

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MÉTODOS INTEGRAIS DE CONTORNO APLICADOS À
SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS AERODINÂMICOS
PERMANENTES E TRANSIENTES

RICARDO CAIADO DE ALVARENGA

ORIENTADOR: FRANCISCO RICARDO DA CUNHA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 131 A/2009

BRASÍLIA/DF: ABRIL - 2009.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MÉTODOS INTEGRAIS DE CONTORNO APLICADOS À
SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS AERODINÂMICOS
PERMANENTES E TRANSIENTES

RICARDO CAIADO DE ALVARENGA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, PhD. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. Roberto Boberiethe Miserda, PhD. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Yuri Dumaresq Sobral, PhD.
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 28 DE ABRIL DE 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA

ALVARENGA , RICARDO CAIADO DE

Métodos Integrais de Contorno Aplicados à Solução de Escoamentos

Aerodinâmicos Permanentes e Transientes. [Distrito Federal] 2009.

xxi, 145p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2009)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Método Integral de Contorno

2. Escoamento Potencial

3. Escoamento Transiente

4. Acoplamento de Camada Limite

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALVARENGA, R. C. (2009). Métodos Integrais de Contorno Aplicados à Solução de Escoamentos Aerodinâmicos Permanentes e Transientes. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 131 A/2009, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 145p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ricardo Caiado de Alvarenga.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Métodos Integrais de Contorno Aplicados à Solução de Escoamentos Aerodinâmicos Permanentes e Transientes.

GRAU/ANO: Mestre/2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Ricardo Caiado de Alvarenga
SQS-106 Bloco-C Apartamento-101
70.345-030 Brasília - DF - Brasil.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a todos que admiram a perfeição da natureza e do Seu Criador e que procuram entender e modelar os fenômenos naturais com o intuito de aproveitá-los em benefício da humanidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Denize, aos meus filhos Arthur e João Pedro, aos meus pais e irmãos pelo apoio e incentivo que sempre me deram. Gostaria de agradecer também ao meu orientador, prof. Francisco Ricardo da Cunha, por ter me dado a oportunidade de desenvolver uma pesquisa relacionada com a área da Engenharia Mecânica que eu mais gosto e por estar sempre à disposição para esclarecimentos das minhas dúvidas. Por fim, gostaria de agradecer principalmente a Deus que está sempre ao meu lado e que me ensina a viver.

RESUMO

Autor: Ricardo Caiado de Alvarenga

Orientador: Francisco Ricardo da Cunha

Programa de Pós-graduação

Brasília, 09 de abril de 2009

Nessa dissertação é apresentado o método integral de contorno para escoamentos potenciais bidimensionais e tridimensionais incompressíveis. Aplicando o teorema de Green para as regiões internas e externas a um corpo arbitrário e combinando os resultados obtém-se a equação integral de contorno do método em questão. A superfície do corpo é representada por elementos de malha triangulares e quadrilaterais planos com distribuição constante de singularidades (dipolos e sorvedouros) em cada elemento. A condição de Kutta é aplicada de forma simples para o caso de escoamento permanente: as intensidades dos filamentos de vórtice da esteira são determinadas pelas diferenças de intensidade de dipolos nos elementos de malha adjacentes ao bordo de fuga. O método é de baixo custo computacional, mesmo quando usado para simular escoamentos em torno de corpos tridimensionais com geometrias complexas. Os resultados numéricos do método integral de contorno são comparados com resultados analíticos, resultados experimentais, resultados da teoria da linha de sustentação e do método vortex-lattice. Métodos integrais de camada limite delgada bidimensional foram utilizados na determinação dos principais parâmetros de camada limite. Foram simulados a camada limite laminar, um critério de transição e a camada limite turbulenta. Por fim, foi implementada a versão bidimensional do método integral de contorno para escoamentos potenciais transientes. O método em questão considera o aerofólio movendo-se no fluido e trata o problema em termos de um sistema de referência não-inercial fixo no corpo. A condição de Kutta é implementada considerando-se que a pressão é igual nas superfícies superior e inferior do bordo de fuga. A formulação matemática do escoamento potencial transiente explorado neste trabalho é baseada no princípio de Benoulli da conservação da energia mecânica de um escoamento na sua versão não-estacionária. O contorno do aerofólio é substituído por elementos de vórtices e de fontes planos. Em particular, um elemento adicional é incorporado ao bordo de fuga com o objetivo de se representar o início da formação da esteira atrás do corpo. O restante da esteira de vorticidade é representada por pontos de vórtice. O sistema de equações resultantes é não-linear e é resolvido por um método de eliminação de Gauss iterativo.

ABSTRACT

Author: Ricardo Caiado de Alvarenga

Supervisor: Francisco Ricardo da Cunha

Programa de Pós-graduação

Brasília, 09 April of 2009

In this dissertation we describe a boundary integral method for calculating the incompressible potential flow around arbitrary, lifting, two-dimensional and three-dimensional bodies. By using Green theorems to the inner and outer regions of the body and combining the resulting expressions we obtain a general integral representation of the flow. The body surface is divided into small quadrilateral and triangular elements and each element has a constant singularities distribution of sinks and dipoles. The application of Kutta's condition for the steady flow is quite simple; no extra equation or trailing-edge velocity point extrapolation are required. The method is robust with a low computational cost even when it is extended to solve complex three-dimensional body geometries. The boundary integral code developed here is verified by comparing the numerical predictions with experimental measurements, analytical solutions and results of the lifting-line theory and vortex-lattice method. A two-dimensional integral boundary layer method, was incorporated into the two-dimensional boundary integral method and is intended to give a preliminary estimate of boundary layer properties over a configuration. The method comprises a laminar boundary layer analysis, a transition and a turbulent boundary analysis. Finally, an unsteady two-dimensional boundary integral method has been developed. The present approach treats the body as moving through the air and put the mathematical problem in terms of a moving coordinate system attached to it. The Kutta condition is applied by imposing the same pressure on the upper and lower surfaces at the trailing edge. For this end, the unsteady Bernoulli equation is used. The airfoil contour is replaced by straight-line elements and a small straight-line wake element is attached to the trailing edge. The circulation on this element is imposed in the way that the global circulation around the airfoil and the wake is constant. A downstream wake of concentrated vortices is formed from the vorticity shed at earlier times and is convected according to the local velocities. The basic set of equations is nonlinear and an iterative procedure is adopted for its solution.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	4
2.2	EQUAÇÃO DE EULER	5
2.3	TEOREMA DE KUTTA-JOUKOWSKI	5
2.4	EQUAÇÃO DE LAPLACE	7
2.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO	8
2.6	VARIÁVEIS COMPLEXAS APLICADAS AO ESTUDO DE ESCOAMEN- TOS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS	9
2.6.1	RELAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN	10
2.6.2	VELOCIDADE	11
2.6.3	ESCOAMENTOS POTENCIAIS SIMPLES	12
2.6.4	TEOREMA DE BLASIUS	15
2.6.5	ESCOAMENTO UNIFORME EM TORNO DE UM CILINDRO SEM CIRCULAÇÃO	16
2.6.6	ESCOAMENTO UNIFORME EM TORNO DE UM CILINDRO COM CIRCULAÇÃO	18
2.6.7	TRANSFORMAÇÃO CONFORME	20
2.7	TEORIA DA LINHA DE SUSTENTAÇÃO DE PRANDTL	29
2.7.1	LEI DE BIOT- SAVART	29
2.7.2	TEOREMA DE HELMHOLTZ	31
2.7.3	SUPERPOSIÇÃO DE LINHAS DE VÓRTICES EM FORMA DE FERRADURA E UM ESCOAMENTO UNIFORME: A ASA FINITA.	31
2.7.4	A DISTRIBUIÇÃO ARBITRÁRIA DE CIRCULAÇÃO AO LONGO DA ENVERGADURA	36

3	ENSAIOS EXPERIMENTAIS	38
3.1	DESCRIÇÃO DOS APARATOS EXPERIMENTAIS	38
3.1.1	TÚNEL DE VENTO	38
3.1.2	BANCADA DE VIZUALIZAÇÃO	40
3.2	CALIBRAÇÃO DO TÚNEL DE VENTO	42
3.3	CALIBRAÇÃO DA BALANÇA DO TÚNEL DE VENTO	44
3.4	ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM TORNO DE UM PERFIL NACA 0012	46
3.5	ESCOAMENTO TRIDIMENSIONAL EM TORNO DE UMA ASA COM PERFIL NACA 0012 E RAZÃO DE ASPECTO IGUAL A 4	51
4	REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE ESCOAMENTOS POTENCI- AIS - O MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO	54
4.1	MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO BIDIMEN- SIONAL	55
4.1.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO INTEGRAL DE CON- TORNO BIDIMENSIONAL	58
4.1.2	APLICAÇÕES DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO BIDIMENSIONAL	61
4.2	MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO TRIDIMEN- SIONAL	69
4.2.1	EQUAÇÃO GOVERNANTE	69
4.2.2	FORMULAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA	70
4.2.3	PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS	74
4.2.4	APLICAÇÕES DO MÉTODO	75
5	ACOPLAMENTO DA TEORIA POTENCIAL COM APROXIMAÇÃO DE CAMADA LIMITE	83
5.1	EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE PARA ESCOAMENTOS BIDI- MENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS	83
5.2	EQUAÇÃO INTEGRAL DA CAMADA LIMITE BIDIMENSIONAL	84
5.3	SIMILARIDADE EM ESCOAMENTOS LAMINARES	86
5.3.1	CONCEITO DE SIMILARIDADE	86
5.3.2	EQUAÇÃO DE FALKNER-SKAN	86
5.4	SOLUÇÕES NUMÉRICAS DA EQUAÇÃO INTEGRAL DA CAMADA LIMITE	94
5.5	CAMADA LIMITE LAMINAR COM GRADIENTE DE PRESSÃO - O MÉTODO INTEGRAL DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN	95

5.5.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN	99
5.5.2	APLICAÇÕES DO MÉTODO DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN EM CONJUNTO COM O MÉTODO INTEGRAL DE CON- TORNHO	109
5.6	CAMADA LIMITE TURBULENTA COM GRADIENTE DE PRESSÃO - O MÉTODO INTEGRAL DE HEAD	112
5.6.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DE HEAD	114
5.6.2	RESULTADOS NUMÉRICOS DO MÉTODO DE HEAD	114
6	APLICAÇÃO DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ESCOAMENTOS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS TRANSIENTES	118
6.1	INTRODUÇÃO	118
6.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	119
6.3	MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO BIDIMEN- SIONAL TRANSIENTE	121
6.4	CONDIÇÃO DE KUTTA PARA ESCOAMENTO TRANSIENTE	125
6.5	PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS	128
6.6	APLICAÇÕES DO MÉTODO	129
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	134
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136
	APÊNDICES	141
	A Método de Runge-Kuta	142
	B Tabela do Método Integral de Kármán-Pohlhausen	143
	C Critério de Transição de Michel	145

LISTA DE FIGURAS

2.1	Aerofólio com sustentação	6
2.2	Seção transversal arbitrária de um corpo	15
2.3	Escoamento em torno do aerofólio de Joukowsk assimétrico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do aerofólio após a transformação de Joukowsk e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio.	27
2.4	Escoamento em torno do aerofólio de Joukowsk simétrico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do aerofólio após a transformação de Joukowsk e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio.	28
2.5	Escoamento em torno de um arco parabólico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do arco após a transformação de Joukowsk e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do arco.	28
2.6	Escoamento em torno de uma placa plana. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a placa plana após a transformação de Joukowsk e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície da placa plana.	29
2.7	Filamento de vórtice \overline{AB}	30
2.8	Vórtice em forma de ferradura	31
2.9	Emissão de vórtice	32
2.10	Superposição das linhas de vórtices	33
2.11	Velocidade induzida para baixo (w)	33
2.12	Ângulo de ataque efetivo	34
3.1	Vista em perspectiva do túnel de vento utilizado para a execução dos experimentos do projeto.	39

3.2	(a) Vista frontal da balança com as células de carga, onde a célula horizontal direita representa o canal 1, a célula horizontal esquerda representa o canal 2 e a célula vertical representa o canal 3 para medição do arrasto; (b) Inversor de frequência que controla a rotação do motor do tunel de vento.	39
3.3	(a) Equipamento Vishay que mede as deformações nas células de carga, juntamente com o eliminador de pilhas; (b) Equipamento Valydine utilizado para medir pressão estática e dinâmica.	40
3.4	Vista lateral da bancada de visualização de escoamento para a execução dos experimentos do projeto com as geometrias aerodinâmicas.	41
3.5	Perfil de velocidade no plano vertical para RPD=4mm	42
3.6	Perfil de velocidade no plano horizontal para RPD=4mm	42
3.7	Perfil de velocidade no plano vertical para RPD=24mm	43
3.8	Perfil de velocidade no plano horizontal para RPD=24mm	43
3.9	RPD versus pressão dinâmica	44
3.10	Curva de calibração da célula de carga 1	45
3.11	Curva de calibração da célula de carga 2	45
3.12	Curva de calibração da célula de carga 3	46
3.13	Coefficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 0 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	47
3.14	Coefficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 4 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	47
3.15	Coefficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 8 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	48
3.16	Coefficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 10 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	48

3.17	Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 12 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	49
3.18	Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 16 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000	49
3.19	Força e momento a 1/4 da corda em função do ângulo de ataque - Perfil naca 0012. Para a força, triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000. Para o momento, círculos representam número de Reynolds igual a 150.000 e losângulos representam número de Reynolds igual a 170.000	50
3.20	Polar de arrasto - Perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000	50
3.21	Coeficiente de sustentação e de momento a 1/4 da corda em função do ângulo de ataque - Asa finita com perfil naca 0012. Para coeficiente de sustentação, triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000. Para o coeficiente de momento, círculos representam número de Reynolds igual a 150.000 e losângulos representam número de Reynolds igual a 170.000	51
3.22	Coeficiente de arrasto em função do ângulo de ataque - Asa finita com perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 150.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 170.000	52
3.23	Polar de arrasto - Asa finita com perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000	52
4.1	Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial bidimensional	56
4.2	Parâmetros geométricos usados no método integral de contorno bidimensional	59
4.3	Convenção adotada no método integral de contorno bidimensional	61
4.4	Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 2 e 4 graus.	62

4.5	Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 6 e 8 graus.	62
4.6	Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 10 e 12 graus.	63
4.7	Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque.	63
4.8	Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 1.7 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e deflexão do flap igual a 30 graus.	64
4.9	Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 8 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e deflexão do flap igual a 30 graus.	65
4.10	Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 8 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e deflexão do flap igual a 30 graus. Modificação da geometria simulada (redução da deflexão do flap) com o intuito de diminuir a circulação do flap.	66
4.11	Escoamento em torno de um aerofólio com slot fixo e slotted flap sem deflexão. Ângulo de ataque igual a 8 graus e número de Reynolds igual a 3500000.	67
4.12	Escoamento em torno de um aerofólio com slot fixo e slotted flap com deflexão igual a 30 graus. Ângulo de ataque igual a 8 graus e número de Reynolds igual a 3500000.	68
4.13	Escoamento em torno de um aerofólio com flap externo com deflexão igual a 20 graus. O ângulo de ataque é igual a 9,22 graus e número de Reynolds igual a 2040000.	68
4.14	Escoamento em torno de um aerofólio com flap externo com geometria modificada para a simulação numérica. O ângulo de ataque é igual a 9,22 graus e número de Reynolds igual a 2040000.	69
4.15	Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial tridimensional	71

4.16	Coeficiente de pressão em torno de uma esfera com raio igual a $\pi/2$. Os círculos representam a simulação numérica com 800 elementos de malha e a linha contínua representa a solução analítica $cp = 1 - (9/4)\sin^2\theta$	76
4.17	Coeficiente de pressão ao longo do eixo longitudinal de um corpo com nariz hemisférico. A linha contínua representa a simulação numérica com 860 elementos de malha e os círculos representam as medidas experimentais de Cole, 1952 para um número de Reynolds igual a 9×10^5 baseado no comprimento do corpo.	76
4.18	Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 55% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.	77
4.19	Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 19% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.	78
4.20	Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 80% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.	78
4.21	Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 92% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.	79

4.22	Coeficiente de sustentação, coeficiente de arrasto e coeficiente de arrasto induzido para uma asa enflechada. A linha contínua representa as previsões do método integral de contorno com 1000 elementos de malha, a linha pontilhada representa as previsões do método Vortex-Lattice com 406 elementos de malha e os círculos representam as medidas experimentais com número de Reynolds igual a 4×10^6 . Para pequenos ângulos de ataque o coeficiente de sustentação é representado pela reta $(1/20)\alpha$.	80
4.23	Montagem experimental. (a) Túnel de vento da Universidade de Brasília e (b) Asa (NACA0012) simulada e ensaiada.	81
4.24	Coeficiente de sustentação para uma asa reta. A linha contínua representa o resultado do método integral de contorno com 816 elementos de malha, a linha tracejada representa o resultado do método Vortex-Lattice com 336 elementos de malha, a linha pontilhada representa o resultado da Teoria da Linha de Sustentação com 60 estações ao longo da envergadura e os círculos representam as medidas experimentais. O número de Reynolds baseado na dimensão da corda da asa é 1.6×10^5 .	82
4.25	Coeficiente de arrasto e de arrasto induzido para uma asa reta. A linha contínua representa o resultado do método integral de contorno com 816 elementos de malha, a linha tracejada representa o resultado do método Vortex-Lattice com 336 elementos de malha, a linha pontilhada representa o resultado da Teoria da Linha de Sustentação com 60 estações ao longo da envergadura e os círculos representam as medidas experimentais. O número de Reynolds baseado na dimensão da corda da asa é 1.6×10^5	82
5.1	Perfis similares de velocidade	90
5.2	Espessura da camada limite ao longo do comprimento x	90
5.3	Distribuição da tensão de cisalhamento ao longo do comprimento x	91
5.4	Espessura de deslocamento ao longo do comprimento x	92
5.5	Espessura da quantidade de movimento ao longo do comprimento x	93
5.6	Perfis de velocidade da camada limite para distâncias $x = 0.1$, $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e para $m = -0.05$ (gradiente adverso de pressão)	94
5.7	Espessura da camada limite ao longo de x	100
5.8	Espessura da camada limite ao longo de x	100
5.9	Espessura da camada limite ao longo de x	101
5.10	Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x	102
5.11	Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x	102
5.12	Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x	103

5.13	Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .	103
5.14	Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .	104
5.15	Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .	104
5.16	Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .	105
5.17	Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .	106
5.18	Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .	106
5.19	Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$	107
5.20	Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$	108
5.21	Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$	108
5.22	Espessura da camada limite dos aerofólios naca 0012 e selig 1223	110
5.23	Tensão de cisalhamento na parede dos aerofólios naca 0012 e selig 1223	110
5.24	Fator de forma dos aerofólios naca 0012 e selig 1223	111
5.25	Perfis de velocidade do aerofólio naca 0012 em $x = 10\%c_{\text{corda}}$ e $x = 60\%c_{\text{corda}}$	111
5.26	Perfis de velocidade do aerofólio selig 1223 em $x = 10\%c_{\text{corda}}$ e $x = 34\%c_{\text{corda}}$	112
5.27	Fluxo volumétrico nas fronteiras da camada limite.	113
5.28	espessura da camada limite ao longo da corda para o aerofólio naca 0012	115
5.29	Fator de forma H ao longo da corda para o aerofólio naca 0012	116
5.30	Coefficiente de fricção c_f ao longo da corda para o aerofólio naca 0012	117
6.1	Sistemas de coordenadas inercial e não-inercial	119
6.2	Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial bidimensional transiente	122
6.3	Hipótese 1 - Velocidade igual a zero em cima e em baixo do bordo de fuga	126
6.4	Hipótese 2 - (a) Velocidade finita em cima do bordo de fuga e igual a zero em baixo do bordo de fuga (para $d\Gamma/dt < 0$); (b) Velocidade finita em baixo do bordo de fuga e igual a zero em cima do bordo de fuga (para $d\Gamma/dt > 0$).	126
6.5	Hipótese 3 - (a) Velocidade igual a zero em cima e em baixo do bordo de fuga ($\beta < \alpha/2$); (b) Velocidade infinita em um lado do bordo de fuga e velocidade igual a zero no outro lado do bordo de fuga ($\beta > \alpha/2$).	126
6.6	Distribuição da velocidade do escoamento na superfície do aerofólio. Taxa temporal da circulação no aerofólio positiva	130
6.7	Distribuição da velocidade do escoamento na superfície do aerofólio. Taxa temporal da circulação no aerofólio negativa	130
6.8	Resultado experimental [8] da geometria da esteira $V_p = 0,6$	131
6.9	Resultado numérico da geometria da esteira $V_p = 0,6$	131

6.10	Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,06$	132
6.11	Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,1366$	132
6.12	Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,3$	132
6.13	Comprimento de onda da esteira versus amplitude de oscilação	133
6.14	Definição de comprimento de onda. Configuração de vórtices na esteira indicando empuxo [23].	133

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIações

ρ : massa específica.

t : tempo.

u : componente da velocidade na direção x.

v : componente da velocidade na direção y.

w : componente da velocidade na direção z.

p : pressão.

μ : viscosidade absoluta ou dinâmica.

τ : tensão de cisalhamento.

δ : espessura da camada limite.

δ^* : espessura de deslocamento da camada limite.

θ : espessura da quantidade de movimento da camada limite.

H : Fator de forma da camada limite.

C_f : Coeficiente de fricção.

φ : função potencial de perturbação.

ν : viscosidade cinemática.

m : gradiente de pressão adimensional.

Re : número de Reynolds.

Γ : circulação do escoamento.

V : velocidade do escoamento não-perturbado.

p_0 : pressão atmosférica.

A : área.

ϕ : função potencial total.

W : função potencial complexa.

Z : variável complexa.

r : posição em relação à origem.

q : vazão.

α : ângulo de ataque.

L : força de sustentação.

D : força de arrasto.

Cl : coeficiente de sustentação em uma secção da envergadura ou coeficiente de sustentação num escoamento bidimensional.

Cd : coeficiente de arrasto em uma secção da envergadura ou coeficiente de arrasto num escoamento bidimensional.

CL : coeficiente de sustentação da asa.

CD : coeficiente de arrasto da asa.

n : direção normal.

G : função de Green.

γ : intensidade de vórtices.

Cp : coeficiente de pressão.

σ : intensidade de fonte.

S : superfície.

R : vetor posição.

Ω : velocidade angular.

k : frequência reduzida.

c : corda do aerofólio.

f : frequência.

St : número de Strouhal.

V_p : velocidade de oscilação vertical.

h : amplitude de oscilação.

Δ_k : comprimento do elemento de malha plano adjacente ao bordo de fuga.

θ_k : direção do elemento de malha plano adjacente ao bordo de fuga.

u_e : velocidade local fora da camada limite.

Q : fluxo volumétrico no interior da camada limite.

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O presente trabalho tem o objetivo de desenvolver e implementar metodologias de baixo custo computacional para simular escoamentos aerodinâmicos em altos números de Reynolds. Métodos de simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes (DNS) têm sido implementados com sucesso, porém com custo computacional elevado. Na fase de definições preliminares de um projeto aerodinâmico, necessita-se de um método de simulação que tenha um baixo custo computacional, facilidade e agilidade para pré-processamento e pós-processamento e, ao mesmo tempo, que apresente resultados satisfatórios. O baixo custo computacional de um método proporciona a implementação de algoritmos de otimização para determinação de parâmetros geométricos que satisfaçam propriedades aerodinâmicas desejadas para o projeto. Nesse contexto, a modelagem de um escoamento que obedeça a teoria potencial é empregada com êxito [41].

O Método Integral de Contorno é usado na resolução da equação de Laplace. Considerações como a presença de tensões de cisalhamento e condição de não escorregamento na parede, são modelados usando a teoria clássica de camada limite delgada em acoplamento com o escoamento potencial. O resultado é um método de baixo custo computacional e que alcança resultados razoáveis quando comparado com dados experimentais. As hipóteses simplificadoras que restringem os limites de validade de um modelo de escoamento potencial não comprometem o interesse do emprego desse modelo, visto que o projeto aerodinâmico da maior parte das aeronaves visa a definição de uma configuração que satisfaça, em vôo de cruzeiro, exatamente as condições impostas pelas hipóteses simplificadoras assumidas no modelo teórico. Então, para corpos aerodinâmicos, a teoria potencial com acoplamento de camada limite consegue alcançar resultados satisfatórios. O Método Integral de Contorno também é usado com baixo custo computacional na solução de escoamentos transientes.

O capítulo 2 da dissertação trata dos conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do trabalho. Teorias analíticas e semi-analíticas são descritas com objetivo de usá-las na validação dos métodos desenvolvidos. O capítulo 3 descreve os ensaios

experimentais realizados no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade de Brasília. Os resultados experimentais são utilizados para validar os métodos numéricos implementados. O capítulo 4 trata do Método Integral de Contorno aplicado à solução da equação de Laplace. O método é descrito com detalhes para os casos de escoamentos potenciais bidimensionais e tridimensionais. O capítulo 5 trata da teoria de camada limite. Inicialmente é apresentado o método de similaridade e resolvido numericamente a equação de Falkner-Skan. Em seguida são apresentados métodos numéricos de resolução da Equação Integral da Camada Limite para o caso de escoamento laminar e de escoamento turbulento. A distribuição de velocidade na superfície do aerofólio dada pelo Método Integral de Contorno é usada como dado de entrada e então os principais parâmetros de camada limite são calculados para um aerofólio com geometria arbitrária. No capítulo 6 é apresentado o Método Integral de Contorno aplicado a escoamentos potenciais bidimensionais transientes. Uma esteira de vorticidade emitida no bordo de fuga do aerofólio e convectada pelo escoamento local é considerada de modo a satisfazer o teorema de Kelvin.

1.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

O método integral de contorno, utilizado para solução de escoamentos potenciais tridimensionais, se tornou bastante difundido com o advento dos computadores pessoais. Hess [18][19][20][21] foi um dos pioneiros na utilização desse método na Douglas Aircraft Company. O código desenvolvido por ele simula escoamentos potenciais com sustentação em torno de geometrias tridimensionais arbitrárias e utiliza condições de contorno do tipo Newman. Baseia-se em elementos de contorno com distribuições constantes de fontes e distribuições quadráticas de dipolo. Rubbert e Saaris [43] desenvolveram um código semelhante ao de Hess, mas ao invés de usarem dipolos na superfície, utilizaram uma distribuição de vórtices na linha de camber da asa. O método integral de contorno proposto por Morino [34][35] utiliza-se das identidades de Green e do princípio de Huygens para modelar escoamentos permanentes e transientes, subsônicos e supersônicos linearizados ao redor de corpos tridimensionais arbitrários. Esse método considera em cada elemento de contorno uma distribuição constante de fontes e dipolos e aplica a condição de contorno do tipo Newman para determinar a intensidade das distribuições de fontes e a condição de contorno do tipo Dirichlet na determinação da intensidade das distribuições de dipolo. Maskew [31][32] desenvolveu um programa comercial de simulação de escoamentos potenciais com acoplamento de camada limite conhecido como VSAERO. Seu código utiliza o método de Morino para

simular escoamentos permanentes e transientes. Ashby et al [5][6], sob contrato com a NASA, desenvolveram um código de simulação de escoamentos potenciais conhecido como PMARC. Esse código, como o VSAERO, considera distribuições constantes de fontes e dipolos em cada elemento de malha de superfície e considera as condições de contorno como no método de Morino. O código desenvolvido por Tinoco et al [50] na Boeing Commercial Airplane Company considera distribuições de ordem superior de fontes e dipolos nos elementos de contorno assim como a continuidade dessas distribuições nas extremidades dos elementos da malha de superfície. O código permite que o usuário escolha o tipo de condição de contorno que deseja utilizar (de Newman, de Dirichlet ou ambas) em cada conjunto de elementos de contorno. Woodward [53][54] desenvolveu um método de simulação de escoamentos potenciais no regime subsônico e supersônico que usa, além das singularidades de superfície, linhas de singularidade. Singh et al [45] desenvolveu um método de simulação de escoamentos potenciais que considera distribuições de singularidade interna ao corpo e que usa condições de contorno do tipo Newman. Morino e Lemma [36][27] e Gebhardt et al [13] desenvolveram um método integral de contorno iterativo para resolver a equação do potencial completo para escoamentos no regime transônico. Romate [42] calculou os erros numéricos associados às aproximações usualmente consideradas no método integral de contorno. Aplicações similares do método integral de contorno utilizando o potencial hidrodinâmico em escoamentos de Stokes, têm sido explorado com detalhes por Cunha et al [10].

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e teoremas necessários para o desenvolvimento do trabalho. Teorias e métodos analíticos e semi-analíticos são revisados com objetivo de usá-los na validação dos métodos implementados.

2.1 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações de Navier-Stokes, que são a formulação diferencial das equações da quantidade de movimento, são escritas abaixo na notação indicial:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \Delta \right) \quad (2.1)$$

Para um escoamento incompressível, sabemos que o divergente do vetor velocidade é igual a zero e neste caso a equação de Navier-Stokes reduz-se a:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (2.2)$$

ou na forma vetorial:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla^* p^* + \mu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (2.3)$$

As equações de Navier-Stokes descritas acima são válidas para escoamentos laminares e turbulentos. No caso de escoamento turbulento, as propriedades dos fluidos e as variáveis dependentes são valores instantâneos. Então a solução incluirá quantidades dependentes do tempo. O método numérico que resolve as equações de Navier-Stokes como equações dependentes do tempo é conhecido como DNS (direct numerical simulation) e tem um elevado custo computacional, tornando-se quase inviável para solução

de problemas de engenharia. Para contornar esse problema de elevado custo computacional, substitui-se as quantidades instantâneas das equações por seus valores médios e suas flutuações. Como exemplo, as componentes instantâneas do vetor velocidade e a pressão instantânea são representadas como:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p' \quad (2.4)$$

As equações de Navier-Stokes, depois de terem substituídos os valores médios e suas flutuações, são conhecidas como RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes).

2.2 EQUAÇÃO DE EULER

Quando o escoamento é em altos números de Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) então podemos escrever as equações de Navier-Stokes da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla^* p^* \quad (2.5)$$

A equação acima é conhecida como equação de Euler.

2.3 TEOREMA DE KUTTA-JOUKOWSKI

Considere o aerofólio mostrado na figura (2.1), gerando uma circulação de intensidade Γ , imerso em um escoamento uniforme com velocidade não perturbada igual a V , densidade do fluido que escoar igual a ρ e pressão atmosférica igual a p_0 .

Para um volume de controle circular de raio muito maior do que o aerofólio e igual a R , a sustentação do aerofólio é igual à soma da força devida ao campo de pressão estática na superfície de controle e à força devida à variação da quantidade de movimento na superfície de controle. Esse resultado é encontrado, utilizando-se a formulação integral da equação da quantidade de movimento para um volume de controle inercial. A esse tamanho de volume de controle (com o raio bastante grande), os efeitos devido à espessura do aerofólio, podem ser ignorados e o aerofólio é percebido apenas pela circulação que ele gera. Deve-se notar que o aerofólio não pertence ao volume de controle escolhido e que o mesmo faz uma força no volume de controle (força F_y).

A força vertical l_b , devida à pressão estática que atua na superfície de controle é a soma das pressões atuando nas componentes verticais dos elementos de área dA . No elemento de área definido por $\delta\theta$, a pressão estática é dada por p e a velocidade neste

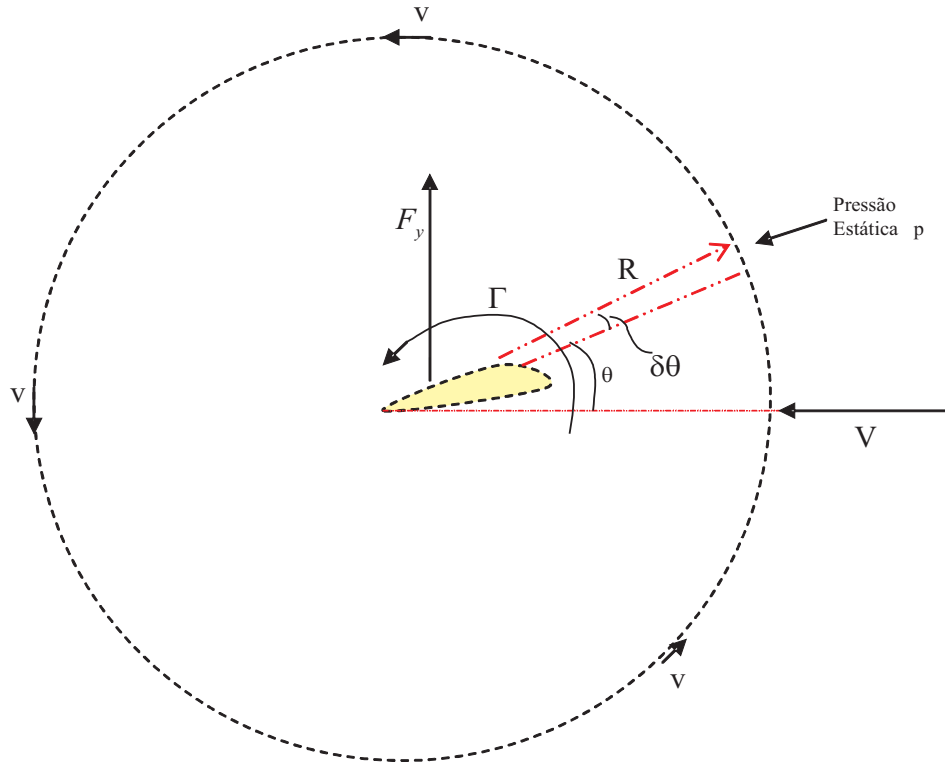


Figura 2.1: Aerofólio com sustentação

elemento de área é igual à resultante entre a velocidade do escoamento não perturbado V e a velocidade induzida pela circulação v . Aplicando a equação de Bernoulli para uma linha de corrente que passa pelo elemento de área citado anteriormente, temos que:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p + \frac{1}{2}\rho (V^2 + v^2 + 2Vv\cos\theta) \quad (2.6)$$

e desprezando o termo $\frac{1}{2}\rho v^2$ que é muito menor do que os termos que tem V , ficamos com:

$$p = p_0 - \rho V v \cos\theta \quad (2.7)$$

Então a força vertical devido a pressão estática no elemento de área $dA = R\delta\theta$ é dada por:

$$-pR\sin\theta\delta\theta = -(p_0 - \rho V v \cos\theta) R\sin\theta\delta\theta \quad (2.8)$$

Logo a força vertical total devido à distribuição de pressão estática na superfície de controle é dada por:

$$l_b = - \int_0^{2\pi} (p_0 - \rho V v \cos\theta) R\sin\theta d\theta = \rho V v R\pi \quad (2.9)$$

O fluxo líquido de quantidade de movimento na direção vertical, saindo da superfície de controle é dado por:

$$\int_{sc} V_y \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.10)$$

e sabendo que:

$$V_y = v \cos \theta \quad (2.11)$$

e que

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -VR\delta\theta \cos \theta \quad (2.12)$$

então temos que:

$$\int_{SC} V_y \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = - \int_0^{2\pi} \rho V v R \cos^2 \theta d\theta = -\rho V v R \pi \quad (2.13)$$

Podemos então utilizar a formulação integral da equação da quantidade de movimento na direção vertical para determinarmos a força F_y que o aerofólio faz na superfície de controle. Então temos que:

$$F_y + l_b = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V_y \rho dV + \int_{SC} V_y \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.14)$$

substituindo os valores encontrados anteriormente e admitindo que o escoamento é permanente, temos:

$$F_y = 2\rho V v R \pi \quad (2.15)$$

e da definição de circulação (sabendo que o sentido anti-horário é negativo), temos que:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (2.16)$$

e substituindo a equação 2.16 na equação equação 2.15, segue-se que:

$$F_y = \rho V \Gamma \quad (2.17)$$

que é o resultado do teorema de Kutta-Joukowski. Logo o teorema nos diz que a força de sustentação de um corpo qualquer que gere circulação é dada pela equação acima. Esse teorema é muito útil no desenvolvimento de algumas teorias, como veremos adiante.

2.4 EQUAÇÃO DE LAPLACE

Para um escoamento potencial, define-se a função potencial como:

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad (2.18)$$

E para escoamentos que sejam incompressíveis, a equação da continuidade é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.19)$$

Combinando as duas equações anteriores obtemos, para um escoamento incompressível e irrotacional, a seguinte equação:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.20)$$

Então a equação de Laplace governa um escoamento que seja invíscido, irrotacional e incompressível. A equação 2.20 é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, linear e homogênea. O fato dessa equação ser linear homogênea implicará que poderemos encontrar soluções distintas, ou seja, escoamentos distintos que satisfaçam essa equação, somando-se soluções particulares já conhecidas (escoamentos já conhecidos). Isso pode ser feito usando-se o Princípio da Superposição.

2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para conseguirmos encontrar uma solução para um determinado escoamento potencial, precisaremos que a solução satisfaça a equação de Laplace e que também satisfaça certas condições de contorno. São essas condições de contorno que particularizam a solução de cada escoamento. Existem então três tipos de problemas que são regidos pela equação de Laplace. A diferenciação de cada um destes tipos de problema são ocasionados pelo tipo de condição de fronteira que é fornecido junto com o problema. Os tipos de problemas são:

- Problema de Dirichlet: são fornecidos os valores da função potencial ao longo de uma fronteira.
- Problema de Neumann: são fornecidos os valores da componente da velocidade normal à fronteira.
- Problema Misto: são fornecidos os valores da função potencial em algumas partes da fronteira e em outras são fornecidos os valores da componente da velocidade normal à fronteira.

2.6 VARIÁVEIS COMPLEXAS APLICADAS AO ESTUDO DE ESCOAMENTOS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS

Temos que num escoamento potencial, observando a disposição das linhas da função de corrente e da função potencial, é conveniente definirmos uma função complexa chamada de função potencial complexa [38]:

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.21)$$

em que:

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (2.22)$$

$W(z)$ é uma função analítica numa região se suas derivadas estão sempre definidas nessa região.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{d\psi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\phi}{dz} + i \frac{d\psi}{dz} = \frac{dW}{dz} = f'(z) \quad (2.23)$$

analogamente:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = i \frac{d\phi}{dz} - \frac{d\psi}{dz} = i \frac{dW}{dz} = i f'(z) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dz} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dz} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{d\psi}{dz} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\phi}{dz} \quad (2.28)$$

E agora, determinando as derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) i = \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} i = \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{d\phi}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi}{dz} \right) i = f''(z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (2.29)$$

e analogamente podemos encontrar que:

$$-\frac{d^2 \psi}{dz^2} i - \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -f''(z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} i \quad (2.30)$$

Adicionando as equações (2.29) e (2.30), temos:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 \phi + i \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.32)$$

resultando em:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.34)$$

então ϕ e ψ são funções harmônicas

2.6.1 RELAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

$$\frac{dW}{dz} = f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i \quad (2.35)$$

$$i \frac{dW}{dz} = i f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.36)$$

Multiplicando a equação (2.36) por i , temos:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.37)$$

Igualando (2.35) e (2.37), resulta nas relações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

2.6.2 VELOCIDADE

Para um escoamento potencial tem-se que:

$$\vec{U} = \nabla\phi \quad (2.40)$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.41)$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.42)$$

E a velocidade complexa é:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv = W'(z) \quad (2.43)$$

e em coordenadas polares, a velocidade complexa é dada por:

$$\frac{dW}{dz} = (u_r - iu_\theta) e^{-i\theta} \quad (2.44)$$

E das propriedades de números complexos, temos:

$$W'(z) \cdot \overline{W'}(z) = u^2 + v^2 = U^2 \quad (2.45)$$

2.6.3 ESCOAMENTOS POTENCIAIS SIMPLES

2.6.3.1 ESCOAMENTO UNIFORME

Para um escoamento uniforme alinhado com a horizontal (sem ângulo de ataque):

$$\phi = Ux = Ur \cos(\theta) \quad (2.46)$$

$$\psi = Uy = Ur \sin(\theta) \quad (2.47)$$

e o potencial complexo é dado por:

$$W = \phi + i\psi = Ur \cos(\theta) + iUr \sin(\theta) = Ure^{i\theta} \quad (2.48)$$

$$W(z) = Uz = Ure^{i\theta} \quad (2.49)$$

2.6.3.2 FONTES E SORVEDOUROS NA ORIGEM COM VAZÃO q

$$\phi = \left(\frac{q}{2\pi}\right) \ln r \quad (2.50)$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta \quad (2.51)$$

$$W(z) = \phi + i\psi = \frac{q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \frac{q}{2\pi} \ln re^{i\theta} \quad (2.52)$$

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z \quad (2.53)$$

Quando o centro da fonte é localizada em algum ponto ao invés da origem do sistema de coordenadas, o potencial complexo é dado simplesmente por:

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.54)$$

2.6.3.3 VÓRTICE

$$\phi = \frac{k}{2\pi}\theta \quad (2.55)$$

$$\psi = -\frac{k}{2\pi} \ln r \quad (2.56)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{k}{2\pi} \quad (2.57)$$

e a circulação do vórtice é dada por:

$$\Gamma = \oint \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int \frac{1}{r} \frac{k}{2\pi} r d\theta = \frac{k}{2\pi} 2\pi = k \quad (2.58)$$

$$W = \phi + i\psi = \frac{k}{2\pi}\theta - i \frac{k}{2\pi} \ln r \quad (2.59)$$

e multiplicando por i :

$$iW(z) = \frac{k}{2\pi}(i\theta + \ln r) = \frac{k}{2\pi} (\ln re^{i\theta}) \quad (2.60)$$

Então para um vórtice localizado na origem, o potencial complexo é dado por:

$$W(z) = -i \frac{k}{2\pi} \ln z \quad (2.61)$$

Para um vórtice localizado em um ponto z_0 , o potencial complexo é dado por:

$$W(z) = -i \left(\frac{k}{2\pi} \right) \ln(z - z_0) \quad (2.62)$$

2.6.3.4 DIPOLO

Considere uma fonte e um sumidouro, cada um de intensidade q , localizados em pontos A e B do plano complexo. A localização da fonte é $z_0 = -ae^{i\alpha}$ e a localização do sumidouro é $z_0 = ae^{i\alpha}$. Para fonte:

$$W(z)_{fonte} = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{q}{2\pi} \ln(z + ae^{i\alpha}) \quad (2.63)$$

Para o sumidouro:

$$W(z)_{sumidouro} = -\frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) = -\frac{q}{2\pi} \ln(z - ae^{i\alpha}) \quad (2.64)$$

$$W(z) = W(z)_{fonte} + W(z)_{sumidouro} \quad (2.65)$$

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \left[\ln(z + ae^{i\alpha}) - \ln(z - ae^{i\alpha}) \right] \quad (2.66)$$

Considerando agora o caso em que a fonte e o sumidouro estão muito próximos, ou seja, quando a distância "a" é muito pequena, temos que:

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \left[\ln\left(1 + \frac{ae^{i\alpha}}{z}\right) - \ln\left(1 - \frac{ae^{i\alpha}}{z}\right) \right] \quad (2.67)$$

e definindo $\delta = \frac{ae^{i\alpha}}{z}$ resulta em:

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} [\ln(1 + \delta) - \ln(1 - \delta)] = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{(1 + \delta)}{(1 - \delta)} \right] \quad (2.68)$$

Já que δ é pequeno, pode-se desenvolver $\ln(1 + \delta)$ e $\ln(1 - \delta)$ em séries de Maclaurin:

$$\ln(1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\delta^n}{n} + \dots \quad (2.69)$$

com δ em $(-1,1]$ e

$$\ln(1 - \delta) = -\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} - \dots - \frac{\delta^n}{n} - \dots \quad (2.70)$$

com δ em $[-1,1)$

$$\ln \frac{(1 + \delta)}{(1 - \delta)} = 2 \left(\delta + \frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^5}{5} + \dots + \frac{\delta^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad (2.71)$$

com $|\delta| < 1$

$$W(z) = \frac{q}{\pi} \left(\frac{ae^{i\alpha}}{z} + \frac{a^3 e^{3i\alpha}}{3z^3} + \dots \right) \quad (2.72)$$

Para o caso em que $a \rightarrow 0$ e $z \neq 0$ (dipolo):

$$W(z) = \frac{q}{\pi} a \frac{e^{i\alpha}}{z} \quad (2.73)$$

A equação acima é para uma fonte e um sumidouro próximos da origem. Para um dipolo onde a fonte e o sumidouro estão próximos a um ponto qualquer z_0 , o potencial complexo é dado por:

$$W(z) = \frac{qa e^{i\alpha}}{\pi(z - z_0)} \quad (2.74)$$

2.6.4 TEOREMA DE BLASIUS

Esse teorema permite determinar as forças hidrodinâmicas exercidas pelo fluido sobre um corpo bidimensional com seção transversal arbitrária em um escoamento potencial bidimensional, conhecendo-se a função complexa $W = f(z)$.

