



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

TESE DE DOUTORADO

---

**Transferência de energia entre partículas e  
ondas gravitacionais**

---

*Autor:*  
Fernando Lessa Carneiro

*Orientador:*  
Dr. Sérgio Costa Ulhoa

*Tese submetida para cumprir os pré-requisitos  
para a obtenção do grau de Doutor em Física*

*no*

Instituto de Física

1 de Julho de 2022



*expertī: revocāte animōs, maestumque timōrem  
mittite: forsan et haec ōlim meminisse iuvābīt.*

Publius Vergilius Maro, Aeneis, I, 202-203

*antros sem dano maior. Criaí ânimo; o pálido medo  
deixai de lado. Tudo isso há de ser recordado algum dia.*

Trad. Carlos Alberto Nunes, Enéida, I, 202-203



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

## *Resumo*

### **Transferência de energia entre partículas e ondas gravitacionais**

As ondas gravitacionais não-lineares são soluções exatas das equações de Einstein, correspondendo geometricamente a uma congruência geodésica nula no espaço-tempo, cujas superfícies perpendiculares representam o espaço plano bidimensional. Fisicamente tais soluções representam ondas progressivas propagando-se na velocidade da luz. Nesta tese, o tensor métrico representando tais ondas é obtido a partir de imposições físicas sobre um espaço-tempo geral, com a interação entre as ondas e partículas livres investigada por meio da transferência de energia entre elas. Modelando-se ondas pulsantes polarizadas, descobre-se que uma onda gravitacional pode fornecer ou remover energia de uma partícula, a depender das condições iniciais da partícula e de parâmetros da onda. Encontra-se valores discretos para o parâmetro, relacionado ao comprimento do pulso, fornecendo máxima transferência de energia. Nota-se uma relação entre as direções das acelerações inerciais do espaço-tempo e o centro de energia do mesmo, calculada utilizando-se as ferramentas do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG). Destarte, propõe-se uma descrição, generalizando o teorema trabalho-energia clássico, descrevendo a transferência de energia e a validade do mesmo é corroborada numericamente. Estende-se as investigações para ondas gravitacionais mais gerais, as ondas giratônicas, com a energia e o momento angular dessas ondas calculadas no TERG. A interação das ondas giratônicas e partículas é investigada, com a observação da transferência de energia e momento angular entre a onda e a partícula. A partir das distinções qualitativas entre os casos, infere-se a relação entre algumas quantidades conservadas do campo gravitacional e das partículas. A partir dos resultados obtidos, especula-se a possibilidade das ondas gravitacionais serem interpretadas como defeitos topológicos no espaço-tempo.



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

*Abstract***Energy transfer between particles and gravitational waves**

The non-linear gravitational waves are exact solutions to Einstein's equations, geometrically corresponding to a null geodesic congruence in spacetime, with the perpendicular surfaces representing the two-dimensional flat spacetime. Physically, these solutions represent progressive waves propagating at the speed of light. In this thesis, the metric tensor corresponding to such waves is obtained from physical impositions on a general spacetime. The interaction between the waves and the particles is analyzed from the energy transfer between the waves and the particles. By modeling pulse-polarized waves, it is discovered that gravitational waves can give or remove energy from a particle, depending on the initial conditions of the particle and the wave parameters. Discrete values for the wave parameter, related to the pulse length, are found for which a maximum energy transfer occurs. A relation is found between the inertial accelerations of the spacetime, calculated from the expressions of the Teleparallel Equivalent of the General Relativity (TEGR). Ergo, a generalization of the classical work-energy relation is proposed to describe the energy transfer, and its validity is numerically corroborated. By extending the investigation to more general gravitational waves, the energy and angular momentum of the gyratonic waves are calculated within TEGR. The interaction between the gyratonic waves and particles is also investigated, and some relations conserved quantities of the gravitational field and particles are related. From the results obtained, it is speculated that gravitational waves can be interpreted as topological defects in space-time.





## *Agradecimentos*

Muitas graças faço aos que me ajudaram e acompanharam ao longo dos últimos quatro anos. Impossível seria nomear a todos em palavras escritas, mas essas poucas importam na maior eloquência real do que foi, ainda que Noto não as leve como as ditas. Primeiro agradeço ao meu orientador Sérgio que tão pacientemente me guiou, disponível nas dúvidas e opiniões e revisões esteve. Agradeço pela orientação, onde fui livre para pensar, errar e também acertar, mas nunca só. Agradeço ao meu antigo orientador do mestrado José Francisco, que sempre manteve-se disposto quando o procurei e tão pacientemente ajudou-me a escrever com o rigor necessário em outra. Não menos graças faço ao José Wadih, que inicialmente conheci e despertou-me o interesse pelo estudo da gravitação, mantendo-se sempre aberto às discussões e compartilhando as inúmeras ideias dele oriundas, sem as quais, certamente, eu não teria tanto expandido minhas concepções sobre a natureza do fenômeno gravitacional, e também da filosofia natural como um todo. Agradeço também ao contribuinte Brasileiro que tão arduamente permitiu-se o auxílio financeiro obtido por meio da CAPES.

Em seguida, graças faço à minha esposa Bruna que esteve ao meu lado ao longo desses anos, desde o toque da Aurora com seus dedos de rosa até as carruagens do Sol mergulharem no mar cor de vinho. Por seguinte aos meus pais Marcelo e Josane, cujo esforço permitiu tranquilamente meu retorno das praias da ignorância até as praias da Lavínia, que são a certeza plena da mesma, e nem mesmo precisei circundar as margens do Avernus ou consultar aquele cego do outro lado do Rio Oceano. Apesar de não árdua jornada ter sido, mas agradável, foi a minha. Mesmo que não memorável para ser gravada em hexâmetros, carregarei pelos breves anos que seguirei do lado de cá do Rio, não em palavras ou pensamentos, mas na essência superior à razão, como registrado ficou por Agostinho.

Postremō maximās grātiās agō Deō, quia nōn est alius quī pugnet prō nōbīs nisi ille. Sī prāvē maleque scribō, nescio, ille autem certē mē intellegere potest. Cōgitāre atque cōnārī difficilior quam scribere est, neque verbīs sōlīs satis grātiās agere possum, sed ille mē liberē vīvere sīvit, igītur cōnārī possum. Nescium virum esse est putāre aliquid scīrē et ego cotīdiē id mihi loquor quia nesciendō sumus vīncī catēnīs nesciōrum. Semper liber fuī ad errandum et ad rēctē faciendum, ergō grātiās agō illī, neque quisquam quī liber nātus est libertātem arcessere dēsinit. Gaudeō mē caecum nōn esse, putō nōn esse, quia nimis difficilis est vērītātem cernere hōc tempore ubi mēntīrī fatērī est et fatērī mentīrī. Dēsīnō hic, sed sinō tē pergere. Valēte.



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Relatividade Geral</b>	<b>7</b>
1.1 Cálculo em variedades . . . . .	8
1.1.1 Tensores . . . . .	8
1.1.2 Derivação Covariante . . . . .	10
1.1.3 Geodésicas . . . . .	11
1.2 Derivadas de Lie e vetores de Killing . . . . .	12
1.2.1 Derivadas de Lie . . . . .	12
1.2.2 Vetores de Killing . . . . .	14
1.3 Curvatura . . . . .	15
1.4 Congruências geodésicas . . . . .	19
1.4.1 Geodésicas temporais . . . . .	20
1.4.2 Geodésicas nulas . . . . .	25
1.5 Equações dinâmicas do campo gravitacional . . . . .	28
<b>2 Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral</b>	<b>33</b>
2.1 Campo de tetradas e referenciais . . . . .	35
2.2 Equações de campo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral . . . . .	37
2.2.1 Transporte paralelo . . . . .	38
2.2.2 Equações de campo . . . . .	40
2.3 Leis de conservação nas equações de campo do TERG . . . . .	41
2.3.1 Energia do campo gravitacional . . . . .	41
2.3.2 Momento angular do campo gravitacional . . . . .	43
2.4 Estabelecimento de um referencial estático . . . . .	45
<b>3 Ondas gravitacionais planas</b>	<b>49</b>
3.1 Ondas planas de raios paralelos (pp-waves) . . . . .	50
3.1.1 Tensor métrico das pp-waves . . . . .	51
3.1.2 Soluções das equações de Einstein . . . . .	53
3.1.3 Classificação da solução . . . . .	55
3.2 Propriedades físicas das pp-waves . . . . .	56
3.2.1 Quadrivetor energia-momento . . . . .	58
3.2.2 Momento angular . . . . .	60
3.3 Ondas gravitacionais giratônicas . . . . .	61

<b>4</b>	<b>Interação entre partículas e pp-waves</b>	<b>65</b>
4.1	Movimento de partículas no espaço-tempo das pp-waves . . . . .	66
4.2	Energia cinética de partículas livres e o efeito memória . . . . .	70
4.3	Variações da energia cinética de partículas no espaço-tempo das pp-waves . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Teorema trabalho-energia para partículas na presença de pp-waves</b>	<b>79</b>
5.1	Distribuição espacial da densidade de energia das pp-waves . . . . .	80
5.2	Centro de energia do espaço-tempo das pp-waves . . . . .	83
5.3	Relação trabalho-energia para ondas gravitacionais . . . . .	87
5.3.1	Acelerações inerciais . . . . .	88
5.3.2	O teorema trabalho-energia para as pp-waves . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Energia e momento angular de ondas gravitacionais giratônicas</b>	<b>95</b>
6.1	Energia do campo giratônico . . . . .	96
6.1.1	Solução giratônica multipolar . . . . .	98
6.1.2	Soluções com fonte não giratônicas . . . . .	100
6.2	Momento angular do campo giratônico . . . . .	103
6.2.1	Solução axialmente simétrica . . . . .	104
6.3	Interação com partículas livres . . . . .	105
	<b>Conclusões</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Condições de energia</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Formalismo Hamiltoniano do TERG</b>	<b>115</b>
<b>C</b>	<b>Ondas gravitacionais como defeitos topológicos</b>	<b>119</b>

*Vēritātī, quae prae omnīs et apud Deum est, tantum dēdicō.*



# Introdução

As teorias gravitacionais descrevem os fenômenos observados decorrentes da interação entre uma propriedade única das partículas, suas massas gravitacionais. A primeira grande teoria gravitacional, historicamente registrada, foi a Lei da Gravitação Universal de Newton, onde descreveu-se fenômenos qualitativamente distintos a partir da mesma teoria, e.g., movimentos lineares de queda livre na superfície da Terra e movimentos circulares dos astros. Subsequente à apresentação dessa teoria e da Mecânica Clássica, notou-se a semelhança numérica, da ordem de  $10^{-11}$  [1], entre as massas gravitacionais e as massas inerciais, i.e., as responsáveis pela resistência de um corpo à aceleração. Nos séculos posteriores, utilizou-se a teoria dinâmica gravitacional Newtoniana, associada à cinemática da Mecânica Clássica, para a descrição de diversos fenômenos observados na natureza, sempre com sucesso na comparação entre as previsões teóricas e os dados experimentais. Em 1846, a Lei da Gravitação Universal Newtoniana transformou os anais da filosofia natural ao ser capaz de não apenas explicar o que era observado, mas prever fenômenos ainda desconhecidos. Nesse ano Urbain Le Verrier, utilizando as ferramentas da gravitação e mecânica Newtoniana, notou as discrepâncias até então observadas na órbita de Urano poderem ser explicadas pela presença de um planeta ainda não descoberto. Previu tal planeta estar localizado, na esfera celeste, entre as constelações de Capricórnio e Aquário. No mesmo ano, utilizando tais previsões, Johann Gottfried Galle e Heinrich Louis d'Arrest confirmaram a existência do planeta, posteriormente denominado Netuno, com precisão de  $1^\circ$  em relação à previsão teórica [2].

Nos anos seguintes, Le Verrier analisou o deslocamento sofrido pelo periélio dos planetas que orbitam o Sol. A Mecânica Clássica na resolução do problema de dois corpos, juntamente à Lei da Gravitação Universal, prevê as órbitas planetárias fechadas descreverem geometricamente elipses regulares. Entretanto, observa-se o periélio das órbitas sofrerem deslocamentos a cada volta, provocadas por efeitos perturbativos dos demais planetas. Analisando o desvio do periélio de Mercúrio, Le Verrier notou uma discrepância significativa entre a previsão teórica e as observações experimentais [3], tentando explicar tal fenômeno como uma perturbação devido à presença de outro planeta desconhecido. O suposto planeta, entretanto, nunca foi observado e a comunidade acadêmica da época não sustentava, em sua maior parte, a ideia da existência entidades massivas não observadas para a sustentação de uma teoria. Nos anos seguintes, Le Verrier analisou o deslocamento sofrido pelo periélio dos planetas que orbitam o Sol. A Mecânica Clássica na resolução do problema de dois corpos, juntamente à Lei da Gravitação Universal, prevê as órbitas planetárias fechadas descreverem geometricamente elipses regulares. Entretanto, observa-se o periélio das órbitas sofrerem deslocamentos a cada volta, provocadas por efeitos perturbativos dos demais planetas. Analisando o desvio do periélio de Mercúrio, Le Verrier notou uma discrepância significativa entre a previsão teórica e as observações experimentais [3], tentando explicar tal fenômeno como uma perturbação devido à presença de outro planeta desconhecido. O suposto planeta, entretanto, nunca foi observado e a comunidade acadêmica da época não sustentava, em sua maior parte, a ideia da existência entidades massivas não observadas para a

sustentação de uma teoria.

No começo do século XX, Albert Einstein, observando a quase equivalência experimental entre as massas inercial e gravitacional, postulou o chamado Princípio da Equivalência, identificando tais massas como idênticas. Tal postulado o levou a uma teoria geométrica da gravitação, chamada Teoria da Relatividade Geral [4, 5]. Tal teoria descreve o fenômeno gravitacional geometricamente e uma de suas soluções analítica, chamada solução de Schwarzschild, para uma distribuição esférica de massa. As previsões da teoria para o movimento de partículas, em tal campo gravitacional, levam às previsões da gravitação Newtoniana quando assume-se a densidade da fonte do campo ser pequena. Todavia, a mesma possui uma previsão para o desvio do periélio das órbitas e as órbitas não são fechadas mesmo em um problema de dois corpos. Destarte, Einstein aplicou sua teoria ao movimento orbital de Mercúrio e obteve uma previsão para o desvio mais próxima ao observado experimentalmente. Uma teoria despenda-se de uma hipótese ao realizar previsões além do já observado e a primeira previsão da Relatividade Geral foi o desvio de um raio de luz pelo Sol. Um fóton é, por definição, uma partícula com massa nula. Portanto, se o fenômeno gravitacional manifesta-se por meio de forças, como na gravitação Newtoniana, não se espera desvio de um raio de luz distante passando nas proximidades do Sol. Porém, pela Relatividade Geral, a gravitação manifesta-se geometricamente, com a luz sofrendo um desvio pela própria geometria local do espaço-tempo nos arredores do Sol. A partir de tais premissas, Arthur Eddington e colaboradores observaram tal desvio experimentalmente durante um eclipse Solar em 1919 [6], corroborando a teoria de Einstein.

Posteriormente às observações de Eddington, muitos outros testes foram realizados sobre a Relatividade Geral, e.g., ecos de radar, discos de acreção ao redor de objetos compactos, precessão geodésica de giroscópios [7]. Apesar dos experimentos corroborativos serem inúmeros, fundamentam-se em grande parte sobre a solução esféricamente simétrica de Schwarzschild. Contudo, a teoria possui dezenas de soluções exatas conhecidas além da de Schwarzschild, sendo algumas físicas e outras não, e.g., a solução de Kerr obtida da solução de Schwarzschild a partir do formalismo de Newman-Penrose, representando o espaço-tempo ao redor de um corpo esférico em rotação; a solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW) representando o espaço maximamente simétrico, ou seja, isotrópico e homogêneo; a solução das ondas gravitacionais; *cetera*. As ondas gravitacionais são uma classe de soluções das equações de campo da teoria, chamadas equações de Einstein, descrevendo configurações gravitacionais propagando-se na velocidade da luz, são assim chamadas por analogia às ondas eletromagnéticas. Tais ondas aparecem em dois contextos na Relatividade Geral: na forma de ondas planas para soluções exatas das equações de campo da teoria e na forma de ondas linearizadas em um limite de campo fraco das equações de campo, assumido a grandes distâncias à fonte. As soluções linearizadas são amplamente conhecidas na literatura e fazem parte do material didático de livros textos sobre a Relatividade Geral, mas não são soluções exatas das equações de Einstein.

As ondas gravitacionais ensejam outras possibilidades experimentais para a Relatividade Geral. Os experimentos realizados, cujo campo gravitacional possua como origem o Sistema Solar, são inevitavelmente limitados à solução de Schwarzschild. Devido as ondas gravitacionais se apresentarem com natureza propagativa, experimentos com elas podem ser realizados na Terra, mesmo com sua origem fora do Sistema Solar. Experimentos relacionados às ondas gravitacionais envolvem a detecção das mesmas, com as primeiras tentativas utilizando grandes cilindros de alumínio, chamados cilindros de Weber [8]. Tais cilindros possuem uma frequência de



vibração natural em torno de  $1660 \text{ Hz}$  e cristais piezoelétricos são conectados a eles. Quando uma onda gravitacional passa por tais cilindros, variações de comprimento ocorrem e são medidas por sinais elétricos emitidos pelos cristais. Contudo, apenas as variações de comprimento devido a agitação térmica são da ordem de  $10^{-16} \text{ m}$ , sendo da ordem de grandeza esperada para as variações devido à passagem das ondas. Portanto, tais detecções experimentais são difíceis, dependendo da construção de histogramas de ruídos e a filtragem de padrões anômalos a partir do histórico. A intrínseca dificuldade de tais detecções levou a várias tentativas por Weber [8, 9, 10], entre outros [11], mas nenhuma com sucesso. Posteriormente às tentativas de Weber, medições indiretas ocorreram advindas da observação de estrelas de nêutrons [12, 13], conduzindo o interesse novamente às detecções. Destarte, outras possibilidades para a detecção direta foram consideradas, em especial por meio de interferômetros de laser. Tais interferômetros utilizam a interferência entre raios de luz distinguidos por uma diferença de fase entre si, diferença oriunda pela reflexão em um espelho que sofre influência de uma onda gravitacional. Dentre os projetos para detecção de ondas gravitacionais por interferometria laser, o mais proeminente foi o *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO), resultando em uma famosa detecção em 2015 [14]. A detecção levou cientistas envolvidos no projeto a serem laureados com o prêmio Nobel pelas contribuições na detecção, mas uma descoberta científica só é consolidada pelo escrutínio histórico de múltiplas observações similares por grupos independentes, sendo necessária cautela para a confirmação inequívoca da existência de ondas gravitacionais. Além disso, a própria detecção original apresenta questionamentos na comunidade [15, 16].

Apesar das inerentes dificuldades relacionadas a sua detecção, as ondas gravitacionais apresentam uma importante possibilidade para a compreensão das teorias descrevendo o fenômeno gravitacional. A detecção das ondas gravitacionais apresenta um grande trunfo para a Relatividade Geral e para a vertente dedutiva da física. Malgrado o trunfo sobre as previsões dinâmicas da Relatividade Geral, a existência, ou mesmo a previsão, de ondas gravitacionais atinge um ponto sensível da teoria, a existência de energia gravitacional. Desde o início da Relatividade Geral, não foi possível definir um tensor energia-momento para o campo gravitacional dentro da teoria. Apesar de existirem pseudo-tensores, como o de Landau–Lifshitz [17], que possuem natureza física quando integrados assintoticamente, a formulação padrão da Relatividade Geral não possui um verdadeiro tensor energia-momento definido. O produto da integração dos pseudo-tensores só possui realidade física em espaços-tempo assintoticamente planos, visto os pseudo-tensores serem entidades dependentes do sistema de coordenadas. Mesmo para tais espaços-tempo, a energia do campo gravitacional possui realidade apenas globalmente, i.e., a energia gravitacional não pode ser localizada. As infrutíferas tentativas de obtenção de um verdadeiro tensor energia-momento a partir do formalismo métrico (vide o começo do Capítulo 2), levaram parte da comunidade acadêmica a assumir a energia do campo gravitacional não poder ser localizada. Entretanto, uma onda gravitacional, assim como outra onda progressiva, transporta energia entre duas regiões do espaço. Dessa forma, a energia é transportada de uma região localizada do espaço para outra igualmente localizada. Outrossim, uma partícula é um objeto localizado no espaço e, conforme mostra-se no Capítulo 4, pode perder ou ganhar energia permanentemente ao interagir com uma onda gravitacional. Tal antítese presente na formulação métrica padrão da Relatividade Geral leva à necessidade de considerar-se outra formulação gravitacional, chamada Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG). O TERG é uma teoria gravitacional cuja variável fundamental é um campo

de tétradas, ao invés do tensor métrico, com equações dinâmicas equivalentes à Relatividade Geral, mas com um verdadeiro tensor energia-momento gravitacional definido e, conseqüentemente, um quadrivetor energia-momento total, compreendendo o campo gravitacional e a fonte (campos de matéria-radiação).

Assim como as observações planetárias, as investigações e compreensão das ondas gravitacionais apresentam um campo de teste para teorias gravitacionais. Contudo, distintamente de um planeta, as ondas gravitacionais não são diretamente observadas, com a observação sendo indireta por meio de seu efeito em partículas. Uma partícula, massiva ou não, também é uma fonte de campo gravitacional, logo o estudo da interação entre uma partícula e uma onda gravitacional depende da modelagem do campo gravitacional devido à combinação onda e partícula. As equações de Einstein não são lineares, tornando a obtenção de uma superposição de duas soluções não trivial. Uma partícula de massa  $m$  quando, solta em um campo gravitacional gerado por outra massa  $M$ , segue um movimento geodésico, visto não haver outras forças sobre ela. Se a massa da partícula teste for desprezível em relação à massa que gera o campo gravitacional, i.e.,  $m \ll M$ , seu movimento é descrito com boa precisão pelas equações geodésicas  $\ddot{x}^\mu + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$ , onde os símbolos de Christoffel  $\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$  são calculados a partir do tensor métrico do campo gravitacional gerado pelo parâmetro  $M$ . A partícula possui um tensor energia-momento, sendo ele a fonte de outro campo gravitacional. Apesar de se conhecer o campo gravitacional devido à partícula de massa  $m$  e devido ao corpo de massa  $M$ , a determinação do campo gravitacional devido à combinação dessas massas é difícil de ser realizada. Como o campo gravitacional é não linear, ele pode atuar como fonte dele mesmo [7]. Dessa forma, além do campo gravitacional resultante depender dos campos gravitacionais de  $m$  e  $M$ , ele também dependerá da interação entre os campos gravitacionais da partícula  $m$  e do corpo  $M$ . Como as equações são não lineares, não é possível determinar trivialmente como essa interação ocorre, visto a solução final não ser simplesmente a soma das soluções individuais, como ocorre na gravitação Newtoniana. Dessa forma, a suposição, que uma partícula segue o movimento geodésico de um campo gravitacional externo sem o alterar, é aproximada e tal aproximação é tão boa quanto menor for o determinante do tensor energia-momento dessa partícula em relação ao tensor-energia momento da fonte do campo gravitacional.

A não-linearidade do campo gravitacional implica a não-linearidade da cinética relativística, ocasionando grande dificuldade no estudo das interações entre um campo gravitacional e partículas. Pela graça do exemplo, uma partícula em repouso para um observador no infinito não possui energia cinética associada a ela, mas ao ser atraída gravitacionalmente por um corpo massivo, adquire energia cinética. Considerando a partícula e o corpo como os únicos objetos presentes, a energia adquirida pela partícula deve vir do campo gravitacional. Destarte, pela conservação da energia, a energia da nova configuração é a energia inicial do campo menos a variação de energia da partícula. Portanto, apesar da dinâmica ser não-linear, a adição de energias é linear. Tal condição, assim como em problemas clássicos de colisão, permite a extração de certas informações do sistema sem a modelagem da interação. Conseqüentemente a transferência de energia permite interessantes análises na interação entre as partículas e as ondas gravitacionais. A partir de tais premissas, i.e., a compreensão das ondas gravitacionais ser intermediada pela compreensão da interação das mesmas com partículas, esta tese tem como objetivo o estudo da interação de partículas com ondas gravitacionais a partir da transferência de energia entre si.

Esta tese divide-se, além desta Introdução, em três Capítulos introdutórios iniciais revendo resultados já conhecidos na literatura, além da abordagem para obtenção do tensor métrico das ondas gravitacionais da Referência [18]; em três Capítulos

contendo os novos resultados publicados nas Referências [19, 20, 21, 22, 23]; nas Conclusões, referentes aos resultados obtidos, e nos Apêndices, que complementam algumas citações no texto cujo conhecimento dos detalhes não impede o fluxo normal dos mesmos.

Trata-se nesta tese com ondas gravitacionais planas, que se apresentam como soluções exatas das equações dinâmicas da Relatividade Geral. Desta forma, esta tese começa com uma breve revisão da teoria da Relatividade Geral no Capítulo 1. Apresenta-se as ferramentas matemáticas necessárias da geometria Riemanniana e a notação utilizada. As ondas gravitacionais planas são estabelecidas em analogia às eletromagnéticas planas. Define-se as frentes de onda das ondas eletromagnéticas como superfícies onde a fase e amplitude da onda são aproximadamente constantes, sendo exatas no limite infinitesimal. Paralelo aos vetores normais a essas superfícies, uma congruência pode ser construída, com as curvas chamadas raios de luz, com as ondas eletromagnéticas podendo ser geometricamente estudadas a partir do comportamento dos raios de luz. Analogamente, as ondas gravitacionais planas podem ser compreendidas geometricamente a partir das congruências geodésicas em um espaço-tempo. Destarte, revisa-se no Capítulo 1 as congruências geodésicas temporais e nulas. A compreensão das congruências geodésicas ajudará a mitigar as dificuldades inerentes à não-linearidade das equações de Einstein, também apresentadas no mesmo Capítulo, no rastreamento das soluções de ondas planas.

No Capítulo 2, apresenta-se uma breve revisão histórica das dificuldades em definir-se um tensor energia-momento gravitacional dentro da Relatividade Geral. A partir das condições propostas por Christian Møller, ver-se-á os campos de tétradas  $e^a{}_\mu$  serem as variáveis fundamentais do campo gravitacional como necessário à definição de tal tensor. Satisfazendo as condições de Møller, apresenta-se o TERG é apresentado e as leis de conservação dele oriundas, i.e., as definições de energia-momento, momento angular e centro de inércia. Os campos de tétradas  $e^a{}_\mu$  possuem dezesseis componentes independentes enquanto o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  apenas dez. Seguindo a proposta de Bahram Mashhoon [24, 25], identificar-se-á os seis graus de liberdade adicionais com a dinâmica do observador, ou seja, suas três acelerações espaciais linearmente independentes e suas três rotações. Sendo assim, dedica-se o final do Capítulo à revisão do papel do observador no TERG.

O Capítulo 3 inicia-se com uma breve revisão histórica das ondas gravitacionais desde a proposta inicial de Einstein [26], até a demonstração teórica da viabilidade teórica da existência das mesmas por Hermann Bondi [27]. Posteriormente, utiliza-se as ferramentas apresentadas, sobre congruências geodésicas, juntamente à específicas restrições físicas e o tensor métrico do espaço-tempo das ondas planas é obtido. Tais soluções são especificadas por funções das coordenadas perpendiculares à direção nula propagação e de uma coordenada nula  $u$ , sendo a dependência com as primeiras obtida pelas equações de Einstein e também apresentadas no Capítulo. Contínuo, revisa-se algumas propriedades físicas das ondas gravitacionais, calculadas utilizando o TERG, disponíveis na literatura [28, 29] e, por fim, apresenta-se uma classe mais geral de ondas gravitacionais, chamadas giratônicas, contendo informações sobre o caráter rotacional da fonte.

Nos Capítulo 4 os primeiros resultados desta tese são apresentados. A análise da interação geodésica entre uma partícula e uma onda gravitacional mostram a existência de um efeito memória, i.e., após uma onda gravitacional atingir uma partícula, o estado cinemático da última é permanentemente alterado. A alteração do estado cinemático implica uma alteração da energia cinética  $K$  da partícula e a partícula sofre uma variação de energia  $\Delta K$  devido à passagem da onda. A análise da

troca de energia entre um campo gravitacional e uma partícula necessita da determinação da energia da partícula em um espaço-tempo curvo, o que não é uma tarefa trivial. As pp-waves permitem a modulação de seus pulsos, que podem ser modelados como uma Gaussiana da coordenada nula  $u$ , tornando o espaço-tempo assintoticamente plano em tal coordenada. Sendo assim, antes e a após a passagem da onda o espaço-tempo é plano, com a definição clássica de energia cinética por unidade de massa  $K = \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v})$ , onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula, válida. Logo, a variação de energia  $\Delta K$  pode ser computada pela diferença entre as energias cinéticas clássicas da partícula antes e após a passagem da onda. Utilizando tais conceitos, estuda-se a transferência de energia entre partículas e ondas gravitacionais, mostrando que uma onda gravitacional pode fornecer ou remover energia de uma partícula, a depender dos seus parâmetros e das condições iniciais da partícula. Dedicar-se o remanescente do Capítulo à determinação dos efeitos que os parâmetros da onda, e.g., amplitude e largura do pulso, possuem sobre a transferência de energia, com uma interessante estrutura *quasi*-periódica obtida, com os valores da largura do pulso, onde não ocorre efeito memória e valores onde a transferência de energia é máxima, oscilando periodicamente.

No Capítulo 5, investiga-se a distribuição das ondas gravitacionais no espaço a partir de sua densidade de energia e do centro de energia (inércia) da mesma. A partir do mapeamento das regiões, nota-se as acelerações inerciais do espaço-tempo direcionarem as partículas para regiões de maior densidade de centro de energia. Considerando a semelhança existente entre tal comportamento e a física clássica, propõe-se uma relação trabalho-energia envolvendo a variação da energia da partícula  $\Delta K$  e as acelerações inerciais do espaço-tempo, com sua validade corroborada numericamente com erro menor que dois por cento.

No Capítulo 6, algumas investigações realizadas nos dois Capítulos anteriores são estendidas às ondas giratônicas. Outrossim, calcula-se a energia gravitacional e o momento angular das ondas giratônicas, generalizando os resultados das Referências [28, 29]. Como resultado, obtêm-se expressões generalizadas que levam às conhecidas para as ondas gravitacionais comuns (não-giratônicas) quando o termo giratônico  $J$  é escolhido como nulo. Distintamente da energia total das ondas gravitacionais comuns, sempre negativas, a energia das ondas giratônicas pode assumir valores positivos. A partir da comparação entre as propriedades físicas de ambas classes de soluções e o movimento geodésico de partículas em tais espaços-tempo, infere-se sobre os efeitos de algumas propriedades do espaço-tempo no comportamento das partículas, e.g., a dependência da variação de momento angular da partícula com a existência de densidade de momento angular radial do campo gravitacional.

Ao longo desta tese, a seguinte notação é utilizada: os índices do espaço-tempo são denotados por letras Gregas  $\mu, \nu, \dots$  e os índices locais  $SO(3,1)$  são indicados por letras Latinas  $a, b, \dots$ , indo de 0 a 3. Índices do tempo e espaço são indicados como  $\mu = 0, i$  e  $a = (0), (i)$ , respectivamente. O campo de tétradas é indicado por  $e^a{}_\mu$  e o tensor do espaço-tempo plano de Minkowski  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  levanta e abaixa os índices de Lorentz, enquanto o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  levanta e abaixa os índices do espaço-tempo. O sistema de unidades geometrizado é utilizado, i.e.,  $G = c = 1$ .

## Capítulo 1

# Relatividade Geral

As ondas gravitacionais são uma manifestação dinâmica direta das equações de Einstein para o campo gravitacional. Destarte, esta tese começa com uma revisão dessa teoria. Devido à teoria da gravitação de Einstein ser descrita em uma variedade curva Riemanniana, este Capítulo inicia-se introduzindo importantes aspectos de geometria diferencial em espaços Riemannianos. Sustentadas sobre tais definições, aspectos sobre a simetria dessas variedades são introduzidos e um método para determinar a existência de curvatura na variedade é apresentado. Com ampla utilidade na investigação de soluções exatas das equações de campo gravitacionais, as congruências de curvas são apresentadas e relacionadas à curvatura das variedades. Finalmente, as equações de Einstein são deduzidas a partir do princípio variacional.

Corpos em movimento em um campo gravitacional possuem a importante característica de suas acelerações não dependerem de suas massas, i.e., um corpo de massa  $m$  cai com a mesma aceleração  $\vec{g}$  na Terra que um corpo de massa  $2m$ , quando sujeitos apenas à gravidade. Tal fato levou Einstein a introduzir uma descrição do efeito gravitacional a partir de uma geometria do espaço, e não mais a partir de uma força, como ocorria na gravitação Newtoniana. Similar a tal movimento, apresenta-se o movimento de uma partícula, na ausência de campo gravitacional, sujeita a uma aceleração  $\vec{a} = -\vec{g}$ . Se fosse apenas por esse fato, seria sempre possível escolher um sistema de coordenadas ao redor de um ponto  $P$  onde nos arredores, desse ponto, não se mediria efeito gravitacional. Entretanto, ao colocar-se dois corpos em queda livre (apenas sob a influência da gravidade) separados por uma distância  $\vec{\xi}(t = 0)$  inicialmente, após um tempo  $t$  não nulo, tal distância terá diminuído, i.e.,  $\vec{\xi}(t = 0) \neq \vec{\xi}(t > 0)$ . Portanto, o campo gravitacional é não uniforme e não existe uma região ao redor de um ponto onde o campo gravitacional pode ser eliminado apenas pela escolha de um sistema de coordenadas distinto.

Conforme exposto acima, a gravidade é um efeito resultante da não homogeneidade do campo gravitacional, sendo computada pela variação do intervalo entre dois eventos, ou seja, através do elemento de linha no espaço quadrimensional descrito pelas coordenadas  $x^\mu = (x^0, x^i)(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.0.1)$$

onde duas letras gregas contraídas indicam um somatório em acordo à convenção de Einstein. As quantidades  $g_{\mu\nu}$  são funções das coordenadas  $x^\mu$ . Se o espaço-tempo é plano, ou seja, não há efeito gravitacional, ele é chamado espaço-tempo de Minkowski. O espaço plano descrito em coordenadas Cartesianas possui o elemento de linha (1.0.1) descrito por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.0.2)$$

Nas coordenadas Cartesianas, tem-se  $g_{00} = -1$ ,  $g_{ij} = -1$  e  $g_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . Se, em algum sistema de coordenadas, o elemento de linha pode ser escrito como (1.0.2), ele é dito Galileano [17]. Com isso, um espaço-tempo é dito plano se existe um sistema de coordenadas  $x'^{\mu}$  em que o elemento de linha (1.0.1) pode ser escrito na forma (1.0.2); e é dito curvo se não existe tal sistema de coordenadas.

Compreender como o cálculo diferencial é generalizado para o estudo em espaços-tempos planos, como os descritos pelo elemento de linha (1.0.2), para espaços-tempo mais gerais (1.0.1) é o objetivo da seção que se segue.

## 1.1 Cálculo em variedades

Devido à não uniformidade do campo gravitacional, o fenômeno da gravidade é estudado em um espaço de dimensão e curvatura arbitrárias, chamados formalmente variedades. Destarte, é necessário desenvolver-se uma geometria quadridimensional arbitrária em sistema de coordenadas curvilíneas, começando pela definição dos objetos geométricos de maior interesse físico: os tensores.

### 1.1.1 Tensores

Sejam dois sistemas de coordenadas arbitrários  $x^{\mu}$  e  $x'^{\mu}$ , suas diferenciais relacionam-se por uma transformação de coordenadas do tipo [17]

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu}. \quad (1.1.1)$$

Todas as quantidades agregadas  $A^{\mu}$  que se transformam como (1.1.1) são chamadas quadrivetores contravariantes. Os chamados componentes contravariantes  $A^{\mu}$  de um quadrivetor  $\mathbf{A}$  são definidas como aquelas que se transformam como

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} A'^{\nu} \quad (1.1.2)$$

entre dois sistema de coordenadas arbitrários  $x^{\mu}$  e  $x'^{\mu}$ . O gradiente de um escalar  $\phi$  se transforma como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}}. \quad (1.1.3)$$

Analogamente, todas as quantidades agregadas  $A_{\mu}$  que se transformam como na equação (1.1.3) são chamados quadrivetores covariantes e os componentes covariantes  $A_{\mu}$  do quadrivetor  $\mathbf{A}$  são definidos como aqueles que satisfazem

$$A_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A'_{\nu}. \quad (1.1.4)$$

Um quadrivetor  $\mathbf{A}$  pode ser escrito tanto em função de seus componentes covariantes quanto contravariantes [7], i.e.,

$$\mathbf{A} = A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu}, \quad (1.1.5)$$

onde os vetores de base  $\mathbf{e}_{\mu}$  e  $\mathbf{e}^{\mu}$  formam um sistema recíproco

$$\mathbf{e}^{\mu} \mathbf{e}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 0 \forall \mu \neq \nu, \\ 1 \forall \mu = \nu. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

O produto entre os componentes contravariantes e covariantes é chamado escalar, sendo o mesmo invariante sob transformações de coordenadas, i.e.,

$$A^\mu A_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'^\nu A'_\nu = A'^\mu A'_\mu. \quad (1.1.7)$$

Escalares são então definidos como quantidades invariantes sob transformações de coordenadas, ou seja, que satisfazem a equação (1.1.7). Os escalares e vetores são chamados de tensores de ordem 0 e 1, respectivamente.

O acima exposto pode ser generalizado para tensores  $\mathbf{T}$  de ordem mais alta, cujos componentes  $T^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta}$  transformam-se como

$$T^{\mu\dots\nu}{}_{\alpha\dots\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} T'^{\rho\dots\lambda}{}_{\gamma\dots\delta}. \quad (1.1.8)$$

Um exemplo é o tensor unidade  $\delta^\mu_\nu$ , descrito por (1.1.6).

A quantidade  $dx^\mu dx^\nu$  na equação (1.0.1) transforma-se de acordo com

$$dx^\mu dx^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta, \quad (1.1.9)$$

logo, é um tensor. O quadrado do intervalo  $ds^2$  um invariante, porquanto a distância entre dois pontos não depende do sistema de coordenadas adotado, logo, os componentes  $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$  são componentes de um tensor simétrico, chamado tensor métrico. Os mesmos componentes físicos podem ser representadas nas formas covariante e contravariante, sendo esses conectados pelo tensor métrico como

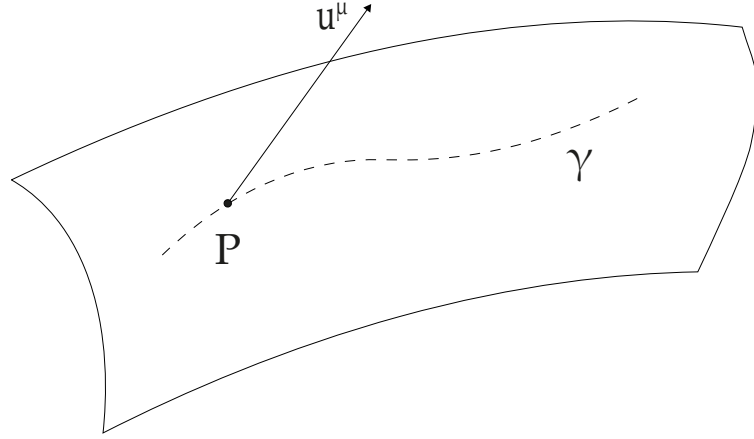
$$\begin{aligned} A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu, \\ A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

O tensor métrico atua como operador de levantamento e abaixamento de índices.

Os tensores são importantes na física por serem entidades geométricas, existem independentemente de um sistema de coordenadas utilizado para descrevê-los. As leis da física também são independentes do sistema de coordenadas utilizado, necessitando equações que não dependam da escolha de coordenadas para serem satisfatoriamente descritas, chamadas equações covariantes. Um exemplo prático é uma curva parametrizada  $\gamma$  que pode ser descrita em função de um sistema de coordenadas  $x^\mu(\lambda)$ . A taxa de variação de uma função escalar  $f(x^\mu)$  ao longo dessa curva é descrita por [30]

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \equiv \partial_\mu f u^\mu. \quad (1.1.11)$$

A derivada da função  $f$  em  $\lambda$  é um escalar, sendo descrito pela contração de um componente contravariante  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} \equiv \partial_\mu f$  e um vetor (componente) covariante  $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv u^\mu$ . O vetor contravariante é tangente à curva  $\gamma$  em todos pontos  $P$  e, distintamente do caso de uma variedade plana, esse campo vetorial tangente não está contido no mesmo espaço que a curva  $\gamma$ , como pode ser visto na Figura 1.1. A natureza do plano tangente não estar contido na variedade, no caso geral, implica a necessidade de generalizar-se o conceito de derivada.

FIGURA 1.1: Vetor tangente  $u^\mu$  à uma curva  $\gamma$  no ponto  $P$ .

### 1.1.2 Derivação Covariante

As leis da física são descritas por diferenciais de quantidades físicas tensoriais (escalares, vetores, e tensores de ordem mais alta). Como tais leis devem ser independentes das coordenadas escolhidas para representá-las, há a necessidade de se definir uma regra de derivação que seja covariante.

A derivada de um vetor contravariante transforma-se de acordo com

$$\partial'_\nu A'^\mu \equiv \frac{\partial A'^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A^\alpha. \quad (1.1.12)$$

Destarte, a quantidade  $\partial'_\nu A'^\mu$  não é uma quantidade tensorial. À derivada, deve ser acrescentado um termo, também não tensorial, que anule o segundo termo à direita da equação (1.1.12). Devido à regra de transformação do segundo termo, esse termo adicional deve possuir três índices e satisfazer [30]

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (1.1.13)$$

Define-se, portanto, a derivada covariante de um vetor (componente) contravariante como

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda \quad (1.1.14)$$

e dos componentes covariantes como

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda, \quad (1.1.15)$$

onde quantidade não tensorial  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , chamada de conexão afim, deve se transformar sob mudança de coordenadas como na equação (1.1.13).

A regra de derivação covariante para vetores pode ser generalizada para tensores de ordem mais alta como

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} T^{\gamma\nu} + \Gamma^\nu_{\gamma\lambda} T^{\mu\gamma}, \quad (1.1.16)$$

onde para cada componente contravariante uma conexão é somada, e para cada componente covariante uma conexão é subtraída.

A derivada covariante do tensor métrico pode ser calculada levando-se em consideração o fato da derivada covariante de um vetor também ser um vetor, logo,



sendo  $T_\mu{}^\nu = \nabla_\mu A^\nu$ , aplicando-se o tensor métrico, obtém-se

$$T_{\mu\nu} = g_{\nu\lambda} T_\mu{}^\lambda \Rightarrow \nabla_\mu A_\nu = g_{\nu\lambda} \nabla_\mu A^\lambda.$$

Como  $A_\nu = g_{\nu\lambda} A^\lambda$ , conclui-se que  $\nabla_\mu (g_{\nu\lambda} A^\lambda) = g_{\nu\lambda} \nabla_\mu A^\lambda$ , porquanto sendo  $A^\mu$  um vetor arbitrário, obtém-se [17]

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \Gamma^\gamma{}_{\mu\lambda} g_{\gamma\nu} + \Gamma^\gamma{}_{\nu\lambda} g_{\mu\gamma} = 0, \quad (1.1.17)$$

i.e., o tensor métrico possui derivada covariante nula. A equação (1.1.17) permite a conexão ser escrita como [7]

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( T_{\mu\nu}{}^\lambda + T_\nu{}^\lambda{}_\mu + T^\lambda{}_{\nu\mu} \right), \quad (1.1.18)$$

onde  $\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$  é chamada de conexão de Christoffel, podendo ser escrita em função do tensor métrico como

$$\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} \left( \partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} \right), \quad (1.1.19)$$

e  $T^\lambda{}_{\mu\nu}$  é chamado tensor de torção da variedade, definido por

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad (1.1.20)$$

A Relatividade Geral é desenvolvida sobre espaços-tempo com torção nula, i.e., cuja conexão é simétrica na permutação dos índices inferiores de (1.1.19). Ao caso geral da conexão (1.1.18), retornar-se-á no Capítulo 2 com a apresentação de uma teoria, dinamicamente equivalente à Relatividade Geral, cujo tensor de torção (1.1.20) é não nulo.

A derivada covariante (1.1.14) permite a determinação de uma curva entre dois pontos cujos vetores tangentes estão sempre paralelos entre si, chamado transporte paralelo. Essas curvas, chamadas geodésicas são estudadas na subseção que se segue.

### 1.1.3 Geodésicas

As curvas geodésicas são curvas privilegiadas no espaço-tempo. No espaço Euclidiano, uma curva geodésica é sempre uma reta entre dois pontos  $P$  e  $Q$ , sendo facilmente identificadas. Em um espaço-tempo curvo, os pontos não podem simplesmente ser ligados por uma reta, uma vez que a mesma atravessaria regiões fora da variedade que contém os pontos. Para generalizar o conceito do espaço Euclidiano para um espaço-tempo curvo, faz-se necessária a observação de duas características de uma geodésica: (i) são curvas que descrevem a menor distância entre dois pontos e (ii) possuem os vetores tangentes a elas todos paralelos entre si [7]. São elas classificadas em três tipos: geodésicas temporais caso  $ds^2 < 0$ ; espaciais caso  $ds^2 > 0$ ; e nulas caso  $ds^2 = 0$ .

Pelo critério da distância  $l$  extrema entre dois pontos  $P$  e  $Q$ , seja um conjunto de curvas  $\gamma$  descrita pelas relações  $x^\mu(\lambda)$  que passam pelos dois pontos, onde  $\lambda$  é um parâmetro. Uma curva é dita geodésica se ela torna extrema a distância

$$l = \int_P^Q L d\lambda = \int_P^Q \sqrt{\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda, \quad (1.1.21)$$

onde  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ . Pelo princípio variacional essa distância é extremada quando a equação de Euler-Lagrange é satisfeita. Resolvendo as equações de Euler-Lagrange, obtém-se que uma curva  $\gamma$  é geodésica se ela satisfaz [30]

$$\ddot{x}^\mu + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \kappa(\lambda) \dot{x}^\mu, \quad (1.1.22)$$

onde  $\kappa(\lambda) \equiv \frac{d \ln L}{d\lambda}$ . Se a função  $\kappa(\lambda) = 0$ , o parâmetro  $\lambda$  pertence a uma classe privilegiada de parâmetros, chamados afim [7]. Dois exemplos importantes de parâmetros afim são o tempo próprio  $\tau$ , quando a geodésica é temporal, e a distância própria  $s$ , quando a geodésica é espacial, i.e., sinais negativo e positivo na equação (1.1.21), respectivamente. Se  $\lambda$  é um parâmetro afim, qualquer parâmetro  $\lambda'$ , que se relacione à  $\lambda$  por uma transformação linear, também é um parâmetro afim, i.e.,

$$\lambda' = a\lambda + b, \quad (1.1.23)$$

onde  $a, b$  são constantes.

Para um parâmetro afim, a equação (1.1.22) pode ser escrita como

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0, \quad (1.1.24)$$

onde  $u^\mu$  é o vetor tangente à curva  $\gamma$ , descrito por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1.1.25)$$

A variação do vetor  $u^\mu$  é sempre ortogonal a ele, sendo ele dito transportado paralelamente porquanto ele não variar com o parâmetro  $\lambda$ , i.e.,

$$\frac{d(u^\mu u_\mu)}{d\lambda} = 2(\nabla_\nu u^\mu) u_\nu u^\mu = 0.$$

Apesar da derivada covariante ser uma construção covariante, para o cálculo da variação de um vetor entre dois pontos, ela não é única. Na seção que se segue, outra forma de derivação é apresentada e, com naquela, as simetrias geométricas contidas em um espaço-tempo podem ser encontradas.

## 1.2 Derivadas de Lie e vetores de Killing

Na seção anterior, uma maneira de construir uma regra de derivação covariante (válida em qualquer sistema de coordenadas) fora introduzida. Entretanto, existe outra regra de derivação independente do sistema de coordenadas, são as derivadas dessa oriundas chamadas derivadas de Lie. A partir dessas derivadas é possível identificar direções de conservação no espaço-tempo a partir das chamadas equações de Killing.

### 1.2.1 Derivadas de Lie

Seja um conjunto de curvas geodésicas<sup>1</sup>  $\gamma$  (linhas contínuas). Se essas curvas cobrem todo o espaço continuamente e suavemente, são elas chamadas congruência, cujo estudo será retomado na seção 1.4. Em cada ponto  $P$  de uma curva existe um vetor tangente  $u^\mu$  que, ao longo de todos os pontos de todas as curvas, forma um campo

<sup>1</sup>Podem elas ser trajetórias de partículas, de elementos infinitesimais de um fluido, *cetera*.

vetorial. Juntamente ao espaço vetorial das curvas tangente, existe um campo vetorial  $A^\mu$  que no ponto  $P$  é tangente a uma curva  $\lambda$  (tracejada) perpendicular às curvas  $\gamma$ , conforme pode ser visto na Figura 1.2.

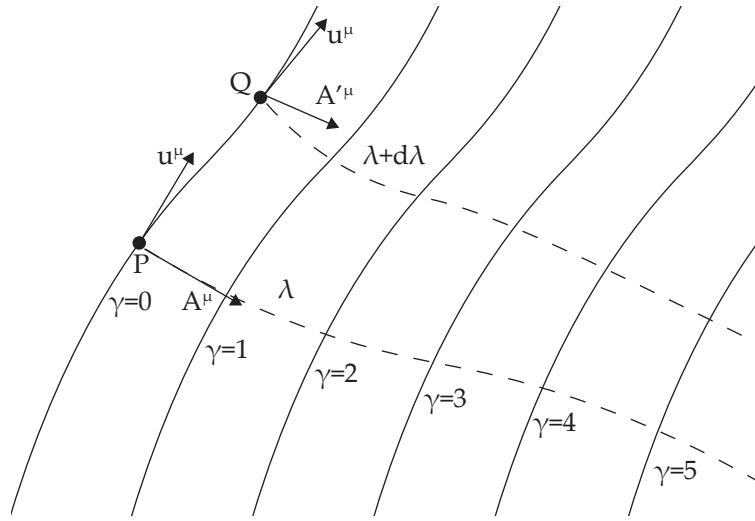


FIGURA 1.2: Vetor tangente  $u^\mu$  a uma curva  $\gamma$  no ponto  $P$ .

