



Universidade de Brasília

Instituto de Física

Pós-graduação em Física

**SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAIS NO
ESPAÇO-TEMPO**

Felipe França Faria

Tese de Doutorado

Brasília

07 de julho de 2009

Universidade de Brasília

Instituto de Física

Felipe França Faria

SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAIS NO ESPAÇO-TEMPO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: *Prof. Dr. José Wadih Maluf*

Brasília

07 de julho de 2009

Agradecimentos

Ao meu orientador José Wadiah Maluf por seu total apoio, incentivo e ótimas discussões.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento integral do meu Doutorado.

Ao meu irmão Gustavo França Faria pela revisão ortográfica dessa tese.

“A fé é querer ignorar tudo aquilo que é verdade.”

—F. W. NIETZSCHE

Resumo

A descrição métrica do campo gravitacional não permite a definição de uma densidade de energia gravitacional tensorial. Uma definição surge no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, que utiliza tétradas ao invés do tensor métrico para a descrição do campo gravitacional. Consideramos tétradas como sistemas de referência locais adaptados a observadores que se movem ao longo de trajetórias do tipo tempo arbitrárias no espaço-tempo. As tétradas podem ser caracterizadas por um tensor de aceleração inercial anti-simétrico, cujas componentes são identificadas com as acelerações inerciais (translacional e rotacional) do sistema de referência. Esse tensor está relacionado às quantidades de campo gravitoeletromagnéticas. Por meio de uma transformação de Lorentz local podemos transformar tétradas arbitrárias em tétradas que sofrem o transporte de Fermi-Walker, as quais definem um padrão de não rotação para observadores acelerados. Aqui construímos tétradas adaptadas a observadores em queda livre no espaço-tempo de Reissner-Nordström, em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild e estático no espaço-tempo de Kerr. Em todos os casos calculamos as acelerações inerciais dos sistemas de referência locais e a energia gravitacional do espaço-tempo em relação aos referenciais em questão. A partir da tétrada adaptada a um observador estático no espaço-tempo de Kerr construímos um sistema de referência de Fermi-Walker e obtemos suas acelerações inerciais.

Palavras-chave: Sistemas de referência, tétradas, teleparalelismo, tensor de aceleração, energia gravitacional, observadores no espaço-tempo, transporte de Fermi-Walker.

Abstract

The metrical description of the gravitational field does not allow the definition of a tensorial gravitational energy density. A definition appears in the Teleparallel Equivalent of General Relativity, which makes use of tetrads instead of the metric tensor for the description of the gravitational field. We consider tetrads as local reference frames adapted to observers that move along arbitrary timelike trajectories in spacetime. The tetrad field may be characterized by an antisymmetric acceleration tensor, whose components are identified as the inertial accelerations (translational and rotational) of the reference frame. This tensor is related to gravitoelectromagnetic field quantities. By means of a local Lorentz transformation we can transform arbitrary tetrads into Fermi-Walker transported tetrads, which define a standard of non-rotation for accelerated observers. Here we construct tetrads adapted to observers in free fall in the Reissner-Nördstrom spacetime, in circular orbit in the Schwarzschild spacetime and static in the Kerr spacetime. In all these cases we calculate the inertial accelerations of the local frames and the gravitational energy of the spacetime as measured in such frames. Out of the tetrad adapted to a static observer in the Kerr spacetime we construct the Fermi-Walker transported frame and calculate its inertial accelerations.

Keywords: Reference frames, tetrads, teleparallelism, acceleration tensor, gravitational energy, observers in spacetime, Fermi-Walker transport.

Sumário

Introdução	1
1 Sistemas de Referência no Espaço-Tempo	5
1.1 Sistemas de Referência Inerciais na Relatividade Especial	5
1.2 Sistemas de Referência Não-Inerciais na Relatividade Especial	17
1.3 Sistemas de Referência na Relatividade Geral	24
1.4 Sistema de Referência Local de um Observador	31
2 Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral	39
2.1 Descrição do Campo Gravitacional	39
2.2 Equações de Campo	41
2.3 Energia, Momento e Momento Angular Gravitacionais	43
2.4 Fluxo de Energia-momento Gravitacional	48
3 Observadores no espaço-tempo	51
3.1 Observadores no espaço-tempo de Minkowski	51
3.2 Observador em queda livre no espaço-tempo de Reissner-Nordström	54
3.3 Observador em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild	60
3.4 Observador estático no espaço-tempo de Kerr	68
4 Sistema de referência de Fermi-Walker	76
4.1 Equações de Frenet-Serret e o transporte de Fermi-Walker	76
4.2 Construção de sistemas de referência de Fermi-Walker	78
4.3 Sistema de referência de Fermi-Walker no espaço-tempo de Kerr	81
Conclusão	86

Introdução

Sistemas de referência são de vital importância para o estudo dos fenômenos físicos. Um sistema de referência é composto por um conjunto de eixos coordenados e um relógio fixo aos eixos. Dessa forma, um observador pode medir a posição relativa e o instante em que um evento ocorre. A teoria newtoniana postula a existência de sistemas de referência privilegiados, ou seja, aqueles em relação aos quais uma partícula que não sofre a ação de uma força permanece em repouso ou se movimenta em linha reta com velocidade constante. Esses sistemas de referência são chamados de inerciais e, segundo a teoria newtoniana, eles são equivalentes para o estudo de fenômenos físicos, isto é, se um observador inercial realizar um experimento e chegar a uma conclusão, então, todos os outros observadores inerciais que realizarem o mesmo experimento chegarão à mesma conclusão. Esse postulado continua sendo válido na teoria da Relatividade Especial de Einstein.

Uma grande quantidade de sistemas de referência experimenta forças inerciais e, portanto, constituem sistemas de referência não-inerciais. Um experimento realizado num sistema de referência não-inercial não irá gerar um resultado igual ou equivalente ao obtido num sistema de referência inercial. Um sistema de referência não-inercial no espaço vazio pode ser relacionado com um espaço-tempo plano cuja geometria é descrita pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Segundo o *princípio da equivalência* de Einstein um sistema de referência com aceleração uniforme no espaço vazio é equivalente a um sistema de referência em repouso na presença de um campo gravitacional homogêneo e uniforme. Com base nesse princípio Einstein desenvolveu a sua teoria da gravitação, chamada de teoria da Relatividade Geral. Nela Einstein descreve o campo gravitacional através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e obtém, a partir deste, que também determina as propriedades geométricas do espaço-tempo, as equações que descrevem a dinâmica do campo gravitacional,

chamadas de equações de Einstein.

Uma vez que o estudo do campo gravitacional confunde-se com o estudo da dinâmica do próprio espaço-tempo, os conceitos de energia, momento e momento angular do campo gravitacional adquirem um caráter não trivial. A formulação métrica da teoria da Relatividade Geral permite apenas a definição de pseudo-tensores de energia-momento para a descrição da energia e do momento gravitacional. Porém, para podermos chegar a uma energia gravitacional bem definida precisamos de uma densidade de energia-momento que se transforme como um tensor sob transformações de coordenadas. Uma expressão para uma densidade de energia-momento gravitacional tensorial surge naturalmente no formalismo hamiltoniano de uma formulação geométrica alternativa à Relatividade Geral, chamada de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral – TERG. Nessa formulação o campo gravitacional é descrito por tétradas autoparalelas ao invés do tensor métrico.

As tétradas são interpretadas como sistemas de referência locais adaptados a observadores ideais no espaço-tempo. Duas tétradas que são relacionadas por uma transformação de Lorentz local e que resultam nas mesmas propriedades métricas do espaço-tempo, representam sistemas de referência locais que são caracterizados por acelerações inerciais diferentes. As acelerações inerciais são descritas por um tensor anti-simétrico que é independente das coordenadas. Esse tensor pode ser decomposto em acelerações translacional e rotacional. Considerando a aproximação de campo fraco, vemos que existe uma relação entre as acelerações translacional e rotacional do sistema de referência local com os campos gravitoeletricos e gravitomagnéticos, respectivamente.

Observadores que seguem trajetórias do tipo tempo arbitrarias no espaço-tempo irão carregar com eles tétradas, tal que a componente do tipo tempo é a quadravelocidade do observador e é sempre tangente à trajetória C , e as três componentes espaciais são normais à linha mundo do observador. A trajetória C em geral não é a geodésica. Nesse caso, o transporte de vetores ao longo de C que leva vetores tangentes em vetores tangentes é realizado pelo transporte de Fermi-Walker, que é a melhor aproximação de um sistema de referência não girante no sentido da mecânica newtoniana. Ele é fisicamente realizado por um sistema de giroscópios.

Sistemas de referência de Fermi-Walker são importantes em várias investigações. Um sistema de referência que tem aceleração linear e rotacional pode ser descrito pelo sistema de referência de Frenet-Serret. A aceleração rotacional relativa de um sistema de referência de Frenet-Serret em relação a um sistema de referência de Fermi-Walker caracteriza fenômenos importantes, como a precessão de um giroscópio [1]. Sistemas de referência não-inerciais no espaço-tempo plano que sofrem o transporte de Fermi-Walker são úteis, por exemplo, na análise dos efeitos inerciais numa partícula de Dirac [2]. Além disso, sistemas de referência de Fermi-Walker têm sido usados [3] no estudo da precessão geodética e de Lense-Thirring, e na análise de detectores ressonantes de ondas gravitacionais.

No capítulo 1 fazemos uma análise de sistemas de referência no espaço-tempo. Nas seções iniciais desse capítulo realizamos uma descrição de sistemas de referência na Relatividade Especial e na Relatividade Geral. Na última seção partimos da interpretação das tétradas como sistemas de referência locais adaptados a observadores no espaço-tempo, e definimos o tensor de aceleração inercial. Esse tensor determina as forças inerciais que atuam no sistema de referência local e, portanto, pode ser tomado para caracterizá-lo.

No capítulo 2 descrevemos o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral. Primeiro, desenvolvemos a formulação lagrangiana do TERG e, por meio desta, chegamos às equações do campo gravitacional equivalentes às equações de Einstein. Logo após, apresentamos a formulação hamiltoniana do TERG e, a partir dos vínculos desta, definimos o quadrivetor energia-momento gravitacional e o quadrimomento angular gravitacional. Finalmente, partimos das equações do campo gravitacional obtidas no formalismo lagrangiano do TERG e desenvolvemos a equação de continuidade para a energia e o momento gravitacional. A partir dessa equação chegamos à expressão do fluxo de energia-momento gravitacional.

No capítulo 3 consideramos observadores no espaço-tempo de Minkowski e construímos sistemas de referência locais adaptados a eles. Em seguida, calculamos as acelerações inerciais desses sistemas de referência. Realizamos os mesmos procedimentos para observadores em queda livre no espaço-tempo de Reissner-Nordström, em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild e estático no espaço-tempo de

Kerr. Nesses casos, além das acelerações inerciais calculamos a energia gravitacional do espaço-tempo.

No capítulo 4 apresentamos as equações de Frenet-Serret e a definição do transporte de Fermi-Walker. Mostramos que a anulação de certas componentes do tensor de aceleração inercial implica que o sistema de referência local sofre o transporte de Fermi-Walker. A anulação dessas componentes é feita por meio de uma transformação de Lorentz local. Achamos a equação que os coeficientes da transformação de Lorentz local devem satisfazer para obtermos o sistema de referência de Fermi-Walker. Por fim, fazemos uma aplicação dos resultados obtidos para a determinação de sistemas de referência de Fermi-Walker no espaço-tempo de Kerr.

Sistemas de Referência no Espaço-Tempo

1.1 Sistemas de Referência Inerciais na Relatividade Especial

Uma das principais áreas da física é a mecânica, que consiste no estudo do movimento de corpos materiais. O movimento mais simples de ser descrito é o de uma partícula, isto é, um corpo cujo tamanho e estrutura interna são desprezíveis para o problema em questão. Para termos uma descrição completa do movimento de uma partícula, devemos especificar como a partícula muda sua posição no espaço com relação ao tempo.

Não podemos determinar a posição absoluta de uma partícula no espaço, mas apenas sua posição relativa a um corpo rígido. Para localizarmos uma partícula no espaço podemos utilizar como corpo rígido de referência três eixos mutuamente ortogonais, chamados de eixos cartesianos. Nesse caso, a posição relativa da partícula pode ser determinada pelas coordenadas cartesianas (x, y, z) medidas por uma régua em repouso em relação aos eixos cartesianos, sendo a origem das coordenadas o ponto onde os eixos se intersectam (Fig 1.1). Em adição, podemos medir o tempo t com um relógio fixo nos eixos cartesianos. Nos referimos aos eixos cartesianos com o relógio fixo neles como sistema de referência.

Existem infinitas escolhas de sistemas de referência, que podem estar se movendo uniformemente, acelerando, girando uns em relação aos outros, ou uma combinação dos três. Nem todos esses sistemas de referência são equivalentes para expressar as leis da física. Porém, a física newtoniana define uma família privilegiada de sistemas de referência, chamados de sistemas de referência inerciais, em relação aos quais uma partícula que se move livremente na ausência de forças externas permanece em repouso ou procede numa linha reta com velocidade constante. Se encontrarmos um sistema de referência inercial, então todos os sistemas de referência que se moverem

uniformemente em relação a este também serão inerciais.

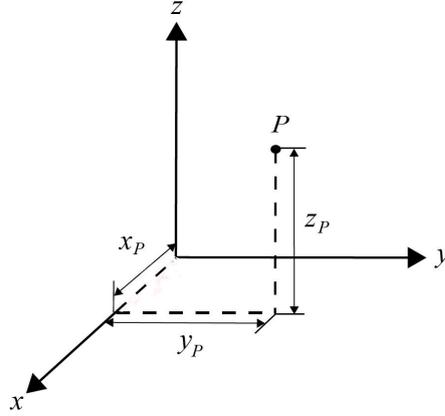


Figura 1.1 Coordenadas cartesianas (x_p, y_p, z_p) de uma partícula P .

As leis da mecânica newtoniana adquirem suas formas padrão e mais simples em sistemas de referência inerciais. Se uma partícula livre estiver se movendo em relação a um sistema de referência inercial, então as suas coordenadas cartesianas naquele sistema de referência variam no tempo $(x(t), y(t), z(t))$. Explicitamente, o movimento da partícula livre é dado por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Essas equações formam a expressão da primeira lei de Newton.

A possibilidade de descrever as leis da física em diferentes sistemas de referência nos leva a estabelecer como as coordenadas de um evento ¹ se transformam quando mudamos de sistema de referência. Na física newtoniana, a transformação das coordenadas $(t, x, y, z) = (t, \vec{x})$ de um evento num sistema de referência inercial K para as coordenadas $(t', x', y', z') = (t', \vec{x}')$ do mesmo evento num outro sistema de referência inercial K' é definida por

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d}, \\ t' &= t + \tau, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde \vec{v} , \vec{d} e τ são quaisquer constantes reais, e R é qualquer matriz ortogonal real. O sistema de referência K' vê o sistema de eixos coordenados de K rodados por R , se

¹Um evento é algo que ocorre numa região infinitesimal do espaço durante um curto período de tempo. Idealmente, um evento é um ponto no espaço e um instante no tempo.

movendo com velocidade \vec{v} , deslocados por \vec{d} no tempo $t = 0$, e o relógio de K correndo com uma diferença de tempo τ em relação ao seu próprio relógio. As transformações (1.1) são chamadas de transformações de Galileu.

Além da primeira lei de Newton, as outras duas leis de movimento de Newton também são idênticas em todos os sistemas de referência inerciais, ou seja, as equações que descrevem a mecânica newtoniana são invariantes sob transformações de Galileu. Essa invariância é chamada de *princípio da relatividade de Galileu*.

Em 1905 Einstein postulou que as leis da eletrodinâmica de Maxwell deveriam ser as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais. Contudo, as equações de Maxwell predizem que a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal c , mas se isso é verdade num sistema de referência inercial K , então, não é verdade num sistema de referência inercial K' definido pelas transformações de Galileu. Portanto, o postulado de Einstein implica no abandono das transformações de Galileu, e juntamente com elas, o pressuposto sobre a natureza do espaço e tempo que dá suporte a elas.

Na física newtoniana o tempo é considerado uma quantidade absoluta, ou seja, é igual para todos os sistemas de referência. Porém, considerar que a velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência nos leva à conclusão que o tempo não é absoluto. O tempo decorre diferentemente em diferentes sistemas de referência. Conseqüentemente, o intervalo de tempo decorrido entre dois eventos varia de acordo com o sistema de referência utilizado para medi-lo. Em particular, eventos que são simultâneos num sistema de referência não serão simultâneos em outros sistemas de referência.

Os eventos que são simultâneos num sistema de referência são caracterizados pela mesma coordenada temporal t nesse sistema. Uma forma de medir a coordenada temporal de um evento num dado sistema de referência consiste em distribuir pelo espaço uma coleção de relógios em repouso em relação ao sistema de referência. Esses relógios devem ser idênticos ao relógio fixo nos eixos cartesianos do sistema de referência.

A sincronização dos relógios pode ser feita usando sinais de luz. Então, uma vez que todos os relógios estejam sincronizados, a coordenada temporal de um evento

é dada pela leitura do relógio localizado na posição onde o evento ocorreu. Devido à relatividade da noção de simultaneidade, esse método de medição só é apropriado para o sistema de referência em relação ao qual os relógios estão em repouso. Portanto, cada sistema de referência tem sua própria maneira de determinar a coordenada temporal de um evento. Assim, um evento definido pelas coordenadas (t, x, y, z) num sistema de referência inercial, vai ser definido por diferentes coordenadas (t', x', y', z') em outro sistema de referência inercial.

A noção de simultaneidade está diretamente relacionada com a definição da distância espacial entre dois eventos. Quando nos referimos à distância espacial entre dois eventos, imaginamos que a medida da posição desses eventos é feita simultaneamente, mas como o conceito de simultaneidade é relativo, então devemos esperar que o conceito de distância espacial também seja relativo.

Como mencionamos anteriormente, na física newtoniana, o intervalo de tempo Δt entre dois eventos é absoluto. Além disso, a distância espacial entre dois eventos simultâneos

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \quad (1.2)$$

também é a mesma para todos os sistemas de referência. Porém, quando consideramos o caráter absoluto da velocidade da luz, tanto Δt quanto a distância espacial (1.2) se tornam diferentes em diferentes sistemas de referência. Contudo, existe uma quantidade que permanece a mesma em todos os sistemas de referência inerciais, que é o intervalo entre dois eventos, cuja estrutura se assemelha a uma distância espacial, mas inclui as coordenadas temporais do par de eventos. O intervalo entre dois eventos separados infinitesimalmente, com coordenadas (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ num sistema de referência inercial, é dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.3)$$

O comportamento de distâncias e tempos é tudo que precisamos para construir as transformações entre sistemas de referência. As transformações de Galileu (1.1) são obtidas considerando que o tempo e a distância espacial (1.2) são iguais em todos os sistemas de referência inerciais. No entanto, se ao invés do tempo e da distância espacial (1.2), requerermos que o intervalo (1.3) seja igual em todos os sistemas

de referência inerciais, obtemos novas transformações que conectam esses sistemas de referência, chamadas de transformações de Lorentz.

Antes de descrevermos as transformações de Lorentz é conveniente introduzirmos o conceito de um espaço quadridimensional, chamado de espaço-tempo, cujos eixos são rotulados por três coordenadas espaciais e pela coordenada temporal. Para que todos os eixos tenham a mesma dimensão é conveniente usarmos a coordenada temporal vezes c ao invés de só a coordenada temporal como um dos eixos. Como só temos duas dimensões num pedaço de papel, só podemos desenhar dois ou no máximo três desses eixos.

A utilização do espaço-tempo é conveniente, mas seu significado não pode ser mal entendido, como se não existisse distinção entre espaço e tempo. Distâncias devem ser medidas com uma régua e intervalos de tempo com um relógio, pois são conceitos físicos relacionados, porém diferentes.

As coordenadas espaciais e temporal de um evento num dado sistema de referência nos permite representar o evento como um ponto no espaço-tempo. O movimento de uma partícula é uma sucessão de eventos que forma uma linha no espaço-tempo, chamada de linha mundo. Os pontos dessa linha determinam a posição relativa da partícula em cada instante de tempo.

A forma do intervalo (1.3) nos permite interpretá-lo como a distância entre dois pontos num espaço-tempo cujos eixos são rotulados pelas coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) . Esse espaço-tempo, chamado de espaço-tempo de Minkowski, corresponde a um sistema de referência inercial. A geometria do espaço-tempo de Minkowski definida por (1.3) não é uma geometria euclidiana quadridimensional (devido ao sinal negativo de $c^2 dt^2$), mas é plana num sentido que deixaremos claro somente na seção 1.3.

O intervalo entre dois pontos no espaço-tempo de Minkowski pode ser positivo, negativo ou zero. Quando ds^2 é positivo dizemos que os pontos têm uma separação do tipo espaço. Esse é o caso, por exemplo, de dois eventos em posições diferentes ($dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \neq 0$) mas no mesmo tempo ($dt = 0$). Quando ds^2 é negativo dizemos que os pontos têm uma separação do tipo tempo. Por exemplo, quando dois eventos estão na mesma posição ($dl = 0$) mas em tempos diferentes ($dt \neq 0$). E

quando $ds^2 = 0$ dizemos que os pontos têm uma separação do tipo nula ou do tipo luz. Por exemplo, quando $dl/dt = c$.

Pontos com uma separação do tipo luz podem ser conectados por raios de luz que se movem com velocidade c . Um raio de luz se movendo em relação a um sistema de referência inercial é representado por uma linha mundo reta formando um ângulo de 45° com os eixos do espaço-tempo de Minkowski.

As linhas mundo de raios de luz passando através de um ponto P no espaço-tempo de Minkowski formam um cone, chamado de cone de luz. Os pontos que têm uma separação do tipo espaço de P estão fora do cone de luz. Pontos que têm uma separação do tipo luz de P estão na superfície do cone de luz. E pontos que têm uma separação do tipo tempo de P estão dentro do cone de luz. Como nenhuma partícula material pode alcançar a velocidade da luz, então sua linha mundo está dentro do cone de luz em cada um dos seus pontos (Fig 1.2). Esse tipo de linha mundo é chamada de linha mundo do tipo tempo.

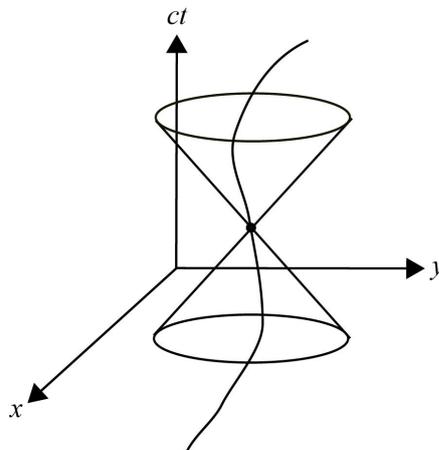


Figura 1.2 Linha mundo de uma partícula material no espaço-tempo de Minkowski.

Numa forma mais compacta, as coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) do espaço-tempo de Minkowski são denotadas por x^μ , onde o índice μ , assim como todos os índices gregos que aparecerem nessa tese, varia de 0 a 3, e

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Nessa notação podemos escrever o intervalo (1.3) como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.4)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é chamada de métrica de Minkowski e é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

e adotamos a convenção de Einstein, onde índices superiores (contravariantes) e inferiores (covariantes) repetidos indicam soma.

Usando o conceito de espaço-tempo podemos representar as transformações de Lorentz das coordenadas (t, x, y, z) de um evento num sistema de referência inercial K para as coordenadas (t', x', y', z') do mesmo evento em outro sistema de referência inercial K' , como as transformações das coordenadas cartesianas $x^\beta = (ct, x, y, z)$ para as coordenadas cartesianas $x^{\alpha'} = (ct', x', y', z')$, tal que [4]

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^\beta + a^{\alpha'}, \quad (1.6)$$

onde $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ são constantes, restritas pelas condições

$$\Lambda^{\alpha'}_{\mu} \Lambda^{\beta'}_{\nu} \eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}$ é a métrica de Minkowski (1.5).