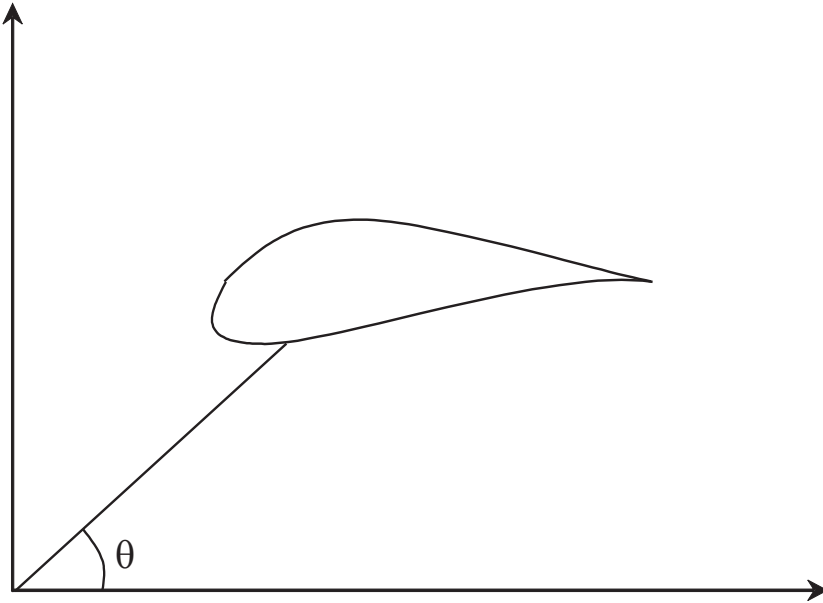


Figura 2.2: Seção transversal arbitrária de um corpo

Temos que:

$$dF_x = -pds \cdot \sin \theta = -pdy \quad (2.75)$$

$$dF_y = pds \cdot \cos \theta = pdx \quad (2.76)$$

E escrevendo a força num domínio complexo, temos:

$$dF = dF_x - idF_y = -pdy - ipdx = -p(dy + idx) = -ipd\bar{z} \quad (2.77)$$

Em escoamento potencial permanente e bidimensional, o campo de pressão na superfície ds pode ser determinado usando-se o teorema de Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C \Leftrightarrow p = C - \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (2.78)$$

Partindo da equação de Euler e considerando o escoamento permanente e irrotacional, obtém-se a equação de Bernoulli e conclui-se que o termo constante C não contribui

para força hidrodinâmica. Então $p = -\frac{1}{2}\rho V^2$ é a parte importante para a dedução a seguir:

$$W = \phi + i\psi \quad (2.79)$$

$$\frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = V^2 \quad (2.80)$$

Logo:

$$p = -\frac{1}{2}\rho \frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{d\bar{z}} \quad (2.81)$$

E a equação de dF pode ser escrita como:

$$dF = \frac{1}{2}i\rho \frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{d\bar{z}} d\bar{z} \quad (2.82)$$

Já que a superfície do corpo arbitrário é uma linha de corrente, então:

$$d\psi = 0 \quad (2.83)$$

$$W = \phi + i\psi \Leftrightarrow dW = d\phi + id\psi = d\phi \quad (2.84)$$

$$\bar{W} = \phi - i\psi \Leftrightarrow d\bar{W} = d\phi - id\psi = d\phi \quad (2.85)$$

$$dW = d\bar{W} \quad (2.86)$$

Assim obtemos:

$$dF_x - idF_y = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (2.87)$$

Integrando ao longo da linha de corrente que é a superfície do corpo:

$$F_x - iF_y = \oint_C i\frac{1}{2}\rho \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (2.88)$$

A equação acima representa o teorema de Blasius.

2.6.5 ESCOAMENTO UNIFORME EM TORNO DE UM CILINDRO SEM CIRCULAÇÃO

Temos que um escoamento em torno de um cilindro pode ser representado por uma superposição de um escoamento uniforme e um dipolo, ou seja:

$$W = V_0z + \frac{m}{2\pi z} = V_0 \left(z + \frac{m}{2\pi V_0 z} \right) \quad (2.89)$$

onde $m = 2qa$ Fazendo $r_0^2 = \frac{m}{2\pi V_0}$ onde r_0 é o raio do cilindro, pode-se escrever a equação anterior na forma:

$$W = V_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) = V_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{r_0^2 e^{-i\theta}}{r} \right) \quad (2.90)$$

$$W = V_0 \left[r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + \frac{r_0^2}{r} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \right] \quad (2.91)$$

$$W(z) = V_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta + i V_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \operatorname{sen} \theta = \phi + \psi i \quad (2.92)$$

Na superfície do cilindro $r = r_0$ e então temos que na superfície:

$$\phi = 2V_0 r_0 \cos \theta \quad (2.93)$$

e

$$\psi = 0 \quad (2.94)$$

A velocidade complexa do escoamento é:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) \quad (2.95)$$

Observe que quando $z \rightarrow \infty$ a velocidade tende para a velocidade do escoamento não perturbado V_0

2.6.5.1 Pontos de estagnação

$$\frac{dW}{dz} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{r_0^2}{z^2} = 0 \quad (2.96)$$

Essa equação é satisfeita nos pontos $(0, r_0)$ e (π, r_0)

2.6.5.2 Velocidade máxima

Em coordenadas polares:

$$\frac{dW}{dz} = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta} \quad (2.97)$$

E então:

$$u_r = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad (2.98)$$

e

$$u_\theta = -V_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} V_0 \right) \text{sen}\theta \quad (2.99)$$

E na superfície do cilindro quando $r = r_0$:

$$u_r = 0 \quad (2.100)$$

e

$$u_\theta = -2V_0 \text{sen}\theta \quad (2.101)$$

Logo a velocidade máxima será quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ e sua magnitude será:

$$u_{\max} = 2V_0 \quad (2.102)$$

2.6.5.3 Distribuição de pressão

Sabendo que a velocidade na superfície do cilindro é dada por:

$$V = 2V_0 \text{sen}\theta \quad (2.103)$$

E aplicando a equação de Bernoulli encontra-se que:

$$C_p(\theta) = 1 - 4\text{sen}^2\theta \quad (2.104)$$

2.6.6 ESCOAMENTO UNIFORME EM TORNO DE UM CILINDRO COM CIRCULAÇÃO

O escoamento em torno de um cilindro com circulação é a superposição de um escoamento uniforme, de um dipolo e de um vórtice, ou seja:

$$W = V_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + i \frac{K}{2\pi} \ln z \quad (2.105)$$

$$W = V_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{r_0^2}{r} e^{-i\theta} \right) + i \frac{K}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad (2.106)$$

$$W = \left[V_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos\theta - \frac{K}{2\pi} \theta \right] + i \left[V_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \text{sen}\theta + \frac{K}{2\pi} \ln r \right] = \phi + i\psi \quad (2.107)$$

Agora iremos calcular as forças hidrodinâmicas para o cilindro com circulação, usando o teorema de Blasius. A velocidade complexa para esse escoamento é:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right) + i \frac{K}{2\pi z} \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = V_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)^2 + 2V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right) i \frac{K}{2\pi z} + \left(\frac{iK}{2\pi z}\right)^2 \quad (2.109)$$

Organizando em potências de z :

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = V_0^2 - 2V_0^2 \frac{r_0^2}{z^2} + V_0^2 \frac{r_0^4}{z^4} + iK \frac{V_0}{\pi z} - i2KV_0 \frac{r_0^2}{2\pi z^3} - \frac{K^2}{4\pi^2 z^2} \quad (2.110)$$

E organizando numa forma tipo uma série de Laurent no domínio complexo expandida em torno da origem:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = V_0^2 + i \frac{KV_0}{\pi} \frac{1}{z} - \left(2V_0^2 r_0^2 + \frac{K^2}{4\pi^2}\right) \frac{1}{z^2} - i \frac{V_0 K r_0^2}{\pi z^3} + \frac{V_0^2 r_0^4}{z^4} \quad (2.111)$$

A eq. (2.111) é uma série de Laurent do tipo:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2.112)$$

Onde:

$$a_0 = V_0^2 \quad (2.113)$$

$$a_1 = \frac{iKV_0}{\pi} \quad (2.114)$$

$$a_2 = - \left(2V_0^2 r_0^2 + \frac{K^2}{4\pi^2}\right) \quad (2.115)$$

$$a_3 = -i \frac{V_0 K r_0^2}{\pi} \quad (2.116)$$

$$a_4 = V_0^2 r_0^4 \quad (2.117)$$

Resolvendo a integral do teorema de Blasius:

$$F_x - iF_y = \oint_C i \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \left[a_0 z + a_1 \ln z - \frac{a_2}{z} - \dots \right]_{z=r_0 e^{i\theta}}^{z=r_0 e^{i(\theta_0+2\pi)}} \quad (2.118)$$

Note que quando os limites são substituídos em qualquer z^n :

$$\left[r_0 e^{i(\theta_0+2\pi)} \right]^n - \left[r_0 e^{i\theta_0} \right]^n = r_0^n e^{i\theta_0 n} (\cos 2\pi n + i \operatorname{sen} 2\pi n - 1) \quad (2.119)$$

Se n é inteiro:

$$\cos 2\pi n = 1 \quad (2.120)$$

$$\operatorname{sen} 2\pi n = 0 \quad (2.121)$$

$$\cos 2\pi n + i \operatorname{sen} 2\pi n - 1 = 0 \quad (2.122)$$

Logo, todos os termos da série de Laurent não contribuirão para a força hidrodinâmica exceto o termo $\frac{a_1}{z}$ que quando integrado gera o termo $\ln z$ que não se anula. Observe que:

$$[\ln z]_{z=r_0 e^{i\theta_0}}^{z=r_0 e^{i(\theta_0+2\pi)}} = i2\pi \quad (2.123)$$

E então não só para esse caso particular como também genericamente, podemos dizer que:

$$\oint f(z) dz = 2\pi a_1 i \quad (2.124)$$

onde $f(z)$ é uma série de Laurent. Para o caso particular do cilindro com circulação:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} a_1 2\pi i = -\pi \rho a_1 \quad (2.125)$$

$$a_1 = \frac{iKV_0}{\pi} \quad (2.126)$$

$$F_x - iF_y = -i\rho KV_0 \quad (2.127)$$

Então:

$$F_x = 0 \quad (2.128)$$

$$F_y = \rho KV_0 \quad (2.129)$$

2.6.7 TRANSFORMAÇÃO CONFORME

A técnica de transformação conforme (mapeamento conforme) pode ser utilizada para se obter soluções de escoamentos potenciais bidimensionais com geometrias bastante complexas [47][48]. Usando essa metodologia de cálculo o escoamento uniforme no plano W é primeiramente transformado em escoamentos em planos intermediários e, então, no escoamento desejado no plano Z . Nesse trabalho, o símbolo Z será usado para designar o plano físico do escoamento desejado e o símbolo Z_n denotará os planos intermediários, onde os sub-índices $n = 1, 2, 3, \dots$ representarão o número dos planos intermediários requeridos nas transformações sucessivas de um problema particular.

2.6.7.1 A TRANSFORMAÇÃO DE KUTTA-JOUKOWSKI

É a transformação mais simples dos mapeamentos que resulta num contorno de aerofólio. Porém os aerofólios resultantes dessa transformação são aerodinamicamente ineficientes

e, portanto, servem apenas como um instrumento didático para entender aspectos gerais.

A equação da transformação é dada por:

$$z = z_1 + \frac{b^2}{z_1} = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) + \frac{b^2}{r}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = x + iy \quad (2.130)$$

Então:

$$x = \left(r + \frac{b^2}{r}\right) \cos \theta \quad (2.131)$$

$$y = \left(r - \frac{b^2}{r}\right) \operatorname{sen} \theta \quad (2.132)$$

2.6.7.2 A TRANSFORMAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA NUMA PLACA PLANA

Usando o mapeamento de Kutta-Joukowski sobre uma circunferência de raio a , esta transforma-se numa placa plana (bidimensional). O raio a tem que ser igual a constante b da transformação. Além do mais, o centro da circunferência tem que estar na origem do plano z_1 . Então obtém-se:

$$x = 2a \cos \theta \quad (2.133)$$

$$y = 0 \quad (2.134)$$

Então a linha transformada no plano z , fica confinada ao eixo x do mesmo e θ pode variar de 0 até π no plano z_1 enquanto um ponto P do plano z varia de $+2a$ até $-2a$. Logo a corda dessa placa plana (linha reta) é igual a $4a$.

2.6.7.3 A TRANSFORMAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM UMA ELIPSE

Usa-se a transformação de Kutta-Joukowski, estando a circunferência centrada na origem do plano z_1 e sendo o valor do raio a maior do que a constante b . Gera-se então uma elipse no plano z , com as partes real e imaginária iguais a:

$$x = \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \cos \theta \quad (2.135)$$

$$y = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \operatorname{sen}\theta \quad (2.136)$$

Pode-se mostrar facilmente que a corda da elipse resultante é:

$$2 \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \quad (2.137)$$

e que a máxima espessura da elipse é dada por:

$$2 \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \quad (2.138)$$

2.6.7.4 A TRANSFORMAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM UM AEROFÓLIO SIMÉTRICO

Nessa transformação de Kutta-Joukowski, o centro da circunferência deve estar ligeiramente deslocado na direção Ox_1 da origem do plano z_1 . Esse pequeno deslocamento (e) é responsável pela espessura do aerofólio resultante. Nesse caso, o raio a da circunferência é igual a:

$$a = b + be \quad (2.139)$$

e demonstra-se que:

$$x = 2b \cos \theta \quad (2.140)$$

$$y = 2be (1 + \cos \theta) \operatorname{sen}\theta \quad (2.141)$$

e que esse aerofólio tem uma corda igual a $4b$ e a máxima espessura ocorre a $1/4$ da corda.

2.6.7.5 A TRANSFORMAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM UM AEROFÓLIO ASSIMÉTRICO

Nessa transformação de Kutta-Joukowski, o centro da circunferência é ligeiramente deslocado tanto na direção Ox_1 (numa distância e) quanto na direção Oy_1 (numa distância h) da origem do plano z_1 . O raio da circunferência vale a e o ângulo β é definido como:

$$\beta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{h}{a}\right) \quad (2.142)$$

Demonstra-se que:

$$x = 2b \cos \theta \quad (2.143)$$

$$y = 2be(1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta + 2b\beta \operatorname{sen}^2 \theta \quad (2.144)$$

e que a corda é igual a $4b$. Mostra-se também que a espessura máxima ocorre a $1/4$ da corda e vale $1,3e$ e que o máximo camber ocorre na metade da corda e vale $\frac{\beta}{2}$. Analisando esses resultados pode-se concluir que o deslocamento vertical do centro da circunferência é responsável pelo máximo camber do aerofólio e que o deslocamento horizontal é responsável pelo valor de máxima espessura do aerofólio.

2.6.7.6 A TRANSFORMAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA NUM ARCO PARABÓLICO

Nessa transformação de Kutta-Joukowski, o centro da circunferência de raio a é ligeiramente deslocado na direção Oy_1 (numa distância h) da origem do plano z_1 . Demonstra-se que o máximo camber ocorre na metade da distância da corda e vale $\frac{\beta}{2}$.

2.6.7.7 ESCOAMENTO UNIFORME EM TORNO DE UM AEROFÓLIO COM ÂNGULO DE ATAQUE E CIRCULAÇÃO

A seguir mostra-se uma aplicação do método de mapeamento conforme baseado em sucessivas transformações desde o escoamento uniforme no plano W até o escoamento em torno de um aerofólio com ângulo de ataque α e circulação Γ .

SEQUÊNCIA DE TRANSFORMAÇÕES:

A primeira transformação é:

$$W(z_1) = V_0 \left(z_1 + \frac{r_0^2}{z_1} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z_1 \quad (2.145)$$

que transforma o escoamento uniforme no plano W num escoamento em torno de um cilindro de raio r_0 com circulação no sentido horário. A segunda transformação é:

$$z_2 = z_1 e^{i\alpha} \quad (2.146)$$

Ela gira a configuração das linhas de corrente no plano z_1 de um ângulo α com o eixo positivo real x_2 (α é o ângulo de ataque). A terceira transformação é:

$$z_3 = z_2 + m e^{i(\pi-\delta)} \quad (2.147)$$

Ela move o centro do círculo de raio r_0 da origem do plano z_2 para um ponto C_3 no plano z_3 . A transformação final é:

$$z = z_3 + \frac{b^2}{z_3} \quad (2.148)$$

Ela transforma o escoamento em torno de um cilindro de raio r_0 no plano z_3 em um escoamento em torno de um aerofólio.

No plano z , as linhas de corrente se aproximam do aerofólio com ângulo de ataque α . O valor da circulação γ do aerofólio pode ser determinado pela condição de Kutta que impõe que a velocidade tem que ser finita no bordo de fuga. A velocidade complexa do escoamento em torno do aerofólio no plano z é obtida por diferenciação usando a regra da cadeia:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz_3} \frac{dz_3}{dz} \quad (2.149)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz_1} \frac{e^{-i\alpha}}{1 - \left(b^2/z_3^2\right)} \quad (2.150)$$

Devemos então encontrar o valor da circulação tal que a velocidade no bordo de fuga seja sempre finita (condição de Kutta):

$$\frac{dW}{dz_1} = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z_1^2}\right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z_1} \quad (2.151)$$

E fazendo $\frac{dW}{dz_1} = 0$ então fica:

$$V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z_1^2}\right) = -i \frac{\Gamma}{2\pi z_1} \quad (2.152)$$

mas z_1 pode ser expresso na forma:

$$z_1 = r_0 e^{-i(\alpha+\beta)} \quad (2.153)$$

e substituindo esse valor na equação 2.152, encontra-se que:

$$\Gamma = 4\pi r_0 V_0 \text{sen}(\alpha + \beta) \quad (2.154)$$

Logo a condição de Kutta não somente evita velocidades infinitas no bordo de fuga, mas também é importante para calcular a circulação em torno do aerofólio, ou seja, a condição de Kutta impõe que existe apenas uma solução que satisfaça a equação de Laplace, e, conseqüentemente, uma única circulação possível para esse problema.

2.6.7.8 SUSTENTAÇÃO NO AEROFÓLIO DE JOUKOWSKI: APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BLASIUS

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz_3} \frac{dz_3}{dz} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz_1} &= V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z_1^2}\right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z_1} = \\ &= V_0 - V_0 r_0^2 e^{2i\alpha} \left[z_3 - m e^{i(\pi-\delta)}\right]^{-2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} e^{i\alpha} \left[z_3 - m e^{i(\pi-\delta)}\right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.156)$$

desde que:

$$z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = \left[z_3 - m e^{i(\pi-\delta)}\right] e^{-i\alpha} \quad (2.157)$$

Os dois últimos termos do lado direito da equação (2.156) podem ser expandidos em séries binomiais e os resultados são organizados em potências crescentes de $\frac{1}{z_3}$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz_1} &= V_0 + \frac{1}{z_3} \frac{i\Gamma}{2\pi} e^{i\alpha} + \frac{1}{z_3^2} \left[\frac{i\Gamma m}{2\pi} e^{i(\pi+\alpha-\delta)} - V_0 r_0^2 e^{2i\alpha} \right] + \\ &+ \frac{1}{z_3^3} \left[i \frac{\Gamma m^2}{2\pi} e^{i(2\pi+\alpha-2\delta)} - 2V_0 r_0^2 m e^{i(\pi+\alpha-\delta)} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.158)$$

E as outras derivadas são:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = e^{-i\alpha} \quad (2.159)$$

$$\frac{dz_2}{dz_3} = 1 \quad (2.160)$$

$$\frac{dz_3}{dz} = \left(1 - \frac{b^2}{z_3^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{b^2}{z_3^2} + \frac{b^4}{z_3^4} + \dots \quad (2.161)$$

Substituindo os valores dessas derivadas na equação (2.155) temos que:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 e^{-i\alpha} + \frac{1}{z_3} \frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{1}{z_3^2} \left[V_0 b^2 e^{-i\alpha} - V_0 \Gamma_0^2 e^{i\alpha} + \frac{i\Gamma m}{2\pi} e^{i(\pi-\delta)} \right] \quad (2.162)$$

$$z_3 = z - \frac{b^2}{z} - \frac{b^4}{z^3} - \dots \quad (2.163)$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{z} + \frac{b^2}{z^2} + \dots \quad (2.164)$$

$$\frac{1}{z_3^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2b^2}{z^4} + \dots \quad (2.165)$$

Substituindo as duas séries (2.164) e (2.165) na equação (2.162) temos que:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 e^{-i\alpha} + \frac{1}{z} \frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{1}{z^2} \left[V_0 b^2 e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma m}{2\pi} e^{i(\pi-\delta)} - V_0 r_0^2 e^{i\alpha} \right] + \dots \quad (2.166)$$

Então:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 &= V_0 e^{-2i\alpha} + \frac{1}{z} \frac{i\Gamma V_0}{\pi} e^{-i\alpha} + \frac{1}{z^2} \left[-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2V_0^2 b e^{-2i\alpha} + \frac{iV_0 \Gamma m}{\pi} e^{i(\pi-\alpha-\delta)} - 2V_0^2 r_0^2 \right] + \dots = \\ &= A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.167)$$

onde:

$$A_0 = V_0 e^{-2i\alpha} \quad (2.168)$$

$$A_1 = \frac{iV_0\Gamma}{\pi} e^{-i\alpha} \quad (2.169)$$

Da conclusão anterior sobre o teorema de Blasius:

$$F_x - iF_y = -\pi\rho a_1 \quad (2.170)$$

$$F_x - iF_y = -i\rho\Gamma V_0 \cos\alpha + \rho\Gamma V_0 \operatorname{sen}\alpha \quad (2.171)$$

Então:

$$F_x = -\rho\Gamma V_0 \operatorname{sen}\alpha \quad (2.172)$$

$$F_y = \rho\Gamma V_0 \cos\alpha \quad (2.173)$$

É importante ressaltar que a direção x faz um ângulo α com a direção do escoamento não perturbado, logo a força de arrasto (que é medida na direção do escoamento não perturbado) é igual a zero, e é consistente com a hipótese de escoamento potencial.

$$F_L = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho\Gamma V_0 \quad (2.174)$$

que é uma força por unidade de comprimento. Substituindo o valor da circulação:

$$F_L = \rho 4\pi\Gamma_0 V_0 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) V_0 \quad (2.175)$$

$$F_L = C_L c \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad (2.176)$$

$$C_L = 2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad (2.177)$$

onde $(\alpha + \beta)$ é o ângulo de ataque medido a partir da posição de sustentação nula (θ). Para pequenos ângulos, temos que $\operatorname{sen}(\theta) = \theta$ e então:

$$C_L = 2\pi\theta \quad (2.178)$$

e

$$\frac{d\theta}{dC_L} = 2\pi \quad (2.179)$$

que é um valor muito encontrado nas curvas de coeficiente de sustentação versus o ângulo de ataque em aerofólios. Pode-se demonstrar que esse valor é exato para o caso de uma placa plana (como a transformação de uma circunferência em uma placa plana mostrada anteriormente) e exato também para o caso de aerofólios delgados (de acordo com a teoria dos aerofólios delgados).

2.6.7.9 RESULTADOS NUMÉRICOS DA TRANSFORMAÇÃO DE KUTTA-JOUKOWISK

Foi elaborado um código computacional que faz a transformação de Kutta-Joukowski. Podemos colocar o centro da circunferência a ser transformada em vários pontos do plano. Como vimos anteriormente, para cada ponto do plano temos uma transformação diferente. Os gráficos abaixo mostram esses resultados:

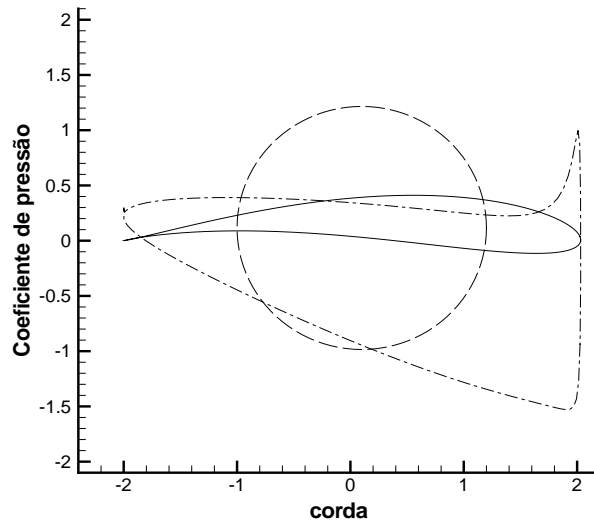


Figura 2.3: Escoamento em torno do aerofólio de Joukowski assimétrico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do aerofólio após a transformação de Joukowski e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio.

A figura (2.3) mostra uma transformação de Kutta-Joukowski para o caso em que o centro da circunferência está deslocado da origem tanto na direção y como na direção x . Obtém-se então um aerofólio assimétrico (aerofólio de Kutta-Joukowski). A figura mostra também a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do perfil para um ângulo de ataque igual a 4 graus.

A figura (2.4) mostra uma transformação de Kutta-Joukowski para o caso em que o centro da circunferência está deslocado da origem apenas na direção x . Obtém-se então um aerofólio simétrico (aerofólio de Kutta-Joukowski). A figura mostra também a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do perfil para um ângulo de ataque igual a 4 graus.

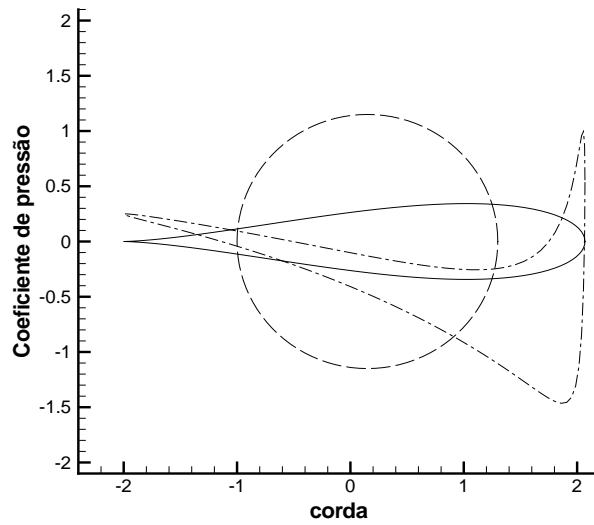


Figura 2.4: Escoamento em torno do aerofólio de Joukowski simétrico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do aerofólio após a transformação de Joukowski e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio.

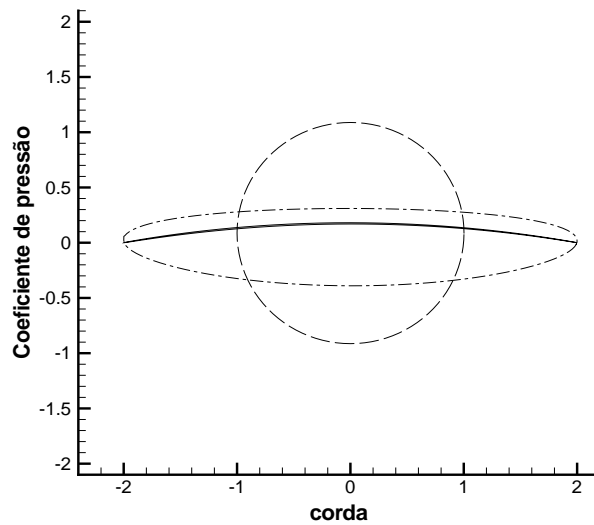


Figura 2.5: Escoamento em torno de um arco parabólico. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a geometria do arco após a transformação de Joukowski e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície do arco.

A figura (2.5) mostra uma transformação de Kutta-Joukowski para o caso em que o centro da circunferência está deslocado da origem apenas na direção y . Obtém-se então um arco parabólico. A figura mostra também a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do corpo para um ângulo de ataque igual a 0 graus.

A figura (2.6) mostra uma transformação de Kutta-Joukowski para o caso em que o

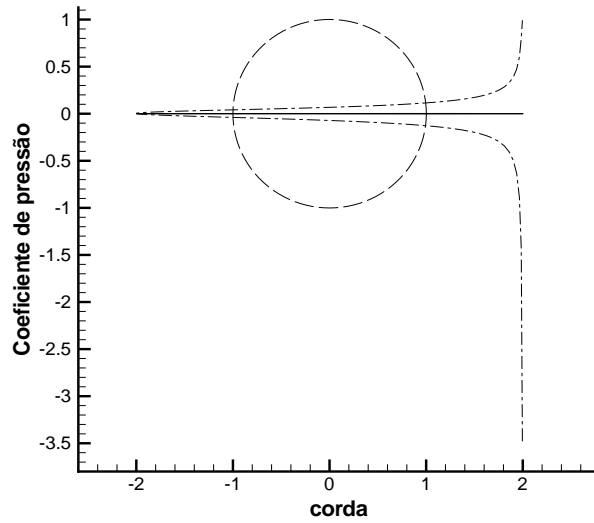


Figura 2.6: Escoamento em torno de uma placa plana. A linha tracejada representa o cilindro, a linha contínua representa a placa plana após a transformação de Joukowski e a linha tracejada com pontos mostra a distribuição do coeficiente de pressão na superfície da placa plana.

centro da circunferência está na origem do plano. Obtém-se então uma placa plana. A figura mostra também a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do corpo para um ângulo de ataque igual a 2 graus.

2.7 TEORIA DA LINHA DE SUSTENTAÇÃO DE PRANDTL

2.7.1 LEI DE BIOT- SAVART

Pode-se mostrar que a velocidade induzida em um ponto P por um filamento de vórtice de intensidade Γ e comprimento elementar igual a dl é dada por [8]:

$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{4\pi r^3} \quad (2.180)$$

Com referência a figura (2.7), temos que a magnitude da velocidade induzida é:

$$dV = \frac{\Gamma \text{sen}\theta dl}{4\pi r^2} \quad (2.181)$$

Integrando a equação acima de A até B, temos que a velocidade induzida em C é igual

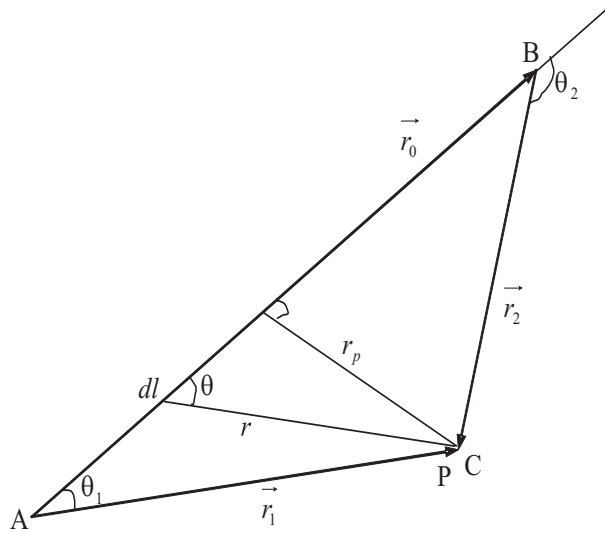


Figura 2.7: Filamento de vórtice \overline{AB}

a:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}\theta d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_p} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (2.182)$$

Esse resultado representa a velocidade induzida num ponto por um filamento de vórtice retilíneo e finito. Para o caso em que o filamento retilíneo de vórtice é infinito, temos que:

$$\cos \theta_1 = 1 \quad (2.183)$$

$$\cos \theta_2 = -1 \quad (2.184)$$

Substituindo os resultados acima na equação anterior, resulta que:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r_p} \quad (2.185)$$

ou seja, refere-se ao caso de vórtices bidimensionais. Para o caso particular de um vórtice semi-infinito, a velocidade induzida num ponto C qualquer de um plano que contém A e é perpendicular ao filamento retilíneo de vórtice (ou seja quando \overline{AC} forma um ângulo $\theta_1 = 90^\circ$ com o filamento retilíneo de vórtice) é dada por:

$$\cos \theta_1 = 0 \quad (2.186)$$

$$\cos \theta_2 = -1 \quad (2.187)$$

então:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r_p} \quad (2.188)$$

Esse último resultado será muito útil no desenvolvimento da Teoria da Linha de Sustentação.

2.7.2 TEOREMA DE HELMHOLTZ

Para o caso de um escoamento invíscido e incompressível demonstra-se que [8]:

- A intensidade de um filamento de vórtice é constante ao longo do seu comprimento.
- Um filamento de vórtice não tem extremidades. Ou ele é infinito, ou ele forma uma curva fechada.

2.7.3 SUPERPOSIÇÃO DE LINHAS DE VÓRTICES EM FORMA DE FERRADURA E UM ESCOAMENTO UNIFORME: A ASA FINITA.

A idéia de superpor vórtices em forma de ferradura com um escoamento uniforme foi inicialmente concebida por Lanchester e depois desenvolvida por Prandtl. A primeira proposta foi de superpor um escoamento uniforme a somente um vórtice em forma de ferradura. Mas essa idéia falhava pois o escoamento resultante apresentava velocidades para baixo (downwash) infinitas nas extremidades do vórtice ligado (nas extremidades da asa de acordo com o modelo sugerido). A figura (2.8) mostra a nomenclatura utilizada para as linhas de vórtices em forma de ferradura:

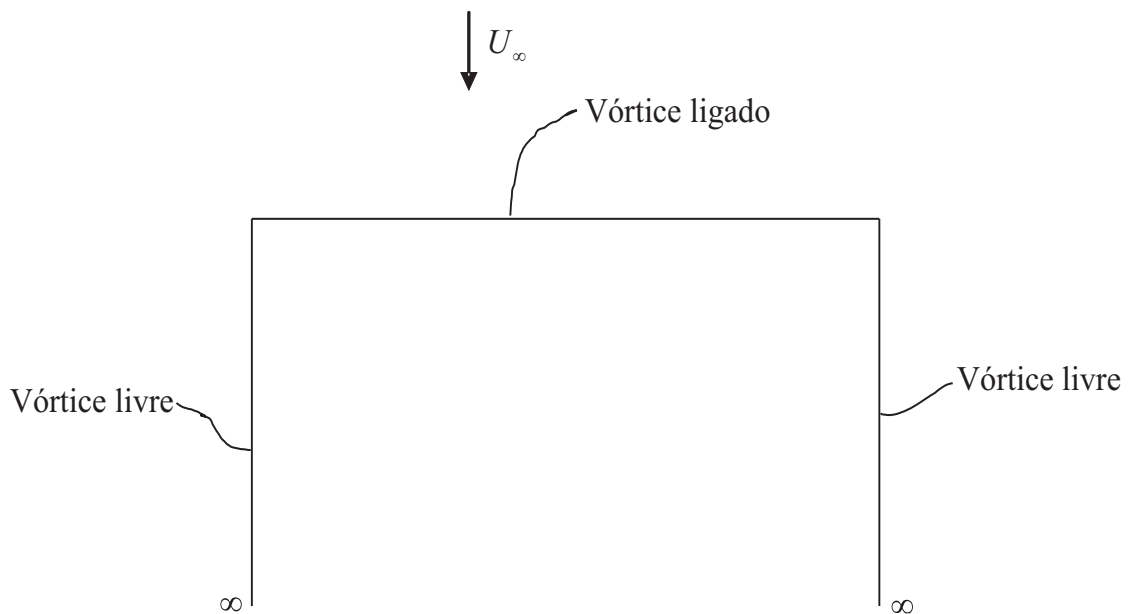


Figura 2.8: Vórtice em forma de ferradura

Então, por meio de experimentos, Prandtl percebeu que a emissão de vórtices numa

asa finita acontecia não somente nas extremidades da asa, mas em todo o bordo de fuga. Isso acontece porque, para uma asa com sustentação positiva, o escoamento no intradorso da asa tende a ir para as extremidades e o escoamento no extradorso tende a ir para o meio da asa e então eles se encontram no bordo de fuga com diferentes direções e formam vórtices (esteira turbilhonar) ao longo de todo bordo de fuga. A figura (2.9) ilustra isso.

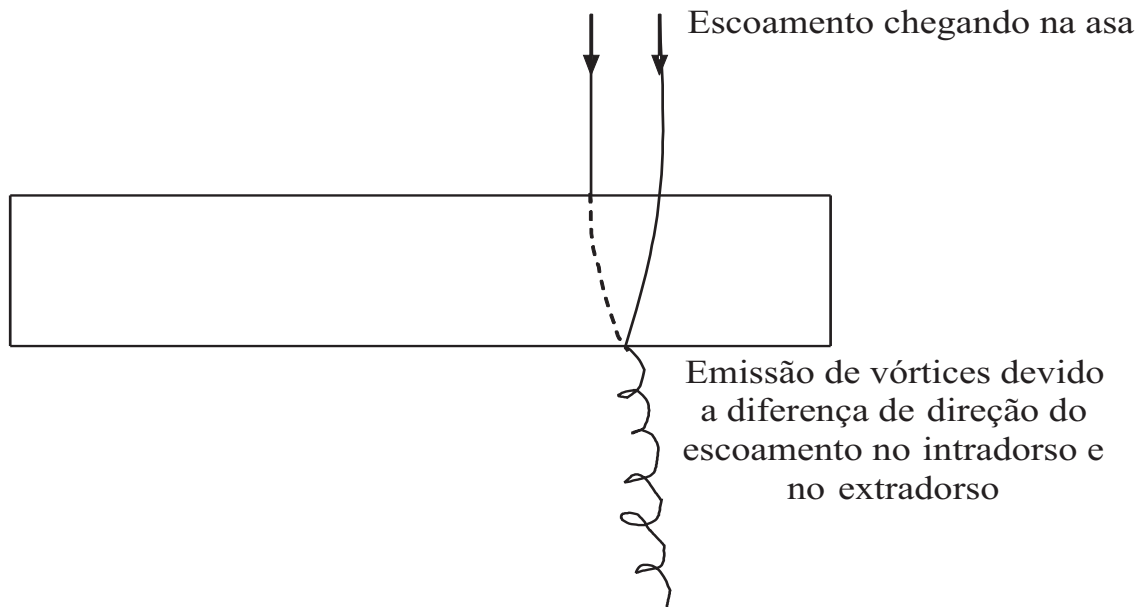


Figura 2.9: Emissão de vórtice

Então Prandtl elaborou uma teoria que utilizava a superposição de infinitas linhas de vórtices em forma de ferradura (com intensidades infinitesimais) com um escoamento uniforme. Esse modelo apresentou resultados satisfatórios (porém com algumas limitações) para se estudar o escoamento em torno de uma asa finita. A figura (2.10) mostra a superposição dessas linhas de vórtices em forma de ferradura com um escoamento uniforme.

Esse modelo sugere que a circulação em um determinado ponto da envergadura (ponto em y) é a soma das intensidades das linhas de vórtices ligado naquele ponto. Sugere ainda que a intensidade do vórtice livre num determinado ponto em y é dado pela variação da intensidade do vórtice ligado naquele ponto, ou seja:

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy} \right) dy \quad (2.189)$$

Da lei de Biot-Savat podemos perceber que a velocidade do escoamento no vórtice ligado é a soma vetorial da velocidade do escoamento não perturbado com uma velocidade induzida para baixo pelos vórtices livres no escoamento (w)

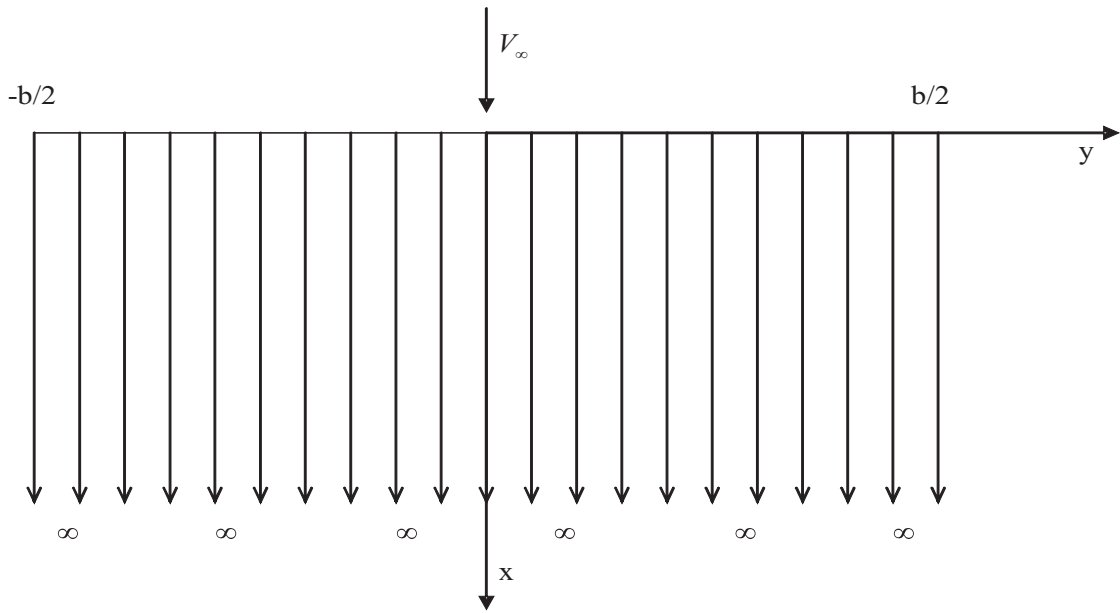


Figura 2.10: Superposição das linhas de vórtices

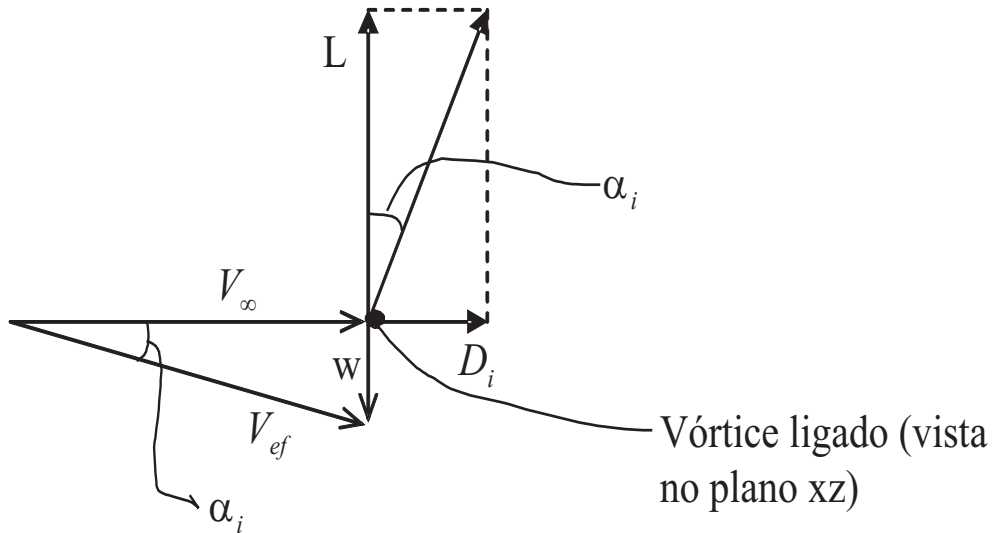


Figura 2.11: Velocidade induzida para baixo (w)

Então temos que o ângulo de ataque induzido é igual a:

$$\alpha_i(y) = \tan^{-1} \frac{w}{V_\infty} \quad (2.190)$$

E como a força de sustentação é por definição a força na direção perpendicular ao escoamento não perturbado, então ela vale:

$$L = \rho V_{ef} \Gamma \cos \alpha_i = \rho V_\infty \Gamma \quad (2.191)$$

A força de arrasto induzido, que é na direção do escoamento não perturbado, vale:

$$D_i = -\rho V_{ef} \Gamma \sin \alpha_i = -\rho w \Gamma \quad (2.192)$$

E, como α_i é muito pequeno, pois $|w| \ll V_\infty$, então:

$$\alpha_i(y) = \frac{w}{V_\infty} \quad (2.193)$$

$$D_i = -L\alpha_i \quad (2.194)$$

Da lei de Biot-Savat, a velocidade induzida (downwash) por um filamento de vórtice livre na posição $(0, y)$ num ponto de posição $(0, y_0)$ é dada por:

$$w_{y_0y} = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{1}{y_0 - y} \quad (2.195)$$

A velocidade induzida por todos os filamentos de vórtices no ponto $(0, y_0)$ é dada por:

$$w_{y_0y} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.196)$$

O sinal negativo da equação acima é devido ao fato de que a velocidade induzida está na mesma direção de z porém em sentido oposto (para baixo). E, finalmente, o ângulo de ataque induzido na posição $(0, y_0)$ é dado por:

$$\alpha_i(y_0) = \frac{w_{y_0y}}{V_\infty} = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.197)$$

A existência do ângulo de ataque induzido faz com que o escoamento encontre as seções da asa com um ângulo efetivo menor do que o ângulo de ataque local (ângulo entre a velocidade do escoamento não perturbado e a corda local da seção da asa). Esse ângulo de encontro (ângulo efetivo), é o ângulo entre a velocidade efetiva e a corda local da seção da asa. A figura (2.12) mostra exatamente isso.

