Universidade de Brasília

Técnicas Nominais e Aplicações em Lógica de Primeira Ordem

Ali Khan Caires Ribeiro Santos

Orientadora: Dra. Daniele Nantes Sobrinho

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 14 de Dezembro de 2021

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Técnicas Nominais e Aplicações em Lógica de Primeira Ordem

por

Ali Khan Caires Ribeiro Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasíliacomo parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 14 de dezembro de 2021.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Daniele Nantes Sobrinho- MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Mauricio Ayala Rincón– MAT/UnB (Membro)

Samuel G. da Silva

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva – UFBA (Membro)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Edna e Francisco, e a minha irmã Vanessa, por todo o amor, apoio e ajuda que sempre me deram durante toda a minha vida, sem vocês eu não seria quem eu sou e muito menos chegaria aonde cheguei.

Gostaria de agradecer à minha orientadora Dra. Daniele Nantes Sobrinho por ter desempenhado tal função com tanta dedicação, amizade e paciência.

Agradeço também a todos os amigos e colegas, em especial ao meu melhor amigo, Fabio Augusto, por todos os momentos que compartilhamos juntos, e também a minha melhor amiga Gabriela Torres que também, ao longo desta jornada, sempre me acalentou com sua companhia maravilhosa.

A todos os professores que tive ao longo da minha formação, pelos ensinamentos que guiaram o meu aprendizado.

Aos professores Mauricio Ayala e Samuel Gomes, por aceitarem comporem a banca da minha defesa e pelas observações e correções feitas.

Sou grato também ao CNPq e à CAPES pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

Por ultimo, mas não menos importante, gostaria de deixar um agradecimento a minha cachorrinha Mel que ao longo destes anos me trouxe felicidade e companhia.

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo sobre as *Técnicas Nominais*, introduzidas por Murdoch J. Gabbay e Andrew M. Pitts, que consistem em uma gama de técnicas, baseadas no conceito de *conjuntos nominais*, que descrevem novas maneiras de apresentar a sintaxe de sistemas formais envolvendo operações de ligação variável. Uma de suas principais aplicações envolve a determinação de um modelo nominal abstrato para a *Lógica clássica de primeira ordem com igualdade* $\mathbb{L}_1$, alicerçado em uma generalização nominal dos conceitos da teoria de reticulados usual. Com este propósito em mente, iremos explorar os conceitos necessários referentes as técnicas nominais para, em seguida, utilizá-los para realizar uma extensão das noções básicas da teoria de reticulados, onde definiremos *conjuntos nominais parcialmente ordenados*, bem como estabeleceremos as noções de ínfimos e supremos, para então obtermos a noção de *reticulados nominais*.

Estabeleceremos também noções de distributividade e complementação para reticulados nominais e relacionaremos isso com o conceito de σ-álgebra, o qual irá nos permitir não só incorporar a operação de substituição no nosso modelo, como também generalizar a noção de substituição. Todas essas definições irão culminar na definição de uma estrutura algébrica nominal chamada de *álgebra* $\mathbb{L}_1$ e será esta estrutura que usaremos para interpretar a lógica de primeira ordem $\mathbb{L}_1$ e provar a sua correção, noção esta que liga a sintaxe e a semântica da lógica $\mathbb{L}_1$. Mais precisamente, a correção afirma que se $\Phi \vdash \Psi$ for um sequente derivável em $\mathbb{L}_1$, então a sua interpretação $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$ é verdadeira.

Abstract

This dissertation presents a study of *Nominal Techniques*, introduced by Murdoch J. Gabbay and Andrew Pitts, which consist of a range of techniques, based on the concept of *nominal sets*, that describe new ways of presenting the syntax of formal systems involving variable-binding operations. One of its main applications involves the determination of an abstract nominal model for the *Classical first-order logic with equality* $\mathbb{L}_1$, based on a nominal generalization of the concepts of usual lattice theory. With this purpose in mind, we will explore the necessary concepts regarding nominal techniques and then use them to extend the basics of lattice theory, where we will define *partially ordered nominal sets* (nominal posets), as well as establish the notions of infimum and supremum, in order to obtain the notion of *nominal lattices*.

We will also establish notions of distributivity and complementation and we will relate this to the concept of σ-algebras, which will allow us not only to incorporate the substitution operation in our model, but also to generalize the notion of substitution. All these definitions will culminate in the definition of a nominal algebraic structure called $\mathbb{L}_1$ *algebra* and it will be this structure that we will use to interpret the first-order logic $\mathbb{L}_1$ and prove its soundness, a notion that links the syntax and semantics of the logic $\mathbb{L}_1$. More precisely, soundness states that if $\Phi \vdash \Psi$ is a derivable sequent in $\mathbb{L}_1$, then its interpretation $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ over a $\mathbb{L}_1$ algebra is true.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

As Técnicas Nominais, criadas por Murdoch J. Gabbay e Andrew M. Pitts [14] no início deste século, têm raízes históricas nos modelos de permutação da *Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com átomos* (ZFA) elaborada por Fraenkel e Mostowski na década de 1930, a fim de provar a independência do Axioma da Escolha dos outros axiomas de uma teoria dos conjuntos com átomos.

ZFA e técnicas nominais. A teoria de conjuntos ZFA é definida pelo acréscimo de objetos chamados *átomos*. Aqui, átomos são interpretados como entidades que não possuem elementos e que são distintos do conjunto vazio. Por essa razão, átomos são indistinguíveis em termos da relação de pertinência $\in$, fazendo assim com que estes sejam objetos sem uma estrutura interna e que possuem a capacidade de identificar-se e distinguir-se de outros átomos. Sendo assim, átomos também podem ser vistos como identificadores, sendo assim uma excelente ferramenta para modelar nomes e variáveis.

Em geral, em ZFA assume-se que é dado um conjunto infinito enumerável $\mathbb{A}$ de átomos, cujos elementos são denotados por $a, b, c, \ldots$. Usando a *Hierarquia Cumulativa de von Neumann* pode-se construir um universo $\mathcal{U}$ de conjuntos sobre $\mathbb{A}$ começando com $\mathbb{A}$, adicionando todos os subconjuntos de $\mathbb{A}$ e iterando transfinitamente. Desse modo, o universo $\mathcal{U}$ assim definido é um modelo *bem-fundado* para ZFA, um ambiente rico o suficiente em estrutura para expressar muita matemática, mais ainda as técnicas nominais de forma natural.

Em $\mathcal{U}$ construímos o grupo das permutações finitas $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ como sendo o conjunto das bijeções $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tais que o conjunto $\{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \neq a\}$ é finito, ou seja, são as permutações que fixam "quase" todos os átomos. Esta ideia induz uma ação do grupo $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ sobre os elementos $x \in \mathcal{U}$ que preserva a estrutura do universo $\mathcal{U}$. Esta ação de permutação, denotada por $\pi \cdot x$, cria uma relação de dependência entre os elementos do universo e subconjuntos de átomos. Mais especificamente, essa relação se manifesta na ideia-chave de *suporte finito*: para um elemento $x \in \mathcal{U}$, dizemos que um subconjunto finito $B \subseteq \mathbb{A}$ *suporta* x quando $\pi \cdot x = x$, para toda permutação π que fixa os átomos de B. Neste seguimento, define-se um *conjunto nominal* $\mathcal{X}$ como um conjunto em que todo elemento de $x \in \mathcal{X}$ é finitamente suportado por algum subconjunto finito $B_x \subseteq \mathbb{A}$. Intuitivamente, pensamos em um conjunto nominal $\mathcal{X}$ como sendo um conjunto equipado com uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação em que cada elemento $x \in \mathcal{X}$ "contém" uma quantidade finita de átomos em sua "composição".

Na abordagem nominal, conjuntos nominais possuem um papel protagonista. No entanto, o universo $\mathcal{U}$ apresenta outras propriedades fundamentais. Essencialmente, equipar o universo $\mathcal{U}$ com uma ação de permutação sobre átomos cria resultados meta-teóricos muito interessantes, sendo o principal deles chamado de *Princípio da Equivariância*. Intuitivamente, este princípio nos dá maneiras de manusear eficientemente noções de renomeamentos e α-equivalência na sintaxe de sistemas formais e captura por que é tão útil usar átomos nos fundamentos das técnicas nominais. Mais formalmente, seja $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ um predicado expresso na linguagem de ZFA, onde $x_1, \ldots, x_n$ é a lista de *todas* as variáveis ocorrendo em ϕ, as quais representam elementos de $\mathcal{U}$. Nestas condições, o princípio da equivariância afirma que para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ vale

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(\pi \cdot x_1, \ldots, \pi \cdot x_n).$$

Assim, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ é válida independentemente de como permutamos os átomos que ocorrem nos elementos $x_1, \ldots, x_n$. Murdoch J. Gabbay e Andrew M. Pitts [15] descrevem o este princípio da seguinte forma:

> "[...] *the validity of assertions about syntactical objects should be sensitive only to distinctions between variable names, rather than to the particular names themselves.*".

Portanto, as técnicas nominais surgem com o propósito de fornecer uma nova análise matemática promissora a respeito de nomes em linguagens formais, com muitas aplicações para a sintaxe e semântica de linguagens de programação e sistemas formais que envolvem operadores de ligação de variáveis.

Lógica de primeira ordem e substituição. Um exemplo paradigmático destas aplicações envolve o estudo da Lógica clássica de primeira ordem e a noção da operação de substituição em sistemas formais. Em [10] e [11], Murdoch J. Gabbay e Aad Mathijssen, usam as técnicas nominais para axiomatizar a lógica de primeira ordem e a noção de substituição, assim como tradicionalmente se axiomatizam álgebras booleanas, grupos, anéis, corpos etc.

Com essas axiomatizações estabelecidas, uma série de artigos emergiram dos esforços para compreender a semântica por trás dessas axiomatizações. A ideia era determinar estruturas algébricas nominais equipadas com funções satisfazendo os axiomas nominais estabelecidos anteriormente. Um dos artigos nesta direção é o *Nominal semantics for predicate logic: algebras, substitution, quantifiers, and limits* [16]. Neste artigo, Murdoch J. Gabbay e Gilles Dowek definem estruturas algébricas capazes de incorporar a operação de substituição, à estas estruturas dão-se os nomes de *álgebras de substituição de termos* e *álgebras de substituição*. Basicamente, estas estruturas generalizam, respectivamente, o conjunto de termos e o conjunto de predicados (identificados por α-equivalência) da lógica de primeira ordem equipados com suas respectivas operações usuais de substituição. Após isso, é realizada uma generalização nominal da Teoria de Reticulados usual. Em resumo, para subconjuntos finitos $B \subseteq \mathbb{A}$ definem-se noções nominais de ínfimos e supremos, chamadas de B#ínfimos e B#supremos, para definir estruturas nominais de reticulados. Então faz-se uma combinação entre as álgebras de substituição e reticulados nominais, criando então uma estrutura nominal com poder expressivo para interpretar de forma "*absoluta*" a lógica de primeira ordem.

O que faz este modelo nominal ser tão diferente e útil está em parte nos detalhes técnicos não-triviais e bonitos de sua construção, que também oferecem certas vantagens em relação aos modelos já existentes da lógica de primeira ordem. Os modelos padrões são baseados na ideia de *valoração* de variáveis. Especificamente, uma valoração de variáveis é uma função v que mapeia variáveis em elementos do domínio de uma estrutura. Consequentemente, a interpretação de termos r e predicados ϕ dependem do *contexto* criado pela valoração v. Em outras palavras, r e ϕ fornecem a sintaxe enquanto v fornece o contexto. Dessa maneira, na noção usual de modelos, nomes denotam objetos semânticos, porém, isso se torna um problema pois objetos semânticos não possuem uma noção inerente sobre os nomes envolvidos em sua construção.

Com isso em mente, Murdoch J. Gabbay e Gilles Dowek [16] propõem uma alternativa: produzir uma semântica para a lógica de primeira ordem na qual os objetos semânticos se tornem "conscientes" dos nomes envolvidos em suas "composições". Neste modelo, cada variável a é mapeada em uma "cópia" dela mesma no modelo nominal. Logo, no modelo nominal fornecido, todo termo e predicado possui uma interpretação "*absoluta*" independentemente da valoração das variáveis. Sendo assim, termos e predicados são interpretados diretamente como elementos de um reticulado nominal, sujeitos a interpretações adequadas dos conectivos e quantificadores. Isso é feito aplicando a tecnologia das técnicas nominais à teoria das reticulados, em particular identificando B#ínfimos e B#supremos como as noções unificadoras necessárias para modelar a conjunção ($\wedge$), quantificação universal ($\forall$), disjunção ($\vee$) e quantificação existencial ($\exists$).

Estabelecida então a semântica algébrica nominal para a lógica de primeira ordem, vêm-se o estudo da sua *correção*. A correção afirma que se $\Phi \vdash \Psi$ for um sequente derivável na lógica de primeira ordem, então a sua interpretação $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ sobre o modelo nominal é verdadeira. Intuitivamente, isto significa que tudo o que pode ser provado na lógica de primeira ordem é, de fato, verdade.

Por fim, em seu artigo *Semantics out of context: nominal absolute denotations for first-order logic and computation* [9], principal referência deste trabalho, Murdoch J. Gabbay expande e refina todas estas ideias para a lógica de primeira ordem *com igualdade* $\mathbb{L}_1$.

Objetivo. O nosso objetivo neste trabalho será, não só expor os fundamentos das técnicas nominais, como também investigar as noções por trás da construção do modelo nominal para a lógica de primeira ordem com igualdade $\mathbb{L}_1$. Uma vez feito isso, definiremos o modelo nominal e estabeleceremos uma interpretação de $\mathbb{L}_1$ sobre este modelo e provaremos a sua correção.

Contribuições As contribuições do presente trabalho consistem na apresentação detalhada de conceitos e resultados acerca do desenvolvimento das técnicas nominais e de suas aplicações em lógica de primeira ordem. Além disso apresentamos algumas contribuições que são listadas abaixo:

1. Apresentamos algumas figuras originais (Figuras 2.2, 3.1, 4.1 e 4.2) e um exemplo (Exemplo 4.2) inédito para ilustrar os conceitos e facilitar o entendimento do leitor em relação a esses temas.

2. Detalhamos diversas demonstrações dos teoremas e exemplos apresentados. Como exemplo, podemos citar a demonstração da correção da interpretação da lógica $\mathbb{L}_1$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$.

3. Com este trabalho, propomos fornecer um material mais completo e com uma linguagem mais acessível para quem deseje se inteirar no assunto futuramente.

1.2 Organização do Trabalho

Finalizamos estas notas iniciais observando que esta dissertação está divida em 5 capítulos da seguinte maneira:

Capítulo 2: Noções Preliminares Exporemos as ferramentas fundamentais a serem utilizadas ao longo do trabalho. Mais especificamente, trataremos de *conjuntos parcialmente ordenados* (CPOs), *reticulados*, *distributividade*, *complementação* e *álgebras booleanas*. Veremos também a linguagem e os axiomas da *teoria de conjuntos ZF com átomos* (ZFA) e exibiremos um universo para ZFA baseado na *hierarquia cumulativa de von Neumann*. Introduziremos os *conjuntos equipados com uma ação de permutação sobre átomos*. Finalizaremos o capítulo estabelecendo a sintaxe da *lógica de primeira ordem com igualdade* $\mathbb{L}_1$.

Capítulo 3: Técnicas Nominais É onde introduziremos as principais notações, definições e resultados básicos das técnicas cominais que serão de suma importância para a definição do modelo nominal da lógica $\mathbb{L}_1$. Iremos, essencialmente, obter resultados fundamentais sobre *suporte finito*, *conjuntos nominais*, *suporte de um elemento*, *frescor*, *princípio da equivariância*, *σ-álgebras de termos* e *σ-álgebras*.

Capítulo 4: Reticulados Nominais Aqui nos devotaremos a explorar os conceitos envolvidos na generalização nominal da teoria de reticulados. Definiremos as noções de conjuntos parcialmente ordenados com as técnicas nominais, definindo assim *conjuntos nominais parcialmente ordenados* (CNPOs), *B#ínfimos*, *B#supremos*, *reticulados nominais* e extensões das noções usuais de distributividade e complementação.

Capítulo 5: Modelo nominal para $\mathbb{L}_1$ Combinaremos as noções de σ-álgebra com CNPOs obtendo a definição de uma *estrutura de σ-álgebra compatível* e exploraremos as principais propriedades relacionadas a este conceito. Definiremos um elemento $(a =^{\mathcal{L}} b)$ pertencente a um reticulado nominal $\mathcal{L}$ para interpretar igualdade lógica $=$. Após isso, finalmente definiremos a estrutura nominal que será o modelo para a lógica $\mathbb{L}_1$, chamada de *álgebra* $\mathbb{L}_1$. Encerramos o capítulo fazendo a interpretação da lógica $\mathbb{L}_1$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$ e provaremos a sua correção.

Capítulo 6: Considerações Finais Concluímos o trabalho com as principais observações do desenvolvimento e também propomos algumas direções para trabalhos futuros.

Nota. Atentamos o leitor em nossa escolha de não exibir diretamente as demonstrações de todos resultados já estabelecidos nas preliminares e também noções laterais que são utilizadas neste trabalho, mas cujo desenvolvimento está fora do escopo deste trabalho. Ao invés disso, preferimos dar a sua intuição através de exemplos e discussões. Por isso e para facilitar a leitura, as provas exaustivas de lemas auxiliares que decorriam, em sua maioria, de induções e outras estratégias tradicionais foram aladas para o apêndice do trabalho. Nossa ideia é priorizar a apresentação e detalhamento dos resultados principais relacionados às construções do Capítulo 4 que lida com reticulados nominais e do Capítulo 5 que trata sobre o modelo nominal para $\mathbb{L}_1$.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Este capítulo tem por objetivo expor as noções preliminares necessárias para um melhor entendimento deste trabalho. O capítulo será divido em quatro seções principais.

Na Seção 2.1 exploramos os conceitos elementares relacionados a teoria de reticulados. Começaremos definindo *conjuntos parcialmente ordenados* e *reticulados distributivos*; com esta terminologia estabelecida, definiremos *álgebras booleanas*, que serão fundamentais para o Capítulo 4, como um tipo específico de reticulado distributivo. Na Seção 2.2 discutimos sobre os fundamentos das técnicas nominais apresentando a linguagem e os axiomas da *Teoria de Conjuntos ZF com átomos* (ZFA) e exibimos um universo para ZFA baseado na hierarquia cumulativa de von Neumann. Basicamente, este será o ambiente natural para trabalharmos e desenvolver as técnicas nominais que introduziremos no próximo capítulo.

Na Seção 2.3 introduzimos o conceito de conjuntos equipados com uma *ação de permutação de átomos* e exemplos que serão fundamentais para todo o desenvolvimento dos próximos capítulos. Finalizamos o capítulo com a Seção 2.4 sobre a sintaxe da *Lógica clássica de primeira ordem com igualdade* $\mathbb{L}_1$. O leitor pode se sentir livre para ignorar este capítulo em uma primeira leitura caso já possua alguma familiaridade com os conceitos aqui apresentados, retornando apenas quando precisar realizar algum tipo de consulta.

2.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Nesta seção seguindo [3], apresentaremos as definições e resultados principais sobre conjuntos parcialmente ordenados, bem como estabeleceremos as notações utilizadas. As demonstrações e definições relacionadas estão no Apêndice A.

Um conjunto L dotado de uma ordem parcial não-estrita $\leq$ é chamado *conjunto parcialmente ordenado*, abreviado por CPO e denotado por $(L, \leq)$. Quando a relação $\leq$ for clara pelo contexto, nos referiremos a um CPO $(L, \leq)$ via seu conjunto subjacente L.

Exemplo 2.1. Para qualquer conjunto X, o *conjunto das partes* de X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, é a coleção de todos os subconjuntos de X, isto é, $\mathcal{P}(X) \triangleq \{Y \mid Y \subseteq X\}$. O conjunto das partes de X ordenado pela relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$ forma um CPO.

Definição 2.1. Seja $(L, \leq)$ um CPO. Se $X \subseteq L$ e $x \in L$, então:

- x é o *maior elemento* de X, se $x \in X$ e para todo $x' \in X$, $x' \leq x$.
- x é o *menor elemento* de X, se $x \in X$ e para todo $x' \in X$, $x \leq x'$.
- x é uma *cota superior* de X, se x não necessariamente está em X e para todo $x' \in X$, $x' \leq x$.
- x é uma *cota inferior* de X se x não necessariamente está em X e para todo $x' \in X$, $x \leq x'$.
- x é o *ínfimo* de X se x é a maior cota inferior de X.
- x é o *supremo* de X se x é a menor cota superior de X.

O *ínfimo* e o *supremo* de X são únicos se existirem e serão denotados por $\bigwedge X$ e $\bigvee X$, respectivamente.

Notação 2.1. Se considerarmos um subconjunto contendo apenas dois elementos, digamos $\{x, y\}$, então escrevemos $x \vee y$ para denotar o supremo de $\{x, y\}$ (se este existir) e $x \wedge y$ para denotar o ínfimo de $\{x, y\}$ (se este existir).

2.1.1 Reticulados

Introduzimos o estudo de reticulados como um tipo especial de CPO.

Definição 2.2. Um CPO $(L, \leq)$ é chamado de

- $\wedge$-*semireticulado* (lê-se inf-semireticulado) se todo subconjunto não-vazio $X \subseteq L$ possui um ínfimo $\bigwedge X$.
- $\vee$-*semireticulado* (lê-se sup-semireticulado) se todo subconjunto não-vazio $X \subseteq L$ possui um supremo $\bigvee X$.
- *reticulado* se $(L, \leq)$ for um $\wedge$-*semireticulado* e um $\vee$-*semireticulado*.

Dizemos que um reticulado $(L, \leq)$ é *limitado* quando possui um maior elemento e um menor elemento, isto é, quando a ordem $\leq$ é limitada.

Observação 2.1. Seja $(L, \leq)$ um reticulado.

- Se $\bigvee\emptyset$ existe em L, então todo $x \in L$ é uma cota superior de $\emptyset$ uma vez que por vacuidade x majora todo $y \in \emptyset$. Em particular, $\bigvee\emptyset$ é majorado por todo $x \in L$, donde concluímos que $\bigvee\emptyset$ existe em L se, e somente se, L possui um menor elemento. Neste caso, $\bigvee\emptyset$ é igual ao menor elemento de L e o denotamos por $\bot$.
- Analogamente, $\bigwedge\emptyset$ existe em L se, e somente se, L tem um maior elemento, o qual é igual a $\bigwedge\emptyset$ e o denotamos por $\top$.

O Lema 2.1 estabelece uma caracterização para $\wedge$-semireticulados e $\vee$-semireticulados.

Lema 2.1. Sejam $(L, \leq)$ um CPO e $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ um subconjunto finito não-vazio. Então,

1. L é um $\wedge$-semireticulado se, e somente se, $x \wedge y$ existe para todos $x, y \in L$.
2. Similarmente, L é um $\vee$-semireticulado se, e somente se, $x \vee y$ existe para todos $x, y \in L$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada no Apêndice A, no Lema A.1 □

Uma consequência direta deste lema é que um CPO $(L, \leq)$ é um reticulado se, e somente se, $x \wedge y$ e $x \vee y$ existem para todos $x, y \in L$.

Exemplo 2.2. O conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ é um reticulado limitado com menor elemento $\emptyset$, maior elemento X e para quaisquer $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$,

$$Y \wedge Z = Y \cap Z \quad \text{e} \quad Y \vee Z = Y \cup Z.$$

Durante o resto *desta* seção, exceto quando indicado o contrário, L denotará um reticulado arbitrário $(L, \leq)$.

Para $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$, a prova do Lema 2.1 nos dá que

- $\bigwedge\{x_1, \ldots, x_n\} = (\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n$.
- $\bigvee\{x_1, \ldots, x_n\} = (\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n$.

Observe que o lado esquerdo não depende da forma como os elementos x_i são listados. Assim, $\vee$ e $\wedge$ são *idempotentes*, *comutativos* e *associativos* — isto é, satisfazem as seguintes condições para todos $x, y, z \in L$:

$$(\text{Idem})\begin{cases} x \vee x = x \\ x \wedge x = x \end{cases} \quad (\text{Com})\begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases} \quad (\text{Asso})\begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{cases}$$

Notação 2.2. Como consequência da associatividade, para $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ podemos adotar a seguinte notação sem parênteses:

- $\bigwedge X \triangleq x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.
- $\bigvee X \triangleq x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Há outro par de regras que conecta $\vee$ e $\wedge$. Para derivá-los, observe que se $x \leq y$, então $\bigvee\{x, y\} = y$, isto é, $x \vee y = y$. Reciprocamente, se $x \vee y = y$ então $x \leq y$, por definição. Portanto

$$x \leq y \text{ se, e somente se } x \vee y = y. \tag{2.1}$$

Dualmente, para $\wedge$ obtemos que

$$x \leq y \text{ se, e somente se } x \wedge y = x. \tag{2.2}$$

Assim, aplicando (2.1) e (2.2) para as desigualdades $x \wedge y \leq x$ e $x \leq x \vee y$ (as quais são obtidas por definição), obtemos as *identidades de absorção:*

$$(\text{Absor})\begin{cases} x \vee (x \wedge y) = x, \\ x \wedge (x \vee y) = x. \end{cases}$$

Se o reticulado L for limitado, então $\bot \leq x \leq \top$ e, portanto, por (2.1) e (2.2) inferimos que

$$\begin{aligned} x \vee \top &= \top, & x \vee \bot &= x, \\ x \wedge \bot &= \bot, & x \wedge \top &= x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definição 2.3. Um reticulado L é dito *distributivo* quando satisfaz a seguinte *identidade distributiva* para todos $x, y, z \in L$:

$$\textbf{(D}\wedge\textbf{)} \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

A identidade **(D$\wedge$)** possui uma versão dual:

$$\textbf{(D}\vee\textbf{)} \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

As identidades **(D$\wedge$)** e **(D$\vee$)** são equivalente no seguinte sentido: se um reticulado L satisfaz uma das identidades **(D$\wedge$)** ou **(D$\vee$)** então L satisfaz as duas. O próximo lema estabelece esta equivalência.

Lema 2.2. Seja L um reticulado. Então as identidades **(D$\wedge$)** e **(D$\vee$)** são equivalentes.

Demonstração. A prova pode ser encontrada no Apêndice A. $\square$

Exemplo 2.3. Não é difícil ver que $\mathcal{P}(X)$ é um reticulado distributivo pois a interseção $\cap$ e a união $\cup$ são operações que se distribuem entre si.

Nem todo reticulado é distributivo, isto é, satisfaz as identidades distributivas. Porém, todo reticulado satisfaz uma série de desigualdades importantes que estão relacionadas as identidades distributivas:

Lema 2.3. As seguintes desigualdades valem em *qualquer* reticulado:

i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$.

ii) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

iii) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

iv) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee (x \wedge z))$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no livro [3], Lemma 60. $\square$

Definição 2.4. Dado um reticulado limitado L, um elemento $x' \in L$ é um *complemento* de um elemento $x \in L$ se

$$x \wedge x' = \bot \quad \text{e} \quad x \vee x' = \top.$$

Se todo elemento $x \in L$ possuir um complemento então dizemos que L é um reticulado *complementado* e denotamos o complemento de x por $\neg x$.

Exemplo 2.4. $\mathcal{P}(X)$ é também um reticulado complementado com $\neg Y = X \setminus Y$ para todo $Y \in \mathcal{P}(X)$. Veja

$$Y \vee \neg Y = Y \cup (X \setminus Y) = X = \top \qquad \text{e} \qquad Y \wedge \neg Y = Y \cap (X \setminus Y) = \emptyset = \bot.$$

Lema 2.4. Seja L um reticulado limitado distributivo.

1. Um elemento $x \in L$ possui um único complemento e $\neg\neg x = x$.

2. Se os elementos x e y possuem complementos, $\neg x$ e $\neg y$, respectivamente, então $x \vee y$ e $x \wedge y$ possuem complementos, $\neg(x \vee y)$ e $\neg(x \wedge y)$, respectivamente. Além disso,

$$\text{(DeMorgan)} \qquad \begin{cases} \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y, \\ \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y. \end{cases}$$

3. Se $x \leq y$ então $\neg y \leq \neg x$.

Demonstração. As provas dos items 1. e 2. podem ser encontradas no Apêndice A, nos Lemas A.3 e A.4, respectivamente. Para o item 3., note que se $x \leq y$ então por (2.2), $x \wedge y = y$. Aplicando $\neg$ em ambos os lados e usando De Morgan vem $\neg x \vee \neg y = \neg x$, o que implica por (2.1) que $\neg y \leq \neg x$. □

Portanto, temos que $\neg \bigwedge X = \bigvee \neg X$ onde $\neg X = \{\neg x \mid x \in X\}$. Logo,

$$\neg \top = \neg \bigwedge \emptyset = \bigvee \neg \emptyset = \bigvee \emptyset = \bot \qquad \text{e} \qquad \neg \bot = \neg\neg \top \overset{\text{Lem. } 2.4}{=} \top.$$

Definição 2.5. Uma *álgebra booleana* é um reticulado limitado distributivo complementado.

Observamos que a definição apresentada aqui é a de uma álgebra booleana vista como um tipo particular de reticulado. No entanto, álgebras booleanas geralmente são definidas como uma estrutura algébrica. Mais precisamente, uma álgebra booleana B é um sistema $(B, \vee, \wedge, \neg)$, onde $\vee, \wedge$ e $\neg$ são operações satisfazendo certos axiomas. É importante destacar que álgebras booleanas como uma álgebra e álgebras booleanas como reticulados são conceitos “equivalentes”, no sentido de que a partir de uma álgebra booleana como álgebra se obtém uma álgebra booleana como reticulado e vice-versa. Para mais detalhes sobre esta questão, consultar o livro [3].

Exemplo 2.5. 1. $\mathcal{P}(X)$ com a relação $\subseteq$ é o exemplo protótipo de uma álgebra booleana.

2. O conjunto $\mathbb{B} = \{\bot, \top\}$ com $\bot \leq \top$ é uma álgebra booleana.

2.2 ZFA: Teoria de Conjuntos ZF com átomos

Nesta seção exporemos as principais noções básicas relacionadas aos fundamentos das técnicas nominais, onde discutiremos principalmente sobre a *Teoria de Conjuntos ZF com átomos* (ZFA).

A Teoria de Conjuntos ZFA é caracterizada pela adição dos chamados *átomos*. Aqui, por átomo entende-se um indivíduo *puro*, ou seja, uma entidade sem elementos e, no entanto, distinta do conjunto vazio. Logo, um átomo não pode ser um conjunto, porém, átomos podem ser colecionados em conjuntos, isto é, átomos podem ser elementos de um conjunto. Representamos o conjunto de todos os átomos por $\mathbb{A}$. Estaremos interessados no caso em que $\mathbb{A}$ é infinito enumerável, cujos elementos serão denotados por $a, b, c, \ldots$.

> *Observação* 2.2. Átomos são, sobretudo, objetos que não tem uma estrutura interna, o que os torna uma ferramenta muito útil para modelar nomes. Por essa razão, átomos e nomes serão tratados como sinônimos. Uma consequência desta construção é que átomos podem ser distinguidos separadamente $-$ $a \neq b$ é sempre verdadeiro e $a = b$ é sempre falso. Refletimos isso em uma convenção chamada de *permutativa*, isto é, $a, b, c, \ldots$ variam sobre átomos distintos.

Para esta seção, nos basearemos especialmente no artigo [8], mas o leitor também pode complementar sua leitura com [7], [15] e [19]. Também faremos uso da noção de números ordinais. Mais detalhes sobre ordinais estão no Apêndice A.

2.2.1 Linguagem e Axiomas de ZFA

No que se segue, iremos apresentar a linguagem e os axiomas da Teoria de Conjuntos ZFA, um ambiente rico o suficiente para se formalizar e trabalhar as técnicas nominais.

Definição 2.6. A linguagem da Teoria de Conjuntos ZFA consiste da linguagem da lógica de primeira ordem com igualdade cuja assinatura contém os seguintes símbolos:

- um símbolo constante $\mathbb{A}$ (conjunto de átomos).
- um símbolo de relação binária $\in$ (relação de pertinência).

Os *termos* t e *predicados* ϕ são definidos indutivamente pela gramática:

$$
\begin{aligned}
t &::= x, y, z, \ldots \mid \mathbb{A} \\
\phi &::= \bot \mid t \in t \mid t = t \mid \phi \Rightarrow \phi \mid \forall x.\phi
\end{aligned}
$$

Escrevemos:

$$
\begin{array}{rll@{\qquad}rll}
\neg\phi & \text{para} & \phi \Rightarrow \bot & \phi \wedge \psi & \text{para} & \neg(\phi \Rightarrow \neg\psi) \\
\phi \vee \psi & \text{para} & (\neg\phi) \Rightarrow \psi & \phi \Leftrightarrow \psi & \text{para} & (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi) \\
\top & \text{para} & \bot \Rightarrow \bot & \exists x.\phi & \text{para} & \neg\forall x.\neg\phi
\end{array}
$$

Na Figura 2.1 ([8], Figura 2) estão listados os axiomas da Teoria de Conjuntos ZFA, onde ϕ e $\mathtt{F}$ variam sobre predicados e funções expressadas na linguagem de ZFA, respectivamente.

(Conjuntos)	$\forall x,y.\ y \in x \Rightarrow x \notin \mathbb{A}$	
(Extensão)	$\forall x.\ (x \notin \mathbb{A} \Rightarrow x = \{z \mid z \in x\})$	
(Compreensão)	$\forall x.\exists y.\ (y \notin \mathbb{A} \wedge y = \{z \in x \mid \phi(z)\})$	y não é livre em ϕ
($\in$-indução)	$(\forall x.(\forall y \in x.\phi(y)) \Rightarrow \phi(x)) \Rightarrow \forall x.\phi(x)$	
(Substituição)	$\forall x.\exists z.\ (z \notin \mathbb{A} \wedge z = \{\mathtt{F}(y) \mid y \in x\})$	$\mathtt{F}$ função em ZFA
(Par)	$\forall x,y.\exists z.\ z = \{x,y\}$	
(União)	$\forall x.\exists z.\ (z \notin \mathbb{A} \wedge z = \bigcup x)$	
(Potência)	$\forall x.\exists z.\ z = \mathtt{pow}(x)$	
(Infinito)	$\exists x.(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x.y \cup \{y\} \in x)$	
(ÁtmInf)	$\exists z.(\mathbb{A} \notin z \wedge (\forall a \in \mathbb{A}.\forall x \in z.x \cup \{a\} \in z))$	

Figura 2.1. Axiomas para a Teoria de Conjuntos Zermelo-Fraenkel com átomos.