Se um observador sobre o ponto  $P$  mover-se infinitesimalmente ao longo da curva  $\gamma$  até o ponto  $Q$ , as curvas  $\lambda$  que são perpendiculares às curvas  $\gamma$  não mais serão tangentes ao campo vetorial  $A^\mu$ . Uma maneira de transportar o vetor  $A^\mu$  é através da derivada covariante, e outra é considerando que o observador em  $P$  carrega consigo um sistema de coordenadas até o ponto  $Q$ . Com as coordenadas do ponto  $P$  sendo  $x^\mu$  e as coordenadas do ponto  $Q$  sendo  $x'^\mu$ , elas se relacionam pela transformação infinitesimal de coordenadas [31]

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon u^\mu,$$

logo, pela equação (1.1.2), o vetor  $u^\mu$  transformar-se-á como

$$u'^\mu = u^\mu - \epsilon (\partial_\nu u^\nu) u^\mu.$$

No ponto  $Q$  os componentes do vetor  $A^\mu$  serão

$$\begin{aligned} A'^\mu(x'^\alpha) &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\mu(x^\alpha) \\ &= A^\mu(x^\alpha) + \epsilon \partial_\nu A^\mu(x^\alpha) u^\nu - \epsilon \partial_\nu u^\mu A^\nu(x^\alpha). \end{aligned}$$

Destarte, a derivada de Lie de  $A^\mu$  na direção de  $u^\mu$  é definida como

$$\mathcal{L}_u A^\mu \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{A'^\mu(x'^\alpha) - A^\mu(x^\alpha)}{\epsilon} \right) = (\partial_\nu A^\mu) u^\nu - (\partial_\nu u^\mu) A^\nu. \quad (1.2.1)$$

A expressão acima transforma-se tensorialmente [30], portanto as derivadas parciais podem ser transformadas em derivadas covariantes, i.e.,

$$\mathcal{L}_u A_\mu = (\nabla_\nu A^\mu) u^\nu - (\nabla_\nu u^\mu) A^\nu. \quad (1.2.2)$$

A derivada de Lie pode ser generalizada para os componentes covariantes como

$$\mathcal{L}_u A^\mu = (\partial_\nu A_\mu) u^\nu + (\partial_\mu u^\nu) A_\nu, \quad (1.2.3)$$

e para tensores de ordem mais alta, e.g., para um tensor de ordem 2, como o tensor métrico, obtém-se

$$\mathcal{L}_u T_{\mu\nu} = (\partial_\rho T_{\mu\nu}) u^\rho + (\partial_\mu u^\rho) T_{\rho\nu} + (\partial_\nu u^\rho) T_{\mu\rho}. \quad (1.2.4)$$

As derivadas de Lie possuem as seguintes propriedades [31]: satisfazem a regra do produto; comutam com a operação de contração; pode ser aplicada a objetos lineares geométricos arbitrários; comutam com a derivada parcial. Além disso, se um tensor  $T^{\mu\nu}$  possui derivada de Lie nula na direção de um vetor  $u^\mu$ , diz-se que o tensor  $T^{\mu\nu}$  sofre um transporte de Lie ao longo da curva que possui  $u^\mu$  como campo tangente. Se o tensor  $T^{\mu\nu}$  não depender de uma coordenada, e.g.,  $x^0$ , então

$$\partial_0 A^\mu = 0. \quad (1.2.5)$$

Se em dado sistema de coordenadas  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , a equação (1.2.5) pode ser escrita como

$$u^\nu \partial_\nu A^\mu = 0, \quad (1.2.6)$$

logo

$$\mathcal{L}_u A^\mu = 0. \quad (1.2.7)$$

Devido à equação (1.2.7) ser uma equação tensorial ela é válida em qualquer sistema de coordenadas. Sendo assim, se um vetor  $A^\mu$  é constante na direção de um vetor  $u^\mu$ , a derivada de Lie de  $A^\mu$  na direção de  $u^\mu$  é nula.

Em consequência ao fato da derivada de Lie permitir determinar a invariância de um tensor sob uma mudança de posição, ela é a maneira natural de determinar-se regiões onde o espaço-tempo é invariante, conforme é apresentado na subseção que se segue.

## 1.2.2 Vetores de Killing

No espaço Cartesiano, uma simetria é determinada pela existência de linhas, ou superfícies, onde, ao longo delas, as variáveis físicas não mudam. Para se definir uma simetria em um espaço-tempo arbitrário, é necessária uma condição que seja independente do sistema de coordenadas.

Seja um campo vetorial  $\xi^\mu(x^\nu)$  presente em todos os pontos  $x^\mu$  do espaço-tempo. Se uma distância infinitesimal  $\epsilon$  for deslocada na direção  $\xi^\mu(x^\nu)$  de um ponto  $P(x^\mu)$  para um ponto  $Q(x'^\mu)$ , sob transformações infinitesimais de coordenadas, obtém-se [31]

$$\delta x^\mu = \epsilon \xi^\mu \Rightarrow \delta(dx^\mu) = \epsilon \partial_\nu \xi^\mu dx^\nu \quad (1.2.8)$$

e

$$\delta g_{\mu\nu} = \epsilon \partial_\rho g_{\mu\nu} \xi^\rho. \quad (1.2.9)$$

Para o espaço-tempo ser o mesmo em ambos os pontos, a variação do elemento de linha

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = \epsilon [(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \xi^\rho + (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho}] dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2.10)$$

deve ser nula, i.e.,

$$(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \xi^\rho + (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho} = 0. \quad (1.2.11)$$

Observando a equação (1.2.4), a sinistra da equação (1.2.11) pode ser identificada com a derivada de Lie de  $g_{\mu\nu}$  na direção  $\xi^\mu$ . Como a derivada de Lie é uma equação

covariante, trocando as derivadas parciais pelas covariantes, obtém-se

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu} = (\nabla_{\rho}g_{\mu\nu})\xi^{\rho} + (\nabla_{\mu}\xi^{\rho})g_{\rho\nu} + (\nabla_{\nu}\xi^{\rho})g_{\mu\rho} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0. \quad (1.2.12)$$

A equação acima é chamada equação de Killing.

Um vetor  $\xi^{\mu}$  é chamado vetor de Killing se satisfaz a equação (1.2.12). Nesse caso, a direção desse vetor indica uma direção onde o tensor métrico, por consequência o espaço-tempo, não varia. Se a equação (1.2.12) não possui solução, o espaço-tempo não possui simetria. Os vetores de Killing estão associados à quantidades conservadas do espaço-tempo, e.g., um vetor de Killing na direção do tempo  $t$  indica uma conservação de energia do sistema.

Muitos problemas físicos contém simetrias, geralmente relacionadas a certos efeitos físicos. Na Relatividade Geral, quando um alto grau de simetrias está presente, as equações de campo se tornam mais fáceis de serem resolvidas. Os vetores de Killing não apenas podem ser utilizados para caracterizarem propriedades de uma solução das equações de Einstein<sup>2</sup>, mas também na descoberta de soluções exatas que possuam certas simetrias desejadas, como é o caso das ondas gravitacionais estudadas no Capítulo 3.

A descoberta de propriedades dos espaços-tempo são fundamentais para o estudo da gravitação e, assim como uma maneira de determinar simetrias fora introduzido nesta seção, uma maneira de determinar a existência e quantificar a curvatura de um espaço-tempo é apresentada na seção que se segue.

### 1.3 Curvatura

A curvatura de uma superfície bidimensional pode ser vista ao se realizar uma imersão dessa superfície bidimensional em um espaço tridimensional, e.g., a curvatura do planeta Terra pode ser observada do espaço, mas, *a priori*, não por uma observação local na superfície da mesma.

Alguns objetos geométricos só possuem uma curvatura quando analisada a partir de uma imersão em um espaço de dimensão maior, nesse caso, a curvatura é chamada extrínseca. Esse é o caso da superfície de um cilindro, visto ele poder ser cortado em uma folha e duas linhas paralelas, desenhadas nessa folha, permanecem paralelas quando o local do corte é colado novamente, como na Figura 1.3.

Quando uma curvatura existe independente da imersão em um espaço de dimensão maior, ela é chamada intrínseca. Esse é o caso da superfície de uma esfera, onde duas linhas inicialmente paralelas convergem nos polos da mesma, como apresentado na Figura 1.4. O fenômeno gravitacional ocorre devido à uma curvatura intrínseca do espaço-tempo.

Um observador  $A$  em queda livre na atmosfera da Terra não pode medir a existência de um campo gravitacional, uma vez que os efeitos que ele observa podem ser devidos à aceleração no sentido oposto ao campo. Entretanto, se outro observador  $B$  também estiver em queda livre, o observador  $A$  pode medir a existência de um campo gravitacional medindo a distância  $\xi^{\mu}$  entre ele e o observador  $B$ . Conforme o tempo passa, a distância  $\xi^{\mu}$  entre eles diminui, devido ao campo gravitacional da Terra ser radial, conforme expresso na Figura 1.5. A variação do vetor  $\xi^{\mu}$  é chamada desvio da geodésica, medindo o quanto o vetor de separação  $\xi^{\mu}$  varia devido ao campo gravitacional. Se não houvesse campo gravitacional, o vetor de separação seria constante ou linear no tempo.

<sup>2</sup>A serem apresentadas na seção 1.5.

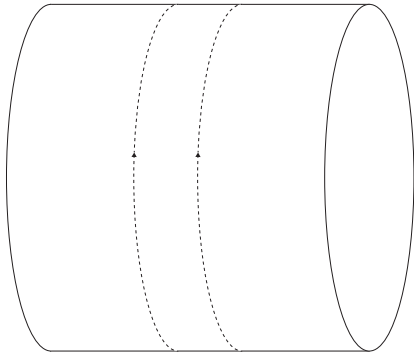


FIGURA 1.3: Linhas inicialmente paralelas na superfície de um cilindro.

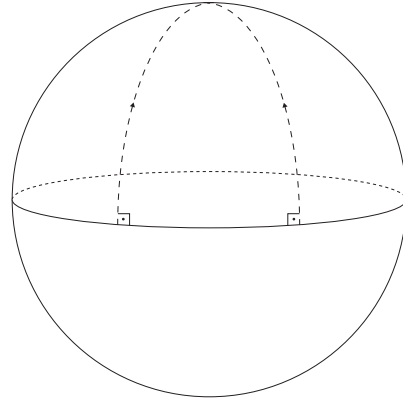


FIGURA 1.4: Linhas inicialmente paralelas na superfície de uma esfera.

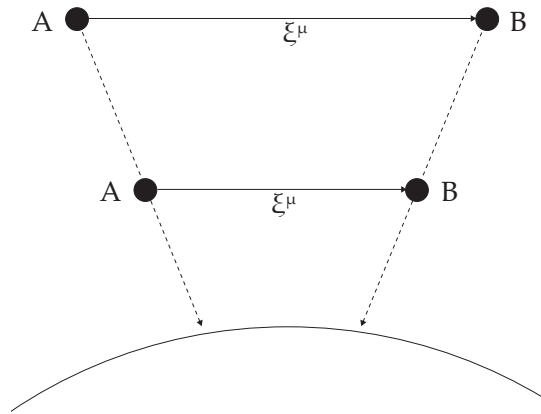


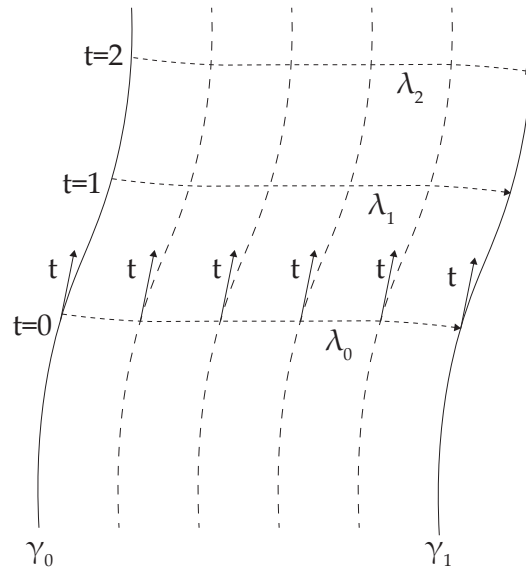
FIGURA 1.5: Dois observadores  $A$  e  $B$  em queda livre.

No caso do campo gravitacional uniforme, o efeito seria equivalente ao observador estar acelerado no sentido oposto, sendo possível sua remoção por uma escolha adequada de coordenadas. Nesse caso,

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.3.1)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio do observador  $A$ . Tal campo gravitacional possuiria curvatura nula, entretanto, tais campos não são observados na natureza. Esse gradiente do campo gravitacional é chamado força de maré.

Para se determinar a evolução uma geodésica  $\gamma_1$ , i.e., o quanto ela se desvia de uma geodésica de referência  $\gamma_0$ , constrói-se um conjunto de geodésicas intermediárias, identificadas por uma variável  $s$ , de forma que  $\gamma(s=0) = \gamma_0$  e  $\gamma(s=1) = \gamma_1$ . As geodésicas são parametrizadas pelo parâmetro afim  $t$ , de maneira que as curvas  $t = \text{constante}$  são perpendiculares a todas as geodésicas  $\gamma(s)$ . A situação é apresentada na Figura 1.6. Escolhendo  $s$ , determina-se a curva  $\gamma$ ; e determinando  $t$ ,

FIGURA 1.6: Conjunto de geodésicas  $\gamma$ .

determina-se o local em cada curva, logo,

$$x^\mu = x^\mu(s, t). \quad (1.3.2)$$

Sendo  $u^\mu$  descrito por

$$u^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right)_s \quad (1.3.3)$$

o campo vetorial tangente às geodésicas  $\gamma(s)$ , como  $t$  é um parâmetro afim, as equações da geodésicas são

$$\frac{Du^\mu}{dt} \equiv (\nabla_v u^\mu) u^\nu = 0. \quad (1.3.4)$$

Mantendo  $t$  fixo e variando  $s$  obtém-se uma família de curvas que vão de  $\gamma_0$  até  $\gamma_1$ . Em cada ponto dessas curvas  $\lambda(t)$ , um vetor tangente  $\zeta^\mu$  pode ser construído. Um campo vetorial

$$\zeta^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \right)_t \quad (1.3.5)$$

perpendicular ao campo vetorial  $u^\mu$  é então construído. O vetor descrito por (1.3.5) é chamado vetor desvio. Esse campo vetorial mede a distância entre as geodésicas  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ , sendo perpendicular ao campo tangente das infinitas geodésicas intermediárias<sup>3</sup>.

Ao longo da direção de  $\zeta^\mu$  o vetor  $u^\mu$  varia de acordo com [30]

$$(\partial_v u^\mu) \zeta^\nu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s \partial t}. \quad (1.3.6)$$

Já o vetor  $\zeta^\mu$  varia na direção de  $u^\mu$  de acordo com

$$(\partial_v \zeta^\mu) u^\nu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial t \partial s}. \quad (1.3.7)$$

<sup>3</sup>Essa construção é necessária devido ao espaço curvo não possuir o conceito de linha ponto a ponto, e, matematicamente, as curvas intermediárias podem estar tão próximas quanto necessário para que o vetor, entre duas linhas quaisquer, esteja no mesmo plano.

Como as derivadas parciais comutam, as equações (1.3.6) e (1.3.7) são iguais, assim,

$$(\partial_\nu \zeta^\mu) u^\nu - (\partial_\nu u^\mu) \zeta^\nu = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_u \zeta^\mu = 0. \quad (1.3.8)$$

A derivada de Lie é uma expressão tensorial, logo as derivadas parciais podem ser transformadas em covariantes e a equação (1.3.8) se torna

$$(\nabla_\nu \zeta^\mu) u^\nu = (\nabla_\nu u^\mu) \zeta^\nu. \quad (1.3.9)$$

A variação do vetor separação, na direção do vetor tangente, é igual à variação do vetor tangente na direção do vetor separação entre as curvas  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . O produto escalar entre os vetores não varia com o parâmetro  $t$ , uma vez que

$$\frac{d}{dt} (\zeta^\mu u_\mu) = 0 \Rightarrow \zeta^\mu u_\mu = \text{constante} \equiv \kappa. \quad (1.3.10)$$

A constante  $\kappa$  sempre pode ser tomada como nula por escolha adequada de parametrização, logo,  $\zeta^\mu u_\mu = 0$ .

Em um espaço plano o vetor desvio  $\zeta^\mu$  ou é constante ou linear na velocidade. O efeito da curvatura do espaço-tempo deve então alterar a variação da variação do vetor de separação, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \zeta^\mu}{dt^2} &= \frac{D}{dt} (u^\nu \nabla_\nu \zeta^\mu) \\ &= (\nabla_\alpha \nabla_\beta \zeta^\mu) u^\alpha u^\beta - (\nabla_\beta \nabla_\alpha \zeta^\mu) u^\alpha u^\beta. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Se o espaço-tempo for plano, as derivadas covariantes se tornam derivadas parciais e a equação (1.3.11) se anula. Destarte, nota-se que a curvatura do espaço-tempo está relacionada à não comutatividade das derivadas parciais. Pode-se então definir o tensor de curvatura a partir da relação

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu \equiv (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\mu. \quad (1.3.12)$$

A partir da definição (1.3.12), a equação do desvio da geodésica (1.3.11) pode escrita como

$$\frac{D^2 \zeta^\mu}{d\sigma^2} + R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} u^\nu \zeta^\alpha u^\beta = 0, \quad (1.3.13)$$

onde  $\sigma$  é um parâmetro afim e  $u^\mu = dx^\mu / d\sigma$ .

O tensor de curvatura pode ser escrito a partir das conexões de Christoffel como

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\alpha} + \hat{\Gamma}^\mu{}_{\rho\alpha} \hat{\Gamma}^\rho{}_{\nu\beta} - \hat{\Gamma}^\mu{}_{\rho\beta} \hat{\Gamma}^\rho{}_{\nu\alpha}. \quad (1.3.14)$$

O tensor de curvatura acima permite determinar se um espaço-tempo é ou não curvo univocamente, sem a necessidade da tentativa de infinitas transformações de coordenadas que levam o elemento de linha (1.0.1) ao elemento de linha (1.0.2). Se o tensor de curvatura (1.3.14) for nulo, o espaço-tempo é plano independentemente do sistema de coordenadas utilizado. Se o tensor de curvatura for não nulo, não existe mudança de coordenadas que leve ao elemento de linha (1.0.2). Contraíndo o primeiro e o terceiro índice do tensor de curvatura, define-se o tensor de Ricci simétrico

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (1.3.15)$$



e contraindo os índices do tensor de Ricci obtém-se o chamado escalar de curvatura

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.3.16)$$

A partir dos tensores (1.3.15) e (1.3.16) é possível definir um tensor  $G_{\mu\nu}$  que possui derivada covariante nula, descrito por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.3.17)$$

onde  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ . Esse tensor é chamado tensor de Einstein, possuindo um papel deveras importante nas equações de campo gravitacionais, como será visto na seção 1.5.

As equações do desvio da geodésica (1.3.13) possibilitam o estudo de um espaço-tempo por meio da congruência das geodésicas desse espaço. Na seção seguinte, apresentar-se-á como tais interpretações podem ser construídas.

## 1.4 Congruências geodésicas

As geodésicas de um espaço-tempo, apresentadas na subseção 1.1.3, podem ser utilizadas para caracterizar o espaço-tempo a partir da medida de seus desvios (1.3.13), introduzidos na seção 1.3.

Define-se como uma congruência<sup>4</sup> geodésica um conjunto de curvas geodésicas, cujo campo tangente é descrito por  $u^{\mu}$ , que não possuem um ponto cáustico entre si, i.e., não se interceptam [30]. Um exemplo de congruência é o da Figura 1.7. A evolução da congruência é medida considerando-se o desvio  $\xi^{\mu}$  das geodésicas (linhas pontilhadas) a partir de uma geodésica de referência (linha contínua).

A congruência pode ser temporal se formada por geodésicas temporais; nulas se formada por geodésicas nulas; e espaciais se formadas por geodésicas espaciais. Este último caso não é de interesse físico, uma vez que se encontram fora do cone de luz. O primeiro caso é apresentado na subseção 1.4.1 e o segundo na subseção 1.4.2, sendo o último caso similar ao primeiro, e como não há interesse físico, não será estudado nesta tese.

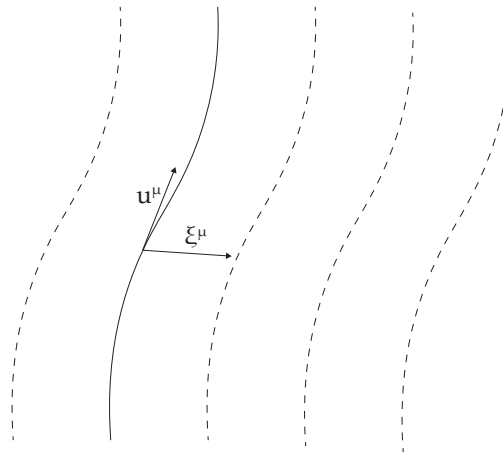


FIGURA 1.7: Congruência não cáustica de geodésicas.

<sup>4</sup>Um exemplo de congruência é a dos raios luminosos na óptica geométrica.

### 1.4.1 Geodésicas temporais

Em um referencial de Lorentz co-movente, i.e., que se move ao longo da curva geodésica, o vetor  $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ , logo,

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (1.4.1)$$

Devido ao lado esquerdo da equação acima se tratar de um escalar, a equação acima é válida para qualquer referencial. Como o vetor  $u^\mu$  pode ser identificado como a direção de evolução temporal (ou de outro parâmetro afim qualquer), convém separar o tensor métrico em duas partes: uma paralela a  $u^\mu$  e outra perpendicular. Com isso o tensor métrico pode ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = -u_\mu u_\nu + h_{\mu\nu}, \quad (1.4.2)$$

onde o tensor

$$h_{\mu\nu} \equiv u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} \quad (1.4.3)$$

é chamado tensor métrico transverso [30] porquanto  $u^\mu h_{\mu\nu} = 0$ , projetando um tensor qualquer em uma direção ortogonal à direção de evolução temporal. Ele possui algumas propriedades:

1. possui traço 3, i.e.,  $h^\mu_\mu = 3$ ;
2. é invariante quando projetado nele mesmo, i.e.,  $h^\mu_\rho h^\rho_\nu = h^\mu_\nu$ .

A evolução da congruência é medida através da evolução do campo tensorial  $\zeta^\mu$  na direção de  $u^\mu$ , i.e.,

$$(\nabla_\nu \zeta^\mu) u^\nu = (\nabla_\nu u^\mu) u^\nu = B^\mu{}_\nu \zeta^\nu, \quad (1.4.4)$$

onde é definido tensor

$$B^\mu{}_\nu \equiv \nabla_\nu u^\mu. \quad (1.4.5)$$

Devido à equação da geodésica (1.1.24) é possível ver que  $B^\mu{}_\nu u^\nu = 0$ , logo,  $B^\mu{}_\nu$  é puramente transverso (espacial no caso do parâmetro afim ser o tempo). Ele mede a falha em  $\zeta^\mu$  ser transportado paralelamente ao longo da congruência.

O tensor  $B^\mu{}_\nu$ , a princípio, não possui nenhuma simetria, tornando sua interpretação física mais complexa. O problema é resolvido dividindo-o em três partes: uma diagonal  $\delta_{\mu\nu}\Theta$ , uma simétrica  $\sigma_{\mu\nu}$  e uma anti-simétrica  $\omega_{\mu\nu}$ . A equação (1.4.5) fica escrita como

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (1.4.6)$$

Por construção, os tensores  $\sigma_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu}$  possuem traço nulo, já que toda informação acerca do traço está contida no primeiro termo do lado direito da equação (1.4.6). Projetando o tensor  $B_{\mu\nu}$  no em  $h^{\mu\nu}$  obtém-se

$$\Theta = h^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = B^\mu{}_\mu = \nabla_\mu u^\mu. \quad (1.4.7)$$

Como o tensor  $\sigma_{\mu\nu}$  é simétrico, ele pode ser escrito como

$$\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\Theta, \quad (1.4.8)$$

onde os parênteses indicam uma simetrização, i.e.,  $B_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu})$ . O tensor  $\omega_{\mu\nu}$  é a parte antissimétrica de  $B_{\mu\nu}$ , logo,

$$\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}, \quad (1.4.9)$$

onde os colchetes indicam anti-simetrização, i.e.,  $B_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2} (B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})$ . As interpretações dos componentes de  $B_{\mu\nu}$  são analisadas separadamente no seguimento do texto.

1. O tensor  $h_{\mu\nu}\Theta$  é escrito matricialmente como

$$h_{\mu\nu}\Theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}h_{11}\Theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}h_{22}\Theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}h_{33}\Theta \end{pmatrix}.$$

Interpretando-se  $\Theta$  é possível interpretar a diagonal de  $B_{\mu\nu}$  e para tal, partindo da equação (1.4.7), obtém-se

$$\Theta = \partial_\mu u^\mu. \quad (1.4.10)$$

Como as geodésicas não são cáusticas, elas não podem ter um ponto de origem ou final, logo, para uma seção transversal espacial do espaço-tempo, a densidade  $\rho$  de curvas deve ser conservada. A congruência satisfaz uma equação da continuidade descrita por [30]

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \partial_\mu (\rho u^\mu) = 0 \Rightarrow \partial_\mu u^\mu = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\tau}. \quad (1.4.11)$$

A densidade relacionada-se com o inverso do volume, assim

$$\Theta = \partial_\mu u^\mu = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{d\tau} \delta V, \quad (1.4.12)$$

onde  $\delta V$  é o volume infinitesimal que uma mesma quantidade de geodésicas atravessa. A função  $\Theta$  mede a fração de variação desse volume, ou seja, se a congruência está divergindo ( $\Theta > 0$ ) ou convergindo ( $\Theta < 0$ ). Porquanto,  $\Theta$  é chamada expansão da congruência. Restringindo uma dimensão espacial, o efeito da expansão pode ser visto na Figura 1.8 em uma congruência de curvas  $\gamma$ , onde os círculos representam as áreas transversais.

2. O tensor  $\sigma_{\mu\nu}$  é escrito matricialmente como

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & -(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}.$$

Para se representar os efeitos apenas devido à  $\sigma_{\mu\nu}$ , as demais partes de  $B_{\mu\nu}$  são consideradas como nulas. A evolução do vetor separação  $\xi^\mu$  é dada por

$$\frac{D\xi^\mu}{d\tau} = (\nabla_\nu \xi^\mu) u^\nu = \sigma^\mu{}_\nu \xi^\nu. \quad (1.4.13)$$

O tensor  $\sigma_{\mu\nu}$  possui cinco componentes independentes, mas para fins de simplicidade da análise, considerar-se-á um sistema de coordenadas Cartesianas com apenas os componentes  $\sigma^1{}_2 \equiv \sigma$  como não nulos. A equação (1.4.13) pode

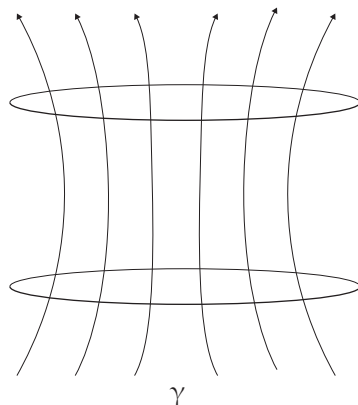


FIGURA 1.8: Expansão de uma congruência geodésica.

então ser escrita como

$$\frac{D\zeta^x}{d\tau} = \sigma\zeta^y \quad (1.4.14)$$

e

$$\frac{D\zeta^y}{d\tau} = \sigma\zeta^x. \quad (1.4.15)$$

Considerando um conjunto de geodésicas no plano  $xy$ , formando uma circunferência de raio  $\zeta$ , as equações (1.4.14,1.4.15) podem ser aplicadas em cada geodésica passando por um ponto  $(x, y)$  específico, como representado na Figura 1.9. O tensor  $\sigma_{\mu\nu}$  é chamado tensor de distensão (ou cisalhamento). Ele provoca uma deformação em uma seção transversal de uma congruência, mas sem alterar o volume (portanto a densidade) da seção.

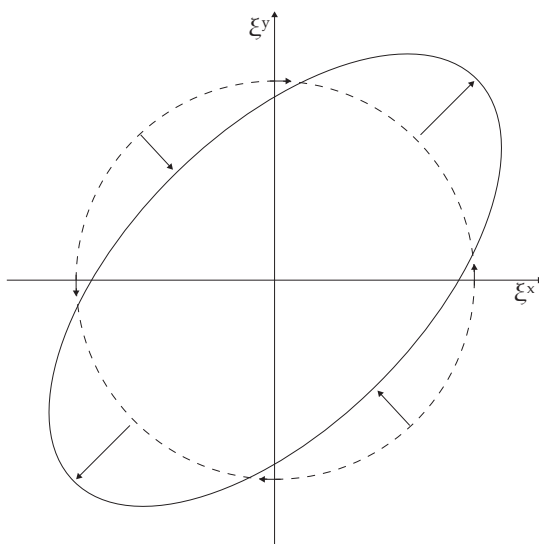


FIGURA 1.9: Distensão de uma circunferência de geodésicas (pontilhada).

3. O tensor  $\omega_{\mu\nu}$  é escrito matricialmente como

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente considerando apenas o termo  $\omega_{\mu\nu}$  como não nulo na equação (1.4.6), além do efeito apenas em uma congruência em forma de circunferência no plano  $xy$ , a evolução do vetor de separação  $\xi^\mu$  é descrita por

$$\frac{D\xi^\mu}{d\tau} = \omega^\mu{}_\nu \xi^\nu. \quad (1.4.16)$$

Considerando apenas  $\omega_{12} \equiv \omega$  como componente não nulo, as equações (1.4.15) tornam-se

$$\frac{D\xi^x}{d\tau} = \omega \xi^y \quad (1.4.17)$$

e

$$\frac{D\xi^y}{d\tau} = -\omega \xi^x. \quad (1.4.18)$$

Aplicando as equações (1.4.17,1.4.18) a todas as geodésicas, o resultado é uma rotação da circunferência, como mostrado na Figura 1.10. O tensor  $\omega_{\mu\nu}$  é chamado tensor de rotação.

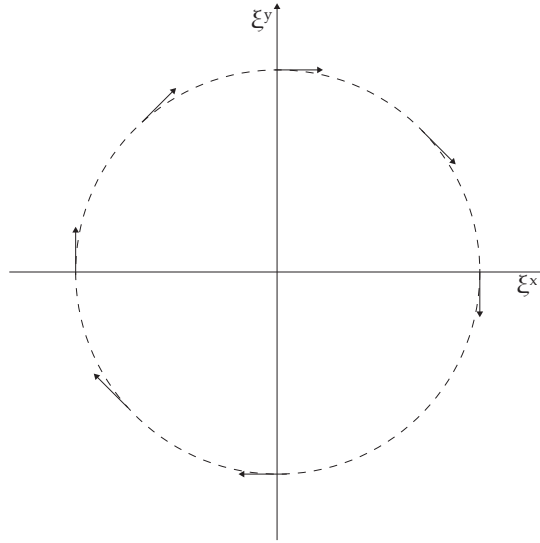


FIGURA 1.10: Rotação de uma circunferência de geodésicas (pontilhada).

A interpretação de um espaço-tempo pode ser realizada calculando os tensores que compõem  $B_{\mu\nu}$ . Além desse campo, novas soluções exatas das equações de Einstein, apresentadas na seção 1.5, podem ser encontradas a partir da expansão, além dos tensores de rotação e distensão de uma congruência geodésica, obtendo-se um espaço-tempo que satisfaça certas propriedades requeridas.

Determinando a evolução dos componentes  $B_{\mu\nu}$  é possível determinar a evolução das geodésicas em dado espaço-tempo. A evolução de  $B_{\mu\nu}$  em relação ao tempo

próprio  $\tau$  é

$$\begin{aligned}\frac{DB_{\mu\nu}}{d\tau} &= (\nabla_\rho \nabla_\nu u_\mu) u^\rho \\ &= -B_\nu{}^\rho B_{\mu\rho} - R_{\mu\lambda\nu\rho} u^\rho u^\lambda.\end{aligned}\quad (1.4.19)$$

A evolução da expansão do tensor  $B_{\mu\nu}$  pode ser encontrada a partir da equação acima utilizando-se as equações (1.4.7-1.4.9). Uma equação de interesse é a da evolução de  $\Theta$ , fornecendo ela importante informação acerca de certa categoria de espaços-tempo. A evolução de  $\Theta$  é obtida de acordo com a equação (1.4.7), tomando o traço na equação (1.4.19) como

$$\frac{DB_\mu{}^\mu}{d\tau} = -B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (1.4.20)$$

Usando o fato de

$$B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\Theta^2 + \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu},$$

a equação (1.4.20) torna-se

$$\frac{DB_\mu{}^\mu}{d\tau} = \frac{D\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (1.4.21)$$

A equação acima é chamada de equação de Raychaudhuri e mede se a congruência é convergente, divergente ou nula.

A equação de Raychaudhuri possui importante consequência em espaços-tempo sem rotação, onde  $\omega_{\mu\nu} = 0$ . Neste caso, a equação (1.4.21) pode ser escrita como

$$\frac{DB_\mu{}^\mu}{d\tau} = \frac{D\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (1.4.22)$$

Como a distensão  $\Theta$  possui somente componentes espaciais, seu quadrado  $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$  é sempre positivo. A equação (1.4.22) é sempre negativa com a exceção do último termo a direita, que pode ser positivo ou negativo. Caso  $R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu > 0$  o espaço-tempo é dito satisfazer a condição de energia forte (ver apêndice A), logo,

$$\frac{D\Theta}{d\tau} \leq 0. \quad (1.4.23)$$

A equação (1.4.23) é chamada teorema do foco com importante implicação: as geodésicas de todo espaço-tempo com rotação nula e satisfaz a condição de energia forte, possui uma congruência convergente. No caso da queda livre em um campo gravitacional estático com simetria esférica (espaço-tempo de Schwarzschild), a taxa de expansão é

$$\frac{D\Theta}{d\tau} = -\frac{9M}{2r^3} < 0,$$

satisfazendo o teorema do foco. Esse fato está relacionado à natureza atrativa do campo gravitacional, onde duas partículas inicialmente separadas entre si, ao serem colocadas em um campo gravitacional a distância relativa entre elas tende a diminuir.

### 1.4.2 Geodésicas nulas

A análise das congruências geodésicas nulas é similar às geodésicas temporais, mas os detalhes da construção são mais elaborados devido a uma propriedade de tais congruências. Tal problema adicional pode ser visualizado considerando-se um observador ao longo do eixo  $t$  movendo-se com velocidade  $v$ . Ao longo da linha mundo desse observador, curvas geodésicas emanam, conforme representado pelas linhas contínuas na Figura 1.11. No espaço plano, a rotação da congruência formada é nula, logo a congruência é superfície ortogonal, sendo formadora de hipersuperfícies ortogonais à ela. Essas superfícies nulas são representadas pelas linhas pontilhadas na Figura 1.11 e uma esquematização bidimensional. No limite  $v \rightarrow 1$ , as curvas geodésicas coincidem com as hipersuperfícies, tornando-se ao mesmo tempo tangentes e ortogonais à essas superfícies. Isso implica degenerescência na descrição de tais curvas.

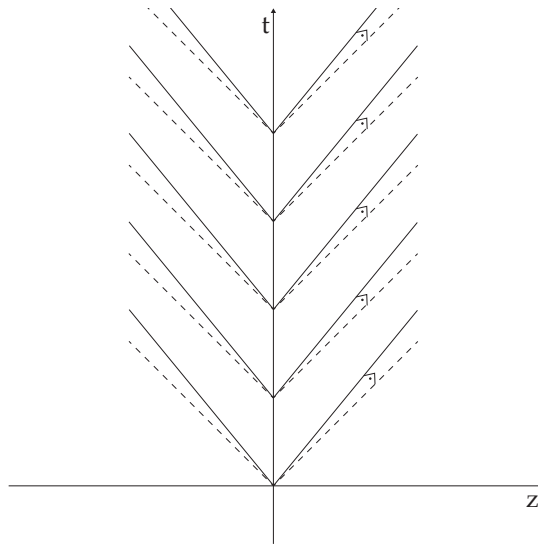


FIGURA 1.11: Curvas geodésicas no espaço-tempo de Minkowski.

Uma congruência nula é descrita por um conjunto de curvas geodésicas nulas, cujo campo vetorial tangente é descrito pelo vetor nulo  $k^\mu$ , chamado vetor nulo principal, logo,

$$k^\mu k_\mu = 0. \quad (1.4.24)$$

Supondo uma parametrização afim em  $\lambda$  para  $k^\mu$ , obtém-se

$$(\nabla_\nu k^\mu) k^\nu = 0, \quad (1.4.25)$$

assim, para um desvio  $\zeta^\mu$  entre as curvas,

$$\frac{D}{d\lambda} (k^\mu \zeta_\mu) = (\nabla_\nu k^\mu) k^\nu \zeta^\mu + k^\mu k^\nu \nabla_\nu \zeta_\mu = 0. \quad (1.4.26)$$

Diferente do caso da congruência espacial, a imposição

$$\zeta^\mu k_\mu = 0 \quad (1.4.27)$$

não elimina os componentes de  $\zeta^\mu$  ao longo de  $k^\mu$ , devido ao último ser um vetor nulo. Isso pode ser visualizado separando o vetor separação em partes paralela, ao

campo tangente  $\zeta k_\mu$ <sup>5</sup>, e perpendicular  $\iota_\mu$ , i.e.,

$$\xi_\mu = \zeta k_\mu + \iota_\mu \Rightarrow \xi_\mu k^\mu = \zeta k_\mu k^\mu + \iota_\mu k^\mu = 0. \quad (1.4.28)$$

Destarte, mesmo com  $\xi_\mu$  possuindo componentes na direção de  $k_\mu$ , ainda obtém-se um resultado nulo. Tal fato é a consequência matemática da degenerescência entre as curvas tangente e ortogonal.

Necessita-se uma métrica transversa ao campo vetorial nulo  $k^\mu$ , entretanto tal métrica não pode ser construída trivialmente como na congruência temporal, i.e.,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$ , visto ser  $h_{\mu\nu} \neq 0$ . Para a construção de tal métrica, observa-se o que ocorre em uma geodésica nula sobre um ponto  $\mathcal{P}$ . Um sistema orientado pode ser construído introduzindo-se a coordenadas nula  $u = \frac{t-z}{\sqrt{2}}$  e a coordenada nula auxiliar  $v = \frac{t+z}{\sqrt{2}}$ , conforme expresso na Figura 1.12. O elemento de linha do espaço-

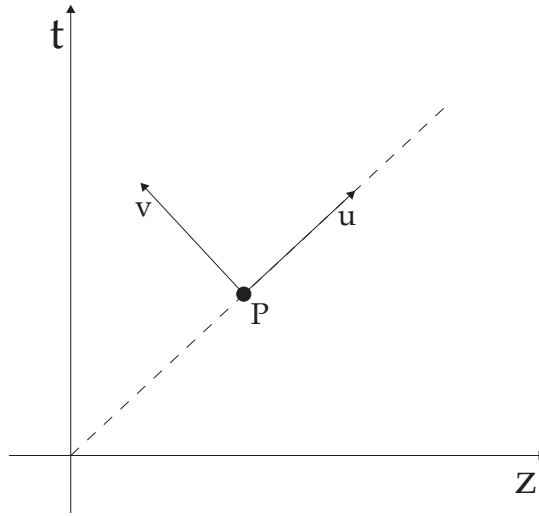


FIGURA 1.12: Coordenadas nulas  $u$  e  $v$  em um diagrama  $tz$ .

tempo de Minkowski fica escrito como

$$ds^2 = -dudv + dx^2 + dy^2. \quad (1.4.29)$$

Se  $k^\mu$  é tangente às curvas  $u = \text{constante}$ , o elemento de linha do espaço transverso se torna  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Neste caso, introduz-se outro vetor nulo  $N^\mu$ , chamado vetor nulo auxiliar, paralelo à  $k^\mu$ , i.e.,

$$N^\mu N_\mu = 0 \quad (1.4.30)$$

e

$$N^\mu k_\mu = -1, \quad (1.4.31)$$

onde o sinal negativo indica que ambos estão apontados para o futuro e a congruência é futuro orientada. Portanto, a métrica transversa é escolhida como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu N_\nu + N_\mu k_\nu, \quad (1.4.32)$$

implicando em  $ds^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2$ .

A métrica transversa (1.4.32) será utilizada na construção das congruências nulas no espaço-tempo curvo. Ela possui algumas propriedades, sendo elas  $h_{\mu\nu}$

<sup>5</sup> $\zeta$  é uma constante qualquer.



1. ser ortogonal à  $k^\mu$ , i.e.,  $h_{\mu\nu}k^\mu = 0$ ;
2. ser ortogonal à  $N^\mu$ , i.e.,  $h_{\mu\nu}N^\mu = 0$ ;
3. possuir traço 2, i.e.,  $h^\mu_\mu = 2$ ;
4. projetado nele mesmo gerar ele mesmo, i.e.,  $h^\mu_\rho h^\rho_\nu = h^\mu_\nu$ .

A escolha para a métrica transversa não é única, uma vez que, para uma mesma direção nula principal  $k^\mu$ , existem infinitas direções nulas auxiliares que satisfazem (1.4.30,1.4.31) [30].

Possuindo o tensor métrico transverso  $h_{\mu\nu}$ , a análise segue semelhantemente ao caso da congruência temporal, onde o tensor

$$B_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu k_\mu \quad (1.4.33)$$

representa a falha de  $\zeta^\mu$  ser transportado ao longo da congruência. Entretanto, apesar de  $B_{\mu\nu}$  ser ortogonal à  $k^\mu$ , ele não o é a  $N^\mu$ . Os componentes do vetor desvio paralelos ao vetor nulo auxiliar devem ser removidas e para isso, projeta-se o vetor desvio na métrica transversa, i.e.,

$$\tilde{\zeta}^\mu \equiv h^\mu_\nu \zeta^\nu = \zeta^\mu + (N^\nu \zeta_\nu) k^\mu. \quad (1.4.34)$$

A evolução do vetor desvio transverso  $\tilde{\zeta}^\mu$  ao longo da congruência é

$$(\nabla_\nu \tilde{\zeta}^\mu) k^\nu = h^\mu_\rho B^\rho_\nu \zeta^\nu + (\nabla_\nu N_\rho) \zeta^\rho k^\mu k^\nu. \quad (1.4.35)$$

A expressão acima possui componente na direção  $k^\mu$ . Como o interesse é uma velocidade transversal relativa, novamente a expressão acima é projetada no espaço transverso, obtendo-se

$$\begin{aligned} h^\mu_\rho (\nabla_\nu \tilde{\zeta}^\rho) k^\nu &= h^\mu_\rho h^\gamma_\nu B^\rho_\gamma \zeta^\nu \\ &= \tilde{B}^\mu_\nu \tilde{\zeta}^\nu, \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

onde define-se o tensor  $B_{\mu\nu}$  projetado  $\tilde{B}^\mu_\nu \equiv h^\mu_\rho h^\gamma_\nu B^\rho_\gamma$ . Analogamente ao caso da congruência temporal, o tensor  $\tilde{B}^\mu_\nu$  pode ser dividido em três partes distintas como

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (1.4.37)$$

onde

$$\Theta = \tilde{B}^\mu_\mu = \nabla_\mu k^\mu, \quad (1.4.38)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \tilde{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} \Theta h_{\mu\nu}, \quad (1.4.39)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \tilde{B}_{[\mu\nu]}, \quad (1.4.40)$$

descrevem a expansão, distensão e rotação da congruência, respectivamente. É valioso salientar que devido ao espaço transverso ser bidimensional, a expansão representa a variação da fração da área transversal, e não mais de um volume transversal. A expansão  $\Theta$  não depende da escolha do vetor nulo auxiliar  $N^\mu$ .

A evolução da expansão  $\Theta$  com o parâmetro afim  $\lambda$ , analogamente ao caso da congruência temporal, é descrita por

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}. \quad (1.4.41)$$

É possível mostrar que  $B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = \tilde{B}^{\mu\nu}\tilde{B}_{\mu\nu}$  de maneira que a equação de Raychaudhuri fica escrita como

$$\frac{DB_{\mu}^{\mu}}{d\tau} = \frac{D\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\Theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}. \quad (1.4.42)$$

Caso a congruência seja formadora por superfícies ortogonais e a condição de energia forte seja satisfeita, o teorema do foco

$$\frac{DB_{\mu}^{\mu}}{d\tau} \leq 0 \quad (1.4.43)$$

é automaticamente satisfeito. O teorema do foco não depende da escolha de  $N^{\mu}$ , devido aos quadrados dos tensores de distensão e rotação entrarem na equação, que, distintamente dos tensores em si, não dependem de  $N^{\mu}$  [30].

O espaço-tempo das ondas gravitacionais é construído a partir de uma congruência geodésica nula sem expansão, distensão e rotação. Retornar-se-á a tal caso no Capítulo 3. Esta parte encerra a análise dos efeitos da curvatura do campo gravitacional, com a próxima seção destinada à origem da curvatura.

## 1.5 Equações dinâmicas do campo gravitacional

Até o momento, o movimento de partículas em um campo gravitacional e as congruências geodésicas do campo gravitacional foram apresentadas, mas sem especificar o que gera o campo gravitacional. Como proposto por Einstein [4], a presença de um campo gravitacional implica o espaço-tempo não mais ser representado pela geometria pseudo-Euclidiana de Minkowski, descrita pelo tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$ , mas por uma variedade Riemanniana descrita pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e, o motivo da alteração é a presença de matéria e/ou radiação.

O procedimento utilizado para a obtenção das equações dinâmicas do campo gravitacional será o princípio variacional<sup>6</sup>, adotado por Hilbert [32]. A densidade de Lagrangiana total do campo gravitacional, matéria e radiação é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m. \quad (1.5.1)$$

onde  $\mathcal{L}_g$  é a densidade de Lagrangiana devido ao campo gravitacional e  $\mathcal{L}_m$  devido aos campos de matéria-radiação. A ação é escrita como

$$S = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) d^4x. \quad (1.5.2)$$

A densidade de Lagrangiana do campo gravitacional é construída de maneira semelhante a do eletromagnetismo, onde as equações de movimento são equações diferenciais de segunda ordem do quadripotencial. Como as equações de movimento são obtidas pelo princípio variacional, a densidade de Lagrangiana não deve possuir derivadas maiores do que primeira ordem. Com o tensor métrico fazendo

<sup>6</sup>Tal procedimento não é o único.

o papel do quadripotencial, a densidade de Lagrangiana deve ser função apenas de  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas, logo,

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, \dot{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}).$$

Escolhendo um sistema de coordenadas local, é sempre possível em um ponto  $\mathcal{P}$  escrever o tensor métrico como o tensor métrico de Minkowski, i.e.,

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu},$$

esse sistema de coordenadas é conhecido como sistema de coordenadas local geodésico. Utilizando tal propriedade, as derivadas de primeira ordem do tensor métrico podem sempre ser tomadas como nulas pela escolha de algum sistema de coordenadas, portanto, pela equação (1.1.19), a conexão de Christoffel também. As equações de campo devem ser expressões tensoriais, não podem depender da escolha do sistema de coordenadas. Porquanto, a integral do escalar de curvatura  $R$  pode ser escrita sem derivadas de segunda ordem do tensor métrico. A densidade de Lagrangiana do campo gravitacional é então definida como [17]

$$\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.5.3)$$

Usando a equação (1.5.2) a ação do campo gravitacional torna-se

$$S_g = \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}d^4x, \quad (1.5.4)$$

cuja variação é

$$\delta S_g = \int (g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})d^4x. \quad (1.5.5)$$

Usando o fato da variação da raiz quadrada do determinante do tensor métrico ser

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

a equação (1.5.5) pode ser escrita como

$$\delta S_g = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x. \quad (1.5.6)$$

O último termo do lado direito da equação acima pode ser calculado em coordenadas locais geodésicas, onde as conexões  $\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu}$  são nulas, mas não suas derivadas. Neste caso,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(\partial_\rho\delta\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\rho}) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\rho\delta\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\partial_\rho\delta\dot{\Gamma}^\nu{}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\dot{\Gamma}^\nu{}_{\mu\nu})], \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

de maneira que

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \partial_\rho[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\dot{\Gamma}^\nu{}_{\mu\nu})]d^4x. \quad (1.5.8)$$

A equação (1.5.8) pode ser transformada em uma integral de superfície pelo teorema de Gauss. Pelo princípio variacional, as extremidades são fixas, logo a variação na

superfície é nula. Apesar do resultado ter sido obtido em coordenadas locais geodésicas, por se tratar de uma equação tensorial, ele será válido em qualquer sistema de coordenadas. A variação da ação (1.5.2) se torna então

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4 x, \quad (1.5.9)$$

onde  $\kappa$  é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades adotado. Aplicando o princípio da mínima ação, as equações obtidas são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.5.10)$$

onde define-se o tensor energia-momento dos campos de matéria-radiação

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.5.11)$$

Para dada distribuição de matéria-energia  $T_{\mu\nu}$ , a curvatura do espaço-tempo é determinada pelas equações (1.5.10), chamadas equações de Einstein<sup>7</sup>. A constante  $\kappa$  é obtida no limite Newtoniano da teoria e o valor obtido, nas chamadas coordenadas geometrizadas ( $G = c = 1$ ), é [7]

$$\kappa = 8\pi. \quad (1.5.12)$$

No sistema internacional de unidade seu valor é  $\frac{8\pi G}{c^4}$ , sendo da ordem grandeza de  $10^{-41}$ . Devido ao valor pequeno dessa constante, os efeitos da Relatividade Geral na gravitação só são observados no caso de corpos muito massivos.

