino.

4.4.1.1 Análise da primeira atividade

A primeira atividade utilizando metodologias ativas com os estudantes de Cálculo 1 (apêndice D) foi realizada em agosto de 2020. Como preparação para a atividade foi solicitado aos estudantes que escrevessem o conceito de Limite, com o objetivo de identificar possíveis erros conceituais e corrigi-los ao longo das aulas sobre esse tema. A partir das produções dos estudantes, foram identificadas quatro categorias de erros conceituais: Limite como uma ferramenta, dificuldade de compreensão de funções matemáticas, dificuldade em compreender a definição de Limite e reprodução de conceitos.

- Limite como uma ferramenta.

Na história do Cálculo Diferencial e Integral essa disciplina era vista como uma preparação para outra, a Análise Matemática, e de maneira equivocada alguns professores compreenderam que no Cálculo, os estudantes deveriam aprender as técnicas e fazer contas, uma vez que em Análise seriam trabalhados os fundamentos da disciplina. (LIMA; SILVA, 2012). Isso fez com que se tivesse o entendimento de que em Cálculo se aprende os procedimentos, as técnicas para serem aplicadas em outras disciplinas. Esse modo de conceber o Cálculo pôde ser observado nas falas dos estudantes pesquisados, como mostra o excerto a seguir.

> Limite, na matemática, é uma determinação usada para facilitar a resolução de equações, em sua maioria polinomiais, impondo um valor Limite para a variável. (E5).

O estudante compreende que o conteúdo Limite, estudado em cálculo, é uma ferramenta para se resolver equações, em uma visão instrumental da matemática.

- Dificuldade de compreensão de funções matemáticas.

Uma das dificuldades no ensino de Cálculo, segundo Artigue (1995), está associada à complexidade dos objetos básicos da disciplina, como Funções, e foi possível observar essa questão ao analisar as respostas dos estudantes na atividade, como destacamos no trecho a seguir.

> O conceito de Limite é usado para descrever a variação de um número, em uma determinada função. (E14).

Esse trecho mostra que o conceito de “variação” não está claro, pois um número não varia. Ao discutir a prevalência da abordagem estática sobre a dinâmica no ensino de Funções, Rezende (2003) sinaliza que um dos problemas está em identificar as quantidades variáveis envolvidas no problema a ser resolvido e a relação funcional entre elas. Thompson e Arel (2021) destacam a importância da compreensão do significado de variação, uma vez que compreender esse termo como substituição de valores não provoca uma imagem de variação contínua, necessária para a compreensão das ideias de cálculo.

- Dificuldade em compreender a definição de Limite.

As dificuldades a relativas ao ensino e aprendizagem de Limite são encontradas ao longo da história da Matemática e começam a aparecer desde a noção intuitiva e se agravando com a definição formal do conceito. (BARROS; MELONI, 2006). Além da dificuldade associada à complexidade dos objetos básicos da disciplina, Artigue (1995b) identifica outra, relacionada ao conceito de Limites. Ao escreverem uma definição para esse conceito, percebeu-se alguns problemas com os termos incorporados a ele, como evidenciado a seguir.

> O Limite é um valor para "Y" "tender mas nunca ser", obtido quando aproximamos "X" de um valor, mas nunca se é esse valor, apenas números próximos positivamente ou negativamente. (E7).
>
> Limite é um valor atribuído a uma função, que se aproxima de um determinado número, mas não podendo ser o próprio número. (E8)

Esses trechos sinalizam dificuldade de compreensão dos termos “tender” e “aproxima”, uma vez que para os estudantes esse “valor” não pode ser alcançado. Esses termos “[...] entre outros, geram dificuldades no processo de aprendizagem do Cálculo. ” (BARROS; MELONI, 2006, p. 1739). Para Rocha (2016) é um obstáculo epistemológico relacionado ao Limite ser ou não atingido, e do ponto de vista histórico se aproxima da definição de D’Alambert, em que a variável, em nenhuma hipótese, atinge o valor Limite.

- Reprodução de conceitos.

Foram identificadas cinco respostas em que o Limite é utilizado para descrever o comportamento de uma função, semelhante à definição descrita no site da Wikipédia, que é uma enciclopédia virtual livre com conteúdo editável pelos usuários. Possivelmente esses estudantes buscaram o conceito nesse site para enviarem suas respostas. A prática de reproduzir conceitos é própria do ensino tecnicista, que está arraigado no ensino da matemática. Ainda que desde a década de 1970 se buscasse no Brasil um novo modelo de ensino, ainda hoje é possível notar características didáticas do ensino tradicional e a presença do condicionamento no processo de alfabetização matemática (TAROUCO; SILVA;

SILVA, 2016). Desse modo, o ato de reproduzir, identificado nas respostas dos estudantes, pode ser para eles um procedimento natural em matemática.

Para ajustar a compreensão de Limite e resolver os erros conceituais, como os que foram identificados acima, foi apresentado na aula remota o Problema do Carrinho I (apêndice D) e os estudantes foram orientados a resolve-lo individualmente, anotando a resolução no caderno. Essa é a fase do “pensar” da metodologia *think-pair-share*. O problema refere-se a uma situação em que um carrinho do Torneio de Robótica apresentava um defeito, de modo que a partir de um certo ponto da trajetória, começava a reduzir sua velocidade. Foi destinado trinta minutos para essa etapa e em seguida os alunos se organizaram em grupos (designados por A, B, C D, E, com três componentes cada) para a fase da metodologia de compartilhar e discutir suas respostas. Foi explicado como trabalhar em grupos na plataforma *Google Meet* e como utilizar o *Padlet* para compartilhar as respostas, que foram os recursos sugeridos para a atividade sendo que, caso preferissem, outros poderiam ser utilizados. Essa etapa teve duração de setenta minutos e todos os *Padlets* foram finalizados nessa aula.

Na semana seguinte a aula começou com a apresentação dos resultados, que é a última fase da metodologia escolhida. Todos os grupos postaram as respostas nos *Padlets* e foram previamente copiadas para slides e apresentados pela professora para facilitar a visualização por todos durante a aula remota. O Grupo B não apresentou, já que os alunos alegaram não dispor de microfone, e o Grupo E não se manifestou no momento das apresentações, mas durante a avaliação oral entre pares um componente desse Grupo Comentou sobre os procedimentos adotados para resolver o problema.

A primeira pergunta do problema teve como objetivo verificar se os estudantes eram capazes de distinguir a situação real de que em algum momento o carrinho iria parar, da situação matemática de que é sempre possível retirar a metade de um número, que indicaria que o espaço percorrido não chegaria ao valor zero. Esse problema também foi escolhido para tratar do conceito de Limite, com a ideia da aproximação a zero. Os grupos B e D afirmaram que na situação apresentada o carrinho não para, e os grupos A e E concluíram que em algum momento o carrinho pararia. O Grupo C postou no *Padlet* que o carrinho iria parar, mas na apresentação mudou a resposta, como mostra o diálogo entre o estudante que estava apresentando em nome do grupo (E14), e a professora.

> - A resposta foi que ele não vai parar, pois, não vai chegar no zero, e para parar a velocidade tem que ser igual a zero. (E14)
> - Mas aqui no slide está dizendo que ele vai parar tendo percorrido 70 metros (Professora).
> - Ah, então no caso é que a gente esqueceu de trocar. [...] Então essa foi a resposta da questão (a), que o carrinho não vai parar pois não vai chegar a zero. (E14)

Nas questões (b), (c) e (d) a situação deveria ser representada por meio de tabela, gráfico e por uma função, respectivamente. O objetivo era verificar se os grupos identificaram que se tratava de uma função exponencial e se conseguiriam representá-la por tabela e gráfico. O Grupo A apresentou uma tabela com valores da velocidade e distância percorrida e utilizou a linha de tendência do Excel para modelar a situação, concluindo que seria uma função logarítmica. Os estudantes desse Grupo Chegaram à conclusão do tipo de gráfico que representaria a situação dada comparando com os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas com o esboço feito por eles no Excel, percebendo que a segunda seria mais adequada. Esse erro pode ter ocorrido pelo motivo dos alunos não terem observado as propriedades dessas funções (HEWSON, 2013; MELENDY, 2008), uma vez que o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(0,1)$, ou por não terem considerado que nessa situação matemática pode-se dizer que há uma translação de eixo no gráfico, pois a velocidade do carrinho começa a reduzir após ter percorrido 9 metros, que é quando inicia o comportamento que pode ser modelado pela função exponencial. Essas possíveis causas do erro decorrem das dificuldades relacionadas às funções matemáticas. Novamente observamos que os alunos apresentam dificuldades conceituais de Funções, como apontado por autores como Artigue (1995), Bezerra (2019) e Thompson e Harel (2021).

Como já informado, o Grupo B não fez a apresentação oral e enviaram como resposta uma tabela indicando o espaço percorrido e velocidade média, e a representação gráfica, como mostra a figura 3. Não enviaram resposta para o item (d) em que era necessário escrever a função referente a situação matemática apresentada.

Figura 3: resposta da questão (c) do Problema do Carrinho I (apêndice D), apresentada pelo Grupo B.

Fonte: resposta do Grupo B enviada pelo *Google Classroom*.

É possível observar que os alunos do Grupo B não identificaram que se tratava de uma função exponencial, uma vez que apenas indicaram alguns pontos representando a distância percorrida pelo carrinho e “unindo” esses pontos. Esse modo de esboço do gráfico, que surge de pares ordenados no plano cartesiano, é ensinado aos alunos no ensino fundamental e médio, o que não está errado, mas é um obstáculo à noção de interdependência entre quantidades variáveis, essencial para o desenvolvimento do Cálculo. (REZENDE, 2003). Por não identificarem a função os estudantes fazem a representação gráfica seguindo o modelo aprendido, identificando pontos e unindo-os em sequência.

Para essa questão o Grupo C novamente apresentou uma resposta diferente da resolução enviada, em que representaram o gráfico como uma reta para o espaço percorrido e velocidade média, seguindo os valores indicados na tabela criada por eles. Na apresentação o estudante (E14) informou que o gráfico que representa a situação seria o de uma função exponencial.

> Na letra (c) a gente fez o gráfico onde que no eixo das abscissas é a velocidade do carrinho e nos eixos das ordenadas é a distância percorrida. Agora na questão (d) que a gente também esqueceu de trocar aí no slide, foi que a gente fez a função de $f(x)$ é igual a 2 dividido por 2 elevado a x, onde que nessa função o gráfico das ordenadas que vai ser a velocidade do carrinho e o eixo das abscissas que será a distância percorrida pelo carrinho.

Quanto à representação algébrica da função, o estudante apresentou oralmente uma resposta próxima da correta, mas na resposta por escrito, enviada na aula anterior, não constava solução para essa questão. Essas dúvidas, assim como observado no Grupo B, evidenciam a falta de compreensão de conceitos relacionados à Função, e como são fundamentais para o tratamento das ideias básicas do Cálculo (SILVA, 2011), precisam ser trabalhadas. Por outro lado, destaca-se a importância de oportunizar aos estudantes tempo para reflexão acerca de suas produções pois, o intervalo entre a entrega da atividade por escrito e sua apresentação oral, no caso desse estudante, relevou-se importante para o surgimento de ideias para solucionar o problema. (KOZLOWSKI; CHAMBERLIN, 2019; REIS; BARRETO, 2017).

Na apresentação oral do Grupo D o estudante responsável pela explanação também não seguiu o que foi postado no *Padlet.* Assim como ocorreu com o grupos C, as respostas estavam mais próximas da resolução correta do que a solução escrita, isso porque a dinâmica do *think-pair-share* contribui para que o aluno apresente respostas mais elaboradas e estejam mais seguros em suas justificativas, devido ao tempo disponível para pensarem sobre o problema. (REIS; BARRETO, 2017). Como as apresentações ocorreram em aula posterior ao envio das respostas, os estudantes puderam refletir sobre suas resoluções e até mesmo compará-las com as dos demais colegas em suas explanações, o que é um ganho no processo de aprendizagem do indivíduo.

Ao transcrever e analisar a apresentação oral do Grupo D e compará-la com a resolução enviada por escrito, pode-se fazer algumas considerações. No *Padlet* o grupo representou uma tabela com valores de espaço percorrido e velocidade, o gráfico de uma função afim e as equações do MUV – Movimento Uniformemente Variado ($v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ e $v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta s$). Oralmente a explicação a respeito do gráfico foi a seguinte:

> Esse gráfico tem alguns problemas. Era para ser um gráfico de dois comportamentos, porque antes de estragar, o carro estava apresentando um movimento acelerado, assim que ele estragou estava fazendo um movimento desacelerado. E tem outro problema, ele é a velocidade em função do tempo e não tem tempo igual a zero, a gente esqueceu de botar isso no gráfico. (E7).

Apesar dessas considerações do estudante, a apresentação revelou as dificuldades em relacionar o gráfico com a função apresentada, em resposta à questão (d) do problema. De acordo com o estudante:

> [...] basicamente a gente descobriu aceleração, velocidade inicial, e botou na fórmula $v = v_0 + at$ e dá pra descobrir a função. No caso o gráfico da velocidade em função do tempo ele é uma reta e o gráfico do espaço em função do tempo deu para ver que ele era uma exponencial. (E7).

Mas as equações do Movimento Uniformemente Variado apresentados são quadráticas, não exponenciais. Além de evidenciar erros conceituais a respeito de Funções, também é possível inferir que o Grupo Apresentou dificuldade em escrever uma função para a situação apresentada, buscando em fórmulas conhecidas, do MUV nesse caso, aquela que melhor se adequasse ao problema. Infere-se que esse é um reflexo do ensino tradicional da matemática, que de acordo com Salinas e Alanís (2009) é formal e rigoroso, e a aprendizagem do aluno se evidencia no domínio de conceitos e procedimentos rigorosamente organizados e na habilidade de resolver exercícios rotineiros. Os estudantes não estão habituados a criar, mas a reproduzir, por isso buscaram em fórmulas prontas o resultado para a questão.

Ao final das apresentações os estudantes foram convidados a comentar sobre as apresentações de seus pares. Um componente do grupo E, que não tinha se manifestado, fez comentários positivos sobre a apresentação do Grupo A, que segundo ele, estava de acordo com os resultados obtidos por sua equipe, também comentou brevemente sobre as conclusões obtidas por ele com os colegas. No *Padlet* enviado apresentaram a tabela e gráfico da velocidade e percurso percorrido e concluíram que se tratava de uma função exponencial. Ainda durante a avaliação em pares foi solicitado que o Grupo D explicasse melhor sobre a obtenção do gráfico, e como eles chegaram à conclusão que se tratava de uma reta. O estudante (E7) fez a explicação:

> Era uma reta a velocidade em função do tempo. O espaço em função do tempo continua sendo uma expo..., uma equação do segundo grau, função do segundo grau. [...] Se é o movimento acelerado, se o corpo tem uma aceleração, o movimento vai ter que ser esse aí, o movimento em função do tempo vai ter que ser uma função do segundo grau, o que eu fiz foi substituir os valores, tipo assim, do espaço inicial, do v_0, do t, do t não, da aceleração, tecnicamente é isso. Foi só pegar uma fórmula da Física e substituir [...]. (E7).

No comentário fica claro que o Grupo D buscou fórmulas conhecidas que mais se adequassem ao problema. O gráfico representa uma reta ou uma função do segundo grau, dependendo do que se considera, velocidade ou espaço percorrido, baseado nas fórmulas da Física. Como já discutido anteriormente, um reflexo do ensino tradicional de reprodução de fórmulas e conceitos.

Para avaliar as produções dos estudantes, foi organizada uma tabela com critérios observados na resolução e apresentação da atividade, considerando os objetivos de aprendizagem estabelecidos no planejamento das aulas, em que foi marcado “sim”, “parcialmente” ou “não” para cada item considerado, sendo os quatro primeiros de acordo com a resposta enviada pelo *Padlet* e a última à respeito da apresentação do grupo. Os estudantes que não participaram da aula síncrona tiveram oportunidade de enviar suas respostas e foram avaliados com os mesmos critérios, não pontuando o item da apresentação em grupo. A tabela 1 a seguir mostra o resultado.

Tabela 1: Avaliação da atividade em grupo “Problema do Carrinho I”.

Problema do Carrinho I	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
Representou a situação por meio de tabela	sim	parcialmente	sim	Sim	Sim
Representou a situação por meio de gráfico	sim	Sim	sim	Sim	Sim
Apresentou argumentos coerentes para a pergunta dada	sim	parcialmente	sim	Sim	Sim
Identificou que a função que representa a situação é a exponencial	parcialmente	não	não	parcialmente	Sim
O Grupo Foi capaz de apresentar seus resultados de forma clara e compreensível	sim	não	parcialmente	Sim	Não

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

A tabela 1 acima mostra que todos os grupos foram capazes, total ou parcialmente, de representar a situação matemática por meio de uma tabela, de um gráfico, e apresentarem argumentos lógicos para em suas respostas, porém apenas um Grupo Chegou ao resultado correto da representação do problema como uma função exponencial, o que indica que os conceitos relacionados à Função não estão claros aos estudantes, como tem-se discutido nesse tópico.