O conjunto de todas as transformações de Lorentz da forma (1.6) tal que $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ satisfaz as condições (1.7) é chamado de grupo de Lorentz não homogêneo, ou grupo de Poincaré. O subconjunto sem as translações espaço-temporais, isto é, tal que $a^{\alpha} = 0$, é chamado de grupo de Lorentz homogêneo. Ambos os grupos têm subgrupos, chamados de grupos próprios, definidos ao impormos a $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ as condições adicionais

$$\Lambda^{0'}_0 \geq 1; \quad \det \Lambda = +1.$$

As transformações de Lorentz homogêneas próprias incluem rotações espaciais e mudanças de velocidade, ou *boosts*, entre os sistemas de referência inerciais. As rotações espaciais são definidas por

$$\Lambda^{i'}_j = R^{i'}_j, \quad \Lambda^{0'}_0 = 1, \quad \Lambda^{i'}_0 = \Lambda^{0'}_i = 0,$$

onde $R^{i'j}$ é uma matriz ortogonal unimodular e os índices i' e j , assim como todos os índices latinos do meio do alfabeto que aparecerem daqui em diante, são índices espaciais que variam de 1 a 3. Para definirmos os *boosts* vamos supor que o sistema de referência K vê o sistema de referência K' se movendo com velocidade v . Nesse caso, temos

$$\Lambda^{i'j} = \delta^{i'j} + \beta^{i'} \beta_j \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}, \quad \Lambda^{0'0} = \gamma, \quad \Lambda^{i'0} = \gamma \beta^{i'}$$

onde

$$\beta^i = \frac{v^i}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Qualquer outra transformação de Lorentz homogênea própria pode ser expressa como um produto de um *boost* com uma rotação.

As transformações de Lorentz têm conseqüências cinemáticas para objetos materiais em movimento a uma velocidade $v < c$. Uma dessas conseqüências é a contração do comprimento do objeto na direção do seu movimento. Uma régua de comprimento l_0 em repouso num sistema de referência inercial tem comprimento $l = \gamma^{-1} l_0$ quando visto por um sistema de referência inercial se movendo com velocidade v ao longo da direção definida pela régua. Então, o comprimento da régua visto pelo sistema de referência em relação ao qual ela está se movendo é reduzido por um fator γ^{-1} . Esse resultado da teoria relativística é conhecido como contração de Lorentz.

Outra conseqüência das transformações de Lorentz é a dilatação do tempo de relógios em movimento. Se um relógio em repouso num sistema de referência inercial registra um intervalo de tempo Δt_0 entre dois eventos, então ele irá registrar um intervalo de tempo $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ entre o mesmo par de eventos quando visto por um sistema de referência inercial se movendo com velocidade v . Logo, o relógio vai mais devagar por um fator γ visto pelo sistema de referência em relação ao qual ele está em movimento. Esse fenômeno é chamado de dilatação do tempo.

As equações de Maxwell são covariantes² sob transformações de Lorentz, mas as equações da mecânica newtoniana não são. Então as leis de movimento de Newton tiveram que ser alteradas para que estas se tornassem covariantes. Assim, uma nova mecânica dos corpos foi construída, chamada de mecânica relativística. A eletrodi-

²Mantêm a forma.

nâmica de Maxwell e a mecânica relativística satisfazem um novo princípio da relatividade, chamado de *princípio da relatividade especial*, que afirma que todas as equações que descrevem as leis da física devem ser covariantes sob transformações de Lorentz.

Para descrevermos a mecânica relativística é necessário introduzirmos o conceito de vetores no espaço-tempo, chamados de quadri-vetores. Um quadri-vetor \mathbf{V} é definido como um segmento de linha direcionado no espaço-tempo da mesma forma que um vetor \vec{V} pode ser definido como um segmento de linha direcionado no espaço euclidiano tridimensional. Os quadri-vetores podem ser multiplicados por escalares, somados e subtraídos de acordo com as regras usuais para vetores. O “comprimento” de um quadri-vetor, ou norma, é o valor absoluto do intervalo entre suas extremidades.

O quadri-vetor \mathbf{V} , as regras de adição, multiplicação por escalar, e o cálculo da norma, são os mesmos em todos os sistemas de referência inerciais, ou seja, são invariantes sob transformações de Lorentz. Portanto, quando as leis da mecânica relativística são formuladas em termos de quadri-vetores, elas vão necessariamente ter a mesma forma em todos os sistemas de referência inerciais, e suas previsões serão consistentes com o *princípio da relatividade especial*.

Um quadri-vetor \mathbf{V} pode ser escrito como uma combinação linear de quadri-vetores unitários ($\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), chamados de quadri-vetores de base, orientados ao longo dos eixos do espaço-tempo (Fig 1.3),

$$\mathbf{V} = V^0 \mathbf{e}_0 + V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3 = V^\mu \mathbf{e}_\mu.$$

Os coeficientes $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$ são as componentes do quadri-vetor \mathbf{V} no espaço-tempo.

As componentes V^μ de um quadri-vetor no espaço-tempo de Minkowski sob uma transformação de Lorentz se transformam de acordo com

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^\nu.$$

Por simplicidade, esquecemos os quadri-vetores de base e nos referimos a V^μ diretamente como “quadri-vetor V^μ ”. Mais precisamente, V^μ é chamado de quadri-vetor contravariante, para distingui-lo do quadri-vetor covariante V_μ , cuja regra de transformação é

$$V_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} V_\nu.$$

O gradiente $\partial/\partial x^\mu$ é um quadri vetor covariante. Logo, a derivada de um quadri vetor contravariante V^μ no espaço-tempo de Minkowski se transforma como

$$\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda_{\nu'}{}^{\beta} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

Várias quantidades físicas não são escalares nem quadri vetores, mas objetos mais complicados chamados de tensores. Um tensor contravariante de ordem n no espaço-tempo de Minkowski é um objeto com 4^n componentes $T^{\mu\nu\dots\rho}$ que sob uma transformação de Lorentz se transformam de acordo com

$$T^{\mu'\nu'\dots\rho'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \dots \Lambda^{\rho'}{}_{\gamma} T^{\alpha\beta\dots\gamma}.$$

As condições (1.7) nos dizem que a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de ordem dois.

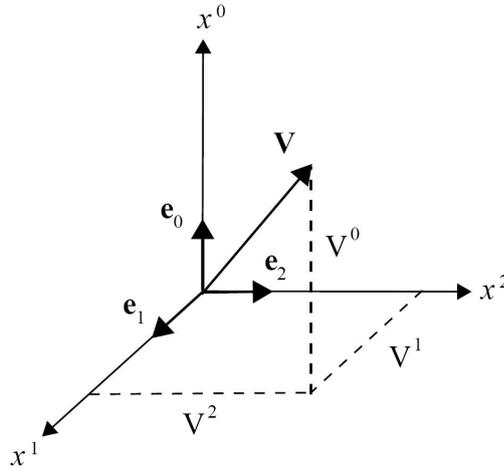


Figura 1.3 Representação de um quadri vetor V em termos das suas componentes V^μ no espaço-tempo.

Agora que introduzimos a noção de quadri vetores e tensores no espaço-tempo podemos utilizá-los para descrever o movimento de uma partícula. Uma forma de especificar a linha mundo de uma partícula no espaço-tempo é descrever as coordenadas x^μ da partícula como uma função do tempo próprio τ , isto é, pelo tempo medido por um relógio em repouso em relação a partícula. O intervalo infinitesimal de tempo próprio $d\tau$ medido por uma partícula no espaço-tempo de Minkowski é

definido por $ds^2 = -c^2 d\tau^2$. Dessa forma, temos

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma},$$

onde $v = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}/dt$ é a velocidade da partícula em relação a um sistema de referência inercial.

O quadrivetor \mathbf{u} cujas componentes u^μ são as derivadas de $x^\mu(\tau)$ ao longo da linha mundo de uma partícula,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.8)$$

é a velocidade quadridimensional, ou quadrivelocidade, da partícula no espaço-tempo. Em particular, as componentes da quadrivelocidade de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski são

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (1.9)$$

As componentes da quadrivelocidade de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski não são independentes. Das relações (1.4) e $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, temos a normalização

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = -c^2. \quad (1.10)$$

Então, \mathbf{u} é sempre um quadrivetor do tipo tempo tangente à linha mundo da partícula no espaço-tempo de Minkowski.

Similarmente à definição da quadrivelocidade, o quadrivetor \mathbf{a} cujas componentes são

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d u^\mu}{d\tau}, \quad (1.11)$$

é a quadriaceleração da partícula. Derivando a normalização (1.10) com relação a τ , vemos que ao longo da linha mundo da partícula no espaço-tempo de Minkowski sua quadriaceleração é sempre perpendicular à sua quadrivelocidade,

$$u_\mu a^\mu = 0.$$

A primeira lei de Newton é válida na mecânica relativística, assim como na mecânica newtoniana. Na ausência de forças, uma partícula permanece em repouso

ou se move numa linha reta com velocidade constante em relação a um sistema de referência inercial. Isso é resumido pela equação de movimento

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.12)$$

onde x^μ são as coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) e a constante m é a massa da partícula. Assim, para uma partícula livre com coordenadas (t, x, y, z) num sistema de referência inercial temos uma linha mundo reta no espaço-tempo de Minkowski.

A equação (1.12) leva naturalmente ao conceito relativístico de energia e momento. Se as componentes p^μ do quadrimomento \mathbf{p} de uma partícula são definidas por

$$p^\mu = m u^\mu, \quad (1.13)$$

então, a equação de movimento (1.12) pode ser escrita como

$$\frac{d p^\mu}{d\tau} = 0.$$

Segue da definição (1.13) e da normalização (1.10) que

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2. \quad (1.14)$$

Em vista das equações (1.9) e (1.13) as componentes do quadrimomento de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski são escritas como

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}),$$

onde E é a energia e \vec{p} é o vetor momento da partícula em relação a um sistema de referência inercial. Por essa razão, o quadrimomento também é chamado de quadri-vetor energia-momento. Resolvendo a equação (1.14) para a energia em termos do vetor momento, obtemos

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (1.15)$$

Em particular, para uma partícula em repouso, a equação (1.15) se reduz à famosa equação $E = mc^2$. Essa equação diz que massa e energia são equivalentes.

1.2 Sistemas de Referência Não-Inerciais na Relatividade Especial

As leis da mecânica relativística descritas na seção anterior são formuladas apenas para sistemas de referência inerciais, mas não para sistemas de referência não-inerciais, isto é, sistemas de referência acelerados em relação aos sistemas de referência inerciais. Logo, existe uma diferenciação entre sistemas de referência inerciais e sistemas de referência não-inerciais para a descrição das leis da física.

Vamos supor que conhecemos um determinado evento relativo a um sistema de referência inercial. Então, através de uma transformação das coordenadas do evento no sistema de referência inercial para as coordenadas do evento num sistema de referência não-inercial podemos determinar como esse evento é visto pelo sistema de referência não-inercial. Antes de descrevermos essa transformação de coordenadas, precisamos encontrar como o espaço e o tempo se comportam em relação a um sistema de referência não-inercial. Para isso vamos considerar um sistema de referência inercial K e outro sistema de referência K' , que gira uniformemente em relação ao eixo z de K .

Podemos considerar o sistema de referência K' como um disco plano circular que gira uniformemente no seu próprio plano ao redor do seu centro. Um observador que está sentado no disco K' afastado do centro sofre a ação de uma força que age para fora numa direção radial, e que pode ser interpretada como uma força inercial (força centrífuga) por um observador em repouso em relação ao sistema de referência inercial K .

Para encontrar a definição de espaço e tempo em K' , um observador no disco pode realizar experimentos com réguas e relógios. Para começar, o observador coloca um de dois relógios idênticos no centro do disco, e o outro na extremidade do disco, de modo que eles estão em repouso em relação ao disco. Porém, em relação ao sistema de referência inercial K , o relógio no centro do disco está em repouso, enquanto que o relógio na extremidade do disco está em movimento devido à rotação. Então, de acordo com a Relatividade Especial, o relógio na extremidade do disco corre com uma taxa menor do que o relógio do sistema de referência K . Esse mesmo efeito é notado por um observador sentado junto com o relógio no centro do disco. Portanto, um reló-

gio vai mais depressa ou mais devagar de acordo com a posição em que ele está situado no disco. Por essa razão, não é possível obter uma boa definição de tempo com a ajuda de relógios que estão dispostos em repouso em relação ao disco. Não existe maneira razoável de sincronizar relógios, de forma que eles permaneçam sincronizados.

A definição das coordenadas espaciais também apresenta dificuldades. Se o observador usar uma régua padrão tangencialmente à extremidade do disco K' , então, o comprimento dessa régua será menor do que o comprimento da régua em repouso em relação ao sistema de referência inercial K , já que, de acordo com a Relatividade Especial, corpos em movimento sofrem um encurtamento na direção do movimento. Por outro lado, se a régua estiver orientada na direção radial do disco, então o comprimento da régua será igual ao comprimento da régua em repouso em relação a K . Assim, medindo a circunferência do disco com a régua e depois o diâmetro, e dividindo um pelo outro, iremos obter um número maior do que π . Para um disco em repouso em relação a K , o resultado dessa operação é exatamente π . Isso significa que a geometria euclidiana não é exatamente válida no disco em rotação. Portanto, não podemos definir as coordenadas cartesianas (x, y, z) relativas ao disco através do método utilizado na discussão da Relatividade Especial.

Na Relatividade Especial medimos as coordenadas de um evento num sistema de referência inercial através de relógios e réguas em repouso em relação ao sistema de referência. Nesse caso, os relógios e réguas se comportam da mesma maneira. Porém, se considerarmos relógios e réguas em repouso em relação a um sistema de referência em rotação, eles terão comportamentos diferentes. Logo, as coordenadas de eventos num sistema de referência não-inercial são designadas de maneira arbitrária.

Na seção anterior relacionamos um sistema de referência inercial com o espaço-tempo de Minkowski. Da mesma forma, em geral, podemos relacionar um sistema de referência não-inercial com um espaço-tempo plano com coordenadas arbitrárias $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Assim, a transformação das coordenadas (t, x, y, z) de um evento num sistema de referência inercial para as coordenadas do evento num sistema de referência não-inercial é equivalente à transformação das coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) para as coordenadas arbitrárias $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

A transformação de coordenadas arbitrárias $x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ para outras co-

ordenadas arbitrárias $x^{\mu'} = (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ é dada por

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\nu}), \quad (1.16)$$

onde $x^{\mu'}(x^{\nu})$ são funções invertíveis que possuem derivadas contínuas. Isso implica que o jacobiano

$$J = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \right|$$

não se anula. A transformação das coordenadas de um sistema de referência inercial para as coordenadas de um sistema de referência não-inercial é um caso específico da transformação (1.16).

De acordo com a equação (1.16), a diferencial total das coordenadas obedece a lei de transformação

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (1.17)$$

onde as derivadas parciais $\partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$ são funções das coordenadas x^{ν} . No caso de transformações de Lorentz, as derivadas parciais são constantes,

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu'}_{\nu}.$$

A equação (1.17) serve de parâmetro para as transformações de quadrivetores e tensores. Um quadrivetor V^{μ} se transforma sob transformações de coordenadas de acordo com

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}. \quad (1.18)$$

Tensores contravariantes têm as leis de transformações

$$T^{\mu'\nu'\dots\rho'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} \dots \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\gamma}} T^{\alpha\beta\dots\gamma}.$$

Realizando uma transformação das coordenadas cartesianas $x^{\mu'} = (ct, x, y, z)$ do intervalo (1.4) para coordenadas arbitrárias $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, obtemos o intervalo entre dois eventos num sistema de referência não-inercial,

$$ds^2 = \eta_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu},$$

ou

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.19)$$

onde a métrica $g_{\mu\nu}$, definida por

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}} \eta^{\alpha'\beta'}, \quad (1.20)$$

é função das coordenadas arbitrárias x^{μ} . Pelo fato de $dx^{\mu}dx^{\nu}$ ser simétrico em μ e ν , qualquer parte anti-simétrica de $g_{\mu\nu}$ não contribuirá para ds^2 . Sendo assim, sem nenhuma perda de generalidade, podemos assumir que $g_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Repetindo a transformação anterior na equação de movimento (1.12), encontramos

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^{\alpha'}}{d\tau^2} &= m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) \\ &= m \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando essa equação por $\partial x^{\lambda} / \partial x^{\alpha'}$, e usando a regra do produto

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}} = \delta_{\mu}^{\lambda},$$

obtemos a equação de movimento de uma partícula livre num sistema de referência não-inercial

$$m \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + m {}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0, \quad (1.21)$$

onde ${}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ é a conexão de Levi-Civita³, ou símbolo de Christoffel, definida por

$${}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (1.22)$$

De acordo com a equação (1.21), para uma partícula livre num sistema de referência não-inercial temos uma linha mundo curva no espaço-tempo.

Comparando a equação (1.21) com a equação (1.12) vemos que surge um termo bilinear na velocidade no qual aparece a conexão de Levi-Civita. Como esse termo é proporcional à massa inercial, ele descreve uma força inercial, que se manifesta no sistema de referência não-inercial.

³Utilizamos o índice “o” para diferenciar a conexão de Levi-Civita, e grandezas relacionadas com ela, da conexão de Weitzenböck que iremos descrever na seção 1.4, e grandezas relacionadas com esta.

Transformando as coordenadas arbitrárias x^μ da conexão de Levi-Civita (1.22) para outras coordenadas arbitrárias $x^{\mu'}$, obtemos

$${}^\circ\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} {}^\circ\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (1.23)$$

O termo não homogêneo do lado direito da transformação (1.23) faz com que a conexão de Levi-Civita ${}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ não seja um tensor. Qualquer quantidade que se transforme de acordo com a equação (1.23) é chamada de conexão afim.

Multiplicando a equação (1.22) por $\partial x^{\beta'}/\partial x^\lambda$ e usando a regra do produto

$$\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} = \delta_{\alpha'}^{\beta'}$$

obtemos a equação diferencial para $x^{\alpha'}$

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda}. \quad (1.24)$$

Derivando essa equação com relação a x^β , chegamos a

$$\frac{\partial^3 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + {}^\circ\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\sigma} \right).$$

Subtraindo a mesma equação com os índices ν e β trocados, achamos

$$\frac{\partial {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + {}^\circ\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\sigma} - {}^\circ\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} = 0.$$

Como iremos demonstrar na próxima seção, o tensor

$${}^\circ R^{\lambda}{}_{\mu\nu\beta} = \frac{\partial {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + {}^\circ\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\sigma} - {}^\circ\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} {}^\circ\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}, \quad (1.25)$$

chamado de tensor de curvatura de Riemann, determina a curvatura do espaço-tempo. Já que estamos no espaço-tempo plano, a curvatura é nula. O tensor de Riemann obedece a lei de transformação tensorial

$${}^\circ R^{\gamma'}{}_{\rho'\sigma'\eta'} = \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\eta'}} {}^\circ R^{\lambda}{}_{\mu\nu\beta}.$$

Não é muito prático usar a relação (1.22) da conexão de Levi-Civita para realizar cálculos explícitos. Derivando a equação (1.20) com relação a x^λ temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha'\beta'} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha'\beta'},$$

de onde, através da relação (1.24), chegamos a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = {}^\circ\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha'\beta'} + {}^\circ\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha'\beta'}.$$

Usando novamente a equação (1.20), encontramos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = {}^\circ\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + {}^\circ\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (1.26)$$

Adicionando à equação (1.26) a mesma equação com μ e λ trocados, subtraindo a mesma equação com ν e λ trocados, e verificando que ${}^\circ\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = {}^\circ\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\sigma\nu} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} + g_{\sigma\mu} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} + g_{\sigma\nu} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \\ &\quad + g_{\sigma\lambda} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - g_{\sigma\lambda} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g_{\sigma\mu} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \\ &= 2g_{\sigma\nu} {}^\circ\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Multiplicando essa equação pela métrica inversa $g^{\nu\rho}$, definida por

$$g^{\nu\rho} g_{\sigma\nu} = \delta_\sigma^\rho,$$

achamos, finalmente, a forma mais geral da conexão de Levi-Civita,

$${}^\circ\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.27)$$

Assim como a conexão de Levi-Civita, uma derivada ordinária $\partial V^\mu / \partial x^\lambda$ também não se transforma como um tensor sob transformações de coordenadas. Derivando a equação (1.18) com relação a $x^{\lambda'}$, temos

$$\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} V^\nu. \quad (1.28)$$

O segundo termo do lado direito da equação elimina o caráter tensorial da diferenciação.

Apesar de $\partial V^\mu / \partial x^\lambda$ não se comportar como um tensor, podemos construir um tensor a partir dela. Multiplicando a conexão de Levi-Civita transformada (1.23) pelo quadri vetor transformado (1.18), achamos

$$\begin{aligned} {}^\circ\Gamma^{\mu'}{}_{\lambda'\gamma'} V^{\gamma'} &= \left[\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\gamma'}} {}^\circ\Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right] \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\eta} V^\eta \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} {}^\circ\Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} V^\sigma - \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\lambda'}} V^\sigma. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Somando as equações (1.28) e (1.29) os termos não homogêneos se cancelam, de forma que

$$\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} + {}^{\circ}\Gamma^{\mu'}{}_{\lambda'\gamma'} V^{\gamma'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda'}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + {}^{\circ}\Gamma^{\nu}{}_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right). \quad (1.30)$$

Assim, podemos definir a derivada covariante de um quadrivetor contravariante

$${}^{\circ}\nabla_{\lambda} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + {}^{\circ}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\sigma} V^{\sigma}, \quad (1.31)$$

e, portanto, da relação (1.30) vemos que ${}^{\circ}\nabla_{\lambda} V^{\mu}$ se transforma como um tensor

$${}^{\circ}\nabla_{\lambda'} V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda'}} {}^{\circ}\nabla_{\rho} V^{\nu}.$$

Os quadrivetores e tensores descritos até agora nessa seção são definidos em todo o espaço-tempo. Um quadrivetor contravariante $V^{\mu}(\tau)$, definido ao longo da linha mundo $x^{\mu}(\tau)$ de uma partícula, obedece a regra de transformação

$$V^{\mu'}(\tau) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}(\tau), \quad (1.32)$$

onde a derivada parcial $\partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$ deve ser realizada em $x^{\nu} = x^{\nu}(\tau)$. Portanto, derivando com relação a τ , achamos dois termos

$$\frac{dV^{\mu'}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{dV^{\nu}(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} V^{\nu}(\tau). \quad (1.33)$$

A derivada segunda $\partial^2 x^{\mu'}/\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}$ é da mesma natureza do termo não homogêneo da conexão de Levi-Civita transformada (1.23). Então definimos a derivada covariante de um quadrivetor contravariante ao longo da linha mundo $x^{\mu}(\tau)$, ou derivada absoluta, por

$$\frac{{}^{\circ}DV^{\mu}}{d\tau} = \frac{dV^{\mu}}{d\tau} + {}^{\circ}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} V^{\nu}. \quad (1.34)$$

Usando as equações (1.23), (1.32) e (1.33), vemos que ${}^{\circ}DV^{\mu}/d\tau$ se transforma como um quadrivetor

$$\frac{{}^{\circ}DV^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{{}^{\circ}DV^{\nu}}{d\tau}.$$

Um quadrivetor $V^{\mu}(\tau)$ transportado ao longo da linha mundo de uma partícula livre não muda em τ se visto por um sistema de referência que é localmente inercial

em $x^\mu(\tau)$. Neste sistema de referência a conexão de Levi-Civita, assim como a derivada $dV^\mu/d\tau$ anulam-se, então

$$\frac{^\circ DV^\mu}{d\tau} = 0.$$

Um vetor $V^\mu(\tau)$ definido desta forma é transportado paralelamente ao longo da linha mundo da partícula.

De acordo com a definição (1.34), podemos escrever a equação de movimento (1.21) de uma partícula livre num sistema de referência não-inercial na forma

$$m \frac{^\circ Du^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} + m {}^\circ \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu = 0. \quad (1.35)$$

Portanto, a quadri-velocidade da partícula é transportada paralelamente ao longo de sua linha mundo. Se quisermos obter a equação de movimento de uma partícula livre num sistema de referência não-inercial, basta substituímos a derivada ordinária pela derivada absoluta na equação de movimento da partícula num sistema de referência inercial.

1.3 Sistemas de Referência na Relatividade Geral

Na seção 1.1 vimos que houve uma mudança da noção de espaço e tempo, para incluir o eletromagnetismo de Maxwell no grupo das leis fundamentais da física que são válidas em qualquer sistema de referência inercial. Contudo, a outra lei fundamental conhecida na época, a interação gravitacional, não obedece o *princípio da relatividade especial*. Uma nova formulação da teoria da gravitação que estivesse de acordo com a Relatividade Especial era, então, necessária.