Tomando o traço da expressão (1.5.10), obtém-se

$$R - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R = \kappa T_{\nu}^{\nu} \Rightarrow R = -\kappa T, \quad (1.5.13)$$

onde  $T \equiv T_{\mu}^{\mu}$  é o traço do tensor energia-momento da matéria-radiação. Substituindo a equação (1.5.13) na equação (1.5.10), obtém-se

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.5.14)$$

Em regiões do espaço-tempo onde não há presença de matéria-radiação, as equações de Einstein podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.5.15)$$

Salienta-se a equação acima não implicar o espaço-tempo plano. Não há curvatura apenas se o tensor de curvatura  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$  for nulo.

As equações de Einstein são não lineares, não permitindo obter-se uma solução analítica para uma distribuição de matéria-radiação arbitrária. A obtenção de soluções para as equações (1.5.10) necessita prévia análise das simetrias, e.g., pelos vetores de Killing (1.2.12), pela congruência geodésica esperada, como apresentado na seção 1.4, *cetera*. Os tensores de Ricci (1.3.15) e métrico  $g_{\mu\nu}$  são quadridimensionais

<sup>7</sup>Uma demonstração formal deve considerar o efeito da curvatura extrínseca da variedade e coordenadas generalizadas, não sendo este o objetivo desta tese. A dedução progressiva consiste apenas uma apresentação simplificada das equações de Einstein satisfatória para os objetivos desta tese.

e simétricos, logo, as equações de Einstein (1.5.10) são, no máximo, dez equações independentes, enquanto o tensor de curvatura  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$  possui vinte componentes para serem determinadas. Essa alta não-linearidade das equações de Einstein torna possível a existência de soluções de vácuo, i.e., o campo gravitacional pode ser fonte dele mesmo. As soluções de vácuo onde  $R_{\mu\nu}$  é nulo em todo o espaço não deve ser confundida com soluções no vácuo onde  $R_{\mu\nu}$  é nulo apenas em uma região do espaço fora da fonte<sup>8</sup>.

A formulação da gravitação por meio do tensor métrico não permite a definição de um tensor energia-momento para o campo gravitacional, com apenas a construção de pseudo-tensores dependentes do sistema de coordenadas sendo possível [17]. Destarte, a formulação métrica da Relatividade Geral permite apenas a determinação da energia total, integrada em todo o espaço-tempo, de um campo gravitacional assintoticamente plano, não permitindo o conceito local de energia do campo. Devido à essa, limitação outro formalismo da Relatividade Geral fora construído a partir dos chamados campos de tétradas como variáveis fundamentais, em lugar tensor métrico. O próximo Capítulo será dedicado a esse formalismo, chamado Teleparalelo Equivalente da Relatividade Geral (TERG).

---

<sup>8</sup>Tais soluções serão designadas soluções no vácuo nesta tese.



## Capítulo 2

# Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

Nos anos subsequentes à sua formulação, a Teoria da Relatividade Geral fora bem recebida por parte dos físicos e matemáticos da época. Apesar da boa precisão na descrição do movimento planetário, um problema conceitual levava à objeções [33, 34, 35] por parte dos mesmos: a formulação do teorema energia-momento proposta pelo próprio Einstein [5, 26]. As maiores preocupações quanto à formulação de Einstein residiam na não localizabilidade da energia gravitacional.

A energia de um sistema físico é definida como uma quantidade invariante no tempo, i.e., pela sua lei de conservação. A lei de conservação da energia de um sistema isolado é a soma (integral), em todas as partes desse sistema, de uma quantidade vetorial que não varia com tempo, chamada energia-momento. Na relatividade especial, os teoremas da conservação da energia e do momento são unidos em uma lei diferencial expressando uma divergência nula do tensor energia; e, a partir dessa lei diferencial, uma lei integral pode ser formada. A proposta de Einstein não possuía um equivalente integral e a densidade de energia total calculada a partir do formalismo Hamiltoniano é [36]

$$\partial_\nu \mathcal{U}_\mu^\nu = 0. \quad (2.0.1)$$

onde  $\mathcal{U}^\nu{}_\mu = T^\nu{}_\mu + v^\nu{}_\mu$ , com  $T^\nu{}_\mu$  representando o tensor energia-momento dos campos de matéria-radiação e  $v^\nu{}_\mu$  o complexo energia-momento do campo gravitacional. Este último descrito por

$$v_\mu{}^\nu \propto \partial_\mu g^{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta (\partial_\nu g^{\alpha\beta})} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_g$$

é dependente da Lagrangiana de Einstein  $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})$ . Essa Lagrangiana de Einstein, definida na equação (1.5.3), ao contrário do escalar de curvatura  $R$  (1.3.16), não é uma densidade escalar verdadeira, sendo uma densidade escalar afim [37].

A expressão (2.0.1) não é uma expressão tensorial, logo,  $\mathcal{U}_\mu^\nu$  pode ser tomado como nulo por escolha adequada de coordenadas. Em 1918 a questão fora decidida pelo próprio Einstein em um artigo conclusivo [38], onde ele estabeleceu que a formulação, por ele proposta, fornecia a energia total de um sistema isolado  $B$  cujas coordenadas no exterior podiam ser transformadas em Galileanas, mas não no interior, nos espaços-tempo atualmente chamados assintoticamente planos. Apesar da divergência integral de  $\mathcal{U}_\mu^\nu$

$$\partial_0 \int \mathcal{U}_\mu^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad (2.0.2)$$

ser uma expressão independente do sistema de coordenadas, a quantidade  $\mathcal{U}_\mu^\nu$  não

é. Porquanto as inconsistências presentes, a contenda da localizabilidade da energia fora então respondida de maneira negativa, pois o fato de  $\mathcal{U}_\mu^v$  não ser um tensor implica o mesmo ter interpretação física limitada. Apesar de tal fato, a expressão da energia de Einstein forneceu, para um espaço-tempo com simetria esférica e assintoticamente plano, energia total

$$E = \int \mathcal{U}_0^0 dx^1 dx^2 dx^3 = M, \quad (2.0.3)$$

i.e., a energia que um observador no infinito observa para esse espaço-tempo é a massa inercial do sistema, em acordo à Relatividade Especial.

Quarenta anos após a negativa da localizabilidade da energia por Einstein, Christian Møller acreditou ter resolvido o problema da localizabilidade da energia. Enquanto a densidade de energia da expressão de Einstein era escrita a partir de um superpotencial

$$h_\mu^{\nu\lambda} = \frac{\mu\rho}{2\kappa\sqrt{-g}} \partial_\sigma \left[ (-g) \left( g^{\nu\rho} g^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\rho} g^{\nu\sigma} \right) \right] \quad (2.0.4)$$

a partir da relação

$$\mathcal{U}_\mu^v = \partial_\lambda h_\mu^{\nu\lambda}, \quad (2.0.5)$$

o superpotencial  $\chi_\mu^{\nu\lambda}$  de Møller era descrito por [39]

$$\chi_\mu^{\nu\lambda} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (\partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}) g^{\nu\rho} g^{\lambda\sigma}, \quad (2.0.6)$$

uma vez que a equação (2.0.1) não define um superpotencial unicamente. Apesar da expressão para o quadrivetor energia-momento  $P_\mu$ , descrita por

$$P_\mu = \int_{x^0=cte} \partial_\lambda \chi_\mu^{0\lambda} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.0.7)$$

descrever uma expressão local para a energia, ela não satisfaz outras propriedades que devem ser satisfeitas por uma definição de energia, como fora demonstrado pelo próprio Møller nos anos subsequentes [40]. Na crítica ao seu próprio trabalho, ele estabeleceu quatro condições que um quadrivetor energia-momento deve satisfazer, sendo elas

1. os componentes  $P_\mu$  serem constantes no tempo e se transformar tensorialmente;
2. a densidade de energia  $\mathcal{U}_\mu^v(x^\lambda)$  em cada ponto  $x^\lambda$  é uma densidade tensorial afim dependendo dos componentes do tensor métrico e de suas derivadas, de primeira e segunda ordem, no mesmo ponto  $x^\lambda$ ;
3. a densidade  $\mathcal{U}_\mu^v$  satisfaz a lei de conservação local

$$\partial_\nu \mathcal{U}_\mu^v = 0 \quad (2.0.8)$$

identicamente;

4. as componentes  $\mathcal{U}_\mu^v$  se transformam como uma densidade quadrivetorial com respeito ao grupo de transformações puramente espaciais  $\tilde{x}^i = f^i(x^j)$  e  $\tilde{x}^0 = x^0$ .



Enquanto o superpotencial (2.0.4) satisfaz as condi es 1-3, mas não a condi o de localizabilidade 4; o superpotencial (2.0.6) satisfaz as condi es 2-4, mas não a condi o 1. M ller concluiu ser impossível satisfazer todos os requerimentos 1-4 com qualquer escolha de superpotencial cuja energia possua divergência nula [40].

Com a ideia da não existência local da energia gravitacional sendo não ortodoxa, assim como a existência possível apenas em um sistema de coordenadas específico, o que contradiz um dos princípios fundamentais do qual a Relatividade Geral fora construída<sup>1</sup>, levou M ller a mudar a segunda condi o para

2. um complexo energia-momento em um ponto  $x^\lambda$    um tensor afim, dependendo algebricamente das variáveis do campo gravitacional e suas derivadas de primeira e segunda ordem no mesmo ponto  $x^\lambda$ .

Com a modifica o acima M ller sugeriu a variável fundamental do campo gravitacional não ser o tensor métrico, mas algo mais elementar. Devido aos trabalhos anteriores sugerindo as equa es para um campo Fermi nico, na presença de um campo gravitacional, não poderem ser expressas através do tensor métrico, mas através de um conjunto de quadrivetores mutuamente ortogonais e normalizados, chamados tétradas [41, 42, 43, 44, 45], M ller sugeriu uma descri o do campo gravitacional a partir dessas tétradas para resolver o problema da localizabilidade da energia gravitacional. Tal sugestão surtiu efeito em 1961, quando ele conseguiu a soluço para o problema [46]. Apresenta-se na se o 2.2 uma teoria gravitacional, cujas variáveis fundamentais são os campos de tétradas, resultando nas mesmas equa es dinâmicas para o campo gravitacional, e as expressões da energia, desta oriundas, na se o 2.3, enquanto na se o seguinte apresenta-se os campos de tétradas.

## 2.1 Campo de tétradas e referenciais

Um observador seguindo um movimento acelerado, o qual descrito por uma linha mundo  $\mathcal{C}$ , não possui uma única transforma o de Lorentz transformando seu referencial em inercial globalmente, i.e., um observador acelerado não possui um referencial no qual ele está sempre em repouso, como apresentado na Figura 2.1. Con-

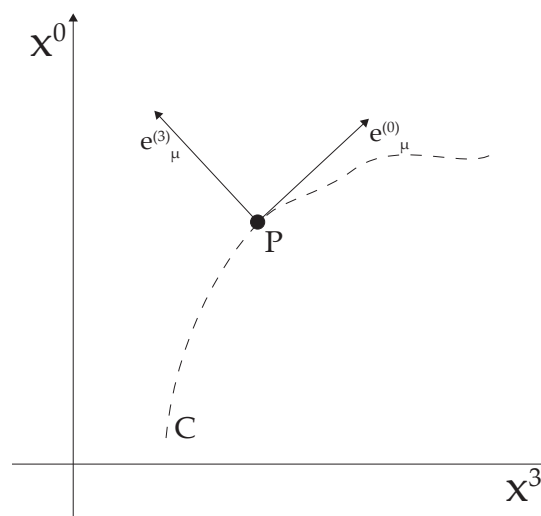


FIGURA 2.1: Referencial em repouso instantâneo em um evento  $P$  da linha mundo  $\mathcal{C}$ .

<sup>1</sup>*Id est*, uma formula o covariante da gravita o.

tudo, o observador carrega com si em cada evento  $\mathcal{P}$  um referencial no qual ele está sempre em repouso, chamado referencial de repouso instantâneo [7]. Para esse observador realizar medidas, deve projetar as quantidades físicas do espaço-tempo no seu referencial local, e.g., o observador mede um vetor  $V^\mu$  do espaço-tempo como

$$V^a = e^a{}_\mu V^\mu, \quad (2.1.1)$$

onde as letras latinas do começo do alfabeto (chamados de índices de Lorentz) indicam índices do espaço tangente à linha mundo no evento  $P$ , enquanto as letras gregas índices do espaço-tempo. Os componentes  $e^a{}_\mu$  da equação (2.1.1) projetam as quantidades do espaço-tempo no espaço tangente, sendo chamadas de tétradas.

O conjunto de tétradas

$$(e^{(0)}{}_\mu, e^{(1)}{}_\mu, e^{(2)}{}_\mu, e^{(3)}{}_\mu) = (e^{(0)}{}_\mu, e^{(i)}{}_\mu)$$

são quatro campos vetoriais linearmente independentes no espaço-tempo, onde  $e^{(0)}{}_\mu$  e  $e^{(i)}{}_\mu$  são vetores temporais e espaciais, respectivamente. Estabelecem o sistema de referência de repouso instantâneo, também chamado local, do observador. As tétradas  $e^a{}_\mu$  transformam-se como campos vetoriais contravariantes sob transformações de grupo  $SO(3,1)$   $\Lambda^a{}_b e^b$  (transformações locais de Lorentz), i.e.,

$$e'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b e^b{}_\mu, \quad (2.1.2)$$

e como campos vetoriais covariantes sob transformações de coordenadas, i.e.,

$$e'^a{}_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} e^a{}_\nu. \quad (2.1.3)$$

Devido à  $\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}$ , o tensor métrico do espaço-tempo local  $\eta_{ab}$  pode ser descrito por tétradas como [47]

$$e^a{}_\mu e^{b\mu} = \eta^{ab}. \quad (2.1.4)$$

O tensor métrico do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  pode ser obtido a partir da relação

$$e^a{}_\mu e_{av} = g_{\mu\nu}. \quad (2.1.5)$$

A tétrada inversa  $e_a{}^\mu$  é definida a partir da relação

$$e^a{}_\mu e_a{}^\mu = \delta_b^a \delta_b^\mu, \quad (2.1.6)$$

logo, os índices locais das tétradas são levantados e abaixados pelo tensor métrico do espaço-tempo plano  $\eta_{ab}$  enquanto que os índices do espaço-tempo pelo tensor métrico do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$ .

Para dado campo de tétradas, o tensor métrico é definido unicamente pela relação (2.1.5), enquanto para um dado tensor métrico, as tétradas são determinadas por (2.1.5), além de uma transformação de Lorentz espacial arbitrária. Sendo assim, se a tétrada  $e_{a\mu}$  satisfaz a equação (2.1.5) para um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , a tétrada

$$e'_{a\mu} = \Lambda_a{}^b(x^\nu) e_{b\mu} \quad (2.1.7)$$

também satisfará [37]. Enquanto o tensor métrico é simétrico, portanto possui dez

componentes independentes, as tétradas possuem dezesseis componentes independentes, contendo mais informações físicas do que o tensor métrico. Destarte, qualquer função do tensor métrico, e suas derivadas, pode ser escrita como uma função das tétradas, e suas derivadas.

O referencial local do observador seguindo a linha mundo  $\mathcal{C}$  na Figura 2.1 com quadrivelocidade  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ , onde  $\tau$  é seu tempo próprio, é alinhado para o referencial estar sempre em repouso para esse observador, ou seja, o componente  $e_{(0)}^\mu$  é tangente à linha mundo. Dessa forma, a quadrivelocidade do observador em seu referencial  $u^\mu$  é identificada com o componente  $e_{(0)}^\mu$ , visto ambos serem tangentes à linha mundo.

A aceleração  $a^\mu$  do observador é descrita por [47]

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{De_{(0)}^\mu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu e_{(0)}^\mu. \quad (2.1.8)$$

Dado conjunto de tétradas  $e^a{}_\mu$ , para o qual a componente zero descreve uma congruência de curvas temporais, está adaptado a uma classe particular de observadores, fornecendo a velocidade e aceleração deles. Se o observador carrega consigo um referencial descrito pelas tétradas  $e^a{}_\mu$ , então a aceleração desse referencial é [24, 25]

$$\frac{De_a{}^\mu}{d\tau} = \phi_a{}^b e_b{}^\mu. \quad (2.1.9)$$

O tensor  $\phi_{ab}$  é identificado como  $\phi_{ab} \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{\Omega})$ , onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração translacional e  $\mathbf{\Omega}$  é a frequência de rotação do referencial local com respeito a um referencial transportado sem rotação (Fermi-Walker transportado).

A equação (2.1.9) pode ser invertida com o auxílio da equação (2.1.6), tornando-se

$$\phi_a{}^b = e^b{}_\mu \frac{De_a{}^\mu}{d\tau} = e^b{}_\mu u^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu. \quad (2.1.10)$$

A quadriaceleração definida por (2.1.8) pode ser projetada no referencial  $e$ , utilizando a equação (2.1.10), escrita em função do tensor de aceleração como [47]

$$a^a = e^a{}_\mu a^\mu = \phi_{(0)}{}^a. \quad (2.1.11)$$

Destarte, o estado cinemático de um referencial é estipulado a partir do tensor  $\phi_{ab}$ .

Na próxima seção, assumindo as tétradas aqui apresentadas como componentes fundamentais do campo gravitacional, o problema posto no começo deste Capítulo será resolvido: a localizabilidade da energia gravitacional.

## 2.2 Equações de campo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

De acordo com Møller, a densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}_g$  não ser uma densidade escalar verdadeira é responsável pela não localizabilidade da energia na teoria de Einstein [37]. Tal fato indica que o campo gravitacional não é fundamentalmente um campo métrico, mas sim um campo de tétradas, onde o espaço-tempo não é simplesmente um espaço Riemanniano, mas sim um espaço como o considerado por Weitzenböck [48].

No formalismo de tetradas da gravitação, as equações de campo são derivadas pelo princípio variacional

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e^a{}_\mu} = 0, \quad (2.2.1)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a Lagrangiana do campo gravitacional, sendo uma função das variáveis do campo gravitacional, e suas derivadas de primeira ordem<sup>2</sup>, e uma densidade escalar sob transformações arbitrárias de coordenadas. A segunda condição é satisfeita se [37]

$$\partial_\alpha \left( e^a{}_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\alpha} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta e^a{}_\beta} \partial_\mu e^a{}_\beta = 0, \quad (2.2.2)$$

levando à equação de conservação

$$\partial_\alpha (\mathcal{T}_\mu{}^\alpha) + \mathcal{T}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta\mu} = 0, \quad (2.2.3)$$

onde  $\mathcal{T}_\mu{}^\nu$  é o tensor energia-momento total, ou seja, a soma dos tensores energia-momento dos campos de matéria-radiação e gravitacional. A quantidade  $\Gamma_{\alpha\beta\mu} \equiv e_{a\alpha} \partial_\mu e^a{}_\beta$  é antissimétrica na permutação dos dois primeiros índices. Usando as equações de campo (2.2.1) é possível reduzir a condição de  $\mathcal{L}$  ser uma densidade escalar (2.2.2) na expressão

$$\partial_\nu \mathcal{T}_\mu{}^\nu = 0. \quad (2.2.4)$$

Definindo um superpotencial  $\mathcal{U}_\lambda{}^{\mu\nu} \equiv [\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\nu e^a{}_\mu)] e^a{}_\lambda$ , é possível escrever  $\mathcal{T}_\mu{}^\nu$  como

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = \partial_\nu \mathcal{U}_\lambda{}^{\mu\nu}. \quad (2.2.5)$$

A partir das propriedades de  $\mathcal{L}$ , é possível mostrar que  $\mathcal{U}_\lambda{}^{\mu\nu}$  é uma densidade tensorial e o tensor energia-momento dado por (2.2.5) satisfaz as condições necessárias descritas no começo deste Capítulo<sup>3</sup>.

Para se construir uma teoria geométrica é necessário determinar-se a geometria que a variedade satisfará. A teoria chamada Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), cuja apresentação é objetivo deste Capítulo, é construída sobre uma geometria onde as tetradas são transportadas paralelamente. Destarte, o transporte paralelo nas tetradas é explorado na subseção seguinte.

## 2.2.1 Transporte paralelo

Como fora mostrado na seção 2.1, as tetradas associam-se ao referencial local de observadores no espaço-tempo e, como em todos os eventos da linha mundo do observador o componente  $e^0{}_\mu$  das tetradas deve ser tangente à linha mundo, i.e., o observador está sempre em repouso nesse referencial, as tetradas devem ser transportadas paralelamente ao longo da linha mundo. O transporte paralelo de um vetor implica na nulidade da sua derivada covariante, logo, existe uma conexão  $\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$  que garanta o transporte paralelo do campo de tetradas, i.e.,

$$\nabla_\nu e^a{}_\mu = \partial_\nu e^a{}_\mu + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e^a{}_\lambda = 0. \quad (2.2.6)$$

Uma teoria gravitacional, construída a partir da geometria estabelecida pela conexão (2.2.6), implica o paralelismo absoluto dos vetores transportados pelo espaço-tempo.

<sup>2</sup>Uma função homogênea quadrática dessas quantidades.

<sup>3</sup>Com a modificação da condição 2, onde as tetradas passam a ser a variável fundamental do campo gravitacional.

Isolando a conexão na equação acima, obtêm-se

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e_a{}^\lambda \partial_\nu e^a{}_\mu. \quad (2.2.7)$$

A conexão acima é chamada conexão de Weitzenböck e, diferentemente da conexão de Christoffel (1.1.19), é antissimétrica na permutação dos dois índices inferiores. Portanto, a torção

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \quad (2.2.8)$$

do espaço-tempo de Weitzenböck é não nula e pode ser escrita em função das tétradas, empregando a equação (2.2.7), como

$$T^a{}_{\mu\nu} = e^a{}_\lambda T^\lambda{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu. \quad (2.2.9)$$

Utilizando a equação (2.2.10), a conexão de Weitzenböck pode ser escrita como

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + \mathring{\omega}^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad (2.2.10)$$

onde define-se o tensor

$$\mathring{\omega}^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \left( T_{\mu\nu}{}^\lambda + T_\nu{}^\lambda{}_\mu + T^\lambda{}_{\nu\mu} \right). \quad (2.2.11)$$

Apesar da expressão acima se transformar tensorialmente, ela projetada nas tétradas não transforma. A partir dessa expressão, define-se a conexão de Levi-Civita

$$\mathring{\omega}^\lambda{}_{ab} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \mathring{\omega}^\lambda{}_{\mu\nu}. \quad (2.2.12)$$

Constrói-se o tensor de curvatura do TERG a partir da conexão (2.2.12).

O tensor de curvatura construído a partir da conexão de Weitzenböck  $R_{\mu\nu\beta}{}^\alpha$  é identicamente nulo [47]. Destarte, os escalares de curvatura construídos a partir das conexões de Christoffel e Levi-Civita são equivalentes. Logo, o escalar de curvatura do Teleparalelismo construído a partir do tensor de curvatura

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\omega}_{\nu ab} - \partial_\nu \mathring{\omega}_{\mu ab} + \mathring{\omega}_{\mu ac} \mathring{\omega}_\nu{}^c{}_b - \mathring{\omega}_{\nu ac} \mathring{\omega}_\mu{}^c{}_b \quad (2.2.13)$$

é descrito por

$$R = - \left( \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) + \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu), \quad (2.2.14)$$

onde  $e \equiv \det(e^a{}_\mu)$  e  $T^\mu \equiv T^a{}_{a\mu}$ . A torção pode ser colocada em evidência na equação (2.2.14), obtendo-se

$$R = -\Sigma^{abc} T_{abc} + \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu), \quad (2.2.15)$$

onde define-se a quantidade

$$\Sigma^{abc} \equiv \frac{1}{4} \left( T^{abc} + T^{bac} - T^{cab} \right) + \frac{1}{2} \left( \eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c \right). \quad (2.2.16)$$

Os componentes  $T^{abc} T_{abc}$ ,  $T^{abc} T_{bac}$  e  $T^a T_a$  são invariantes de Weitzenböck.

O transporte paralelo das tétradas fornece uma teoria cuja curvatura do espaço-tempo é nula, mas a torção não é. Embora dinamicamente equivalentes, a formulação da gravitação pelo campo de tétradas permite isolar a parte da densidade de Lagrangiana que é responsável pela invariância local da teoria, tornando a mesma

invariante apenas sob transformações de Lorentz constantes, i.e., transformações globais. O formalismo Lagrangiano do TERG é apresentado na subseção que se segue.

### 2.2.2 Equações de campo

Vantagens na formulação de tetradas da Relatividade Geral aparecem na construção da densidade de Lagrangiana. A densidade de Lagrangiana

$$eR = -e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\partial_\mu(eT^\mu) \quad (2.2.17)$$

possui as mesmas simetrias que a densidade de Lagrangiana de Einstein (1.5.3). Entretanto, com a ausência do termo de divergência total à direita, a teoria passa a não ser invariante sob transformações gerais  $\Lambda^a_b(x^\mu)$ , sendo invariante apenas sob rotações cujos coeficientes  $\Lambda^a_b$  são constantes. A formulação de tetradas permite naturalmente a construção de uma densidade de Lagrangiana não invariante por transformações locais de Lorentz, o que resulta em quantidades conservadas que são componentes de um quadri vetor com índices locais. Identificando os graus de liberdade adicionais do campo de tetradas com a cinemática do observador no espaço-tempo, conforme vê-se na seção 2.4, a não invariância sob transformações locais de Lorentz implica as quantidades físicas medidas serem dependentes do observador, como ocorre na física clássica. A densidade escalar de curvatura (2.2.17) pode ser escrita em função de uma divergência total de uma função  $h^\mu$  como [46, 37]

$$eR = \mathcal{L} + \partial_\mu h^\mu, \quad (2.2.18)$$

onde a densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}$  satisfaz as propriedades requeridas no começo do Capítulo satisfazendo a equação (2.2.2). Comparando as equações (2.2.17) e (2.2.18), nota-se a densidade de Lagrangiana da teoria se tornar

$$\mathcal{L} = -e\Sigma^{abc}T_{abc}. \quad (2.2.19)$$

A densidade de Lagrangiana acima é invariante sob transformações de coordenadas e transformações globais de Lorentz ( $\Lambda^a_b = cte$ ).

Utilizando

$$\frac{\delta\Sigma^{bcd}T_{bcd}}{\delta e^{a\mu}} = 2\Sigma^{bcd}\frac{\delta T_{bcd}}{\delta e^{a\mu}},$$

as equações de campo (2.2.1) para a  $\mathcal{L}$ , descrita por (2.2.19), podem ser calculadas, obtendo-se [49, 50]

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = \frac{1}{4k}eT_{a\mu}, \quad (2.2.20)$$

onde  $eT_{a\mu} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta e^{a\mu}}$  e  $\mathcal{L}_M$  é a densidade de Lagrangiana dos campos de matéria- radiação. Apesar da densidade de Lagrangiana (2.2.19) ser invariante apenas sob transformações de coordenadas e gerais de Lorentz, as equações de campo (2.2.20) são covariantes sob transformações locais de Lorentz.

Utilizando as identidades

$$\begin{aligned} T_\mu &= -\dot{\omega}^{\nu}{}_{\nu\mu} \\ T_{\mu\lambda\nu} &= \dot{\omega}_{\lambda\nu\mu} - \dot{\omega}_{\nu\lambda\mu} \\ \Sigma_{\mu bc} &= -\frac{1}{2} (\dot{\omega}_{\mu bc} - e_{b\mu}\dot{\omega}^{\nu}{}_{\nu c} + e_{c\mu}\dot{\omega}^{\nu}{}_{\nu b}) \end{aligned}$$

é possível escrever as equações de campo (2.2.20) como [47]

$$\frac{1}{2}e \left( R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e) \right) = \frac{1}{4k}eT_{a\mu}, \quad (2.2.21)$$

onde  $R_{a\mu} \equiv R^b{}_{ab\mu}$ . Aplicando as tétradas  $e^a{}_\nu$  em ambos os lados da equação (2.2.21), com a ajuda de (2.1.5), é possível obter-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2k}T_{\mu\nu}. \quad (2.2.22)$$

Se a constante  $k = \frac{1}{2\kappa} = \frac{1}{16\pi}$ , as equações de campo (1.5.10) e (2.2.22) tornam-se equivalentes. Destarte, se um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  satisfaz as equações de campo (1.5.10), então ele também satisfaz as equações de campo (2.2.22) a partir da relação (2.1.5). Devido ao campo de tétradas ser mais fundamental que o campo métrico, todos os resultados físicos obtidos a partir da formulação métrica da gravitação, também são válidos na formulação teleparalela, por isso, a teoria é chamada Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) [47].

Apesar das equações de campo (1.5.10) e (2.2.20) serem dinamicamente equivalentes, suas simetrias não são. Essa diferença fundamental torna as a formulação de tétradas, descrita pela torção do espaço-tempo, mais fundamental que a teoria métrica, visto um grupo de infinitas tétradas produzirem o mesmo tensor métrico. Matematicamente isso pode ser expresso pelo fato do tensor métrico possuir dez componentes independentes, enquanto o campo de tétradas possui, a princípio, dezesseis componentes independentes. Tais informações adicionais permitem não apenas a resolução do problema da localizabilidade da energia gravitacional por meio da equação (2.2.5), mas também a obtenção de uma expressão geral para a energia e para o momento angular do campo gravitacional, como será visto na seção seguinte.

## 2.3 Leis de conservação nas equações de campo do TERG

A formulação Hamiltoniana do TERG fora feita pela primeira vez por Maluf [49]. A partir dessa formulação, expressões para a energia, momento e momento angular do campo gravitacional foram desenvolvidas nos anos seguintes [51, 52, 53]. Apesar de tal formulação ser de extrema importância para a compreensão do campo gravitacional e do TERG, para não interromper o fluxo desta tese, os aspectos formais desse formalismo são deixado para o Apêndice B. As expressões nessa seção são obtidas através do formalismo Lagrangiano da teoria, sendo corretamente interpretadas de modo a coincidirem com resultados formais obtidos no formalismo Hamiltoniano.

### 2.3.1 Energia do campo gravitacional

Os seis componentes adicionais no campo de tétradas, em relação ao tensor métrico, permite a existência de informações não apenas referentes ao campo gravitacional,

mas ao observador realizando medidas naquele campo gravitacional. Tal fato permite a obtenção de um tensor energia-momento para o campo gravitacional, diretamente a partir das equações de campo (2.2.20), que pode carregar informações sobre o observador. Reescrevendo as equações de campo (2.2.20) como

$$\partial_\nu (e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4k} ee^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}) \quad (2.3.1)$$

pode-se definir

$$t^{\lambda\nu} = k \left( 4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right). \quad (2.3.2)$$

O tensor  $\Sigma^{a\mu\nu}$  é antissimétrico na permutação dos dois últimos índices, logo

$$\partial_\nu \partial_\mu \Sigma^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu (\Sigma^{a\mu\nu} + \Sigma^{a\nu\mu}) = 0.$$

A partir da relação acima, a derivada parcial em  $\lambda$  na equação (2.3.1) resulta em

$$\partial_\lambda [ee^a{}_\mu (t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})] = 0. \quad (2.3.3)$$

A equação (2.3.3) pode ser reescrita separando os índices espaciais do temporal, i.e.,

$$\partial_0 [ee^a{}_\mu (t^{0\mu} + T^{0\mu})] = -\partial_i [ee^a{}_\mu (t^{i\mu} + T^{i\mu})], \quad (2.3.4)$$

e, integrando ambos os lados em um volume tridimensional  $V$  arbitrário, obtêm-se pelo teorema de Gauss

$$\frac{d}{dx^0} \int_V d^3x [ee^a{}_\mu (t^{0\mu} + T^{0\mu})] = - \oint_S dS_i [ee^a{}_\mu (t^{i\mu} + T^{i\mu})], \quad (2.3.5)$$

onde a superfície  $S$  é a superfície ortogonal à direção  $\partial_i$  que delimita o volume  $V$ .

A equação (2.3.5) é uma equação de continuidade [47], semelhante à equação (1.4.11). O lado direito da equação representa um fluxo de energia-momento, enquanto o lado esquerdo representa a variação da energia associada ao tensor energia-momento  $\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$  descrito na equação (2.2.3). O tensor  $T^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento dos campos de matéria-radiação, e, como o tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  representa a energia-momento total, conclui-se que  $t^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento do campo gravitacional, descrito por (2.3.2). Destarte, o quadrivetor energia-momento total contido em um volume  $V$  é definido como [52, 54]

$$P^a \equiv \int_V d^3x ee^a{}_\mu (t^{0\mu} + T^{0\mu}). \quad (2.3.6)$$

Usando as equações de campo (2.3.1) a expressão (2.3.6) pode ser escrita em função do tensor  $\Sigma^{a0\mu}$  como

$$P^a = -4k \int_V d^3x \partial_\mu (e\Sigma^{a0\mu}) = -4k \int_V d^3x \partial_i (e\Sigma^{a0i}), \quad (2.3.7)$$

visto  $\Sigma^{a00} = 0$ . Quando o volume  $V$  está contido no vácuo ( $T^{\mu\nu} = 0$ ), a equação (2.3.7) representa o tensor energia-momento do campo gravitacional.



As quantidades  $-4k\Sigma^{a0\mu}$  são justamente os momentos canonicamente conjugados  $\Pi^{ak}$  às tétradas  $e_{ak}$  [55], i.e.,

$$\Pi^{ak} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{e}_{ak}} = -4ke\Sigma^{a0\mu}. \quad (2.3.8)$$

A expressão

$$P^a = \int_V d^3x \partial_k \Pi^{ak} = - \oint_S dS_i \Pi^{ai} \quad (2.3.9)$$

é obtida a partir do formalismo Hamiltoniano das equações de campo (2.3.1) no vácuo [52, 54]. O quadrivetor energia-momento é covariante sob reparametrizações temporais, transformações de coordenadas puramente espaciais e sua densidade  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  satisfaz a lei de conservação (2.0.8), sendo funções do campo de tétada<sup>4</sup>. Pode-se observar que a condição 3 de Møller é satisfeita, ou seja, a equação (2.3.3) é uma verdadeira lei de conservação da energia-momento, tomando o limite  $V \rightarrow \infty$  na equação (2.3.5). Tal equação torna-se nula se o tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  cair suficientemente rápido no infinito, i.e., se o espaço for assintoticamente plano [47].

### 2.3.2 Momento angular do campo gravitacional

Na eletrodinâmica clássica o tensor energia-momento  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  sempre pode ser tido como simétrico por uma transformação, desde que tal transformação não altere a forma das equações de movimento [17]. Dessa forma,

$$\mathcal{T}^{\nu\mu} - \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \delta_\lambda^\mu \mathcal{T}^{\nu\lambda} - \delta_\lambda^\nu \mathcal{T}^{\mu\lambda} = 0. \quad (2.3.10)$$

Como  $\delta_\lambda^\mu = \partial_\lambda x^\mu$ , a equação acima pode ser escrita como

$$\partial_\lambda (x^\mu \mathcal{T}^{\nu\lambda} - x^\nu \mathcal{T}^{\mu\lambda}) = 0. \quad (2.3.11)$$

Integrando a equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (x^\mu \mathcal{T}^{\nu 0} - x^\nu \mathcal{T}^{\mu 0}) &= - \oint_S dS_i (x^\mu \mathcal{T}^{\nu i} - x^\nu \mathcal{T}^{\mu i}) \\ &= - \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu), \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

onde  $dP^\mu = dS_i \mathcal{T}^{\mu i}$  é a “densidade” de energia. A equação (2.3.12) é uma equação de continuidade para a quantidade

$$L^{\mu\nu} \equiv \int_V d^3x (x^\mu \mathcal{T}^{\nu 0} - x^\nu \mathcal{T}^{\mu 0}) \quad (2.3.13)$$

chamada de momento angular do campo. A conservação do momento angular é uma consequência direta da simetria do tensor energia-momento.

No Teleparalelismo, o campo gravitacional é descrito não por coordenadas, mas por referenciais, logo, o análogo da coordenada  $x^\mu$  para um observador no espaço tangente é  $e^a{}_\mu$ . A densidade de energia do campo gravitacional  $dP^a$  pode ser obtida a partir da equação (2.3.9). Sendo assim, o análogo da expressão (2.3.13) no

<sup>4</sup>Tais propriedades satisfazem as condições de Møller 1, 4, 3 e 2.1, respectivamente, apresentadas no começo deste Capítulo.

Teleparalelismo é

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \left( e^a{}_{\mu} \Pi^{b\mu} - e^b{}_{\mu} \Pi^{a\mu} \right) L^{ab} &= \int_V d^3x \left( e^a{}_{\mu} \Pi^{b\mu} - e^b{}_{\mu} \Pi^{a\mu} \right) \\ &= -4k \int_V d^3x \left( \Sigma^{b0a} - \Sigma^{a0b} \right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

A expressão acima pode ser simplificada com o auxílio das equações (2.2.9) e (2.2.16), tornando-se [29]

$$L^{ab} = \int_V d^3x M^{ab} = \int_V d^3x \partial_i \left[ e \left( e^{ai} e^{b0} - e^{bi} e^{a0} \right) \right]. \quad (2.3.15)$$

A verificação da equação acima representar uma verdadeira equação de conservação pode ser feita semelhantemente ao caso da conservação da energia, i.e., derivando a equação (2.3.14) em relação à  $\lambda$  e igualando a derivada temporal do momento angular com uma integral de superfície, sendo esta nula no limite  $V \rightarrow \infty$  caso o espaço seja assintoticamente plano.

Em coordenadas Cartesianas os componentes  $L^{(1)(2)} = L^{xy}$ ,  $L^{(3)(1)} = L^{zx}$  e  $L^{(2)(3)} = L^{yz}$  são os componentes  $x, y, z$  do momento angular, respectivamente. Tais componentes relacionam-se a operadores de rotação nas respectivas direções. Os componentes  $L^{(0)(i)}$  formam um vetor

$$\vec{I} = (L^{(0)(1)}, L^{(0)(2)}, L^{(0)(3)}). \quad (2.3.16)$$

A interpretação do vetor acima pode ser obtida considerando-se um conjunto de partículas relativísticas, cujo momento angular total  $L^{\alpha\beta} = x^\alpha P^\beta - x^\beta P^\alpha$  se conserva. Sendo assim,

$$\sum_i \vec{I}_i = \sum_i \left( x^0 \vec{P}^i - P^0 \vec{x}^i \right) = \text{constante}, \quad (2.3.17)$$

onde o índice  $i$  descreve cada partícula do sistema. Por se tratar de um sistema conservativo, por construção, pode-se definir

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum_i P^0 \vec{x}^i}{\sum_i P^0} \quad (2.3.18)$$

e

$$\vec{\dot{x}}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{P}^i}{\sum_i P^0} \quad (2.3.19)$$

como sendo a posição do centro de massa e a velocidade do sistema, respectivamente. Destarte, com o auxílio das expressões (2.3.18) e (2.3.19), a equação (2.3.17) pode ser escrita como

$$\vec{x}_{CM} = \vec{\dot{x}}_{CM} t + \frac{\sum_i \vec{I}_i}{\sum_i P^0}. \quad (2.3.20)$$

Portanto, o vetor  $\vec{I}$  é interpretado como o centro de energia, ou inércia, do campo gravitacional, fazendo o papel análogo do centro de massa de um sistema de partículas [56].

As expressões para o quadrimomento do campo gravitacional e momento angular satisfazem a álgebra do grupo de Poincaré [55]

$$\begin{aligned}\{P^a, P^b\} &= 0, \\ \{P^a, L^{bc}\} &= \eta^{ab}P^c - \eta^{ac}P^b, \\ \{L^{ab}, L^{cd}\} &= \eta^{ac}L^{bd} + \eta^{bd}L^{ac} - \eta^{ad}L^{bc} - \eta^{bc}L^{ad},\end{aligned}$$

logo, suas interpretações são fisicamente consistentes. Determinando-se um campo de tétradas  $e^a{}_\mu$  associado a um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  pela expressão (2.1.5) é possível determinar a energia e o momento angular do campo gravitacional. Entretanto, um número infinito de tétradas satisfazem um mesmo tensor métrico, e parte dessa “liberdade” está relacionada à escolha do referencial. Como será mostrado na próxima seção, a escolha de um observador estacionário limita o número de componentes independentes do campo de tétradas de dezesseis para treze.

## 2.4 Estabelecimento de um referencial estático

No TERG, a determinação das propriedades físicas de um campo gravitacional, descrito por um elemento de linha, começa com o estabelecimento de um conjunto de tétradas associado a esse elemento de linha. Entretanto, pela equação (2.1.5), pode-se observar a existência da liberdade na escolha do campo de tétradas, i.e., um mesmo tensor métrico pode ser obtido por uma infinidade de tétradas distintas. Essa liberdade matemática está relacionada ao fato de vários referenciais distintos poderem ser construídos em um espaço-tempo. Como o interesse no TERG é a medição de propriedades físicas do campo gravitacional, apenas uma classe desses referenciais é interessante no ponto de vista do TERG. São eles os referenciais adaptados aos observadores estáticos.

Um referencial mede, para um campo gravitacional, a energia do campo, mas também a energia associada ao seu próprio movimento. Dessa forma, para as medidas feitas por um observador descreverem os mesmos valores que um observador no infinito mediria, esse observador deve estar estático nesse espaço-tempo em relação a um observador no infinito. O componente  $e_{(0)}{}^\mu$  é tangente à linha mundo  $C$  de um observador, logo, pode ser identificado com a quadrivelocidade desse observador, i.e.,

$$e_{(0)}{}^\mu = u^\mu(\tau), \quad (2.4.1)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio do observador. Se o observador é estático, sua velocidade deve ser nula em todas as hipersuperfícies tridimensional espaciais, possuindo apenas o componente  $u^{(0)}$  não nulo. Portanto, a condição de um campo de tétradas ser estático é, devido à (2.4.1),

$$e_{(0)}{}^\mu = (e_{(0)}{}^0, 0, 0, 0). \quad (2.4.2)$$

Para se caracterizar a congruência temporal das curvas  $e_{(0)}{}^\mu(x^0, x^i)$  que definem um referencial, deve-se fixar um parâmetro temporal  $x^0$ , i.e., a mesma coordenada temporal para todos os observadores na hipersuperfície espacial tridimensional. Esse procedimento consiste na foliação do espaço-tempo em infinitas hipersuperfícies espaciais parametrizadas pelo parâmetro temporal  $x^0$ . Após a determinação da coordenada temporal, a condição da tétrada ser estática  $e_{(0)}{}^j = 0$  permanece válida para

qualquer escolha de coordenadas espaciais, visto

$$e'_{(0)}{}^i(x^0, x^k) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} e'_{(0)}{}^j(x^0, x^k) = (0, 0, 0). \quad (2.4.3)$$

Pela equação (2.4.3) pode-se notar o estabelecimento da condição para um observador ser estático não depender da escolha das coordenadas espaciais  $x^j$ , mas apenas da escolha do parâmetro temporal  $x^0$ . Se a distância à fonte do campo gravitacional for caracterizada pela coordenada  $r$ , então, se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu, \quad (2.4.4)$$

o campo de tetradas  $e^a{}_\mu$  está adaptado à observadores estáticos no infinito.

Na presença de um campo gravitacional, o observador é impedido de entrar em movimento geodésico (queda livre) devido à aceleração que possui sentido oposto à aceleração gravitacional. Destarte, pode-se determinar a aceleração do campo gravitacional a partir da aceleração inercial que um observador deve ter para permanecer estático, e.g., a aceleração inercial dos motores de um foguete. A aceleração (2.1.11) pode ser escrita a partir da conexão de Christoffel como

$$a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \hat{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (2.4.5)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro afim. Se  $u^\mu$  representa uma trajetória geodésica, o referencial está em queda livre, portanto,  $a^\mu = \phi_{(0)(i)} = 0$ . Consequente, pode-se concluir que  $\phi_{(0)(i)}$  representa a aceleração inercial do referencial na direção  $(i)$ . A interpretação geométrica de um conjunto qualquer de tetradas, para um espaço-tempo arbitrário, pode ser obtida pelos componentes do tensor de aceleração  $\phi_{(a)(b)}$ , que, escrito em função da conexão de Levi-Civita, apresenta-se como [47]

$$\phi_{(a)(b)} = e_{(0)}{}^\mu \hat{\omega}_{\mu ab} = \frac{1}{2} \left( T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a} \right). \quad (2.4.6)$$

A expressão acima não é invariante sob transformações do tipo  $\Lambda^a{}_b(x^\mu)$ , mas é invariante sob transformações de coordenadas. O primeiro fato demonstra a dependência das acelerações inerciais com a cinemática do observador, logo, como mencionado anteriormente, para um observado estático, a aceleração medida pelo observador é menos a aceleração do campo gravitacional. Destarte, a aceleração gravitacional  $a_g^{(i)}$  pode ser obtida para um dado campo de tetradas pela relação

$$a_g^{(i)} = -\phi_{(0)(i)} = -T_{(0)(0)(i)}. \quad (2.4.7)$$

Os componentes  $\phi_{(i)(j)}$  representam a rotação do referencial com respeito a um referencial Fermi-Walker transportado. Sendo assim, um referencial arbitrário pode ser, a princípio, rotacionado para se obter um referencial Fermi-Walker transportado a partir de uma transformação de Lorentz que satisfaça [57]

$$\phi_{(i)(j)} = e_{(0)}{}^\mu \Lambda^{(k)}{}_{(j)} \partial_\mu \Lambda_{(k)(i)}. \quad (2.4.8)$$

Dessa forma, obtêm-se por uma transformação local no campo de tetradas

$$\tilde{e}_{(i)}{}^\mu = \Lambda_{(i)}{}^{(k)} e_{(k)}{}^\mu$$

e um novo campo de tétradas  $\tilde{e}_{(i)}{}^\mu$  satisfazendo

$$\tilde{\phi}_{(i)(j)} = 0.$$

A transformação de Lorentz satisfazendo a equação (2.4.8) não afetam o componente  $e_{(0)}{}^\mu$ , logo, o caráter estático de referencial não é alterado, apenas sua orientação espacial.

Consequentemente um observador estático medirá a energia (2.3.7), momento angular e centro de inércia (2.3.15) devido exclusivamente ao campo gravitacional, e não a sua cinemática. As tétradas, construídas pelo método disposto nessa seção, serão utilizadas para a determinação das propriedades físicas do campo de uma onda gravitacional no Capítulo 3, a serem introduzidas nesse mesmo Capítulo. As acelerações inerciais descritas pela equação (2.4.7) serão importantes na construção de um teorema trabalho-energia para partículas na presença de ondas gravitacionais no Capítulo 5.



## Capítulo 3

# Ondas gravitacionais planas

As equações dinâmicas do campo eletromagnético, conhecidas como equações de Maxwell, admitem soluções na ausência de fonte. Tais soluções representam campos eletromagnéticos, propagando-se na velocidade da luz, chamados ondas eletromagnéticas planas. Tais ondas consistem em uma idealização, visto não se esperar a existência de ondas sem uma fonte. Entretanto, soluções reais a grandes distâncias podem ser aproximadas por ondas eletromagnéticas planas. Pequenas superfícies (infinitesimais) podem ser escolhidas em uma onda eletromagnética qualquer onde as propriedades da onda sejam uniformes, sendo conhecidas como frentes de onda. A combinação dos versores dessas superfícies é chamada raio de luz no limite da óptica geométrica. A partir de tal construção, as ondas eletromagnéticas podem ser representadas por uma congruência dos raios de luz, similar às apresentadas na seção 1.4, que nunca se cruzam e sempre perpendiculares à direção de propagação. Destarte, a congruência das ondas planas não possui expansão, distorção e rotação.

Uma classe de soluções das equações de Einstein despertou o interesse de Einstein e Rosen [26, 58]. Essas soluções, analogamente às ondas eletromagnéticas descobertas no século anterior, representam uma propagação, na velocidade da luz, de uma configuração da geometria do espaço-tempo. Devido ao efeito gravitacional manifestar-se geometricamente na Relatividade Geral (RG), na presença de um campo gravitacional o tensor métrico, que descreve a estrutura geométrica de uma variedade em um sistema de coordenadas específico, sofre uma modificação em relação ao tensor métrico que representa o espaço-tempo plano neste mesmo sistema de coordenadas. Devido à dependência da forma do tensor métrico com o sistema de coordenadas, ele não é adequado para indicar se um espaço-tempo é plano ou não, necessitando o cálculo do tensor de curvatura, conforme visto na seção 1.3. A forma do tensor de curvatura depende do sistema de coordenadas, mas sua nulidade em um ponto implica o espaço-tempo ser plano naquele ponto em particular. Isso não garante o espaço-tempo ser plano sempre e nem a não existência de efeitos gravitacionais, uma vez que o fenômeno gravitacional é global e não local. Sendo assim, inicialmente campos gravitacionais distintos podem ser distinguidos entre si pelos escalares de curvatura<sup>1</sup>, que são construídos a partir do tensor de curvatura.

<sup>1</sup> A partir do tensor de curvatura, dependente do sistema de coordenadas, quatorze invariantes de curvatura podem ser construídos, entre eles o escalar de curvatura (1.3.16) e o escalar de Kretschmann

$$K = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (3.0.1)$$

A princípio, uma solução pode ser distinguida de outra a partir dos seus invariantes de curvatura, uma vez que são quantidades invariantes por transformações de coordenadas, transformações locais de Lorentz e transformações globais de Lorentz. Entretanto, alguns espaço-tempos possuem todos os invariantes de curvatura nulos e são classificados como espaço-tempos VSI (*vanishing scalar invariant*) [59]. Tais espaço-tempos não podem ser distinguidos do espaço-tempo de Minkowski por nenhum escalar de curvatura.