Para escrever corretamente a função seria necessário identificar as variáveis e observar a relação entre elas, o que é muito difícil para o aluno, uma vez que, como apresenta Rezende (2003), o modo como ele foi ensinado na educação básica, no que diz respeito à esse conceito, não o capacita a essa tarefa.

> Isso mesmo, como exigir desse aluno que “enxergue” o conceito de função, se até o momento, a função sempre foi dada “pronta” para ele? Como pode ele “enxergar” as “variáveis” do problema, se até agora estas eram apenas “letras” (x e y, de modo geral) que representavam números que se relacionavam segundo uma lei de correspondência explicitada *a priori*? (REZENDE, 2003, p. 347).

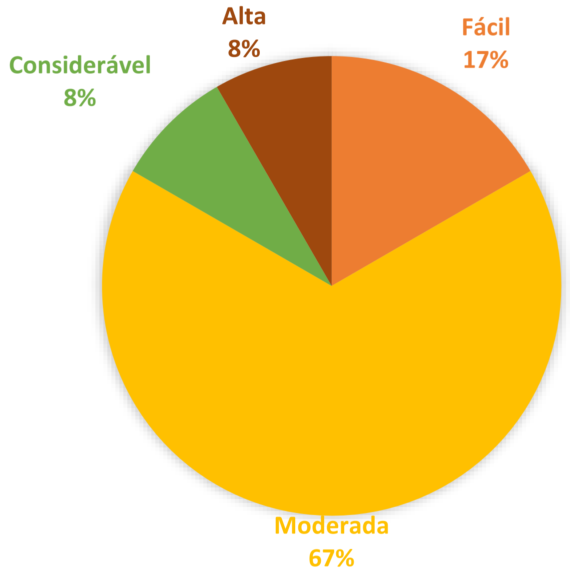
O desenvolvimento desse conceito é um obstáculo didático no ensino de Cálculo e deve ser considerado no trabalho pedagógico do professor (BEZERRA, 2019). Ainda que se tenha revisado tópicos de Funções no início do semestre, antes de se trabalhar propriamente os conteúdos Limites e Derivadas, como planejado na organização didática da fase de experimentação, algumas questões conceituais que ainda não tinham sido apropriadas pelos estudantes.

A fim de corrigir os erros detectados na resolução do Problema do Carrinho I, foi apresentada uma solução possível pela professora, destacando outras possibilidades de resolução. Em seguida foi reforçada a ideia de aproximação de uma função a um determinado valor (no caso do problema apresentado, o valor zero), e utilizando os valores da velocidade média do carrinho, calculada na expressão $\lim_{V \to 0} V(S)$, o significado de $V \to 0$ (V tender a zero). A finalização dessa atividade se deu com o preenchimento do formulário de autoavaliação (apêndice H). Após o intervalo da aula, o Problema do Carrinho II (apêndice E) foi explorado com os estudantes e, no próximo tópico, os resultados serão apresentados.

Ao final de cada atividade os estudantes responderam a um formulário de autoavaliação a respeito do seu desempenho na atividade, participação e contribuição no Grupo De trabalho. Foram recebidos 17 formulários referentes à essa atividade, tanto de alunos que participaram da aula síncrona como dos que acessaram o vídeo da aula, realizaram individualmente a tarefa e enviaram suas atividades posteriormente. Como a atividade foi planejada para ser realizada de forma síncrona, em dois momentos, individual e em grupo, serão apresentadas as respostas dos estudantes que estavam presentes remotamente na aula e depois as dos alunos que fizeram a atividade de forma assíncrona. Dos 15 estudantes que estavam presentes no momento da divisão dos grupos, constatamos que 2 não participaram efetivamente da atividade e 1 não enviou o formulário, ou seja, validamos 12 respostas.

Os formulários de autoavaliação eram compostos por questões de múltipla escolha a respeito da atividade e da participação nos grupos de trabalho e por questões em que os alunos faziam comentários sobre as aulas. A análise desses comentários é apresentada no tópico 4.4.2 “Análise das percepções dos estudantes sobre as atividades desenvolvidas”. Observando os demais itens do formulário de autoavaliação, infere-se que, sobre a atividade proposta, 8 afirmaram ser capazes de realizá-la, o que representa 62% dos participantes, sendo que 6 a fizeram com auxílio de materiais de apoio ou de outra pessoa. Quanto ao grau de dificuldade encontrada na realização da tarefa, o gráfico 8 indica as percepções dos estudantes acerca dessa situação.

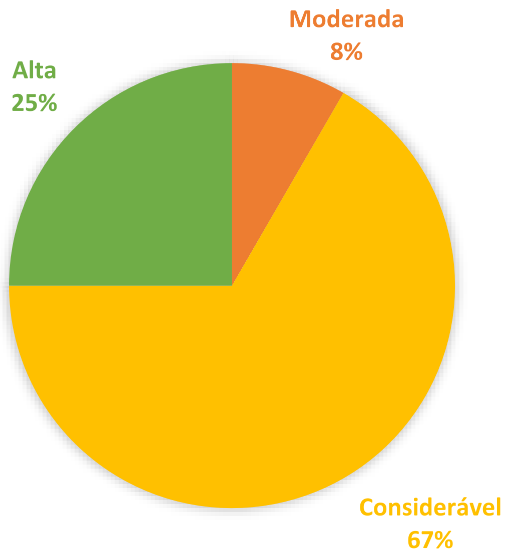
Gráfico 8: Grau de dificuldade na realização da atividade 1.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Como pode ser observado no gráfico 8, a maioria dos estudantes avaliaram a atividade com grau moderado de dificuldade, o que está de acordo com o planejado, pois para que o debate nos grupos seja proveitoso a tarefa não pode ser de baixa complexidade, de modo que não gere discussões, nem muito complexa a ponto de desestimular sua realização. No que diz respeito à dedicação dos discentes para essa atividade, 2 estudantes indicaram como alta, 6 considerável, 4 moderada, e 1 pouca. A maioria (8) avaliou como considerável a contribuição da atividade para compreensão do conteúdo, como mostra o gráfico 9 a seguir.

Gráfico 9: Contribuição da atividade 1 para compreensão do conteúdo.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Sobre o trabalho em grupo, 8 (62%) estudantes afirmaram ter participado ativamente das discussões e contribuído com o grupo. Para 6 destes, todos os participantes do Grupo Contribuíram para resolver o problema e 5 consideraram como alta ou considerável a discussão em grupo para obter a solução e compreender o conteúdo.

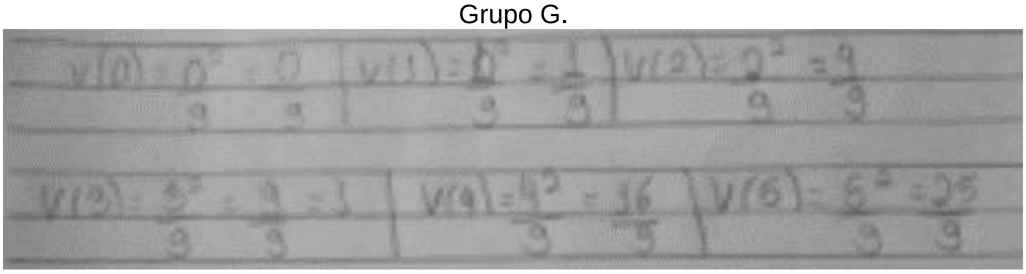
Dos estudantes que não participaram da aula síncrona mas enviaram a atividade, 2 afirmaram conseguir realiza-la, 1 fez parte da atividade e 2 indicaram que não foram capazes de fazê-la. A respeito do grau de dificuldade, 4 disseram ser moderada e 1 considerável, sendo que 1 avaliou como pouca a dedicação para a realização da atividade.

4.4.1.2 Análise da segunda atividade

A segunda atividade desenvolvida foi a resolução do Problema do Carrinho II (apêndice E), seguindo a mesma dinâmica da primeira, em que o problema foi lido pela professora, destinado trinta minutos para a resolução individual, seguido da discussão em grupos e apresentação dos resultados para a turma, conforme a metodologia do *think-pair-share* orienta. Foram formados três grupos com quatro componentes (Grupos F, G, H) e um Grupo Com três componentes (Grupo I) e como os alunos já estavam familiarizados com os procedimentos, o trabalho fluiu bem de modo que foi possível a apresentação de três grupos durante a aula, e um (Grupo G) expôs seus resultados na semana seguinte.

Na primeira questão do problema era necessário representar a situação por meio de tabela e gráfico e determinar a velocidade no instante dado. O Grupo G não conseguiu organizar as informações em uma tabela e apresentou os cálculos com a fórmula dada no enunciado, como mostra a figura a seguir.

Figura 4: resposta da questão (a) do Problema do Carrinho II (apêndice E), apresentada pelo Grupo G.



Fonte: resposta do Grupo F enviada pelo *Google Classroom*.

Ainda que na correção da atividade anterior a professora tenha comentado sobre a tabela de valores matemáticos a partir das respostas apresentadas, o Grupo G não o fez corretamente nessa segunda atividade. O gráfico foi feito à mão, sem escala, unindo os pares ordenados correspondentes, que sugere o modelo ensinado aos alunos no ensino fundamental e médio que, de acordo com Rezende (2003) é um obstáculo epistemológico ao ensino de Cálculo. Os demais grupos apresentaram a tabela corretamente e enviaram a imagem dos gráficos plotados por algum *software*, sendo que o Grupo H não considerou que o tempo deveria ser maior ou igual a zero.

Em resposta à pergunta “qual será a velocidade do carrinho no instante 5 segundos após a largada? ”, os componentes do Grupo F não enviaram resposta pelo *Padlet,* mas na apresentação mostraram o resultado obtido por meio da derivada do espaço percorrido. Ter apresentado uma resposta diferente ao que foi enviado, ou uma resposta que na atividade escrita estava ausente, denota, assim como ocorreu com outros grupos na primeira atividade, que os estudantes tiveram mais tempo para refletir sobre sua resolução ou compará-la com a dos demais colegas em suas explanações, o que é positivo para o processo de aprendizagem. O Grupo I apresentou solução semelhante ao que o Grupo F indicou oralmente, o que assinala que o conteúdo Derivadas, ainda não abordado nessa disciplina, já era conhecido por estes estudantes. Os grupos G e H não encontraram a solução correta, o primeiro porque utilizou a fórmula do espaço percorrido do enunciado do problema para calcular a velocidade, e o segundo porque usou a fórmula da velocidade média. Infere-se que a estratégia desses dois grupos foi buscar fórmulas da Física que se adequassem à situação apresentada, uma consequência do ensino tecnicista da matemática, de reprodução de fórmulas e conceitos, que para Salinas e Alanís (2009) é um modelo que gera problemas de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral.

No enunciado da segunda questão do problema foi dada uma fórmula para a velocidade para que indicassem estar ou não correta, justificando o resultado. Os componentes do Grupo F não entraram em um consenso sobre essa questão e não apresentaram resposta. Para os estudantes do Grupo G a fórmula não estava correta, mas não indicaram uma justificativa coerente, apenas escreveram que: "Não, pois não são os mesmos valores atribuídos". Para o Grupo H a fórmula indicada no enunciado estava correta, e justificaram pelo comportamento do gráfico, como mostra o excerto abaixo.

> Está certa porque o gráfico do $s(t)$ é uma função do 3º grau e ela tem uma quebra no ponto zero, invertendo o seu sentido.
> E o gráfico da $v(t)$ é uma função crescente, com sua velocidade positiva. (Resposta do Grupo H à questão 2b.)

Essa resposta mostra que os alunos têm conhecimentos relacionados com o conceito de Função. O Grupo I também concluiu que a fórmula estava correta, justificando que a velocidade dada é obtida pela derivada da função espaço em relação ao tempo percorrido. Como já observado na resposta à primeira questão, os estudantes desse grupo manifestam conhecimentos sobre esse conteúdo, e constou-se, ao buscar informações sobre estes estudantes, que alguns já cursaram Cálculo. Rocha (2016) realizou uma pesquisa com acadêmicos repetentes em CDI e constatou que esses estudantes já tinham suas concepções ao conteúdo trabalhado, o que parece ter uma forte influência na imagem do conceito de limite que foi construído ao cursar a disciplina anteriormente. Para o autor, esses alunos persistem no comportamento algebrista de substituição de valores, e como seus cálculos são corretos para os casos em que a função é contínua, seguem em tratar as situações matemáticas de maneira procedimental, sem se preocupar com os conceitos envolvidos.

Assim como na primeira atividade, os resultados foram organizados em uma tabela, com critérios observados na resolução e apresentação da atividade, em que foi marcado “sim”, “parcialmente” ou “não” para cada um desses critérios. A tabela 2 a seguir mostra o resultado da atividade.

Tabela 2: Avaliação da atividade em grupo “Problema do Carrinho II”.

Problema do Carrinho II	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I
Representou a situação por meio de tabela e gráfico	sim	parcialmente	sim	sim
Obteve a velocidade instantânea	sim	não	parcialmente	sim
Apresentou argumentos para justificar que a fórmula da velocidade está correta	parcialmente	não	parcialmente	Sim
O grupo foi capaz de apresentar seus resultados de forma clara e compreensível	sim	sim	sim	Sim

Fonte: Elaborada pelos autores.

Pela tabela pode-se inferir que a turma apresentou dificuldades em apresentar argumentos a respeito da fórmula da velocidade, que foi realizado corretamente por apenas um grupo. Para Lin (2018) as dificuldades em argumentação são enfrentadas por estudantes em diferentes níveis e escolaridade, e muitas vezes é obstáculo até mesmo para professores que, segundo ele, não possuem formação suficiente em matemática para trabalhar a argumentação em sala de aula. O ensino por meio de memorização e reprodução de regras e fórmulas não contribui para a prática argumentativa, por isso a importância de se empregar a resolução de problemas com utilização da linguagem oral e escrita para justificar as respostas apresentadas, e não apenas cálculos matemáticos. Para Solar-Bezmalinovic (2018) o uso de estratégias comunicativas, tarefas matemáticas abertas e o bom planejamento do professor promovem a argumentação coletiva. Desse modo o trabalho com a resolução de problemas é capaz de mobilizar o aluno à argumentação.

Na aula seguinte às apresentações foi feita a correção da atividade, destacando os erros que foram identificados nas resoluções dos grupos. Para Cury (2013) há muitas maneiras de se trabalhar com os erros que são detectados em sala de aula, como por exemplo,

> [...] um professor pode estar interessado apenas em remediar os erros que detecta nas produções de seus alunos, mas, posteriormente, ou com outra turma, pode encontrar um resultado intrigante que o leva a aprofundar-se no conteúdo matemático ou, mesmo, a propor a seus alunos que se engajem com ele na pesquisa. (CURY, 2013, p. 38).

Na intervenção os erros foram utilizados para identificar as dificuldades dos estudantes com o conteúdo Limite. A partir disso, e seguindo a sugestão de Reis (2001), de um ensino voltado para a problematização, ressignificação e sistematização de conceitos, buscando um ponto de equilíbrio entre rigor e intuição, a correção desse segundo problema explorou a definição intuitiva do conceito e, em seguida, foi apresentada a definição formal.

Os estudantes também precisaram enviar sua opinião acerca da possibilidade de representar a situação-problema do Carrinho II por um limite. Dos treze estudantes que opinaram, dois disseram não ser possível obter um limite para representar o problema, sendo que um estudante justificou que

> [...] o Limite 1/x quando x tende ao infinito o Limite é igual a 0. E o Limite não pode ser zero, pois o carrinho não chega a parar. (E16).

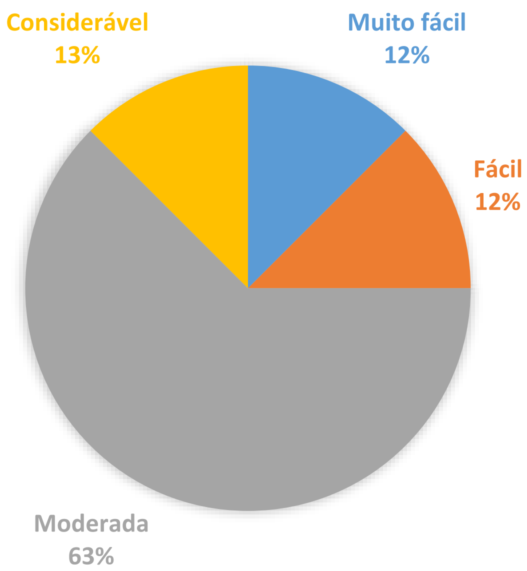
Essa afirmação mostra que o estudante sabe realizar os cálculos algébricos, mas há um conflito entre o resultado numérico e a interpretação da situação apresentada. Para Artigue (1995) uma das dificuldades na aprendizagem do Cálculo é que ao mesmo tempo que depende muito de habilidades algébricas, também exige uma ruptura com essas práticas para acessá-lo. Ainda segundo a autora, o ensino tradicional não contribui para que os alunos tomem consciência dessas rupturas.

