



Universidade de Brasília

**Superfícies mínimas singulares
invariantes**

German Alejandro Jimenez Franco

Orientador: Prof. Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 02 de Maio de 2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies mínimas singulares invariantes

por

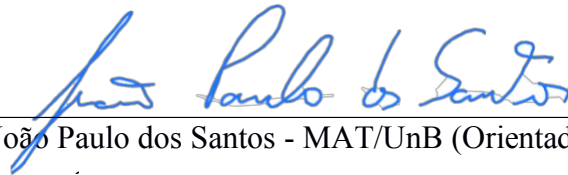
German Alejandro Jimenez Franco

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília
como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 02 de maio de 2022.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues – MAT/UnB (Membro)



Documento assinado digitalmente
JOSE NAZARENO VIEIRA GOMES
Data: 19/05/2022 22:34:23-0300
Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes – UFSCar (Membro)

Dedico este trabalho a Avril Gómez Ariza, que ainda não chegou, mas já está entre nós.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua graça, certamente nesta vida eu recebo muito mais do que mereço.

Aos meus pais pelo apoio e ajuda, Eles se entregariam completamente se necessário para que os sonhos do seu filho não fossem frustrados.

Ao meu orientador João Paulo dos Santos pela paciência, pela paciência, pela paciência... ∞^+ , pela dedicação e trabalho empenhado para que fosse possível finalizarmos esta dissertação.

À minha noiva, minha amada Mayra, o deleite dos meus olhos e da minha alma, uma mulher para toda uma vida, que motivou todos os esforços neste processo do início ao fim. Agradeço por sua paciência, por preencher este "século caído" com doçura, amor e beleza.

Agradeço ao meu irmão Patrick, que me apoiou financeiramente quando precisei, e esperou pacientemente. Não teria conseguido pisar em solo brasileiro se não fosse pela sua ajuda.

Agradeço ao meu tio Luis Eduardo meu primeiro mentor, sempre pronto a estender a mão ao sobrinho, seu terceiro filho. Eu posso dizer com orgulho dele que eu considero meu segundo pai.

Agradeço ao professor José Nazareno Vieira Gomes e a professora Luciana de Ávila Rodrigues pela sua participação na banca da defesa, obrigado por suas sugestões e correções feitas no trabalho de dissertação.

Agradeço também a todos os amigos e colegas por todos os momentos que compartilhamos juntos: Vinícius, o melhor "maranhense" que já conheci; Thiago, que me acolheu em sua casa, Francisca, um coração generoso sempre pronto para ajudar; Jaílson, um baiano louco, mas muito inteligente e apaixonado por matemática. Eu sempre terei boas lembranças de vocês.

Eu agradeço a Welinton, Wállef, Jhon, Luiz, Carlos, Andres, Katianny, Jesus, Matheus, Tarcios, Romulo, Julia, Pedro.

Sou grato também ao CNPq e à CAPES pelo financiamento durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Uma superfície mínima singular M no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é uma superfície cuja curvatura média satisfaz $2H = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle}$, em que α é uma constante real, $p \in M$, \mathbf{a} é um vetor fixo não nulo de \mathbb{R}^3 e N é o vetor normal unitário de M em p . Superfícies mínimas singulares são pontos críticos de um determinado funcional energia e também são dadas por superfícies mínimas em (\mathbb{R}^3, g) , em que g pertence a uma classe de métricas conformes à métrica Euclidiana. Baseado no artigo López [Ann. Global Anal. Geom. 53 (2018)], apresentamos nesta dissertação um estudo de superfícies mínimas singulares invariantes sob as ações de dois tipos de grupos a 1-parâmetro de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 , a saber, o grupo de rotações e o grupo de translações.

Palavras-chave: Superfícies mínimas singulares, superfícies cilíndricas, superfícies de rotação.

Abstract

A minimal singular surface M in Euclidean space \mathbb{R}^3 is a surface whose mean curvature satisfies $2H = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle}$, where α is a real constant, $p \in M$, \mathbf{a} is a fixed vector of \mathbb{R}^3 , N is the unit normal vector of M in p . Singular minimal surfaces are critical points of a determined functional energy and they are also given by minimal surfaces in (\mathbb{R}^3, g) , where g belongs to a class of metrics conformal to the Euclidean metric. Based on the article López [Ann. Global Anal. Geom. 53 (2018)], we present in this dissertation a study of singular minimal surfaces that are invariant by two types of uniparametric groups of rigid motions of \mathbb{R}^3 , namely, the rotation group and the translation group.

Keywords: Singular minimal surfaces, cylindrical surfaces, rotational surfaces.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Conceitos Básicos	4
1.1 Curvas planas e superfícies regulares	4
1.2 Equações diferenciais ordinárias	13
1.3 Conceitos básicos de variedades Riemannianas	14
2 Introdução às superfícies mínimas singulares	16
2.1 Definição e equação diferencial parcial associada	16
2.2 Superfície mínima singular como ponto crítico de um funcional	19
2.3 Superfícies mínimas singulares como superfícies mínimas em um espaço conforme ao espaço Euclidiano	24
3 Superfícies mínimas singulares cilíndricas	28
3.1 Cilindros α -catenários	28
3.2 Superfícies cilíndricas α -mínimas	31
3.3 Análise das curvas α -catenárias	33
4 Superfícies mínimas singulares de rotação	45
4.1 Um resultado de caracterização	45
4.2 Superfícies mínimas singulares de rotação em que \mathbf{a} e L são paralelos	55
4.3 Superfícies mínimas singulares de rotação com $L \subseteq \mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$	58
4.4 Superfícies helicoidais	60

5	Princípio de tangência e superfícies α-mínimas	63
5.1	Princípio da tangência e comparação entre superfícies mínimas singulares . . .	63
5.2	Comparação entre superfícies α -mínimas rotacionais e cilíndricas	65
5.3	Não-existência de superfícies α -mínimas dadas por gráficos completos . . .	68
	Bibliografia	69

Lista de Figuras

3.1	α -catenária, $\alpha = \frac{1}{2}$	43
3.2	Cilindro α -catenário, $\alpha = \frac{1}{2}$	43
3.3	α -catenária, $\alpha = 2$	43
3.4	Cilindro α -catenário, $\alpha = 2$	43
3.5	α -catenária, $\alpha = -2$	44
3.6	Cilindro α -catenário, $\alpha = -2$	44
4.1	Geratriz de superfície de revolução com $\alpha = 2$	49
4.2	Superfície de rotação em torno do eixo-z gerada pela curva em 4.1.	50
4.3	Solução do tipo 1 assintótica à $z = \sqrt{\alpha} \ x$, $\alpha = 2$	56
4.4	Solução do tipo 4, $\alpha = 2$	56
4.5	Solução do tipo 3, $\alpha = 1$	56
4.6	Solução de tipo (i) com $\alpha = -3$	57
4.7	Solução de tipo (ii) com $\alpha = -3$	57
4.8	Solução de tipo (iii) com $\alpha = -0,3$	58

Introdução

De acordo com López [20], desde o início do século XIX matemáticos como Lagrange, Poisson, Cisa de Gresy, desenvolveram estudos na busca de estabelecer a equação diferencial que determina uma superfície S com bordo C e área A , onde S está suspensa pelo seu próprio peso (supondo que S seja feito de um material flexível e de densidade uniforme σ por unidade de área). Sob o efeito do peso, a superfície S atinge um ponto de equilíbrio quando a altura de seu centro de gravidade é um extremo local. Poisson em particular considerou superfícies que são expostas a arbitrário campo de forças $F = (X, Y, Z)$. Um caso específico é dado quando o campo de força é induzido pelo campo vertical gravitacional, i.e, $X = Y = 0$ e $Z = g\sigma$, onde g denota a constante gravitacional e σ é a densidade de S . Quando a superfície é dado pelo gráfico de uma função $z = u(x, y)$ definida sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a equação obtida para tal modelo assumindo $g\sigma = 1$ é dada por

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{1}{u\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}. \quad (1)$$

Seguindo a terminologia Dierkes em [9], dizemos que $z = u(x, y)$, solução de (1), fornece o gráfico de uma *Superfície mínima singular*.

Particularmente, Poisson observou que se uma função u de uma única variável x é solução de (1), então (1) é reduzida a

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right)' = \frac{1}{u\sqrt{1 + u'^2}}, \quad (2)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{u''}{1 + u'^2} = \frac{1}{u}, \quad (3)$$

cuja solução é uma catenária $u(x) = \frac{1}{c} \cosh(cx + d)$, $c \neq 0, c, d \in \mathbb{R}$. Tal fato motivou novas investigações sobre a catenária 2-dimensional nos anos de 1980 e 1990, veja [2], [10], [21]. No caso bidimensional da catenária, como indicado por López [18], uma superfície dada pelo gráfico de uma função que satisfaz (1) é descrita por uma superfície de massa constante em equilíbrio, suspensa a partir de uma curva e pendurada sob o seu próprio peso que atinge seu centro de gravidade no ponto mais baixo.

Introduzindo um parâmetro α na equação (1) da forma

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |\nabla u|^2}}. \quad (4)$$

As superfícies dadas por gráficos de soluções de (4) são conhecidas na literatura como superfícies singulares α -mínimas. Dada uma direção $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e definindo os conjuntos

$$\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a}) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{a} \rangle = 0\}, \quad \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{a} \rangle > 0\}$$

tem-se uma definição mais geral de superfície singular α -mínima M . Seja $M \subset \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ uma superfície regular suave orientada, M é uma superfície α -mínima com relação a um vetor \mathbf{a} se satisfaz a seguinte equação em termos da curvatura média

$$2H(p) = \alpha \frac{\langle N(p), \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle}, \quad p \in M, \quad (5)$$

onde N é o campo de vetores normais unitários.

A introdução deste novo parâmetro α e do vetor \mathbf{a} é interessante, pois assim são obtidos, de (5), os seguintes casos clássicos de superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$.

- Se $\alpha = 0$ então $H(p) = 0 \forall p \in M$, logo M é uma superfície mínima.
- Se $\alpha = -2$ e $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, M é uma superfície mínima no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .
- Se $\alpha = 1$ e $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, obtemos o caso bidimensional análogo da catenária.

Uma superfície M , solução de (5), é um ponto crítico do seguinte funcional

$$E(M) = \int_M \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha dM, \quad (6)$$

definido na literatura segundo López [17] como energia potencial de M na direção de \mathbf{a} e peso α .

onde dM é a medida sobre M induzida pelo produto interno. Recentemente, Rafael López estudou a relação entre a geometria de uma superfície mínima singular compacta e a geometria do seu bordo, veja [16]. Além disso, existem outros trabalhos nesta direção devidos à Rafael López, Keyper e Ulrich Dierkes, para mais interesse veja [17],[18],[19],[11], [15].

Neste trabalho será apresentado um estudo de superfícies mínimas singulares baseado principalmente no trabalho de Rafael López em [17], onde foram classificadas superfícies mínimas singulares que são invariantes por grupos a 1-parâmetros de translação e rotação.

- O capítulo 1 é de preliminares, onde se apresentarão resultados, notações e conceitos básicos necessários para a compreensão do texto.
- No segundo capítulo, será dada a definição de superfície mínima singular e a sua respectiva equação diferencial. Na segunda seção mostraremos que uma superfície que satisfaz (5) é um ponto crítico do funcional (6). Na terceira seção se provará que uma superfície mínima singular é uma superfície mínima no espaço hiperbólico \mathbf{H}^3 quando $\alpha = -2$. De modo geral, será demonstrado que uma superfície mínima singular é uma superfície mínima em um espaço conforme.
- No terceiro capítulo, serão estudadas superfícies mínimas singulares que são cilindros generalizados, será provado que as únicas superfícies cilíndricas α -mínimas com relação a direção \mathbf{a} são planos paralelos a \mathbf{a} ou cilindros α -catenários. Ademais, conheceremos algumas das caracterizações geométricas das α -catenárias dependendo do sinal de α .
- No capítulo 4, serão abordados alguns resultados sobre a classificação de superfícies de rotação α -mínimas em relação a um vetor \mathbf{a} . Na primeira seção do capítulo 4 será apresentado um resultado de caracterização para superfícies α -mínimas de rotação em torno de um eixo L . Na segunda e terceira parte serão estudados superfícies α -mínimas de revolução tais que \mathbf{a} e L são paralelos e tais que L e \mathbf{a} são ortogonais. Na última seção vai ser provado que as superfícies helicoidais α -mínimas são superfícies de rotação.
- No último capítulo, será usado o princípio do máximo para superfícies α -mínimas para, assim obter algum controle das superfícies α -mínimas quando α é negativo. Particularmente, vai ser provado um teorema que mostra que não existem gráficos inteiros α -mínimos se $\alpha < 0$.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, serão apresentadas notações, conceitos e resultados básicos que serão necessários para compreensão e desenvolvimento dos resultados demonstrados nos capítulos subsequentes deste trabalho.

1.1 Curvas planas e superfícies regulares

Nesta seção serão estabelecidos resultados básicos e notações sobre curvas planas e superfícies. Nossas principais referências são os livros [3, 26]. Começamos abordando brevemente as curvas em \mathbb{R}^2 .

Definição 1.1. Uma curva plana diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dizemos ainda que

1. γ é regular se o seu vetor tangente $\gamma'(t)$ é não-nulo para todo $t \in I$.
2. γ está parametrizada pelo comprimento de arco se é regular e se para cada $t_0, t_1, t_0 < t_1$, tem-se

$$\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| = t_1 - t_0.$$

Pode-se mostrar que γ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo $t \in I$, tem-se $|\gamma'(t)| = 1$ (confira Proposição 3.4, Capítulo 1 em [26]).

Se γ está parametrizada pelo comprimento de arco, definimos o seu vetor normal unitário em $s \in I$ pelo vetor unitário $n(s)$, ortogonal a $\gamma'(s)$, de forma que $\{\gamma'(s), n(s)\}$ tem a mesma orientação que a base canônica de \mathbb{R}^2 . Variando, $s \in I$ temos que γ' e n são funções vetoriais diferenciáveis.

Como γ' é unitário, temos que $\gamma''(s)$ é proporcional a $n(s)$, para todo $s \in I$, isto é,

$$\gamma''(s) = k(s)n(s).$$

O fator de proporcionalidade k é chamado curvatura de γ em s .

Para uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, o seu vetor normal e a sua curvatura são dados respectivamente por

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{y'^2(t) + x'^2(t)}}(-y'(t), x'(t)), \quad (1.1)$$

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.2)$$

(Confira Proposição 4.2, Capítulo 1 em [26]).

Será apresentada agora uma breve abordagem para superfícies regulares de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.2. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap M$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 tal que

1. X é diferenciável em U .
2. X é um homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$ a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva.

Observação 1.1. A derivada parcial de uma função X em relação a uma variável u pode ser escrita na forma X_u ou $\frac{\partial X}{\partial u}$.

Definição 1.3. Dizemos que um vetor v é tangente a M , em um ponto $p \in M$ se $v = \alpha'(0)$ para uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\alpha(0) = p$ e $\varepsilon > 0$.

O conjunto de vetores tangentes a M num ponto p será chamado de plano tangente a M em p e será denotado por T_pM , em [3] pg. 98, é provado que T_pM é um subespaço vetorial de dimensão 2 que coincide com $dX_q(\mathbb{R}^2)$. A escolha de uma parametrização X determina uma base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de T_pM chamada base associada a X .

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $p \in M$, o produto interno natural de \mathbb{R}^3 \langle, \rangle induz um produto interno no plano tangente T_pM que indicamos por \langle, \rangle_p , tal produto é uma forma bilinear

simétrica que induz uma forma quadrática $I_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

onde $w \in T_pM$.

Entendendo que nos referimos ao plano tangente no ponto p , omitiremos o subíndice p no produto interno restrito ao plano T_pM e será denotado simplesmente por \langle, \rangle .

Definição 1.4. A forma quadrática I_p em T_pM introduzida acima é chamada a primeira forma fundamental da superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in M$.

Observação 1.2. Pode-se expressar a primeira forma fundamental em termos da base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização $X(u, v)$ em p . Dado um vetor $w \in T_pM$ tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ onde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, temos que $w = \alpha'(0) = X_u(u_0, v_0)u'(0) + X_v(u_0, v_0)v'(0)$, assim

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

onde os valores das funções E, F e G são calculadas em $t = 0$ como

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \quad F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \quad G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Definição 1.5. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in M$, X uma parametrização de uma vizinhança de M no ponto $p = X(u_0, v_0)$, os termos

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \quad F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \quad G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

serão chamados de coeficientes da primeira forma fundamental de M no ponto p .

Observação 1.3. Observe que variando (u, v) em U os coeficientes da primeira forma fundamental são funções diferenciáveis em U .

Definição 1.6. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $V \subset M$ um conjunto aberto de M , dizemos que um campo diferenciável de vetores normais sobre V é uma aplicação diferenciável $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a T_qM em q .

Dada uma parametrização $X : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ em uma vizinhança de $p \in M$, temos que o vetor normal unitário N em $q = X^{-1}(p)$ é determinado pela seguinte expressão

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q),$$

onde \wedge indica o produto vetorial usual do espaço Euclidiano. O resultado anterior pode ser verificado em [3] na Seção 2.4 página 102.

Definição 1.7. Dizemos que uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se ela admite globalmente um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários.

O campo diferenciável N também é chamado aplicação de Gauss. A aplicação de Gauss é diferenciável, logo a diferencial dN_p de N em $p \in M$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{N(p)}S^2$, onde S^2 é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 , dado que os espaços T_pM em $T_{N(p)}S^2$ são paralelos em \mathbb{R}^3 , podemos identificá-los como espaços vetoriais, de forma que a aplicação pode ser olhada como um endomorfismo em T_pM .

Proposição 1.1. A diferencial $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta.

Demonstração. Veja [3] página 165-166. □

Como $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é autoadjunta, então dN_p induz uma forma quadrática Q no espaço T_pM dada por $Q(w) = \langle dN_p(w), w \rangle$ onde $w \in T_pM$.

Definição 1.8. A forma quadrática II_p , definida em T_pM por

$$II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$$

é chamada segunda forma fundamental de M em p .

Pelo fato de $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ ser autoadjunta, pode-se obter uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ do espaço T_pM tal que $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2e_2$ (isto é, e_1, e_2 são autovetores e $-k_1, -k_2$ são autovalores de dN_p). Ademais os valores k_1, k_2 são o máximo e o mínimo ($k_1 \geq k_2$), respectivamente, da forma quadrática $Q(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$ sobre o círculo unitário de T_pM .