Entretanto, o espaço-tempo das ondas gravitacionais é VSI [60], sendo esse um dos motivos para a dificuldade na aceitação histórica de tais soluções como soluções fisicamente realistas. A história das ondas gravitacionais é deveras longa, persistindo desde os primórdios da Relatividade Geral, mas apenas nas últimas décadas sua existência alcançou aceitação majoritária no meio acadêmico. Inicialmente uma solução ondulatória fora obtida a partir das equações de Einstein na sua versão linearizada, com soluções supostamente válidas que possuem uma zona de campo distante<sup>2</sup>. Apesar da teoria linearizada prever a emissão de ondas gravitacionais como consequência do movimento de dois corpos mutualmente se orbitando, a mesma não contempla a contra-reação sofrida por esses corpos em seu movimento. Além disso, tais ondas não possuem energia gravitacional<sup>3</sup> associada a elas no Teleparalelismo [29].

Soluções exatas descrevendo as interações entre o movimento de corpos e a emissão de radiação gravitacional não são conhecidas. Apesar desse fato, existem soluções exatas das equações de Einstein que representam soluções de ondas planas, similarmente às soluções de onda plana das equações de Maxwell no eletromagnetismo, sendo também idealizações de soluções a grandes distâncias da fonte. Tais soluções possuem todos os escalares de curvatura nulos, não possibilitando a distinção desses espaços-tempo do espaço-tempo plano de Minkowski por meio de tais escalares apenas. Esse problema, além de outros como a exigência, à época, da existência de um sistema de coordenadas que fosse regular em toda a variedade, levou à grande incerteza sobre a existência de tais ondas. A incerteza perdurou até o fim dos anos cinquenta, com a negativa à existência sendo defendida pelo próprio Rosen [58]. Em 1957, Bondi contestou a afirmação “tais ondas [gravitacionais polarizadas] não poderiam existir porque a métrica possuiria certas singularidades físicas” [61] de Rosen. Apesar da afirmação, Bondi não apresentou completamente sua discussão, argumentando que as ondas linearmente polarizadas carregam energia, mesmo sem haver um conceito bem estabelecido de energia gravitacional na época. A complementação da discussão veio em outro trabalho realizado com a colaboração de Pirani e Robinson [27], onde as ondas gravitacionais planas foram propriamente definidas como solução exata das equações de Einstein, admitindo a mesma quantidade de simetrias que as ondas eletromagnéticas planas. Apesar dessas ondas serem idealizações, assim como as ondas eletromagnéticas planas, ondas reais podem ser aproximadas por tais ondas quando analisadas a grandes distâncias das fontes reais.

Introduz-se as ondas gravitacionais discutidas por Bondi, Pirani e Robinson na subseção 3.1 seguinte, com suas propriedades analisadas com as ferramentas da Relatividade Geral; apresenta-se suas soluções fisicamente aceitas na subseção 3.1.2. Calcula-se e analisa-se na subseção 3.3 as propriedades físicas do campo gravitacional das ondas planas com o auxílio das definições oriundas do Teleparalelismo. Por fim, apresenta-se uma classe mais geral de ondas planas na subseção 3.3.

### 3.1 Ondas planas de raios paralelos (pp-waves)

Nesta seção o elemento de linha que representa as chamadas pp-waves (*plane-fronted gravitational waves with parallel rays*), i.e., ondas gravitacionais de frente plana com raios paralelos, é introduzido. O espaço-tempo das pp-waves é matematicamente construído a partir de princípios de simetria similares às ondas eletromagnéticas

<sup>2</sup>Vide a seção 28.1 da Referência [31] para uma definição do conceito.

<sup>3</sup>Em primeira ordem.



planas. Elas representam soluções ondulatórias do campo gravitacional que se propagam com a velocidade da luz  $c$  e possuem uma frente de onda plana, sendo idealizações de soluções reais a grandes distâncias da fonte.

### 3.1.1 Tensor métrico das pp-waves

Assim como ocorre com as equações de Maxwell, as equações de Einstein também admitem soluções de ondas planas, as pp-waves. A não-linearidade das equações de Einstein impossibilita o rastreamento de soluções simplesmente colocando o vácuo como fonte, i.e.,  $T_{\mu\nu} = 0$ . Para o tensor métrico ser simplificado, algumas paridades com as ondas eletromagnéticas planas devem ser feitas. Nesta subseção, o elemento de linha das pp-waves é obtido, com o procedimento de obtenção publicado e com consulta possível na referência [18].

As pp-waves se propagam na velocidade da luz, logo, conforme visto na seção 1.4.2, a congruência geodésica desse espaço-tempo deve ser construída a partir de duas coordenadas nulas  $(u, v)$  e duas espaciais  $(x, y)$ , com essas duas representando o espaço transverso. Uma congruência nula possui direção nula principal  $\mathbf{k}$  e nula auxiliar  $\mathbf{N}$ . Se a coordenada nula  $u = x^0$  for identificada como sendo a coordenada variante na direção nula principal da congruência, essa direção  $\mathbf{k}$  pode ser escrita como o gradiente dessa coordenada [31], i.e.,

$$k_\mu = \partial_\mu u = (1, 0, 0, 0). \quad (3.1.1)$$

Como o espaço-tempo deve possuir raios nulos paralelos normais às superfícies espaciais da frente plana da onda, esses raios paralelos, associados à direção nula principal  $k_\mu$  da congruência, devem ser covariantemente constantes [62]. Portanto,

$$\nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (3.1.2)$$

A equação (3.1.2) implica o tensor  $B^\mu{}_\nu$ , descrito pela equação (1.4.5), ser nulo. A partir da nulidade do tensor  $B^\mu{}_\nu$ , conclui-se que um espaço-tempo que satisfaz a condição (3.1.2) não possui expansão  $\Theta$ , rotação  $\omega_{\mu\nu}$  e distensão  $\sigma_{\mu\nu}$ . Destarte, pela equação de Raychaudhuri (1.4.21), o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.3)$$

As condições (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3) representam as propriedades requeridas de analogia com as ondas eletromagnéticas planas. A classe de soluções buscada para as pp-waves deve satisfazer tais condições.

O elemento de linha das pp-waves é mais facilmente construído nas chamadas coordenadas de Brinkmann [63], onde  $x^0 = u$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = v$ . Como as ondas possuem uma frente bidimensional plana, o espaço-tempo nas superfícies  $u = \text{constante}$  coincide com o espaço-tempo plano bidimensional. Destarte, o elemento de linha das pp-waves deve ser um caso particular do elemento de linha

$$ds^2 = g_{00}du^2 + 2g_{03}dudv + 2g_{01}dudx + 2g_{02}dudy + dx^2 + dy^2, \quad (3.1.4)$$

onde, a princípio, as funções do tensor métrico são funções de  $u, x, y, v$ . Nota-se que, quando  $u = \text{constante} \Rightarrow du = 0$  na equação (3.1.4), o elemento de linha da frente de onda torna-se

$$ds^2|_{u=cte} = dx^2 + dy^2,$$

representando um espaço bidimensional plano. Sendo assim, as hiper-superfícies  $u = cte$  denotam as frentes planas da onda. A direção nula auxiliar  $N_\mu$  é obtida pelo gradiente da coordenada nula auxiliar  $v$ , logo,

$$N_\mu = \partial_\mu v = (0, 0, 0, 1). \quad (3.1.5)$$

Substituindo (3.1.1) e (3.1.5) em (1.4.31) obtém-se

$$k_\mu N^\mu = -1 \Rightarrow g^{\mu\nu} k_\mu N_\nu = -1 \Rightarrow g^{03} = -1. \quad (3.1.6)$$

Invertendo o tensor métrico associado ao elemento de linha (3.1.4), obtém-se  $g_{03} = \frac{1}{g^{03}}$ ; dessa forma, o elemento de linha (3.1.4) torna-se

$$ds^2 = g_{00} du^2 - 2dudv + 2g_{01} dudx + 2g_{02} dudy + dx^2 + dy^2. \quad (3.1.7)$$

Como o espaço-tempo deve ser o mesmo em todas as superfícies  $u = \text{constante}$ , deve possuir um vetor de Killing na direção  $k_\mu$ , sendo assim, o vetor  $k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = (0, 0, 0, 1)$  deve ser um vetor de Killing. Substituindo o elemento de linha (3.1.6) nas equações de Killing (1.2.12), obtém-se o vetor  $k^\mu$  ser vetor de Killing se e somente se as funções da métrica não forem funções da coordenada  $v$ . Definindo  $g_{00} \equiv H(u, x, y)$ ,  $g_{01} \equiv a_1(u, x, y)$  e  $g_{02} \equiv a_2(u, x, y)$ , o elemento de linha geral das pp-waves fica escrito como

$$ds^2 = H(u, x, y) du^2 + a_1(u, x, y) dudx + a_2(u, x, y) dudy + dx^2 + dy^2 - 2dudv. \quad (3.1.8)$$

Localmente, uma mudança de coordenadas pode ser realizada e o elemento de linha reescrito em outro sistema de coordenadas, onde  $g_{01} = g_{02} = 0$  [64]. Destarte, escolhendo  $a_1 = 0 = a_2$ , obtém-se o elemento de linha das pp-waves comuns

$$ds^2 = H(u, x, y) du^2 + dx^2 + dy^2 - 2dudv. \quad (3.1.9)$$

Casos mais gerais descritos pelo elemento de linha (3.1.7) são considerados na seção 3.3. O tensor métrico escrito nas coordenadas  $(u, x, y, v)$  pode ser representado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.10)$$

A função  $H(u, x, y)$  determina a característica, assim como a existência das ondas gravitacionais, e, em sua ausência, o espaço-tempo de Minkowski é recuperado, ou seja, para  $H(u, x, y) = 0$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dudv = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e, portanto,

$$-2dudv = (dt - dz)(dt + dz) \Rightarrow dudv = \frac{(dt - dz)}{\sqrt{2}} \frac{(dt + dz)}{\sqrt{2}}.$$

Como as frentes de onda são hipersuperfícies nulas, a frente de onda estará sempre na coordenada  $u = 0$ . As coordenadas  $u, v$  podem então ser identificadas no limite

do espaço plano com as coordenadas Cartesianas a partir das relações

$$u = \frac{t - z}{\sqrt{2}} \quad (3.1.11)$$

e

$$v = \frac{t + z}{\sqrt{2}}. \quad (3.1.12)$$

A coordenada  $z$  nas equações acima representa a direção de propagação da onda gravitacional sempre que a direção nula principal da congruência for  $k^\mu$ , i.e., o gradiente da coordenada  $u$ .

### 3.1.2 Soluções das equações de Einstein

A partir das simplificações da seção anterior, ou seja, a partir do elemento de linha geral (3.1.9), as equações dinâmicas da teoria (1.5.15) podem ser utilizadas para determinar-se a única incógnita restante: a função  $H(u, x, y)$ . Para a determinação dos componentes do tensor de Ricci, necessita-se a determinação dos símbolos de Christoffel. Substituindo o tensor métrico (3.1.10) em (1.1.19), obtém-se como componentes não nulos

$$\hat{\Gamma}^1_{00} = -\frac{1}{2}\partial_x H, \quad (3.1.13)$$

$$\hat{\Gamma}^2_{00} = -\frac{1}{2}\partial_y H, \quad (3.1.14)$$

$$\hat{\Gamma}^3_{00} = -\frac{1}{2}\partial_u H, \quad (3.1.15)$$

$$\hat{\Gamma}^3_{01} = -\frac{1}{2}\partial_x H, \quad (3.1.16)$$

$$\hat{\Gamma}^3_{02} = -\frac{1}{2}\partial_y H. \quad (3.1.17)$$

Os componentes do tensor de curvatura são calculados a partir de (3.1.13-3.1.17) utilizando a equação (1.3.14). Obtém-se como componentes não nulos

$$R^1_{001} = \frac{1}{2}\partial_x^2 H, \quad (3.1.18)$$

$$R^1_{002} = \frac{1}{2}\partial_x \partial_y H, \quad (3.1.19)$$

$$R^2_{001} = \frac{1}{2}\partial_x \partial_y H, \quad (3.1.20)$$

$$R^2_{002} = \frac{1}{2}\partial_y^2 H, \quad (3.1.21)$$

$$R^3_{101} = \frac{1}{2}\partial_x^2 H, \quad (3.1.22)$$

$$R^3_{102} = \frac{1}{2}\partial_x \partial_y H, \quad (3.1.23)$$

$$R^3_{201} = \frac{1}{2}\partial_x \partial_y H, \quad (3.1.24)$$

$$R^3_{202} = \frac{1}{2}\partial_y^2 H. \quad (3.1.25)$$

Substituindo os componentes (3.1.18-3.1.25) na equação (1.3.15), obtém-se como componente não nulo para o tensor de Ricci

$$R_{00} = -\frac{1}{2}(\partial_x^2 H + \partial_y^2 H). \quad (3.1.26)$$

Destarte, pelas equações de Einstein (1.5.15), a função característica  $H(u, x, y)$  deve satisfazer o Laplaciano bidimensional

$$\nabla^2 H(u, x, y) \equiv (\partial_x^2 + \partial_y^2)H(u, x, y) = 0. \quad (3.1.27)$$

A equação (3.1.27) determina a dependência de  $H(u, x, y)$  com as coordenadas  $(x, y)$  do plano transversal à direção de propagação, mas não com a coordenada nula  $u$ . Portanto, as equações de Einstein determinam as polarizações possíveis para as ondas gravitacionais. Na física clássica, as soluções ondulatórias se apresentam como soluções da equação de onda. Distintamente de outras ocorrências físicas, onde fenômenos ondulatórios estão presentes, as equações de campo da RG não levam a uma equação de onda, visto o tensor métrico (3.1.10) já ter sido construído utilizando inferências sobre a congruência geodésica da solução, i.e., a dependência da função  $H(u, x, y)$  com  $u$  serviu de passo inicial para a construção do tensor métrico, conforme visto na subseção (3.1.1). Pode-se perceber a característica ondulatória da solução ser independente da teoria (RG), mas a polarização é determinada por suas equações de campo. A liberdade presente na escolha da dependência em  $u$  em  $H(u, x, y)$  é a liberdade da escolha do formato do pulso da onda.

A equação (3.1.27) pode ser resolvida definindo variáveis complexas no plano  $(x, y)$  dadas por  $\zeta \equiv x + iy$  e  $\bar{\zeta} \equiv x - iy$ . Destarte,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2}, \quad (3.1.28)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2}. \quad (3.1.29)$$

Substituindo (3.1.28) e (3.1.29) em (3.1.27), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}H(u, \zeta, \bar{\zeta}) = 0 \Rightarrow H(u, \zeta, \bar{\zeta}) = F_1(u, \zeta) + F_2(u, \bar{\zeta}). \quad (3.1.30)$$

A solução (3.1.30) completa mais fisicamente interessante é dada por [64]

$$F_1(u, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \alpha_{m+1}(u)\zeta^{m+1} + \beta_m(u)\zeta^{-m} \right) - \mu(u) \ln \zeta, \quad (3.1.31)$$

onde  $\alpha_m(u)$  e  $\beta_m(u)$  são os coeficientes da série. O termo  $\alpha_1(u)$  foi removido por gerar uma solução linear em  $x, y$  para  $H(u, x, y)$ , que pode ser removida por uma transformação de coordenadas. Os termos de ordem  $\alpha_{m>2}$  correspondem à pp-waves não homogêneas com comportamento geodésico caótico [65, 66, 67, 68], sendo desconsideradas nesta tese. O termo  $\alpha_2(u)$  representa soluções de vácuo, i.e., soluções que possuem apenas o campo gravitacional como fonte. As soluções  $\mu(u)$  e  $\beta_m(u)$  representam soluções de monopolo [69] e multipolo [70, 71], respectivamente, motoras ao longo do eixo de propagação. Todas as soluções são soluções no vácuo, i.e., o campo é descrito fora da distribuição de matéria-radiação (fonte). As soluções  $\alpha_m$  são soluções de vácuo, i.e., não existe fonte em local algum do espaço-tempo, sendo

o campo gravitacional sua única fonte. Portanto, distinguem-se soluções no vácuo (vácuo local) de soluções de vácuo (vácuo global).

Cinco classes de soluções, derivadas de (3.1.31), são de interesse físico ao estudo da interação entre pp-waves e partículas. São elas

$$H_0 = -C_0 \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) f_0(u), \quad (3.1.32)$$

$$H_{1+} = -C_{1+} (x^2 - y^2) f_{1+}(u), \quad (3.1.33)$$

$$H_{1\times} = -C_{1\times} (xy) f_{1\times}(u), \quad (3.1.34)$$

$$H_{2+} = -C_{2+} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} f_{2+}(u), \quad (3.1.35)$$

$$H_{2\times} = -C_{2\times} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} f_{2\times}(u), \quad (3.1.36)$$

onde  $C_0$  (adimensional),  $C_{1+}$  (dimensão de inverso do quadrado da distância),  $C_{1\times}$  (dimensão de inverso do quadrado da distância),  $C_{2+}$  (dimensão do quadrado da distância),  $C_{2\times}$  (dimensão do quadrado da distância) são constantes e a função  $f(u)$  especifica o formato do pulso da onda. Se a função  $f(u)$  for finita, tem-se uma onda pulsante, e.g., Gaussianas e Lorentzianas; se for harmônica, as ondas são periódicas. As soluções  $H_{1+}$  e  $H_{1\times}$  representam ondas planas linearmente polarizadas. Para ondas periódicas, combinações lineares entre as soluções  $H_{1+}$  e  $H_{1\times}$  resultam em polarizações distintas da linear. Se  $C_{1+} = C_{1\times} = C$ , e a diferença de fase entre  $f_{1+}(u)$  e  $f_{1\times}(u)$  for de  $\phi_0 = \pi/2$ , i.e.,

$$H = -C \left[ (x^2 - y^2) f(u) + (xy) f(u - \pi/2) \right], \quad (3.1.37)$$

a onda é dita circularmente polarizada [72].

### 3.1.3 Classificação da solução

Os escalares de curvatura (1.3.16) e de Kretschmann (3.0.1) são nulos quando aplicado ao tensor métrico (3.1.15), assim como os demais escalares de curvatura. Destarte, o tensor métrico (3.1.15) não pode ser distinguido do espaço-tempo de Minkowski a partir de tais invariantes. A solução das pp-waves, portanto, necessita ser classificada algebricamente para que sua natureza geométrica não trivial seja demonstrada.

As soluções das equações de Einstein são classificadas de acordo com a classificação de Petrov [73, 74], na qual os escalares Weyl para um espaço-tempo são construídos a partir do tensor de curvatura sem traço (tensor de Weyl) e de um conjunto de tétradas nulas associadas ao elemento de linha do espaço-tempo. O espaço-tempo é classificado de acordo com o número de escalares não nulos, que indica o número de direções nulas principais no espaço-tempo (para uma discussão completa do método, vide o Capítulo 32 da Referência [31]). O tensor de Weyl é descrito em função do tensor de curvatura por

$$C_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} (R_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + R_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} - R_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - R_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu}) + \frac{1}{6} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu}). \quad (3.1.38)$$

Os componentes não nulos do tensor de Weyl (3.1.38) para os componentes (3.1.18-3.1.25) são

$$C_{0101} = -\frac{1}{4} (\partial_x \partial_x H - \partial_y \partial_y H) , \quad (3.1.39)$$

$$C_{0102} = -\frac{1}{2} \partial_x \partial_y H , \quad (3.1.40)$$

$$C_{0201} = \frac{1}{2} \partial_x \partial_y H , \quad (3.1.41)$$

$$C_{0202} = \frac{1}{4} (\partial_x \partial_x H - \partial_y \partial_y H) . \quad (3.1.42)$$

Um conjunto de tétradas nulas associado ao tensor métrico (3.1.15) é descrito por

$$k^\mu = (0, 0, 0, 1) , \quad (3.1.43)$$

$$l^\mu = \left( 1, 0, 0, \frac{H}{2} \right) , \quad (3.1.44)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) . \quad (3.1.45)$$

Dessa forma, os escalares de Weyl do espaço-tempo das pp-waves são

$$\Psi_0 = C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa m^\lambda k^\mu m^\nu = 0 , \quad (3.1.46)$$

$$\Psi_1 = C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa l^\lambda k^\mu m^\nu = 0 , \quad (3.1.47)$$

$$\Psi_2 = C_{\kappa\lambda\mu\nu} k^\kappa m^\lambda \bar{m}^\mu l^\nu = 0 , \quad (3.1.48)$$

$$\Psi_3 = C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa k^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu = 0 , \quad (3.1.49)$$

$$\Psi_4 = C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa \bar{m}^\lambda l^\mu \bar{m}^\nu = \frac{1}{4} (\partial_y \partial_y H - \partial_x \partial_x H + 2i \partial_x \partial_y H) . \quad (3.1.50)$$

O espaço-tempo das pp-waves é classificado como um espaço-tempo algebricamente especial de Petrov do Tipo N, i.e., um espaço-tempo que possui uma única direção nula principal com multiplicidade 4. Espaços-tempo do Tipo N estão associados à radiação viajando na velocidade da luz [75], corroborando a coerência da interpretação do tensor métrico (3.1.10) como um campo de radiação gravitacional.

## 3.2 Propriedades físicas das pp-waves

As propriedades físicas dos campos gravitacionais, i.e., energia, momento e momento angular, podem ser obtidas através do TERG. As definições do quadrivetor energia-momento (2.3.7) e do vetor momento angular (2.3.15) são funções do campo de tétradas  $e^a{}_\mu$ . Devido ao tensor métrico ser uma função do campo de tétradas, todas as funções de  $g_{\mu\nu}$  são funções de  $e^a{}_\mu$ . Entretanto, o contrário não se aplica, ou seja, uma função de  $e^a{}_\mu$  não é uma função de  $g_{\mu\nu}$  no caso geral. Destarte, para se obter as propriedades físicas das pp-waves, um conjunto de tétradas associado ao tensor métrico (3.1.15) deve ser estabelecido. Um campo de tétradas possui informações não apenas sobre o campo gravitacional, mas também sobre o observador medindo propriedades físicas naquele espaço-tempo. Dos dezesseis componentes de  $e^a{}_\mu$ , dez estabelecem as propriedades do campo gravitacional e seis do observador.

As leis de conservação do campo gravitacional, conforme apresentadas na seção 2.3, são estabelecidas mediante foliação do espaço-tempo em hipersuperfícies  $t =$

*constante*. Portanto, é mais conveniente trabalhar-se com o tensor métrico (3.1.15) nas coordenadas  $x^\mu = (t, x, y, z)$ . Os índices 0, 1, 2, 3 nesta seção representam  $t, x, y, z$ , respectivamente. O elemento de linha (3.1.9), nas coordenadas  $x^\mu = (t, x, y, z)$ , pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(\frac{H}{2} - 1\right) dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \left(1 + \frac{H}{2}\right) dz^2 - H dt dz. \quad (3.2.1)$$

A determinação das propriedades físicas do campo gravitacional necessita estabelecer-se um observador estacionário, i.e., a quadrivelocidade  $U^\mu = (U^0, 0, 0, 0)$ . Um conjunto de tétradas associado ao elemento de linha (3.2.1) é

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

onde  $A = \sqrt{1 - H/2}$ ,  $B = H/2A$ ,  $C = 1/A$  e  $e = \det(e^a{}_\mu) = 1$ . Como

$$U^\mu = e_{(0)}{}^\mu = \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right) \quad (3.2.3)$$

pode-se notar as tétradas (3.2.2) estarem adaptadas a um observador estacionário.

A caracterização do observador poder ser feita mediante o tensor de aceleração (2.4.6). Para tal, necessita-se conhecer os componentes do tensor de torção  $T_{a\mu\nu}$ . Substituindo as tétradas (3.2.2) na expressão (2.2.9), obtém-se como componentes não nulos

$$T_{(0)01} = \frac{\partial_x H}{4A}, \quad (3.2.4)$$

$$T_{(0)02} = \frac{\partial_y H}{4A}, \quad (3.2.5)$$

$$T_{(0)03} = \frac{\partial_u H}{4A^3}, \quad (3.2.6)$$

$$T_{(0)13} = \frac{1}{2A^3}(1 - H/4)\partial_x H, \quad (3.2.7)$$

$$T_{(0)23} = \frac{1}{2A^3}(1 - H/4)\partial_y H, \quad (3.2.8)$$

$$T_{(3)30} = \frac{\partial_u H}{4A^3}, \quad (3.2.9)$$

$$T_{(3)31} = \frac{\partial_x H}{4A^3}, \quad (3.2.10)$$

$$T_{(3)32} = \frac{\partial_y H}{4A^3}. \quad (3.2.11)$$

A partir dos componentes (3.2.4-3.2.11), utilizando (2.4.6) obtém-se para o tensor de aceleração os componentes não nulos

$$\phi_{(0)(1)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial_x H}{1 - H/2} \quad (3.2.12)$$

$$\phi_{(0)(2)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial_y H}{1 - H/2} \quad (3.2.13)$$

$$\phi_{(0)(3)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_u H}{(2 - H)^{3/2}} \quad (3.2.14)$$

$$\phi_{(1)(3)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial_x H}{1 - H/2} \quad (3.2.15)$$

$$\phi_{(2)(3)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial_y H}{1 - H/2} \quad (3.2.16)$$

Os componentes (3.2.12-3.2.14) representam as acelerações inerciais  $a^{(i)} = \phi_{(0)}^{(i)}$  que mantém o caráter estacionário do observador durante a passagem da onda gravitacional, e.g., as acelerações produzidas pelos motores de um foguete. Destarte, a aceleração gravitacional (2.4.7) é dada por

$$\vec{a}_g = -a^{(i)} \hat{r}_{(i)} = -(\partial_x \ln A) \hat{x} - (\partial_y \ln A) \hat{y} + (\partial_u A^{-1}) \hat{z}, \quad (3.2.17)$$

onde  $\hat{r}_{(i)}$  são os versores direcionais no sentido de  $x^{(i)}$ . Como  $e_{(i)}^{1,2} = e_{(1,2)}^{1,2} = 1$ , no plano transversal ao de propagação obtém-se

$$a^x = a^1 = -(\partial_x \ln A), \quad (3.2.18)$$

$$a^y = a^2 = -(\partial_y \ln A). \quad (3.2.19)$$

A partir de (3.2.18) e (3.2.19) percebe-se que o campo gravitacional das pp-waves pode ser repulsivo nos planos  $z = \text{constante}$ , a depender da polarização da onda, do sinal da amplitude de  $H$  e da região do espaço considerada. Como as soluções (3.1.33) e (3.1.34) são soluções de vácuo, existe a possibilidade de campos gravitacionais repulsivos existirem nas soluções das pp-waves sem violação das condições de energia. O último fato mencionado possui importantes consequências na transferência de energia entre ondas gravitacionais e partículas livres, conforme será visto no Capítulo 4. Os componentes (3.2.15) e (3.2.16) são as rotações do observador com relação a um observador que segue um transporte Fermi-Walker. Pode-se perceber que são esperadas rotações em torno dos eixos Cartesianos  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$ .

As coordenadas  $x^\mu = (t, x, y, z)$  não cobrem a totalidade do espaço-tempo como as coordenadas  $x^\mu = (u, x, y, v)$ , visto que  $H \geq 2$  implica uma inversão nos intervalos temporais e espaciais em (3.2.1), assim como as tétradas (3.2.2) tornam-se complexas e a informação sobre o observador é perdida. Destarte, todos os resultados físicos obtidos em tais coordenadas são válidos apenas nas regiões em que  $H < 2$ .

### 3.2.1 Quadrivetor energia-momento

Após a determinação do conjunto de tétradas (3.2.2), associado ao tensor métrico das pp-waves (3.1.15), é possível computar o quadrivetor energia-momento  $P^a$  do campo gravitacional. Como tal conjunto de tétradas está adaptado a um observador



estacionário, as quantidades físicas medidas pelo observador não sofrem interferência da cinemática do próprio observador, ou seja, as quantidades medidas são quantidades do campo gravitacional, mais sua possível fonte, apenas.

A computação do quadrimomento necessita a determinação dos componentes do superpotencial projetado  $\Sigma^{abc}$ . Utilizando os componentes (3.2.4-3.2.11) do tensor de torção e a definição (2.2.16), obtém-se

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)(1)(0)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, & \Sigma^{(2)(2)(0)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^3}, \\ \Sigma^{(0)(2)(0)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}, & \Sigma^{(2)(3)(0)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}, \\ \Sigma^{(0)(3)(1)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, & \Sigma^{(2)(3)(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^3}, \\ \Sigma^{(0)(3)(2)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}, & \Sigma^{(3)(1)(0)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, \\ \Sigma^{(1)(1)(0)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^3}, & \Sigma^{(3)(2)(0)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}, \\ \Sigma^{(1)(3)(0)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, & \Sigma^{(3)(3)(1)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, \\ \Sigma^{(1)(3)(1)} &= \frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^3}, & \Sigma^{(3)(3)(2)} &= -\frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}.\end{aligned}$$

Os componentes de interesse ao cálculo do quadrimomento são  $\Sigma^{a0i}$ . Tais componentes não nulos leem-se

$$\Sigma^{(0)01} = -\frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A}, \quad (3.2.20)$$

$$\Sigma^{(0)02} = -\frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A}, \quad (3.2.21)$$

$$\Sigma^{(1)01} = \frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^2}, \quad (3.2.22)$$

$$\Sigma^{(1)03} = \frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A^2}, \quad (3.2.23)$$

$$\Sigma^{(2)02} = \frac{1}{8} \frac{\partial_u H}{A^2}, \quad (3.2.24)$$

$$\Sigma^{(2)03} = \frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A^2}, \quad (3.2.25)$$

$$\Sigma^{(3)01} = -\frac{1}{8} \frac{\partial_x H}{A}, \quad (3.2.26)$$

$$\Sigma^{(3)02} = -\frac{1}{8} \frac{\partial_y H}{A}. \quad (3.2.27)$$

A partir dos componentes (3.2.20) e (3.2.21), o componente zero do quadrimomento energia-momento pode ser computado a partir da equação (2.3.7), obtendo-se

$$P^{(0)} = -4k \int_V d^3x \frac{1}{32A^3} \left[ (\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2 + 4A(\partial_x^2 H + \partial_y^2 H) \right]. \quad (3.2.28)$$

Utilizando a equação de Einstein (3.1.27) nos dois últimos termos de (3.2.28), obtém-se a energia do espaço-tempo das pp-waves [28]

$$P^{(0)} = -\frac{k}{8} \int_V d^3x \frac{(\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2}{A^3}. \quad (3.2.29)$$

A expressão (3.2.29) representa a energia total (campo gravitacional mais fonte), dentro de um volume espacial  $V$ , de uma onda gravitacional plana descrita pela função  $H(u, x, y)$ . Pode-se notar que a energia é necessariamente negativa. Para as soluções de vácuo (3.1.33) e (3.1.33) a energia (3.2.29) é a energia do campo gravitacional apenas.

Aplicando os componentes (3.2.20-3.2.25) obtém-se

$$P^{(1)} = P^{(2)} = 0. \quad (3.2.30)$$

Notando que  $\Sigma^{(3)0i} = \Sigma^{(0)0i}$ , obtém-se

$$P^{(3)} = -\frac{k}{8} \int_V d^3x \frac{(\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2}{A^3}. \quad (3.2.31)$$

A partir de (3.2.29) e (3.2.31), pode-se mostrar que a relação

$$P^a P_a = \eta_{ab} P^a P^b = 0 \quad (3.2.32)$$

é satisfeita. A relação (3.2.32) também é satisfeita para ondas eletromagnéticas planas, indicando as pp-waves transportarem a excitação de um campo não massivo [28].

### 3.2.2 Momento angular

Os componentes  $L^{ab}$  do momento angular podem ser calculados diretamente das tétradas (3.2.2) utilizando a expressão (2.3.15). Realizando tal substituição, obtém-se como componentes não nulos [29]

$$L^{(0)(1)} = -2k \int_V \partial_x \left( \frac{1}{A} \right) d^3x, \quad (3.2.33)$$

$$L^{(0)(2)} = -2k \int_V \partial_y \left( \frac{1}{A} \right) d^3x, \quad (3.2.34)$$

$$L^{(1)(3)} = 2k \int_V \partial_x \left( \frac{H}{2A} \right) d^3x, \quad (3.2.35)$$

$$L^{(2)(3)} = 2k \int_V \partial_y \left( \frac{H}{2A} \right) d^3x. \quad (3.2.36)$$

Os componentes (3.2.35) e (3.2.36) representam os componentes do momento angular total  $-L_y$  e  $L_x$ , respectivamente. Destarte, o vetor densidade de momento angular  $\vec{M}$  pode ser escrito como

$$\vec{M} = M^{(2)(3)} \hat{x} + M^{(3)(1)} \hat{y}. \quad (3.2.37)$$

Devido ao componente  $L^{(1)(2)}$  ser nulo, as pp-waves não carregam momento angular na sua direção de propagação, apenas na direção ortogonal.

A partir dos componentes (3.2.33) e (3.2.34), o vetor centro de energia do campo gravitacional pode ser encontrado. Sendo  $I_x = L^{(0)(1)}$  e  $I_y = L^{(0)(2)}$ , o centro de energia (2.3.16) pode ser representado por

$$\vec{I} = I_x \hat{x} + I_y \hat{y}. \quad (3.2.38)$$

Nota-se o centro de energia não possuir componente não nulo ao longo do eixo de propagação da onda gravitacional.

### 3.3 Ondas gravitacionais giratônicas

Conforme fora visto na subseção 3.1.1, o elemento de linha obtido para as pp-waves via considerações de simetria é o elemento de linha geral (3.1.8). Como os termos  $a_{1,2}(u, x, y)$  podem ser eliminados localmente por uma transformação de coordenadas, foram desconsiderados na seção 3.2 por não afetarem o espaço-tempo localmente.

Conforme discutido na seção 1.3, a gravidade é um efeito global, não apenas local. Malgrado as equações de Einstein (1.5.10) descreverem localmente o espaço-tempo, os aspectos globais possuem significado físico na dinâmica dos corpos que interagem com os campos gravitacionais. Pela graça do exemplo, um defeito angular global em um espaço-tempo gera um tensor de curvatura localmente nulo, mas não globalmente. Tais defeitos são chamados defeitos topológicos. Destarte, a eliminação local do defeito angular leva à perda de informações físicas sobre o espaço-tempo. As descrições com tétradas da gravitação são mais fundamentais que as descrições métricas, portanto espera-se que efeitos globais sejam mais facilmente rastreados pela formulação teleparalela da gravidade do que pela RG. De fato observa-se que as definições de energia-momento (2.3.7) do TERG são sensíveis a tais efeitos globais, visto a observação de energia gravitacional para tais configurações gravitacionais [76, 77]. Porquanto, soluções mais gerais que a descrita pelo tensor métrico (3.1.15) devem ser consideradas. Uma dessas soluções pode ser obtida mais facilmente introduzindo-se coordenadas polares no plano transversal  $u = \text{constante}$  ao de propagação. Definindo

$$x = \rho \cos \phi, \quad (3.3.1)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (3.3.2)$$

o elemento de linha (3.1.8) pode ser reescrito como

$$ds^2 = H(u, \rho, \phi) du^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 - 2dudv \\ - dud\rho(2a_1 \cos \phi + 2a_2 \sin \phi) + \rho dud\phi(2a_1 \sin \phi - 2a_2 \cos \phi). \quad (3.3.3)$$

Definindo

$$J(u, \rho, \phi) \sin \phi / \rho \equiv -a_1; \quad J(u, \rho, \phi) \cos \phi / \rho \equiv a_2, \quad (3.3.4)$$

o elemento de linha (3.3.3) pode ser reescrito como

$$ds^2 = H(u, \rho, \phi) du^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + 2J(u, \rho, \phi) dud\phi - 2dudv. \quad (3.3.5)$$

O elemento de linha (3.3.5) representa as chamadas ondas gravitacionais giratônicas, inicialmente estudadas por Bonnor ao considerar o campo gravitacional externo de um “fluido nulo rotacional” [78]. Posteriormente, Frolov e colaboradores estudaram o campo gravitacional de partículas rotacionando e movendo-se na velocidade da luz, chamadas *gyratons* [79], redescobrimo as ondas giratônicas. Como tais ondas carregam informações sobre as propriedades rotacionais da fonte, a não consideração do termo  $J(u, \rho, \phi)$  no elemento de linha (3.3.5) leva à perda de informações globais sobre a estrutura interna de rotação da fonte [64].

Como fora feito na subsecção 3.1.2, as funções  $H(u, \rho, \phi)$  e  $J(u, \rho, \phi)$  podem ser determinadas pelas equações de Einstein (1.5.10). Os componentes não nulos (1.1.19) para o tensor métrico associado ao elemento de linha (3.3.3) são

$$\begin{aligned} \mathring{\Gamma}^1_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_\rho H, & \mathring{\Gamma}^3_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_u H + \frac{1}{2\rho^2}J(2\partial_u J - \partial_\phi H), \\ \mathring{\Gamma}^1_{02} &= -\frac{1}{2}\partial_\rho J, & \mathring{\Gamma}^3_{01} &= -\frac{1}{2}\partial_\rho H + \frac{1}{2\rho^2}J\partial_\rho J, \\ \mathring{\Gamma}^1_{22} &= -\rho, & \mathring{\Gamma}^3_{02} &= -\frac{1}{2}\partial_\phi H, \\ \mathring{\Gamma}^2_{00} &= \frac{1}{2\rho^2}(2\partial_u J - \partial_\phi H), & \mathring{\Gamma}^3_{12} &= \frac{1}{2\rho}(2J - \rho\partial_\rho J), \\ \mathring{\Gamma}^2_{01} &= \frac{1}{2\rho^2}\partial_\rho J, & \mathring{\Gamma}^3_{22} &= -\partial_\phi J, \\ \mathring{\Gamma}^2_{12} &= \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

onde  $x^\mu = (u, \rho, \phi, v)$ . Os componentes não nulos do tensor de curvatura (1.3.14) são

$$R_{0101} = -\frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\rho H + \frac{1}{4\rho^2}(\partial_\rho J)^2, \quad (3.3.6)$$

$$R_{0102} = -\frac{1}{2\rho}(\rho\partial_\rho\partial_\phi H - \partial_\phi H - \rho\partial_u\partial_\rho J + 2\partial_u J), \quad (3.3.7)$$

$$R_{0202} = -\frac{1}{2}(\partial_\phi\partial_\phi H + \rho\partial_\rho H) + \partial_u\partial_\phi J + \frac{1}{4}(\partial_\rho)^2, \quad (3.3.8)$$

$$R_{0112} = \frac{1}{2\rho}(\rho\partial_\rho\partial_\rho J - \partial_\rho J), \quad (3.3.9)$$

$$R_{0212} = \frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\phi J. \quad (3.3.10)$$

Definindo a quantidade

$$J = \omega(u)\rho^2 + \chi(u, \phi), \quad (3.3.11)$$

os componentes não nulos do tensor de Ricci (1.3.15) podem ser escritos como

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 H + 2\omega^2 + \frac{1}{\rho^2}\partial_u\partial_\phi J, \quad (3.3.12)$$

$$R_{01} = \frac{1}{\rho}\partial_\phi\omega, \quad (3.3.13)$$

$$R_{02} = -\rho\partial_\rho\omega, \quad (3.3.14)$$

onde o operador  $\nabla^2$  é definido no espaço transversal, como na equação (3.1.27). A partir da equação de Einstein no vácuo (1.5.15) para os componentes (3.3.13) e (3.3.14), pode-se perceber que  $\omega = \omega(u)$  apenas. Destarte, definindo implicitamente

$$H = \omega^2(u)\rho^2 + 2\omega(u)\chi(u, \phi) + H_0(u, \rho, \phi) \quad (3.3.15)$$

e

$$J = \rho\omega^2(u) + \chi(u, \phi), \quad (3.3.16)$$

as equações de Einstein podem ser escritas como [64]

$$\nabla^2 H_0 \equiv \partial_\rho \partial_\rho H_0 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho H_0 + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi \partial_\phi H_0 = \frac{2}{\rho^2} (\partial_u \partial_\phi \chi - \omega \partial_\phi \partial_\phi \chi) . \quad (3.3.17)$$

Existe uma liberdade de calibre na escolha da função  $\omega(u)$ . Definindo  $\tilde{\omega}(u) \equiv \omega(u) + \partial_u f(u)$ , qualquer função  $\omega(u)$  pode ser gerada na definição (3.3.16). Destarte, escolhendo  $\partial_u f(u) = -\omega(u)$ , a função  $\tilde{\omega}(u) \rightarrow \omega(u)$  pode ser tomada como nula sem perda de generalidade [64]. Sendo assim,  $H = H_0$  e  $J = \xi(u \text{ phi})$  e a equação (3.3.17) simplifica-se para

$$\nabla^2 H = \frac{2}{\rho^2} \partial_u \partial_\phi J . \quad (3.3.18)$$

Se a função  $J = J(u)$  apenas, i.e., as soluções (3.1.32-3.1.36) são também soluções das ondas gravitacionais giratônicas, com a dependência da função  $J$  com a variável  $u$  sendo arbitrária.

Nota-se as pp-waves “comuns”, i.e., descritas pelo tensor métrico (3.1.15) serem um caso particular das ondas gravitacionais giratônicas. Escolhendo  $J = 0$  nas equações (3.3.5) e (3.3.18), obtém-se as equações (3.1.9) e (3.1.27), respectivamente, ao considerar-se a mudança de coordenadas definida por (3.3.1) e (3.3.2).

Retornar-se-á ao estudo das ondas gravitacionais giratônicas no Capítulo 6, onde as leis de conservação do TERG serão aplicadas e as interações entre as ondas gravitacionais giratônicas e partículas serão analisadas.



## Capítulo 4

# Interação entre partículas e pp-waves

Conforme visto na seção 3.2, o campo gravitacional das pp-waves possui energia associada a si, mesmo na ausência de fontes locais, ou seja, possui energia gravitacional. Dessa forma, como tais soluções apresentam comportamento ondulatório, i.e., propagam sua geometria entre eventos distintos no espaço-tempo, a energia gravitacional é transportada localmente ao longo da linha mundo da onda. Ao interagir com a linha mundo de uma partícula inicialmente livre, pode alterar momentaneamente o estado cinemático dessa partícula. Se a onda for pulsante, i.e., a interação for finita no tempo, a partícula novamente encontra-se livre após a interação ocorrer. O estado cinemático final dessa partícula dependerá do seu estado inicial e possivelmente da interação ocorrida entre ela e a onda gravitacional. Caso o estado cinemático final seja distinto do inicial, diz existir um efeito memória presente nas ondas gravitacionais. Logo, uma partícula pode ter seu estado permanentemente alterado ao interagir com uma onda gravitacional.

Bondi e colaboradores fizeram uma análise rudimentar do movimento de partículas na presença de ondas planas, chegando à conclusão que as partículas adquirem movimento após a onda passar, mesmo estando em repouso inicialmente, caracterizando um efeito memória presente na interação entre as ondas gravitacionais e partículas [27]. Tratamentos mais formais sobre o efeito memória surgiram posteriormente. O efeito memória presente da interação entre ondas gravitacionais lineares, obtidas como solução das equações de Einstein no limite de campo fraco, fora considerado por Zeldovich e Polnarev em corpos não interagentes (com outros corpos) [80]. Gibbons e Hawking, ao estudarem a teoria de detecção de ondas gravitacionais, consideraram distinções entre diferentes pulsos de ondas gravitacionais, mas no contexto experimental e não do efeito memória em si [81]. O efeito memória fora proposto formalmente por Braginsky e Grishchuk [82] em ressonâncias cinemáticas nas antenas de ondas gravitacionais. Posteriormente, Braginsky e Thorne distinguiram pulsos de ondas gravitacionais com e sem efeito memória [83]. Entretanto, uma discussão sobre o efeito memória no contexto não linear só fora feita posteriormente [84, 85], com tratamento matemático rigoroso realizado por [86]

A alteração do estado cinemático de uma partícula pode ser transcrita fisicamente como uma alteração na sua energia. Como a partícula está livre nos instantes anterior e posterior à interação, apenas energia cinética está presente para a mesma. Portanto, a alteração permanente do estado cinemático implica alteração permanente da energia do sistema. Em tal situação, a onda gravitacional é responsável pela alteração da energia da partícula, visto que fora a única a interagir com a partícula. Pelo princípio da conservação da energia, a energia do sistema (onda e partícula) deve se conservar. Logo, a existência de variação na energia da partícula

implica variação na energia da onda, i.e., uma troca de energia. Para uma onda gravitacional pulsante, a interação com a partícula ocorre localmente no espaço em um intervalo finito de tempo. Destarte, caso ocorra troca de energia entre a partícula e a onda, a troca é local. A não existência de uma definição de energia gravitacional na RG torna a teoria incompleta na explicação de tal fenômeno.

A determinação do estado cinemático de uma partícula na interação com uma onda gravitacional pode ser obtida resolvendo-se as equações da geodésica (1.1.22). Entretanto, como pode ser visto nas equações (4.1.1-4.1.4), tal sistema de equações diferenciais possui as variáveis acopladas, não sendo passível a resolução analítica. Porquanto, afirmações como a de Bondi são dificilmente provadas quantitativamente sem recorrer-se a limites impulsivos não realísticos dos pulsos, ou seja, pulsos formados por combinações de funções degraus. Entretanto, com o advento da computação numérica, soluções numéricas são possíveis desde que especificadas as condições iniciais. Autores como Zhang e colaboradores exploraram o efeito memória das pp-waves na interação com partículas livres, encontrando resultados afirmativos para a existência do efeito memória [87, 88, 72].

A descoberta quantitativa do efeito memória na interação entre pp-waves e partículas permite a corroboração teórica do exposto neste Capítulo, i.e., a existência de transferência de energia entre partículas e ondas gravitacionais. A demonstração dessa assertiva, e suas consequência, é o objetivo deste Capítulo.

O presente Capítulo dividir-se-á em três partes. Na seção 4.1, as equações da geodésicas de uma partícula livre no espaço-tempo das pp-waves serão apresentadas e resolvidas numericamente para distintas polarizações e condições iniciais, com os resultados apresentados graficamente. Na seção 4.2, conforme a Referência [19], a variação da energia cinética das partículas livres ao serem atingidas por ondas gravitacionais será computada numericamente, com o mapeamento das condições iniciais que levam a diferentes variações qualitativas. Na seção 4.3, conforme a Referência [20], analisar-se-á o comportamento da variação da energia cinética da partícula para diferentes parâmetros das ondas gravitacionais, com uma expressão empírica aproximada, que relaciona a variação da energia cinética com o comprimento do pulso, sendo obtida.

## 4.1 Movimento de partículas no espaço-tempo das pp-waves

Conforme visto na subseção 1.1.3, na ausência de forças externas, partículas descrevem movimento geodésico no espaço-tempo. As quatro equações da geodésica (1.1.22) podem ser obtidas a partir dos símbolos de Christoffel (3.1.13-3.1.17) para as pp-waves. Escolhendo-se  $\lambda$  como um parâmetro afim  $k(\lambda) = 0$ , as equações da geodésica de uma partícula na presença de uma onda gravitacional  $H(u, x, y)$  leem-se

$$\ddot{u} = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \partial_x H, \quad (4.1.2)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2} \partial_y H, \quad (4.1.3)$$

$$\ddot{v} = \frac{1}{2} \dot{u} \left[ (\partial_u H) \dot{u} + 2(\partial_x H) \dot{x} + 2(\partial_y H) \dot{y} \right], \quad (4.1.4)$$

onde o ponto indica a derivação com respeito ao parâmetro afim. A derivada segunda da variável  $u$  é nula, conforme pode ser visto em (4.1.1). Logo,  $\dot{u} = \text{constante}$ ,



i.e.,  $u$  também é um parâmetro afim. As equações (4.1.2-4.1.4) podem então ser parametrizadas com respeito à  $u$ . Sendo assim, ao longo deste Capítulo o ponto indicará uma derivação com respeito à coordenadas nula  $u$ , com  $\dot{u}$  sendo escolhido como a unidade. Para a análise do movimento é mais conveniente trabalhar-se com a coordenadas espaciais parametrizadas em função da coordenada nula  $u$ . Reescrevendo a equação (4.1.4) para  $z = z(u)$ , obtém-se

$$\sqrt{2}\dot{z} = \frac{1}{2}\partial_u H + (\partial_x H)\dot{x} + (\partial_y H)\dot{y}. \quad (4.1.5)$$

As equações da geodésica (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) podem ser resolvidas numericamente especificando a função  $H(u, x, y)$  e as condições iniciais  $(x_0, \dot{x}_0)$ ,  $(y_0, \dot{y}_0)$  e  $(z_0, \dot{z}_0)$ , onde  $x_0^i = x^i(u_0)$  e  $i = 1, 2, 3$ . Como a soluções para (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) são funções de  $x^i(u)$ , a coordenada  $u = 0$  não corresponde ao estado inicial da partícula, mas sim ao estado na metade da interação, caso o pulso seja simétrico. O estado inicial da partícula é representado por  $u \rightarrow \infty^1$ . Neste Capítulo, considerar-se-á apenas soluções de vácuo, i.e., (3.1.33) e (3.1.34), apenas. As soluções com fonte serão consideradas no Capítulo 6.