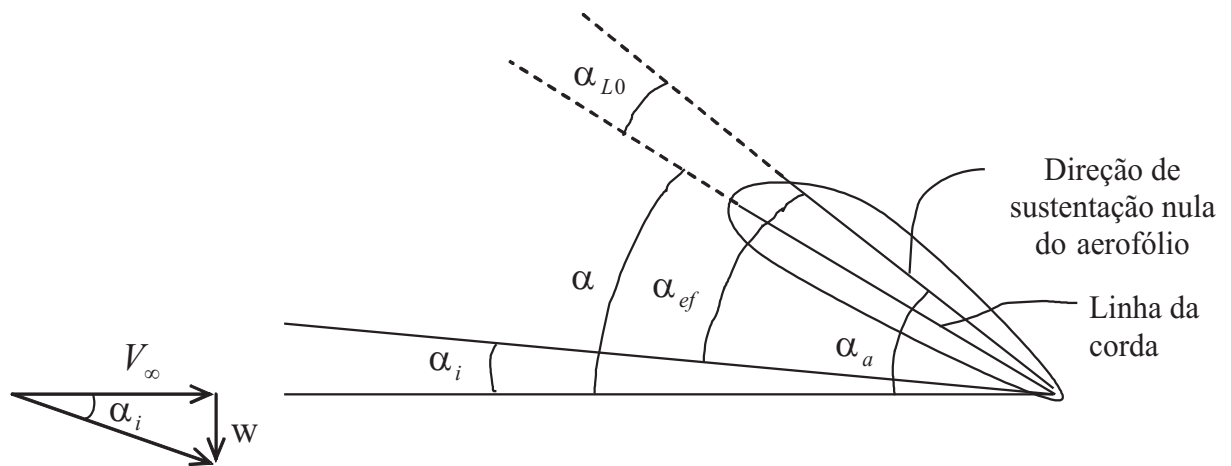


Figura 2.12: Ângulo de ataque efetivo

Então o ângulo que se forma entre o escoamento que chega na asa e a corda da asa é o ângulo de ataque efetivo, que é um pouco menor do que o ângulo de ataque da

asa (ângulo entre a corda da asa e o escoamento não perturbado). Essa diferença é exatamente o ângulo de ataque induzido:

$$\alpha_{ef} = \alpha_a + \alpha_i \quad (2.198)$$

O ângulo de ataque induzido, em geral, é negativo e varia ao longo da envergadura da asa. O ângulo de ataque efetivo α_{ef} é o ângulo em que a seção da asa encontra o escoamento e em geral varia ao longo da envergadura da asa. Localmente (em cada seção da asa) podemos considerar o escoamento bidimensional e com um ângulo de ataque igual ao ângulo de ataque efetivo α_{ef} . Fazendo essa consideração temos, de acordo com a teoria de aerofólios, que:

$$cl = m_0 \alpha_{ef} \quad (2.199)$$

onde m_0 é a tangente da curva do gráfico de coeficiente de sustentação versus o ângulo de ataque para um aerofólio (bidimensional). Esse valor vale 2π por radiano para aerofólios delgados (previsto pela teoria de aerofólios delgados) e para aerofólios espessos esse valor varia mas é sempre próximo de 2π por radiano. A sustentação gerada por essa seção da asa vale:

$$L = \rho V_\infty \Gamma = m_0 \alpha_{ef} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c \quad (2.200)$$

e então:

$$\alpha_{ef} = \frac{2\Gamma}{m_0 V_\infty c} \quad (2.201)$$

Substituindo os valores encontrados em 2.198, resulta em:

$$\left(\frac{2\Gamma}{m_0 V_\infty c} \right)_{y_0} = \alpha_a(y_0) - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy \quad (2.202)$$

A única incógnita da equação integro-diferencial acima é a circulação $\Gamma(y)$ e sua derivada ao longo da envergadura. As outras variáveis da equação representam a geometria da asa e as propriedades bidimensionais das seções da asa (aerofólios), e já são conhecidas.

Existem algumas soluções particulares simples dessa equação acima. Uma dessas soluções é o caso de uma distribuição elíptica de circulação ao longo da envergadura. Mas iremos nesse trabalho mostrar um meio de determinar a solução dessa equação para um caso genérico de distribuição de circulação ao longo da envergadura, ou seja, para o caso de uma geometria de asa arbitrária (com algumas limitações como veremos mais adiante). Essa solução foi proposta pelo inglês Glauert [16] e se mostrou bastante útil na solução de problemas da época.

2.7.4 A DISTRIBUIÇÃO ARBITRÁRIA DE CIRCULAÇÃO AO LONGO DA ENVERGADURA

Glauert [16] propôs uma distribuição de circulação ao longo da envergadura expressa por uma série de Fourier. Uma correta representação de uma série de Fourier para uma distribuição de circulação arbitrária, que inclui todas as variáveis significativas e que é dimensionalmente coerente, é representada por:

$$\Gamma = \frac{1}{2} m_{0s} c_s V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (2.203)$$

onde o índice s representa os valores no meio da asa (raiz da asa) e os coeficientes A_n são as incógnitas a serem determinadas, sabendo-se a geometria da asa e as propriedades das seções da asa (aerofólios). Fazendo uma mudança de variável $y = \frac{b}{2} \cos \theta$ e substituindo o valor da circulação arbitrária na equação 2.202 temos que:

$$\alpha_a(\theta_0) = \frac{(m_0 c)_s}{(m_0 c)_{\theta_0}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_0 + \frac{m_{0s} c_s}{4\pi b} \int_0^\pi \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad (2.204)$$

Na equação acima θ_0 refere-se a uma seção específica da asa. Depois de realizada a diferenciação e a integração, e retirando os índices 0 em θ a equação acima reduz-se a:

$$\alpha_a(\theta) = \frac{m_{0s} c_s}{m_0 c} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \frac{m_{0s} c_s}{4b} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (2.205)$$

O termo do lado esquerdo da equação acima é o ângulo de ataque absoluto num determinado ponto da envergadura, o primeiro termo do lado direito da equação é o ângulo de ataque efetivo no mesmo ponto da envergadura (θ) e o segundo termo do lado direito da equação é o ângulo de ataque induzido nesse ponto da envergadura. Essa equação pode ser escrita para N locais da envergadura da asa e, aproximando as séries acima para N termos, podemos então resolver um sistema de N equações e N incógnitas e determinarmos os N coeficientes A_n . Sabendo-se os valores dos coeficientes A_n , determina-se a circulação nos N pontos da envergadura. O coeficiente de sustentação local e o coeficiente de arrasto induzido local são encontrados da seguinte maneira:

$$cl = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{q_\infty c} = \frac{m_{0s} c_s}{c} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \quad (2.206)$$

$$cd_i = -cl\alpha_i = \frac{m_{0s}^2 c_s^2}{4bc} \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \left(\sum_{k=1}^N k A_k \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \right) \quad (2.207)$$

E o coeficiente de sustentação global da asa é dado por:

$$CL = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{cl q_\infty c dy}{q_\infty S} = \frac{m_{0s} c_s}{S} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \cdot \frac{b}{2} \sin \theta d\theta \quad (2.208)$$

Essa integração é feita passando a integral para dentro da série e resulta que:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq k \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } n = k \end{cases} \quad (2.209)$$

e como $k = 1$ então todas as integrais, com exceção daquela em que $n = 1$, vão ser iguais a zero. Desta forma, o coeficiente de sustentação global da asa é dado por:

$$CL = \frac{m_{0s} c_s \pi b}{4S} A_1 \quad (2.210)$$

Então, como podemos ver, o coeficiente de sustentação global da asa depende somente do primeiro coeficiente da série de Fourier. O coeficiente de arrasto induzido global da asa é dado por:

$$CD_i = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{cd_i q_\infty c}{q_\infty S} dy = \frac{m_{0s}^2 c_s^2}{8S} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N k A_n A_k \sin n\theta \sin k\theta d\theta \quad (2.211)$$

E, de onde obtém-se que:

$$CD_i = \frac{m_{0s}^2 c_s^2 \pi}{16S} \sum_{n=1}^N n A_n^2 \quad (2.212)$$

3 ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são descritos os ensaios experimentais realizados no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade de Brasília. Os resultados experimentais são utilizados para validar os métodos numéricos implementados.

3.1 DESCRIÇÃO DOS APARATOS EXPERIMENTAIS

3.1.1 TÚNEL DE VENTO

Os testes foram realizados utilizando-se um túnel de vento da marca Plint-Partners, número de série TE44/5192, com seção de teste de 457mm X 457mm. As características básicas do túnel são:

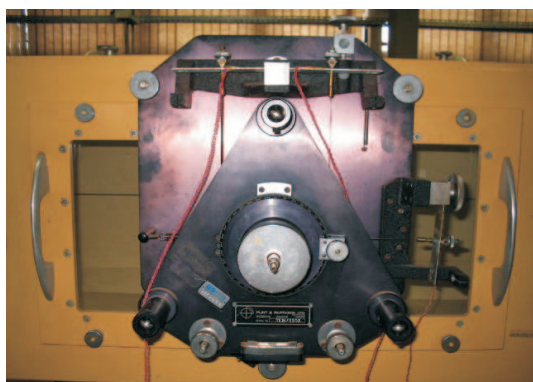
- Velocidade máxima: 22,5 m/s
- Espessura máxima da camada limite: 40mm

O ventilador do túnel de vento é do tipo centrífugo, marca Alldays Peacock, número de série 2318 e com rotação nominal de 1170 rpm. O motor do ventilador é do tipo assíncrono, marca Brook Crompton Parkinson, número de série B421025, trifásico, 220 VCA, 60 Hz. A rotação nominal é de 1750 rpm e a potência é de 22 kW. A variação da velocidade do ar na seção de teste é feita por meio de um inversor de frequência da marca Siemens, número de série XAG285MDO56F, que trabalha com uma faixa de frequência de 10 Hz a 38 Hz. A figura (3.1) abaixo mostra o túnel de vento utilizado nos experimentos:



Figura 3.1: Vista em perspectiva do túnel de vento utilizado para a execução dos experimentos do projeto.

Para a medição das forças foi utilizada uma balança com capacidade para medir até duas componentes ortogonais de força, marca Plint-Partners, número de série TE81/5202 e equipada com um vibrador alimentado com 12 VCC. As componentes da força resultante (arrasto e sustentação) e o momento de arfagem são medidos por meio das deformações das três células de carga da balança. Em cada célula de carga foi colocado um extensômetro com o intuito de facilitar as medições e futuramente automatizar esse processo. Depois da montagem, foi levantada a curva de calibração de cada extensômetro. As deformações da célula de carga são medidas por meio de um medidor de micro-deformações de marca Vishay, modelo 1013 e respectivo indicador de saída digital de mesmo modelo. A célula de carga foi devidamente calibrada por meio da aplicação de pesos conhecidos. As figuras (3.2(a)) e (3.2(b)) mostram a balança do túnel de vento e o inversor de frequência que controla a rotação do motor do túnel:



(a)



(b)

Figura 3.2: (a) Vista frontal da balança com as células de carga, onde a célula horizontal direita representa o canal 1, a célula horizontal esquerda representa o canal 2 e a célula vertical representa o canal 3 para medição do arrasto; (b) Inversor de frequência que controla a rotação do motor do túnel de vento.

A velocidade do ar é medida com um tubo de Pitot de formato universal. A diferença entre a pressão total e a pressão estática é medida com um manômetro digital de marca Validyne modelo PS309, número de série 99085 e fundo de escala de 14 cmH₂O. O manômetro digital também foi utilizado para as medidas de coeficiente de pressão. Utilizou-se um manômetro inclinado, da marca Airflow Developments, fundo de escala de 75 mmH₂O e resolução de 0,5 mmH₂O, como referência para saber qual a velocidade do ar na seção de teste (medição da diferença de pressão de referência RPD).



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) Equipamento Vishay que mede as deformações nas células de carga, juntamente com o eliminador de pilhas; (b) Equipamento Valydine utilizado para medir pressão estática e dinâmica.

3.1.2 BANCADA DE VIZUALIZAÇÃO

Para a realização dos experimentos com visualização de escoamento foi utilizada a bancada visualização da marca Armfield disponível no Laboratório de Mecânica dos Fluidos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

Na circulação do fluido de trabalho, que no caso específico é água, utiliza-se uma bomba presente na bancada de marca James Beresford & Son Ltd., modelo PV 52, número de série 4172, trifásico, 220 VCA e frequência máxima de 60 Hz. A rotação nominal é 4300 rpm obtendo uma potência máxima de $\frac{1}{4}$ kW ou $\frac{34}{100}$ Cv.

O controle da velocidade do escoamento sobre o canal é feito por meio de uma válvula do tipo gaveta, podendo assim controlar parâmetros físicos importantes, como os números de Reynolds e de Froude.

A bancada possui dois reservatórios. Num desses reservatórios escoo o fluido ejetado pela bomba, que passa através de inúmeras esferas posicionadas de maneira organizada proporcionando um escoamento uniformizado fornecido ao canal plano. Desta maneira,

a visualização é feita com baixa intensidade de turbulência e baixa variação da superfície livre do fluido no canal.

Anteriormente, utilizava-se o método de eletrólise da água para realizar os ensaios de visualização (bolha de hidrogênio). A diferença de potencial entre o fio de pequeno diâmetro e o fluido na presença de sal de Sulfato de Sódio Anidro ocasionava a liberação de bolhas de hidrogênio. As bolhas formadas eram convectadas pelo escoamento permitindo a visualização do escoamento. O aparecimento de bolhas de hidrogênio acontecia em uma região limitada do fio, e diminuía drasticamente a área de trabalho. Então foi feita uma modificação na metodologia de visualização.

No projeto de graduação do engenheiro Rafael Paulino foi realizada uma adaptação utilizando um material à base de borracha (refugo de pneu) conhecido como “*plio-lite*” para ser convectado junto com o escoamento. Esse polímero com granulometria fina é misturado com detergente de maneira homogênea para evitar a aglutinação das partículas, podendo assim conseguir uma excelente visualização do escoamento sobre o corpo estudado. A Figura abaixo (3.4) mostra a bancada de visualização de escoamento:



Figura 3.4: Vista lateral da bancada de visualização de escoamento para a execução dos experimentos do projeto com as geometrias aerodinâmicas.

A bancada em questão foi utilizada apenas para visualizações das esteiras de vórtices de aerofólios em regime transiente. Os movimentos estudados foram de oscilação vertical e de oscilação angular e ajudaram a compreender o fenômeno de modo qualitativo. Uma avaliação quantitativa não pôde ser efetuada devido à falta de um mecanismo que imponha o movimento oscilatório desejado ao aerofólio estudado.

3.2 CALIBRAÇÃO DO TÚNEL DE VENTO

Realizou-se um levantamento da pressão dinâmica em função da diferença de pressão de referência (RPD) em vários pontos da seção de teste do túnel de vento. Os valores foram medidos com as seguintes condições ambientais do laboratório: $T = 25,2^{\circ}C$ e $P_{atmosferico} = 675mmHg$. A RPD é a diferença de pressão medida entre a entrada do bocal convergente e a seção de teste. Fixando a RPD, a velocidade do ar na seção de teste se mantém constante. Com esses dados, levantou-se o perfil de velocidade em um plano vertical que corta a seção de teste ao meio e num plano horizontal que também corta a seção de teste ao meio, para diferentes RPD. Alguns desses perfis são mostrados abaixo:

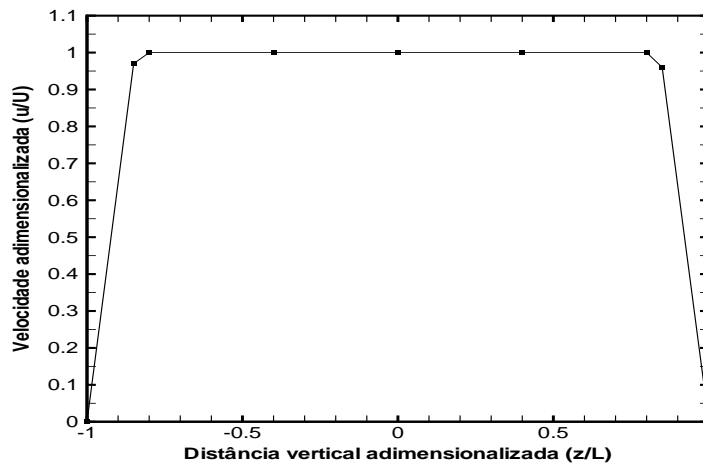


Figura 3.5: Perfil de velocidade no plano vertical para RPD=4mm

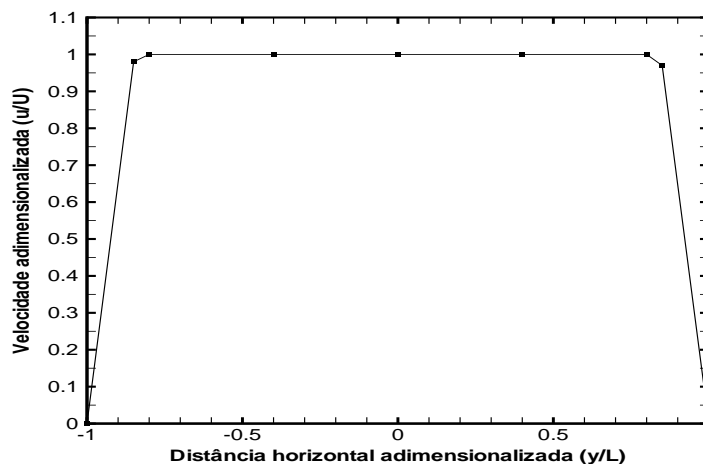


Figura 3.6: Perfil de velocidade no plano horizontal para RPD=4mm

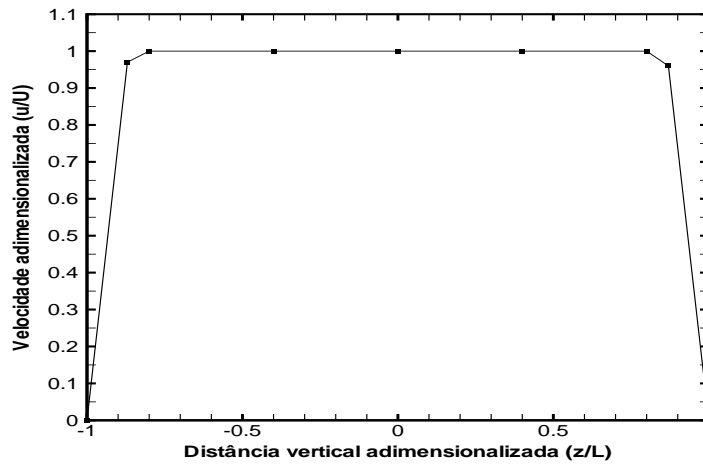


Figura 3.7: Perfil de velocidade no plano vertical para RPD=24mm

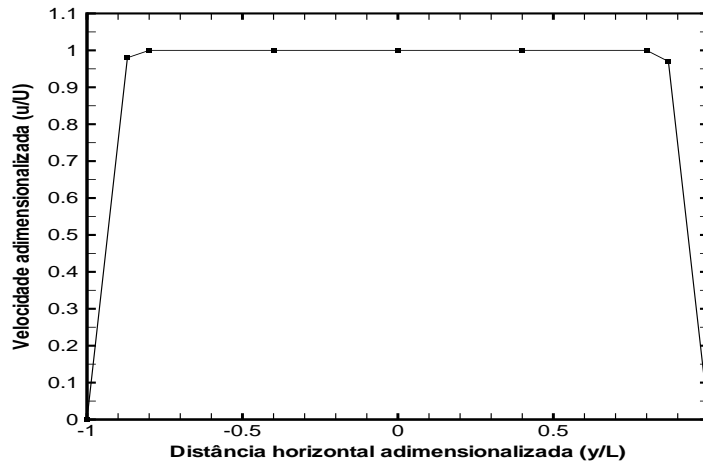


Figura 3.8: Perfil de velocidade no plano horizontal para RPD=24mm

Levantou-se uma curva que indica a variação da pressão dinâmica na linha de centro do túnel de vento em função da variação da diferença de pressão de referência (RPD):

A equação dessa curva é:

$$pressaodinamica = 9,9 \cdot RPD \quad (3.1)$$

Então com essa curva podemos determinar o valor da pressão dinâmica, simplesmente fazendo a leitura da RPD.

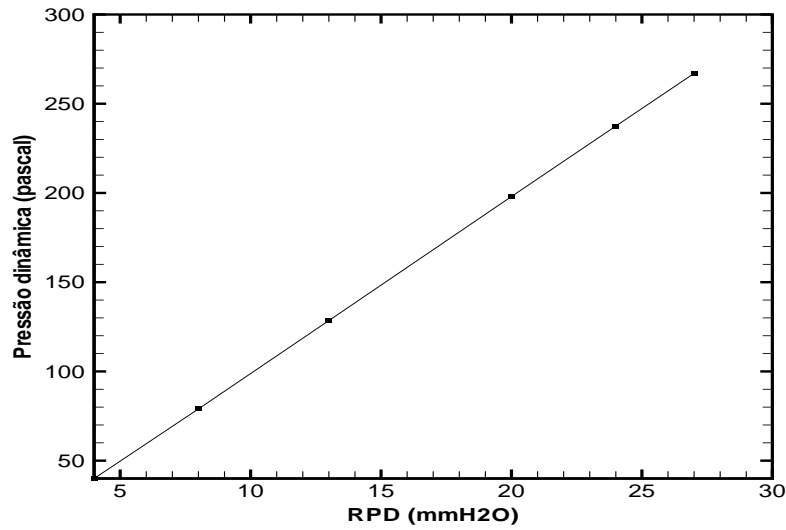


Figura 3.9: RPD versus pressão dinâmica

3.3 CALIBRAÇÃO DA BALANÇA DO TÚNEL DE VENTO

Após o levantamento do perfil de velocidade do túnel e de encontrar a relação entre RPD e pressão dinâmica, obteve-se as curvas de calibração das células de carga para cada canal da balança do túnel. Para a calibração utilizou-se vários blocos de 300 gramas cada, onde se aumentou progressivamente o pesos acoplados à célula e mediu-se sua respectiva microdeformação no aparelho Vishay. O gage factor de cada extensômetro utilizado vale 2,11 e a montagem dos extensômetros na célula de carga foi do tipo 1/4 de ponte. Assim foi possível obter a curva de força aplicada em função da microdeformação. Sabendo que as deformações sofridas pela célula de carga variam linearmente com a força aplicada, foi utilizada uma interpolação linear dos dados fornecidos das deformações médias, pois foi considerado o erro de histerese presente no processo da tomada dos dados. Essas curvas possibilitarão medir as forças de sustentação e de arrasto e o momento em $\frac{1}{4}$ da corda para os corpos estudados. Os resultados da calibração são mostrados nas Figuras (3.10) a (3.12):

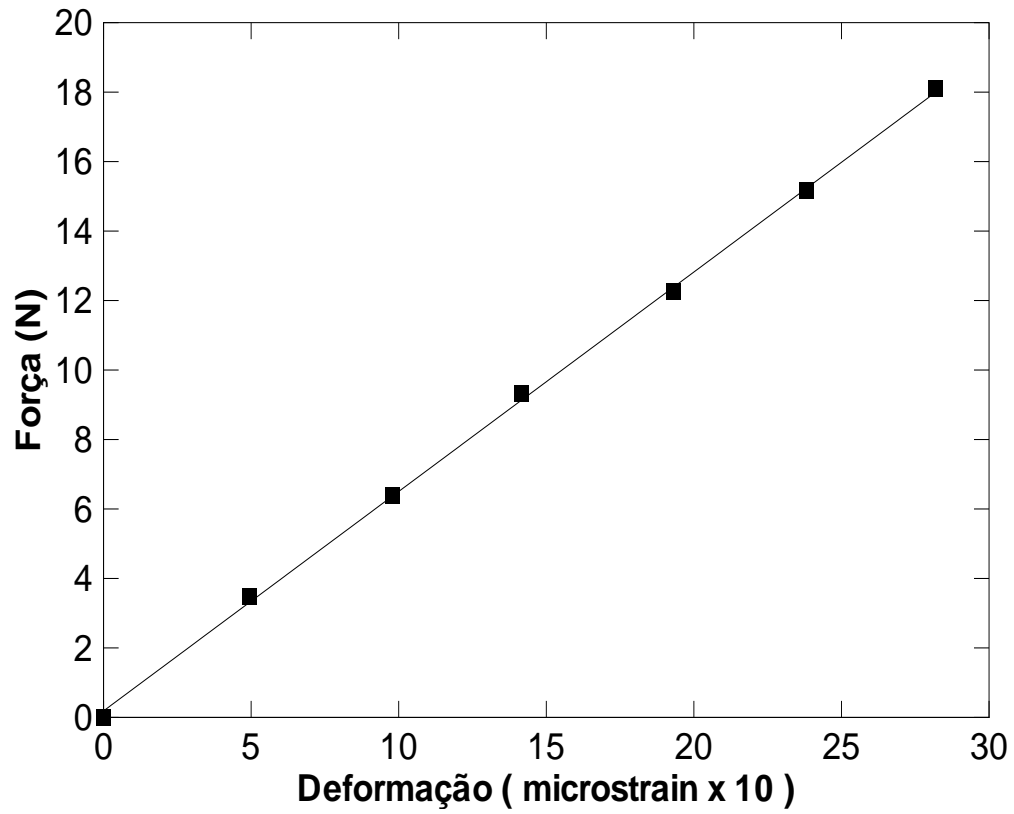


Figura 3.10: Curva de calibração da célula de carga 1

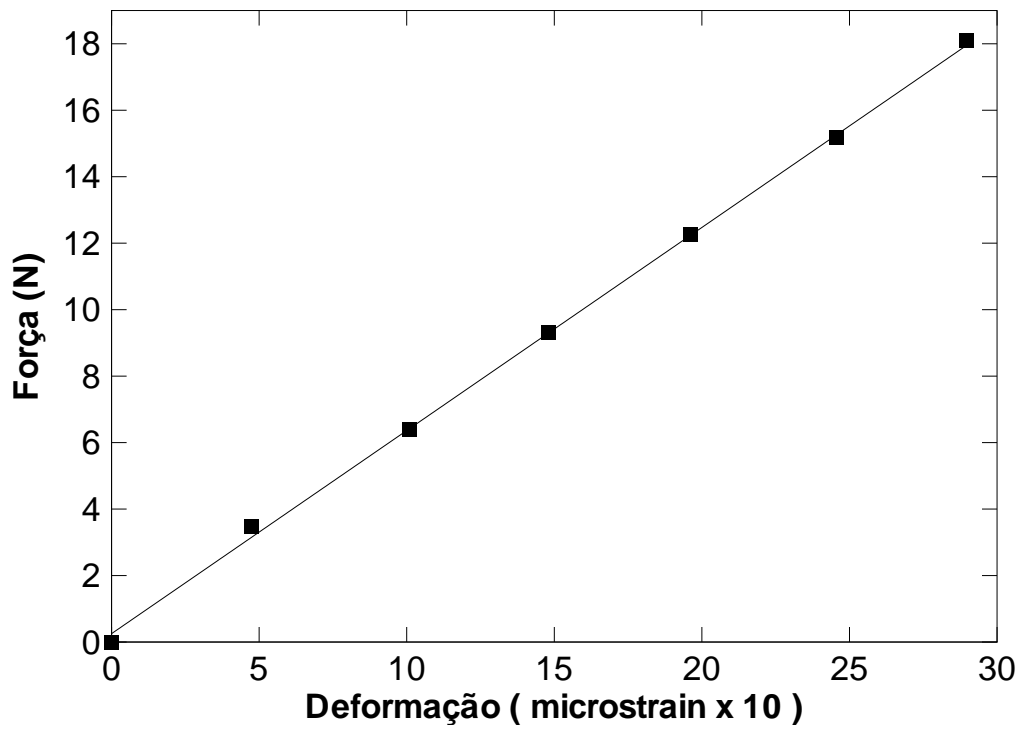


Figura 3.11: Curva de calibração da célula de carga 2

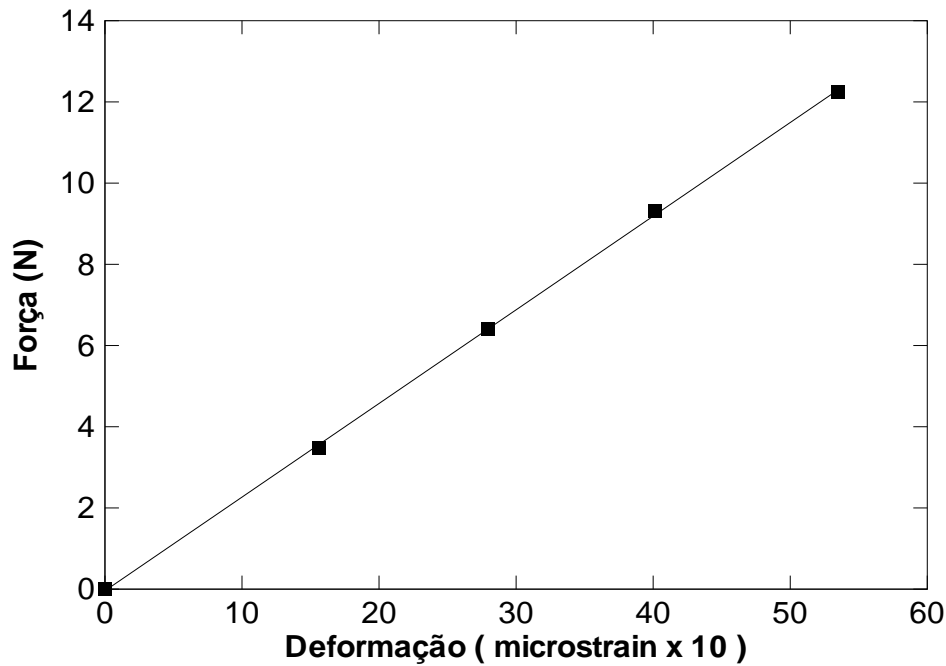


Figura 3.12: Curva de calibração da célula de carga 3

3.4 ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM TORNO DE UM PERFIL NACA 0012

Foi realizado um ensaio no túnel de vento para se levantar as principais curvas e propriedades do escoamento em torno de um perfil naca 0012 infinito. Inicialmente, foi utilizado um modelo de uma asa com perfil constante ao longo da envergadura e do tipo naca 0012. Esse modelo tem aproximadamente a mesma largura da seção de teste do túnel de vento e conseqüentemente o escoamento em torno dessa asa é próximo de um escoamento bidimensional. Essa asa possui 22 pontos de tomada de pressão estática ao longo da sua superfície. Foram feitos, então, vários ensaios para se obter a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda, para seis ângulos de ataque e dois números de Reynolds ($Re = 150000$ e $Re = 170000$). O coeficiente de pressão foi obtido utilizando-se o manômetro digital da marca Validyne ligado a um tubo de pitot (tomada de pressão total) e à tomada de pressão estática na superfície da asa. Os resultados estão apresentados nas figuras (3.13) a (3.18):

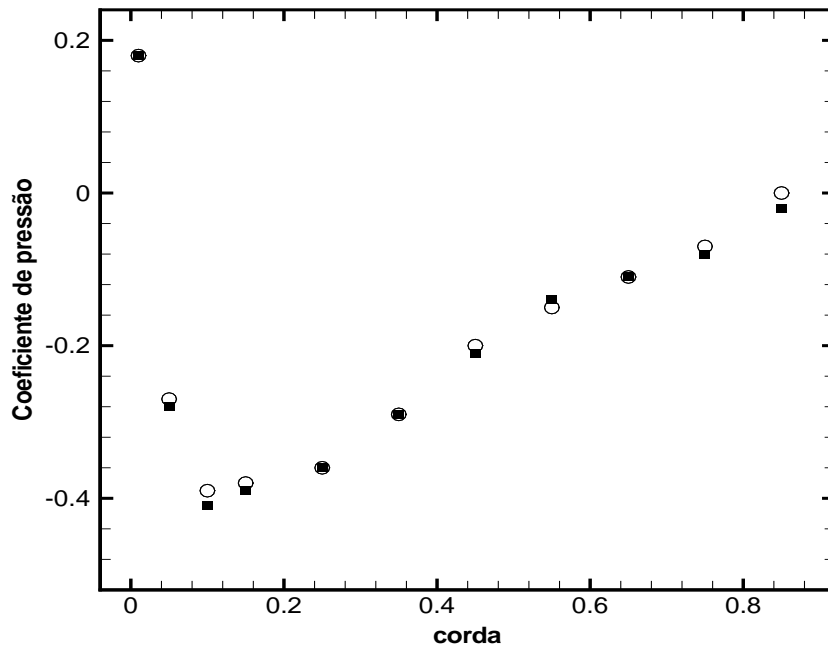


Figura 3.13: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 0 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

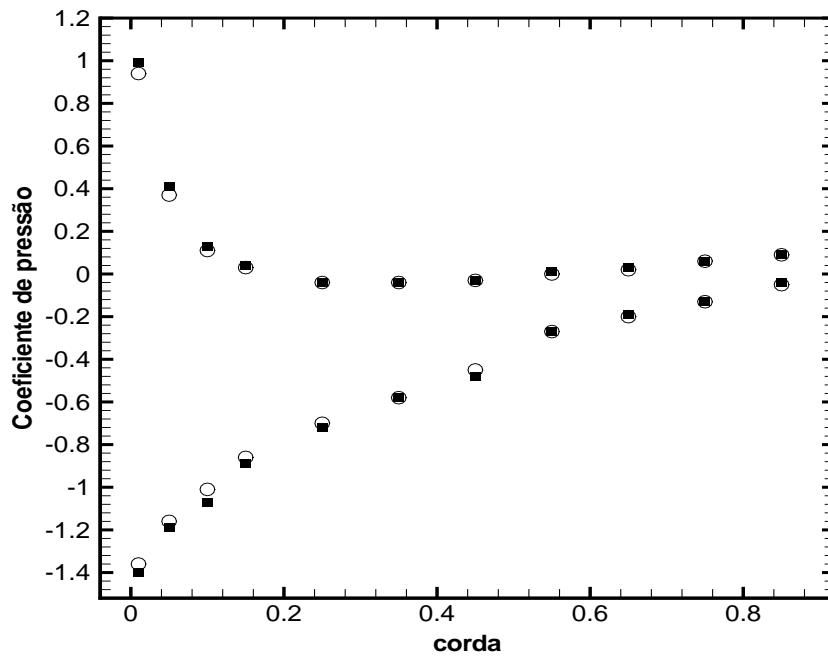


Figura 3.14: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 4 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

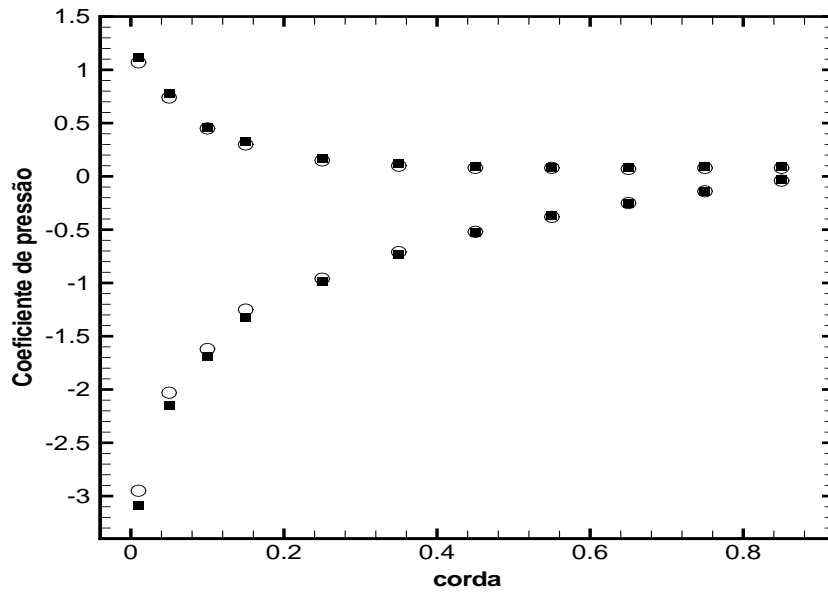


Figura 3.15: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 8 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

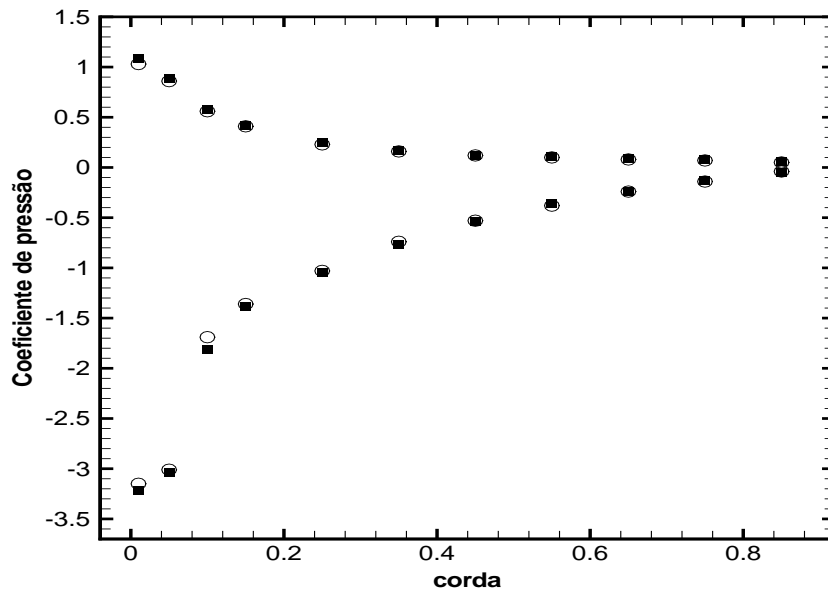


Figura 3.16: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 10 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

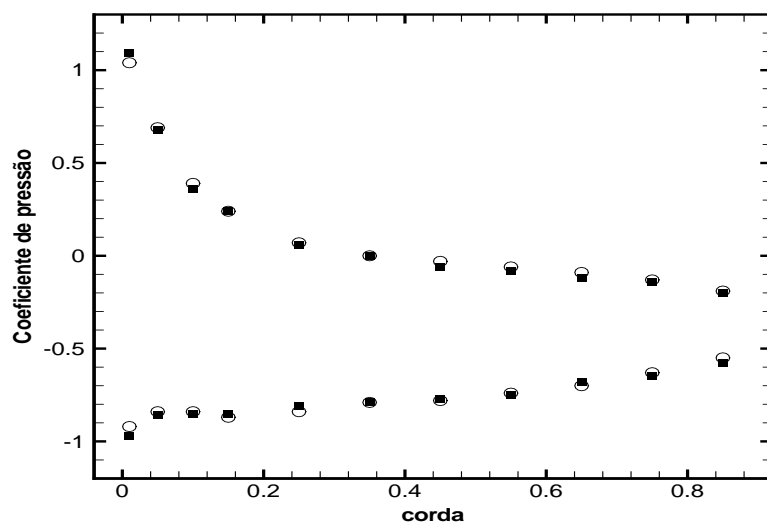


Figura 3.17: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 12 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

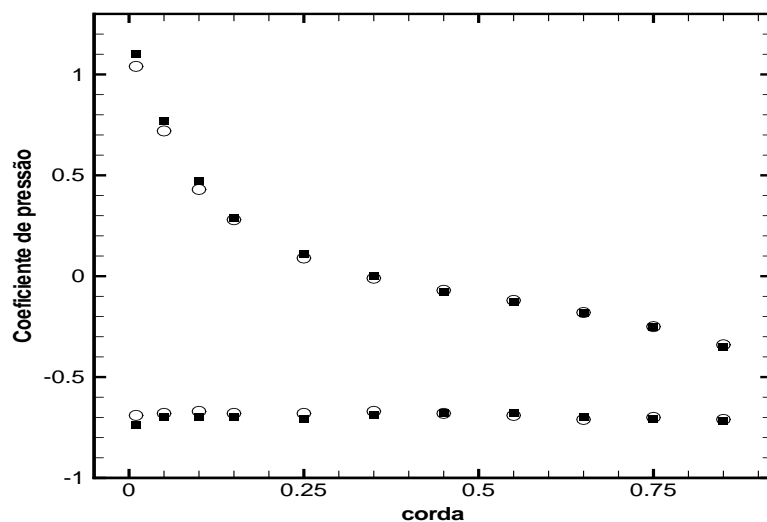


Figura 3.18: Coeficiente de pressão na superfície do perfil naca 0012 com ângulo de ataque igual a 16 graus. Os quadrados representam os dados para um número de Reynolds igual a 150000 e os círculos representam os dados para um número de Reynolds igual a 170000

A segunda parte desse ensaio consistiu em medir as forças de arrasto, de sustentação e o momento em relação a $\frac{1}{4}$ da corda para nove ângulos de ataque e dois números de Reynolds ($Re = 150325$ e $Re = 169645$). Para isso utilizou-se a balança do túnel de vento. As figuras (3.19) e (3.20) mostram os resultados da segunda parte desse ensaio:

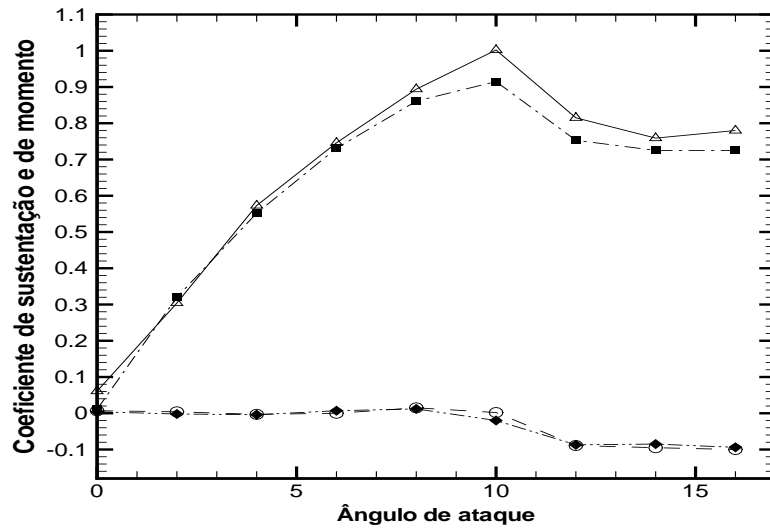


Figura 3.19: Força e momento a 1/4 da corda em função do ângulo de ataque - Perfil naca 0012. Para a força, triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000. Para o momento, círculos representam número de Reynolds igual a 150.000 e losângulos representam número de Reynolds igual a 170.000

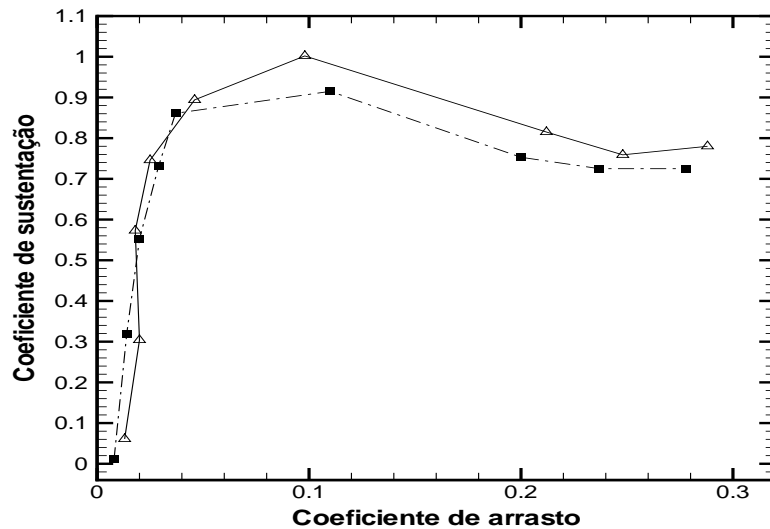


Figura 3.20: Polar de arrasto - Perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000

A curva da fig. (3.19) mostra que o ângulo de estol desse perfil (ângulo de ataque que ocorre a separação da camada limite) é em torno de 10° para os números de Reynolds ensaiados. Essa curva também mostra que o momento a $\frac{1}{4}$ da corda é próximo de zero, ou seja, que o centro de pressão desse perfil está localizado a mais ou menos $\frac{1}{4}$ da corda. E mostra que o momento em relação a $\frac{1}{4}$ da corda é aproximadamente constante com a variação do ângulo de ataque, ou seja, que o centro aerodinâmico desse perfil está

localizado também a mais ou menos $\frac{1}{4}$ da corda. A curva da fig. (3.20) é conhecida pelos aerodinamicistas como polar de arrasto e fornece o valor da máxima razão entre sustentação e arrasto e o ângulo que isso ocorre. Esse é um dado importante para projeto.