Observação 1.4. Os resultados da álgebra linear usados anteriormente podem ser consultados em [3], no apêndice do Capítulo 3, páginas 257-259.

Definição 1.9. As funções k_1, k_2 definidas anteriormente são chamadas de curvaturas principais em p , as direções dadas pelos autovetores $\{e_1, e_2\}$ são chamadas direções principais.

Definição 1.10. Seja $p \in M$ e seja $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ a diferencial da aplicação de Gauss, o negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de M em p . Em termos das curvaturas principais k_1, k_2 , pode-se escrever da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Dada uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ e seja $X : U \rightarrow M$ uma parametrização num ponto $p \in M$, seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em M , com $\alpha(0) = p$, a segunda forma fundamental pode ser escrita localmente da seguinte forma

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2,$$

em que

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Definição 1.11. As funções definidas em (1.3) são chamadas coeficientes da segunda forma fundamental.

É possível definir a curvatura média de uma superfície M num ponto p em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

Proposição 1.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in M$, sejam E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de M no ponto p , e, f e g os coeficientes da segunda forma fundamental de M no ponto p , então a curvatura média é dada pela seguinte equação

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Demonstração. Veja [3], Seção 3.3, páginas 181-184. □

Definição 1.12. Dizemos que uma superfície regular M do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é mínima se a sua curvatura média H é identicamente nula.

No que segue, abordaremos duas classes importantes de superfícies de \mathbb{R}^3 , que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Em particular, estamos interessados em superfícies α -mínimas que satisfazem uma propriedade geométrica particular, isto é, ser invariantes por movimentos rígidos a 1-parâmetro em \mathbb{R}^3 , a saber, o grupo de translações e o grupo de rotações.

Vejamos as seguintes definições:

Definição 1.13. Do grupo de isometrias do espaço \mathbb{R}^3 definimos os seguintes subgrupos a 1-parâmetro, tendo a composição de funções como operação:

1. Grupo de Translações em uma direção w : $\mathbb{T}(w) = \{T_t^w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : T_t^w(p) = p + tw, t \in \mathbb{R}\}$.
2. Grupo de Rotações em torno de um eixo w : $\mathbb{O}(w) = \{A_t^w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : A_t^w \text{ é uma transformação ortogonal que fixa o vetor } w \text{ e gera uma rotação de um ângulo } \theta \in [0, 2\pi) \text{ em torno de } w \text{ em relação a um parâmetro } t = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Observação 1.5. É fácil ver que a operação de composição é bem definida nos conjuntos anteriores, mostrando assim que dado um $w \in \mathbb{R}^3$, os conjuntos $\mathbb{T}(w)$ e $\mathbb{O}(w)$ são grupos. Com efeito, para o caso do conjunto de translações numa direção $w \in \mathbb{R}^3$ obtemos o seguinte. Dado $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^3$ temos

$$\begin{aligned}
 T_{t_1}^w \circ T_{t_2}^w(p) &= T_{t_1}^w(T_{t_2}^w(p)) \\
 &= T_{t_1}^w(p + t_2w) \\
 &= p + t_2w + t_1w \\
 &= p + (t_1 + t_2)w \\
 &= T_{t_1+t_2}^w(p).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

O elemento identidade será fornecido por T_0^w , e dada uma translação $T_t^w \in \mathbb{T}(w)$ com $t \in \mathbb{R}$ o inverso multiplicativo é dado por T_{-t}^w . A associatividade de $\mathbb{T}(w)$ decorre da associatividade da soma em \mathbb{R} .

Para o caso do conjunto de rotações em torno do vetor $w \in \mathbb{R}^3$, vamos supor, sem perda de generalidade, que w é um vetor no eixo-z. Podemos supor este fato pela possibilidade de aplicar um movimento rígido dado por uma transformação ortogonal que aplica w em um múltiplo do

vetor e_3 , isto é, o vetor coordenado que gera o eixo- z . Além disso, sabe-se que uma rotação em torno do eixo z em relação a um ângulo $\theta = t + 2k\pi$ é fornecida pela matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) & 0 \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

É claro que A_t fixa qualquer um vetor no eixo- z , de fato

$$A_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) & 0 \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Vamos ver que a composição em $\mathbb{O}(w)$ é uma operação bem definida: Sejam $A_{t_1}, A_{t_2} \in \mathbb{O}(w)$ onde, $p \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} A_{t_1} \circ A_{t_2}(p) &= A_{t_1}(A_{t_2}(p)) \\ &= A_{t_1} \begin{pmatrix} \cos(t_2) & \text{sen}(t_2) & 0 \\ -\text{sen}(t_2) & \cos(t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A_{t_1} \begin{pmatrix} p_1 \cos(t_2) + p_2 \text{sen}(t_2) \\ -p_1 \text{sen}(t_2) + p_2 \cos(t_2) \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1(\cos(t_2)\cos(t_1) - \text{sen}(t_2)\text{sen}(t_1)) + p_2(\text{sen}(t_2)\cos(t_1) + \cos(t_2)\text{sen}(t_1)) \\ -p_1 \cos(t_2)\text{sen}(t_1) + \text{sen}(t_2)\cos(t_1) + p_2(\cos(t_2)\cos(t_1) - \text{sen}(t_2)\text{sen}(t_1)) \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \cos(t_1 + t_2) + p_2 \text{sen}(t_1 + t_2) \\ -p_1 \text{sen}(t_1 + t_2) + p_2 \cos(t_1 + t_2) \\ p_3 \end{pmatrix} \\ &= A_{t_1+t_2}(p) \end{aligned} \tag{1.5}$$

O elemento identidade definido em $\mathbb{O}(w)$ é A_0^w , e dado t o elemento inverso de A_t^w é A_{-t}^w . A associatividade de $\mathbb{O}(w)$ decorre da associatividade da soma em \mathbb{R} .

Passemos agora às superfícies que são invariantes sob a ação de cada um dos grupos mencionados acima.

Definição 1.14. Dizemos que uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é invariante por um grupo de translações numa direção $w \in \mathbb{R}^3$ se $T_t^w(M) \subset M$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente, M é invariante por um grupo de rotações em torno de uma reta com direção w se $A_t^w(M) \subset M$.

Definição 1.15. Uma superfície cilíndrica (ou simplesmente cilindro) é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana (diretriz) paralelamente a uma reta fixa, denominada geratriz. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contém a curva diretriz, o cilindro é denominado cilindro reto.

Neste trabalho usaremos a seguinte parametrização para uma superfície cilíndrica

$$X(u, v) = \alpha(u) + vw, \quad (1.6)$$

onde $w \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}$, α é uma curva plana e u pertence a um intervalo I . É fácil ver que uma superfície cilíndrica parametrizada por (1.6) é invariante na direção w , i.e., dado $T_t^w \in \mathbb{T}(w)$, temos

$$\begin{aligned} T_t^w(X(u, v)) &= \alpha(u) + vw + tw \\ &= \alpha(u) + (v+t)w \\ &= X(u, v+t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Neste contexto, temos então a seguinte definição:

Definição 1.16. Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície cilíndrica se é invariante por um grupo a 1-parâmetro de translação.

Exemplo 1.1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ é uma superfície cilíndrica invariante por translação na direção $w = (0, 0, 1)$.

Exemplo 1.2. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$ é invariante por translação para qualquer direção w tal que $\langle w, (a, b, c) \rangle = 0$.

De modo análogo, definimos as superfícies de rotação:

Definição 1.17. Uma superfície de rotação é uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana (geratriz) em torno de uma reta (eixo de rotação). Nesse trabalho, usaremos uma parametrização usual de uma superfície de rotação em torno do eixo- z , gerada por uma curva plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(u) = (x(u), z(u))$, contida no plano- xz . Tal parametrização será dada por

$$X(u, v) = (x(u) \cos(v), x(u) \sin(v), z(u)) \text{ onde } v \in (0, 2\pi).$$

Observação 1.6. Podemos usar esse tipo particular de parametrização de uma superfície de rotação em torno do eixo z , pois é possível fazer um movimento rígido induzido por uma transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 . A parametrização anterior facilitará as contas feitas posteriormente.

Analogamente, as superfícies de rotação são invariantes para rotações em torno do eixo de rotação da superfície. Com efeito, dada uma parametrização de uma superfície de rotação em torno do eixo- z , i.e,

$$X(u, v) = (x(u) \cos(v), x(u) \sin(v), z(u)), \quad v \in (0, 2\pi).$$

Temos para qualquer t e uma rotação A_t em torno do eixo- z

$$\begin{aligned} A_t(X(u, v)) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \cos(v) \\ x(u) \sin(v) \\ z(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(u) \cos(v) \cos(t) + x(u) \sin(v) \sin(t) \\ -x(u) \cos(v) \sin(t) + x(u) \cos(t) \sin(v) \\ z(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(u) \cos(v-t) \\ x(u) \sin(v-t) \\ z(u) \end{pmatrix} \\ &= X(v-t+2k\pi, v), \end{aligned} \tag{1.8}$$

em que $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $v-t+2k\pi \in (0, 2\pi)$ (caso $v-t = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, basta considerar uma mudança de parâmetros da superfície, considerando o domínio $I \times (\varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$, para $0 < \varepsilon < 2\pi$). Logo a superfície de rotação gerado pela parametrização X é invariante pela rotação em torno do eixo- z .

Exemplo 1.3. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária, é claro que S^2 é invariante por rotação para qualquer direção $w \in \mathbb{R}^3$.

1.2 Equações diferenciais ordinárias

Com o objetivo de desenvolver alguns resultados sobre a teoria de superfícies mínimas singulares invariantes, precisaremos entender o comportamento de algumas curvas planas. Essas curvas serão dadas como soluções de equações diferenciais ordinárias. Sendo assim, precisaremos também dos seguintes conceitos preliminares:

Apresentamos as seguintes definições e resultados de equações diferenciais ordinárias conforme [22], páginas 78-90.

Teorema 1.1. Seja E um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e $f \in C^1(E)$, onde $C^1(E)$ é o conjunto de funções definidas em E de classe C^1 , então para cada ponto $x_0 \in E$, existe um intervalo maximal J sobre o qual o problema de valor inicial

$$\dot{X} = f(X), \quad X(0) = x_0 \quad (1.9)$$

tem uma única solução $x(t)$, i.e., se existe uma outra solução $y(t)$ sobre um intervalo I para o mesmo problema de valor inicial, então $I \subset J$ e $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I$. Além disso, o intervalo maximal J é um conjunto aberto, i.e., $J = (\alpha, \beta)$, para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Observação 1.7. Observe que podemos obter um resultado análogo para sistemas envolvendo a segunda derivada de X . Neste caso, as condições iniciais são dadas por $X(0)$ e $\dot{X}(0)$. Assim, construímos um novo sistema de primeira ordem, introduzindo uma variável $Y = \dot{X}$.

Definição 1.18. O intervalo (α, β) definido acima no Teorema 1.1 é chamado de intervalo maximal de existência da solução do problema de valor inicial (1.9).

Teorema 1.2. Seja E um conjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo o ponto x_0 , seja $f \in C^1(E)$, e seja (α, β) o intervalo maximal de existência da solução do problema de valor inicial (1.9), se $\beta \leq \infty$ então dado qualquer conjunto compacto $K \subset E$ existe $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.

Observação 1.8. Vale o mesmo comportamento se $-\infty < \alpha$ (Confira também o Teorema 10.12 em [12]).

A definição a seguir será dada para enunciar posteriormente o teorema do ponto fixo para contrações.

Definição 1.19. Seja V um espaço vetorial normado, uma aplicação $T : V \rightarrow V$ chama-se uma contração sobre V se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todo $u, v \in V$

$$\|Tu - Tv\| \leq \lambda \|u - v\|.$$

Teorema 1.3. Teorema do ponto fixo para contrações.

Seja V um espaço vetorial normado e completo, se $T : V \rightarrow V$ é uma contração, então existe um único ponto $u \in V$ tal que $T(u) = u$.

1.3 Conceitos básicos de variedades Riemannianas

Nesta seção apresentamos brevemente conceitos básicos de variedades Riemannianas que serão empregados para mostrar que superfícies mínimas singulares podem ser vistas como superfícies mínimas em um espaço conforme ao espaço Euclidiano. Nossa principal referência é dada por [4].

Definição 1.20. Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M^3 é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M^3$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p com $\phi(x_1, x_2, x_3) = q \in \phi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\phi(e_i)$ então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, x_2, x_3)$$

é uma função diferenciável em U .

Exemplo 1.4. Seja $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. Em cada $T_p \mathbb{R}_+^3$ considere o produto interno $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_p = \frac{1}{z^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual definido sobre \mathbb{R}^3 . O produto $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_p$ fornece uma métrica Riemanniana no espaço \mathbb{R}_+^3 . O par $(\mathbb{R}_+^3, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ é uma variedade Riemanniana chamada Espaço Hiperbólico e denotado por \mathbb{H}^3 .

Definição 1.21. Seja $\chi(M)$ o conjunto do campo de vetores de classe C^∞ sobre M e \mathbb{D} o anel das funções reais de classe C^∞ . Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que se indica por $\nabla(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1. \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z.$$

$$2. \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

$$3. \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in \mathbb{D}$.

Definição 1.22. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e Q ao longo de c , tivermos $\langle P, Q \rangle = \text{Constante}$.

Teorema 1.4. Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. veja [4] Seção 3, página 61-62. □

Capítulo 2

Introdução às superfícies mínimas singulares

Neste capítulo, será apresentada uma introdução às superfícies mínimas singulares. Inicialmente, apresentaremos a definição de superfície mínima singular associada a um número real α e um vetor não-nulo \mathbf{a} . Através da definição iremos obter a equação diferencial parcial associada, em que soluções desta equação descrevem gráficos mínimos singulares. Na sequência, apresentaremos dois dos principais pontos de vista que motivam o estudo de tais superfícies, a saber, superfícies mínimas singulares como pontos críticos de um determinado funcional energia e superfícies mínimas singulares como superfícies mínimas de um espaço conforme ao espaço Euclidiano.

2.1 Definição e equação diferencial parcial associada

Como descrevemos na introdução, dada uma direção $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, definimos os conjuntos

$$\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a}) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{a} \rangle = 0\}, \quad \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{a} \rangle > 0\}.$$

Definição 2.1. Uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ é uma superfície mínima singular em relação a um vetor não-nulo \mathbf{a} e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ se a curvatura média H de M satisfaz

$$2H(p) = \alpha \frac{\langle N(p), \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle}, \quad (2.1)$$

Para todo $p \in M$, em que N denota o campo de vetores unitários e normais a M .

Ao longo do texto, iremos nos referir a uma superfície mínima singular em relação a um vetor não-nulo \mathbf{a} e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ como uma *superfície α -mínima com relação ao vetor \mathbf{a}* .

Observação 2.1. A presença do número 2 na equação ((2.1)) ficará clara mais à frente quando calcularmos a primeira variação do funcional α -energia a ser definido adiante.

Observação 2.2. Observe que as superfícies mínimas clássicas, são superfícies α -mínimas, para $\alpha = 0$ e com relação a qualquer vetor \mathbf{a} .

Vamos considerar agora o caso particular em que M é um gráfico de uma função diferenciável e obter a equação parcial correspondente a equação (2.1). Depois de fazer um movimento rígido, suponha $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, dada uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, então se o gráfico de $z = u(x, y)$ é uma superfície α -mínima com direção \mathbf{a} então

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

De fato, assumimos como parametrização do gráfico de $z = u(x, y)$

$$\phi(x, y) = (x, y, u(x, y)), \text{ onde } (x, y) \in \Omega.$$

Escrevendo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ temos

$$\phi_x = (1, 0, u_x), \quad \phi_y = (0, 1, u_y), \quad \phi_{xx} = (0, 0, u_{xx}),$$

$$\phi_{xy} = (0, 0, u_{xy}), \quad \phi_{yy} = (0, 0, u_{yy}).$$

Assim

$$N(x, y) = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$e = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f = \frac{u_{xy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad g = \frac{u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De onde segue que

$$2H = \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} = \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}.$$

Notamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = \frac{u_{xx}(1+u_x^2+u_y^2) - (u_x u_{xx} + u_y u_{yx})u_x}{(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = \frac{u_{yy}(1+u_x^2+u_y^2) - (u_y u_{yy} + u_x u_{xy})u_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $\nabla u = (u_x, u_y)$, temos que $\sqrt{1+|\nabla u|^2} = \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$. Logo

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right).$$

Desenvolvendo as derivadas parciais, obtemos

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = \frac{(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx}}{(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2H.$$

Como

$$\frac{\alpha}{u\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle \phi, \mathbf{a} \rangle},$$

o gráfico de $z = u(x, y)$ é uma superfície α -mínima com relação a $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ se, e somente se,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Observação 2.3. A expressão acima é equivalente à seguinte equação

$$\frac{(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx}}{(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}.$$

Portanto,

$$u \left[(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx} \right] = \alpha(1+u_x^2+u_y^2),$$

ou seja,

$$u(1+u_x^2)u_{yy} - 2uu_x u_y u_{xy} + u(1+u_y^2)u_{xx} - \alpha(1+u_x^2+u_y^2) = 0.$$

Esta informação será importante no Capítulo 5.

2.2 Superfície mínima singular como ponto crítico de um funcional

Nesta seção provaremos que uma superfície α -mínima singular em relação a um vetor \mathbf{a} é o ponto crítico de um funcional de energia potencial.

Definição 2.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, definimos uma variação em M com suporte compacto $\Omega \subset M$ como uma aplicação diferenciável

$$F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \varepsilon > 0,$$

tal que $F(x, 0) = x$, para $x \in M$, $F(\cdot, t) = Id$ fora do conjunto compacto Ω , i.e.,

$$F(x, t) = x$$

para todo $x \in M \setminus \Omega$. O campo vetorial $F_t(x, 0) = \xi(x)$, restrito a M , é chamado de campo vetorial variacional.

Neste trabalho vamos considerar o seguinte problema variacional no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ um vetor não-nulo. Seja $M \subset \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ uma superfície orientada e $R \subset M$ uma região compacta. Definimos a α -Energia potencial de R na direção \mathbf{a} como

$$E(R) = \int_R \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha dM,$$

em que p é o vetor posição e dM é medida sobre M em relação a métrica induzida pela primeira forma quadrática. Seja

$$\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$$

uma variação de suporte compacto $K \subset R$ de M cujo campo vetorial variacional é $\xi = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0}$.