Observação 2.3. Na Figura 2.1 utilizamos as seguintes convenções notacionais:

$\forall x,y.\phi$	significa	$\forall x.\forall y.\phi$
$\forall x \in y.\phi$	significa	$\forall x.(x \in y \Rightarrow \phi)$
$x = \{z \mid z \in x\}$	significa	$\forall y.(\forall z.(z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y$
$y = \{z \in x \mid \phi(z)\}$	significa	$\forall z.(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z)))$
$z = \{\mathtt{F}(y) \mid y \in x\}$	significa	$\forall u.(u \in z \Leftrightarrow \exists y.(\mathtt{F}(y) = u \wedge y \in x))$
$z = \{x,y\}$	significa	$\forall u.(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$
$z = \bigcup x$	significa	$\forall y.(y \in z \Leftrightarrow \exists y'.(y \in y' \wedge y' \in x))$
$z = \mathtt{pow}(x)$	significa	$\forall y.(y \in z \Leftrightarrow \forall y'.(y' \in y \Rightarrow y' \in x))$
$\emptyset \in x$	significa	$\exists z.(z \in x \wedge \forall z'.z' \notin z)$
$y \cup \{z\} \in x$	significa	$\exists u.(u \in x \wedge \forall u'.(u' \in u \Leftrightarrow u \in y \vee u = z))$

Assim, os axiomas da Teoria de Conjuntos ZFA são os axiomas da Teoria de Conjuntos ZF levemente modificados, com o acréscimo de dois novos axiomas: **(Conjuntos)** e **(ÁtmInf)**. Façamos uma descrição informal sobre cada axioma:

1. O axioma (**Conjuntos**) expressa o fato de que apenas objetos que não sejam átomos podem conter elementos. Isso corrobora com o que observamos no começo desta seção: "átomos são objetos que não contém elementos". Ou seja, este axioma faz a distinção entre o que são átomos e o que são conjuntos.

2. O axioma (**Extensão**) nos diz que para todo conjunto x (ou seja, x não é um átomo) podemos expressar x como sendo o conjunto $\{z \mid z \in x\}$. Em outras palavras, se dois conjuntos x e y possuem os mesmos elementos, então $x = y$. É importante destacar

que este é um axioma da Teoria de Conjuntos ZF, porém, com uma restrição na quantificação para quando x deve variar apenas sobre conjuntos em vez de conjuntos e átomos. Se tomássemos este axioma sem esta restrição teríamos que todo átomo seria igual ao conjunto vazio, o que contradiria a noção do que são átomos.

3. O axioma (**Compreensão**) assegura que se ϕ é uma propriedade, então para todo elemento x (seja ele um conjunto ou um átomo) existe elemento y que é um conjunto (isto é, não é um átomo) tal que um $y = \{z \in x \mid \phi(z)\}$, ou seja, y é o conjunto que contém todos aqueles $z \in x$ que possuem a propriedade ϕ. No caso em que x for um átomo temos que $y = \emptyset$. Neste axioma também precisamos fazer uma restrição na quantificação devido a diferenciação entre átomos e conjuntos.

4. O axioma (**$\in$-indução**) afirma que, para qualquer propriedade ϕ, se para cada elemento x (conjunto ou átomo), a validade de $\phi(x)$ segue da validade de ϕ para todos os elementos de x, então esta propriedade ϕ é válida para todo elemento x (conjunto ou átomo). Para o caso em x for um átomo a validade de $\phi(x)$ é sempre garantida por vacuidade pois átomos não contém elementos.

5. O axioma (**Substituição**) nos diz que se $\mathtt{F}$ for uma função especificada na linguagem de ZFA, então existe um conjunto $z = \{\mathtt{F}(y) \mid y \in x\}$. Assim, este axioma afirma que a imagem de um conjunto x sob qualquer função definível em ZFA também será um conjunto. Neste axioma também restringimos a quantificação.

6. O axioma (**Par**) estabelece que para quaisquer elementos x e y (conjuntos ou átomos) existe um conjunto $\{x, y\}$ contendo exatamente x e y.

7. O axioma (**União**) garante que para qualquer conjunto x, existe um conjunto z igual a união de todos os elementos de x. Veja que neste axioma também fazemos a restrição para conjuntos na quantificação.

8. O axioma (**Potência**) nos diz que para todos elementos x (conjuntos ou átomos) existe um conjunto $z = \mathtt{pow}(x)$, o conjunto de todos os subconjuntos de x. Se x for um átomo, teremos que $z = \emptyset$.

9. O axioma (**Infinito**) basicamente certifica que existe um conjunto infinito.

10. Por fim, o axioma (**ÁtmInf**) atesta que o conjunto de átomos $\mathbb{A}$ é um conjunto infinito. De fato, é importante perceber que o conjunto z especificado no axioma (**ÁtmInf**) nada mais é do que o conjunto de todos os subconjuntos *finitos* de $\mathbb{A}$, isto é, o menor conjunto de subconjuntos de $\mathbb{A}$ que contém o vazio $\emptyset$ e é fechado para a operação de adição de

um elemento $x \mapsto x \cup \{a\}$, para cada $a \in \mathbb{A}$. Assim, o conjunto $\mathbb{A}$ deve ser infinito já que este não pertence a z. Neste sentido, se definirmos $\mathtt{pow}_{\mathtt{fin}}(x)$ como sendo o termo que denota o conjunto de todos os subconjuntos de x, dado indutivamente por

$$\emptyset \in \mathtt{pow}_{\mathtt{fin}}(x) \quad \text{e} \quad u \in x \wedge w \in \mathtt{pow}_{\mathtt{fin}}(x) \Rightarrow w \cup \{u\} \in \mathtt{pow}_{\mathtt{fin}}(x),$$

então o axioma (**ÁtmInf**) também pode ser enunciado de forma equivalente como: $\mathbb{A} \notin \mathtt{pow}_{\mathtt{fin}}(x)$.

Observação 2.4. O axioma (**∈-indução**) é um princípio de indução realmente forte, porque é uma indução sobre *todos* os conjuntos, não apenas os números naturais ou os ordinais. De fato, este axioma é uma variante do princípio da indução transfinita (Teorema A.1) e é equivalente ao *axioma da regularidade* ou *fundação*. O axioma da regularidade diz que se x não é vazio, então existe um conjunto $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$. Em outras palavras, todo conjunto não vazio deve conter um elemento com o qual é disjunto. Uma implicação disso é que nenhum conjunto pode se conter, pois se supormos, por absurdo, que $\exists x. x \in x$, então podemos usar o axioma (**Par**) e podemos emparelhar x com ele mesmo para formar $\{x\}$. O conjunto $\{x\}$ não é vazio, então deve conter um elemento com o qual é disjunto. Mas seu único elemento é x, e esse elemento não é disjunto de $\{x\}$.

Outra implicação do axioma da regularidade é que a relação $\in$ é *bem-fundada* (ver Definição A.1), ou seja, que não pode haver uma sequência descendente infinita de conjuntos

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ni x_5 \ni \ldots.$$

Equivalentemente, isso significa que se x é não-vazio então existe um menor elemento $y \in x$, i.e. um elemento $y \in x$ tal que $z \notin x$ para todo $z \in y$.

Com efeito, uma sequência de conjuntos é uma função f cujo domínio é $\mathbb{N}$. Como de costume, para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevemos $f(n)$ como f_n. Suponha que f seja uma função com a propriedade de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \in f_n$. Então, pelo axioma (**Substituição**), existiria o conjunto $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$. Cada elemento desse conjunto contém o seguinte elemento, portanto, nenhum dos elementos é disjunto de todo o conjunto. Portanto, a sequência com a qual começamos não poderia existir.

2.2.2 Hierarquia Cumulativa com átomos

Agora, iremos definir um universo para a Teoria de Conjuntos ZFA. Tal construção será feita tomando como base o conceito da *hierarquia cumulativa de von Neumann*. Na matemática, especialmente na Teoria de Conjuntos, a hierarquia cumulativa de von Neumann ou *universo de von Neumann* é a classe, denotada por $\mathcal{V}$, definida por indução transfinita da seguinte forma:

- $\mathcal{V}_0 \triangleq \emptyset$.
- $\mathcal{V}_{\alpha+1} \triangleq \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha)$, para cada ordinal α.
- $\mathcal{V}_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\beta$, se α é um ordinal limite.

A classe $\mathcal{V}$ é definida tomando a união de todos os $\mathcal{V}_\alpha$:

$$\mathcal{V} \triangleq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}rd} \mathcal{V}_\alpha,$$

onde $\mathcal{O}rd$ é a classe de todos os números ordinais. O universo de von Neumann possui a finalidade de fornecer um modelo para interpretar a Teoria de Conjuntos ZF. Na Figura 2.2 apresentamos um esboço da hierarquia cumulativa de von Neumann.

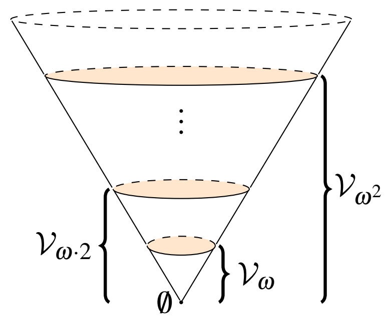

Figura 2.2. Um segmento do universo de von Neumann.

Neste seguimento, interpretando $\mathbb{A}$ como o conjunto infinito enumerável de todos os átomos podemos generalizar esta ideia e definir uma hierarquia cumulativa de "conjuntos envolvendo átomos de $\mathbb{A}$".

Definição 2.7. Definimos o *universo nominal*, denotado por $\mathcal{U}$, como sendo a classe definida por indução transfinita como se segue:

- $\mathcal{U}_0 \triangleq \mathbb{A}$.

- $\mathcal{U}_{\alpha+1} \triangleq \mathcal{U}_\alpha \cup \mathcal{P}(\mathcal{U}_\alpha)$, para cada ordinal α.
- $\mathcal{U}_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta$, se α é um ordinal limite.

Escrevemos $x \in \mathcal{U}$ para representar que "$x \in \mathcal{U}_\alpha$, para algum ordinal α". Definimos $\mathcal{U}$ como sendo a união de todos os $\mathcal{U}_\alpha$:

$$\mathcal{U} \triangleq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}rd} \mathcal{U}_\alpha.$$

Dizemos que x é um *conjunto* quando $x \in \mathcal{U}$ e $x \notin \mathbb{A}$. Se X é um conjunto, então $X = \{x \mid x \in X\}$. Este não é o caso para átomos, pois $a \neq \{x \mid x \in a\} = \emptyset$.

Vejamos, por exemplo, como são as "caras" de $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$:

$$\mathcal{U}_0 = \mathbb{A}$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{P}(\mathcal{U}_0) = \mathbb{A} \cup \mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{a, b, \ldots, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \ldots, \mathbb{A}, \ldots\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_2 &= \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{P}(\mathcal{U}_1)\\ &= (\mathbb{A} \cup \mathcal{P}(\mathbb{A})) \cup \mathcal{P}(\mathbb{A} \cup \mathcal{P}(\mathbb{A}))\\ &= \{a, b, \ldots, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \ldots, \mathbb{A}, \ldots, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \ldots, \{\mathbb{A}\}, \ldots, \underbrace{\{a, b, \ldots, \mathbb{A}\}}_{\mathbb{A} \cup \{A\}}, \ldots\}\end{aligned}$$

Note que $a \in \mathbb{A}$, mas $a \notin \mathcal{P}(\mathbb{A})$ devido ao fato de que átomos são objetos que não possuem elementos, logo não podem ser subconjuntos de nenhum conjunto. Consequentemente, $\mathbb{A} \nsubseteq \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Isso justifica a definição $\mathcal{U}_{\alpha+1} \triangleq \mathcal{U}_\alpha \cup \mathcal{P}(\mathcal{U}_\alpha)$, pois queremos que os conjuntos do universo possuam átomos. Isso não ocorreria se tivéssemos definido $\mathcal{U}_{\alpha+1} \triangleq \mathcal{P}(\mathcal{U}_\alpha)$.

Na Figura 2.3 ([8], Figura 1) exibimos alguns exemplos de elementos do universo $\mathcal{U}$.

$a \in \mathcal{U}_0$	$b \in \mathcal{U}_0$	$c \in \mathcal{U}_0$	$\emptyset \subseteq \mathcal{U}_0$	$\mathbb{A} \subseteq \mathcal{U}_0$
$\{a\} \in \mathcal{U}_1$	$\{a,b\} \in \mathcal{U}_1$	$\{a,b,c\} \in \mathcal{U}_1$	$\emptyset \in \mathcal{U}_1$	$\mathbb{A} \in \mathcal{U}_1$
$\{a, \{a\}, \{a,b\}\} \in \mathcal{U}_2$		$\{\emptyset\} \in \mathcal{U}_2$		$\mathbb{A} \cup \{\mathbb{A}\} \in \mathcal{U}_2$
		$\vdots$		
		$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} \in \mathcal{U}_\omega$		
		$\vdots$		

Figura 2.3. Exemplos de elementos do universo nominal $\mathcal{U}$.

O universo $\mathcal{U}$ possui uma estrutura rica o bastante para formalizar os principais conceitos nominais de forma natural. Abaixo passamos brevemente por algumas construções padrões em $\mathcal{U}$, como pares ordenados, produtos cartesianos e funções. Não temos a intenção de fazer algo novo ou diferente do habitual em relação a essas construções. Nos limitamos apenas a dizer que as construções são feitas como se espera e não são afetadas pela presença (ou ausência) de átomos. Para mais detalhes, consultar [8].

Definição 2.8. Sejam $x, y \in \mathcal{U}$ (átomos ou conjuntos). Definimos o *par ordenado* (x, y) por

$$(x,y) \triangleq \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

Sejam $X, Y \in \mathcal{U}$ conjuntos. Definimos *produto cartesiano* $X \times Y$ por

$$X \times Y \triangleq \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Implementamos funções no universo $\mathcal{U}$ como *gráficos*:

Definição 2.9. Seja $f \in \mathcal{U}$. Dizemos que f é uma *função* quando

$$\forall z \in f. \exists x. \exists y. (z = (x,y))$$

(o que nos dá que f é um conjunto de pares ordenados) e

$$\forall (x,y) \in f. \forall (x',y') \in f. (x = x' \Rightarrow y = y'),$$

ou seja, f é o conjunto dos pares ordenados em que dois pares ordenados são iguais quando a primeira componente for a mesma.

Assim, para cada x definimos $f(x)$ como sendo o único y tal que $(x,y) \in f$ se y existir, e f é indefinida caso contrário.

Definição 2.10. Seja f uma função. Definimos

$$\begin{aligned}\texttt{dom}(f) &\triangleq \{x \in \mathcal{U} \mid \exists y.(x,y) \in f\}\\ \texttt{img}(f) &\triangleq \{y \in \mathcal{U} \mid \exists x.(x,y) \in f\}\end{aligned}$$

Dizemos que $\texttt{dom}(f)$ é o *domínio* de f e que $\texttt{img}(f)$ é a *imagem* de f.

Definição 2.11. Sejam X, Y conjuntos. Definimos o *espaço de funções* de X para Y, denotado por $X \to Y$, como sendo o conjunto

$$X \to Y \triangleq \{f \mid f \text{ é uma função}, \texttt{dom}(f) = X, \texttt{img}(f) \subseteq Y\}.$$

Ou seja, $X \to Y$ é o conjunto das funções que mapeiam elementos de X em elementos de Y, onde Y é o *contradomínio*.

Precisamente, uma função $f \in X \to Y$ é um subconjunto de $X \times Y$ caracterizado pela propriedade de que para cada $x \in X$ existe exatamente um $y \in Y$ tal que $(x,y) \in f$. Assim, podemos interpretar o espaço das funções $X \to Y$ como um subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$.

2.3 Ação de Permutação

Como observamos na introdução, queremos definir um modelo nominal para a Lógica de primeira ordem com igualdade em que os objetos semânticos se tornem "conscientes" dos átomos envolvidos em suas construções. Para fazer isso, dotaremos os conjuntos do nosso universo com uma ação de grupo de permutações de átomos. A seguir assumiremos que o leitor possui conhecimento sobre conceitos elementares da teoria de grupos. Para mais detalhes sobre tais noções indicamos o livro [5].

Fixaremos pelo resto do trabalho o conjunto infinito enumerável de átomos $\mathbb{A}$. Dizemos que um subconjunto $B \subseteq \mathbb{A}$ é *cofinito* quando o seu complementar $\mathbb{A} \setminus B$ é finito. Eventualmente faremos uso do *conjunto das partes cofinitas* de $\mathbb{A}$,

$$\mathcal{P}_{\mathtt{cof}}(\mathbb{A}) \triangleq \{B \subseteq \mathbb{A} \mid \mathbb{A} \setminus B \text{ é finito}\}$$

e do *conjunto das partes finitas* de $\mathbb{A}$,

$$\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A}) \triangleq \{B \subseteq \mathbb{A} \mid B \text{ é finito}\}.$$

Considere $(Sim(\mathbb{A}), \circ)$ o grupo de *todas* as permutações sobre $\mathbb{A}$, i.e. bijeções $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, onde $\circ$ é a composição usual de funções.

Definição 2.12. Seja $\pi \in Sim(\mathbb{A})$. Dizemos que π é uma *permutação finita* quando o conjunto $\mathtt{nontriv}(\pi) \triangleq \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \neq a\}$ é finito.

Denotamos por $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ o conjunto de todas as permutações finitas sobre $\mathbb{A}$. Note que $\mathcal{S}_{\mathbb{A}} \subseteq Sim(\mathbb{A})$ e $(\mathcal{S}_{\mathbb{A}}, \circ)$ forma um subgrupo próprio do grupo $Sim(\mathbb{A})$. O seguinte tipo particular de permutação finita será muito útil:

Definição 2.13. Dados átomos $a,b \in \mathbb{A}$. A *transposição* de a e b, denotada por $(a\ b)$, é a permutação dada por $(a\ b)(a) \triangleq b, (a\ b)(b) \triangleq a$ e $(a\ b)(c) \triangleq c$ para todos os outros átomos $c \in \mathbb{A}$.

O seguinte lema dá uma caracterização de uma permutação π em termos de transposições. A prova está fora do escopo deste trabalho e pode ser encontrada em [1].

Lema 2.5. Seja $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ tal que $\pi \neq id$. Então π pode ser expressa como uma composição não-vazia de uma quantidade finita de transposições.

Ocasionalmente, faremos uso do *conjunto das semelhanças*. Sejam $\pi, \pi' \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, o conjunto das semelhanças $\mathtt{AS}(\pi, \pi')$ de π e π' é dado por

$$\mathtt{AS}(\pi, \pi') \triangleq \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) = \pi'(a)\}.$$

Definição 2.14. Um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$*-conjunto* (ou *conjunto com uma ação de permutação*) é um par $(\mathcal{X}, \cdot)$ composto de um conjunto subjacente $\mathcal{X}$ e uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$*-ação* (ou *ação de permutação*) em $\mathcal{X}$, a qual é uma função $\cdot : \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ que satisfaz as propriedades:

- $id \cdot x = x$.
- $\pi' \cdot (\pi' \cdot x) = (\pi \circ \pi) \cdot x$, quaisquer que sejam $\pi, \pi' \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ e $x \in \mathcal{X}$.

Além disso, dizemos que $\mathcal{Y}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$*-subconjunto* de $\mathcal{X}$ quando $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ e a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação $\cdot$ restrita a $\mathcal{Y}$ forma uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação em $\mathcal{Y}$ bem definida $\cdot|_{\mathcal{Y}} : \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$.

Quando a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação for clara pelo contexto, nos referiremos a um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto $(\mathcal{X}, \cdot)$ através do seu conjunto subjacente $\mathcal{X}$.

Abaixo exibiremos os exemplos centrais de $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos que ilustrarão muitos resultados deste trabalho.

Exemplo 2.6 ($\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjuntos). Se $(\mathcal{X}, \cdot)$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto e $\mathcal{Y}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjunto de $\mathcal{X}$, então $\mathcal{Y}$ equipado com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação $\cdot|_{\mathcal{Y}}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto.

Exemplo 2.7 ($\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos triviais). Todo conjunto $\mathcal{X}$ equipado com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação dada por $\pi \cdot x \triangleq x$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ forma um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Chamamos esta $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação de *trivial*.

Exemplo 2.8 (Átomos). O conjunto de átomos $\mathbb{A}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação *natural* definida por $\pi \cdot a \triangleq \pi(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Exemplo 2.9 (Universo nominal). O universo $\mathcal{U}$ da Definição 2.7 pode ser considerado como um “grande” $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto, i.e. uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-classe (uma classe equipada com uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação) com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação dada por

$$\begin{aligned} \pi \cdot a &\triangleq \pi(a) && (a \text{ é um átomo}),\\ \pi \cdot X &\triangleq \{\pi \cdot x \mid x \in X\} && (X \text{ é um conjunto}). \end{aligned}$$

Um exemplo muito útil envolve o conjunto de átomos $\mathbb{A}$. Para todo $B \subseteq \mathbb{A}$ temos que $B \in \mathcal{U}$ pois $B \in \mathcal{U}_1 = \mathbb{A} \cup \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Assim,

$$\pi \cdot B = \{\pi \cdot b \mid b \in B\} = \{\pi(b) \mid b \in B\} = \pi(B).$$

Em particular, $\pi \cdot \mathbb{A} = \pi(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ pela injetividade de $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Notação 2.3. Na sequência, quando for conveniente e não houver confusão, utilizaremos $\pi \cdot B$ e $\pi(B)$ de maneira indistinguível para subconjuntos $B \subseteq \mathbb{A}$. Já quando estivermos tratando apenas de átomos individualmente, $\pi \cdot a$ e $\pi(a)$ serão sinônimos.

Exemplo 2.10 (Produto cartesiano). Sejam $(\mathcal{X}_1, \cdot), \ldots, (\mathcal{X}_n, \cdot)$ $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos. O produto cartesiano

$$\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \triangleq \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n\}.$$

é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto quando equipado com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação definida em cada *componente* por

$$\pi \cdot (x_1, \ldots, x_n) \triangleq (\pi \cdot x_1, \ldots, \pi \cdot x_n),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Quando $\mathcal{X}_1 = \ldots = \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, denotaremos o produto cartesiano por $\mathcal{X}^n$.

Exemplo 2.11 (Conjunto das partes). Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. O conjunto das partes $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação definida *pontualmente* por

$$\pi \cdot X \triangleq \{\pi \cdot x \mid x \in X\},$$

para todo $X \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Exemplo 2.12 (Funções). Sejam $(\mathcal{X}, \cdot)$ e $(\mathcal{Y}, \cdot)$ $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos. O espaço das funções $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação de *conjugação* definida por

$$(\pi \cdot f)(x) \triangleq \pi \cdot (f(\pi^{-1} \cdot x)),$$

para toda $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, todo $x \in \mathcal{X}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Lembre-se que pela Definição 2.11 uma função $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\}$. Assim, o espaço de funções $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Desse modo, também podemos pensar em uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação em $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ como sendo uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$:

$$\pi\cdot f=\pi\cdot\{(x,f(x))\mid x\in\mathcal{X}\}=\{(\pi\cdot x,\pi\cdot f(x))\mid x\in\mathcal{X}\}.$$

2.4 $\mathbb{L}_1$: Lógica clássica de Primeira Ordem com igualdade

Concluímos este capítulo introduzindo a sintaxe da linguagem da Lógica clássica de primeira ordem com igualdade $\mathbb{L}_1$. A definição aqui feita será padrão, mas principalmente inspirada na construção fornecida por Murdoch J. Gabbay em [16] e [9], a qual surgiu de [11] onde Murdoch J. Gabbay e Aad Mathijssen axiomatizam a lógica de primeira ordem usando álgebra nominal. Também nos basearemos no artigo [13], o qual é uma versão mais detalhada do artigo [11] que foi publicada posteriormente, e também no livro [4].

Definição 2.15. O alfabeto da linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade $\mathbb{L}_1$ contém os seguintes símbolos:

1. $a,b,c,\ldots$ (uma quantidade infinita enumerável de símbolos de variáveis);
2. $\bot,\top,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\forall,\exists$ (conectivos);
3. $),(,.$ (parênteses e ponto)
4. $=$ (igualdade);
5. (a) símbolos de funções $f,g,h,\ldots$; e
   (b) símbolos de relações $P,Q,R,\ldots$

   a cada um dos quais está associado uma aridade $ar(f),ar(P)\in\{0,1,2,\ldots\}$.

$\mathcal{A}$ representa os símbolos de $(1)-(4)$, enquanto que Σ, chamada de *assinatura*, representa os símbolos de (5). Os símbolos da assinatura devem ser distintos dos símbolos em $\mathcal{A}$. Símbolos de funções com aridade 0 são chamados de *constantes*.

Definição 2.16. Dada uma assinatura Σ. Os *termos* t e *predicados* ϕ de $\mathbb{L}_1$ são definidos indutivamente por:

$$t::=a\mid f(t_1,\ldots,t_{ar(f)})$$
$$\phi::=\bot\mid t=t\mid P(t_1,\ldots,t_{ar(P)})\mid\phi\wedge\phi\mid\neg\phi\mid\forall a.\phi$$

onde a varia sobre átomos de $\mathbb{A}$, f varia sobre símbolos de funções e P varia sobre símbolos de relações. Denotamos por $\mathfrak{T}$ o conjunto de termos r e por $\mathfrak{P}$ o conjunto de predicados ϕ. Os predicados $\bot,t=t$ e $P(t_1,\ldots,t_n)$ são chamados de *atômicos*.

Note que átomos desempenham o papel de símbolos de variáveis. Um dos motivos para esta escolha está no fato de que átomos possuem propriedades muito boas para modelar variáveis. Outra razão se deve ao fato de que a convenção permutativa também serve para modelar a prática informal de que quando escrevemos "$\lambda x.\lambda y.xxyy$" ou "$\forall x.\exists y.\phi(x,y)$" normalmente assumimos que "x" e "y" denotam um par de símbolos de variáveis distintos. Portanto, é conveniente refletir isso deixando que as variáveis variem sobre átomos distintos.

Como estamos considerando a lógica clássica, usamos as seguintes abreviações:

- $\phi \vee \psi$ para $\neg((\neg\phi)\wedge(\neg\psi))$.
- $\phi \Rightarrow \psi$ para $(\neg\phi)\vee\psi$.
- $\phi \Leftrightarrow \psi$ para $(\phi\Rightarrow\psi)\wedge(\psi\Rightarrow\phi)$.
- $\top$ para $\neg\bot$.
- $\exists x.\phi$ para $\neg\forall x.\neg\phi$.

Em qualquer predicado $\forall a.\phi$, a ocorrência de a é um *átomo de ligação* com escopo ϕ. Todos os átomos a no *escopo*, mais o átomo de ligação, são ocorrências *ligadas*. Dizemos que as ocorrências são *capturadas* no escopo pelo átomo de ligação a.

Definição 2.17. 1. O conjunto de *todos* os átomos que ocorrem em termos e predicados, denotado por $\mathtt{ats}(-)$, é definido indutivamente como se segue:

$$\begin{aligned}
\mathtt{ats}(a) &\triangleq \{a\} & \mathtt{ats}(P(t_1,\ldots,t_{ar(P)})) &\triangleq \bigcup_{i=1}^{n}\mathtt{ats}(t_i)\\
\mathtt{ats}(f(t_1,\ldots,t_{ar(f)})) &\triangleq \bigcup_{i=1}^{n}\mathtt{ats}(t_i) & \mathtt{ats}(\phi\wedge\phi') &\triangleq \mathtt{ats}(\phi)\cup\mathtt{ats}(\phi')\\
\mathtt{ats}(\bot) &\triangleq \emptyset & \mathtt{ats}(\neg\phi) &\triangleq \mathtt{ats}(\phi)\\
\mathtt{ats}(t_1=t_2) &\triangleq \mathtt{ats}(t_1)\cup\mathtt{ats}(t_2) & \mathtt{ats}(\forall a.\phi) &\triangleq \{a\}\cup\mathtt{ats}(\phi).
\end{aligned}$$

2. O conjunto de *átomos livres*, denotado por $\mathtt{fa}(-)$ é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathtt{fa}(t) &\triangleq \mathtt{ats}(t), \text{ para termos } t\in\mathfrak{T}\\
\mathtt{fa}(\phi) &\triangleq \mathtt{ats}(\phi), \text{ se } \phi \text{ é um predicado atômico.}\\
\mathtt{fa}(\phi\wedge\phi') &\triangleq \mathtt{fa}(\phi)\cup\mathtt{fa}(\phi'),\\
\mathtt{fa}(\neg\phi) &\triangleq \mathtt{fa}(\phi),\\
\mathtt{fa}(\forall a.\phi) &\triangleq \mathtt{fa}(\phi)\setminus\{a\}.
\end{aligned}$$

3. Analogamente, definimos indutivamente o conjunto dos *átomos ligados*:

$$\begin{aligned}
\mathtt{ba}(\phi) &\triangleq \emptyset, \text{ se } \phi \text{ é um predicado atômico.}\\
\mathtt{ba}(\phi\wedge\phi') &\triangleq \mathtt{ba}(\phi)\cup\mathtt{ba}(\phi'),\\
\mathtt{ba}(\neg\phi) &\triangleq \mathtt{ba}(\phi),\\
\mathtt{ba}(\forall a.\phi) &\triangleq \{a\}\cup\mathtt{ba}(\phi).
\end{aligned}$$

Por exemplo, para o predicado $\forall a.\neg P(a,b,c)$ temos que

- $\mathtt{ats}(\forall a.\neg P(a,b,c)) = \{a,b,c\}$.
- $\mathtt{fa}(\forall a.\neg P(a,b,c)) = \{b,c\}$.
- $\mathtt{ba}(\forall a.\neg P(a,b,c)) = \{a\}$.

Definição 2.18. Definimos a α-equivalência de predicados da lógica $\mathbb{L}_1$ (denotada por $=_\alpha$) indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\bot =_\alpha \bot} \qquad \frac{}{P(t_1,\dots,t_{ar(P)}) =_\alpha P(t_1,\dots,t_{ar(P)})} \qquad \frac{}{(t_1 = t_2) =_\alpha (t_1 = t_2)}$$

$$\frac{\phi =_\alpha \phi'}{\neg\phi =_\alpha \neg\phi'} \qquad \frac{\phi =_\alpha \phi' \qquad \psi =_\alpha \psi'}{\phi \wedge \psi =_\alpha \phi' \wedge \psi'} \qquad \frac{(b\ a)\cdot\phi =_\alpha \psi \qquad (b \notin \mathtt{ats}(\phi))}{\forall a.\phi =_\alpha \forall b.\psi}$$

Em termos $=$ coincide com $=_\alpha$.

Denotamos por $\mathfrak{P}/_\alpha$ o conjunto das classes de α-equivalência de predicados e $[\phi]_\alpha$ representa a classe de α-equivalência de um predicado ϕ.

Definição 2.19. Dotamos o conjunto de termos $\mathfrak{T}$ com a $\mathcal{S}_\mathbb{A}$-ação definida por indução na estrutura de $t \in \mathfrak{T}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi\cdot a &\triangleq \pi(a),\\ \pi\cdot f(t_1,\dots,t_{ar(f)}) &\triangleq f(\pi\cdot t_1,\dots,\pi\cdot t_{ar(f)}). \end{aligned}$$

Esta $\mathcal{S}_\mathbb{A}$-ação induz uma $\mathcal{S}_\mathbb{A}$-ação no conjunto $\mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned} \pi\cdot\bot &\triangleq \bot,\\ \pi\cdot(t_1 = t_2) &\triangleq \pi\cdot t_1 = \pi\cdot t_2,\\ \pi\cdot P(t_1,\dots,t_{ar(P)}) &\triangleq P(\pi\cdot t_1,\dots,\pi\cdot t_{ar(P)}),\\ \pi\cdot(\psi\wedge\psi') &\triangleq (\pi\cdot\psi')\wedge(\pi\cdot\psi'),\\ \pi\cdot(\neg\psi) &\triangleq \neg(\pi\cdot\psi),\\ \pi\cdot(\forall a.\psi) &\triangleq \forall\pi(a).\pi\cdot\psi. \end{aligned}$$

Da mesma forma, isso induz uma $\mathcal{S}_\mathbb{A}$-ação em $\mathfrak{P}/{=_\alpha}$ dada por

$$\pi\cdot[\phi]_\alpha \triangleq [\pi\cdot\phi]_\alpha.$$

Se $\phi =_\alpha \phi'$, então $\pi \cdot \phi =_\alpha \pi \cdot \phi'$ por indução nas regras de $=_\alpha$. Portanto, a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação em $\mathfrak{P}/{=_\alpha}$ está bem-definida.

Definimos de forma usual a operação de substituição que evita a captura de ocorrência de átomos.

Definição 2.20. Sejam t e s termos em $\mathfrak{T}$, então $t[a := s]$ é definido indutivamente por:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} a[a := s] \triangleq s, \\ b[a := s] \triangleq b. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad f(t_1, \dots, t_{ar(f)})[a := s] \triangleq f(t_1[a := s], \dots, t_{ar(f)}[a := s])$$

Definição 2.21. Para predicados $\phi \in \mathfrak{P}$, $\phi[a := s]$ é definido indutivamente por:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \bot[a := s] \triangleq \bot, \\ P(t_1, \dots, t_{ar(P)})[a := s] \triangleq P(t_1[a := s], \dots, t_{ar(P)}[a := s]), \\ (t_1 = t_2)[a := s] \triangleq t_1[a := s] = t_2[a := s]. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} (\psi \Rightarrow \psi')[a := s] \triangleq (\psi[a := s] \Rightarrow \psi'[a := s]), \\ (\neg\psi)[a := s] \triangleq \neg(\psi[a := s]). \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} (\forall a.\psi)[a := s] \triangleq \forall a.\psi, & \\ (\forall b.\psi)[a := s] \triangleq \forall b.(\psi[a := s]), & b \notin \mathtt{fa}(s) \\ (\forall b.\psi)[a := s] \triangleq \forall c.(\psi[b := c][a := s]), & b \in \mathtt{fa}(s),\ c \text{ um átomo novo,} \end{cases}$$

isto é, c é tal que $c \notin \mathtt{fa}(\psi) \cup \mathtt{fa}(s) \cup \{a, b\}$.

Definição 2.22. Para cada α-classe de equivalência $[\phi]_\alpha \in \mathfrak{P}_\alpha$, definimos

$$[\phi]_\alpha[a := s] \triangleq [\phi[a := s]]_\alpha.$$

Notação 2.4. Φ e Ψ variam sobre conjuntos finitos de predicados. Escreveremos ϕ, Φ para $\{\phi\} \cup \Phi$ e $\mathtt{fa}(\Phi)$ para $\bigcup_{\phi \in \Phi} \mathtt{fa}(\phi)$.

Definição 2.23. Um *sequente* é um par de conjuntos finitos de predicados $\Phi \vdash \Psi$. Definimos as regras de derivação do cálculo de sequentes para a lógica $\mathbb{L}_1$ de forma usual pelas regras da Figura 2.4 (Figura 2, [9]):

$$\frac{}{\Phi, \phi \vdash \phi, \Psi}[\mathbf{Hyp}] \qquad \frac{}{\Phi, \bot \vdash \Psi}[\bot\mathbf{L}] \qquad \frac{\Phi, s = s \vdash \Psi}{\Phi \vdash \Psi}[=\mathbf{R}]$$

$$\frac{\Phi, \phi_1, \phi_2 \vdash \Psi}{\Phi, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Psi}[\wedge\mathbf{L}] \qquad \frac{\Phi \vdash \psi_1, \Psi \qquad \Phi \vdash \psi_2, \Psi}{\Phi \vdash \psi_1 \wedge \psi_2, \Psi}[\wedge\mathbf{R}] \qquad \frac{\Phi, s' = s, \phi[a := s'] \vdash \Phi}{\Phi, s' = s, \phi[a := s] \vdash \Phi}[=\mathbf{L}]$$

$$\frac{\Phi \vdash \psi, \Psi}{\Phi, \neg\psi \vdash \Psi}[\neg\mathbf{L}] \qquad \frac{\Phi, \phi \vdash \Psi}{\Phi \vdash \neg\phi, \Psi}[\neg\mathbf{R}] \qquad \frac{\Phi, \phi[a := s] \vdash \Psi}{\Phi, \forall a.\phi \vdash \Psi}[\forall\mathbf{L}]$$

$$\frac{\Phi \vdash \psi, \Psi \quad (a \notin \mathtt{fa}(\Phi \cup \Psi))}{\Phi \vdash \forall a.\psi, \Psi}[\forall\mathbf{R}]$$

Figura 2.4. Regras de derivação para $\mathbb{L}_1$.