O ponto de partida para o desenvolvimento da teoria relativística da gravitação foi a comparação entre as massas inercial e gravitacional de uma partícula. Mesmo na mecânica newtoniana, temos dois tipos distintos de massa. Além da massa inercial $m_i \equiv m$, que aparece na segunda lei de Newton e mede a resistência da partícula em ser acelerada inercialmente, também temos a massa gravitacional m_g , que ocorre na lei da gravitação de Newton e pode ser considerada como a “carga” gravitacional da partícula.

Substituindo a força gravitacional agindo sobre uma partícula,

$$\vec{F} = -m_g \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} = m_g \vec{g},$$

onde ϕ é o potencial gravitacional e \vec{g} é o campo gravitacional, na segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m_i \vec{a},$$

encontramos a equação de movimento newtoniana de uma partícula livre na presença de um campo gravitacional,

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g}. \quad (1.36)$$

Experimentos com pêndulos realizados por Newton e Bessel, assim como experimentos mais precisos com balanças de torção realizados por Eötvös e outros [5], provaram que $m_i = m_g$, com uma precisão de uma parte em 10^{12} . Conseqüentemente, a equação (1.36) pode ser escrita como

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Isso significa que num dado campo gravitacional todas as partículas livres se movimentam com a mesma aceleração, ou seja, o movimento de uma partícula num campo gravitacional não depende da massa e da composição da partícula. Essa propriedade, que permanece válida na mecânica relativística, levou Einstein a postular o *princípio da equivalência*.

O *princípio da equivalência* diz que as propriedades de movimento de uma partícula num sistema de referência com aceleração uniforme no espaço vazio (Fig 1.4) são as mesmas que num sistema de referência em repouso (em relação às estrelas fixas) na presença de um campo gravitacional homogêneo e uniforme (Fig 1.5). A partir do *princípio da equivalência*, Einstein elaborou sua teoria relativística da gravitação, chamada de Relatividade Geral.

A igualdade das massas inercial e gravitacional também permitiu a Einstein pressupor que um sistema de referência em queda livre não consegue detectar um campo gravitacional homogêneo e uniforme, pois uma partícula responde ao campo com a mesma aceleração do sistema de referência. Portanto, um sistema de referência em queda livre num campo gravitacional homogêneo e uniforme é equivalente a um sistema de referência inercial no espaço vazio.

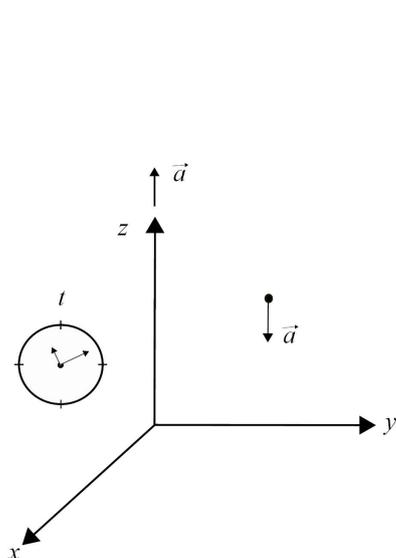


Figura 1.4 Partícula livre num sistema de referência com aceleração uniforme no espaço vazio.

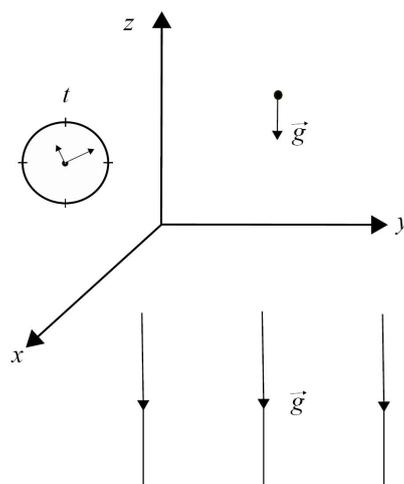


Figura 1.5 Partícula livre num sistema de referência em repouso na presença de um campo gravitacional homogêneo e uniforme.

O *princípio da equivalência* foi deduzido no contexto do movimento de uma partícula. Porém, a relatividade especial pressupõe que matéria e energia são equivalentes e, portanto, a afirmação de que matéria tanto é fonte quanto responde a um campo gravitacional também se aplica à energia. Logo, nada consegue escapar da influência de um campo gravitacional. Assim, Einstein estendeu o *princípio da equivalência* a todas as leis da física, ou seja, as leis da física são as mesmas num sistema de referência com aceleração uniforme no espaço vazio e num sistema de referência em repouso na presença de um campo gravitacional homogêneo e uniforme.

Uma consequência do *princípio da equivalência* é que, assim como a equação de movimento de uma partícula livre num sistema de referência não-inercial, a equação de movimento de uma partícula livre num campo gravitacional homogêneo e uniforme é dada pela equação (1.21). Assim, o termo envolvendo ${}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ em (1.21) descreve a força gravitacional atuando na partícula, similarmente ao caso de uma força inercial que aparece num sistema de referência não-inercial. Isso nos permite fazer uma analogia da conexão de Levi-Civita ${}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ com o campo gravitacional \vec{g} , e da métrica $g_{\mu\nu}$ com o potencial gravitacional ϕ .

Pelo *princípio da equivalência* podemos dizer que as equações (1.19) e (1.21)

são válidas apenas para campos gravitacionais homogêneos e uniformes. O mesmo se aplica a campos gravitacionais arbitrários. A diferença é que a variação espaço-temporal que ocorre num campo gravitacional arbitrário faz com que partículas em queda livre viajem em trajetórias que desviam uma das outras (Fig 1.6), o que não acontece num campo gravitacional homogêneo e uniforme (Fig 1.7).

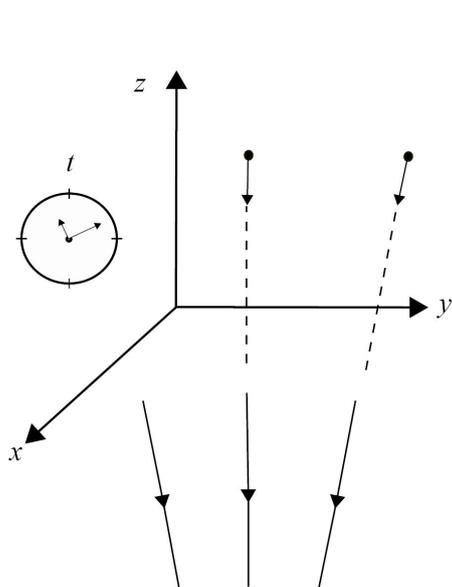


Figura 1.6 Partículas em queda livre num campo gravitacional arbitrário.

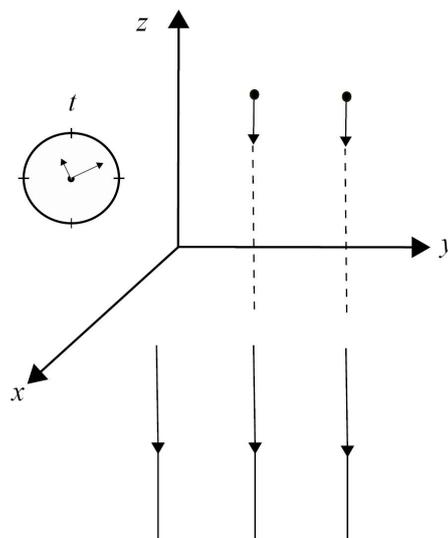


Figura 1.7 Partículas em queda livre num campo gravitacional homogêneo e uniforme.

Segundo o *princípio da equivalência*, os campos gravitacionais homogêneos e uniformes não se manifestam num sistema de referência sem rotação em queda livre. Isso significa que, através de uma transformação de coordenadas, podemos reduzir a métrica $g_{\mu\nu}$ de um campo gravitacional homogêneo e uniforme à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ em todo o espaço-tempo. O mesmo já não pode ser feito num campo gravitacional arbitrário.

O fato de um sistema de referência sem rotação em queda livre num campo gravitacional arbitrário detectar uma aceleração relativa entre partículas livres faz com que o campo não seja completamente nulo nesse sistema de referência. Em outras palavras, na presença de um campo gravitacional arbitrário o espaço-tempo é tal que a métrica $g_{\mu\nu}$ não pode, por uma transformação de coordenadas, ser levada à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ em todo o espaço-tempo. Tal espaço-tempo, chamado de espaço-

tempo de Riemann, é dito curvo, em contraste com o espaço-tempo plano, onde tal redução é possível.

Apesar de um campo gravitacional arbitrário não se anular num sistema de referência sem rotação em queda livre, ele se anula se considerarmos uma região suficientemente pequena onde o campo possa ser considerado homogêneo e uniforme sobre ela. Portanto, realizando uma transformação de coordenadas numa região infinitesimal do espaço-tempo de Riemann conseguimos reduzir a métrica $g_{\mu\nu}$ à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ nessa região ⁴.

Consideremos sistemas de referência sem rotação caindo livremente em diferentes direções num campo gravitacional arbitrário (Fig 1.8), como, por exemplo, o campo gravitacional da Terra. Como nesses sistemas de referência a ação da gravidade é localmente nula, eles representam sistemas de referência localmente inerciais.

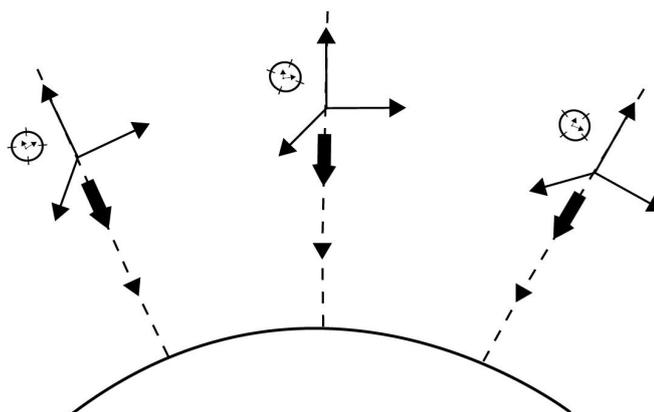


Figura 1.8 Sistemas de referência sem rotação caindo em direção ao centro da Terra.

Em contraste com os sistemas de referência inerciais no espaço vazio, que têm relativamente entre si velocidades constantes, os sistemas de referência localmente inerciais num campo gravitacional arbitrário são acelerados uns em relação aos outros. Logo, os sistemas de referência inerciais locais não podem ser estendidos por todo o espaço para formar um sistema de referência inercial global. Isso equivale a dizer que não podemos reduzir a métrica $g_{\mu\nu}$ à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ em todo o espaço-tempo de Riemann.

⁴Rigorosamente isso vale para um ponto do espaço-tempo.

Por hipótese, a trajetória de uma partícula livre num campo gravitacional arbitrário forma uma linha mundo no espaço-tempo de Riemann, chamada de geodésica, que é a menor distância possível a ser percorrida na geometria curva. Para quantificarmos o desvio entre geodésicas no espaço-tempo de Riemann vamos considerar duas partículas em queda livre que viajam em geodésicas próximas $x^\mu(\tau)$ e $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$. As equações de movimento dessas partículas são

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu}(x) \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} [x^\mu + \delta x^\mu] + {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu}(x + \delta x) \frac{d}{d\tau} [x^\lambda + \delta x^\lambda] \frac{d}{d\tau} [x^\nu + \delta x^\nu] = 0.$$

Subtraindo essas equações e mantendo só os termos de primeira ordem em δx^μ , obtemos

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2 {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.37)$$

Como $\delta x^\mu(\tau)$ é um quadri vetor, sua derivada absoluta é

$$\frac{D\delta x^\mu}{d\tau} = \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} + {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda.$$

Diferenciando essa equação ao longo da geodésica, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\delta x^\mu}{d\tau} + {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \right] + {}^\circ\Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \left[\frac{d\delta x^\sigma}{d\tau} + {}^\circ\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \right] \\ &= \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda + {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\lambda + 2 {}^\circ\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\delta x^\lambda}{d\tau} \\ &\quad + {}^\circ\Gamma^\mu_{\sigma\rho} {}^\circ\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda. \end{aligned}$$

A derivada segunda de $x^\nu(\tau)$ pode ser substituída por $-{}^\circ\Gamma^\nu_{\sigma\rho} dx^\sigma/d\tau dx^\rho/d\tau$, já que $x^\nu(\tau)$ é uma geodésica. Assim, usando a equação (1.37) e a definição do tensor de Riemann (1.25), encontramos a aceleração relativa entre geodésicas próximas, ou desvio geodésico,

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = {}^\circ R^\mu_{\lambda\nu\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\rho. \quad (1.38)$$

O lado direito da equação (1.38) pode ser considerado como uma “força” (por unidade de massa) que é responsável pelo desvio geodésico. Como num campo gravitacional homogêneo e uniforme diferentes geodésicas não têm acelerações relativas entre si, então, ${}^\circ R^\mu_{\lambda\nu\rho} = 0$. Já num campo gravitacional arbitrário, onde aparece um desvio geodésico, ${}^\circ R^\mu_{\lambda\nu\rho} \neq 0$.

Uma forma de obtermos as equações que descrevem a dinâmica de um campo gravitacional arbitrário é através da variação funcional da densidade lagrangiana total

$$\frac{\delta(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (1.39)$$

onde \mathcal{L}_g é a densidade lagrangiana do campo gravitacional e \mathcal{L}_m é a densidade lagrangiana dos campos de matéria, que inclui matéria e todos os campos que interagem com o campo gravitacional.

Assim como no caso de outros campos, a densidade lagrangiana do campo gravitacional deve ser expressa em termos de um escalar que seja função das variáveis dinâmicas do campo. Para determinarmos esse escalar devemos notar que as equações do campo gravitacional devem conter derivadas do “potencial” de ordem não maior que a segunda, como no caso da equação do campo gravitacional newtoniana

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

onde ρ é a densidade de massa que faz o papel de fonte do campo gravitacional, e $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 k g^{-1} s^{-2}$ é a constante de gravitação universal.

Como as equações de campo são obtidas variando a densidade lagrangiana, é necessário que \mathcal{L}_g contenha derivadas de $g_{\mu\nu}$ de ordem não maior que a primeira. Assim, \mathcal{L}_g deve conter apenas a métrica $g_{\mu\nu}$ e a conexão de Levi-Civita ${}^\circ\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. A quantidade mais simples que satisfaz todas as condições necessárias é o escalar de curvatura

$${}^\circ R = g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} R_{\mu\lambda\nu\rho}.$$

Então, a densidade lagrangiana do campo gravitacional é dada por

$${}^\circ\mathcal{L}_g = \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} {}^\circ R, \quad (1.40)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $c^3/16\pi G$ é uma constante de proporcionalidade. O termo $\sqrt{-g}$ é acrescentado para que ${}^\circ\mathcal{L}_g$ seja de fato uma densidade.

Variando as densidades lagrangianas do campo gravitacional e dos campos de matéria em relação a $g_{\mu\nu}$, encontramos [6]

$$\frac{\delta {}^\circ\mathcal{L}_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} \left({}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^\circ R \right),$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2c} T_{\mu\nu},$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dos campos de matéria, e

$${}^\circ R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}$$

é o tensor de Ricci. Então, da equação (1.39) obtemos as equações do campo gravitacional

$${}^\circ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^\circ R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.41)$$

chamadas de equações de Einstein.

1.4 Sistema de Referência Local de um Observador

As previsões da mecânica relativística são mais facilmente calculadas em sistemas de referência inerciais. No entanto, a maioria dos observadores reais não são inerciais, como, por exemplo, os observadores na superfície da Terra. Logo, é necessário descrevermos como observadores não-inerciais realizam medidas. Isso é feito supondo que um observador não-inercial mede os mesmos resultados físicos que um observador inercial que tem sua mesma posição e velocidade no instante da medida. Esta hipótese é chamada de *hipótese da localidade* [7].

A *hipótese da localidade* decorre da mecânica newtoniana, onde o estado de uma partícula é dado em cada instante por sua posição e velocidade. Portanto, um observador não-inercial em cada instante compartilha o mesmo estado que um observador inercial que tem sua mesma posição e velocidade naquele instante. Então, nenhuma nova suposição física é necessária na física newtoniana para lidar com observadores não-inerciais.

Na prática, de acordo com a *hipótese da localidade*, podemos substituir um observador não-inercial por um contínuo de observadores inerciais hipotéticos com o seu mesmo movimento instantâneo. Cada um dos observadores inerciais carrega consigo um sistema de referência inercial. Então, segue da *hipótese da localidade*, que um observador não-inercial carrega consigo um sistema de referência local que em cada

instante coincide com aquele carregado pelo observador inercial que momentaneamente tem sua mesma velocidade.

O sistema de referência local adaptado a um observador não-inercial é representado no espaço-tempo por um conjunto de quatro quadrivetores unitários ortogonais (Fig 1.9), chamado de téttrade

$$\mathbf{e}_a(x) = (\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}).$$

Os três quadrivetores unitários do tipo espaço $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$ e $\mathbf{e}_{(3)}$ são definidos pelas três direções espaciais determinadas pelos eixos cartesianos do sistema de referência local. E o quadrivector unitário do tipo tempo $\mathbf{e}_{(0)}$ é definido pela direção temporal determinada pelo relógio em repouso no sistema de referência local. Devido à ortogonalidade de \mathbf{e}_a , os quadrivetores $\mathbf{e}_{(i)}$ cobrem um hiperplano do tipo espaço que é normal a $\mathbf{e}_{(0)}$.

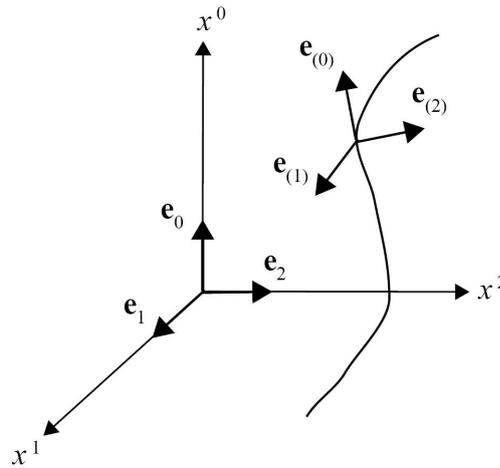


Figura 1.9 Representação de um sistema de referência local num instante τ ao longo da linha mundo de um observador não-inercial no espaço-tempo de Minkowski.

Como qualquer quadrivector no espaço-tempo, podemos escrever uma téttrade \mathbf{e}_a como uma combinação linear dos quadrivetores de base do espaço-tempo $\mathbf{e}_\mu = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,

$$\mathbf{e}_a = e_a^0 \mathbf{e}_0 + e_a^1 \mathbf{e}_1 + e_a^2 \mathbf{e}_2 + e_a^3 \mathbf{e}_3 = e_a^\mu \mathbf{e}_\mu,$$

onde e_a^μ são as componentes da téttrade ao longo dos eixos do espaço-tempo. Por simplicidade, chamamos e_a^μ de “téttrade e_a^μ ”.

Na nossa notação os índices latinos do início do alfabeto $\{a, b, \dots = (0), (1), (2), (3)\}$ são índices relacionados com o sistema de referência local, e o índices gregos $\{\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3\}$ são relacionados com o espaço-tempo. Os índices do espaço-tempo são abaixados e levantados pela métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ e pela métrica inversa $g^{\mu\nu}$,

$$e_{a\mu} = g_{\mu\nu} e_a{}^\nu, \quad e_a{}^\mu = g^{\mu\nu} e_{a\nu},$$

e os índices locais são abaixados e levantados pela métrica de Minkowski η_{ab} e sua inversa η^{ab} ,

$$e_a{}^\mu = \eta_{ab} e^{b\mu}, \quad e^{a\mu} = \eta^{ab} e_b{}^\mu,$$

onde $e^b{}_\mu$ é a tétrada inversa, definida por

$$e_a{}^\mu e^b{}_\mu = \delta_a^b.$$

A tétrada inversa $e^a{}_\mu$ são as componentes dos quadrivetores de base do espaço-tempo ao longo dos eixos do sistema de referência local do observador,

$$\mathbf{e}_\mu = e^a{}_\mu \mathbf{e}_a.$$

Então, as tétradas nos permitem converter índices do sistema de referência local do observador em índices do espaço-tempo e vice-versa.

A condição de ortonormalidade das tétradas é dada por

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = e_a{}^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab}.$$

Os quadrivetores de base do espaço-tempo \mathbf{e}_μ em geral não são ortogonais. A normalização dos quadrivetores de base \mathbf{e}_μ é dada por

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = e^a{}_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Para o espaço-tempo de Minkowski a métrica $g_{\mu\nu}$ é $\eta_{\mu\nu}$, então, os quadrivetores de base do espaço-tempo de Minkowski são ortogonais. A normalização (1.42) nos dá a relação entre a métrica do espaço-tempo e as tétradas

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}. \quad (1.43)$$

Um observador pode ter uma quantidade arbitrária de sistemas de referência locais adaptados a ele. Podemos mudar de sistema de referência local num ponto x^μ do espaço-tempo através de uma transformação de Lorentz local

$$\mathbf{e}_{a'}(x) = \Lambda_{a'}{}^b(x) \mathbf{e}_b(x),$$

ou, equivalentemente,

$$e_{a'}{}^\mu(x) = \Lambda_{a'}{}^b(x) e_b{}^\mu(x),$$

onde em cada ponto do espaço-tempo as matrizes $\Lambda_{a'}{}^b$ satisfazem

$$\Lambda_{a'}{}^c \Lambda_{b'}{}^d \eta^{a'b'} = \eta^{cd}.$$

Uma tétrada se transforma sob transformações de coordenadas de acordo com

$$e_a{}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} e_a{}^\nu.$$

Para um observador medir quantidades com magnitude e direção (velocidade, momento, etc.) ele deve projetar essas quantidades no sistema de referência local que ele carrega consigo. Por exemplo, a componente projetada da quadrivelocidade u^μ de uma partícula no espaço-tempo é dada por

$$u^a = e^a{}_\mu u^\mu.$$

Dois quadri vetores em pontos distantes do espaço-tempo são considerados paralelos [8] se eles tiverem componentes idênticas em relação ao sistema de referência local nos pontos considerados. Por exemplo, no ponto x^ν as componentes de um quadri vetor $V^\mu(x)$ projetadas no sistema de referência local são $V^a(x) = e^a{}_\lambda V^\lambda(x)$. Já num ponto distante dx^ν de x^ν as componentes projetadas são $V^a(x+dx) = e^a{}_\lambda V^\lambda(x) + (e^a{}_\lambda \partial_\mu V^\lambda + \partial_\mu e^a{}_\nu V^\nu) dx^\mu$. Portanto, o paralelismo distante de um quadri vetor, ou teleparalelismo, ocorre se

$$\nabla_\mu V^\lambda = \partial_\mu V^\lambda + (e^{a\lambda} \partial_\mu e_{a\nu}) V^\nu = \partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} V^\nu = 0,$$

onde

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} \partial_\mu e_{a\nu}, \quad (1.44)$$

é chamada de conexão de Weitzenböck. É fácil de verificar que as tétradas são autoparalelas,

$$\nabla_{\mu} e_a^{\lambda} = \partial_{\mu} e_a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_a^{\nu} = 0.$$

Ao contrário da conexão de Levi-Civita, a conexão de Weitzenböck não é simétrica nos índices inferiores. Substituindo a conexão de Weitzenböck (1.44) no tensor de torção, definido por

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu},$$

obtemos uma torção não nula

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}(\partial_{\mu} e_{a\nu} - \partial_{\nu} e_{a\mu}). \quad (1.45)$$

Como a conexão de Levi-Civita é simétrica, o seu tensor de torção é nulo. As conexões de Weitzenböck e de Levi-Civita são relacionadas por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{\circ}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + K^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

onde $K_{\lambda\mu\nu}$ é o tensor de contorção, definido por [9]

$$K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu\nu} - T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\lambda\mu}).$$

Para uma descrição completa das tétradas como sistemas de referência locais no espaço-tempo, vamos considerar um observador não-inercial seguindo sua linha mundo $x^{\mu}(\tau)$ com quadrivelocidade \mathbf{u} . Nesse caso, identificamos o quadrivetor do tipo tempo $\mathbf{e}_{(0)}$, que é tangencial a linha mundo do observador, com a quadrivelocidade do observador $\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u}$ [10], ou, em termos das componentes, $e_{(0)}^{\mu} = u^{\mu}$. O observador é livre para escolher os quadrivetores do tipo espaço $\mathbf{e}_{(i)}$, desde que eles sejam ortogonais a $\mathbf{e}_{(0)}$ e entre si. A derivada ordinária das componentes $e_{(0)}^{\mu} = u^{\mu}$ ao longo da linha mundo do observador dá as componentes da quadriaceleração do observador $a^{\mu} = du^{\mu}/d\tau = de_{(0)}^{\mu}/d\tau$.