Fazendo $E(t) = E(\Phi(\cdot, t))$, mostraremos que a primeira variação de E é dada por

$$E'(0) = - \int_R \left(2H - \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} \right) \langle p, \mathbf{a} \rangle^{\alpha-1} \langle N, \xi \rangle dM, \quad (2.2)$$

onde N denota a aplicação normal de Gauss e H a curvatura média de M . Para provar a equação (2.2) precisaremos do seguinte resultado apresentado em [3], página 323:

Teorema 2.1. Teorema de Gauss-Green. Seja $F = (P, Q)$ um campo vetorial, onde $P(u, v)$, $Q(u, v)$ são funções diferenciáveis em uma região $A \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada por $u = u(s), v = v(s)$ e denotada por C , então

$$\int \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv = \int_C \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds.$$

Vamos prosseguir com o cálculo de $E'(0)$. Para tal, deve-se dizer que o seguinte raciocínio segue as ideias apresentadas no livro [3] no Capítulo 3 páginas 234-236 no qual a derivada de um funcional área é calculada.

Consideramos uma variação de suporte compacto em uma vizinhança coordenada $X(U)$ como definida acima. Além disso, vamos assumir que X é isotérmica, i.e $E = G = \lambda > 0$ e $F = 0$. Em [25] Shiing-shen Chern apresenta uma prova que mostra que existem sistemas isotérmicos de coordenadas para qualquer superfície regular. Seja

$$\Phi : X(U) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$$

uma variação de suporte compacto K , definida por $\Phi(p, t) = p + t\xi(p)$. Em coordenadas, escreveremos $\Phi(u, v, t) = X(u, v) + t\xi(u, v)$, para $(u, v) \in U$. Considere D um domínio limitado tal que $\bar{D} \subset X(U)$ e $K \subset D$. Neste caso, observe que $\xi \equiv 0$ em $\bar{D} \setminus K$. Vamos considerar um funcional mais geral

$$E(D) = \int_D e^\varphi dM,$$

onde φ é uma função diferenciável definida em D .

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixado, a aplicação $X^t(u, v) = \Phi(X(u, v), t)$. Temos

$$X_u^t = \frac{\partial X^t}{\partial u} = X_u + t\xi_u,$$

$$X_v^t = \frac{\partial X^t}{\partial v} = X_v + t\xi_v.$$

Denotando por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t , obtemos

$$E^t = E + 2t\langle X_u, \xi_u \rangle + t^2\langle \xi_u, \xi_u \rangle,$$

$$F^t = F + t(\langle X_u, \xi_v \rangle + \langle X_v, \xi_u \rangle) + t^2 \langle \xi_u, \xi_v \rangle,$$

$$G^t = G + 2t \langle X_v, \xi_v \rangle + t^2 \langle \xi_v, \xi_v \rangle.$$

Podemos decompor ξ em suas parte tangente e normal:

$$\xi(u, v) = \langle \xi, N \rangle N + AX_u + BX_v,$$

onde $A|_{\partial D} = 0$ e $B|_{\partial D} = 0$ e $AX_u + BX_v = P$ é a projeção no plano tangente. Logo

$$\xi_u = \langle \xi, N \rangle_u N + \langle \xi, N \rangle N_u + P_u,$$

$$\xi_v = \langle \xi, N \rangle_v N + \langle \xi, N \rangle N_v + P_v.$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle X_u, \xi_u \rangle &= -e \langle \xi, N \rangle + \langle P_u, X_u \rangle, \\ \langle X_v, \xi_v \rangle &= -g \langle \xi, N \rangle + \langle P_v, X_v \rangle, \\ \langle X_u, \xi_v \rangle &= -f \langle \xi, N \rangle + \langle P_v, X_u \rangle, \\ \langle X_v, \xi_u \rangle &= -f \langle \xi, N \rangle + \langle P_u, X_v \rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo

$$\begin{aligned} E^t &= E + 2t(-e \langle \xi, N \rangle + \langle P_u, X_u \rangle) + t^2 \langle \xi_u, \xi_u \rangle, \\ F^t &= F + t(-2f \langle \xi, N \rangle + \langle P_v, X_u \rangle + \langle P_u, X_v \rangle) + t^2 \langle \xi_u, \xi_v \rangle, \\ G^t &= G + 2t(-g \langle \xi, N \rangle + \langle P_v, X_v \rangle) + t^2 \langle \xi_v, \xi_v \rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2t \langle \xi, N \rangle (Eg - 2Ff + Ge) + \\ &\quad + t(2E \langle P_v, X_v \rangle + 2G \langle P_u, X_u \rangle - 2F(\langle P_v, X_u \rangle + \langle P_u, X_v \rangle)) + R_1, \end{aligned}$$

onde R_1 é uma expressão polinomial de grau 4 em t . Escrevendo

$$\begin{aligned} P &= AX_u + BX_v, \\ P_u &= A_u X_u + AX_{uu} + B_u X_v + BX_{vu}, \\ P_v &= A_v X_u + AX_{uv} + B_v X_v + BX_{vv}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

e lembrando que X é isotérmica então $\lambda = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $F = 0$, temos

$$\begin{aligned}\langle P_v, X_v \rangle &= A \langle X_{uv}, X_v \rangle + B_v \lambda + \frac{B \lambda_v}{2}, \\ &= A \frac{\lambda_u}{2} + B_v \lambda + \frac{B \lambda_v}{2}, \\ \langle P_u, X_u \rangle &= A_u \lambda + \frac{A \lambda_u}{2} + \frac{B \lambda_v}{2}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle P_v, X_v \rangle + \langle P_u, X_u \rangle &= A \lambda_u + A_u \lambda + B \lambda_v + B_v \lambda, \\ &= (A \lambda)_u + (B \lambda)_v.\end{aligned}\tag{2.7}$$

De onde segue

$$E^t G^t - (F^t)^2 = \lambda^2 - 4t \lambda^2 H \langle \xi, N \rangle + 2t \lambda ((A \lambda)_u + (B \lambda)_v) + R_1.$$

Assim

$$E(t) = \int_D e^\varphi \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv,$$

em que φ é uma função diferenciável definida em $D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fazendo $V(t) = e^\varphi \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}$, obtemos

$$V'(t) = e^\varphi \frac{d\varphi}{dt} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} + \frac{e^\varphi \frac{d}{dt}(E^t G^t - (F^t)^2)}{2\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}}.$$

Como

$$\frac{d}{dt}(E^t G^t - (F^t)^2) = -4\lambda^2 H \langle \xi, N \rangle + 2\lambda ((A \lambda)_u + (B \lambda)_v) + R_1'(t),$$

temos que

$$\frac{d}{dt}(E^t G^t - (F^t)^2)|_{t=0} = 4\lambda^2 H \langle \xi, N \rangle + 2\lambda ((A \lambda)_u + (B \lambda)_v),$$

pois $R_1'(0) = 0$.

Dado que φ está definida na variação, podemos escrever φ nas coordenadas (u, v, t) da forma

$$\varphi(u, v, t) = \varphi(X(u, v) + t\xi(u, v)).$$

Sendo assim, temos

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_{x_1} \xi_1 + \varphi_{x_2} \xi_2 + \varphi_{x_3} \xi_3,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \langle \nabla \varphi, \frac{d\Phi}{dt} \rangle, \\
&= \langle \nabla \varphi, \xi \rangle, \\
&= \langle \nabla \varphi, \langle \xi, N \rangle N + AX_u + BX_v \rangle, \\
&= \langle \xi, N \rangle \langle \nabla \varphi, N \rangle + A\varphi_u + B\varphi_v,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

em que $\nabla \varphi$ é o gradiente de φ em \mathbb{R}^3 . Lembrando que $\sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}(0) = \lambda$, temos

$$V'(0) = e^\varphi \lambda (\langle \xi, N \rangle \langle \nabla \varphi, N \rangle + A\varphi_u + B\varphi_v) + e^\varphi (-2\lambda H \langle \xi, N \rangle + (A\lambda)_u + (B\lambda)_v).$$

Logo

$$\begin{aligned}
E'(0) &= \int_{\overline{D}} (\langle \nabla \varphi, N \rangle - 2H) \langle \xi, N \rangle e^\varphi \lambda dM + \int_{\overline{D}} ((e^\varphi \varphi_u) \lambda A + (e^\varphi \varphi_v) \lambda B + e^\varphi (A\lambda)_u + e^\varphi (B\lambda)_v) dudv \\
&= \int_{\overline{D}} (\langle \nabla \varphi, N \rangle - 2H) e^\varphi \langle \xi, N \rangle dM + \int_{\overline{D}} ((e^\varphi A\lambda)_u + (e^\varphi B\lambda)_v) dudv.
\end{aligned}$$

Como ξ tem suporte compacto então $A = B = 0$ em ∂D , logo pelo teorema de Gauss-Green

$$\int_{\overline{D}} ((e^\varphi A\lambda)_u + (e^\varphi B\lambda)_v) dudv = \int_{\partial \overline{D}} -(e^\varphi B\lambda) \frac{du}{ds} + (e^\varphi A\lambda) \frac{dv}{ds} = 0.$$

Portanto

$$E'(0) = \int_{\overline{D}} (\langle \nabla \varphi, N \rangle - 2H) \langle \xi, N \rangle e^\varphi \lambda dM,$$

em particular, se $e^\varphi = \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha$ temos que $\varphi = \alpha \log \langle p, \mathbf{a} \rangle$ então $\nabla \varphi = \frac{\alpha}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$ e assim

$$\begin{aligned}
E'(0) &= \int_D \left(\frac{\alpha}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} \langle N, \mathbf{a} \rangle - 2H \right) \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha \langle \xi, N \rangle dM, \\
&= - \int_D (2H \langle p, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle N, \mathbf{a} \rangle) \langle p, \mathbf{a} \rangle^{\alpha-1} \langle \xi, N \rangle dM, \\
&= - \int_D \left(2H - \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} \right) \langle p, \mathbf{a} \rangle^{\alpha-1} \langle N, \xi \rangle dM.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Obtendo (2.2), segue claramente que $X(U)$ é um ponto crítico de E para toda variação de suporte compacto se, e somente se,

$$2H = \alpha \frac{\langle N(p), \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle}, \quad \forall p \in M.$$

2.3 Superfícies mínimas singulares como superfícies mínimas em um espaço conforme ao espaço Euclidiano

A seguir provaremos que uma superfície mínima singular em \mathbb{R}^3 é uma superfície mínima em um espaço conforme ao espaço Euclidiano. Em particular, uma superfície α -mínima $M \subset \mathbb{R}^3$ com relação a $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ é mínima no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 se $\alpha = -2$.

É claro que dado uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$, a geometria da superfície será influenciada pela métrica particular em uso. Vamos relacionar a noção de curvatura média H de uma superfície S no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e em (\mathbb{R}^3, g) , em que g é uma métrica conforme à métrica Euclidiana. Antes definiremos o seguinte:

Definição 2.3. Diz-se que duas métricas Riemannianas g e \bar{g} definidas em \mathbb{R}^3 são conformes se existe uma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{g} = e^\varphi g$.

No que segue, assumamos $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função diferenciável, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, considere $g = \langle, \rangle$ o produto interno usual. Se $\bar{g} = e^\varphi g$ e $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ são vetores ortogonais em \mathbb{R}^3 então

$$\bar{g}(w_1, w_2) = e^\varphi g(w_1, w_2) = 0.$$

Daí segue que se N é um vetor normal unitário para a superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ então N é também um vetor normal para S no espaço (\mathbb{R}^3, \bar{g}) . No entanto, tal vetor N não seria necessariamente um vetor unitário, pois

$$\bar{g}(N, N) = e^\varphi g(N, N) = e^\varphi.$$

Assim, um vetor unitário e normal a S é da forma

$$\bar{N} = \frac{N}{\sqrt{\bar{g}(N, N)}} = \frac{N}{e^{\frac{\varphi}{2}}} = e^{-\frac{\varphi}{2}} N.$$

Além disso se $\{w_1, w_2\}$ é uma base ortonormal do espaço $T_p S$, considerando $S \subseteq \mathbb{R}^3$, temos que $\{e^{-\frac{\varphi}{2}} w_1, e^{-\frac{\varphi}{2}} w_2\}$ é uma base ortonormal para S em (\mathbb{R}^3, \bar{g}) . Lembrando que para uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ as direções principais em $T_p S$ são vetores ortonormais $\{e_1, e_2\}$, i.e, tais que $dN_p(e_i) = -k_i e_i$.

No entanto ao mudar a métrica do ambiente, a derivação de vetores deve ser compatível com a métrica, tal derivação é chamada conexão Riemanniana, como foi definida anteriormente. Vamos utilizar ∇ para derivação em \mathbb{R}^3 , sendo assim $dN_p(e_i) = \nabla_{e_i} N(p)$. Pode-se mostrar que dado $\bar{g} = e^\varphi g$, então $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana correspondente a \bar{g} , onde

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

em que

$$S(X, Y) = \frac{1}{2} [d\varphi(X)Y + d\varphi(Y)X - g(X, Y)\nabla\varphi],$$

para mais detalhes veja a Proposição 1.2 em [24].

Observe agora que se $\{e_1, e_2\}$ são direções principais para $S \subseteq \mathbb{R}^3$ então $\{e^{-\frac{\varphi}{2}} e_1, e^{-\frac{\varphi}{2}} e_2\}$ são direções principais para $S \subseteq \mathbb{R}^3$ com produto interno \bar{g} . De fato, como $\bar{N} = e^{-\frac{\varphi}{2}} N$, temos

$$\bar{\nabla}_{e^{-\frac{\varphi}{2}} e_i} \bar{N} = \nabla_{e^{-\frac{\varphi}{2}} e_i} (e^{-\frac{\varphi}{2}} N) + S(e^{-\frac{\varphi}{2}} e_i, e^{-\frac{\varphi}{2}} N).$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{e^{-\frac{\varphi}{2}} e_i} (e^{-\frac{\varphi}{2}} N) &= d(e^{-\frac{\varphi}{2}} N)(e^{-\frac{\varphi}{2}} e_i), \\ &= e^{-\frac{\varphi}{2}} d(e^{-\frac{\varphi}{2}} N)(e_i), \\ &= e^{-\frac{\varphi}{2}} (d(e^{-\frac{\varphi}{2}})(e_i)N + e^{-\frac{\varphi}{2}} dN(e_i)), \\ &= -e^{-\varphi} \frac{1}{2} d\varphi(e_i)N - e^{-\varphi} k_i e_i, \\ &= -e^{-\varphi} \left(\frac{d\varphi(e_i)N}{2} + k_i e_i \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 S(e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i, e^{-\frac{\varphi}{2}}N) &= \frac{1}{2}[d\varphi(e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i).(e^{-\frac{\varphi}{2}}N) + d\varphi(e^{-\frac{\varphi}{2}}N).(e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i) - \langle e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i, e^{-\frac{\varphi}{2}}N \rangle \nabla\varphi], \\
 &= \frac{1}{2}[e^{-\varphi}(d\varphi(e_i)N + d\varphi(N)e_i - \langle e_i, N \rangle \nabla\varphi)], \\
 &= \frac{1}{2}[e^{-\varphi}(d\varphi(e_i)N + d\varphi(N)e_i)].
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Segue de (2.10) e (2.11) que

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_{e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i} \bar{N} &= \nabla_{e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i} (e^{-\frac{\varphi}{2}}N) + S(e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i, e^{-\frac{\varphi}{2}}N), \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\varphi}[d\varphi(e_i)N + 2k_i e_i - d\varphi(e_i)N - d\varphi(N)e_i], \\
 &= -\frac{1}{2}e^{-\varphi}[2k_i - d\varphi(N)]e_i, \\
 &= -e^{-\frac{\varphi}{2}}\left(k_i - \frac{d\varphi(N)}{2}\right)(e^{-\frac{\varphi}{2}}e_i), \\
 &= -e^{-\frac{\varphi}{2}}\left(k_i - \frac{d\varphi(N)}{2}\right)\bar{e}_i.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Segue que $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ são direções principais com curvaturas principais dadas por

$$\bar{k}_i = e^{-\frac{\varphi}{2}}\left(k_i - \frac{d\varphi(N)}{2}\right).$$

Calculando a curvatura média, temos

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2}, \\
 &= e^{-\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{d\varphi(N)}{2}\right), \\
 &= e^{-\varphi}\left(H - \frac{\langle \nabla\varphi, N \rangle}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Observe que $\bar{H} = 0$ se, e somente se, $2H = \langle \nabla\varphi, N \rangle$.

Em particular, se $\varphi(p) = \log \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha$, temos

$$\bar{H} = H - \frac{\langle \nabla\varphi, N \rangle}{2},
 \tag{2.14}$$

logo,

$$\bar{H} = 2H - \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle},$$

Assim, temos que se M é uma superfície α -mínima em relação a um vetor \mathbf{a} , então M é uma superfície mínima na variedade Riemanniana $(\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}), e^\varphi \langle \cdot, \cdot \rangle)$, em que $\varphi(p) = \log \langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha$.

Considere agora espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , o qual é definido por uma métrica $\bar{g} = \frac{1}{z^2}g = z^{-2}g$ portanto

$$e^\varphi = z^{-2} \iff \varphi = \log(z)^{-2}.$$

Para incluir o espaço hiperbólico como caso particular do que descrevemos acima, consideramos o espaço $\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ com $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Como $p = (x, y, z)$ então $\langle p, \mathbf{a} \rangle = z$. Em tal caso

$$\langle p, \mathbf{a} \rangle > 0 \iff z > 0.$$

Logo $\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}) = \mathbb{R}_+^3$. Além disso, $\varphi(p) = \log(z)^{-2} = \log \langle p, \mathbf{a} \rangle^{-2}$. Segue então que uma superfície α -mínima, $\alpha = -2$, em relação ao vetor $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ é uma superfície mínima no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Capítulo 3

Superfícies mínimas singulares cilíndricas

Neste capítulo serão estudadas superfícies mínimas singulares que são cilindros generalizados. Apresentaremos inicialmente uma classe especial de curvas, denominadas α -catenárias e mostraremos que os cilindros α -mínimos tem tais curvas α -catenárias como diretrizes. Na sequência, será apresentado um resultado sobre caracterização de superfícies α -mínimas de translação. Uma vez que as curvas α -catenárias possuem papel fundamental em tal caracterização, encerraremos o capítulo com uma análise destas curvas.

3.1 Cilindros α -catenários

Nesta seção estudaremos os cilindros α -catenários, uma classe importante de superfícies mínimas singulares, que será fundamental na classificação de superfícies singulares mínimas cilíndricas. A primeira parte desta seção é dedicada ao estudo da versão 1-dimensional de (2.1), de acordo com a seguinte definição:

Definição 3.1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, dizemos que uma curva γ é uma curva α -catenária em relação a \mathbf{w} se γ satisfaz

$$k(s) = \alpha \frac{\langle n(s), \mathbf{w} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{w} \rangle}, \quad (3.1)$$

onde $n(s)$ é vetor normal de γ no ponto s .