O principal resultado do presente trabalho será, não só a definição de uma semântica totalmente nova para a lógica $\mathbb{L}_1$, como também a demonstração da sua correção. Na lógica matemática, um sistema lógico é dito *correto* se, e somente se, todos os argumentos sobre predicados que podem ser provados no sistema forem logicamente válidos no que diz respeito à semântica do sistema. Em outras palavras, se $\Phi \vdash \Psi$ for um sequente derivável no sistema, então $\Phi \vDash \Psi$, onde $\vDash$ é a notação usual utilizada para indicar a consequência semântica, isto é, que toda interpretação que é modelo de Φ também é modelo de Ψ. Na maioria dos casos, a correção se resume as regras de derivação do sistema terem a propriedade de preservar a "verdade". Dessa forma, correção é um dos conceitos lógicos que relaciona a noção de "provabilidade" ($\vdash$) e a noção de "verdade" ($\vDash$). No Capítulo 4, fazemos uma prova da correção da semântica nominal para a lógica $\mathbb{L}_1$, a qual afirma que se $\Phi \vdash \Psi$ for um sequente derivável na lógica de primeira ordem $\mathbb{L}_1$, então a sua interpretação $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ sobre o modelo nominal criado é verdadeira, o que significa que

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\},$$

onde $[\![\phi]\!]$ é a notação para a interpretação do predicado ϕ sobre o modelo nominal.

O lema abaixo será útil no próximo capítulo.

Lema 2.6. Para quaisquer $t \in \mathfrak{T}$ e $\phi \in \mathfrak{P}$ e permutações $\pi, \pi' \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$,

1. $\mathtt{ats}(\pi \cdot t) = \pi(\mathtt{ats}(t))$ e $\mathtt{ats}(\pi \cdot \phi) = \pi(\mathtt{ats}(\phi))$.

2. $\mathtt{fa}(\pi \cdot t) = \pi(\mathtt{fa}(t))$ e $\mathtt{fa}(\pi \cdot \phi) = \pi(\mathtt{fa}(\phi))$.

3. (a) $\mathtt{ats}(t) \subseteq \mathtt{AS}(\pi,\pi') \Rightarrow \pi \cdot t = \pi' \cdot t$.

   (b) $\mathtt{ats}(\phi) \subseteq \mathtt{AS}(\pi,\pi') \Rightarrow \pi \cdot \phi = \pi' \cdot \phi$.

4. $\mathtt{fa}(\phi) \subseteq \mathtt{AS}(\pi,\pi') \Rightarrow \pi \cdot \phi =_\alpha \pi' \cdot \phi$.

Demonstração. A demonstração é feita por indução na estrutura dos termos e predicados, e será omitida. Uma ideia mais detalhada da demonstração pode ser encontrada em [18]. □

Capítulo 3

Técnicas nominais

Para a definição do modelo nominal da lógica $\mathbb{L}_1$, as noções básicas das técnicas nominais se tornam imprescindíveis. Por esta razão, neste capítulo, introduziremos as noções principais das técnicas nominais. Este capítulo se divide da seguinte forma:

Na Seção 3.1, iniciaremos com a noção de *suporte finito* e usaremos isso para definir um *conjunto nominal* $\mathcal{X}$ como um conjunto com uma ação de permutação no qual todos os seus elementos possuem suporte finito. Definiremos *o suporte* de um elemento $x \in \mathcal{X}$, o qual denotaremos por $\mathtt{supp}(x)$. Em seguida, exploraremos a noção de *frescor* (cf. *freshness*), onde $a\#x$ (lê-se a é *fresco* para x) e $a \notin \mathtt{supp}(x)$ significam a mesma coisa: "x não depende do átomo a". Não só isso, como também apresentaremos exemplos e construções de conjuntos nominais que usaremos ao longo do trabalho.

Na Seção 3.2, demonstraremos o *princípio da equivariância* e a *conservação de suporte*, resultados centrais para o desenvolvido dos próximos capítulos.

Finalizaremos o capítulo com a Seção 3.3, onde falaremos sobre *álgebras sobre conjuntos nominais*, i.e. conjuntos nominais equipados com funções que satisfazem certos axiomas nominais. Mais especificamente, estudaremos os conceitos de σ-*álgebra de termos* e σ-*álgebra*, os quais nos permitirão modelar a operação de substituição. Este capítulo será baseado principalmente nos artigos [8] e [9], juntamente com a tese [7] e o artigo [15].

3.1 Conjuntos Nominais

Na Seção 2.3 do Capítulo 2, estudamos os conjuntos equipados com uma ação de permutação sobre átomos (Definição 2.14). Em geral, uma ação de permutação de átomos em um conjunto $\mathcal{X}$ nos dá uma maneira abstrata de considerar os elementos $x \in \mathcal{X}$ sob o ponto de vista de que a construção de x "envolve átomos de $\mathbb{A}$". Neste sentido, a ação de permutação nos diz como um elemento $x \in \mathcal{X}$ é alterado quando permutamos os átomos pertencentes a sua “composição”. Extraímos daí a ideia-chave de *suporte*, ideia esta que cria uma noção de dependência de um elemento de um conjunto com um subconjunto de átomos.

Definição 3.1. Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Um subconjunto $B \subseteq \mathbb{A}$ *suporta* um elemento $x \in \mathcal{X}$ quando

$$\forall \pi.(\pi \in \mathtt{fix}(B) \Rightarrow \pi \cdot x = x),$$

onde $\mathtt{fix}(B) \triangleq \{\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \mid \forall a \in B. \pi(a) = a\}$. Em outras palavras, $B \subseteq \mathbb{A}$ suporta $x \in \mathcal{X}$ quando $\pi \cdot x = x$ sempre que $\pi \in \mathtt{fix}(B)$, ou ainda, toda permutação que fixa os átomos de B, fixa x. No caso em que $B \subseteq \mathbb{A}$ é finito, dizemos que x tem *suporte finito*, ou que é *finitamente suportado* por B, ou ainda que x é *finito-suportado*.

Observação 3.1. Observe que $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ é igual ao conjunto de todas as permutações que fixam $\emptyset$. Isso se deve ao fato de que toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ fixa $\emptyset$ por vacuidade, já que $\emptyset$ não possui elementos.
Um ponto importante em relação a essa observação esta relacionado ao Exemplo 2.7, onde equipamos um conjunto $\mathcal{X}$ com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação trivial $\pi \cdot x = x$. Com esta $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação, cada elemento $x \in \mathcal{X}$ deve ser finitamente suportado por $\emptyset$, pois, por definição, temos que $\pi \cdot x = x$ para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ e, como observamos acima, isto é equivalente a dizer que $\pi \cdot x = x$ para toda permutação $\pi \in \mathtt{fix}(\emptyset)$.

Agora, nos atentamos ao fato de que nem todo elemento de um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto possui suporte finito. O seguinte exemplo ilustra isso:

Exemplo 3.1. Tome o $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto $\mathcal{X}$ como sendo o conjunto das partes $\mathcal{P}(\mathbb{A})$. Como o conjunto de átomos $\mathbb{A}$ é infinito enumerável, considere uma enumeração $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{A}$. Afirmamos que o subconjunto $pente \triangleq \{a_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{A}$ não tem suporte finito. De fato, suponha que exista $B \subseteq \mathbb{A}$ finito tal que para toda $\pi \in \mathtt{fix}(B)$

$$\pi \cdot pente = pente. \tag{3.1}$$

Se $a_{2n_0} \in pente \setminus B$ e $a_{n_0} \notin pente \cap B$ defina $\tau \triangleq (a_{2n_0}\ a_{n_0})$. Note que $\tau \in \mathtt{fix}(B)$ e

$$pente \overset{(3.1)}{=} \tau \cdot pente = \{\tau(a) \mid a \in pente\}.$$

Daí, $a_{n_0} = \tau(a_{2n_0}) \in pente$, o que gera uma contradição.

Observação 3.2. O conjunto *pente* recebe esse nome pois imaginamos a enumeração de $\mathbb{A}$ como um pente infinito onde cada "dente" representa os átomos cujos subíndices são números pares e os "vãos" entre os dentes representam os átomos cujos subíndices são números ímpares. Veja a Figura 3.1 abaixo.

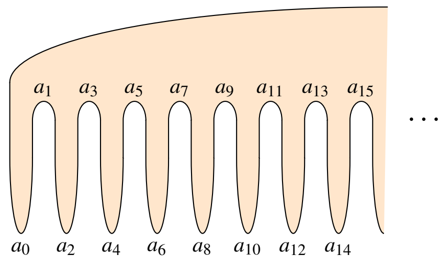

Figura 3.1. O conjunto *pente*.

Estamos interessados naqueles $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos em que todos os elementos possuem suporte finito. Isso nos leva a seguinte definição:

Definição 3.2. Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Dizemos que $\mathcal{X}$ é um *conjunto nominal* quando para cada elemento $x \in \mathcal{X}$ existe um subconjunto finito $B_x \subseteq \mathbb{A}$ suportando x.

Conjuntos nominais são o alicerce das técnicas nominais. Intuitivamente, podemos pensar em um conjunto nominal $\mathcal{X}$ como sendo "um conjunto cujos elementos $x \in \mathcal{X}$ "contém" uma quantidade finita de átomos de $\mathbb{A}$ em sua composição". Todavia, notamos que a noção de "conter" usada aqui não é no sentido de "é um elemento de". Formalmente, o que queremos dizer com isso é que x tem suporte finito.

Exemplo 3.2. Vejamos alguns exemplos de conjuntos nominais:

1. Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um conjunto nominal e $\mathcal{Y}$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjunto de $\mathcal{X}$. Neste caso, $(\mathcal{Y}, \cdot|_{\mathcal{Y}})$ é também um conjunto nominal, pois se $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ então existe $B_y \subseteq \mathbb{A}$ finito suportando y em relação a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação de $\mathcal{X}$, isto é, $\pi \in \mathtt{fix}(B_y) \Rightarrow \pi \cdot y = y$. Consequentemente, B_y também suporta y em relação a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação $\cdot|_{\mathcal{Y}}$ visto que $\cdot|_{\mathcal{Y}}$ está bem definida em $\mathcal{Y}$ e $\pi \cdot |_{\mathcal{Y}} y = \pi \cdot y = y$ para toda $\pi \in \mathtt{fix}(B_y)$. Desta maneira, podemos interpretar $\mathcal{Y}$ como um "*subconjunto nominal*" de $\mathcal{X}$.

2. Pela Observação 3.1, todo conjunto $\mathcal{X}$ equipado com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação trivial forma trivialmente um conjunto nominal, onde cada elemento $x \in \mathcal{X}$ é finitamente suportado por $\emptyset$.

3. O conjunto de átomos $\mathbb{A}$ com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação natural do Exemplo 2.8 é um conjunto nominal. De fato, para cada $a \in \mathbb{A}$ o subconjunto $B_a = \{a\} \subseteq \mathbb{A}$ suporta a, pois $\pi \cdot a = \pi(a) = a$ para toda $\pi \in \mathtt{fix}(B_a)$.

4. Se $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ são conjuntos nominais, então $\mathfrak{X}_1 \times \cdots \times \mathfrak{X}_n$ também é um conjunto nominal, pois cada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{X}_1 \times \cdots \times \mathfrak{X}_n$ é finitamente suportado por $\bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}$, onde $B_{x_i} \subseteq \mathbb{A}$ é o subconjunto finito que suporta x_i para cada $i = 1, \ldots, n$.

5. Os conjuntos $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{P}$ com as suas respectivas $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ações introduzidas na Definição 2.19 formam conjuntos nominais. De fato, cada termo $t \in \mathfrak{T}$ é finitamente suportado por $\mathtt{ats}(t) \subseteq \mathbb{A}$. Ora, se $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{ats}(t))$ então para todo $a \in \mathtt{fix}(\mathtt{ats}(t))$ temos que $\pi(a) = a = id(a)$. Logo, $\mathtt{fix}(\mathtt{ats}(t)) \subseteq \mathtt{AS}(\pi, id)$ e pelo Lema 2.6(3) segue que $\pi \cdot t = id \cdot t = t$.

   Analogamente, mostra-se que cada predicado $\phi \in \mathfrak{P}$ é finitamente suportado por $\mathtt{ats}(\phi) \subseteq \mathbb{A}$.

   Usando o Lema 2.6(4) também possível mostrar de forma semelhante que o conjunto $\mathfrak{P}/_{\alpha}$ é um conjunto nominal, onde cada $[\phi]_\alpha \in \mathfrak{P}/_{\alpha}$ é finitamente suportado por $\mathtt{fa}(\phi)$. Note que isso não depende da escolha do predicado representante da classe $[\phi]_\alpha$: seja $\psi \in \mathfrak{P}$ tal que $\phi =_\alpha \psi$, então $[\phi]_\alpha = [\psi]_\alpha$. Considere $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(\psi))$,

$$\pi \cdot [\phi]_\alpha = \pi \cdot [\psi]_\alpha = [\pi \cdot \psi]_\alpha = [\psi]_\alpha = [\phi]_\alpha.$$

O Teorema 3.1 a seguir será útil para construção de mais exemplos de conjuntos nominais.

Teorema 3.1 ([8], Theorem 2.19)**.** Sejam $(\mathfrak{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto e $x \in \mathfrak{X}$. Então, para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, $B \subseteq \mathbb{A}$ suporta x se, e somente se, $\pi \cdot B \subseteq \mathbb{A}$ suporta $\pi \cdot x$.

Demonstração. Começamos lembrando ao leitor que como estamos tratando de subconjuntos de átomos, então $\pi \cdot B = \pi(B)$ para todo $B \subseteq \mathbb{A}$. Suponha que $B \subseteq \mathbb{A}$ suporte $x \in \mathfrak{X}$ e considere $\tau \in \mathtt{fix}(\pi(B))$. Para todo $b \in B$,

$$(\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi)(b) = \pi^{-1}(\tau(\pi(b))) \overset{\tau \in \mathtt{fix}(\pi(B))}{=} \pi^{-1}(\pi(b)) = b.$$

Então $\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi \in \mathtt{fix}(B)$ e, consequentemente, $(\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi) \cdot x = x$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi) \cdot x = x &\Rightarrow \pi \cdot ((\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi) \cdot x) = \pi \cdot x, && \text{aplicando } \pi \text{ em ambos os lados} \\
&\Rightarrow (\pi \circ (\pi^{-1} \circ \tau \circ \pi)) \cdot x = \pi \cdot x \\
&\Rightarrow (\tau \circ \pi) \cdot x = \pi \cdot x, && \text{pois } \pi \circ \pi^{-1} = id \\
&\Rightarrow \tau \cdot (\pi \cdot x) = \pi \cdot x.
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi(B)$ suporta $\pi \cdot x$.

Reciprocamente, seja $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ e suponha que $\pi(B)$ suporta $\pi \cdot x$. Podemos então aplicar o que acabamos de demonstrar para a inversa de π. Assim, obtemos que o subconjunto $\pi^{-1}(\pi(B))$ suporta $\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot x)$. Mas

$$\pi^{-1}(\pi(B)) = (\pi^{-1} \circ \pi)(B) = id(B) = B$$

e

$$\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot x) = (\pi^{-1} \circ \pi) \cdot x = id \cdot x = x.$$

Então B suporta x, como queríamos. $\square$

Um exemplo importante envolve o conjunto das partes de um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto $\mathcal{X}$. Vimos no Exemplo 2.11 que se $\mathcal{X}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto então o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ também é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Da mesma forma, nos perguntamos se $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ também será um conjunto nominal sempre que $\mathcal{X}$ for um conjunto nominal. Isso não é verdade em geral como nos mostra o Exemplo 3.1 visto acima.

Apesar disso, ainda gostaríamos de possuir um tipo de "conjunto das partes" que fosse um conjunto nominal. Por conta disso, definimos:

Definição 3.3. Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. O *conjunto das partes de $\mathcal{X}$ com suporte finito* ou simplesmente *conjunto das partes nominais* é o conjunto

$$\mathcal{N}(\mathcal{X}) \triangleq \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mid X \text{ tem suporte finito}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

O conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{X})$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, já que não é difícil ver pelo Teorema 3.1 que a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação do conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ restrita ao conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{X})$ forma uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação bem definida em $\mathcal{N}(\mathcal{X})$, pois qualquer que seja a permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, se $X \subseteq \mathcal{X}$ é finitamente suportado por $B_X \subseteq \mathbb{A}$ então $\pi \cdot X$ é finitamente suportado por $\pi(B_X) \subseteq \mathbb{A}$. Portanto, pelo Exemplo 3.2(1) temos que $\mathcal{N}(\mathcal{X})$ com esta $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação restrita forma um conjunto nominal.

Exemplo 3.3. Considere o $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{A})$.

1. Se $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ é finito, então B é finitamente suportado por B, pois para cada $\pi \in \mathtt{fix}(B)$ temos que $\pi \cdot B = \pi(B) = B$.

2. Se $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ for cofinito, então $\mathbb{A} \setminus B$ é finito e suporta B. Realmente, para toda $\pi \in \mathtt{fix}(\mathbb{A} \setminus B)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} \setminus \pi(B) &= \pi(\mathbb{A}) \setminus \pi(B), && \text{pois } \pi(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \\
&= \pi(\mathbb{A} \setminus B), && \text{pois } \pi \text{ é uma bijeção} \\
&= \mathbb{A} \setminus B, && \text{pois } \pi \in \mathtt{fix}(\mathbb{A} \setminus B).
\end{aligned}$$

Logo, $\pi(B) = B$.

Isso nos mostra que $\mathcal{P}_{\texttt{fin}}(\mathbb{A})$ e $\mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$ são subconjuntos de $\mathcal{N}(\mathbb{A})$. Além disso, como consequência do Teorema 3.1, temos que $\mathcal{P}_{\texttt{fin}}(\mathbb{A})$ e $\mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$ são $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjuntos de $\mathcal{N}(\mathbb{A})$. Desta forma, pelo Exemplo 3.2(1), $\mathcal{P}_{\texttt{fin}}(\mathbb{A})$ e $\mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$ são conjuntos nominais.

Assim como fizemos para o conjunto das partes, podemos levantar a mesma questão em relação ao $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (ver Exemplo 2.12): se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem conjuntos nominais então $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um conjunto nominal?

O seguinte exemplo elucida esta questão:

Exemplo 3.4. Considere os conjuntos nominais $\mathcal{X} = \mathbb{A}$ e $\mathcal{Y} = \mathbb{B}$. A função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ dada por

$$f(a) = \begin{cases} \top, & \text{se } a \in pente, \\ \bot, & \text{se } a \notin pente. \end{cases}$$

é um elemento do espaço de funções $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e não possui suporte finito. Para ver isso, suponhamos que exista um subconjunto finito $B_f \subseteq \mathbb{A}$ suportando f. Escolha átomos $a \in pente$ e $b \notin pente$ tais que $a, b \notin B_f$ e defina $\tau \triangleq (a\ b)$. Então temos que $\tau \cdot f = f$ pois $\tau \in \texttt{fix}(B_f)$ por construção. Daí

$$\begin{aligned}
\top &= f(a), && \text{pois } a \in pente \\
&= (\tau \cdot f)(a), && \text{pois } \tau \cdot f = f \text{ pelo que observamos acima} \\
&= \tau \cdot (f \cdot (\tau^{-1} \cdot a)), && \text{pela } \mathcal{S}_{\mathbb{A}}\text{-ação do Exemplo 2.12} \\
&= \tau \cdot (f(b)), && \text{pois } \tau^{-1} \cdot a = \tau^{-1}(a) = b \\
&= \tau \cdot \bot, && \text{pois } b \notin pente \\
&= \bot, && \text{pois } \bot \text{ é suportado por } \emptyset.
\end{aligned}$$

O que nos dá uma contradição. Assim, a função f realmente não possui suporte finito e, portanto, $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ não é um conjunto nominal.

Em vista disso, definimos:

Definição 3.4. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos. O *espaço de funções nominais* é o conjunto

$$\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y} \triangleq \{f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid f \text{ tem suporte finito}\} \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{Y}.$$

Repare, ainda, que se restringirmos a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação de $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ para o subconjunto $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ obtemos uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação bem definida em $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ visto que, novamente pelo Teorema 3.1, para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, se $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é finitamente suportada por $B_f \subseteq \mathbb{A}$ então $\pi \cdot f$ será finitamente suportada por $\pi(B_f) \subseteq \mathbb{A}$. Logo, $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjunto de $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e é um conjunto nominal por consequência do Exemplo 3.2(1).

3.1.1 Suporte, Equivariância e *Frescor*

Agora, pensando na noção de suporte como sendo a ideia que nos fornece um conjunto contendo os possíveis átomos "pertencentes a composição" de um elemento x, estaremos a fim de determinar o *menor* destes conjuntos, ou melhor, determinar quais são *exatamente* os átomos que ocorrem "em" um elemento x. Esta ideia é capturada pela seguinte definição:

Definição 3.5. Seja $\mathcal{X}$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Definimos *o suporte* de $x \in \mathcal{X}$ por

$$\mathtt{supp}(x) \triangleq \begin{cases} \bigcap\{B \subseteq \mathbb{A} \mid B \text{ é finito e suporta } x\}, & \text{se } x \text{ tem suporte finito;} \\ \text{indefinido,} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que x é *equivariante* quando $\mathtt{supp}(x) = \emptyset$.

Observação 3.3. Para facilitar o entendimento de tal noção, o leitor pode pensar no suporte de um elemento $x \in \mathcal{X}$ como sendo uma generalização da noção sintática de "variáveis livres em" objetos de uma linguagem formal para o nível abstrato de um elemento pertencente a qualquer conjunto equipado com uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação.

Até agora nos limitamos apenas aos átomos que *estão* em $\mathtt{supp}(x)$. Não obstante, gostaríamos de raciocinar também sobre os átomos que *não* estão em $\mathtt{supp}(x)$. À esta ideia damos o nome de *frescor* (cf.*freshness*):

Definição 3.6. Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Se $x \in \mathcal{X}$ possui suporte finito, então escrevemos $a\#x$ para denotar que $a \notin \mathtt{supp}(x)$ e lemos isso como: a é *fresco* para x (ou que a é *fresco* em relação a x). Se $x_1 \ldots, x_m \in \mathcal{X}$ possuem suporte finito e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{A}$. Escrevemos

$$a_1, \ldots, a_n \# x_1, \ldots, x_m \text{ para denotar que } \{a_1, \ldots, a_n\} \cap \left(\bigcup_{i \leq j \leq m} \mathtt{supp}(x_j) \right) = \emptyset.$$

Em outras palavras, $a_i \# x_j$ para todos $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Observação 3.4. Cabe aqui salientar que:

1. Se $x \in \mathcal{X}$ tem suporte finito, então da infinitude de $\mathbb{A}$ e da finitude de $\mathtt{supp}(x)$, sempre é possível escolher um *novo* átomo $a \in \mathbb{A}$ tal que $a\#x$. Sendo assim, a noção de *frescor* oferece um aspecto *gerativo* de átomos frescos em relação ao elemento x.

2. Seguindo o raciocínio da Observação 3.3, $a\#x$ é uma generalização da noção sintática de "a não é livre em x".

A Proposição 3.1 abaixo será útil na demonstração do Teorema 3.2, o qual estabelece o esperado: $\mathtt{supp}(x)$ é único e é o menor subconjunto de átomos que suporta x.

Proposição 3.1 ([9], Proposition 2.1.10)**.** Seja $(\mathcal{X}, \cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Se $B \subseteq \mathbb{A}$ é finito e suporta $x \in \mathcal{X}$, $b \in \mathbb{A}$ e $b\#x$, então $B \setminus \{b\}$ suporta x.

Demonstração. Vamos mostrar que o subconjunto $B \setminus \{b\} \subseteq \mathbb{A}$ suporta x. Primeiro, observe que se $b \notin B$ então $B \setminus \{b\} = B$ e o resultado segue trivialmente. Segundo, suponha que $b \in B$ e considere uma permutação π tal que $\pi \in \mathtt{fix}(B \setminus \{b\})$. Como $b\#x$, segue da definição de $\mathtt{supp}(x)$ que existe um subconjunto $C \subseteq \mathbb{A}$ finito suportando x tal que $b \notin C$. Da infinidade de $\mathbb{A}$ podemos escolher um átomo $a \in \mathbb{A}$ tal que $a \notin B \cup \{b\} \cup C$.

Tome a transposição $\tau \triangleq (b\ a)$. Por definição, $\tau \in \mathtt{fix}(\mathbb{A} \setminus \{a, b\})$. Em particular, $\tau \in \mathtt{fix}(C)$ pois $a, b \notin C$. Então $\tau \cdot x = x$, uma vez que C suporta x. Assim, para todo $d \in B \setminus \{b\}$ vale que

$$
\begin{aligned}
(\tau \circ \pi \circ \tau)(d) &= \tau \cdot (\pi \cdot (\tau \cdot d)) \\
&= \tau(\pi(\tau(d))) \\
&= \tau(\pi(d)), && \text{pois } \tau \in \mathtt{fix}(\mathbb{A} \setminus \{a, b\}) \\
&= \tau(d), && \text{pois } \pi \in \mathtt{fix}(B \setminus \{b\}) \\
&= d, && \text{pois } \tau \in \mathtt{fix}(\mathbb{A} \setminus \{a, b\}).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, podemos supor sem perda de generalidade que o átomo a escolhido é tal que $\pi(a) = a$, uma vez que o conjunto $\mathtt{nontriv}(\pi)$ é finito. Desse modo,

$$(\tau \circ \pi \circ \tau)(b) = \tau(\pi(\tau(b))) = \tau(\pi(a)) = \tau(a) = b.$$

Portanto, $\tau \circ \pi \circ \tau \in \mathtt{fix}(B)$. Como B suporta x, segue que $(\tau \circ \pi \circ \tau) \cdot x = x$. Daí

$$
\begin{aligned}
(\tau\circ\pi\circ\tau)\cdot x = x &\Rightarrow \tau\cdot(\pi\cdot(\tau\cdot x)) = x \\
&\Rightarrow \tau\cdot(\tau\cdot(\pi\cdot(\tau\cdot x))) = \tau\cdot x, && \text{aplicando } \tau \text{ em ambos os lados} \\
&\Rightarrow \tau\cdot(\tau\cdot(\pi\cdot x)) = x, && \text{pois } \tau\cdot x = x \\
&\Rightarrow (\tau\circ\tau)\cdot(\pi\cdot x) = x \\
&\Rightarrow id\cdot(\pi\cdot x) = x, && \text{pois } \tau\circ\tau = id \\
&\Rightarrow \pi\cdot x = x.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.2 ([9], Theorem 2.1.11)**.** Seja $(\mathcal{X},\cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto e suponha que $x\in\mathcal{X}$ tenha suporte finito. Então $\texttt{supp}(x)$ é o menor conjunto finito de átomos que suporta x. Ainda, $\texttt{supp}(x)$ é único.

Demonstração. Digamos que x seja finitamente suportado por $C\subseteq\mathbb{A}$. Então $\texttt{supp}(x)$ existe por definição.

Primeiro, vamos mostrar que $\texttt{supp}(x)$ suporta x. Considere $\pi\in\texttt{fix}(\texttt{supp}(x))$ (i.e. $\pi(a)=a$ para todo $a\in\texttt{supp}(x)$) tal que $\texttt{nontriv}(\pi)=\{a_1,\dots,a_n\}$. Note que se $b\in\texttt{nontriv}(\pi)$ então devemos ter $b\#x$, caso contrário teríamos que $\pi(b)=b$ pois π fixa $\texttt{supp}(x)$, o que seria uma contradição com o fato de $b\in\texttt{nontriv}(\pi)$. Assim, temos que $a_1,\dots,a_n\#x$ e após sucessivas aplicações da Proposição 3.1 obtemos que $C\setminus\texttt{nontriv}(\pi)$ ainda suporta x. Pela definição de $\texttt{nontriv}(\pi)$ decorre que $\pi\in\texttt{fix}(C\setminus\texttt{nontriv}(\pi))$ e, consequentemente, $\pi\cdot x=x$.

A minimalidade e a finitude de $\texttt{supp}(x)$ seguem por definição, pois para qualquer subconjunto finito $D\subseteq\mathbb{A}$ suportando x temos que

$$\texttt{supp}(x)=\bigcap\{B\subseteq\mathbb{A}\mid\ B \text{ é finito e suporta } x\}\subseteq D.$$

Resta apenas verificar a sua unicidade. Para tanto, considere $E\subseteq\mathbb{A}$ um outro menor subconjunto finito que suporta x. Da minimalidade de $\texttt{supp}(x)$ vem $\texttt{supp}(x)\subseteq E$. Por outro lado, a minimalidade de E implica $E\subseteq\texttt{supp}(x)$. Logo $E=\texttt{supp}(x)$. □

Exemplo 3.5. Abaixo listamos alguns exemplos do suporte de elementos.

1. Continuando o Exemplo 3.2(3) temos que $\texttt{supp}(a)=\{a\}$ para todo $a\in\mathbb{A}$. Em particular, inferimos que $a\#b\Leftrightarrow a\neq b$ para todos átomos $a,b\in\mathbb{A}$.

2. Em relação ao Exemplo 3.2(4), para cada $(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{X}_1\times\ldots\times\mathcal{X}_n$ temos que

$$\texttt{supp}((x_1,\dots,x_n))=\bigcup_{i=1}^{n}\texttt{supp}(x_i).$$

Para facilitar os cálculos, fixemos as abreviações $M=(x_1,\dots,x_n)$ e $N=\bigcup_{i=1}^{n}\texttt{supp}(x_i)$.

Pelo Teorema 3.2, $\mathtt{supp}(x_i)$ suporta x_i para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, o subconjunto (finito) N suporta M, visto que

$$\pi \in \mathtt{fix}(N) \Rightarrow \pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(x_i)) \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Daí, $\pi \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\pi \cdot x_1, \ldots, \pi \cdot x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Assim, pela minimalidade de $\mathtt{supp}(M)$ concluímos que $\mathtt{supp}(M) \subseteq N$. Resta provar que $N \subseteq \mathtt{supp}(M)$. Como $\mathtt{supp}(M)$ suporta M, segue que $\pi \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, para toda permutação $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(M))$.

Então $(\pi \cdot x_1, \ldots, \pi \cdot x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, donde $\pi \cdot x_i = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\mathtt{supp}(M)$ suporta cada x_i. Desse modo, pela minimalidade de $\mathtt{supp}(x_i)$ temos que $\mathtt{supp}(x_i) \subseteq \mathtt{supp}(M)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) \subseteq \mathtt{supp}(M).$$

Proposição 3.2 ([9], Proposition 2.3.4)**.** Sejam $\mathcal{X}$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto e $x \in \mathcal{X}$ finito-suportado. Então, para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, valem:

1. $\pi \cdot x$ tem suporte finito;

2. $\mathtt{supp}(\pi \cdot x) = \pi \cdot \mathtt{supp}(x)$;

3. $a \# \pi \cdot x \Leftrightarrow \pi^{-1}(a) \# x$;

4. $a \# x \Leftrightarrow \pi(a) \# \pi \cdot x$.

Demonstração. 1. Como $\mathtt{supp}(x)$ suporta x e é finito, segue pelo Teorema 3.1 que $\pi \cdot x$ é finitamente suportado por $\pi \cdot \mathtt{supp}(x)$.

2. Pelo item anterior $\pi \cdot \mathtt{supp}(x)$ suporta $\pi \cdot x$. Da minimalidade de $\mathtt{supp}(\pi \cdot x)$ decorre que

$$\mathtt{supp}(\pi \cdot x) \subseteq \pi \cdot \mathtt{supp}(x).$$

Como $\mathtt{supp}(\pi \cdot x)$ suporta $\pi \cdot x$ segue pelo Teorema 3.1 aplicado a inversa π^{-1} que $\pi^{-1} \cdot \mathtt{supp}(\pi \cdot x)$ suporta $\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot x) = x$. Pela minimalidade de $\mathtt{supp}(x)$ vem que

$$\mathtt{supp}(x) \subseteq \pi^{-1} \cdot \mathtt{supp}(\pi \cdot x),$$

donde obtemos que $\pi \cdot \mathtt{supp}(x) \subseteq \mathtt{supp}(\pi \cdot x)$ pela injetividade de π.

3. A prova segue das equivalências:

$$\begin{aligned}
a\#\pi\cdot x &\Leftrightarrow a \notin \mathtt{supp}(\pi\cdot x)\\
&\overset{\text{Prop. 3.2(2)}}{\Leftrightarrow} a \notin \pi(\mathtt{supp}(x))\\
&\Leftrightarrow \forall b \in \mathtt{supp}(x).\pi(b) \neq a\\
&\Leftrightarrow \forall b \in \mathtt{supp}(x).b \neq \pi^{-1}(a)\\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(a) \notin \mathtt{supp}(x)\\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(a)\#x.
\end{aligned}$$

4. De fato, $\pi(a)\#\pi\cdot x \overset{\text{Prop.3.2(3)}}{\Leftrightarrow} a = \pi^{-1}(\pi(a))\#x$. □

Exemplo 3.6. Dando seguimento ao Exemplo 3.2(5), sejam para $t \in \mathfrak{T}, \phi \in \mathfrak{P}$ e $[\phi]_\alpha \in \mathfrak{P}/_\alpha$. Então

$$\begin{aligned}
&\mathtt{supp}(t) = \mathtt{fa}(t),\\
&\mathtt{supp}(\phi) = \mathtt{ats}(\phi),\\
&\mathtt{supp}([\phi]_\alpha) = \mathtt{fa}(\phi).
\end{aligned}$$

Com efeito, no Exemplo 3.2(5) mostramos que $\mathtt{fa}(t)$ suporta $t \in \mathfrak{T}$ e $\mathtt{ats}(\phi)$ suporta ϕ. Assim, da minimalidade do suporte de um elemento decorre que $\mathtt{supp}(t) \subseteq \mathtt{fa}(t)$ e $\mathtt{supp}(\phi) \subseteq \mathtt{ats}(\phi)$. Para mostrar a inclusão contrária, suponha por absurdo que exista $a \in \mathtt{fa}(t)$ tal que $a \notin \mathtt{supp}(t)$. Escolha $b \notin \mathtt{fa}(t)$. Então $b \notin \mathtt{supp}(t)$ pois $\mathtt{supp}(t) \subseteq \mathtt{fa}(t)$. Pelo Corolário 3.1(1), $(a\ b)\cdot t = t$. Por isso,

$$\mathtt{fa}((a\ b)\cdot t) = \mathtt{fa}(t). \tag{3.2}$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}
(a\ b)(\mathtt{fa}(t)) &= \mathtt{fa}((a\ b)\cdot t), && \text{pelo Lema 2.6(2)}\\
&= \mathtt{fa}(t), && \text{por (3.2).}
\end{aligned}$$

Como $b \notin \mathtt{fa}(t)$, segue $a = (b\ a)(b) \notin (a\ b)(\mathtt{fa}(t)) = \mathtt{fa}(t)$, o que é uma contradição. De forma análoga, mostra-se que $\mathtt{supp}(\phi) = \mathtt{ats}(\phi)$ e $\mathtt{supp}([\phi]_\alpha) = \mathtt{fa}(\phi)$.