3.5 ESCOAMENTO TRIDIMENSIONAL EM TORNO DE UMA ASA COM PERFIL NACA 0012 E RAZÃO DE ASPECTO IGUAL A 4

Foi feito um experimento com uma asa finita sem torção aerodinâmica, sem torção geométrica, sem diedro e sem enflechamento. Essa asa tem uma envergadura igual a 0,3048m e uma corda igual a 0,1524m. Utilizou-se a metodologia recomendada pelo manual do túnel de vento para ensaiar asas finitas. Encostou-se uma das extremidades da asa na lateral do túnel e a outra ficou livre no escoamento. Com isso a asa sofre o efeito de ponta em somente uma das extremidades (a extremidade livre) e consequentemente considera-se que a razão de aspecto da asa (razão de aspecto aerodinâmica) é o dobro da sua razão de aspecto geométrica (para esse caso fica sendo igual a 4) e sua área permanece inalterada (área da asa aerodinâmica). O experimento consistiu em medir, por meio da balança, as forças de sustentação e de arrasto e o momento de arfagem a $\frac{1}{4}$ da corda para vários ângulos de ataque. Os resultados são mostrados na fig. (3.21) até a fig. (3.23):

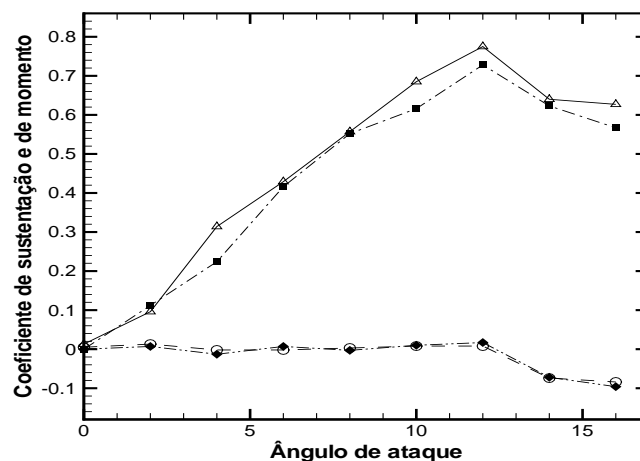


Figura 3.21: Coeficiente de sustentação e de momento a $\frac{1}{4}$ da corda em função do ângulo de ataque - Asa finita com perfil naca 0012. Para coeficiente de sustentação, triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000. Para o coeficiente de momento, círculos representam número de Reynolds igual a 150.000 e losângulos representam número de Reynolds igual a 170.000

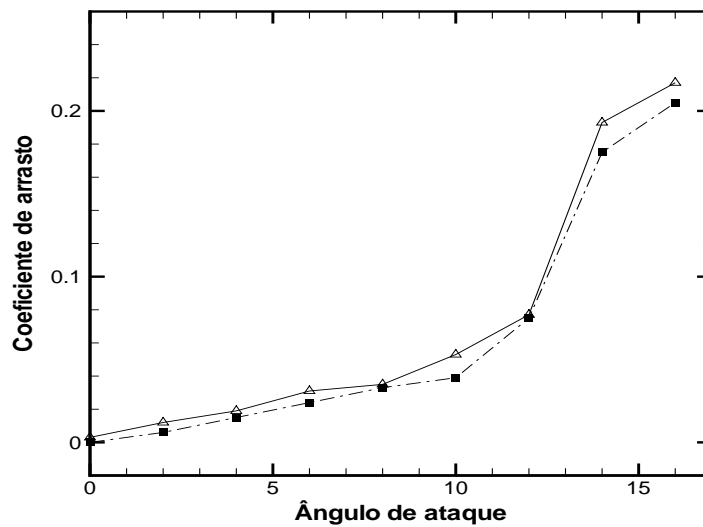


Figura 3.22: Coeficiente de arrasto em função do ângulo de ataque - Asa finita com perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 150.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 170.000

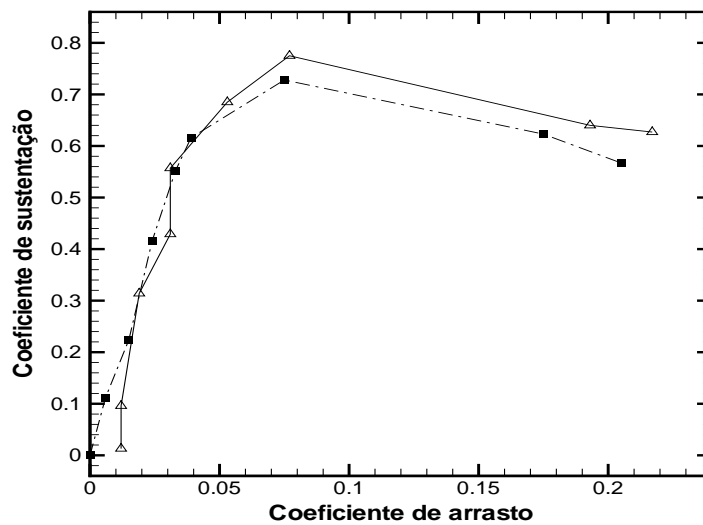


Figura 3.23: Polar de arrasto - Asa finita com perfil naca 0012. Triângulos representam número de Reynolds igual a 170.000 e quadrados representam número de Reynolds igual a 150.000

Percebe-se no gráfico do coeficiente de sustentação versus o ângulo de ataque da fig. (3.21) que a separação da camada limite nessa asa (estol) ocorre em torno de 12° e que o coeficiente de sustentação máximo para esse número de Reynolds é em torno de 0,75. Comparando esses valores com os dados da asa infinita percebe-se que o coeficiente de sustentação máximo cai e o ângulo de estol aumenta à medida em que a razão de aspecto diminui. Esse comportamento é geral no caso das asas finitas. Observando o gráfico do

coeficiente de momento a $\frac{1}{4}$ da corda fig. (3.21) nota-se o mesmo comportamento que o da asa infinita, ou seja, que até o ângulo de separação da camada limite o momento a $\frac{1}{4}$ da corda é aproximadamente zero (centro de pressão a $\frac{1}{4}$ da corda) e que o momento a $\frac{1}{4}$ da corda é constante com a variação do ângulo de ataque (centro aerodinâmico a $\frac{1}{4}$ da corda). No gráfico da fig. (3.22), que mostra o coeficiente de arrasto versus o ângulo de ataque da asa finita (para ângulos inferiores ao ângulo de estol), o arrasto é sempre maior do que para o caso da asa infinita. Isso ocorre porque, no caso da asa infinita, o arrasto é praticamente devido às tensões de cisalhamento devido a viscosidade (arrasto parasita ou de fricção) e, para o caso da asa finita, além do arrasto de fricção, surge o arrasto induzido devido à formação dos vórtices no bordo de fuga da asa.

4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE ESCOAMENTOS POTENCIAIS - O MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO

Neste capítulo é apresentado o Método Integral de Contorno aplicado à solução da equação de Laplace. O método numérico em questão é descrito com detalhes para os casos de escoamentos potenciais bidimensionais e tridimensionais.

O método integral de contorno, aplicado à solução de escoamentos potenciais, é bastante empregado na definição preliminar da geometria de uma aeronave. É uma ferramenta muito utilizada e já consagrada na indústria aeronáutica [41]. O método apresenta as seguintes vantagens:

- Simplicidade na elaboração do código computacional;
- Possibilidade de simular escoamentos em torno de geometrias tridimensionais complexas;
- Não há necessidade de gerar uma malha que represente todo o campo de escoamento. A malha é gerada somente para representar a superfície do corpo e é composta de painéis planos. Isso reduz consideravelmente o custo computacional pois o método é resolvido somente para os elementos da malha (painéis);
- Permite determinar o campo de velocidade e de pressão, assim como a força de sustentação e de arrasto induzido (para o caso de escoamento tridimensional). Permite também determinar o momento em relação a um ponto qualquer e a posição do centro de pressão e do centro aerodinâmico;
- Quando utilizado em conjunto com a teoria clássica de camada limite (delgada e com gradiente de pressão nulo na direção perpendicular à superfície), permite determinar o arrasto viscoso e a posição de separação da camada limite.

O método integral de contorno aplicado à solução de escoamentos potenciais apresenta as seguintes limitações:

- Simula com precisão somente escoamentos com altos números de Reynolds e que não tenha separação da camada limite;
- Supõe que o escoamento seja irrotacional e invíscido;
- Não permite o cálculo do arrasto de forma e nem do arrasto viscoso;
- O coeficiente de sustentação obtido numericamente é, em geral, um pouco maior do que o valor encontrado experimentalmente;
- Torna-se bastante impreciso para o cálculo de condições de alta incidência quando ocorre descolamento da camada limite;
- Não prevê nenhum tipo de descolamento. O fluido segue fielmente o contorno da superfície do corpo e esta representa uma linha de corrente do escoamento;
- Nas regiões de canto vivo ou de grande curvatura, a variação das propriedades do escoamento (pressão, velocidade e direção do fluxo) tende a ser muito grande e inconsistente com o fenômeno físico real.

4.1 MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO BIDIMENSIONAL

O método integral de contorno bidimensional é apresentado para resolver a equação de Laplace em termos das distribuições de singularidades na superfície de um corpo bidimensional arbitrário. Para atingir esse objetivo, usa-se a teoria de funções de Green. Escrevendo a segunda identidade de Green (Kellogg, 1954):

$$\int_S (\varphi_1 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_1) \cdot n dS = \int_V (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) dV \quad (4.1)$$

onde φ_1 e φ_2 são funções escalares de posição. V e S representam o volume e a fronteira de uma região arbitrária do escoamento e n é o vetor unitário normal à superfície S . As funções φ_1 e φ_2 são harmônicas e então o lado direito da Eq.(4.1) é igual a zero, resultando na relação recíproca:

$$\int_S \varphi_1 \nabla \varphi_2 \cdot n dS = \int_S \varphi_2 \nabla \varphi_1 \cdot n dS \quad (4.2)$$

Vamos considerar um corpo arbitrário com superfície S_B e uma superfície externa S_∞ no infinito como mostrado na Fig. (4.1). O vetor unitário n_i ou n é definido apontando para fora da região de interesse. Então, $n_i = -n$.

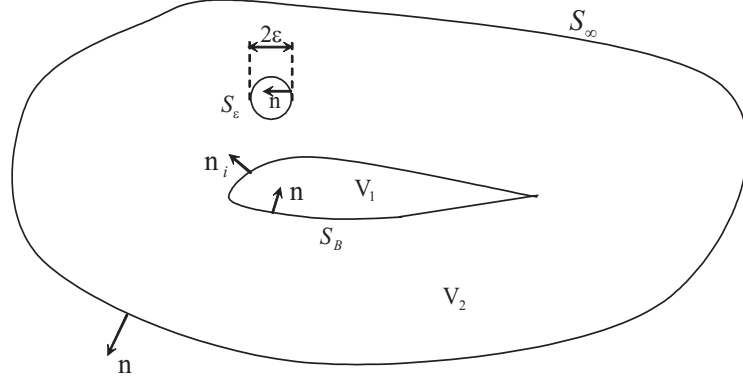


Figura 4.1: Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial bidimensional

Na Eq. (4.2) a integral de superfície está definido em todas as fronteiras do domínio. Considere φ_1 como sendo a solução fundamental para o caso da equação de Laplace bidimensional $G = \ln r/2\pi$. Considere também o potencial não conhecido $\varphi_2 = \Phi$ e $S = S_B \cup S_\infty$. De acordo com a Fig. (4.1) Φ é o potencial total no domínio V_2 (i.e. fora do corpo) e φ_1 é o potencial de uma fonte que é singular quando $r \rightarrow 0$. Quando existe uma singularidade localizada em x_0 no domínio V_2 , é necessário excluí-la da região de integração. Essa singularidade é então cercada por uma pequena esfera de raio ϵ . Fora da esfera, no restante do domínio V_2 , o potencial φ_1 satisfaz a equação de Laplace. O potencial φ_2 satisfaz a equação de Laplace em todo o domínio V_2 . Então a relação recíproca, aplicada ao domínio V_2 subtraído do volume da singularidade, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{S_B, S_\epsilon, S_\infty} (G(r)\nabla\Phi) \cdot ndS - \int_{S_B, S_\epsilon, S_\infty} (\Phi\nabla G(r)) \cdot ndS = 0 \quad (4.3)$$

onde a função de Green corresponde a uma fonte pontual $G(r) = \ln r/2\pi$ e o potencial de dipolo é dado por $\nabla G(r) = \nabla(\ln r)/2\pi$. Aqui, $r = x - x_0$, onde x é um ponto arbitrário do escoamento e x_0 as coordenadas da singularidade.

Considerando a integral sobre S_ϵ que contém a singularidade, podemos escrever para o limite quando ϵ tende a zero:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} G(r)\nabla\Phi \cdot ndS = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\ln \epsilon}{2\pi} \frac{\partial\Phi}{\partial\epsilon} dS \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \Phi\nabla G(r) \cdot ndS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \Phi \frac{1}{2\pi\epsilon} dS = \Phi(x_0) \quad (4.5)$$

Conseqüentemente a Eq. (4.3) se reduz a:

$$\Phi(x_0) = - \int_{S_B, S_\infty} G(r)\nabla\Phi \cdot ndS + \int_{S_B, S_\infty} \Phi\nabla G(r) \cdot ndS \quad (4.6)$$

As duas integrais do lado direito da equação acima representam a função de Green $G(r) = \ln r/2\pi$ ao longo da superfície e a função de Green $\nabla G(r) = (1/2\pi)\nabla(\ln r) \cdot n$

orientada perpendicularmente à superfície, ou seja, distribuições de fontes e de dipolos na superfície, respectivamente.

Agora considere a situação em que o escoamento de interesse ocorre no interior do aerofólio S_B (no domínio V_1) e que o potencial total é denotado por Φ_i . Para esse escoamento o polo x_0 (que está no domínio V_2) é exterior a S_B e usando a Eq.(4.3) resulta em:

$$\int_{S_B} G \nabla \Phi_i \cdot \mathbf{n}_i dS - \int_{S_B} \Phi_i \nabla G \cdot \mathbf{n}_i dS = 0 \quad (4.7)$$

Uma equação mais apropriada pode ser obtida em termos da diferença $\Phi - \Phi_i$ e de seu gradiente na superfície. Para isso, subtrai-se-se a Eq. (4.6) da Eq. (4.7) lembrando-se que $n_i = -n$:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) = & - \int_{S_B} G(r) \nabla(\Phi - \Phi_i) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS - \\ & - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

A integral sobre S_∞ na Eq. 4.8 é definida como o potencial não perturbado $\varphi^\infty(x_0)$:

$$\varphi^\infty(x_0) = - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.9)$$

Então a Eq. 4.8 reduz-se a uma equação integral de contorno onde o potencial total em um ponto qualquer no escoamento é função da distribuição de fontes e dipolos na superfície do corpo:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty - \int_{S_B} G(r) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi - \Phi_i) dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.10)$$

Para a situação em que o valor da velocidade normal à superfície S_B é especificada, e quando existe continuidade desse valor na fronteira entre as regiões V_1 e V_2 , ou seja, quando $\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0$ em S_B , a eq. 4.10 é escrita como:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.11)$$

A equação (4.11) determina o valor de $\Phi(x_0)$ em termos da diferença $-\mu = \Phi - \Phi_i$ chamado de intensidade do dipolo. Então o problema é resolvido quando a distribuição de dipolo é determinada. O sinal negativo em μ se deve a que o vetor normal n aponta para o interior do aerofólio S_B .

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty - \int_{S_B} \mu \frac{\partial}{\partial n} (G(r)) dS \quad (4.12)$$

Pode-se demonstrar [19] que uma distribuição superficial contínua de dipolo corresponde a uma distribuição superficial contínua de vórtice com uma ordem a menos. Então, com base no exposto acima e na eq. (4.12), podemos expressar o potencial

total de um escoamento potencial em termos de um potencial não perturbado e uma distribuição superficial de vórtices:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \theta dS \quad (4.13)$$

Temos que o potencial total $\Phi(x_0)$ é igual ao potencial de perturbação φ mais o potencial do escoamento não perturbado φ^∞ , ou seja:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty + \varphi \quad (4.14)$$

A velocidade de perturbação de um ponto qualquer do escoamento, usando a definição de potencial, é dada por:

$$\nabla\varphi(x_0) = - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla(\theta) dS \quad (4.15)$$

Para impor a condição cinemática de que a velocidade normal à superfície do aerofólio é nula em um ponto arbitrário x_0 da superfície, substituímos as eqs. (4.14) e (4.15) e então obtemos:

$$\left(- \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla(\theta) dS + \nabla\varphi^\infty \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.16)$$

A eq.(4.16) permite determinar a intensidade da distribuição de vórtices na superfície do aerofólio. Feito isso é possível determinar a velocidade tangencial à superfície do aerofólio em um ponto x_0 usando a seguinte equação:

$$V_t(x_0) = \left(- \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla(\theta) dS + \nabla\varphi^\infty \right) \cdot \mathbf{s} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{s} é o vetor unitário na direção tangencial à superfície. Uma vez determinado o campo de velocidade do escoamento, pode-se determinar o campo de pressão usando a equação de Bernoulli e a definição de coeficiente de pressão:

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_t}{V_\infty} \right)^2 \quad (4.18)$$

4.1.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO BIDIMENSIONAL

Foi elaborado um código escrito na linguagem de programação FORTRAN que determina o campo de pressão e de velocidade, a força de sustentação, o momento em relação a um ponto qualquer, o centro de pressão e o centro aerodinâmico, para um escoamento bidimensional em torno de um corpo arbitrário. O método empregado é de

primeira ordem porque considera que as intensidades de vórtices por unidade de comprimento variam linearmente em cada elemento de contorno. Para o caso estudado, existe a condição de contorno cinemática de impenetrabilidade e uma condição que é denominada condição de Kutta. Essa condição é resultado da observação experimental de que a velocidade no bordo de fuga é igual a zero (ponto de estagnação posterior coincide com o bordo de fuga) ou que as velocidades localizadas no intradorso e no extradorso próximas ao bordo de fuga são finitas e iguais (para o caso de perfis com pequeno ângulo no bordo de fuga).

Seja uma distribuição contínua de vórtices. O incremento no potencial $d\phi$ induzido num ponto P por um comprimento elementar γds dessa distribuição contínua de vórtices é dado por:

$$d\phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta \quad (4.19)$$

Logo o potencial induzido no ponto P por toda a distribuição contínua de vórtices é dada por:

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds \quad (4.20)$$

onde θ é o ângulo formado entre a horizontal e a reta que une o ponto P com o ponto na superfície da distribuição contínua de vórtices, conforme figura abaixo.

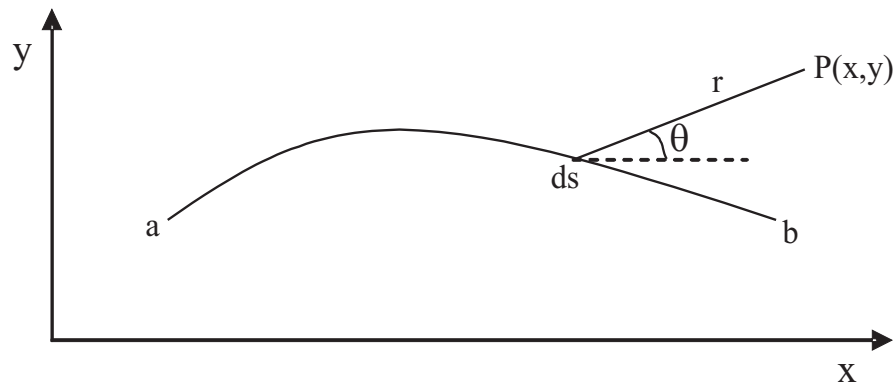


Figura 4.2: Parâmetros geométricos usados no método integral de contorno bidimensional

Seja o ponto $P(x, y)$ localizado em qualquer local do escoamento. Define-se r_{Pj} como sendo a distância entre o ponto P e qualquer elemento de contorno j . O raio r_{Pj} faz um ângulo θ_{Pj} com a direção x . Então o potencial induzido no ponto P pelo elemento de contorno j é :

$$\Delta\phi_j = -\frac{1}{2\pi} \int_j \theta_{Pj} \gamma_j ds_j \quad (4.21)$$

A intensidade por unidade de comprimento γ_j varia linearmente ao longo do elemento de contorno. O ângulo θ_{Pj} é dado por:

$$\theta_{Pj} = \tan^{-1} \frac{y - y_j}{x - x_j} \quad (4.22)$$

Assumindo que o ponto P localiza-se no ponto de controle de um elemento de contorno i (exatamente no meio do elemento) e levando em consideração a contribuição do potencial do escoamento não perturbado (inclinado num ângulo α em relação à linha da corda do perfil) assim como a contribuição de todos os elementos de contorno j , temos que o potencial no ponto de controle i é dado por:

$$\phi(x_i, y_i) = V_\infty (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) - \sum_{j=1}^m \int_j \frac{\gamma(s_j)}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) ds_j \quad (4.23)$$

onde:

$$\gamma(s_j) = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j) \frac{s_j}{S_j} \quad (4.24)$$

e s_j é a distância medida ao longo do elemento de contorno j e S_j é o comprimento do elemento j .

O próximo passo consiste na aplicação da condição de contorno cinemática de impenetrabilidade, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \phi(x_i, y_i) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.25)$$

Nesse problema temos m elementos de contorno e conseqüentemente $m + 1$ pontos de fronteira. Temos então $m + 1$ intensidades por unidade de comprimento para serem calculada. A condição de contorno de impenetrabilidade fornece apenas m equações para $m + 1$ incógnitas. Então é necessário uma outra equação para resolver o sistema linear e determinar as $m + 1$ intensidades por unidade de comprimento. Essa equação adicional é obtida impondo a condição de Kutta, ou seja:

$$\gamma_1 + \gamma_{m+1} = 0 \quad (4.26)$$

que é a condição para que o escoamento seja suave e a velocidade finita no bordo de fuga (pressões e velocidades iguais no intradorso e no extradorso nas proximidades do bordo de fuga). Com essa equação adicional, pode-se resolver um sistema linear e determinar as intensidades por unidade de comprimento da distribuição contínua de vórtices. A integral na equação do potencial assim como a derivada na direção normal são calculadas analiticamente.

Tendo calculado as intensidades por unidade de comprimento, pode-se determinar as velocidades nos pontos de controle de cada elemento de contorno, sabendo que:

$$V_i = \frac{\partial}{\partial s_i} \phi(x_i, y_i) \quad (4.27)$$

Determinada as velocidades em cada ponto de controle, pode-se encontrar a distribuição de pressão por meio da equação de Bernoulli e da definição de coeficiente de pressão:

$$Cp_i = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty} \right)^2 \quad (4.28)$$

Encontrado a distribuição de pressão pode-se determinar as forças e momentos resultantes no perfil aerodinâmico. A figura abaixo ilustra a convenção adotada nesse método.

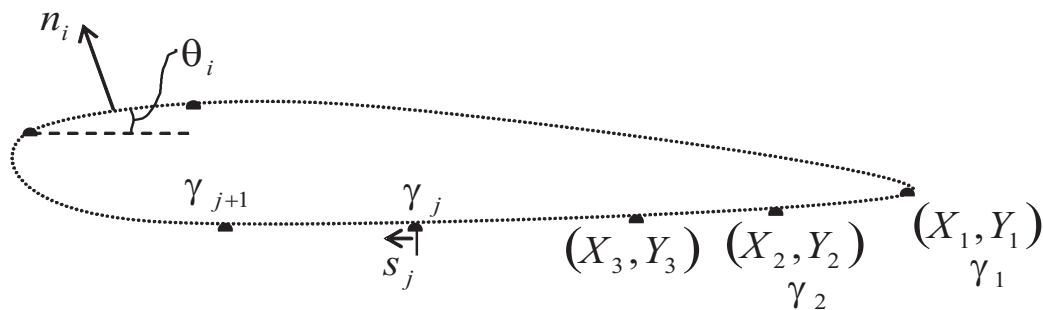


Figura 4.3: Convenção adotada no método integral de contorno bidimensional

4.1.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO BIDI-MENSIONAL

As figuras 4.4 a 4.6 mostram a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda do aerofólio naca 0012 para vários ângulos de ataque. Os dados experimentais são provenientes de um ensaio realizado no Túnel de Vento do Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade de Brasília. O número de Reynolds do escoamento é igual a 169000. Os dados numéricos são resultados do código computacional desenvolvido que utiliza o Método Integral de Contorno bidimensional. Como podemos perceber, os resultados numérico e experimental praticamente coincidem até o ângulo de ataque igual a 6° . Para o ângulo de ataque igual a 8° , já existe uma certa discrepância dos valores no extradorso e, para ângulos de ataque superiores a 10° , percebe-se o descolamento da camada limite e então os dados numéricos já não correspondem aos dados experimentais. Isso acontece porque o método numérico em questão considera o escoamento invíscido e irrotacional.

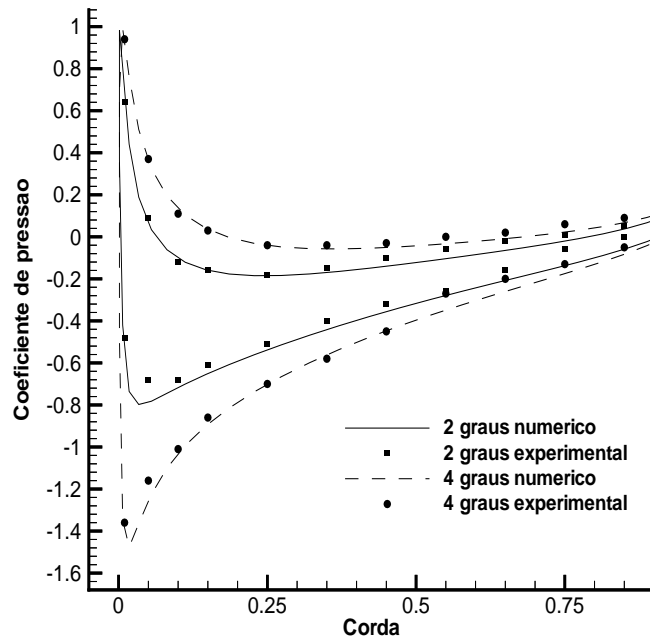


Figura 4.4: Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 2 e 4 graus.

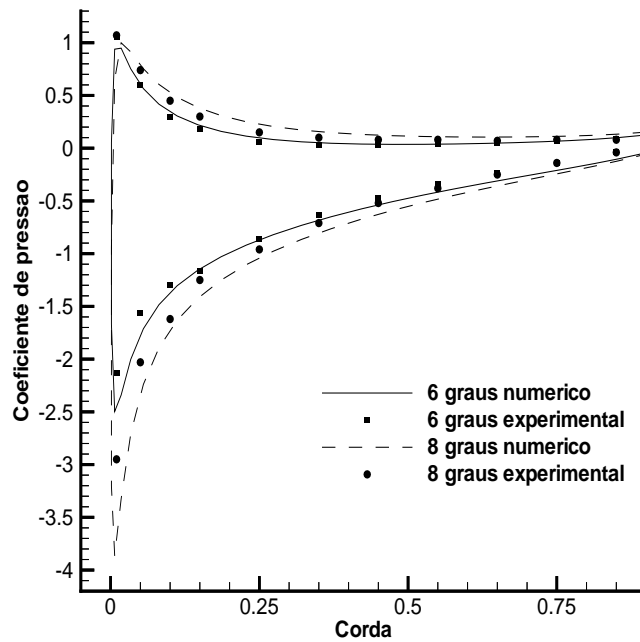


Figura 4.5: Escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 6 e 8 graus.

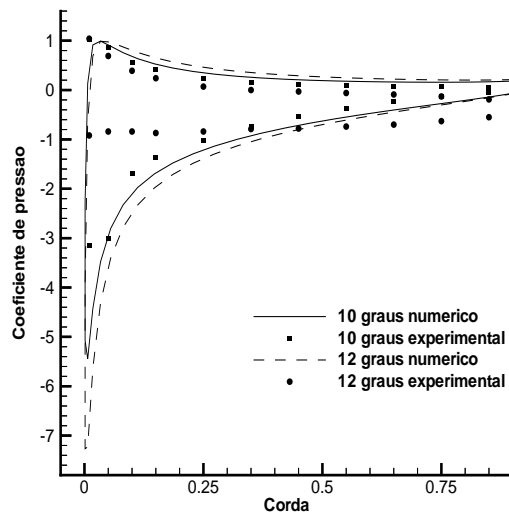


Figura 4.6: escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Distribuição do coeficiente de sustentação para ângulos de ataque iguais a 10 e 12 graus.

A figura 4.7 mostra a variação do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque para o mesmo escoamento. Como é de se esperar, os resultados numérico e experimental coincidem até ângulos de ataque moderados. Para valores próximos do ângulo de estol e maiores que esse ângulo, não existe compatibilidade entre os resultados numéricos e os resultados experimentais.

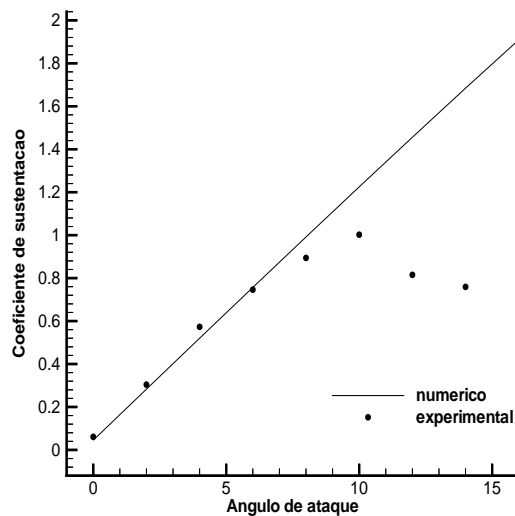


Figura 4.7: escoamento bidimensional em torno do perfil naca 0012. Número de Reynolds igual a 169000. Coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque.

As figuras 4.8 a 4.10 mostram a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da corda de um aerofólio naca 23012 com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler flap. O perfil utilizado para o flap é também o naca 23012 e sua corda é igual a 20% da corda do aerofólio principal. A deflexão do flap em relação ao aerofólio principal é igual a 30° e as coordenadas do bordo de ataque do flap em relação ao bordo de fuga do aerofólio principal é descrito com detalhes na referência [51]. Os dados experimentais foram extraídos dessa mesma referência e o número de Reynolds do escoamento é em torno de 1500000 com o comprimento característico sendo igual a soma das cordas do aerofólio principal e do flap. Os dados numéricos são resultados do código computacional desenvolvido que utiliza o Método Integral de Contorno bidimensional. A figura 4.8 mostra os resultados numéricos e experimentais da distribuição do coeficiente de pressão para o caso em que o ângulo de ataque entre o escoamento não perturbado e a corda do aerofólio principal é igual a 1.7 graus. Percebe-se uma pequena diferença entre os resultados numérico e experimental no extradorso do aerofólio principal e do flap.

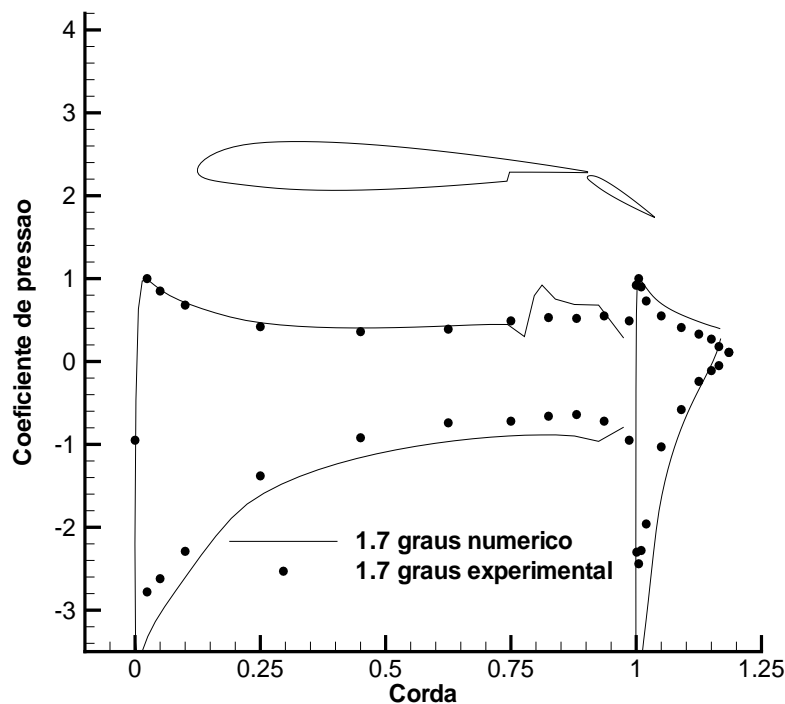


Figura 4.8: Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 1.7 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e delexão do flap igual a 30 graus.

A figura 4.9 mostra os resultados numéricos e experimentais da distribuição do coeficiente de pressão para o caso em que o ângulo de ataque entre o escoamento não perturbado e a corda do aerofólio principal é igual a 8 graus. Percebe-se uma diferença maior que no caso anterior entre os resultados numéricos e experimentais no extradorso do aerofólio principal e do flap. Essa diferença ocorre porque a esteira de vorticidade criada pela camada limite no bordo de fuga do aerofólio principal encontra o flap e age no sentido de diminuir a circulação do mesmo. A camada limite também age no sentido de suavizar a curvatura do perfil pois a espessura de deslocamento cresce ao longo do contorno do aerofólio. Como o método numérico em questão não prevê a presença de camada limite, então a diferença entre os resultados numéricos e experimentais é esperada.

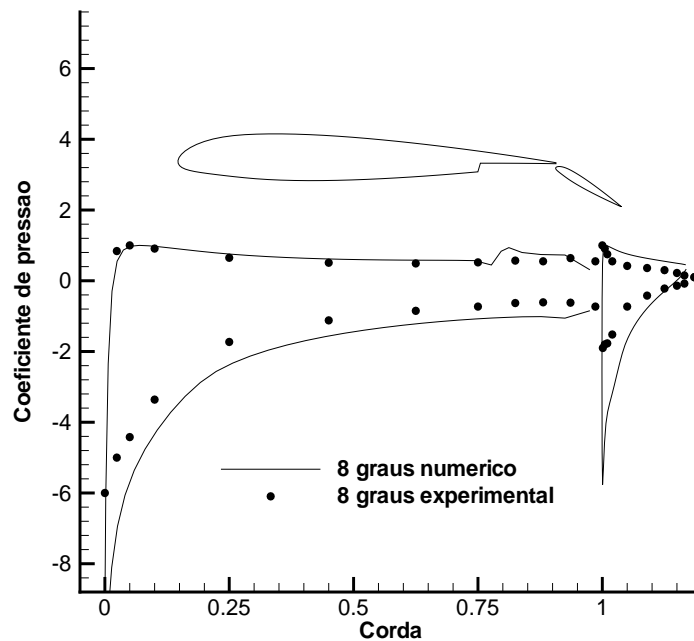


Figura 4.9: Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 8 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e deflexão do flap igual a 30 graus.

A figura 4.10 mostra, para o caso anterior, a simulação numérica com redução de circulação do flap. Apesar da geometria real ser com deflexão do flap igual a 30 graus e sabendo que o método numérico aplicado não considera a presença de camada limite, adotou-se uma geometria computacional com deflexão de flap igual a 25 graus. Essa escolha foi feita sabendo que no escoamento real a esteira de vorticidade criada pelo

aerofólio principal e a espessura de deslocamento da camada limite tendem a reduzir a circulação do flap. Como é de se esperar, os resultados numérico modificado (com redução de deflexão do flap) e experimental são bem próximos. Essa metodologia de redução da deflexão do flap, no caso de simulações invíscidas, é conhecida e muito usada [8].

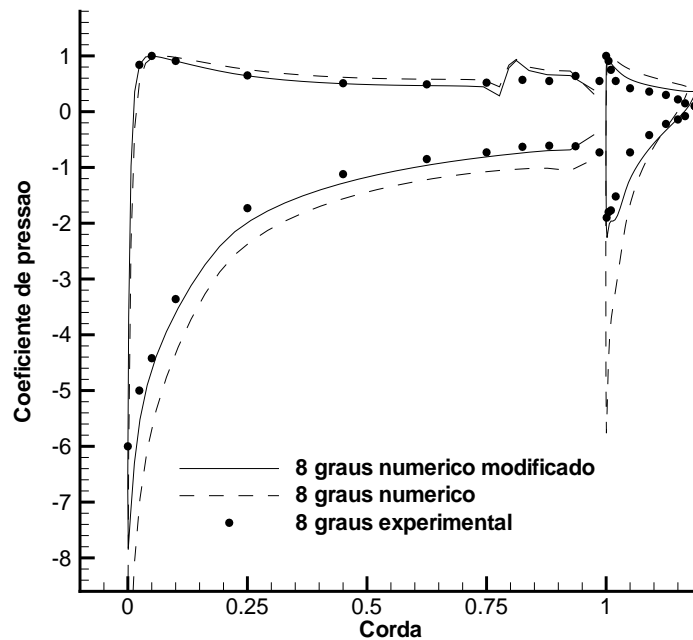


Figura 4.10: Distribuição do coeficiente de pressão em torno de um aerofólio com dispositivo de hiper-sustentação do tipo Fowler-flap e com ângulo de ataque igual a 8 graus. Corda do Flap igual a 20% da corda do aerofólio principal e delexão do flap igual a 30 graus. Modificação da geometria simulada (redução da deflexão do flap) com o intuito de diminuir a circulação do flap.

As figuras 4.11 e 4.12 mostram o escoamento em torno de um aerofólio com dispositivos de hipersustentação do tipo slot fixo e slotted flap descrito em [17]. O número de Reynolds do escoamento vale 3500000. A figura 4.11 mostra o caso em que o flap não tem deflexão e o ângulo de ataque é igual a 8 graus. Percebe-se que os valores numéricos e experimentais são próximos.

A figura 4.12 mostra o caso em que o flap tem deflexão igual a 30 graus e o ângulo de ataque vale 8 graus. Os resultados numéricos e experimentais são muito próximos.

As figuras 4.13 e 4.14 mostram o escoamento em torno de um aerofólio do tipo naca 23012 com flap externo também do tipo naca 23012 [52]. O número de Reynolds do

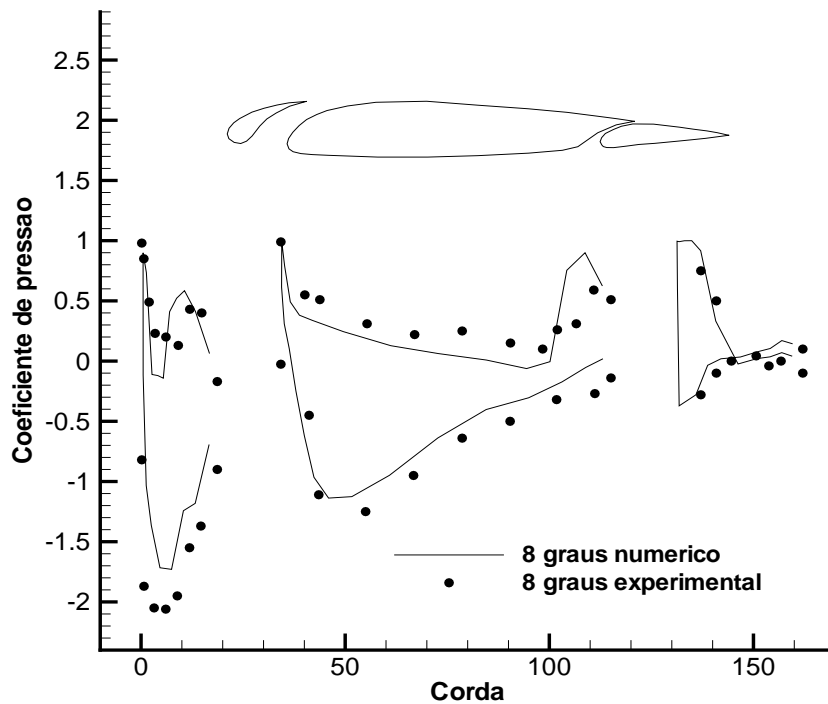


Figura 4.11: escoamento em torno de um aerofólio com slot fixo e slotted flap sem deflexão. Ângulo de ataque igual a 8 graus e número de Reynolds igual a 3500000.

escoamento, tendo como comprimento característico a soma das cordas do aerofólio principal e do flap, é igual a 2040000. O flap tem corda igual a 20% da corda do aerofólio principal. A figura 4.13 mostra o escoamento para o caso em que o ângulo de ataque é igual a 9,22 graus. Observa-se uma diferença entre os resultados numéricos e experimentais no extradorso do aerofólio (na região de mínima pressão).

Como comentado anteriormente, a circulação real do flap é menor do que a circulação prevista pelo método numérico em questão. Então a figura 4.14 mostra o resultado numérico para um ângulo de deflexão do flap menor do que o ângulo real. Essa geometria computacional foi escolhida para reduzir um pouco a circulação do flap, de forma a copiar o que acontece no fenômeno real. Percebe-se novamente que os resultados numéricos com geometria modificada (ângulo de deflexão do flap igual 15 graus) aproxima-se mais dos resultados experimentais.

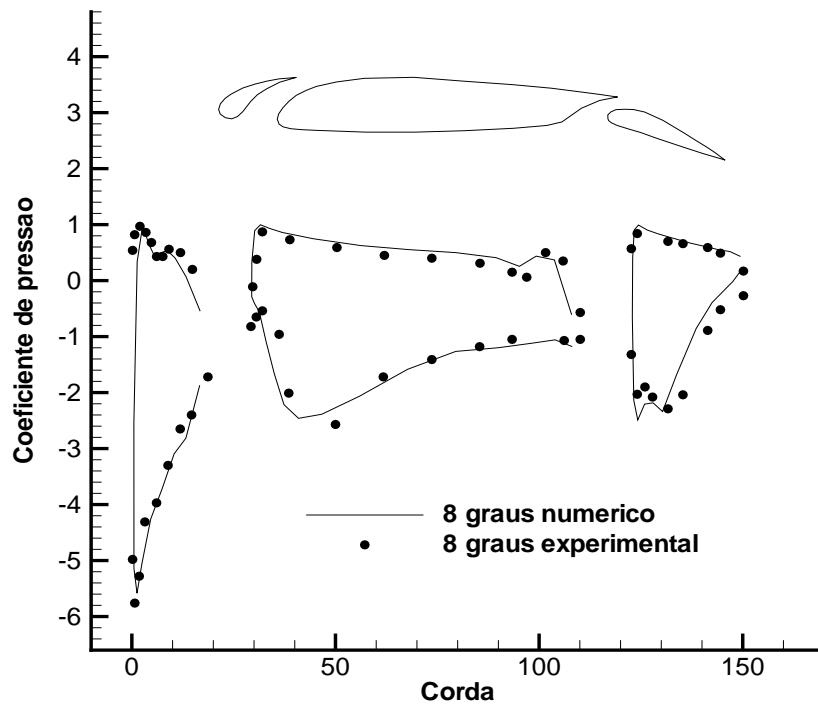


Figura 4.12: Escoamento em torno de um aerofólio com slot fixo e slotted flap com deflexão igual a 30 graus. Ângulo de ataque igual a 8 graus e número de Reynolds igual a 3500000.

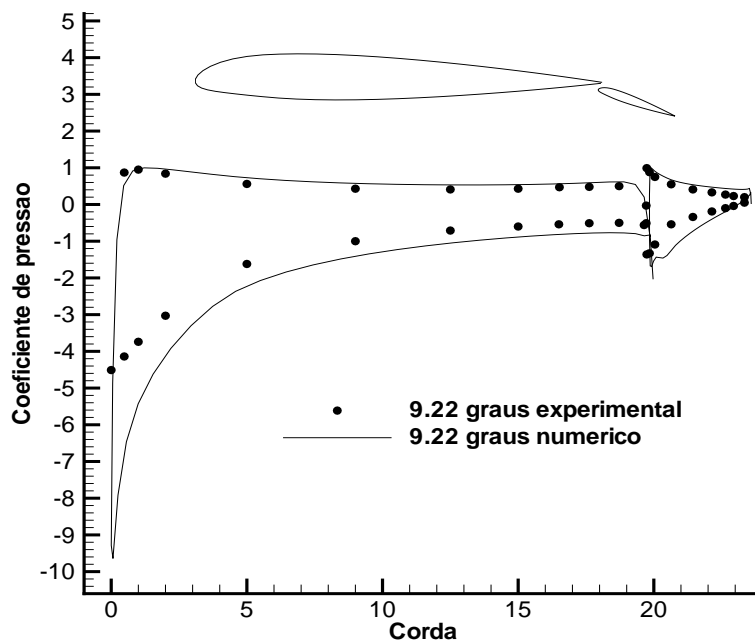


Figura 4.13: Escoamento em torno de um aerofólio com flap externo com deflexão igual a 20 graus. O ângulo de ataque é igual a 9,22 graus e número de Reynolds igual a 2040000.