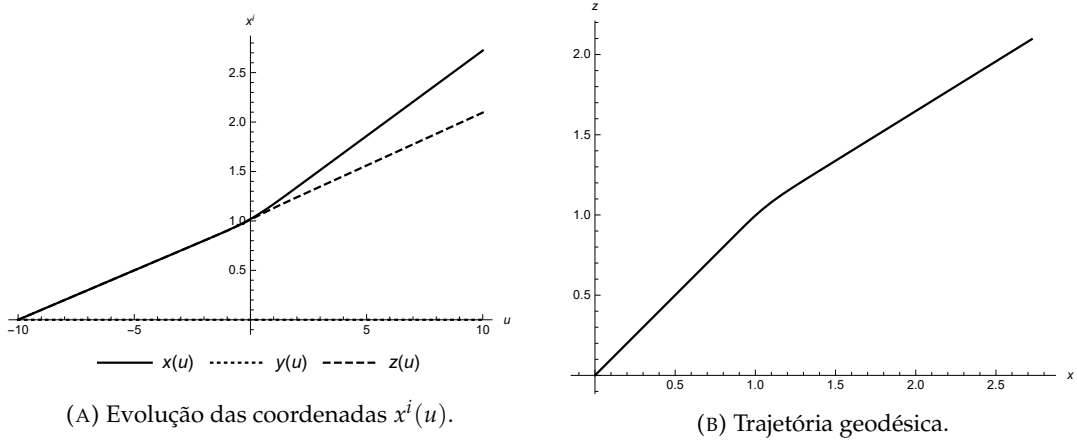
Conforme visto na subseção 3.1.2, as equações de Einstein impõem restrições às dependências de  $H$  com  $x, y$ , mas há liberdade na escolha do formado dos pulsos  $f(u)$ . Neste Capítulo, considerar-se-ão pulsos Gaussianos e Lorentzianos

$$f_1(u) = e^{-u^2/\Lambda^2}, \quad (4.1.6)$$

$$f_2(u) = \frac{1}{1 + u^2/\Lambda^2}, \quad (4.1.7)$$

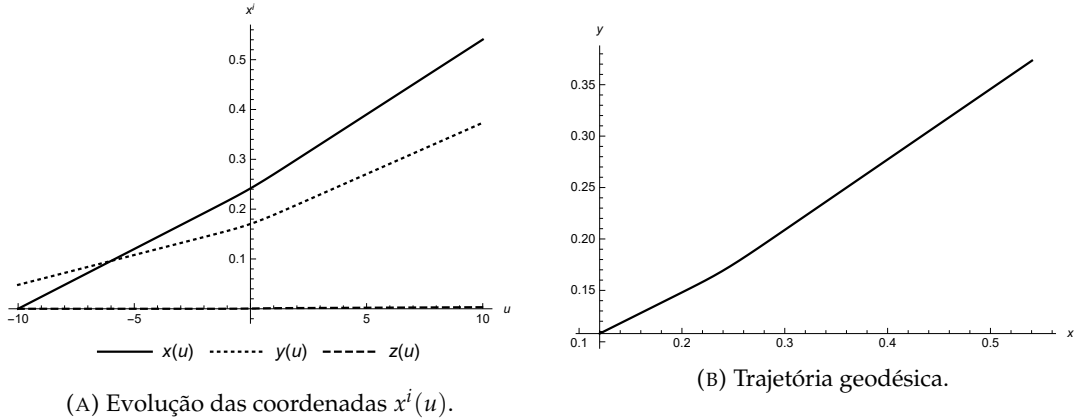
respectivamente. Espera-se tais pulsos melhor representarem os sinais de ondas gravitacionais esperados na natureza. As constantes  $\Lambda$  e  $\beta$  possuem dimensão de distância, deixando a exponencial e o cosseno adimensionais, respectivamente. Um exemplo de trajetória pode ser obtida pela combinação da polarização  $H_{1+}$ , descrita por (3.1.33), com o pulso Gaussiano (4.1.6). As soluções numéricas podem ser vistas na Figura 4.1a e a trajetória, parametrizada por  $u$ , na Figura 4.1b. Observa-se a solução apresentada na Figura 4.1 apresentar movimento apenas em um plano. O eixo  $x$  é arbitrário, podendo o mesmo comportamento ser observado para o eixo  $y$  com ajuste nas condições iniciais. Dessa forma, todo movimento inicialmente restrito a um plano permanece nesse plano durante e após a passagem de uma onda gravitacional linearmente polarizada. A exceção à última assertiva ocorre se o plano inicial do movimento for o plano transverso. Caso exista movimento inicial no plano transverso, a partícula executa um movimento tridimensional. Na Figura 4.2 um exemplo de solução para a polarização  $H_{1\times}$  pode ser observada. O comportamento observado nas Figuras 4.1 e 4.2 para o movimento longitudinal (ao longo do eixo de propagação) é observado em todas as soluções, i.e., partículas com movimento inicialmente restrito a um plano  $z = \text{constante}$  são removidas desse plano ao interagirem com a onda. Todos os comportamentos observados para o pulso Gaussiano estão presentes para o pulso Lorentziano. Um exemplo de movimento para o pulso descrito por (4.1.7) pode ser visto na Figura 4.3. Partículas em repouso inicial na origem do plano transverso não iniciam movimento devido à interação com a onda.

<sup>1</sup>Para as soluções numéricas, a aproximação  $200 \approx \infty$  é suficiente para os casos neste Capítulo analisados.

(A) Evolução das coordenadas  $x^i(u)$ .

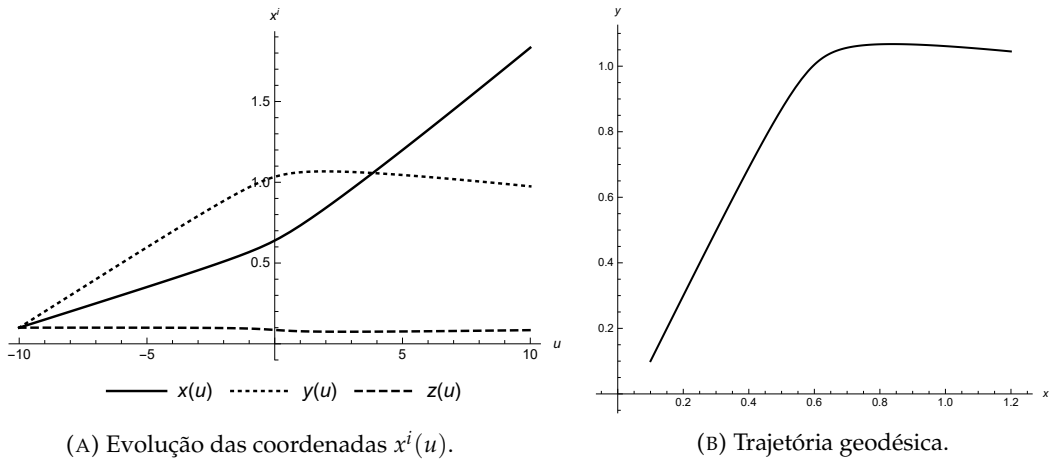
(B) Trajetória geodésica.

FIGURA 4.1: Soluções numéricas para as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para a polarização (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $x_0 = y_0 = z_0 = \dot{y}_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0.1$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 1$  e  $C_{1+} = -1/25$ .

(A) Evolução das coordenadas  $x^i(u)$ .

(B) Trajetória geodésica.

FIGURA 4.2: Soluções numéricas para as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para a polarização (3.1.34) com  $f_{1x}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $x_0 = z_0 = \dot{z}_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 = y_0/2 = 2\dot{y}_0 = 0.024$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 1$  e  $C_{1+} = -1/25$ .

(A) Evolução das coordenadas  $x^i(u)$ .

(B) Trajetória geodésica.

FIGURA 4.3: Soluções numéricas para as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para a polarização (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.7). As condições iniciais são  $x_0 = y_0 = z_0 = \dot{x}_0/5 = \dot{y}_0 = 0.1$  e  $z_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 1$  e  $C_{1+} = -1/25$ .

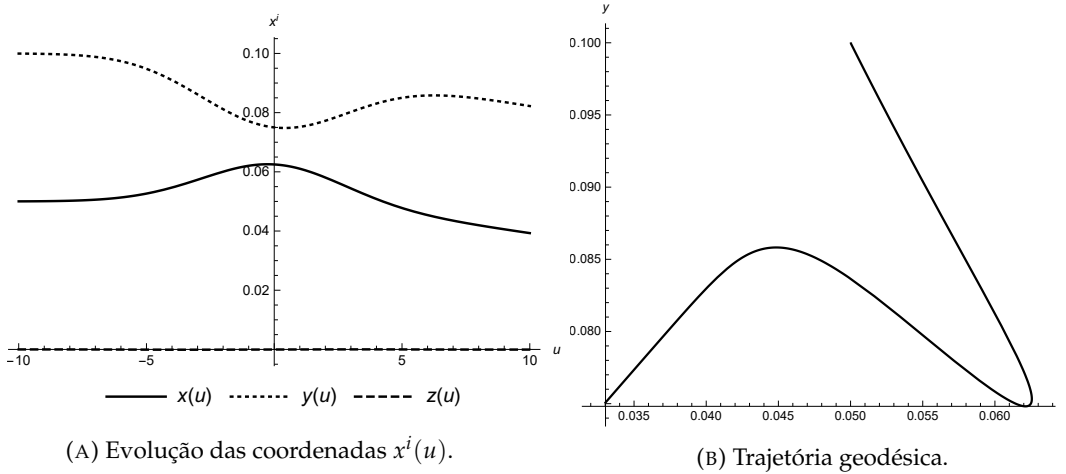


FIGURA 4.4: Soluções numéricas para as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para a polarização (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.8). As condições iniciais são  $z_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$  e  $x_0 = 5y_0 = 0.5$ . Os parâmetros são  $\Lambda = -C_{1+} = 4$  e  $n = 2$ .

Outro exemplo de ondas gravitacionais são as descritas por pulsos no formato de pacotes de ondas

$$f_3(u) = \frac{d^n e^{-u^2/\Lambda^2}}{du^n}, \quad (4.1.8)$$

$$f_4(u) = \cos(u/\beta) e^{-u^2/\Lambda^2}, \quad (4.1.9)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . O movimento geodésico para partículas que interagem com tais ondas é mais irregular, apresentando mudanças de direção e sentido durante a passagem da onda. Um exemplo de movimento pode ser visto na Figura 4.4, obtido pela combinação do pulso (4.1.8) com a polarização  $H_{1+}$ . Observa-se que a partícula inicia um movimento no sentido positivo do eixo  $x$  e depois inverte o sentido. O pulso (4.1.8), para  $n = 2$ , distintamente dos pulsos (4.1.6) e (4.1.7), possui inversão no sentido da função  $H$  ao longo da evolução de  $u$ . Observando o componente (3.2.12) é possível ver que a alteração no sinal de  $H(u, x, y)$  leva a uma inversão no sentido das acelerações inerciais. Portanto, o resultado está em acordo com a interpretação do tensor de aceleração (2.4.6). A mesma análise é válida para a variação do sentido do movimento ao longo do eixo  $y$  para a mesma solução. Percebe-se que os parâmetros  $\Lambda$  e  $C$  possuem significado de largura do pulso e amplitude, respectivamente. Quanto maior for o valor de  $\Lambda$ , maior é a região  $\Delta U$  de interação entre a partícula e a onda. Maiores valores em módulo de  $C$  indicam maior influência das ondas na cinemática inicial das partículas, uma maior alteração da trajetória inicial. Conforme discutido na seção 3.2, as coordenadas  $x^\mu = (t, x, y, z)$ , assim como as coordenadas  $x^\mu = (u, x, y, z)$ , são limitada à  $H < 2$ . Dessa forma, a região de análise e a amplitude devem ser ajustadas nas análises numéricas para que tal relação seja mantida.

Um exemplo interessante de movimento é o descrito por uma partícula no campo gravitacional de uma onda circularmente polarizada (3.1.37). Considerando-se um pulso largo parcialmente harmônico como o (4.1.9), observa-se que a partícula descreve um movimento orbital temporário ao redor do eixo de propagação da onda, com a duração  $\Delta u$  dependendo da largura  $\Lambda$  do pulso. Um exemplo de tal movimento caótico pode ser visto na Figura 4.5. O comportamento orbital de partículas

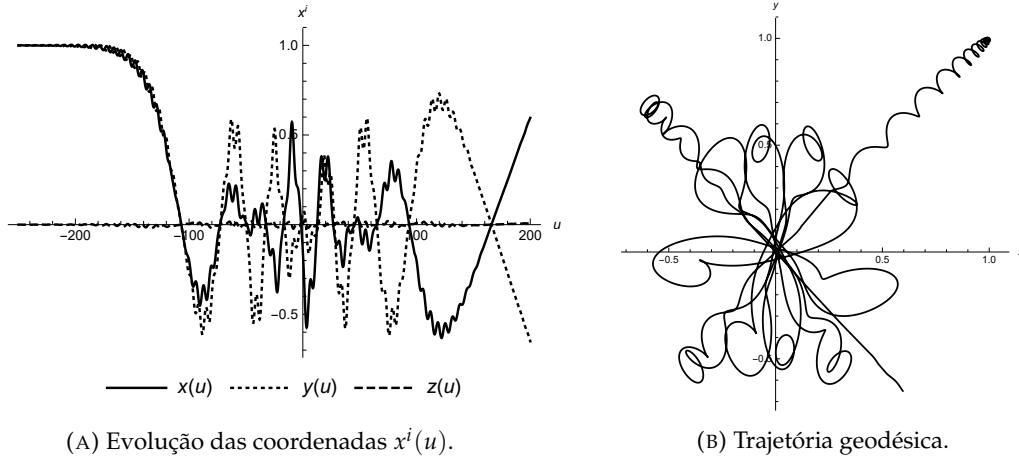


FIGURA 4.5: Soluções numéricas para as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para a polarização circular (3.1.37) com  $f(u)$  dado por (4.1.9). As condições iniciais são  $z_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$  e  $x_0 = y_0 = 1$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 100$ ,  $C = -1/4$  e  $\beta = 1$ .

nas ondas circularmente polarizadas pode atuar como uma armadilha gravitacional para partículas [89].

É interessante notar nas Figuras 4.1-4.5 que as partículas, inicialmente em repouso, descrevem um movimento acelerado durante a passagem da onda, retornando a um movimento uniforme após a passagem da onda. Entretanto, o estado final é cinematicamente distinto do inicial. A presença desse efeito memória de velocidade possui implicações sobre a energia cinética da partícula, como será visto na próxima seção.

## 4.2 Energia cinética de partículas livres e o efeito memória

A não possibilidade de resolução analítica das equações geodésicas (4.1.2-4.1.4) para um pulso qualquer torna impossível obter uma relação que expresse o movimento de uma partícula no caso geral. Entretanto, os casos analisados na seção 4.1 já permitem a percepção da existência do efeito memória na velocidade e, conseqüentemente, uma alteração permanente no estado cinemático da partícula. Nesta seção, a alteração do estado cinemático, de partículas atingidas por ondas gravitacionais, será analisada por meio da alteração da energia cinética das partículas. Os principais resultados dessa seção constam publicados na literatura e podem ser consultados na referência [19]<sup>2</sup>.

O estado cinemático da partícula teste, i.e., que interage com a onda gravitacional, pode ser computado pela energia cinética  $K$ . Durante a passagem da onda, as definições clássicas de energia cinética não são válidas. Entretanto, ao se considerar uma onda pulsando finita no espaço para cada  $u = \text{constante}$ , o espaço-tempo é o espaço-tempo de Minkowski em instantes anteriores à passagem da onda ( $u \rightarrow -\infty$ ) e posteriores ( $u \rightarrow \infty$ ). Portanto, a energia cinética por unidade de massa pode ser

<sup>2</sup>Apesar dos resultados e conclusões nesta seção apresentados serem os mesmos contidos na citada referência, existe uma distinção na apresentação. Na referência [19], a congruência adotada é passado orientada, i.e.,  $N^\mu k_{\mu=1}$  na equação (1.4.1). Portanto, o passado e futuro da partícula devem ser lidos da direita para a esquerda, respectivamente. Como nesta tese a congruência é futuro orientada, o sentido temporal regular é lido da esquerda para a direita.

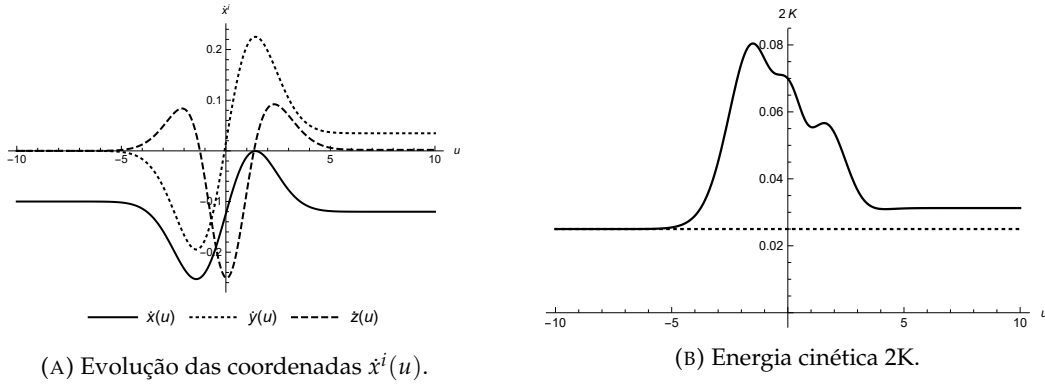


FIGURA 4.6: Velocidades  $\dot{x}^i$  e energia cinética (4.2.1) para a polarização + (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.8). As condições iniciais são  $x_0 = -y_0 = z_0 = 4$ ,  $\dot{x}_0 = -0.1$  e  $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 2$ ,  $C_{1+} = 9$  e  $n = 2$ .

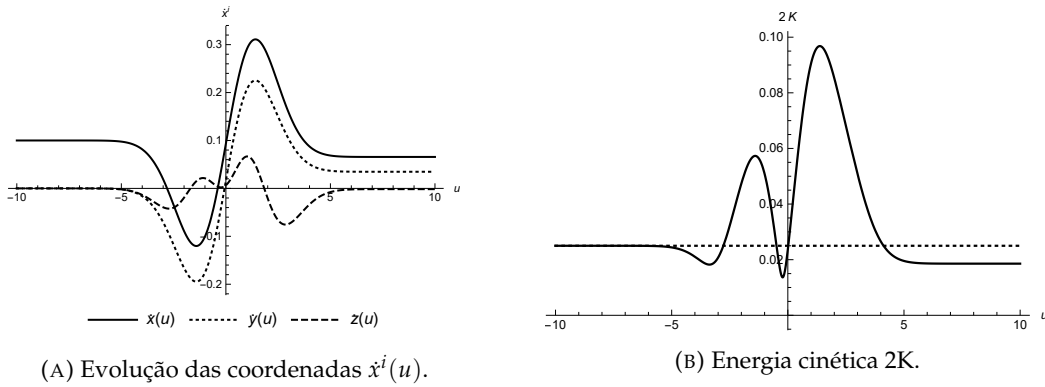


FIGURA 4.7: Velocidades  $\dot{x}^i$  e energia cinética (4.2.1) para a polarização + (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.8). As condições iniciais são  $x_0 = -y_0 = z_0 = 4$ ,  $\dot{x}_0 = 0.1$  e  $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 2$ ,  $C_{1+} = 1/9$  e  $n = 2$ .

obtida nesses instantes pela expressão clássica, no limite de baixas velocidades relativas à luz,

$$K = \frac{1}{4} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.2.1)$$

Considerando as coordenadas como independentes e transformando as derivadas com relação à  $u$  para derivadas com relação à  $t$ , a equação (4.2.1) pode ser reescrita na forma usual

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.2.2)$$

A quantidade (4.2.1) pode ser calculada similarmente às trajetórias na seção (4.1), i.e., resolvendo numericamente as equações da geodésica (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) para um conjunto de condições iniciais. Derivando as soluções  $x(u)$ ,  $y(u)$ ,  $z(u)$ , obtêm-se as quantidades  $\dot{x}^i = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  presentes em (4.2.1). Uma solução particular para  $\dot{x}^i$  pode ser vista na Figura 4.7a. Neste caso, considerou-se uma partícula no instante inicial  $u_0 = -\infty$  com velocidade  $\dot{x}_0 = -0.1$  apenas. Observa-se que a partícula sofre uma alteração no seu estado cinemático, adquirindo velocidade longitudinal e no outro componente transversal após a passagem da onda. Utilizando os resultados

numéricos apresentados na Figura 4.7a, a energia  $2K$  pode ser computada pela expressão (4.2.1), com o resultado podendo ser visto na Figura 4.7b. A linha tracejada apresenta o valor inicial (esquerda) da energia cinética para comparação com o valor final (direita). Nota-se que a manutenção da velocidade na direção  $\hat{x}$ , e o acréscimo nas demais direções, implica aumento na energia cinética da partícula, i.e., a partícula extraiu energia da onda gravitacional. Ao se assumir a conservação da energia do sistema onda-partícula e considerar-se fato da energia total da onda gravitacional (3.2.31) ser necessariamente negativa, a interação com a partícula, no caso particular apresentado na Figura 4.7, resulta em aumento no módulo da energia da onda gravitacional, ou seja, ela transporta menos energia (mais em módulo) após a interação, tornando-se mais “intensa”.

O comportamento qualitativo de aumento da energia cinética observado na Figura 4.7 pode ser repetido para diversas condições iniciais, mas não para todas. Considerando uma inversão no sentido inicial do movimento, o comportamento é qualitativamente alterado, conforme pode ser visto na Figura 4.8<sup>3</sup>, i.e., a onda passa a extrair energia positiva da partícula, tornando-se mais energética (menos em módulo), conseqüentemente menos “intensa”. Destarte, o principal resultado desta seção (e da referência [19]), pode ser estabelecido, i.e., uma mesma onda gravitacional pode extrair ou fornecer energia a uma partícula, a depender das condições iniciais da mesma. Tal consideração consiste importante explicação para a propagação astronômica e detecção de ondas gravitacionais, conforme é discutido nas conclusões desta tese.

Apesar da não possibilidade de obter-se uma solução analítica geral para as equações geodésicas (4.1.2-4.1.4), alguns comportamentos qualitativos que relacionam as condições inicial ao saldo final de energia da partícula podem ser obtidos. O mapeamento é mais facilmente desenvolvido introduzindo-se coordenadas polares no plano transversal ao de propagação. Utilizando as definições (3.3.1) e (3.3.2), as equações da geodésica para o tensor métrico (3.1.10) podem ser escritas nas coordenadas  $x^\mu = (u, \rho, \phi, z)$  como <sup>4</sup>

$$\ddot{\rho} = \rho \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \partial_\rho H, \quad (4.2.3)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{\rho} \dot{\rho} \dot{\phi} + \frac{1}{2\rho^2} \partial_\phi H, \quad (4.2.4)$$

$$\sqrt{2} \ddot{z} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_u H) + 2(\partial_\rho H) \dot{\rho} + 2(\partial_\phi H) \dot{\phi} \right]. \quad (4.2.5)$$

As polarizações (3.1.33) e (3.1.34), nas coordenadas  $x^\mu = (u, \rho, \phi, z)$  são descritas por

$$H_{1+} = -C_{1+} \rho^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) f_{1+}(u), \quad (4.2.6)$$

$$H_{1\times} = -C_{1\times} \rho^2 (\cos \phi \sin \phi) f_{1\times}(u). \quad (4.2.7)$$

O mapeamento pode ser obtido em função das condições iniciais em  $u = 0$ , i.e., durante a passagem da onda e não anterior à passagem da onda, logo, considerar-se-á  $u_0 = 0$  nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

O primeiro comportamento qualitativo pode ser observado para a polarização + (4.2.6) comparando as Figuras 4.8a e 4.8b. Quando duas partículas com as mesmas

<sup>3</sup>Nas Figuras 4.7b e 4.8b, apenas os comportamentos  $|u| \gg 0$  são passíveis de interpretação física, visto a definição (4.2.1) ser válida apenas no limite do espaço-tempo plano.

<sup>4</sup>Os símbolos de Christoffel podem ser obtidos simplesmente escolhendo  $J = 0$  nos símbolos de Christoffel para a onda giratônica, apresentados na seção 3.3.

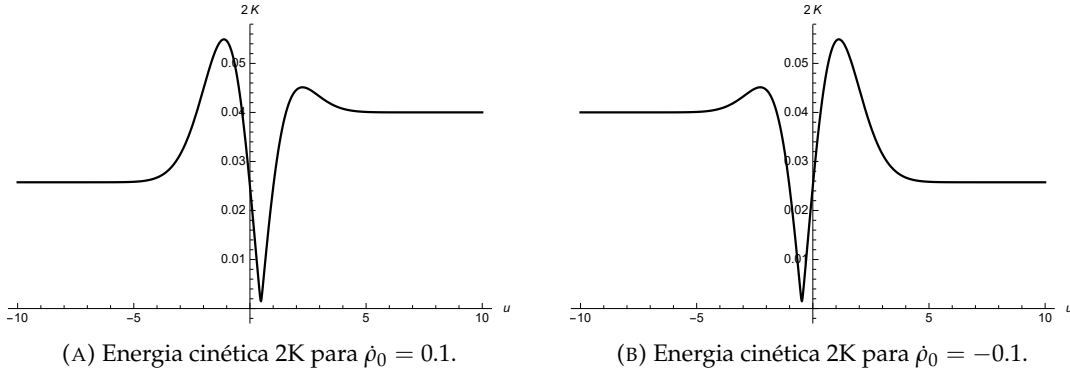


FIGURA 4.8: Variações da energia cinética (4.2.1) para a polarização + (4.2.6) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $\rho_0 = 0.2$  e  $\phi_0 = z_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{z}_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 2$  e  $C_{1+} = 1$ .

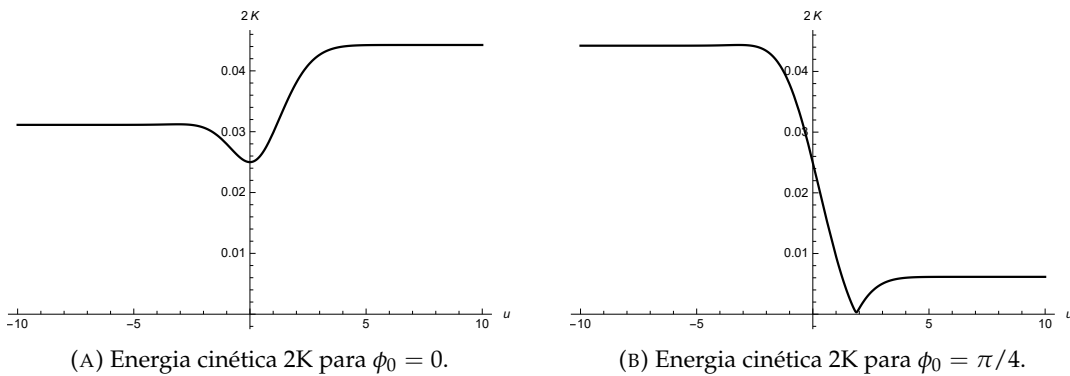


FIGURA 4.9: Variações da energia cinética (4.2.1) para a polarização  $\times$  (4.2.7) com  $f_{1\times}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $\rho_0 = 5\hat{\rho}_0 = 0.5$  e  $\phi_0 = z_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{z}_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 2$  e  $C_{1\times} = 1/4$ .

condições iniciais, à exceção da velocidade radial  $\rho_0$ , interagem independentemente com uma mesma onda gravitacional de polarização +, o comportamento qualitativo de ganho ou perda de energia depende do sentido da velocidade radial  $\hat{\rho}_0 \equiv \rho_0/|\rho_0|$  em  $u_0 = 0$ . Se  $\hat{\rho}_0 > 0$ , observa-se a partícula ganhar energia cinética (Figura 4.8a); se  $\hat{\rho}_0 < 0$ , a partícula perder energia cinética (Figura 4.8b). Neste caso, não há alteração da energia cinética se  $\hat{\rho}_0 = 0$ .

O segundo comportamento pode ser observado para a polarização  $\times$  comparando as Figuras 4.9a e 4.9b. Neste caso, há alteração qualitativa no comportamento ao alterar-se a posição angular inicial enquanto as demais condições iniciais são mantidas fixas. Ao alterar-se o sentido da velocidade angular inicial da partícula, há alteração qualitativa na variação de energia cinética da partícula, conforme pode ser visto na Figura 4.10.

Para ambas polarizações, não se observa dependência com as condições iniciais ( $u_0 = 0$ ) longitudinais, i.e., com  $z_0$  e  $\dot{z}_0$ . O comportamento quantitativo das variações da energia cinética das partículas é analisado na próxima seção<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>O mapeamento quantitativo do comportamento da energia cinética pode ser realizado utilizando a função variação da energia cinética (4.3.1), definida na seção 4.3. Tal análise consta na referência [90].

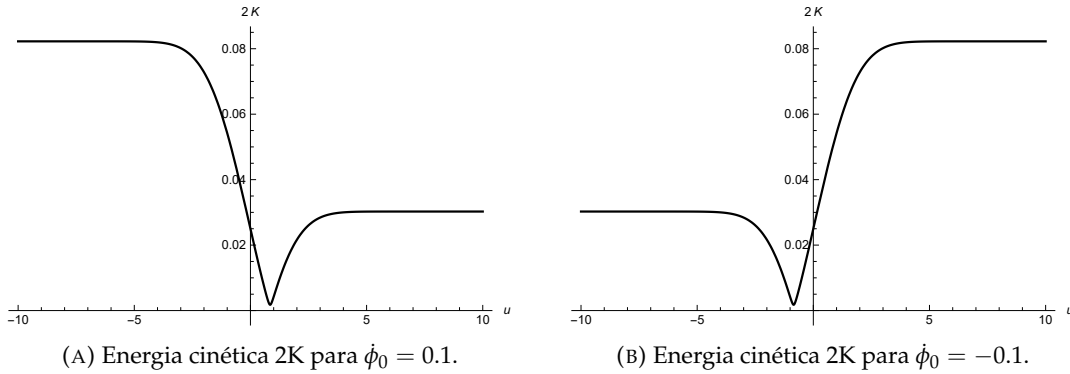


FIGURA 4.10: Variações da energia cinética (4.2.1) para a polarização  $\times$  (4.2.7) com  $f_{1\times}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $\rho_0 = 1$  e  $\phi_0 = z_0 = \dot{\rho}_0 = \dot{z}_0 = 0$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 2$  e  $C_{1\times} = 1/4$ .

### 4.3 Variações da energia cinética de partículas no espaço-tempo das pp-waves

Na seção 4.2 e na referência [19] a interação entre partículas e ondas gravitacionais fora estudada a partir da variação do estado cinemático de partículas livres, i.e., partículas apenas sob a influência gravitacional. Observou-se uma dependência entre a variação da energia cinética das partículas teste com as condições iniciais da mesma. Nesta seção, o efeito de parâmetros da onda na transferência de energia é estudado. Os resultados aqui apresentados encontram publicados e podem ser consultados na referência [20].

A análise de interação entre ondas gravitacionais e partículas permite não apenas a compreensão de tal interação, mas também da onda gravitacional. O movimento ondulatório pode ser detectado pela interação das ondas com partículas, com o estudo da interação de ondas gravitacionais com partículas permite a compreensão daquelas ondas a partir da mudança do estado de partículas teste. Pela graça do exemplo, a partícula<sup>6</sup> é um objeto localizado sofrendo uma transferência de energia localizada. Portanto, conceitos de energia-momento gravitacionais locais são necessários visto que é razoável assumir-se que a troca de energia ocorra localmente.

Pseudo-tensores energia-momento para o campo gravitacional, e.g., o de Landau [17], não podem explicar tal comportamento devido a existência de quantidades conservadas globalmente apenas. A energia cinética de partículas no espaço-tempo plano (antes e após a passagem da onda) não pode ser removida por transformações de coordenadas. Logo, a energia gravitacional também não pode. A remoção da energia por transformações de coordenadas é um suposto argumento contra a localizabilidade da energia gravitacional<sup>7</sup>.

As partículas consideradas são entidades teste idealizadas, i.e., não afetam a configuração gravitacional da onda durante e após a interação. Em um caso realístico, o efeito perturbativo da partícula sobre a onda deve ser considerado [92], possivelmente levando a uma energia perturbativa associada à interação, como ocorre na

<sup>6</sup>Em escalas astronômicas uma estrela interagindo com uma onda gravitacional pode ser suposta como partícula, desde as dimensões da estrela sejam pequenas com relação à frente de onda, i.e., a frente de onda é aproximadamente plana na região de interação com a onda. Apesar dos objetos astronômicos serem formados por partes distintas com velocidades distintas, a velocidade translacional de uma estrela é muito maior do que as velocidades relativas entre suas partes.

<sup>7</sup>Para uma discussão mais profunda sobre a localizabilidade, vide [91].



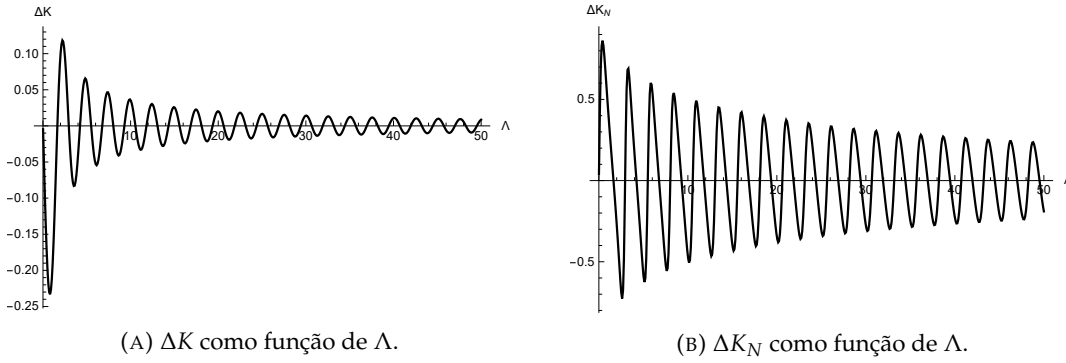


FIGURA 4.11: Variações da energia cinética para a polarização + (4.2.6) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.6) e condições iniciais  $\mathcal{I}$ . O parâmetro  $C_{1+} = 1$ .

interação entre partículas massivas e o buraco negro de Schwarzschild [93]. Entretanto, tal análise é difícil de ser desenvolvida e a consideração utilizada ao longo deste Capítulo, i.e., uma pequena (nula) alteração da onda devido à interação com a partícula, é razoável sempre que a troca de energia for muito pequena em comparação à energia global da onda. Aquela limitação não altera os resultados qualitativos obtidos pelo estudo do movimento geodésico da partícula no espaço-tempo não perturbado; assim como não impede que aspectos da onda possam ser explorados pelo estudo do mesmo movimento geodésico. E.g., a quantidade  $\Lambda$ , presente nos pulsos (4.1.6-4.1.9), está associada à largura do pulso. A partir do movimento geodésico das partículas, o efeito desse parâmetro na variação de energia da onda, por consequência da variação de energia da partícula, pode ser compreendido.

Para a compreensão do parâmetro  $\Lambda$  na alteração permanente do estado cinemático da partícula (efeito memória), e consequentemente inferindo propriedades correspondentes do campo gravitacional, convém definir-se a quantidade

$$\Delta K \equiv K_f - K_i, \quad (4.3.1)$$

onde  $K_f$  é a energia final calculada em  $u \rightarrow \infty$  e  $K_i$  é a energia final calculada em  $u \rightarrow -\infty$ . Se  $\Delta K > 0$ , a partícula extrai energia da onda; se  $\Delta K < 0$ , ela fornece. Para a análise, é conveniente fixar um conjunto de condições iniciais, permitindo assim a análise do parâmetro  $\Lambda$  apenas. Considerar-se-á o conjunto de condições iniciais<sup>8</sup>

$$\mathcal{I} : \quad \rho_0 = 0.6, \quad \phi_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\rho} = -0.2, \quad \dot{\phi}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0; \quad (4.3.2)$$

$$\mathcal{II} : \quad \rho_0 = 0.6, \quad \phi_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\rho} = 0.2, \quad \dot{\phi}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0; \quad (4.3.3)$$

onde, novamente, o ponto para determinação das condições iniciais é definido para  $u_0 = 0$ . O comportamento da variação  $\Delta K$  para a polarização + e condições iniciais  $\mathcal{I}$  pode ser visto na Figura 4.11a. Conforme pode ser visto, a variação da energia admite um comportamento quasi-periódico como função de  $\Lambda$ . O comportamento quasi-periódico apresenta amortecimento, i.e., a transferência torna-se menor com maiores valores de  $\Lambda$ . Supõe-se que o decaimento não é consequência da interação em si, mas da partícula possuir energias cinética inicial e final maiores, levando

<sup>8</sup>O mesmo conjunto de condições iniciais da referência [20]. Na referência [20] a congruência é passado orientada. Dessa forma, a transição  $\dot{x}^i \rightarrow -\dot{x}^i$  da referência para esta tese implica a mesma situação física.

a uma maior transferência de energia, não necessariamente uma transferência proporcionalmente maior para pequenos valores de  $\Lambda$ . Entretanto, tal efeito pode ser filtrado definindo-se a variação da energia cinética normalizada

$$\Delta K_N \equiv \frac{K_f - K_i}{K_f + K_i}. \quad (4.3.4)$$

Observando a Figura 4.11b, percebe-se que o decaimento da amplitude é menor, mas segue presente. Nota-se que os zeros ocorrem em valores discretos, i.e., existem valores específicos de comprimento de onda que não transferem energia à partícula (ou removem energia da partícula). O comportamento da Figura 4.11b assemelha-se ao de um oscilador amortecido. Uma expressão analítica aproximada pode ser obtida interpolando-se os pontos  $\Delta K_N = \Delta K_N(\Lambda)$  com a função

$$\Delta K_N = f e^{-(a\Lambda)/100} \sin\left(\frac{b\Lambda}{100} + c\right), \quad (4.3.5)$$

onde, em unidades naturais,  $a = 1.96045$ ,  $b = -249.259$ ,  $c = 4.07272$ ,  $f = 0.550283$  são constantes de interpolação<sup>9</sup>. O resultado da interpolação pode ser observado na Figura 4.12. Utilizando (4.3.5) é possível determinar os valores de  $\lambda$  para máxima

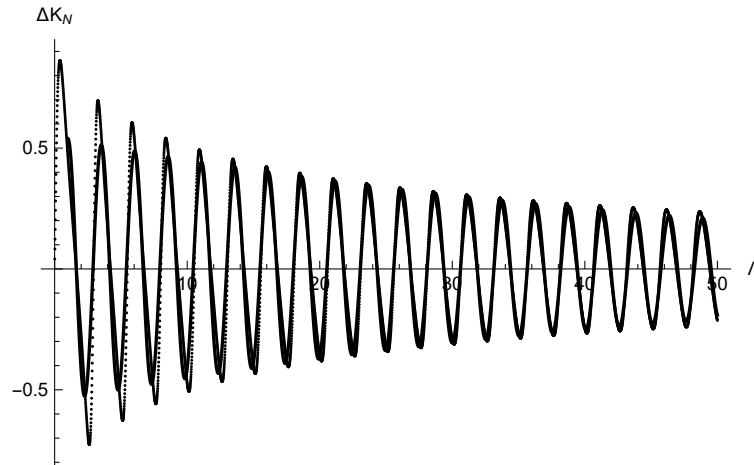


FIGURA 4.12: Interpolação (4.3.5) na linha contínua para os pontos  $\Delta K_N$ .

transferência de energia, i.e., os máximos e mínimos de  $\Delta K_N$ . Derivando (4.3.5) em relação à  $\Lambda$  e igualando o resultado à zero, obtém-se a relação discreta<sup>10</sup>

$$\frac{b\Lambda}{100} + c = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (4.3.6)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$

Se as condições iniciais  $\mathcal{II}$  forem escolhidas na Figura 4.11, o comportamento é invertido, i.e., as regiões de  $\Delta K$  e  $\Delta K_N$  negativas tornam-se positivas e vice versa. Se  $\phi_0 = \pi/4$ , o comportamento oscilatório é perdido. Destarte, o comportamento

<sup>9</sup>A interpolação fora feita para  $0.01 < \lambda < 50$  com cinco mil pontos.

<sup>10</sup>Curiosamente, ao considerar-se a dependência da variação do momento angular de uma partícula com  $\Lambda$ , similarmente ao feito com a variação da energia cinética, o mesmo comportamento quase-periódico é observado, mas os picos do momento angular e da energia cinética encontram-se deslocados por um fator  $\pi/2$  entre si [94].

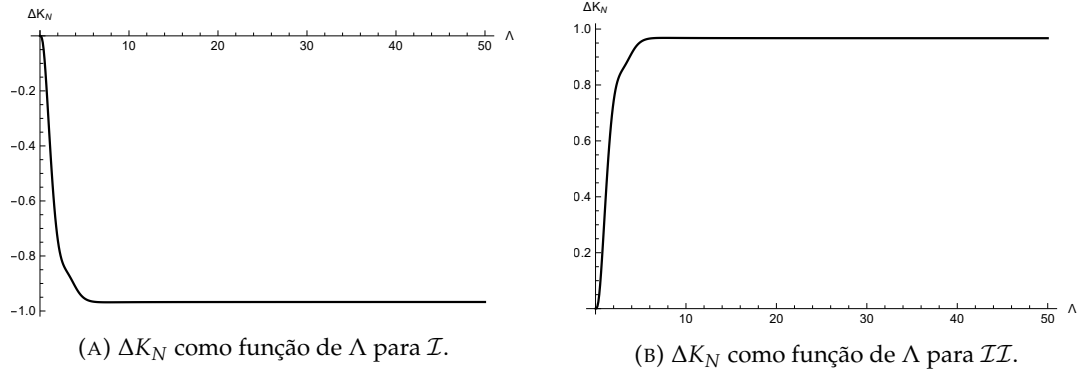


FIGURA 4.13: Variações da energia cinética para a polarização  $\times$  (4.2.7) com  $f_{1\times}(u)$  dado por (4.1.7). O parâmetro  $C_{1\times} = 1$ .

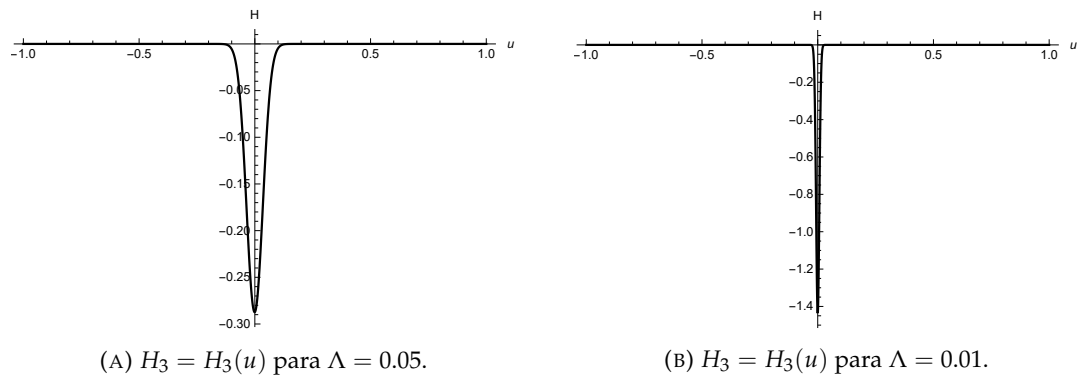


FIGURA 4.14: Função  $H$  (4.3.8) ao longo da trajetória da partícula como função de  $u$  para as condições iniciais  $\mathcal{I}$ .

qualitativo oscilatório da troca de energia depende da região do espaço-tempo onde a partícula interage com a onda.

Outro exemplo de comportamento oscilatório pode ser obtido considerando as mesmas condições iniciais e a polarização  $\times$ . Conforme pode ser visto na Figura 4.13a. Nota-se a variação de energia cinética crescer até certo valor máximo, de extração de energia por parte da onda, nas condições iniciais  $\mathcal{I}$ . Para as condições iniciais  $\mathcal{II}$  a onda fornece energia à partícula, mas o comportamento oscilatório segue ausente, como pode ser visto na Figura 4.13b. Entretanto, o comportamento não oscilatório na Figura 4.13 torna-se oscilatório com uma simples rotação nas condições iniciais, i.e., se  $\phi_0 = \pi/4$ . Logo, o comportamento quasi-periódico não é exclusivo da polarização.

Conforme mencionado na seção 4.1 as equações geodésicas (4.1.2-4.1.4) podem ser resolvidas analiticamente para pulsos formados por funções delta. Entretanto, dificuldades surgem ao lidar com não bem definidos produtos de funções delta. Ao lidar-se com pulsos Gaussianos, a análise pode ser similarmente feita considerando o limite  $\Lambda \rightarrow 0$  [95, 96], sendo esse limite chamado impulsivo. Dessa forma, é interessante analisar o comportamento da transferência de energia em tal limite. Um pulso Gaussiano normalizado satisfaz a relação

$$\frac{1}{\Lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-(u^2/2\Lambda^2)} = 1. \quad (4.3.7)$$

Logo, o limite impulsivo pode ser obtido considerando-se o limite  $\Lambda \rightarrow 0$  na função

$$H_3 = -\frac{1}{10\Lambda\sqrt{2}}\rho^2(2\cos^2\phi - 1)e^{-(u^2/2\Lambda^2)}, \quad (4.3.8)$$

onde a polarização + fora escolhida. Observa-se na Figura 4.14<sup>11</sup> que a função  $H_3$  torna-se mais “estrita” e “profunda” para maiores valores de  $\Lambda$ . Neste limite, percebe-se na Figura 4.15 a variação de energia tender à zero no limite  $\Lambda \rightarrow 0$ .

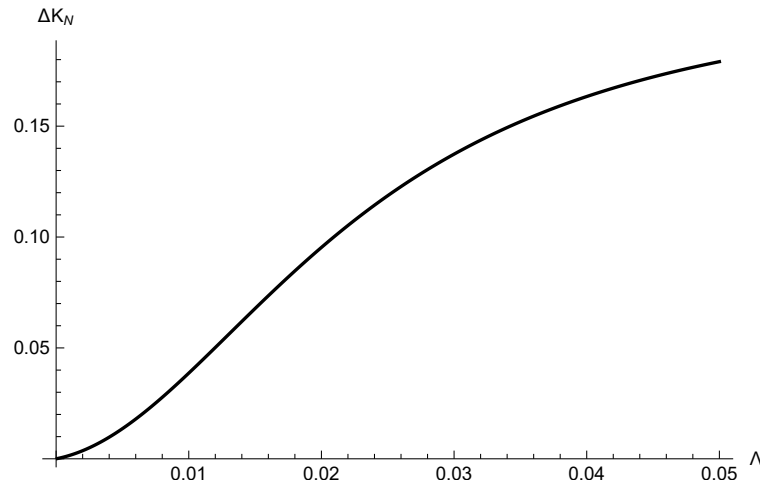


FIGURA 4.15:  $\Delta K_N$  como função de  $\Lambda$  para a função  $H$  descrita por (4.3.8) e condições iniciais  $\mathcal{I}$ .

Investigações analíticas sobre variação de energia  $\Delta K$  foram realizadas analiticamente com a utilização de pulso não Gaussiano [97], levando às mesmas conclusões, i.e., que esta variação pode ser positiva ou negativa após a passagem da onda.

As transferências de energia entre partícula e ondas gravitacionais, neste Capítulo apresentadas, reforçam a necessidade de expressões locais para a energia gravitacional, como a (2.3.7) do TERG. Outrossim, a possibilidade de ondas gravitacionais não apenas poderem fornecer energia às partículas, mas também absorver energia das partículas, possui importante considerações astronômicas, conforme é discutido nas Conclusões desta tese.

Ao longo deste Capítulo, apenas a variação empírica energia cinética da partícula fora considerada, i.e., o mecanismo não fora discutido. Esta abordagem permitiu que a cinemática da partícula fosse considerada apenas antes e após a passagem da onda, mas não durante a passagem da onda. No Capítulo 5, o estado cinemático da partícula será considerado durante a passagem da onda.

<sup>11</sup>A função  $H_3(u)$  é calculada ao longo da trajetória da partícula, i.e., com as soluções geodésicas  $x^i(u)$  substituídas como função de  $u$ . Tal função representa a onda localmente “vista” pela partícula.

## Capítulo 5

# Teorema trabalho-energia para partículas na presença de pp-waves

Mostrou-se no Capítulo 4 que partículas atingidas por pulsos de ondas gravitacionais sofrem efeito memória, i.e., sofrem deslocamento permanente devido à interação com a onda. Em algumas situações, o estado cinemático final da partícula é distinto do inicial, i.e., um efeito memória de velocidade está presente. A partir da integração numérica das equações da geodésica fora possível mostrar que alteração do estado cinemático corresponder à perda ou ganho de energia por parte da partícula. Entretanto, a análise limitou-se às regiões do espaço-tempo plano, i.e., antes e após a passagem das ondas. Neste Capítulo, um mecanismo para a troca de energia será proposto e, a partir dele, infere-se sobre o estado cinemático durante a passagem da onda. Os resultados apresentados neste Capítulo encontram-se publicados, podendo ser consultados na referência [21].

Na Mecânica Clássica, as leis de conservação podem ser estabelecidas a partir de simetrias do espaço e de uma simetria do tempo. As evidências experimentais sugerem o tempo ser homogêneo, i.e., nenhum instante de tempo é preferível a outro. Como consequência, uma lei de conservação para uma quantidade escalar surge. Tal escalar é denominado energia. A energia fornece uma abordagem distinta à abordagem de força, permitindo muitos fenômenos mecânicos serem melhor descritos em formas compreensíveis à razão humana. Epistemologicamente, energia e força são interpretações distintas do mesmo fenômeno concordantes entre si. Uma força atuando em uma partícula é dita realizar um trabalho sobre partícula caso a deslocar. O trabalho possui dimensão de energia e representa a dinâmica do sistema físico. Observa-se que uma partícula sofrendo um trabalho  $W$  tem seu estado cinemático alterado. A quantidade que representa a cinemática do sistema, é chamada energia cinética  $K$ . Experimentalmente, se a força imprime uma aceleração constante  $\vec{a}$  na partícula ao longo de um deslocamento  $\Delta l$ , observa-se

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta l, \quad (5.0.1)$$

onde  $v_{i,f}$  são as velocidades inicial e final da partícula, respectivamente. A equação (5.0.1) é chamada equação de Torricelli. Se a força for não uniforme, (5.0.1) generaliza-se para

$$\frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = \int_i^f \vec{a} \cdot d\vec{l}, \quad (5.0.2)$$

onde  $i, f$  representam os estados inicial e final, respectivamente. Multiplicando ambas as partes de (5.0.2) pela massa  $m$  da partícula, obtém-se o chamado teorema trabalho-energia  $\Delta K = W$ , onde  $\Delta K$  é a variação da energia cinética. A equação (5.0.2) é uma expressão deveras simples que aponta a força  $\vec{F} = m\vec{a}$  como a responsável pela alteração do estado cinemático da partícula.