Um estudante afirmou que é possível representar um limite para o problema, mas não soube escrevê-lo, o que assinala a dificuldade de se expressar matematicamente. Os demais estudantes indicaram um limite para situação apresentada, sendo que três o apresentaram tendendo a um número determinado (tendendo a 2 e 7), dois alunos o escreveram tendendo ao infinito e cinco indicaram com palavras ou expressões matemáticas que tendia a zero. Os dois últimos resultados trazem respostas coerentes com a situação do Problema do Carrinho I, uma vez que, na situação dada, pode-se considerar um limite em que a velocidade tende a zero ou em que o espaço percorrido tende ao infinito.

A última tarefa realizada foi o preenchimento do formulário de autoavaliação. Dos 15 estudantes que estavam presentes no momento da divisão dos grupos, 8 enviaram o formulário. Além destes, foram recebidos de 2 estudantes que não participaram da aula síncrona, mas fizeram as atividades posteriormente. Do mesmo modo como na primeira atividade, consideramos para essa análise as respostas dos alunos que participaram de forma síncrona.

Foi apurado que de 8 estudantes que conseguiram realizar a atividade, 7 a fizeram por completo, (2 a realizaram sozinhos e 5 com ajuda de materiais de apoio ou de outras pessoas) e 1 estudante fez apenas parte da atividade. Quanto ao grau de dificuldade para a realização da tarefa, assim como na primeira atividade, a maioria considerou como moderada, como mostra o gráfico 10 a seguir.

Gráfico 10: Grau de dificuldade na realização da atividade 2.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

A maioria dos alunos (5) disseram ter se dedicado de modo considerável para a atividade, 1 estudante grau moderado e 2 alto grau de dedicação. Quanto a contribuição da atividade para a compreensão do conteúdo, foram 4 resultados para considerável, 2 para moderado e 2 para alto.

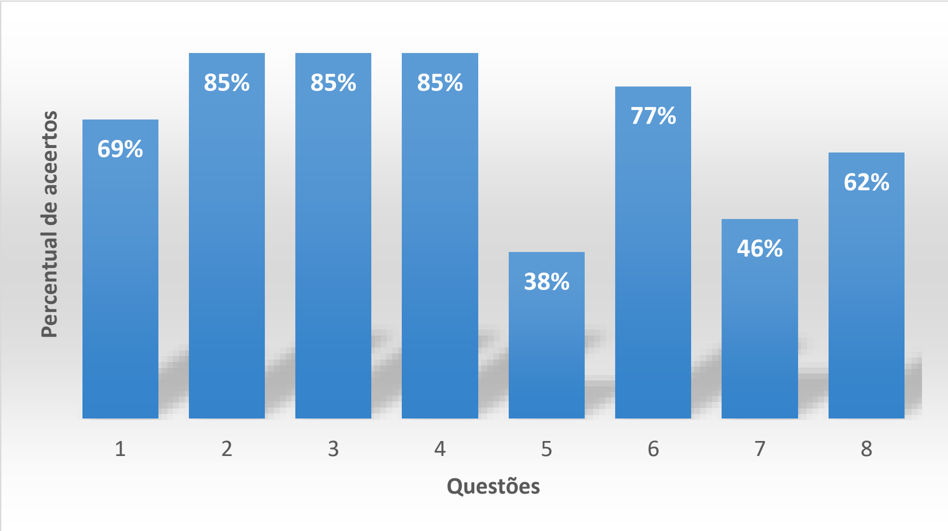
Os alunos indicaram o mesmo grau de contribuição da discussão em grupo para obter a solução do problema e para compreensão do conteúdo, em que 4 estudantes avaliaram como considerável e 4 como alta. 5 alunos participaram ativamente das discussões em grupo, 2 alunos de algumas discussões, contribuindo com as discussões do grupo, e um afirmou ter participado do debate, mas não teve suas ideias consideradas. Para 6 estudantes, todos participaram ativamente dos debates e, segundo 2 alunos, apenas alguns colegas participaram das discussões para resolver o problema.

Os dois estudantes que assistiram a aula de modo assíncrono afirmaram ter realizado as atividades sozinhos, um considerou a atividade com dificuldade moderada e outro considerável, e ambos alegaram como considerável o grau de dedicação na realização da tarefa e na sua contribuição para compreensão do conteúdo.

4.4.1.3 Análise da terceira atividade

Para trabalhar com conteúdo Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável foi utilizada a metodologia ativa instrução por pares. Os estudantes fizeram a leitura do texto “Valores máximo e mínimo” (anexo 4), que faz parte da pré-aula nessa metodologia, e em seguida responderam algumas questões (apêndice F) para identificar, antes da aula, os tópicos que precisavam ser explorados. Treze estudantes enviaram o formulário, composto por 8 questões de múltipla escolha, e o índice de acerto está indicado no gráfico 11 a seguir.

Gráfico 11: Índice de acerto das questões sobre o texto “Valores máximo e mínimo”.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

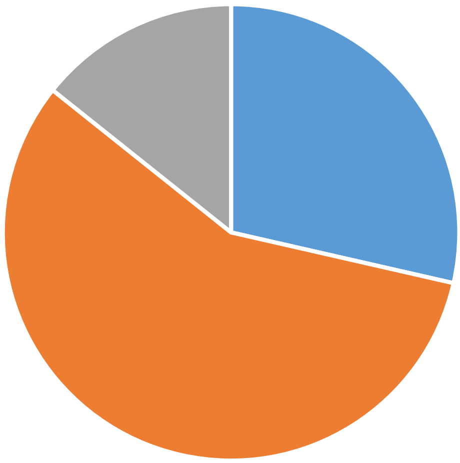
Na aula seguinte todas as questões foram exploradas, com ênfase aos tópicos pontos críticos e continuidade funções, que estava relacionado às questões 5 e 7, por terem apresentado baixos índices de acerto. Em seguida foi feita uma breve explicação sobre como obter os pontos extremos de uma função e os alunos foram orientados a realizar os exercícios disponíveis na plataforma *Google Classroom*, primeiro individualmente e depois em grupos. Comparando os dois resultados, em uma questão o índice de acerto foi o mesmo, e em 53% houve mais acertos na atividade em grupos que resolvidos individualmente. Para finalizar, a professora identificou as questões nas quais o percentual de erro foi maior, dando ênfase aos tópicos explorados nessas questões. A análise dos erros apresentados pelos estudantes precisa ser uma prática no cotidiano do professor, pois é uma ferramenta para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem. (CURY, 2013). Nesta atividade, com a identificação dos erros foi possível direcionar a explanação do conteúdo para os tópicos de maior fragilidade, e a utilização do formulário *online* facilitou esse processo. Encerrado esse momento, foi apresentada uma situação-problema para tratar do teste da primeira derivada para obter máximos e mínimos de funções.

Dos 13 estudantes que participaram da aula, fizeram as questões individuais e participaram das discussões em grupo, 7 enviaram a autoavaliação. Outros 5 alunos não participaram da aula síncrona, mas realizaram a atividade posteriormente e enviaram o formulário com a autoavaliação. Assim como foram apresentadas as informações das atividades anteriores, serão mostrados os resultados de quem participou da tarefa como o planejado e depois as respostas dos alunos que fizeram a atividade em outro momento.

Todos declararam se sentir bem no decorrer da aula e todos afirmaram que o texto estava claro, sendo que para 5 estudantes a leitura possibilitou compreender os conceitos de Máximo e Mínimo de Funções, 1 estudante afirmou que embora o texto estivesse claro, com a explicação da professora foi possível entender melhor a matéria, e para 1 estudante essa leitura não possibilitou a compreensão do conteúdo. Quanto a resolução dos exercícios, 3 resolveram sem dificuldades, 3 indicaram que apesar de compreender o conteúdo tiveram dificuldade em resolvê-los e 1 aluno não compreendeu o conteúdo e teve dificuldade em resolver os exercícios. De acordo com 6 estudantes, a correção dos exercícios e explicação de tópicos do conteúdo pela professora esclareceu algumas dúvidas. Para 1 aluno a explicação da professora possibilitou a compreensão do conteúdo, uma vez que isso não foi possível apenas com a leitura do texto.

De acordo com a percepção dos alunos houve dedicação na realização das atividades, sendo o grau dessa dedicação representada no gráfico 12 a seguir.

Gráfico 12: Grau de dedicação na realização da atividade 3.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A atividade teve alto grau de importância para a compreensão do conteúdo na perspectiva de 4 estudantes e grau considerável para 3 estudantes, o mesmo resultado foi observado para a contribuição da discussão em grupo na compreensão do conteúdo. Todos afirmaram ter participado ativamente nas discussões e contribuído com o grupo, e a maioria (6) indicou que os demais colegas também o fizeram.

Quatro alunos que não participaram da aula síncrona preencheram o formulário. Para 3 deles o texto estava claro e a leitura possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções, e para um estudante apesar da clareza do texto não foi possível a compreensão dos conteúdos. Ao resolver as questões referentes ao texto dois estudantes compreenderam os conceitos abordados no texto e resolveram a maioria das questões sem dificuldade e dois tiveram dificuldade em resolvê-las.

4.4.2 Análise das percepções dos estudantes sobre as atividades realizadas

Nos formulários de autoavaliação, além das questões de múltipla escolha sobre as atividades, os estudantes fizeram comentários avaliando as aulas e escreveram sobre como se sentiram em cada uma delas. Essas falas foram organizadas e analisadas em quatro categorias, estímulo à participação do aluno, contribuições para a aprendizagem, o papel do professor e dificuldades dos estudantes para apresentar respostas. A seguir são apresentadas cada uma dessas categorias.

1 - Estímulo à participação do aluno

As metodologias ativas são capazes de estimular a participação dos estudantes na realização das atividades devido aos princípios que a constituem, como citados por Diesel, Baldez e Martins (2017), com destaque para o aluno como centro do processo de ensino e aprendizagem, o trabalho em equipe e a problematização da realidade. A resolução de problemas, uma das metodologias ativas utilizada, colabora com a motivação dos estudantes e com a o trabalho colaborativo (FONSECA; GONTIJO, 2021; GONTIJO, 2020; SOUZA; FONSECA, 2007). Para Borges *et al.* (2014) a aprendizagem baseada em problemas desenvolve habilidades de trabalho em grupo, como capacidade de argumentação, de crítica e autocrítica, de senso de responsabilidade, entre outros.

Na análise dos comentários foi possível inferir que, na percepção dos estudantes, as atividades geraram mais participação da turma, como indicaram expressões como "todos participando", "atrativa" e "envolvido", presente nas falas dos alunos, como nos trechos destacados a seguir.

> Gostei muito da aula, todos participando parece que estamos realmente na sala de aula. (E10)

> A aula teve sucesso na dinâmica de discussão do problema entre os grupos, tornando mais interessante e atrativa a aula. (E15)

Também foi observado que houve dificuldades relacionadas aos recursos tecnológicos, mas isso não impediu o engajamento dos estudantes na realização das atividades.

> Me senti bem. Me senti à vontade para trocar experiência com os colegas. A troca de ideias foi bastante produtiva a ponto de não chegarmos a um consenso na última questão; isso mostra que todos os integrantes do Grupo Fizeram sua parte para ter embasamento nas defesas dos seus pontos de vista. Tivemos apenas a dificuldade de lançar nossas resoluções no aplicativo Padlet para a apresentação. (E 4).

Como indicado no comentário do estudante (E4) acima, houve dificuldades com as ferramentas escolhidas para o envio das tarefas, ainda que a turma tenha recebido orientações para utilizá-las. Se nas aulas presenciais a tecnologia pode favorecer o uso das metodologias ativas (MATTAR, 2017; ROCHA, 2012), no contexto do ensino remoto os recursos virtuais são indispensáveis, mas é preciso a adaptação a esses recursos para se obter bons resultados com sua utilização.

Também foi possível inferir que os estudantes relataram mais envolvimento nas aulas, se comparado à outras disciplinas de seus cursos, como destacado nos excertos.

> Eu me senti mais envolvido e engajado como estudante do curso, coisa que devido ao ensino remoto ainda não havia sentido. (E9)
>
> A aula foi mais participativa e isso ajudou a sair da monotonia das aulas/monólogos com as quais estou acostumado. (E11)
>
> Bem avaliado e com possibilidade de desempenho maior do em outros tipos de aula. (E15)

Em uma pesquisa realizada por Stanberry (2018) com alunos de Cálculo I, em uma universidade americana, a utilização de metodologias ativas indicou que “a aprendizagem ativa e as práticas de envolvimento dos alunos impactaram positivamente a porcentagem de alunos que concluíram o Cálculo I [...] o desempenho e a confiança dos alunos melhoraram com este método de ensino.” (STANBERRY, 2018, p. 8, tradução nossa). O resultado corrobora com as falas dos estudantes nas autoavaliações.

2 - Contribuições para a aprendizagem

Expressões como “consegui compreender”, “maior aprendizado” e “assimilar o conteúdo”, que estiveram presentes nos comentários, indicaram que a atividade promoveu a aprendizagem. Os trechos a seguir destacam alguns comentários.

> Muito boa. Deu para aprender :) (E7)
>
> A aplicação da metodologia ativa escolhida pela professora foi extremante produtiva, movimentou a classe, promoveu interação com os alunos e com certeza trouxe maior aprendizado, compreensão e assimilação do conteúdo. (E9).

> Aulas excelentes, com discussões de exercícios e momentos de dúvidas que foram essenciais para compreensão da matéria. (E16)

Esse resultado corrobora com de outras pesquisas, como a dos autores Salvador *et al.* (2014, p. 310) que utilizaram a aprendizagem baseada em problemas com estudantes de ensino médio, relatando que “[...] os estudantes tiveram alguma retenção do conteúdo em longo prazo e capacidade de aplicação dos princípios aprendidos a situações do cotidiano.” Em se tratando de Cálculo Diferencial e Integral, as metodologias ativas tem o potencial de melhorar a aprendizagem dos estudantes, como destacado na pesquisa de Çekmez (2020) em que houve um impacto positivo no ensino de Cálculo com o *think-pair-share* aliado ao uso do GeoGebra, uma vez que as interações dos estudantes nos grupos gerou melhorias no desempenho, conforme verificado pela comparação do pré-teste com o pós-teste aplicados.

Também se destaca, nesta categoria, a importância do trabalho em grupo para a aprendizagem. O aumento do interesse e da motivação são benefícios do trabalho em equipe desenvolvidos em sala de aula, e ainda maior aprendizado se comparado com o trabalho individual, além de desenvolver a capacidade de entendimento de realidades complexas em projetos multifuncionais. (COSTA, 2005; FRAGELLI; FRAGELLI, 2017). A aprendizagem baseada em problemas, o *think-pair-share* e a instrução por pares, que foram as metodologias utilizadas, envolvem momentos em duplas ou grupos, para que os alunos discutam suas resoluções e observações individuais e cheguem a um consenso de resposta.

O trabalho em grupo no ensino remoto foi desafiador a princípio, pois se dedicou tempo de aula para ensinar como utilizar as ferramentas para o trabalho *online,* como também foi preciso driblar os problemas com conexão ruim dos participantes, falta de câmera e microfone e suas dificuldades na utilização dos recursos. Mesmo com esses desafios, a atividade em equipe foi positiva para a aprendizagem, como destacado a seguir.

> A aula teve uma dinâmica excelente, fazendo sozinho no primeiro momento você não enxerga pequenos erros; no segundo momento, no Grupo Enxerguei a interpretação do colega que sozinho eu talvez não conseguiria enxergar. Também revezando os grupos nos deu oportunidade de trocar novas experiências. (E4).

Esse comentário destaca a capacidade do aluno em aprender com as discussões do grupo, como destacado por Çekmez (2020, p. 127, tradução nossa), "[...] a interação entre pares tem o potencial de apoiar o processo de aprendizagem". Inferimos que as metodologias ativas, em especial as que utilizam do trabalho em grupo, contribuem para a aprendizagem dos estudantes.

3 – O papel do professor

No trabalho com metodologias ativas é preciso que o professor seja flexível e motivador (SOUZA; FONSECA, 2007), que saiba identificar as competências e habilidades que precisam ser desenvolvidas nos estudantes (LOVATO *et al*., 2018) e que proporcione um ambiente adequado ao desenvolvimento da autonomia discente (DIESEL *et al*., 2017). Nos comentários foi possível identificar o reconhecimento das ações da professora, como destacado a seguir.

> A aula expositiva onde os alunos, por meio de grupos, discutem as questões e depois apresentam os resultados é boa porque:
> 1) Em caso de dúvidas, nós, os próprios alunos, nos ajudamos a entender o problema proposto 2) Somos colocados na posição de professor, tendo que apresentar nossas soluções 3) A professora também teve uma participação ativa, sempre nos auxiliando
> Acho que agrega bastante. (E5).
>
> Aula com excelente didática. (E8).