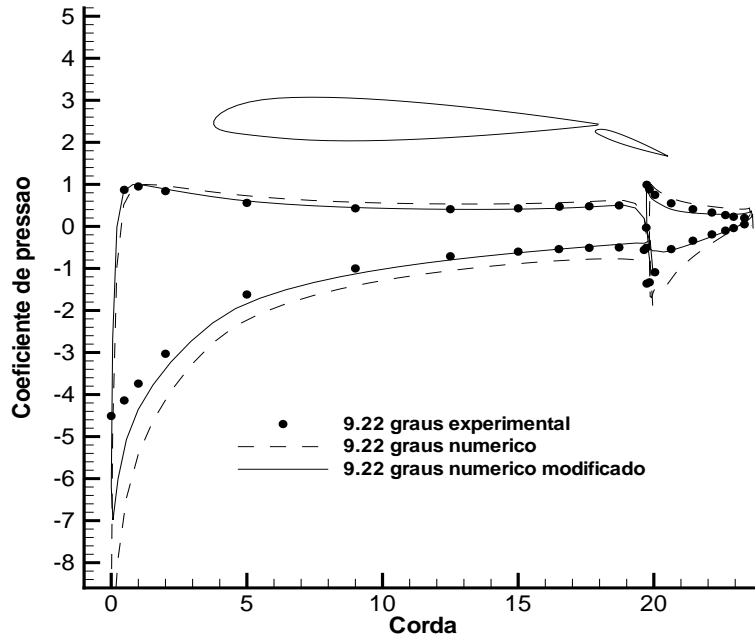


Figura 4.14: Escoamento em torno de um aerofólio com flap externo com geometria modificada para a simulação numérica. O ângulo de ataque é igual a 9,22 graus e número de Reynolds igual a 2040000.

4.2 MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO TRIDIMENSIONAL

4.2.1 EQUAÇÃO GOVERNANTE

Se o escoamento for considerado irrotacional, incompressível e invíscido então a equação que governa esse fenômeno físico é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.29)$$

e podemos decompor o potencial como $\Phi = \varphi^D + \varphi^\infty$, onde φ^∞ é o potencial do escoamento não perturbado e φ^D é o potencial de distúrbio que tende a zero à grande distâncias do corpo. Para um corpo arbitrário, a condição de contorno cinemática é:

$$U_N = n_i \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (4.30)$$

onde n_i é o vetor unitário normal à superfície do corpo e U_N é a componente da velocidade resultante normal à superfície. Os distúrbios criados pelo corpo tendem à zero no infinito, ou seja:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi^D = 0 \quad (4.31)$$

onde r é a distância relativa entre um ponto do corpo e um ponto qualquer do escoamento. As equações (4.29), (4.30) e (4.31) constituem o problema a ser resolvido.

4.2.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

Nesta seção desenvolveremos o método integral de contorno tridimensional para resolver a equação de Laplace em termos das distribuições de singularidades na superfície do corpo arbitrário. Para atingir esse objetivo, usaremos a teoria de funções de Green.

4.2.2.1 FUNÇÕES DE GREEN DA EQUAÇÃO DE LAPLACE TRIDIMENSIONAL

Por definição, a função de Green tridimensional satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (4.32)$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac tridimensional e \mathbf{x}_0 é a posição da função de Green, também chamado de polo. O espaço livre da função de Green corresponde ao domínio infinito do escoamento sem fronteiras internas.

Resolvendo a Eq. (4.32) usando um par de transformadas de Fourier tridimensional, encontra-se a função de Green no espaço de onda k :

$$G(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}_0}}{k^2} \quad (4.33)$$

Calculando a transformada de Fourier inversa [28]:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi r} \quad (4.34)$$

que corresponde à solução fundamental do escoamento potencial no espaço livre.

4.2.2.2 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Escrevendo a segunda identidade de Green [24]:

$$\int_S (\varphi_1 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_1) \cdot \mathbf{n}_i dS = \int_V (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) dV \quad (4.35)$$

onde φ_1 e φ_2 são funções escalares de posição. V e S representam o volume e a fronteira de uma região arbitrária do escoamento e n é o vetor unitário normal à superfície S . As funções φ_1 e φ_2 são harmônicas e então o lado direito da Eq. (7) é igual a zero, resultando na relação recíproca:

$$\int_S \varphi_1 \nabla \varphi_2 \cdot n dS = \int_S \varphi_2 \nabla \varphi_1 \cdot n dS \quad (4.36)$$

Vamos considerar um corpo arbitrário com superfície S_B , uma esteira S_W e uma superfície externa S_∞ no infinito como mostrado na Figura abaixo. O vetor unitário n_i ou n é definido apontando para fora da região de interesse. Então, $n_i = -n$. Na Eq.

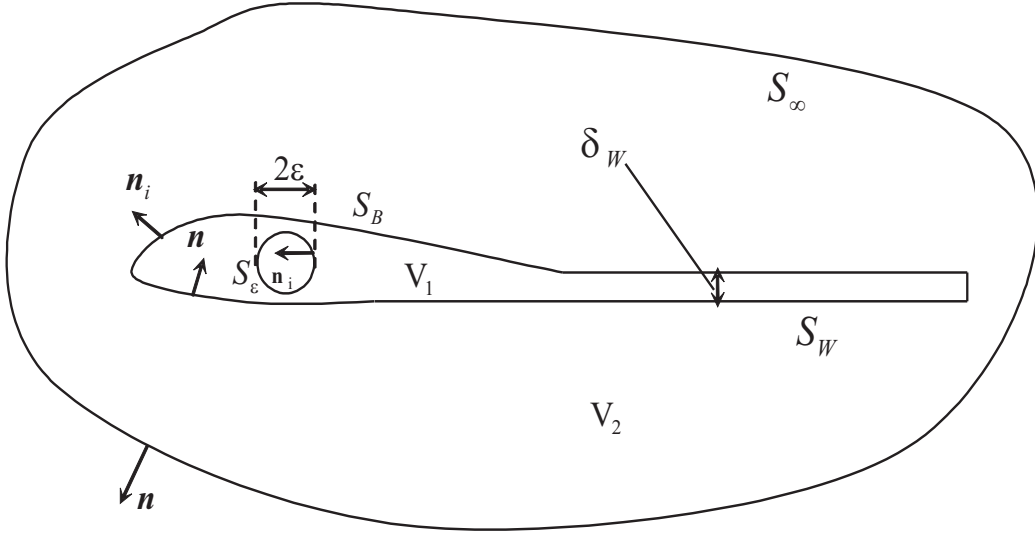


Figura 4.15: Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial tridimensional

(4.36) a integral de superfície é para todas as fronteiras. Considere φ_1 a solução fundamental $G = 1/4\pi r$, o potencial não conhecido $\varphi_2 = \Phi_i$ e $S = S_B \cup S_W \cup S_\infty$. De acordo com a Fig. 4.15 Φ_i é o potencial total no domínio V_1 (i.e. dentro do corpo) e φ_1 é o potencial de uma fonte que é singular quando $r \rightarrow 0$. Quando existe uma singularidade localizada em x_0 no domínio V_1 , é necessário excluí-la da região de integração. Essa singularidade é então cercada por uma pequena esfera de raio ϵ . Fora da esfera, no restante do domínio V_1 , o potencial φ_1 satisfaz a equação de Laplace. O potencial φ_2 satisfaz a equação de Laplace em todo o domínio V_1 . Então a relação recíproca, aplicada ao domínio V_1 subtraído do volume da singularidade, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{S_B, S_W, S_\epsilon} (G(r) \nabla \Phi_i) \cdot n_i dS - \int_{S_B, S_W, S_\epsilon} (\Phi_i \nabla G(r)) \cdot n_i dS = 0 \quad (4.37)$$

onde a função de Green corresponde a uma fonte pontual $G(r) = 1/4\pi r$ e o potencial de dipolo é dado por $\nabla G(r) = \nabla(1/r)/4\pi = -r/4\pi r^3$. Aqui, $r = x - x_0$ com x sendo um ponto arbitrário do escoamento e x_0 as coordenadas da singularidade.

Considerando a integral sobre S_ε que contém a singularidade, podemos escrever $dS = \varepsilon^2 d\Omega$, onde $d\Omega$ é o ângulo sólido diferencial, e usando $G(r) = 1/4\pi\varepsilon$ e $\nabla G(r) = -n_i/4\pi\varepsilon^2$ onde o vetor unitário normal $n_i = r/\varepsilon$, podemos escrever para o limite quando ε tende a zero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G(r) \nabla \Phi_i \cdot n_i dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \nabla \Phi_i \cdot n_i \varepsilon^2 d\Omega = O(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Phi_i \nabla G(r) \cdot n_i dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{S_\varepsilon} \Phi_i \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Omega \varepsilon^2 = -\Phi_i(x_0) \quad (4.39)$$

Consequentemente a Eq. (4.37) se reduz a:

$$\Phi_i(x_0) = \int_{S_B, S_W} G(r) \nabla \Phi_i \cdot n dS - \int_{S_B, S_W} \Phi_i \nabla G(r) \cdot n dS \quad (4.40)$$

As duas integrais do lado direito da equação acima representam uma distribuição da função de Green $G(r) = 1/4\pi r$ ao longo da superfície e a função de Green $\nabla G(r) = (1/4\pi) \nabla(1/r) \cdot n$ orientada perpendicularmente à superfície do volume de controle, ou seja, distribuições de fontes e de dipolos na superfície. Por analogia aos resultados da teoria da eletrostática, chamaremos as duas integrais da Eq. (4.40) de potencial single-layer e potencial double-layer.

Agora considere a situação em que o escoamento de interesse V_2 ocorre fora da fronteira de $S_B \cup S_W$ e que o potencial total é denotado por Φ . Para esse escoamento o polo x_0 (que está na região V_1) é interior a $S_B \cup S_W$, e usando a Eq. (4.36) resulta em:

$$\int_S G \nabla \Phi \cdot n dS - \int_S \Phi \nabla G \cdot n dS = 0 \quad (4.41)$$

Uma equação mais apropriada pode ser obtida em termos da diferença $\Phi - \Phi_i$ e de seu gradiente na superfície. Para isso, subtrai-se a Eq. (4.40) da Eq. (4.41) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_0) = & - \int_{S_B} G(r) \nabla (\Phi - \Phi_i) \cdot n dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS - \\ & - \int_{S_W} G(r) \nabla (\Phi - \Phi_i) \cdot n dS + \int_{S_W} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS - \\ & - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS \end{aligned} \quad (4.42)$$

A integral sobre S_∞ na Eq. (4.42) é definido como o potencial não perturbado $\varphi^\infty(x_0)$:

$$\varphi^\infty(x_0) = - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS \quad (4.43)$$

Existe a propriedade de que a velocidade normal na esteira é contínua de tal forma que $\partial\Phi/\partial n - \partial\Phi_i/\partial n = 0$. Também é considerado que a esteira é suficientemente delgada de tal forma que se sua espessura tender a zero ($\delta_W \rightarrow 0$), resulta em:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_W \rightarrow 0} \left(- \int_{S_W} G(r) (\partial\Phi/\partial n - \partial\Phi_i/\partial n) dS + \int_{S_W} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS \right) = \\ = \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot n dS \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde Φ_U é o potencial total em cima da esteira e Φ_L é o potencial total abaixo da esteira. Então a Eq. (4.42) reduz-se a uma equação integral de contorno onde o potencial total em um ponto qualquer no interior do corpo é função da distribuição de fontes e dipolos na superfície do corpo [22]:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_0) = & \varphi^\infty - \int_{S_B} G(r) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi - \Phi_i) dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot ndS + \\ & + \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot ndS \end{aligned} \quad (4.45)$$

A equação (4.45) determina o valor de $\Phi_i(x_0)$ em termos da diferença $\mu = \Phi - \Phi_i$ chamado de intensidade do dipolo e $\sigma = \partial\Phi/\partial n - \partial\Phi_i/\partial n$ chamado de intensidade da fonte. Então o problema é resolvido quando a distribuição de fontes e dipolos é determinada. A princípio, um número infinito de distribuições de fontes e dipolos darão o mesmo escoamento externo, mas diferentes escoamentos internos. Decompondo $\Phi_i = \varphi_i^D + \varphi^\infty$ e por conveniência fazendo $\varphi_i^D = 0$ ($\Phi_i = \varphi^\infty$) a Eq. (4.45) reduz a:

$$\begin{aligned} - \int_{S_B} G(r) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi^\infty}{\partial n} \right) dS + \int_{S_B} \varphi^D \nabla G(r) \cdot ndS + \\ + \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot ndS = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usando a condição de contorno especificada na Eq. (4.30) temos que:

$$\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi^\infty}{\partial n} = U_N - \frac{\partial\varphi^\infty}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi^\infty}{\partial n} \quad (4.47)$$

A equação (4.47) é uma condição de contorno cinemática do tipo Neumann que determina a intensidade das fontes na superfície do corpo. Então a primeira integral do lado esquerdo da Eq. (4.46) é resolvida analiticamente usando a condição de contorno dada pela Eq. (4.47).

Outra forma de resolver a eq. (4.45) é assumir que o potencial no interior do corpo (no volume V_1) é nulo. Feito isso, tem-se que:

$$-\varphi^\infty = - \int_{S_B} G(r) \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS + \int_{S_B} \Phi \nabla G(r) \cdot ndS + \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot ndS \quad (4.48)$$

Usando novamente a condição de contorno especificada na Eq. (4.30) temos que:

$$\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = U_N = 0 \quad (4.49)$$

Como a primeira integral do lado direito da eq. (4.48) é nula, resulta em:

$$-\varphi^\infty = \int_{S_B} \Phi \nabla G(r) \cdot ndS + \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot ndS \quad (4.50)$$

Logo, o escoamento é representado apenas por uma distribuição superficial de dipolos. No presente trabalho, optou-se por resolver as eqs. (4.46) e (4.47), ou seja, para o caso em que $\Phi_i = \varphi^\infty$. A seguir, iremos abordar a metodologia numérica para resolver essas equações.

4.2.3 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Para a formulação integral de contorno apresentada foi elaborado um código escrito na linguagem FORTRAN que determina o campo de pressão e de velocidade e as forças de sustentação e de arrasto induzido de um escoamento tridimensional. O problema consiste em resolver numericamente as eqs. (4.46) e (4.47). Para isso é necessário resolver as integrais e representar a superfície do corpo por elementos planos (painéis). Então a superfície do corpo é representada por N elementos triangulares e/ou elementos quadrilaterais planos, tipicamente $N = 10^2$ a 10^3 , e sobre cada painel é assumido uma densidade de fonte e uma densidade de dipolo constante. Os elementos da malha, para uma boa convergência dos resultados, têm um tamanho aproximado de $1/20$ da corda. O valor da densidade de fonte de cada elemento é encontrado pela eq. (4.47) e então a eq. (4.46) se transforma num sistema linear de equações cujas incógnitas são as densidades de dipolo. A esteira é representada por filamentos de vórtices retos que saem do bordo de fuga do corpo com sustentação. A esteira de vórtices tem uma inclinação de θ em relação à linha de corda do corpo com sustentação. Esse ângulo θ é um parâmetro de entrada no código computacional.

A primeira e segunda integrais da eq. (4.46) são resolvidas analiticamente. Os elementos da malha são planos e um sistema de coordenadas local é adotado no centro de cada elemento com coordenada $z = 0$. Então, as integrais são resolvidas no sistema de coordenadas local ao longo de x e y . O vetor unitário normal à superfície e a área de cada elemento da malha são calculados por meio do produto vetorial entre dois vetores no plano do elemento. Para o cálculo da contribuição de um elemento sobre ele mesmo, as integrais são calculadas analiticamente fazendo-se o limite em questão. Desta forma, uma subtração de singularidade não é necessário no presente método. A terceira integral na eq. (4.46) representa a contribuição dos filamentos de vórtices no escoamento e sua magnitude é igual à diferença das intensidades dos dipolos dos painéis adjacentes ao bordo de fuga (de cima e de baixo) do corpo com sustentação. Isso representa fisicamente a condição de Kutta [20] e garante que o filamento de vórtice não tem fim (Teorema de Helmholtz). Suponha, agora, a superfície do corpo representada por n elementos de malha e n_w vórtices em forma de ferradura. Então, a eq. (4.46) pode ser reescrita como:

$$\sum_{k=1}^n \mu_k C_{jk} + \sum_{k=1}^{n_w} \mu_{wk} C_{jk} = - \sum_{k=1}^n \sigma_k B_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.51)$$

onde:

$$B_{jk} = \int_{S_k} G_{jk} dS_k \quad e \quad C_{jk} = \int_{S_k} G_{jk} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2} dS_k \quad (4.52)$$

e onde C_{jk} é o coeficiente de distúrbio no ponto de controle j devido à distribuição constante de dipolo μ_k no elemento de malha k e também associado ao distúrbio no ponto de controle j devido ao filamento de vórtice μ_{wk} . B_{jk} é o coeficiente de distúrbio no ponto de controle j devido à distribuição constante de fonte σ_k no elemento de malha k . O valor de σ_k é determinado pela eq. (4.47) e os valores de μ_k e μ_{wk} são encontrados na resolução do sistema linear (4.51). No código computacional desenvolvido, utilizou-se o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear [44].

Na determinação da distribuição de velocidade e de pressão na superfície do corpo o presente método tem a vantagem de que, para esses cálculos, não é necessário usar os coeficientes de distúrbio que tem um custo computacional elevado. Uma distribuição de densidade de dipolo de segunda ordem é assumida localmente usando os valores de cinco elementos de malha (o elemento central e seus quatro vizinhos). A velocidade tangencial no elemento é obtida derivando-se o potencial e o coeficiente de pressão é encontrado usando-se a equação de Bernoulli.

O coeficiente de sustentação é determinado pela integração da distribuição de pressão na superfície do corpo ou então pelo teorema de Kutta-Joukowski. O coeficiente de arrasto induzido é obtido usando-se a formulação integral da equação da quantidade de movimento num volume de controle a jusante do corpo (o plano de Trefftz), já que a integração da distribuição de pressão na superfície do corpo resulta em valores imprecisos do coeficiente de arrasto induzido para malhas não muito refinadas [6]. Aplicando a equação da quantidade de movimento e assumindo que o escoamento é permanente, e que a esteira de vórtices sai do bordo de fuga na direção do escoamento não perturbado, temos [12]:

$$D_i = \frac{\rho}{2} \int_{wake} (\Phi_U - \Phi_L) \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl \quad (4.53)$$

onde $\partial \Phi / \partial n$ é a velocidade normal à esteira no plano de Trefftz e l é o comprimento medido na direção da envergadura. Para resolver a equação acima, considera-se os pontos de controle entre os filamentos de vórtices (no meio) cuja intensidade vale $\Phi_U - \Phi_L$ e calcula-se as velocidades induzidas por esses filamentos de vórtices (esteira).

4.2.4 APLICAÇÕES DO MÉTODO

Para verificar a validade do método, resultados do programa desenvolvido são comparados com resultados analíticos, experimentais e numéricos. A Figura 4.16(b) com-

para a solução analítica (potencial) do escoamento em torno de uma esfera com a solução numérica do presente método. O gráfico mostra que a distribuição do coeficiente de pressão numérica coincide com a distribuição dada pela solução analítica, $cp = 1 - (9/4)\sin^2\theta$, com um erro máximo de 5%.

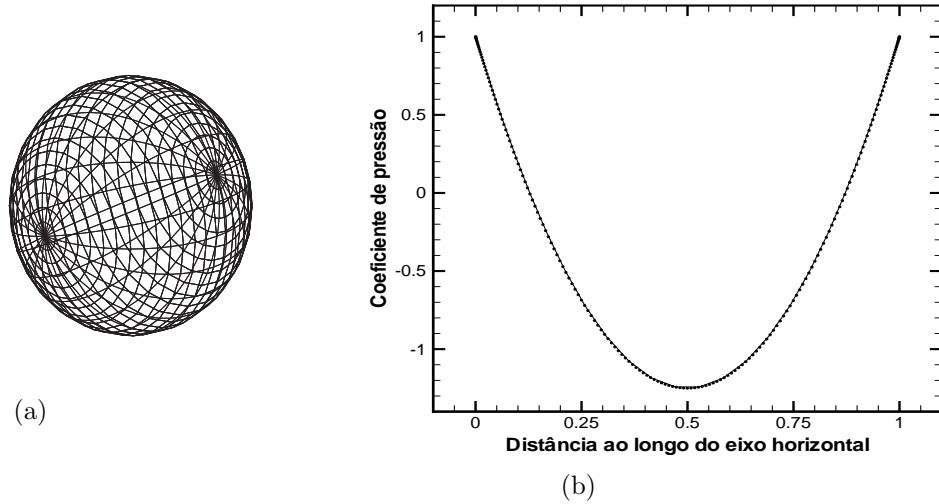


Figura 4.16: Coeficiente de pressão em torno de uma esfera com raio igual a $\pi/2$. Os círculos representam a simulação numérica com 800 elementos de malha e a linha contínua representa a solução analítica $cp = 1 - (9/4)\sin^2\theta$.

Foi simulado, usando o método integral de contorno, o escoamento em torno de um corpo esbelto com nariz hemisférico, como mostrado na Fig. 4.17(b). Os resultados numéricos da distribuição do coeficiente de pressão foram comparados com resultados experimentais obtidos por Cole [9]. Novamente o erro máximo foi de 5%.

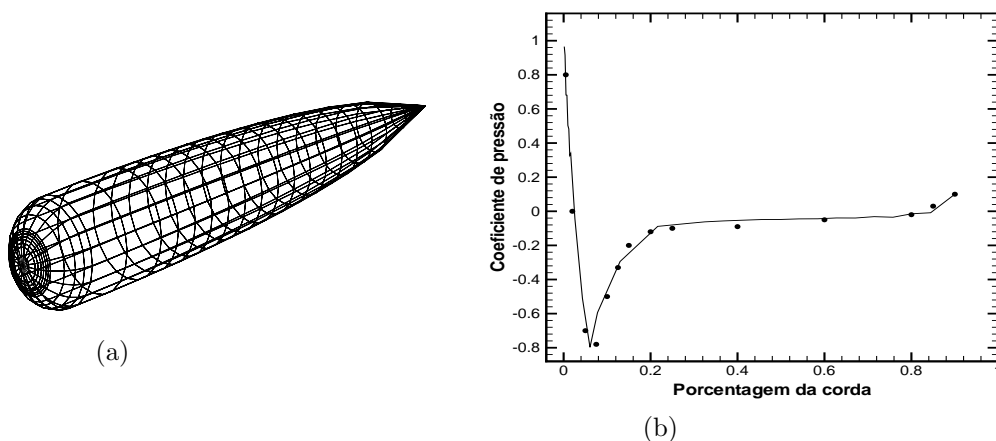


Figura 4.17: Coeficiente de pressão ao longo do eixo longitudinal de um corpo com nariz hemisférico. A linha contínua representa a simulação numérica com 860 elementos de malha e os círculos representam as medidas experimentais de Cole, 1952 para um número de Reynolds igual a 9×10^5 baseado no comprimento do corpo.

Outra aplicação do método integral de contorno analisada, foi o cálculo da distribuição do coeficiente de pressão na superfície de uma asa com razão de aspecto igual a 3 e razão de afilamento igual a 0.5. Os resultados foram comparados com os dados experimentais de Kolbe e Boltz [26] para um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado do comprimento da linha de corda média. Da Fig. 4.18(a), podemos ver que a asa apresenta um ângulo de enflechamento medido no bordo de ataque igual a 48.5° , que não apresenta torção geométrica e que o perfil usado é o NACA 64A10 em planos inclinados de 45° em relação ao plano de simetria da asa. As Figuras 4.18(b), 4.19, 4.20 e 4.21 mostram a comparação entre os resultados numéricos e experimentais da distribuição do coeficiente de pressão a 55%, 19%, 80% e 92% da semi-envergadura, respectivamente, para ângulos de ataque igual a 6° e 12° . Esses gráficos mostram que os resultados da simulação numérica são muito próximos dos resultados experimentais, com exceção da região próxima do bordo de ataque, no intradorso e para grandes ângulos de ataque onde o erro máximo é em torno de 30%.

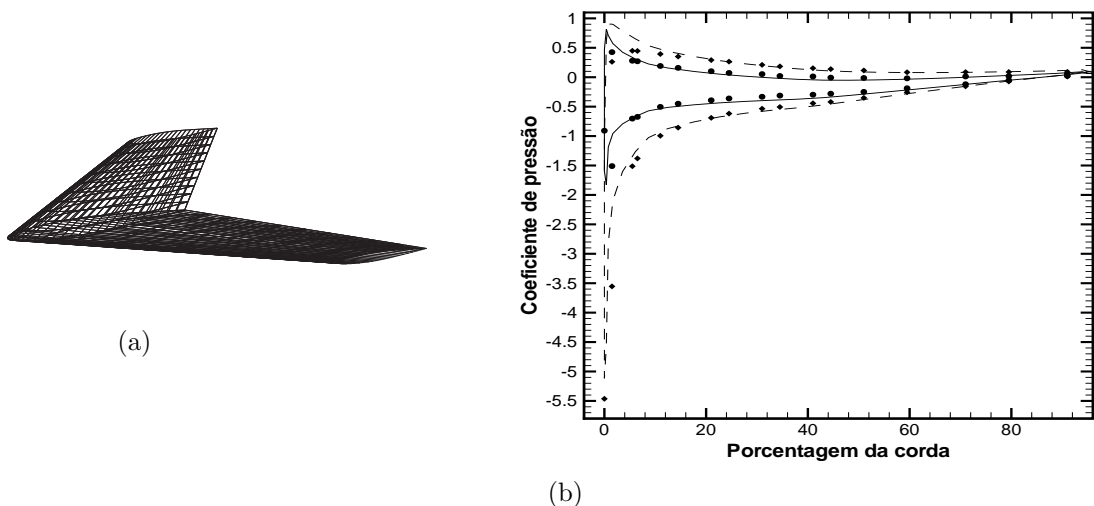


Figura 4.18: Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 55% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.

A discrepância possivelmente ocorre porque a asa analisada tem um ângulo de enflechamento muito grande e o código implementado não leva em conta o efeito do vórtice gerado no bordo de ataque. É importante ressaltar que essa limitação não é do método integral de contorno, mas do código implementado. Outra possibilidade para a discrepância é a presença da camada limite que não é levada em consideração no método em questão. Para uma asa com grande enflechamento, a velocidade do escoamento

mento na direção da envergadura é considerável e ocasiona um aumento na espessura da camada limite que, por sua vez, modifica o coeficiente de pressão na região.

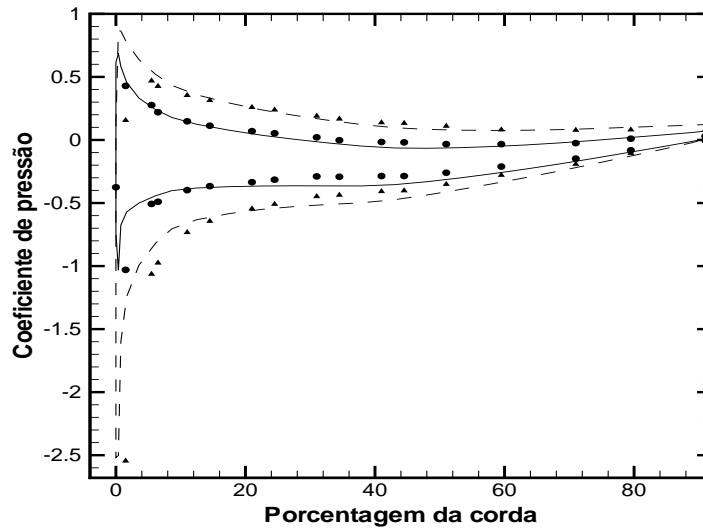


Figura 4.19: Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 19% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.

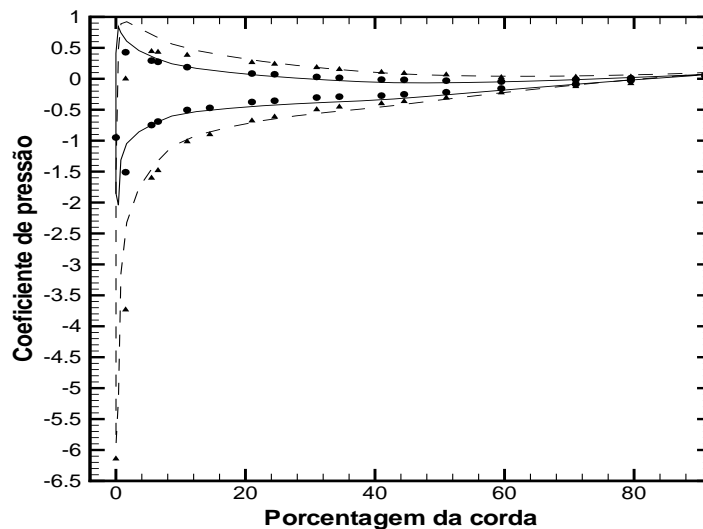


Figura 4.20: Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 80% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.

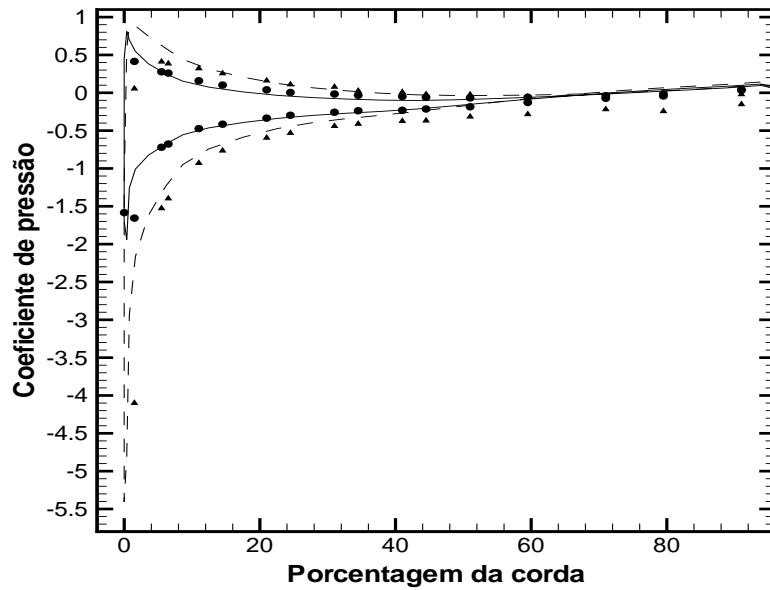


Figura 4.21: Coeficiente de pressão em torno de uma asa enflechada a 92% da semi-envergadura. A linha contínua e a linha pontilhada representam resultados numéricos com 1000 elementos de malha para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente. Os círculos e losângulos representam resultados experimentais para ângulos de ataque iguais a 6° e 12° respectivamente e um número de Reynolds igual a 4×10^6 baseado no comprimento da linha de corda média.

As figuras 4.22(a) e 4.22(b) mostram, para a asa da Fig. 4.18(a), os dados experimentais do coeficiente de sustentação e do coeficiente de arrasto total para vários ângulos de ataque. Previsões do método integral de contorno para o coeficiente de sustentação e para o coeficiente de arrasto induzido (uma parcela do coeficiente de arrasto total) são comparados com resultados experimentais e com resultados numéricos do método Vortex-Lattice implementado previamente [1]. Para simular uma asa com perfil simétrico (NACA 64A10) usando o método Vortex-Lattice consideramos os filamentos de vórtices (bound and trailing vortices) em um plano, ou seja, com camber igual a zero. Podemos observar que para ângulos inferiores a 15° , as previsões do método integral de contorno conferem com os resultados experimentais e com as previsões do método Vortex-Lattice. Para pequenos ângulos de ataque ($\alpha \sim 5^\circ$) o coeficiente de sustentação é representado pela reta $C_L = (1/20)\alpha$.

A pequena diferença observada entre os resultados numéricos e experimentais (tipicamente em torno de 20%) no gráfico do coeficiente de arrasto, mesmo para pequenos ângulos de ataque, é a parcela do arrasto viscoso que está presente nos dados experimentais. É importante observar que o coeficiente $(1/20)$ é aproximadamente duas vezes menor que o correspondente escoamento potencial bidimensional em torno de

um aerofólio delgado, ou seja, $C_L = (\pi^2/90)\alpha$.

Acima de 20° de ângulo de ataque, a discrepância é devida à separação da camada limite (estol) que não é prevista pelo método em questão. As previsões do coeficiente de arrasto induzido pelo método integral de contorno coincidem com as previsões do método Vortex-Lattice.

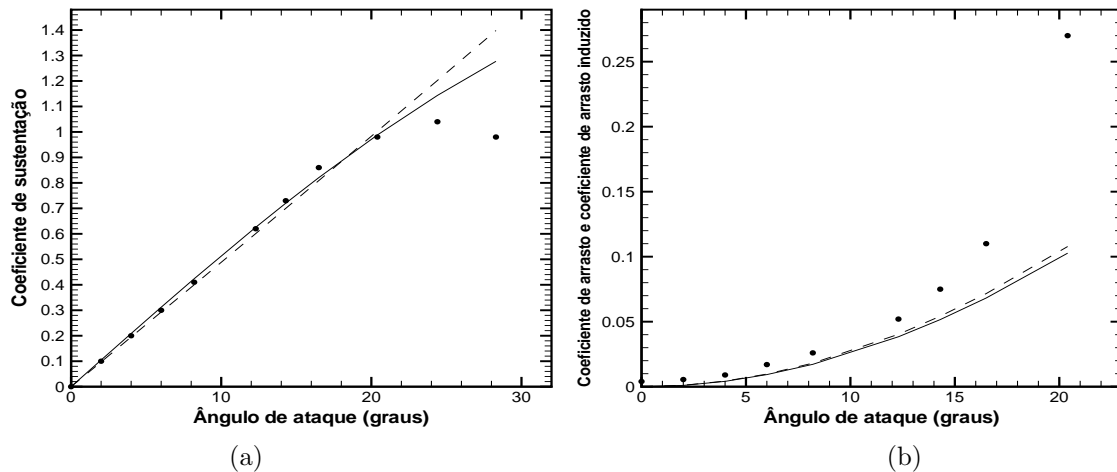
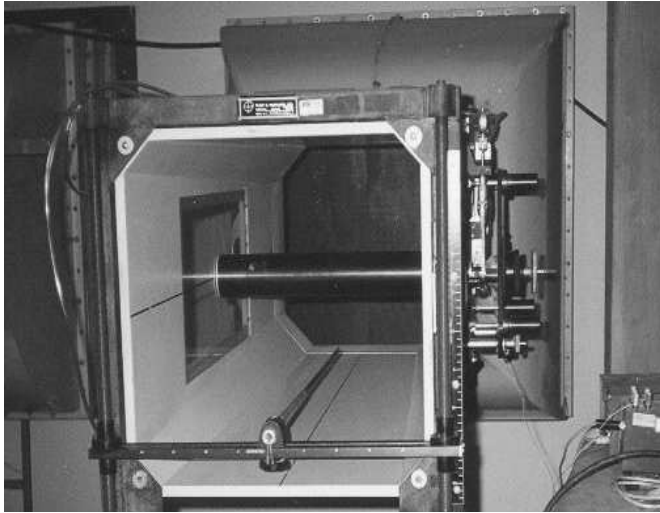


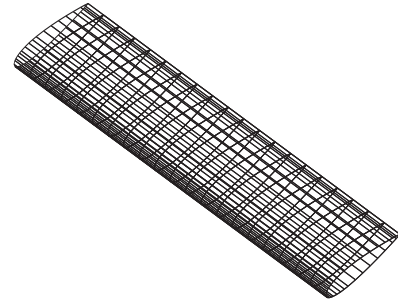
Figura 4.22: Coeficiente de sustentação, coeficiente de arrasto e coeficiente de arrasto induzido para uma asa enflechada. A linha contínua representa as previsões do método integral de contorno com 1000 elementos de malha, a linha pontilhada representa as previsões do método Vortex-Lattice com 406 elementos de malha e os círculos representam as medidas experimentais com número de Reynolds igual a 4×10^6 . Para pequenos ângulos de ataque o coeficiente de sustentação é representado pela reta $(1/20)\alpha$.

A figura 4.23(a) mostra a foto do túnel de vento do laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade de Brasília. O túnel de vento é subsonico e um escoamento típico tem número de Reynolds na ordem de 10^5 . A secção de teste é quadrada com comprimento do lado igual a 460mm . No ensaio realizado nesse túnel de vento mediu-se as forças de sustentação e de arrasto de uma asa retangular com razão de aspecto igual a 4 e sem torção geométrica. O perfil da asa é o NACA 0012.

Para a geometria da asa da Fig. 4.23(b), os gráficos das figuras 4.24 e 4.25 mostram os valores experimentais medidos de coeficiente de sustentação e de coeficiente de arrasto total, para vários ângulos de ataque. O número de Reynolds do escoamento em torno da asa é igual a 1.6×10^5 . Os resultados obtidos pelo método integral de contorno foram comparados com os dados experimentais e com os resultados do método Vortex-Lattice e da clássica Teoria da Linha de Sustentação [1]. Observa-se que para ângulos de ataque inferiores a 12° os resultados do coeficiente de sustentação previstos pelo método de integral de contorno coincidem com os dados experimentais. Para ângulos



(a)



(b)

Figura 4.23: Montagem experimental. (a) Túnel de vento da Universidade de Brasília e (b) Asa (NACA0012) simulada e ensaiada.

acima de 12° existe uma discrepância devido ao fato de que o presente método não leva em conta o efeito da camada limite sobre o escoamento. O gráfico da Fig. 4.25 mostra que o resultado do coeficiente de arrasto induzido previstos pelo método integral de contorno coincide com os resultados do método Vortex-Lattice e da Teoria da Linha de Sustentação. A discrepância entre os valores numéricos e experimentais do coeficiente de arrasto é em torno de 25% para o ângulo de ataque igual a 8° . Essa diferença é atribuída à contribuição do arrasto viscoso que não é considerada nos resultados numéricos. Para pequenos ângulos de ataque, o coeficiente de sustentação é representado pela reta $C_L = (13/200)\alpha$, que representa valores de C_L aproximadamente duas vezes menores que o valor previsto pela teoria de aerofólios delgados em escoamentos bidimensionais.

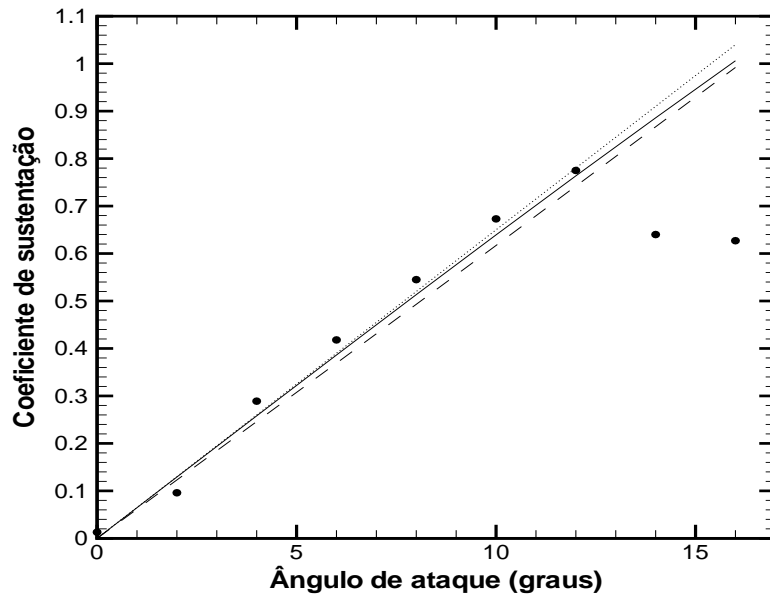


Figura 4.24: Coeficiente de sustentação para uma asa reta. A linha contínua representa o resultado do método integral de contorno com 816 elementos de malha, a linha tracejada representa o resultado do método Vortex-Lattice com 336 elementos de malha, a linha pontilhada representa o resultado da Teoria da Linha de Sustentação com 60 estações ao longo da envergadura e os círculos representam as medidas experimentais. O número de Reynolds baseado na dimensão da corda da asa é 1.6×10^5 .

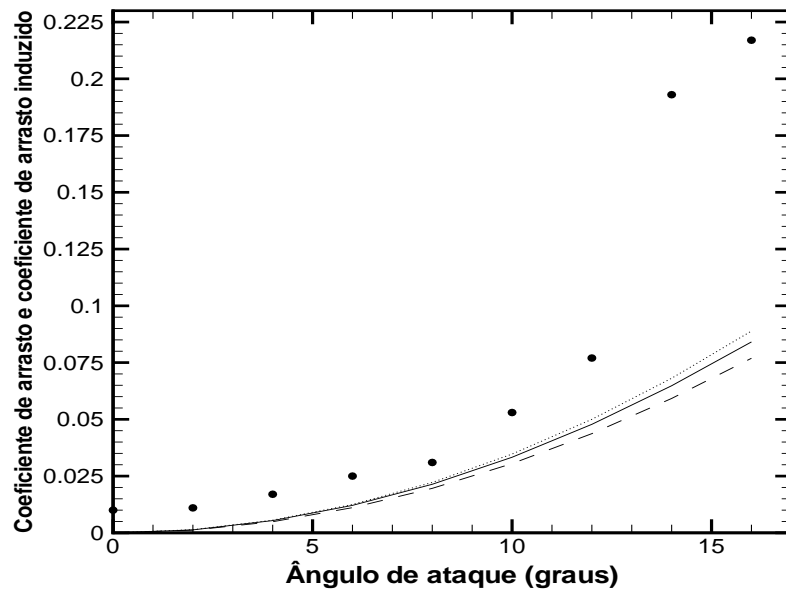


Figura 4.25: Coeficiente de arrasto e de arrasto induzido para uma asa reta. A linha contínua representa o resultado do método integral de contorno com 816 elementos de malha, a linha tracejada representa o resultado do método Vortex-Lattice com 336 elementos de malha, a linha pontilhada representa o resultado da Teoria da Linha de Sustentação com 60 estações ao longo da envergadura e os círculos representam as medidas experimentais. O número de Reynolds baseado na dimensão da corda da asa é 1.6×10^5 .

5 ACOPLAMENTO DA TEORIA POTENCIAL COM APROXIMAÇÃO DE CAMADA LIMITE

Neste capítulo é apresentado alguns métodos para a solução da equação integral de camada limite. O objetivo principal é, a partir de um escoamento externo à camada limite dado pela teoria potencial, determinar os principais parâmetros de camada limite laminar e turbulenta e, conseqüentemente, determinar o arrasto de fricção e possíveis pontos de descolamento.

5.1 EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE PARA ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS

A partir das equações de Navier-Stokes, pode-se deduzir as equações de camada limite fazendo-se uma análise de escalas, como proposto por Prandtl [39]. Considere a equação da continuidade e as equações da quantidade de movimento na forma diferencial. Considere também o escoamento bidimensional incompressível sobre uma superfície plana em $y = 0$. Assumindo que:

$$u \sim u_e, \quad p \sim \rho u_e^2, \quad x \sim L, \quad y \sim \delta \quad (5.1)$$

encontra-se as equações de camada limite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.4)$$

com condições de contorno usuais dadas por:

$$u = v = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (5.5)$$

$$u \rightarrow u_e \quad \text{para } y \rightarrow \delta \quad (5.6)$$

Fazendo-se uma comparação entre as equações de Navier-Stokes bidimensional e as equações de camada limite, percebe-se que o termo viscoso $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e a variação de p com y são desprezados. Diferentemente das equações de Navier-Stokes, o termo p não é mais uma incógnita, pois foi absorvido como uma condição de contorno do problema igualando dp/dx ao valor fora da camada limite onde a equação de Bernoulli é válida:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx} \quad (5.7)$$

Então as equações de camada limite (5.2) e (5.3) (continuidade e quantidade de movimento na direção x) formam duas equações para duas incógnitas (u e v), enquanto que as equações de Navier-Stokes bidimensional formam três equações para três incógnitas (u , v e p). Além do mais as equações de camada limite são equações parabólicas onde um distúrbio se propaga na direção e sentido do escoamento. Essa mudança ocorre por ter eliminado a variável p eq. (5.7) e por ter desprezado o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DA CAMADA LIMITE BIDIMENSIONAL

Sejam as equações (5.2) e (5.3) e considere o valor de $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ igual a τ e o valor de $-\left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{dp}{dx} \right)$ igual a $u_e \left(\frac{du_e}{dx} \right)$ (eq. 5.7). Então:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.8)$$

Multiplicando a eq. (5.2) por u e adicionando a equação resultante à eq. (5.8) obtemos:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.9)$$

Integrando a eq. (5.9) com respeito a y de $y = 0$ até $y = \delta$ e definindo que o índice e denota a borda superior da camada limite, temos:

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + u_e v_e = \int_0^\delta u_e \frac{du_e}{dx} dy - \frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.10)$$

onde τ_w é a tensão de cisalhamento na superfície e:

$$v_e = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (5.11)$$

A equação acima é encontrada com auxílio da eq. (5.2). Então:

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} - u_e \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.12)$$

Manipulando a eq. acima, encontra-se:

$$\int_0^\infty \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [u(u_e - u)] - \frac{du_e}{dx} (u_e - u) \right\} dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.13)$$

Multiplicando a eq. acima por -1 e rearranjando os termos, obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[u_e^2 \int_0^\delta \frac{u(u_e - u)}{u_e^2} dy \right] + u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{u_e - u}{u_e} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.14)$$

Define-se como espessura de deslocamento δ^* a distância que as linhas de corrente do escoamento externo são deslocadas na direção y devido à presença da camada limite:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (5.15)$$

e define-se espessura de quantidade de movimento θ , como:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (5.16)$$

O fator de forma H é definido como sendo a razão entre a espessura de deslocamento e a espessura de quantidade de movimento:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (5.17)$$

Usando as definições de δ^* e θ na eq. (5.14) obtém-se:

$$\frac{d}{dx} (u_e^2 \theta) + \delta^* u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.18)$$

ou

$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad (5.19)$$

em que c_f é o coeficiente de fricção local definido como:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} \quad (5.20)$$

A eq. (5.19) é a equação integral da camada limite para escoamentos bidimensionais incompressíveis laminares ou turbulentos.