Observação 3.1. Uma solução imediata de (3.1) no caso $k(s) = 0$ para todo $s \in I$, seria uma curva tal que $\langle n(s), \mathbf{w} \rangle = 0$, logo γ é uma linha reta paralela ao vetor \mathbf{w} . De acordo com López [17], seguiremos Dierkes [9] e chamaremos de curvas α -catenárias as soluções de (3.1) que não tenham curvatura identicamente nula,

Após um movimento rígido podemos considerar $\mathbf{w} = (0, 1)$, dado que a curvatura de uma curva é invariante por movimentos rígidos. Além disso, é possível escrever localmente uma α -catenária γ como o gráfico de uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ da forma $\gamma(s) = (s, f(s))$.

Pelas equações (1.1) e (1.2) temos

$$n(s) = \frac{(-f(s), s)}{\sqrt{1 + f'(s)^2}}, \quad k(s) = \frac{f''(s)}{(1 + f'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituindo em (3.1), obtém-se a equação

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = \frac{\alpha}{f(s)}. \quad (3.2)$$

Definição 3.2. O traço de uma curva parametrizada (parâmetro arbitrário)

$$\gamma(s) = (s, \cosh(s))$$

é chamado de catenária.

Vamos agora relacionar o caso $\alpha = 1$ na equação (3.2) com a definição acima. De fato, considere $\alpha = 1$ e uma solução $y = f(s)$ de (3.2). Multiplicando por $2y'$ ambos lados de (3.2), temos

$$\frac{2y'y''}{1 + y'^2} = \frac{2y'}{y}$$

fazendo a substituição $z = 1 + (y')^2$ tem-se $z = 2y'y''$, logo

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

integrando tem-se

$$\ln(z) = \ln(y^2) + \ln(c_1^2) = \ln(yc_1)^2,$$

onde aplicando exponencial segue

$$1 + (y')^2 = z = (yc_1)^2.$$

Lembrando que $y' = \frac{dy}{ds}$ temos

$$(yc_1)^2 - 1 = \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

assim,

$$\frac{c_1 dy}{\sqrt{(yc_1)^2 - 1}} = c_1 ds.$$

Integrando mais uma vez obtemos

$$\cosh^{-1}(yc_1) = c_1 s + c_2,$$

o que equivale a

$$y = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 s + c_2).$$

Assim, f determina uma catenária.

Observação 3.2. A referência para o cálculo acima é dado pelo livro [3] páginas 241-242.

Na teoria desenvolvida nesse trabalho, as α -catenárias tem um papel muito importante. A princípio, estas induzem um tipo de superfície α -mínima. Vejamos inicialmente a seguinte definição:

Definição 3.3. Uma superfície M é um cilindro α -catenário se a diretriz de M é uma curva α -catenária.

Pode-se ver que um cilindro α -catenário M é uma superfície α -mínima invariante por translação. De fato, sem perda de generalidade assumimos $\mathbf{w} = e_2$ como a direção na qual M é invariante por translação (tal escolha é possibilitada por um movimento rígido). Assim, podemos escrever M como

$$M = \{(s, t, f(s)) : s \in I, t \in \mathbb{R}, \gamma(s) = (s, 0, f(s))\},$$

onde $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$ é uma α -catenária com vetor associado $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ contido no plano- xz . Seguindo a definição 1.17 M pode ser parametrizada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + te_2, s \in I, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = |\gamma'(s)|^2,$$

$$F = \langle X_s, X_t \rangle = \langle \gamma'(s), e_2 \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_t, X_t \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1.$$

Além disso

$$N(s, t) = \frac{\gamma'(s) \wedge e_2}{|\gamma'(s) \wedge e_2|} = \frac{(-z'(s), 0, x'(s))}{\sqrt{x'(s)^2 + z'(s)^2}} = n(s).$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = \langle N, X_{ss} \rangle = \frac{x'z'' - z'x''}{\sqrt{x'(s)^2 + z'(s)^2}},$$

$$f = \langle N, X_{st} \rangle = 0,$$

$$g = \langle N, X_{tt} \rangle = 0.$$

Logo

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{x'z'' - z'x''}{(x'(s)^2 + z'(s)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(s)}{2}.$$

Como γ satisfaz

$$k(s) = \alpha \frac{\langle n(s), \mathbf{a} \rangle}{\langle \gamma'(s), \mathbf{a} \rangle},$$

em que $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ segue que M satisfaz (2.1). Portanto, M é uma superfície α -mínima em relação ao vetor $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, invariante por translações.

3.2 Superfícies cilíndricas α -mínimas

Nesta seção provaremos que as únicas superfícies cilíndricas α -mínimas com direção \mathbf{a} são planos paralelos a \mathbf{a} ou cilindros α -catenários.

Teorema 3.1. Se M é uma superfície cilíndrica α -mínima com relação ao vetor \mathbf{a} , então M é um plano paralelo ao vetor \mathbf{a} ou é um cilindro com diretriz dada por uma α -catenária, em que \mathbf{a} é ortogonal à geratriz de M .

Demonstração. Seja $w \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e considere M uma superfície cilíndrica na direção w , gerada pela curva γ , parametrizada pelo comprimento de arco e contida em um plano Γ ortogonal a w , isto é

$$M = \{\gamma(s) + tw : s \in I, t \in \mathbb{R}\}.$$

Uma parametrização de M é dada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + tw \text{ com } s \in I, t \in \mathbb{R}.$$

Seguindo de forma semelhante como foi feito na seção anterior, dado que γ é tal que $|\gamma'(s)| = 1$ e w é um vetor unitário e ortogonal a γ' , então os vetores normais unitários a M são dados por

$$N(s, t) = \gamma'(s) \wedge w.$$

Seja $k = k(s)$ a função curvatura de γ no ponto s , seguindo como anteriormente temos que

$$H(s, t) = \frac{1}{2}k(s).$$

Como M é uma superfície α -mínima, então ela satisfaz (3.1), logo

$$k(s) = \alpha \frac{\langle \gamma'(s) \wedge w, \mathbf{a} \rangle}{\langle \gamma(s) + tw, \mathbf{a} \rangle}, \quad s \in I, t \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$tk(s)\langle w, \mathbf{a} \rangle + (k(s)\langle \gamma(s), \mathbf{a} \rangle - \alpha\langle \gamma'(s) \wedge w, \mathbf{a} \rangle) = 0. \quad (3.3)$$

Observando a equação anterior como polinômio linear em t , com coeficientes que dependem apenas de s , obtemos as duas seguintes expressões:

$$k(s)\langle w, \mathbf{a} \rangle = 0, \quad (3.4)$$

$$k(s)\langle \gamma(s), \mathbf{a} \rangle - \alpha\langle \gamma'(s) \wedge w, \mathbf{a} \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Analisando as igualdades (3.4) e (3.5), obtém-se as seguintes possibilidades:

1. Se $\langle w, \mathbf{a} \rangle \neq 0$, por (3.4) temos que a função $k(s) = 0$ para todo s , e assim γ é uma reta com vetor direcional $v \neq 0$. Segue que M é um plano gerado pelos vetores v e w . De

(3.5), temos que $\langle v \wedge w, \mathbf{a} \rangle = 0$, assim os vetores v, w, \mathbf{a} são coplanares e concluímos que M é um plano paralelo ao vetor \mathbf{a} .

2. No caso em que $\langle w, \mathbf{a} \rangle = 0$, então \mathbf{a} é paralelo ao plano Γ . Além disso, como w é ortogonal ao plano Γ e $\{\gamma'(s), n(s)\}$ é uma base ortonormal em Γ (onde $n = n(s)$ é o vetor normal a γ em s), segue que $\gamma'(s) \wedge w = \pm n(s)$, sem perda de generalidade podemos tomar w de forma que $\gamma'(s) \wedge w = n(s)$. Segue de (3.5) que

$$k(s) = \alpha \frac{\langle n(s), \mathbf{a} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{a} \rangle}.$$

Logo γ é uma solução de (2.1).

Para $\alpha \neq 0$, a solução de (2.1) será uma α -catenária contida no plano Γ , logo M será um cilindro generalizado gerado por uma α -catenária. Como $\langle w, \mathbf{a} \rangle = 0$ e as geratrizes de M são paralelas a w , conclui-se que \mathbf{a} é ortogonal às geratrizes de M .

□

3.3 Análise das curvas α -catenárias

Dada a relação das superfícies cilíndricas α -mínimas com α -catenárias, é importante nos perguntar sobre a estrutura diferencial das curvas α -catenárias. No teorema seguinte, provamos que no caso não trivial, elas são gráficos. No que segue, a menos de movimentos rígidos, vamos escrever $\mathbf{a} = (0, 1)$.

Teorema 3.2. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, em que a curvatura e o vetor normal satisfazem

$$k(s) = \alpha \frac{\langle n(s), \mathbf{a} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{a} \rangle},$$

então γ é uma reta vertical (paralela ao eixo z), ou γ é o gráfico de uma função sobre o eixo x .

Demonstração. Suponha $\gamma(s) = (x(s), z(s))$, vamos assumir que γ é parametrizada pelo comprimento de arco, neste caso, escrevemos $\gamma'(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s)))$ onde φ é uma função

suave, (φ pode ser vista como uma parametrização do ângulo gerado pelos vetores tangentes de γ). Sendo assim, as funções $x = x(s)$ e $z = z(s)$ são tais que

$$x'(s) = \cos(\varphi(s)), \quad z'(s) = \text{sen}(\varphi(s)) \quad (3.6)$$

usando $k(s) = \frac{x'z'' - z''x'}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}}$ segue que $k(s) = \varphi'(s)$. Além disso, como

$$\gamma'(s) = (\cos(\varphi(s)), \text{sen}(\varphi(s))),$$

segue (como foi estabelecido nos preliminares) que $n(s) = (-\text{sen}(\varphi(s)), \cos(\varphi(s)))$, logo

$$\frac{\langle n(s), \mathbf{a} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{a} \rangle} = \frac{\langle (-\text{sen}(\varphi(s)), \cos(\varphi(s))), (0, 1) \rangle}{\langle (x(s), z(s)), (0, 1) \rangle} = \frac{\cos(\varphi(s))}{z(s)}. \quad (3.7)$$

Assim, teremos que γ satisfaz (3.1) se, e somente se,

$$\varphi'(s) = \alpha \frac{\cos(\varphi(s))}{z(s)}. \quad (3.8)$$

Portanto γ é uma α -catenária se e, somente se, as funções $\{x(s), z(s), \varphi(s)\}$ satisfazem (3.6) e (3.8). No caso em que γ não é um gráfico sobre o eixo- x , existe um ponto $s_0 \in I$ tal que $x'(s_0) = \cos(\varphi(s_0)) = 0$. De fato, basta aplicar o teorema do Valor Médio, uma vez que existem pontos $s_1, s_2 \in I$ tais que $x(s_1) = x(s_2)$. Na sequência, definimos três funções que satisfazem (3.6) e (3.8), que determinam uma reta vertical paralela ao eixo- z . Assim, pela unicidade de soluções de equações diferenciais teremos que se γ não é um gráfico, temos necessariamente que é o traço de uma reta vertical.

Com efeito, sejam

$$X(s) = x(s_0), \quad Z(s) = s - s_0 + z(s_0), \quad \phi(s) = \frac{\pi}{2}.$$

De onde segue

$$X'(s) = 0 = \cos(\phi(s)),$$

$$Z'(s) = 1 = \text{sen}(\phi(s)),$$

$$\phi'(s) = 0 = \alpha \frac{\cos(\phi(s))}{Z(s)}.$$

Além disso,

$$X(s_0) = x(s_0),$$

$$Z(s_0) = z(s_0),$$

$$\varphi(s_0) = \frac{\pi}{2},$$

pois $\cos(\varphi(s_0)) = 0$. Portanto, $\{X(s), Z(s), \phi(s)\}$ satisfazem (3.6) e (3.8), com a condição inicial $s = s_0$. Pela unicidade de solução, segue que γ é uma reta vertical paralela ao eixo- z . \square

Observação 3.3. O Teorema 3.2 nos permite escrever a curva γ como $\gamma(s) = (s, f(s))$ para todo $s \in I$ onde f é uma função positiva, logo da fórmula (2.1) segue a equação

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = \frac{\alpha}{f(s)}. \quad (3.9)$$

Multiplicando por $f'(s)$ para todo $s \in I$, integramos pelo método de substituição de ambos lados da igualdade, obtendo assim

$$\frac{1}{2} \ln(1 + f'(s)^2) = \alpha \ln(f(s)) + k,$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

Aplicando a exponencial em ambos lados da igualdade obtemos

$$f'(s)^2 = c^2 f(s)^{2\alpha} - 1 \quad (3.10)$$

onde $c^2 = e^k > 0$. Assim

$$f''(s) = \alpha c^2 f(s)^{2\alpha-1}. \quad (3.11)$$

Tal equação é conhecida na literatura como equação de tipo "Emden-Fowler", para mais informações veja [23].

É possível ver que f tem um único ponto crítico (o que nos permitirá observar melhor a geometria das α -catenárias).

De fato, sem perda de generalidade, suponha $f' = \sqrt{c^2 f^{2\alpha} - 1} > 0$, logo f é estritamente crescente, além disso, se f não tem ponto crítico, então $f(s) > \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}$ para qualquer $s \in I$. Seja (a, b) o intervalo de domínio maximal de f . Pelo Teorema 1.2 e observação 1.8, se $a > -\infty$, então $\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) = +\infty$ ou $\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}$. Como f é estritamente crescente, vale o segundo limite.

Sem perda de generalidade suponha $a = 0$. Temos que, sendo $(0, b)$ maximal, $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}$ e $\lim_{s \rightarrow 0^+} f'(s) = 0$. Seja $\hat{f}(t) = f(t)$, $t \in (-b, 0)$ temos,

$$\hat{f}'(t) = f'(-t)(-1) = -f'(-t)$$

$$\hat{f}''(t) = f''(-t).$$

Portanto,

$$\frac{\hat{f}''(t)}{1 + (\hat{f}'(t))^2} = \frac{f''(-t)}{1 + (-f'(-t))^2} = \frac{f''(-t)}{1 + (f'(-t))^2} = \frac{\alpha}{f(-t)} = \frac{\alpha}{\hat{f}(t)},$$

segue que \hat{f} é solução em $(-b, 0)$, que também não tem pontos críticos.

Defina

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (0, b) \\ g(0) = \frac{1}{|c|^{\frac{1}{\alpha}}} & , \quad x = 0 \\ \hat{f}(x) & , \quad x \in (-b, 0) \end{cases} .$$

Segue que g é uma solução definida em $(-b, b)$ o que contradiz o fato de $(0, b)$ ser maximal.

Se $a = -\infty$, como f é estritamente crescente, f tem uma assíntota horizontal em $y = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}$, isto é

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Mais ainda,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f'(s) = 0 = \lim_{s \rightarrow -\infty} f''(s).$$

Logo

$$0 = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{\alpha}{f(s)} = \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} \neq 0$$

o que é uma contradição.

Depois de provar que f tem um ponto crítico, dado que $f'' > 0$ ou $f'' < 0$ em função do sinal de α , segue daí a convexidade ou concavidade de f . Isso prova que o ponto crítico é único, o qual será um máximo (se $\alpha < 0$) ou um mínimo (se $\alpha > 0$). Depois de fazer um movimento rígido, pode-se assumir que f atinge o seu ponto crítico em $s = 0$ no eixo- x , e satisfaz o seguinte problema de condições iniciais:

$$f(0) = y_0 > 0, \quad f'(0) = 0 \quad (3.12)$$

Teorema 3.3. Seja $\alpha > 0$, e f uma solução de (3.9), com condições iniciais dadas por (3.12), então f é definida num intervalo $(-r, r)$ e f satisfaz as seguintes propriedades:

1. f é convexa e simétrica em relação ao eixo- z , com um ponto mínimo em $s = 0$.
2. Se $\alpha > 1$, então $r < \infty$. Se $\alpha \in (0, 1]$ então $r = \infty$, para ambos os casos tem-se que $\lim_{s \rightarrow \pm r} f(s) = \infty$.

Em particular se $\alpha > 1$, o gráfico de f tem duas assíntotas verticais.

Demonstração. Demonstraremos cada item separadamente:

1. Dado que f é solução de $\frac{f''(s)}{1 + (f'(s))^2} = \frac{\alpha}{f(s)}$, então definindo $g(s) = f(-s)$ é fácil ver que

$$\frac{g''(s)}{1 + (g'(s))^2} = \frac{\alpha}{g(s)} \text{ dado que } g'(s) = -f'(-s), g''(s) = f''(-s).$$

Analogamente g satisfaz (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), assim pelo teorema de existência e unicidade $f(s) = f(-s)$, portanto f é simétrica com respeito ao eixo- z . Portanto, f é definida em um intervalo $(-r, r)$. Dado que $\alpha > 0$ e como f é uma função positiva, de $f''(s) = \alpha c^2 f(s)^{2\alpha-1} > 0$, segue que f é uma função convexa, além disso por causa da simetria de f tem-se que $s = 0$ é o único ponto mínimo de f .

2. Depois de uma mudança $f \rightarrow h(s) = \mu f\left(\frac{s}{\mu}\right)$, para $\mu = f(0) = y_0$ notamos que $h(0) = z_0 = 1$. De fato, se $h(s) = \mu f\left(\frac{s}{\mu}\right)$ temos $h'(s) = f'\left(\frac{s}{\mu}\right)$ e $h''(s) = \frac{1}{\mu} f''\left(\frac{s}{\mu}\right)$, assim,

$$\frac{h''(s)}{1 + (h'(s))^2} = \frac{f''\left(\frac{s}{\mu}\right)}{\mu(1 + f'\left(\frac{s}{\mu}\right)^2)} = \frac{\alpha}{\mu f\left(\frac{s}{\mu}\right)} = \frac{\alpha}{h(s)}.$$

Portanto h é solução, ainda mais $h(0) = \frac{1}{\mu}f(0) = \frac{y_0}{\mu} = 1$, assim podemos tomar uma solução f tal que $f(0) = 1$. Substituindo $f''(0) = \alpha c^2$ e $f'(0) = 0$ em (3.9) obtemos $c = 1$.

Segue do item 1 e da observação 1.7 que $\lim_{s \rightarrow \pm r} f(s) = \infty$. De fato, caso tal limite seja finito, como f satisfaz (3.9) e (3.10), a derivada de f também seria finita neste limite e poderíamos usar existência e unicidade para equações de segunda ordem para continuar a solução. Sendo assim, no que segue, vamos determinar para quais valores de α $r < +\infty$ e quando teremos $r = +\infty$.