Na Definição 3.5, definimos uma noção de equivariância para elementos x de um $\mathcal{S}_\mathbb{A}$-conjunto $\mathfrak{X}$. É útil entender o que isso significa:

Lema 3.1. Sejam $(\mathcal{X},\cdot)$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto e $x \in \mathcal{X}$. Então

$$\mathtt{supp}(x) = \emptyset \text{ se, e somente se, } \pi \cdot x = x \text{ para toda } \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}.$$

Ou seja, x é equivariante se, e somente se, π fixa x para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Demonstração. Suponha que $\mathtt{supp}(x) = \emptyset$. Então pelo Teorema 3.2, $\mathtt{supp}(x) = \emptyset$ suporta x. Pela Definição 3.1, isso significa que $\pi \cdot x = x$ para toda permutação $\pi \in \mathtt{fix}(\emptyset)$. Pela Observação 3.1 o conjunto $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ é igual ao conjunto de todas as permutações $\pi \in \mathtt{fix}(\emptyset)$. Concluímos, portanto, que $\pi \cdot x = x$ para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Agora, se $\pi \cdot x = x$ para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, então novamente pela Observação 3.1 temos que $\pi \cdot x = x$ para toda permutação $\pi \in \mathtt{fix}(\emptyset)$, o que implica, pela Definição 3.1, que $\emptyset$ suporta x. Da minimalidade de $\mathtt{supp}(x)$ garantimos então que $\mathtt{supp}(x) \subseteq \emptyset$ e o resultado segue, pois a inclusão contrária $\emptyset \subseteq \mathtt{supp}(x)$ é imediata. □

Exemplo 3.7. Dando sequência ao Exemplo 3.3, seja $B \subseteq \mathbb{A}$.

1. Se $B \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ então $\mathtt{supp}(B) = B$.

   De fato, se $B = \emptyset$ então o resultado segue pelo Lema 3.1 pois

   $$\pi(\emptyset) = \emptyset, \text{ para toda } \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}},$$

   Agora, suponha $B \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ não-vazio. No Exemplo 3.3, mostramos que B é finitamente suportado por B. Logo, $\mathtt{supp}(B) \subseteq B$ pela minimalidade de $\mathtt{supp}(B)$. Resta mostrar a inclusão contrária, isto é, $B \subseteq \mathtt{supp}(B)$.

   Suponha, por absurdo, que exista $a \in B$ tal que $a\#B$ ($a \notin \mathtt{supp}(B)$). Note que $\mathtt{supp}(B)$ não pode ser vazio, do contrário teríamos que $\pi(B) = B$ para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Entretanto, isso é claramente falso se escolhermos, por exemplo, átomos $c, d \in \mathbb{A}$ tais que $c \in B$ e $d \notin B$. Disso, decorre $(c\ d)(B) = \{(c\ d)(b) \mid b \in B\} = (B \setminus \{c\}) \cup \{d\} \neq B$.

   Então existe $b \in \mathtt{supp}(B)$. Isso implica que $(b\ a)(B) = B$ pois $a \in B$ por suposição e $b \in B$ pelo fato de que $\mathtt{supp}(B) \subseteq B$. Logo, $a \in (b\ a)(\mathtt{supp}(B))$. Como

   $$(b\ a)(\mathtt{supp}(B)) \overset{\text{Prop. 3.2(2)}}{=} \mathtt{supp}((b\ a)(B)) = \mathtt{supp}(B),$$

   segue que $a \in \mathtt{supp}(B)$, o que é uma contradição. Portanto, $B \subseteq \mathtt{supp}(B)$ e o resultado segue.

2. $B \in \mathcal{P}_{\mathtt{cof}}(\mathbb{A})$ então $\mathtt{supp}(B) = \mathbb{A} \setminus B$.

Se $B \in \mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$, então o Exemplo 3.3 nos mostra que B é finitamente suportado por $\mathbb{A} \setminus B$. Sendo assim, pela minimalidade de $\text{supp}(B)$ temos que $\text{supp}(B) \subseteq \mathbb{A} \setminus B$. Analogamente, mostra-se que $\mathbb{A} \setminus B \subseteq \text{supp}(B)$.

Observação 3.5. Uma fonte de confusão comum é interpretar $\text{supp}(x)$ como sendo igual a $x \cap \mathbb{A}$. Isso nem sempre é verdade pois pelo Exemplo 3.7, $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$ e $\text{supp}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \setminus \mathbb{A} = \emptyset$, enquanto que $\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = \mathbb{A}$.
Intuitivamente, o $\text{supp}(x)$ contém os átomos "visíveis" de x. É importante perceber que um átomo pode ser "visível" tanto por sua ausência quanto por sua presença em x. Por exemplo, se considerarmos $\mathbb{A} \setminus \{a\} \in \mathcal{P}_{\texttt{cof}}(\mathbb{A})$ então novamente pelo Exemplo 3.7 temos que

$$\text{supp}(\mathbb{A} \setminus \{a\}) = \mathbb{A} \setminus (\mathbb{A} \setminus \{a\}) = \{a\},$$

porém, $a \notin \mathbb{A} \setminus \{a\}$. Ou seja, a é um átomo "visível" em $\mathbb{A} \setminus \{a\}$, todavia a não pertence a $\mathbb{A} \setminus \{a\}$.

A Definição 3.7 a seguir se relaciona com este aspecto de equivariância e será relevante nos capítulos seguintes:

Definição 3.7. Sejam $(\mathcal{X}, \cdot)$ e $(\mathcal{Y}, \cdot)$ $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos. Uma função $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é dita *equivariante* quando para todo $x \in \mathcal{X}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$,

$$\pi \cdot (f(x)) = f(\pi \cdot x).$$

Lema 3.2 ([9], Lemma 2.2.1)**.** Sejam $(\mathcal{X}, \cdot)$ e $(\mathcal{Y}, \cdot)$ $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjuntos. Se $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ então para todo $x \in \mathcal{X}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$,

$$\pi \cdot (f(x)) = (\pi \cdot f)(\pi \cdot x).$$

Demonstração. Dados $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ e $x \in \mathcal{X}$ arbitrários,

$$\begin{aligned}
(\pi \cdot f)(\pi \cdot x) &= \pi \cdot (f(\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot x))), \quad \text{pela } \mathcal{S}_{\mathbb{A}}\text{-ação do Ex. 2.12} \\
&= \pi \cdot (f((\pi^{-1} \circ \pi) \cdot x)) \\
&= \pi \cdot (f(id \cdot x)) \\
&= \pi \cdot (f(x)).
\end{aligned}$$

□

Adiante, o Lema 3.3 fornece uma equivalência entre a equivariância de uma função f no sentido da Definição 3.5, i.e. $\text{supp}(f) = \emptyset$, e a equivariância de uma função no sentido da Definição 3.7.

Lema 3.3 ([9], Lema 2.2.2)**.** Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ conjuntos nominais e $f \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ (ver Definição 3.4). Então

$$\mathtt{supp}(f) = \emptyset \text{ se, e somente se, } \pi \cdot f(x) = f(\pi \cdot x), \text{ para toda } \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}.$$

Demonstração. Como $f \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}$ então f possui suporte finito e, portanto, $\mathtt{supp}(f)$ existe e está bem definido.

Suponha $\mathtt{supp}(f) = \emptyset$. Pelo Lema 3.1, $\pi \cdot f = f$ para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Assim, para cada $x \in \mathcal{X}$

$$\pi \cdot (f(x)) \overset{\text{Lem. 3.2}}{=} (\pi \cdot f)(\pi \cdot x) = f(\pi \cdot x),$$

e o resultado segue.

Reciprocamente, suponha que $\pi \cdot (f(x)) = f(\pi \cdot x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Então

$$\begin{aligned}
(\pi \cdot f)(x) &= \pi \cdot (f(\pi^{-1} \cdot x)), && \text{pela } \mathcal{S}_{\mathbb{A}}\text{-ação do Ex. 2.12} \\
&= f(\pi \cdot (\pi^{-1} \cdot x)), && \text{pois } f \text{ é equivariante} \\
&= f((\pi \circ \pi^{-1}) \cdot x) \\
&= f(id \cdot x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de x concluímos que $\pi \cdot f = f$ vale para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Portanto, $\mathtt{supp}(f) = \emptyset$ pelo Lema 3.1 e o resultado segue. □

Definição 3.8. Sejam $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ conjuntos nominais. Definimos o *produto tensorial* como sendo o subconjunto

$$\mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n \triangleq \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n \mid \bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) = \emptyset \right\} \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n.$$

No caso em que $\mathcal{X}_1 = \ldots = \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, expressamos o produto tensorial por $\otimes \mathcal{X}^n$.

O conjunto $\mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n$ é um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-subconjunto de $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$, pois a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação definida em $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ restrita a $\mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n$ forma uma $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação bem definida em $\mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n$. Para ver isso, basta verificarmos que para cada permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$,

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n \Rightarrow (\pi \cdot x_1, \ldots, \pi \cdot x_n) = \pi \cdot (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n.$$

Ou, equivalentemente,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(\pi \cdot x_i) = \emptyset.$$

Realmente,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(\pi \cdot x_i) &= \bigcap_{i=1}^{n} \pi(\mathtt{supp}(x_i)), && \text{pela Proposição 3.2(2)}\\
&= \pi\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(\pi \cdot x_i)\right), && \text{pois } \pi \text{ é bijeção}\\
&= \pi(\emptyset), && \text{pois } \bigcap_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) = \emptyset\\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Exemplo 3.2(1) o conjunto $\mathcal{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}_n$ é um conjunto nominal.

Corolário 3.1 ([9], Corollary 2.1.12)**.** Seja $\mathcal{X}$ um $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-conjunto. Suponha que $x \in \mathcal{X}$ seja finitamente suportado por $B \subseteq \mathbb{A}$.

1. Se $a, b \in \mathbb{A}$ são tais que $a, b \notin B$ então $(b\ a) \cdot x = x$.

2. Sejam $\pi', \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Se $\pi(b) = \pi'(b)$ para todo $b \in B$, então $\pi \cdot x = \pi' \cdot x$.

3. $a\#x$ se, e somente se, existe $b \in \mathbb{A}$ tal que $b\#x$ e $(b\ a) \cdot x = x$.

Demonstração. 1. Note que $(b\ a) \in \mathtt{fix}(B)$, pela Definição 3.1, $(a\ b) \cdot x = x$ e o resultado segue.

2. Para cada $\pi', \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ e $b \in B$ arbitrário temos que $\pi(b) = \pi'(b)$ implica $(\pi'^{-1} \circ \pi)(b) = b$. Da arbitrariedade de $b \in B$ segue que $\pi'^{-1} \circ \pi \in \mathtt{fix}(B)$ e, como consequência, $(\pi'^{-1} \circ \pi) \cdot x = x$. Então,

$$\begin{aligned}
(\pi'^{-1} \circ \pi) \cdot x = x \Rightarrow \pi'^{-1} \cdot (\pi \cdot x) = x, &\quad \text{pelas propriedades da } \mathcal{S}_{\mathbb{A}}\text{-ação}\\
\Rightarrow \pi \cdot x = \pi' \cdot x, &\quad \text{aplicando } \pi' \text{ em ambos os lados.}
\end{aligned}$$

3. Vamos provar as duas implicações:

   ($\Leftarrow$) Suponha que $a\#x$, isto é, $a \notin \mathtt{supp}(x)$. Tome um outro átomo $b \in \mathbb{A}$ tal que $b \notin \mathtt{supp}(x)$; então pelo item 2 desse resultado segue que $(b\ a) \cdot x = x$.

   ($\Rightarrow$) Suponha que exista $b \in \mathbb{A}$ tal que $b\#x$ e $(b\ a) \cdot x = x$. Pela Proposição 3.2(3) segue que

$$a = (b\ a)(b)\#(b\ a) \cdot x = x.$$

□

Teorema 3.3 ([8], Theorem 2.29)**.** Seja $\mathcal{X}$ um conjunto nominal. Se $X \subseteq \mathcal{X}$ é finito, então X tem suporte finito e

$$\mathtt{supp}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathtt{supp}(x).$$

Demonstração. Vamos verificar que X tem suporte finito.

O conjunto $\bigcup_{x\in}\mathtt{supp}(x)$ é finito, pois X é finito e $\mathtt{supp}(x)$ é finito para cada $x \in X$.

Afirmação 3.1. $\bigcup_{x\in}\mathtt{supp}(x)$ suporta X.

Tome $\pi \in \mathtt{fix}(\bigcup_{x\in}\mathtt{supp}(x))$. Então para cada $x \in X$, $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(x))$ e, consequentemente, $\pi \cdot x = x$. Assim,

$$\pi \cdot X = \pi \cdot \{x \mid x \in X\} = \{\pi \cdot x \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$$

e o resultado da afirmação segue. Da minimalidade de $\mathtt{supp}(X)$ inferimos que

$$\mathtt{supp}(X) \subseteq \bigcup_{x\in X}\mathtt{supp}(x).$$

Agora vamos demonstrar a inclusão contrária. Suponha, por absurdo, que existe um átomo $a \in \bigcup_{x\in X}\mathtt{supp}(x)$ mas $a \notin \mathtt{supp}(X)$. De $a \in \bigcup_{x\in X}\mathtt{supp}(x)$ segue que existe $x' \in X$ tal que $a \in \mathtt{supp}(x')$.

Escolha um átomo b tal que $b\#X, z$ para cada $z \in X$ (podemos fazer esta escolha pois $\mathtt{supp}(X)$ e $\bigcup_{x\in X}\mathtt{supp}(x)$ são finitos). Pelo Corolário 3.1(1), $(b\ a)\cdot X = X$. Como $x' \in X$, segue que $(b\ a)\cdot x' \in (b\ a)\cdot X = X$. Além disso, note que

$$b = (b\ a)(a) \in (b\ a)(\mathtt{supp}(x')) \overset{\text{Prop. 3.2(2)}}{=} \mathtt{supp}((b\ a)\cdot x'). \tag{3.3}$$

Como supomos $b\#z$ para todo $z \in X$, segue que não existe $z \in X$ tal que $b \in \mathtt{supp}(z)$. Logo, por (3.3) devemos ter $(b\ a)\cdot x' \notin X$, contradição. □

3.2 Princípio da Equivariância

As demonstrações das propriedades sobre os elementos do universo nominal $\mathcal{U}$ podem ser formalmente escritas na linguagem de ZFA. Utilizaremos isso para formalizar e provar propriedades *meta-matemáticas*, isto é, *propriedades sobre propriedades* dos elementos de $\mathcal{U}$. Um resultado neste sentido é o *princípio da equivariância* ou simplesmente *equivariância*, uma meta-propriedade central para as técnicas nominais. Tal princípio nos permite criar um gerenciamento particularmente eficiente sobre renomeamentos e α-equivalência na sintaxe de linguagens formais.

Antes de enunciarmos o princípio da equivariância, vamos estabelecer algumas convenções notacionais que serão úteis adiante:

Notação 3.1. Seja $x_1,\ldots,x_n$ uma lista qualquer de variáveis que representam elementos de $\mathcal{U}$. Escrevemos

1. $\bar{x}$ para abreviar $x_1,\ldots,x_n$.

2. Se $\bar{y} = y_1,\ldots,y_m$ for uma outra lista de variáveis, então escrevemos $\bar{x}\cup\bar{y}$ para representar a lista $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$. É importante destacar que esta união é a usual e não a de multiconjuntos. Por exemplo, se $\bar{x} = u,v,w$ e $\bar{y} = z,v,w$ então

$$\bar{x}\cup\bar{y} = \underbrace{u,v,w}_{\bar{x}},\underbrace{z,v,w}_{\bar{y}} = u,v,w,z.$$

   Assim, podemos interpretar $\bar{x}\cup\bar{y}$ como sendo a união das listas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ vistas como conjuntos $\{x_1,\ldots,x_n\}$ e $\{y_1,\ldots,y_m\}$, respectivamente.

3. $\pi\cdot\bar{x}$ para abreviar $\pi\cdot x_1,\ldots,\pi\cdot x_n$. Note que essa notação funciona bem a união de listas pois

$$\pi\cdot(\bar{x}\cup\bar{y}) = \pi\cdot x_1,\ldots,\pi\cdot x_n,\pi\cdot y_1,\ldots,\pi\cdot y_m = \pi\cdot\bar{x}\cup\pi\cdot\bar{y}.$$

4. $a\#\bar{x}$ para abreviar $a\#x_1,\ldots,x_n$, i.e. $a\#x_1\wedge\ldots\wedge a\#x_n$.

Teorema 3.4 (Princípio da equivariância - [8], Theorem 4.4)**.** Se $\phi(\bar{x})$ é um predicado expresso na linguagem de ZFA sobre uma lista de variáveis $\bar{x} = x_1,\ldots,x_n$[1]. Então para toda permutação $\pi\in\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$ vale que

$$\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \phi(\pi\cdot\bar{x}).$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução na estrutura de ϕ (Definição 2.6). Durante o decorrer desta demonstração t,s e π representarão termos e permutações arbitrárias, respectivamente.

1. Se $\phi(\bar{x})$ for da forma $\perp$. Então o resultado segue trivialmente, pois $\perp$ não contém nenhuma variável, em particular $\perp$ não contém as variáveis presentes em $\bar{x}$.

2. Suponha que $\phi(\bar{x})$ seja da forma $t\in s$. Então separamos os seguintes casos:

   (a) $x_i\in x_j$ com $1\leq i,j\leq n$.

[1] Aqui a lista $\bar{x}$ deve conter *todas* as variáveis mencionadas no predicado ϕ

Lembre-se que x_i e x_j representam elementos de $\mathcal{U}$. Como $x_i \in x_j$ então pelo axioma **(Conjuntos)** temos que x_j não é um átomo. Assim, x_j só pode ser um conjunto,

$$x_j = \{x \mid x \in x_j\}.$$

Pela $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação do Exemplo 2.9 inferimos que

$$\pi \cdot x_j = \{\pi \cdot x \mid x \in x_j\}.$$

Logo, $x_i \in x_j \Leftrightarrow \pi \cdot x_i \in \pi \cdot x_j$.

(b) $x_i \in \mathbb{A}$ com $1 \leq i \leq n$.

Neste caso, x_i necessariamente é um átomo. Então $\pi \cdot x_i \in \mathbb{A}$ e o resultado segue pois $\pi \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}$. Para a recíproca, basta aplicar a inversa π^{-1}.

(c) O caso $\mathbb{A} \in x_i$ segue de uma análise análoga aos itens anteriores.

3. Se $\phi(\bar{x})$ for da forma $t = s$, então a argumentação é semelhante ao do caso do item 2 trocando apenas o símbolo $\in$ por $=$.

4. Suponha que $\phi(\bar{x})$ seja da forma $\phi_1(\bar{y}) \Rightarrow \phi_2(\bar{z})$ com $\bar{y} \cup \bar{z} = \bar{x}$, onde $\phi_1(\bar{y})$ e $\phi_2(\bar{z})$ são predicados em ZFA. Por hipótese de indução, vale o princípio da equivariância, isto é, $\phi_1(\bar{y}) \Leftrightarrow \phi_1(\pi \cdot \bar{y})$ e $\phi_2(\bar{z}) \Leftrightarrow \phi_2(\pi \cdot \bar{z})$.

Vamos demonstrar que $\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \phi(\pi \cdot \bar{x})$ vale. Faremos isso mostrando que

$$\phi(\bar{x}) \Rightarrow \phi(\pi \cdot \bar{x}) \quad \text{e} \quad \phi(\pi \cdot \bar{x}) \Rightarrow \phi(\bar{x}).$$

($\Rightarrow$) Suponha que $\phi(\bar{x})$ seja verdadeira, ou seja, $\phi_1(\bar{y}) \Rightarrow \phi_2(\bar{z})$ é vale. Então

$$\phi_1(\pi \cdot \bar{y}) \overset{\text{H.I.}}{\Rightarrow} \phi_1(\bar{y}) \Rightarrow \phi_2(\bar{z}) \overset{\text{H.I.}}{\Rightarrow} \phi_2(\pi \cdot \bar{z}).$$

Isso implica que $\phi(\pi \cdot \bar{x})$ vale, pois $\pi \cdot \bar{x} = \pi \cdot (\bar{y} \cup \bar{z}) = \pi \cdot \bar{y} \cup \pi \cdot \bar{z}$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\phi(\pi \cdot \bar{x})$ seja válida.

Acima nós mostramos que $\phi(\bar{x}) \Rightarrow \phi(\pi \cdot \bar{x})$. Então da arbitrariedade de π, basta aplicar o resultado para a permutação inversa π^{-1},

$$\phi(\pi \cdot \bar{x}) \Rightarrow \phi(\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot \bar{x})) = \phi(\bar{x})$$

e o resultado segue.

5. Por fim, suponha que $\phi(\bar{x})$ seja da forma $\forall z.\phi'(\bar{y})$ com $\bar{x} = \bar{y} \cup z$, onde $\phi'(\bar{y})$ é um predicado na linguagem de ZFA, para o qual vale o princípio da equivariância por hipótese de indução. Queremos demonstrar que

$$\phi(\bar{x}) \Rightarrow \phi(\pi \cdot \bar{x}) \quad \text{e} \quad \phi(\pi \cdot \bar{x}) \Rightarrow \phi(\bar{x}).$$

Vamos a demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $\phi(\bar{x})$ seja verdadeira, isto é, que $\forall z.\phi'(\bar{y})$ é verdadeira. Temos então duas possibilidades a analisar: z é uma variável na lista $\bar{y}$ ou z não é uma variável na lista $\bar{y}$.

(i) Se z não é uma variável na lista $\bar{y}$, então $\pi \cdot z$ não é uma variável na lista $\pi \cdot \bar{y}$. De fato, digamos $\bar{y} = y_1, \ldots, y_n$, então $z \neq x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $\pi \cdot z$ fosse uma variável na lista $\pi \cdot \bar{y} = \pi \cdot y_1, \ldots, \pi \cdot y_n$ então existiria algum $i' \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\pi \cdot z = \pi \cdot y_{i'}$. Então

$$\begin{aligned} \pi \cdot z = \pi \cdot y_{i'} &\Leftrightarrow \pi^{-1} \cdot (\pi \cdot z) = \pi^{-1} \cdot (\pi \cdot y_{i'}), && \text{pelo item 3 desta prova} \\ &\Leftrightarrow z = y_{i'} && \text{Contradição!} \end{aligned}$$

Com isso estabelecido, procedemos com a demonstração:

$$\begin{aligned} \forall z.\phi'(\bar{y}) &\Leftrightarrow \phi'(\bar{y}), && \text{pois } z \text{ não ocorre em } \bar{y} \\ &\Leftrightarrow \phi'(\pi \cdot \bar{y}), && \text{por H.I.} \\ &\Leftrightarrow \forall \pi \cdot z.\phi'(\pi \cdot \bar{y}) && \text{pois } \pi \cdot z \text{ não ocorre em } \pi \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

e o resultado segue pois $\pi \cdot \bar{x} = \pi \cdot (\bar{y} \cup z) = \pi \cdot \bar{y} \cup \pi \cdot z$.

(ii) Agora suponha que z ocorra em $\bar{y}$.
Como $\forall z.\phi'(\bar{y})$ vale, então $\phi'(\bar{y})$ vale. Pela hipótese de indução, isso significa que $\phi'(\pi \cdot \bar{y})$ é vale para todo $z \in \mathcal{U}$. Em vista disso, temos em particular que $\phi'(\pi \cdot \bar{y}', \pi \cdot z)$ é válida para todo $\pi \cdot z \in \mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Em contrapartida, para demonstrar a recíproca, ou seja, que $\phi(\pi \cdot \bar{x}) \Rightarrow \phi(\bar{x})$ vale, basta aplicarmos o resultado que mostramos há pouco para a permutação inversa π^{-1}:

$$\phi(\pi \cdot \bar{x}) \Rightarrow \phi(\pi^{-1} \cdot (\pi \cdot \bar{x})) = \phi(\bar{x}). \qquad \square$$

Assim, $\phi(\bar{x})$ é válida independentemente de como permutamos os átomos que ocorrem em $\bar{x}$. Este princípio formaliza uma importante propriedade sobre asserções meta-teóricas envolvendo a noção de variável. Nas palavras de Murdoch J. Gabbay e Andrew M. Pitts [15]:

> "[...] *the validity of assertions about syntactical objects should be sensitive only to distinctions between variable names, rather than to the particular names themselves.*".

Na prática, este princípio é muito útil pois transforma provas longas em provas mais concisas. Por exemplo, com o princípio da equivariância a demonstração da Proposição 3.2 pode ser feita em "uma linha".

Finalizamos esta seção explorando algumas das principais consequências deste princípio.

Definição 3.9. Especificamos uma função n-ária Υ usando uma fórmula $\phi_\Upsilon(\bar{x},z)$ expressa em ZFA mencionando variáveis incluídas em $\bar{x},z$ tal que

$$\forall \bar{x}.((\exists z.\phi(\bar{x},z)) \wedge (\forall z,z'.((\phi(\bar{x},z) \wedge \phi(\bar{x},z')) \Rightarrow z = z')).$$

Assim, para cada $\bar{x}$ definimos $\Upsilon(\bar{x})$ como sendo o único z tal que $\phi_\Upsilon(\bar{x},z)$ vale, i.e. $\forall \bar{x}.(z = \Upsilon(\bar{x}) \Leftrightarrow \phi_\Upsilon(\bar{x},z))$.

O Corolário 3.2 abaixo basicamente afirma que *todas* as funções especificadas em ZFA são equivariantes.

Corolário 3.2 (Equivariância de funções - [8], Corollary 4.6)**.** Seja Υ uma função especificada usando um predicado $\phi_\Upsilon(\bar{x},z)$. Então para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_\mathbb{A}$ vale que

$$\pi \cdot \Upsilon(\bar{x}) = \Upsilon(\pi \cdot \bar{x}).$$

Demonstração. Para cada $\bar{x}$, $\Upsilon(\bar{x})$ é definido como sendo o único z para o qual $\phi_\Upsilon(\bar{x},z)$ é verdadeiro. Assim, $\phi_\Upsilon(\bar{x},\Upsilon(\bar{x}))$ vale e pelo princípio da equivariância $\phi(\pi \cdot \bar{x}, \pi \cdot \Upsilon(\bar{x}))$ também vale. Da unicidade da definição de $\Upsilon(\pi \cdot \bar{x})$ decorre que $\Upsilon(\pi \cdot \bar{x}) = \pi \cdot \Upsilon(\bar{x})$. □

A seguir, o Teorema 3.5 essencialmente nos ajuda a determinar o suporte da imagem de funções especificadas em ZFA.

Teorema 3.5 (Conservação de suporte - [8], Theorem 4.7)**.** Seja $\Upsilon(\bar{x})$ uma função especificada usando as variáveis de uma lista $\bar{x} = x_1,\ldots,x_n$. Suponha que os elementos em $\bar{x}$ possuam suporte finito. Então

$$\mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i).$$

Além disso, se Υ for injetiva então

$$\mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x})) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i).$$

Demonstração. Suponha que $\pi \in \mathtt{fix}(\bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i))$. Então

$$\begin{aligned}\pi \cdot \Upsilon(\bar{x}) &= \Upsilon(\pi \cdot \bar{x}) && \text{pelo Corolário 3.2}\\ &= \Upsilon(\bar{x}) && \text{pois } \pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(x_i)) \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Concluímos assim que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i)$ suporta $\Upsilon(\bar{x})$. Da minimalidade de $\mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x}))$, segue que $\mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i)$ e a primeira parte do resultado segue. Assim, mostramos que para todo $a \in \mathbb{A}$,

$$a \in \mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x})) \Rightarrow a \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i).$$

Note que pela contrapositiva isto é equivalente a dizer que

$$a \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) \Rightarrow a \notin \mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x})),$$

ou mais concisamente,

$$a\#\bar{x} \Rightarrow a\#\Upsilon(\bar{x}). \tag{3.4}$$

Agora suponha que Υ seja injetiva. Então Υ admite inversa à esquerda Υ^{-1}. Resta demonstrar que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i) \subseteq \mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x}))$ ou, equivalentemente, que para todo átomo $a \in \mathbb{A}$,

$$a\#\Upsilon(\bar{x}) \Rightarrow a\#\bar{x}. \tag{3.5}$$

Provaremos a implicação (3.5). Para isto, é suficiente aplicar o resultado (3.4) que mostramos há pouco para a inversa à esquerda. Assim, para todo $a \in \mathbb{A}$:

$$a\#\Upsilon(\bar{x}) \Rightarrow a\#\Upsilon^{-1}(\Upsilon(\bar{x})) = \bar{x}. \qquad \square$$

Este teorema afirma, sobretudo, que o suporte da imagem de uma função $\Upsilon(\bar{x})$ especificada em ZFA é determinado pelos suportes de cada x_i na lista $\bar{x}$. Ou seja, o suporte de $\Upsilon(\bar{x})$ "não aumenta", pois para calcular ou "limitar" $\mathtt{supp}(\Upsilon(\bar{x}))$ basta saber calcular $\mathtt{supp}(x_i)$ para cada x_i em $\bar{x}$.

3.3 Álgebras sobre Conjuntos Nominais

Com as noções preliminares das técnicas nominais estabelecidas, podemos então começar a pensar na construção dos conceitos envolvidos na definição do modelo nominal da lógica $\mathbb{L}_1$. Para isso, nesta seção introduziremos a noção de álgebras sobre conjuntos nominais, i.e. um conjunto nominal com funções sobre ele satisfazendo certos axiomas nominais.

Especificamente, estudaremos os conceitos de σ-*álgebra de termos* e σ-*álgebra*, conceitos estes que nos ajudarão a incorporar a noção de substituição no nosso modelo. Observaremos também que uma σ-ação simultânea também pode ser facilmente implementada. A principal referência para este capítulo será o artigo [9], porém, também utilizaremos o artigo [16] para complementar algumas ideias.

3.3.1 σ-Álgebra de termos

Substituição é um conceito fundamental para a Lógica e Ciência da Computação. Intuitivamente, uma substituição é a operação $v[a \mapsto u]$ que significa:

Troque as ocorrências livres de a em v por u.

Por exemplo, podemos pensar nas substituições de termos e predicados da lógica de primeira ordem ou, também, na tão conhecida substituição do λ-cálculo ([2] para mais detalhes). Estes são exemplos particulares de substituições que, apesar de se tratarem de sistemas formais distintos, dispõem de propriedades semelhantes, como o evitamento da captura de variáveis livres pelos ligadores de suas respectivas linguagens.

Sendo assim, tendo em mente a operação de substituição $v[a \mapsto u]$ como uma função satisfazendo certas propriedades, isso nos faz pensar se não seria possível usar as técnicas nominais para generalizar tal noção no seguinte sentido: gostaríamos de saber se existe alguma estrutura algébrica nominal que descreva exatamente as propriedades de $v[a \mapsto u]$ independentemente do que v e u sejam (λ-termos, termos ou predicados de uma lógica, etc).

Como uma analogia pensemos, por exemplo, na noção de corpo da Álgebra Abstrata. Sabemos que existe uma caracterização algébrica que nos diz *exatamente* quais propriedades um corpo deve satisfazer, independentemente de *qual* corpo estejamos falando. Seria possível o obter algo assim para a substituição?

Com este propósito em mente, Murdoch J. Gabbay e Aad Mathijssen [10] (conferir também [12] para uma abordagem mais detalhada desse assunto) usam as técnicas nominais para argumentar que os axiomas **(σa)** – **($\sigma\sigma$)** da Figura 3.2 abaixo axiomatizam a ideia de substituição, tudo de substituição, e nada além de substituição.

(σa)		$a[a \mapsto u] = u$
(σid)		$x[a \mapsto a] = x$
(σ#)	$a\#x \Rightarrow$	$x[a \mapsto u] = x$
($\sigma\alpha$)	$b\#x \Rightarrow$	$x[a \mapsto u] = ((b\ a) \cdot x)[b \mapsto u]$
($\sigma\sigma$)	$a\#v \Rightarrow$	$x[a \mapsto u][b \mapsto v] = x[b \mapsto v][a \mapsto u[b \mapsto v]]$

Figura 3.2. Axiomas para a noção de substituição.

Informalmente, os axiomas expressam o seguinte:

(σa): este axioma busca capturar aquilo que já é esperado que uma substituição satisfaça, à saber que se em uma variável a trocarmos a por um objeto u, então isso deve resultar em u novamente.

(σid) assim como o axioma anterior, este axioma também é esperado e nos diz que não alteramos um objeto x se trocarmos as ocorrências de uma variável a em x pela mesma variável a.

(σ#) para entender melhor este axioma, lembre-se que a noção de *frescor* $a\#x$ significa que $a \notin \mathtt{supp}(x)$, isto é, que a não é um átomo na "composição" de x. Além disso, lembre-se também $a\#x$ também pode ser interpretado como uma generalização da noção sintática de que a "variável a não é livre em x". Assim, este axioma afirma que se a não é livre em x, então a substituição das ocorrências livres de a em x não alteram x, pois x não possui ocorrências livres de a.

($\sigma\alpha$): este axioma requer um pouco mais de atenção. Basicamente ele garante que um átomo a a ser substituído por u em x pode ser renomeado por um átomo b, e a substituição de b por u em $(a\ b) \cdot x$ produzirá o mesmo elemento. Essencialmente, este axioma se relacionará com a noção de substituição com evitamento de captura de variáveis. Este fato ficará mais claro no Capítulo 5.

($\sigma\sigma$): este axioma é conhecido como o *Lema da Substituição*, um resultado que nos permite reordenar substituições simultâneas de forma consistente.

Com os axiomas estabelecidos vieram então os esforços para entender a *semântica* por trás dessa axiomatização, isto é, a determinação de estruturas algébricas nominais que satisfazem os axiomas da Figura 3.2. Disso surgem os conceitos de *álgebras de substituição de termos* e *álgebras de substituição* definidas em [16] e mais tarde chamados em [9] de *σ-álgebras de termos* e *σ-álgebras*, respectivamente[2].

Definição 3.10. Uma *σ-álgebra de termos* é uma tupla $(\mathcal{U}, \cdot, \mathtt{sub}_{\mathcal{U}}, \mathtt{atm}_{\mathcal{U}})$ onde:

1. $(\mathcal{U}, \cdot)$ é um conjunto nominal;
2. $\mathtt{sub}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times \mathbb{A} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ é uma função equivariante, a qual chamamos de *σ-ação* e denotamos $\mathtt{sub}_{\mathcal{U}}(x, a, u)$ por $x[a \mapsto u]$;

[2] O "σ" em σ-ação significa "substituição". Nenhuma conexão é sugerida com as σ-álgebras da Teoria da Medida.