5.3 SIMILARIDADE EM ESCOAMENTOS LAMINARES

5.3.1 CONCEITO DE SIMILARIDADE

O conceito de similaridade, aplicado às equações da continuidade e da quantidade de movimento, pode ser entendido para um escoamento externo dentro da camada limite. Em geral a solução das equações 5.2 e 5.3, para um escoamento laminar com ν e $u_e(x)$ conhecidos, é:

$$\frac{u}{u_e} = g(x, y) \quad (5.21)$$

onde g é uma função de x e y . Existem casos especiais em que:

$$\frac{u}{u_e} = g(\eta) \quad (5.22)$$

onde η é chamado de variável de similaridade e é função de x e y . Então, para esses casos, o número de variáveis independentes é reduzido de dois (x e y) para um (η) e as equações 5.2 e 5.3 passam a ser equações diferenciais ordinárias.

5.3.2 EQUAÇÃO DE FALKNER-SKAN

Existem diversos procedimentos para obtenção de formas de similaridade nas equações de camada limite laminar. Muitas transformações de coordenadas já foram desenvolvidas para reduzir as equações de camada limite em equações diferenciais ordinárias. Uma das transformações de coordenadas mais conhecida é a transformação de Falkner-Skan. Das análises de escala, encontra-se que:

$$\delta \sim \left(\frac{\nu x}{u_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

sugerindo uma variável de similaridade η definida como:

$$\eta(x, y) := \frac{y}{\delta} = y \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

Adimensionalizando a função de corrente $\psi(x, y)$ por $\sqrt{u_e \nu x}$, pode-se definir a função $f(\eta)$ da seguinte forma:

$$f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{u_e \nu x}} \quad (5.25)$$

Escrevendo as equações de Prandtl em termos da função corrente e, no cálculo das derivadas, observando que $\psi(x, y)$ depende explicita e implicitamente de x e implicitamente de y , obtém-se a equação diferencial de terceira ordem em termos de η e

conhecida como equação de Falkner-Skan:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m [1 - (f')^2] = 0 \quad (5.26)$$

onde m é o gradiente de pressão adimensional definido por:

$$m = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (5.27)$$

As componentes u e v do vetor velocidade são dadas por:

$$u = u_e f' \quad (5.28)$$

$$v = -\sqrt{u_e \nu x} \left[\frac{f}{\sqrt{u_e x}} \frac{d}{dx} \sqrt{u_e x} + f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad (5.29)$$

As condições de contorno com base na transformação dada pela eq. 5.24 são escritas como:

$$\eta = 0, \quad f' = f = 0, \quad (5.30)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1 \quad (5.31)$$

onde η_e é dado por:

$$\eta_e = \sqrt{\frac{u_e}{\nu x \delta}} \quad (5.32)$$

Da definição de m e das condições de contorno, pode-se concluir que a eq. 5.26 somente será uma equação diferencial ordinária se m e as condições de contorno forem independentes de x , isto é, constantes. A condição para que m seja constante é satisfeita se a velocidade externa variar com x da seguinte maneira:

$$u_e = C x^m \quad (5.33)$$

Então se o escoamento fora da camada limite obedecer a eq. 5.33, as equações diferenciais parciais 5.2 e 5.3 com variáveis independentes x e y podem se reduzidas a uma equação diferencial ordinária 5.26 com variável independente η . Esse escoamento laminar característico é chamado de escoamento similar.

Os escoamentos com gradiente de pressão negativo $\frac{dp}{dx} < 0$, são conhecidos como escoamentos com gradiente de pressão favorável, enquanto que os escoamentos com gradiente de pressão positivo $\frac{dp}{dx} > 0$, são conhecidos como escoamentos com gradiente de pressão adverso. Para valores positivos de m na eq. 5.33, tem-se que o escoamento é com gradiente de pressão favorável. Para valores negativos de m , tem-se um escoamento com gradiente de pressão adverso. Se expressarmos a tensão de cisalhamento na parede, em termos das variáveis definidas anteriormente, obtemos:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu u_e f''_w \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \quad (5.34)$$

Sabe-se que para $\tau_w = 0$ acontece a separação da camada limite e isso ocorre para $f_w'' = 0$ e $m = -0.0904$. Então os valores de m possíveis correspondem ao intervalo:

$$-0.0904 \leq m < \infty \quad (5.35)$$

A espessura da camada limite δ é definida como a distância normal do contorno sólido ao ponto onde a velocidade u do escoamento na camada limite difere de 1% da velocidade da corrente livre local. A partir da definição da variável de similaridade η , pode-se determinar a espessura da camada limite em cada estação e, para isso, define-se η_e como sendo o valor de η correspondente ao ponto em que $u = 0.99u_e$. Assim sendo, o valor de δ em cada estação é dado por:

$$\delta = \frac{\eta_e x}{\sqrt{\frac{u_e x}{\nu}}} = \eta_e x Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad (5.36)$$

Um outro parâmetro utilizado para se medir a espessura da camada limite é usando a definição de espessura de deslocamento da camada limite δ^* :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \left(\frac{\nu x}{u_e}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\eta_e} (1 - f'(\eta)) d\eta \quad (5.37)$$

A espessura de quantidade de movimento θ , é definida como:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \left(\frac{\nu x}{u_e}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\eta_e} f'(\eta)(1 - f'(\eta)) d\eta \quad (5.38)$$

5.3.2.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE FALKNER-SKAN

O objetivo é resolver numericamente a seguinte equação diferencial ordinária de terceira ordem (eq. de Falkner-Skan):

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m [1 - (f')^2] = 0 \quad (5.39)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\eta = 0, \quad f' = f = 0, \quad (5.40)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1 \quad (5.41)$$

Para isso, faz-se uma decomposição da eq. 5.39 em um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem visando à aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem (ver apêndice A em anexo):

$$f' = w \quad (5.42)$$

$$f'' = w' = v \quad (5.43)$$

$$f''' = v' = m(w^2 - 1) - \frac{m+1}{2}fv \quad (5.44)$$

Percebe-se que o método de Runge-Kutta precisa das informações no ponto precedente (problema parabólico), $F(i)$, $W(i)$ e $V(i)$. Como não se conhece o valor de $V = f''$ em $\eta = 0$, deve-se utilizar a seguinte metodologia para encontrar esse valor:

- Estima-se o valor de f'' em $\eta = 0$ (f''_0)
- Integra-se o problema de valor inicial
- Se $|1 - f'| < \epsilon$ o problema foi resolvido
- Se $|1 - f'| \geq \epsilon$, um novo valor para f''_0 é estimado usando-se o método de Newton-Raphson (busca de zero da função $f' - 1$)

5.3.2.2 RESULTADOS NUMÉRICOS DA EQUAÇÃO DE FALKNER-SKAN

Foi elaborado um código escrito na linguagem de programação FORTRAN, que determina as propriedades do escoamento dentro de uma camada limite laminar submetida a um gradiente de velocidade fora da camada limite dado pela eq.(5.33). O código resolve a equação de Falkner-Skan descrita na seção anterior. Analisa-se inicialmente o perfil similar de velocidade para $m = 0.0$, $m = 0.1$ e $m = -0.0904$ (separação da camada limite). A fig. 5.1 mostra que para $m = -0.0904$ tem-se separação da camada limite como previsto pela teoria, pois $dw/d\eta = 0$ na parede.

A espessura da camada limite ao longo de x , para condições onde $C = 1$, comprimento x de parede igual a 1, e o fluido em questão sendo o ar com $\rho = 1.225$ e $\mu = 0.0000184$, é calculada para as situações de $m = 0$, $m = 0.1$ e $m = -0.0904$, como mostrado na figura 5.2:

Percebe-se que para gradientes de pressão favorável (m positivo) a espessura da camada limite é menor que para gradientes de pressão adverso (m negativo).

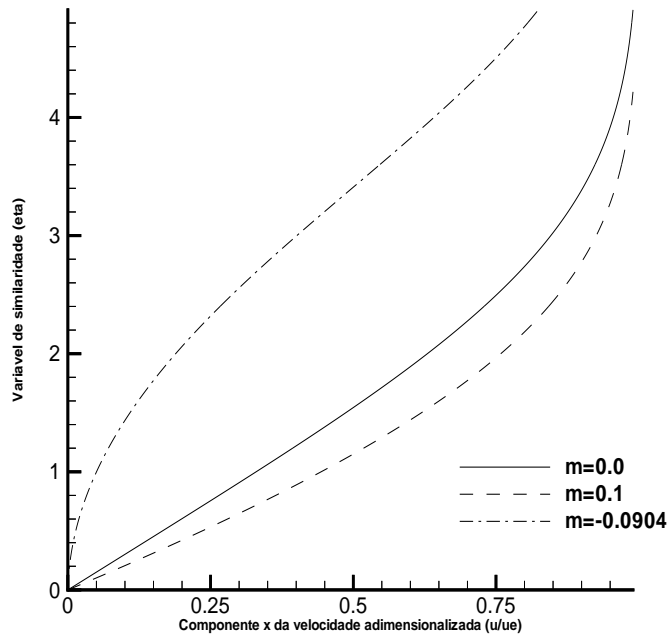


Figura 5.1: Perfis similares de velocidade

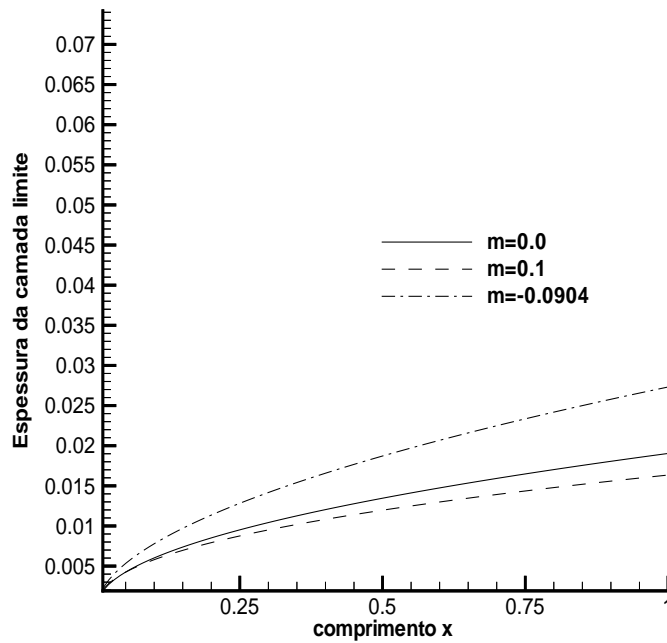


Figura 5.2: Espessura da camada limite ao longo do comprimento x

A distribuição da tensão de cisalhamento ao longo de x , para condições onde $C = 1$, comprimento x de parede igual a 1, e o fluido em questão sendo o ar com $\rho = 1.225$ e $\mu = 0.0000184$, é calculada para as situações de $m = 0$, $m = 0.1$ e $m = -0.0904$, como

mostrado na figura 5.3:

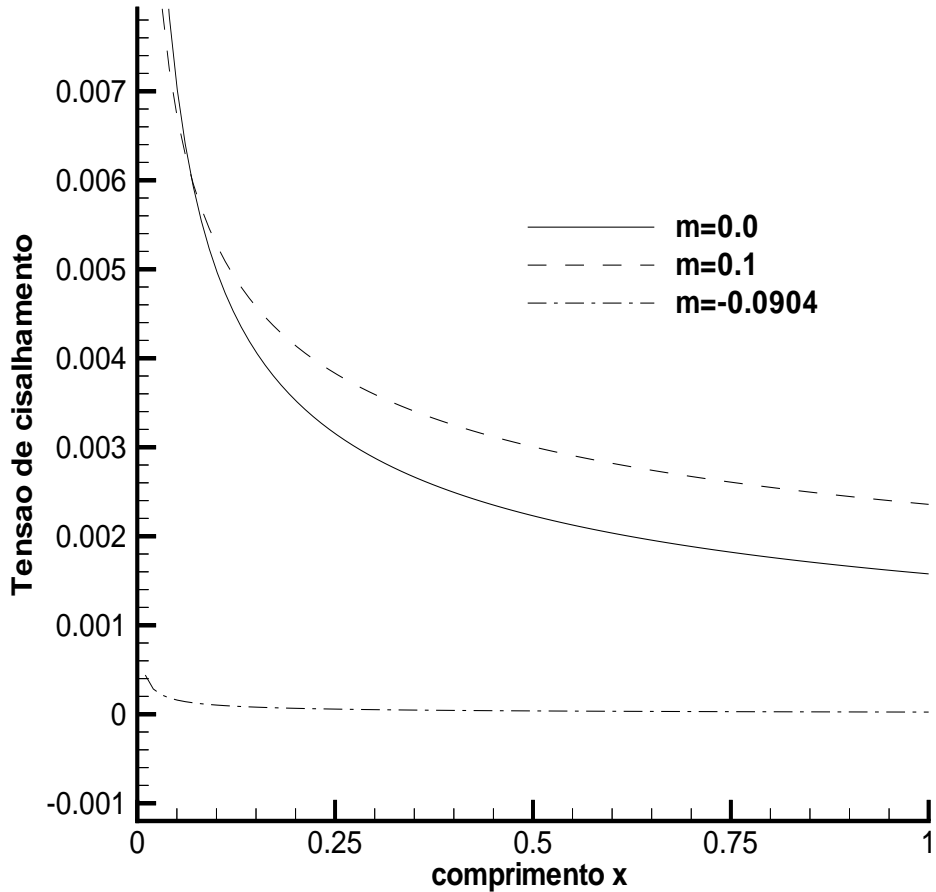


Figura 5.3: Distribuição da tensão de cisalhamento ao longo do comprimento x

Analisando a fig. 5.3, podemos notar que para $m = -0.0904$ (gradiente adverso de pressão) a tensão de cisalhamento é igual a zero. Isso significa que há descolamento da camada limite. Espera-se que para $m \leq -0.0904$ o resultado numérico não tenha proximidade com resultados experimentais, pois a teoria envolvida assume como hipótese que a camada limite, além de delgada, é colada à superfície do corpo.

A distribuição da espessura de deslocamento ao longo de x , para condições onde $C = 1$, comprimento x de parede igual a 1, e o fluido em questão sendo o ar com $\rho = 1.225$ e $\mu = 0.0000184$, é calculada para as situações de $m = 0$, $m = 0.1$ e $m = -0.0904$, como mostrado na figura 5.4:

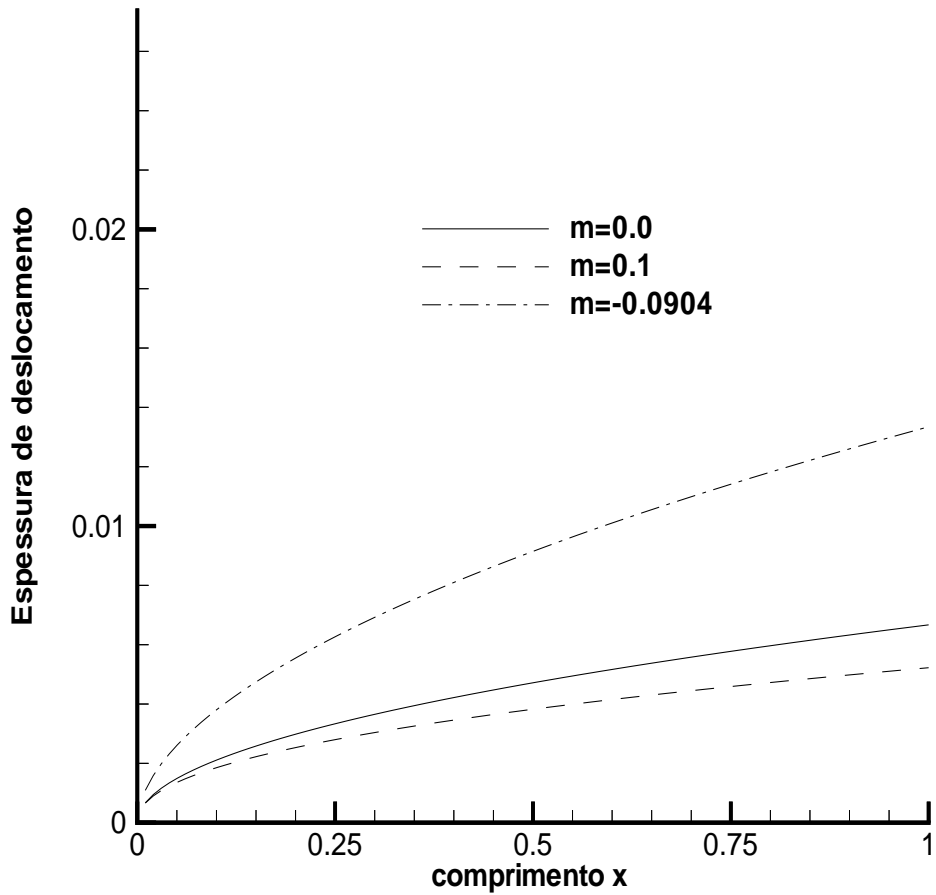


Figura 5.4: Espessura de deslocamento ao longo do comprimento x

Da fig. 5.4 temos que a espessura de deslocamento para o caso de gradiente adverso de pressão é maior que a espessura de deslocamento para o caso de gradiente favorável de pressão.

A distribuição da espessura de quantidade de movimento ao longo de x , para condições onde $C = 1$, comprimento x de parede igual a 1, e o fluido em questão sendo o ar com $\rho = 1.225$ e $\mu = 0.0000184$, é calculada para as situações de $m = 0$, $m = 0.1$ e $m = -0.0904$, como mostrado na figura 5.5:

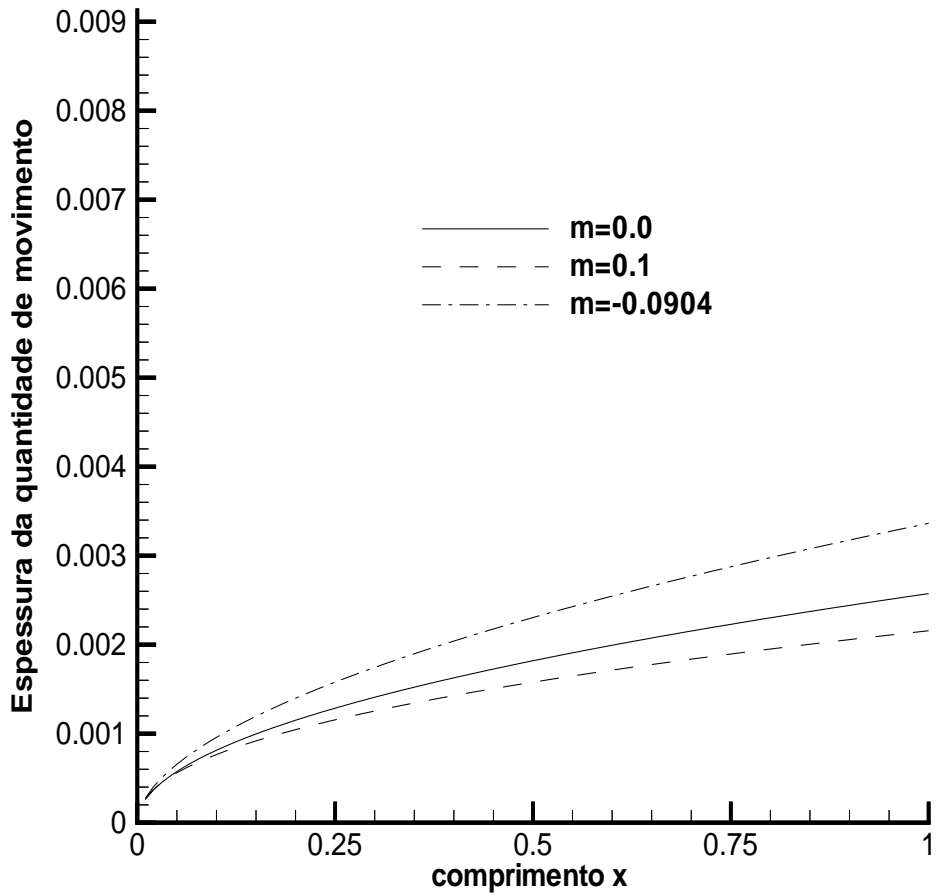


Figura 5.5: Espessura da quantidade de movimento ao longo do comprimento x

Analisando a fig. 5.5 percebemos que a espessura de quantidade de movimento para o caso de gradiente adverso de pressão é maior que a espessura de quantidade de movimento para o caso de gradiente favorável de pressão.

A fig. 5.6 mostra os perfis de velocidade para condições onde $C = 1$, $m = -0.05$, comprimento x de parede igual a 1, e o fluido em questão sendo o ar com $\rho = 1.225$ e $\mu = 0.0000184$. Percebe-se que, próximo à parede, du/dy diminui à medida em que x aumenta.

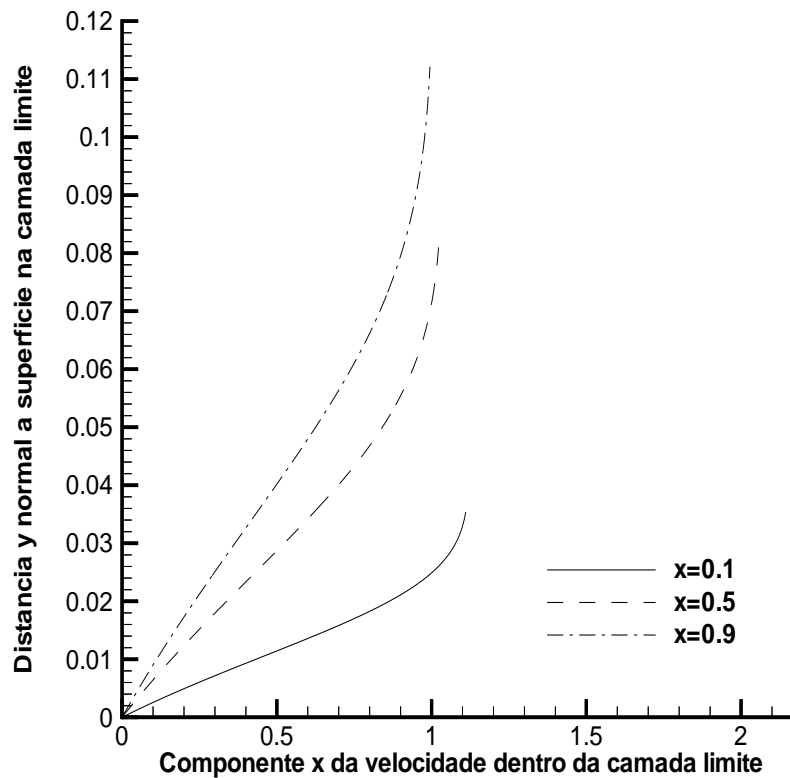


Figura 5.6: Perfis de velocidade da camada limite para distâncias $x = 0.1$, $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e para $m = -0.05$ (gradiente adverso de pressão)

5.4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DA EQUAÇÃO INTEGRAL DA CAMADA LIMITE

Iremos discutir a solução numérica da equação integral da camada limite, eq. 5.19, para escoamentos não-similares bidimensionais onde u/u_e é função de x e de η . Na prática, esses escoamentos são mais aplicáveis do que os escoamentos similares (por exemplo a eq. de Falkner-Skan), pois é raro existir um problema prático cuja variação de $u_e(x)$ seja dado pela eq. 5.33.

Enquanto os métodos diferenciais são mais precisos e fornecem uma solução mais detalhada, os métodos integrais, oferecem uma solução com custo computacional muito menor. Assim como as soluções similares, os métodos integrais resultam na resolução de uma ou mais equações diferenciais ordinária ao invés da resolução das duas equações diferenciais parciais (eqs. 5.2 e 5.3).

5.5 CAMADA LIMITE LAMINAR COM GRADIENTE DE PRESSÃO - O MÉTODO INTEGRAL DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN

Vamos considerar um sistema de coordenadas em que x é o comprimento do arco medido ao longo da superfície do corpo e y é o comprimento normal a essa superfície. Podemos escrever a equação integral da camada limite, eq. 5.18, da seguinte forma:

$$u_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (5.45)$$

Para resolver a eq. 5.45, assume-se uma função para o perfil de velocidade. Com isso, pode-se calcular a espessura de deslocamento, a espessura de quantidade de movimento e a tensão de cisalhamento. Essa função deverá obedecer a condição de não-escorregamento na parede, assim como a continuidade da velocidade no limite superior da camada limite. Deverá também, na presença de gradiente de pressão positivo, admitir perfis de velocidade, caso necessário, com um ponto de inflexão. A função escolhida é um polinômio de quarto grau, e é definido em termos de uma distância adimensionalizada medida a partir da parede $\eta = y/\delta(x)$. Então o polinômio é escrito como:

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (5.46)$$

e é válido para o intervalo $0 \leq \eta \leq 1$. Para $\eta > 1$ assume-se que $u/u_e = 1$. Com o intuito de determinar as quatro constantes a , b , c e d , admite-se as seguintes condições de contorno:

1. Condição de não-escorregamento: Para $y = 0$ tem-se que $u = 0$
2. Na parede, usando a eq. 5.3 e sabendo que $v_w = 0$, concluímos que o gradiente de pressão e a tensão de cisalhamento na parede se relacionam da seguinte forma:
Para $y = 0$ tem-se que $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx}$
3. Admitindo que o campo de velocidade é contínuo: Para $y = \delta$ tem-se que $u = u_e(x)$
4. Para $y = \delta$ não existe tensão de cisalhamento $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Definindo o seguinte parâmetro adimensional (razão entre forças de pressão e forças viscosas):

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu u_e} \quad (5.47)$$

e utilizando as condições de contorno, obtemos as seguintes expressões para as constantes:

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6} \quad (5.48)$$

$$b = -\frac{\Lambda}{2} \quad (5.49)$$

$$c = -2 + \frac{\Lambda}{2} \quad (5.50)$$

$$d = 1 - \frac{\Lambda}{6} \quad (5.51)$$

E então o perfil de velocidade pode ser escrito como:

$$\frac{u}{u_e} = F(\eta) + \Lambda G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{\Lambda}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \quad (5.52)$$

onde,

$$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1 - \eta)^3(1 + \eta) \quad (5.53)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6}\eta(1 - \eta)^3 \quad (5.54)$$

O perfil de velocidade para o descolamento de camada limite ocorre quando $(\partial u / \partial y)_w = 0$, ou seja, quando $a = 0$. Isso acontece para $\Lambda = -12$. Pode-se demonstrar também que o perfil de velocidade no ponto de estagnação corresponde a um valor de parâmetro adimensional $\Lambda = 7.052$. Para valores $\Lambda > 12$ observa-se que $u/u_e > 1$ e isso não corresponde à realidade. Então, pode-se afirmar que o parâmetro adimensional Λ têm significado físico no intervalo $-12 \leq \Lambda \leq 12$. Usando a definição de espessura de deslocamento e a eq.5.46, obtém-se:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \quad (5.55)$$

Usando a definição de espessura de quantidade de movimento e a eq.5.46, resulta em:

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 [F(\eta) + \Lambda G(\eta)][1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \quad (5.56)$$

Da mesma forma, a tensão viscosa na parede $\tau_w = \mu(\partial u / \partial y)$ é dada por:

$$\frac{\tau_w \delta}{\mu u_e} = 2 + \frac{\Lambda}{6} \quad (5.57)$$

Pode-se escrever a eq.5.45, quando multiplicada por $\theta / \nu u_e$, na seguinte forma:

$$\frac{u_e \theta \theta'}{\nu} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{u_e' \theta^2}{\nu} = \frac{\tau_w \theta}{\mu u_e} \quad (5.58)$$

É conveniente definir um segundo parâmetro adimensional da seguinte maneira:

$$K = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \quad (5.59)$$

Definindo também:

$$Z = \frac{\theta^2}{\nu} \quad (5.60)$$

Então:

$$K = Z \frac{du_e}{dx} \quad (5.61)$$

Combinando as eqs.5.47, 5.59 e 5.56, encontramos a seguinte relação universal entre os parâmetros adimensionais Λ e K :

$$K = \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2 \right)^2 \Lambda \quad (5.62)$$

Define-se H como:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{120}\Lambda}{\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2} = f_1(K) \quad (5.63)$$

e

$$\frac{\tau_w \theta}{\mu u_e} = \left(2 + \frac{1}{6}\Lambda \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2 \right) = f_2(K) \quad (5.64)$$

Combinando as equações anteriores, podemos escrever a eq.5.58 da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} u_e \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)]K = f_2(K) \quad (5.65)$$

Se definirmos $F(K)$ como:

$$\begin{aligned} F(K) &= 2f_2(K) - 4K - 2Kf_1(K) = \\ &= 2 \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2 \right) \left[2 - \frac{116}{315}\Lambda + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072}\Lambda^3 \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

e combinando as equações 5.62, 5.63, 5.64, 5.66 e 5.65, podemos escrever:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{u_e} \quad (5.67)$$

onde:

$$K = Zu'_e \quad (5.68)$$

A eq.5.67 é uma equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem de $Z = \theta^2/\nu$ em função do comprimento x . O fato da função $F(K)$ ter uma forma complexa não representa uma dificuldade na solução da eq.5.67 pois $F(K)$ é uma função universal que é independente da forma do corpo. A relação universal entre as funções $K(\Lambda)$, $f_1(K)$, $f_2(K)$ e $F(K)$ é representada na tabela mostrada no apêndice B.

Ao analisar a eq.5.67, percebe-se que para o ponto de estagnação ($u_e = 0$) temos uma singularidade se $F(K) \neq 0$. Então para que a solução numérica coincida com o escoamento real, a função $F(K)$ deverá ser igual a zero no ponto de estagnação, ou seja:

$$F(K) = 0 \Rightarrow \Lambda_0 = 7.052 \quad (5.69)$$

ou

$$F(K) = 0 \Rightarrow K_0 = 0.0770 \quad (5.70)$$

Combinando as eqs.5.68 e 5.70, obtemos:

$$Z_0 = \frac{K_0}{u'_{e0}} = \frac{0.0770}{u'_{e0}} \quad (5.71)$$

O valor de Z_0 é necessário para aplicação do método de Runge-Kutta na resolução da eq.5.67. O procedimento numérico para solução do método de Kármán-Pohlhausen pode ser resumido nas seguintes etapas:

1. Calcula-se inicialmente, pelo método integral de contorno, a distribuição de velocidade externa $u_e(x)$ ao longo da superfície do corpo, assim como a derivada da velocidade externa em relação ao comprimento x , du_e/dx ;
2. Resolvendo a eq. 5.67 pelo método de Runge-Kutta obtemos $Z(x)$ e, pela eq. 5.68 determina-se os valores do parâmetro adimensional $K(x)$. Usando a eq.5.59, obtém-se os valores de $\theta(x)$ ao longo de x ;
3. Da eq. 5.62 ou da tabela do apêndice B encontra-se os valores de $\Lambda(x)$ e determina-se, se houver, o ponto de descolamento da camada limite;
4. Usando as eqs. 5.63 e 5.64 ou a tabela do apêndice B encontra-se os valores da distribuição de espessura de deslocamento $\delta^*(x)$ e da distribuição de tensão de cisalhamento $\tau_w(x)$;
5. A distribuição da espessura da camada limite ao longo do comprimento x é obtida por meio da eq. 5.55;
6. Por fim, o perfil de velocidade é encontrado por meio da eq. 5.52.

Ao traçar o gráfico da função $F(K)$ dada pela eq. 5.66, percebe-se que essa função varia quase que linearmente em função de K . Então a função $F(K)$ pode ser representada, sem muita perda de acuidade, pela seguinte função linear:

$$F(K) = 0.470 - 6K \quad (5.72)$$

Então a eq. 5.67 pode ser escrita como:

$$u_e \frac{dZ}{dx} = 0.470 - 6K \quad (5.73)$$

E, substituindo os valores originais de Z e de K :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_e \theta^2}{\nu} \right) = 0.470 - (6 - 1) \frac{u_e \theta^2}{\nu} \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (5.74)$$

A eq. 5.74 é uma equação diferencial para $u_e \theta^2 / \nu$. Integrando essa equação:

$$\frac{u_e \theta^2}{\nu} = \frac{0.470}{u_e^5} \int_0^x u_e^5 dx \quad (5.75)$$

Então a partir da eq. 5.75, podemos calcular os valores de $\theta(x)$ e então seguir as mesmas etapas descritas anteriormente.

5.5.1 VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN

Foi elaborado um código escrito na linguagem de programação FORTRAN, que determina as propriedades do escoamento dentro de uma camada limite laminar submetida a um gradiente de pressão arbitrário. O código usa o método de Kármán-Pohlhausen descrito na seção anterior. Para validar esse código, iremos comparar os resultados da equação de Falkner-Skan com os resultados do método em questão.

5.5.1.1 RESULTADOS DA ESPESSURA DA CAMADA LIMITE

A figura 5.7 representa os resultados de espessura da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0$ (gradiente de pressão nulo).

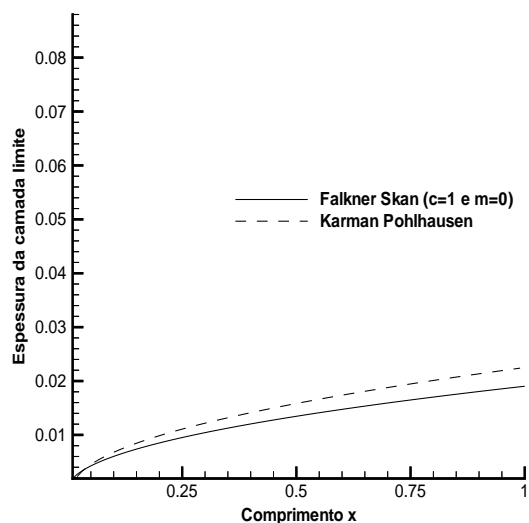


Figura 5.7: Espessura da camada limite ao longo de x .

A figura 5.8 representa os resultados da espessura da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0.15$ (gradiente de pressão favorável). A figura 5.9 representa os resultados de espessura da

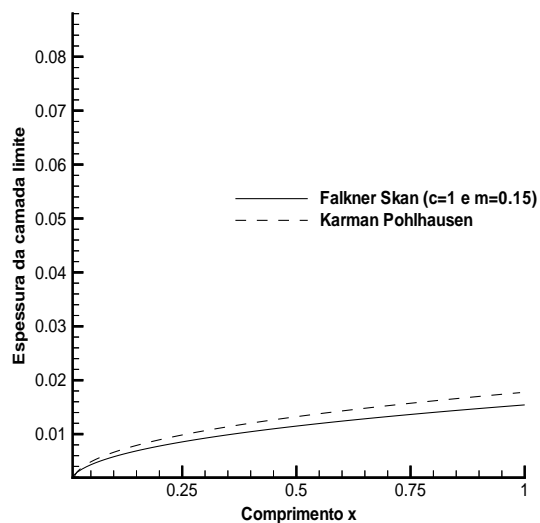


Figura 5.8: Espessura da camada limite ao longo de x .

camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = -0.05$ (gradiente de pressão adverso).

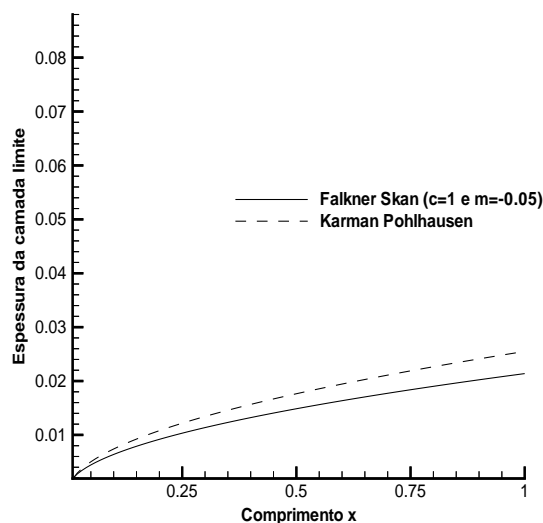


Figura 5.9: Espessura da camada limite ao longo de x .

Percebe-se pelas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, que o método de Kármán-Pohlhausen prevê uma espessura de camada limite maior que a solução da equação de Falkner-Skan. Essa diferença entre os resultados é maior para o caso de gradiente de pressão adverso e vale cerca de 20%.

5.5.1.2 RESULTADOS DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO

A figura 5.10 representa os resultados da distribuição da tensão de cisalhamento na parede ao longo de x pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0$ (gradiente de pressão nulo).

A figura 5.11 representa os resultados da distribuição da tensão de cisalhamento na parede ao longo de x pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0.15$ (gradiente de pressão favorável).

A figura 5.12 representa os resultados da distribuição da tensão de cisalhamento na parede ao longo de x pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = -0.05$ (gradiente de pressão adverso).

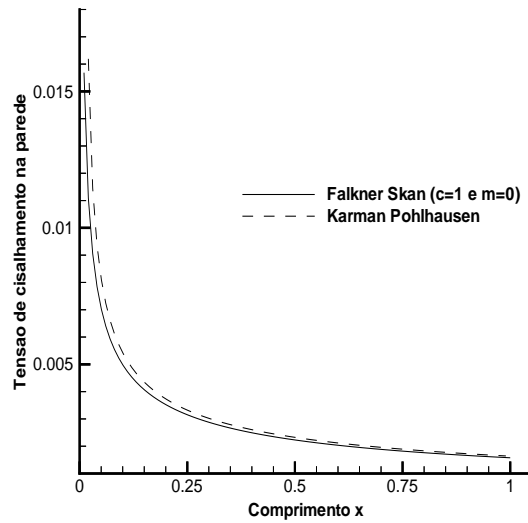


Figura 5.10: Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x .

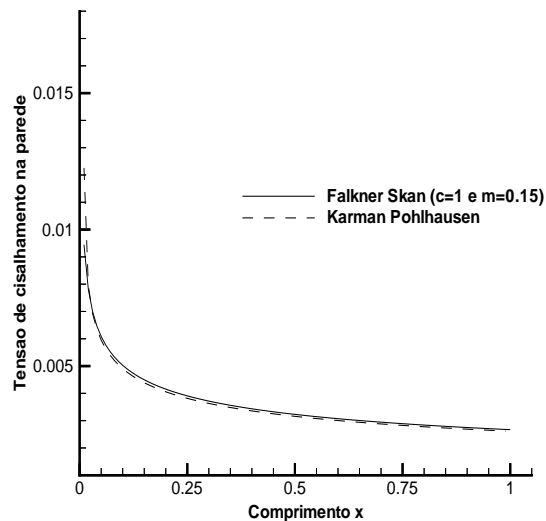


Figura 5.11: Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x .

Das figuras 5.10, 5.11 e 5.12, percebe-se uma boa concordância entre os resultados da equação de Falkner-Skan e do método de Karman-Pohlhausen. Pode-se concluir também que para valores pequenos de x , temos que a tensão de cisalhamento é maior para o caso de gradiente de pressão adverso do que para o caso de gradiente de pressão favorável. Já para valores grandes de x , a tensão de cisalhamento no caso de gradiente de pressão favorável é maior do que para o caso de gradiente de pressão adverso.

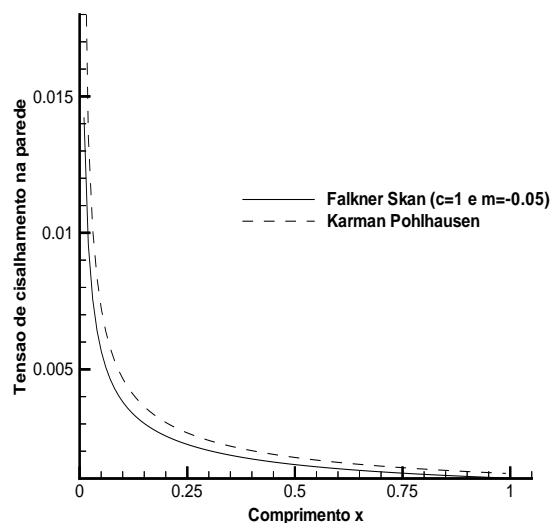


Figura 5.12: Tensão de cisalhamento na parede ao longo de x .

5.5.1.3 RESULTADOS DA ESPESSURA DE DESLOCAMENTO

A figura 5.13 representa os resultados de espessura de deslocamento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0$ (gradiente de pressão nulo).

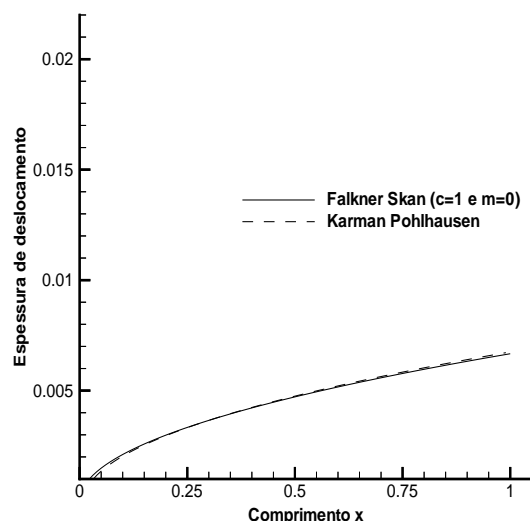


Figura 5.13: Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .

A figura 5.14 representa os resultados de espessura de deslocamento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento

fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0.15$ (gradiente de pressão negativo).

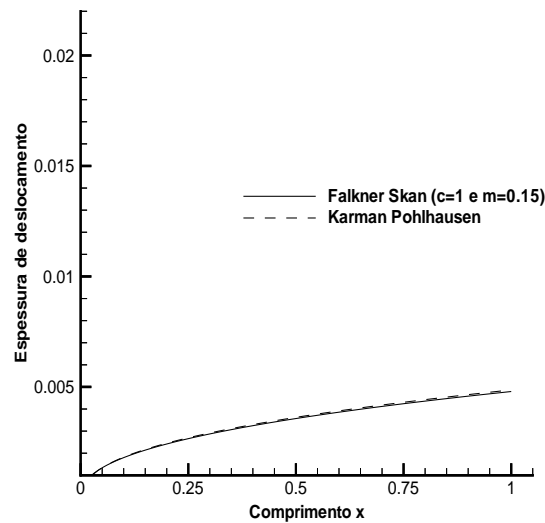


Figura 5.14: Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .

A figura 5.15 representa os resultados de espessura de deslocamento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = -0.05$ (gradiente de pressão positivo).

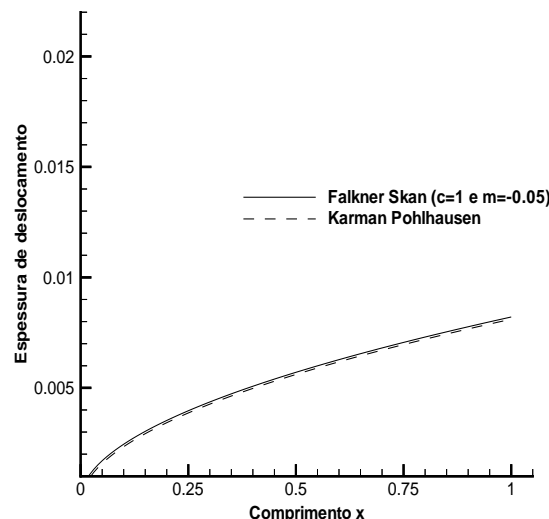


Figura 5.15: Espessura de deslocamento da camada limite ao longo de x .

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 mostram uma excelente concordância entre os resultados de espessura de deslocamento da equação de Falkner-Skan e do método de Karman-

Pohlhausen. Os resultados mostram que o crescimento da espessura de deslocamento ao longo do comprimento x é maior para o caso de gradiente de pressão adverso quando comparado com o caso de gradiente de pressão favorável.

5.5.1.4 RESULTADOS DA ESPESSURA DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A figura 5.16 mostra os resultados de espessura de quantidade de movimento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0$ (gradiente de pressão nulo).

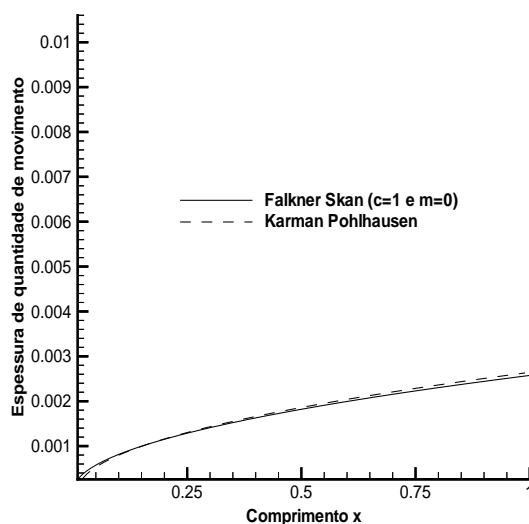


Figura 5.16: Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .

A figura 5.17 mostra os resultados de espessura de quantidade de movimento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0.15$ (gradiente de pressão negativo).

A figura 5.18 mostra os resultados de espessura de quantidade de movimento da camada limite pela equação de Falkner-Skan e pelo método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = -0.05$ (gradiente de pressão positivo).

As figuras 5.16, 5.17 e 5.18 mostram uma excelente concordância entre os resultados

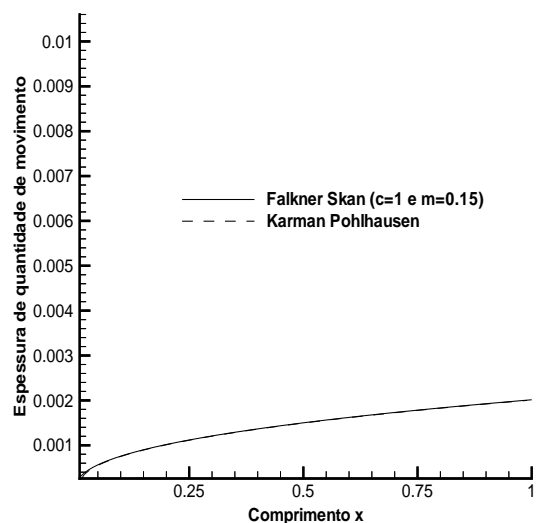


Figura 5.17: Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .

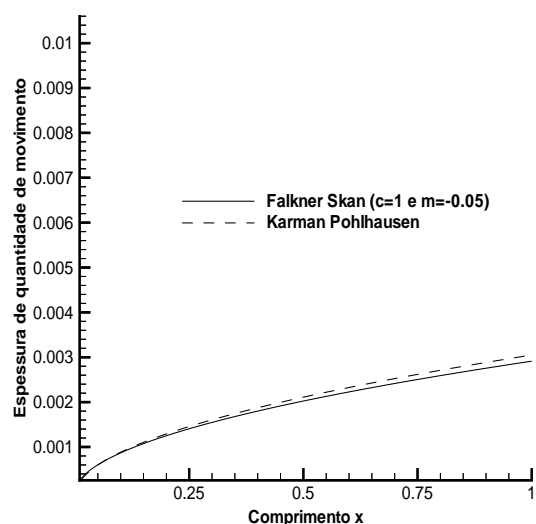


Figura 5.18: Espessura de quantidade de movimento da camada limite ao longo de x .

de espessura de quantidade de movimento da equação de Falkner-Skan e do método de Karman-Pohlhausen, com uma diferença máxima de 6%. Os resultados mostram que o crescimento da espessura de quantidade de movimento ao longo do comprimento x é maior para o caso de gradiente de pressão adverso quando comparado com o caso de gradiente de pressão favorável.

5.5.1.5 RESULTADOS DO PERFIL DE VELOCIDADE

A figura 5.19 mostra os resultados dos perfis de velocidade para $x = 0.2$ e $x = 0.8$ utilizando a equação de Falkner-Skan e o método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0$ (gradiente de pressão nulo).

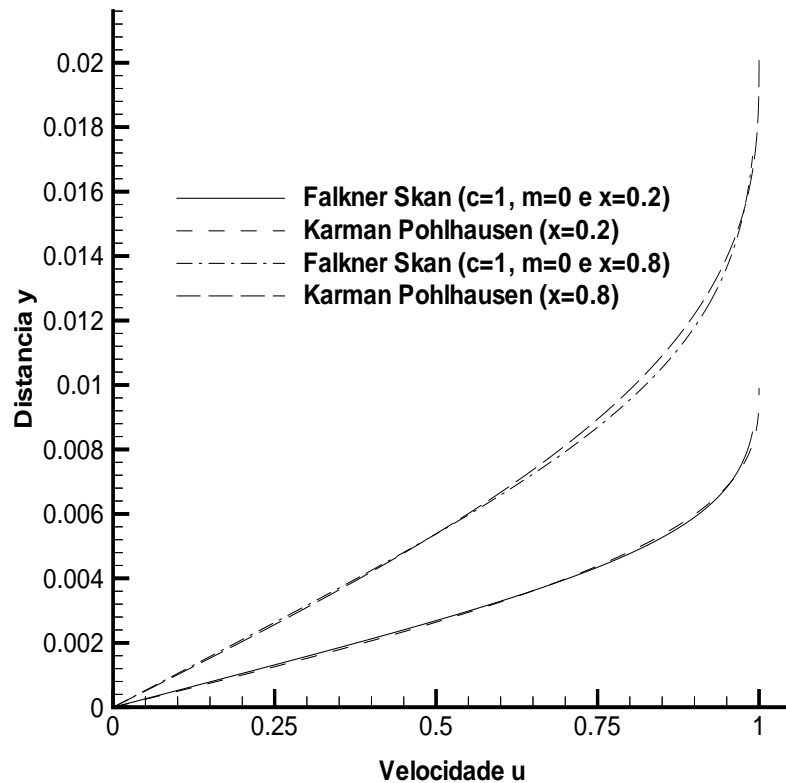


Figura 5.19: Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$

A figura 5.20 mostra os resultados dos perfis de velocidade para $x = 0.2$ e $x = 0.8$ utilizando a equação de Falkner-Skan e o método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = 0.15$ (gradiente de pressão favorável).

A figura 5.21 mostra os resultados dos perfis de velocidade para $x = 0.2$ e $x = 0.8$ utilizando a equação de Falkner-Skan e o método de Kármán-Pohlhausen. O escoamento fora da camada limite obedece a equação do tipo lei de potência (eq.5.33), com $C = 1$ e $m = -0.05$ (gradiente de pressão adverso).

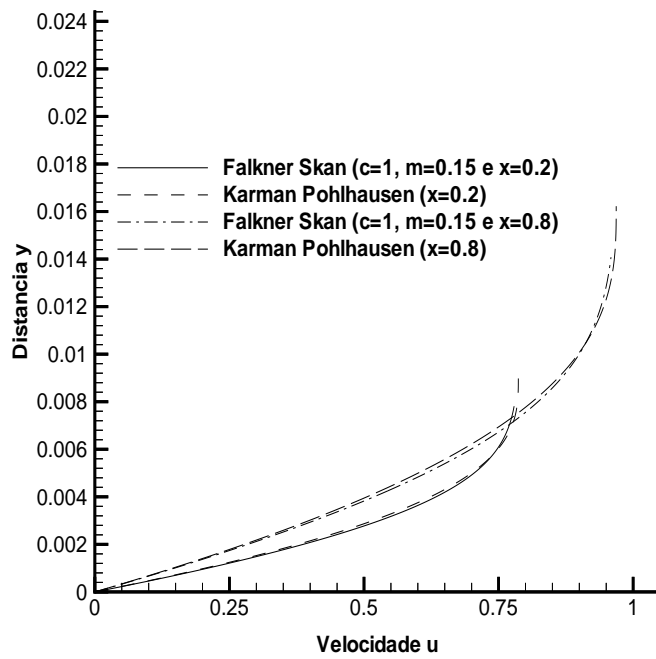


Figura 5.20: Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$

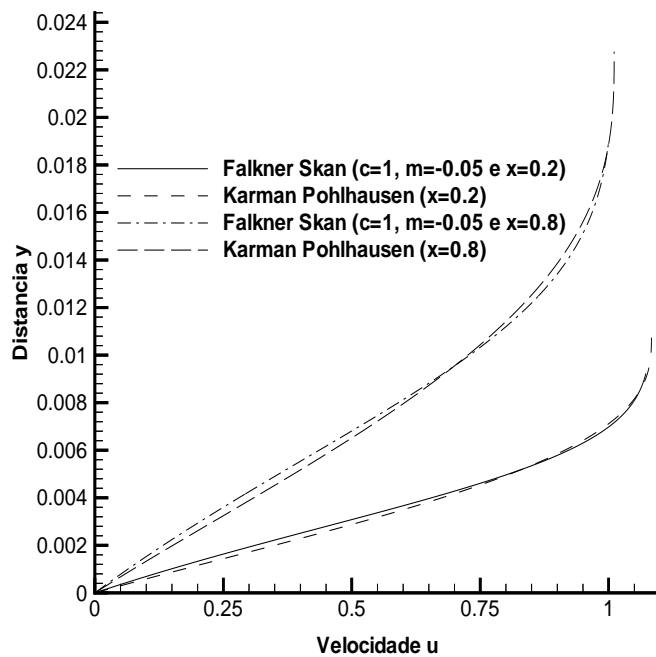


Figura 5.21: Perfil de velocidade em $x = 0.2$ e em $x = 0.8$

As figuras 5.19, 5.20 e 5.21 mostram uma excelente concordância entre os perfis de velocidade da equação de Falkner-Skan e do método de Karman-Pohlhausen. Os resultados mostram, em particular, que para gradientes de pressão adverso a solução de

Falkner-Skan fornece um valor da derivada da velocidade em relação a y na parede, $(du/dy)_w$, um pouco menor do que o valor fornecido pelo método de Karman-Pohlhausen. Então, a partir dessa observação, pode-se concluir que a equação de Falkner-Skan prevê o ponto de separação da camada limite numa posição x menor que a previsão dada pelo método de Karman-Pohlhausen.

5.5.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO DE KÁRMÁN-POHLHAUSEN EM CONJUNTO COM O MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO

O tratamento de um escoamento em altos números de Reynolds, em torno de uma geometria arbitrária, é muito bem representado dividindo-se o domínio do escoamento em duas regiões:

- região externa à camada limite, onde o escoamento pode ser modelado como sendo irrotacional e invíscido e a teoria potencial pode ser usada.
- região da camada limite onde é assumido como hipótese que não há separação de camada limite e que a mesma é bastante delgada quando comparada com um comprimento característico da geometria. O método de de Kármán-Pohlhausen é usado para representar essa região, desde que o escoamento seja laminar.

Na fronteira entre essas duas regiões citadas deverá haver continuidade das propriedades do escoamento.

Na figura 5.22 é mostrado os resultados do método de Kármán-Pohlhausen para a espessura da camada limite laminar ao longo do extradorso do aerofólio naca 0012 e do aerofólio selig 1223, ambos com ângulo de ataque igual a 2 graus.

Observe que os dados são mostrados até o ponto previsto de separação da camada limite laminar. Para o aerofólio naca 0012 o ponto de separação da camada limite vale 67% da corda, enquanto que para o aerofólio selig 1223 esse ponto vale 35% da corda.

Na figura 5.23, para os mesmos aerofólios, é mostrado os resultados do método de Kármán-Pohlhausen para a tensão de cisalhamento ao longo do extradorso dos aerofólios.

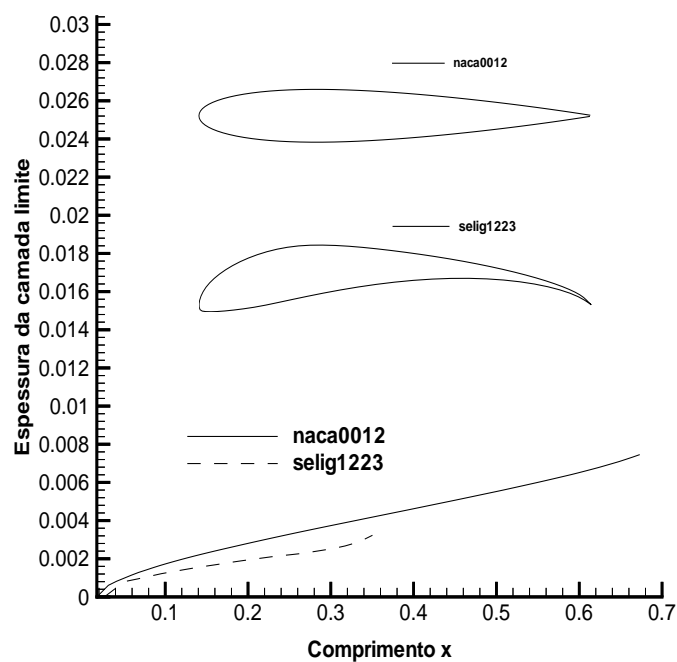


Figura 5.22: Espessura da camada limite dos aerofólios naca 0012 e selig 1223

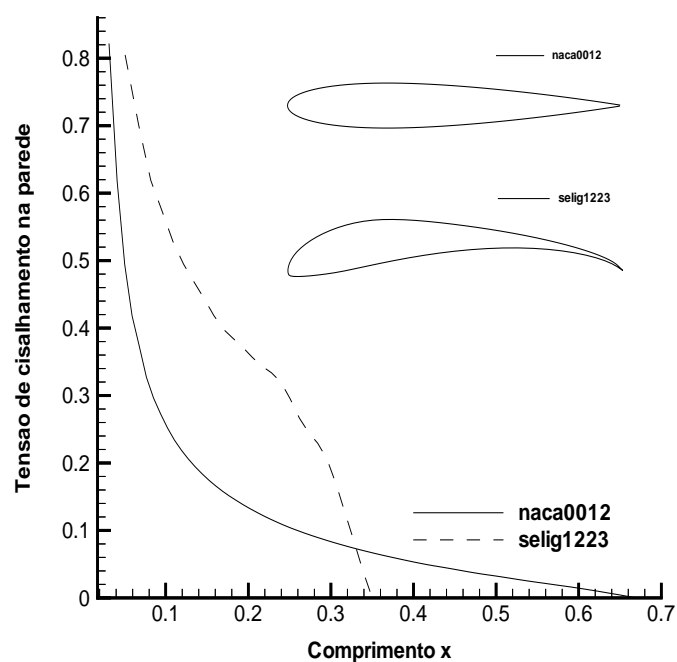


Figura 5.23: Tensão de cisalhamento na parede dos aerofólios naca 0012 e selig 1223

A seguir, na figura 5.24, para os mesmos aerofólios citados anteriormente, são mostrados os resultados do método de Kármán-Pohlhausen para o fator de forma $H = \delta^*/\theta$ ao longo do extradorso dos aerofólios.

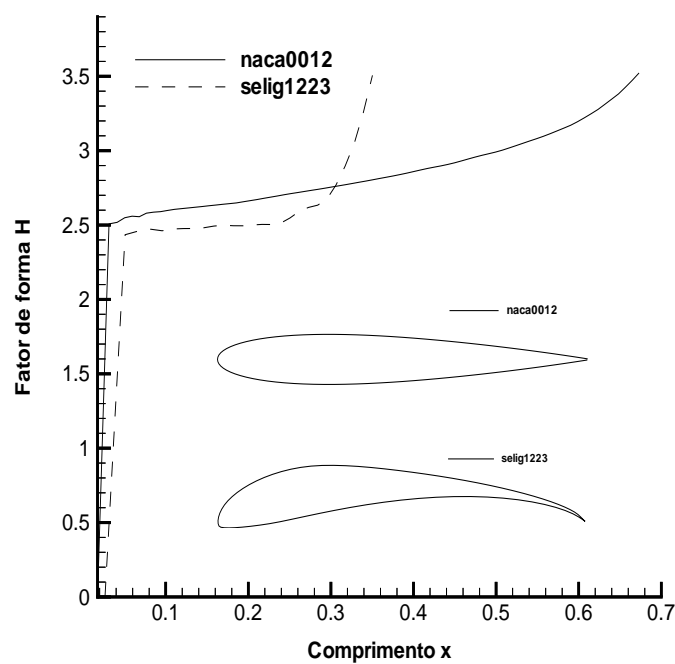


Figura 5.24: Fator de forma dos aerofólios naca 0012 e selig 1223

A figura 5.25 mostra o perfil de velocidade na camada limite para $x = 0.1$ e $x = 0.6$ do aerofólio naca 0012 com ângulo de ataque igual a dois graus.

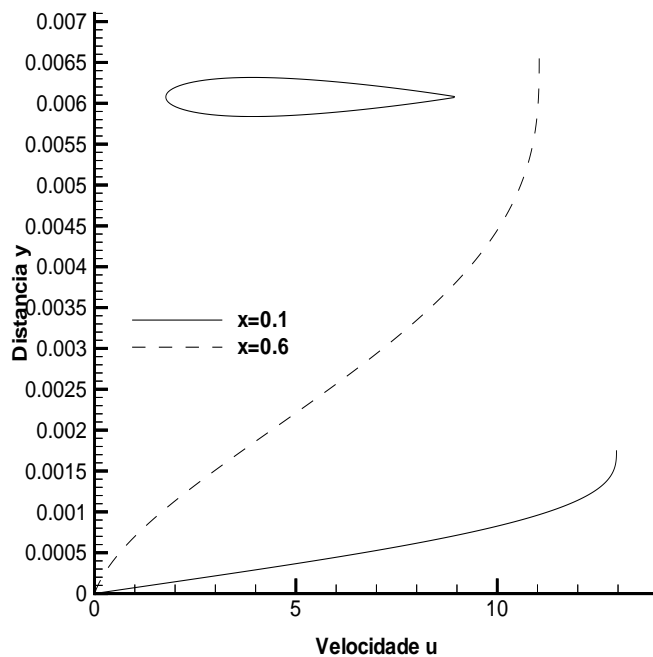


Figura 5.25: Perfis de velocidade do aerofólio naca 0012 em $x = 10\%corda$ e $x = 60\%corda$

A figura 5.26 mostra o perfil de velocidade na camada limite para $x = 0.1$ e $x = 0.34$ do aerofólio selig 1223 com ângulo de ataque igual a dois graus.

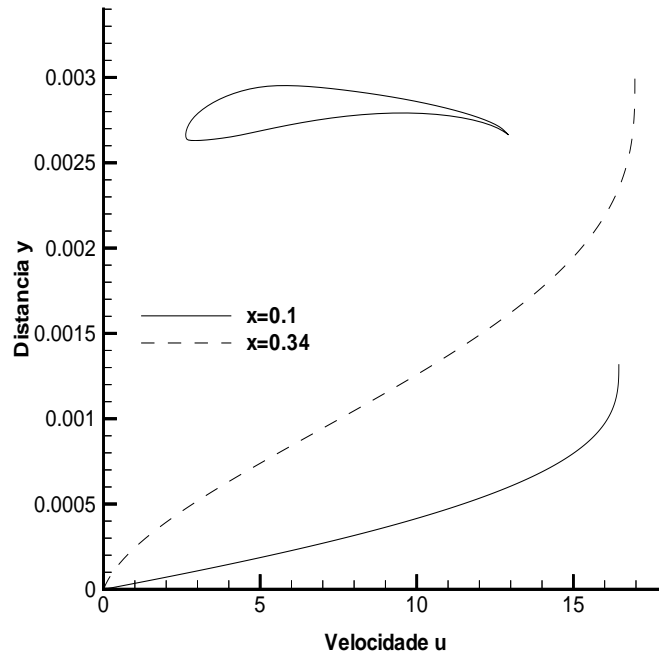


Figura 5.26: Perfis de velocidade do aerofólio selig 1223 em $x = 10\%corda$ e $x = 34\%corda$

5.6 CAMADA LIMITE TURBULENTA COM GRADIENTE DE PRESSÃO - O MÉTODO INTEGRAL DE HEAD

O método de Head considera que o escoamento dentro da camada limite é turbulento. Porém, na borda da camada limite, considera-se que o escoamento é isento de flutuações e é feito um balanço de massa nessa região. O fluxo volumétrico de fluido no interior da camada limite é dado por:

$$Q(x) = \int_0^{\delta(x)} u dy \quad (5.76)$$

A velocidade de penetração do fluido na borda da camada limite E , de acordo com a equação da continuidade, é:

$$E = \frac{dQ}{dx} \quad (5.77)$$

A figura 5.27 representa os fluxos volumétricos na camada limite. Combinando a eq.5.76 com a definição de espessura de deslocamento eq.5.37 obtemos:

$$\delta^* = \delta - \frac{Q}{u_e} \quad (5.78)$$

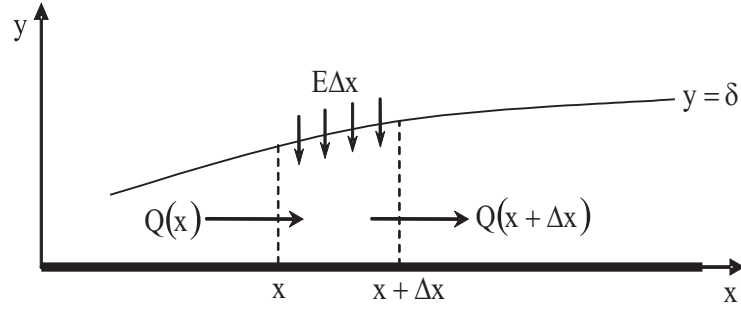


Figura 5.27: Fluxo volumétrico nas fronteiras da camada limite.

Então, combinando as eqs.5.77 e 5.78:

$$E = \frac{d}{dx} u_e (\delta - \delta^*) \quad (5.79)$$

Se definirmos H_1 como:

$$H_1 = \frac{\delta - \delta^*}{\theta} \quad (5.80)$$

podemos escrever a eq.5.79 como sendo:

$$E = \frac{d}{dx} (u_e \theta H_1) \quad (5.81)$$

O método assume que a velocidade adimensionalizada de penetração do fluido na borda da camada limite, E/u_e , depende apenas de H_1 . Cebeci e Bradshaw, a partir de dados experimentais de camada limite turbulenta, proporam as seguintes correlações:

$$\frac{1}{u_e} \frac{d}{dx} (u_e \theta H_1) = 0.0306 (H_1 - 3)^{-0.6169} \quad (5.82)$$

e

$$\begin{aligned} H_1 &= 3.3 + 0.8234(H - 1.1)^{-1.287} \quad \text{para } H \leq 1.6 \\ H_1 &= 3.3 + 1.5501(H - 0.6778)^{-3.064} \quad \text{para } H > 1.6 \end{aligned} \quad (5.83)$$

Podemos reescrever a função inversa da eq. (5.83), que relaciona H em função de H_1 :

$$\begin{aligned} H &= 3.0 \quad \text{para } H_1 \leq 3.3 \\ H &= 0.6778 + 1.1536(H_1 - 3.3)^{-0.326} \quad \text{para } 3.3 < H_1 < 5.3 \\ H &= 1.1 + 0.86(H_1 - 3.3)^{-0.777} \quad \text{para } H_1 \geq 5.3 \end{aligned} \quad (5.84)$$

Relembrando a equação integral da camada limite, eq.(5.19), temos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2} - (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (5.85)$$

Então as equações (5.82), (5.83) e (5.85) representam três equações para quatro incógnitas θ , H , H_1 e c_f . Precisa-se então de mais uma equação para o problema ser resolvido.

Essa equação é a correlação para o coeficiente de fricção proposta por Ludwig-Tillman:

$$c_f = 0.246 \times 10^{-0.678H} Re_\theta^{-0.268} \quad (5.86)$$

A correlação acima foi obtida por meio de dados experimentais para camada limite turbulenta.

5.6.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DE HEAD

O procedimento para solução numérica é descrito abaixo:

1. São dados inicialmente os valores de H e de θ correspondentes a estação i . Com esses valores, encontra-se o valor de c_f , da estação i , por meio da equação (5.86);
2. Com esses valores e sabendo-se os valores da velocidade e de sua derivada fora da camada limite (u_e e du_e/dx dados pelo método integral de contorno), resolve-se a eq. (5.85) pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e obtém-se o valor de θ da estação $i + 1$;
3. Com os valores de θ e u_e conhecidos para a estação $i + 1$ resolve-se a eq. (5.82), também pelo método de Runge-Kutta, e determina-se o valor de H_1 para a mesma estação;
4. Sabendo-se o valor de H_1 para a estação $i + 1$, determina-se o valor de H para estação a mesma estação, usando-se a eq. (5.84);
5. Repete-se todo o procedimento descrito $n - 1$ vezes para determinação das propriedades das estações $i = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número total de estações que representam o aerofólio (dado pelo método integral de contorno) ou a estação onde há separação da camada limite.

5.6.2 RESULTADOS NUMÉRICOS DO MÉTODO DE HEAD

Foi elaborado um código escrito na linguagem de programação FORTRAN, que determina as propriedades do escoamento dentro de uma camada limite turbulenta submetida a um gradiente de pressão arbitrário. O código utiliza o método de Head descrito na seção anterior.

Na figura 5.28 são mostrados os resultados do método de Head ao longo do extradorso do aerofólio naca 0012 com ângulo de ataque igual a 2 graus. Considera-se, para

esse caso, que a transição de camada limite laminar para camada limite turbulenta ocorre a 48% da corda, de acordo com o método de Michel (ver apêndice C). Então, para aplicação do método de Head, especifica-se os valores iniciais da espessura de quantidade de movimento θ_0 e do fator de forma H_0 . Sabe-se que existe uma região onde ocorre a transição da camada limite e que, nessa região, a espessura de quantidade de movimento não varia muito, enquanto que o fator de forma diminui consideravelmente. Então, de modo geral, o método de Head considera como valor inicial para θ_0 o valor de θ dado pelo modelo de camada limite laminar no ponto de transição. Para o valor de H_0 , como existe uma diminuição de H na transição, considera-se empiricamente que o valor inicial do fator de forma H_0 é igual a 1.4 (que corresponde ao caso da transição de camada limite num escoamento sobre uma placa plana).

O resultado da espessura de camada limite ao longo da corda, para o aerofólio naca 0012, é apresentado na figura 5.28. A região laminar é dada pelo método de Kármán-Pohlhausen, enquanto que a região turbulenta é resultado do método de Head.

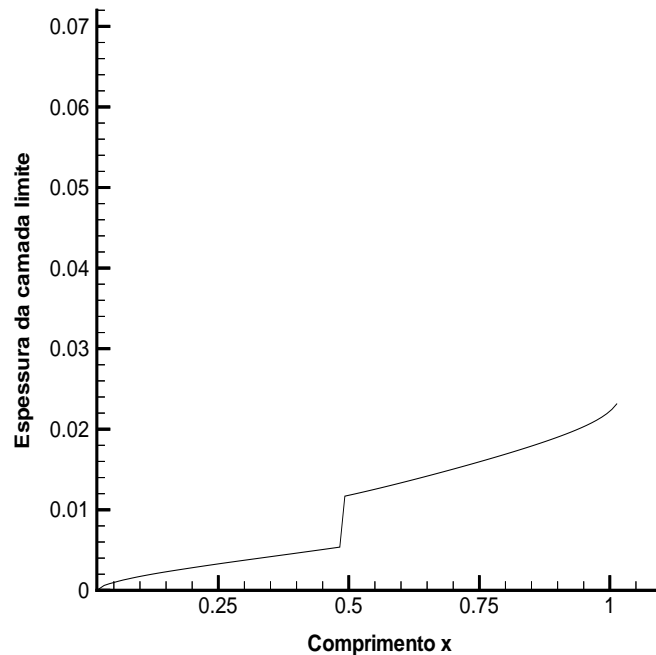


Figura 5.28: espessura da camada limite ao longo da corda para o aerofólio naca 0012

É importante observar que a análise feita considera que não existe a região de transição. Então existe uma mudança abrupta de espessura de camada limite, de acordo com a figura (5.28).

O gráfico do fator de forma ao longo da corda, para o aerofólio naca 0012, é apresentado na figura 5.29. A região laminar é dada pelo método de Kármán-Pohlhausen, enquanto que a região turbulenta é resultado do método de Head.

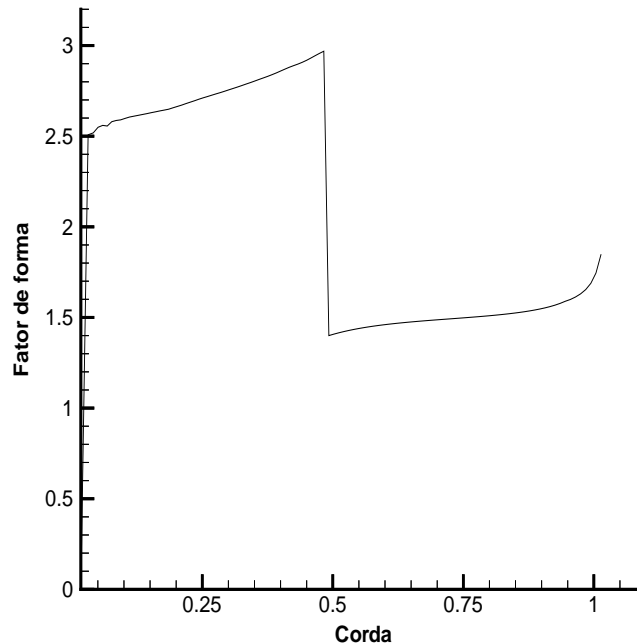


Figura 5.29: Fator de forma H ao longo da corda para o aerofólio naca 0012

Foi visto anteriormente que, para camada limite laminar, o método de Kármán-Pohlhausen prevê separação de camada limite (tensão de cisalhamento igual a zero) para $H > 3.5$. No caso de camada limite turbulenta, o método de Head não prevê a situação em que a tensão de cisalhamento é igual a zero, pois de acordo com a eq.(5.86), o coeficiente de fricção é nulo somente quando $H \rightarrow \infty$. Essa é uma limitação da correlação proposta. Analisando vários dados experimentais admite-se, como primeira aproximação, que a separação da camada limite turbulenta acontece para um fator de forma $H > 2.4$. Então, para o caso da figura (5.29), não há descolamento da camada limite tanto na parte laminar como na parte turbulenta. Novamente, há um salto das propriedades para $x = 48\%$ da corda, pois no modelo adotado não existe uma região de transição da camada limite.

O resultado do coeficiente de fricção na parede ao longo da corda, para o aerofólio naca 0012, é apresentado na figura 5.30. A região laminar é dada pelo método de Kármán-Pohlhausen, enquanto que a região turbulenta é resultado do método de Head.

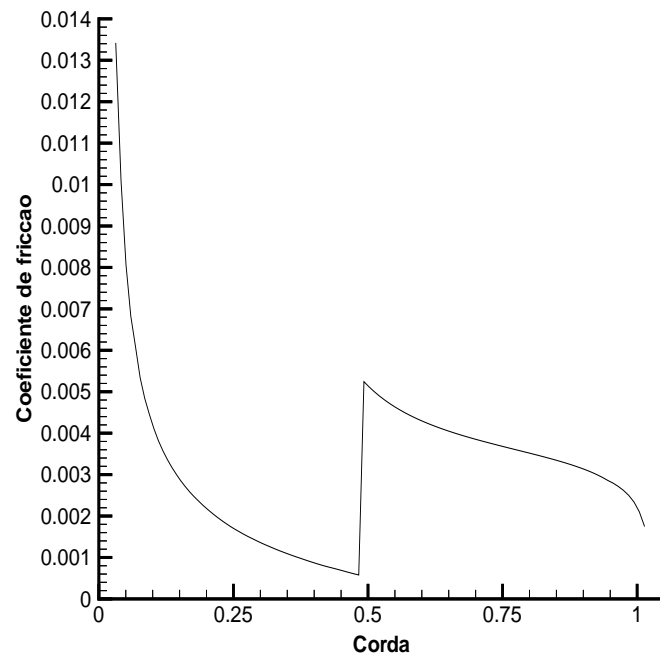


Figura 5.30: Coeficiente de fricção c_f ao longo da corda para o aerofólio naca 0012

Como era de se esperar, a camada limite turbulenta proporciona um aumento do coeficiente de fricção quando comparado com a camada limite laminar.

6 APLICAÇÃO DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ESCOAMENTOS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS TRANSIENTES

Neste capítulo é apresentado o método integral de contorno que foi implementado para determinar o campo de velocidade e de pressão e as forças associadas sobre um aerofólio num escoamento potencial transiente. O método em questão considera o aerofólio movendo-se no fluido e trata o problema em termos de um sistema de referência não-inercial fixo no corpo. Os resultados mostram a formação de uma esteira de pontos de vórtices distribuídos atrás do aerofólio em consequência da vorticidade emitida no bordo de fuga. O sistema de equações resultantes é não-linear e é resolvido por um método de eliminação de Gauss iterativo.

6.1 INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos transientes é de fundamental importância. Grande parte dos escoamentos que ocorrem na natureza são transientes. A experiência mostra que é necessário considerar a influência da esteira nas superfícies aerodinâmicas. Em muitos casos essa influência causa efeitos negativos. Um exemplo disso é o fenômeno de "flutter". Outras vezes a interferência da esteira pode prevenir uma separação da camada limite.

Para o estudo de um escoamento transiente em torno de um aerofólio, um parâmetro adimensional de grande importância é a frequência reduzida, $k = \omega c/U_\infty = 2\pi f c/U_\infty$. O número de Strouhal St se relaciona com a frequência reduzida da seguinte maneira $k = 2\pi St$ onde $St = f c/U_\infty$. Outro parâmetro adimensional importante no estudo do escoamento em torno de um aerofólio que tem movimento de oscilação vertical é a velocidade de oscilação vertical, $V_p = kh$ onde h é a amplitude de oscilação dividida pela corda do aerofólio. Métodos analíticos e semi-analíticos para descrever escoamentos transientes em torno de aerofólios delgados foram implementados no passado

[29][46][49]. Posteriormente, com o advento dos computadores, o método integral de contorno se tornou bastante difundido [3][21][34] e foi utilizado para simular escoamentos não-estacionários em torno de aerofólios [7][14][15][25]. O presente trabalho é uma aplicação do método integral de contorno para descrever escoamentos transientes em torno de aerofólios. Para isso, utiliza-se a metodologia encontrada em [7].

6.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema consiste em descrever o escoamento de um aerofólio que se move arbitrariamente. São adotados dois sistemas de coordenadas: um sistema de coordenadas inercial (X, Z) e outro, não-inercial, que se move junto com o aerofólio (x, z) . Por simplicidade, assume-se que, no instante $t = 0$, o sistema de coordenadas inercial coincide com o sistema de coordenadas não-inercial. Para um instante $t > 0$ qualquer, o movimento da origem do sistema de coordenadas não-inercial é descrito em relação ao sistema de coordenadas inercial da seguinte forma:

$$R_0(t) = X_0\hat{i} + Z_0\hat{k} = Ut\hat{i} + Wt\hat{k} \quad (6.1)$$

$$\Theta(t) = \theta\hat{j} = qt\hat{j} \quad (6.2)$$

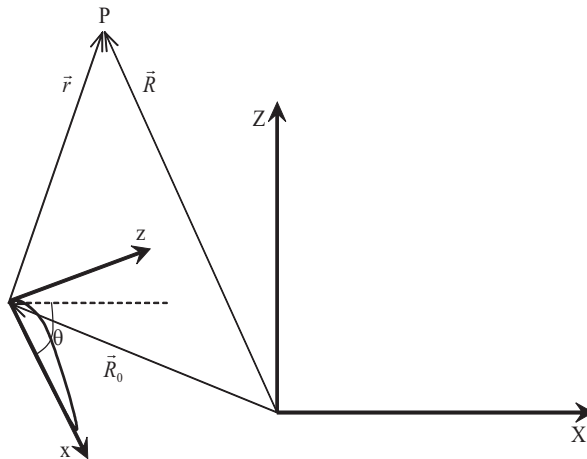


Figura 6.1: Sistemas de coordenadas inercial e não-inercial

Da fig. 6.1 podemos concluir que:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} \quad (6.3)$$

E, derivando a eq. 6.3 em relação ao tempo, obtemos:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v} \quad (6.4)$$

A eq. 6.4 relaciona a velocidade num ponto P qualquer descrita no sistema de coordenadas não-inercial com a velocidade do mesmo ponto descrita no sistema de coordenadas inercial. Se escolhermos o ponto P como sendo um ponto do aerofólio, encontra-se:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.5)$$

que é a velocidade de um ponto qualquer da superfície do aerofólio, descrita no sistema de coordenadas inercial. A velocidade do escoamento em relação à superfície é igual a $-\vec{V}$.

Para escoamentos potenciais, podemos definir o potencial de perturbação $\phi(X, Z, t)$ no sistema de coordenadas inercial (que é igual ao potencial total no mesmo sistema de coordenadas). A equação da continuidade pode ser escrita, em termos do potencial, como:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{no sistema de coordenadas inercial}) \quad (6.6)$$

Uma das condições de contorno para a eq. 6.6 (equação de Laplace) é a condição cinemática de que a velocidade normal à superfície do aerofólio é nula, ou seja:

$$(\nabla \phi - \vec{V}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{no sistema de coordenadas inercial}) \quad (6.7)$$

Outra condição de contorno para a eq. 6.6 é que a perturbação causada pelo movimento do aerofólio tende a zero à medida que se afasta do mesmo:

$$\lim_{|R-R_0| \rightarrow \infty} \nabla \phi = 0 \quad (6.8)$$

Para o caso de escoamentos transientes, como o estudado nesse capítulo, o princípio da invariância de circulação estabelecido por Kelvin deve ser obedecido. Então, o momento da quantidade de movimento num escoamento potencial permanece constante, ou seja, a circulação Γ ao redor de uma curva que contorna o aerofólio e sua esteira não se altera:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (6.9)$$

Para impor a condição real de que o bordo de fuga é o ponto de estagnação posterior do aerofólio e que as pressões em cima e em baixo do bordo de fuga são iguais (condição questionada para o caso transiente [37]), utiliza-se a equação de Bernoulli transiente. Analisando essa equação conclui-se que o ângulo em que a esteira de vorticidade deixa o bordo de fuga depende da taxa de variação da circulação ao longo do tempo. No método

numérico implementado nesse trabalho, esse ângulo é parte da solução do problema e será discutido posteriormente.

A solução desse problema, que é dependente do tempo, fica mais facilmente resolvida se utilizarmos o sistema de coordenadas não-inercial. Conseqüentemente deve-se estabelecer uma relação de transformação entre os dois sistemas de coordenadas. Isso é feito usando-se a regra da cadeia no cálculo das derivadas. Por exemplo, o termo $\partial/\partial X$ é calculado da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.10)$$

Da mesma forma, as derivadas do potencial em relação ao tempo são relacionadas nos dois sistemas de coordenadas por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_{inercial}} = - [\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}] \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t_{nao\ inercial}} \quad (6.11)$$

É importante ressaltar que o potencial total no sistema de coordenadas inercial (que é igual ao potencial de perturbação no mesmo sistema) ϕ é igual ao potencial de perturbação no sistema de coordenadas não-inercial φ , já que o potencial é uma grandeza escalar e não depende do sistema de coordenadas escolhido. Sabe-se que a equação da continuidade também não depende do sistema de coordenadas escolhido e que a mesma é conhecida como equação de Laplace para um escoamento potencial. Então a equação de Laplace é válida também para o sistema de coordenadas não-inercial:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{no sistema de coordenadas nao inercial}) \quad (6.12)$$

As condições de contorno da eq. 6.12 são as mesmas que as condições de contorno da eq. 6.6 só que em relação ao sistema de coordenadas não-inercial.

6.3 MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O CASO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE

Nesta seção desenvolveremos o método integral de contorno bidimensional para resolver a equação de Laplace em termos das distribuições de singularidades na superfície do corpo arbitrário. Para atingir esse objetivo, usaremos a teoria de funções de Green .

Escrevendo a segunda identidade de Green [24]:

$$\int_S (\varphi_1 \nabla \phi_2 - \varphi_2 \nabla \phi_1) \cdot n dS = \int_V (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) dV \quad (6.13)$$

onde φ_1 e φ_2 são funções escalares de posição. V e S representa o volume e a fronteira de uma região arbitrária do escoamento e n é o vetor unitário normal à superfície S . As funções φ_1 e φ_2 são harmônicas e então o lado direito da Eq.6.13 é igual a zero, resultando na relação recíproca:

$$\int_S \varphi_1 \nabla \varphi_2 \cdot n dS = \int_S \varphi_2 \nabla \varphi_1 \cdot n dS \quad (6.14)$$

Vamos considerar um corpo arbitrário com superfície S_B , uma esteira S_W e uma superfície externa S_∞ no infinito como mostrado na Fig. 6.2. O vetor unitário n_i ou n é definido apontando para fora da região de interesse. Então, $n_i = -n$.

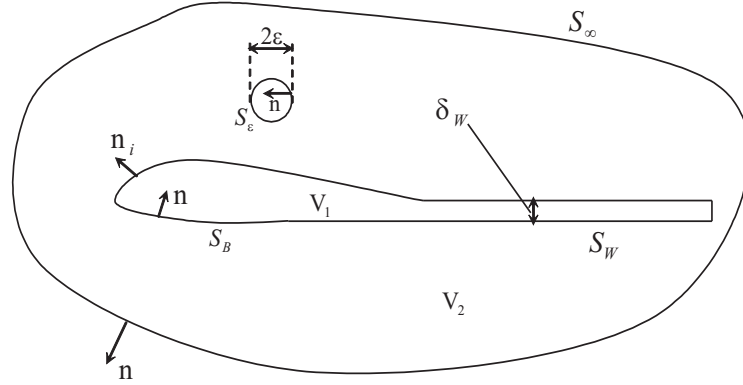


Figura 6.2: Corpo arbitrário para descrição do escoamento potencial bidimensional transiente

Na Eq. 6.14 a integral de superfície é para todas as fronteiras. Considere φ_1 a solução fundamental $G = \ln r/2\pi$, o potencial não conhecido $\varphi_2 = \Phi$ e $S = S_B \cup S_W \cup S_\infty$. De acordo com a Fig. 6.2 Φ é o potencial total no domínio V_2 (i.e. fora do corpo) e φ_1 é o potencial de uma fonte que é singular quando $r \rightarrow 0$. Quando existe uma singularidade localizada em x_0 no domínio V_2 , é necessário excluí-la da região de integração. Essa singularidade é então cercada por uma pequena esfera de raio ϵ . Fora da esfera, no restante do domínio V_2 , o potencial φ_1 satisfaz a equação de Laplace. O potencial φ_2 satisfaz a equação de Laplace em todo o domínio V_2 . Então a relação recíproca, aplicada ao domínio V_2 subtraído do volume da singularidade, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{S_B, S_W, S_\epsilon, S_\infty} (G(r) \nabla \Phi) \cdot n dS - \int_{S_B, S_W, S_\epsilon, S_\infty} (\Phi \nabla G(r)) \cdot n dS = 0 \quad (6.15)$$

onde a função de Green corresponde a uma fonte pontual $G(r) = \ln r/2\pi$ e o potencial de dipolo é dado por $\nabla G(r) = \nabla (\ln r)/2\pi$. Aqui, $r = x - x_0$ com x sendo um ponto arbitrário do escoamento e x_0 as coordenadas da singularidade.

Considerando a integral sobre S_ϵ que contém a singularidade, podemos escrever para

o limite quando ε tende a zero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} dS \rightarrow 0 \quad (6.16)$$

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Phi \frac{1}{2\pi \varepsilon} dS = \Phi(x_0) \quad (6.17)$$

Conseqüentemente a Eq. 6.15 se reduz a:

$$\Phi(x_0) = - \int_{S_B, S_W, S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS + \int_{S_B, S_W, S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS \quad (6.18)$$

As duas integrais do lado direito da equação acima representam a função de Green $G(r) = \ln r / 2\pi$ ao longo da superfície e a função de Green $\nabla G(r) = (1/2\pi) \nabla (\ln r) \cdot n$ orientada perpendicularmente à superfície, ou seja, distribuições de fontes e de dipolos na superfície, respectivamente.