(1) Para o caso em que $\alpha > 1$, procedemos definindo uma função

$$g(s) = \frac{1}{(p - \lambda s)^k},$$

onde p e λ são valores a determinar e $k \in \mathbb{R}$ é tal que $\frac{k+2}{k} = 2\alpha - 1$ o que equivale a

$$k = \frac{1}{\alpha - 1} > 0, \text{ pois } \alpha > 1.$$

De g obtemos $g'(s) = \frac{k\lambda}{(p - ks)^{k+1}}$ e $g''(s) = \frac{k(k+1)\lambda^2}{((p - \lambda s)^{k+2})} = k(k+1)\lambda^2 \left(\frac{1}{p - \lambda s}\right)^{2\alpha-1}$, daí

$$g''(s) = k(k+1)\lambda^2 g(s)^{2\alpha-1}.$$

Fazemos a escolha de $\lambda > 0$ tal que $k(k+1)\lambda^2 = \alpha$. Temos

$$\lambda^2 = \frac{\alpha}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{1}{\alpha-1} + 1\right)} = (\alpha - 1)^2 \text{ então } \lambda = \alpha - 1 = 1/k,$$

do anterior, como $g''(s) = \alpha g(s)^{2\alpha-1}$, logo g satisfaz a equação (3.11) onde $c = 1$. Além disso, $k\lambda = 1$.

Dado que $f'(0) = 0$ e f' é contínua, então $\lim_{s \rightarrow 0} f'(s) = f'(0) = 0$. Pela forma de g' , para um $p > 0$ apropriado, pode-se garantir a existência de um $\delta > 0$, perto de $s = 0$, tal que $g'(\delta) = f'(\delta)$, logo

$$\frac{k\lambda}{(p-k\delta)^{k+1}} = f'(\delta).$$

De onde elevando a $\frac{1}{k+1}$ e isolando p segue $p = \left(\frac{1}{f'(\delta)}\right)^{\frac{1}{k+1}} + \delta\lambda$. Além disso,

$$(f'(\delta))^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{(p-\lambda\delta)^k} = g(\delta).$$

Pode-se assumir que, para $\delta > 0$ suficiente pequeno próximo de $s = 0$ temos $g(\delta) < f(\delta)$. De fato, dado que f é crescente para $s > 0$ então de $\delta > 0$ segue $1 = f(0) < f(\delta)$, além disso, como $g(\delta) = f'(\delta)^{\frac{k}{k+1}}$ e $\lim_{s \rightarrow 0} f'(s) = f'(0) = 0$, então como δ está próximo a $s = 0$ tem-se que

$$g(\delta) < 1 < f(\delta)$$

Vamos agora comparar as funções f e g .

Defina-se $h : [\delta, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$ onde $h(s) = f(s) - g(s)$ para algum $\xi > \delta$ temos que $s = \delta$

$$h(\delta) = f(\delta) - g(\delta) > 0,$$

$$h'(\delta) = f'(\delta) - g'(\delta) = 0,$$

$$h''(\delta) = f''(\delta) - g''(\delta) = \alpha(f(\delta)^{2\alpha-1} - g(\delta)^{2\alpha-1}) > 0, \text{ pois } \alpha > 1 \text{ e } f(s) > g(s).$$

Pelas igualdades anteriores δ é um ponto mínimo de h , assim, para um $\eta > 0$, teremos que $h : (\delta, \eta) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $h(s) = f(s) - g(s) > 0$ para todo $s \in (\delta, \eta)$.

Segue da sua expressão que g está definida em $(-\infty, \frac{p}{\lambda})$ com $x = \frac{p}{\lambda}$ sendo uma assíntota vertical de g , isto é

$$\lim_{s \rightarrow \frac{p}{\lambda}} g(s) = \infty.$$

Veremos agora que $h(s) > h(\delta) > 0$ para $s \in (\delta, \frac{p}{\lambda})$. De fato, se existe $s_0 \in (\delta, \frac{p}{\lambda})$ tal que $h(s_0) < 0$, então pode-se garantir a existência de um ponto $s_1 \in (\delta, \frac{p}{\lambda})$ tal que $h'(s_1) = 0$ e $h''(s_1) < 0$, em particular,

$$h(s_1) = f(s_1) - g(s_1) > 0,$$

pois s_1 é ponto de máximo.

Assim, como $\alpha > 1$ então $2\alpha - 1 > 1$, portanto,

$$h''(s_1) = f''(s_1) - g''(s_1) = \alpha(f(s_1))^{2\alpha-1} - g(s_1)^{2\alpha-1} > 0.$$

O qual é contraditório, portanto $f(s) - g(s) = h(s) > 0$ para todo $s \in (0, r)$ para algum $r < \frac{P}{\lambda}$. Logo pela simetria de f tem-se que f está definida sobre o intervalo $(-r, r)$ e $\lim_{s \rightarrow \pm R} f(s) = \infty$.

(2) No caso em que $\alpha \in (0, 1]$, e lembrando $c = 1$, é fácil ver que a função $g(s) = \cosh(s)$ para $\alpha = 1$, satisfaz

$$\frac{(\cosh(s))''}{1 + (\cosh(s))^2} = \frac{\alpha}{\cosh(s)},$$

$$(\cosh(s))' = \sqrt{c^2(\cosh(s))^{2\alpha} - 1},$$

$$(\cosh(s))'' = \alpha c^2 (\cosh(s))^{2\alpha-1},$$

$$\cosh(0) = 1, \quad (\cosh(0))' = 0.$$

Logo $g(s) = \cosh(s)$ satisfaz (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), assim \cosh é uma 1-caterinária, definida sobre $(-r, r)$ onde $r = \infty$.

Se $\alpha \in (0, 1)$, usamos o mesmo argumento do caso $\alpha > 1$, sendo $g(s) = \cosh(s)$, como o gráfico de \cosh é convexo é suficiente provar que $f(s) < \cosh(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Seguindo a mesma ideia definamos $h(s) = \cosh(s) - f(s)$, logo

$$h(0) = \cosh(0) - f(0) = 0,$$

$$h'(0) = \sinh(0) - f'(0) = 0,$$

$$h''(0) = 1 - f''(0) = 1 - \alpha > 0, \text{ pois } \alpha \in (0, 1).$$

Portanto $s = 0$ é um ponto mínimo de h , sabendo que $f \neq \cosh$, pela continuidade de h existe um $\eta > 0$ tal que $h(s)$ para todo $s \in (0, \eta)$. Veremos agora que

$$h(s) = \cosh(s) - f(s) > 0,$$

para todo s onde h é bem definida.

No caso em que não seja certo para um $s = s_0$, existirá $s = s_1$ tal que $h'(s_1) = 0$ e $h''(s_1) < 0$, onde $h(s_1) > 0$. Logo tem-se

$$h''(s_1) = \cosh(s_1) - f''(s_1) = \cosh(s_1) - \alpha f(s_1)^{2\alpha-1} < 0$$

Além disso, $h(s_1) = \cosh(s_1) - f(s_1) > 0$ então $\cosh(s_1) > f(s_1)$, ademais $s_1 > 0$ logo $1 = f(0) < f(s_1)$, e dado que $2\alpha - 1 < 1$ tem-se $f(s_1) > f(s_1)^{2\alpha-1}$.

Pelo anterior temos

$$\cosh(s_1) > f(s_1) > f(s_1)^{2\alpha-1} > \alpha f(s_1)^{2\alpha-1}, \text{ pois } 0 < \alpha < 1$$

Portanto $h(s_1) = \cosh(s_1) - f(s_1) > 0$ o qual é contraditório. Assim, conclui-se que $\cosh(s) > f(s)$ para todo $s \in (-r, r)$. Como discutimos inicialmente, se $r < \infty$, f teria assíntotas verticais em $-r$ e r , o que é uma contradição dado que $\cosh(s) > f(s)$ para todo $s \in (-r, r)$ e $\cosh(s)$ não possui assíntotas verticais. Segue então que $r = \infty$.

□

Utilizando o mesmo argumento da demonstração do teorema anterior, prova-se a seguinte proposição, que compara a posição de duas α -catenárias com $\alpha > 0$:

Proposição 3.1. Sejam f_1 e f_2 soluções de (3.9), associadas a α_1 e α_2 , respectivamente. Sob as mesmas condições iniciais, se $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ então o gráfico de f_2 encontra-se abaixo do gráfico de f_1 .

Demonstração. Para facilitar assumiremos como na demonstração anterior que $c = y_0 = 1$. Definimos $h(s) = f_1(s) - f_2(s)$, logo

$$h(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0,$$

$$h'(0) = f_1'(0) - f_2'(0) = 0,$$

$$h''(0) = \alpha_1 f_1(0)^{2\alpha_1-1} - \alpha_2 f_2(0)^{2\alpha_2-1} = \alpha_1 - \alpha_2 > 0.$$

Portanto $h(s) > 0$ para algum intervalo $(0, \eta)$. Será provado que h é positiva sempre que esteja definida. Suponha o contrário, logo existe $s_1 > 0$ tal que $h'(s_1) = 0$ e $h''(s_1) < 0$, em particular $h(s_1) > 0$. Temos então que

$$h''(s_1) = \alpha_1 f_1(s_1)^{2\alpha_1-1} - \alpha_2 f_2(s_1)^{2\alpha_2-1} < 0$$

$$h(s_1) = f_1(s_1) - f_2(s_1) > 0.$$

Como $f_1 \geq 1$ e $f_2 \geq 1$, pois y_0 é o valor mínimo de ambas, segue de $\alpha_1 > \alpha_2$ que

$$\alpha_1 f_1(s_1)^{2\alpha_1-1} > \alpha_2 f_1(s_1)^{2\alpha_1-1} > \alpha_2 f_1(s_1)^{2\alpha_2-1} > \alpha_2 f_2(s_1)^{2\alpha_2-1},$$

o que é uma contradição. Logo o resultado segue. \square

Teorema 3.4. Se $\alpha < 0$, então uma solução f da equação (3.9) é definida em um intervalo $(-r, r)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. f é côncava e simétrica em relação ao eixo- z , com um ponto máximo em $s = 0$
2. $\lim_{s \rightarrow \pm r} f(s) = 0$ e $\lim_{s \rightarrow \pm r} f'(s) = \pm\infty$

Demonstração. Demonstraremos cada item separadamente:

1. Pelo argumento dado anteriormente para o caso $\alpha > 0$, temos que tanto $f = f(s)$ e $g = f(-s)$ satisfazem (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) logo f é simétrica em relação ao eixo- z . Portanto, f é definida em um intervalo $(-r, r)$. Além disso, usando o fato de que $\alpha < 0$ e f é positiva, então

$$f'' = \alpha f^{2\alpha-1} < 0$$

logo f é côncava para baixo, com um ponto máximo em $s = 0$.

2. Como $\alpha < 0$ e f é decrescente em $(0, r)$, a equação (3.10) fica definida desde que f tenha variação no intervalo $\left(0, \frac{1}{c^\alpha}\right)$. Segue do Teorema 1.2 que

$$\lim_{s \rightarrow r} f(s) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow r} f'(s) = -\infty.$$

De modo análogo, tem-se que

$$\lim_{s \rightarrow -r} f(s) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow -r} f'(s) = \infty.$$

□

Depois de conhecer a forma das α -catenárias podemos ver exemplos geométricos das α -catenárias e cilindros gerados por uma α -catenária:

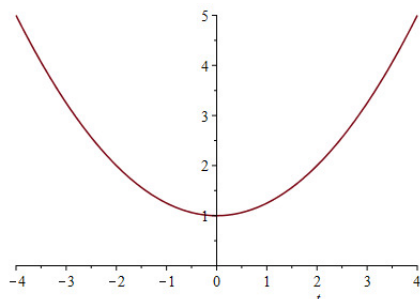


Figura 3.1 α -catenária, $\alpha = \frac{1}{2}$.

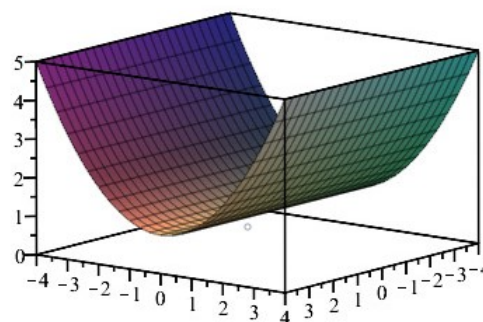


Figura 3.2 Cilindro α -catenário, $\alpha = \frac{1}{2}$.

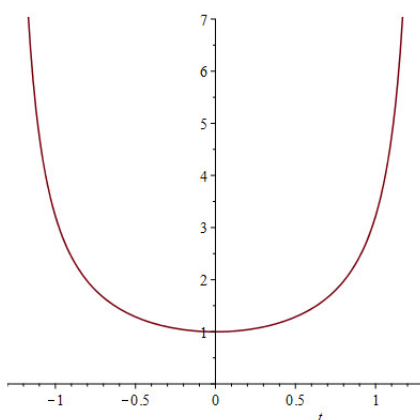


Figura 3.3 α -catenária, $\alpha = 2$.

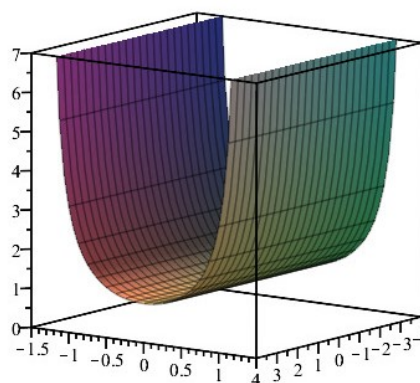
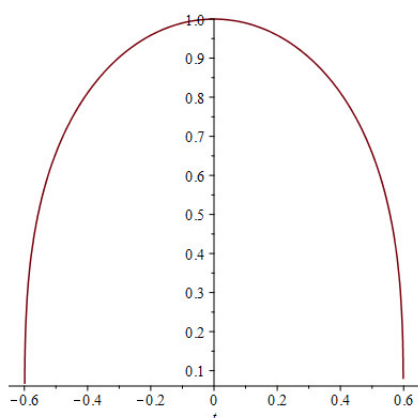
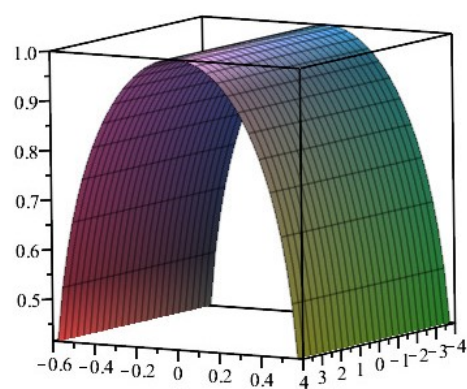


Figura 3.4 Cilindro α -catenário, $\alpha = 2$.

Figura 3.5 α -catenária, $\alpha = -2$.Figura 3.6 Cilindro α -catenário, $\alpha = -2$.

Capítulo 4

Superfícies mínimas singulares de rotação

Neste capítulo, serão abordados alguns resultados sobre a classificação de superfícies de rotação que são α -mínimas em relação a um dado vetor \mathbf{a} . Em particular será mostrado que as superfícies helicoidais α -mínimas são superfícies de rotação.

4.1 Um resultado de caracterização

Esta seção apresenta uma caracterização das superfícies de rotação α -mínimas em relação a um vetor \mathbf{a} , de acordo com as posições relativas do eixo de rotação L e \mathbf{a} . Além disso, são dadas parametrizações locais em cada caso.

Teorema 4.1. Seja M uma superfície α -mínima em relação ao vetor \mathbf{a} . Se M é uma superfície de rotação em torno de um eixo- L , então temos as seguintes opções:

1. \mathbf{a} é paralelo ao eixo de rotação L ,
2. \mathbf{a} é ortogonal ao eixo de rotação L ,
3. \mathbf{a} não é paralelo e não é ortogonal a L , em particular M é uma esfera e $\alpha = -2$.

Além disso, assumindo sem perda de generalidade o eixo de rotação L como o eixo- z , e parametrizando localmente M por,

$$X(s, \theta) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)),$$

temos os seguintes resultados:

- Se \mathbf{a} é paralelo ao eixo L , M pode ser parametrizada localmente por,

$$X(s, \theta) = (s \cos \theta, s \sin \theta, f(s)),$$

onde $f > 0$, satisfaz

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} + \frac{f'(s)}{s} = \frac{\alpha}{f(s)}.$$

- Se \mathbf{a} é ortogonal ao eixo L , M pode ser parametrizada localmente por

$$X(s, \theta) = (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, s),$$

em que f satisfaz

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = \frac{1 + \alpha}{f(s)},$$

isto é, f é uma $(\alpha + 1)$ -catenária.

Demonstração. Dada uma curva $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$ no plano xz , então a superfície de rotação em torno do eixo- z é parametrizada por

$$X(s, \theta) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, z(s)).$$

Logo,

$$N(s, \theta) = \frac{1}{x(s) \sqrt{(x'(s))^2 + (z'(s))^2}} (-x(s)z'(s) \cos \theta, -x(s)z'(s) \sin \theta, x(s)x'(s)),$$

$$E = (x')^2 + (z')^2, \quad F = 0, \quad G = x^2,$$

$$e = \frac{1}{D}(x'z'' - x''z'), \quad f = 0, \quad g = \frac{1}{D}xz'.$$

onde $D = \sqrt{(x')^2 + (z')^2}$.