Na seção (4.2) observou-se uma variação no estado cinemático de uma partícula após a passagem de uma onda gravitacional, mas tal mecanismo não pôde ser explicado na RG como é explicado na Mecânica Clássica. Conforme discutido na seção 1.1.3, as curvas geodésicas representam a menor distância entre dois eventos no espaço-tempo. Como apenas interação gravitacional ocorre quando uma partícula é atingida por uma onda gravitacional, nenhuma força está presente, implicando no movimento geodésico para tal partícula. Destarte, não havendo força gravitacional, um trabalho clássico nulo está presente. Porquanto, este fato está associado à não definição de um tensor energia-momento para o campo gravitacional na RG. O TERG, entretanto, permite uma explicação à alteração de energia, visto as ondas gravitacionais possuírem energia associada a si, conforme visto na subseção 3.2.1. Igualmente, através do tensor de aceleração, definido na seção 2.4, o TERG permite a explicação do mecanismo de transferência de energia. Explorar-se-á aquele mecanismo na seção 5.3.

Antes do objetivo principal deste Capítulo ser perseguido, é necessário algumas características físicas intrínsecas das pp-waves serem conhecidas. Apesar da estrutura matemática do espaço-tempo das pp-waves ser amplamente conhecida, muitas de suas propriedades físicas ainda não estão plenamente esclarecidas. Propriedades físicas essas que permitem a análise de comportamentos, alternativamente à descrição geométrica. Estudar-se-á na seção 5.1 as densidades de energia do espaço-tempo das pp-waves e mapear-se-á as distribuições no espaço tridimensional. Na física clássica observa-se relação próxima entre a aceleração e a distribuição de densidade do centro de massa. Destarte, na seção 5.2 o centro de energia do espaço-tempo das pp-waves será investigado. Finalmente, na seção 5.3, conforme a Referência [21], a relação trabalho-energia será estabelecida para uma partícula no espaço-tempo das pp-waves.

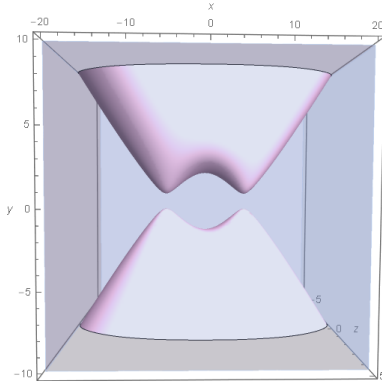
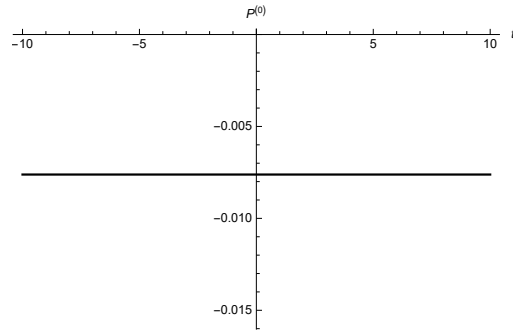
## 5.1 Distribuição espacial da densidade de energia das pp-waves

Conforme visto na seção 3.1, o tensor métrico das pp-waves é construído sobre suposições geométricas do espaço-tempo, similares à geometria observada para a congruência de raios de luz das ondas eletromagnéticas planas. Entretanto, estas últimas possuem uma distribuição de energia associada a si, podendo ser fisicamente interpretadas como uma quantidade de energia localizada (em uma região tridimensional do espaço) em propagação. Dentro das RG, dificilmente obtém-se interpretações semelhantes.

No TERG, conforme visto na subseção 3.2.1, o componente zero do quadri- vetor energia-momento gravitacional permite a localização da energia gravitacional das pp-waves para qualquer região espacial tridimensional, com a energia não sendo definida apenas globalmente. Destarte, a visualização da distribuição espacial das pp-waves pode ser obtida computando-se a densidade de energia

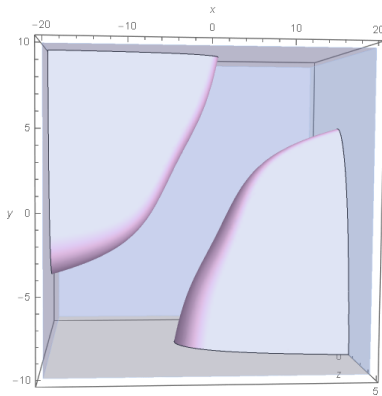
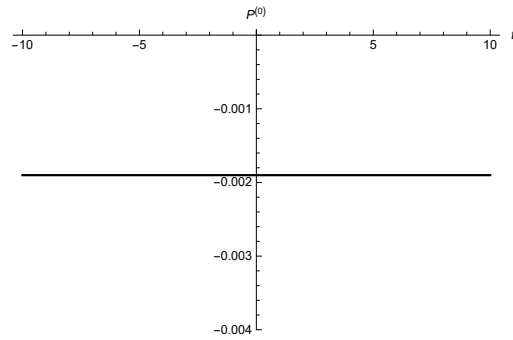
$$\epsilon = -\frac{k}{8} \frac{(\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2}{A^3}, \quad (5.1.1)$$

onde  $P^{(0)} = \int_V \epsilon d^3x$ . Desta forma, é possível uma análise das polarizações e parâmetros da onda diretamente sobre observações de suas propriedades físicas, e não apenas sobre seu efeito geodésico nas partículas com as quais interage. Uma distribuição não uniforme da densidade de energia implica regiões infinitesimais

(A) Distribuição espacial da densidade de energia  $\epsilon = -0.00078$ .

(B) Integração da densidade de energia.

FIGURA 5.1: Energia do campo gravitacional para  $H_{1+}$  (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C_{1+} = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .

(A) Distribuição espacial da densidade de energia  $\epsilon = -0.00070$ .

(B) Integração da densidade de energia.

FIGURA 5.2: Energia do campo gravitacional para  $H_{1x}$  (3.1.34) com  $f_{1x}(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C_{1x} = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .

distintas do espaço possuírem energia distinta. Logo, superfícies de mesma densidade energética podem ser construídas, i.e., curvas de nível para a densidade de energia, permitindo a análise da dependência do distribuição de energia<sup>1</sup> com as propriedades da onda. Uma dessas superfícies pode ser vista na Figura 5.1a para a polarização  $+$ , em uma visão transversal à direção de propagação, para um valor específico de densidade de energia. Observa-se a distribuição de energia desta polarização ser assimétrica, em acordo à descrição geométrica da mesma. Nas coordenadas  $x^\mu = (t, x, y, z)$  a função  $H(u, x, z)$  é limitada, i.e., tais coordenadas não descrevem todo o espaço tempo. Portanto, observa-se a densidade de energia sendo maior quando a superfície é afastada do eixo de propagação. Entretanto, não se pode afirmar a densidade de energia ir ao infinito quando as coordenadas vão ao seu limite assintótico, visto as coordenadas utilizadas não serem válidas em todo o espaço, ou seja, o comportamento local observado na Figura 5.1a, de acréscimo da

<sup>1</sup>Se a onda gravitacional for interpretada como uma distribuição de energia gravitacional em propagação, tais superfícies representam qualitativamente o “formato da onda”.

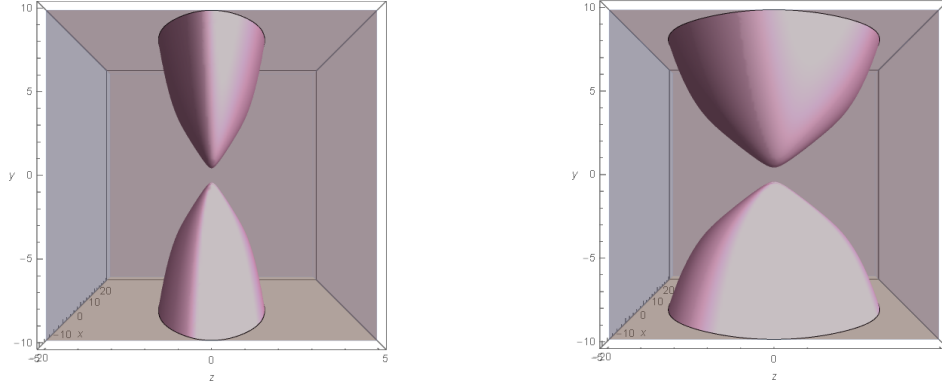
(A) Distribuição espacial da densidade de energia para  $\Lambda = 1$ .(B) Distribuição espacial da densidade de energia para  $\Lambda = 2$ .

FIGURA 5.3: Energia do campo gravitacional para  $H_{1+}$  (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . O parâmetro  $C_{1+} = 10^{-1}$ . A densidade de energia escolhida é  $\epsilon = -0.00078$

densidade de energia, não pode ser assumido global<sup>2</sup>.

Observa-se na natureza que os sistemas isolados são conservativos, i.e., sua energia não possui dependência temporal explícita. Entretanto, pode-se observar que a energia total (3.2.29) aparentemente apresenta dependência temporal na sua forma integral, mesmo tratando-se de um sistema isolado. A não existência de solução analítica para a integral (3.2.29) dificulta a percepção que o sistema físico pp-wave é conservativo. Integrando (3.2.29) numericamente para a polarização + em dada região do espaço<sup>3</sup>, percebe-se na Figura 5.1b que a energia dentro dessa região permanece constante<sup>4</sup>. Destarte, a energia gravitacional de uma pp-wave isolada é conservada.

O efeito da polarização na distribuição de energia pode ser visto comparando-se as Figuras 5.1a para a polarização + com a Figura 5.2a para a polarização  $\times$ . Os mesmos comportamentos qualitativos são observados e a energia segue conservada, conforme pode ser visto na Figura 5.2b.

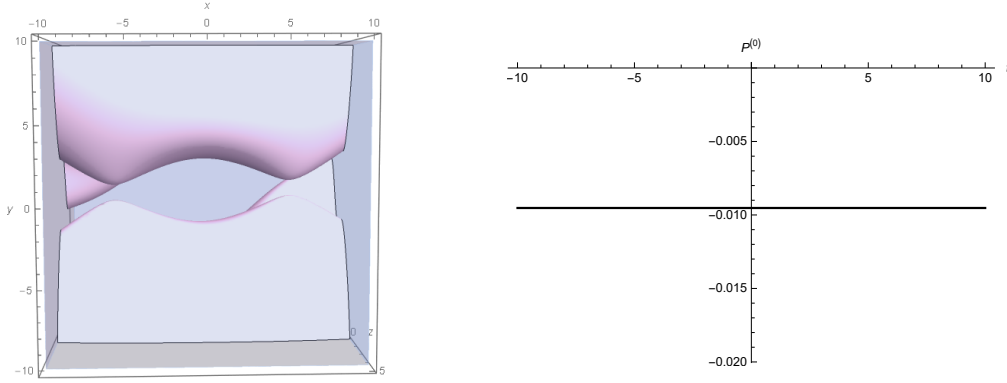
Os parâmetros de amplitude da onda  $C_{1+}$  e  $C_{1\times}$  apenas deslocam as superfícies, sem alterar o comportamento qualitativo. Maiores amplitudes implicam superfícies mais próximas à origem do plano transversal. O parâmetro  $\Lambda$  fora interpretado como relacionado à largura do pulso. Pode-se perceber, ao comparar as Figuras 5.3a e 5.3b, que pulsos mais largos possuem distribuição de energia mais larga. É interessante comparar os efeitos da largura do pulso das Figuras 5.3 com a transferência de energia entre a onda e a partícula, observada nas Figuras 4.13. Pulsos mais largos implicam maior região de interação entre a partícula e a onda, conseqüentemente a ocorrência de maior transferência local de energia, estando em acordo à localizabilidade da energia gravitacional.

<sup>2</sup>O crescimento da densidade de energia com a distância à origem do plano transversal é uma característica das soluções de vácuo. No Capítulo 6 ver-se-á que as soluções com fonte, assintoticamente planas, levam a uma energia finita mesmo quando a integração ocorre até o infinito espacial.

<sup>3</sup>A região considerada é um paralelepípedo de comprimento infinito descrito por  $-2 < x < 2$ ,  $-2 < y < 2$  e  $-\infty < z < \infty$ . As coordenadas da seção transversal não englobam todo o espaço devido à limitação das mesmas, com o resultado qualitativo sendo inalterado para quaisquer limites para  $x, y$  que mantenham  $H < 2$ .

<sup>4</sup>Se o paralelepípedo for finito em comprimento longitudinal, observar-se-á uma energia constante e uma queda à zero posterior. Tal fato não implica a energia da onda não se conservar, mas, por a onda tratar-se de uma entidade dinâmica, aquela distribuição de energia não mais está contida na superfície escolhida.





(A) Distribuição espacial da densidade de energia  $\epsilon = -0.000778$ .

(B) Integração da densidade de energia.

FIGURA 5.4: Energia do campo gravitacional para  $H$  (3.1.37) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .

As ondas com polarização não linear possuem comportamento qualitativo distinto na distribuição de energia. As ondas circularmente polarizadas apresentam superfícies torcidas ao redor do eixo de propagação, como pode ser visto na Figura 5.4a. Destarte, pode-se perceber que a polarização da onda é perceptível em sua distribuição de energia. A energia também é conservada para a onda circularmente polarizada, como pode ser visto na Figura 5.4b.

## 5.2 Centro de energia do espaço-tempo das pp-waves

A direção da aceleração geodésica de partículas em campos gravitacionais é determinada geometricamente na RG, i.e., sem a possibilidade de inferências sobre o comportamento das partículas e as propriedades físicas dos campos gravitacionais. Quando soluções com fontes são consideradas, propriedades do tensor energia-momento da fonte podem ser associadas à congruência geodésica, como às condições de energia e à equação de Raychaudhuri (1.4.22). Entretanto, para soluções de vácuo, onde a única entidade física presente é o campo gravitacional, não é possível a realização de inferências semelhantes sem a definição de um tensor energia-momento para o campo gravitacional.

No TERG a definição de centro de inércia (2.3.16) permite, qualitativamente, a análise das direções de aceleração a partir da distribuição de energia, i.e., a aceleração geodésica de partículas é direcionada à regiões de maior intensidade do centro de energia. Regiões de densidade de centro de energia positiva tendem a produzir um campo gravitacional atrativo.

Conforme visto na seção 2.3.2, os componentes  $(i)$  do centro de inércia são definidos como

$$L^{(0)(i)} = - \int d^3x M^{(0)(i)}, \quad (5.2.1)$$

onde

$$M^{(0)(i)} = 2k\partial_j \left[ e(e^{(0)j}e^{(i)0} - e^{(i)j}e^{(0)0}) \right], \quad (5.2.2)$$

é o vetor densidade de centro de energia.

Conforme visto na seção 3.2.2, as pp-waves possuem um vetor densidade de momento angular não nulo. Nesta seção, a densidade de momento angular é mapeada

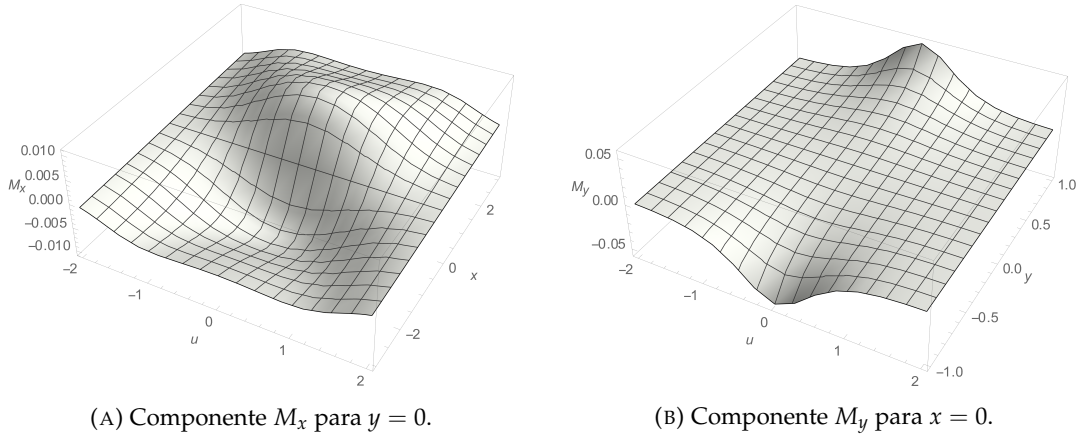


FIGURA 5.5: Densidade do centro de energia do campo gravitacional para  $H_{1+}$  (3.1.33) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6). Os parâmetros são  $C_{1+} = 1$  e  $\Lambda = 1$ .

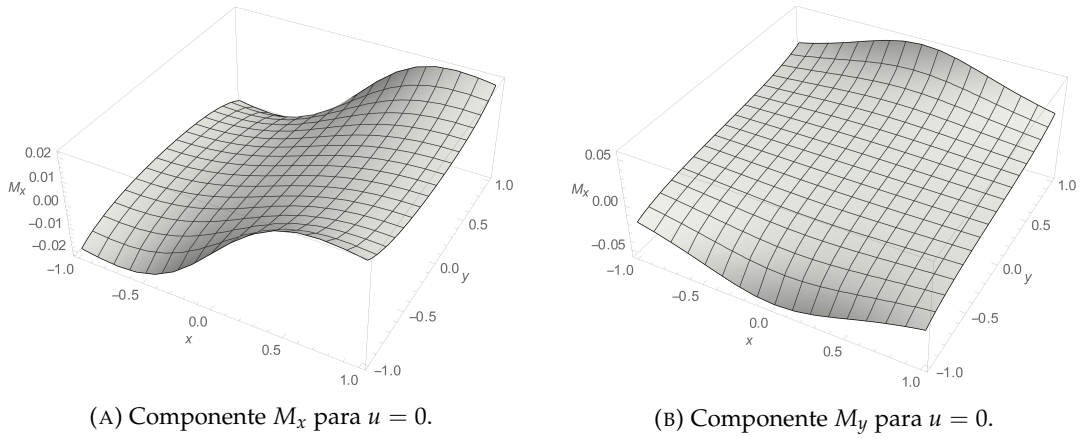


FIGURA 5.6: Densidade do centro de energia do campo gravitacional para  $H_{1+}$  (3.1.33) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6). Os parâmetros são  $C_{1+} = 1$  e  $\Lambda = 1$ .

como função das coordenadas, permitindo uma análise<sup>5</sup> das regiões espaciais de densidades negativa e positiva do centro de energia.

Os componentes não nulos (5.2.2) para a polarização +, descrita por (3.1.33), são

$$-M^{(0)(1)} = 2k \frac{C_{1+} f(u)}{2A^3} x, \quad (5.2.3)$$

$$-M^{(0)(2)} = 2k \frac{C_{1+} f(u)}{2A^3} y. \quad (5.2.4)$$

Definindo-se  $\vec{\rho} \equiv \vec{x} + \vec{y}$  e  $M_+ \equiv 2k \frac{C_{1+} f(u)}{2A^3}$ , é possível escrever (5.2.3) e (5.2.4) como

$$\vec{M}_+ = M_+ \vec{\rho}. \quad (5.2.5)$$

A densidade (5.2.5) é uma quantidade dependente de três variáveis, i.e.,  $\vec{M}_+ = \vec{M}_+(u, x, y)$ . Portanto, não é possível realizar uma representação tridimensional de tal quantidade. Nas Figuras 5.6, o componente (5.2.3) é traçado para uma superfície

<sup>5</sup>A análise desejada é mais simples se realizada nas coordenadas  $x^{\mu} = (u, x, y, z)$ . Destarte, as mesmas são consideradas nesta seção.

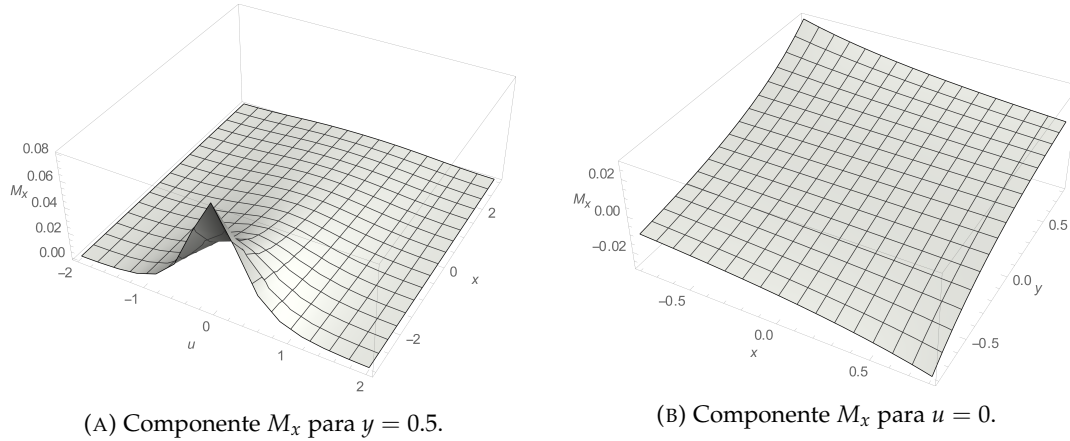


FIGURA 5.7: Densidade do centro de energia do campo gravitacional para  $H_{1\times}$  (3.1.34) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6). Os parâmetros são  $C_{1\times} = 1$  e  $\Lambda = 1$ .

$y = \text{constante}$  na Figura 5.6a e na Figura 5.6b para o componente (5.2.4) para uma superfície  $x = \text{constante}$ . Percebe-se o centro de energia encontrar-se localizado próximo ao centro do pulso Gaussiano<sup>6</sup>. A onda possui regiões de densidade de centro de energia negativa e positiva, em acordo aos comportamentos gravitacionais geodésicos repulsivos e atrativos vistos na seção 4.1. Nas Figuras 5.6, os componentes (5.2.3) e (5.2.4) são traçados para um valor fixo  $u$  como função das coordenadas  $x, y$  do plano transversal ao de propagação.

Comportamentos semelhantes são obtidos para a polarização  $\times$ . Os componentes não nulos (5.2.2) para a polarização  $+$ , descrita por (3.1.34), são

$$-M^{(0)(1)} = 2k \frac{C_{1\times} f(u)}{4A^3} y, \quad (5.2.6)$$

$$-M^{(0)(2)} = 2k \frac{C_{1\times} f(u)}{4A^3} x. \quad (5.2.7)$$

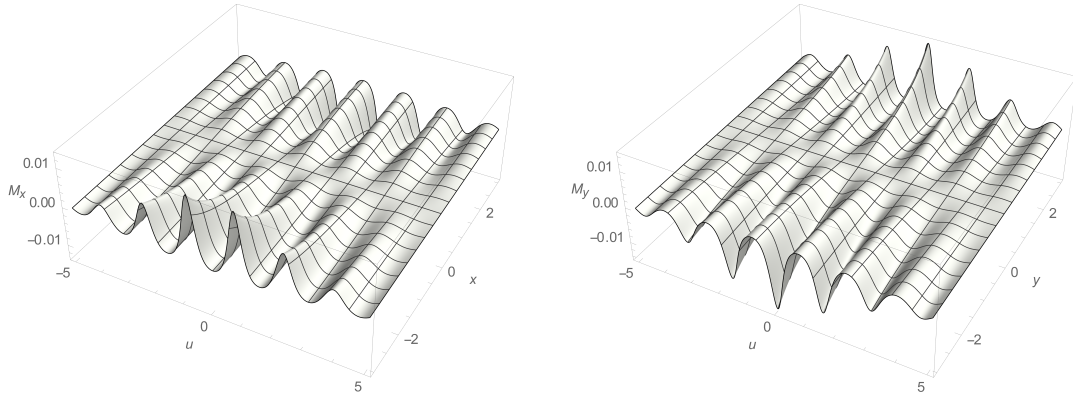
Novamente, definindo-se  $M_{\times} \equiv 2k \frac{C_{1\times} f(u)}{4A^3}$ , obtém-se

$$\vec{M}_{\times} = M_{\times} (y\hat{x} + x\hat{y}). \quad (5.2.8)$$

Nas Figuras 5.7, o componente (5.2.6) é traçado para uma superfície  $y = \text{constante}$  na Figura 5.7a<sup>7</sup> e para  $u = \text{constante}$  na Figura 5.7b. Novamente observa-se uma densidade de centro de energia localizada ao redor do centro do pulso Gaussiano. Percebe-se a densidade do centro de energia possuir distribuição não uniforme nas frentes de onda. Tal comportamento era esperado, visto partículas, com mesmas velocidades iniciais, soltas em regiões distintas possuírem comportamento de transferência de energia distintos, como visualizado nas Figuras 4.9.

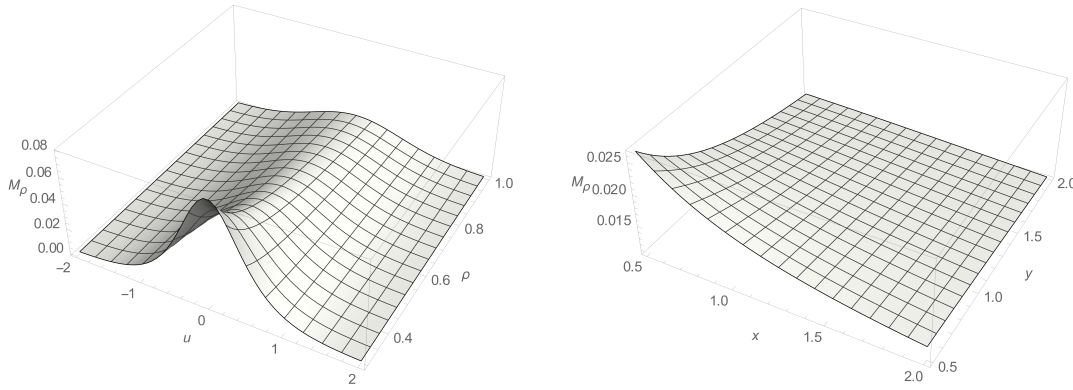
<sup>6</sup>Assim como ocorre com a densidade de energia, a não validade das coordenadas Cartesianas no espaço-tempo inteiro implica que o comportamento crescente ao se afastar (da origem do plano transversal) não pode ser assumido globalmente.

<sup>7</sup>Apesar de parecer, somente pela Figura 5.7a, que para a polarização  $\times$  a densidade do centro de energia é positiva apenas, tal fato não se sustenta veridicamente, pois escolhendo uma superfície  $y = -0.5$  o comportamento é invertido, com a densidade diminuindo ao invés de aumentar no sentido negativo de  $x$ . Os comportamentos qualitativos das polarizações  $+$  e  $\times$  são distintos a menos de uma rotação no plano transversal.


 (A) Componente  $M_x$  para  $y = 0$ .

 (B) Componente  $M_y$  para  $x = 0$ .

FIGURA 5.8: Densidade do centro de energia do campo gravitacional para  $H_{1+}$  (3.1.33) com  $f(u)$  descrito por (4.1.9). Os parâmetros são  $C_{1+} = 10^{-1}$ ,  $\Lambda = 2$  e  $\beta = 1/4$ .


 (A) Componente  $M_\rho$ .

 (B) Componente  $M_\rho$  para  $u = 0$ .

FIGURA 5.9: Densidade do centro de energia do campo gravitacional para  $H_0$  (3.1.32) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6). Os parâmetros são  $C_0 = 1/2$ ,  $\Lambda = 1$  e  $a = 1$ .

Pulsos fortemente oscilantes, como o descrito por (4.1.9), levam a valores oscilantes da densidade do centro de energia, como pode ser visto nas Figuras 5.8. Tal fato permite a explicação qualitativa de ondas gravitacionais periódicas poderem atuar como armadilhas de partículas [98], i.e., partículas são arrastadas pelas ondas gravitacionais.

Todas as soluções de pp-waves analisadas ao longo deste Capítulo, até o momento, foram soluções de vácuo. A solução de monopolo (3.1.31) permite uma análise interessante por se tratar de uma solução com simetria axial. Destarte, é possível trabalhar com um vetor densidade de centro de energia que é função apenas de duas coordenadas. Para a função  $H(u, x, y)$  descrita por (3.1.34), os componentes não nulos (5.2.2) são

$$-M^{(0)(1)} = 2k \frac{C_0 f(u)}{4A^3} \cos \phi, \quad (5.2.9)$$

$$-M^{(0)(2)} = 2k \frac{C_0 f(u)}{4A^3} \sin \phi. \quad (5.2.10)$$

Portanto, definindo  $M_0 \equiv 2k \frac{C_0 f(u)}{4A^3}$ , é possível obter-se um vetor com sentido e dependência radial<sup>8</sup> apenas, i.e.,

$$\vec{M}_0 = M_0 \hat{\rho}. \quad (5.2.11)$$

O comportamento para  $M_\rho$  pode ser visto nas Figuras 5.9. Distintamente das soluções de vácuo, observa-se que a densidade do centro de energia está localizada próxima à origem do plano transversal<sup>9</sup>, i.e., ao redor de  $\rho = 0$ .

Conforme visto ao longo desta seção, as pp-waves possuem centro de energia não nulo localizado ao redor do centro do pulso. Portanto, o centro de energia permite a interpretação da propagação de uma pp-wave como a propagação do centro de energia apresentado nas Figuras 5.5 - 5.9, com a região de maior intensidade de centro de densidade de energia gravitacional atuando como centro de gravidade. A distribuição não uniforme da densidade do centro de energia permite explicações acerca do sentido da aceleração geodésica de partículas na presença de pp-waves, com as partículas tendendo à regiões do centro de gravidade<sup>10</sup>. O sentido do movimento das partículas é determinado pelas acelerações inerciais do espaço-tempo. Estas últimas são investigadas na próxima seção.

### 5.3 Relação trabalho-energia para ondas gravitacionais

Conforme visto na seção 2.4, o campo de aceleração gravitacional pode ser obtido a partir das acelerações inerciais (2.4.6), desde que as mesmas estejam associadas a um observador estacionário. As tétradas (3.2.2) estão associadas a observadores estacionários no espaço-tempo. Destarte, os componentes (3.2.12-3.2.14) da aceleração inercial são iguais em módulo e inversos em sinal aos componentes  $\phi_{gx}$ ,  $\phi_{gy}$  e  $\phi_{gz}$  da aceleração gravitacional. Nesta seção, analisa-se o campo das acelerações gravitacionais.

Na seção 5.2, observou-se a propagação das pp-waves interpretada como a propagação de um centro de energia gravitacional, com partículas tendendo a serem atraídas à regiões de maior densidade de centro de energia. Eis que o sentido de aceleração das partículas depende do sentido da aceleração gravitacional. Portanto, tendo em vista a relação intrínseca entre centro de energia e energia, espera-se uma relação entre a energia gravitacional e as acelerações inerciais.

Tal motivada relação pode ser facilmente demonstrada para as pp-waves. Comparando a definição (2.2.16) com a equação (2.4.6), pode-se perceber que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi^{bc} &= \frac{1}{4} \left( T^{(0)bc} + T^{b(0)c} - T^{c(0)b} \right) \\ &= \Sigma^{(0)bc} - \frac{1}{2} \left( \eta^{(0)c} T^b - \eta^{(0)b} T^c \right) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

<sup>8</sup>Radial no plano transversal ao de propagação da onda.

<sup>9</sup>Nota-se que o centro de densidade de energia é assintoticamente nulo, o que é esperado porquanto as fontes finitas dão origem a campos gravitacionais limitados à regiões do espaço ao seu redor. Entretanto, as soluções não são regulares na origem do plano transversal, como o são no caso das soluções de vácuo. Computacionalmente, deve-se excluir uma pequena região ao redor do  $\rho = 0$ , correspondendo à fonte.

<sup>10</sup>Apesar da densidade de energia também possibilitar a interpretação da propagação das pp-waves, a mesma é uma quantidade escalar, não permitindo a conexão das regiões do espaço com o sentido do movimento das partículas.

Logo,

$$\frac{1}{2}e_b^i e_c^j \phi^{bc} = \Sigma^{(0)ij} - \frac{1}{2} \left( e^{(0)j} T^i - e^{(0)i} T^j \right). \quad (5.3.2)$$

Utilizando as torções (3.2.4-3.2.11), as contrações  $T^\mu = T^\lambda{}_\lambda{}^\mu$  podem ser calculadas, obtendo-se como únicos componentes não nulos

$$T^0 = \frac{1}{4} \frac{\partial_u H}{A^2} = T^3. \quad (5.3.3)$$

Destarte,

$$\Sigma^{(0)01} = \frac{1}{2} e_b^0 e_c^1 \phi^{bc} = \frac{1}{2} \left( e_{(0)}^0 \phi^{(0)(1)} + e_{(3)}^0 \phi^{(3)(1)} \right), \quad (5.3.4)$$

$$\Sigma^{(0)02} = \frac{1}{2} e_b^0 e_c^2 \phi^{bc} = \frac{1}{2} \left( e_{(0)}^0 \phi^{(0)(2)} + e_{(3)}^0 \phi^{(3)(2)} \right), \quad (5.3.5)$$

i.e., a densidade de energia das pp-waves pode ser escrita em função das acelerações e rotações inerciais do espaço-tempo das pp-waves<sup>11</sup>. As relações (5.3.4) e (5.3.5) implicam uma relação quantitativa entre a aceleração gravitacional e a densidade de energia gravitacional. Portanto, a aceleração gravitacional, relacionando-se ao sentido de movimento das partículas em movimento geodésico, relaciona-se também à interação energética entre a onda e as partículas<sup>12</sup>.

O comportamento acima descrito é observado na física clássica, conforme discutido ao começo deste Capítulo, i.e., a variação da energia cinética de uma partícula relaciona-se à aceleração transmitida a ela. Nesta seção, uma relação similar à equação de Torricelli (5.0.2) para partículas atingidas por ondas gravitacionais é proposta, com sua validade e precisão determinada por meio de centenas de integrações numéricas de ambos os lados da equação.

Na subseção 5.3.1, considerar-se-á uma pp-wave axialmente simétrica e serão os componentes do tensor de aceleração gravitacional calculados. Na subseção 5.3.2, efetuar-se-á a generalização da equação de Torricelli proposta e serão os cálculos numéricos de verificação realizados.

### 5.3.1 Acelerações inerciais

As coordenadas Cartesianas  $x^\mu = (t, x, y, z)$  não permitem a descrição de todo o espaço-tempo das pp-waves, visto não serem comportadas para  $H(u, x, y) \geq 2$ . Destarte, as soluções de vácuo (3.1.33) e (3.1.33) são regulares na origem, mas não podem ser escritas em coordenadas Cartesianas para distâncias muito longas da origem de coordenadas do plano transversal ao de propagação das ondas. Entretanto, as soluções (3.1.32), (3.1.35) e (3.1.36) são regulares no infinito, mas não o são na origem.

Nesta seção, considerar-se-á uma solução de Aichelburg-Sexl, permitindo um conjunto de tétradas definido em quase todo o espaço tridimensional, além de gerar uma aceleração gravitacional com componentes radial (no plano transversal) e longitudinal apenas, i.e. um campo de acelerações axialmente simétrico.

<sup>11</sup>Vide a definição de energia (2.3.7).

<sup>12</sup>Isto é, a aceleração gravitacional relaciona-se a energia gravitacional que por sua vez, por conservação da energia, relaciona-se à variação de energia da partícula. Logo, espera-se que a variação de energia da partícula, vista na seção 4.2, esteja quantitativamente relacionada ao campo de aceleração gravitacional. Tal interpretação só é possível por o TERG possuir uma definição local de energia gravitacional.

Uma solução do tipo (3.1.32) é descrita por

$$H = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) e^{-u^2}, \quad (5.3.6)$$

onde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\rho_0$  é uma constante arbitrária com dimensões de comprimento<sup>13</sup>. A condição de regularidade  $H < 2$  da solução é satisfeita se

$$\rho > \rho_0 e^{(-4e^{(u^2)})}. \quad (5.3.7)$$

Para fins teóricos, a constante  $\rho_0$  pode ser escolhida arbitrariamente pequena. Escolher-se-á, por simplicidade, esta constante como a unidade em unidades naturais, i.e.,  $\rho_0 = 1$ . No limite assintótico  $u = \pm\infty$ , o espaço-tempo plano é recuperado e a solução é válida para qualquer valor das coordenadas transversas  $x, y$ .

Considerando (5.3.7) nas equações (3.2.12-3.2.14), obtém-se

$$\phi_{(0)(1)} = \frac{\cos \phi}{\rho (8e^{u^2} + 2 \ln \rho)}, \quad (5.3.8)$$

$$\phi_{(0)(2)} = \frac{\sin \phi}{\rho (8e^{u^2} + 2 \ln \rho)}, \quad (5.3.9)$$

$$\phi_{(0)(3)} = -\frac{4ue^{-u^2} \ln \rho}{(8 + 2e^{-u^2} \ln \rho)^{3/2}}. \quad (5.3.10)$$

A aceleração gravitacional sofrida pelas partículas atingidas pela onda é exatamente menos a aceleração inercial necessária para manter o referencial estacionário no espaço tridimensional. Destarte, a aceleração gravitacional  $a_g$  é descrita por

$$\begin{aligned} \vec{a}_g &= -\frac{1}{\rho (8e^{u^2} + 2 \ln \rho)} \hat{\rho} + \frac{4ue^{-u^2} \ln \rho}{(8 + 2e^{-u^2} \ln \rho)^{3/2}} \hat{z} \\ &= -\frac{1}{4\rho} \frac{e^{-u^2}}{A^2} \hat{\rho} + u \frac{H}{A^3} \hat{z} \\ &\equiv a_{g\rho} \hat{\rho} + a_{gz} \hat{z}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

O comportamento da aceleração (5.3.11) pode ser visto por meio de seus componentes nas Figuras 5.10. Pode-se notar  $a_{g\rho} < 0$ ,  $a_{g\rho}$  ser sempre atrativo, i.e., orientado em direção ao eixo  $\rho = 0$ . Se a função (5.3.6) fosse multiplicada por menos a unidade, o comportamento inverter-se-ia, i.e., o componente  $a_{g\rho}$  seria sempre positivo. É interessante notar-se as semelhanças entre as Figuras 5.9a e 5.10a, i.e., as regiões de densidade de centro de energia positiva são atrativas, com o módulo da aceleração maior nas regiões de maior densidade de centro de energia. Nota-se também que a aceleração longitudinal é negativa à frente do centro do pulso e positiva atrás, i.e., a onda atrai a partícula ao se aproximar e a repele ao se afastar.

As relações entre a aceleração gravitacional e a densidade de centro de energia podem ser melhor visualizadas considerando-se o pulso oscilante (4.1.9). Para uma onda descrita por

$$H = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) e^{-(u/10)^2} \cos u, \quad (5.3.12)$$

<sup>13</sup>Relacionada ao raio da fonte.

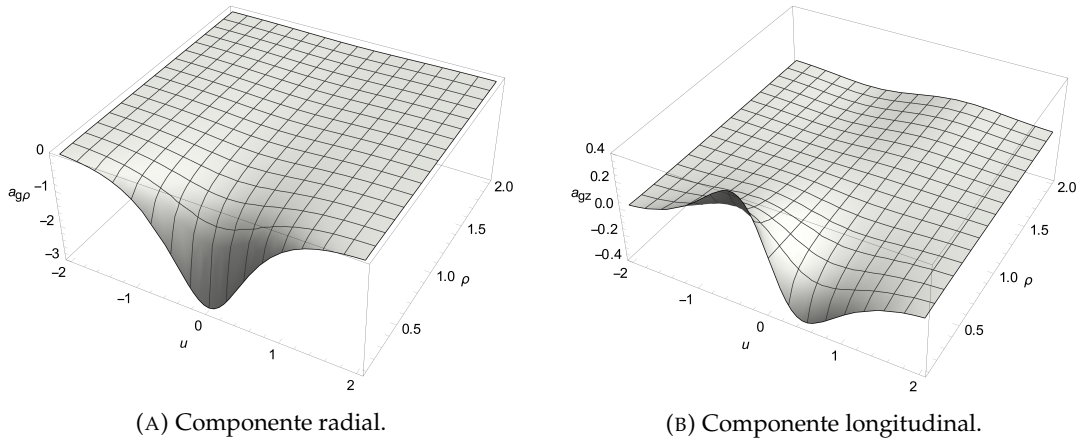


FIGURA 5.10: Distribuição da aceleração gravitacional (5.3.11) para a onda descrita por (5.3.6). O parâmetro  $\rho_0 = 1$ .

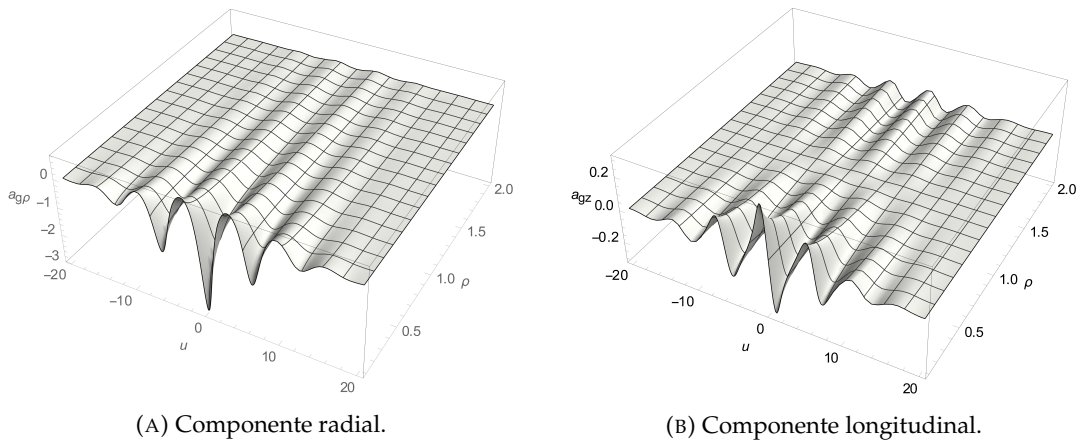


FIGURA 5.11: Distribuição da aceleração gravitacional a onda descrita por (5.3.12). O parâmetro  $\rho_0 = 1$ .

tem-se os componentes do tensor de aceleração apresentados nas Figuras 5.11. Observe, assim como ocorre com a densidade do centro de energia, um comportamento oscilante, com a onda hora atraindo a partícula e hora afastando-a.

### 5.3.2 O teorema trabalho-energia para as pp-waves

Na física clássica, a variação da energia cinética pode ser computada pela variação do trabalho realizado pela força gravitacional. Destarte, se assumida a equivalência entre as massas inercial e gravitacional, a variação da energia cinética por unidade de massa é igual ao trabalho por unidade de massa.

O conceito clássico pode ser estendido mantendo-se as interpretações Newtonianas, i.e., uma partícula se movendo em um campo de acelerações. Pode-se definir os estados inicial  $i$  e final  $f$  para o movimento de uma partícula como aqueles que representam o momento onde a onda começa a atuar na partícula (ondas se aproximando) e o momento onde para de atuar (onda se afastando), respectivamente. Nos estados inicial e final a onda não atua na partícula, com sua trajetória sendo uma linha reta por consequência de  $\phi_{(0)(i)} = 0$ . A existência de tais estados é garantida pelo perfil pulsante da onda<sup>14</sup>, i.e., o campo gravitacional apresenta-se como um

<sup>14</sup>O formato Gaussiano da dependência de  $H$  com  $u$ .



“sanduíche” entre regiões planas no espaço-tempo. Para a generalização da equação (5.0.2) é necessário uma integração no espaço regular. Entretanto, os componentes do tensor de aceleração são calculados com índices locais. Destarte, é necessário que o índice ( $i$ ) do tensor de aceleração seja projetado no espaço-tempo para possibilitar a integração ao longo de um caminho parametrizado. Define-se o trabalho por unidade de massa realizado pelo campo gravitacional como

$$\Delta W = - \int_i^f \phi_{(0)(i)} e^{(i)}{}_j dx^j, \quad (5.3.13)$$

onde sinal negativo em (5.3.13) encontra-se presente devido a aceleração gravitacional ser menos a aceleração inercial.

Substituindo (3.2.17) na definição (5.3.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int_i^f \left[ \partial_x \ln(A) dx + \partial_y \ln(A) dy - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_u \left( \frac{1}{A^2} \right) dz \right] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \partial_x \ln(A) \dot{x} + \partial_y \ln(A) \dot{y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_u \left( \frac{1}{A^2} \right) \dot{z} \right] du, \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

onde a integração fora parametrizada pela coordenada  $u$ , i.e., usou-se

$$dx^j = (dx^j/du) du = \dot{x}^j du.$$

Substituindo-se  $H(u, x, y)$  por (5.3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{x \dot{x}}{4(x^2 + y^2)(2 - H)} + \frac{y \dot{y}}{4(x^2 + y^2)(2 - H)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2} u \ln(x^2 + y^2) \dot{z}}{4(2 - H)^2} \right] e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Resolvendo-se as equações geodésicas (4.1.2), (4.1.3) e (4.1.5) numericamente e substituindo as soluções em (5.3.15), i.e.,  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$  e  $z = z(u)$ , a integral (5.3.15) pode ser resolvida numericamente ao longo da trajetória da partícula.

A variação da energia cinética por unidade de massa pode ser computada como feito no Capítulo 4, i.e.,

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{4} \left[ \dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u) + \dot{z}^2(u) \right]_{u=-\infty}^{u=\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]_{t=-\infty}^{t=\infty}. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

As trajetórias  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$  e  $z = z(u)$  devem ser as mesmas que as utilizadas em (5.3.15).

Considerando todo o trabalho realizado pelo campo gravitacional na partícula convertido em energia cinética, espera-se

$$\Delta K \approx \Delta W, \quad (5.3.17)$$

onde assume-se um comportamento não-relativístico para a partícula. Considerando-se o campo gravitacional como fraco e a velocidade da partícula muito menor que a da luz, tal suposição é satisfatória.

Para a comparação numérica entre (5.3.15) e (5.3.16), i.e., a validação de (5.3.17),

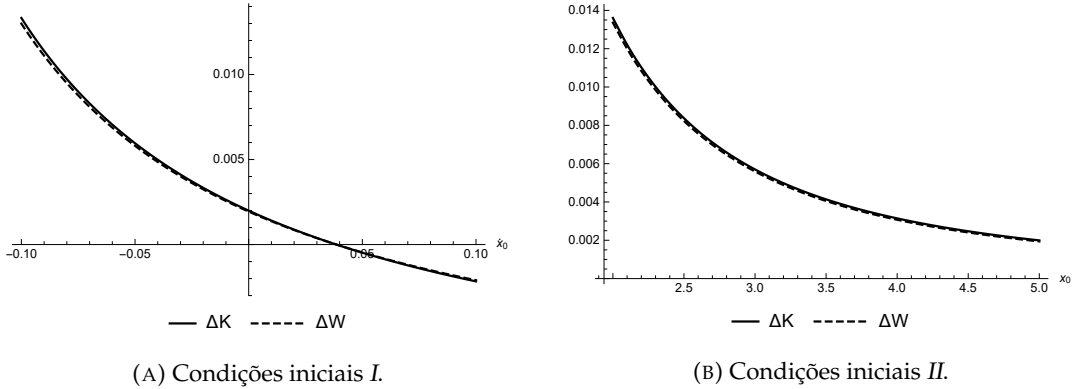


FIGURA 5.12: Teorema trabalho-energia (5.3.13) para a onda descrita por (5.3.6). O parâmetro  $\rho_0 = 1$ .

trajetórias em particular devem ser assumidas para a resolução numérica das equações de movimento para a partícula. Considerar-se-á dois conjuntos de condições iniciais, sendo eles

$$I: x_0 = 5, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0, \quad (5.3.18)$$

$$II: y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0. \quad (5.3.19)$$

onde o subíndice zero indica o estado da partícula anterior à passagem da onda, i.e., no infinito<sup>15</sup> passado.

Na Figura 5.12a o trabalho (5.3.15) pode ser visto na linha tracejada para uma série de trajetórias determinadas pelo conjunto de condições iniciais I. Nesse conjunto, várias velocidades iniciais  $\dot{x}_0$  são escolhidas e o trabalho  $\Delta W$  é calculado. Na Figura 5.12b, as condições iniciais II são consideradas e o trabalho  $\Delta W$  pode novamente ser visto na linha tracejada, calculado para distintas posições iniciais  $x_0$ . A variação da energia cinética  $\Delta K$  pode ser vista nas mesmas Figuras 5.12 nas linhas contínuas. Observa-se que valores de  $\Delta K$  e  $\Delta W$  serem numericamente muito próximos, com maiores desvios ocorrendo para velocidades iniciais mais altas e regiões de campo gravitacional mais intenso. Portanto, a relação (5.3.17) pode ser verificada para um grande conjunto<sup>16</sup> de movimentos distintos. Para ambas condições iniciais, a diferença entre  $\Delta K$  e  $\Delta W$  é menor que dois por cento. Parte dessa diferença pode ser devido a erros numéricos no cálculo das quantidades. Entretanto, as Figuras 5.12 corroboram a validade da relação trabalho-energia na aproximação não relativística, mostrando que as diferenças de energia cinética para as partículas observadas no Capítulo 4 são causadas pelo campo de aceleração das ondas gravitacionais, similar ao ocorrido na física clássica.

A quantidade  $\Delta K$ , descrita por (5.3.16), representa a expressão clássica padrão da energia cinética para observadores estáticos no espaço-tempo no contexto de partículas não relativísticas. Como  $\Delta W$  descrito por (5.3.15) depende do conjunto de tétradas (3.2.2), então  $\Delta W$  também é definido apenas para o referencial de observadores estacionários no espaço-tempo.

<sup>15</sup>Numericamente um valor  $u = -20$  é suficiente.

<sup>16</sup>Especificamente, o intervalo escolhido na Figura 5.12a fora  $-0.1 \leq \dot{x}_0 \leq 0.1$  com passos de 0.001, representando cerca de duzentos pontos. Juntamente a mais duzentos na Figura 5.12b, a corroboração da proposta (5.3.17) fora feita considerando quatrocentos movimentos distintos. Os pontos foram interpolados para uma melhor apresentação nas Figuras 5.12.