3. $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}} : \mathbb{A} \to \mathcal{U}$ é uma função injetiva equivariante,

tal que os axiomas **(σa)** – **($\sigma\sigma$)** da Figura 3.2 são satisfeitos, onde $x, u, v \in \mathcal{U}$. Quando for conveniente, nos referiremos a uma σ-álgebra de termos $(\mathcal{U}, \cdot, \mathtt{sub}_{\mathcal{U}}, \mathtt{atm}_{\mathcal{U}})$ através do conjunto subjacente $\mathcal{U}$ do conjunto nominal $(\mathcal{U}, \cdot)$.

Observação 3.6. Note que:

1. A função $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}$ possui a finalidade de injetar o conjunto de átomos no conjunto nominal $\mathcal{U}$. Note que como $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}$ é uma função injetiva, segue pela conservação do suporte (Teorema 3.5) que $\mathtt{supp}(\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a)) = \mathtt{supp}(a) = \{a\}$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Por isso, quando for conveniente trataremos a e $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a)$ como sendo "iguais" e denotaremos $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a)$ por $a_{\mathcal{U}}$ ou simplesmente por a quando não houver confusão.

2. A σ-ação satisfazer o axioma **(σa)** significa

$$\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a)[a \mapsto u] = u,$$

já satisfazer o axioma **(σid)** significa

$$x[a \mapsto \mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a)] = x.$$

3. A equivariância da σ-ação $x[a \mapsto u]$ pode ser interpretada do seguinte modo:

$$\pi \cdot (x[a \mapsto u]) = \pi \cdot \mathtt{sub}_{\mathcal{U}}(x, a, u) = \mathtt{sub}_{\mathcal{U}}(\pi \cdot x, \pi(a), \pi \cdot u) = (\pi \cdot x)[\pi(a) \mapsto \pi \cdot u],$$

para todos $x, u \in \mathcal{U}$, todo $a \in \mathbb{A}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Abaixo estão alguns exemplos de σ-álgebras de termos. As funções definidas serão todas equivariantes devido ao Corolário 3.2.

Exemplo 3.8. Como um exemplo simples, podemos pensar no conjunto de conjunto de átomos $\mathbb{A}$. O conjunto de átomos $\mathbb{A}$ é uma σ-álgebra de termos com:

- $a_{\mathbb{A}} \triangleq a$;
- $a[a \mapsto c] \triangleq c$;
- $b[a \mapsto c] \triangleq b$.

O próximo exemplo é o exemplo *canônico* de uma σ-álgebra de termos e é por sua causa que a σ-álgebra de termos recebe este nome.

Exemplo 3.9. O conjunto de termos $\mathfrak{T}$ da lógica $\mathbb{L}_1$ é uma σ-álgebra de termos com:

- $a_{\mathfrak{T}} \triangleq a$;
- $r[a \mapsto s] \triangleq r[a := s]$, onde $r[a := s]$ é a substituição usual em termos da Definição 2.20.

Exemplo 3.10. O conjunto das partes finitas de $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$, é uma σ-álgebra de termos com:

- $a_{\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})} \triangleq \{a\}$;
- $B[a \mapsto C] \triangleq B$ se $a \notin B$;
- $B[a \mapsto C] \triangleq (B \setminus \{a\}) \cup C$ se $a \in B$.

Para ilustrar os axiomas, uma demonstração desse fato pode ser encontrada no Lema B.1 do Apêndice B.

3.3.2 σ-Álgebra

Com o Exemplo 3.9 vimos que o conjunto de termos $\mathfrak{T}$ forma uma σ-álgebra de termos. Isso nos faz questionar sobre o que ocorre em relação aos predicados de $\mathbb{L}_1$.

Para um melhor entendimento vejamos um exemplo envolvendo os predicados da lógica $\mathbb{L}_1$ identificados por α-equivalência com a substituição usual.

Exemplo 3.11. Considere $\phi \triangleq \forall c.P(a)$ e tome $b\#\forall c.P(a)$ (então $b \notin \mathtt{ats}(\phi) = \{a,c\}$). Como $c \in \{c\} = \mathtt{fa}(c)$, segue que

$$(\forall c.P(a))[a := c] = \forall d.(P(a)[c := d][a := c]) = \forall d.P(c)$$

e

$$((b\ a) \cdot \forall c.P(a))[b := c] = (\forall c.P(b))[b := c] = \forall e.(P(b)[c := e][b := c]) = \forall e.P(c).$$

Então,

$$(\forall c.P(a))[a := c] = \forall d.P(c) =_{\alpha} \forall e.P(c) = ((b\ a) \cdot \forall c.P(a))[b := c].$$

O Exemplo 3.11 nos mostra que o conjunto $\mathfrak{P}$ não satisfaz o axioma **($\sigma\alpha$)** pois

$$(\forall c.P(a))[a := c] = \forall d.P(c) \neq \forall e.P(c) = ((b\ a) \cdot \forall c.P(a))[b := c].$$

Por outro lado,

$$(\forall c.P(a))[a := c] = \forall d.P(c) =_\alpha \forall e.P(c) = ((b\ a) \cdot \forall c.P(a))[b := c].$$

Ou seja, $[\forall c.P(a)]_\alpha[a := c] = ((b\ a) \cdot [\forall c.P(a)]_\alpha)[b := c]$.

Então seria razoável pensar que o conjunto $\mathfrak{P}/_\alpha$ seja uma σ-álgebra de termos. Bom, este não é o caso já que para que a substituição usual em predicados (identificados por α-equivalência) $[\phi]_\alpha[a := s]$ formasse uma σ-ação, precisaríamos que $[\phi]_\alpha[a := s]$ fosse uma função do tipo $\mathfrak{P}/_\alpha \times \mathbb{A} \times \mathfrak{P}/_\alpha \to \mathfrak{P}/_\alpha$, o que não é o caso visto que $[\phi]_\alpha[a := s]$ forma uma função do tipo $\mathfrak{P}/_\alpha \times \mathbb{A} \times \mathfrak{T} \to \mathfrak{P}/_\alpha$.

No entanto, a seguir veremos que $\mathfrak{P}/_\alpha$ com a substituição usual $[\phi]_\alpha[a := s]$ forma uma σ-*álgebra*:

Definição 3.11. Seja $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra de termos. Uma σ-*álgebra* sobre $\mathcal{U}$ é uma tupla $(\mathcal{X}, \cdot, \mathcal{U}, \mathtt{sub}_\mathcal{X})$ onde:

1. $(\mathcal{X}, \cdot)$ é um conjunto nominal;

2. $\mathtt{sub}_\mathcal{X} : \mathcal{X} \times \mathbb{A} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ é uma função equivariante, a qual também chamamos de σ-ação e denotamos por $x[a \mapsto u]$,

tal que os axiomas **(σid)** – **($\sigma\sigma$)** da Figura 3.2 são satisfeitas, onde $x \in \mathcal{X}$ e $u, v \in \mathcal{U}$. Como de costume, quando não houver confusão e for conveniente, nos referiremos a uma σ-álgebra $(\mathcal{X}, \cdot, \mathcal{U}, \mathtt{sub}_\mathcal{X})$ através do conjunto subjacente $\mathcal{X}$ do conjunto nominal $(\mathcal{X}, \cdot)$.

As Definições 3.10 e 3.11 são similares. Em uma σ-álgebra de termos, quando escrevemos $x[a \mapsto u]$ temos que x e u pertencem ao mesmo conjunto $\mathcal{U}$; já no caso da Definição 3.11, ao escrevermos $x[a \mapsto u]$ temos que u ainda pertence a $\mathcal{U}$, porém, x pertence a um conjunto $\mathcal{X}$, o qual pode ou não ser igual a $\mathcal{U}$. De fato, $\mathcal{X}$ pode vir a ser igual a $\mathcal{U}$ pois por definição toda σ-álgebra de termos $\mathcal{U}$ é, em particular, uma σ-álgebra sobre $\mathcal{U}$, i.e. sobre si mesma. Assim, nesta situação $\mathcal{X} = \mathcal{U}$.

Na sequência, exceto quando indicado o contrário, $\mathcal{U}$ será uma σ-álgebra de termos e $\mathcal{X}$ será uma σ-álgebra sobre $\mathcal{U}$. Além disso, quando a σ-álgebra de termos associada estiver clara pelo contexto, diremos apenas que "$\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra".

Observação 3.7. Note que:

1. Em uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{U}$ todos os axiomas da Figura 3.2 são satisfeitos exceto o axioma **(σa)**, uma vez que não estamos assumindo uma função $\mathtt{atm}_{\mathcal{X}} : \mathbb{A} \to \mathcal{X}$.

2. A equivariância da σ-ação $x[a \mapsto u]$ em uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{U}$ é interpretada como em 3.6(3):
$$\pi \cdot (x[a \mapsto u]) = (\pi \cdot x)[\pi(a) \mapsto \pi \cdot u],$$
para todo $x \in \mathcal{X}$, todo $u \in \mathcal{U}$, todo $a \in \mathbb{A}$ e toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$.

Exemplo 3.12. Vejamos exemplos de σ-álgebras.

1. Como observamos no início desta seção, o conjunto das α-classes de equivalência de predicados $\mathfrak{P}/_{\alpha}$ com a σ-ação tomada como sendo a substituição $[\phi]_{\alpha}[a := s]$ (Definição 2.22) forma uma σ-álgebra sobre $\mathfrak{T}$.

2. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ σ-álgebras sobre a mesma σ-álgebra de termos $\mathcal{U}$. O conjunto nominal $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ é uma σ-álgebra sobre $\mathcal{U}$ com a σ-ação definida por
$$(x,y)[a \mapsto u] \triangleq (x[a \mapsto u], y[a \mapsto u]).$$
Em particular, se $\mathcal{U}$ é uma σ-álgebra de termos (e, portanto, uma σ-álgebra sobre si mesma) então $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ será uma σ-álgebra sobre $\mathcal{U}$. Entretanto, $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ não pode ser uma σ-álgebra de termos com a σ-ação dada acima visto que esta não forma uma função do tipo $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \times \mathbb{A} \times (\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \to (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$, mas sim $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \times \mathbb{A} \times \mathcal{U} \to (\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Finalizamos esta subseção com alguns lemas técnicos que serão úteis no próximo capítulo.

Lema 3.4 ([9], Lemma 3.1.8)**.** Se $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ e $a\#u$, então $a\#x[a \mapsto u]$. Mais ainda,
$$\mathtt{supp}(x[a \mapsto u]) \subseteq (\mathtt{supp}(x) \setminus \{a\}) \cup \mathtt{supp}(u).$$

Demonstração. Note que $x[a \mapsto u]$ é finito-suportado pois $x[a \mapsto u] \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é um conjunto nominal. Usando a conservação de suporte (Teorema 3.5) na σ-ação, obtemos que
$$\mathtt{supp}(x[a \mapsto u]) \subseteq \mathtt{supp}(x) \cup \{a\} \cup \mathtt{supp}(u). \tag{3.6}$$

Escolha $b\#x, u$. Então $b\#x[a \mapsto u]$ e daí

$$
\begin{aligned}
(b\ a)\cdot(x[a\mapsto u]) &= ((b\ a)\cdot x)[(b\ a)(a)\mapsto(b\ a)\cdot u], && \text{pela equivariância da } \sigma\text{-ação}\\
&= ((b\ a)\cdot x)[b\mapsto(b\ a)\cdot u]\\
&= ((b\ a)\cdot x)[b\mapsto u], && \text{pelo Cor. 3.1(1), pois } a,b\#u\\
&= x[a\mapsto u], && \text{por } (\sigma\alpha)\text{, pois } b\#x.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Corolário 3.1(3) temos que $a\#x[a\mapsto u]$. Logo, pela continência em (3.6) devemos ter que

$$\mathtt{supp}(x[a\mapsto u])\subseteq(\mathtt{supp}(x)\setminus\{a\})\cup\mathtt{supp}(u).$$ □

Lema 3.5 ([9], Lemma 3.1.10)**.** Se $x\in\mathcal{X}$ e $b\#x$, então $x[a\mapsto b]=(b\ a)\cdot x$.

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
x[a\mapsto b] &= ((b\ a)\cdot x)[b\mapsto b], && \text{por } (\sigma\alpha) \text{ pois } b\#x\\
&= (b\ a)\cdot x, && \text{por } (\sigma\mathbf{id}).
\end{aligned}
$$ □

Lema 3.6 ([9], Lemma 3.1.11)**.** Se $U\subseteq\mathcal{U}$ tem suporte finito, $x\in\mathcal{X}$ e $a\in\mathbb{A}$ é tal que $a\#U$, então $a\#\{x[a\mapsto u]\mid u\in U\}$. Além disso, $a\#\{x[a\mapsto u]\mid u\in\mathcal{U}\}$ e $a\#\{x[a\mapsto n]\mid n\in\mathbb{A}\}$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathtt{supp}(U)\cup\mathtt{supp}(x)\cup\{a\}$ suporta $\{x[a\mapsto u]\mid u\in U\}$. Se $\pi\in\mathtt{fix}(\mathtt{supp}(U)\cup\mathtt{supp}(x)\cup\{a\})$, então

$$
\begin{aligned}
&\pi\in\mathtt{fix}(\mathtt{supp}(U)),\\
&\pi\in\mathtt{fix}(\mathtt{supp}(x)),\\
&\pi\in\mathtt{fix}(\{a\}).
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $\pi\cdot U=U,\pi\cdot x=x$ e $\pi(a)=a$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\pi\cdot\{x[a\mapsto u]\mid u\in U\} &= \{\pi\cdot(x[a\mapsto u])\mid u\in U\}, && \text{ação que age sobre conjuntos}\\
&= \{(\pi\cdot x)[\pi(a)\mapsto\pi\cdot u]\mid u\in U\}, && \text{equivariância da } \sigma\text{-ação}\\
&= \{x[a\mapsto\pi\cdot u]\mid u\in U\}, && \text{pois } \pi\cdot x=x \text{ e } \pi(a)=a\\
&= \{x[a\mapsto u]\mid u\in U\}, && \text{pois } \pi\cdot U=U,
\end{aligned}
$$

e o resultado segue.

Agora, escolha $b\#x,U$. Como $b,a\#U$, pelo Corolário 3.1(1) temos que $(b\ a)\cdot U=U$. Então,

$$
\begin{aligned}
(b\ a)\cdot\{x[a\mapsto u]\mid u\in U\} &= \{(b\ a)\cdot(x[a\mapsto u])\mid u\in U\}\\
&= \{((b\ a)\cdot x)[b\mapsto(b\ a)\cdot u]\mid u\in U\} && \text{equivariância}\\
&= \{((b\ a)\cdot x)[b\mapsto u]\mid u\in U\} && \text{pois } (b\ a)\cdot U=U\\
&= \{x[a\mapsto u]\mid u\in U\} && \text{por } (\sigma\alpha)\text{, pois } b\#x
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Corolário 3.1(3), $a\#\{x[a \mapsto u] \mid u \in U\}$.

Para os conjuntos $\{x[a \mapsto u] \mid u \in \mathcal{U}\}$ e $\{x[a \mapsto n] \mid n \in \mathbb{A}\}$ observe que $\pi \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$ e $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$. Então pelo Lema 3.1 temos que $\mathtt{supp}(\mathcal{U}) = \mathtt{supp}(\mathbb{A}) = \emptyset$, do que resulta $a\#\mathcal{U}, \mathbb{A}$. Agora basta repetir o argumento feito acima. $\square$

3.3.3 σ-Ação simultânea

Na Definição 3.11 definimos uma σ-ação em um único átomo por vez. Na Seção 5.2 do próximo capítulo precisaremos considerar uma σ-ação simultânea, ou seja, a aplicação de uma σ-ação mais de uma só vez. Veremos a seguir que os axiomas da Figura 3.2 nos dão o poder para definir uma σ-ação simultânea para σ-álgebras.

Definição 3.12. Sejam $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$ átomos tais que $a_1 \dots, a_n \# u_1, \dots, u_n$. Para cada $x \in \mathcal{X}$ definimos

$$x[a_1 \mapsto u_1, \dots, a_n \mapsto u_n] \triangleq x[a_1 \mapsto u_1] \dots [a_n \mapsto u_n].$$

A Definição 3.12 é basicamente baseada no axioma **($\sigma\sigma$)** juntamente do axioma **($\sigma\#$)** em razão da suposição de que $a_i \# u_j$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Por conta disso, note que a Definição 3.12 está bem-definida no sentido de não depender da ordem em que tomamos os u_j's. Vejamos o caso em que $n = 2$:

$$\begin{aligned} x[a_1 \mapsto u_1, a_2 \mapsto u_2] &= x[a_1 \mapsto u_1][a_2 \mapsto u_2] \\ &= x[a_2 \mapsto u_2][a_1 \mapsto u_1[a_2 \mapsto u_2]] \quad && \text{por } (\sigma\sigma), \text{ pois } a_1 \# u_2 \\ &= x[a_2 \mapsto u_2][a_1 \mapsto u_1], && \text{por } (\sigma\#), \text{ pois } a_2 \# u_1. \end{aligned}$$

Uma demonstração do caso geral pode ser encontrada no Lema B.2 do Apêndice B.

Podemos estender a Definição 3.12 para o caso onde os $a_i's$ não são necessariamente frescos em relação aos u_j's.

Definição 3.13. Sejam $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$. Então para $x \in \mathcal{X}$ definimos

$$x[a_1 \mapsto u_1, \dots, a_n \mapsto u_n] \triangleq ((b_1\ a_1) \circ \cdots \circ (b_n\ a_n) \cdot x)[b_1 \mapsto u_1] \dots [b_n \mapsto u_n],$$

onde escolhemos $b_1, \dots, b_n$ frescos em relação a x e u_j para todo $j = 1, \dots, n$.

Assim como na Definição 3.12, a Definição 3.13 não depende da escolha dos átomos frescos b_i's e nem da ordem que tomamos os u_j's. Claro, para a independência da ordem que tomamos os u_j's o argumento é o mesmo que fizemos para a Definição 3.12 com o auxílio do axioma **($\sigma\alpha$)**; já para a escolha dos b_i's considere uma outra lista de átomos frescos em relação a x e u_j para todo $j = 1, \ldots, n$, digamos $c_1, \ldots, c_n$. O argumento completo da independência da escolha dos átomos que estabelece esta definição pode ser encontrada no Lema B.3 do Apêndice B.

Capítulo 4

Reticulados Nominais

A construção do modelo nominal da lógica $\mathbb{L}_1$ será alicerçada numa generalização nominal das noções da teoria de reticulados usual. Portanto, neste capítulo definiremos um *conjunto nominal parcialmente ordenado* $\mathcal{L}$, abreviado por CNPO, como sendo um conjunto nominal equipado com uma *ordem parcial equivariante*. Em seguida, para um CNPO $\mathcal{L}$ definiremos os *B#ínfimos* (denotados por $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$) e os *B#supremos* (denotados por $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$) em relação a um subconjunto finito $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e um subconjunto finito $B \subseteq \mathbb{A}$ como sendo, respectivamente, a maior *B#cota inferior* de $\mathcal{X}$ e a *menor B#cota superior* de $\mathcal{X}$. Feito isso, faremos uma análise sobre $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$ em relação a conjuntos particulares $\mathcal{X}$ e B, estabelecendo assim algumas convenções notacionais. Definiremos um *reticulado nominal* $\mathcal{L}$ como sendo um CNPO que possui $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$ para todo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e todo B. Isso posto, iremos então apresentar diversos resultados mostrando propriedades interessantes que estas noções dispõem. Veremos também como estas ideias se relacionam entre si, assim como também exploraremos como elas se relacionam com as noções usuais da teoria de reticulados. Um ponto importante nesta direção será a generalização das noções usuais de *distributividade* e *complementação*.

A nossa principal fonte serão os artigos [16] e [9].

4.1 Conjuntos Nominais Parcialmente Ordenados

O nosso objetivo agora, nesta seção, é utilizar as técnicas nominais para estender as noções e resultados que estudamos na Seção 2.1 sobre conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 4.1. Um *conjunto nominal parcialmente ordenado* (CNPO) é uma tupla $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ onde:

- $(\mathcal{L}, \cdot)$ é um conjunto nominal.

- A relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial (não-estrita) equivariante, ou seja, $\leq$ é reflexiva, antissimétrica, transitiva e para toda permutação $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$,

$$x \leq y \text{ se, e somente se, } \pi \cdot x \leq \pi \cdot y.$$

Quando a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação $\cdot$ e a relação $\leq$ forem claras pelo contexto, iremos nos referir ao CNPO $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ via seu conjunto subjacente $\mathcal{L}$.

Exemplo 4.1. Abaixo estão alguns exemplos simples de CNPOs:

1. Todo CPO usual equipado com a $\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$-ação trivial (Exemplo 2.7) forma um CNPO.
2. O conjunto das partes nominais $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$ (Definição 3.3) ordenado pela relação de inclusão $\subseteq$ é um CNPO, onde a equivariância da relação $\subseteq$ é garantida pelo princípio da equivariância (Teorema 3.4).
3. O conjunto $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ forma um CNPO com a relação de inclusão $\subseteq$.

Queremos estender nominalmente as noções usuais de ínfimos e supremos. Para isso, precisamos antes definir uma extensão da noção de cotas inferiores e superiores:

Definição 4.2. Sejam $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um CNPO, $x' \in \mathcal{L}$ e subconjuntos finitos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e $B \subseteq \mathbb{A}$. Então

1. x' é uma *B#cota inferior* de $\mathcal{X}$ (lê-se cota inferior B-fresca) se
   - x' é uma cota inferior de $\mathcal{X}$, e
   - $B \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset$.

   Denotamos por $\mathcal{X}_B$ o conjunto de todas as B#cotas inferiores de $\mathcal{X}$:

   $$\mathcal{X}_B \triangleq \{x' \in \mathcal{L} \mid B \cap \mathrm{supp}(x') \text{ e } x' \leq x \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\}.$$

   Assim, definimos o *B#ínfimo* de $\mathcal{X}$ (lê-se ínfimo B-fresco) como sendo a maior B#cota inferior de $\mathcal{X}$ (se existir), o qual denotamos por $\bigwedge^{\#B} \mathcal{X}$.

2. x' é uma *B#cota superior* de $\mathcal{X}$ (lê-se cota superior B-fresca de $\mathcal{X}$) se
   - x' é uma cota superior de $\mathcal{X}$, e
   - $B \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset$.

Denotamos por $\mathcal{X}^B$ o conjunto de todas as B#cotas superiores de $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}^B \triangleq \{x' \in \mathcal{L} \mid B \cap \mathrm{supp}(x') \text{ e } x \leq x' \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\}.$$

O B*#supremo* de $\mathcal{X}$ (lê-se supremo B-fresco) é definido como sendo a menor B#cota superior de $\mathcal{X}$ (se existir), o qual denotamos por $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$.

O B#ínfimo é, portanto, a maior cota inferior entre as cotas inferiores que não possuem átomos de B em seus suportes. Da mesma forma, o B#supremo é a menor cota superior entre as cotas superiores que não possuem átomos de B em seus suportes.

Observação 4.1. Observamos o seguinte:

1. No presente trabalho adotamos uma terminologia diferente dos artigos de referência. Em [9], Murdoch J. Gabbay chama de B*#limits* e B*#colimits* o que aqui chamamos, respectivamente, de B#ínfimos e B#supremos. A terminologia adotada por Murdoch J. Gabbay têm raízes na Teoria de Categorias, onde os B*#limits* e B*#colimits* são relacionados com *limites* e *colimites* categóricos.

2. Quando quisermos falar sobre B#ínfimos e B#supremos de forma geral, isto é, sem a intenção de especificar o conjunto B, escreveremos apenas *#ínfimos* e *#supremos*.

Na Figura 4.1 abaixo fazemos um esboço de uma situação envolvendo um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e suas respectivas B#cotas para um conjunto de $B \subseteq \mathbb{A}$.

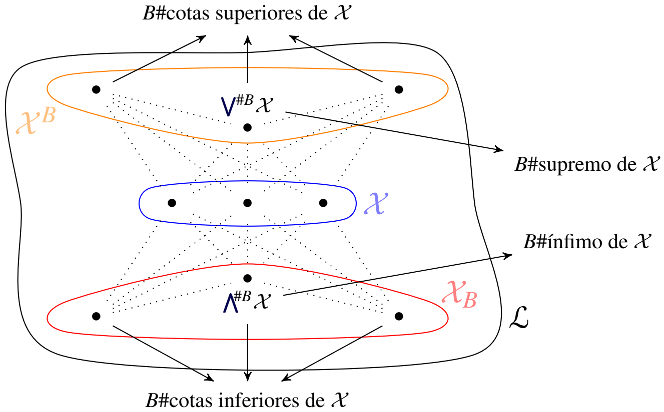

Figura 4.1. Ilustração das B#cotas de um conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$.

O Lema 4.1 garante a unicidade de B#ínfimos e B#supremos.

Lema 4.1 ([9], Lemma 4.1.7)**.** Sejam $(\mathcal{L},\cdot,\leq)$ um CNPO e subconjuntos finitos $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}$ e $B\subseteq\mathbb{A}$. Então $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$ são únicos se existirem.

Demonstração. Vamos mostrar apenas a unicidade de $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$, pois a demonstração da unicidade de $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$ é dual. Suponha que $\mathcal{X}_B$ possua um outro maior elemento y. Então pela maximalidade de $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e de y e do fato de que $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\in\mathcal{X}_B$ e $y\in\mathcal{X}_B$, segue que $y\leq\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\leq y$ donde concluímos que $y=\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$. □

No exemplo a seguir ilustramos as notações introduzidas até o momento no conjunto nominal $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$, que é uma σ-álgebra de termos (Exemplo 3.10) mais ainda uma σ-álgebra sobre si mesma.

Exemplo 4.2. Sejam $X\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ e $a\in\mathbb{A}$.

Afirmação 4.1. O conjunto

$$\bigcap{}^{\#a}X \triangleq \bigcap\{X[a\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\} \tag{4.1}$$

é o $\{a\}$#ínfimo de $\{X\}$.

Para ver isso, precisamos mostrar que

1) $\bigcap^{\#a}X\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$.

   De fato, X é finito e

$$\bigcap{}^{\#a}X=\bigcap\{X[a\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\subseteq X[a\mapsto\{a\}]\overset{(\sigma\mathbf{id})}{=}X. \tag{4.2}$$

2) $\bigcap^{\#a}X$ é a maior $\{a\}$#cota inferior de $\{X\}$.

   Agora, note que (4.2) garante que $\bigcap^{\#a}X$ é uma cota inferior de $\{X\}$.

   (a) $\bigcap^{\#a}X$ é uma $\{a\}$#cota inferior de $\{X\}$.

   Para isto, precisamos mostrar que $\{a\}\cap\mathtt{supp}(\bigcap^{\#a}X)=\emptyset$, isto é, que $a\#\bigcap^{\#a}X$. Começamos interpretando $\bigcap^{\#a}X$ como uma função

$$\bigcap{}^{\#(-)}(-):\mathbb{A}\times\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\to\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$$

   e aplicamos a conservação de suporte (Teorema 3.5) para concluir que

$$\mathtt{supp}\left(\bigcap{}^{\#a}X\right)\subseteq\mathtt{supp}(X)\cup\{a\}\overset{\mathtt{supp}(X)=X}{=}X\cup\{a\}. \tag{4.3}$$

   Escolha $b\#X$, então pela inclusão em (4.3), temos que $b\#\bigcap^{\#a}X$. Daí,

$$
\begin{aligned}
(b\ a)\cdot\left(\bigcap\nolimits^{\#a}X\right) &\overset{\text{Cor. 3.2}}{=} \bigcap\nolimits^{\#(b\ a)(a)}(b\ a)(X)\\
&\overset{(b\ a)(a)=b}{=} \bigcap\nolimits^{\#b}(b\ a)(X),\\
&\overset{(4.1)}{=} \bigcap\{((b\ a)(X))[b\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\\
&\overset{(\sigma\alpha)}{=} \bigcap\{X[a\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\\
&\overset{(4.1)}{=} \bigcap\nolimits^{\#a}X.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, pelo Corolário 3.1(3) segue que $a\#\bigcap^{\#a}X$.

(b) $\bigcap^{\#a}X$ é a maior $\{a\}$#cota inferior de $\{X\}$.

Tome $D\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ uma $\{a\}$#cota inferior de $\{X\}$. Então $a\#D$ e $D\subseteq X$. Temos duas possibilidades: $a\in X$ ou $a\notin X$.

- Se $a\notin X$, então $a\#X$ e

$$
\begin{aligned}
\bigcap\nolimits^{\#a}X &\overset{(4.1)}{=} \bigcap\{X[a\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\\
&\overset{(\sigma\#)}{=} \bigcap\{X\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\\
&= \bigcap X\\
&= X.
\end{aligned}
$$

  Então $D\subseteq X=\bigcap^{\#a}X$.

- Agora suponha $a\in X$. De $a\#D$ decorre que $a\notin D$ e portanto $D\subseteq X\setminus\{a\}$. Se mostrarmos que $\bigcap^{\#a}X=X\setminus\{a\}$ então o resultado segue.

$$
\begin{aligned}
\bigcap\nolimits^{\#a}X &= \bigcap\{X[a\mapsto C]\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}, && \text{por (4.1)}\\
&= \bigcap\{(X\setminus\{a\})\cup C\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}, && \text{pela } \sigma\text{-ação em } \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\\
&= (X\setminus\{a\})\cup\left(\bigcap\{C\mid C\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\right), && \text{pois } \cup \text{ e } \cap \text{ se distribuem}\\
&= (X\setminus\{a\})\cup\emptyset, && \text{pois } \emptyset\in\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\\
&= X\setminus\{a\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\bigcap^{\#a}X$ é a maior $\{a\}$#cota inferior de $\{X\}$. Daí,

$$
\bigwedge\nolimits^{\#\{a\}}\{X\}=\bigcap\nolimits^{\#a}X=\begin{cases} X, & \text{se } a\notin X\\ X\setminus\{a\}, & \text{se } a\in X\end{cases}
$$

Isso é razoável, uma vez que determinar o $\{a\}$#ínfimo de $\{X\}$ é o mesmo que determinar o maior subconjunto de X que não tem a em seu suporte, ou seja, que não contém a. A resposta é claramente X se a não está em X e $X\setminus\{a\}$ se a está em X.

Exemplo 4.3. Vejamos exemplos envolvendo os subconjuntos de $\{a,b,c\}$:

$$\bigwedge^{\#\{a\}}\{\{a,b,c\}\} = \{b,c\} \qquad \bigwedge^{\#\{a\}}\{\{a\}\} = \emptyset$$
$$\bigwedge^{\#\{a\}}\{\{a,b\}\} = \{b\} \qquad \bigwedge^{\#\{a\}}\{\{b\}\} = \{b\}$$
$$\bigwedge^{\#\{a\}}\{\{a,c\}\} = \{c\} \qquad \bigwedge^{\#\{a\}}\{\{c\}\} = \{c\}$$
$$\bigwedge^{\#\{a\}}\{\{b,c\}\} = \{b,c\} \qquad \bigwedge^{\#\{a\}}\{\emptyset\} = \emptyset$$

Na Figura 4.2 abaixo ilustramos estes $\{a\}$#ínfimos. As setas em azul apontam para o $\{a\}$#ínfimo do conjunto correspondente e os caminhos pontilhados estabelecem a relação de inclusão.

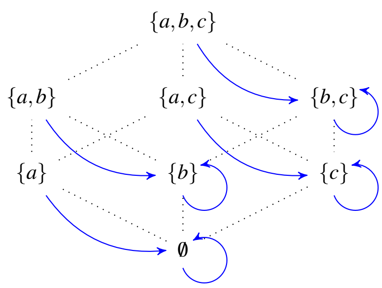

Figura 4.2. Ilustração dos $\{a\}$#ínfimos dos subconjuntos de $\{a,b,c\}$.

Exemplo 4.4. Continuando o Exemplo 4.2, vejamos o que ocorre com os $\{a\}$#supremos de um subconjunto $\{X\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$. O Exemplo 4.2 nos induz a pensar que o B#supremo de $\{X\}$ poderia ser

$$\bigcup^{\#a} X \triangleq \bigcup \{X[a \mapsto C] \mid C \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}. \tag{4.4}$$

No entanto, isso não parece muito certo pois esse conjunto aparenta ser infinito. De fato, façamos uma análise em relação a pertinência de a em relação a X:

1. Se $a \notin X$, então $X[a \mapsto C] \overset{\text{Ex. } 3.10}{=} X$ e daí

$$\bigcup^{\#a} X = \bigcup X = X.$$

2. Se $a \in X$, então $X[a \mapsto C] \overset{\text{Ex. } 3.10}{=} (X \setminus \{a\}) \cup C$ e daí

$$\begin{aligned}
\bigcup^{\#a} X &= \bigcup \{X[a \mapsto C] \mid C \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\} \\
&= \bigcup \{(X \setminus \{a\}) \cup C \mid C \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\} \\
&= (X \setminus \{a\}) \cup \left(\bigcup \{C \mid C \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})\}\right) \\
&= (X \setminus \{a\}) \cup \mathbb{A} \\
&= \mathbb{A}
\end{aligned}$$

Logo, neste caso $\bigcup^{\#a} X \notin \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$.

A análise acima confirma o esperado: se $a \notin X$ então o $\{a\}$#supremo de $\{X\}$ é X; se $a \in X$ então $\{X\}$ não possui $\{a\}$#supremo. Claro, o $\{a\}$#supremo de $\{X\}$ é, por definição, a menor $\{a\}$#cota superior de $\{X\}$, isto é, o menor conjunto $X' \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ contendo X tal que $a\#X'$ ($a \notin X'$). Assim, se $a \notin X$ então o menor conjunto com estas propriedades é o próprio X. Agora, se $a \in X$ então todo todo X' que contém X também conterá a, logo a estará no suporte de X'. Isso significa que o conjunto das $\{a\}$#cotas superiores é vazio e, consequentemente, não existe $\{a\}$#supremo neste caso.

Para finalizar, observe na Figura 4.2 que os $\{a\}$#supremos dos subconjuntos do conjunto $\{a,b,c\}$ que não contém a são justamente aqueles subconjuntos com um *loop*.

O próximo lema será útil para estabelecer o suporte de B#ínfimos e B#supremos.

Lema 4.2. Seja $(\mathcal{L},\cdot,\leq)$ um CNPO. Se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e $B \subset \mathbb{A}$ são finitos e $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ e $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$ existem, então

1. $\mathtt{supp}\left(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\right) \subseteq \left(\bigcup\{\mathtt{supp}(x) \mid x \in \mathcal{X}\}\right) \setminus B$.
2. $\mathtt{supp}\left(\bigvee^{\#B}\mathcal{X}\right) \subseteq \left(\bigcup\{\mathtt{supp}(x) \mid x \in \mathcal{X}\}\right) \setminus B$.

Demonstração. Mostraremos apenas o primeiro item, pois o segundo é inteiramente análogo.

Afirmação 4.2. $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$ é finitamente suportado por $\mathtt{supp}(\mathcal{X}) \cup B$.