Segue da fórmula da curvatura média $H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$ que

$$2H = \frac{1}{D} \frac{(x'z'' - x''z')x^2 + xz'((x')^2 + (z')^2)}{((x')^2 + (z')^2)x^2}.$$

Isto é

$$2H = \frac{1}{D} \left(\frac{x'z'' - x''z'}{(x')^2 + (z')^2} + \frac{z'}{x} \right). \quad (4.1)$$

Sendo assim, se escrevemos em coordenadas o vetor \mathbf{a} como $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ temos

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} &= \alpha \frac{\langle (-z' \cos \theta, -z' \operatorname{sen} \theta, x'), (a_1, a_2, a_3) \rangle}{\langle (x \cos \theta, x \operatorname{sen} \theta, z), (a_1, a_2, a_3) \rangle}, \\ \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} &= \frac{1}{D} \frac{-a_1 z' \cos \theta - a_2 z' \operatorname{sen} \theta + \alpha a_3 x'}{x \cos \theta a_1 + x \operatorname{sen} \theta a_2 + z a_3}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Igualando (4.1) e (4.2) e multiplicando ambos lados por D temos

$$\frac{x'z'' - x''z'}{(x')^2 + (z')^2} + \frac{z'}{x} = \frac{-\alpha a_1 z' \cos \theta - \alpha a_2 z' \operatorname{sen} \theta + \alpha a_3 x'}{x \cos \theta a_1 + x \operatorname{sen} \theta a_2 + z a_3}.$$

Expressando a equação acima como um polinômio em função de $\{\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 1\}$, obtemos uma expressão polinomial $A(s) + B(s)\operatorname{sen} \theta + C(s)\cos \theta = 0$, onde

$$A(s) = a_1 x(x'z'' - x''z') + z'((x')^2 + (z')^2)(1 + \alpha),$$

$$B(s) = a_2 x(x'z'' - x''z') + z'((x')^2 + (z')^2)(1 + \alpha),$$

$$C(s) = a_3(xz(x'z'' - x''z') + (zz' - xx'\alpha)((x')^2 + (z')^2)).$$

Dado que o conjunto $\{\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 1\}$ é um conjunto linearmente independente temos que

$$0 = a_1 x(x'z'' - x''z') + z'((x')^2 + (z')^2)(1 + \alpha), \quad (4.3)$$

$$0 = a_2 x(x'z'' - x''z') + z'((x')^2 + (z')^2)(1 + \alpha), \quad (4.4)$$

$$0 = a_3(xz(x'z'' - x''z') + (zz' - xx'\alpha)((x')^2 + (z')^2)). \quad (4.5)$$

De onde temos os seguintes casos:

i) Se $a_1 = a_2 = 0$, dado que $\mathbf{a} \neq 0$ então $a_3 \neq 0$. Logo \mathbf{a} é paralelo ao eixo- z .

E

$$\frac{x'z'' - x''z'}{(x')^2 + (z')^2} + \frac{z'}{x} = \frac{\alpha x'}{z}. \quad (4.6)$$

No caso em que γ é localmente um gráfico da forma $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ para uma função $f > 0$ sobre um intervalo I no eixo- x tem-se

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} + \frac{f'(s)}{s} = \frac{\alpha}{f(s)}. \quad (4.7)$$

ii) Se $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$ então de (4.3) ou (4.4) tem-se

$$x(x'z'' - x''z') + z'((x')^2 + (z')^2)(1 + \alpha) = 0. \quad (4.8)$$

De onde seguem os seguintes casos:

- Se $a_3 \neq 0$, de (4.5) temos

$$0 = xz(x'z'' - x''z') + (zz' - xx'\alpha)((x')^2 + (z')^2). \quad (4.9)$$

Logo de (4.8) e (4.9)

$$0 = ((x')^2 + (z')^2)(-z'z(1 + \alpha) + z'z - xx'\alpha) = -\alpha((x')^2 + (z')^2)(z'z + x'x).$$

Assim $z'z + x'x = 0$, de modo que $z^2 + x^2 = m$ em que $m \neq 0$, substituindo $z = \sqrt{m - x(s)^2}$ em (4.8) temos

$$\frac{x(s)(x'(s))^3}{\sqrt{m - x(s)^2}}(2 + \alpha) + \left(\frac{x(s)x'(s)}{\sqrt{m - x(s)^2}} \right)^3 (2 + \alpha) = 0.$$

Portanto $z^2 + x^2 = m$, é uma solução se e somente se $\alpha = -2$. Neste caso, M está contida em uma esfera centrada na origem.

- Se $a_3 = 0$, então \mathbf{a} é ortogonal ao eixo L . No caso em que γ é localmente o gráfico de uma função $f > 0$ sobre o eixo- z , i.e, $\gamma(s) = (f(s), 0, s)$, substituindo em (4.8) teremos

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = \frac{1 + \alpha}{f(s)}, \quad (4.10)$$

assim f será uma $(\alpha + 1)$ -catenária.

□

Observação 4.1. Notamos que no seguinte problema de valor inicial

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} + \frac{f'(s)}{s} = \frac{\alpha}{f(s)}, \quad f(s_0) = z_0 > 0, f'(s_0) = 0.$$

o caso particular de $f'' = 0$ implica $f(s) = ms + n$, onde $m, n \in \mathbb{R}$. Assim, substituindo em (4.7) temos $a^2s + ab = \alpha s$, de onde segue claramente que $a^2 = \alpha$ e $b = 0$, daí $\alpha > 0$, logo $f(s) = \sqrt{\alpha}s$. Portanto $\gamma(s) = (s, 0, \sqrt{\alpha}s)$ e assim a superfície gerada pela rotação de γ em torno do eixo- z é um semi-cone superior.

Observação 4.2. Em particular, se \mathbf{a} é paralelo a L e se f é uma função constante, γ é uma linha reta paralela ao eixo- x , logo a superfície de rotação M é um plano ortogonal ao eixo- z . No caso $f(s) = as$ M é um semi-cone superior.

Observação 4.3. No caso \mathbf{a} ortogonal a L , se $\alpha = -1$, então existe uma função $f(s) = cs + d$, onde $c, d \in \mathbb{R}$ cujo gráfico está sobre o eixo- z e é a geratriz de M .

- Se $c = 0$ e $d \neq 0$, γ é uma linha reta paralela ao eixo- z , logo M é um cilindro reto.
- Se $c \neq 0$ e $d = 0$, γ é uma linha reta que passa pela origem, logo M é um cone superior (ao redor do eixo- z).

Corolário 4.1. Seja M uma superfície rotacional em torno do eixo L , tal que $L \subseteq \mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$. Então M é uma superfície α -mínima com relação ao vetor \mathbf{a} se e somente se a sua curva geratriz é uma $(\alpha + 1)$ -catenária.

Corolário 4.2. Seja $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ uma curva geratriz de uma superfície de rotação M , então M é uma superfície α -mínima se e somente se f satisfaz

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} + \frac{f'(s)}{s} = \frac{\alpha}{f(s)}.$$

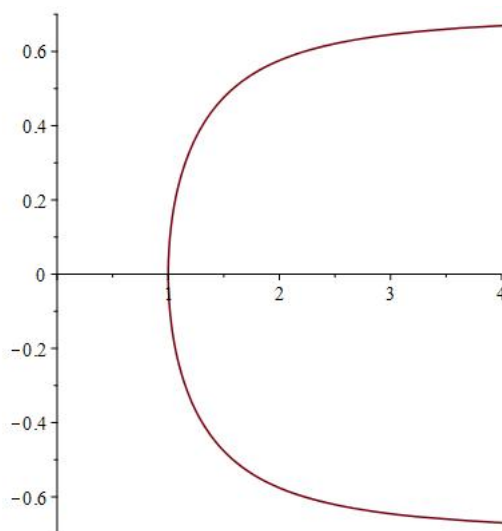


Figura 4.1 Geratriz de superfície de revolução com $\alpha = 2$.

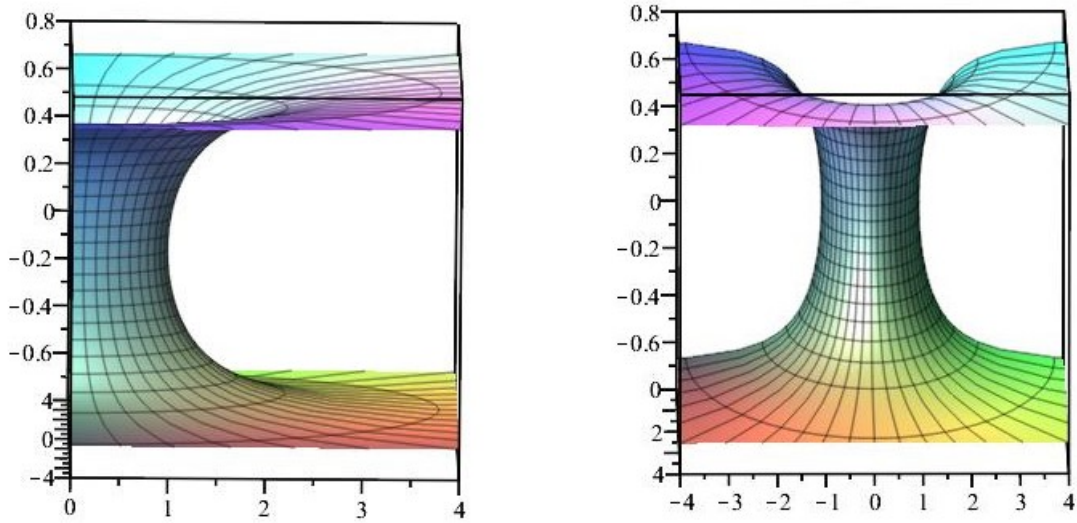


Figura 4.2 Superfície de rotação em torno do eixo- z gerada pela curva em 4.1.

Faremos agora uma análise da equação (4.7). Escrevendo-a em termos de uma curva $\gamma(r) = (r, 0, u(r))$ e multiplicando os lados por $\frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}}$ temos

$$\frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u'}{r\sqrt{1+(u')^2}} = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}}. \quad (4.11)$$

Multiplicando (4.11) por r obtemos

$$\left(\frac{ru'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \right)' = r \frac{\alpha}{u(r)\sqrt{1+u'(r)^2}}. \quad (4.12)$$

Procuramos mostrar a existência de soluções do seguinte problema de condições iniciais:

$$\left(\frac{ru'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \right)' = r \frac{\alpha}{u(r)\sqrt{1+u'(r)^2}}, \quad u(r_0) = a, \quad u'(r_0) = 0. \quad (4.13)$$

sobre o conjunto $(r_0, r_0 + \delta)$, onde $r_0 \geq 0$, $a > 0$.

Teorema 4.2. Para qualquer $a > 0$, o problema (4.13) com $r_0 = 0$ tem uma solução $u \in C^2([0, R])$ para algum $R > 0$.

Demonstração. Inicialmente definimos as seguintes funções $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x, y) = \frac{\alpha}{x\sqrt{1+y^2}}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A equação (4.12) é equivalente a $rg(u, u') = (r\varphi(u'))'$, assim

$$\int_0^r tg(u, u')dt = r\varphi(u') + c,$$

é claro que se $r = 0$ então $c = 0$, logo

$$\varphi^{-1} \left(\frac{1}{r} \int_0^r tg(u, u')dt \right) = u'.$$

Ao integrar obtemos

$$\int_0^r \varphi^{-1} \left(\frac{1}{s} \int_0^s tg(u, u')dt \right) ds + a = u(r), \quad u(0) = a. \quad (4.14)$$

Fixando um $\delta > 0$ a ser determinado posteriormente, de (4.14) definimos o seguinte operador

$$(Su)(r) = \int_0^r \varphi^{-1} \left(\int_0^s \frac{t}{s} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} dt \right) ds + a. \quad (4.15)$$

Sendo assim, notamos que obter uma solução de (4.13) é equivalente a achar um ponto fixo de (4.15), tal solução pode ser fornecida pela aplicação do **Teorema do ponto fixo para contrações**, dado pelo Teorema 1.3.

Para obter tal ponto fixo procedemos da seguinte forma: Observe inicialmente que,

1. Como

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

temos

$$(\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Assim, se $|y| \leq \varepsilon < 1$, temos que $1 - y^2 \geq 1 - \varepsilon^2$. De forma que

$$|(\varphi^{-1})'y| = \frac{1}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Analogamente notamos que $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função é tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\alpha}{-x^2 \sqrt{1+y^2}} = -\frac{g}{x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\alpha}{x(1+y^2)} \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} = -\frac{yg}{1+y^2}$$

logo

$$\nabla g = -g \left(\frac{1}{x}, \frac{y^2}{1+y^2} \right)$$

assim, se $\varepsilon < a$, temos que g restrita a $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ satisfaz

$$|\nabla g|^2 = |g|^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{(1+y^2)^2} \right) \leq |g_{\max}|^2 \left(\frac{1}{(a-\varepsilon)^2} + \varepsilon^2 \right).$$

2. Do anterior temos que g e φ^{-1} são funções Lipschitz com constante Lipschitz L_1 e L_2 . Definindo $L = \max\{L_1, L_2\}$ e tomando $\varepsilon < \min\{1, a\}$, obtemos

$$|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| \leq L |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \text{ em } [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$|\varphi^{-1}(y_1) - \varphi^{-1}(y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \text{ em } [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Vamos provar que S é uma contração no espaço $C^1([0, \delta])$, com norma associada

$$\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

Sendo g e φ^{-1} Lipschitz de constante $L > 0$ em $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ e $[-\varepsilon, \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{1, a\}$, para $u, v \in \overline{B(a, \varepsilon)}$ e para $r \in [0, \delta]$, obtemos

$$\begin{aligned} |(Su)(r) - (Sv)(r)| &= \left| \int_0^r \varphi^{-1} \left(\int_0^s \frac{t}{s} \frac{\alpha dt}{u \sqrt{1+(u')^2}} \right) ds - \int_0^r \varphi^{-1} \left(\int_0^s \frac{t}{s} \frac{\alpha dt}{v \sqrt{1+(v')^2}} \right) ds \right| \\ &\leq \int_0^r \left| \varphi^{-1} \left(\int_0^s \frac{t}{s} \frac{\alpha dt}{u \sqrt{1+(u')^2}} \right) - \varphi^{-1} \left(\int_0^s \frac{t}{s} \frac{\alpha dt}{v \sqrt{1+(v')^2}} \right) \right| ds \\ &\leq L \int_0^r \left| \int_0^s \frac{t}{s} (g(u, u') - g(v, v')) dt \right| ds \\ &\leq L \int_0^r \left(\int_0^s \frac{t}{s} |g(u, u') - g(v, v')| dt \right) ds \\ &\leq L^2 \int_0^r \left(\int_0^s \frac{t}{s} |(u, u') - (v, v')| dt \right) ds \\ &\leq \frac{L}{4} r^2 (\|u - v\|_\infty + \|u' - v'\|_\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Su)'(r) - (Sv)'(r)| &= \left| \varphi^{-1} \left(\int_0^r \frac{t}{r} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} dt \right) - \varphi^{-1} \left(\int_0^r \frac{t}{r} \frac{\alpha}{v\sqrt{1+(v')^2}} dt \right) \right| \\
&= \leq L \left| \int_0^r \frac{t}{r} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} dt - \int_0^r \frac{t}{r} \frac{\alpha}{v\sqrt{1+(v')^2}} dt \right| \\
&= \leq L \int_0^r \frac{t}{r} |g(u, u') - g(v, v')| dt \\
&= \leq L^2 \int_0^r \frac{t}{r} |(u, u') - (v, v')| dt \\
&= \leq \frac{L^2}{2} r (\|u - v\|_\infty + \|u' - v'\|_\infty).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\|S_u - S_v\|_\infty + \|S'_u - S'_v\|_\infty \leq K (\|u - v\|_\infty + \|u' - v'\|_\infty),$$

logo

$$\|S_u - S_v\| \leq \|u - v\|.$$

Portanto S é uma contração na bola fechada $\overline{B(a, \delta)}$ em $C^1([0, \delta])$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Pelo teorema do ponto fixo para contrações existe um ponto fixo para S e assim, existe uma solução para (4.13), pertencente ao conjunto $C^1([0, \delta]) \cap C^2((0, \delta])$. Mostrar que $u \in C^2([0, \delta])$ no ponto $r = 0$ é verificada diretamente da Regra de l'Hôpital. De fato, multiplicando (4.11) por $(1 + (u')^2)^{\frac{3}{2}}$ obtemos

$$u'' + \frac{u'}{r}(1 + (u')^2) = \frac{\alpha}{u}(1 + (u')^2),$$

quando $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} u'' + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'}{r} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} (1 + (u')^2) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{u} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} (1 + (u')^2)$$

logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} u'' + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{u} \tag{4.16}$$

para $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'}{r}$ aplicamos L'Hopital assim $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} u''$, substituindo em (4.16) obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} u'' = \frac{\alpha}{2a}.$$

Por outro lado, seguindo as ideias do lema 3.1 em [6], temos que, integrando (4.12) temos

$$\frac{ru'}{\sqrt{1+(u')^2}} = \int_0^r s \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} ds,$$

logo

$$\frac{u'}{r} = \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{r^2} \int_0^r s \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} ds.$$

Lembrando que

$$u''(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u'(0+h) - u'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u'(h)}{h},$$

aplicando a regra de l'Hôpital e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} u''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u'(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{h^2} \int_0^h s \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+(u')^2}) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h s \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} ds}{h^2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+(u')^2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^h s \frac{\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} ds \right)'}{(h^2)'} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+(u')^2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{h\alpha}{u\sqrt{1+(u')^2}} \right)'}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+(u')^2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{2u\sqrt{1+(u')^2}} \\ &= \frac{\alpha}{2a}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Logo concluímos $u''(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} u''(r) = \frac{\alpha}{2a}$ portanto $u \in C^2[0, \delta]$.

□

4.2 Superfícies mínimas singulares de rotação em que \mathbf{a} e L são paralelos

De acordo com López [17], as superfícies mínimas singulares invariantes de rotação, com $\alpha > 0$ e \mathbf{a} e L paralelos, foram estudadas inicialmente em [15] em 1980. Em 2021 foram estudados ambos casos, $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ por Dierkes em [11]. Os seguintes teoremas de classificação de superfícies de rotação α -mínimas apresentam as diversas possíveis geratrizes de uma superfície M dependendo do sinal de α , e foram enunciados e demonstrados em [11]:

Teorema 4.3. Seja $\alpha > 0$, então uma solução maximal $\gamma = \gamma(s)$ de (4.7) é um das seguintes opções:

1. α -Tectum: γ é o gráfico de uma função simétrica sobre o eixo- x que atinge um ponto máximo em $x = 0$, e é crescente para $x > 0$, além disso quando $x \rightarrow \infty$ a função é assintótica em relação à $z = \sqrt{\alpha} x$.
2. α -Cone: Encontra-se em um lado do eixo z (digamos, $x > 0$) e é o raio através do origem com gradiente $\sqrt{\alpha}$.
3. fica em um lado do eixo z (digamos, $x > 0$) e é o gráfico de uma função estritamente crescente sobre um intervalo (x_0, ∞) sobre o eixo- x , onde $x_0 > 0$, no ponto $(x_0, 0)$ γ intersecta ortogonalmente ao eixo- x . Quando $x \rightarrow \infty$ a função é assintótica à linha reta $z = \sqrt{\alpha} x$
4. Encontra-se em um lado do eixo z (digamos, $x > 0$) e ambas extremidades são assintóticas à linha $z = \sqrt{\alpha}x$, além disso temos $|\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) - \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi(s)| = \pi$.