Como as tétradas não são simétricas, elas possuem seis graus de liberdade a mais que a métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, para determinarmos o sistema de referência local adaptado a um determinado observador precisamos fixar seis condições sobre e_a^{μ} . A relação $u^i = e_{(0)}^i$ fixa as três componentes da velocidade do sistema de referência

local no espaço. Já a determinação de $e_{(i)}^j$ fixa as três direções no espaço dos eixos cartesianos do sistema de referência local. Por exemplo, para a téttrade

$$e_a^\mu(ct, x, y, z) = \delta_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

temos um sistema de referência local adaptado a observadores em repouso no espaço-tempo de Minkowski, com eixo $\mathbf{e}_{(1)}$ orientado na direção x , $\mathbf{e}_{(2)}$ orientado na direção y e $\mathbf{e}_{(3)}$ orientado na direção z .

Além da equação de movimento (1.35) descrever o movimento de uma partícula livre num sistema de referência não-inercial, ela também descreve o movimento de uma partícula livre na presença de um campo gravitacional. Portanto, a quadrivelocidade de um observador em queda livre num campo gravitacional é transportada paralelamente ao longo de sua linha mundo

$$\frac{^\circ Du^\mu}{d\tau} = \frac{^\circ De_{(0)}^\mu}{d\tau} = 0.$$

Assim como $\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u}$, o sistema de referência local \mathbf{e}_a como um todo é transportado paralelamente ao longo da linha mundo do observador em queda livre

$$\frac{^\circ De_a^\mu}{d\tau} = 0.$$

Se um observador em queda livre num campo gravitacional sofre a ação adicional de uma força inercial, então $^\circ Du^\mu/d\tau$ não se anula e, ao invés da equação (1.35), temos

$$m \frac{^\circ Du^\mu}{d\tau} = f^\mu,$$

onde f^μ são as componentes do quadri vetor força \mathbf{f} . Logo, as componentes da quadri-aceleração inercial de um observador num campo gravitacional são dadas por

$$a^\mu = \frac{^\circ Du^\mu}{d\tau} = \frac{^\circ De_{(0)}^\mu}{d\tau}. \quad (1.47)$$

A expressão (1.47) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} a^\mu &= u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} + {}^\circ \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\beta \right) \\ &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + {}^\circ \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para $a^\mu = 0$ a equação (1.48) representa uma trajetória geodésica e, então, o observador está em queda livre.

Uma forma de determinar o sistema de referência local adaptado a um observador num campo gravitacional é fixar as seis componentes do tensor de aceleração inercial desse sistema de referência. Assumindo que o observador tem adaptado a ele um sistema de referência local \mathbf{e}_a , a aceleração inercial desse ao longo do caminho é determinada por [11, 12]

$$\frac{{}^\circ D e_a^\mu}{d\tau} = \phi_a^b e_b^\mu, \quad (1.49)$$

onde ϕ_{ab} é o tensor de aceleração inercial anti-simétrico ($\phi_{ab} = -\phi_{ba}$). Segue da equação (1.49) que

$$\phi_a^b = e^b_\mu \frac{{}^\circ D e_a^\mu}{d\tau} = e^b_\mu u^{\lambda \circ} \nabla_\lambda e_a^\mu. \quad (1.50)$$

As componentes da quadriaceleração inercial definidas pela equação (1.47) podem ser projetadas no sistema de referência local do observador, de forma que

$$a^b = e^b_\mu a^\mu = e^b_\mu u^{\alpha \circ} \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu = \phi_{(0)}^b. \quad (1.51)$$

Dessa forma constatamos que a^μ e $\phi_{(0)}^b$ são acelerações equivalentes do sistema de referência local.

Em analogia com o tensor de Faraday podemos identificar $\phi_{ab} \rightarrow (\vec{a}, \vec{\Omega})$, onde \vec{a} é o vetor de aceleração translacional do sistema de referência local ($\phi_{(0)(i)} = a_{(i)}$) e representa a componente "elétrica", enquanto que $\vec{\Omega}$ é a frequência de rotação ($\phi_{(i)(j)} = \epsilon_{ijk} \Omega^{(k)}$) dos eixos espaciais do sistema de referência local com respeito aos eixos de um sistema de referência não girante (sob a ação do transporte de Fermi-Walker [10]), e representa a componente "magnética". Essa analogia nos permite escrever as acelerações inerciais de um sistema de referência local na forma

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \phi_{(0)(1)} \hat{\mathbf{x}} + \phi_{(0)(2)} \hat{\mathbf{y}} + \phi_{(0)(3)} \hat{\mathbf{z}}, \\ \vec{\Omega} &= \phi_{(2)(3)} \hat{\mathbf{x}} + \phi_{(3)(1)} \hat{\mathbf{y}} + \phi_{(1)(2)} \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ são vetores unitários no limite assintótico $r \rightarrow \infty$.

Utilizando a relação (1.46) e o paralelismo absoluto das tétradas podemos

reescrever o tensor de aceleração inercial (1.50) como

$$\begin{aligned}\phi_a^b &= e^b{}_\mu u^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu = e^b{}_\mu e_{(0)}{}^\lambda \left(\partial_\lambda e_a{}^\mu + {}^\circ\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} e_a{}^\nu \right) \\ &= e^b{}_\mu e_{(0)}{}^\lambda \left(\partial_\lambda e_a{}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} e_a{}^\nu - K^\mu{}_{\lambda\nu} e_a{}^\nu \right) \\ &= -e^b{}_\mu e_{(0)}{}^\lambda e_a{}^\nu K^\mu{}_{\lambda\nu}.\end{aligned}$$

Por fim, realizando alguns cálculos simples, podemos expressar ϕ_a^b como [13]

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} \left(T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a} \right), \quad (1.53)$$

onde $T_{abc} = e_b{}^\mu e_c{}^\nu T_{a\mu\nu}$. A expressão (1.53) não é invariante sob transformações de Lorentz locais, mas é invariante sob transformações de coordenadas.

O tensor ϕ_{ab} caracteriza as propriedades inerciais do sistema de referência local de um observador num campo gravitacional. Ele gera os valores das acelerações inerciais que são necessárias para manter o sistema de referência local numa dada orientação e estado inercial, no campo gravitacional definido pela métrica $g_{\mu\nu}$. A determinação do tensor de aceleração inercial ϕ_{ab} fixa os seis graus de liberdade adicionais das tétradas com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ e, dessa forma, determina o sistema de referência local adaptado ao observador no campo gravitacional.

A taxa de variação local do estado de um observador não-inercial é determinada pelo tensor ϕ_{ab} . Para indicarmos a escala de tal variação, é útil definirmos os comprimentos de aceleração translacional $L = c^2/a$ e rotacional c/Ω , e os tempos de aceleração c/a e $1/\Omega$ [7]. Essas quantidades caracterizam a escala de variação do estado do observador dado em cada instante por sua posição e velocidade. Se a escala de comprimento intrínseco λ de um fenômeno sob observação é insignificante comparado com a escala de aceleração do observador, então a *hipótese da localidade* é uma aproximação válida. Num sistema de referência em repouso na superfície da Terra, por exemplo, os comprimentos de aceleração translacional e rotacional são $c^2/g \cong 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$ e $c/\Omega \cong 4,125 \cdot 10^{12} \text{ m}$. Então, na maioria das situações experimentais $\lambda/L \ll 1$ e a *hipótese da localidade* é uma boa aproximação.

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

2.1 Descrição do Campo Gravitacional

Os resultados obtidos a partir da descrição dos campos gravitacionais pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ na Relatividade Geral se mostraram condizentes com testes experimentais realizados, tais como o avanço do periélio da órbita de Mercúrio, o desvio de um raio de luz pelo Sol, o desvio gravitacional para o vermelho, entre outros. Apesar do sucesso desses resultados, a Relatividade Geral possui pelo menos um problema conceitual importante: a obtenção de uma densidade de energia-momento gravitacional bem definida.

A energia e o momento de um sistema físico relativístico são expressos em termos de um tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$. Se o sistema é isolado então sua energia e seu momento são conservados. Essa lei de conservação é dada por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é equivalente à afirmação de que o quadrivetor energia-momento

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu\nu} dS_\nu,$$

é conservado [6], onde a integração é feita sobre uma hipersuperfície que contém todo o espaço tridimensional. Se realizarmos a integração sobre uma hipersuperfície espacial num tempo $x^0 = \text{constante}$, então P^μ assume a forma

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu 0} d^3x, \quad (2.2)$$

onde a integração é feita sobre todo o volume do espaço tridimensional. As compo-

mentes espaciais P^i do quadrivetor (2.2) formam o quadrivetor momento total do sistema e a componente temporal P^0 é a energia total do sistema.

Na ausência de um campo gravitacional a energia e o momento dos campos de matéria são conservados. Essa lei de conservação é representada pela equação (2.1), onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dos campos de matéria. A generalização da equação (2.1) para o caso onde um campo gravitacional está presente é dada por

$${}^\circ\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Essa equação, em geral, não expressa uma lei de conservação. Isso tem a ver com o fato de que, na presença de um campo gravitacional, a energia e o momento dos campos de matéria sozinhos não devem ser conservados mas, sim, a energia e o momento dos campos de matéria mais a energia e o momento do campo gravitacional, que não estão incluídos no tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$. Na Relatividade Geral a quantidade que é conservada é a densidade de energia-momento total dos campos de matéria e gravitacional

$$\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu},$$

onde $t^{\mu\nu}$ é a densidade de energia-momento do campo gravitacional.

No contexto da Relatividade Geral a densidade de energia-momento $\tau^{\mu\nu}$ é um pseudo-tensor, pois depende das derivadas ordinárias de $g_{\mu\nu}$, o que faz com que ela não se transforme como um tensor sob transformações de coordenadas, como, por exemplo, o pseudo-tensor de energia-momento total de Einstein [14]

$$\tau^\mu{}_\nu = ck \partial_\lambda \left\{ \frac{g^{\nu\gamma}}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma \left[-g \left(g^{\lambda\sigma} g^{\mu\gamma} - g^{\mu\sigma} g^{\lambda\gamma} \right) \right] \right\},$$

onde $k = c^3/16\pi G$. Através dos pseudo-tensores de energia-momento podemos apenas obter a energia total de um espaço-tempo assintoticamente plano [15],

$$E_{ADM} = k \int_{S \rightarrow \infty} (\partial_i h_{ik} - \partial_k h_{ii}) dS_k,$$

chamada de energia de ADM, onde $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$.

Para que a densidade de energia-momento de um sistema seja válida em qualquer sistema de coordenadas ela tem que ser uma quantidade tensorial. Uma densidade de energia-momento gravitacional tensorial surge naturalmente no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral – TERG, que descreve os campos gravitacionais

por tetradas autoparalelas ao invés da métrica $g_{\mu\nu}$. Outra vantagem do TERG é que, ao contrário da densidade lagrangiana da Relatividade Geral que é linear no escalar de curvatura, podemos construir uma densidade lagrangiana quadrática no tensor de torção, o que é esperado ao se utilizar uma teoria do tipo Yang-Mills numa possível tentativa de unificar a gravidade com as outras três forças fundamentais da natureza.

A primeira proposta de utilizar tetradas para a descrição do campo gravitacional foi feita por Einstein [16] na tentativa de unificar a gravitação com o eletromagnetismo. Sua tentativa falhou porque não havia solução de Schwarzschild na sua equação de campo simplificada. Mais tarde Møller [17, 18] resgatou a idéia de Einstein mostrando que em termos de tetradas podemos obter uma densidade de energia-momento gravitacional. A partir dos trabalhos de Møller, Pellegrini e Plebanski [19] chegaram a uma formulação lagrangiana para a gravitação em termos das tetradas. Utilizando o formalismo das tetradas, Schwinger [20] obteve uma expressão para a energia do campo gravitacional. Posteriormente, Schweizer e Strautmann [21], Nitsch e Hehl [22], e Schweizer et. al [23] demonstraram a equivalência, do ponto de vista observacional, entre o TERG e a Relatividade Geral.

2.2 Equações de Campo

As equações do campo gravitacional surgem naturalmente do formalismo lagrangiano do TERG. Nesse formalismo a densidade lagrangiana do campo gravitacional é dada por [24]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= -ke \left(\frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) \\ &= -ke \Sigma^{abc} T_{abc},\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde $e = \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{-g}$, $T^a = T^b{}_b{}^a e$

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} (T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c).\tag{2.4}$$

Usando a relação (1.46), é possível mostrar que

$$\mathcal{L}_g = {}^\circ\mathcal{L}_g - 2\partial_\mu(e T^\mu),$$

onde ${}^\circ\mathcal{L}_g$ é a densidade lagrangiana da Relatividade Geral. Portanto, a densidade lagrangiana do TERG é equivalente à densidade lagrangiana da Relatividade Geral, exceto por uma divergência total. Essa divergência pode ser descartada, pois não contribui para a integral de ação no caso de espaços-tempos assintoticamente planos.

A densidade lagrangiana (2.3) é invariante sob transformações de Lorentz globais e transformações de coordenadas. Sob transformações de Lorentz locais a densidade lagrangiana (2.3) se transforma nela mesma mais um termo de divergência total não nulo [25]. A integral dessa divergência total em geral não se anula, a menos que condições restritivas sejam impostas nas matrizes das transformações de Lorentz.

Também podemos construir uma densidade lagrangiana invariante sob transformações de Lorentz locais [26]. A simetria local surge ao utilizarmos, além das tétradas, a conexão afim de spin $\omega_{\mu ab}$ para a descrição da densidade lagrangiana. Esta descrição não será desenvolvida nesta tese pois possui algumas desvantagens em relação à descrição com simetria global. Além de ser mais simples, a densidade lagrangiana com simetria global permite, de forma simples, o acoplamento dos campos espinoriais de Dirac com o campo gravitacional [27] e torna possível o desenvolvimento de uma formulação hamiltoniana do TERG.

Realizando uma variação funcional da densidade lagrangiana do campo gravitacional (2.3) mais a densidade lagrangiana dos campos de matéria \mathcal{L}_m em relação a $e^{a\mu}$, obtemos as equações de campo

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = \frac{1}{4ck}eT_{a\mu}. \quad (2.5)$$

Usando a relação (1.46), podemos reescrever as equações de campo (2.5) como

$${}^\circ R_{a\mu}(e_{a\mu}) - \frac{1}{2}e_{a\mu}{}^\circ R(e_{a\mu}) = \frac{1}{2ck}T_{a\mu}.$$

Isso significa que como esperado, devido a equivalência entre as densidades lagrangianas correspondentes, as equações de campo teleparalela (2.5) são equivalentes às equações de Einstein (1.41).

As equações de campo (2.5) podem ser reescritas numa forma mais simples, como

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4ck}ee^a{}_\mu(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (2.6)$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = ck \left(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right), \quad (2.7)$$

é o tensor de energia-momento gravitacional [28]. Tomando a divergência da equação (2.6) em relação a λ , por causa da anti-simetria de $\Sigma^{a\lambda\nu}$ nos dois últimos índices, segue a lei de conservação

$$\partial_{\lambda} \left(e e^a{}_{\mu} t^{\lambda\mu} + e e^a{}_{\mu} T^{\lambda\mu} \right) = 0.$$

Ao contrário das densidades de energia-momento gravitacionais da Relatividade Geral a densidade de energia-momento gravitacional do teleparalelismo,

$$t^{\lambda a} = e^a{}_{\mu} t^{\lambda\mu},$$

é uma quantidade tensorial.

2.3 Energia, Momento e Momento Angular Gravitacionais

A formulação hamiltoniana do TERG surge ao reescrevermos a densidade lagrangiana (2.1) na forma canônica $\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$, em termos de e_{ai} , Π^{ak} e de multiplicadores de Lagrange, onde

$$\Pi^{ak} = \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4k e \Sigma^{a0k}, \quad (2.8)$$

é o momento canonicamente conjugado a e_{ak} . Já que a densidade lagrangiana não depende da derivada temporal de e_{a0} , o momento canonicamente conjugado correspondente se anula identicamente e e_{a0} surge como um multiplicador de Lagrange. Realizando a transformada de Legendre e desprezando termos de superfície, obtemos a densidade hamiltoniana [24]

$$\mathcal{H} = e_{a0} C^a + \alpha_{ik} \Gamma^{ik} + \beta_k \Gamma^k, \quad (2.9)$$

onde α_{ik} e β_k são multiplicadores de Lagrange, e C^a , Γ^{ik} e Γ^k constituem um conjunto de vínculos de primeira classe, o que garante uma teoria com uma álgebra de vínculos bem definida.

É importante escrever a densidade hamiltoniana na forma mais simples possível. Acreditamos que o vínculo C^a admite uma simplificação, apesar de ainda não a termos achado. Porém, podemos simplificar os vínculos Γ^{ik} e Γ^k reescrevendo-os como um único vínculo Γ^{ab} . Assim, podemos escrever a densidade hamiltoniana (3.8) na forma equivalente [29]

$$\mathcal{H} = e_{a0}C^a + \frac{1}{2}\lambda_{ab}\Gamma^{ab}, \quad (2.10)$$

onde λ_{ab} são multiplicadores de Lagrange, cujas componentes são

$$\lambda_{ik} = e^a{}_i e^b{}_k \lambda_{ab} = \alpha_{ik},$$

$$\lambda_{0k} = e^a{}_0 e^b{}_k \lambda_{ab} = \beta_k,$$

e o tensor Γ^{ab} representa ambos os vínculos Γ^{ik} e Γ^k através das relações

$$\begin{aligned} \Gamma^{ik} &= e_a{}^i e_b{}^k \Gamma^{ab}, \\ \Gamma^k &\equiv \Gamma^{0k} = e_a{}^0 e_b{}^k \Gamma^{ab}. \end{aligned}$$

O vínculo C^a é dado por

$$C^a = -\partial_i \Pi^{ai} + h^a,$$

onde h^a é a expressão [24]

$$\begin{aligned} h^a &= ke \left\{ e^{a0} \left[-\frac{1}{4g^{00}} \left(g_{ik} g_{jl} P^{ij} P^{kl} - \frac{1}{2} P^2 \right) + \left(\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^b{}_{mn} T_{bij} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g^{nj} T^i{}_{mn} T^m{}_{ij} - g^{ik} T^m{}_{mi} T^n{}_{nk} \right) \right] - \frac{1}{2g^{00}} \left(g_{ik} g_{jl} \gamma^{aij} P^{kl} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{ij} \gamma^{aij} P \right) - e^{ai} \left(g^{0m} g^{nj} T^b{}_{ij} T_{bmn} + g^{nj} T^0{}_{mn} T^m{}_{ij} \right. \\ &\quad \left. \left. + g^{0j} T^n{}_{mj} T^m{}_{ni} - 2g^{0k} T^m{}_{mk} T^n{}_{ni} - 2g^{ik} T^0{}_{ij} T^n{}_{nk} \right) \right\}, \end{aligned}$$

com γ^{aij} e P^{ik} definidos por

$$\begin{aligned} \gamma^{aij} &= \frac{1}{2ke} (e^{ai} \Gamma^j + e^{aj} \Gamma^i) - e^{ak} \left[g^{00} (g^{jm} T^i{}_{km} + g^{im} T^j{}_{km} + 2g^{ij} T^m{}_{mk}) \right. \\ &\quad \left. + g^{0m} (g^{0j} T^i{}_{mk} + g^{0i} T^j{}_{mk}) - 2g^{0i} g^{0j} T^m{}_{mk} + (g^{jm} g^{0i} + g^{im} g^{0j} \right. \\ &\quad \left. - 2g^{ij} g^{0m}) T^0{}_{mk} \right], \end{aligned}$$

$$P^{ik} = \frac{1}{ke} \Pi^{(ik)} + g^{0m} (g^{kj} T^i{}_{mj} + g^{ij} T^k{}_{mj} - 2g^{ik} T^j{}_{mj}) + (g^{km} g^{0i} + g^{im} g^{0k}) T^j{}_{mj}.$$

O vínculo Γ^{ab} é escrito como

$$\Gamma^{ab} = M^{ab} + 4ke \left(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a} \right),$$

onde $M^{ab} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu} = -M^{ba}$, com $M^{\mu\nu}$ definido por

$$\begin{aligned} M^{ik} &= 2\Pi^{[ik]} = e_a{}^i \Pi^{ak} - e_a{}^k \Pi^{ai}, \\ M^{0k} &= 2\Pi^{0k} = e_a{}^0 \Pi^{ak}. \end{aligned}$$

Uma equação de vínculo pode ser interpretada como uma equação que define a energia de um sistema físico. Isso ocorre, por exemplo, na consideração da ação de Jacobi [30] para uma partícula não relativística parametrizada. Para entendermos esse processo, vamos considerar uma partícula de massa m descrita no espaço de configurações com as coordenadas generalizadas q^i , $i = 1, 2, 3$. A partícula está sujeita a um potencial $V(q)$ e tem energia constante E . A integral de ação de Jacobi para essa partícula pode ser escrita como [31]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{m g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j} \sqrt{2[E - V(q)]} dt, \quad (2.11)$$

onde $\dot{q}^i = dq^i/dt$ e t é um parâmetro ao longo de um caminho no espaço de configurações com extremidades fixas.

Podemos simplificar o integrando de (2.11) escrevendo

$$\sqrt{m g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j} dt = \sqrt{m g_{ij}(q) dq^i dq^j},$$

que mostra que a ação é invariante sob reparametrizações do parâmetro temporal t . Então, na formulação de Jacobi do princípio de ação, a energia E é fixa, não seus instantes de tempo inicial e final. Em vista da reparametrização temporal da integral de ação, a hamiltoniana construída a partir de (2.11) é identicamente nula, o que é uma característica de teorias invariantes por reparametrizações.

O momento canonicamente conjugado

$$p_i = g_{ij} \dot{q}^j \sqrt{\frac{2m(E - V)}{\dot{q}^2}},$$

onde $\dot{q}^2 = g_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l$, estabelece a equação de vínculo

$$C(q, p) = \frac{g_{ij} p^i p^j}{2m} + V(q) - E \approx 0.$$

A equação de movimento obtida da integral de ação tem que ser complementada pela equação de vínculo $C = 0$ para ser equivalente à equação de movimento de Newton com energia fixa E [31]. Portanto, vemos que a equação de vínculo define a energia da partícula. Essa é uma característica que ocorre no TERG.

No TERG a forma integral da equação de vínculo $C^a = -\partial_i \Pi^{ai} + h^a = 0$ motiva a definição do quadrivetor energia-momento gravitacional [32],

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai}, \quad (2.12)$$

onde V é um volume arbitrário do espaço tridimensional. A integral dessa divergência total se reduz a uma integral de superfície. Considerando a componente $a = (0)$ na equação (2.12) e integrando sobre todo o espaço, obtemos, após cálculos longos mas diretos, que

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= - \int_{V \rightarrow \infty} d^3x \partial_i \Pi^{(0)i} \\ &= -2k \int_{V \rightarrow \infty} d^3x \partial_i (e g^{ji} e^{(0)0} T^k{}_{kj}) \\ &= k \int_{S \rightarrow \infty} dS_i (\partial_j h_{ji} - \partial_i h_{jj}) = E_{ADM}. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda = 0$ na equação (2.6) e utilizando o momento canonicamente conjugado (2.8) podemos reescrever o quadrivetor energia-momento gravitacional (2.12) na forma

$$P^a = \frac{1}{c} \int_V d^3x (e e^a{}_{\mu} t^{0\mu} + e e^a{}_{\mu} T^{0\mu}). \quad (2.13)$$

Entretanto, por motivos práticos utilizaremos a expressão (2.12), já que é mais fácil lidar com (2.12) do que com (2.13). A equação (2.13) mostra que para obtermos valores para o quadrivetor energia-momento gravitacional P^a , o tensor de energia-momento do campo gravitacional $t^{\lambda\mu}$ e o tensor de energia-momento dos campos de matéria $T^{\lambda\mu}$ têm que ser projetados num sistema de referência local.