Realmente, se $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(\mathcal{X}) \cup B)$ então $\pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(\mathcal{X}))$ e $\pi \in \mathtt{fix}(B)$. Logo,

$$\begin{aligned}\pi \cdot \left(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\right) &= \bigwedge^{\#\pi(B)}\pi\cdot\mathcal{X}, && \text{pelo princípio da equivariância (Teo. 3.4)}\\ &= \bigwedge^{\#B}\mathcal{X}, && \text{pois } \pi \in \mathtt{fix}(\mathtt{supp}(\mathcal{X})) \text{ e } \pi \in \mathtt{fix}(B)\end{aligned}$$

e isso estabelece a afimração.

Pela minimalidade de $\mathtt{supp}(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X})$ decorre que

$$\begin{aligned}\mathtt{supp}\left(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\right) &\subseteq \mathtt{supp}(\mathcal{X}) \cup B,\\ &= \left(\bigcup\{\mathtt{supp}(x) \mid x \in \mathcal{X}\}\right) \cup B, && \text{pelo Teo 3.3, pois } \mathcal{X} \text{ é finito.}\end{aligned}$$

O resultado segue visto que, por definição, $B \cap \mathtt{supp}(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}) = \emptyset$. □

Na sequência, sejam $(\mathcal{L},\cdot,\leq)$ um c.n.p.o arbitrário e subconjuntos finitos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e $B \subseteq \mathbb{A}$.

4.1.1 #Cotas e o Conjunto Vazio

1. Se $B = \emptyset$ então a condição $B \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset$ se torna supérflua já que neste caso ela é sempre válida. Então, nestas circunstâncias, o conjunto das $\emptyset$#cotas inferiores $\mathcal{X}_\emptyset$ e o conjunto das $\emptyset$#cotas superiores $\mathcal{X}^\emptyset$ coincidirão, respectivamente, com o conjunto das cotas inferiores de $\mathcal{X}$ e o conjunto das cotas superiores de $\mathcal{X}$. Assim, escrevemos

$$\bigwedge^{\#\emptyset}\mathcal{X} = \bigwedge\mathcal{X} \quad \text{e} \quad \bigvee^{\#\emptyset}\mathcal{X} = \bigvee\mathcal{X}.$$

Ou seja, o $\emptyset$#ínfimo e o $\emptyset$#supremo de $\mathcal{X}$ são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de $\mathcal{X}$.

2. Se $B = \emptyset$ e $\mathcal{X} = \emptyset$ então pelo item anterior temos que

$$\bigwedge^{\#\emptyset}\emptyset = \bigwedge\emptyset = \top \quad \text{e} \quad \bigvee^{\#\emptyset}\emptyset = \bigvee\emptyset = \bot.$$

3. No caso em que $B = \emptyset$ e $\mathcal{X} = \{x, y\}$ temos que

$$\bigwedge^{\#\emptyset}\{x, y\} = x \wedge y \quad \text{e} \quad \bigvee^{\#\emptyset}\{x, y\} = x \vee y.$$

Observação 4.2. Se $B \neq \emptyset$ e $\mathcal{X} = \emptyset$ então *não* necessariamente valem

$$\bigwedge^{\#B}\emptyset = \bigwedge^{\#\emptyset}\emptyset \quad \text{e} \quad \bigvee^{\#B}\emptyset = \bigvee^{\#\emptyset}\emptyset.$$

Por exemplo, o conjunto das B#cotas inferiores de $\emptyset$ é

$$\begin{aligned}\emptyset_B &= \{x' \in \mathcal{L} \mid B \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset \text{ e } x' \leq x \text{ para todo } x \in \emptyset\} \\ &= \{x' \in \mathcal{L} \mid B \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset\}.\end{aligned}$$

enquanto que o conjunto das $\emptyset$#cotas inferiores de $\emptyset$ é

$$\emptyset_\emptyset = \{x' \in \mathcal{L} \mid \emptyset \cap \mathrm{supp}(x') = \emptyset \text{ e } x' \leq x \text{ para todo } x \in \emptyset\} = \mathcal{L}.$$

4.1.2 #Cotas e Quantificadores

Na sequência as notações $\mathsf{\forall}$ e $\mathsf{\exists}$ se justificam pelo fato de que pretendemos utilizar $\mathsf{\forall} a.x$ e $\mathsf{\exists} a.x$ para modelar o quantificador universal $\forall a.\phi$ e o quantificador existencial $\exists a.\phi$, assim como $x \curlywedge y$ modela a conjunção lógica $\phi \wedge \psi$.

Considere o caso em que $B = \{a\}$ e $\mathcal{X} = \{x\}$.

1. $\bigwedge^{\#\{a\}}\{x\}$ é chamado de *a#ínfimo* de $\{x\}$ e o denotamos por $\mathsf{\forall} a.x$. Por definição,

$$\mathsf{\forall} a.x \text{ é o maior elemento de } \{x' \in \mathcal{L} \mid a\#x' \text{ e } x' \leq x\}, \tag{4.5}$$

2. Dualmente, $\bigvee^{\#\{a\}}\{x\}$ é chamado de *a#supremo* de x e o denotamos por $\mathsf{\exists} a.x$. Por definição,

$$\mathsf{\exists} a.x \text{ é o menor elemento de } \{x' \in \mathcal{L} \mid a\#x' \text{ e } x \leq x'\}, \tag{4.6}$$

Observação 4.3. Lembre-se que $a\#x$ pode ser interpretado como uma generalização da noção sintática “não pertence as variáveis livres”. Como, por definição, $a\#\mathsf{\forall} a.x$ e $a\#\mathsf{\exists} a.x$, então isso corrobora com o fato de que a ocorrência de a na quantificação $\forall a.\phi$ e $\exists a.\phi$ não é livre. Isso motiva a condição $a\#x'$ nas a#cotas inferiores e superiores.

4.2 Reticulados Nominais

A Definição 4.3 generaliza de forma natural a Definição 2.2 de semireticulados.

Definição 4.3. Um CNPO $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ é

1. um $\curlywedge$-*semireticulado nominal* se para todo subconjunto finito $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e todo subconjunto finito $B \subseteq \mathbb{A}$ existe um B#ínfimo $\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}$.

2. um $\curlyvee$-*semireticulado nominal* se para todo subconjunto finito $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e todo subconjunto finito $B \subseteq \mathbb{A}$ existe um B#supremo $\bigvee^{\#B}\mathcal{X}$.

3. um *reticulado nominal* se $\mathcal{L}$ for um $\curlywedge$-semireticulado nominal e um $\curlyvee$-semireticulado nominal.

Repare que um reticulado nominal é, em particular, um reticulado ordinário uma vez que todo subconjunto não-vazio $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ possui $\emptyset$#ínfimos e $\emptyset$#supremos, os quais são os ínfimos e supremos usuais. Não apenas isso, note ainda que, por definição, todo reticulado nominal é limitado, já que para $\mathcal{X} = \emptyset$ e $B = \emptyset$ existem o $\emptyset$#ínfimo e o $\emptyset$#supremo de $\emptyset$, ou seja, o ínfimo e o supremo de $\emptyset$.

A proposição a seguir estabelece uma caracterização para os semireticulados nominais.

Proposição 4.1 ([9], Proposition 4.1.5)**.** Seja $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um CNPO. Então

1. $\mathcal{L}$ é um $\wedge$-semireticulado nominal se, e somente se,
   - $\top$ existe;
   - $x \wedge y$ existe para todos $x, y \in \mathcal{L}$;
   - $\forall a.x$ existe para todos $a \in \mathbb{A}$ e $x \in \mathcal{L}$.
2. Similarmente, $\mathcal{L}$ é $\vee$-semireticulado nominal se, e somente se,
   - $\bot$ existe;
   - $x \vee y$ existe para todos $x, y \in \mathcal{L}$;
   - $\exists a.x$ existe para todos $a \in \mathbb{A}$ e $x \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Mostraremos apenas o primeiro item, pois o segundo é análogo.

Se $\mathcal{L}$ for um $\wedge$-semireticulado nominal, então o resultado segue trivialmente pela própria definição de $\wedge$-semireticulado nominal.

Reciprocamente, suponha que $\top, x \wedge y$ e $\forall a.x$ existam para todos $a \in \mathbb{A}$ e $x, y \in \mathcal{L}$. Sejam $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathcal{L}$ e $B = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{A}$ subconjuntos finitos. Precisamos mostrar que o conjunto de B#cotas inferiores de $\mathcal{X}$ tem um maior elemento.

Afirmação 4.3. $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$ é a maior B#cota inferior de $\mathcal{X}$.

Note que $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ existe pois $x \wedge y$ existe para todos $x, y \in \mathcal{L}$ (ver Lema 2.1). Assim, para a_n temos que $\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)$ existe devido a existência de $\forall a.x$ para todos $x \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathbb{A}$. Pelo mesmo motivo, $\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))$ existe. Procedendo dessa maneira, temos que $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$ existe em $\mathcal{L}$.

Agora vamos mostrar que $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$ é uma B#cota inferior de $\mathcal{X}$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))) &\leq \forall a_2.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))) \\
&\vdots \\
&\leq \forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \\
&\leq x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \\
&\leq x_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}
\end{aligned}$$

Disso, concluímos que $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$ é uma cota inferior de $\mathcal{X}$. Resta mostrar que

$$B \cap \mathtt{supp}(\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))) = \emptyset$$

Com efeito, isso é uma consequência do Lema 4.2 pois

$$\begin{aligned}
\mathtt{supp}(\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))) &\subseteq \mathtt{supp}(\forall a_2(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))) \setminus \{a_1\} \\
&\vdots \\
&\subseteq \mathtt{supp}(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)) \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \\
&\subseteq \mathtt{supp}((x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)) \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \\
&\subseteq \mathtt{supp}((x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)) \setminus B
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$ é uma B#cota inferior de $\mathcal{X}$. Só falta então mostrar que esta é a maior delas.

Seja $x' \in \mathcal{L}$ outra B#cota inferior de $\mathcal{X}$. Então $B \cap \mathtt{supp}(x') = \emptyset$ e $x' \leq x_i$ para todo $1 \leq i \leq m$. Desse modo, temos que $x' \leq x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ e daí,

$$\begin{aligned}
& x' \leq \forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) && \text{pois } a_n \# x' \\
\Rightarrow\ & x' \leq \forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)) && \text{pois } a_{n-1} \# x' \\
& \vdots \\
\Rightarrow\ & x' \leq \forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))) && \text{pois } a_1 \# x'
\end{aligned}$$

Com isso mostramos a maximalidade de $\forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m))))$, concluindo assim que este é o B#ínfimo de $\mathcal{X}$. $\square$

Como consequência imediata da Proposição 4.1 temos que um CNPO $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ é um reticulado nominal se, e somente se, $\top, x \wedge y, \forall a.x, \bot, x \vee y, \exists a.x$ existem para todos $a \in \mathbb{A}$ e $x, y \in \mathcal{L}$.

Exemplo 4.5. No Exemplo 4.2 vimos que $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ possui a#ínfimos para $\{B\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$. Não é difícil ver que $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ também possui ínfimos para $\{B, C\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$: basta tomar $B \wedge C = B \cap C$.

No entanto, $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ não possui ínfimo para $\emptyset \subseteq \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ pois $\top = \mathbb{A} \notin \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ e, pelo Exemplo 4.4, $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ não possui a#supremos para $\{X\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ se $a \in X$.

4.2.1 Propriedades

Comutatividade e Idempotência

Para $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$, a demonstração da Proposição 4.1 nos dá as seguintes igualdades:

$$\bigwedge^{\#\{a_1,\ldots,a_n\}}\{x_1,\ldots,x_m\} = \forall a_1.(\ldots(\forall a_{n-1}.(\forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)))) \tag{4.7}$$

$$\bigvee^{\#\{a_1,\ldots,a_n\}}\{x_1,\ldots,x_m\} = \exists a_1.(\ldots(\exists a_{n-1}.(\exists a_n.(x_1 \vee \ldots \vee x_m)))) \tag{4.8}$$

Note que o lado esquerdo não depende da forma como os elementos x_i e os átomos a_i são listados. Assim, além das propriedades de idempotência, comutatividade, associatividade e absorção para $\wedge$ e $\vee$ continuarem válidas, também teremos propriedades de idempotência e comutatividade para $\forall$ e $\exists$:

$$\text{(Idem)} \quad \begin{cases} \forall a.(\forall a.x) = \forall a.x \\ \exists a.(\exists a.x) = \exists a.x \end{cases}$$

$$\text{(Com)} \quad \begin{cases} \forall a.(\forall b.x) = \forall b.(\forall a.x) \\ \exists a.(\exists b.x) = \exists b.(\exists a.x) \end{cases}$$

A idempotência e a comutatividade de $\forall$ e $\exists$ seguem diretamente dos seguintes lemas:

Lema 4.3. Sejam $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um reticulado nominal, $x \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathbb{A}$. Se $a\#x$ então $\forall a.x = x$ e $\exists a.x = x$.

Demonstração. Por definição, $\forall a.x \leq x$. Como $a\#x$ e $x \leq x$, segue que x é uma $a\#$cota inferior de x. Logo, $x \leq \forall a.x$ pela maximalidade de $\forall a.x$. O caso $\exists$ é análogo. □

Lema 4.4 ([17] - Lemma 4.1.6)**.** Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado nominal, $x \in \mathcal{L}$ e $a, b \in \mathbb{A}$. Então

a) $\forall a.(\forall b.x) = \forall b.(\forall a.x)$.

b) $\exists a.(\exists b.x) = \exists b.(\exists a.x)$.

Demonstração. Mostraremos apenas o primeiro item, pois o caso $\exists$ é similar. De fato, por definição (ver (4.5)) temos que

i) $a\#\forall a.(\forall b.x)$ e $\forall a.(\forall b.x) \leq \forall b.x$,

ii) $b\#\forall b.x$ e $\forall b.x \leq x$.

Assim, temos que $a\#\forall a.(\forall b.x)$ e $\forall a.(\forall b.x) \leq x$. Isso significa que $\forall a.(\forall b.x)$ é uma $a\#$cota inferior de x. Pela maximalidade de $\forall a.x$, decorre

$$\forall a.(\forall b.x) \leq \forall a.x. \tag{4.9}$$

Como $a\#\forall a.(\forall b.x)$ e $b\#\forall b.x$, segue do Lema 4.2 que $b\#\forall a.(\forall b.x)$. Logo, de (4.9) resulta que $\forall a.(\forall b.x)$ é uma $b\#$cota inferior de $\forall a.x$ e, portanto, pela maximalidade de $\forall b.(\forall a.x)$ devemos ter que $\forall a.(\forall b.x) \leq \forall b.(\forall a.x)$. Analogamente mostra-se que $\forall b.(\forall a.x) \leq \forall a.(\forall b.x)$ e o resultado segue. □

Notação 4.1. Por conta da comutatividade de $\forall$ e $\exists$, para $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ adotamos a seguinte notação sem parênteses:

- $\bigwedge^{\#B} \mathcal{X} \triangleq \forall a_1 \ldots \forall a_n.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)$.
- $\bigvee^{\#B} \mathcal{X} \triangleq \exists a_1 \ldots \exists a_n.(x_1 \vee \ldots \vee x_m)$.

Distributividade

A Definição 4.4 estabelece a distributividade em reticulados nominais, generalizando a noção usual de distributividade (Definição 2.3): $\vee$ se distribui sobre $\wedge$ e também sobre $\forall a$, sujeito a uma condição lateral de *frescor*.

Definição 4.4. Seja $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um reticulado nominal. Dizemos que $\mathcal{L}$ é *distributivo* quando para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$:

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{D}\wedge) & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \text{ e} \\ (\mathbf{D}\forall) & a\#x \Rightarrow x \vee (\forall a.y) = \forall a.(x \vee y). \end{array}$$

Como vimos no Capítulo 2, o Lema 2.2 garante a equivalência da identidade **(D∧)** com a sua versão dual **(D∨)**. A identidade (**D**∀) também possui uma versão dual:

$$(\mathbf{D}\exists) \quad a\#x \Rightarrow x \wedge (\exists a.y) = \exists a.(x \wedge y).$$

Em geral (**D**∀) e (**D**∃) não são equivalentes. Contudo, na presença de complementação, as duas são equivalentes no sentido de que se (**D**∀) é satisfeita, então (**D**∃) também é satisfeita, e vice-versa.

Complementação

Definição 4.5. Seja $\mathcal{L}$ um reticulado nominal, um elemento $x' \in \mathcal{L}$ é um *complemento* de um elemento $x \in \mathcal{L}$ se

$$x \wedge x' = \bot \quad \text{e} \quad x \vee x' = \top.$$

Se todo elemento $x \in \mathcal{L}$ possuir um complemento então dizemos que $\mathcal{L}$ é *complementado* e denotamos o complemento de x por $\neg x$.

A definição de complementação em reticulados nominais é a mesma da Definição 2.4 com as devidas mudanças feitas. Consequentemente, em um reticulado nominal distributivo, os resultados do Lema 2.4 se mantém válidos.

O Lema 4.5 determina que o suporte do complemento $\neg x$ é igual ao suporte de x:

Lema 4.5 ([9], Corollary 4.1.8)**.** Suponha que $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ seja um reticulado nominal distributivo complementado. Então $\mathtt{supp}(\neg x) = \mathtt{supp}(x)$ para todo $x \in \mathcal{L}$.

Demonstração. Como complementos são únicos, podemos considerar $\neg$ como uma função $\neg : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que leva cada elemento $x \in \mathcal{L}$ em seu complemento $\neg x$. Assim, segue da unicidade dos complementos e do fato de que $\neg\neg x = x$ que a função $\neg$ é sua própria inversa. Em particular $\neg$ é injetiva e, portanto, pela conservação de suporte (Teo. 3.5), $\mathtt{supp}(\neg x) = \mathtt{supp}(x)$. $\square$

Lema 4.6. Suponha que $\mathcal{L}$ seja um reticulado nominal distributivo complementado e sejam $x \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathbb{A}$. Então vale que $\exists a.x = \neg\forall a.\neg x$.

Demonstração. Por definição,

i) $a \# \forall a.\neg x$ e $\forall a.\neg x \leq \neg x$,

ii) $a \# \exists a.x$ e $x \leq \exists a.x$.

Note que

$$\begin{aligned} \forall a.\neg x \leq \neg x \Rightarrow \neg\neg x \leq \neg\forall a.\neg x, &\quad \text{pelo item 3 do Lema 2.4} \\ \Rightarrow x \leq \neg\forall a.\neg x, &\quad \text{pois } \neg\neg x = x. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5, $\mathtt{supp}(\neg\forall a.\neg x) = \mathtt{supp}(\forall a.\neg x)$. Da mesma forma, $x \leq \exists a.x$ implica que $\neg\exists a.x \leq \neg x$ e também $\mathtt{supp}(\neg\exists a.x) = \mathtt{supp}(\exists a.x)$.

Então $a \# \neg\forall a.\neg x$ e $a \# \neg\exists a.x$. De $x \leq \neg\forall a.\neg x$ e $\neg\exists a.x \leq \neg x$, segue que

- $\neg\forall a.\neg x$ é uma $a\#$cota superior de x,
- $\neg\exists a.x$ é uma $a\#$cota inferior de $\neg x$.

Da maximalidade de $\forall a.\neg x$ segue que $\neg\exists a.x \leq \forall a.\neg x$. Já pela minimalidade de $\exists a.x$ segue que $\exists a.x \leq \neg\forall a.\neg x$, do que decorre

$$\begin{aligned} \exists a.x \leq \neg\forall a.\neg x &\Rightarrow \neg\neg\forall a.\neg x \leq \neg\exists a.x, && \text{pelo item 3 do Lema 2.4} \\ &\Rightarrow \forall a.\neg x \leq \neg\exists a.x, && \text{pois } \neg\neg\forall a.\neg x = \forall a.\neg x. \end{aligned}$$

Portanto, $\neg\exists a.x = \forall a.\neg x$. Daí,

$$\begin{aligned} \neg\exists a.x = \forall a.\neg x &\Rightarrow \neg\neg\exists a.x = \neg\forall a.\neg x, && \text{aplicando } \neg \text{ em ambos os lados} \\ &\Rightarrow \exists a.x = \neg\forall a.\neg x, && \text{pois } \neg\neg\exists a.x = \exists a.x. \end{aligned}$$

□

Observação 4.4. Em vista do Lema 4.6, da igualdade (4.7) e das identidades de De Morgan, para subconjuntos finitos $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e $B \subseteq \mathbb{A}$ segue a igualdade:

$$\bigwedge\nolimits^{\#B} \mathcal{X} = \neg \bigvee\nolimits^{\#B} \neg\mathcal{X}, \tag{4.10}$$

onde $\neg\mathcal{X} = \{\neg x \mid x \in \mathcal{X}\}$. Do mesmo jeito se obtém a igualdade:

$$\bigvee\nolimits^{\#B} \mathcal{X} = \neg \bigwedge\nolimits^{\#B} \neg\mathcal{X}. \tag{4.11}$$

Agora temos o necessário para provar a equivalência entre $(\mathbf{D}\forall)$ e $(\mathbf{D}\exists)$.

Lema 4.7. Suponha que $\mathcal{L}$ seja um reticulado nominal distributivo complementado. Então $(\mathbf{D}\forall)$ e $(\mathbf{D}\exists)$ são equivalentes.

Demonstração. Suponha que $(\mathbf{D}\forall)$ vale em $\mathcal{L}$ e tome um elemento $x \in \mathcal{L}$. Seja $a \in \mathbb{A}$ tal que $a\#x$. Então para todo $y \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} x \wedge (\exists a.y) &= x \wedge (\neg\forall a.\neg y), && \text{pelo Lema 4.6} \\ &= \neg\neg x \wedge (\neg\forall a.\neg y), && \text{pois } \neg\neg x = x \\ &= \neg(\neg x \vee (\forall a.\neg y)), && \text{por De Morgan} \\ &= \neg\forall a.(\neg x \vee \neg y), && \text{por } (\mathbf{D}\forall) \\ &= \neg\forall a.\neg(x \wedge y), && \text{De Morgan novamente} \\ &= \exists a.(x \wedge y), && \text{pelo Lema 4.6 novamente.} \end{aligned}$$

A volta é análoga. □

Finalizamos a seção com alguns lemas técnicos. O próximo lema pode ser interpretado como uma α-equivalência para os $a\#$ínfimos e $a\#$supremos:

Lema 4.8 ([9], Lemma 4.1.9)**.** Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado nominal, $x \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathbb{A}$. Se $b\#x$ então

i) $\forall a.x = \forall b.(b\ a)\cdot x$.

ii) $\exists a.x = \exists b.(b\ a)\cdot x$.

Demonstração. Por definição, $a\#\forall a.x$. Pelo Lema 4.2, $\mathtt{supp}(\forall a.x) \subseteq \mathtt{supp}(x)\setminus\{a\}$. Então $b\#\forall a.x$ visto que $b\#x$ por hipótese. Daí,

$$\begin{aligned}
\forall a.x &= (b\ a)\cdot\forall a.x, && \text{pelo Corolário 3.1(1), pois } a,b\#\forall a.x\\
&= \forall (b\ a)(b).(b\ a)\cdot x, && \text{pelo Teorema 3.2)}\\
&= \forall b.(b\ a)\cdot x.
\end{aligned}$$

O caso $\exists a.x$ é dual. □

As identidades (**D**$\forall$) e (**D**$\exists$) nos permitem, com uma condição de *frescor*, distribuir $\forall$ em relação a $\vee$ e $\exists$ em relação a $\wedge$, respectivamente. Na sequência, o Lema 4.9 mostra que $\forall$ se distribui em relação $\wedge$ e $\exists$ se distribui em relação a $\vee$, sem qualquer condição lateral de *frescor*.

Lema 4.9 ([17] - Lemma 4.1.5)**.** Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado nominal, $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathbb{A}$. Então

1. $\forall a.(x_1\wedge\ldots\wedge x_n) = (\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$.
2. $\exists a.(x_1\vee\ldots\vee x_n) = (\exists a.x_1)\vee\ldots\vee(\exists a.x_n)$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o primeiro item pois o segundo é análogo. Com efeito, para todo $i = 1,\ldots,n$, segue da definição que

i) $a\#\forall a.x_i$ e $\forall a.x_i \leq x_i$

ii) $(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n) \leq \forall a.x_i$.

Considerando $(-)\wedge\ldots\wedge(-)$ como uma função $\mathcal{L}^n \to \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
\mathtt{supp}((\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)) &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(\forall a.x_i), && \text{pelo Teorema 3.5}\\
&\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\mathtt{supp}(x_i)\setminus\{a\}), && \text{pelo Lema 4.2}\\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathtt{supp}(x_i)\right)\setminus\{a\}.
\end{aligned}$$

Então $a\#(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$. Como para todo $i=1,\ldots,n$

$$(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)\leq\forall a.x_i \quad \text{e} \quad \forall a.x_i\leq x_i,$$

segue que

$$(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)\leq x_i, \text{ para todo } i=1,\ldots,n.$$

Juntando com o fato de que $a\#(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$ inferimos que $(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$ é uma a#cota inferior de $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Vamos mostrar que $(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$ é a maior a#cota inferior de $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Seja $z\in\mathcal{L}$ uma a#cota inferior de $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Fixe $j\in\{1,\ldots,n\}$. Por definição, $a\#z$ e $z\leq x_j$. Disso decorre que z é uma a#cota inferior de x_j. Logo, $z\leq\forall a.x_j$. Como j é arbitrário, segue que $z\leq\forall a.x_i$ para todo $i=1,\ldots,n$. Portanto, z é uma cota inferior de $\{\forall a.x_1,\ldots,\forall a.x_n\}$ donde concluímos que $z\leq(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$, donde concluímos que $(\forall a.x_1)\wedge\ldots\wedge(\forall a.x_n)$ é a maior a#cota inferior de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ como queríamos.

Sendo assim, o resultado segue da unicidade de $\forall a.(x_1\wedge\ldots\wedge x_n)$, pois este é, por definição, a maior a#cota inferior de $\{x_1,\ldots,x_n\}$. $\square$

Lema 4.10 ([17] - Lemma 4.1.7)**.** Sejam $\mathcal{L}$ é um reticulado nominal e $x,x'\in\mathcal{L}$. Se $x\leq x'$, então $\forall a.x\leq\forall a.x'$ e $\exists a.x\leq\exists a.x'$.

Demonstração. Suponha $x\leq x'$. Por definição, $a\#\forall a.x$ e $\forall a.x\leq x$. Então $\forall a.x\leq x'$ pois $x\leq x'$. Assim, $\forall a.x$ é uma a#cota inferior de x'. Logo, pela maximalidade de $\forall a.x'$ devemos ter que $\forall a.x\leq\forall a.x'$. O caso $\exists$ é análogo. $\square$

Observação 4.5. Vamos nos concentrar nos #ínfimos de agora em diante visto que os resultados para #supremos são análogos e na presença da complementação estes podem ser obtidos diretamente dos #ínfimos.

Capítulo 5

Modelo Nominal para $\mathbb{L}_1$

Na Seção 2.1 do Capítulo 2 definimos conjuntos parcialmente ordenados (CPOs) e reticulados distributivos para então definir álgebras booleanas como um tipo específico de reticulado distributivo. No Capítulo 4 estendemos nominalmente as noções da teoria de reticulados para, no presente capítulo, definirmos uma estrutura algébrica nominal baseada em reticulados para interpretar a lógica $\mathbb{L}_1$. O capítulo está separado da seguinte forma:

Na Seção 5.1 relacionaremos os conceitos de σ-álgebra estudados na Seção 3.11 com os conceitos de reticulados nominais do capítulo anterior, definindo assim a noção de *estrutura de σ-álgebra compatível*. Com isso estabelecido, provaremos algumas propriedades importantes decorrentes dessas definições. Na Seção 5.2 definimos o elemento $(a =^{\mathcal{L}} b)$ em um reticulado $\mathcal{L}$, chamado de *igualdade*. Esse conceito será usado para interpretar a igualdade $=$ da lógica $\mathbb{L}_1$.

Na Seção 5.3 definiremos a estrutura chamada *álgebra* $\mathbb{L}_1$ e será esta estrutura que usaremos para interpretar a lógica $\mathbb{L}_1$. Uma álgebra $\mathbb{L}_1$ é uma estrutura algébrica booleana que nos dá uma interpretação "*absoluta*" de $\mathbb{L}_1$. Uma interpretação é dita "*absoluta*" para um sistema formal que envolve variáveis e ligadores quando as variáveis forem mapeadas para entidades fixadas na semântica. Ou seja, uma interpretação é "*absoluta*" quando a semântica de uma variável a é uma cópia dela mesma na estrutura do modelo nominal. Em semânticas dessa natureza, as noções de variáveis, substituição e quantificação também farão parte do modelo assim como conjunção, disjunção e negação fazem parte de uma álgebra booleana ordinária. Assim, álgebras $\mathbb{L}_1$ generalizam álgebras booleanas usuais. Finalizaremos o capítulo com a Seção 5.4, onde interpretaremos a lógica $\mathbb{L}_1$ em uma álgebra $\mathbb{L}_1$ e provaremos a sua correção, mais precisamente mostramos que se $\Phi \vdash \Psi$ for um sequente derivável em $\mathbb{L}_1$, então a sua interpretação $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$ é verdadeira, o que significa que $\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}$, onde $\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}$ é o ínfimo do conjunto $\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}$ e $\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}$ é o supremo do conjunto $\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}$.

As referências ainda serão os artigos [16] e [9].

5.1 Estrutura de σ-Álgebra Compatível

No Capítulo 3 determinamos como incorporar a noção de substituição em conjuntos nominais. Agora iremos conectar essa ideia com reticulados nominais e ver como a σ-ação interage com uma ordem $\leq$ equivariante, #ínfimos, #supremos e complementos.

Definição 5.1. Sejam $(\mathcal{L},\cdot,\leq)$ um reticulado nominal e $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra de termos. Dizemos que $\mathcal{L}$ tem uma *estrutura de σ-álgebra* sobre $\mathcal{U}$ ou uma *σ-estrutura* quando $\mathcal{L}$ for uma σ-álgebra sobre $\mathcal{U}$. Nestas condições,

- A estrutura de σ-álgebra é dita *monótona* quando para todos $x,y\in\mathcal{L}$ e $u\in\mathcal{U}$:

$$x\leq y \text{ se, e somente se, } x[a\mapsto u]\leq y[a\mapsto u].$$

- Se, além disso, $\mathcal{L}$ for um reticulado distributivo, então a estrutura de σ-álgebra é chamada de *compatível* quando para todos $a\in\mathbb{A},u\in\mathcal{U},x\in\mathcal{L}$ e subconjuntos finitos $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L},B\subset\mathbb{A}$, as seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\begin{array}{ll}
(\sigma\wedge) & \left(\bigwedge^{\#B}\mathcal{X}\right)[a\mapsto u]=\bigwedge^{\#B}\{x[a\mapsto u]\mid x\in\mathcal{X}\},\ \text{ se } B\cap(\mathrm{supp}(u)\cup\{a\})=\emptyset.\\
(\sigma\vee) & \left(\bigvee^{\#B}\mathcal{X}\right)[a\mapsto u]=\bigvee^{\#B}\{x[a\mapsto u]\mid x\in\mathcal{X}\},\ \text{ se } B\cap(\mathrm{supp}(u)\cup\{a\})=\emptyset.\\
(\sigma\neg) & (\neg x)[a\mapsto u]=\neg(x[a\mapsto u]).
\end{array}$$

Note que poderíamos definir a compatibilidade de uma estrutura de σ-álgebra usando apenas a primeira e a terceira igualdade, uma vez que $(\sigma\vee)$ pode ser obtido de $(\sigma\wedge)$ e $(\sigma\neg)$:

$$\begin{aligned}
\left(\bigvee^{\#B}\mathcal{X}\right)[a\mapsto u]&=\left(\neg\bigwedge^{\#B}\{\neg x\mid x\in\mathcal{X}\}\right)[a\mapsto u], && \text{por (4.11)}\\
&=\neg\left(\left(\bigwedge^{\#B}\{\neg x\mid x\in\mathcal{X}\}\right)[a\mapsto u]\right), && \text{por } (\sigma\neg)\\
&=\neg\bigwedge^{\#B}\{(\neg x)[a\mapsto u]\mid x\in\mathcal{X}\}, && \text{por } (\sigma\wedge)\\
&=\neg\bigwedge^{\#B}\{\neg(x[a\mapsto u])\mid x\in\mathcal{X}\}, && \text{por } (\sigma\neg)\\
&=\bigvee^{\#B}\{x[a\mapsto u]\mid x\in\mathcal{X}\}.
\end{aligned}$$

O próximo lema estabelece algumas propriedades da compatibilidade de uma estrutura de σ-álgebra.

Lema 5.1 ([9], Lemma 4.2.3)**.** Sejam $(\mathcal{L},\cdot,\leq)$ um reticulado nominal distributivo com uma σ-estrutura sobre $\mathcal{U}$ compatível, $x,y\in\mathcal{L}$ e $u\in\mathcal{U}$. Então:

1. $(x \wedge y)[a \mapsto u] = (x[a \mapsto y]) \wedge (y[a \mapsto u])$ e $(x \vee y)[a \mapsto u] = (x[a \mapsto y]) \vee (y[a \mapsto u])$.

2. Se $x \leq y$ então $x[a \mapsto u] \leq y[a \mapsto u]$, isto é, a σ-estrutura é monótona.

3. Se $b\#u$ então $(\forall b.x)[a \mapsto u] = \forall b.(x[a \mapsto u])$ e $(\exists b.x)[a \mapsto u] = \exists b.(x[a \mapsto u])$.

4. $\top[a \mapsto u] = \top$ e $\bot[a \mapsto u] = \bot$.

Demonstração. Provaremos apenas os casos envolvendo #ínfimos, já que os casos para #supremos são análogos.

1. Basta tomar $B = \emptyset$ (logo $B \cap (\mathtt{supp}(u) \cup \{a\}) = \emptyset$) e $\mathcal{X} = \{x, y\}$ e aplicar **($\sigma\wedge$)**.

2. Como $x \leq y$, segue por (2.2) que $x \wedge y = x$. Daí, pelo item 1 deste lema temos que

$$x[a \mapsto u] = (x \wedge y)[a \mapsto u] = (x[a \mapsto u]) \wedge (y[a \mapsto u]).$$

   Portanto, por (2.2) segue que $x[a \mapsto u] \leq y[a \mapsto u]$.

3. Diretamente de **($\sigma\wedge$)** tomando $B = \{b\}$ (logo $B \cap (\mathtt{supp}(u) \cup \{a\}) = \emptyset$) e $\mathcal{X} = \{x\}$.

4. De fato,

$$\begin{aligned}
\top[a \mapsto u] &= (x \vee \neg x)[a \mapsto u] \\
&= (x[a \mapsto u]) \vee ((\neg x)[a \mapsto u]), && \text{pelo item 1 deste lema} \\
&= (x[a \mapsto u]) \vee (\neg(x[a \mapsto u])), && \text{por } (\boldsymbol{\sigma\neg}) \\
&= \top.
\end{aligned}$$

□

O seguinte lema técnico ilustra a estrutura extra que um reticulado nominal possui:

Lema 5.2 ([9], Lemma 4.2.4)**.** Seja $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um reticulado nominal com uma σ-estrutura sobre $\mathcal{U}$. Então:

1. Se $z \leq x$ e $a\#z$ então $z \leq \forall a.x$.

2. Se a σ-estrutura for monótona, $z \leq x$ e $a\#z$, então z é uma cota inferior do conjunto $\{x[a \mapsto u] \mid u \in \mathcal{U}\}$. Em particular,

$$\forall a.x \leq x[a \mapsto u]$$

   para todo $x \in \mathcal{L}$ e $u \in \mathcal{U}$.