Distintamente de  $\Delta K$ , a definição (5.3.15) é válida para todos os eventos da partícula, e não apenas para os eventos no qual o espaço-tempo é plano. Destarte, pode-se inferir que a quantidade (5.3.15) representa a energia cinética relativística da partícula.



## Capítulo 6

# Energia e momento angular de ondas gravitacionais giratônicas

As ondas gravitacionais giratônicas, apresentadas na seção 3.3, representam o campo gravitacional exterior de partículas giratórias (gyratons) que movem na velocidade da luz ao longo do eixo de propagação do campo gravitacional. A fonte pode ser descrita como a combinação de uma densidade de radiação com uma quantidade representando o caráter rotatório da fonte. Por as pp-waves comuns serem casos particulares das soluções giratônicas, a compreensão das ondas giratônicas é fundamental para a compreensão das soluções de ondas planas como um todo. Tal espaço-tempo, assim como o das pp-waves comuns, é geodesicamente completo [99] e possui efeito memória associado a si [97]. Portanto, devido à generalidade presente nas soluções giratônicas, a determinação de suas propriedades físicas generaliza todas as propriedades físicas anteriormente obtidas para as pp-waves comuns. Nas referências [28] e [29], assim como no Capítulo 5, propriedades físicas das soluções de vácuo das pp-waves foram obtidas, e analisadas. Neste Capítulo, tais propriedades são obtidas para pp-waves mais generalizadas, especificamente a classe de soluções das ondas gravitacionais giratônicas. Os resultados e relações neste Capítulo apresentados encontram-se publicados na referência [23].

O conceito de energia gravitacional do TERG é deveras importante na explicação do efeito memória de velocidade, previsto na interação entre as ondas gravitacionais e partículas livres, sendo ele responsável por quantificar a variação da energia cinética observada para as partículas. Na seção 6.1, conforme a Referência [23], a energia gravitacional das ondas giratônicas é calculada e mostra-se levar ao limite das pp-waves comuns quando a fonte giratônica é desconsiderada. Distintamente das pp-waves comuns, observa-se a possibilidade de regiões com densidade de energia total positiva. Na seção 6.2, conforme a Referência [23], o momento angular das ondas giratônicas é calculado e sua densidade investigada graficamente, com comparações às pp-waves comuns sendo realizadas. Nos Capítulos 4 e 5, a interações entre partículas e ondas gravitacionais fora analisada. Entretanto, com exceção da seção 5.3, apenas ondas gravitacionais que são soluções de vácuo foram consideradas. Conforme discutido na seção 5.2, as propriedades físicas das ondas gravitacionais possuem impacto sobre o comportamento de partículas com elas interagentes, e.g., partículas tendem a ser aceleradas na direção de maior densidade de centro de energia. Destarte, propriedades ignotas das ondas gravitacionais podem ser determinadas pelo comportamento geodésico de partículas com as quais a onda interage, permitindo que o movimento geodésico de partículas distinga os tipos de ondas gravitacionais, e.g., ondas gravitacionais comuns das ondas gravitacionais giratônicas. Com tal finalidade, na seção 6.3, conforme as Referências [22, 23], as variações da energia cinética e do momento angular de partículas livres atingidas por ondas giratônicas são consideradas.

## 6.1 Energia do campo giratônico

Similarmente ao apresentado na subseção 3.2.1, é mais conveniente a utilização das coordenadas não nulas  $x^\mu = (t, \rho, \phi, z)$ . Utilizando as relações (3.1.11) e (3.1.12), o elemento de linha (3.3.5) pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(\frac{H}{2} - 1\right) dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \sqrt{2}J dt d\phi - \sqrt{2}J dz d\phi + \left(1 + \frac{H}{2}\right) dz^2 - H dt dz. \quad (6.1.1)$$

Para se prosseguir com o cálculo do quadrivetor energia-momento das ondas gravitacionais giratônicas, um conjunto de tetradas associado ao elemento de linha (6.1.1) e adaptado a um observador estacionário deve ser estabelecido. O referencial é estabelecido fixando-se seis condições sobre o campo de tetradas. Estabelecendo

$$U^\mu = e_{(0)}^\mu = \left(\frac{1}{A}, 0, 0, 0\right), \quad (6.1.2)$$

o vetor  $U^\mu$  é um vetor temporal, i.e.,  $U^2 = U^\mu U_\mu = g_{00}/A^2 = -1$ , independentemente do valor de  $H$ . Entretanto, assim como ocorrera para as pp-waves comuns, as tetradas e as interpretações físicas advindas dela são válidas nas regiões onde  $H > 2$ , o que é esperado em regiões distantes da fonte se as ondas possuírem pequenas amplitudes. A quadri-velocidade (6.1.2) garante-se que os observadores, adaptados ao conjunto de tetradas, ao seguirem a linha mundo temporal, não se movem transversalmente à linha mundo. As demais condições fixam a orientação espacial do referencial, i.e.,  $e_{(1)}^\mu$ ,  $e_{(2)}^\mu$  e  $e_{(3)}^\mu$  são, assintoticamente, os versores ao longo das direções Cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Um conjunto de tetradas adequado satisfazendo a relação (6.1.2) e adaptado ao elemento de linha (6.1.1) é descrito por

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & \frac{J}{\sqrt{2A}} & -B \\ 0 & \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{J}{\sqrt{2A}} & C \end{pmatrix}, \quad (6.1.3)$$

onde  $A = \sqrt{1 - H/2}$ ,  $B = \frac{H}{2\sqrt{1-H/2}}$ ,  $C = \frac{1}{\sqrt{1-H/2}}$  e  $e = \det(e^a_\mu) = \rho$  é o determinante do campo de tetradas (6.1.3). As tetradas inversas podem ser obtidas através da relação  $e^{a\mu} = \eta^{ab} g^{\mu\nu} e_{b\nu}$ , sendo descritas por

$$e^{a\mu} = \begin{pmatrix} -1/A & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J \sin \phi}{\sqrt{2\rho}} & \cos(\phi) & -\frac{\sin(\phi)}{\rho} & -\frac{J \sin \phi}{\sqrt{2\rho}} \\ \frac{J \cos \phi}{\sqrt{2\rho}} & \sin(\phi) & \frac{\cos(\phi)}{\rho} & \frac{J \cos \phi}{\sqrt{2\rho}} \\ -\frac{H}{\sqrt{2A}} & 0 & 0 & A \end{pmatrix}. \quad (6.1.4)$$

Nota-se que para  $H = 0 = J$ , obtém-se  $e_a^\mu = \delta_a^\mu$  e o tensor de torção  $T_{a\mu\nu}$  anula-se.

A partir do conjunto de tetradas (6.1.4) o tensor energia-momento do campo gravitacional pode ser obtido com o auxílio dos componentes do tensor de torção. Os componentes não nulos  $T^{abc} = e^{b\mu} e^{c\nu} T^a_{\mu\nu}$  podem ser trivialmente encontrados pela

relação (2.2.9), sendo eles

$$T^{(0)(0)(1)} = -T^{(3)(1)(3)} = -\frac{1}{4\rho A^2} \left( 2\sqrt{2} \sin \phi \partial_t J - \sin \phi \partial_\phi H + \rho \cos \phi \partial_\rho H \right), \quad (6.1.5)$$

$$T^{(0)(0)(2)} = -T^{(3)(2)(3)} = -\frac{1}{4\rho A^2} \left( -2\sqrt{2} \cos \phi \partial_t J + \cos \phi \partial_\phi H + \rho \sin \phi \partial_\rho H \right), \quad (6.1.6)$$

$$T^{(0)(0)(3)} = T^{(3)(0)(3)} = -\frac{1}{4A^3} \partial_t H, \quad (6.1.7)$$

$$T^{(0)(1)(3)} = \frac{1}{2\rho A^2} \left( \sqrt{2} \sin \phi \partial_t J - \sin \phi \partial_\phi H + \rho \cos \phi \partial_\rho H \right), \quad (6.1.8)$$

$$T^{(0)(2)(3)} = \frac{1}{2\rho A^2} \left( -\sqrt{2} \cos \phi \partial_t J + \cos \phi \partial_\phi H + \rho \sin \phi \partial_\rho H \right), \quad (6.1.9)$$

$$T^{(3)(0)(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}\rho A^2} \sin \phi \partial_t J, \quad (6.1.10)$$

$$T^{(3)(0)(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho A^2} \cos \phi \partial_t J. \quad (6.1.11)$$

A partir dos componentes (6.1.5-6.1.11) e da definição (2.2.16), os componentes não nulos  $\Sigma^{a0\nu}$  podem ser computados. São eles

$$\Sigma^{(0)01} = \Sigma^{(3)01} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\partial_\rho H}{\sqrt{2-H}}, \quad (6.1.12)$$

$$\Sigma^{(0)02} = \Sigma^{(3)02} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\rho^2} \frac{\partial_\phi H}{\sqrt{2-H}} + \frac{\partial_t J}{2\rho^2\sqrt{2-H}}, \quad (6.1.13)$$

$$\Sigma^{(1)01} = \frac{1}{4} \frac{\partial_t H}{2-H} \cos \phi, \quad (6.1.14)$$

$$\Sigma^{(1)02} = -\frac{1}{4\rho} \frac{\partial_t H}{2-H} \sin \phi, \quad (6.1.15)$$

$$\Sigma^{(1)03} = -\frac{1}{4\rho} \frac{\partial_\phi H \sin \phi - \rho \partial_\rho H \cos \phi}{2-H}, \quad (6.1.16)$$

$$\Sigma^{(2)01} = \frac{1}{4} \frac{\partial_t H}{2-H} \sin \phi, \quad (6.1.17)$$

$$\Sigma^{(2)02} = \frac{1}{4\rho} \frac{\partial_t H}{2-H} \cos \phi, \quad (6.1.18)$$

$$\Sigma^{(2)03} = \frac{1}{4\rho} \frac{\partial_\phi H \cos \phi + \rho \partial_\rho H \sin \phi}{2-H}. \quad (6.1.19)$$

A partir dos componentes (6.1.12) e (6.1.13), e da definição (2.3.7), os componentes (0) e (3) do quadrivetor energia-momento podem ser obtidos, sendo eles descritos por

$$P^{(0)} = P^{(3)} = -\frac{k}{8} \int_V d^3x \left[ \partial_\rho \left( e \Sigma^{(0)01} \right) + [\partial_\phi \left( e \Sigma^{(0)02} \right)] \right]. \quad (6.1.20)$$

Utilizando a equação de Einstein (3.3.18) e notando que  $\partial_t J = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_u J$ , a equação (6.1.20) pode ser escrita como<sup>1</sup>

$$P^{(0)} = P^{(3)} = -k \int_V \left( \frac{\rho^2 (\partial_\rho H)^2 + (\partial_\phi H)^2 - 2\partial_u J \partial_\phi H}{8\rho A^3} - 2 \frac{\partial_u \partial_\phi J}{\rho A} \right) d^3x. \quad (6.1.21)$$

A partir dos componentes (6.1.14-6.1.19) obtém-se os componentes remanescentes

$$P^{(1)} = 0 = P^{(2)}. \quad (6.1.22)$$

Assim como ocorre para as pp-waves comuns, o quadrado do quadrimomento é nulo, i.e.,  $P^a P_a = 0$ .

A energia das pp-waves comuns pode ser obtida simplesmente tomando  $J = 0$  no resultado (6.1.21) e identificando  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$ . Destarte, conforme esperado, as ondas gravitacionais giratônicas são mais gerais que as pp-comuns e o resultado (6.1.21) generaliza o previamente obtido na referência [28].

O resultado (6.1.21) possui duas interessantes características. Primeiro, se o campo gravitacional é axialmente simétrico, i.e.,  $H = H(u, \rho)$  e  $J = J(u)$ , a energia gravitacional será a mesma do caso não giratônico. Destarte, o efeito giratônico só é observado na energia para ondas que não são axialmente simétricas e, para as axialmente simétricas, não podem ser distinguidas das pp-waves comuns por meios da energia gravitacional. Segundo, enquanto as pp-waves comuns possuem energia necessariamente negativa, as giratônicas podem possuir energia positiva.

### 6.1.1 Solução giratônica multipolar

Conforme observado na equação (6.1.21), a presença do termo giratônico  $J = J(u, \phi)$  afeta a energia total da onda. Para melhor compreensão dos efeitos do termo giratônico na energia das pp-waves, nesta subseção a energia (6.1.21) é calculada para uma solução multipolar para  $H$ , obtida via combinação linear das soluções (3.1.32), (3.1.35) e (3.1.36), descrita por

$$\begin{aligned} H &= - \left\{ \frac{1}{8} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{4} \left[ \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right\} e^{-u^2} \\ &= -\frac{1}{8} \left[ \ln \rho + \frac{1}{\rho^2} (\sin 2\phi + \cos 2\phi) \right] e^{-u^2}, \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

e a função  $J$  dependendo apenas da coordenada  $u$ , i.e.,  $J = J(u)$ , descrita por

$$J = \frac{d}{du} e^{-u^2}. \quad (6.1.24)$$

Substituindo  $H$  e  $J$  no argumento da integral (6.1.21) pelas soluções (6.1.23) e (6.1.24), obtém-se a densidade de energia  $\epsilon \equiv 4k \partial_i (e \Sigma^{(0)0i})$  descrita por

$$\epsilon = - \frac{e^{-2u^2} [\rho^4 + 4\rho^2 (32u^2 - 17) \sin(2\phi) - 4\rho^2 (32u^2 - 15) \cos(2\phi) + 8]}{8192\pi\rho^5}. \quad (6.1.25)$$

<sup>1</sup>Notai que a equação (6.1.21) difere-se da equação (29) da referência [23] por dois sinais negativos nos últimos dois termos. A distinção deve-se por, naquela referência, uma congruência passado orientada ter sido adotada, i.e.,  $\partial_t J = -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_u J$ .



A densidade de energia (6.1.25) depende de três variáveis. Destarte, como não é possível traçar adequadamente uma figura quadridimensional, convém traçar curvas de contorno para superfícies  $u = 0$ , i.e., no centro geométrico da onda. Na Figura 6.1 pode-se observar o comportamento da densidade de energia (6.1.25) para  $u = 0$ . O comportamento assintoticamente plano das soluções com fonte podem ser observados visto a densidade de energia tender à zero para  $\rho \gg 1$ . A depen-

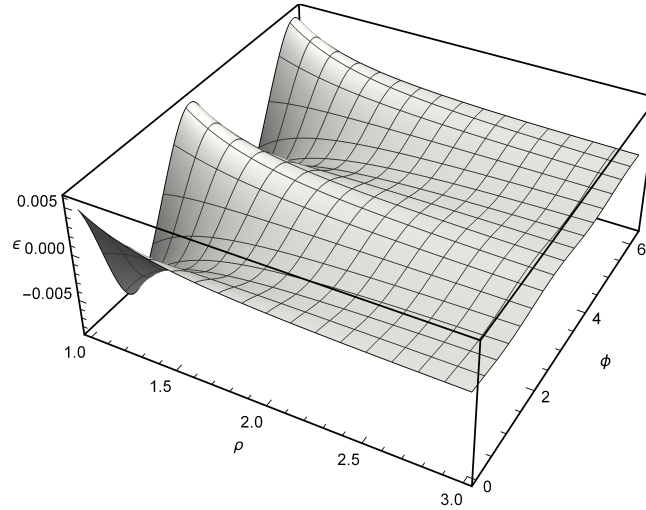


FIGURA 6.1: Densidade de energia (6.1.25) para uma superfície  $u = 0$ .

dência da densidade de energia com a coordenada  $u$  pode ser observada fixando-se uma posição radial, conforme realizado no traçado da Figura 6.2a. O efeito do termo giratônico pode ser observado comparando as Figuras 6.2a e 6.2b, onde a última representa a onda não giratônica. Nota-se a densidade de energia não depender da coordenada angular  $\phi$  no caso não giratônico, mas a dependência está presente no caso giratônico. Outrossim, a densidade de energia observada na Figura 6.2b é sempre negativa e a observada na Figura 6.2a possui valores positivos em certas regiões.

Malgrado a densidade de energia  $\epsilon$  depender de três variáveis, para valores fixos de  $t$  é possível traçar superfícies de contorno para valores fixos de  $\epsilon$ , conforme fora feito na seção 5.1 para as pp-waves comuns. Utilizando a relação (3.1.11), uma curva de nível é traçada para  $\epsilon = -0.0012$  e outra para  $\epsilon = 0.0012$  na Figura 6.3, onde

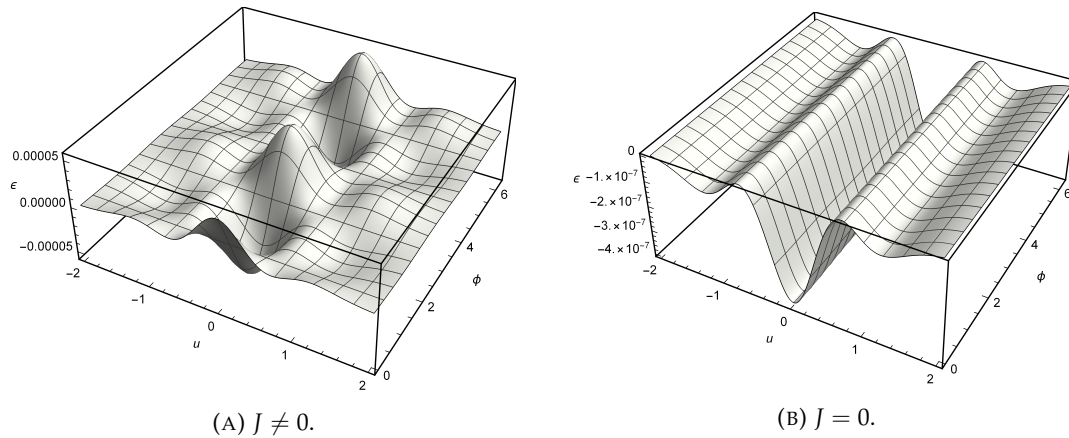


FIGURA 6.2: Densidade de energia (6.1.25) para uma superfície  $\rho = \text{constante} = 5$ .

a região rosa indica densidade negativa de energia e a amarela densidade positiva. É interessante notar-se na Figura 6.3 que as ondas gravitacionais giratônicas pode

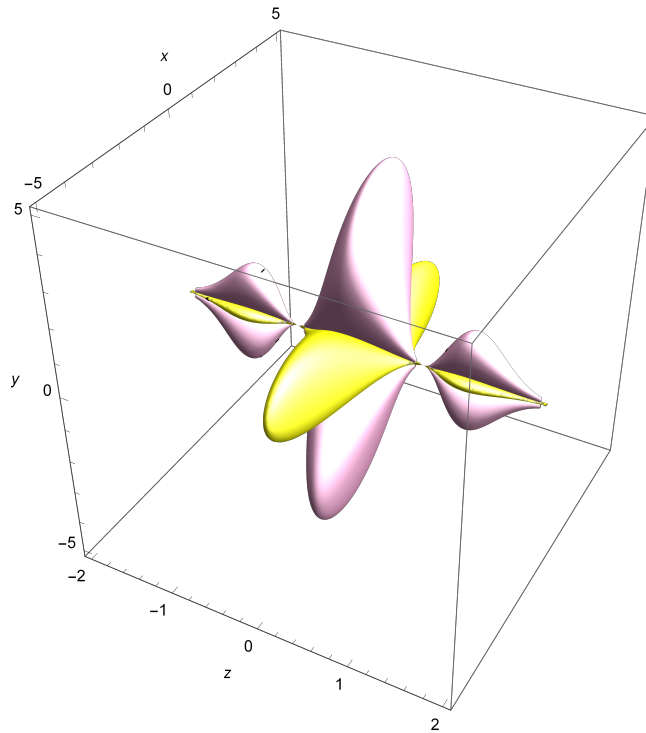


FIGURA 6.3: Superfície de nível para a densidade de energia (6.1.25) no instante  $t = 0$ .

ser representada como distribuições de densidades de energia positiva e negativa se propagando no espaço. Distintamente das soluções de vácuo na seção 5.1 estudadas, a representação na Figura 6.3 é limitada no espaço, i.e., a superfície torna-se maior para menores valores de densidade de energia, novamente em acordo ao caráter assintótico plano das soluções com fonte.

Conforme fora feito na seção 5.1, a densidade de energia (6.1.25) pode ser integrada numericamente<sup>2</sup>, com o resultado visto na Figura 6.4. Observando a Figura 6.4, novamente nota-se uma energia constante no tempo<sup>3</sup> e negativa, apesar da densidade assumir valores positivos em certas regiões. O valor de energia da Figura 6.4 representa a máxima quantidade (em módulo) que uma partícula pode absorver sem que a onda seja dissipada. Quando o termo giratônico é ignorado, i.e., a Figura 6.4 é traçada com  $J = 0$ , o valor da energia total é pouco alterado.

### 6.1.2 Soluções com fonte não giratônicas

Na seção 5.1 as densidades de energia das soluções de vácuo das pp-waves foram analisadas. Notou-se que, devido as coordenadas utilizadas não serem regulares em todo o espaço-tempo, as curvas de nível afastavam-se da origem do plano transversal

<sup>2</sup>A região de integração é um cilindro muito comprido com raio  $\rho = 20$ . A região  $\rho < 1$  é excluída da integração por conter a fonte, com a solução sendo irregular em tal região.

<sup>3</sup>Se uma análise minuciosa for feita, nota-se pequenas flutuações no valor da energia com o tempo. Entretanto, tais flutuações são muito menores em ordem de grandeza que o valor da energia e parecem oscilar aleatoriamente. Destarte, dado formato Gaussiano do pulso, que nunca se anula exatamente, e da limitação numérica em escolher-se um cilindro infinitamente comprido, crê-se que tais flutuações sejam imprecisões numéricas na integração.

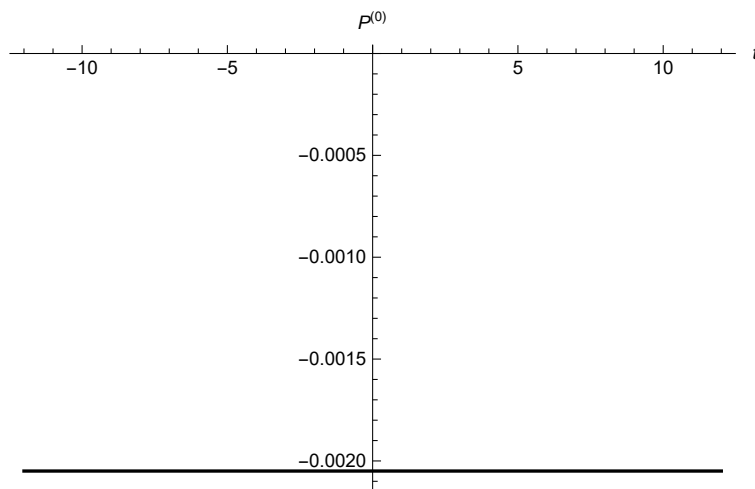
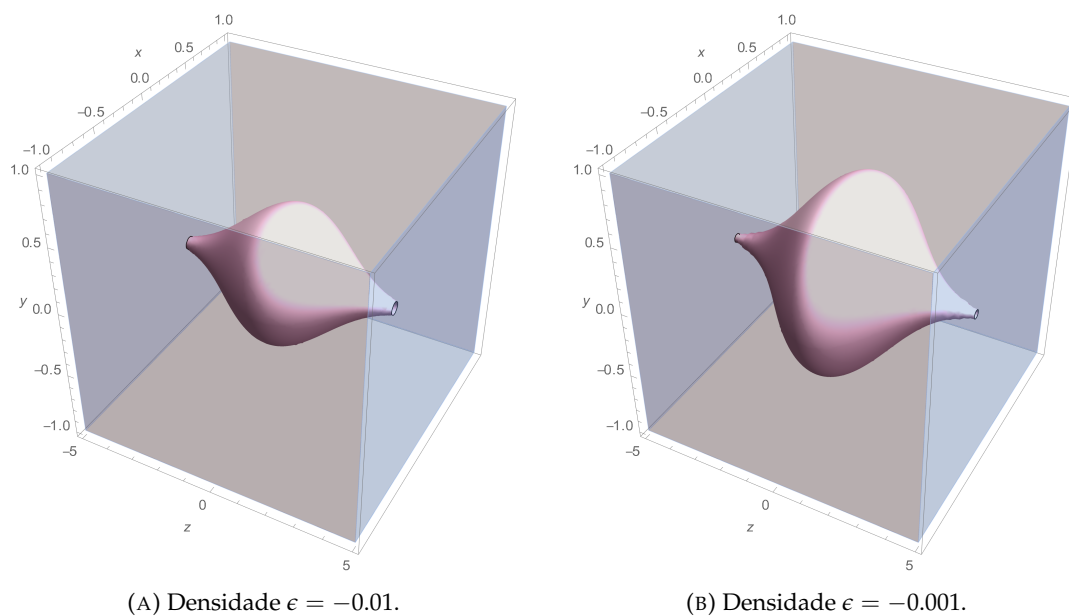


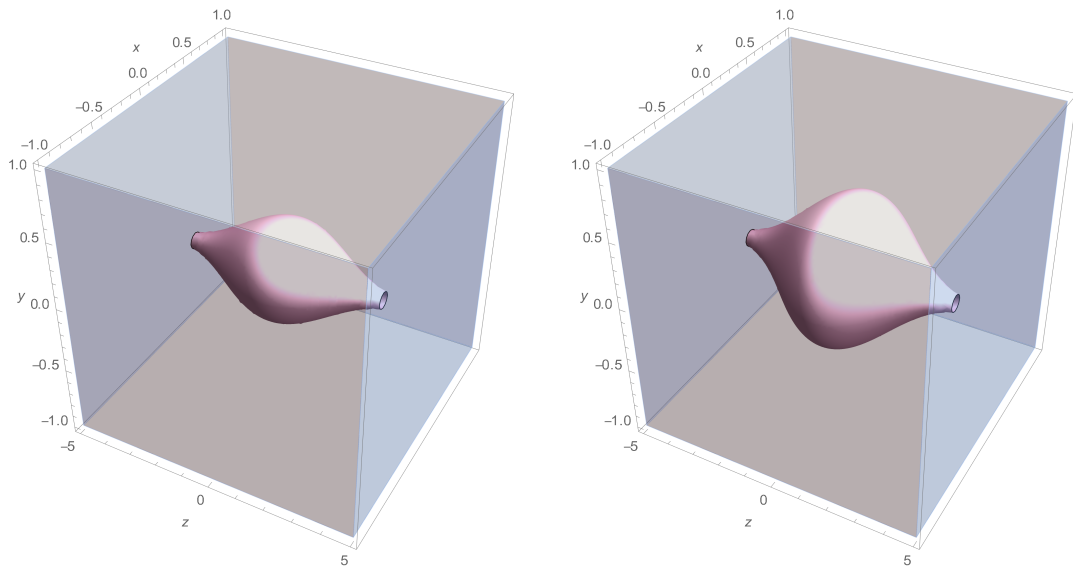
FIGURA 6.4: Energia gravitacional para a onda giratônica descrita por (6.1.23) e (6.1.24). Para valores  $t \gg 10$  o mesmo comportamento é observado, desde que o cilindro de integração seja escolhido suficientemente longo.



(A) Densidade  $\epsilon = -0.01$ .

(B) Densidade  $\epsilon = -0.001$ .

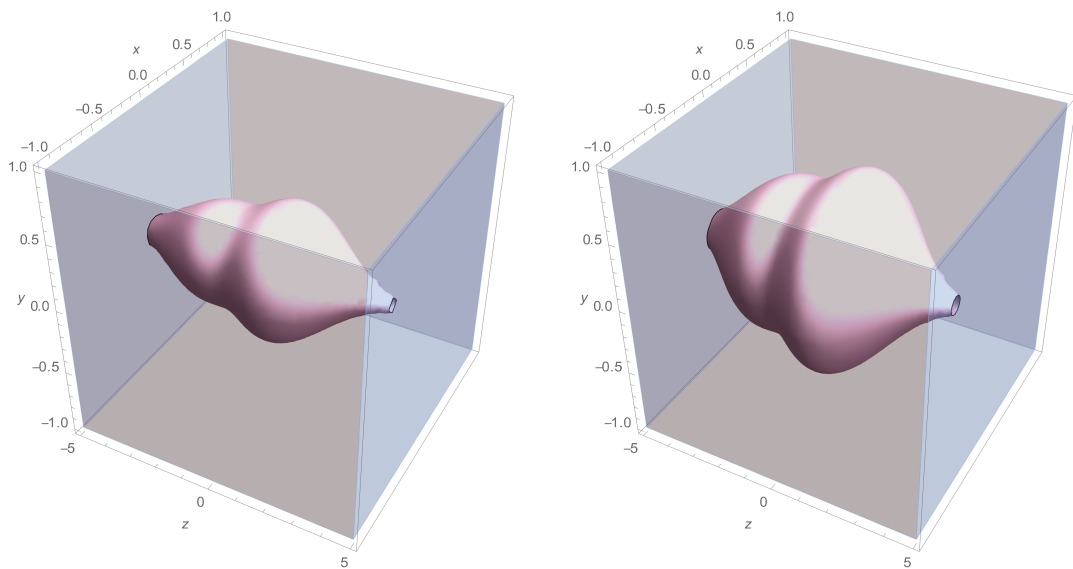
FIGURA 6.5: Distribuição espacial da densidade de energia para  $H_{2+}$  (3.1.35) com  $f_{2+}(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C_{2+} = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .



(A) Densidade  $\epsilon = -0.01$ .

(B) Densidade  $\epsilon = -0.001$ .

FIGURA 6.6: Distribuição espacial da densidade de energia para  $H_{2\times}$  (3.1.36) com  $f_{2\times}(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C_{2\times} = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .



(A) Densidade  $\epsilon = -0.01$ .

(B) Densidade  $\epsilon = -0.001$ .

FIGURA 6.7: Distribuição espacial da densidade de energia para  $H$  (3.1.37) com  $f(u)$  descrito por (4.1.6) no instante  $t = 0$ . Os parâmetros são  $C = 10^{-1}$  e  $\Lambda = 1$ .

conforme maiores valores de densidade de energia eram escolhidos, i.e., a densidade de energia não era assintoticamente nula. Conforme visto na Figura 6.3, as soluções com fonte, apesar de não regulares na origem, são regulares no infinito. Destarte, sendo as pp-waves comuns soluções particulares das ondas giratônicas, convém a análise das curvas de nível da densidade de energia para soluções com fonte<sup>4</sup>. A distribuição<sup>5</sup> para dois valores distintos de densidade de energia pode ser vista nas Figuras 6.5 para a polarização +, descrita por (3.1.35); para a polarização ×, descrita por (3.1.36), nas Figuras 6.6 e para a polarização circular (3.1.37) nas Figuras 6.7. Nota-se que, para as soluções com fonte, a energia encontra-se localizada em certa região do espaço ao redor do evento  $(u, \rho) = (0, 0)$ .

## 6.2 Momento angular do campo giratônico

Observou-se na seção 6.1 a não alteração da energia gravitacional (em relação às pp-waves comuns) para ondas axialmente simétricas. Entretanto, a natureza física dos campos gravitacionais não é determinada apenas pela sua energia, mas também pelo seu momento angular. Os componentes não nulos do momento angular das ondas giratônicas podem ser obtidos diretamente das tétradas (6.1.3) com o auxílio da relação (2.3.15), sendo eles

$$L^{(0)(1)} = -2k \int_V d^3x \left[ \frac{-\sin \phi \partial_\phi H + \rho \cos \phi \partial_\rho H}{\sqrt{2} (2-H)^{3/2}} - \sin \phi \partial_z \left( \frac{J}{\sqrt{2-H}} \right) \right], \quad (6.2.1)$$

$$L^{(0)(2)} = -2k \int_V d^3x \left[ \frac{\cos \phi \partial_\phi H + \rho \sin \phi \partial_\rho H}{\sqrt{2} (2-H)^{3/2}} + \cos \phi \partial_z \left( \frac{J}{\sqrt{2-H}} \right) \right], \quad (6.2.2)$$

$$L^{(1)(3)} = 2k \int_V d^3x \left[ (H-4) \frac{\sin \phi \partial_\phi H - \rho \cos \phi \partial_\rho H}{2\sqrt{2} (2-H)^{3/2}} - \sin \phi \partial_z \left( \frac{J}{\sqrt{2-H}} \right) \right], \quad (6.2.3)$$

$$L^{(2)(3)} = 2k \int_V d^3x \left[ (4-H) \frac{\cos \phi \partial_\phi H + \rho \sin \phi \partial_\rho H}{2\sqrt{2} (2-H)^{3/2}} + \cos \phi \partial_z \left( \frac{J}{\sqrt{2-H}} \right) \right]. \quad (6.2.4)$$

Escolhendo  $J = 0$ , obtém-se os mesmos resultados apresentados na referência [29] para as ondas não giratônicas, i.e., as pp-waves comuns. Destarte, os resultados, nesta seção apresentados, são generalizações dos apresentados na última referência mencionada. Observando os componentes (6.2.1)-(6.2.4) nota-se que, distintamente da energia, o momento angular e o centro de energia são distintos para a onda giratônica, em relação às pp-waves comuns, mesmo que ela seja axialmente simétrica. Portanto, as ondas giratônicas axialmente simétricas fisicamente distinguem-se das pp-waves comuns por meio do momento angular total apenas.

Dada a distinção entre os componentes (6.2.1) e (6.2.2) dos termos (3.2.33) e (3.2.34), conclui-se o termo giratônico  $J$  deslocar o centro de energia da onda.

Os componentes  $L^{(2)(3)}$  e  $L^{(3)(1)}$  estão relacionados à rotações ao redor dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os índices locais são sempre os do espaço-tempo plano, coincidindo com os do espaço-tempo nas frentes de onda, visto o tensor métrico em tais superfícies ser o tensor métrico Euclidiano bidimensional. Sendo assim, é possível identificar  $M^{(2)(3)} = M_x$  e  $M^{(1)(3)} = -M_y$ , nas frentes de onda, e, a partir

<sup>4</sup>Para uma análise mais simples, o termo giratônico é desconsiderado nesta subseção.

<sup>5</sup>A região ao redor da origem é excluída para todas as soluções com fonte.

do componentes (6.2.3) e (6.2.4), construir o vetor densidade de momento angular

$$\begin{aligned}\vec{M} &= 2k (M_x \hat{x} + M_y \hat{y}) \\ &= 2k \left\{ \left[ \frac{4-H}{8A^3} \partial_\phi H + \frac{1}{2} \partial_u \left( \frac{J}{A} \right) \right] \hat{\rho} - \left[ \frac{4-H}{8A^3} \rho \partial_\rho H \right] \hat{\phi} \right\},\end{aligned}\quad (6.2.5)$$

onde as relações  $\hat{x} = \hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi$  e  $\hat{y} = \hat{\rho} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi$  foram utilizadas.

As ondas gravitacionais giratônicas carregam informações sobre o caráter rotacional da fonte, logo, é esperado o momento angular total sofrer alterações<sup>6</sup>. Observando a expressão (6.2.5), percebe-se que o componente radial, no sentido de  $\hat{\rho}$ , da densidade de momento angular é nulo para as pp-waves comuns, mas não o é para as giratônicas. Destarte, considerando uma onda giratônica axialmente simétrica, é possível analisar o efeito giratônico a partir da análise de tal componente, porquanto não altera o componente azimutal da densidade de momento angular. Além disso, o fato do resultado (6.1.21) reduzir-se ao resultado (3.2.29), no caso axialmente simétrico, implica a análise do efeito giratônico por meio do momento angular apenas, ou seja, sem interferência da energia<sup>7</sup>. Na subseção seguinte, tal análise é desenvolvida.

### 6.2.1 Solução axialmente simétrica

O componente  $M_\rho$ , i.e.,  $\vec{M} \cdot \hat{\rho}$ , permite uma análise única do efeito do termo giratônico sobre momento angular da onda gravitacional axialmente simétrica, com a densidade do mesmo podendo ser dividida em uma parte giratônica no sentido de  $\hat{\rho}$  e uma não giratônica no sentido de  $\hat{\phi}$ .

Nesta subseção, a expressão (6.2.5) é analisada para uma solução axialmente simétrica de Aichelburg-Sexl, descrita por

$$H = -\frac{1}{4} \ln(\rho/R_0) e^{-u^2}, \quad (6.2.6)$$

onde assumir-se-á  $R_0 = 1$ , e

$$J = \frac{d}{du} e^{-u^2}. \quad (6.2.7)$$

Substituindo (6.2.6) e (6.2.7) na densidade (6.2.5), obtém-se

$$M_\rho = \frac{e^{-2u^2}}{64\pi A^3} \left[ (u^2 - 1) \log(\rho) + 8e^{u^2} (2u^2 - 1) \right] \quad (6.2.8)$$

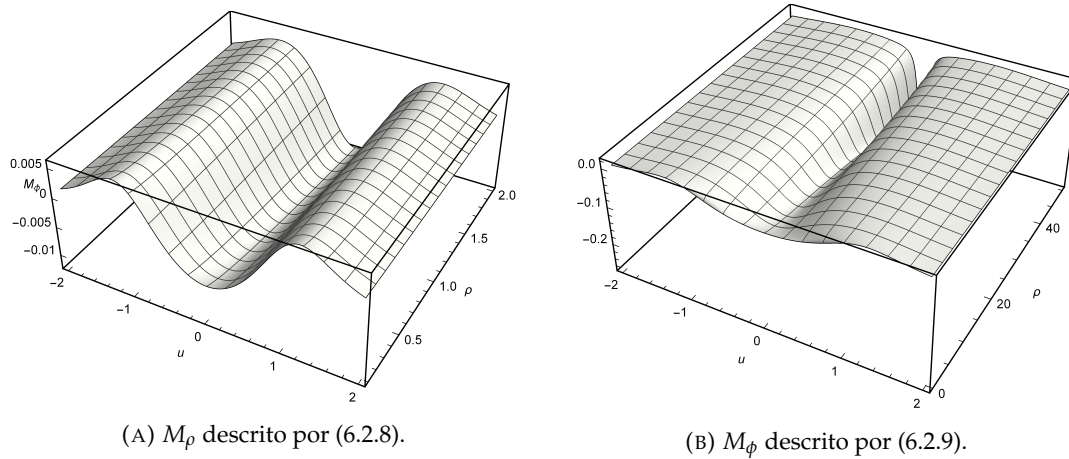
e

$$M_\phi = \frac{e^{-u^2}}{256\pi} \left( \frac{1}{4} e^{-u^2} \log(\rho) + 4 \right). \quad (6.2.9)$$

Sendo as quantidades (6.2.8) e (6.2.9) independentes da variável angular  $\phi$ , é possível traçar tais componentes em termos das variáveis  $\rho$  e  $u$ . O componente  $M_\rho$  pode ser observado na Figura 6.8a e o componente  $M_\phi$  na Figura 6.8b. A comparação com o caso não giratônico é trivial, com a Figura 6.8a sendo uma superfície plana e a 6.8b idêntica à apresentada.

<sup>6</sup>Percebi que as alterações no momento angular são mais profundas que as na energia. Ondas giratônicas axialmente simétricas são indistinguíveis das pp-comuns pela energia apenas, mas não o são pelo momento angular.

<sup>7</sup>*Exempli gratia*, um comportamento distinto observado para uma partícula que interage com uma onda giratônica axialmente simétrica. Como a energia da onda giratônica será a mesma de uma pp-wave comum neste caso, as distinções observadas no movimento da partícula serão exclusivamente devido ao componente radial da densidade de momento angular.

(A)  $M_\rho$  descrito por (6.2.8).(B)  $M_\phi$  descrito por (6.2.9).FIGURA 6.8: Componentes da densidade do momento angular  $\vec{M}$  para uma onda giratônica axialmente simétrica.

O momento angular total contido em um volume espacial  $V$  pode ser obtido pela integração numérica da quantidade (6.2.5) ao longo deste volume que, para as soluções com fonte, devem excluir o eixo  $\rho = 0$ . Integrando as quantidades (6.2.3) e (6.2.4) em uma região espacial simétrica<sup>8</sup> obtém-se, para o momento angular total,

$$\vec{L} = \int_V M_x \hat{x} d^3x + \int_V M_y \hat{y} d^3x = 0, \quad (6.2.10)$$

i.e., um momento angular total nulo. O momento angular total  $\vec{L}$ , distintamente da energia gravitacional  $P^{(0)}$ , é um campo vetorial. Como o espaço é axialmente simétrico, as contribuições em sentidos opostos se anulam. Entretanto, essa é uma propriedade global do espaço-tempo. A interação de partículas com ondas gravitacionais é local, logo, regiões finitas do espaço-tempo são acessadas pelas partículas; regiões nas quais não necessariamente o momento angular total<sup>9</sup> é nulo. Com a graça do exemplo, considerando a integração da densidade de momento angular na região  $0 < \phi < \pi$  obtém-se o mesmo em módulo e oposto em sinal que na região  $\pi < \phi < 2\pi$ , i.e.,

$$\int_{-L}^L dz \int_{\rho_0}^R d\rho \int_0^\pi d\phi M_{x,y} = - \int_{-L}^L dz \int_{\rho_0}^R d\rho \int_\pi^{2\pi} d\phi M_{x,y} \neq 0. \quad (6.2.11)$$

Tal comportamento ocorre mesmo quando  $J = 0$ , i.e., não é um comportamento exclusivamente giratônico.

### 6.3 Interação com partículas livres

Observou-se nas seções 6.1 e 6.2 a presença do termo giratônico afetar as quantidades conservadas do campo gravitacional. Se as ondas gravitacionais podem ser detectadas pelos seus efeitos em partículas livres, é esperado que a presença do termo giratônico seja detectado por diferenças qualitativas no movimento geodésico de

<sup>8</sup>Um cubo de lado  $2L$  com  $-L < x, y, z < L$ .

<sup>9</sup>Por total, compreendi o momento angular combinado da fonte e do campo gravitacional, e não o momento angular integrado em todo o espaço.

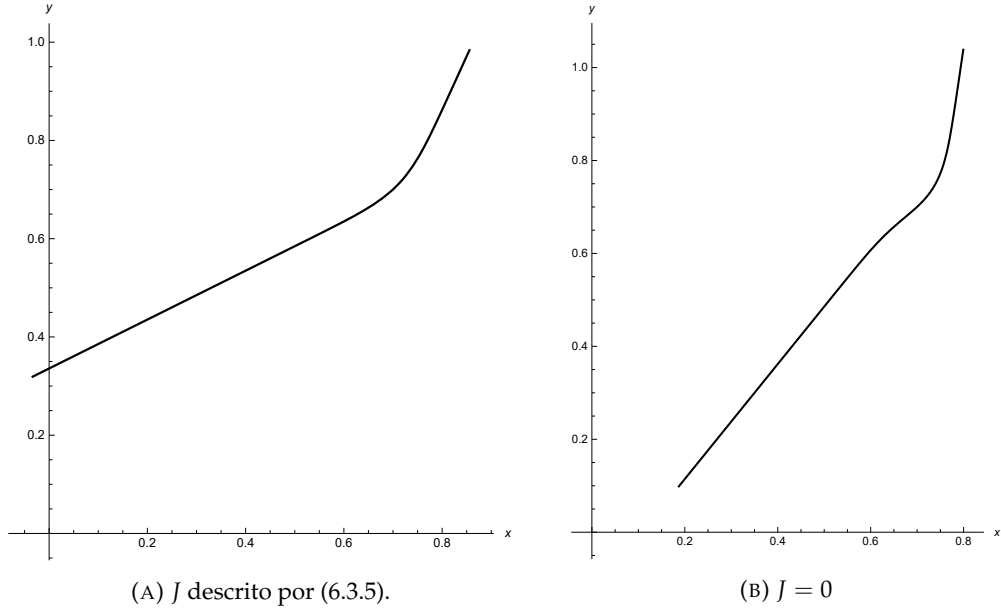


FIGURA 6.9: Trajetórias geodésicas para as equações (6.3.2)-(6.3.4) para a polarização (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.6). As condições iniciais são  $z_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{z}_0 = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $\dot{\rho} = 0.1$  e  $\phi_0 = \pi/4$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 1$  e  $C_{1+} = 1/25$ .

partículas. Destarte, os efeitos da interação entre as partículas e as ondas giratônicas são estudados nesta seção, com os resultados nela apresentados publicados, podendo ser consultados nas referências [22, 23].

No Capítulo 4, os efeitos da interação entre as pp-waves comuns e as partículas foram analisados. Nesta seção, os comportamentos geodésicos das partículas, ao interagirem com ondas giratônicas, são analisados. Similarmente ao desenvolvido na seção 4.2, a variação da energia cinética das partículas é analisada e, adicionalmente, a variação do momento angular das partículas.

As equações geodésicas (1.1.22) podem ser trivialmente calculadas a partir do tensor métrico (3.3.5). A equação geodésica para a coordenada nula  $u$  é

$$\ddot{u} = 0, \quad (6.3.1)$$

onde o ponto indica a derivação em relação a um parâmetro afim. Escolhendo  $u$  como parâmetro afim, e  $\dot{u} = 1$ , as demais equações geodésicas podem ser escritas como

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\rho H), \quad (6.3.2)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\phi} - \frac{1}{2\rho^2}(2\partial_u J - \partial_\phi H), \quad (6.3.3)$$

$$\sqrt{2}\ddot{z} = \frac{1}{2}\partial_u H - \frac{1}{2\rho^2}(2\partial_u J - \partial_\phi H)J + \partial_\rho H\dot{\rho} + \partial_\phi H\dot{\phi} - \frac{2}{\rho}J\dot{\rho}\dot{\phi} + \partial_\phi J\dot{\phi}^2, \quad (6.3.4)$$

onde o ponto indica derivação total com relação à  $u$ . Escolhendo a função  $J$  como

$$J = f(u), \quad (6.3.5)$$



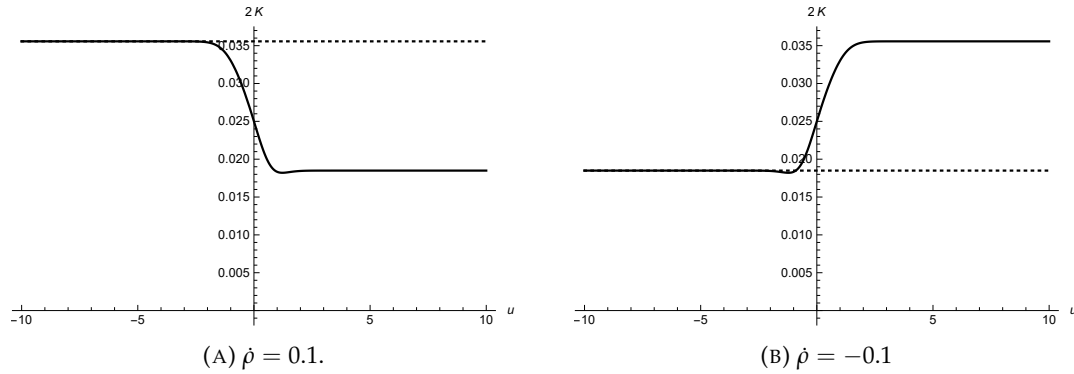


FIGURA 6.10: Variações da energia cinética de uma partícula livre para a polarização (3.1.33) com  $f_{1+}(u)$  dado por (4.1.6) e  $J$  descrito por (6.3.5). As condições iniciais são  $\phi_0 = z_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{z}_0 = 0$  e  $\rho = 1$ . Os parâmetros são  $\Lambda = 1$  e  $C_{1+} = 1/25$ .

é possível observar nas Figuras 6.9<sup>10</sup> o termo giratônico alterar o comportamento geodésico das partículas. Assim como observado com as pp-waves comuns, observa-se variação permanente de energia cinética clássica

$$2K = \frac{1}{4}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (6.3.6)$$

das partículas, como pode ser visto na Figura 6.10.

Conforme visto na seção 6.2, a presença do termo giratônico afeta significativamente a densidade de momento angular radial do campo gravitacional. Uma análise do efeito da alteração do momento angular do campo gravitacional, devido ao termo giratônico, sobre o movimento de partículas livres pode ser visualizado considerando-se uma partícula livre, inicialmente<sup>11</sup> em repouso, atingida por uma onda giratônica axialmente simétrica com função  $J$  descrita por

$$J = 8\frac{d}{du}e^{-u^2} \quad (6.3.7)$$

e  $H$  por (6.2.6). Tal partícula realiza movimento tridimensional quando atingida por uma onda giratônica axialmente simétrica. Entretanto, quando uma pp-wave comum<sup>12</sup> axialmente simétrica atinge a partícula, observa-se um movimento em um plano bidimensional. Destarte, como a energia gravitacional destas ondas é a mesma, assim como a densidade azimutal de momento angular, infere-se que a densidade radial de momento angular da onda é responsável pela remoção da partícula de um plano. Em ambos os casos, há alteração permanente no estado cinemático da partícula, i.e., a partícula segue em movimento retilíneo uniforme após a passagem da onda, conforme pode ser visto nas Figuras 6.11. Como a única diferença, do ponto de vista das quantidades gravitacionais conservadas, entre as ondas da Figura 6.11a e da Figura 6.11b é a presença da densidade radial de momento angular, conclui-se ser tal densidade a responsável pelas diferenças observadas entre as Figuras. Esse comportamento pode ser explicado observando o comportamento do momento angular da partícula. Considerando-se o momento angular clássico por

<sup>10</sup>As condições são escolhidas para  $u_0 = 0$ .

<sup>11</sup>*Id est*, com as condições iniciais escolhidas como nulas em  $u_0 \rightarrow -\infty$  com exceção da posição radial inicial  $\rho_0$ .