De forma similar à definição do quadrivetor energia-momento gravitacional P^a , a forma integral da equação de vínculo $\Gamma^{ab} = 0$ motiva a definição do momento angular do campo gravitacional. Fazendo $\Gamma^{ab} = 0$ obtemos

$$M^{ab} = -4k e (\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}),$$

o que define

$$L^{ab} = \int_V d^3x e^a{}_\mu e^b{}_\nu M^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

como sendo o quadrimomento angular do campo gravitacional [29].

O colchete de Poisson de duas quantidades de campo arbitrárias F e G é dado por

$$\{F, G\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta e_{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi^{ai}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi^{ai}(x)} \frac{\delta G}{\delta e_{ai}(x)} \right).$$

Calculando o colchete de Poisson do quadrivetor energia-momento (2.12) e do quadrimomento angular (2.14), obtemos [29]

$$\begin{aligned} \{P^a, P^b\} &= 0, \\ \{P^a, L^{bc}\} &= -\eta^{ab} P^c + \eta^{ac} P^b, \\ \{L^{ab}, L^{cd}\} &= -\eta^{ac} L^{bd} - \eta^{bd} L^{ac} + \eta^{ad} L^{bc} + \eta^{bc} L^{ad}. \end{aligned}$$

Estas relações estão de acordo com a álgebra do quadrimomento e do momento angular generalizado que formam a representação do grupo de Poincaré. Portanto, nesse sentido, a interpretação de (2.12) como sendo o quadrivetor energia-momento e de (2.14) como sendo o quadrimomento angular se demonstra válida.

As expressões (2.12) e (2.14) são bem definidas se considerarmos tétradas tal que no limite do espaço-tempo plano, ou seja, na ausência de campo gravitacional, tenhamos $T_{a\mu\nu}(e) = 0$. Porém, existem tétradas do espaço-tempo plano tal que $T_{a\mu\nu}(e) \neq 0$, conseqüentemente, para tais tétradas, obtemos valores não nulos de P^a e L^{ab} na ausência de campo gravitacional. Por isso, nesses casos, estas expressões devem ser regularizadas adicionando um termo de subtração do espaço-tempo plano, exatamente como no método de Brown-York [33].

A forma regularizada do quadrivetor energia-momento gravitacional P^a é dada por [34]

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i [\Pi^{ai}(e) - \Pi^{ai}(E)], \quad (2.15)$$

onde $\Pi^{ai}(E)$ é o momento canônico construído a partir das tétradas do espaço-tempo plano $E^a{}_\mu$. Essa definição garante que a energia e o momento do espaço-tempo de referência, no caso o espaço-tempo plano, sempre se anule. O espaço-tempo de re-

ferência é determinado pelas tétradas $E^a{}_\mu$, obtidas de $e^a{}_\mu$ requerendo a anulação de parâmetros físicos tais como massa, momento angular, etc.

Da mesma forma que fizemos para o quadri vetor energia-momento, podemos estabelecer uma expressão regularizada para o quadrimomento angular gravitacional

$$L^{ab} = \int_V d^3x [M^{ab}(e) - M^{ab}(E)]. \quad (2.16)$$

As equações (2.15) e (2.16) podem ser utilizadas para o cálculo da energia, momento e momento angular do campo gravitacional para uma configuração arbitrária de tétradas.

2.4 Fluxo de Energia-momento Gravitacional

A equação de continuidade para o quadri vetor energia-momento gravitacional surge através de manipulações algébricas simples das equações de campo (2.5). Multiplicando essas equações pelas tétradas inversas $e^{a\lambda} e^{a\mu}$, obtemos

$$\partial_\nu (-4k e \Sigma^{a\lambda\nu}) = -k e e^{a\mu} (4\Sigma^{b\nu\lambda} T_{b\nu\mu} - \delta^\lambda{}_\mu \Sigma^{bcd} T_{bcd}) - \frac{1}{c} e e^a{}_\mu T^{j\mu}.$$

Restringindo os índices de espaço-tempo λ às suas componentes espaciais, ou seja, fazendo $\lambda = j$, chegamos a

$$\partial_0 (-4k e \Sigma^{aj0}) + \partial_k (-4k e \Sigma^{ajk}) = -k e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j{}_\mu \Sigma^{bcd} T_{bcd}) - \frac{1}{c} e e^a{}_\mu T^{j\mu}.$$

Tomando a divergência da equação anterior em relação a j , encontramos

$$-\partial_0 \partial_j (-4k e \Sigma^{a0j}) - \partial_j \partial_k (-4k e \Sigma^{akj}) = -k \partial_j [e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j{}_\mu \Sigma^{bcd} T_{bcd})] - \frac{1}{c} \partial_j (e e^a{}_\mu T^{j\mu}).$$

O segundo termo do lado esquerdo dessa equação se anula por causa da anti-simetria do tensor Σ^{akj} nos dois últimos índices. Portanto, a equação se reduz a

$$-\partial_0 \partial_j (-4k e \Sigma^{a0j}) = -k \partial_j [e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j{}_\mu \Sigma^{bcd} T_{bcd})] - \frac{1}{c} \partial_j (e e^a{}_\mu T^{j\mu}),$$

ou, de forma similar,

$$-\partial_0 \partial_j (\Pi^{aj}) = -k \partial_j [e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j{}_\mu \Sigma^{bcd} T_{bcd})] - \frac{1}{c} \partial_j (e e^a{}_\mu T^{j\mu}).$$

Integrando a equação anterior em um volume V do espaço tridimensional e usando o teorema de Gauss chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[- \int_V d^3x \partial_j (\Pi^{aj}) \right] &= -k \int_S dS_j \left[e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j_{\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{c} \int_S dS_j (e e^a_{\mu} T^{j\mu}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde S representa a fronteira espacial do volume V .

O lado esquerdo da equação (2.17) é a derivada temporal do quadrivetor energia-momento (2.12). Como a derivada temporal do quadrivetor energia-momento é menos o fluxo de energia-momento, podemos reescrever a equação (2.17) como [35, 36]

$$\frac{d}{dt} \left[- \int_V d^3x \partial_j (\Pi^{aj}) \right] = -\Phi_g^a - \Phi_m^a, \quad (2.18)$$

onde,

$$\Phi_g^a = k \int_S dS_j \left[e e^{a\mu} (4\Sigma^{bcj} T_{bc\mu} - \delta^j_{\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}) \right] \quad (2.19)$$

é o fluxo de energia-momento gravitacional, e

$$\Phi_m^a = \frac{1}{c} \int_S dS_j (e e^a_{\mu} T^{j\mu})$$

é o fluxo de energia-momento dos campos de matéria. Considerando a componente $a = (0)$ da equação (2.18) vemos que a perda de energia gravitacional é determinada pela equação

$$\frac{dP^{(0)}}{dt} = -\Phi_g^{(0)} - \Phi_m^{(0)}.$$

No vácuo, a equação (2.18) se reduz a

$$\frac{dP^a}{dt} = -\Phi_g^a = - \int_V d^3x \partial_j \phi^{aj} = - \frac{1}{c} \int_V d^3x \partial_j (e e^a_{\mu} t^{j\mu}),$$

onde

$$\phi^{a\lambda} = \frac{1}{c} e e^a_{\mu} t^{\lambda\mu} = k e e^{a\mu} (4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}).$$

considerando apenas as componentes espaciais de a , temos [28]

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = - \int_V d^3x \partial_j \phi^{(i)j} = - \int_S dS_j (-\phi^{(i)j}).$$

No lado esquerdo da equação acima temos a derivada temporal de uma componente de momento, ou seja, ela possui natureza de força. Portanto, a densidade

$-\phi^{(i)j}$ pode ser interpretada como força por unidade de área, ou pressão. Especificamente, $-\phi^{(i)j}$ pode ser entendida como a força exercida na direção i num elemento de unidade de área cuja normal está na direção j .

Observadores no espaço-tempo

3.1 Observadores no espaço-tempo de Minkowski

O sistema de referência local adaptado a observadores em repouso no espaço-tempo de Minkowski é determinado pela tétrada $e_a^\mu(ct, x, y, z) = \delta_a^\mu$. Após um boost dependente do tempo na direção x , a tétrada se torna

$$e_a^\mu(ct, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e $\beta = v(t)/c$. O sistema de referência local determinado pela tétrada (3.1) é adaptado a observadores cujas componentes da quadrivelocidade são $u^\mu = e_{(0)}^\mu(ct, x, y, z) = (\gamma, \gamma\beta, 0, 0)$.

Através da relação $e^a_\mu = \eta^{ab} g_{\mu\nu} e_b^\nu$, obtemos a tétrada inversa

$$e^a_\mu(ct, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde tanto η_{ab} quanto $g_{\mu\nu}$ descrevem o espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cartesianas, ou seja, são iguais a (1.5).

Estamos interessados no cálculo do tensor de aceleração inercial ϕ_{ab} dado pela equação (1.53). Para isso, primeiro calculamos as componentes não nulas do tensor de torção $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$

$$\begin{aligned} T_{(0)01} &= \frac{d(\gamma\beta)}{dt}, \\ T_{(1)01} &= \frac{d\gamma}{dt}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b{}_{\mu}$ é obtida a partir da téttrade inversa (3.2). Depois, utilizamos as componentes (3.3) e a téttrade (3.1) em $T_{abc} = e_b{}^{\mu} e_c{}^{\nu} T_{a\mu\nu}$, obtendo assim as componentes não nulas

$$\begin{aligned} T_{(0)(0)(1)} &= \frac{d(\gamma\beta)}{dt}, \\ T_{(1)(0)(1)} &= \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por fim, substituindo os valores (3.4) na expressão (1.53), obtemos as acelerações inerciais

$$\begin{aligned} \phi_{(0)(1)} &= \frac{d(\beta\gamma)}{dx^0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right], \\ \phi_{(0)(2)} &= 0, \\ \phi_{(0)(3)} &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\phi_{(i)(j)} = 0.$$

Em vista das relações (1.52) podemos reescrever as acelerações inerciais acima da forma

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \right) \hat{x}, \\ \vec{\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Estes valores significam que o sistema de referência local definido por (3.1) possui uma aceleração translacional na direção x , que é exatamente a aceleração esperada de um sistema de referência que sofre um boost dependente do tempo na direção x , confirmando assim nossa interpretação de ϕ_{ab} como a aceleração inercial do sistema de referência local.

Realizando uma rotação com velocidade angular $\dot{\varphi} = \omega$ ao redor do eixo z , onde $\varphi = \varphi(t)$, no sistema de referência local adaptado a observadores em repouso no espaço-tempo de Minkowski determinado pela téttrade $e_a{}^{\mu}(ct, x, y, z) = \delta_a^{\mu}$, obtemos

$$e_a{}^{\mu}(ct, x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 \\ 0 & \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

de onde temos as componentes da quadrivelocidade $u^\mu = e_{(0)}^\mu(ct, x, y, z) = (1, 0, 0, 0)$, ou seja, após a rotação do sistema de referência local o observador permanece em repouso.

A partir da tétrada inversa

$$e^a{}_\mu(ct, x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0 \\ 0 & \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

calculamos as componentes não nulas de $T_{a\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T_{(1)01} &= -\omega \text{sen}\varphi, \\ T_{(1)02} &= -\omega \cos\varphi, \\ T_{(2)01} &= \omega \cos\varphi, \\ T_{(2)02} &= -\omega \text{sen}\varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Através das componentes (3.7) e da tétrada (3.5) obtemos as componentes não nulas de T_{abc} ,

$$\begin{aligned} T_{(1)(0)(2)} &= -\omega, \\ T_{(2)(0)(1)} &= \omega. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores no tensor de aceleração inercial (1.53), chegamos a

$$\phi_{(0)(i)} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{(1)(2)} &= -\omega, \\ \phi_{(2)(3)} &= 0, \\ \phi_{(3)(1)} &= 0, \end{aligned}$$

ou, de forma análoga,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0 \\ \vec{\Omega} &= -\omega \hat{z} \end{aligned}$$

que representa uma aceleração inercial ao redor do eixo z . Portanto, podemos concluir que o sistema de referência local determinado pela tétrada (3.5) está em rotação ao redor do eixo z .

3.2 Observador em queda livre no espaço-tempo de Reissner-Nordström

A métrica de Reissner-Nordström é uma solução das equações de Einstein no vácuo, que descreve o campo gravitacional gerado por um corpo de massa M , carga Q , esfericamente simétrico e sem rotação. O intervalo entre dois eventos, nesse caso, é dado por [37]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

onde G é a constante gravitacional e $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F/m$ é a constante de permissividade elétrica. Comparando esse elemento de linha com a equação (1.19) vemos que a métrica do espaço-tempo de Reissner-Nordström, em unidades naturais $c = 1$, $G = 1$ e $1/4\pi\epsilon_0 = 1$, é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Pelo fato da métrica (3.8) ser independente do tempo, existe um vetor de Killing associado a essa simetria [38], que tem componentes

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Além disso, a métrica também é independente de ϕ e, portanto, também temos um vetor de Killing associado a essa simetria, cujas componentes são

$$\eta^\mu = (0, 0, 0, 1).$$

Por causa da independência de t e ϕ na métrica de Reissner-Nordström, as quantidades $\xi \cdot \mathbf{u}$ e $\eta \cdot \mathbf{u}$ são conservadas, onde \mathbf{u} é a quadrivelocidade de um observador arbitrário. As formas explícitas dessas quantidades conservadas são

$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = -g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) u^0, \quad (3.9)$$

$$l = \eta \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} \eta^\mu u^\nu = r^2 \sin^2 \theta u^3, \quad (3.10)$$

onde e é a energia por unidade de massa e l é o momento angular por unidade de massa do observador.

A normalização da quadrivelocidade gera outra integral da equação geodésica, em adição àquelas para energia (3.9) e momento angular (3.10). Em unidades naturais, a normalização é dada por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1. \quad (3.11)$$

Essas três integrais podem ser usadas para expressar as componentes da quadrivelocidade em termos das constantes e e l .

Substituindo os valores da métrica de Reissner-Nordström (3.8) na equação (3.11), e considerando que o observador está em queda livre radial, ou seja, fazendo $u^2 = u^3 = 0$, onde $u^\mu = u^\mu(t, r, \theta, \phi)$, temos

$$-\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) (u^0)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (u^1)^2 = -1. \quad (3.12)$$

Usando a relação (3.9) para eliminar u^0 , a equação (3.12) pode ser reescrita como

$$-\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (u^1)^2 = -1. \quad (3.13)$$

Tomando o observador inicialmente em repouso no infinito, ou seja, fazendo $e = 1$, e com o auxílio das equações (3.9) e (3.13), obtemos

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1},$$

$$u^1 = \frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}.$$

Portanto, um observador em queda livre radial no espaço-tempo de Reissner-Nordström possui uma quadrivelocidade com componentes

$$u^\mu = \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}, -\left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}, 0, 0 \right].$$

Uma tétrada que satisfaz a condição $e_{(0)}^\mu = u^\mu$ e a relação (1.43) é dada por

$$e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta\alpha^2 \text{sen}\theta \cos\phi & \text{sen}\theta \cos\phi & \frac{1}{r} \cos\theta \cos\phi & -\frac{\text{sen}\phi}{r \text{sen}\theta} \\ -\beta\alpha^2 \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \frac{1}{r} \cos\theta \text{sen}\phi & \frac{\cos\phi}{r \text{sen}\theta} \\ -\beta\alpha^2 \cos\theta & \cos\theta & -\frac{1}{r} \text{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde

$$\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2},$$

$$\beta = (1 - \alpha^{-2})^{1/2} = \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}.$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} e_{(1)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, \text{sen}\theta \cos\phi, (1/r) \cos\theta \cos\phi, -\text{sen}\phi / r \text{sen}\theta), \\ e_{(2)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, (1/r) \cos\theta \text{sen}\phi, \cos\phi / r \text{sen}\theta), \\ e_{(3)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, \cos\theta, -(1/r) \text{sen}\theta, 0), \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou, através de uma transformação de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, x, y, z)$,

$$\begin{aligned} e_{(1)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, 1, 0, 0), \\ e_{(2)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, 0, 1, 0), \\ e_{(3)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

De (3.16) podemos afirmar que o sistema de referência local em queda livre determinado pela tétrada (3.14) possui o eixo $\mathbf{e}_{(1)}$ orientado na direção x , $\mathbf{e}_{(2)}$ orientado na direção y e $\mathbf{e}_{(3)}$ orientado na direção z , no infinito espacial.

Através da tétrada (3.14) e das componentes não nulas de $T_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T_{(1)01} &= -\partial_r \beta \text{sen}\theta \cos\phi, \\ T_{(1)02} &= -\beta \cos\theta \cos\phi, \\ T_{(1)03} &= \beta \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \\ T_{(1)12} &= (1 - \alpha^2) \cos\theta \cos\phi, \\ T_{(1)13} &= -(1 - \alpha^2) \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(2)01} &= -\partial_r \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\
 T_{(2)02} &= -\beta \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \\
 T_{(2)03} &= -\beta \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\
 T_{(2)12} &= (1 - \alpha^2) \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \\
 T_{(2)13} &= (1 - \alpha^2) \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\
 T_{(3)01} &= -\partial_r \beta \cos \theta, \\
 T_{(3)02} &= \beta \operatorname{sen} \theta, \\
 T_{(3)12} &= -(1 - \alpha^2) \operatorname{sen} \theta,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

construídas a partir da téttrade inversa

$$e^a{}_{\mu}(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha^2 \beta & 0 & 0 \\ \beta \operatorname{sen} \theta \cos \phi & \alpha^2 \operatorname{sen} \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \alpha^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & r \cos \theta \operatorname{sen} \phi & r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ \beta \cos \theta & \alpha^2 \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

obtemos as componentes não nulas do tensor de torção T_{abc} ,

$$\begin{aligned}
 T_{(1)(0)(1)} &= -\frac{1}{r} \left[r \partial_r \beta \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi + \beta (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) \right], \\
 T_{(1)(0)(2)} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(1)(0)(3)} &= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(2)(0)(1)} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(2)(0)(2)} &= -\frac{1}{r} \left[r \partial_r \beta \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi + \beta (\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) \right], \\
 T_{(2)(0)(3)} &= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(3)(0)(1)} &= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(3)(0)(2)} &= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \phi}{r} (-r \partial_r \beta + \beta), \\
 T_{(3)(0)(3)} &= \frac{1}{r} (r \partial_r \beta \cos^2 \theta + \beta \operatorname{sen}^2 \theta).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Não é difícil mostrar, a partir das componentes (3.19) e da equação (1.53), que

$$\phi_{(0)i} = 0,$$

e

$$\phi_{(i)(j)} = 0, \quad (3.20)$$

o que implica que o sistema de referência local adaptado ao observador em queda livre não sofre acelerações inerciais.

As três componentes espaciais da quadrivelocidade $u^i = e_{(0)}^i$, junto com as três componentes dadas pela equação (3.20) fixam completamente a estrutura da tétrada, mesmo que a equação (3.20) tenha sido verificada a posteriori. Portanto, podemos concluir que a tétrada (3.14) descreve um sistema de referência local não-girante em queda livre radial no espaço-tempo de Reissner-Nordström.

A seguir, iremos calcular a energia gravitacional do espaço-tempo de Reissner-Nordström sob o ponto de vista do sistema de referência local determinado pela tétrada (3.14). Considerando a componente $a = (0)$ da equação (2.12) vemos que a energia gravitacional contida dentro de uma superfície esférica de raio constante centrada na origem do sistema de coordenadas, é dada por

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= - \int_V d^3x \partial_j \Pi^{(0)j} = - \oint_S dS_j \Pi^{(0)j} \\ &= \oint_S dS_j (4k e^{\Sigma^{(0)0j}}) = 4k \int_S d\theta d\phi e^{\Sigma^{(0)01}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Verificando as componentes não nulas da tétrada inversa (3.18), vemos que a componente $\Sigma^{(0)01}$ do tensor $\Sigma^{a\mu\nu} = e^a_{\lambda} \Sigma^{\lambda\mu\nu}$ se reduz a

$$\Sigma^{(0)01} = e^{(0)}_0 \Sigma^{001} + e^{(0)}_1 \Sigma^{101}. \quad (3.22)$$

Utilizando a definição (2.4) e após algumas simplificações, temos

$$\begin{aligned} \Sigma^{001} &= \frac{1}{2} (T^{001} - g^{00} T^1) \\ \Sigma^{101} &= \frac{1}{2} (T^{101} + g^{11} T^1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Considerando as componentes não nulas da métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

e cancelando alguns termos, obtemos as componentes do tensor de torção $T^{\lambda\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} T_{\alpha\beta\gamma}$,

$$T^{001} = g^{00} g^{00} g^{11} T_{001},$$

$$T^{101} = g^{00} g^{11} g^{11} T_{101},$$

e a componente do traço $T^\sigma = g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} T_{\lambda\mu\nu}$,

$$T^1 = g^{00} g^{11} T_{001} - g^{11} g^{22} T_{212} - g^{11} g^{33} T_{313}.$$

Substituindo os valores acima em (3.23) e cancelando alguns termos, chegamos a

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{2} (g^{00} g^{11} g^{22} T_{212} + g^{00} g^{11} g^{33} T_{313}),$$

$$\Sigma^{101} = \frac{1}{2} (g^{00} g^{11} g^{22} T_{202} + g^{00} g^{11} g^{33} T_{303}).$$

Utilizando esses tensores podemos escrever o tensor (3.22) como

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)01} &= \frac{1}{2} e^{(0)0} (g^{00} g^{11} g^{22} T_{212} + g^{00} g^{11} g^{33} T_{313}) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(0)1} (g^{00} g^{11} g^{22} T_{202} + g^{00} g^{11} g^{33} T_{303}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A partir da tétrada inversa (3.18) e das componentes (3.17) do tensor de torção $T_{a\mu\nu}$ calculamos as componentes não nulas de $T_{\lambda\mu\nu} = e^a{}_\lambda T_{a\mu\nu}$,

$$T_{001} = -\beta \partial_r \beta,$$

$$T_{101} = -\alpha^2 \partial_r \beta,$$

$$T_{202} = -r\beta,$$

$$T_{212} = r(1 - \alpha^2),$$

$$T_{303} = -r\beta \sin^2 \theta,$$

$$T_{313} = r(1 - \alpha^2) \sin^2 \theta. \quad (3.26)$$

Substituindo esses valores, as componentes da tétrada inversa (3.18) e as componentes da métrica inversa (3.24) no tensor (3.25), encontramos

$$\Sigma^{(0)01} = \alpha^2 - 1 - \alpha^2 \beta^2 = 0. \quad (3.27)$$

De (3.21) e (3.27), vemos que a energia gravitacional contida dentro de uma superfície de raio constante, assim como a energia gravitacional total do espaço-tempo, é nula, se avaliada do sistema de referência local de um observador em queda livre. Essa é uma propriedade muito interessante do TERG. A anulação da energia gravitacional para observadores em queda livre é uma característica que é consistente (e uma consequência) do *princípio da equivalência*, já que efeitos locais da gravidade não são medidos por observadores em queda livre.

O resultado dado pelas equações (3.21) e (3.27) é um bom exemplo da dependência que a energia gravitacional tem do sistema de referência. O fato de não termos achado um valor correspondente à energia eletromagnética, que é esperada no caso de um observador acelerado em direção a uma fonte carregada, pode estar relacionado à existência de um horizonte de evento em torno da carga. Além disso, para um observador medir a energia eletromagnética é necessário que ele possua uma carga elétrica.

Pode ser facilmente verificado que as componentes do momento gravitacional $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ se anulam em vista das integrais do tipo $\int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi = 0$, enquanto que $P^{(3)}$ se anula em vista de $\int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta = 0$. É importante lembrar que em geral a anulação de ϕ_{ab} não implica na anulação de P^a . Para um observador em repouso no infinito do tipo espaço, a energia gravitacional total não se anula, enquanto que para esses observadores temos $\phi_{ab} \cong 0$ no limite $r \rightarrow \infty$.