Demonstração. Ver [11].

□

As imagens a seguir são gráficos dos distintos tipos de soluções da equação diferencial (4.7) associada a uma superfície de revolução α -mínima em torno de um eixo L e vetor associado \mathbf{a} , tal que $L \parallel \mathbf{a}$ e $\alpha > 0$.

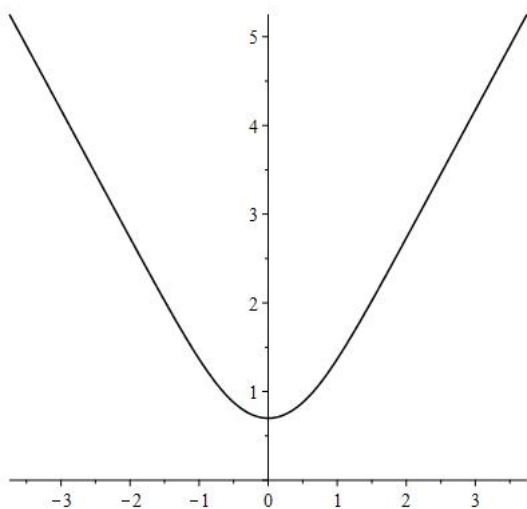


Figura 4.3 Solução do tipo 1 assintótica à $z = \sqrt{\alpha} x$, $\alpha = 2$.

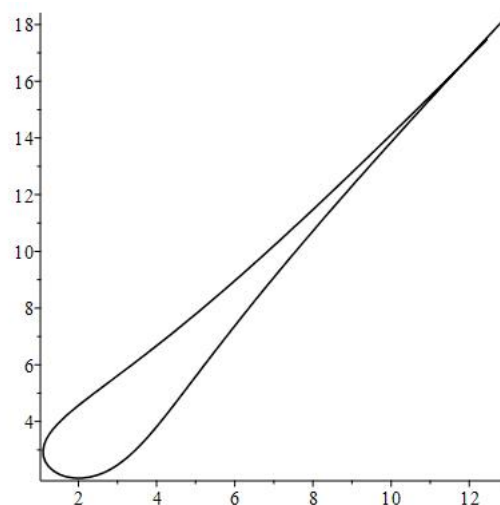


Figura 4.4 Solução do tipo 4, $\alpha = 2$.

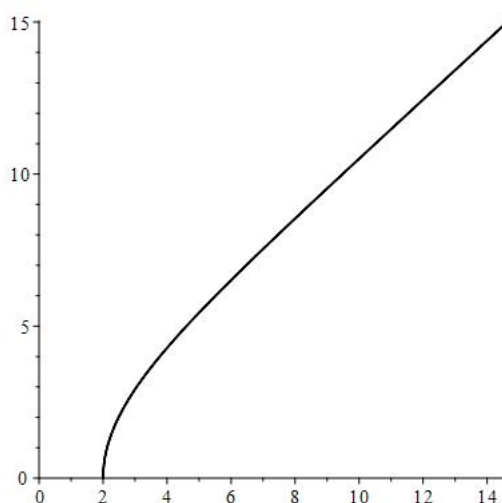


Figura 4.5 Solução do tipo 3, $\alpha = 1$.

Teorema 4.4. Seja $\gamma = (x(s), z(s)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $s \in I$, uma solução maximal de (4.6), se $\alpha < 0$, então γ pode ser descrito por um dos seguintes casos:

- (i) γ é o gráfico de uma função simétrica estritamente côncava em um intervalo limitado do eixo x que atinge seu máximo em $x = 0$ e intersecta o eixo x ortogonalmente.
- (ii) γ permanece em um lado do eixo z (em $x > 0$) e intersecta o eixo x ortogonalmente em ambos pontos finais. A função $x = x(s)$ atinge exatamente um mínimo no interior do

intervalo I . γ tem uma tangente horizontal no único máximo de $z = z(s)$. Além disso, γ não tem auto-interseções.

- (iii) γ fica em um lado do eixo z (em $x > 0$) e é o gráfico de uma função estritamente côncava, que é definida sobre um intervalo compacto do eixo x . Em ambos pontos das extremidades γ intersecta o eixo x ortogonalmente. A solução do tipo (iii) só ocorre se $-1 < \alpha < 0$.

Demonstração. Ver [11]. □

Observação 4.4. Neste trabalho as geratrizes do tipo (ii) serão chamadas geratrizes de tipo *asa*.

As imagens a seguir são gráficos dos distintos tipos de soluções da equação diferencial (4.7) associada a uma superfície de revolução α -mínima em torno de um eixo L e vetor associado \mathbf{a} , tal que $L \parallel \mathbf{a}$ e $\alpha < 0$.

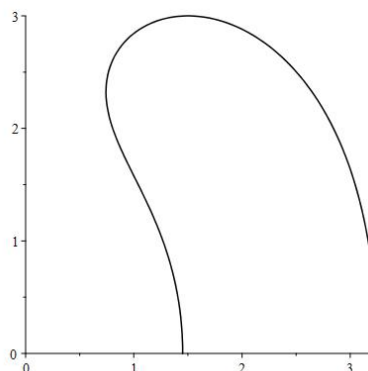
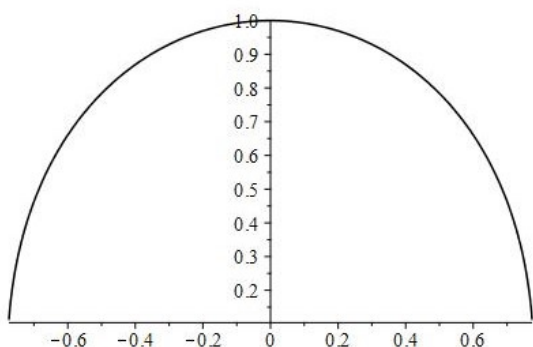


Figura 4.6 Solução de tipo (i) com $\alpha = -3$. Figura 4.7 Solução de tipo (ii) com $\alpha = -3$.

Observação 4.5. As ideias principais da prova dos resultados acima enunciados por Dierkes são baseadas na análise qualitativa do sistema seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(s) = \cos(\varphi(s)) \\ z'(s) = \text{sen}(\varphi(s)) \\ \varphi'(s) + \frac{\text{sen}\varphi(s)}{x(s)} = \alpha \frac{\cos\varphi(s)}{z(s)}, \end{cases} \quad (4.18)$$

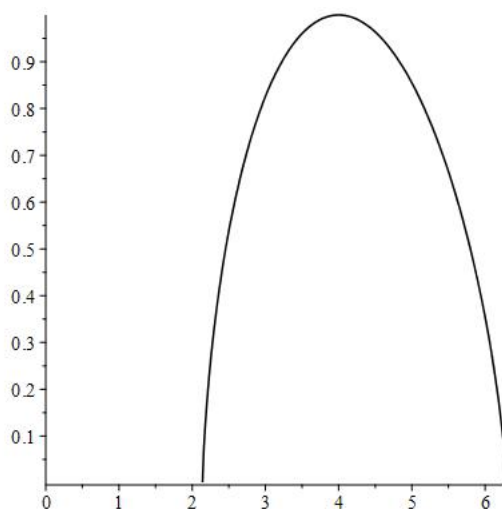


Figura 4.8 Solução de tipo (iii) com $\alpha = -0,3$.

o qual é uma transformação da equação (4.6) uma vez introduzida como ângulo determinado pelo vetor tangente a γ uma função $\varphi \in C^1(I)$ tal que $(x', z') = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, sendo assumido, sem perda de generalidade, uma solução γ parametrizada pelo comprimento de arco.

4.3 Superfícies mínimas singulares de rotação com $L \subseteq \mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$

No Teorema 4.1 foi provado que dada uma superfície mínima singular de rotação M com relação a um vetor \mathbf{a} em torno de um eixo- L contido no plano $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$ é gerada por uma curva $(\alpha + 1)$ -catenária, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Podemos ver alguns tipos particulares de superfícies de rotação. De fato, temos os seguintes casos:

- Se $\alpha = 0$, então M é uma superfície mínima, além disso, a curva geradora de M é uma 1-catenária, daí que a superfície de rotação é um catenóide.
- Se $\alpha = -1$, de (4.10) obtemos

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = 0,$$

cuja solução é dada por $f(s) = as + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, segue que se $a \neq 0$ então a superfície de revolução gerada pelo gráfico de f é um cone. No caso em que $a = 0$, M é um cilindro reto, pois f é uma função definida sobre o eixo- z .

- Se $\alpha = -2$, foi visto no Teorema 4.1 que a superfície M é uma semi-esfera, além disso a superfície é mínima no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , como vimos no Capítulo 2.

Corolário 4.3. Seja M uma superfície de rotação em torno de um eixo contido no espaço $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$. Então M é uma α -superfície mínima singular com $\alpha = -1$ se e somente se M é um semi-cone ou um semi-cilindro.

Para $\alpha = -2$ temos a seguinte análise

$$\frac{f''(s)}{1 + f'(s)^2} = -\frac{1}{f(s)}.$$

Assim $f''f + (f')^2 + 1 = 0$, fazendo $y = f(x)$ e $z = y' = f'(s) = \frac{dy}{ds}$, logo tem-se $z' = f''(s) = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{dy} z$. Daí a equação diferencial pode ser escrita como segue

$$\frac{dz}{dy} zy + z^2 + 1 = 0,$$

então

$$\frac{z}{z^2 + 1} dz = -\frac{1}{y^2} dy.$$

Integrando em ambos lados temos $\ln(z^2 + 1) = \ln(y^{-2}) + c$ de onde segue $z^2 + 1 = \frac{c_1}{y^2}$ logo

$$\frac{dy}{ds} = z = \pm \frac{\sqrt{c_1 - y^2}}{|y|}.$$

Portanto

$$\frac{|y|dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = \pm ds.$$

Logo, fazendo $u = c_1 - y^2$, temos $du = -2dy$, depois de integrar e substituir u obtemos como solução $y^2 + (s + c_2)^2 = c_1$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, lembrando que estamos no espaço $\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ descreve a metade de uma circunferência centrada no eixo- z , para tal caso a superfície de revolução seria uma semi-esfera.

4.4 Superfícies helicoidais

Nesta seção abordamos superfícies mínimas singulares que são superfícies helicoidais. Tais superfícies são simultaneamente invariantes por rotações e translações na direção do eixo de rotação. De acordo com do Carmo e Dajczer [5], uma generalização natural de superfícies de rotação são as superfícies helicoidais, dadas pela seguinte parametrização

$$X(s, \theta) = (s \cos \theta, s \operatorname{sen} \theta, f(s) + \lambda \theta), \quad (4.19)$$

para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que se $\lambda = 0$ uma superfície helicoidal é uma superfície de rotação. No caso em que $f(s) = 0$ para todo $s \in I$, a superfície determinada por (4.19) é um superfície helicoidal, que é uma superfície mínima (veja Seção 3.5 em [3].) Sendo assim, o helicóide é uma superfície α -mínima, para $\alpha = 0$.

Se $\alpha \neq 0$, o seguinte resultado mostra que as superfícies helicoidais α -mínimas se reduzem à superfícies de rotação.

Teorema 4.5. Dado $\alpha \neq 0$, qualquer superfície helicoidal que é uma α -mínima em relação a um vetor \mathbf{a} é uma superfície de rotação.

Demonstração. Seja M uma superfície helicoidal α -mínima parametrizada por

$$X(s, \theta) = (s \cos(\theta), s \operatorname{sen}(\theta), f(s) + \lambda \theta), \text{ onde } \theta \in \mathbb{R}, s \in I.$$

Suponha por contradição que $\lambda \neq 0$. Dado $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, como M é α -mínima, satisfaz a equação (2.1). Vamos encontrar os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental.

$$X_s = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), f'), \quad X_{ss} = (0, 0, f''),$$

$$X_\theta = (-s \operatorname{sen}(\theta), s \cos(\theta), \lambda), \quad X_{\theta\theta} = (-s \cos(\theta), -s \operatorname{sen}(\theta), 0),$$

$$X_{\theta s} = (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0), \quad N = \frac{1}{D} (\lambda \operatorname{sen}(\theta) - s \cos(\theta) f', -(\lambda \cos(\theta) + s \operatorname{sen}(\theta) f', s),$$

em que $D = \sqrt{(\lambda \cos(\theta) + s \operatorname{sen}(\theta) f')^2 + (\lambda \cos(\theta) + s \operatorname{sen}(\theta) f')^2 + s^2}$. De onde segue

$$E = 1 + (f')^2, \quad F = \lambda(f'), \quad G = s^2 + \lambda^2,$$

$$e = f'', \quad f = -\lambda, \quad g = s^2 f'.$$

Obtemos que a curvatura média de M é dada por

$$2H = \frac{eG - fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{D} \frac{(f''s)(s^2 + \lambda^2) + \lambda^2(f') + (s^2f')(1 + (f')^2)}{s^2 + s^2(f')^2 + \lambda^2}. \quad (4.20)$$

Além disso,

$$\alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle \phi, \mathbf{a} \rangle} = \frac{1}{D} \alpha \frac{(\lambda \sin(\theta) - s \cos(\theta)f')a_1 - (\lambda \cos(\theta) - s \sin(\theta)f')a_2 + a_3s}{a_1s \cos(\theta) + a_2s \sin(\theta) + a_3f + a_3\lambda \theta}. \quad (4.21)$$

Como M satisfaz (2.1) igualamos (4.20) e (4.21), multiplicamos em ambos lados por D , e multiplicamos o denominador de (4.21) pelo numerador de (4.20), da mesma forma multiplicamos o denominador de (4.20) pelo numerador de (4.21) obtendo assim

$$\begin{aligned} & a_1\lambda^2(f')s \cos(\theta) + a_1\lambda^2f''s^2 \cos(\theta) + a_1(f')^3s^3 \cos(\theta) + a_1(f')s^3 \cos(\theta) + a_1f''s^4 \cos(\theta) + \\ & a_2\lambda^2(f')s \sin(\theta) + a_2\lambda^2f''s^2 \sin(\theta) + a_2(f')^3s^3 \sin(\theta) + a_2(f')s^3 \sin(\theta) + a_2f''s^4 \sin(\theta) + \\ & a_3f\lambda^2(f') + a_3f\lambda^2f''s + a_3f(f')^3s^2 + a_3f(f')s^2 + a_3ff''s^3 + a_3\lambda^3(f')\theta + a_3\lambda^3f''s\theta + \\ & \quad a_3\lambda(f')^3s^2\theta + a_3\lambda(f')s^2\theta + a_3\lambda f''s^3\theta = \\ & \alpha(\lambda^3 \sin(\theta) - a_1\lambda^2(f')s \cos(\theta) + a_1\lambda(f')^2s^2 \sin(\theta) + a_1\lambda s^2 \sin(\theta) - a_1(f')^3s^3 \cos(\theta) - \\ & a_1(f')s^3 \cos(\theta) - a_2\lambda^3 \cos(\theta) - a_2\lambda^2(f')s \sin(\theta) - a_2\lambda(f')^2s^2 \cos(\theta) - a_2\lambda s^2 \cos(\theta) - \\ & a_2(f')^3s^3 \sin(\theta) - a_2(f')s^3 \sin(\theta) + a_3\lambda^2s + a_3(f')^2s^3 + a_3s^3). \end{aligned}$$

Logo escrevemos a igualdade anterior como

$$A(s) \cos(\theta) + B(s) \sin(\theta) + C(s)\theta + D(s) = 0, \quad (4.22)$$

e derivando (4.22) em relação a θ , obtemos

$$-A(s) \sin(\theta) + B(s) \cos(\theta) + C(s) = 0. \quad (4.23)$$

Lembrando a independência linear das funções $\{\cos(\theta), \sin(\theta), 1\}$, devemos ter $A(s) = B(s) = C(s) = 0$ para todo $s \in I$, assim:

$$\begin{aligned} A(s) &= a_1s((\alpha + 1)s^2 + (\alpha + 1)\lambda^2)f' + \alpha\lambda a_2s^2(f')^2 + \\ & \quad + (\alpha + 1)a_1s^3(f')^3 + (s^2 + \lambda^2)(\alpha\lambda a_2 + a_1s^2f'') \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
B(s) &= a_2s((\alpha + 1)s^2 + (\alpha + 1)\lambda^2)f' - \alpha\lambda a_1s^2(f')^2 + \\
&+ (\alpha + 1)a_2s^3(f')^3 + (s^2 + \lambda^2)(-\alpha\lambda a_1 + a_2s^2f'') \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Combinando as duas equações anteriores na forma $a_2A(s) - a_1B(s) = 0$ tem-se

$$\alpha\lambda(a_1^2 + a_2^2)(s^2 + \lambda a^2 + (sf')^2) = 0$$

Como supomos $\lambda \neq 0$, segue que $a_1^2 + a_2^2 = 0$, então $a_1 = a_2 = 0$. Se $\mathbf{a} \neq 0$, segue que $a_3 \neq 0$, assim \mathbf{a} é paralelo ao eixo- z .

Além disso como $C(s) = 0$ segue em $C(s)\theta + D(s) = 0$ que $D(s) = 0$, em que

$$C(s) = a_3\lambda((s^2 + \lambda^2)f' + s^2(f')^3 + s(s^2 + \lambda^2)f'') = 0, \tag{4.26}$$

$$D(s) = a_3(-\alpha s(s^2 + \lambda^2 + s^2(f')^2) + \frac{fC(s)}{\lambda}) = 0. \tag{4.27}$$

Do exposto acima, segue $s^2 + \lambda^2 + (sf')^2 = 0$, o qual é contraditório pois $\lambda \neq 0$.

Concluimos que não é possível supor $\lambda \neq 0$, portanto a parametrização de M é dado por

$$X(s, \theta) = (s\cos(\theta), s\sin(\theta), f(s)), \text{ onde } \theta \in \mathbb{R}, s \in I,$$

o que resulta em uma superfície de rotação. □

Capítulo 5

Princípio de tangência e superfícies α -mínimas

Neste capítulo será usado o princípio de tangência aplicado a superfícies mínima singulares para obter um controle das superfícies α -mínimas de rotação e cilindros α -catenários, no caso em que α é negativo. Além disso, apresentaremos particularmente um teorema que mostra que não existem gráficos completos α -mínimos se $\alpha < 0$.