O acompanhamento do professor no decorrer da atividade é importante para o bom desenvolvimento do trabalho, como recomenda Costa (2005), para que seja possível conduzir as discussões e auxiliar nas dificuldades apresentadas. De acordo com Mitre *et al*. (2008), é necessário que o professor tenha uma atitude de facilitador dos processos de ensino e aprendizagem ao utilizar metodologias ativas em sala de aula, oferecendo ao aluno um ambiente de liberdade e apoio. É preciso que tanto professor quanto aluno tenham papéis ativos para que ocorra aprendizagem.

Considerando o contexto da turma investigada, que são alunos de licenciatura, há a preocupação com a formação do futuro professor, uma vez que esse estudante tenderá a reproduzir as experiências vivenciadas por ele no exercício de sua profissão. Para Berbel (2011, p. 36)

> Se pensarmos na formação do futuro professor e em especial o da Escola Básica, o uso de Metodologias Ativas constituir-se-á em importante referência para sua atuação de modo construtivo junto a seus alunos, no mesmo sentido da promoção da sua motivação autônoma. Ou seja, quanto mais alternativas de atuação pedagógica o

> professor tiver experimentado/desenvolvido durante a sua formação inicial, melhores condições pessoais e profissionais disporá para atuar com seus alunos e no conjunto das atividades escolares.

A preocupação com a formação docente não pode ser delegada apenas às disciplinas pedagógicas dos cursos de licenciatura. Todas são importantes para a formação profissional desses indivíduos e podem contribuir para a promoção de um ensino que vá além da mera transmissão de conteúdos.

4 – Dificuldades dos estudantes para apresentar respostas

No ensino tradicional o estudante tem como tarefa absorver os conteúdos transmitidos pelo professor, e no caso da matemática, resolver os exercícios propostos e decorar fórmulas para que seja capaz de ter um bom desempenho nas provas. De certo modo, em sala de aula ele tem uma posição passiva, pois não precisa manifestar suas dúvidas e opiniões e nem se expor diante seus colegas. Ao terem que apresentar as respostas aos colegas, no decorrer das atividades realizadas, alguns alunos demonstraram certo desconforto, como indicam os excertos.

> Outra dificuldade, que é natural de aluno, é apresentar/explicar os resultados para toda a turma. (E4)
>
> Me senti tranquilo, mas pouco confiante nas minhas respostas ao dialogar com os colegas de grupo. (E17)

A insegurança relatada pode ser devida a poucas oportunidades dadas aos estudantes em atividades como esta, em que precisam se expressar. Mas esta é uma prática que deve permear as aulas de matemática, pois a verbalização é uma etapa do processo de aprendizagem matemática. Ao comunicar as suas ideias para outra pessoa, quer seja ao professor ou aos colegas, os alunos "aprendem a ser claros, convincentes, precisos no modo como usam a matemática". (ALMEIDA; FERNANDES, 2010, p. 112). Além disso, ouvir diferentes justificativas apresentadas por seus colegas os ajudam a desenvolver seu próprio conhecimento.

Diante das informações apresentadas, e retomando as hipóteses definidas nas análises preliminares, infere-se que as atividades utilizadas para trabalhar o conteúdo Limites, por meio da ideia intuitiva, contribuíram para a compreensão do conceito. Isso porque, na percepção dos estudantes, as atividades que exploraram esse conceito trouxeram essa contribuição (em grau considerável para 60% dos estudantes e em alto grau para 25% deles). Além disso, ao final das duas primeiras atividades, sete dos treze estudantes foram capazes de indicar um limite correto para a situação-problema apresentada. Também pode-se concluir que situações problema que articulem teoria e prática e que envolvem o trabalho em equipe estimulam a participação dos alunos e cooperaram com a aprendizagem dos estudantes, conforme a primeira e segunda categorias dos comentários dos estudantes nas autoavaliações.

Infere-se ainda que, para 71% dos estudantes que enviaram a autoavaliação, as atividades que envolvem leitura e pesquisa contribuem para a compreensão de conceitos relacionados à Derivada de uma função. Nos comentários dos estudantes destaca-se um sobre esse tema, a seguir.

> Gostei muito da forma que as aulas foram conduzidas, pois trabalhar a leitura na disciplina de cálculo é fundamental para que nos acostumemos com termos técnicos matemáticos além de nos auxiliar na aquisição de conhecimento. A troca de saberes com os colegas do Grupo Foi essencial para fazermos levantamento de dúvidas, erros e acertos. (E17).

De acordo com Pinto *et al*. (2012) a leitura contextualizada, realizada antes da explicação do professor, permite que o aluno se posicione em questões conceituais e participe de debates argumentativos com seus colegas. Para Diesel, Baldez e Martins (2017) a leitura está entre as ações necessárias para que o aluno tenha maior interação no processo de construção do próprio conhecimento, exercitando a autonomia.

Sobre a atividade promover a autonomia, não foi possível obter elementos suficientes nas informações coletadas para confirmar essa hipótese, isso porque autonomia é um sistema complexo. Para Paiva (2006), envolve não apenas estados e processos mentais mas também a dimensão social, e pode ser uma característica intrínseca, ou ainda incentivada ou reprimida. Em se tratando de ser estimulada, a autora estabelece um contexto ideal de aprendizagem para promoção de autonomia:

> [...] um aprendiz e seu desejo de autonomia, compartilhando sua aprendizagem com outros aprendizes e tomando emprestado os resultados dos outros; professores que também são autônomos e que

> oferecem aos alunos algumas escolhas em relação às atividades de aprendizagem e que aceitam o direito dos aprendizes de questionar e sugerir mudanças na rota de seus cursos; escolas que são suficientemente flexíveis para aceitar experiências inovadoras e que permitem que professores e alunos sejam autores do processo educacional; tecnologia que fornece artefatos para professores e alunos exercerem sua autonomia como pessoas, aprendizes, comunicadores, e usuários de tecnologia; e, finalmente, um sistema político, econômico e social justo que dê a cada aprendiz boas oportunidades de aprendizagem e a cada professor boas condições de ensino. (PAIVA, 2006, p. 116).

Analisando as atividades desenvolvidas e os resultados obtidos, é possível afirmar que alguns destes fatores estiveram presentes nas aulas de Cálculo em que foi proposta a intervenção. Ainda que a situação política, social e econômica não tenha sido favorável, principalmente em condição de pandemia, os estudantes tiveram oportunidade de compartilhar com seus colegas suas aprendizagens, tanto nas reuniões em grupos quanto nas apresentações das equipes, tiveram liberdade para expressar suas opiniões no decorrer das aulas e por meio do formulário de autoavaliação e avaliação das aulas, e ainda puderam contar com ferramentas tecnológicas acessíveis. A professora teve autonomia para organizar as sequências didáticas, escolher as metodologias de ensino, as ferramentas que considerou mais adequadas, textos e exercícios a serem utilizados e a criar situações-problema com temas relacionados ao curso, sendo que a instituição de ensino a apoiou em sua proposta. Assim, as metodologias ativas empregadas foram capazes de promover um ambiente propício à autonomia discente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estado do conhecimento sobre metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, e outras leituras realizadas no decorrer da pesquisa, foi possível obter apoio teórico para elaborar uma proposta de ensino para limites e derivadas, fundamentada na Engenharia Didática, e implementá-la em uma turma de Cálculo Diferencial. Foram utilizadas as metodologias: aprendizagem baseada em problemas, *think-pair-share* e instrução por pares, avaliadas como adequadas aos conteúdos trabalhados, à modalidade de ensino remoto e aos estudantes participantes da intervenção em sala de aula.

A aprendizagem baseada em problemas possibilita o processo de investigação, a articulação de conhecimentos e o diálogo entre alunos e professor e aluno. Essa metodologia vai de encontro à proposta de ensino voltado para problematização, ressignificação e com foco nos conceitos, em oposição à memorização e reprodução do modelo tradicional. O *think-pair-share* oportuniza ao aluno refletir sobre os resultados obtidos em uma atividade, e o estimula a buscar argumentos para suas escolhas. Sua organização em etapas conduz os estudantes no trabalho em grupo, contribuindo para desenvolver essa habilidade. A instrução por pares, além de ser uma metodologia de trabalho em grupos, é baseada na leitura de texto ou outra fonte de informação, de modo a incentivar a autonomia do estudante e o levar a refletir sobre os conhecimentos adquiridos, uma vez que os questionários e exercícios realizados em sequência, o induzem a buscar a compreensão do que foi lido para resolver as questões apresentadas.

Duas metodologias foram escolhidas para serem utilizadas em conjunto, o *think-pair-share*, que é viável em tarefas que compreendem questões abertas, com a aprendizagem baseada em problemas, que envolve esse tipo de questão. A instrução por pares poderia ser utilizada em conjunto com outras, mas devido aos objetivos de aprendizagem do conteúdo selecionado, apenas esta foi suficiente. Optou-se por metodologias que envolvem trabalho em grupo por compreender que a troca de experiências é vantajosa para os alunos, uma vez que a realização das atividades em equipes possibilita que os estudantes com mais facilidade em determinado aspecto (como uso de tecnologias ou habilidades com cálculos matemáticos, por exemplo) compartilhem seus conhecimentos com os colegas.

Avaliou-se como positivo o trabalho em equipes, que foi realizado com o uso de tecnologias, sendo que os alunos, nos momentos de interação com os colegas, puderam se expressar verbalmente com o uso de câmera e microfone, ou apenas por escrito, na troca de mensagens instantâneas. Isso leva ao questionamento de como seria essa dinâmica em aulas presenciais, em que o estudante pode se sentir mais exposto frente aos colegas, ou ainda precisar romper barreiras como da timidez, por exemplo, para ser capaz de se expressar.

Ao elaborar as atividades com metodologias ativas houve o cuidado em evitar que fossem abordadas em uma perspectiva prática, o que conduziu à Engenharia Didática, que orienta para um processo de ensino e aprendizagem em etapas. Inicia com a análise do sistema de ensino para que se identifique o que pode ser melhorado, seguido do planejamento específico de uma seção da sequência didática, em que se relaciona o conteúdo em estudo com as atividades a serem desenvolvidas. Essas atividades são realizadas em sala de aula e analisadas, de modo que os resultados sejam confrontados com as hipóteses definidas previamente, na etapa inicial. Esse sistema em fases conduz ao aprimoramento no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que o professor tem a oportunidade de avaliar continuamente o desenvolvimento de sua turma e refletir sobre sua prática, fazendo os ajustes que julgue necessários. Ter a Engenharia Didática como guia foi essencial para evitar que as propostas de ensino utilizadas não fossem simplesmente “aplicadas”, fundamentadas no pressuposto de que as metodologias ativas são boas porque estão “na moda”. Planejar as atividades a serem executadas, baseadas na realidade da turma, analisar e refletir sobre os resultados obtidos à luz da teoria, são os caminhos para aprimorar o processo de ensinar, de modo a favorecer a aprendizagem.

Na fase de análise *a priori* da Engenharia Didática foram avaliados os problemas e exercícios disponíveis nos livros didáticos, uma vez que um dos objetivos da pesquisa era o de analisar se eram apropriados ao trabalho com metodologias ativas. Constatou-se que é possível selecionar atividades nesses materiais, desde que não sejam utilizados apenas como exercícios de repetição e treino. É possível eleger os que se adequem aos objetivos de aprendizagem, ou ainda fazer adaptações, de acordo com o enfoque planejado para o conteúdo. Essa etapa foi importante, uma vez que nem sempre é viável criar exercícios e situações problema, como foi feito nessa pesquisa, com o Problema do Carrinho.

Com o levantamento histórico sobre o Cálculo Diferencial e Integral e seu ensino no Brasil, bem como busca por caminhos para a melhoria no ensino dessa disciplina, segundo pesquisas já realizadas, foi possível o bom planejamento das atividades de intervenção em sala de aula. Seguindo essas orientações e as metodologias ativas selecionadas, o ensino de Limites e Derivadas se dirigiu pela ênfase aos conceitos, por meio de resolução de problemas, mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, com o uso do GeoGebra para plotar gráficos e do Excel para construir tabelas de valores, e o trabalho em grupos.

No decorrer das atividades realizadas foram identificadas algumas dificuldades na aprendizagem dos conceitos trabalhados, e selecionadas estratégias de ensino com o objetivo de saná-las. Na atividade inicial realizada na fase de experimentação, foram evidenciados erros conceituais dos estudantes sobre o conteúdo Limites, categorizados em: Limite como uma ferramenta, dificuldade de compreensão de funções matemáticas, dificuldade em compreender a definição de Limite e reprodução de conceitos. As dificuldades conceituais relacionadas às funções matemáticas e a reprodução de conceitos, também foram identificadas no decorrer das tarefas realizadas com metodologias ativas. Ainda que se tenha revisado Funções, isso não foi o suficiente para que os alunos apreendessem os conceitos relacionados a esse conteúdo. O objetivo dessa revisão era relembrar tópicos importantes que se supõe que os estudantes de graduação conheçam, e não resolver as deficiências de aprendizagem da educação básica, que não podem ser dirimidas em poucas aulas. Os problemas relacionados à educação básica devem ser resolvidos nessa fase escolar, por isso a importância de uma boa formação de professores, capacitando esses profissionais a utilizar estratégias diversificadas para promover a aprendizagem de seus alunos.

Foram ainda identificados, no decorrer das atividades executadas, pouca habilidade com argumentações matemáticas, conflito do resultado algébrico com a interpretação da situação-problema e dificuldade em se expressar matematicamente. Essas deficiências decorrem de um ensino por reprodução e repetição, que aprecia o pensamento algebrista e pouco oferece em termos de criatividade, autonomia e desenvolvimento social do estudante. Isso reforça a necessidade de alternativas ao ensino tecnicista em matemática.

Considerando estas dificuldades e retomando aos objetivos da pesquisa, pode-se afirmar que as atividades elaboradas segundo as orientações da Engenharia Didática, com uso de metodologias ativas, contribuem para a aprendizagem, na medida que

- oferecem opções de tarefas abertas e com estratégias comunicativas, que podem desenvolver a expressão e argumentação matemática, como a resolução de problemas, que também contribui com a interpretação de resultados;

- oportunizam ao estudante tempo para refletir sobre seus resultados e compará-los com de seus colegas, como ocorre com o *think-pair-share*, para apresentar respostas mais elaboradas e fundamentadas;

- informam o professor quais são os erros dos estudantes, como acontece na dinâmica de instrução por pares, para que sejam propostas estratégias de ensino mais pontuais.

Quanto ao objetivo de analisar a percepção discente acerca da utilização das metodologias ativas, levando em consideração a realização de atividades matemáticas individuais e grupais, os registros das aulas, os formulários de autoavaliação dos estudantes e de avaliação dos grupos, infere-se que contribuíram com a compreensão dos conteúdos trabalhados. De acordo com os comentários dos alunos, conclui-se que as atividades estimularam a participação dos envolvidos e contribuíram com a aprendizagem, que a professora teve um papel importante nesse processo, e que apresentar os resultados para os colegas de classe foi um desafio para os participantes.

No que se refere à percepção docente, como professora da turma investigada que planejou, desenvolveu e avaliou as atividades com metodologias ativas guiadas pela Engenharia Didática, percebi grande envolvimento dos participantes no decorrer das aulas. Em geral os calouros desse curso, de acordo com minha experiência docente, são passivos e individualistas, o que prejudica identificar as dificuldades e elaborar estratégias de ensino adequadas às suas dúvidas, entre outros entraves à aprendizagem. Como nas atividades realizadas era preciso emitir opinião, trocar ideias com os colegas e resolver problemas que não tinham uma resposta única, houve o envolvimento dos alunos na realização das atividades, mesmo em situação de aulas remotas. Essa dinâmica, no meu entendimento, também estimula a autonomia do estudante, pois é provocado a sair da posição passiva das aulas tradicionais de aula expositiva e resolução de exercícios. Percebi que a escolha de situações-problema contextualizadas à realidade dos estudantes, foi um fator que contribuiu para o engajamento na resolução e compartilhamento de opiniões com os colegas.

O foco em conceitos também foi positivo, pois quando se trabalha apenas com cálculo de limites e regras de derivação pode-se ter uma falsa percepção de aprendizagem. O aluno pode ter habilidade com cálculos algébricos, ser bom em reproduzir fórmulas, mas não compreender o que está calculando, ou ainda compreender os conceitos, mas ter dificuldades com a álgebra. Quando se trabalha com atividades diversificadas, é possível identificar esses problemas. Desse modo, a análise de erros teve um papel importante no planejamento e condução das aulas, como propõe a instrução por pares, por exemplo.

Também é preciso destacar que utilizar metodologias ativas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral exige do professor criatividade para elaborar questões que sejam interessantes para o aluno, e que estejam relacionadas à sua futura profissão ou contextualizadas à sua realidade, tempo para criar esse tipo de atividade, selecionar textos relevantes e organizar exercícios em formulários online. O docente precisa ser flexível para intervir nas situações de sala de aula que não saíram como o planejado, fazer ajustes e adaptações para que se atinja os objetivos de aprendizagem propostos para determinado conteúdo, exercendo seu papel de mediador do conhecimento.