3.3 Observador em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild descreve o campo gravitacional gerado por uma distribuição de massa M esfericamente simétrica, estacionária e sem rotação. O elemento de linha de Schwarzschild tem a forma [39]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Nesse caso, em unidades naturais, temos a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Assim como a métrica de Reissner-Nordström, a métrica de Schwarzschild é independente de t e ϕ . Portanto, de forma análoga, temos as quantidades conservadas

$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = -g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^0, \quad (3.29)$$

$$l = \eta \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} \eta^\mu u^\nu = r^2 \sin^2 \theta u^3. \quad (3.30)$$

Como queremos um observador em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild, fazemos $u^1 = u^2 = 0$, onde $u^\mu = u^\mu(t, r, \theta, \phi)$, e usamos a métrica (3.28) na normalização da quadrivelocidade (3.11), obtendo assim

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^0)^2 + r^2 \sin^2 \theta (u^3)^2 = -1. \quad (3.31)$$

Isolando as velocidades u^0 e u^3 em (3.29) e (3.30), respectivamente, substituindo em (3.31) e considerando que o observador está em órbita circular no plano equatorial $\theta = \pi/2$, chegamos a

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} e^2 + \frac{l^2}{r^2} = -1. \quad (3.32)$$

Com um pouco mais de manipulação, essa equação pode ser reescrita na forma de um potencial efetivo [38]

$$V_{ef} = \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right] = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}. \quad (3.33)$$

Portanto, a técnica de tratar órbitas através do potencial efetivo na mecânica newtoniana pode ser aplicada às órbitas no espaço-tempo de Schwarzschild. De fato, a forma do potencial efetivo (3.33) difere do potencial newtoniano apenas pelo fator adicional $-Ml^2/r^3$.

Órbitas circulares estáveis ocorrem no raio $r = r_{min}$ do mínimo do potencial efetivo $dV_{ef}/dr = 0$. Fazendo isso para o potencial efetivo (3.33), obtemos

$$r = r_{min} = \frac{l^2}{2M} \left[1 + \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{l}\right)^2} \right].$$

Isolando l da relação anterior, substituindo na equação (3.32) e, posteriormente, isolando e , encontramos

$$\begin{aligned} l &= r \left(\frac{M}{r-3M} \right)^{1/2}, \\ e &= (r-2M)(r^2-3Mr)^{-1/2}, \end{aligned}$$

onde $r = r_{min}$. Substituindo esses valores em (3.29) e (3.30) e, novamente, considerando $\theta = \pi/2$, chegamos a

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2}, \\ u^3 &= \frac{d\phi}{d\tau} = \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2} \left(\frac{M}{r^3} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A velocidade angular do observador numa órbita circular estável é dada por

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^3}{u^0} = \left(\frac{M}{r^3} \right)^{1/2}.$$

Utilizando esse valor e a definição

$$\lambda = \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2},$$

nas velocidades (3.34), podemos reescrever as componentes da quadrivelocidade do observador como

$$u^\mu = (\lambda, 0, 0, \lambda\Omega).$$

Uma tétrada que satisfaz $e_{(0)}^\mu = u^\mu$ e a relação (1.43) é dada por

$$e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 A & 0 & 0 & \frac{C}{r^2} \\ -\alpha^2 B \sin\phi & \alpha^{-1} \sin\theta \cos\phi & \frac{1}{r} \cos\theta \cos\phi & -\frac{D \sin\phi}{r \sin\theta} \\ \alpha^2 B \cos\phi & \alpha^{-1} \sin\theta \sin\phi & \frac{1}{r} \cos\theta \sin\phi & \frac{D \cos\phi}{r \sin\theta} \\ 0 & \alpha^{-1} \cos\theta & -\frac{1}{r} \sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2}, \\ A &= -\alpha^{-2} \lambda, \\ B &= \alpha^{-1} (\alpha^{-2} \lambda^2 - 1)^{1/2}, \\ C &= \lambda \Omega r^2, \\ D &= (1 + \lambda^2 \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta)^{1/2}. \end{aligned}$$

No limite assintótico a tétada (3.35) se comporta exatamente como em (3.15) e (3.16), fazendo com que os eixos do sistema de referência local do observador estejam orientados ao longo dos eixos cartesianos no infinito espacial.

Para o cálculo das acelerações inerciais e, posteriormente, da energia gravitacional, calculamos as componentes não nulas de $T_{a\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
 T_{(0)01} &= -\partial_r A, \\
 T_{(0)13} &= \partial_r C \text{sen}^2 \theta, \\
 T_{(0)23} &= 2C \text{sen} \theta \cos \theta, \\
 T_{(1)01} &= -\partial_r B \text{sen} \phi, \\
 T_{(1)03} &= -B \cos \phi, \\
 T_{(1)12} &= (1 - \alpha) \cos \theta \cos \phi, \\
 T_{(1)13} &= -(D + r \partial_r D - \alpha) \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \\
 T_{(1)23} &= -(D \cos \theta + \partial_\theta D \text{sen} \theta - \cos \theta) r \text{sen} \phi, \\
 T_{(2)01} &= \partial_r B \cos \phi, \\
 T_{(2)03} &= -B \text{sen} \phi, \\
 T_{(2)12} &= (1 - \alpha) \cos \theta \text{sen} \phi, \\
 T_{(2)13} &= (D + r \partial_r D - \alpha) \text{sen} \theta \cos \phi, \\
 T_{(2)23} &= (D \cos \theta + \partial_\theta D \text{sen} \theta - \cos \theta) r \cos \phi, \\
 T_{(3)12} &= -(1 - \alpha) \text{sen} \theta,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

construídas a partir da tétada inversa

$$e^a{}_\mu(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -C \text{sen}^2 \theta \\ B \text{sen} \phi & \alpha \text{sen} \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r D \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ -B \cos \phi & \alpha \text{sen} \theta \text{sen} \phi & r \cos \theta \text{sen} \phi & r D \text{sen} \theta \cos \phi \\ 0 & \alpha \cos \theta & -r \text{sen} \theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

A partir das componentes (3.36) e da tétada (3.35) obtemos as componentes não nulas de T_{abc} ,

$$\begin{aligned}
 T_{(0)(0)(1)} &= \frac{\text{sen} \theta \cos \phi}{\alpha r^3} (A \alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr \partial_r C \text{sen}^2 \theta - 2C^2 \alpha \cos^2 \theta), \\
 T_{(0)(0)(2)} &= \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \phi}{\alpha r^3} (A \alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr \partial_r C \text{sen}^2 \theta - 2C^2 \alpha \cos^2 \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(0)(0)(3)} &= \frac{\cos \theta}{\alpha r^3} \left(A\alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr \partial_r C \sin^2 \theta + 2C^2 \alpha \sin^2 \theta \right), \\
T_{(0)(1)(2)} &= \frac{1}{\alpha r^2} \left(B\alpha^2 r^2 \partial_r A \sin \theta + Dr \partial_r C \sin^2 \theta + 2DC\alpha \cos^2 \theta \right), \\
T_{(0)(1)(3)} &= \frac{\cos \theta \sin \phi}{\alpha r^2 \sin \theta} \left(B\alpha^2 r^2 \partial_r A \sin \theta + Dr \partial_r C \sin^2 \theta - 2DC\alpha \sin^2 \theta \right), \\
T_{(0)(2)(3)} &= -\frac{\cos \theta \cos \phi}{\alpha r^2 \sin \theta} \left(B\alpha^2 r^2 \partial_r A \sin \theta + Dr \partial_r C \sin^2 \theta - 2DC\alpha \sin^2 \theta \right), \\
T_{(1)(0)(1)} &= \frac{\sin \phi \cos \phi}{\alpha r^2 \sin \theta} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \sin^2 \theta - A\alpha^3 DBr - (B^2 \alpha^2 + 1) C \alpha \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + CD \sin \theta - (1 - \alpha) CD \sin \theta \cos^2 \theta + Cr \partial_r D \sin^3 \theta + C\alpha \partial_\theta D \cos \theta \sin^2 \theta \right], \\
T_{(1)(0)(2)} &= \frac{1}{\alpha r^2 \sin \theta} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \sin^2 \theta \sin^2 \phi + A\alpha^3 DBr \cos^2 \phi + (B^2 \alpha^2 \cos^2 \phi \right. \\
&\quad \left. - \sin^2 \phi) C \alpha \sin \theta + CD \sin \theta \sin^2 \phi - (1 - \alpha) CD \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \phi \right. \\
&\quad \left. + Cr \partial_r D \sin^3 \theta \sin^2 \phi + C\alpha \partial_\theta D \cos \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right], \\
T_{(1)(0)(3)} &= \frac{\sin \phi}{\alpha r^2} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \cos \theta + (1 - \alpha) CD \sin \theta \cos \theta + Cr \partial_r D \sin \theta \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - C\alpha \partial_\theta D \sin^2 \theta \right], \\
T_{(1)(1)(2)} &= \frac{\sin \phi}{\alpha r \sin \theta} \left(-D^2 \sin^2 \theta + D\alpha - D^2 \alpha \cos^2 \theta + B\alpha^2 r \partial_r B \sin^2 \theta - Dr \partial_r D \sin^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - D\alpha \partial_\theta D \sin \theta \cos \theta \right), \\
T_{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{\alpha r} \left[-(1 - \alpha) \cos \theta \cos^2 \phi - (1 - \alpha) D^2 \cos \theta \sin^2 \phi + B\alpha^2 r \partial_r B \cos \theta \sin^2 \phi \right. \\
&\quad \left. - Dr \partial_r D \cos \theta \sin^2 \phi + D\alpha \partial_\theta D \sin \theta \sin^2 \phi \right], \\
T_{(1)(2)(3)} &= \frac{\sin \phi \cos \phi}{\alpha r} \left[-(1 - \alpha) \cos \theta + (1 - \alpha) D^2 \cos \theta - B\alpha^2 r \partial_r B \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + Dr \partial_r D \cos \theta - D\alpha \partial_\theta D \sin \theta \right], \\
T_{(2)(0)(1)} &= -\frac{1}{\alpha r^2 \sin \theta} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \sin^2 \theta \cos^2 \phi + A\alpha^3 DBr \sin^2 \phi + (B^2 \alpha^2 \sin^2 \phi \right. \\
&\quad \left. - \cos^2 \phi) C \alpha \sin \theta + CD \sin \theta \cos^2 \phi - (1 - \alpha) CD \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi \right. \\
&\quad \left. + Cr \partial_r D \sin^3 \theta \cos^2 \phi + C\alpha \partial_\theta D \cos \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right], \\
T_{(2)(0)(2)} &= -\frac{\sin \phi \cos \phi}{\alpha r^2 \sin \theta} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \sin^2 \theta - A\alpha^3 DBr - (B^2 \alpha^2 + 1) C \alpha \sin \theta + CD \sin \theta \right. \\
&\quad \left. - (1 - \alpha) CD \sin \theta \cos^2 \theta + Cr \partial_r D \sin^3 \theta + C\alpha \partial_\theta D \cos \theta \sin^2 \theta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{(2)(0)(3)} &= -\frac{\cos\phi}{\alpha r^2} \left[A\alpha^2 r^2 \partial_r B \cos\theta + (1-\alpha)CD\text{sen}\theta \cos\theta + Cr\partial_r D\text{sen}\theta \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. - C\alpha\partial_\theta D\text{sen}^2\theta \right], \\
 T_{(2)(1)(2)} &= \frac{\cos\phi}{\alpha r \text{sen}\theta} \left(D^2\text{sen}^2\theta - D\alpha + D^2\alpha \cos^2\theta - B\alpha^2 r \partial_r B \text{sen}^2\theta \right. \\
 &\quad \left. + Dr\partial_r D\text{sen}^2\theta + D\alpha\partial_\theta D\text{sen}\theta \cos\theta \right), \\
 T_{(2)(1)(3)} &= \frac{\text{sen}\phi \cos\phi}{\alpha r} \left[-(1-\alpha)\cos\theta + (1-\alpha)D^2 \cos\theta - B\alpha^2 r \partial_r B \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. + Dr\partial_r D \cos\theta - D\alpha\partial_\theta D\text{sen}\theta \right], \\
 T_{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{\alpha r} \left[-(1-\alpha)\cos\theta \text{sen}^2\phi - (1-\alpha)D^2 \cos\theta \cos^2\phi + B\alpha^2 r \partial_r B \cos\theta \cos^2\phi \right. \\
 &\quad \left. - Dr\partial_r D \cos\theta \cos^2\phi + D\alpha\partial_\theta D\text{sen}\theta \cos^2\phi \right], \\
 T_{(3)(1)(3)} &= \frac{\text{sen}\theta \cos\phi}{\alpha r} (1-\alpha), \\
 T_{(3)(2)(3)} &= \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\phi}{\alpha r} (1-\alpha). \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Substituindo as componentes (3.38) na expressão (1.53) obtemos as acelerações inerciais

$$\begin{aligned}
 \phi_{(0)(1)} &= \frac{\text{sen}\theta \cos\phi}{\alpha r^3} \left(A\alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr\partial_r C \text{sen}^2\theta - 2C^2\alpha \cos^2\theta \right), \\
 \phi_{(0)(2)} &= \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\phi}{\alpha r^3} \left(A\alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr\partial_r C \text{sen}^2\theta - 2C^2\alpha \cos^2\theta \right), \\
 \phi_{(0)(3)} &= \frac{\cos\theta}{\alpha r^3} \left(A\alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr\partial_r C \text{sen}^2\theta + 2C^2\alpha \text{sen}^2\theta \right), \\
 \phi_{(1)(2)} &= \frac{1}{2\alpha r^2 \text{sen}\theta} \left[B\alpha^2 r^2 \partial_r A \text{sen}^2\theta + Dr\partial_r C \text{sen}^3\theta + 2DC\alpha \text{sen}\theta \cos^2\theta \right. \\
 &\quad \left. + A\alpha^2 r^2 \partial_r B \text{sen}^2\theta + A\alpha^3 DBr + (B^2\alpha^2 - 1)C\alpha \text{sen}\theta + CD\text{sen}\theta \right. \\
 &\quad \left. - (1-\alpha)CD\text{sen}\theta \cos^2\theta + Cr\partial_r D \text{sen}^3\theta + C\alpha\partial_\theta D \cos\theta \text{sen}^2\theta \right], \\
 \phi_{(2)(3)} &= -\frac{\cos\phi}{2\alpha r^2 \text{sen}\theta} \left[B\alpha^2 r^2 \partial_r A \cos\theta + Dr\partial_r C \text{sen}\theta \cos\theta - 2DC\alpha \text{sen}\theta \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. + A\alpha^2 r^2 \partial_r B \cos\theta + (1-\alpha)CD\text{sen}\theta \cos\theta + Cr\partial_r D \text{sen}\theta \cos\theta - C\alpha\partial_\theta D \text{sen}^2\theta \right], \\
 \phi_{(3)(1)} &= -\frac{\text{sen}\phi}{2\alpha r^2 \text{sen}\theta} \left[B\alpha^2 r^2 \partial_r A \cos\theta + Dr\partial_r C \text{sen}\theta \cos\theta - 2DC\alpha \text{sen}\theta \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. + A\alpha^2 r^2 \partial_r B \cos\theta + (1-\alpha)CD\text{sen}\theta \cos\theta + Cr\partial_r D \text{sen}\theta \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. - C\alpha\partial_\theta D \text{sen}^2\theta \right]. \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Por conveniência de notação, definimos os vetores

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{r}} + \cos\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}, \\ \hat{\mathbf{y}} &= \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{r}} + \cos\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}, \\ \hat{\mathbf{z}} &= \cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}},\end{aligned}\tag{3.40}$$

que têm significado bem definido como vetores unitários no limite assintótico $r \rightarrow \infty$. Utilizando essas definições e as acelerações inerciais (3.39) nas expressões (1.52), podemos reescrever as acelerações inerciais como

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{1}{\alpha r^3} \left(A\alpha^2 r^3 \partial_r A - Cr \partial_r C \sin^2\theta \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{2C^2 \sin\theta \cos\theta}{r^3} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \vec{\Omega} &= \frac{1}{2\alpha r^2} \left[2DC\alpha \cos\theta + \frac{A\alpha^3 DBr \cos\theta}{\sin\theta} + (B^2\alpha^2 - 1) C\alpha \cos\theta + CD\alpha \cos\theta \right. \\ &\quad \left. + C\alpha \partial_\theta D \sin\theta \right] \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2\alpha r^2} \left[B\alpha^2 r^3 \partial_r A + Dr^2 \partial_r C \sin\theta + A\alpha^2 r^2 \partial_r B + A\alpha^3 DB \right. \\ &\quad \left. + (B^2\alpha^2 - 1) C\alpha \sin\theta + CD \sin\theta + Cr \partial_r D \sin\theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$, as acelerações inerciais (3.41) se reduzem a

$$\begin{aligned}\vec{a} &\cong \left(\frac{M \cos^2\theta}{2r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{2M \sin\theta \cos\theta}{r^2} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \vec{\Omega} &\cong \left(\frac{(2\sin\theta - 1)\sqrt{M} \cos\theta}{2r^{3/2} \sin\theta} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{M}{r}} \sin\theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}$$

Como estamos considerando um sistema de referência local no plano equatorial $\theta = \pi/2$, essas acelerações se reduzem a

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 0, \\ \vec{\Omega} &= - \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{M}{r}} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{M}{r}} \right) \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}\tag{3.42}$$

Esse resultado é consistente, pois apesar do observador estar numa trajetória geodésica é necessária uma aceleração inercial ao redor do eixo z para que os eixos do sistema de referência local do observador fiquem fixos ao longo dos eixos x e y , como é o caso do sistema de referência local determinado pela tétrada (3.35).

Para o cálculo da energia gravitacional usamos a expressão (3.21), onde para a tétrada inversa (3.37) temos

$$\Sigma^{(0)01} = e^{(0)}_0 \Sigma^{001} + e^{(0)}_3 \Sigma^{301}.\tag{3.43}$$

Através da expressão (2.4) e de algumas simplificações encontramos

$$\begin{aligned}\Sigma^{001} &= \frac{1}{2} \left(g^{00} g^{11} g^{22} T_{212} + g^{00} g^{11} g^{33} T_{313} \right), \\ \Sigma^{301} &= \frac{1}{4} \left(g^{00} g^{11} g^{33} T_{301} - g^{00} g^{11} g^{33} T_{013} - g^{00} g^{11} g^{33} T_{103} \right).\end{aligned}\quad (3.44)$$

Substituindo as componentes não nulas de $T_{\lambda\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}T_{001} &= A\partial_r A - B\partial_r B, \\ T_{013} &= -A\partial_r C \operatorname{sen}^2 \theta - Br\partial_r D - (D - \alpha)B \operatorname{sen} \theta, \\ T_{023} &= -2AC \operatorname{sen} \theta \cos \theta - Br\partial_\theta D \operatorname{sen} \theta - (D - 1)Br \cos \theta, \\ T_{103} &= -B\alpha \operatorname{sen} \theta, \\ T_{203} &= -Br \cos \theta, \\ T_{212} &= r(1 - \alpha), \\ T_{301} &= C\partial_r A \operatorname{sen}^2 \theta + Dr\partial_r B \operatorname{sen} \theta, \\ T_{313} &= -\operatorname{sen}^2 \theta \left[C\partial_r C \operatorname{sen}^2 \theta - (D + r\partial_r D - \alpha)rD \right], \\ T_{323} &= \operatorname{sen} \theta \left[-2C^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + (D \cos \theta + \partial_\theta D \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)r^2 D \right],\end{aligned}\quad (3.45)$$

construídas a partir da tétrada inversa (3.37) e das componentes (3.36), e as componentes do tensor métrico inverso

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \end{pmatrix},$$

em (3.44) e, logo após, utilizando o resultado obtido e as componentes da tétrada inversa (3.37) em (3.43), chegamos a

$$\begin{aligned}\Sigma^{(0)01} &= \frac{A(1 - \alpha)}{2r} - \frac{AC\partial_r C \operatorname{sen}^2 \theta}{4r^2} + \frac{AD^2}{2r} + \frac{AD\partial_r D}{2} - \frac{A\alpha D}{2r} + \frac{C^2\partial_r A \operatorname{sen}^2 \theta}{4r^2} \\ &\quad + \frac{CD\partial_r B \operatorname{sen} \theta}{4r} + \frac{CB\partial_r D \operatorname{sen} \theta}{4r} + \frac{BCD \operatorname{sen} \theta}{4r^2}.\end{aligned}$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$ essa expressão se reduz a

$$\Sigma^{(0)01} \cong \frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^2 \theta \right).\quad (3.46)$$

Substituindo (3.46), o determinante $e = \sqrt{-g} = r^2 \text{sen} \theta$ e $k = 1/16\pi$ na expressão (3.21), e considerando o limite assintótico $r \rightarrow \infty$, obtemos a energia gravitacional total

$$\begin{aligned}
 E &= 4k \int_S d\theta d\phi e^{\Sigma^{(0)01}} \cong \frac{1}{4\pi} \int_{r \rightarrow \infty} d\theta d\phi r^2 \text{sen} \theta \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{8} \text{sen} \theta + \frac{1}{8} \text{sen}^2 \theta \right) \right] \\
 &\cong \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \left(1 + \frac{1}{8} \text{sen} \theta + \frac{1}{8} \text{sen}^2 \theta \right) \\
 &\cong \frac{M}{2} \left(\frac{13}{6} + \frac{\pi}{16} \right) \cong 1,18M.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Esse resultado significa que o observador em órbita circular estável ao redor da fonte mede uma energia gravitacional maior que a energia gravitacional medida por um observador em repouso que, no caso, é igual a massa da fonte M . Devemos lembrar que os eixos do sistema de referência local utilizado pelo observador são fixos, o que deve influir no cálculo da energia gravitacional, pois num sistema de referência local livre de forças inerciais os eixos giram livremente.

3.4 Observador estático no espaço-tempo de Kerr

A métrica de Kerr descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de um buraco negro axialmente simétrico, estacionário, em rotação, de massa M e momento angular J . Na forma de Boyer-Lindquist, em unidades naturais, o espaço-tempo de Kerr é estabelecido pelo elemento de linha [40]

$$ds^2 = -\frac{\psi^2}{\rho^2} dt^2 - \frac{2\chi \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \tag{3.48}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr, \\
 \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\
 \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \text{sen}^2 \theta, \\
 \psi^2 &= \Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta, \\
 \chi &= 2aMr,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

e a é o momento angular por unidade de massa $a = J/M$.

As componentes espaciais da quadrivelocidade de um observador estático no espaço-tempo de Kerr são $u^i = 0$, ou seja, a velocidade do observador é zero em respeito a observadores estáticos no infinito espacial. Já que identificamos $u^i = e_{(0)}^i$, um sistema de referência local adaptado a um observador estático é estabelecido pela condição $e_{(0)}^i = 0$.

Uma forma simples de tétrada que satisfaz $e_{(0)}^i = 0$ e a relação (1.43) é

$$e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\psi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho\chi}{\psi\Lambda}\text{sen}\theta\text{sen}\phi & \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}\text{sen}\theta\cos\phi & \frac{1}{\rho}\cos\theta\cos\phi & -\frac{\rho\psi}{\Lambda}\frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}\theta} \\ -\frac{\rho\chi}{\psi\Lambda}\text{sen}\theta\cos\phi & \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}\text{sen}\theta\text{sen}\phi & \frac{1}{\rho}\cos\theta\text{sen}\phi & \frac{\rho\psi}{\Lambda}\frac{\cos\phi}{\text{sen}\theta} \\ 0 & \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}\cos\theta & -\frac{1}{\rho}\text{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

onde

$$\Lambda = (\psi^2\Sigma^2 + \chi^2\text{sen}^2\theta)^{1/2}.$$

Assim como nos casos anteriores, estamos interessados no cálculo de ϕ_{ab} dado pela equação (1.53) e na energia gravitacional dada por (3.21) e, para esse propósito, é útil trabalhar com a tétrada inversa

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & C\text{sen}\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -D\text{sen}\theta\phi \\ 0 & C\text{sen}\theta\text{sen}\phi & \rho\cos\theta\text{sen}\phi & D\text{sen}\theta\cos\phi \\ 0 & C\cos\theta & -\rho\text{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\psi}{\rho}, \\ B &= \frac{\chi\text{sen}^2\theta}{\rho\psi}, \\ C &= \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}, \\ D &= \frac{\Lambda}{\rho\psi}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

O sistema de referência local determinado pela tétrada (3.50) é válido somente na região fora da ergosfera, pois a função ψ^2 se anula sobre a superfície externa da

ergoesfera, definida por $r = r^* = M + \sqrt{M^2 + a^2 \cos^2 \theta}$ (sobre esta superfície $g_{00} = 0$), e, portanto, várias componentes das equações (3.50) e (3.51) não são bem definidas sobre essa superfície. É bem conhecido que não é possível de se manter observadores estáticos dentro da ergoesfera do espaço-tempo de Kerr.