<sup>12</sup>Uma onda com  $J = 0$  ao invés de  $J$  descrita por (6.3.7)

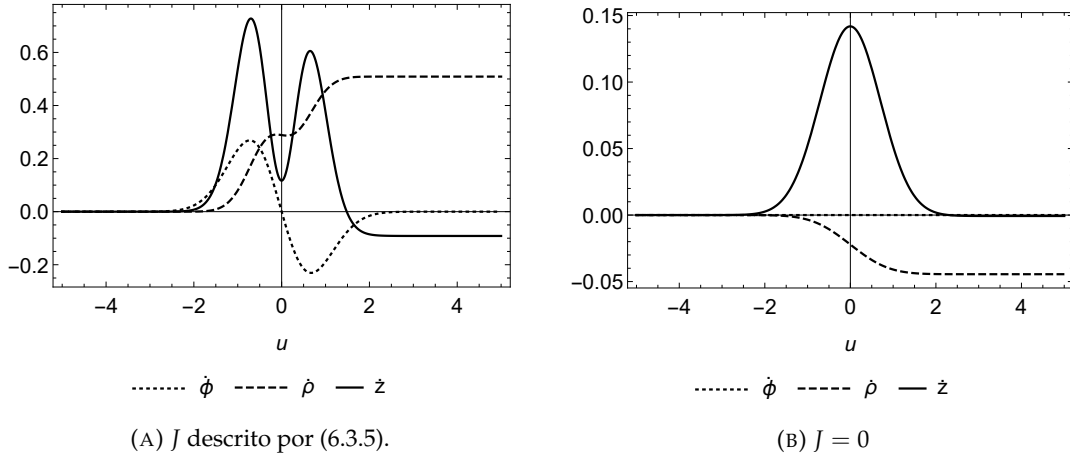


FIGURA 6.11: Velocidade de uma partícula inicialmente em repouso em  $\rho(u \rightarrow -\infty) = 5$  para  $H$  descrito por (6.2.6). O parâmetro  $R_0 = 1$ .

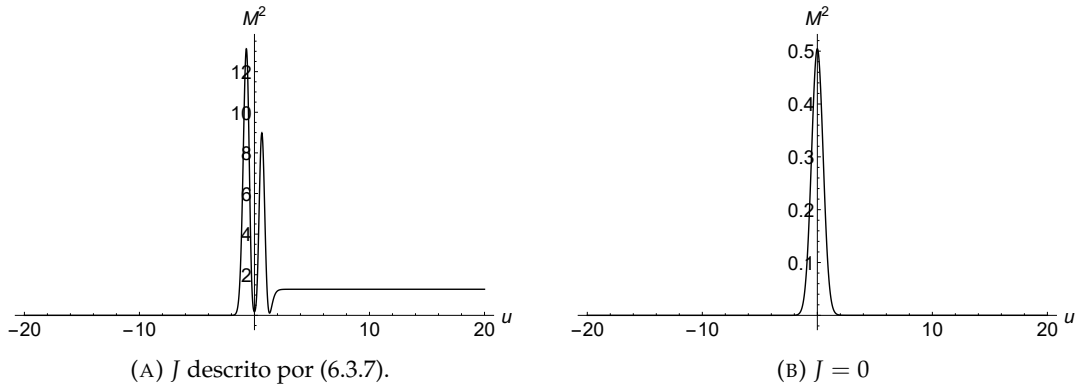


FIGURA 6.12: Momento angular total de uma partícula inicialmente em repouso em  $\rho(u \rightarrow \infty) = 5$  para  $H$  descrito por (6.2.6). O parâmetro  $R_0 = 1$ .

unidade de massa

$$\vec{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho z \dot{\phi} \hat{\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho \dot{z} - z \dot{\rho}) \hat{\phi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \dot{\phi} \hat{z} \quad (6.3.8)$$

é possível o cálculo numérico do momento angular total  $M^2 \equiv \vec{M} \cdot \vec{M}$ . Percebe-se a passagem da onda alterar permanentemente o momento angular total da partícula<sup>13</sup>, como pode ser visto na Figura 6.12a. No caso não giratônico da onda axialmente simétrica, onde há apenas densidade azimutal de momento angular, não se observa uma variação do momento angular total, como pode ser visto na Figura 6.12b. Destarte, a única diferença entre as ondas das Figuras 6.12 é a presença da densidade radial de momento angular e conclui-se a mesma ser a responsável pela alteração do momento angular da partícula.

<sup>13</sup>Antes e após a passagem da onda, i.e., nos eventos onde o espaço-tempo é o espaço-tempo de Minkowski, assume-me a validade da expressão clássica (6.3.8) para o momento angular, assim como o fora para a energia cinética.

## Conclusões

As ondas gravitacionais possuem uma história conseguinte à da Relatividade Geral, sendo um instrumento de corroboração experimental da teoria, da natureza do fenômeno gravitacional e ferramenta didática para a apresentação de soluções exatas da teoria. Roger Penrose defendeu a viabilidade física das ondas gravitacionais planas [100], argumentando tais ondas serem fisicamente aceitáveis, similarmente às ondas planas eletromagnéticas monocromáticas sem fonte. Assim como essas últimas, são idealizações de soluções reais a grandes distâncias da fonte. Penrose considerou os problemas técnicos relacionados ao estabelecimento de hipersuperfícies globais de Cauchy nesses espaços-tempo, concluindo o cone de luz em um evento  $Q$  no passado (após a passagem da onda) nunca encontrar um evento  $R$  no futuro (antes da passagem da onda). Portanto, a hipersuperfície contendo o evento  $Q$  não pode fornecer informações para se especificar a amplitude da onda em  $R$ . Entretanto, as equações de Einstein não restringem o formato do pulso e nem sua amplitude, com a função  $H$ , que caracteriza a onda, possuindo dependência arbitrária em  $u$ . Dessa forma, as pp-waves não violam nenhum princípio físico ou propriedade esperada para o espaço-tempo, como a causalidade.

As ondas gravitacionais não se limitam ao seu estudo teórico, mas abrem novas perspectivas astronômicas. Apesar de não existir um modelo teórico que relacione exatamente as propriedades de uma onda gravitacional a sua fonte, assim como as eletromagnéticas, devem carregar informações acerca de sua fonte. Ulterior às ondas eletromagnéticas, cuja propagação é vulnerável às interações com a matéria, as gravitacionais podem se propagar por grandes distâncias e, ao interagir com corpos massivos, absorver ou fornecer energia a tais corpos [19]. Sendo assim, em uma média, tais ondas podem se propagar por objetos densos sofrendo pouca ou nenhuma dissipação, e.g., fornecendo informações sobre o interior de núcleos galácticos sem dissipação pela poeira que os envolve. Portanto, no século XXI, uma nova área está em pleno desenvolvimento na astronomia, i.e., a astrofísica de ondas gravitacionais. A associação entre distintos meios de observação astronômica, e.g., eletromagnética, raios cósmicos, ondas gravitacionais e neutrinos, dão origem à astronomia Multi-mensageiro (Multi-messenger astronomy [101, 102], onde diferentes técnicas são combinadas para observações celestes decifráveis.

Ao longo desta tese, analisou-se a troca de energia entre ondas gravitacionais e partículas livre, i.e., partículas sujeitas apenas à influência das ondas gravitacionais. A troca de energia entre ondas gravitacionais e campos eletromagnéticos já fora investigada na literatura, no contexto nas ondas gravitacionais linearizadas. Gertsenshtein mostrou a possibilidade de criação de radiação eletromagnética a partir da interação entre as ondas gravitacionais linearizadas e campos magnéticos estáticos [103], com a energia da radiação eletromagnética resultante provavelmente oriunda das ondas gravitacionais. Skobelev analisou a interação entre grávitons e fótons [104], também indicando uma troca de energia entre o campo gravitacional e o eletromagnético. Investigações similares realizadas por Jones e colaboradores estudaram a produção de partículas em um plano de fundo de ondas gravitacionais e analisaram a geração de fótons na interação das ondas gravitacionais com flutuações

quânticas de vácuo [105, 106]. Tais investigações anteriores compartilham similaridades com as investigações desenvolvidas nesta tese, visto a transferência de energia entre ondas gravitacionais e campos eletromagnéticos quantizados implicam a onda gravitacional ganhar ou perder energia no processo. Dessa forma, por a transferência de energia ser local, a localizabilidade da energia gravitacional é essencial para a coerência de tais investigações.

Esta tese iniciou-se com uma breve revisão da RG no Capítulo 1 e do TERG no Capítulo 2. No Capítulo 3 revisou-se as pp-waves e introduziu-se seu tensor métrico por restrições simétricas esteadas nos raios de luz das ondas eletromagnéticas. Tal procedimento, distinto dos adotados em livros texto sobre soluções exatas [62, 59], encontra-se publicado na Referência [18].

No Capítulo 4 considerou-se o efeito memória imposto pelas pp-waves às partículas com as quais interage. O efeito memória, além de relevante e conceitualmente importante para observações futuras de ondas gravitacionais, apresentou-se como fundamental na compreensão da transferência de energia entre partículas e onda gravitacionais. Destarte, o efeito memória pode ser compreendido como uma troca permanente de energia entre as partículas e as pp-waves. Investigou-se na seção 4.2 tais efeitos e descobriu-se que uma mesma onda pode remover ou fornecer energia a uma partícula, dependendo das condições iniciais da última. Se as ondas gravitacionais apenas transferissem energia para um meio, e.g., uma nuvem de partículas, como proposto por Bondi [61], seria difícil compreender como uma onda gravitacional pode viajar pelo espaço sem se dissipar por grandes períodos de tempo. Dada a possibilidade de ganho ou perda de energia, é possível que, após interagir com muitas partículas, o saldo total seja nulo, i.e., a onda não se dissipe. Tal fato fornece interessante possibilidade: uma onda pode ser propagar por grandes distâncias, sem troca global de energia, mas pode interagir localmente com uma partícula com troca de energia, i.e., há possibilidade de detecção. Portanto, os resultados de tal seção implicam as ondas gravitacionais poderem se propagar por grandes distâncias sem sofrerem dissipação, serem passíveis de detecção e a localizabilidade da energia gravitacional ser fundamental. É interessante notar a energia total de uma pp-wave comum ser negativa, logo necessita absorver energia das partículas para ser dissipada. Os resultados da respectiva seção encontram-se publicados na Referência [19].

Também no Capítulo 4, em particular na seção 4.3, prosseguiu-se a investigação da transferência de energia. Estabeleceu-se a variação de energia cinética normalizada  $\Delta K_N$  e computou-se a dependência de tal quantidade com o parâmetro  $\Lambda$ , relacionado à largura do pulso. Obteve-se uma estrutura *quasi*-periódica similar ao deslocamento de uma mola em um sistema massa-mola subamortecido, com os zeros variando discretamente. A existência de máximos, mínimos e zeros discretos, dependentes do parâmetro  $\Lambda$ , indica haver parâmetros da onda "preferíveis" para a troca de energia. Se a energia do campo gravitacional for discreta, assim como a eletromagnética, espera-se as trocas de energia incorrerem em quantidades que são um múltiplo de uma quantidade mínima fundamental  $\epsilon$  ainda desconhecida. Destarte, a existência de parâmetros, preferíveis para a troca de energia, pode indicar os parâmetros de máxima transferência relacionarem-se a ondas gravitacionais com energia mais próxima a um múltiplo inteiro do mínimo  $\epsilon$ . Os resultados apresentados na respectiva seção encontram-se publicados na Referência [20].

No Capítulo 5, prosseguiu-se as investigações da troca de energia, em particular sobre a descrição de um mecanismo pelo qual a mesma ocorre. Notou-se a atração ou repulsão de um campo gravitacional, por meio de suas acelerações inerciais, relacionar-se ao sinal da densidade do centro de energia, e não da densidade de energia. Dessa forma, propôs-se uma relação entre a variação da energia cinética

da partícula e as acelerações inerciais do espaço-tempo na forma de um teorema trabalho-energia, similar ao presente na Mecânica Clássica. Definiu-se o trabalho  $\Delta W$  com a expressão (5.3.13) e analisou-se igualdade  $\Delta K = \Delta W$  numericamente para centenas de condições iniciais, obtendo-se um erro menor que dois por cento. A partir da corroboração numérica, pode-se interpretar o trabalho (5.3.13) como a variação da energia relativística da partícula e as acelerações inerciais do espaço-tempo como mecanismo descritivo para a troca de energia. Os resultados do Capítulo encontram-se publicados na Referência [21].

Após inferir-se as dependências da troca de energia com as condições iniciais da partícula e com os parâmetros da onda, além de descrever quantitativamente o mecanismo de transferência de energia, as investigações foram estendidas para pp-waves mais generalizadas no Capítulo 6. Calculou-se a energia e o momento angular das ondas giratônicas, obtendo-se a expressão (6.1.21) para a energia total e (6.2.3)-(6.2.3) para os componentes do momento angular. Nota-se as referidas expressões retornarem às expressões das pp-waves comuns, obtidas previamente nas Referências [28, 29], no limite nulo do termo giratônico  $J$ . As distinções qualitativas entre as energias (giratônica e pp-waves comuns) é a existência de regiões de densidade energética positiva para as ondas giratônicas, enquanto as pp-waves comuns admitem apenas densidade de energia negativa. Para o momento angular, nota-se a densidade radial de momento angular ser nula para as pp-waves comuns axialmente simétricas, enquanto não o são para as ondas giratônicas, possivelmente devido ao momento angular da fonte. Sabe-se os espaços-tempo das ondas giratônicas e das pp-waves serem localmente idênticos, i.e., a escolha do termo giratônico como nulo não afetar localmente o espaço-tempo. Entretanto, tais espaços-tempo são distintos globalmente. A definição de energia no TERG é independente de coordenadas, logo, o fato da energia das ondas giratônicas ser distinta, da energia das pp-waves comuns, direciona a realidade ao argumento apresentado na Referência [64] sobre a perda de propriedades do campo gravitacional quando o termo giratônico  $J$  não é considerado. Percebe-se as definições de energia e momento angular do TERG serem sensíveis a distinções globais entre espaços-tempo, enquanto as equações dinâmicas não o são. Tal fato enaltece a importância das investigações das propriedades físicas dos campos gravitacionais além das propriedades geométricas, com as primeiras podendo ser mais fundamentais.

Na interação com partículas, observa-se as ondas giratônicas também possuírem efeito memória e serem capazes de trocar momento angular com partículas, i.e., uma partícula com momento angular nulo, em dado sistema de coordenadas, antes da passagem da onda pode ter momento angular não nulo após a passagem da mesma, no mesmo sistema de coordenadas. Apesar do componente longitudinal do momento angular da partícula ser alterado durante a passagem da onda (assumindo a validade da expressão clássica em um campo fraco), nota-se apenas o componente radial do momento angular da partícula ser alterado permanentemente pela passagem da onda giratônica. Conclui-se haver uma relação entre a densidade de momento angular da onda e o momento angular assintótico de uma partícula atingida pela onda. Tal fato abre possibilidades futuras para a investigação das relações existentes entre as quantidades conservadas dos campos gravitacionais e das partículas interagentes com eles. Os resultados apresentados no Capítulo 6, referentes ao efeito memória das ondas giratônicas, encontram-se publicados na Referência [22], enquanto os resultados referentes a energia e ao momento angular das ondas giratônicas na Referência [23].

Ao longo desta tese verificou-se a existência de transferência de energia entre partículas e ondas gravitacionais, assim como a alteração do estado das partículas

devido a interação com as ondas, além de quais parâmetros afetam a transferência. O mecanismo pelo qual a onda gravitacional é alterada pela interação com a partícula é desconhecido. É possível que as ondas sofram alterações de amplitude ou largura de pulso, visto ambos parâmetros influenciarem a energia total das ondas. Sabe-se as ondas gravitacionais poderem ser descritas como defeitos topológicos no espaço [107]. Computa-se os defeitos topológicos, chamados deslocamentos, no espaço por meio de um circuito fechado ao redor do defeito, chamado circuito de Burgers, com o vetor representando a falha no fechamento do circuito chamado vetor de Burgers  $b^{(i)}$ . Quando um circuito é computado no plano de propagação de uma onda gravitacional, uma falha é encontrada, i.e.,  $b^{(i)} \neq 0$ . O caso mais interessante é obtido considerando-se uma onda giratônica axialmente simétrica e uma circunferência perpendicular ao eixo de propagação da onda, obtendo-se uma expressão analítica para o vetor de Burgers dada por [107]

$$b^{(i)} = (0, 0, b) = \left( 0, 0, -2\pi \frac{J}{\sqrt{2}A} \right).$$

Definindo-se o tensor de deformação  $\epsilon_{\mu\nu}$  como

$$\epsilon_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu},$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico da onda gravitacional e  $\bar{g}_{\mu\nu}$  do espaço-tempo plano, obtém-se

$$\epsilon_{(\phi)(z)} = \frac{b}{2\pi\rho},$$

que é idêntico ao obtido para uma deslocamento parafuso em um cristal. Os detalhes para a obtenção dos resultados acima podem ser consultados no Apêndice C. Desta forma, a possibilidade de ondas gravitacionais serem defeito topológicos torna possível a energia ser alterada por variação dos comprimentos dos defeitos, cuja distribuição constituem o espaço-tempo das pp-waves.

## Apêndice A

# Condições de energia

As equações de Einstein (1.5.10) implicam uma entidade física, representada por seu tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ , gerar um desvio Riemanniano da geometria do espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, a RG não impõe condições matemáticas sobre a natureza da fonte, i.e., qualquer tensor energia-momento pode ser fonte de um campo gravitacional, sendo muitas soluções são matematicamente possíveis. Porém, espera-se as fontes reais implicarem certas condições sobre seus tensores energia-momento [30], mas tais condições não são leis da natureza, mas uma expectativa indicativa a partir de certas interpretações e observações.

Se a energia for um escalar, o tensor energia-momento deve ser contraído com algum par de vetores, ou outro tensor, para sob integração fornecer a energia. As quatro condições de energia na RG são formuladas a partir da contração do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  em vetores normalizados futuro orientados, sendo temporais ou nulos.

A primeira condição de energia, chamada fraca, pode ser escrita como

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $u^\mu$  é um vetor normalizado futuro orientado, identificado como representando um observador na RG. Se a quantidade  $\rho \equiv T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$  é interpretada como a densidade de energia, então a condição fraca implica as fontes desejadas possuírem densidade positiva de energia. Tal condição aplicada a um fluido ideal descrito pelo tensor energia-momento  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ , onde  $p$  é a pressão, implica a densidade de energia do fluido ser positiva e a dominância dela sobre a pressão [30], i.e.,  $\rho > -p_i$ , onde  $p_i$  é um componente qualquer da pressão.

A segunda condição, chamada nula, pode ser escrita como

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

onde  $k^\mu$  é um vetor nulo futuro orientado. Aplicada a um fluido ideal,  $\rho \geq -p_i$ , implicando a condição fraca.

A terceira condição, chamada forte, pode ser escrita como

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)u^\mu u^\nu \geq 0. \quad (\text{A.3})$$

Pelas equações de Einstein (1.5.10), a condição forte implica uma condição sobre o tensor de curvatura, i.e.,  $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$ , mas não implica a condição fraca [30].

A última ou quarta condição, chamada dominante, diz a matéria dever seguir sempre ao longo de linhas mundo temporais ou nulas, i.e.,  $v^\mu \equiv -T^\mu{}_\nu u^\nu$  deve ser um campo vetorial futuro orientado temporal ou nulo, i.e., a massa-radiação não deve fluir com velocidade superior à luz.

Algumas noções acerca das condições de energia refletem interpretações sobre energia dentro da RG. Assumindo-se a Relatividade Especial como um caso particular da RG, espera-se a energia de uma entidade física ser o componente zero de um quadrimomento. Caracterizando-se um observador por um campo de tetradas  $e_a{}^\mu$ , a energia medida por tal observador é uma quantidade projetada nos índices locais, e.g., um observador, cujas tetradas  $e_a{}^\mu$  estão adaptada a si, no espaço mede um quadrimomento  $P_m^a = e^a{}_\mu P^\mu$ . Dessa forma, a energia medida pelo observador de uma fonte, com tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ , é

$$P_m^{(0)} = \int_V d^3x \left( e T^{0(0)} \right) = \int_V d^3x \left( e e^{(0)}{}_\mu T^{0\mu} \right) \quad (\text{A.4})$$

e a densidade de energia  $\epsilon_m = e e^{(0)}{}_\mu T^{0\mu}$  é uma quantidade dependente do referencial no qual é medida.

Algumas implicações distintas, à da interpretação das condições de energia, decorrem a partir da interpretação da densidade de energia a partir de (A.4). Pela graça do exemplo, o espaço-tempo de Alcubierre (vide [108]) necessita fontes que violam as condições de energia, com tais condições de energia verificadas utilizando-se observadores Eulerianos (em queda livre). Tal espaço-tempo representa uma bolha viajando com velocidade global arbitrária. Os observadores, que são tomados como entidades não interagentes, em queda livre em tal espaço-tempo não fazem parte da bolha, logo são observadores não físicos. Quando computa-se a densidade de energia, oriunda de (A.4), para observadores em queda livre, obtém-se uma densidade de energia negativa. Porém, transformando o observador para um estático, e.g., fixo na Terra, por uma transformação de Lorentz, preservando o mesmo sistema de coordenadas, a densidade de energia encontrada é regular e positiva [109]. Destarte, pode-se interpretar algumas violações das condições de energia como um problema de referencial, i.e., não se espera que um referencial não-físico meça um efeito físico plausível.



## Apêndice B

# Formalismo Hamiltoniano do TERG<sup>1</sup>

Os momentos canonicamente conjugados às tétradas, obtidos a partir da densidade de Lagrangiana (2.2.19), são [55]

$$\Pi^{ak} \equiv \frac{\delta L_g}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4\kappa \Sigma^{a0k}, \quad (\text{B.1})$$

onde o ponto indica derivada em relação ao tempo  $t$ . Portanto, a densidade de Lagrangiana pode ser escrita em função da densidade de Hamiltoniana primária  $H_0$  como

$$L = \Pi^{ai} \dot{e}_{ai} - H_0, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi^{ai} = & ke \{ g^{00} (-g^{ij} T^a_{0j} - e^{aj} T^i_{0j} + 2e^{ai} T^j_{0j}) + \\ & + g^{0i} (g^{aj} T^a_{0j} + e^{aj} T^0_{0j}) + e^{a0} (g^{0j} T^i_{0j} + g^{ij} T^0_{0j}) - \\ & - 2(e^{a0} g^{0i} T^j_{0j} + e^{ai} g^{0j} T^0_{0j}) - g^{0k} g^{ij} T^a_{kj} + \\ & + e^{ak} (g^{0j} T^i_{kj} - g^{ij} T^0_{kj}) - 2(g^{k0} e^{ai} - g^{ki} e^{a0}) T^j_{ji} \}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A densidade de Lagrangiana (B.2) não possui dependência explícita com  $\dot{e}_{a0}$ . Logo, o momento  $\Pi^{a0}$  é identicamente nulo. A parte simétrica dos momentos, projetado na tétrada,

$$\Pi^{(ij)} = \frac{1}{2} (e_a^i \Pi^{aj} + e_a^j \Pi^{ai}) \quad (\text{B.4})$$

depende de  $\dot{e}_{a0}$ , enquanto a parte antissimétrica, que constitui as relações entre os momentos e as tétradas,

$$\Pi^{[ij]} = \frac{1}{2} (e_a^i \Pi^{aj} - e_a^j \Pi^{ai}) \quad (\text{B.5})$$

não dependem de  $\dot{e}_{a0}$ . As quantidades (B.4) e (B.5), juntamente à  $\Pi^{a0}$ , constituem os vínculos de primeira classe da teoria.

<sup>1</sup>A apresentação deste Apêndice basea-se nas Referências [51, 55].

A evolução temporal de  $\Pi^{a0}$ , pela prescrição de Dirac, gera um vínculo secundário

$$\begin{aligned}
C^a = & -\partial_k \Pi^{ak} + e^{a0} \left[ -\frac{1}{4g^{00}} ke \left( g_{ik} g_{jl} P^{ij} P^{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) \right. \\
& + ke \left( \frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^b{}_{mn} T_{bij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i{}_{mn} T^m{}_{ij} - g^{ik} T^m{}_{mi} T^n{}_{nk} \right) \left. \right] \\
& - \frac{1}{2g^{00}} ke \left( g_{ik} g_{jl} \gamma^{aij} P^{kl} - \frac{1}{2} g_{ij} \gamma^{aij} P \right) - ke e^{ai} \left( g^{0m} g^{nj} T^b{}_{ij} T_{bmn} \right. \\
& \left. + g^{nj} T^0{}_{mn} T^m{}_{ij} + g^{0j} T^n{}_{mj} T^m{}_{ni} - 2g^{0k} T^m{}_{mk} T^n{}_{ni} - 2g^{jk} T^0{}_{ij} T^n{}_{nk} \right), \quad (B.6)
\end{aligned}$$

onde, definindo  $\psi_{lj} = T_{l0j} + T_{j0l}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
P^{ki} = & -g^{00} (g^{km} g^{ij} \psi_{mj} - g^{ki} \psi) + (g^{ok} g^{im} g^{oj} + \\
& + g^{0i} g^{km} g^{0j}) \psi_{mj} - (g^{ik} g^{om} g^{0j} \psi_{mj} + g^{0k} g^{0i} \psi) \quad (B.7)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma^{aij} = & -e^{ak} [g^{00} (g^{jm} T^i{}_{km} + g^{im} T^j{}_{km} + 2g^{ij} T^m{}_{mk}) + \\
& + g^{0m} (g^{0j} T^i{}_{mk} + g^{0i} T^j{}_{mk}) - 2g^{0i} g^{0j} T^m{}_{mk} + \\
& + (g^{jm} g^{0i} + g^{im} g^{0j} - 2g^{ij} g^{0m}) T^0{}_{mk}]. \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Como o vínculo  $\Pi^{a0}$  é identicamente nulo, os vínculos primários relacionados à parte antissimétrica dos momentos  $\Pi^{[ij]}$  podem ser escritos como

$$\Gamma^{ab} = 2\Pi^{[ab]} - 4\kappa e \left( \Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right) = 0. \quad (B.9)$$

Os vínculos  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  satisfazem as relações  $H_0 = e_{a0} C^a$ ,  $\frac{\delta C^a}{\delta e_{c0}} = e^{a0} C^c - e^{a0} C^c \equiv 0$ . Destarte, nenhum outro vínculo surge devido à evolução temporal de  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  e a densidade de Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H = e_{a0} C^a + \alpha_{ab} \Gamma^{ab}, \quad (B.10)$$

onde  $\alpha_{ab}$  são multiplicadores de Lagrange. A variação de  $H$  em relação a  $e_{a0}$  gera o vínculo  $C^a$ , logo  $e_{a0} C^a$  na relação (B.10) surge naturalmente como um multiplicador de Lagrange. No vácuo o vínculo  $C^a$  associa-se ao quadrimomento do campo gravitacional enquanto o vínculo  $\Gamma^{ab}$  ao seu momento angular.

Utilizando os vínculos  $\Gamma^{ab}$ , define-se a densidade de momento angular [55]

$$M^{ab} = 4\kappa e \left( \Sigma^{b0a} - \Sigma^{a0b} \right), \quad (B.11)$$

que pode ser escrita em função das tétradas como

$$M^{ab} = 2\kappa \partial_i \left[ e \left( e^{ai} e^{b0} - e^{bi} e^{a0} \right) \right]. \quad (B.12)$$

A partir da densidade de momento angular, escreve-se o momento angular  $L^{ab}$  do campo gravitacional

$$\begin{aligned} L^{ab} &= \int M^{ab} d^3x \\ &= 2\kappa \int \partial_i \left[ e \left( e^{ai} e^{b0} - e^{bi} e^{a0} \right) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Observa-se a consistência dos resultados notando o conjunto dos vínculos  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  satisfazer a álgebra do grupo de Poincaré

$$\{C^a, C^b\} = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\{C^a, \Gamma^{bc}\} = \eta^{ab} C^c - \eta^{ac} C^b, \quad (\text{B.15})$$

$$\{\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}\} = \eta^{ad} \Gamma^{cb} + \eta^{bd} \Gamma^{ac} - \eta^{ac} \Gamma^{db} - \eta^{bc} \Gamma^{ad}. \quad (\text{B.16})$$

As grandezas físicas  $P^a$  e  $L^{ab}$  também satisfazem a mesma álgebra apresentada acima. Portanto, as interpretações físicas apresentadas na seção 2.3 são consistentes.



## Apêndice C

# Ondas gravitacionais como defeitos topológicos<sup>1</sup>

A investigação de deformações nos materiais é importante na compreensão das propriedades dos materiais na Mecânica dos Sólidos, sendo as mesmas responsáveis por diversas peculiaridades nos materiais, principalmente suas propriedades termodinâmicas. Quando um material é sujeito à tensão, ele responde dentro do regime elástico à lei de Hooke. Entretanto, fora de tal regime, a deformação reside no regime plástico. As deformações plásticas em materiais lineares subdividem-se em duas classes: as deslocções e as desclinações. Matematicamente, as deslocções são tratadas construindo-se um núcleo de deformação, fora do qual a lei de Hooke é válida. Dentro do núcleo, computa-se a deformação a partir de falhas no fechamento em circuitos, chamados circuitos de Burgers, construídos ao redor dos defeitos.

Os conceitos de defeitos em materiais podem ser importados para o espaço-tempo introduzindo-se um tensor de tensões, que computa quantitativamente a deformação plástica, i.e., compara as geometrias antes da deformação (espaço-tempo plano) e após (campo gravitacional). Define-se o tensor de deformação  $\varepsilon_{\mu\nu}$  como [110]

$$\varepsilon_{\mu\nu} \equiv (g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}) , \quad (\text{C.1})$$

onde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  representa o tensor métrico do espaço-tempo plano e  $g_{\mu\nu}$  do campo gravitacional. Lidando-se com deformações espaciais, o tensor  $\varepsilon_{\mu\nu}$  é construído em três dimensões. Porém, considerando o tensor como quadrimensional no espaço-tempo, sua parte espacial pode ser separada. Distintos espaços-tempo pode ser descritos por diferentes coordenadas, logo os efeitos físicos das deformações podem ser obtidos projetando o tensor de tensões em índices locais. Destarte, para as ondas giratônicas, descritas para o elemento de linhas (6.1.1), obtém-se, para a parte espacial do tensor de tensões,

$$\varepsilon^{(i)(j)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}J}{\rho A} \sin \phi \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}J}{\rho A} \cos \phi \\ \frac{\sqrt{2}J}{\rho A} \sin \phi & -\frac{\sqrt{2}J}{\rho A} \cos \phi & H/A \end{pmatrix} . \quad (\text{C.2})$$

Observando (C.2), nota-se as ondas giratônicas serem responsáveis, ou interpretadas como, deformações longitudinais e de cisalhamento transversal do espaço-tempo.

As deslocções geram uma falha em um circuito fechado construído a sua volta, i.e., se  $C$  é uma curva fechada ao redor de um defeito, então a integral ao longo deste caminho é não nula, enquanto a mesma seria nula na ausência de defeitos,

<sup>1</sup>A apresentação deste Apêndice basea-se na Referência [107].

no espaço-tempo plano. O defeito deve ser uma quantidade independente das coordenadas, logo deve ser uma quantidade com componentes no espaço tangente. Portanto, se  $b^{(i)}$  é o componente do vetor indicando a deformação, chamado vetor de Burgers, tem-se  $b^{(i)} = \oint_C dx^{(i)}$ . A quantidade  $dx^{(i)}$  é não-holonômica na presença de um campo gravitacional, logo a integração deve ser feita no espaço-tempo pela projeção dos índices locais nos espaciais do espaço-tempo, i.e.,

$$b^{(i)} = \oint_C e^{(i)}{}_j dx^j. \quad (\text{C.3})$$

O resultado da integração (C.3) depende do caminho escolhido, entretanto sua nulidade para qualquer circuito depende da não-existência de campo gravitacional.

Vários circuitos de Burgers podem ser construídos, com os defeitos podendo estar no plano do circuito (deslocação de borda) ou perpendicular ao plano (deslocamento parafuso). Escolhendo um circuito circular em um plano perpendicular ao eixo de propagação, concêntrico com tal eixo, o vetor de Burgers é computado como

$$b^{(i)} = \int_0^{2\pi} e^{(i)}{}_2 d\phi = \int_0^{2\pi} e'^{(3)}{}_2 d\phi, \quad (\text{C.4})$$

onde  $e_{(i)}{}^j$  é dado por (6.1.3). O único componente não nulo de (C.4) é

$$b^{(3)} = b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{J}{A} d\phi. \quad (\text{C.5})$$

Dessa forma, as ondas giratônicas representam uma deslocação parafuso no espaço-tempo devido o vetor encontrar-se perpendicular ao plano contendo o circuito<sup>2</sup>. Percebe-se no resultado (C.5) o vetor de Burgers ser nulo se  $J = 0$ , i.e., a deslocação parafuso apenas se encontra presente<sup>3</sup> na presença do termo giratônico, corroborando a distinta natureza global entre os espaços-tempo das pp-waves comuns e o das ondas giratônicas. Quando a onda giratônica é axialmente simétrica, i.e.,  $J = J(u)$  e  $H = H(u, \rho)$ , a integral (C.5) pode ser trivialmente resolvida analiticamente, resultando em

$$b = -\frac{2\pi J}{\sqrt{2}A}, \quad (\text{C.6})$$

dependendo do raio do circuito.

Escolhendo como núcleo de deslocação um cilindro com raio  $\rho$  e eixo de simetria coincidindo com o eixo de propagação da onda, o tensor de tensões pode ser escrito em função do vetor de Burgers. Transformando o tensor de tensões para coordenadas polares como

$$\varepsilon_{(\phi)(z)} = -\sin \phi \varepsilon_{(1)(3)} + \cos \phi \varepsilon_{(2)(3)} \quad (\text{C.7})$$

e usando (C.2) e (C.6), obtém-se

$$\varepsilon_{(\phi)(z)} = \frac{b}{2\pi\rho}. \quad (\text{C.8})$$

<sup>2</sup>Notai tal afirmação ser verdadeira ao projetar-se os vetores de base do espaço-tempo do plano transversal, ao de propagação da onda, nos vetores de base do espaço tangente.

<sup>3</sup>Apesar de vetor de Burgers ser nulo em tal circuito se  $J = 0$ , os demais (para outros circuitos) não o são. Esses englobam o eixo de propagação e os defeitos podem ser interpretados como deslocamentos de borda. Entretanto, se  $H = 0 = J$ , i.e., na ausência de campo gravitacional, todos são identicamente nulos.

O resultado (C.8) é exatamente o mesmo observado para uma deslocação parafuso em um cristal, como pode ser visto na equação (5.3) da Referência [111]. Observa-se o tensor de tensões, fora do núcleo de deslocação, cair com  $1/\rho$ , similar a um campo de radiação. Tal resultado causa uma partícula sentir os efeitos da deslocação mesmo longe do seu núcleo.





# Referências

- [1] P. G. Roll, R. Krotkov, and R. H. Dicke. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, 26(3):442–517, 1964.
- [2] R. W. Smith. The cambridge network in action: The discovery of neptune. *Isis*, 80(3):395–422, 1989.
- [3] U. Le Verrier. Lettre de m. le verrier à m. faye sur la théorie de mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 49:379–383, 1859.
- [4] A. Einstein. Fundamental ideas of the general theory of relativity and the application of this theory in astronomy. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 315, 1915.
- [5] A. Einstein and Sitzungsber Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1915:778–786, 1915.
- [6] F. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. IX. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [7] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] J. Weber. Gravitational radiation. *Physical Review Letters*, 18(13):498, 1967.
- [9] J. Weber. Gravitational-wave-detector events. *Physical Review Letters*, 20(23):1307, 1968.
- [10] J. Weber. Evidence for discovery of gravitational radiation. *Physical Review Letters*, 22(24):1320, 1969.
- [11] O. D. Aguiar, L. A. Andrade, J. J. Barroso, P. J. Castro, C. A. Costa, S. T. De Souza, A. De Waard, A. C. Fauth, C. Frajuca, G. Frossati, et al. The schenberg spherical gravitational wave detector: the first commissioning runs. *Classical and Quantum Gravity*, 25(11):114042, 2008.
- [12] J. M. Weisberg, J. H. Taylor, and L. A. Fowler. Gravitational waves from an orbiting pulsar. *Scientific American*, 245(4):74–83, 1981.
- [13] S. M. Kopeikin. Binary pulsars as detectors of ultralow-frequency gravitational waves. *Physical Review D*, 56(8):4455, 1997.
- [14] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.

- [15] P. Y. Ulianov, X. Mei, P. Yu, et al. Was ligo's gravitational wave detection a false alarm? *Journal of Modern Physics*, 7(14):1845, 2016.
- [16] X. Mei, P. Yu, et al. Did ligo really detect gravitational waves?—the existence of electromagnetic interaction made the experiments of ligo invalid. *Journal of Modern Physics*, 7(10):1098, 2016.
- [17] L. D. Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.
- [18] F. L. Carneiro and S. C. Ulhoa. Sobre ondas gravitacionais planas não-lineares. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43, 2021.
- [19] J. W. Maluf, J. F. Rocha-Neto, S. C. Ulhoa, and F.L. Carneiro. Plane gravitational waves, the kinetic energy of free particles and the memory effect. *Gravitation and Cosmology*, 24(3):261–266, 2018.
- [20] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, S. C. Ulhoa, and F. L. Carneiro. Variations of the energy of free particles in the pp-wave spacetimes. *Universe*, 4(7):74, 2018.
- [21] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, S. C. Ulhoa, and F. L. Carneiro. The work-energy relation for particles on geodesics in the pp-wave spacetimes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(03):028, 2019.
- [22] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, S. C. Ulhoa, and F. L. Carneiro. Kinetic energy and angular momentum of free particles in the gyratonic pp-waves space-times. *Classical and Quantum Gravity*, 35(11):115001, 2018.
- [23] F. L. Carneiro, S. C. Ulhoa, and J. F. da Rocha-Neto. Energy-momentum and angular-momentum of a gyratonic pp-waves spacetime. *Physical Review D*, 100(2):024023, 2019.
- [24] B. Mashhoon and U. Muench. Length measurement in accelerated systems. *Annalen der Physik*, 11(7):532–547, 2002.
- [25] B. Mashhoon. Vacuum electrodynamics of accelerated systems: Nonlocal maxwell's equations. *Annalen der Physik*, 12(10):586–598, 2003.
- [26] A. Einstein. Über gravitationswellen. *sitzungsber. k. Preuss. Akad. Wiss*, 1918:154–167, 1918.
- [27] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson. Gravitational waves in general relativity iii. exact plane waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 251(1267):519–533, 1959.
- [28] J. W. Maluf and S. C. Ulhoa. The energy-momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of gr. *Physical Review D*, 78(4):047502, 2008.
- [29] J. F. da Rocha-Neto and J. W. Maluf. The angular momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 46(3):1667, 2014.
- [30] E. Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [31] H. Stephani. *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004.

- [32] D. Hilbert. Die grundlagen der physik. *Mathematische Annalen*, 92(1-2):1–32, 1924.
- [33] H. A. Lorentz. Over einstein's theorie der zwaartekracht. iii. *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Wis-en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen van de Gewone Vergaderingen*, 25(1916-17):468–486, 1916.
- [34] E. Schrödinger. Die energiekomponenten des gravitationsfeldes. *Physikalische Zeitschrift*, 19(4), 1918.
- [35] H. Bauer. Uber die energiekomponenten des gravitationsfeldes. *Physikalische Zeitschrift*, 19:163–5, 1918.
- [36] A. Einstein. Hamiltonsche prinzip und allgemeine relativitätstheorie, sitzler. *Preuss. Akad. Wiss., Berlin*, 1916.
- [37] C. Moller. Conservation laws in the tetrad theory of gravitation. In *Proceedings of the Conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablonna, 1962*. Gauthier-Villars, PWN-Polish Scientific Publishers, 1964.
- [38] A. Einstein. *Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie*, pages 154–166. John Wiley and Sons, Ltd, 2006.
- [39] C. Møller. On the localization of the energy of a physical system in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, 4(4):347–371, 1958.
- [40] C. Møller. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, 12(1):118–133, 1961.
- [41] V. Fock. Geometrisierung der diracschen theorie des elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 57(3-4):261–277, 1929.
- [42] E. Schrödinger. E. schrödinger, sitzber. preuss. akad. wiss., physik.-math. kl. 105 (1932). *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl.*, page 105, 1932.
- [43] H. Weyl. Z. physik 56, 330. *Proc. Nat. Acad. Sci.(Washington)*, 15:323, 1929.
- [44] P. A. M. Dirac. Max planck festschrift, 1958.
- [45] L. Infeld. L. infeld and bl van der waerden, sitzber. preuss. akad. wiss., physik.-math. kl. 380 (1933). *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl.*, page 380, 1933.
- [46] C. Møller. C. møller, mat. fys. skr. dan. vid. selsk. 1, no. 10, 1 (1961). *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, 1:1, 1961.
- [47] J. W. Maluf. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen der Physik*, 525(5):339–357, 2013.
- [48] R. Weitzenboock. *Invariantentheorie*. P. Noordhoff,, 1923.
- [49] J. W. Maluf. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 35(1):335–343, 1994.
- [50] J. W. Maluf. The gravitational energy-momentum tensor and the gravitational pressure. *Annalen der Physik*, 14(11-12):723–732, 2005.

- [51] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, 64(8):084014, 2001.
- [52] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toribio, and K. H. Castello-Branco. Energy-momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. In *The Ninth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*, pages 1043–1044. World Scientific, 2002.
- [53] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toribio, and K. H. Castello-Branco. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, 65(12):124001, 2002.
- [54] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. *General Relativity and Gravitation*, 31(2):173–185, 1999.
- [55] J. F. da Rocha-Neto, J. W. Maluf, and S. C. Ulhoa. Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, 82(12):124035, 2010.
- [56] S. C. Ulhoa. *O momento angular do campo gravitacional e o grupo de Poincaré*. PhD thesis, Universidade de Brasília, 2009.
- [57] J. W. Maluf and F. F. Faria. On the construction of fermi-walker transported frames. *Annalen der Physik*, 17(5):326–335, 2008.
- [58] A. Einstein and N. Rosen. On gravitational waves. *Journal of the Franklin Institute*, 223(1):43–54, 1937.
- [59] J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [60] V. Pravda, A. Pravdova, A. Coley, and R. Milson. All spacetimes with vanishing curvature invariants. *Classical and Quantum Gravity*, 19(23):6213, 2002.
- [61] H. Bondi. Plane gravitational waves in general relativity. *Nature*, 179(4569):1072, 1957.
- [62] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, 2009.
- [63] H. W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 94(1):119–145, 1925.
- [64] J. Podolský, R. Steinbauer, and R. Švarc. Gyrationic pp waves and their impulsive limit. *Physical Review D*, 90(4):044050, 2014.
- [65] J. Podolský and K. Veselý. Chaos in pp-wave spacetimes. *Physical Review D*, 58(8):081501, 1998.
- [66] J. Podolský and K. Veselý. Chaotic motion in pp-wave spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 15(11):3505, 1998.
- [67] J. Podolský and K. Veselý. Smearing of chaos in sandwich pp-waves. *Classical and Quantum Gravity*, 16(11):3599, 1999.

- [68] K. Veselẏ and J. Podolskẏ. Chaos in a modified h enon–heiles system describing geodesics in gravitational waves. *Physics Letters A*, 271(5–6):368–376, 2000.
- [69] P. C. Aichelburg and R. U. Sexl. On the gravitational field of a massless particle. *General Relativity and Gravitation*, 2(4):303–312, 1971.
- [70] J. B. Griffiths and J. Podolskẏ. Null multipole particles as sources of pp-waves. *Physics Letters A*, 236(1–2):8–10, 1997.
- [71] J. Podolskẏ and J. B. Griffiths. Boosted static multipole particles as sources of impulsive gravitational waves. *Physical Review D*, 58(12):124024, 1998.
- [72] P-M Zhang, C. Duval, G. W. Gibbons, and P. A. Horvathy. Velocity memory effect for polarized gravitational waves. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(05):030, 2018.
- [73] A. Z. Petrov. The classification of spaces defining gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 32(8):1665–1685, 2000.
- [74] A. Z. Petrov. *Einstein spaces*. Elsevier, 2016.
- [75] G. S. Hall. *Symmetries and curvature structure in general relativity*. World Scientific, 2004.
- [76] J. W. Maluf and A. Goya. Space–time defects and teleparallelism. *Classical and Quantum Gravity*, 18(23):5143, 2001.
- [77] F. L. Carneiro, S. C. Ulhoa, J. F. da Rocha-Neto, and J. W. Maluf. On the quantization of burgers vector and gravitational energy in the space-time of a conical defect. *The European Physical Journal C*, 80(3):1–9, 2020.
- [78] W. B. Bonnor. Spinning null fluid in general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, 3(4):257–266, 1970.
- [79] V. P. Frolov, W. Israel, and A. Zelnikov. Gravitational field of relativistic gyratons. *Physical Review D*, 72(8):084031, 2005.
- [80] Y. B. Zel’Dovich and A. G. Polnarev. Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars. *Soviet Astronomy*, 18:17, 1974.
- [81] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Theory of the detection of short bursts of gravitational radiation. *Physical Review D*, 4(8):2191, 1971.
- [82] V. B. Braginskii and L. P. Grishchuk. Kinematic resonance and the memory effect in free mass gravitational antennas. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 89:744, 1985.
- [83] V. B. Braginsky and K. S. Thorne. Gravitational-wave bursts with memory and experimental prospects. *Nature*, 327(6118):123–125, 1987.
- [84] L. Blanchet and T. Damour. Hereditary effects in gravitational radiation. *Physical Review D*, 46(10):4304, 1992.
- [85] D. Christodoulou. Nonlinear nature of gravitation and gravitational-wave experiments. *Physical review letters*, 67(12):1486, 1991.
- [86] M. Favata. The gravitational-wave memory effect. *Classical and Quantum Gravity*, 27(8):084036, 2010.

- [87] P-M Zhang, C. Duval, G. W. Gibbons, and P. A. Horvathy. The memory effect for plane gravitational waves. *Physics Letters B*, 772:743–746, 2017.
- [88] P-M Zhang, C. Duval, G. W. Gibbons, and P. A. Horvathy. Soft gravitons and the memory effect for plane gravitational waves. *Physical Review D*, 96(6):064013, 2017.
- [89] P. Zhang, M. Elbistan, and P. A. Horvathy. Particle motion in circularly polarized vacuum pp waves. *Classical and Quantum Gravity*, 2021.
- [90] F. L. Carneiro. Ondas gravitacionais, efeito memória e o teleparalelismo equivalente à relatividade geral. Master's thesis, Universidade de Brasília, 2018.
- [91] F. F. Faria. *Sistemas de referência locais no espaço-tempo*. PhD thesis, Universidade de Brasília, 2009.
- [92] J. Ehlers and W. Kundt. Exact solutions of the gravitational field equations. In *The Theory of Gravitation*, pages 49–101. John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [93] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. L. Carneiro, and K. H. C. Castello-Branco. Perturbations of the gravitational energy in the tegr: Quasinormal modes of the schwarzschild black hole. *Universe*, 7(4):100, 2021.
- [94] P. H. B. Rossetto. On the motion of free particles in exact plane gravitational waves. Master's thesis, Universidade de Brasília, 2019.
- [95] R. Steinbauer. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves. *Journal of Mathematical Physics*, 39(4):2201–2212, 1998.
- [96] J. Podolský and K. Veselý. New examples of sandwich gravitational waves and their impulsive limit. *Czechoslovak journal of physics*, 48(8):871–878, 1998.
- [97] K. Andrzejewski and S. Prencel. Memory effect, conformal symmetry and gravitational plane waves. *Physics Letters B*, 782:421–426, 2018.
- [98] P-M Zhang, M. Cariglia, C. Duval, M Elbistan, G. W. Gibbons, and P. A. Horvathy. Ion traps and the memory effect for periodic gravitational waves. *Physical Review D*, 98(4):044037, 2018.
- [99] C. Sämann, R. Steinbauer, and R. Švarc. Completeness of general pp-wave spacetimes and their impulsive limit. *Classical and Quantum Gravity*, 33(21):215006, 2016.
- [100] R. Penrose. A remarkable property of plane waves in general relativity. *Reviews of Modern Physics*, 37(1):215, 1965.
- [101] C. Ferrigno, V. Savchenko, A. Coleiro, F. Panessa, A. Bazzano, E. Bozzo, J. Chenevez, A. Domingo, M. Doyle, A. Goldwurm, et al. Multi-messenger astronomy with integral. *New Astronomy Reviews*, 92:101595, 2021.
- [102] P. Mészáros, D. B. Fox, C. Hanna, and K. Murase. Multi-messenger astrophysics. *Nature Reviews Physics*, 1(10):585–599, 2019.
- [103] M. E. Gertsenshtein. Wave resonance of light and gravitational waves. *Sov Phys JETP*, 14:84–85, 1962.

- 
- [104] V. V. Skobelev. Graviton-photon interaction. *Soviet Physics Journal*, 18(1):62–65, 1975.
- [105] P. Jones and D. Singleton. Gravitons to photons—attenuation of gravitational waves. *International Journal of Modern Physics D*, 24(12):1544017, 2015.
- [106] P. Jones, P. McDougall, and D. Singleton. Particle production in a gravitational wave background. *Physical Review D*, 95(6):065010, 2017.
- [107] F. L. Carneiro, S. C. Ulhoa, J. W. Maluf, and J. F. da Rocha-Neto. Non-linear plane gravitational waves as space-time defects. *The European Physical Journal C*, 81(1):1–9, 2021.
- [108] M. Alcubierre. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):L73, 1994.
- [109] F. L. Carneiro, S. C. Ulhoa, J. W. Maluf, and J. F. da Rocha-Neto. On the total energy conservation of the alcubierre spacetime. *arXiv preprint arXiv:2201.05684*, 2022.
- [110] T. G. Tenev and M. F. Horstemeyer. Mechanics of spacetime—a solid mechanics perspective on the theory of general relativity. *International Journal of Modern Physics D*, 27(08):1850083, 2018.
- [111] R. E. Smallman. *Modern Physical Metallurgy*. Butterworths, London, 1976.