Um bom relacionamento com os alunos também é importante para estimular a participação e envolvimento nas tarefas e para ouvir suas opiniões para que, se for preciso, se faça adequações. Como não se trata apenas de aplicação de técnicas, mas, na perspectiva da Engenharia Didática, é um processo cíclico de planejamento, execução e análise de atividades, para que a utilização dessas metodologias seja possível, o docente precisa de remuneração justa para que não preencha todo seu tempo de trabalho ministrando aulas, uma vez que a fase de planejamento é demorada. O apoio da instituição de ensino ao professor também é necessário, para que se tenha liberdade na escolha das metodologias de ensino e de avaliação planejadas para a turma.

Considerando as vantagens e limitações apresentadas, confirma-se a tese que o ensino guiado pela Engenharia Didática, com o uso de metodologias ativas de ensino, pode promover a aprendizagem dos estudantes como também contribuir com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e desenvolver sua autonomia. Mas além de confirmações, ficam algumas lacunas, indicando possibilidades para pesquisas futuras, como investigar o uso de metodologias ativas em aulas presenciais de Cálculo, averiguar a motivação e o engajamento de estudantes nas atividades como aqui apresentadas, porém em outros contextos, como em turmas em que as experiências com a matemática não foram tão positivas como a dos participantes desta investigação, verificar como seria o uso dessas metodologias, na perspectiva da Engenharia Didática, em turmas com muitos alunos, ou ainda sobre o complexo sistema que é a autonomia discente, considerando diversos aspectos e público diversificado. Assim, outras pesquisas podem ser realizadas, a fim de ampliar os resultados aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Márcio Vieira de. **Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral:** Referências de Tall, Geudet e Trouche. 2017. Tese (doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

ALMEIDA, Matilde Gonçalves; FERNANDES, José Antônio. A comunicação promovida por futuros professores na aula de matemática. **Zetetike**, Campinas, v. 18, n. 2, p. 109–154, 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat:** revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.

ALVARENGA, Karly Barbosa K. B.; DORR, R. C. Raquel Carneiro; VIEIRA, Vanda Domingos. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 46–57, 2016.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v. 3, n. 7, p. 37–48, 2016.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, Michèle *et al*. **Ingeniería didáctica en educación matemática.** Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. San Rafael: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. b. p. 97–140.

ARTIGUE, Michèle *et al*. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática:** Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogo: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARROS, Rodolfo Miranda de; MELONI, Luís Geraldo Pedroso. O processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de metáforas e recursos multimídia. In: ANAIS DO XXXIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA 2006. **Anais** [...] Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2006. p. 1733.

BARROSO, Natália Maria Cordeiro *et al*. Limite: definição intuitiva versus definição formal. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. **Educação matemática no ensino superior:** pesquisas e debates. Recife. p. 99–109, 2009.

BENAKLI, Nadia *et al*. Introducing computational thinking through hands-on projects using R with applications to calculus , probability and data analysis. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 48, n. 3, p. 393–427, 2017.

BERBEL, Neusi Aparecida Navas. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina:** Ciências Sociais e Humanas, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25–40, 2011.

BEZERRA, Wescley Well Vicente. **Avaliação para aprendizagem na disciplina de Cálculo 1:** percepções de discentes e docentes da Universidade de Brasília. 2019. Tese (doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A filosofia da educação matemática: um enfoque fenomenológico. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 21–43.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAUJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99–112.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; KLÜBER, Tiago Emanuel. A questão de pesquisa sob a perspectiva da atitude fenomenológica de investigação. **Conjectura:** filosofia e educação, Caxias do Sul, v. 18, n. 3, p. 24–40, 2013.

BORGES, Marcos C. et al. Aprendizado baseado em problemas. **Medicina**, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 301–307, 2014.

BORGES, Tiago Silva; ALENCAR, Gidélia. Metodologias ativas na promoção da formação crítica do estudante: o uso das metodologias ativas como recurso didático na formação crítica do estudante no ensino superior. **Cairu em Revista**, Salvador, v. 03, n. 4, p. 119–143, 2014.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura. INEP**. 2018a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94161-saeb-2017-versao-ministro-revfinal&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 28 ago. 2019.

BRASIL. **Catálogo de Teses e Dissertações Capes/MEC**. 2018b. Disponível em: <http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 18 set. 2018.

BRASIL. **Plataforma Sucupira**. 2019. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/#>. Acesso em: 25 mar. 2018.

BRASIL, Ministério da Saúde. **O que é COVID-19**. 2020a. Disponível em: <https://coronavirus.saude.gov.br/sobre-a-doenca#o-que-e-covid>. Acesso em: 2 maio. 2020.

BRASIL, Ministério da Saúde. COE-COVID19. **Boletim Epidemológico Especial**, Brasília, v. SE 18, n. 14, p. 1–48, 2020. b.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BUSTAMANTE, Óscar Paineán; PRIETO, Verónica Aliaga; TORRES, Teresa Torres. Aprendizaje basado en problemas : evaluación de una propuesta curricular para la formación inicial docente Problem Based Learning : assessment of a PBL curricular proposal for. **Estudios Pedagógicos**, Valdivia, v. 38, n. 1, p. 161–180, 2012.

CARVALHO, Tadeu Fernandes De; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 13–43, 2006.

ÇEKMEZ, Erdem. Establishing the link between the graph of a parametric curve and the derivatives of its component functions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 51, n. 1, p. 115–130, 2020.

CHEVALLARD, Yves. **Introdução à teoria antropológica do didático**. 2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=210>. Acesso em: 9 set. 2019.

CHEVALLARD, Yves. Sobre a teoria da transposição didática: Algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Duque de Caxias, v. 3, n. 2, p. 1–14, 2013.

CODE, Warren et al. Teaching methods comparison in a large calculus class. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 46, p. 589–601, 2014.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; FLORES, Claudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 41–72, 2008.

COSTA, Filipe Campelo Xavier Da. Trabalho em Grupo Entre alunos de cursos de administração: Uma utopia? **Revista Brasileira de Gestão de Negócios**, São Paulo, v. 7, n. 19, p. 36–45, 2005.

CRONHJORT, Mikael; FILIPSSON, Lars; WEURLANDER, Maria. Improved engagement and learning in flipped-classroom calculus. **Teaching Mathematics and Its Applications**, Oxford, v. 37, n. May 2017, p. 113–121, 2017.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** O que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

DIESEL, Aline; BALDEZ, Alda Leila Santos; MARTINS, Silvana Neumann. Os princípios das metodologias ativas de ensino : uma abordagem teórica. **Revista**

Thema, Lajeado, v. 14, n. 1, p. 268–288, 2017.

ELLIS, Jessica; KELTON, Molly L.; RASMUSSEN, Chris. Student perceptions of pedagogy and associated persistence in calculus. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 46, p. 661–673, 2014.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1989.

FARIA, Thiago Lopes de. **Proposta de sequência didática para o ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso, Mato Grosso, 2019.

FERNANDES, Regina Alves Costa et al. A didática como espaço de (trans)formação de ciências e matemática. In: ANAIS DO XIX ENDIPE 2018. 2018, Salvador. **Anais** [...] Salvador: ENDIPE, 2018. Disponível em: <http://www.xixendipe.ufba.br/modulos/consulta&relatorio/rel_anais_download.asp>

FIGUEIREDO, Dalson et al. **COVID-19 EM DADOS :** Brasil em perspectiva comparada. 2020. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/340278851_COVID-19_EM_DADOS_BRASIL_EM_PERSPECTIVA_COMPARADA>. Acesso em: 3 abr. 2020.

FIGUEROA, Teodora Pinheiro; ALMOULOUD, Saddo Ag. Análise do tempo e dimensão epistemológica do saber: limite de uma função real. **Amazônia:** Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 14, n. 32, p. 145–159, 2018.

FONSECA, Mateus Gianni; GONTIJO, Cleyton Hércules. Pensamento Crítico e Criativo em Matemática: uma Abordagem a partir de Problemas Fechados e Problemas Abertos. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 34, p. 1–18, 2021.

FONTES, Líviam Santana. **A avaliação da aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral: em busca de sentidos pedagógicos**. 2015. Dissertação (mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

FONTES, Líviam Santana; ROSA, Dalva Eterna Gonçalves. A Avaliação da Aprendizagem na Formação do Professor de Ciências e Matemática Segundo as Publicações Científicas no Período de 2009 a 2013. **CIAIQ 2016: Atas – Investigação Qualitativa em Educação**, Porto, v. 1, p. 1–8, 2016.

FRAGELLI, Ricardo Ramos; FRAGELLI, Thaís Branquinho Oliveira. Trezentos: a dimensão humana do método. **Educar em Revista**, São Paulo, v. 63, p. 253–265, 2017.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Análise de conteúdo**. Brasília: Liber

Livro Editora, 2008.

FREITAS, José Luiz Magalhães; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Reymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, p. 9–34, 2013.

GODOY, Arilda Schimidt. Introdução à Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57–63, 1995.

GOIÁS, Universidade Estadual de Goiás. **Portaria n. 560/2020 - UEG**. Anápolis: 17 de março de, 2020. a.

GOIÁS, Universidade Estadual de Goiás. **Instrução Normativa nº 80/2020**. Anápolis: Universidade Estadual de Goiás, 2020. b.

GONTIJO, Cleyton Hércules. Relações entre criatividade e motivação em matemática: a pesquisa e as implicações para a prática pedagógica. In: GONTIJO, Cleyton Hércules; FONSECA, Mateus Gianni (Eds.). **Criatividade em Matemática:** lições da pesquisa. Curitiba: CRV, 2020. p. 153–172.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

HEWSON, Ashley E. **An examination of high school students'misconceptions about solution methods of exponential equations**. 2013. A Master's Project (Master of Science in Education) - Mathematics Education, State University of New York at Fredonia, Fredonia, 2013.

HIEB, Jeffrey L. *et al*. Predicting performance in a first engineering calculus course : implications for interventions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 46, n. 1, p. 40–55, 2014.

JESUS, Cristiano Sílvio; LUCAS, Jucileide das Dores; MAPA, Thierrse Fany Modesto. Reflexões sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I: UFOP E IFMG-OP numa parceria pela busca da diminuição do índice de reprovação na disciplina. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Ouro Preto, v. 1, p. 1–5, 2011.

JUNGIĆ, Veselin et al. On flipping the classroom in large first year calculus courses. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, p. 37–41, 2014.

KEENE, Karen Allen; WILLIAM, Hall; DUCA, Alina. Sequence limits in calculus : using design research and building on intuition to support instruction. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 46, p. 561–574, 2014.

KOZLOWSKI, Joseph S.; CHAMBERLIN, Scott A. Factors that Influence Mathematical Creativity. **The Mathematics Enthusiast**, Missoula, v. 16, n. 1, 2019.

LACERDA, Ricardo. **Jon Bergmann explica o conceito de sala de aula**

invertida. 2018. Disponível em: <https://desafiosdaeducacao.grupoa.com.br/jon-bergmann-e-a-sala-de-aula-invertida/>.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra Ltda, 2002.

LIMA, Gabriel Loureiro De; SILVA, Benedito Antônio Da. O Ensino do Cálculo na Graduação em Matemática : Considerações Baseadas No Caso da USP. In: ANAIS DO V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2012, Petrópolis. **Anais** [...] Petrópolis, 2012.

LIN, Pi-Jen. O Desenvolvimento da Argumentação Matemática por Estudantes de uma Turma do Ensino Fundamental. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 43, n. 3, p. 1171–1192, 2018.

LOPEZ, Ivo F.; SEGADAS, Claudia. A disciplina Cálculo I nos cursos de Engenharia da UFRJ: sua relação com o acesso à universidade e sua importância para a conclusão do curso. **REUCP**, Petrópolis, v. 8, n. 2, p. 92–107, 2014.

LOVATO, Fabrício Luís et al. Metodologias Ativas de Aprendizagem : uma Breve Revisão. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 2, p. 154–171, 2018.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et al. (Eds.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 208.

MACIEJEWSKI, Wess. Flipping the calculus classroom : an evaluative study. **Teaching Mathematics and Its Applications**, Oxford, v. 35, n. December 2015, p. 187–201, 2016.

MATEUS, Pedro. **Cálculo Diferencial E Integral Nos Livros Didáticos :** Uma Análise Do Ponto De Vista Da Organização Praxeológica. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso, São Paulo, 2007.

MATIĆ, Ljerka J.; DAHL, Bettina. Retention of differential and integral calculus : a case study of a university student in physical chemistry. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, n. October 2014, p. 37–41, 2014.

MATTAR, João. **Metodologias ativas:** para a educação presencial, blended e a distância. São Paulo: Artesanato Educacional, 2017.

MELENDY, Robert F. **Collegiate student's epistemologies and conceptual understanding of the role of models in precalculus mathematics :** a focus on the exponential and logarithmic functions. 2008. Ph.D. Thesis (Doctor of Philosophy in Mathematics Education) - Oregon State University, Corvallis, 2008.

MITRE, Sandra Minardi *et al*. Metodologias ativas de ensino-aprendizagem na formação profissional em saúde : debates atuais. **Ciências e Saúde Coletiva**, Rio de Janeiro, v. 13, p. 2133–2144, 2008.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2016.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, José António; SCHLEMMER, Eliane. Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. **Revista UFG**, Goiânia, v. 20, n. 26, p. 01–35, 2020.

MOREIRA, Marco Antonio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud: o ensino de ciência e pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7–29, 2002.

MORETTO, Vasco Pedro. **Prova:** um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

NASCIMENTO, Jorge Luiz Do. A recuperação dos pré-conceitos do cálculo. In: XXVIII COBENGE 2000, Ouro Preto. **Anais** [...] Ouro Preto, 2000. p. 1472.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo De; RAAD, Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletin do GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 61, p. 125–137, 2012.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Vera Lúcia Menezes de Oliveira e. Autonomia e complexidade. **Revista Linguagem & Ensino**, Pelotas, v. 9, n. 1, p. 77–127, 2006.

PASQUALI, Luiz. **Instrumentação psicológica:** fundamentos e práticas. Porto Alegre: Artmed, 2010.

PASSOS, Pedro Paulo Sena; LEITE, Rafael. **Como transformar minhas aulas em games?** 2019. Disponível em: <https://matematicaetecnologia.com.br/wp-content/uploads/2019/08/XXI-SIMPÓSIO-DOCENTE-Gamificação-Tutorial-Plickers-.pdf>.

PAVANELO, Elisangela; LIMA, Renan. Sala de aula invertida: A análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739–759, 2017.

PETRILLO, Joseph. On flipping first-semester calculus : a case study. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 5211, n. March, p. 1–11, 2016.

PINTO, Antonio Sávio da Silva et al. Inovação Didática - Projeto de Reflexão e Aplicação de Metodologias Ativas de Aprendizagem no Ensino Superior: uma experiência com “peer instruction”. **Janus**, Lorena, p. 75–87, 2012.

PINTO, Érica Jaqueline Soares; CARVALHO, Maria Eulina Pessoa de; RABAY, Glória. As Relações De Gênero Nas Escolhas De Cursos Superiores. **Revista Tempos e Espaços em Educação**, São Cristóvão, v. 10, n. 22, p. 47–58, 2017.

PRAHL, Kristine. Best Practices for the Think-Pair-Share Active-Learning Technique. **The American Biology Teacher**, California, v. 79, n. 1, p. 3–8, 2017.

REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. Uma experiência com Think Pair Share no Ensino Fundamental I. **Revista Práxis**, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 1–13, 2017.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RICKARD, Brian; MILLS, Melissa. The effect of attending tutoring on course grades in Calculus I. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 5211, n. August, p. 1–15, 2017.

ROCHA, Enilton Ferreira. **Metodologias Ativas :** um desafio além das quatro paredes da sala de aula. 2012. Disponível em: <https://www.facebook.com/enped2012.Lattes:http://lattes.cnpq.br/1682585826032961>. Acesso em: 5 ago. 2016.

ROCHA, Messenas Miranda. **Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo I**. 2016. Tese (doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Colatina, 2016.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37–50, 2006.

SALINAS, Patricia; ALANÍS, Juan Antonio. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una insitución educativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Cidade do México, v. 12, n. 3, p. 355–382, 2009.

SALVADOR, Daniel Fábio *et al*. Aplicando os princípios da Aprendizagem Baseada em Problemas como modelo instrucional no contexto de uma feira de ciências. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**. v. 13, n. 3, p. 292–317, 2014.

SANTOS, Valdir Sodré Dos; GONTIJO, Cleyton Hércules. **Avaliação em matemática: percepções docentes e implicações para o ensino e aprendizagem**. Curitiba: Appris, 2018.

SANTOS, Raimundo Morais; BORGES NETO, Hermínio. **Avaliação do**

desempenho no processo de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral (o caso da UFC). 2005. Disponível em: <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensino-aprendizagem.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2014.