Agora considere a situação em que o escoamento de interesse V_1 ocorre no interior do aerofólio e de sua esteira de vorticidade $S_B \cup S_W$, e que o potencial total é denotado por Φ_i . Para esse escoamento o polo x_0 (que está na região V_2) é exterior a $S_B \cup S_W$, e usando a Eq. 6.14 resulta em:

$$\int_{S_B, S_W} G \nabla \Phi_i \cdot n_i dS - \int_{S_B, S_W} \Phi_i \nabla G \cdot n_i dS = 0 \quad (6.19)$$

Uma equação mais apropriada pode ser obtida em termos da diferença $\Phi - \Phi_i$ e de seu gradiente na superfície. Para isso, subtrai-se-se a Eq. 6.18 da Eq. 6.19 lembrando-se que $n_i = -n$:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) = & - \int_{S_B} G(r) \nabla (\Phi - \Phi_i) \cdot n dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS - \\ & - \int_{S_W} G(r) \nabla (\Phi - \Phi_i) \cdot n dS + \int_{S_W} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS - \\ & - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS \end{aligned} \quad (6.20)$$

A integral sobre S_∞ na Eq. 6.20 é definida como o potencial não perturbado $\varphi^\infty(x_0)$:

$$\varphi^\infty(x_0) = - \int_{S_\infty} G(r) \nabla \Phi \cdot n dS + \int_{S_\infty} \Phi \nabla G(r) \cdot n dS \quad (6.21)$$

A velocidade normal à esteira de vorticidade é contínua de tal forma que $\partial \Phi / \partial n - \partial \Phi_i / \partial n = 0$. Também temos que a esteira é suficientemente delgada de tal forma que se sua espessura tende a zero ($\delta_W \rightarrow 0$). Considerando essas hipóteses, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_W \rightarrow 0} \left(- \int_{S_W} G(r) (\partial \Phi / \partial n - \partial \Phi_i / \partial n) dS + \int_{S_W} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS \right) = \\ = \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot n dS \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde Φ_U é o potencial total em cima da esteira e Φ_L é o potencial total abaixo da esteira. Então a Eq. 6.20 reduz-se a uma equação integral de contorno onde o potencial total

em um ponto qualquer no escoamento é função da distribuição de fontes e dipolos na superfície do corpo:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) = & \varphi^\infty - \int_{S_B} G(r) \frac{\partial}{\partial n} (\Phi - \Phi_i) dS + \int_{S_B} (\Phi - \Phi_i) \nabla G(r) \cdot n dS + \\ & + \int_{S_W} (\Phi_U - \Phi_L) \nabla G(r) \cdot n dS \end{aligned} \quad (6.23)$$

A equação 6.23 determina o valor de $\Phi(x_0)$ em termos da diferença $-\mu = \Phi - \Phi_i$ chamado de intensidade do dipolo e $-\sigma = \partial\Phi/\partial n - \partial\Phi_i/\partial n$ chamado de intensidade da fonte. Então o problema é resolvido quando as distribuições de fontes e de dipolos são determinadas. O sinal negativo em μ e σ é porque o vetor normal n aponta para o interior do aerofólio S_B . A eq. 6.23 é escrita então como:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty + \int_{S_B} \sigma G(r) dS - \int_{S_B} \mu \frac{\partial}{\partial n} (G(r)) dS - \int_{S_W} \mu \frac{\partial}{\partial n} (G(r)) dS \quad (6.24)$$

Pode-se demonstrar [19] que uma distribuição superficial de dipolo corresponde a uma distribuição superficial de vórtice com uma ordem a menos mais um anel de vórtices com intensidade igual a diferença entre os valores de intensidade de dipolo na fronteira entre dois elementos. Então com base no exposto acima e na eq. 6.24, podemos expressar o potencial total de um escoamento potencial em termos de um potencial não perturbado, uma distribuição superficial de fontes e uma distribuição superficial de vórtices:

$$\Phi(x_0) = \varphi^\infty + \int_{S_B} \frac{\sigma}{2\pi} \ln r dS - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \theta dS - \int_{S_W} \frac{\gamma}{2\pi} \theta dS \quad (6.25)$$

Temos que o potencial total $\Phi(x_0)$ no sistema de coordenadas não-inercial é igual ao potencial de perturbação φ mais o potencial do escoamento não perturbado φ^∞ , ou seja:

$$\Phi(x_0) = \varphi + \varphi^\infty \quad (6.26)$$

Onde:

$$\nabla \varphi^\infty = -\vec{V}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.27)$$

$$\nabla \varphi = \nabla \phi = \vec{V} \quad (6.28)$$

$$\nabla \Phi = \vec{v} \quad (6.29)$$

A velocidade de perturbação de um ponto qualquer do escoamento, usando a definição de potencial, é dada por:

$$\nabla \varphi(x_0) = \int_{S_B} \frac{\sigma}{2\pi} \nabla (\ln r) dS - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS - \int_{S_W} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS \quad (6.30)$$

Para impor a condição cinemática de que a velocidade normal à superfície do aerofólio é nula, substituímos as eqs. 6.5 e 6.7, mas em relação ao sistema de coordenadas não-inercial, em 6.30 e então obtemos:

$$\left\{ \int_{S_B} \frac{\sigma}{2\pi} \nabla (\ln r) dS - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS - \int_{S_W} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS - \vec{V}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{r} \right\} \cdot \vec{n} = 0 \quad (6.31)$$

(no sistema de coordenadas nao inercial)

Como veremos adiante, a eq. 6.31 é utilizada, juntamente com outras condições de contorno, para encontrar os valores das intensidades das distribuições superficiais de fonte σ e de vórtice γ . Feito isso, pode-se facilmente determinar o campo de velocidade na superfície do aerofólio usando a seguinte equação:

$$\vec{V}_t = \left\{ \int_{S_B} \frac{\sigma}{2\pi} \nabla (\ln r) dS - \int_{S_B} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS - \int_{S_W} \frac{\gamma}{2\pi} \nabla (\theta) dS - \vec{V}_0 - \vec{\Omega} \times \vec{r} \right\} \cdot \vec{t} \quad (6.32)$$

(no sistema de coordenadas nao inercial)

Uma vez determinado o campo de velocidade do escoamento, pode-se determinar o campo de pressão usando a equação de Bernoulli transiente, de acordo com a eq. 6.11 para mudança do sistema de coordenadas:

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \left(\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ nao inercial} \quad (6.33)$$

(no sistema de coordenadas nao inercial)

E se usarmos a definição de coeficiente de pressão, obtemos:

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{(1/2) \rho v_{ref}^2} = - \frac{(\nabla \phi)^2}{v_{ref}^2} + \frac{2}{v_{ref}^2} \left[\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \cdot \nabla \phi - \frac{2}{v_{ref}^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ nao inercial} \quad (6.34)$$

6.4 CONDIÇÃO DE KUTTA PARA ESCOAMENTO TRANSIENTE

Seja um aerofólio num escoamento transiente. A circulação $\Gamma(t)$ em torno do aerofólio varia com o tempo t . Sabe-se, pelo teorema de Kelvin, que a circulação em torno do aerofólio e da sua esteira de vorticidade deve permanecer constante ao longo do tempo. Então uma vorticidade de intensidade $(\partial \Gamma / \partial t) \delta t$ é emitida do bordo de fuga do aerofólio, no intervalo de tempo δt , e é convectada pelo escoamento. Se considerarmos, como no escoamento permanente, que as velocidades em cima e em baixo do bordo de fuga são iguais, então as pressões em cima e em baixo do bordo de fuga serão diferentes, pois de acordo com a equação de Bernoulli transiente, existe uma descontinuidade $\partial \phi / \partial t$ no bordo de fuga associada com $\partial \Gamma / \partial t$. Admitir uma diferença de pressão no bordo de fuga é, a princípio, inaceitável. Se o ângulo do bordo de fuga α do aerofólio for diferente de zero, então existem três hipóteses para direção e magnitude do escoamento nessa região, conforme as figuras 6.3 a 6.5(b):

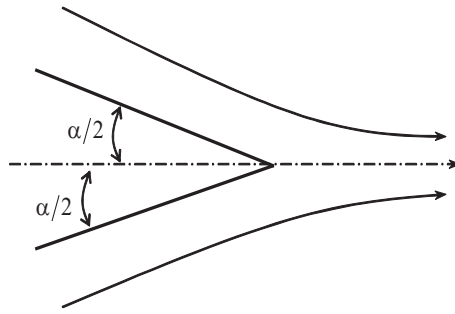


Figura 6.3: Hipótese 1 - Velocidade igual a zero em cima e em baixo do bordo de fuga

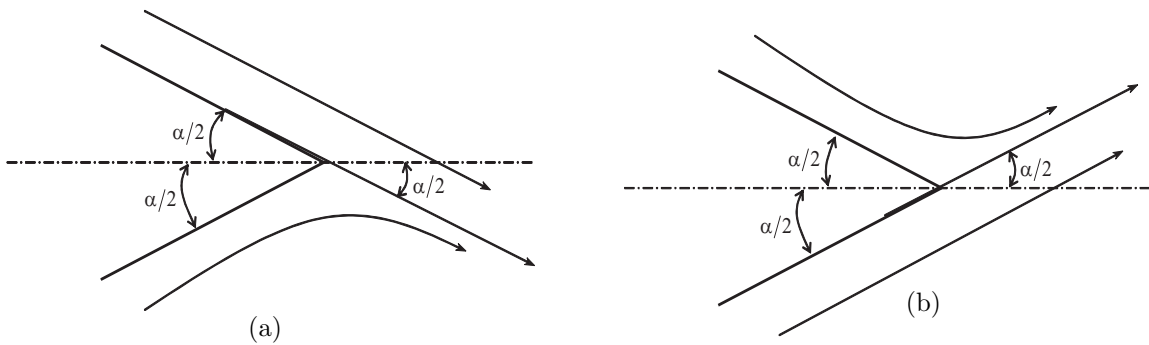


Figura 6.4: Hipótese 2 - (a) Velocidade finita em cima do bordo de fuga e igual a zero em baixo do bordo de fuga (para $d\Gamma/dt < 0$); (b) Velocidade finita em baixo do bordo de fuga e igual a zero em cima do bordo de fuga (para $d\Gamma/dt > 0$).

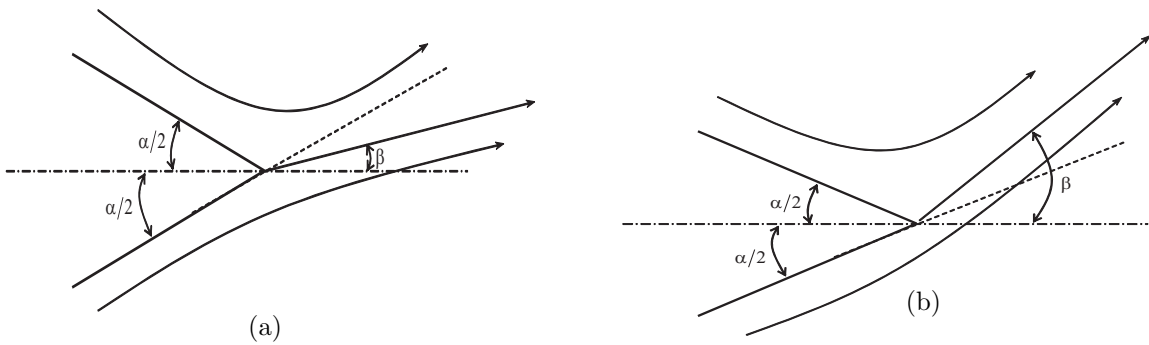


Figura 6.5: Hipótese 3 - (a) Velocidade igual a zero em cima e em baixo do bordo de fuga ($\beta < \alpha/2$); (b) Velocidade infinita em um lado do bordo de fuga e velocidade igual a zero no outro lado do bordo de fuga ($\beta > \alpha/2$).

A hipótese 1 é inaceitável porque admite que a velocidade é igual a zero em cima e em baixo do bordo de fuga, impossibilitando a emissão da esteira de vorticidade. A hipótese 3 é também inaceitável pelo mesmo motivo descrito anteriormente e pelo fato de não existirem velocidades infinitas. A hipótese 2, em primeira análise, parece ser uma possibilidade válida mas, se considerarmos o caso em que $d\Gamma/dt \rightarrow 0$, então temos que a direção do escoamento muda abruptamente, ou seja, a curvatura da linha de corrente tende ao infinito. Então, em todas as três hipóteses, existe alguma singulari-

dade. A hipótese 2 é conhecida como modelo de Giesing-Maskell [15][30] e resultados experimentais [37] confirmam parcialmente a validade dessa hipótese, pois ensaios com anemômetro a laser mostram a validade da condição apontada nas figuras 6.4(a) e 6.4(b), com exceção de que, quando $d\Gamma/dt \rightarrow 0$, a linha de corrente muda suavemente de uma direção para outra. A condição de Kutta é uma maneira de representar uma condição real do escoamento no qual a teoria de escoamentos potenciais não consegue simular. No presente trabalho, adotou-se como condição de Kutta a condição de igualdade de pressões em cima e em baixo do bordo de fuga. Apesar dessa condição ser questionada [37], resultados satisfatórios são obtidos adotando-se essa condição [7]. Então, usando a equação de Bernoulli transiente 6.34 para o bordo de fuga do aerofólio e lembrando que $\vec{V} = \nabla\phi$, obtemos:

$$C_{pl} - C_{pu} = \frac{V_u^2 - V_l^2}{v_{ref}^2} + \frac{2}{v_{ref}^2} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_u - \phi_l) + \frac{2}{v_{ref}^2} (\vec{V}_l - \vec{V}_u) \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (6.35)$$

Considerando as pressões iguais em cima e em baixo do bordo de fuga e que $\frac{\partial}{\partial t} (\phi_u - \phi_l) = \frac{d\Gamma}{dt}$ resulta em:

$$2 \frac{d\Gamma}{dt} = V_l^2 - V_u^2 + 2 (\vec{V}_u - \vec{V}_l) \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (6.36)$$

Substituindo a eq. 6.4 na eq. 6.36 fica:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{v_l^2 - v_u^2}{2} \quad (6.37)$$

Ou seja, as velocidades em cima e em baixo do bordo de fuga e o ângulo em que a esteira de vorticidade deixa o bordo de fuga dependem da taxa de variação da circulação do aerofólio ao longo do tempo. Essa mesma equação pode ser obtida usando uma análise de fluxo de vorticidade no ponto de separação da camada limite (condição de Howarth). A equação 6.37 é usada no método integral de contorno. Para isso, considera-se que as velocidades v_l e v_u são valores no meio dos elementos de contorno. Então, a condição de igualdade de pressão é aplicada numericamente no meio dos elementos de contorno do bordo de fuga, ao invés de ser efetivamente no bordo de fuga.

6.5 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Como o problema em questão é dependente do tempo então resolve-se a equação 6.12 em sucessivos instantes de tempo t_k usando o método integral de contorno. A superfície do aerofólio é substituído por N elementos planos de contorno. Uma distribuição constante de fontes $(\sigma_i)_k$ é considerada em cada elemento de contorno e a intensidade dessa distribuição pode variar de elemento para elemento. Uma distribuição de vórtices γ_k constante e igual para todos os elementos de contorno é admitida também. Então a circulação total do aerofólio é dada por:

$$\Gamma_k = \gamma_k S \quad (6.38)$$

onde S é o perímetro do aerofólio. Um elemento plano adicional que representa o início da esteira de vorticidade é admitido no bordo de fuga. Esse elemento tem um comprimento Δ_k e uma inclinação θ_k em relação à linha de corda do aerofólio. A intensidade de vorticidade $(\gamma_w)_k$ desse elemento é definida de acordo com o teorema de Kelvin:

$$(\gamma_w)_k = \frac{\Gamma_{k-1}}{\Delta_k} - \frac{\Gamma_k}{\Delta_k} \quad (6.39)$$

Então a circulação desse elemento é igual à mudança de circulação em torno do aerofólio entre os instantes $t_k - 1$ e t_k . Na equação 6.39, Γ_{k-1} é conhecido previamente e Γ_k não é conhecido e pode ser escrito em termos de γ_k . Em um instante t_k o elemento plano da esteira no instante anterior $t_k - 1$, adjacente ao bordo de fuga, é transformado em um ponto de vórtice discreto com circulação igual à do elemento e convectado pelo escoamento. Um novo elemento plano adicional é então formado atrás do bordo de fuga. Logo, no instante t_k , as intensidades e posições dos vórtices discretos são conhecidas. Temos então no instante t_k $N + 3$ incógnitas: $(\sigma_i)_k$ ($i = 1, \dots, N$), γ_k , Δ_k e θ_k . O sistema de equações montado para determinação das incógnitas é formulado usando as seguinte condições:

- As N equações (nos N pontos de controle) da condição cinemática de velocidade normal à superfície do aerofólio igual a zero:

$$(\vec{v}_i)_k \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{no sistema de coordenadas nao inercial}) \quad (6.40)$$

- A condição de pressões iguais nos pontos de controle dos elementos de contorno adjacentes ao bordo de fuga (condição de Kutta equivalente à eq.6.37):

$$\left[(\vec{v}_l)_k \cdot \vec{t} \right]^2 = \left[(\vec{v}_u)_k \cdot \vec{t} \right]^2 + \frac{2(\Gamma_k - \Gamma_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \quad (6.41)$$

- A determinação do comprimento e da direção do elemento plano adjacente ao bordo de fuga que representa o início da esteira de vorticidade (Δ_k e θ_k) que é calculado considerando que a direção do elemento é a mesma direção que o vetor velocidade resultante no ponto de controle do elemento e seu comprimento é proporcional à magnitude do vetor velocidade, ou seja:

$$\tan \theta_k = \frac{(W_w)_k}{(U_w)_k} \quad (6.42)$$

$$\Delta_k = \left[(U_w)_k^2 + (W_w)_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} [t_k - t_{k-1}] \quad (6.43)$$

Então podemos perceber que o sistema de equações resultante é não-linear. Para resolver esse sistema de equações não-linear adotou-se o seguinte processo iterativo:

Escolhe-se arbitrariamente valores para Δ_k e θ_k , restando N equações lineares (eq. 6.40) e uma equação quadrática (eq. 6.41). As N equações lineares são resolvidas pelo método de eliminação de Gauss para encontrar os valores de $(\sigma_i)_k$ ($i = 1, \dots, N$) em função de γ_k e então γ_k é obtido usando a equação 6.41. Uma vez conhecidos os valores de $(\sigma_i)_k$ ($i = 1, \dots, N$) e de γ_k então os valores de $(U_w)_k$ e $(W_w)_k$ podem ser calculados e substituídos nas eqs. 6.42 e 6.43 para determinação de novos valores de Δ_k e θ_k . Esses novos valores são comparados com os valores antigos e se esses valores forem diferentes então repete-se o processo com os novos valores de Δ_k e θ_k até que a diferença entre os novos e os antigos valores de Δ_k e θ_k seja um número bem pequeno definido previamente.

6.6 APLICAÇÕES DO MÉTODO

Foi elaborado um código escrito na linguagem de programação FORTRAN que determina o campo de velocidade, de pressão e as forças de sustentação e arrasto (ou empuxo) ao longo do tempo para um escoamento bidimensional, incompressível, invíscido e transiente. As figuras 6.6 e 6.7 mostradas abaixo, representam os resultados numéricos da distribuição de velocidade na superfície de um aerofólio naca 0012. O caso estudado é o perfil num movimento de oscilação senoidal vertical (plunging motion) com frequência reduzida $k = 3$ e amplitude de oscilação $h = 0,2$. A velocidade de oscilação vertical é $V_p = kh = 0,6$. A figura 6.6 é no instante $t = 0,00279s$ onde a variação da circulação no perfil ao longo do tempo é $d\Gamma/dt = 22,98$ e conseqüentemente a velocidade em baixo do bordo de fuga é maior que a velocidade em cima do bordo de fuga

do aerofólio, conforme a eq. 6.37. A figura 6.7 é traçada com valores referentes ao instante $t = 0,093465s$, onde a variação da circulação no perfil ao longo do tempo é $d\Gamma/dt = -89,45$ e, conseqüentemente, a velocidade em cima do bordo de fuga é maior que a velocidade em baixo do bordo de fuga do perfil, conforme a eq. 6.37. Essa diferença de velocidades no bordo de fuga é necessária para a formação da esteira de vorticidade.

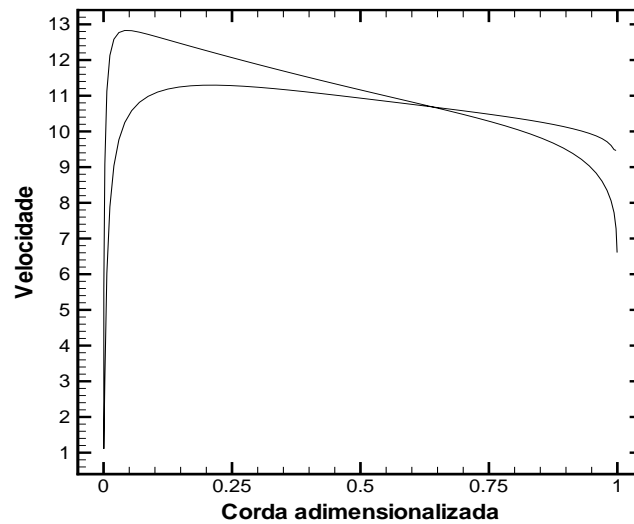


Figura 6.6: Distribuição da velocidade do escoamento na superfície do aerofólio. Taxa temporal da circulação no aerofólio positiva

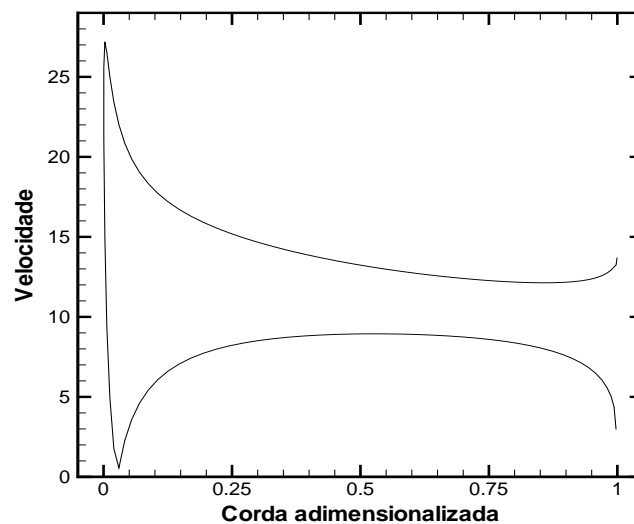


Figura 6.7: Distribuição da velocidade do escoamento na superfície do aerofólio. Taxa temporal da circulação no aerofólio negativa

As figuras 6.8 e 6.9 mostradas abaixo representam, respectivamente, os resultados experimental [23] e numérico da geometria da esteira de vorticidade que sai do bordo

de fuga de um perfil naca 0012 submetido a um movimento de oscilação senoidal vertical (plunging motion) com frequência reduzida $k = 3$, amplitude de oscilação $h = 0,2$ e velocidade de oscilação vertical $V_p = kh = 0,6$. Comparando qualitativamente os dois resultados, podemos perceber uma grande semelhança entre as duas esteiras de vorticidade. Percebe-se que na simulação numérica a fileira de vórtices de sentido anti-horário que se forma acima do aerofólio está mais distante da fileira de vórtice de sentido horário que se forma abaixo do aerofólio quando comparado com o resultado experimental. Isso resulta em uma força de empuxo (de sentido oposto à força de arrasto) prevista numericamente maior do que a força medida no experimento, pois a área de aceleração do fluido atrás do aerofólio será maior e, conseqüentemente, pelo princípio da quantidade de movimento, a força de empuxo será maior.



Figura 6.8: Resultado experimental [8] da geometria da esteira $V_p = 0,6$

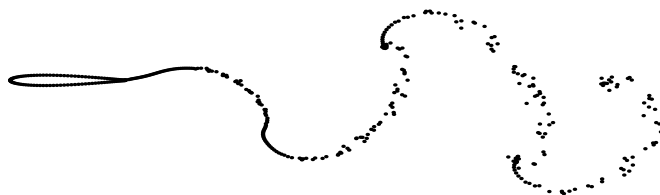


Figura 6.9: Resultado numérico da geometria da esteira $V_p = 0,6$

As figuras 6.10, 6.11 e 6.12 mostradas abaixo, demonstram como a topologia da esteira de vorticidade varia com a velocidade de oscilação vertical. Na figura 6.10, o perfil naca

0012 está submetido a um movimento de oscilação senoidal vertical com frequência reduzida $k = 3$, amplitude de oscilação $h = 0,02$ e velocidade de oscilação vertical $V_p = 0,06$. Na figura 6.11, o perfil naca 0012 está submetido a um movimento de oscilação senoidal vertical com frequência reduzida $k = 6,83$, amplitude de oscilação $h = 0,02$ e velocidade de oscilação vertical $V_p = 0,1366$. Na figura 6.12, o perfil naca 0012 está submetido a um movimento de oscilação senoidal vertical com frequência reduzida $k = 3$, amplitude de oscilação $h = 0,1$ e velocidade de oscilação vertical $V_p = 0,3$.

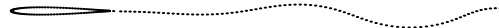


Figura 6.10: Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,06$

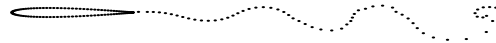


Figura 6.11: Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,1366$

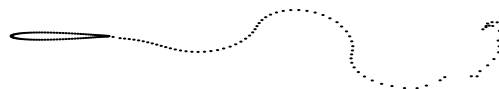


Figura 6.12: Movimento de oscilação senoidal vertical com $V_p = 0,3$

Por fim, a figura 6.13 mostrada, representa a variação do comprimento de onda da esteira em função da amplitude de oscilação, para dois valores de frequência reduzida

$k = 3$ e $k = 6$, 83. São mostrados resultados experimentais [23] e resultados numéricos do método integral de contorno. O comprimento de onda da esteira é definido como a distância entre dois vórtices adjacentes com a mesma direção de rotação, conforme figura 9 abaixo.

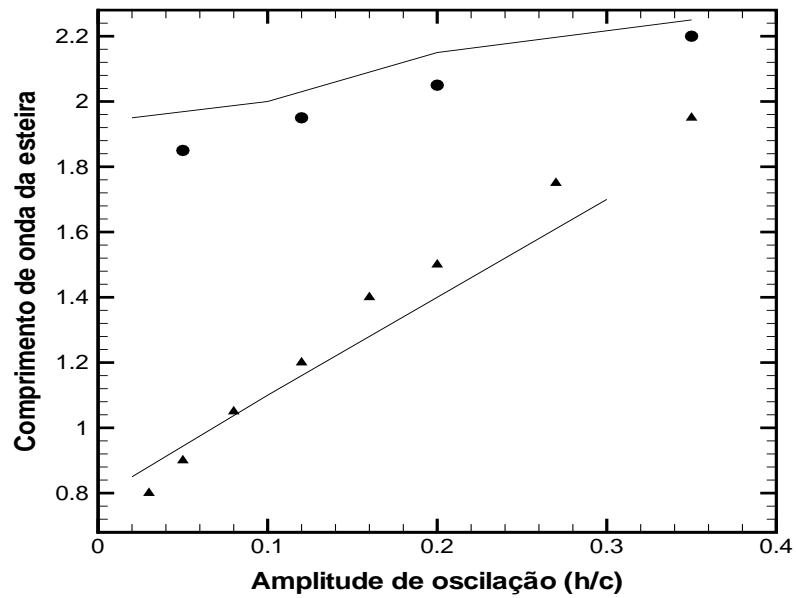


Figura 6.13: Comprimento de onda da esteira versus amplitude de oscilação

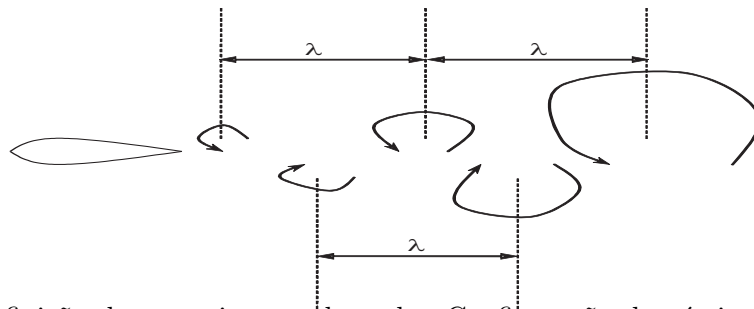


Figura 6.14: Definição de comprimento de onda. Configuração de vórtices na esteira indicando empuxo [23].

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo do presente trabalho foi apresentar métodos de simulação de escoamentos aerodinâmicos que tenham um custo computacional baixo. Para isso, foi utilizada a teoria de escoamentos potenciais resolvida numericamente pelo Método Integral de Contorno. A teoria potencial não considera a existência da viscosidade do fluido e considera que o escoamento é irrotacional. Como consequência, não existe camada limite nos escoamentos potenciais. Por isso, foi necessário acoplar a teoria potencial com a teoria de camada limite delgada. Utilizamos o conceito de similaridade para encontramos a equação de Falkner-Skan e resolvemos essa equação numericamente. Apesar da equação de Falkner-Skan ser de restrita utilização prática, ela foi utilizada para validar o método de camada limite laminar desenvolvido subsequentemente (Método Integral de Kármán-Pohlhausen). A equação de Kármán-Pohlhausen foi resolvida numericamente para o caso laminar e para uma distribuição arbitrária de pressão ao longo da superfície do aerofólio e, os resultados, foram comparados com a solução numérica da equação de Falkner-Skan. Os resultados dos dois métodos praticamente coincidiram. Para simular uma camada limite turbulenta com gradiente de pressão, utilizou-se o Método Integral de Head. Esse método faz um balanço de massa na borda da camada limite e utiliza algumas correlações experimentais. Elaborou-se um código computacional que calcula a distribuição de pressão pelo Método Integral de Contorno e utiliza esse resultado para o cálculo da camada limite laminar e turbulenta. A posição de transição da camada limite laminar para camada limite turbulenta é determinada pelo método de Michel. Feito isso, obteve-se um código computacional que é capaz de simular escoamentos aerodinâmicos com uma razoável precisão e com um custo computacional pequeno.

Escoamentos transientes foram analisados por meio do método integral de contorno não-estacionário. Considerou-se novamente a teoria potencial. Uma revisão bibliográfica do assunto mostra que não existe um consenso com relação a aplicação da condição de Kutta para o caso de escoamento potencial transiente [37]. Existem também poucos estudos experimentais que mostram a topologia do escoamento transiente próximo ao bordo de fuga. Então existe a necessidade de um estudo experimental minucioso da topologia do escoamento transiente no bordo de fuga do aerofólio. O método apresentado adotou como condição de Kutta a igualdade das pressões no

extradorso e intradorso do bordo de fuga. Como trabalho futuro, pode-se adotar outras maneiras de aplicar a condição de Kutta. Uma delas, seria uma forma que satisfaça o modelo de Giesing-Maskell [15], [30] comentado no capítulo 6.

O método integral de contorno usado na simulação de escoamentos potenciais tridimensionais, pode ser melhorado se for adotado um modelo de esteira de vorticidade que seja convectada pelo escoamento. Uma revisão bibliográfica do assunto mostra que existem dois métodos para simular essa esteira. O primeiro método considera inicialmente a esteira numa posição pré-determinada e, a cada iteração, pontos determinados da esteira se alinham com o escoamento. A última iteração é identificada quando as velocidades normais aos pontos da esteira são próximas de zero. Esse método apresenta problemas com relação à convergência. O segundo método não considera inicialmente a presença da esteira e, a cada iteração, a esteira vai sendo formada no bordo de fuga da asa e segue as direções do escoamento local. Esse método é mais aceito e empregado do que o primeiro método e também pode ser usado para simular escoamentos transientes tridimensionais, se utilizado com o teorema de Kelvin e a forma transiente da equação de Bernoulli.

Outras aplicações para o método integral de contorno aplicado à solução de escoamentos potenciais são seu uso nos problemas iterativos inversos, onde se deseja descobrir uma determinada geometria que satisfaça um determinado campo de pressão, ou o uso iterativo do método para a solução da equação do potencial completo (escoamento transônico).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alvarenga, R. C. and Cunha, F.R. 2000, "Estudo de escoamentos em Altos Números de Reynolds com Aplicações na Aerodinâmica", Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica - Relatório do Projeto Final, 209p.
- [2] Alvarenga, R. C., Cunha, F. R., 2005, "An Application of a Boundary Integral Method for Simulating Potential Flow Around Three-Dimensional Bodies", In: 18th International Congress of Mechanical Engineering, 2005, Ouro Preto. Proceedings of Cobem 2005. ABCM, 2005.
- [3] Alvarenga, R. C., Cunha, F. R., 2006, "Boundary Integral Simulations of Three-Dimensional Inviscid Flows", Latim American Journal of Solids and Structure, pp. 161 - 174.
- [4] Anderson, J. D., 1991, "Fundamentals of Aerodynamics", Mcgraw-Hill higher education, second edition, 772 p.
- [5] Ashby, D. L., Dudley, M. R. and Iguchi, S. K., 1988, "Development and Validation of an Advanced Low-Order Panel Method", NASA TM-101024.
- [6] Ashby, D. L., 1999, "Potential Flow Theory and Operation Guide for the Panel Code PMARC-14", NASA/TM-1999-209582, 45 p.
- [7] Basu, B. C. and Hancock, G. J., 1978, "The Unsteady Motion of a Two-Dimensional Airfoil in Incompressible Inviscid Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 87, pp. 159-168, July.
- [8] Bertin, John J., and Smith, Michael L., 1998, "Aerodynamics for Engineers", Prentice Hall, third edition.
- [9] Cole, Richard I., 1952, "Pressure Distributions on Bodies of Revolution at Subsonic and Transonic Speeds", NACA RM L52D30.

- [10] Cunha, F. R., Sousa, A. J. and Loewenberg, M., 2003, "A Mathematical Formulation of the Boundary Integral Equations for a Compressible Stokes Flow", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 22, pp. 53-73.
- [11] Cunha, F. R., Queiroz, R. P., Alvarenga, R. C., 2007, "The Influence of the Geometric Parameters and Additives on the Flow Around Aerofoils and Wings", In: 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007, Brasília. Proceedings of Cobem 2007. ABCM, 2007.
- [12] Droo, I. and Smith, S., 1990, "The Computation of Induced Drag with Nonplanar and Deformed Wakes", SAE PAPER No. 901933, pp. 1880-1888.
- [13] Gebhardt, L., Fokin, D., Lutz, T. and Wagner, S., 2002, "An Implicit-Explicit Dirichlet-Based Field Panel Method for Transonic Aircraft Design", AIAA-2002-3145, 13 p.
- [14] Giesing, J. P., 1968, "Nonlinear Two-Dimensional Unsteady Potential Flow with Lift", *Journal of Aircraft*, Vol.5, pp. 135-143, March.
- [15] Giesing, J. P., 1969, "Vorticity and Kutta Condition for unsteady Multi-Energy Flows", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, Series E, pp. 608-613, March.
- [16] Glauert, H., 1986, "The elements of aerofoil and airscrew theory", Cambridge University, second edition.
- [17] Harris, T. A. and Lowry J. G., 1941, "Pressure Distribution Over an Naca 23012 Airfoil With a Fixed Slot and a Slotted Flap", NACA Report 732.
- [18] Hess, J. L., and Smith, A.M.O., 1966, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 3, Pergammon Press, New York, 138 p.
- [19] Hess, J. L., 1972, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Lifting Bodies", Report N° MDC J5679-01 Douglas Aircraft Company, McDonnell Douglas Corporation, Long Beach California, 160 p.
- [20] Hess, J. L., 1974, "The Problem of Three-Dimensional Lifting Potential Flow and Its Solution by Means of Surface Singularity Distribution", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4, pp. 283-319.
- [21] Hess, J. L., 1990, "Panel Methods in Computational Fluid Dynamics", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.22, pp. 255-274.

- [22] Hunt, B., 1978, "The Panel Method for Subsonic Aerodynamic Flows: A Survey of Mathematical Formulations and Numerical Models and an Outline of the New British Aerospace Scheme", Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1978-4, Vol. I, March 13-17.
- [23] Jones, K. D., 1996, Dohring, C. M. and Platzer, M. F., "Wake Structures Behind Plunging Airfoils: A Comparison of Numerical and Experimental Results", AIAA 96-0078, 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 15-18.
- [24] Kellogg, O. D., 1954, "Foundations of Potential Theory", Dover Publications, Inc., New York, 384 p.
- [25] Kim, M. J. and Mook, D. T., 1986, "Application of Continuous Vorticity Panels to General Unsteady Incompressible Two-Dimensional Lifting Flows", Journal of Aircraft, Vol. 23, N° 6, pp. 464-471, June.
- [26] Kolbe, C. D. and Boltz, F. W., 1951, "The Forces and Pressure Distribution at Subsonic Speeds on a Plane Wing Having 45° of Sweepback, an Aspect Ratio of 3, and a Taper Ratio of 0.5", NACA RM A51G31.
- [27] Lemma, U. and Morino, L., 1997, "Transonic Two Dimensional Analysis Using a Boundary Integral Equation Method", Journal of Fluids and Structures, Vol. 11, No. 4, pp. 247-269.
- [28] Lighthill, M.J., 1980, "An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions", 5th ed. CUP, Cambridge 79 p.
- [29] Loewy, R. G., 1957, "A Two-Dimensional Approximation to the Unsteady Aerodynamics of Rotary Wings", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 24, N°2, pp. 81-106, February.
- [30] Maskell, E. C., 1972, "On the Kutta-Joukowski Condition in Two-Dimensional Unsteady Flow", Unpublished Note, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, England.
- [31] Maskew, B. and Woodward, F. A., 1976, "Symmetrical Singularity Model for Lifting Potential Flow Analysis", Journal of Aircraft, Vol.13, No. 9, pp. 733-734.
- [32] Maskew, B., 1982, "Prediction of Subsonic Aerodynamic Characteristics: A Case for Low-Order Panel Methods", Journal of Aircraft, Vol.19, No. 2, pp. 157-163.

- [33] Mook, D. T.; Roy, S.; Choksi, G. and Dong, B., 1989, "Numerical Simulation of the Unsteady Wake Behind an Airfoil", *Journal of Aircraft*, Vol. 26, N° 6, pp. 509-514, June.
- [34] Morino, L. and Kuo, C. C., 1974, "Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: A General Theory", *AIAA Journal*, Vol.12, No. 2, pp. 191-197.
- [35] Morino, L., Chen, L. T. and Suciu, E. O., 1975, "Steady and Oscillatory Subsonic and Supersonic Aerodynamics around Complex Configurations", *AIAA Journal*, Vol.13, No. 3, pp. 368-374.
- [36] Morino, L. and Lemma, U., 1993, "Boundary Integral Equations and Conservative Dissipation Schemes for Full Potential Transonic Flows", *Computational Mechanics*, Vol. 13, pp. 90-99.
- [37] Poling, D. R. and Telionis, D. P., 1986, "The Response of Airfoils to Periodic Disturbances - The Unsteady Kutta Condition", *AIAA Journal*, Vol. 24, N° 2, pp. 193-199, February.
- [38] Pao, R. H. F., 1967, "Fluid Dynamics", Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus Ohio.
- [39] Prandtl, L., 1904, *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, A. Krazer, ed, Teubner, Leipzig, Germany.
- [40] Rae, W. H., Pope, A., 1984, "Low speed wind tunnel testing", Second Edition, New York: John Wiley and Sons.
- [41] Resende, O. C., 2004, "The Evolution of the Aerodynamic Design Tools and Transport Aircraft Wings at Embraer", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, Vol. XXVI, No. 4, pp. 379-390.
- [42] Romate, J. E., 1990, "Local Error Analysis of Three-Dimensional Panel Methods in Terms of Curvilinear Surface Coordinates", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.27, No. 2, pp. 529-542.
- [43] Rubbert, P. E. and Saaris, G. R., 1968, "A General Three-Dimensional Potential-Flow Method Applied to V/STOL Aerodynamics", *SAE Paper N° 680304*, pp. 945-957.
- [44] Ruggiero, Márcia A. Gomes e Lopes, Vera Lúcia da Rocha, 1998, "Cálculo Numérico, aspectos teóricos e computacionais", McGraw-Hill, primeira edição.

- [45] Singh, N., Bandyopadhyay, G. and Basu, B. C., 1983, "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Three Dimensional Wings Using Internal Singularity Distributions", *Aeronautical Quarterly Journal*, pp. 197-211.
- [46] Smilg, B., 1949, "The Instability of Pitching Oscillation of an Airfoil in Subsonic Incompressible Potential Flow", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 16, N° 11, pp. 691-696, November.
- [47] Theodorsen, Theodore, 1931, "Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape", Naca Report number 411.
- [48] Theodorsen, Theodore and Garrick, I. E., 1933, "General Potential Theory of arbitrary Wing Sections", Naca Report number 452.
- [49] Theodorsen, T. and Garrick, I. E., 1940, "Mechanism of Flutter", NACA TR-685.
- [50] Tinoco, E. N., Ball, D. N. and Rice, F. A., 1987, "PAN AIR Analysis of a Transport High-Lift Configuration", *Journal of Aircraft*, Vol.24, No. 3, pp. 181-187.
- [51] Wenzenger, C. J. and Anderson, W. B., 1937, "Pressure Distribution Over Airfoils With Fowler Flaps", NACA Report 620.
- [52] Wenzenger, C. J., 1937, "Pressure Distribution Over an Naca 23012 Airfoil With an Naca 23012 External-Airfoil Flap", NACA Report 614.
- [53] Woodward, F. A., 1968, "Analysis and Design of Wing-Body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds", *Journal of Aircraft*, Vol.5, No. 6, pp. 528-533.
- [54] Woodward, F. A. and Landrum, E. J., 1980, "The Supersonic Triplet - A New Aerodynamic Panel Singularity with Directional Properties", *AIAA Journal*, Vol.18, No. 2, pp. 138-142.

APÊNDICES

A Método de Runge-Kuta

Para solução do sistema de três equações (5.42, 5.43 e 5.44), o método de Runge-Kutta utiliza as seguintes expressões:

$$K1 = hW(i) \quad (\text{A.1})$$

$$Q1 = hV(i) \quad (\text{A.2})$$

$$P1 = h(m(W(i)^2 - 1) - 0.5(m + 1)F(i)V(i)) \quad (\text{A.3})$$

$$K2 = h(W(i) + Q1/2) \quad (\text{A.4})$$

$$Q2 = h(V(i) + P1/2) \quad (\text{A.5})$$

$$P2 = h(m((W(i) + 0.5Q1)^2 - 1) - 0.5(m + 1)(F(i) + 0.5K1)(V(i) + 0.5P1)) \quad (\text{A.6})$$

$$K3 = h(W(i) + Q2/2) \quad (\text{A.7})$$

$$Q3 = h(V(i) + P2/2) \quad (\text{A.8})$$

$$P3 = h(m((W(i) + 0.5Q2)^2 - 1) - 0.5(m + 1)(F(i) + 0.5K2)(V(i) + 0.5P2)) \quad (\text{A.9})$$

$$K4 = h(W(i) + Q3) \quad (\text{A.10})$$

$$Q4 = h(V(i) + P3) \quad (\text{A.11})$$

$$P4 = h(m((W(i) + Q3)^2 - 1) - 0.5(m + 1)(F(i) + K3)(V(i) + P3)) \quad (\text{A.12})$$

$$F(i + 1) = F(i) + \frac{1}{6}(K1 + K4 + 2(K2 + K3)) \quad (\text{A.13})$$

$$W(i + 1) = W(i) + \frac{1}{6}(Q1 + Q4 + 2(Q2 + Q3)) \quad (\text{A.14})$$

$$V(i + 1) = V(i) + \frac{1}{6}(P1 + P4 + 2(P2 + P3)) \quad (\text{A.15})$$

B Tabela do Método Integral de Kármán-Pohlhausen

A relação universal entre as funções $K(\Lambda)$, $f_1(K)$, $f_2(K)$ e $F(K)$ é representada na tabela mostrada abaixo:

Λ	K	$F(K)$	$f_1(K)$	$f_2(K)$
12.000000	0.094800	-0.009480	2.250000	0.356000
11.000000	0.094100	-0.009120	2.253000	0.355000
10.000000	0.091900	-0.008000	2.260000	0.351000
9.000000	0.088200	-0.006080	2.273000	0.347000
8.000000	0.083100	-0.003350	2.289000	0.340000
7.800000	0.081900	-0.002710	2.293000	0.338000
7.600000	0.080700	-0.002030	2.297000	0.337000
7.400000	0.079400	-0.001320	2.301000	0.335000
7.200000	0.078100	-0.000510	2.305000	0.333000
7.052000	0.077000	0.000000	2.308000	0.332000
7.000000	0.076700	0.002100	2.309000	0.331000
6.800000	0.075200	0.010200	2.314000	0.330000
6.600000	0.073700	0.018600	2.318000	0.328000
6.400000	0.072100	0.027400	2.323000	0.326000
6.200000	0.070600	0.036300	2.328000	0.324000
6.000000	0.068900	0.045900	2.333000	0.321000
5.000000	0.059900	0.097900	2.361000	0.310000
4.000000	0.049700	0.157900	2.392000	0.297000
3.000000	0.038500	0.225500	2.427000	0.283000
2.000000	0.026400	0.300400	2.466000	0.268000
1.000000	0.013500	0.382000	2.508000	0.252000
0.000000	0.000000	0.469800	2.554000	0.235000
-1.000000	-0.014000	0.563300	2.604000	0.217000
-2.000000	-0.028400	0.660900	2.647000	0.199000
-3.000000	-0.042900	0.764000	2.716000	0.179000

Λ	K	$F(K)$	$f_1(K)$	$f_2(K)$
-4.000000	-0.057500	0.869800	2.779000	0.160000
-5.000000	-0.072000	0.978000	2.847000	0.140000
-6.000000	-0.086200	1.087700	2.921000	0.120000
-7.000000	-0.099900	1.198100	2.999000	0.100000
-8.000000	-0.113000	1.308000	3.085000	0.079000
-9.000000	-0.125400	1.416700	3.176000	0.059000
-10.000000	-0.136900	1.522900	3.276000	0.039000
-11.000000	-0.147400	1.625700	3.383000	0.019000
-12.000000	-0.156700	1.724100	3.500000	0.000000
-13.000000	-0.164800	1.816900	3.627000	-0.019000
-14.000000	-0.171500	1.903300	3.765000	-0.037000
-15.000000	-0.176700	1.982000	3.916000	-0.054000

C Critério de Transição de Michel

O critério de Michel é baseado em dados experimentais. Esse critério estabelece que a posição de transição da camada limite (laminar/turbulenta) acontece na posição em que:

$$Re_\theta = 2,9Re_x^{0,4} \quad (C.1)$$

onde Re_x é baseado na distância medida a partir do ponto de estagnação.