Inspecionando a tétrada (3.50) vemos que no limite assintótico ela se comporta como em (3.15) e (3.16). Portanto, podemos afirmar que os eixos do sistema de referência local determinado pela equação (3.50) são orientados ao longo dos eixos cartesianos no infinito espacial.

Através da tétrada inversa (3.51) obtemos as componentes não nulas de $T_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
T_{(0)01} &= \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\
T_{(0)02} &= \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\
T_{(0)13} &= -\partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \text{sen}^2 \theta, \\
T_{(0)23} &= -\chi \partial_\theta \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho\psi} \right), \\
T_{(1)12} &= \partial_r \rho \cos \theta \cos \phi - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \cos \phi, \\
T_{(1)13} &= -\partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho\psi} \right) \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \\
T_{(1)23} &= -\partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho\psi} \right) \text{sen} \phi + \rho \cos \theta \text{sen} \phi, \\
T_{(2)12} &= \partial_r \rho \cos \theta \text{sen} \phi - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \text{sen} \phi, \\
T_{(2)13} &= \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho\psi} \right) \text{sen} \theta \cos \phi - \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \text{sen} \theta \cos \phi, \\
T_{(2)23} &= \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho\psi} \right) \cos \phi - \rho \cos \theta \cos \phi, \\
T_{(3)12} &= -\partial_r \rho \text{sen} \theta - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_\theta (\rho \cos \theta), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

e, posteriormente, utilizando esses valores e a tétrada inversa (3.51) chegamos às componentes não nulas de T_{abc}

$$\begin{aligned}
T_{(0)(0)(1)} &= \frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta \cos \phi + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta \cos \phi, \\
T_{(0)(0)(2)} &= \frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta \text{sen} \phi + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta \text{sen} \phi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(0)(0)(3)} &= -\frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta, \\
T_{(0)(1)(2)} &= \frac{\chi}{\Lambda \psi} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}^2 \theta + \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta \cos \theta \right] \\
&\quad - \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right) \text{sen}^2 \theta + \chi \partial_\theta \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho \psi} \right) \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \right], \\
T_{(0)(1)(3)} &= \frac{\chi}{\Lambda \psi} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} \phi - \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}^2 \theta \text{sen} \phi \right] \\
&\quad - \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right) \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} \phi - \partial_\theta \left(\frac{\chi \text{sen}^2 \theta}{\rho \psi} \right) \text{sen} \phi \right], \\
T_{(0)(2)(3)} &= \frac{\chi}{\Lambda \psi} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen} \theta \cos \theta \cos \phi + \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}^2 \theta \cos \phi \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right) \text{sen} \theta \cos \theta \cos \phi - \partial_\theta \left(\frac{\chi \text{sen}^2 \theta}{\rho \psi} \right) \cos \phi \right], \\
T_{(1)(1)(2)} &= -\frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \frac{\cos \theta \text{sen} \phi}{\text{sen} \theta} \right] + \frac{\rho \psi}{\Lambda} \frac{\text{sen} \phi}{\text{sen} \theta}, \\
T_{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \cos \theta \text{sen} \phi \cos \phi + \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \cos^2 \phi \right] \\
&\quad - \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \cos \theta \text{sen}^2 \phi - \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \text{sen}^2 \phi \right], \\
T_{(1)(2)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \cos \theta \text{sen} \phi \cos \phi + \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \text{sen} \phi \cos \phi \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \cos \theta \text{sen} \phi \cos \phi - \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \text{sen} \phi \cos \phi \right], \\
T_{(2)(1)(2)} &= \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \text{sen} \theta \cos \phi + \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \frac{\cos \theta \cos \phi}{\text{sen} \theta} \right] - \frac{\rho \psi}{\Lambda} \frac{\cos \phi}{\text{sen} \theta}, \\
T_{(2)(1)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \cos \theta \text{sen} \phi \cos \phi + \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \text{sen} \phi \cos \phi \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \cos \theta \text{sen} \phi \cos \phi - \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \text{sen} \phi \cos \phi \right], \\
T_{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \cos \theta \text{sen}^2 \phi + \partial_\theta (\rho \text{sen} \theta) \text{sen}^2 \phi \right] \\
&\quad - \frac{\psi}{\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \cos \theta \cos^2 \phi - \partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho \psi} \right) \cos^2 \phi \right], \\
T_{(3)(1)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \text{sen} \theta \cos \phi + \partial_\theta (\rho \cos \theta) \cos \phi \right], \\
T_{(3)(2)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \rho \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \partial_\theta (\rho \cos \theta) \text{sen} \phi \right]. \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Por fim, a partir das componentes (3.54) e da equação (1.53), calculamos as acelerações inerciais

$$\begin{aligned}
\phi_{(0)(1)} &= \frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta \cos \phi + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta \cos \phi, \\
\phi_{(0)(2)} &= \frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta \sin \phi + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta \sin \phi, \\
\phi_{(0)(3)} &= -\frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta + \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos \theta, \\
\phi_{(1)(2)} &= \frac{\chi}{2\Lambda\psi} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin^2 \theta + \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta \cos \theta \right] \\
&\quad - \frac{\psi}{2\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \sin^2 \theta + \chi \partial_\theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{\rho\psi} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right], \\
\phi_{(2)(3)} &= \frac{\chi}{2\Lambda\psi} \left[-\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \phi + \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin^2 \theta \cos \phi \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{2\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \phi - \partial_\theta \left(\frac{\chi \sin^2 \theta}{\rho\psi} \right) \cos \phi \right], \\
\phi_{(3)(1)} &= -\frac{\chi}{2\Lambda\psi} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \phi - \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \sin^2 \theta \sin \phi \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{2\Lambda} \left[\sqrt{\Delta} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \phi - \partial_\theta \left(\frac{\chi \sin^2 \theta}{\rho\psi} \right) \sin \phi \right]. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Utilizando os vetores unitários (3.40) e as acelerações inerciais (3.55) nas expressões (1.52), e realizando algumas simplificações, podemos reescrever as acelerações inerciais como

$$\vec{a} = \frac{M}{\psi^2} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \left(\frac{2r^2}{\rho^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{2ra^2}{\rho^3} \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right], \quad (3.56)$$

$$\vec{\Omega} = - \left[\frac{\chi}{\Lambda\rho} \cos \theta + \frac{\psi^2}{2\Lambda\rho} \sin \theta \partial_\theta \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\psi^2 \sqrt{\Delta}}{2\Lambda\rho} \sin \theta \partial_r \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.57)$$

A forma funcional específica dos vetores acima caracteriza o sistema de referência local determinado pela tétrada (3.50). A equação (3.56) representa a aceleração inercial translacional que devemos exercer no sistema de referência local para que ele permaneça em repouso e a equação (3.57) é a aceleração inercial rotacional que devemos exercer no sistema de referência local para que seus eixos fiquem orientados ao longo dos eixos cartesianos.

A forma de \vec{a} e $\vec{\Omega}$ para grandes valores de r é muito interessante. É fácil de se verificar que no limite assintótico $r \rightarrow \infty$, temos

$$\vec{a} \cong \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.58)$$

$$\vec{\Omega} \cong -\frac{aM}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.59)$$

Após as identificações $M \leftrightarrow q$ e $4\pi Ma \leftrightarrow \vec{m}$, onde q é a carga elétrica e \vec{m} é o momento de dipolo magnético, as equações (3.58) e (3.59) se parecem com o campo elétrico de uma carga pontual e o campo magnético de um dipolo perfeito que aponta na direção z , respectivamente. Essas equações têm uma similaridade com o gravitoeletromagnetismo.

Se abandonarmos a condição estática, um observador localizado numa posição (r, θ, ϕ) estará sujeito a uma aceleração $-\vec{a}$ e a um movimento rotacional determinado por $-\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_D$, que é a frequência de arrasto do sistema de referência local. Logo, o efeito gravitomagnético é localmente equivalente a efeitos inerciais em um sistema de referência com frequência $-\vec{\Omega}_D$; o último tendo a estrutura de momento de dipolo magnético dada pela equação (3.59). Esse é precisamente o teorema gravitacional de Lamor, discutido em [41].

O surgimento de quantidades de campo gravitoeletromagnéticas no contexto do tensor de aceleração ϕ_{ab} não apresenta diferenças em relação à descrição usual encontrada na literatura. Vamos admitir que as tétradas satisfaçam a condição de contorno assintótica

$$e_a{}^\mu \cong \delta_a^\mu + \frac{1}{2} h_a{}^\mu,$$

onde $h_a{}^\mu$ é a perturbação da tétrada do espaço-tempo plano no limite $r \rightarrow \infty$, e que nesse limite os índices locais de Lorentz e do espaço-tempo adquiram o mesmo significado. É fácil de verificar que nesse caso temos

$$\begin{aligned} \phi_{(0)(i)} &\cong -\partial_i \left(\frac{1}{2} h_{00} \right) - \partial_0 \left(-\frac{1}{2} h_{0i} \right) \sim E_i, \\ \phi_{(i)(j)} &\cong -\left[\partial_i \left(-\frac{1}{2} h_{0j} \right) - \partial_j \left(-\frac{1}{2} h_{0i} \right) \right] \sim B_{ij}, \end{aligned}$$

onde, as quantidades

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} h_{00}, \\ A_i &= -\frac{1}{2} h_{0i}, \end{aligned}$$

são identificadas como o potencial gravitoelétrico e o potencial vetor gravitomagnético, respectivamente. Essa identificação é equivalente àquela usualmente feita na literatura [42].

Para o cálculo da energia gravitacional, do ponto de vista do sistema de referência local determinado pela tétrada (3.50), devemos obter o tensor

$$\Sigma^{(0)01} = e^{(0)}_0 \Sigma^{001} + e^{(0)}_3 \Sigma^{301}, \quad (3.60)$$

onde, após algumas simplificações, temos

$$\begin{aligned} \Sigma^{001} &= \frac{1}{2} \left[g^{00} g^{11} g^{22} T_{212} + (g^{00} g^{11} g^{33} - g^{03} g^{03} g^{11}) T_{313} \right], \\ \Sigma^{301} &= \frac{1}{4} \left[- (g^{03} g^{03} g^{11} + g^{00} g^{11} g^{33}) T_{013} + (g^{03} g^{03} g^{11} - g^{00} g^{11} g^{33}) T_{103} \right. \\ &\quad \left. + (g^{03} g^{03} g^{11} + g^{00} g^{11} g^{33}) T_{301} \right] + \frac{1}{2} \left[g^{03} g^{03} g^{11} T_{013} + g^{03} g^{11} g^{22} T_{212} \right. \\ &\quad \left. - g^{03} g^{03} g^{11} T_{301} \right]. \end{aligned}$$

Através desses tensores e de alguns cálculos podemos reescrever o tensor (3.60) como

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)01} &= \frac{1}{2} e^{(0)}_0 (g^{00} g^{11} g^{33} - g^{03} g^{03} g^{11}) T_{313} + \frac{1}{2} (e^{(0)}_0 g^{00} g^{11} g^{22} + e^{(0)}_3 g^{03} g^{11} g^{22}) T_{212} \\ &\quad + \frac{1}{4} e^{(0)}_3 (g^{03} g^{03} g^{11} - g^{00} g^{11} g^{33}) T_{013} + \frac{1}{4} e^{(0)}_3 (g^{00} g^{11} g^{33} - g^{03} g^{03} g^{11}) T_{301} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(0)}_3 (g^{03} g^{03} g^{11} - g^{00} g^{11} g^{33}) T_{103}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

A partir da tétrada inversa (3.51) e das componentes (3.53), obtemos as componentes não nulas de $T_{\lambda\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T_{001} &= \frac{\psi}{\rho} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\ T_{002} &= \frac{\psi}{\rho} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\ T_{013} &= -\frac{\psi}{\rho} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \text{sen}^2 \theta, \\ T_{103} &= -\frac{\psi\chi}{\rho} \partial_\theta \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho\psi} \right), \\ T_{112} &= \frac{\rho \partial_\theta \rho}{\Delta}, \\ T_{212} &= \rho \partial_r \rho - \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}, \\ T_{301} &= \frac{\chi}{\rho\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}^2 \theta, \\ T_{302} &= \frac{\chi}{\rho\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{313} &= -\frac{\chi}{\rho\psi} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) \text{sen}^4 \theta + \frac{\Lambda}{\rho\psi} \left[\partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho\psi} \right) - \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \right] \text{sen}^2 \theta, \\
T_{323} &= -\frac{\chi^2}{\rho\psi} \partial_\theta \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho\psi} \right) \text{sen}^2 \theta + \frac{\Lambda}{\rho\psi} \left[\partial_\theta \left(\frac{\Lambda \text{sen} \theta}{\rho\psi} \right) - \rho \cos \theta \right] \text{sen} \theta.
\end{aligned}$$

Utilizando essas componentes, a tetrada inversa (3.51) e a métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho^2 \Sigma^2}{\Lambda^2} & 0 & 0 & -\frac{\rho^2 \chi}{\Lambda^2} \\ 0 & \frac{\Lambda}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{\rho^2 \chi}{\Lambda^2} & 0 & 0 & \frac{\rho^2 \psi^2}{\Lambda^2 \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix},$$

no tensor (3.61) e realizando algumas simplificações, chegamos a

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(0)01} &= \frac{1}{4} \frac{\chi \Delta}{\Lambda^2} \text{sen}^2 \theta \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Lambda} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho\psi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho \sqrt{\Delta}}{\Lambda} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\rho^2 \psi} \partial_r \rho + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho \psi} + \frac{1}{4} \frac{\chi^2 \Delta}{\psi \Lambda^2} \text{sen}^2 \theta \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right).
\end{aligned}$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$ essa expressão se reduz a

$$\Sigma^{(0)01} \cong \frac{M}{r^2}, \tag{3.62}$$

e o determinante $e = \sqrt{-g} = (\Lambda/\sqrt{\Delta}) \text{sen} \theta$ se reduz a,

$$e \cong (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta. \tag{3.63}$$

Substituindo o tensor (3.62), o determinante (3.63), a constante $k = 1/16\pi$ e considerando $r \rightarrow \infty$ na expressão da energia gravitacional (3.21), chegamos a

$$\begin{aligned}
E &= 4k \int_S d\theta d\phi e \Sigma^{(0)01} \cong \frac{1}{4\pi} \int_{r \rightarrow \infty} d\theta d\phi \frac{M}{r^2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \\
&\cong \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta = M,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

que é exatamente a energia gravitacional total esperada do buraco negro de Kerr medida por um observador estático no infinito.

Sistema de referência de Fermi-Walker

4.1 Equações de Frenet-Serret e o transporte de Fermi-Walker

Na seção (1.2) vimos que o transporte paralelo de um quadrivetor ao longo da linha mundo de um observador em movimento geodésico requer a anulação da derivada absoluta do quadrivetor. Nesse capítulo analisaremos em detalhe o transporte de Fermi-Walker de um sistema de referência local de um observador, que vem a ser o transporte no qual a componente $\mathbf{e}_{(0)}(\tau)$ é transportada em $\mathbf{e}_{(0)}(\tau + d\tau)$, e é sempre tangente à linha mundo arbitrária do observador.

A derivada absoluta de um quadrivetor V^μ ao longo da linha mundo C é dada pela equação (1.34). Vamos considerar quatro quadrivetores, A^μ , B^μ , C^μ e D^μ que satisfazem as seguintes equações [45]:

$$\frac{^\circ DA^\mu}{d\tau} = b B^\mu, \quad (4.1)$$

$$\frac{^\circ DB^\mu}{d\tau} = c C^\mu + b A^\mu, \quad (4.2)$$

$$\frac{^\circ DC^\mu}{d\tau} = d D^\mu - c B^\mu, \quad (4.3)$$

$$\frac{^\circ DD^\mu}{d\tau} = -d C^\mu, \quad (4.4)$$

onde $A^\mu A_\mu = -1$, $B^\mu B_\mu = C^\mu C_\mu = D^\mu D_\mu = 1$, e b , c e d são coeficientes não negativos. Dado o quadrivetor A^μ , a equação (4.1) define o quadrivetor B^μ , a equação (4.2) define o quadrivetor C^μ e a equação (4.3) define o quadrivetor D^μ . A equação (4.4) é verificada em vista das equações (4.1 – 4.3). Não é difícil de se verificar que as equações (4.1 – 4.4) implicam que A^μ , B^μ , C^μ e D^μ formam um conjunto ortonormal de quadrivetores, ou seja, $A^\mu B_\mu = 0$, etc.

Identificamos A^μ como o quadrivetor unitário tangente à trajetória C , ou seja, $A^\mu = dx^\mu/d\tau$. Nesse caso A^μ , B^μ , C^μ e D^μ estabelecem o sistema de referência de

Frenet-Serret, e as equações (4.1 – 4.4) são chamadas de equações de Frenet-Serret. Os quadrivetores B^μ , C^μ e D^μ são a primeira, segunda e terceira normais à C , e b , c e d são a primeira, segunda e terceira curvaturas de C , respectivamente [45]. A base ortonormal de Frenet-Serret é adequadamente adaptada a curvas especiais no espaço-tempo. Por exemplo, se $b = c = d = 0$, a curva C é a geodésica; se $b = \text{constante}$ e $c = d = 0$, C representa uma hipérbole, e se $b = \text{constante}$, $c = \text{constante}$ e $d = 0$, então C é uma hélice [45].

Vamos considerar um quadrivetor $V^\mu(x)$ definido na trajetória do tipo tempo C , em um espaço-tempo determinado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. O transporte de Fermi-Walker de V^μ ao longo de C é definido por [45]

$$\frac{\circ DV^\mu}{d\tau} = b V_\alpha (A^\mu B^\alpha - A^\alpha B^\mu). \quad (4.5)$$

Dado o valor de $V^\mu(\tau_0)$ a uma certa posição inicial τ_0 , a equação (4.5) determina formalmente V^μ ao longo da curva C determinada por $x^\mu = x^\mu(\tau)$. O transporte de Fermi-Walker de um tensor de segunda ordem ao longo de C é definido por

$$\frac{\circ DT^{\mu\nu}}{d\tau} = b T_\alpha{}^\nu (A^\mu B^\alpha - A^\alpha B^\mu) + b T^\mu{}_\alpha (A^\nu B^\alpha - A^\alpha B^\nu). \quad (4.6)$$

Segue da equação acima que

$$\frac{\circ Dg^{\mu\nu}}{d\tau} = 0 = \frac{\circ D\delta^\mu_\nu}{d\tau}. \quad (4.7)$$

O quadrivetor velocidade determinado por $A^\mu = dx^\mu/d\tau$ sofre naturalmente o transporte de Fermi-Walker. A aplicação da equação (4.5) a A^μ leva à equação (4.1). Também é fácil mostrar que o produto escalar de dois quadrivetores é preservado sob o transporte de Fermi-Walker. Definindo ϕ como o produto escalar dos quadrivetores Σ^μ e Λ^μ . Ao longo de C temos

$$\begin{aligned} \phi(\tau + d\tau) - \phi(\tau) &= \Sigma^\mu(\tau + d\tau)\Lambda_\mu(\tau + d\tau) - \Sigma^\mu(\tau)\Lambda_\mu(\tau), \\ &= \Lambda_\mu(\delta^{FW}\Sigma^\mu) + \Sigma^\mu(\delta^{FW}\Lambda_\mu), \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta^{FW}\Sigma^\mu &= -\circ\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Sigma^\beta dx^\alpha + b\Sigma_\alpha(A^\mu B^\alpha - A^\alpha B^\mu) d\tau, \\ \delta^{FW}\Lambda_\mu &= \circ\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}\Lambda_\lambda dx^\alpha + b\Lambda_\alpha(A_\mu B^\alpha - A^\alpha B_\mu) d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

As equações (4.8) e (4.9) implicam que $\phi(\tau + d\tau) - \phi(\tau) = 0$.

Podemos identificar A^μ com a componente do tipo tempo da tétrada $e_{(0)}^\mu$,

$$A^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = e_{(0)}^\mu. \quad (4.10)$$

O transporte de Fermi-Walker de $e_{(0)}^\mu$ ao longo de C garante que $e_{(0)}^\mu$ sempre será tangente a C . As componentes do tipo espaço $e_{(k)}^\mu$ são ortogonais a $e_{(0)}^\mu$ em todos os pontos. Ao longo de C , $e_{(k)}^\mu$ também sofre o transporte de Fermi-Walker. Já que $e_{(k)}^\mu$ e $e_{(0)}^\mu$ são ortogonais, temos

$$\frac{^\circ D e_{(k)}^\mu}{d\tau} = b e_{(0)}^\mu e_{(k)}^\lambda B_\lambda. \quad (4.11)$$

Em vista da equação (4.1) a equação acima pode ser reescrita como [43]

$$\frac{^\circ D e_{(k)}^\mu}{d\tau} = e_{(0)}^\mu e_{(k)\lambda} \frac{^\circ D e_{(0)}^\lambda}{d\tau}. \quad (4.12)$$

Esta equação determina o transporte das bases ortonormais \mathbf{e}_a ao longo de uma curva do tipo tempo arbitrária C , tal que $\mathbf{e}_{(0)}$ é sempre tangente a C .

4.2 Construção de sistemas de referência de Fermi-Walker

Vamos considerar a expressão para o transporte de Fermi-Walker de um sistema de referência local dada pela equação (4.12). Levando em conta a equação (1.47) podemos reescrever a equação (4.12) como

$$\frac{^\circ D e_{(k)}^\mu}{d\tau} = u^\mu e_{(k)\lambda} a^\lambda. \quad (4.13)$$

Em vista da equação (1.11) temos $e_{(k)\lambda} a^\lambda = a_{(k)} = \phi_{(0)(k)}$. Portanto, o transporte de Fermi-Walker de um sistema de referência local pode ser escrito como

$$\frac{^\circ D e_{(k)}^\mu}{d\tau} = u^\mu \phi_{(0)(k)}. \quad (4.14)$$

Por outro lado, é fácil verificar que a aceleração inercial das componentes $e_{(k)}^\mu$ do sistema de referência local dada pela equação (1.49) pode ser expressa em termos de $\phi_{(0)(k)}$ e $\phi_{(j)(k)}$ como

$$\frac{^\circ D e_{(k)}^\mu}{d\tau} = u^\mu \phi_{(0)(k)} + \phi_{(k)}^{(j)} e_{(j)}^\mu. \quad (4.15)$$

Portanto se $\phi_{(j)(k)} = 0$, o sistema de referência local sofre o transporte de Fermi-Walker.

A expressão de $\phi_{(i)(j)}$ é dada por

$$\phi_{(i)(j)} = \frac{1}{2} \left(e_{(i)}^\mu e_{(j)}^\nu T_{(0)\mu\nu} + e_{(0)}^\mu e_{(j)}^\nu T_{(i)\mu\nu} - e_{(0)}^\mu e_{(i)}^\nu T_{(j)\mu\nu} \right). \quad (4.16)$$

Realizamos uma rotação de Lorentz local,

$$\tilde{e}_{(i)}^\mu = \Lambda_{(i)}^{(k)} e_{(k)}^\mu, \quad (4.17)$$

que nos leva a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{(i)\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{e}_{(i)\nu} - \partial_\nu \tilde{e}_{(i)\mu} \\ &= \Lambda_{(i)}^{(k)} T_{(k)\mu\nu} + \left(\partial_\mu \Lambda_{(i)}^{(k)} \right) e_{(k)\nu} - \left(\partial_\nu \Lambda_{(i)}^{(k)} \right) e_{(k)\mu}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Os coeficientes locais de Lorentz $\{\Lambda_{(i)}^{(j)}\}$ serão fixados tal que $\tilde{\phi}_{(i)(j)} = 0$.