SILVA, Benedito Antonio Da. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393–413, 2011.

SILVA, Benedito Antônio Da. Contrato didático. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et al. (Eds.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 208.

SOLAR-BEZMALINOVIC, Horacio. Implicações da argumentação na sala de aula de matemáticas. **Revista Colombiana de Educación**, Bogotá, v. 74, p. 155–176, 2018.

SOUZA, Carla Alves De. Influências da engenharia didática francesa na educação matemática no Brasil: a circulação e a apropriação de ideias. In: ACTAS DEL VII CIBEM 2013, Montevideo. **Anais** [...] Montevideo, 2013.

SOUZA, Débora Vieira De; FONSECA, Rogério Ferreira Da. Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 197–221, 2007.

SOUZA JÚNIOR, Arlindo José De. **Trabalho coletivo na Universidade:** trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral. Campinas: Tese (doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

STANBERRY, Martene L. Active learning : a case study of student engagement in college Calculus. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** London, v. 5211, 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TAROUCO, Vanessa Lacerda; SILVA, Giselle de Paiva; SILVA, Adelmo Carvalho da. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática MARCAS DO ENSINO TRADICIONAL SOBRE A COMPREENSÃO DA OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO EM PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2016, São Paulo. **Anais** [...] São Paulo, 2016.

TEIXEIRA, Jorge Paulo Magalhães. ENTENDENDO PROBLEMAS E CONCEITOS EM QUADROS. **Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1986, p. 31–50, 2015.

THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

THOMPSON, Patrick W.; HAREL, Guershon. Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. **ZDM - Mathematics Education**, Berlin, v. 53, p. 507–519, 2021.

VALÉRIO, Marcelo; BELETI JUNIOR, Carlos Roberto. Caracterização da produção acadêmica brasileira sobre a sala de aula invertida. **ACTIO:** Docência em Ciências, Curitiba, v. 4, n. 3, p. 17–34, 2019.

VANDENBUSSCHE, J.; RITTER, L.; SCHERRER, C. An incentivized early remediation program in Calculus I. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 5211, 2018.

VERGNAUD, Gérard. **La théorie des champs conceptuels**. 1990. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espanhol.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2017.

WASSERMAN, Nicholas H. et al. Exploring Flipped Classroom Instruction in Calculus III. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, p. 545–568, 2015.

WROBEL, Julia Schaetzle; ZEFERINO, Marcus Vinicius Casoto; CARNEIRO, Teresa Cristina Janes. Um Mapa Do Ensino De Cálculo Nos Últimos 10 Anos do COBENGE. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA 2013, Gramado, RS. **Anais** [...] Gramado, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

Questionário

Universidade de Brasília - Programa de Pós-Graduação em Educação
Linha de pesquisa: Educação em Ciências e Matemática – ECMA
Doutoranda: Líviam Santana Fontes
Orientador: Prof.ª Dr. Cleyton Hércules Gontijo

Prezado (a) acadêmico (a),
Esta pesquisa faz parte de minha tese de doutorado “As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral”. Sua participação é muito importante para o êxito deste trabalho. Os dados fornecidos serão tratados com responsabilidade e ética. Não haverá identificação dos sujeitos da pesquisa.

1. Qual a sua idade?

2. Sexo

( ) Feminino ( ) Masculino ( ) Outra resposta

3. Em que curso está matriculado?

4. Você já cursou essa disciplina?

( ) Não. É a primeira vez que curso Cálculo I.

( ) Sim. É a segunda vez que curso Cálculo I.

( ) Sim. Já cursei Cálculo I mais de duas vezes.

5. Em que tipo de instituição você cursou o ensino fundamental?

( ) Privada ( ) Pública

6. Em que tipo de instituição você cursou o ensino médio?

( ) Privada ( ) Pública

7. Em que ano você concluiu o ensino médio?
( ) 2019 ( ) 2018 ( ) 2017 ( ) 2016 ( ) 2015 ( ) Antes de 2015

8. Com quem você mora?
( ) Com seus pais.
( ) Com familiares.
( ) Com o cônjuge.
( ) Com amigos.
( ) Sozinho.

9. Qual é a sua participação na vida econômica de sua família?
( ) Você não trabalha e seus gastos são custeados por amigos e/ou familiares.
( ) Você recebe bolsa de estudos e é independente financeiramente.
( ) Você recebe bolsa de estudos, mas não é independente financeiramente.
( ) Você trabalha e é independente financeiramente.
( ) Você trabalha, mas não é independente financeiramente.
( ) Você trabalha e é responsável pelo sustento da família.

10. Você desenvolve alguma atividade remunerada?
( ) Não.
( ) Sim, estágio.
( ) Sim, emprego fixo.
( ) Sim, autônomo.

11. Quantas horas por semana se dedica aos estudos, excluído as horas de aula.
( ) Não tenho tempo para estudos.
( ) Até duas horas semanais.
( ) Entre duas e cinco horas semanais.
( ) Entre cinco e dez horas semanais.
( ) Mais de dez horas semanais.

12. Você apresenta alguma dificuldade com relação a conteúdos de matemática, da educação básica (ensino fundamental e médio)?
( ) Não ( ) Sim

13. Caso você tenha respondido que tem dificuldades com relação a conteúdos de matemática básica, escreva quais são esses conteúdos.

14. Caso você tenha respondido que tem dificuldades com relação a conteúdos de matemática básica, essa dificuldade está relacionada a:
( ) compreender a explicação do professor.
( ) pouco tempo para estudo fora da sala de aula.
( ) pouca dedicação aos estudos de modo geral.
( ) grande quantidade de conteúdo ministrado.
( ) outros fatores

15. Se você marcou a opção “outros fatores” na questão anterior, explique quais foram esses fatores.

16. Descreva brevemente como foi sua relação com a matemática ao longo da sua vida estudantil.

APÊNDICE B – UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Conteúdo: Estudo de funções

Objetivo: familiarizar os estudantes com o software GeoGebra para que sejam capazes de plotar gráficos de funções.

Número de aulas: 02

ATIVIDADE

Podemos representar funções e expressões matemáticas utilizando comandos no campo de entrada do GeoGebra.

1. Para uma função $f: R \rightarrow R$ um dos comandos que pode ser utilizado é $f(x) = função$, como por exemplo $f(x) = x^2$.

2. Para representar uma função ou expressão matemática em um intervalo fechado, pode-se utilizar os comandos.

a) $Função[função, valor\ inicial\ x, valor\ final\ x]$. Exemplo: para $y = sen\ (x)$, no intervalo $2 \leq x \leq 8$, o comando é $Função[\sin(x)\ , 2{,}8]$.

b) $se[condição, então]$. Exemplo: $se[2 \leq x \leq 8, \sin(x)]$, para a função dada em (a).

c) Para expressões definidas por com mais de um intervalo utiliza-se duas barras ||. Exemplo: Para $(x-1)^2$, nos intervalos $-1 < x < 2$ e $3 < x < 5$, o comando é $se[-1 < x < 2||3 < x < 5, (x-1)\text{^}2]$.

3. Expressões matemáticas definidas por mais de uma sentença podem ser representadas pelo comando:

a) $se[condição, senão, então]$, para duas sentenças. Exemplo: para $\begin{cases} 2-x, & se\ x \leq 1 \\ x^2, & se\ x > 1 \end{cases}$, o comando é $se[x \leq 1, 2-x, x\text{^}2]$;

b) uma combinação do comando se para mais de duas sentenças.

Exemplo: $\begin{cases} x+2, & se \quad x < -1 \\ x^2, & se -1 \leq x \leq 1 \\ x & se\ \ x > 1 \end{cases}$ $se[x < -1, x+2, se[-1 \leq x \leq 1, x\text{^}2, x]]$

4. Agora é com você! Represente no GeoGebra:

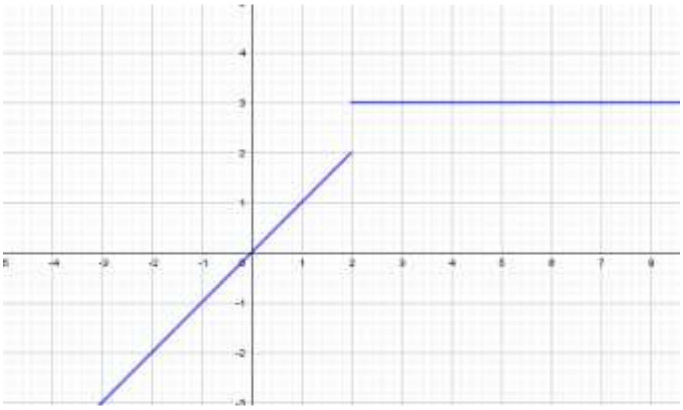
a) x^3, no intervalo $-2 < x < 1$ e $\frac{3}{2} < x < 4$

b) $\begin{cases} 3, & se\ x \leq 2 \\ -\frac{x}{2}, & se\ x > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+1, & se\ \ x < 0 \\ 1, & se\ \ 0 \leq x \leq 3 \\ -x & se\ \ x > 3 \end{cases}$

d) Uma expressão definida em dois intervalos distintos.

5. Escreva uma expressão matemática para o gráfico abaixo



APÊNDICE C – ATIVIDADE COM O GEOGEBRA

Conteúdo: revisão de funções

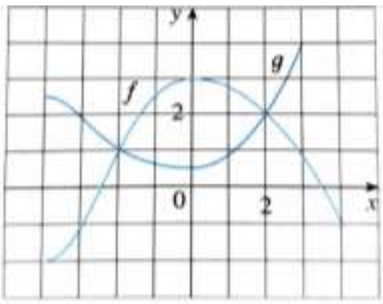
Objetivos: possibilitar ao aluno a compreensão do conceito de função algébrica e geometricamente. Trabalhar a mudança de quadro algébrico para geométrico e vice-versa.

Número de aulas: 02

ATIVIDADE

1. Considere as funções $r: R \to R$, dada por $r(x) = x^2$ e $s: [-2,1] \to R$, dada por $s(x) = x^2$ e $t: [-1,1] \cup [2,3] \to R$, dada por $t(x) = x^2$.
   a) Essas funções são iguais? Explique sua resposta
   b) Represente as funções no GeoGebra

2. Considere a expressão dada por $h(x)$:
$$h(x) = \begin{cases} 1 & , \quad se\ x \leq 1 \\ x^2, & se\ x > 1 \end{cases}$$
   a) A expressão dada por $h(x)$ representa uma função? Explique sua resposta
   b) Represente graficamente $h(x)$ no GeoGebra
   c) O gráfico de $h(x)$ representa uma função? Explique sua resposta.



3. São dados os gráficos de f e g na figura ao lado.
   a) Quais os valores de $f(-4)$ e $g(3)$?
   b) $f(x) = g(x)$ para quais valores de x?
   c) Estime o valor de x quando $f(x) = -1$
   d) Em quais intervalos f é decrescente?
   e) Estabeleça o domínio e a imagem das funções $f(x)$ e $g(x)$

4. Represente no GeoGebra as funções indicadas abaixo, e na folha de respostas escreva a expressão algébrica da função que você escolheu.
   a) Função definida por três sentenças
   b) Função afim crescente
   c) Função afim decrescente
   d) Função quadrática

e) Função exponencial
f) Função racional
g) Função trigonométrica

APÊNDICE D – PROBLEMA DO CARRINHO I

Conteúdo: conceito de Limite

Número de aulas: 02

Objetivos de aprendizagem:

- Solucionar a situação-problema apresentada
- Representar a situação-problema por meio de tabela e gráfico
- Relacionar a situação-problema com uma função
- Descobrir que a velocidade do carrinho, numericamente, tende a zero
- Compreender o conceito de Limite

Situação-problema:

Marcelo e sua equipe construíram um carrinho para participar do Torneio de Robótica da UEG, de modo que pudesse atingir uma velocidade de 2 m/s. Ao realizar os testes, constataram que o carrinho atingiu a velocidade desejada após 7 segundos, tendo percorrido 9 metros. Após este momento o carrinho apresentou um deslizamento no eixo fazendo com que, a partir desse ponto, a cada 10 metros reduzia sua velocidade pela metade.

a) O carrinho vai parar? Caso ele pare, qual será a distância percorrida, a partir do momento que apresentou o defeito?
b) Represente essa situação por meio de uma tabela.
c) Represente essa situação por meio de um gráfico.
d) Escreva uma função que representa essa situação.

APÊNDICE E – PROBLEMA DO CARRINHO II

Conteúdo: Limite de função

Número de aulas: 02

Objetivos de aprendizagem:

- Solucionar a situação-problema apresentada
- Representar a situação-problema por meio de tabela e gráfico
- Calcular valores para a função dada
- Calcular a velocidade em um determinado tempo
- Relacionar o valor da função ao se aproximar de um determinado tempo com Limite de função

Situação-problema:

Eduarda montou uma equipe para participar do Torneiro de Robótica da Semana da Física na UEG. Ao realizar os testes, a equipe constatou que a velocidade média do carrinho foi de $2{,}5\ m/s$. Com os conhecimentos físicos e matemáticos, a equipe conseguiu obter uma fórmula para o espaço percorrido pelo carrinho: $s(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$, sendo s o espaço percorrido e t o tempo.

1. Considerando essas informações:

a) represente o espaço percorrido pelo carrinho por tabela e graficamente.

b) qual será a velocidade do carrinho no instante 5 segundos após largada?

2. A equipe também obteve a fórmula para a velocidade (v) do carrinho em função do tempo (t), que é $v(t) = \frac{t^2}{9}$.

a) Represente graficamente a função.

b) Essa fórmula obtida para a velocidade está correta?

APÊNDICE F – MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES

Conteúdo: máximos e mínimos de funções

Número de aulas: 06

Objetivos de aprendizagem:

- Compreender os conceitos relacionados à máximos e mínimos de funções.
- Identificar graficamente pontos críticos e valores de máximos e mínimos de funções.
- Identificar algebricamente pontos críticos e valores de máximos e mínimos de funções.

Questões:

Após realizar a leitura do texto Valores Máximo e Mínimo, avalie as frases a seguir e marque a opção verdadeira ou falsa para cada sentença.

Toda função apresenta um máximo absoluto.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Uma função sempre apresenta um extremo local.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Sempre é possível localizar um mínimo absoluto em uma função contínua.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Um valor extremo em um intervalo fechado pode ser assumido mais de uma vez.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Se a função é definida em um intervalo fechado sempre tem um valor máximo.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Se uma função f tiver um máximo ou um mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Sempre que pudermos obter o valor zero para a Derivada de uma função f, ou seja, $f'(c) = 0$, a função tem um valor máximo ou mínimo local.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

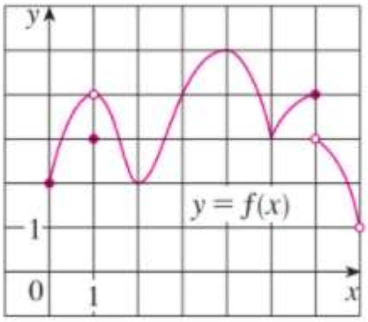
Não existe método para encontrar os valores máximos e mínimos absolutos em uma função contínua, é preciso analisar cada situação.

( ) Verdadeira. ( ) Falsa.

Exercícios

Os exercícios a seguir foram adaptados dos livros de Cálculo (STEWART, 2011; THOMAS, 2009).

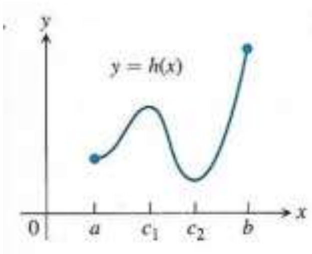
1. Considerando que o gráfico a seguir representa a função f(x), marque todas as alternativas que apresentam sentenças verdadeiras.



( ) (0,2) é um ponto crítico da função
( ) f(1) = 3 é um mínimo local da função
( ) (6,3) é um ponto crítico da função
( ) f(4) = 5 é o valor máximo absoluto da função
( ) a função apresenta seis pontos críticos
( ) (6,4) é um ponto crítico da função
( ) O mínimo absoluto da função ocorre em f(2) = 2

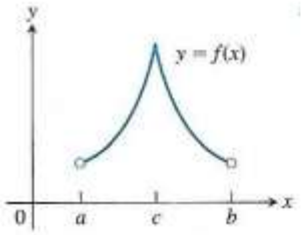
Nas questões 2 a 6 marque todas as opções correta s com relação à função representada graficamente.