Demonstração. 1. Segue diretamente da definição de maximalidade do a#ínfimo de x $\forall a.x$, ver (4.5).

2. Dados $x \in \mathcal{L}$ e $u \in \mathcal{U}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned} z \leq x \Rightarrow z[a \mapsto u] &\leq x[a \mapsto u], && \text{pela monotonicidade da } \sigma\text{-estrutura} \\ \Rightarrow z &\leq x[a \mapsto u] && \text{por } (\sigma\#) \text{ pois } a\#z. \end{aligned}$$

Agora, observe que por definição $a\#\forall a.x$ e $\forall a.x \leq x$. Aplicando o que acabamos de demonstrar para $z = \forall a.x$, obtemos que $\forall a.x \leq x[a \mapsto u]$ para todo $u \in \mathcal{U}$ □

5.2 Igualdade

A seguir considere $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ um reticulado nominal com uma estrutura de σ-álgebra compatível sobre uma σ-álgebra de termos $\mathcal{U}$.

Definição 5.2. Uma *igualdade* é um elemento $(a =^{\mathcal{L}} b) \in \mathcal{L}$ com $\mathtt{supp}(a =^{\mathcal{L}} b) \subseteq \{a, b\}$ tal que:

1. Para todo $u \in \mathcal{U}$,
$$(a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto u] = \top.$$

2. Para todos $u, v \in \mathcal{U}$ e $z \in \mathcal{L}$,
$$(a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto u] = (a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto v].$$

Veja o esquema a seguir:

$$\begin{tikzcd}
(a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \arrow[dr] & & z[a \mapsto u] \arrow[dl] & (a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \arrow[dr] & & z[a \mapsto v] \arrow[dl] \\
& (a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto u] & = & & (a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto v] &
\end{tikzcd}$$

A notação do elemento igualdade como $(a =^{\mathcal{L}} b)$ é conveniente e motivada pelo futura interpretação da igualdade em $\mathcal{L}_1$, tal elemento poderia ter sido denotado como $x \in \mathcal{L}$ tal que $\mathtt{supp}(x) = \{a, b\}$. A escolha de a e b na Definição 5.2 é arbitrária. Estamos tratando sobre *uma* igualdade, porém, se uma igualdade existir então ela é única:

Proposição 5.1 ([9], Proposition 4.3.3)**.** Se uma igualdade $a =^{\mathcal{L}} b$ existir em $\mathcal{L}$, então ela é única a menos da escolha de a e b.

Demonstração. Suponha que existam duas igualdades $a =_1^{\mathcal{L}} b$ e $a =_2^{\mathcal{L}} b$. Então tomando $z = (a =_2^{\mathcal{L}} b), u = a$ e $v = b$, segue que da Condição 1 da Definição 5.2 que

$$\begin{aligned} z[a \mapsto v, b \mapsto v] = \top \ &\Rightarrow \ z[a \mapsto b, b \mapsto b] = \top \\ &\Rightarrow \ z[a \mapsto b][b \mapsto b] = \top \\ &\overset{(\sigma\mathbf{id})}{\Rightarrow} \ z[a \mapsto b] = \top. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pela Condição 2 da Definição 5.2,

$$(a =_1^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto u] = (a =_1^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u, b \mapsto v] \wedge z[a \mapsto v].$$

Com $u = a$ e $v = b$ temos

$$(a =_1^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto a, b \mapsto b] \wedge z[a \mapsto a] = (a =_1^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto a, b \mapsto b] \wedge z[a \mapsto b].$$

Pelo axioma **(σid)**,

$$\begin{aligned} (a =_1^{\mathcal{L}} b) \wedge z = (a =_1^{\mathcal{L}} b) \wedge z[a \mapsto b] \ &\overset{(5.1)}{\Rightarrow} \ (a =_1^{\mathcal{L}} b) \wedge z = (a =_1^{\mathcal{L}} b) \wedge \top \\ &\overset{(2.3)}{\Rightarrow} \ (a =_1^{\mathcal{L}} b) \wedge z = (a =_1^{\mathcal{L}} b). \end{aligned}$$

Então, pela Observação (2.2) temos que $(a =_1^{\mathcal{L}} b) \leq z$. Mas $z = (a =_2^{\mathcal{L}} b)$ por hipótese. Logo, $(a =_1^{\mathcal{L}} b) \leq (a =_2^{\mathcal{L}} b)$.

Por um argumento análogo obtém-se $(a =_2^{\mathcal{L}} b) \leq (a =_1^{\mathcal{L}} b)$ e o resultado segue. $\square$

5.3 Álgebra $\mathbb{L}_1$

Finalmente temos as ferramentas necessárias para definir a estrutura algébrica nominal que usaremos para interpretar a lógica $\mathbb{L}_1$.

Definição 5.3. Uma *álgebra* $\mathbb{L}_1$ sobre uma σ-álgebra de termos $\mathcal{U}$ é um CNPO $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ com as seguintes propriedades:

- $\mathcal{L}$ é um reticulado nominal (Definição 4.1).
- $\mathcal{L}$ é distributivo (Definição 4.4).
- $\mathcal{L}$ é complementado (Definição 4.5).
- $\mathcal{L}$ tem uma estrutura de σ-álgebra compatível sobre $\mathcal{U}$ (Definição 5.1).

- $\mathcal{L}$ possui uma igualdade (Definição 5.2).

Como o nome sugere, a noção de álgebra $\mathbb{L}_1$ é uma especificação nominal abstrata do que é ser um modelo de $\mathbb{L}_1$. A conexão entre a Definição 5.3 e a lógica $\mathbb{L}_1$ é clara:

1. ser um *reticulado nominal* nos dá $\wedge, \vee, \forall, \exists$, que são versões algébricas nominais da conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), quantificação universal ($\forall$) e existencial ($\exists$);
2. ser *distributivo* nos garante que $\forall, \exists, \wedge$ e $\vee$ se distribuam assim como se espera que se distribuam os conectivos lógicos clássicos $\forall, \exists, \wedge$ e $\vee$;
3. ser *complementado* nos proporciona a complementação $\neg$, a qual é a versão algébrica nominal da negação $\neg$;
4. ter uma *σ-estrutura* nos fornece uma "ação de substituição", ou seja, nos dá meios de incorporar a noção de substituição na nossa estrutura; e
5. possuir uma *igualdade* nos dá a ferramenta para interpretar a igualdade $=$.

Observação 5.1. Não é fácil ver que a definição de uma álgebra $\mathbb{L}_1$ (Definição 5.3) *não* é apenas uma reafirmação direta dos axiomas da lógica de primeira ordem. Para entender isso, é preciso compreender que ao mesmo tempo que é útil pensar intuitivamente nos conceitos nominais de frescor "$a\#x$" e de σ-ação "$x[a \mapsto u]$" como, respectivamente, as generalizações das noções sintáticas de variáveis livres e substituição usuais, também temos que ter cuidado, pois isso cria a ideia de que estes conceitos nominais são sobre a sintaxe, visto que essas noções (variáveis livres e substituição) são propriedades que, normalmente, só são aplicáveis à sintaxe. Mas agora, os objetos x, a e u que estamos lidando e operando são abstratos e não precisam ser necessariamente sintaxe de termos e predicados.

5.4 Interpretação e Correção

Durante esta seção fixaremos $(\mathcal{L}, \cdot, \leq)$ como uma álgebra $\mathbb{L}_1$ sobre uma σ-álgebra de termos $\mathcal{U}$. Iremos estabelecer uma interpretação da lógica $\mathbb{L}_1$ sobre $\mathcal{L}$ e demonstrar a sua correção.

Definição 5.4. Uma *interpretação* $\mathcal{I}$ de uma assinatura Σ sobre $\mathcal{L}$ é uma designação tal que

- para cada símbolo de função $f \in \Sigma$ com aridade n está associado uma função equivariante $f^{\mathcal{I}} : \otimes^n \mathbb{A} \to \mathcal{U}$, e

- para cada símbolo de relação $P \in \Sigma$ com aridade n está associado uma função equivariante $P^{\mathfrak{I}} : \otimes^n \mathbb{A} \to \mathcal{L}$.

Observação 5.2. Sejam $f \in \Sigma$ um símbolo de função com aridade n. A função $f^{\mathfrak{I}}$ ser equivariante significa que

$$f^{\mathfrak{I}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)) = \pi \cdot f^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n), \text{ para toda } \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}.$$

Assim, para uma lista $a_1, \ldots, a_n$ de átomos distintos, as informações de que precisamos para calcular $f^{\mathfrak{I}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$ estão contidas em $f^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n)$. Em outras palavras, se soubermos calcular $f^{\mathfrak{I}}$ na lista de átomos $a_1, \ldots, a_n$, então saberemos calcular $f^{\mathfrak{I}}$ para qualquer outra lista de n átomos distintos. Claro, se tomarmos outra lista de átomos distintos, digamos $b_1, \ldots, b_n$, então para a permutação $\tau = (a_1\ b_1) \circ \ldots \circ (a_n\ b_n)$,

$$f^{\mathfrak{I}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathfrak{I}}(\tau(a_1), \ldots, \tau(a_n)) = \tau \cdot f^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n).$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para um símbolo de relação P.

Definição 5.5. Estendemos a interpretação $\mathfrak{I}$ da Definição 5.4 da seguinte forma:

- Para cada símbolo de função $f \in \Sigma$ de aridade n está associada uma função equivariante $f^{\mathfrak{I}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ dada por

$$f^{\mathfrak{I}}(u_1, \ldots, u_n) \triangleq f^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n)[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n].$$

- Para cada símbolo de relação $P \in \Sigma$ de aridade n está associada uma função equivariante $P^{\mathfrak{I}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{L}$ dada por

$$P^{\mathfrak{I}}(u_1, \ldots, u_n) \triangleq P^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n)[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n].$$

onde escolhemos $a_1, \ldots, a_n$ sendo átomos distintos e frescos em relação a todos os u_i's. Além disso, estendemos a igualdade $a =^{\mathcal{L}} b$ para uma função equivariante $\mathcal{U}^2 \to \mathcal{L}$ pondo

$$=^{\mathfrak{I}} (u_1, u_2) \triangleq (a =^{\mathcal{L}} b)[a \mapsto u_1, b \mapsto u_2].$$

Denotamos $=^{\mathfrak{I}} (u_1, u_2)$ pela notação $u_1 =^{\mathfrak{I}} u_2$.

A Definição 5.5 está bem-definida no sentido de que ela não depende da escolha dos átomos frescos $a_1, \ldots, a_n$ e a, b. De fato, sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ duas listas de n átomos distintos frescos em relação aos u_i's. Então

$$
\begin{aligned}
f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n) &\overset{\text{Def. 3.13}}{=} f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a_1 \mapsto u_1,\dots,a_n \mapsto u_n] \\
&= (\underbrace{((b_1\ a_1)\circ\dots\circ(b_n\ a_n))}_{\tau}\cdot f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n))[b_1 \mapsto u_1,\dots,b_n \mapsto u_n] \\
&\overset{\text{Cor. 3.2}}{=} (f^{\mathfrak{I}}(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n)))[b_1 \mapsto u_1,\dots,b_n \mapsto u_n] \\
&= f^{\mathfrak{I}}(b_1,\dots,b_n)[b_1 \mapsto u_1,\dots,b_n \mapsto u_n].
\end{aligned}
$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para $P^{\mathfrak{I}}$ e $=^{\mathfrak{I}}$.

Observação 5.3. As Condições 1 e 2 da Definição 5.2 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u =^{\mathfrak{I}} u = \top \quad \text{e} \quad (u =^{\mathfrak{I}} v) \wedge z[a \mapsto u] = (u =^{\mathfrak{I}} v) \wedge z[a \mapsto v].$$

A seguir, o Lema 5.3 estabelece como a σ-ação age sobre $f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)$, $P^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)$ e $u_1 =^{\mathcal{L}} u_2$.

Lema 5.3. Sejam $a \in \mathbb{A}$, $u_1,\dots,u_n, u \in \mathcal{U}$, $f \in \Sigma$ um símbolo de função e $P \in \Sigma$ um símbolo de relação, ambos com aridade n. Então

1. $f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)[a \mapsto u] = f^{\mathfrak{I}}(u_1[a \mapsto u],\dots,u_n[a \mapsto u])$.
2. $(u_1 =^{\mathcal{L}} u_2)[a \mapsto u] = (u_1[a \mapsto u] =^{\mathcal{L}} u_2[a \mapsto u])$.
3. $P^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)[a \mapsto u] = P^{\mathfrak{I}}(u_1[a \mapsto u],\dots,u_n[a \mapsto u])$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o item 1 pois os outros itens são análogos.

Por definição temos que

$$f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)[a \mapsto u] = f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a_1 \mapsto u_1]\dots[a_n \mapsto u_n][a \mapsto u],$$

onde somos livres para escolher $a_1,\dots,a_n$ frescos em relação u e u_i para todo $i = 1,\dots,n$ e de tal forma que nenhum dos a_i's seja o átomo a.

Usando o fato de que os a_j's são frescos em relação aos u_i's podemos aplicar o axioma $(\sigma\sigma)$ quantas vezes for preciso até obter

$$f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)[a \mapsto u] = f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a \mapsto u][a_1 \mapsto u_1[a \mapsto u]]\dots[a_n \mapsto u_n[a \mapsto u]] \quad (5.2)$$

A conservação de suporte (Teo. 3.5) nos dá que

$$\mathrm{supp}(f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)) \subseteq \{a_1,\dots,a_n\}.$$

Portanto, $a\#f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)$ pois $a \notin \{a_1,\dots,a_n\}$ devido a escolha feita. Assim, pelo axioma $(\sigma\#)$, obtemos que

$$f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a \mapsto u] = f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n) \tag{5.3}$$

do que resulta

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{I}}(u_1,\dots,u_n)[a \mapsto u] &\overset{(5.2)}{=} f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a \mapsto u][a_1 \mapsto u_1[a \mapsto u]]\dots[a_n \mapsto u_n[a \mapsto u]] \\ &\overset{(5.3)}{=} f^{\mathfrak{I}}(a_1,\dots,a_n)[a_1 \mapsto u_1[a \mapsto u]]\dots[a_n \mapsto u_n[a \mapsto u]] \\ &\overset{\text{Def. 5.5}}{=} f^{\mathfrak{I}}(u_1[a \mapsto u],\dots,u_n[a \mapsto u]). \end{aligned}$$

□

Definição 5.6. Estendemos a interpretação $\mathfrak{I}$ da Definição 5.5 para termos e predicados da lógica $\mathbb{L}_1$ como sendo uma função equivariante $[\![-]\!]$ definida indutivamente como na Figura 5.1 abaixo:

$$\begin{array}{rl|rl} [\![a]\!] & \triangleq \mathtt{atm}_{\mathfrak{U}}(a) & [\![\bot]\!] & \triangleq \bot \\ [\![f(t_1,\dots,t_n)]\!] & \triangleq f^{\mathfrak{I}}([\![t_1]\!],\dots,[\![t_n]\!]) & [\![t = s]\!] & \triangleq ([\![t]\!] =^{\mathfrak{I}} [\![s]\!]) \\ & & [\![P(t_1,\dots,t_n)]\!] & \triangleq P^{\mathfrak{I}}([\![t_1]\!],\dots,[\![t_n]\!]) \\ & & [\![\phi \wedge \psi]\!] & \triangleq [\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \\ & & [\![\neg\phi]\!] & \triangleq \neg[\![\phi]\!] \\ & & [\![\forall a.\phi]\!] & \triangleq \forall a.[\![\phi]\!] \end{array}$$

Figura 5.1. A interpretação de termos e predicados da lógica $\mathbb{L}_1$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$.

Observação 5.4. A equivariância da função $[\![-]\!]$ pode ser interpretada do seguinte modo:

$$\pi \cdot [\![t]\!] = [\![\pi \cdot t]\!] \quad \text{e} \quad \pi \cdot [\![\phi]\!] = [\![\pi \cdot \phi]\!].$$

para toda $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{A}}$, $t \in \mathfrak{T}$ e $\phi \in \mathfrak{P}$.

Agora iremos demonstrar alguns resultados técnicos que nos ajudarão a demonstrar a correção da interpretação da lógica $\mathbb{L}_1$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$.

Lema 5.4. Sejam $t \in \mathfrak{T}$ e $\phi \in \mathfrak{P}$. Então

i) $\mathtt{supp}([\![t]\!]) \subseteq \mathtt{fa}(t)$.

ii) $\mathtt{supp}([\![\phi]\!]) \subseteq \mathtt{fa}(\phi)$.

Demonstração. Considerando $[\![t]\!]$ e $[\![\phi]\!]$ como funções $\mathfrak{T} \to \mathcal{L}$ e $\mathfrak{P} \to \mathcal{L}$, respectivamente. Pela conservação de suporte (Teo 3.5),

$$\mathtt{supp}([\![t]\!]) \subseteq \mathtt{supp}(t) \quad \text{e} \quad \mathtt{supp}([\![\phi]\!]) \subseteq \mathtt{supp}(\phi)$$

e o resultado segue pois pelo Exemplo 3.6, $\mathtt{supp}(\phi) = \mathtt{fa}(\phi)$ (estamos considerando ϕ identificado por α-equivalência) e $\mathtt{supp}(t) = \mathtt{fa}(t)$. $\square$

Lema 5.5. $[\![\top]\!] = \mathsf{T}$.

Demonstração. $[\![\top]\!] = [\![\neg\bot]\!] = \neg[\![\bot]\!] = \neg\bot = \mathsf{T}$. $\square$

Definição 5.7. Escrevemos $\mathfrak{I} \models \phi$ quando $[\![\phi]\!] = \mathsf{T}$ e dizemos que ϕ é *válida* em $\mathfrak{I}$.

Na sequência, o Lema 5.6 basicamente estende a interpretação $\mathfrak{I}$ para a operação de substituição na sintaxe de termos e predicados.

Lema 5.6. Dados $t, s \in \mathfrak{T}$ e $\phi \in \mathfrak{P}$. Então,

1. $[\![t[a := s]]\!] = [\![t]\!][a \mapsto [\![s]\!]]$.
2. $[\![\phi[a := s]]\!] = [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]]$.

Demonstração. A demonstração é por indução na estrutura de termos e predicados. Faremos apenas os casos interessantes. A demonstração dos casos restantes poderá ser encontrada no Lema C.1 do Apêndice C.

2. (a) Suponha que ϕ seja da forma $\psi \wedge \psi'$ e que, por hipótese de indução, o resultado valha para ψ e ψ'. Então

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \wedge \psi')[a := s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![(\psi[a := s]) \wedge (\psi'[a := s])]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} [\![\psi[a := s]]\!] \boldsymbol{\wedge} [\![\psi'[a := s]]\!] \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} [\![\psi]\!][a \mapsto [\![s]\!]] \boldsymbol{\wedge} [\![\psi']\!][a \mapsto [\![s]\!]] \\
&\overset{\text{Lem. 5.1(1)}}{=} ([\![\psi]\!] \boldsymbol{\wedge} [\![\psi']\!])[a \mapsto [\![s]\!]] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} [\![\psi \wedge \psi']\!][a \mapsto [\![s]\!]].
\end{aligned}$$

(b) Suponha que ϕ seja da forma $\neg\psi$ que o resultado vale por hipótese de indução para ψ.

$$\begin{aligned}
[\![(\neg\psi)[a := s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![\psi[a := s]]\!] \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} [\![\psi]\!][a \mapsto [\![s]\!]] \\
&= (\boldsymbol{\neg}[\![\psi]\!])[a \mapsto [\![s]\!]], \quad \sigma\text{-estrutura de } \mathcal{L} \text{ é compatível} \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} [\![\neg\psi]\!][a \mapsto [\![s]\!]].
\end{aligned}$$

(c) Por fim, suponha que ϕ seja uma quantificação universal. Então temos duas possibilidades: $\forall a.\psi$ ou $\forall b.\psi$, onde o predicado ψ satisfaz a propriedade desejada por hipótese de indução.

i. Para o caso $\forall a.\psi$,
$$\begin{aligned}
[\![(\forall a.\psi)[a:=s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![\forall a.\psi]\!]\\
&\overset{\text{Def. 5.5}}{=} \forall a.[\![\psi]\!]\\
&= (\forall a.[\![\psi]\!])[a\mapsto[\![s]\!]], \quad \text{por } (\sigma\#),\ a\#\forall a.[\![\psi]\!]\\
&\overset{\text{Def. 5.5}}{=} [\![\forall a.\psi]\!][a\mapsto[\![s]\!]].
\end{aligned}$$

ii. Para o caso $\forall b.\psi$ temos duas situações a analisar: $b\in\mathtt{fa}(s)$ ou $b\notin\mathtt{fa}(s)$.

I) Se $b\notin\mathtt{fa}(s)$ então pelo Lema 5.4 temos que $b\notin\mathtt{supp}([\![s]\!])$.
$$\begin{aligned}
[\![(\forall b.\psi)[a:=s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![\forall b.(\psi[a:=s])]\!]\\
&\overset{\text{Def. 5.5}}{=} \forall b.[\![\psi[a:=s]]\!]\\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \forall b.([\![\psi]\!][a\mapsto[\![s]\!]])\\
&\overset{\text{Lem. 5.1(3)}}{=} (\forall b.[\![\psi]\!])[a\mapsto[\![s]\!]]\\
&\overset{\text{Def. 5.5}}{=} [\![\forall b.\psi]\!][a\mapsto[\![s]\!]].
\end{aligned}$$

II) Se $b\in\mathtt{fa}(s)$, então tome $c\#a,b,\psi,s$.
Note que $c\#\psi,s$ implica, pelo Lema 5.4, $c\#[\![\psi]\!],[\![s]\!]$. Pela Prop. 3.2(4), $b\#(b\ c)\cdot[\![\psi]\!],(b\ c)\cdot[\![s]\!]$. Além disso, como

$$\begin{aligned}
&(b\ c)\cdot[\![(b\ c)\cdot s]\!] = [\![(b\ c)\cdot(b\ c)\cdot s]\!] = [\![s]\!],\\
&(b\ c)(a) = a,\\
&(b\ c)\cdot[\![\psi]\!] = [\![(b\ c)\cdot\psi]\!],
\end{aligned}$$

segue que

$$(b\ c)\cdot[\![\psi]\!][a\mapsto[\![(b\ c)\cdot s]\!]] = [\![(b\ c)\cdot\psi]\!][a\mapsto[\![s]\!]] \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
[\![(\forall b.\psi)[a := s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![\forall c.(\psi[b := c][a := s])]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \forall c.[\![\psi[b := c][a := s]]\!] \\
&\overset{\text{Lem. 3.5}}{=} \forall c.[\![((b\ c)\cdot\psi)[a := s]]\!] \\
&= \forall c.[\![(b\ c)\cdot(\psi[a := (b\ c)\cdot s])]\!] \\
&= \forall c.(b\ c)\cdot[\![\psi[a := (b\ c)\cdot s]]\!] \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \forall c.(b\ c)\cdot[\![\psi]\!][a \mapsto [\![(b\ c)\cdot s]\!]] \\
&\overset{(5.4)}{=} \forall c.[\![(b\ c)\psi]\!][a \mapsto [\![s]\!]] \\
&\overset{\text{Lem. 5.1(3)}}{=} (\forall c.[\![(b\ c)\cdot\psi]\!])[a \mapsto [\![s]\!]] \\
&= (\forall c.(b\ c)\cdot[\![\psi]\!])[a \mapsto [\![s]\!]] \\
&\overset{\text{Lem. 4.8}}{=} \forall b.[\![\psi]\!][a \mapsto [\![s]\!]].
\end{aligned}$$
□

Definição 5.8. Dado um sequente $\Phi \vdash \Psi$, estendemos a interpretação $\mathcal{I}$ da Definição 5.6 para sequentes da seguinte forma:

$$[\![\Phi \vdash \Psi]\!] \text{ é verdadeiro quando } \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.$$

O Teorema 5.1 estabelece a correção da interpretação $\mathcal{I}$.

Teorema 5.1 (Correção - [9] - Theorem 5.2.13)**.** A interpretação $\mathcal{I}$ é solida no seguinte sentido:

$$\text{Se } \Phi \vdash \Psi \text{ é um sequente derivável, então } [\![\Phi \vdash \Psi]\!] \text{ é verdadeiro.}$$

Demonstração. A demonstração é feita por indução na estrutura das regras da Figura 2.4. Em razão da demonstração ser longa e repetitiva, apresentaremos aqui apenas os casos mais interessantes e o outros casos poderão ser encontrados no Lema C.1 do Apêndice C.

1. **($\forall$L)** $\dfrac{\Phi', \phi[a := s] \vdash \Psi}{\Phi', \forall a.\phi \vdash \Psi}$

   Neste caso, $\Phi = \Phi', \forall a.\phi$. Por hipótese de indução,

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \phi[a := s]\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\} \tag{5.5}$$

   Pelo Lema 5.2(2),

$$\forall a.[\![\phi]\!] \leq [\![\phi]\!][a \mapsto [\![t]\!]], \text{ para todo } t \in \mathfrak{T} \tag{5.6}$$

   Então,

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} &= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge [\![\forall a.\phi]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge \forall a.[\![\phi]\!].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} \le \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}, \\
&\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} \le \forall a.[\![\phi]\!].
\end{aligned}$$

Por (5.6), vem

$$\begin{aligned}
&\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} \le \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}, \\
&\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} \le [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} \text{ é uma cota inferior de } \left\{\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}, [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]]\right\}.$$

Pela maximalidade de $(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}) \wedge ([\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]])$,

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \forall a.\phi\} &\le \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge ([\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]]) \\
&\overset{\text{Lem. 5.6(2)}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge [\![\phi[a := s]]\!] \\
&= \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \phi[a := s]\} \\
&\overset{(5.6)}{\le} \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.
\end{aligned}$$

2. $(\forall\mathbf{R})\ \dfrac{\Phi \vdash \psi', \Psi' \qquad (a \notin \mathtt{fa}(\Phi \cup \Psi))}{\Phi \vdash \forall a.\psi', \Psi'}$

Neste caso $\Psi = \forall a.\psi', \Psi'$. Para facilitar o entendimento, considere

$$\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \quad \text{e} \quad \Psi' = \{\psi'_1, \ldots, \psi'_m\}.$$

Como $a \notin \mathtt{fa}(\Phi \cup \Psi)$, segue que $a \notin \mathtt{fa}(\phi_i)$ e $a \notin \mathtt{fa}(\psi'_j)$ para todo $1 \le i \le n$ e todo $1 \le j \le m$. Então pelo Lema 5.4, $a\#[\![\phi_i]\!], [\![\psi'_j]\!]$ para todo $1 \le i \le n$ e todo $1 \le j \le m$.

Usando a hipótese de indução garantimos que $[\![\Phi \vdash \psi', \Psi']\!]$ é verdadeiro. Assim,

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \le \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi', \Psi'\},$$

o qual pode ser escrito como

$$[\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!] \leq [\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee [\![\psi']\!].$$

Pelo Lema 4.10,

$$\forall a.([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \leq \forall a.([\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee [\![\psi']\!]).$$

Pelo Lema 4.9,

$$(\forall a.[\![\phi_1]\!]) \wedge \ldots \wedge (\forall a.[\![\phi_n]\!]) \leq \forall a.([\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee [\![\psi']\!]).$$

Como $a\#[\![\phi_i]\!]$ para todo $i = 1, \ldots, n$, segue pelo Lema 4.3

$$[\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!] \leq \forall a.([\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee [\![\psi']\!]).$$

Como $a\#[\![\psi'_j]\!]$ para todo $j = 1, \ldots, m$, podemos usar (**D**$\forall$) quantas vezes for preciso para obter

$$[\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!] \leq [\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee \forall a.[\![\psi']\!].$$

Pela Definição 5.6, $\forall a.[\![\psi']\!] = [\![\forall a.\psi']\!]$ e daí

$$[\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!] \leq [\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!] \vee [\![\forall a.\psi']\!]$$

Logo,

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \forall a.\psi', \Psi'\} = \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.$$

e o resultado segue. □

Capítulo 6

Considerações Finais

Esta dissertação fez uso das técnicas nominais para fornecer um modelo algébrico nominal para a lógica clássica de primeira ordem com igualdade $\mathbb{L}_1$. Inicialmente, foram apresentados os conceitos de conjuntos nominais, suporte, equivariância, *frescor* e suas propriedades, para, em um segundo momento, tratar de álgebras sobre conjuntos nominais definindo assim estruturas abstratas que modelam a operação de substituição em sistemas formais.

Uma vez que fizemos isso, aplicamos a tecnologia das técnicas nominais à teoria de reticulados, em particular identificando *B*#ínfimos e *B*#supremos como as noções unificadoras necessárias para modelar a conjunção ($\wedge$), quantificação universal ($\forall$), disjunção ($\vee$) e quantificação existencial ($\exists$). Conectamos isso com álgebras de substituição e desenvolvemos as *álgebras* $\mathbb{L}_1$, estruturas adequadas para interpretar a lógica $\mathbb{L}_1$ e a noção de substituição de maneira "*absoluta*". Por fim, realizamos a interpretação da sintaxe de $\mathbb{L}_1$ sobre uma álgebra $\mathbb{L}_1$ e provamos a sua correção, ou seja, que a lógica $\mathbb{L}_1$ pode expressar e derivar todas as propriedades que são verdadeiras de acordo com a semântica nominal.

As semânticas usuais para linguagens formais que envolvem variáveis e ligadores se baseiam na noção de designação de variáveis. Assim, nomes existem na sintaxe, mas não na semântica. A noção de designação de variáveis cria uma dependência em relação ao contexto em que as nomes estão envolvidos. Em contraste com essa ideia, nas semânticas "*absolutas*" não temos este problema. Nomes são levados em cópias deles mesmos numa semântica imersa numa linguagem nominal. Fazer isso permite que os objetos da semântica adquiram "consciência" sobre os nomes envolvidos em si mesmos, criando assim uma semântica em que o contexto dos nomes não importa. Neste tipo de semântica somos capazes de interpretar os conectivos lógicos clássicos $=, \wedge, \vee, \neg, \forall$ e $\exists$ de forma direta como elementos $=^{\mathcal{L}}, \mathsf{\wedge}, \mathsf{\vee}, \mathsf{\neg}, \mathsf{\forall}$ e $\mathsf{\exists}$ de uma estrutura nominal de reticulados.

Trabalhos futuros e relacionados. Com tudo isso estabelecido, agora o leitor poderia se perguntar sobre qual direção seguir a partir daqui. Abaixo levantamos cinco tópicos que pretendemos investigar e que também servem para guiar o leitor no estudo de algumas das extensões e aplicações das ideias aqui desenvolvidas:

1. A exploração de extensões da semântica nominal para outras linguagens formais parece bastante promissora, uma vez que estudos nesta direção já foram feitos, como por exemplo, após a publicação do artigo [9], principal referência desta dissertação, na sequência Murdoch J. Gabbay constrói em [17] uma semântica no estilo nominal para o λ-cálculo não-tipado de forma relacionada à semântica que aqui apresentamos para a lógica de primeira ordem.

2. A Definição 5.3 é uma definição abstrata, não concreta. Alguns exemplos concretos de σ-álgebras são apresentados em [9], sendo o principal deles construído a partir de uma noção chamada de $\mho$-*álgebra* (lida como amgis-álgebra) e dual à noção de σ-álgebra no sentido de que podemos construir uma $\mho$-álgebra a partir de uma σ-álgebra e vice-versa. O outro exemplo é construído sobre a partir do conceito de *álgebras de Lindenbaum-Tarski*. Devido a complexidade de tais exemplos, faz-se necessário a procura de exemplos concretos de σ-álgebras que sejam mais simples.

3. Nos encarregamos de provar apenas a correção da semântica nominal da lógica $\mathbb{L}_1$. No entanto, a completude também é estabelecida em [9]. A completude afirma que se $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ é verdadeiro em todas as interpretações de uma álgebra $\mathbb{L}_1$ qualquer, então, de fato, $\Phi \vdash \Psi$ é um sequente derivável na lógica $\mathbb{L}_1$. Sendo assim, a completude é a recíproca da correção e intuitivamente significa que tudo o que é verdade possui uma prova.

   A prova da completude é um pouco fora do padrão, pois ao invés de vez de uma prova direta, são apresentadas duas demonstrações feitas pela contrapositiva, isto é, supõe-se que $\Phi \nvdash \Psi$ e mostra-se que existe uma álgebra $\mathbb{L}_1$ e uma interpretação de $\mathbb{L}_1$ sobre esta $\mathbb{L}_1$ tal que $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ é falso, ou seja, que $\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \not\leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}$.

   Na primeira abordagem, constrói-se uma noção chamada de *pontos* a partir de *conjuntos de predicados consistentes maximais*. A noção de pontos forma uma $\mho$-álgebra e, usando a dualidade entre σ e $\mho$, mostra-se que o conjunto de pontos forma uma σ-álgebra que, por sua vez, também forma uma álgebra $\mathbb{L}_1$. Então, a interpretação é feita sobre este conjunto de pontos, onde cada ϕ é mapeado em um conjunto de pontos e usa-se isso para demonstrar a completude.

A segunda abordagem envolve o estudo dos modelos usuais da lógica de primeira ordem. Mostra-se que a partir dos modelos usuais pode-se fazer uma extensão para os nossos modelos nominais. Isto dá uma tradução direta da semântica familiar para a nossa semântica nova e nós permite obter a completude.

Ambas as abordagens envolvem conceitos muito elaborados e complexos e, por esta razão, decidimos não demonstrar a completude no presente trabalho. Desse modo, um possível ponto de partida daqui em diante, seria estudar a completude da semântica nominal não só pelas abordagens já feitas por Murdoch J. Gabbay, como também procurar métodos alternativos de demonstrar tal resultado. A exploração de extensões envolvendo o *método de Henkin*, na direção da prova feita no livro [4], que utiliza as noções de *satisfatibilidade* e *consistência* para o tratamento da completude, parece bastante promissora. Para isso, precisaríamos estudar qual seria o tratamento para as noções de *completude para negação* e *existência de testemunhas* e se seria possível utilizar as estruturas algébricas aqui apresentadas, por exemplo, σ-álgebras e álgebras $\mathbb{L}_1$ (ou também $\mho$-álgebras), para demonstrar que a consistência implica satisfatibilidade.

4. Acreditamos que um caminho promissor seja explorar as fronteiras da expressividade da semântica nominal para outros resultados conhecidos no estudo da lógica de primeira ordem, como os *Teoremas de Löwenheim–Skolem* e o *Teorema da Compacidade*.

5. Cremos que este trabalho tem ainda muitas outras possibilidades de extensões e aplicações, por exemplo, em *reescrita nominal*. Muitos trabalhos puramente sintáticos sobre este tema foram feitos ao longo dos anos (conferir [6] para mais detalhes). Portanto, agora pretendemos explorar o lado semântico destes trabalhos. Por exemplo, resolver equações dentro de álgebras nominais utilizando estruturas algébricas nominais, explorar a *unificação nomina* sobre estas estruturas, entre outros.