As equações (4.17) e (4.18) implicam em

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{(i)(j)} &= \Lambda_{(i)}^{(k)} \Lambda_{(j)}^{(l)} \phi_{(k)(l)} \\ &\quad + \frac{1}{2} e_{(0)}^\mu \Lambda_{(j)}^{(k)} e_{(k)}^\nu \left[\left(\partial_\mu \Lambda_{(i)}^{(l)} \right) e_{(l)\nu} - \left(\partial_\nu \Lambda_{(i)}^{(l)} \right) e_{(l)\mu} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} e_{(0)}^\mu \Lambda_{(i)}^{(k)} e_{(k)}^\nu \left[\left(\partial_\mu \Lambda_{(j)}^{(l)} \right) e_{(l)\nu} - \left(\partial_\nu \Lambda_{(j)}^{(l)} \right) e_{(l)\mu} \right] \\ &= \Lambda_{(i)}^{(k)} \Lambda_{(j)}^{(l)} \phi_{(k)(l)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ e_{(0)}^\mu \Lambda_{(j)(k)} \left(\partial_\mu \Lambda_{(i)}^{(k)} \right) - e_{(0)}^\mu \Lambda_{(i)(k)} \left(\partial_\mu \Lambda_{(j)}^{(k)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A equação acima pode ser reescrita de uma forma mais conveniente como

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{(i)(j)} &= \frac{1}{2} \Lambda_{(j)}^{(m)} \left(\Lambda_{(i)}^{(k)} \phi_{(k)(m)} + e_{(0)}^\mu \partial_\mu \Lambda_{(i)(m)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Lambda_{(i)}^{(m)} \left(\Lambda_{(j)}^{(k)} \phi_{(k)(m)} + e_{(0)}^\mu \partial_\mu \Lambda_{(j)(m)} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Portanto, obtemos $\tilde{\phi}_{(i)(j)} = 0$ se

$$\Lambda_{(i)}^{(k)} \phi_{(k)(m)} + e_{(0)}^\mu \partial_\mu \Lambda_{(i)(m)} = 0,$$

ou, de forma equivalente [43],

$$e_{(0)}^\mu \Lambda_{(m)}^{(j)} \partial_\mu \Lambda_{(j)(k)} - \phi_{(k)(m)} = 0. \quad (4.21)$$

Então, dado um sistema de referência arbitrário transportado ao longo de C , calculamos a frequência de rotação $\phi_{(k)(m)}$, e por meio da equação (4.21) determinamos

os coeficientes $\{\Lambda_{(i)}^{(j)}\}$. A equação (4.21) garante que o sistema de referência local obtido de acordo com a equação (4.17) sofre o transporte de Fermi-Walker. Notamos que a rotação local de Lorentz não afeta a componente do tipo tempo $e_{(0)}^\mu$.

Para uma tétrada arbitrária a solução da equação (4.21) para $\{\Lambda_{(i)}^{(j)}\}$ pode não ser direta. Por outro lado, na aproximação de campo fraco, ou no caso do espaço-tempo ser assintoticamente plano, onde

$$e_a^\mu \cong \delta_a^\mu + \frac{1}{2} h_a^\mu, \quad (4.22)$$

podemos achar a expressão aproximada para $\Lambda_{(i)}^{(j)}$. Nesse caso podemos escrever

$$\Lambda_{(j)(k)} \cong \eta_{(j)(k)} + \epsilon_{(j)(k)}.$$

Admitimos que h_a^μ e $\epsilon_{(j)(k)}$ são de ordem ϵ , onde $\epsilon \ll 1$. Então, $\phi_{(j)(k)}$ também é de ordem ϵ . Nessa aproximação temos $e_{(0)}^\mu \partial_\mu \cong \partial_{(0)} \cong \partial / \partial t$. Sob essas condições podemos resolver a equação (4.21) e obter

$$\Lambda_{(j)(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_{(1)(2)} & \epsilon_{(1)(3)} \\ -\epsilon_{(1)(2)} & 1 & \epsilon_{(2)(3)} \\ -\epsilon_{(1)(3)} & -\epsilon_{(2)(3)} & 1 \end{pmatrix},$$

onde, da equação (4.21), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{(j)(k)}) = \dot{\epsilon}_{(j)(k)} = \phi_{(k)(j)}.$$

No intuito de resolver a equação (4.21), notamos que a estrutura geral da matriz $\Lambda_{(i)(j)}$ pode ser dada em termos dos ângulos de Euler. Existem várias formas de se escrever a matriz de rotação em função dos ângulos de Euler. Para nosso propósito, uma forma conveniente é dada na referência [44](Apêndice A). Segue

$$\Lambda_{(i)(j)} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\alpha \text{sen}\gamma + \text{cos}\alpha \text{cos}\beta \text{cos}\gamma & \text{cos}\alpha \text{sen}\gamma + \text{sen}\alpha \text{cos}\beta \text{cos}\gamma & -\text{sen}\beta \text{cos}\gamma \\ -\text{sen}\alpha \text{cos}\gamma - \text{cos}\alpha \text{cos}\beta \text{sen}\gamma & \text{cos}\alpha \text{cos}\gamma - \text{sen}\alpha \text{cos}\beta \text{sen}\gamma & \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \\ \text{cos}\alpha \text{sen}\beta & \text{sen}\alpha \text{sen}\beta & \text{cos}\beta \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

onde a primeira rotação é de um ângulo α ao redor do eixo z , a segunda é de um ângulo β ao redor de um eixo y intermediário e a terceira é de um ângulo γ ao redor de um eixo z final. Assumimos que α , β e γ são funções do parâmetro temporal t .

Na equação (4.21), para um observador estacionário, temos $e_{(0)}^\mu \Lambda_{(m)}^{(j)} \partial_\mu \Lambda_{(j)(k)} = e_{(0)}^0 \Lambda_{(m)}^{(j)} \partial_0 \Lambda_{(j)(k)}$. Calculando essas quantidades para a matriz (4.23), chegamos a

$$\begin{aligned}\Lambda_{(3)}^{(k)} \partial_0 \Lambda_{(k)(2)} &= \dot{\beta} \operatorname{sen} \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = -\omega_x \\ \Lambda_{(1)}^{(k)} \partial_0 \Lambda_{(k)(3)} &= -\dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -\omega_y \\ \Lambda_{(2)}^{(k)} \partial_0 \Lambda_{(k)(1)} &= -\dot{\gamma} \cos \beta - \dot{\alpha} = -\omega_z,\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde o ponto representa a derivada temporal, e ω_x , ω_y e ω_z são as freqüências de rotação ao longo dos eixos espaciais.

A solução geral da equação (4.21) determina α , β e γ , onde

$$\begin{aligned}e_{(0)}^0 (\dot{\beta} \operatorname{sen} \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) &= \phi_{(2)(3)} \\ e_{(0)}^0 (-\dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) &= \phi_{(3)(1)} \\ e_{(0)}^0 (-\dot{\gamma} \cos \beta - \dot{\alpha}) &= \phi_{(1)(2)}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Claramente não há solução simples para α , β e γ . Por outro lado, se restringirmos a análise ao plano equatorial definido por $\theta = \pi/2$, o problema se simplifica enormemente, como iremos demonstrar na seção seguinte.

4.3 Sistema de referência de Fermi-Walker no espaço-tempo de Kerr

Apesar da solução da equação (4.21) no caso geral (para um sistema de referência local arbitrário) não ser possível, em certas situações obtemos resultados simples e interessantes. Vamos considerar nessa seção duas construções simples de tetradas que sofrem o transporte de Fermi-Walker no espaço-tempo de Kerr. As construções serão restritas aos casos $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$.

Como vimos na seção 3.4 a aceleração inercial de rotação $\vec{\Omega}$ do sistema de referência local de um observador estático no espaço-tempo de Kerr é dada pela equação (3.57). Restringindo inicialmente nossa análise a um observador localizado no plano $\theta = \pi/2$, é fácil de verificar que (3.57) se reduz a

$$\vec{\Omega} = \frac{\psi^2 \sqrt{\Delta}}{2\Lambda\rho} \partial_r \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right) \hat{\theta} = -\frac{\psi^2 \sqrt{\Delta}}{2\Lambda\rho} \partial_r \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right) \hat{z}.\tag{4.26}$$

Como, nesse caso, $\vec{\Omega}$ se reduz a apenas uma rotação ao redor do eixo z , então, a matriz (4.23) deve descrever uma rotação ao redor do eixo z . Dessa forma, fazendo $\beta = \gamma = 0$ obtemos

$$\Lambda_{(i)(j)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

e, como conseqüência, as equações (4.24) se reduzem a

$$\Lambda^{(k)}_{(2)} \partial_0 \Lambda_{(k)(1)} = -\dot{\alpha}. \quad (4.28)$$

Em vista das equações (4.25) temos, então,

$$-e_{(0)}{}^0 \dot{\alpha} = \phi_{(1)(2)} = -\frac{\psi^2 \sqrt{\Delta}}{2\Lambda\rho} \partial_r \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right), \quad (4.29)$$

de onde, utilizando a componente $e_{(0)}{}^0$ da tétrada (3.50) e realizando cálculos simples, obtemos [43]

$$\alpha = \frac{\psi^3 \sqrt{\Delta}}{2\Lambda\rho^2} \partial_r \left(\frac{\chi}{\psi^2} \right) t. \quad (4.30)$$

A matriz (4.27) permite a obtenção da tétrada transformada de acordo com a transformação (4.17). Logo, a tétrada transformada $\tilde{e}_a{}^\mu(t, r, \theta = \pi/2, \phi)$ é dada por [43]

$$\tilde{e}_a{}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\psi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho\chi}{\psi\Lambda} \text{sen}(\phi - \alpha) & \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \cos(\phi - \alpha) & 0 & -\frac{\rho\psi}{\Lambda} \text{sen}(\phi - \alpha) \\ -\frac{\rho\chi}{\psi\Lambda} \cos(\phi - \alpha) & \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \text{sen}(\phi - \alpha) & 0 & \frac{\rho\psi}{\Lambda} \cos(\phi - \alpha) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

onde utilizamos as identidades trigonométricas

$$\text{sen}(\phi - \alpha) = \text{sen}\phi \cos\alpha - \cos\phi \text{sen}\alpha,$$

$$\cos(\phi - \alpha) = \text{sen}\phi \text{sen}\alpha + \cos\phi \cos\alpha.$$

O sistema de referência local determinado por (4.31) sofre a ação do transporte de Fermi-Walker, e é adaptado a observadores estáticos localizados no plano equatorial do espaço-tempo de Kerr.

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$ as componentes espaciais de (4.31) se comportam como

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{(1)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, \cos(\phi - \alpha), 0, -1/r \operatorname{sen}(\phi - \alpha)) \\ \tilde{e}_{(2)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, \operatorname{sen}(\phi - \alpha), 0, 1/r \cos(\phi - \alpha)) \\ \tilde{e}_{(3)}^\mu(t, r, \theta, \phi) &\cong (0, 0, -(1/r) \operatorname{sen} \theta, 0),\end{aligned}$$

ou, por uma transformação de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, x, y, z)$,

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{(1)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, \cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 0) \\ \tilde{e}_{(2)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, -\operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha, 0) \\ \tilde{e}_{(3)}^\mu(t, x, y, z) &\cong (0, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

Esses valores determinam que, no infinito espacial, o eixo $\tilde{e}_{(3)}$ do sistema de referência local determinando por (4.31) está direcionado ao longo do eixo z , e os eixos $\tilde{e}_{(1)}$ e $\tilde{e}_{(2)}$ estão no plano xy girando ao redor do eixo z com uma velocidade angular $\dot{\alpha}$.

Para o cálculo das acelerações inerciais vamos precisar da tétrada inversa

$$\tilde{e}^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\psi}{\rho} & 0 & 0 & \frac{\chi}{\rho\psi} \\ 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \cos(\phi - \alpha) & 0 & -\frac{\Lambda}{\rho\psi} \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \\ 0 & \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{sen}(\phi - \alpha) & 0 & \frac{\Lambda}{\rho\psi} \cos(\phi - \alpha) \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

Através da tétrada inversa (4.32) calculamos as componentes não nulas de $T_{a\mu\nu}$ no plano equatorial $\theta = \pi/2$,

$$\begin{aligned}T_{(0)01} &= \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\ T_{(0)02} &= \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\ T_{(0)13} &= -\partial_r \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right), \\ T_{(0)23} &= -\partial_\theta \left(\frac{\chi}{\rho\psi} \right), \\ T_{(1)01} &= \frac{\rho \dot{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{sen}(\phi - \alpha), \\ T_{(1)03} &= \frac{\Lambda \dot{\alpha}}{\rho\psi} \cos(\phi - \alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(1)12} &= -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_\theta \rho \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(1)13} &= \left[-\partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) + \frac{\rho \dot{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \right] \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(1)23} &= -\partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(2)01} &= -\frac{\rho \dot{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(2)03} &= \frac{\Lambda \dot{\alpha}}{\rho \psi} \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(2)12} &= -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \partial_\theta \rho \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(2)13} &= \left[\partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) + \frac{\rho \dot{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \right] \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(2)23} &= \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(3)12} &= -\partial_r \rho.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Em seguida, a partir das componentes (5.33) e da tétrada (5.31), chegamos às componentes não nulas de T_{abc} ,

$$\begin{aligned}
T_{(0)(0)(1)} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(0)(0)(2)} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(0)(0)(3)} &= -\frac{1}{\psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \\
T_{(0)(1)(2)} &= \frac{\chi \sqrt{\Delta}}{\Lambda \psi} \partial_r \left(\frac{\psi}{\rho} \right) - \frac{\psi \sqrt{\Delta}}{\Lambda} \partial_r \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right), \\
T_{(0)(1)(3)} &= \left[-\frac{\chi}{\Lambda \psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) + \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right) \right] \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(0)(2)(3)} &= \left[\frac{\chi}{\Lambda \psi} \partial_\theta \left(\frac{\psi}{\rho} \right) - \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\chi}{\rho \psi} \right) \right] \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(1)(0)(2)} &= \frac{\rho \dot{\alpha}}{\psi}, \\
T_{(1)(1)(2)} &= \left[-\frac{\psi \sqrt{\Delta}}{\Lambda} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) + \frac{\rho \psi}{\Lambda} + \frac{\rho \chi \dot{\alpha}}{\Lambda \psi} \right] \text{sen}(\phi - \alpha), \\
T_{(1)(1)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta (\rho) \cos^2(\phi - \alpha) + \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \text{sen}^2(\phi - \alpha), \\
T_{(1)(2)(3)} &= \left[\frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \rho - \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \right] \cos(\phi - \alpha) \text{sen}(\phi - \alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(2)(0)(1)} &= -\frac{\rho \dot{\alpha}}{\psi}, \\
T_{(2)(1)(2)} &= \left[\frac{\psi \sqrt{\Delta}}{\Lambda} \partial_r \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) - \frac{\rho \psi}{\Lambda} - \frac{\rho \chi \dot{\alpha}}{\Lambda \psi} \right] \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(2)(1)(3)} &= \left[\frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \rho - \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \right] \cos(\phi - \alpha) \sin(\phi - \alpha), \\
T_{(2)(2)(3)} &= \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta (\rho) \cos^2(\phi - \alpha) + \frac{\psi}{\Lambda} \partial_\theta \left(\frac{\Lambda}{\rho \psi} \right) \sin^2(\phi - \alpha), \\
T_{(3)(1)(3)} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho^2} \partial_r \rho \cos(\phi - \alpha), \\
T_{(3)(2)(3)} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho^2} \partial_r \rho \sin(\phi - \alpha).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Substituindo as componentes (4.34) na expressão (1.53) e considerando α igual a (4.30), após inúmeras simplificações, temos

$$\phi_{(i)(j)} = 0,$$

e, portanto, segundo nossa definição, o sistema de referência local determinado pela tétrada (4.31) sofre o transporte de Fermi-Walker.

Outra construção simples de um sistema de referência local que sofre o transporte de Fermi-Walker é o sistema de referência local de um observador localizado no eixo z , ou seja, para $\theta = 0$. Nesse caso, a equação (3.57) se reduz a

$$\vec{\Omega} = -\frac{\chi}{\Lambda \rho} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\chi}{\Lambda \rho} \hat{\mathbf{z}}.$$

Assim, a matriz de rotação é novamente dada por (4.27) e, similarmente a (4.29) achamos

$$-e_{(0)}^0 \dot{\alpha} = \phi_{(1)(2)} = -\frac{\chi}{\Lambda \rho},$$

e, então, obtemos

$$\alpha = \frac{\chi \psi}{\Lambda \rho^2} t. \tag{4.35}$$

O sistema de referência de Fermi-Walker apresentado na literatura [46] para o plano equatorial no espaço-tempo de Kerr não tem uma forma simples como (4.31), e não é adaptado à observadores estáticos porque ele satisfaz $e_{(0)}^i \neq 0$.

Conclusão

Utilizando tetradas para a descrição do campo gravitacional conseguimos construir uma densidade de energia-momento gravitacional tensorial, o que não é possível de ser feito através da descrição métrica da Relatividade Geral. O quadrivetor energia-momento gravitacional que é definido no TERG é dependente do sistema de referência. Essa dependência é consistente com a interpretação física das tetradas como sistemas de referência locais adaptados a observadores dotados de velocidade e aceleração, $u^\mu = e_{(0)}^\mu$ e a^μ , respectivamente. O sistema de referência local pode ser caracterizado pelas seis componentes do tensor anti-simétrico ϕ_{ab} , que determinam a aceleração translacional e frequência de rotação do sistema de referência, e que, no limite de campo fraco do espaço-tempo de Kerr, na consideração de um observador estático, se assemelham ao campo elétrico de uma carga pontual e ao campo magnético de um dipolo, respectivamente.

Nessa tese mostramos que a energia e o momento gravitacional calculados a partir de um sistema de referência local que é não girante e em queda livre no espaço-tempo de Reissner-Nordström se anulam. Esperamos que essa propriedade, isto é, a anulação da energia gravitacional em um sistema de referência em queda livre, seja válida na consideração de uma geometria geral do espaço-tempo, no caso em que a análise é mais complicada, porque o sistema de referência não deve girar em relação a um sistema de referência de Fermi-Walker, que em geral não é determinado de forma trivial.

Logo após, construímos um sistema de referência local não girante em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild, e com ele calculamos a energia total do sistema. O resultado obtido não pode ser comparado com nenhum resultado similar na literatura pois não temos conhecimento que tal cálculo tenha sido feito através de outros métodos, mas ele se demonstra consistente com a interpretação física espera-

da. Em seguida, calculamos a energia gravitacional total do espaço-tempo de Kerr do ponto de vista de um sistema de referência não girante e estático. O resultado coincide com o resultado da literatura.

Criamos um procedimento para a construção de sistemas de referência de Fermi-Walker a partir de um sistema de referência local arbitrário transportado ao longo de uma curva C , cujo quadrivetor tangente é dado pela quadrivelocidade do observador $e_{(0)}^\mu$. A idéia consiste em realizar uma rotação de Lorentz local e resolver a equação (4.21) para os coeficientes da transformação de Lorentz local. Apesar de em princípio ser difícil de se obter a solução geral de (4.21), em alguns casos particulares a solução pode ser facilmente obtida. Nós obtemos sistemas de referência de Fermi-Walker para observadores localizados no plano equatorial e no eixo de simetria (eixo z) no espaço-tempo de Kerr. É formalmente possível estabelecer sistemas de referência de Fermi-Walker para observadores em repouso na superfície da Terra. Esses sistemas de referência são as melhores realizações de sistemas de referência que levam em conta os efeitos da rotação da Terra.

Os procedimentos desenvolvidos nessa tese demonstraram como se construir um sistema de referência local adaptado a um observador arbitrário no espaço-tempo. A partir do sistema de referência local construído e das equações do TERG podemos obter a energia e o momento do campo gravitacional do ponto de vista do sistema de referência local. Outros trabalhos demonstraram que também conseguimos obter o momento angular de certas configurações de campos gravitacionais em alguns sistemas de referência. Com isso, temos em mãos uma ferramenta poderosa para o completo estudo do campo gravitacional, esperamos que em breve estas ferramentas sejam utilizadas em problemas astrofísicos concretos e, quem sabe, ajude numa futura possível quantização do campo gravitacional.

Referências Bibliográficas

- [1] B. R. Iyer and C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D* **48**, 5706 (1993).
- [2] F. W. Hehl and W. T. Ni, *Phys. Rev. D* **42**, 2045 (1990).
- [3] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1995).
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley, New York, 1972).
- [5] R. V. Eötvös, D. Pekar and E. Fekete, *Ann. Phys. (Leipzig)* **68**, 11 (1922); P. G. Roll, R. Krotkov and R. H. Dicke, *Ann. Phys. (New York)* **26**, 442 (1967).
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1994).
- [7] B. Mashhoon, *Phys. Lett. A* **145**, 147 (1990).
- [8] C. Møller, *Tetrad Fields and Conservation Laws in General Relativity*, em *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, editado por C. Møller (Academic Press, London, 1962).
- [9] J.A. Schouten, *Ricci-Calculus* (Springer, Berlin, 1954).
- [10] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, em *Geometry and Theoretical Physics*, editado por J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).
- [11] B. Mashhoon and U. Muench, *Ann. Phys. (Leipzig)* **11**, 532 (2002).
- [12] B. Mashhoon, *Ann. Phys. (Berlin)* **12**, 586 (2003).
- [13] J. W. Maluf, F. F. Faria and S. C. Ulhoa, *Class. Quantum Grav.* **24**, 2743 (2007).

- [14] C. Møller, *Ann. Phys.* **4**, 347 (1958).
- [15] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, New York, 1962).
- [16] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* **217**, (1928).
- [17] C. Møller, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk* **1** (10), (1958).
- [18] C. Møller, *Conservation Laws in the Tetrad theory of Gravitation*, em *Proceedings of the conference on Theory of Gravitation*, editado por Warszawa e Gauthier-Villars (Polish Scientific Publishers, Paris, 1964).
- [19] C. Pellegrini and J. Plebanski, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk* **2** (2), (1962).
- [20] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **130** (3), 1253 (1963).
- [21] M. Schweizer and N. Strautmann, *Phys. Lett.* **71A** (5, 6), 493 (1979).
- [22] J. Nitsch and F. W. Hehl, *Phys. Lett.* **90B** (1, 2), 98 (1980).
- [23] M. Schweizer, N. Strautmann and A. Wipf, *Gen. Rel. Grav.* **12** (11), 951 (1980).
- [24] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, *Phys. Rev. D* **64**, 084014 (2001).
- [25] Y. N. Obukhov and G. F. Rubilar, *Phys. Rev. D* **73**, 124017 (2006).
- [26] J. W. Maluf, *J. Math. Phys.* **35** (1), 335 (1994).
- [27] J. W. Maluf, *Phys. Rev. D* **67**, 108501 (2003).
- [28] J. W. Maluf, *Ann. Phys. (Berlin)* **14**, 723 (2005).
- [29] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. F. Faria and J. F. da Rocha Neto, *Class. Quantum Grav.* **23**, 6245 (2006).
- [30] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Dover, New York, 1986).
- [31] J. D. Brown and J. W. York, *Phys. Rev. D* **40**, 3312 (1989).

- [32] J. W. Maluf, J. F. da Rocha Neto, T. M. L. Toríbio e K. H. Castelo Branco, *Phys. Rev. D* **65**, 124001 (2002).
- [33] J. D. Brown and J. W. York, Jr., *Quasi-local energy in general relativity*, em *Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Mathematical Aspects of Classical Field Theory*, editado por M. J. Gotay, J. E. Marsden and V. Moncrief (American Mathematical Society, 1991); *Phys. Rev. D* **47**, 1407 (1993).
- [34] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga and J. F. da Rocha-Neto, *General Relativity and Gravitation* **39**, 227 (2007).
- [35] J. W. Maluf, F. F. Faria and K. H. Castello Branco, *Class. Quant. Grav.* **20**, 4683 (2003).
- [36] J. W. Maluf and F. F. Faria, *Ann. Phys. (Berlin)* **13**, 604 (2004).
- [37] H. Reissner, *Ann. Phys. (Leipzig)* **50**, 106 (1916); G. Nordström, *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam* **26**, 1201 (1918).
- [38] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).
- [39] K. Schwarzschild, *Sitzungsber. Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1**, 189 (1916); *Sitzungsber. Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1**, 424 (1916).
- [40] R. Boyer and R. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).
- [41] B. Mashhoon, *Phys. Lett. A* **173**, 347 (1993).
- [42] B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism: a brief review*, Preprint: qr-qc/0311030 (2003).
- [43] J. W. Maluf and F. F. Faria, *Ann. Phys. (Berlin)* **17**, 326 (2008).
- [44] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2001).
- [45] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

- [46] J. A. Marck, *Proc. R. Soc. Lond. A* **385**, 431 (1983); *Phys. Lett A* **97**, 140 (1983).