2. O valor mínimo absoluto da função $h(x)$ está localizado em:



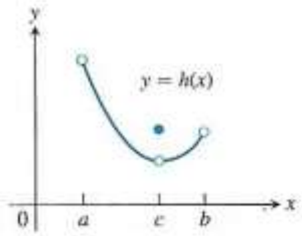
( ) a
( ) b
( ) c1
( ) c2
( ) h(x) não apresenta mínimo absoluto

3. O(s) extremo(s) da função f(x) está(ão) localizado(s) em:



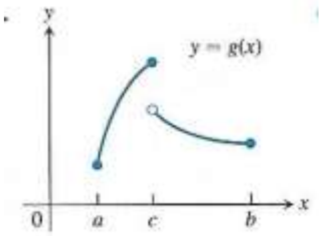
( ) a
( ) b
( ) c
( ) f(x) não apresenta pontos extremos

4. O(s) extremo(s) da função h(x) está(ão) localizado(s) em:



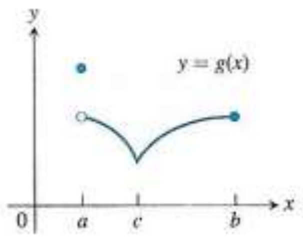
( ) a
( ) b
( ) c
( ) h(x) não apresenta pontos extremos

O(s) extremo(s) da função g(x) está(ão) localizado(s) em:



( ) a
( ) b
( ) c
( ) g(x) não apresenta pontos extremos

O(s) extremo(s) da função g(x) está(ão) localizado(s) em:



( ) a
( ) b
( ) c
( ) g(x) não apresenta pontos extremos

Dada a função f(x) abaixo, marque a(s) alternativa(s) em que o(s) valor(es) extremo ocorre.

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \qquad -2 \leq x \leq 3$$

( ) x = -2
( ) x = 0
( ) x = 2

( ) x = -1
( ) x = 1
( ) x = 3

Considerando a função f(x) dada abaixo, marque a opção que representa o número de pontos críticos de f(x).

$$f(x) = x^3 - 2x + 4$$

( ) 1
( ) 2
( ) 3
( ) f(x) não tem pontos críticos

O valor mínimo da função $f(x) = x^{\frac{4}{3}}, \quad -1 \leq x \leq 8$, ocorre em:

( ) x = -1
( ) x = ¾
( ) x = 5
( ) x = 0
( ) x = 4/3
( ) x = 8

Considerando a função representada abaixo, marque todas as alternativas que apresentam sentenças verdadeiras.

$$y = \sqrt{4 - x^2} + 1$$

( ) A função apresenta três pontos críticos

( ) x=1/2 é a abscissa do ponto crítico da função

( ) O valor mínimo da função é y = - 2

( ) (2,2) é ponto crítico da função

( ) O valor máximo da função é aproximadamente 2,4

( ) A função não tem valor mínimo

Associe corretamente as tabelas I a IV com os gráficos (a) a (d) e marque a alternativa que corresponde à sequência I, II, III, IV.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

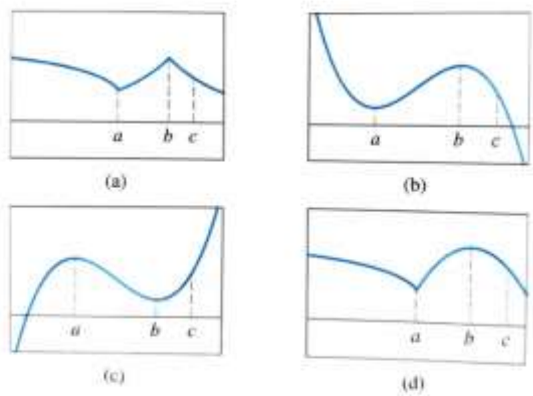
12.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	−5

x	$f'(x)$
a	não existe
b	0
c	−2

14.

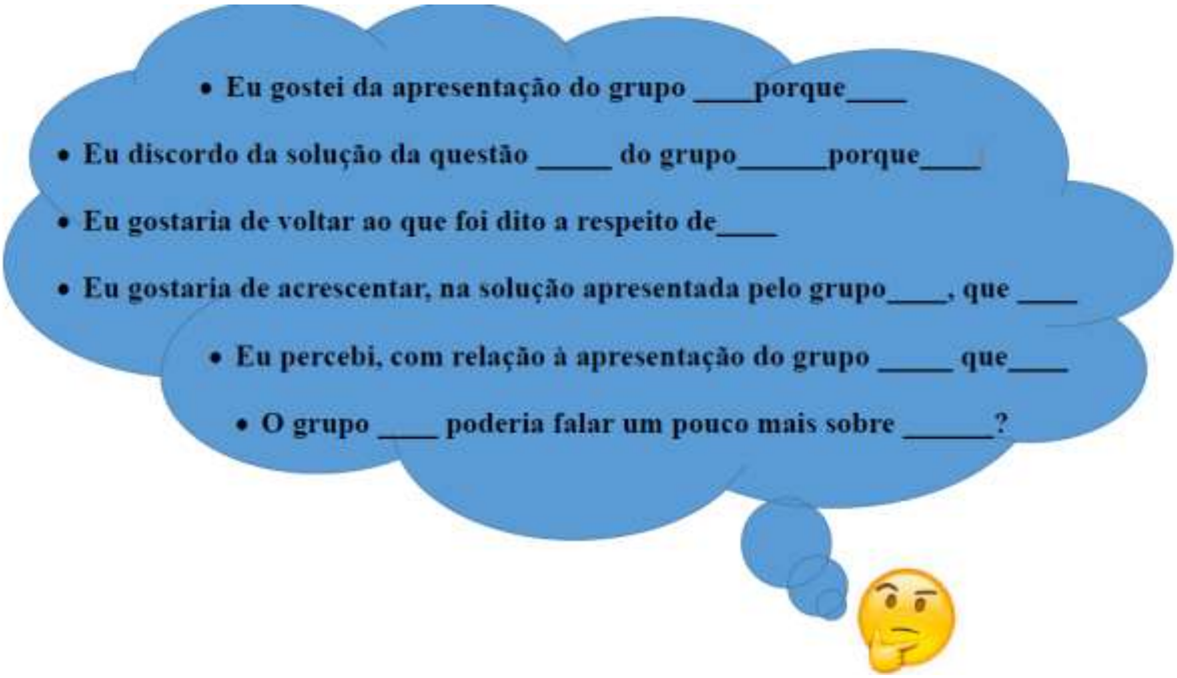
x	$f'(x)$
a	não existe
b	não existe
c	−1,7



( ) a b c d
( ) d c b a
( ) b c d a
( ) c b d a
( ) b c a d

APÊNDICE G – FRASES ORIENTADORAS

Frases utilizadas para orientar a avaliação oral dos grupos



APÊNDICE H – AUTOAVALIAÇÃO I

Formulário de Avaliação

Aluno (a):

Faça um breve comentário avaliando a aula.

Como você se sentiu nessa aula?

Bloco I: atividade individual

Quanto a atividade proposta posso dizer que:
( ) Consegui realizar a atividade sozinho.
( ) Consegui realizar a atividade consultando materiais de apoio (livro, anotações de caderno, apostila).
( ) Consegui realizar a atividade consultando materiais disponíveis na internet.
( ) Consegui realizar a atividade com auxílio de outra pessoa.
( ) Realizei apenas parte da atividade.
( ) Não consegui realizar a atividade .

Marque a alternativa que representa o grau de dificuldade na realização da atividade
( ) muito fácil
( ) fácil
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Marque a alternativa que representa o grau de dedicação para realização da atividade
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Marque a alternativa que representa a contribuição da atividade para compreensão do conteúdo
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Bloco II: atividade em grupos

Quanto a atividade realizada em grupo
( ) Participei ativamente nas discussões e contribuí com o grupo
( ) Participei de algumas discussões e contribuí com o grupo
( ) Participei de algumas discussões mas minhas ideias não foram consideradas

( ) Tentei apresentar minhas ideias mas não me deram a oportunidade de participar das discussões
( ) Não participei das discussões

Quanto a participação dos demais colegas do grupo
( ) Todos participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema
( ) Alguns colegas participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema
( ) Apenas um participante realizou a atividade e apresentou sua resolução
( ) Não foi preciso discutir as questões pois a atividade foi muito fácil
( ) Não foi possível discutir as questões pois a atividade foi muito difícil

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para obter a solução do problema.
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para compreensão do conteúdo.
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

APÊNDICE I – AUTOAVALIAÇÃO II

Formulário de Avaliação

Aluno (a):

Faça um breve comentário de avaliação das atividades.

Como você se sentiu ao realizar essas atividades?

Bloco I: atividade individual
Quanto a atividade de leitura (texto "Valores Máximo e Mínimo") posso dizer que:
( ) O texto estava claro e a leitura me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) O texto estava claro mas a leitura não me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) O texto não estava claro e a leitura não me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) Outra resposta.

Caso tenha marcado na questão anterior o item "outra resposta", escreva abaixo suas impressões quanto a atividade de leitura.

Quanto à resolução das questões relativas ao texto posso dizer que
( ) Compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e resolvi todas as questões sem dificuldade.
( ) Compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e resolvi a maioria das questões sem dificuldade.
( ) Apesar de compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto, tive dificuldade em responder as questões.
( ) Como não compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto, tive dificuldade em responder as questões.
( ) Não compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e não consegui responder as questões.

Marque a alternativa que representa a compreensão do conteúdo máximos e mínimo de funções após a correção das questões realizada pela professora.
( ) Como eu já havia compreendido o conteúdo a explicação da professora foi irrelevante.
( ) Mesmo compreendendo o conteúdo por meio da leitura do texto, a explicação da professora esclareceu algumas dúvidas.
( ) A explicação da professora possibilitou a compreensão do conteúdo, uma vez que isso não foi possível apenas com a leitura do texto.
( ) Mesmo com a leitura do texto e a explicação da professora não consegui compreender o conteúdo.

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções, marque a alternativa que representa o grau de dedicação para realização da atividade
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável

( ) alta

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções, marque a alternativa que representa o grau de dificuldade para realização da atividade.
( ) muito fácil
( ) fácil
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções, marque a alternativa que representa a contribuição da atividade para compreensão do conteúdo.
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Bloco II: atividade em grupos
Quanto a atividade realizada em grupo
( ) Participei ativamente nas discussões e contribuí com o grupo
( ) Participei de algumas discussões e contribuí com o grupo
( ) Participei de algumas discussões mas minhas ideias não foram consideradas
( ) Tentei apresentar minhas ideias mas não me deram a oportunidade de participar das discussões
( ) Não participei das discussões

Quanto a participação dos demais colegas do grupo.
( ) Todos participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema
( ) Alguns colegas participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema
( ) Apenas um participante realizou a atividade e apresentou sua resolução
( ) Não foi preciso discutir as questões pois a atividade foi muito fácil
( ) Não foi possível discutir as questões pois a atividade foi muito difícil

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para obter a solução dos exercícios
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para compreensão do conteúdo.
( ) pouca
( ) moderada
( ) considerável
( ) alta

APÊNDICE J – AUTOAVALIAÇÃO III

Formulário de Avaliação

Aluno (a):

Nas aulas dos dias 03 e 10 de outubro foi realizada a seguinte sequência de atividades individuais e uma atividade em grupo, a saber, leitura de um texto sobre máximos e mínimo de funções, resolução de questões sobre o texto, resolução de exercícios sobre o conteúdo abordado e discussão desses exercícios em grupo.

Faça um breve comentário de avaliação dessas atividades.

Como você se sentiu ao realizar essas atividades?

Bloco I: atividade individual
Quanto a atividade de leitura (texto “Valores Máximo e Mínimo” aula dia 03/10) posso dizer que:
( ) O texto estava claro e a leitura me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) O texto estava claro mas a leitura não me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) O texto não estava claro e a leitura não me possibilitou compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções.
( ) Outra resposta.

Caso tenha marcado na questão anterior o item “outra resposta”, escreva abaixo suas impressões quanto a atividade de leitura.

Quanto à resolução das questões relativas ao texto (aula dia 03/10) posso dizer que
( ) Compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e resolvi todas as questões sem dificuldade.

( ) Compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e resolvi a maioria das questões sem dificuldade.

( ) Apesar de compreender os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto, tive dificuldade em responder as questões.

( ) Como não compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto, tive dificuldade em responder as questões.

( ) Não compreendi os conceitos de máximo e mínimo de funções do texto e não consegui responder as questões.

Marque a alternativa que representa a compreensão do conteúdo máximos e mínimo de funções após a correção das questões realizada pela professora.

( ) Como eu já havia compreendido o conteúdo a explicação da professora foi irrelevante.

( ) Mesmo compreendendo o conteúdo por meio da leitura do texto, a explicação da professora esclareceu algumas dúvidas.

( ) A explicação da professora possibilitou a compreensão do conteúdo, uma vez que isso não foi possível apenas com a leitura do texto.

( ) Mesmo com a leitura do texto e a explicação da professora não consegui compreender o conteúdo.

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções (aula dia 10/10), marque a alternativa que representa o grau de dedicação para realização da atividade

( ) pouca

( ) moderada

( ) considerável

( ) alta

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções (aula dia 10/10), marque a alternativa que representa o grau de dificuldade para realização da atividade.

( ) muito fácil

( ) fácil

( ) moderada

( ) considerável

( ) alta

Com relação aos exercícios de máximos e mínimos de funções (aula dia 10/10), marque a alternativa que representa a contribuição da atividade para compreensão do conteúdo.

( ) pouca

( ) moderada

( ) considerável

( ) alta

Bloco II: atividade em grupos

Quanto a atividade realizada em grupo

( ) Participei ativamente nas discussões e contribuí com o grupo

( ) Participei de algumas discussões e contribuí com o grupo

( ) Participei de algumas discussões mas minhas ideias não foram consideradas

( ) Tentei apresentar minhas ideias mas não me deram a oportunidade de participar das discussões

( ) Não participei das discussões

Quanto a participação dos demais colegas do grupo.

( ) Todos participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema

( ) Alguns colegas participaram ativamente nas discussões e contribuíram para encontrar a solução do problema

( ) Apenas um participante realizou a atividade e apresentou sua resolução

( ) Não foi preciso discutir as questões pois a atividade foi muito fácil

( ) Não foi possível discutir as questões pois a atividade foi muito difícil

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para obter a solução dos exercícios

( ) pouca

( ) moderada

( ) considerável

( ) alta

Marque a alternativa que representa a contribuição da discussão em grupo para compreensão do conteúdo.

( ) pouca

( ) moderada

( ) considerável

( ) alta

ANEXOS

ANEXO 1 – TERMO DE ACEITE INSTITUCIONAL

ACEITE INSTITUCIONAL

O/A Sr./Sra. *Prof. Dr. Elton Fialho dos Reis* do(a) *Universidade Estadual de Goiás Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas*, está de acordo com a realização da pesquisa As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, de responsabilidade do/da pesquisador/a *Liviam Santana Fontes* aluno(a) de *doutorado* no Departamento de *Educação, do Programa de Pós-Graduação em Educação* da Universidade de Brasília, realizado sob orientação de *Cleyton Hércules Gontijo*, após revisão e aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP/CHS) da Universidade de Brasília.

O estudo envolve a realização de *questionários, grupos focais e atividades de intervenção em sala de aula com discentes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral.* A pesquisa terá a duração de 4 meses, com previsão de início em 03/2020 e término em 06/2020.

Eu, *Elton Fialho dos Reis, diretor* do(a) *Universidade Estadual de Goiás Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas*, declaro conhecer e cumprir as resoluções éticas brasileiras, em especial as Resoluções CNS 466/2012 e 510/2016. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Anápolis, 21 de Janeiro de 2020

Elton Fialho dos Reis
UEG Câmpus CET
Diretor

Elton Fialho Dos Reis
Nome do/da responsável pela instituição

Assinatura e carimbo do/da responsável pela instituição

ANEXO 2 – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

UNB - INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS DA UNIVERSIDADE

PlataForma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Pesquisador: LÍVIAM SANTANA FONTES

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 29142119.1.0000.5540

Instituição Proponente: Faculdade de Educação

Patrocinador Principal: FUNDACAO UNIVERSIDADE DE BRASILIA

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.934.317

Apresentação do Projeto:

O projeto intitulado "As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral" é desenvolvido no âmbito de trabalho de doutorado de Líviam Santana Fontes, no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília (UnB), sob orientação de Cleyton Hércules Gontijo, Professor Associado II na UnB, com lotação no Departamento de Matemática e membro do Programa de Pós-Graduação em Educação da UnB.

A fase de coleta de dados da pesquisa, segundo cronograma apresentado pela solicitante, está prevista para abril/2020, tendo como instituição a Universidade Estadual de Goiás, Campus de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mais especificamente, a pesquisadora fará intervenção em sala de aula, em turma onde ministra aulas, com 35 estudantes de Cálculo I, do 1o. período do curso de Física.

Objetivo da Pesquisa:

Segundo a pesquisadora, a "pesquisa se propõe conceber metodologias ativas de aprendizagem que serão desenvolvidas com uma turma de alunos do curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), e validá-las seguindo as orientações da engenharia didática. Desse modo, o objetivo da pesquisa é validar metodologias ativas de aprendizagem em CDI a fim de promover a aprendizagem dos alunos, diminuindo assim as reprovações que são comuns nessa disciplina."