Bibliografia

[1] Andrei Alexandru and Gabriel Ciobanu (2020). *Foundations of Finitely Supported Structures: A Set Theorical Viewpoint*. Springer.

[2] Chris Hankin (1994). *Lambda Calculi: A Guide for Computer Scientists*. Oxdord University Press Inc., 1 edition.

[3] George Grätzer (2011). *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser Basel, 1 edition.

[4] Heinz-Dieter Ebbinghaus, J. and Wolfgang Thomas (1994). *Mathematical Logic*. Springer, 2 edition.

[5] Joseph Rotman (1995). *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer-Verlag New York, 4 edition.

[6] Maribel Fernández and Murdoch J. Gabbay (2007). Nominal rewriting. *Information and Computation*, 205(6):917–965.

[7] Murdoch James Gabbay (2001). *A Theory of Inductive Definitions with α-Equivalence*. PhD thesis, University of Cambridge, UK.

[8] Murdoch James Gabbay (2011). Foundations of nominal techniques: logic and semantics of variables in abstract syntax. *Bulletin of Symbolic Logic*, 17(2):161–229.

[9] Murdoch James Gabbay (2016). Semantics out of context: nominal absolute denotations for first-order logic and computation. *Journal of the ACM*, 63(3):1–66.

[10] Murdoch James Gabbay and Aad Mathijssen (2006a). Capture-avoiding substitution as a nominal algebra. In *ICTAC 2006: Theoretical Aspects of Computing (Berlin)*, volume 4281 of *Lecture Notes in Computer Science*, page 198–212. Springer.

[11] Murdoch James Gabbay and Aad Mathijssen (2006b). One-and-a-halfth-order logic. In *Proceedings of the 8th ACM- SIGPLAN International Symposium on Principles and Practice of Declarative Programming (PPDP 2006)*, page 189–200. ACM.

[12] Murdoch James Gabbay and Aad Mathijssen (2008a). Capture-avoiding substitution as a nominal algebra. *Formal Aspects of Computing*, 20(4–5):451–479.

[13] Murdoch James Gabbay and Aad Mathijssen (2008b). One-and-a-halfth-order logic. *Journal of Logic and Computation*, 18(4):521–562.

[14] Murdoch James Gabbay and Andrew M. Pitts (1999). A new approach to abstract syntax involving binders. In *14th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pages 214–224. IEEE Computer Society Press.

[15] Murdoch James Gabbay and Andrew M. Pitts (2001). A new approach to abstract syntax with variable binding. *Formal Aspects of Computing*, 13(3-5):214–224.

[16] Murdoch James Gabbay and Gilles Dowek (2012). Nominal semantics for predicate logic: algebras, substitution, quantifiers, and limits. In *Proceedins of the 9th Italian Convention on Computational Logic (CILC 2012)*, volume 857. CEUR workshop proceedings.

[17] Murdoch James Gabbay and Michael Gabbay (2017). Representation and duality of the untyped λ-calculus in nominal lattice and topological semantics, with a proof of topological completeness. *Annals of Pure and Applied Logic*, 168(3):501–621.

[18] Roy L. Crole (2012). α-equivalence equalities. *Theoretical Computer Science*, 433:1–19.

[19] Thomas Jech (2002). *Set Theory*. Springer, 3 edition.

Apêndice A

Demonstrações do Capítulo 2

A.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição A.1. Sejam L um conjunto e $\prec$ uma relação binária arbitrária em L. Dizemos que

- $\prec$ é *reflexiva* quando para todo $x \in L$, $x \prec x$.
- $\prec$ é *irreflexiva* quando $x \prec x$ não vale para todo $x \in L$.
- $\prec$ é *assimétrica* quando para todos $x, y \in L$, se $x \prec y$ então não vale $y \prec x$.
- $\prec$ é *antissimétrica* quando para todos $x, y \in L$, se $x \prec y$ e $y \prec x$ então $x = y$.
- $\prec$ é *transitiva* quando para todos $x, y, z \in L$, se $x \prec y$ e $y \prec z$ então $x \prec z$.
- $\prec$ é *tricotômica* quando para todos $x, y \in L$ vale exatamente uma das seguintes afirmações: $x \prec y$, ou $y \prec x$, ou $x = y$.
- Escrevemos $x \succ y$ para denotar $y \prec x$. A relação $\prec$ é *bem-fundada* quando não existir uma cadeia descendente infinita, isto é, quando $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \dots$ é impossível.
- $\prec$ é uma relação de *ordem parcial não-estrita* quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, denotamos $\prec$ por $\leq$.
- $\prec$ é uma relação de *ordem parcial estrita* quando $\prec$ é irreflexiva, assimétrica e transitiva. Neste caso, denotamos R por $<$.
- No caso em que a relação de ordem parcial (seja ela estrita ou não-estrita) for tricotômica, dizemos que a relação de ordem é *total*.

Observação A.1. A irreflexividade e a transitividade juntas implicam assimetria. Além disso, a assimetria implica irreflexividade. Em outras palavras, uma relação transitiva é assimétrica se, e somente se, for irreflexiva. Portanto, a definição de uma ordem parcial estrita é a mesma se omitirmos a irreflexividade ou a assimetria (mas não ambas).

Lema A.1. Sejam $(L, \leq)$ um CPO e $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S$ um subconjunto finito não-vazio. Então,

1. L é um $\wedge$-semireticulado se, e somente se, $x \wedge y$ existe para todos $x, y \in L$.
2. Similarmente, L é um $\vee$-semireticulado se, e somente se, $x \vee y$ existe para todos $x, y \in L$.

Demonstração. Faremos apenas o caso para $\wedge$-semireticulados vista que o caso para $\vee$-semireticulados é inteiramente análogo.

Se L é um $\wedge$-semireticulado, então por definição existe $x \wedge y$ para todos $x, y \in L$.

Reciprocamente, suponha que $x \wedge y$ exista para todos $x, y \in L$. Queremos usar isso para mostrar que X possui um ínfimo. Afirmamos que,

$$\bigwedge X = (\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n,$$

Vamos provar por indução em n. Os casos $n = 1, 2$ são imediatos. Suponha que a igualdade seja verdadeira para algum $n > 2$. Então

$$((\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n) \wedge x_{n+1} \overset{\text{H.I.}}{=} \left(\bigwedge X\right) \wedge x_{n+1}.$$

Por definição, temos que

$$\left(\bigwedge X\right) \wedge x_{n+1} \leq \bigwedge X \qquad \text{e} \qquad \left(\bigwedge X\right) \wedge x_{n+1} \leq x_{n+1}.$$

Como $\bigwedge X \leq x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$\left(\bigwedge X\right) \wedge x_{n+1} \leq x_i \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, n, n+1.$$

Com isso, mostramos que $((\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n) \wedge x_{n+1}$ é uma cota inferior do conjunto $X \cup \{x_{n+1}\}$. Se conseguirmos mostrar que $((\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n) \wedge x_{n+1}$ é a maior cota inferior de $X \cup \{x_{n+1}\}$ então o resultado está estabelecido. Assim, seja $y \in S$ uma cota inferior arbitrária de $X \cup \{x_{n+1}\}$. Então $y \leq x_i$ para todo $1 \leq i \leq n+1$. Portanto, pela definição de ínfimo, temos que $y \leq \bigwedge X$ e $y \leq x_{n+1}$. Logo,

$$y \leq \left(\bigwedge X\right) \wedge x_{n+1} \overset{\text{H.I.}}{=} ((\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \ldots) \wedge x_n) \wedge x_{n+1}$$

e o resultado segue da unicidade de $\bigwedge X \cup \{x_{n+1}\}$. Analogamente demonstra-se o caso para o supremo de X. □

Lema A.2. Seja $(L, \leq)$ um reticulado. Então as identidades **(D$\wedge$)** e **(D$\vee$)** são equivalentes.

Demonstração. Suponha que **(D$\vee$)** vale em L e sejam $u, v, w \in L$ arbitrários; então, usando **(D$\vee$)** com $x = u \vee v, y = u, z = w$, obtemos

$$\begin{aligned}
(u \vee v) \wedge (u \vee w) &\overset{\textbf{(D}\vee\textbf{)}}{=} ((u \vee v) \wedge u) \vee ((u \vee v) \wedge w) \\
&\overset{\text{(Absor)}}{=} u \vee ((u \vee v) \wedge w) \\
&\overset{\textbf{(D}\vee\textbf{)}}{=} u \vee ((u \wedge w) \vee (v \wedge w)) \\
&\overset{\text{(Asso)}}{=} (u \vee (u \wedge w)) \vee (v \wedge w) \\
&\overset{\text{(Absor)}}{=} u \vee (v \wedge w).
\end{aligned}$$

A recíproca é análoga. □

Lema A.3. Em um reticulado limitado distributivo L, um elemento $x \in L$ possui um único complemento e $\neg\neg x = x$.

Demonstração. Suponha que y e z sejam ambos complementos de x, então

$$\begin{aligned}
y &\overset{(2.3)}{=} y \wedge \top \\
&\overset{x \vee z = \top}{=} y \wedge (x \vee z) \\
&\overset{\textbf{(D}\vee\textbf{)}}{=} (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\
&\overset{y \wedge x = \bot}{=} \bot \vee (y \wedge z) \\
&\overset{(2.3)}{=} y \wedge z.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que $y \wedge z = y$ donde, por (2.2), concluímos que $y \leq z$. Analogamente obtém-se que $z \leq y$ e o resultado segue pela antissimetria. Agora, pela Definição 2.4 temos que

$$\begin{aligned}
x \vee \neg x &= \top, & \neg x \vee \neg\neg x &= \top, \\
x \wedge \neg x &= \bot, & \neg x \wedge \neg\neg x &= \bot.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\neg\neg x$ e x são complementos de $\neg x$ donde obtemos que $\neg\neg x = x$ pela unicidade da complementação que acabamos de demonstrar. □

Lema A.4 (Identidades de De Morgan)**.** Em um reticulado limitado distributivo, se os elementos x e y possuem complementos, $\neg x$ e $\neg y$, respectivamente, então $x \vee y$ e $x \wedge y$ possuem complementos, $\neg(x \vee y)$ e $\neg(x \wedge y)$, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \neg(x \vee y) &= \neg x \wedge \neg y, \\ \neg(x \wedge y) &= \neg x \vee \neg y. \end{aligned}$$

Demonstração. Pela unicidade dos complementos, é suficiente provar que

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= \bot, \text{ e} \\ (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) &= \top \end{aligned}$$

para verificar a segunda identidade; a primeira é dual. De fato:

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= ((x \wedge y) \wedge \neg x) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg y), && \text{por } (\mathbf{D}\wedge) \\ &= ((x \wedge \neg x) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \neg y)), && \text{por (Com) e (Assoc)} \\ &= (\bot \wedge y) \vee (x \wedge \bot), && \text{pois } x \wedge \neg x = y \wedge \neg y = \bot \\ &= \bot \vee \bot, && \text{por (2.3)} \\ &= \bot, && \text{por (Idem).} \end{aligned}$$

Analogamente, $(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) = \top$. □

A.2 Números ordinais

Na teoria de conjuntos, um número ordinal, ou simplesmente ordinal, é uma generalização do conceito de um número natural que é usado para descrever uma maneira de organizar uma coleção (possivelmente infinita) de objetos em ordem, um após o outro. Introduzidos por Georg Cantor em 1883, o campo de estudo sobre ordinais tornou-se muito vasto com o tempo, então, dedicamos este apêndice para delinear apenas o necessário para este trabalho, apresentando definições e resultados básicos. Nos embasaremos principalmente no livro [19].

Definição A.2. Uma relação de ordem total estrita $<$ em um conjunto P é uma *boa-ordem* se todo subconjunto não-vazio de P possui um menor elemento. Neste caso, dizemos que o conjunto P é *bem-ordenado*.

> *Observação* A.2. Uma boa-ordem pode ser definida, equivalentemente, como sendo uma relação ordem total estrita $<$ que é bem-fundada.

Por exemplo, o conjunto dos inteiro $\mathbb{Z}$ não é bem-ordenado, enquanto que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é.

Usualmente, números ordinais são definidos formalmente como um tipo de classe de equivalência sobre conjuntos bem-ordenados. No entanto, apresentaremos aqui uma definição diferente, mas equivalente, atribuída a von Neumann, chamada de *números ordinais de von Neumann*.

Definição A.3. Um conjunto T é *transitivo* se cada elemento de T é um subconjunto de T, i.e. se $x \in T$ então $x \subseteq T$ (equivalentemente, $\bigcup T \subseteq T$ ou $T \subseteq \mathcal{P}(T)$).

Definição A.4. Um conjunto é um *número ordinal*, ou simplesmente um *ordinal*, se é transitivo e bem-ordenado pela relação de pertinência $\in$.

Denotamos ordinais por letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. A classe de todos os ordinais é denotada por $\mathcal{O}rd$. Definimos a seguinte relação

$$\alpha < \beta \text{ se, e somente se } \alpha \in \beta.$$

Como exemplos, os conjuntos $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são trivialmente ordinais. Não é difícil ver também que o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é um ordinal. De fato, todo número natural é um ordinal quando pensamos em sua construção indutiva:

$$0 \triangleq \emptyset \qquad \text{e} \qquad n \triangleq n \cup \{n\}.$$

Mais geralmente,

Lema A.5. Se α é um ordinal, então $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ também é um ordinal.

Chamamos $\alpha + 1$ de *ordinal sucessor* de α. Alternativamente, se α não é um ordinal sucessor de algum ordinal β, i.e. α é tal que não existe um ordinal β com $\beta + 1 = \alpha$, então α é dito ser um *ordinal limite*. Os exemplos mais simples de ordinais limites são 0 e o conjunto dos números naturais, geralmente denotado por ω, o qual é o menor ordinal limite infinito. Como consequência do Lema A.5 conseguimos gerar a seguinte lista de ordinais:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots.$$

O Teorema a seguir é uma generalização da indução usual dos números naturais:

Teorema A.1 (Indução Transfinita)**.** Seja C uma classe de ordinais e assuma que:

1. $0 \in C$;

2. Se $\alpha \in C$, então $\alpha + 1 \in C$;

3. Se α é um ordinal limite não-nulo e $\beta \in C$ para todo $\beta < \alpha$, então $\alpha \in C$.

   Então $C = \mathcal{O}rd$.

Apêndice B

Demonstrações do Capítulo 3

B.1 σ-Álgebra de termos

Lema B.1. O conjunto das partes finitas de $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$, é uma σ-álgebra de termos com:

- $a_{\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})} \triangleq \{a\}$;
- $B[a \mapsto C] \triangleq B$ se $a \notin B$;
- $B[a \mapsto C] \triangleq (B \setminus \{a\}) \cup C$ se $a \in B$.

Demonstração. Sejam $B, C, D \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$ e $a, b, c \in \mathbb{A}$. Lembre-se que, $\mathrm{supp}(B) = B$ para todo $B \in \mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})$. Então, nos axiomas, $a\#B$ é equivalente a $a \notin B$. A seguir, vamos verificar cada um dos axiomas:

- **(σa)** $\quad a_{\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})}(a)[a \mapsto C] = C$:

  Como $\mathtt{atm}_{\mathcal{U}}(a) = \{a\}$, segue que

$$\{a\}[a \mapsto C] = (\{a\} \setminus \{a\}) \cup C = C.$$

- **(σid)** $\quad B[a \mapsto a_{\mathcal{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{A})}(a)] = B$:

$$B[a \mapsto \{a\}] = \begin{cases} B, & \text{se } a \notin B \\ (B \setminus \{a\}) \cup \{a\} = B, & \text{se } a \in B. \end{cases}$$

- **(σ#)** $\quad a\#B \Rightarrow B[a \mapsto C] = B$:

  Suponha que $a \notin B$. Então por definição, $B[a \mapsto C] = B$.

- $(\sigma\alpha)$ $\quad b\#B \Rightarrow B[a \mapsto C] = ((b\ a)\cdot B)[b \mapsto C]$:

  Suponha $b \notin B$. Então temos duas possibilidades: $a \in B$ ou $a \notin B$.

  - Se $a \in B$ então $(a\ b)(B) = (B \setminus \{a\}) \cup \{b\}$,

$$\begin{aligned}((a\ b)(B))[b \mapsto C] &= ((B \setminus \{a\}) \cup \{b\})[b \mapsto C], \\ &= (((B \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \setminus \{b\}) \cup C, && \text{pois } b \in (B \setminus \{a\}) \cup \{b\} \\ &= (B \setminus \{a\}) \cup C \\ &= B[a \mapsto C], && \text{pois } a \in B.\end{aligned}$$

  - Se $a \notin B$ então

$$\begin{aligned}((a\ b)(B))[b \mapsto C] &= B[b \mapsto C], && \text{pois } (a\ b)(B) = B \text{ já que } a,b \notin B \\ &= B, && \text{pois } b \notin B \\ &= B[a \mapsto C], && \text{pois } a \notin B.\end{aligned}$$

- $(\sigma\sigma)$ $\quad a\#D \Rightarrow B[a \mapsto C][b \mapsto D] = B[b \mapsto D][a \mapsto C[b \mapsto D]]$:

  Suponha que $a \notin D$.

  - Se $a \notin B$, então $a \notin B[b \mapsto D]$ (independentemente se $b \in B$ ou $b \notin B$). Daí,

$$\begin{aligned}B[a \mapsto C][b \mapsto D] &= B[b \mapsto D], && \text{pois } a \notin B \\ &= B[b \mapsto D][a \mapsto C[b \mapsto D]], && \text{pois } a \notin B[b \mapsto D].\end{aligned}$$

  - Se $a \in B$, então temos quatro possibilidades para analisar:

    * $b \in B$ e $b \in C$:

$$\begin{aligned}B[a \mapsto C][b \mapsto D] &\overset{a\in B}{=} ((B \setminus \{a\}) \cup C)[b \mapsto D] \\ &\overset{b\in B\setminus\{a\}}{=} (((B \setminus \{a\}) \cup C) \setminus \{b\}) \cup D \\ &= (B \setminus \{a,b\}) \cup (C \setminus \{b\}) \cup D.\end{aligned}$$

      e

$$\begin{aligned}B[b \mapsto D][a \mapsto C[b \mapsto D]] &\overset{b\in B}{=} ((B \setminus \{b\}) \cup D)[a \mapsto C[b \mapsto D]] \\ &\overset{a\in B\setminus\{b\}}{=} (((B \setminus \{b\}) \cup D) \setminus \{a\}) \cup C[b \mapsto D] \\ &= (B \setminus \{a,b\}) \cup (D \setminus \{a\}) \cup C[b \mapsto D] \\ &\overset{a\notin D}{=} (B \setminus \{a,b\}) \cup D \cup C[b \mapsto D] \\ &\overset{b\in C}{=} (B \setminus \{a,b\}) \cup D \cup (C \setminus \{b\}) \cup D \\ &= (B \setminus \{a,b\}) \cup (C \setminus \{b\}) \cup D.\end{aligned}$$

    * $b \in B$ e $b \notin C$:

$$\begin{aligned}B[a \mapsto C][b \mapsto D] &= (B \setminus \{a,b\}) \cup (C \setminus \{b\}) \cup D, && \text{por } (\star) \\ &= (B \setminus \{a,b\}) \cup C \cup D, && b \notin C.\end{aligned}$$

      e

$$\begin{aligned} B[b\mapsto D][a\mapsto C[b\mapsto D]] &= ((B\setminus\{b\})\cup D)[a\mapsto C], && b\in B \text{ e } b\notin C\\ &= (((B\setminus\{b\})\cup D)\setminus\{a\})\cup C, && a\in B\setminus\{b\}\\ &= (B\setminus\{a,b\})\cup(D\setminus\{a\})\cup C\\ &= (B\setminus\{a,b\})\cup D\cup C, && a\notin D. \end{aligned}$$

∗ $b\notin B$ e $b\in C$:

$$\begin{aligned} B[a\mapsto C][b\mapsto D] &= ((B\setminus\{a\})\cup C)[b\mapsto D]\\ &= (((B\setminus\{a\})\cup C)\setminus\{b\})\cup D, && b\in C\\ &= (B\setminus\{a,b\})\cup(C\setminus\{b\})\cup D\\ &= (B\setminus\{a\})\cup(C\setminus\{b\})\cup D, && b\notin B. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B[b\mapsto D][a\mapsto C[b\mapsto D]] &= B[a\mapsto C[b\mapsto D]], && b\notin B\\ &= (B\setminus\{a\})\cup C[b\mapsto D]\\ &= (B\setminus\{a\})\cup(C\setminus\{b\})\cup D, && B\in C. \end{aligned}$$

∗ $b\notin B$ e $b\notin C$:

$$\begin{aligned} B[a\mapsto C][b\mapsto D] &= ((B\setminus\{a\})\cup C)[b\mapsto D]\\ &= (B\setminus\{a\})\cup C, && b\notin C \text{ e } b\notin B\setminus\{a\}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B[b\mapsto D][a\mapsto C[b\mapsto D]] &= B[a\mapsto C], && b\notin B \text{ e } b\notin C\\ &= (B\setminus\{a\})\cup C. \end{aligned}$$

□

B.2 σ-Ação simultânea

Lema B.2. A Definição 3.12 não depende da ordem em que tomamos os $u'_j s$.

Demonstração. O caso $n=2$ já foi verificado. Agora suponha que o resultado seja válido para qualquer lista de n átomos frescos. Queremos mostrar que o resultado vale para qualquer lista de $n+1$ átomos distintos. Para isso, considere $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ átomos frescos em relação aos u'_js. Fixe um $i'\in\{1,\dots,n\}$ e aplique o axioma $(\sigma\sigma)$ e $(\sigma\#)$ quantas vezes for preciso até obter:

$$\underbrace{(x[a_1\mapsto u_1]\dots[a_{i'-1}\mapsto u_{i'-1}][a_{i'+1}\mapsto u_{i'+1}]\dots[a_n\mapsto u_n][a_{n+1}\mapsto u_{n+1}])}_{(\star)}[a_{i'}\mapsto u_{i'}].$$

Em $(\star)$ temos n átomos distintos, então por hipótese de indução não importa a ordem que tomamos os u'_js. O resultado segue da arbitrariedade de i'. □

Lema B.3. A Definição 3.13 não depende da escolha dos átomos frescos b_j's.

Demonstração. Escrevendo

$$\begin{aligned}
\tau_{ca} &= (c_1\ a_1) \circ \cdots \circ (c_n\ a_n),\\
\tau_{cb} &= (c_1\ b_1) \circ \cdots \circ (c_n\ b_n),\\
\tau_{ba} &= (b_1\ a_1) \circ \cdots \circ (b_n\ a_n),
\end{aligned}$$

temos que $\tau_{ca} = \tau_{cb} \circ \tau_{ba} \circ \tau_{cb}$. Além disso, note também que como $b_i, c_i \# x, u_j$ para todos $1 \le i, j \le n$, segue pelo Corolário 3.1(1) que $\tau_{cb} \cdot x = x$ e $\tau_{cb} \cdot u_j = u_j$. Então por definição:

$$x[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n] = (\tau_{ba} \cdot x)[b_1 \mapsto u_1] \ldots [b_n \mapsto u_n].$$

Aplicando τ_{cb} em ambos os lados, vem

$$\tau_{cb} \cdot (x[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n]) = \tau_{cb} \cdot ((\tau_{ba} \cdot x)[b_1 \mapsto u_1] \ldots [b_n \mapsto u_n]).$$

Usando a equivariância da σ-ação e o fato que $\tau_{cb} \cdot x = x$ e $\tau_{cb} \cdot u_j = u_j$, obtemos

$$x[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n] = (\tau_{cb} \cdot (\tau_{ba} \cdot x))[c_1 \mapsto u_1] \ldots [c_n \mapsto u_n].$$

Trocando x por $\tau_{cb} \cdot x$ (não esqueça! $\tau_{cb} \cdot x = x$) no lado direito,

$$x[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n] = (\tau_{cb} \cdot (\tau_{ba} \cdot (\tau_{cb} \cdot x)))[c_1 \mapsto u_1] \ldots [c_n \mapsto u_n].$$

Usando propriedades de ação de grupos,

$$x[a_1 \mapsto u_1, \ldots, a_n \mapsto u_n] = ((\tau_{cb} \circ \tau_{ba} \circ \tau_{cb}) \cdot x)[c_1 \mapsto u_1] \ldots [c_n \mapsto u_n].$$

O resultado segue pois $\tau_{ca} = \tau_{cb} \circ \tau_{ba} \circ \tau_{cb}$. □

Apêndice C

Demonstrações do Capítulo 5

C.1 Interpretação e Solidez

Lema C.1. Dados $t, s \in \mathfrak{T}$ e $\phi \in \mathfrak{P}$. Então,

1. $[\![t[a := s]]\!] = [\![t]\!][a \mapsto [\![s]\!]]$.
2. $[\![\phi[a := s]]\!] = [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]]$.

Demonstração. Façamos os casos restantes.

1. (a) Para o caso em que t é um átomo, temos duas possibilidades: t é o átomo a ou t é um átomo b.

   - No caso em que $t \triangleq a$ temos que $[\![a]\!] = a_{\mathfrak{U}} = a$ e daí

   $$[\![a[a := s]]\!] \overset{(\sigma\mathbf{a})}{=} [\![s]\!] \overset{(\sigma\mathbf{a})}{=} a[a \mapsto [\![s]\!]] = [\![a]\!][a \mapsto [\![s]\!]].$$

   - No caso $t \triangleq b$, $[\![b]\!] = b$ e portanto

   $$[\![b[a := s]]\!] \overset{(\sigma\#)}{=} [\![b]\!] = b \overset{(\sigma\#)}{=} b[a \mapsto [\![s]\!]] = [\![b]\!][a \mapsto [\![s]\!]].$$

   (b) Agora considere o caso em que r é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$ e suponha por hipótese de indução que o resultado valha para cada t_i. Então

   $$\begin{aligned} [\![f(t_1,\ldots,t_n)[a := s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.20}}{=} [\![f(t_1[a := s], \ldots, t_n[a := s])]\!] \\ &\overset{\text{Def. 5.6}}{=} f^{\mathfrak{I}}([\![t_1[a := s]]\!], \ldots, [\![t_n[a := s]]\!]) \\ &\overset{\text{H.I.}}{=} f^{\mathfrak{I}}([\![t_1]\!][a \mapsto [\![s]\!]], \ldots, [\![t_n]\!][a \mapsto [\![s]\!]]) \\ &\overset{\text{Lem. 5.3(1)}}{=} f^{\mathfrak{I}}([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!])[a \mapsto [\![s]\!]] \\ &\overset{\text{Def. 5.6}}{=} [\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!][a \mapsto [\![s]\!]]. \end{aligned}$$

2. (a) Suponha que ϕ seja $\bot$. Então

$$\begin{aligned}
[\![\bot[a := s]]\!] &\overset{\text{Def. 2.21}}{=} [\![\bot]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \bot \\
&\overset{\text{Lem. 5.1(4)}}{=} \bot[a \mapsto [\![s]\!]] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} [\![\bot]\!][a \mapsto [\![s]\!]].
\end{aligned}$$

(b) A demonstração para o caso em que ϕ for da forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ e $t = s$ é completamente análoga a demonstração feita em no item 1(b) acima.

$\square$

Teorema C.1 (Solidez - [9] - Theorem 5.2.13)**.** A interpretação $\mathcal{I}$ é solida no seguinte sentido:

Se $\Phi \vdash \Psi$ é um sequente derivável, então $[\![\Phi \vdash \Psi]\!]$ é verdadeiro.

Demonstração. Façamos a demonstração dos casos restantes.

1. **(Hyp)** $\dfrac{}{\Phi', \phi' \vdash \phi', \Psi'}$

   Neste caso, $\Phi = \Phi', \phi'$ e $\Psi = \phi', \Psi'$. Então da definição de ínfimo e supremo e do fato de que $[\![\phi']\!] \in \{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}$ e $[\![\phi']\!] \in \{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}$ segue que

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq [\![\phi']\!] \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.$$

2. **($\bot$L)** $\dfrac{}{\Phi', \bot \vdash \Psi}$

   Aqui $\Phi = \Phi', \bot$. Como $\bot = [\![\bot]\!] \in \{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}$, segue da definição de ínfimo e do fato de $\bot$ ser o menor elemento de $\mathcal{L}$ que

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} \leq \underbrace{\bot}_{[\![\bot]\!]} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.$$

3. **(=R)** $\dfrac{\Phi, s = s \vdash \Psi}{\Phi \vdash \Psi}$

   Por hipótese de indução, $[\![\Phi, s = s \vdash \Psi]\!]$ é verdadeiro. Assim,

$$
\begin{aligned}
\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\} &\overset{\text{H.I.}}{\geq} \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, s = s\} \\
&= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge [\![s = s]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge ([\![s]\!] =^{\mathfrak{I}} [\![s]\!]) \\
&\overset{\text{Def. 5.2(1)}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}\right) \wedge \top \\
&\overset{(2.3)}{=} \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}.
\end{aligned}
$$

4. **(=L)** $\dfrac{\Phi', s' = s, \phi[a := s'] \vdash \Phi'}{\Phi', s' = s, \phi[a := s] \vdash \Phi'}$

   Temos que $\Phi = \Phi', s' = s, \phi[a := s]$ e $\Psi = \Phi'$. Da hipótese de indução temos que $[\![\Phi', s' = s, \phi[a := s'] \vdash \Phi']\!]$ é verdadeiro. Então

$$
\begin{aligned}
\bigvee\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Psi\} &\overset{\Psi=\Phi'}{=} \bigvee\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\} \\
&\overset{\text{H.I.}}{\geq} \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', s' = s, \phi[a := s']\} \\
&= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge [\![s' = s]\!] \wedge [\![\phi[a := s']]\!] \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge ([\![s']\!] =^{\mathfrak{I}} [\![s]\!]) \wedge [\![\phi[a := s']]\!] \\
&\overset{\text{Lem. 5.6(2)}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge ([\![s']\!] =^{\mathfrak{I}} [\![s]\!]) \wedge [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s']\!]] \\
&\overset{\text{Def. 5.2(2)}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge ([\![s']\!] =^{\mathfrak{I}} [\![s]\!]) \wedge [\![\phi]\!][a \mapsto [\![s]\!]] \\
&= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge [\![s' = s]\!] \wedge [\![\phi[a := s]]\!] \\
&= \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', s' = s, \phi[a := s]\}.
\end{aligned}
$$

5. **($\wedge$L)** $\dfrac{\Phi', \phi_1, \phi_2 \vdash \Psi}{\Phi', \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Psi}$

   Neste caso, $\Phi = \Phi', \phi_1 \wedge \phi_2$. Por hipótese de indução, $[\![\Phi', \phi_1, \phi_2 \vdash \Psi]\!]$ é verdadeiro. Então,

$$
\begin{aligned}
\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\} &\overset{\text{H.I.}}{\geq} \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', \phi_1, \phi_2\} \\
&= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge [\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!] \\
&= \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge ([\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!]) \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge [\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] \\
&= \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', \phi_1 \wedge \phi_2\}.
\end{aligned}
$$

6. **($\vee$R)** $\dfrac{\Phi \vdash \psi_1, \Psi' \qquad \Phi \vdash \psi_2, \Psi'}{\Phi \vdash \psi_1 \wedge \psi_2, \Psi'}$

Temos $\Psi = \psi_1 \wedge \psi_2, \Psi'$. Aplicando a hipótese de indução, obtemos que $[\![\Phi \vdash \psi_1, \Psi']\!]$ é verdadeiro. Então,

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\} &\overset{\text{H.I.}}{\leq} \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \Psi'\} \\
&\overset{(1)}{\leq} \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \psi_2, \Psi'\} \\
&\overset{(2)}{=} \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1 \wedge \psi_2, \Psi'\},
\end{aligned}$$

em (1) usamos a propriedade: $\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \Psi'\} \subseteq \{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \psi_2, \Psi'\}$ implica

$$\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \Psi'\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi_1, \psi_2, \Psi'\}.$$

Já em (2) repetimos o argumento do caso ($\wedge$**L**).

7. ($\neg$**L**) $\dfrac{\Phi' \vdash \psi', \Psi}{\Phi', \neg\psi' \vdash \Psi}$

Aqui $\Phi = \Phi', \neg\psi'$ e a hipótese de indução nos dá

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi', \Psi\}. \tag{C.1}$$

Como

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', \neg\psi'\} = \left(\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\}\right) \wedge [\![\neg\psi']\!]. \tag{C.2}$$

Daí, pela definição de ínfimo temos que

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi', \neg\psi'\} &\overset{(C.2)}{\leq} \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi'\} \\
&\overset{(C.1)}{\leq} \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \psi', \Psi\} \\
&= \left(\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}\right) \wedge [\![\psi']\!] \\
&\leq \left(\left(\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}\right) \wedge [\![\psi']\!]\right) \wedge [\![\neg\psi']\!] \\
&= \left(\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}\right) \wedge ([\![\psi']\!] \wedge [\![\neg\psi']\!]) \\
&\overset{\text{Def. 5.6}}{=} \left(\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}\right) \wedge ([\![\psi']\!] \wedge \neg[\![\psi']\!]) \\
&= \left(\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}\right) \wedge \bot \\
&\overset{(2.3)}{=} \bot \\
&\leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi\}.
\end{aligned}$$

8. ($\neg$**R**) $\dfrac{\Phi, \phi' \vdash \Psi'}{\Phi \vdash \neg\phi', \Psi'}$

Temos que $\Psi = \neg\phi', \Psi'$. A hipótese de indução nos fornece

$$\bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi, \phi'\} \leq \bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \Psi'\}. \tag{C.3}$$

Digamos que $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ e $\Psi' = \{\psi'_1, \ldots, \psi'_m\}$. Então (C.3) pode ser escrito como

$$[\![(\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n)]\!] \wedge [\![\phi']\!] \leq [\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!]. \tag{C.4}$$

Sendo assim,

$$\begin{array}{rcl}
\bigvee\{[\![\psi]\!] \mid \psi \in \neg\phi', \Psi'\} & = & ([\![\psi'_1]\!] \vee \ldots \vee [\![\psi'_m]\!]) \vee [\![\neg\phi']\!] \\
& \overset{(C.4)}{\geq} & (([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \wedge [\![\phi']\!]) \vee [\![\neg\phi']\!] \\
& \overset{(\mathbf{D}\wedge)}{=} & (([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \vee [\![\neg\phi']\!]) \wedge ([\![\phi']\!] \vee [\![\neg\phi']\!]) \\
& \overset{\text{Def. } 5.6}{=} & (([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \vee [\![\neg\phi']\!]) \wedge ([\![\phi']\!] \vee \neg[\![\phi']\!]) \\
& = & (([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \vee [\![\neg\phi']\!]) \wedge \top \\
& \overset{(2.3)}{=} & ([\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!]) \vee [\![\neg\phi']\!] \\
& \overset{(2.1)}{\geq} & [\![\phi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\phi_n]\!] \\
& = & \bigwedge\{[\![\phi]\!] \mid \phi \in \Phi\}.
\end{array}$$

□