5.1 Princípio da tangência e comparação entre superfícies mínimas singulares

Na Seção 2.2 do Capítulo 2, foi provado que se M é uma superfície α -mínima em relação a um vetor \mathbf{a} , então M é uma superfície mínima na variedade Riemanniana $(\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}), e^\varphi \langle \cdot, \cdot \rangle)$, em que $\varphi(p) = \log(\langle p, \mathbf{a} \rangle^\alpha)$. Portanto, M é uma superfície com curvatura média constante neste espaço ambiente. Desta forma podemos enunciar o princípio de tangência para superfícies α -mínimas em \mathbb{R}^3 . De fato, em [13], os autores estabelecem o princípio de tangência para hipersuperfícies de curvatura média de ordem superior constante em variedades Riemannianas gerais. Em particular, segue que o princípio da tangência vale para hipersuperfícies de curvatura média constante em espaços ambientes arbitrários (confira Observação 4.3 em [13]).

Definição 5.1. Sejam $M_i \subset \mathbb{R}^3$ com $i = 1, 2$ $p \in \text{Int}(M_1) \cap \text{Int}(M_2)$ tal que o plano tangente e o normal unitário de M_1 e M_2 em p coincidem. Nessas condições dizemos que p é um ponto de tangência interior de M_1 e M_2 .

Observe que se p é um ponto de tangência interior de M_1 e M_2 , então existem vizinhanças V_1 de V_2 de p em M_1 e M_2 , respectivamente, tais que V_i são dadas por gráficos de funções diferenciáveis u_i , definidas sobre o plano tangente comum de M_1 e M_2 em p . Neste caso, dizemos que M_1 está acima de M_2 em tais vizinhanças se $u_1 \leq u_2$.

Estamos agora em condições de enunciar o princípio da tangência para superfícies α -mínimas em \mathbb{R}^3 .

Proposição 5.1. Se M_1 e M_2 são duas superfícies α -mínimas com relação a um vetor \mathbf{a} , as quais são tangentes em um ponto interior comum p e M_1 está acima de M_2 perto de p (com relação a um vetor normal comum $N(p)$), então M_1 e M_2 coincidem em um conjunto aberto em torno de p .

Antes de prosseguir, devemos levar em consideração o seguinte: de acordo com López [17], se duas superfícies α -mínimas com relação a \mathbf{a} que coincidem numa vizinhança de p , coincidem em todos os pontos. Tal é fato é justificado através da analiticidade desta classe de superfícies. Uma boa exposição para compreender tais fatos está descrita na Seção 1.4 de [24] e nas referências lá contidas associadas a este tema. Destacamos o argumento da analiticidade. De fato, esta propriedade segue do resultado mencionado em [24] que diz que *uma solução u de classe C^3 de uma equação elíptica da forma $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ é analítica, desde que F seja uma função analítica*. Para superfícies α -mínimas com relação a um vetor \mathbf{a} , dadas localmente como gráficos e considerando, após um movimento rígido que $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, é possível ver que a equação diferencial parcial que as descrevem

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |\nabla u|^2}},$$

é equivalente a

$$u(1 + u_x^2)u_{yy} - 2uu_xu_yu_{xy} + u(1 + u_y^2)u_{xx} - \alpha(1 + u_x^2 + u_y^2) = 0,$$

é claro que F é uma função analítica, dado que é polinomial.

5.2 Comparação entre superfícies α -mínimas rotacionais e cilíndricas

Inicialmente provaremos que movimentos rígidos e homotetias aplicam superfícies α -mínimas como relação a algum vetor \mathbf{a} em superfícies mínimas singulares associadas ao mesmo α e ao mesmo vetor \mathbf{a} . Tais propriedades serão importantes nas demonstrações dos principais teoremas deste capítulo.

De fato, dada uma translação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em uma direção v ortogonal à um vetor \mathbf{a} , temos que se M é uma superfície α -mínima M com relação ao vetor \mathbf{a} , então $T(M)$ é também uma superfície α -mínima com relação ao vetor \mathbf{a} . Isto segue do fato de que a curvatura média de M e o vetor normal unitário a M num ponto p são invariantes por translações. Assim, se H_T e N_T são a curvatura média e o normal unitário de $T(M)$ respectivamente, então $H_T = H$, $N_T = N$ e vale

$$2H_T = 2H = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle T(p), \mathbf{a} \rangle},$$

uma vez que $T(p) = p + v$ e assim $\langle T(p), \mathbf{a} \rangle = \langle p, \mathbf{a} \rangle + \langle v, \mathbf{a} \rangle = \langle p, \mathbf{a} \rangle$, pois $\langle v, \mathbf{a} \rangle = 0$. Analogamente se R é uma rotação com eixo paralelo a um vetor \mathbf{a} , podemos considerar, a menos de translação, que o vetor que determina o eixo de rotação coincide com o vetor \mathbf{a} . Neste contexto, se M é uma superfície α -mínima M com relação ao vetor \mathbf{a} , então $R(M)$ é também uma superfície α -mínima com relação ao vetor \mathbf{a} . De fato, seja A a matriz ortogonal que determina R , ou seja, $R(v) = Av$, para $v \in \mathbb{R}^3$. Sabemos que a curvatura média de M é invariante por rotações e o vetor normal unitário em $R(M)$ é tal que $N(R(p)) = AN(p)$. Além disso, como \mathbf{a} determina o eixo de rotação, temos que $A\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Assim,

$$2H_R(p) = 2H(p) = \alpha \frac{\langle N, \mathbf{a} \rangle}{\langle p, \mathbf{a} \rangle} = \alpha \frac{\langle AN, A\mathbf{a} \rangle}{\langle Ap, A\mathbf{a} \rangle} = \alpha \frac{\langle N(R(p)), \mathbf{a} \rangle}{\langle R(p), \mathbf{a} \rangle}$$

uma vez que, sendo A ortogonal, temos $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$, para todo v e w em \mathbb{R}^3 .

Situação similar acontece para o caso onde $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma homotetia para um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e um parâmetro $\lambda > 0$. Depois de fazer um movimento rígido, a homotetia pode-se escrever como $\Psi(p) = \lambda p$. Lembrando que a curvatura média de $\Psi(M)$ é $\frac{1}{\lambda}$ vezes a curvatura média de H de M , i.e. $H_\Psi(\Psi(p)) = \frac{1}{\lambda}H(p)$, e que os vetores normais das superfícies M e

$\Psi(M)$ coincidem, obtemos

$$2H_{\Psi}(\Psi(p)) = \frac{2H(p)}{\lambda} = \frac{\alpha \langle N(p), \mathbf{a} \rangle}{\lambda \langle p, \mathbf{a} \rangle} = \alpha \frac{\langle N_{\Psi}(p), \mathbf{a} \rangle}{\langle \lambda p, \mathbf{a} \rangle} = \alpha \frac{\langle N_{\Psi}(p), \mathbf{a} \rangle}{\langle \Psi(p), \mathbf{a} \rangle},$$

portanto $\Psi(M)$ satisfaz (2.1).

Na sequência, vamos introduzir um conceito para estabelecer uma comparação entre duas superfícies.

Definição 5.2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^3$ dizemos que $A < B$ se para todo $(x, y, z) \in A$ e $(x, y, z') \in B$ temos $z < z'$.

Na notação da Definição 5.2 e assumindo que após movimentos rígidos temos $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, temos o primeiro teorema deste capítulo:

Teorema 5.1. Sejam M_1, M_2 e M_3 superfícies α -mínimas com $\alpha < 0$, tal que:

- M_1 é uma superfície rotacional gerada por uma curva do tipo de *asa*;
- M_2 é uma superfície rotacional gerada que intersecta ao eixo de rotação;
- M_3 é um cilindro gerado por uma α -catenária.

Então após translações horizontais, rotações ao redor do eixo- z e homotetias desde um ponto em $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$, teremos

$$M_1 < M'_2 \text{ e } M_2 < M'_3,$$

em que M'_2, M'_3 são as superfícies obtidas ao se fazer tais transformações. Além disso, tem-se que $\partial \overline{M'_2}$ é uma das duas componentes de $\partial \overline{M_1}$ e $\partial \overline{M'_3}$ encontra $\partial \overline{M_2}$ exatamente em dois pontos.

Demonstração. Depois de fazer translações horizontais e rotações ao redor do eixo- z , podemos supor que o eixo de rotação de M_1 e M_2 é o eixo- z e o plano- yz é o plano de simetria para a superfície cilíndrica M_3 . Se sabe que o bordo de M_1 sendo uma superfície de revolução de uma curva de tipo "asa" é constituído pela união de duas circunferências concêntricas. Sejam estas $C_1 \cup C_2 = \partial \overline{M_1}$, tais que a região delimitada por C_2 contém no seu interior a circunferência C_1 . Analogamente, seja $\Gamma = \partial \overline{M_2}$ a circunferência contida no plano xy gerada pela rotação dos pontos extremos da curva geradora de M_2 . Além disso definimos $\partial \overline{M_3} = L_1 \cup L_2$, onde L_1, L_2

são as retas paralelas ao eixo- y geradas pelas pontos extremos da curva α -catenária geradora do cilindro generalizado.

Seja $\Psi_t : \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ uma homotetia com centro na origem, isto é $\Psi_t(p) = tp$, onde $t > 0$ e $p \in \mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$. Observe que as imagens por tais homotetias de superfícies de rotação ainda são superfícies de rotação, o mesmo ocorre para superfícies cilíndricas. Provaremos no primeiro lugar que é possível aplicar em M_2 homotetias tanto como seja necessário para obter finalmente que $M_1 < M_2'$ com as propriedades dos bordos como enunciado no teorema. De fato, seja t suficientemente grande tal que o domínio determinado por $\Psi_t(\overline{M_2})$ e $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$ contenha M_1 no seu interior. Reduzindo o tamanho de t , temos que existe t_0 tal que $\Psi_{t_0}(\overline{M_2})$ encontra $\overline{M_1}$. No caso em que a interseção acontece num ponto interior $p \in \Psi(M_2) \cap M_1$ e lembrando que $\Psi_t(M_2)$ é uma superfície α -mínima em torno do eixo- z , pelo princípio de tangência tais superfícies coincidem num aberto de p , assim, pela analiticidade segue que $\Psi_{t_0}(M_2) = M_1$, o qual é contraditório, pois $\Psi_{t_0}(M_2)$ é uma homotetia da superfície gerada por uma α -catenária e M_1 é uma superfície gerada por uma curva com forma de "asa".

Portanto o ponto do primeiro contato acontece entre $\partial\Psi_{t_0}(\overline{M_2})$ e $\partial\overline{M_1}$, ou seja, num ponto de C_2 . Como $\partial\Psi_{t_0}(\overline{M_2}) = \Psi_{t_0}(\Gamma)$ e C_2 são círculos concêntricos eles devem coincidir, de onde concluímos o desejado.

De forma análoga provaremos que $M_2 < M_3'$ e que vale a condição nos bordos. Depois de fixar a superfície de M_2 , fazemos $t > 0$ suficientemente grande tal que M_2 fique contida dentro do domínio limitado por $\Psi_t(M_3)$ e o plano $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$. Logo, fazemos $t \rightarrow 0$ suficientemente pequeno, até um $t_0 > 0$ tal que $\Psi_{t_0}(\overline{M_3})$ intersecta $\overline{M_2}$. De modo análogo ao raciocínio anterior tal interseção acontece num ponto de $\partial\Psi_{t_0}(\overline{M_3})$ e $\partial\overline{M_2}$. Como $L_1 \cup L_2$ são duas retas paralelas, as imagens $\Psi_{t_0}(L_1) \cup \Psi_{t_0}(L_2) = \partial\Psi_{t_0}(\overline{M_3})$ pela homotetia são ainda retas paralelas. Logo $\partial\Psi_{t_0}(\overline{M_3})$ diz-nos que a interseção de $\partial\Psi_{t_0}(\overline{M_3})$ e Γ são exatamente dois pontos antípodas, e concluímos o desejado. \square

Observação 5.1. Ainda que o teorema 4.2 afirme que existe uma solução $u \in C^2([0, r])$ mas não garante que para uma superfície de revolução do tipo M_2 seja de classe C^3 no ponto $p = u(0)$. No entanto, não há problema para usar o argumento da analiticidade. De fato, se M_2 não for analítica em p , ainda obtemos contradição se $\Psi_{t_0}(M_2 \setminus \{p\}) = M_1$ e se $\Psi_{t_0}(M_3) = M_2 \setminus \{p\}$.

5.3 Não-existência de superfícies α -mínimas dadas por gráficos completos

Nesta seção, utilizando as técnicas abordadas na seção anterior, apresentamos um teorema que estabelece um resultado para gráficos α -mínimos completos quando $\alpha < 0$.

Teorema 5.2. Se $\alpha < 0$, não existem superfícies α -mínimas que sejam gráficos completos.

Demonstração. A prova é por contradição, seja M uma superfície α -mínima, a qual é um gráfico completo sobre $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$. Depois de fazer uma mudança de coordenadas, assumimos $\mathbf{a} = e_3$, de tal forma que $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$ coincida o plano- xy . Seja $p \in M$ tal que p pertence ao eixo- z e S uma superfície de rotação α -mínima tal que intersekte o eixo- z num ponto q .

Seja $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $\Psi_t(S)$ esteja no domínio contido em $\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$ e determinado pelo plano $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$ e a superfície M . Uma vez que tal superfície faz parte da fronteira de uma região limitada em $\mathbb{R}_+^3(\mathbf{a})$, tal homotetia é possível. Neste caso, se $\Pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow O_z$ é a projeção canônica na terceira coordenada, em que O_z representa o eixo z , tem-se que

$$\Pi_3(\Psi_t(q)) = t\Pi_3(q) < \Pi_3(p).$$

Usando um argumento análogo ao teorema anterior, aumentamos t até obter tal que para um $t_0 > 0$ tal que $\Psi_{t_0}(S)$ intersekte a superfície M . Isto irá ocorrer para pelo menos um t_0 tal que $t_0 \leq \frac{\Pi_3(p)}{\Pi_3(q)}$. Além disso, o ponto $P \in \Psi_{t_0}(S) \cap M$ é interior de ambas superfícies, logo, pelo princípio de tangência tais superfícies coincidem numa vizinhança de P . Assim, pela analiticidade segue que $\Psi_{t_0}(S) \subset M$. Logo o bordo t_0C da superfície $\Psi_{t_0}(S)$, está contido no bordo de M , isto é $t_0C \subset \partial\overline{M}$. Por hipótese, M é um gráfico inteiro, então $\partial\overline{M} = \emptyset$, como $C \neq \emptyset$, temos uma contradição. \square

Observação 5.2. Note que, quando $\alpha > 0$ segundo o teorema 4.3 no caso 1, a superfície de revolução α -mínima M com relação a um vetor \mathbf{a} é gerada por uma solução α -tectum, cuja superfície é um gráfico completo sobre $\mathbb{R}_0^3(\mathbf{a})$.

Bibliografia

- [1] Bemelmans, Josef; Dierkes, Ulrich. On a singular variational integral with linear growth. I. Existence and regularity of minimizers. *Arch. Rational Mech. Anal.* **100** (1987), no. 1, 83–103.
- [2] Böhme, Reinhold; Hildebrandt, Stefan; Tausch, Engelbert. The two-dimensional analogue of the catenary. *Pacific J. Math.* **88** (1980), no. 2, 247–278.
- [3] do Carmo, Manfredo P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 6 ed. *Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro.* (2012).
- [4] do Carmo, Manfredo P. Geometria Riemanniana. 5 ed. *Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro,* (2015).
- [5] do Carmo, Manfredo P.; Dajczer, Marcos. Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)* **34** (1982), no. 3, 425–435.
- [6] Corsato, Chiara; De Coster, Colette; Flora, Noemi; Omari, Pierpaolo. Radial solutions of the Dirichlet problem for a class of quasilinear elliptic equations arising in optometry. *Nonlinear Anal.* 181 (2019), 9–23.
- [7] Dierkes, Ulrich. A Bernstein result for energy minimizing hypersurfaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **1** (1993), no. 1, 37–54.
- [8] Dierkes, Ulrich. A geometric maximum principle, Plateau’s problem for surfaces of prescribed mean curvature, and the two-dimensional analogue of the catenary. *Partial differential equations and calculus of variations*, 116–141, Lecture Notes in Math., 1357, Springer, Berlin, 1988.
- [9] Dierkes, Ulrich, Singular minimal surfaces. *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations*, 177–193, Springer, Berlin, 2003.

- [10] Dierkes, Ulrich; Huisken, Gerhard. The n -dimensional analogue of the catenary: existence and nonexistence. *Pacific J. Math.* **141** (1990), no. 1, 47–54.
- [11] Dierkes, Ulrich; Groh, Nico. Symmetric solutions of the singular minimal surface equation. *Ann. Global Anal. Geom.* **60** (2021), no. 2, 431–453.
- [12] Doering, Claus I.; Lopes, Artur O. Equações Diferenciais Ordinárias. *Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro*, 2005.
- [13] Fontenele, Francisco; Silva, Sérgio L. A tangency principle and applications. *Illinois J. Math.* **45** (2001), no. 1, 213–228.
- [14] de Figueiredo, Djairo G.; Neves, Aloisio F. Equações Diferenciais Aplicadas. 2 ed. *Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro*, 2005.
- [15] Keiper, J.B. The axially symmetric n -tectum. *Toledo University, Preprint*. (1980).
- [16] López, Rafael. Compact singular minimal surfaces with boundary. *Amer. J. Math.* **142** (2020), no. 6, 1771–1795.
- [17] López, Rafael. Invariant singular minimal surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.* **53** (2018), no. 4, 521–541.
- [18] López, Rafael. Separation of variables in equation of mean curvature type. *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A Math.* **146** (5), 1017–1035 (2016).
- [19] López, Rafael. The two-dimensional analogue of the Lorentzian catenary and the Dirichlet problem. *Pacific J. Math.* **305** (2020), no. 2, 693–719.
- [20] López, Rafael. What is the Shape of a Cupola? Aceito para publicação em *The American Mathematical Monthly* 2021. [arXiv:2111.07920](https://arxiv.org/abs/2111.07920)
- [21] Nitsche, Johannes C. C. A nonexistence theorem for the two-dimensional analogue of the catenary. *Analysis* **6** (1986), no. 2-3, 143–156.
- [22] Perko, Laurence. Differential equations and dynamical systems. Third edition. Texts in Applied Mathematics, 7. *Springer-Verlag, New York*, 2001. xiv+553 pp.
- [23] Polyanin, Andrei D.; Zaitsev, Valentin F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. Second edition. *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 2003. xxvi+787 pp.

-
- [24] Rosa, Katianny. Sólitos de Translação para o Fluxo da curvatura Média em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília*. (2021).
- [25] Chern, Shiing-shen. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 771-782.
- [26] Tenenblat, Ketí. Introdução à Geometria Diferencial. 2 ed. *Editores Blucher*. 2008.