Endereço: CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT-01/2 - Horário de
Bairro: ASA NORTE **CEP:** 70.910-900
UF: DF **Município:** BRASILIA
Telefone: (61)3107-1592 **E-mail:** cep_chs@unb.br

Como objetivos específicos, a pesquisadora define:
-"Conceber metodologias ativas para utilizá-las no ensino de Cálculo Diferencial e Integral";
-"Verificas[/r] as potencialidades das metodologias ativas a fim de favorecer a aprendizagem dos estudantes";
-"Investigar em que medida as atividades elaboradas na perspectiva das metodologias ativas são inovadoras";
-Compreender a relevância das metodologias ativas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, do ponto de vista dos estudantes.

Do ponto de vista metodológico, o estudo envolve a realização de questionários, grupos focais e atividades de intervenção em sala de aula com discentes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, conforme supramencionado, com duração prevista de 4 meses.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

No tocante a benefícios, a pesquisadora destaca que, com "a hipótese de que as metodologias ativas podem contribuir com a aprendizagem dos alunos" na disciplina CDI, espera-se colaborar com a diminuição dos altos índices de reprovação atualmente verificados.
No que diz respeito aos riscos, conforme ressalta a pesquisadora, os "participantes serão estudantes universitários, e a coleta de dados ocorrerá na própria instituição de ensino desses sujeitos, respeitando o anonimato de todos os discentes. Deste modo, a pesquisa não oferece riscos aos envolvidos."
Este colegiado acompanha a avaliação da pesquisadora quanto aos quesitos de benefícios e riscos. Salienta que é importante respeitar a voluntariedade na participação na pesquisa e, caso haja recusa, deve ser destacado que não haverá quaisquer penalidades.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Este colegiado entende que a proposta de pesquisa, no que diz respeito à intervenção planejada pela pesquisadora e submetida à apreciação deste Comitê de Ética em Pesquisa, está em conformidade com a normativa de referência, a saber, as Resoluções CNS 466/2012 e 510/2016.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido apresentado pela pesquisadora está em conformidade com o disposto na resolução CNS 510/2016 ao solicitar anuência do participante da pesquisa, livre de simulação, fraude, erro ou intimidação, após esclarecimento sobre a natureza da pesquisa, sua justificativa, seus objetivos, métodos, potenciais benefícios e riscos, bem como ao explicitar compromisso de sigilo, de devolutiva dos resultados da pesquisa, esclarecimento quanto à possibilidade de interrupção na participação, informações de contato tanto com a pesquisadora como com o CEP/CHS (UnB), entrega de duas vias, sendo uma a deixar com o participante. É importante salientar que, como a pesquisadora forneceu ao CEP/CHS apenas um modelo de TCLE, entende-se que a pesquisa será realizada com estudantes maiores de idade, capazes de entender o conteúdo desse documento e consentir com a participação na pesquisa.

Recomendações:

Sem considerações adicionais.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Este parecer é favorável à realização da pesquisa.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1490388.pdf	17/02/2020 09:50:13		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto.pdf	17/02/2020 09:49:20	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	17/02/2020 09:49:01	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	Lattes_orientador.pdf	21/01/2020 11:28:40	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	Lattes.pdf	21/01/2020 11:28:06	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	Carta_revisao_etica.pdf	21/01/2020 11:27:32	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	Instrumentos_coleta_de_dados.pdf	21/01/2020 11:23:43	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	Carta_encaminhamento.pdf	21/01/2020 11:21:41	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Outros	aceite_institucional.pdf	21/01/2020 11:18:41	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	21/01/2020 11:14:40	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	19/12/2019 10:58:44	LÍVIAM SANTANA FONTES	Aceito
Folha de Rosto	FolhaDeRosto.pdf	19/12/2019	LÍVIAM SANTANA	Aceito

Folha de Rosto	FolhaDeRosto.pdf	10:50:58	FONTES	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

BRASILIA, 25 de Março de 2020

Assinado por:
Érica Quinaglia Silva
(Coordenador(a))

Endereço: CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT-01/2 - Horário de
Bairro: ASA NORTE **CEP:** 70.910-900
UF: DF **Município:** BRASILIA
Telefone: (61)3107-1592 **E-mail:** cep_chs@unb.br

ANEXO 3 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado a participar da pesquisa “As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral”, de responsabilidade de Líviam Santana Fontes, estudante de *doutorado* da *Universidade de Brasília*. O objetivo desta pesquisa é validar metodologias ativas de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral a fim de promover a aprendizagem dos alunos, diminuindo assim as reprovações que são comuns nessa disciplina. Assim, gostaria de consultá-lo/a sobre seu interesse e disponibilidade de cooperar com a pesquisa.

Você receberá todos os esclarecimentos necessários antes, durante e após a finalização da pesquisa, e lhe asseguro que o seu nome não será divulgado, sendo mantido o mais rigoroso sigilo mediante a omissão total de informações que permitam identificá-lo/a. Os dados provenientes de sua participação na pesquisa, tais como questionários, entrevistas, fitas de gravação, ficarão sob a guarda do/da pesquisador/a responsável pela pesquisa.

A coleta de dados será realizada por meio de questionários, observação de aulas e Grupo Focal. É para estes procedimentos que você está sendo convidado a participar. Sua participação na pesquisa não implica em nenhum risco.

Espera-se com esta pesquisa validar metodologias ativas de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral a fim de promover a aprendizagem dos alunos, e reduzir as reprovações nesta disciplina.

Sua participação é voluntária e livre de qualquer remuneração ou benefício. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios.

Se você tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, você pode me contatar através do telefone 62 98416-4140 ou pelo e-mail liviam_fontes@yahoo.com.br.

A equipe de pesquisa garante que os resultados do estudo serão devolvidos aos participantes por meio da utilização de diferentes metodologias de ensino, que podem contribuir com a aprendizagem, podendo ser publicados posteriormente na comunidade científica.

Este projeto foi revisado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP/CHS) da Universidade de Brasília. As informações com relação à assinatura do TCLE ou aos direitos do participante da pesquisa podem ser obtidas por meio do e-mail do CEP/CHS: cep_chs@unb.br ou pelo telefone: (61) 3107 1592.

Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com o/a pesquisador/a responsável pela pesquisa e a outra com você.

______________________________	______________________________
Assinatura do/da participante	Assinatura do/da pesquisador/a

Brasília, ___ de __________de ________

ANEXO 4 – VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Texto extraído do livro Cálculo (STEWART, 2011, p.253).

4.1 VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização que resolveremos neste capítulo:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

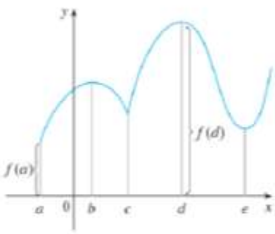


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

1 DEFINIÇÃO Uma função f tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D, e o número $f(c)$ é denominado **valor mínimo** de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.

A Figura 1 mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto do gráfico, enquanto $(a, f(a))$ é o ponto mais baixo. Na Figura 1, se considerarmos somente os valores de x próximos de b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior desses valores de $f(x)$ e é chamado *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é denominado *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leqslant f(x)$ para x nas proximidades de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f tem também um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

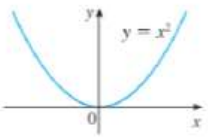


FIGURA 2
Valor mínimo 0, nenhum máximo

2 DEFINIÇÃO Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. [Isso significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, f tem um **mínimo local** em c se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x estiver próximo de c.

EXEMPLO 1 A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) 1 um número infinito de vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Da mesma forma, $\cos(2n+1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer inteiro. □

EXEMPLO 2 Se $f(x) = x^2$, então $f(x) \geqslant f(0)$, pois $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola $y = x^2$ (veja a Figura 2). Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo. □

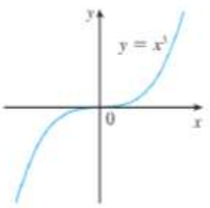


FIGURA 3
Nenhum mínimo, nenhum máximo

EXEMPLO 3 Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na Figura 3, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela também não tem nenhum valor extremo local. □

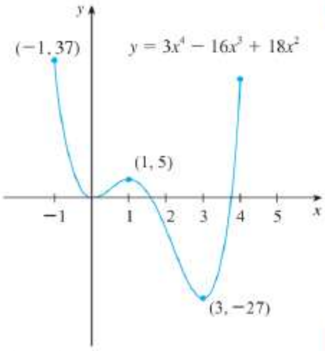


FIGURA 4

EXEMPLO

EXEMPLO 4 O gráfico da função

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

está mostrado na Figura 4. Você pode ver que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$. [Esse máximo absoluto não é um máximo local, pois ocorre em um extremo do intervalo.] Também, $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local como um mínimo absoluto. Observe que em $x = 4$, f não tem um máximo local nem um máximo absoluto. □

Vimos que algumas funções têm valores extremos, enquanto outras não têm. O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

> **3** **O TEOREMA DO VALOR EXTREMO** Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 5. Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez. Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser demonstrado e, assim, omitimos sua demonstração.

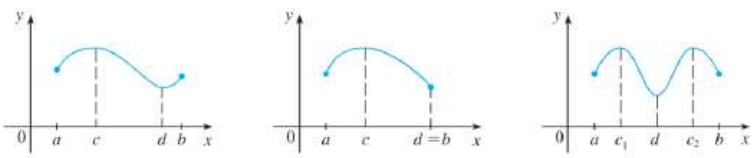


FIGURA 5

As Figuras 6 e 7 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

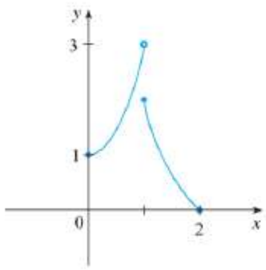


FIGURA 6
Esta função tem um valor mínimo $f(2) = 0$, mas não tem valor máximo

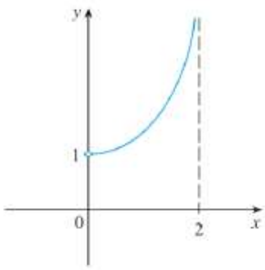


FIGURA 7
Esta função contínua g não tem nem máximo nem mínimo

A função f, cujo gráfico está mostrado na Figura 6, está definida no intervalo fechado $[0, 2]$, mas não tem valor máximo. [Observe que a imagem de f é $[0, 3)$. A função assume valores arbitrariamente próximos de 3, porém nunca atinge o valor 3.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois f não é contínua. [Não obstante, uma função descontínua *pode* ter valores máximo e mínimo. Veja o Exercício 13(b).]

A função g da Figura 7 é contínua no intervalo aberto $(0, 2)$, mas não tem nem valor máximo nem mínimo. [A imagem de g é $(1, \infty)$. A função assume valores arbitrariamente grandes.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois o intervalo $(0, 2)$ não é fechado.

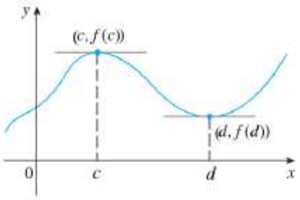


FIGURA 8

■ O Teorema de Fermat é assim designado em homenagem a Pierre Fermat (1601-1665), um advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Apesar de seu amadorismo, Fermat foi, junto com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Seus métodos para encontrar as tangentes às curvas e os valores máximo e mínimo (antes da invenção de limites e derivadas) fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial.

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar procurando os valores extremos locais.

A Figura 8 mostra o gráfico de uma função f com um máximo local em c e um mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

4 TEOREMA DE FERMAT Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 2, $f(c) \geqslant f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0, sendo h positivo ou negativo, então

$$f(c) \geqslant f(c+h)$$

e, portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade (usando o Teorema 2.3.2), obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leqslant 0$.

Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade (5) é invertido quando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Logo, tomando o limite à esquerda, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Mostramos que $f'(c) \leqslant 0$ e também que $f'(c) \leqslant 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

Demonstramos o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser demonstrado de forma análoga, ou pode ser deduzido do caso já demonstrado por meio do Exercício 76 (veja o Exercício 77). □

Os exemplos a seguir chamam nossa atenção para o fato de que não devemos esperar demais do Teorema de Fermat. Não podemos esperar localizar os valores extremos impondo $f'(x) = 0$ e isolando x.

EXEMPLO o o

EXEMPLO 5 Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 9. (Ou observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, mas $x^3 < 0$ para $x < 0$.) O fato de que $f'(0) = 0$ significa simplesmente que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em $(0, 0)$. Em vez de $y = x^3$ ter máximo ou mínimo em $(0, 0)$, a curva cruza sua tangente horizontal aí. □

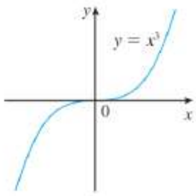


FIGURA 9
Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, mas f não tem mínimo nem máximo

EXEMPLO 6 A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0; contudo, esse valor não pode ser encontrado tomando $f'(x) = 0$, pois, conforme mostramos no Exemplo 5 da Seção 2.8, $f'(0)$ não existe (veja a Figura 10). □

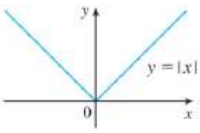


FIGURA 10
Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe

ATENÇÃO Os Exemplos 5 e 6 mostram que devemos ser muito cuidadosos no uso do Teorema de Fermat. O Exemplo 5 mostra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um máximo ou um mínimo em c. (Em outras palavras, a recíproca do Teorema de Fermat em geral é falsa.) Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c)$ não existir (como no Exemplo 6).

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 DEFINIÇÃO Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

EXEMPLO 7 Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

■ A Figura 11 mostra um gráfico da função f do Exemplo 7. Ele confirma nossa resposta, pois há uma tangente horizontal quando $x = 1,5$ e uma tangente vertical quando $x = 0$.

SOLUÇÃO A Regra do Produto nos dá que

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

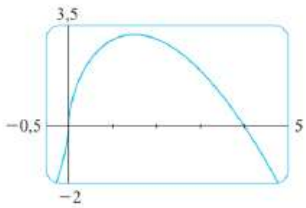


FIGURA 11

[O mesmo resultado poderia ter sido obtido escrevendo-se primeiro $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, isto é, $x = \frac{3}{2}$, e $f(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0. □

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir (compare a Definição 6 com o Teorema 4):

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Para encontrar um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ou ele é local [nesse caso ocorre em um número crítico, por (7)] ou acontece em uma extremidade do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O MÉTODO DO INTERVALO FECHADO Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 8 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

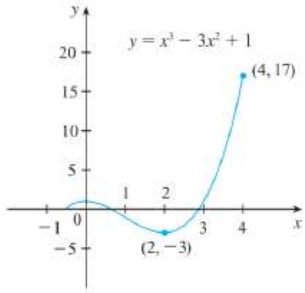


FIGURA 12

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado na Figura 12. □

Se você tiver uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico, poderá estimar facilmente os valores máximo e mínimo. Mas, como mostra o próximo exemplo, o cálculo é necessário para encontrar valores *exatos*.

EXEMPLO 9

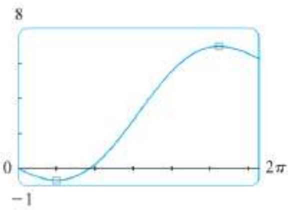


FIGURA 13

(a) Use uma ferramenta gráfica para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(b) Utilize o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

SOLUÇÃO

(a) A Figura 13 mostra um gráfico de f na janela retangular $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Movendo o cursor próximo ao ponto de máximo, vemos que a coordenada y não varia muito nas vizinhanças do máximo. O valor máximo absoluto é cerca de 6,97 e ocorre quando $x \approx 5{,}2$. Analogamente, movendo o cursor para próximo do ponto de mínimo, vemos que o valor mínimo absoluto é cerca de $-0{,}68$ e ocorre quando $x \approx 1{,}0$. Seria possível obter mais precisão nas estimativas por meio de um *zoom* em direção aos pontos máximo e mínimo, mas, em vez disso, vamos usar o cálculo.

(b) A função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ é contínua em $[0, 2\pi]$. Uma vez que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, temos $f'(x) = 0$ quando $\cos x = \frac{1}{2}$ e isso ocorre quando $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Os valores de f nesses pontos críticos são

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}684853$$

e

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}968039$$

Os valores de f nas extremidades são

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6{,}28$$

Comparando esses quatros números e usando o Método do Intervalo Fechado, vemos que o valor mínimo absoluto é $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, enquanto o valor máximo absoluto é $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Os valores da parte (a) servem como uma verificação de nosso trabalho. □

EXEMPLO o

EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397$$

(em metros/segundo). Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas, em vez disso, da função aceleração. Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}\,(0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397) \\ &= 0{,}0011904t^2 - 0{,}05504t + 7{,}196 \end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leq t \leq 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0{,}0023808t - 0{,}05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0{,}05504}{0{,}0023808} \approx 23{,}12$$

Calculando o valor de $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, temos,

$$a(0) = 7{,}196 \qquad a(t_1) \approx 6{,}56 \qquad a(126) \approx 19{,}16$$

Assim, a aceleração máxima é cerca de 19,16 m/s^2, e a aceleração mínima, cerca de 6,56 m/s^2. □