Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Geometria Não-Comutativa e Teoria de Campos Simplética

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília para obtenção do título de doutor em Física.

Orientador:
Ademir Eugênio de Santana

Co-orientador:
José David Mangueira Vianna

Universidade de Brasília
Instituto de física

Brasília

julho de 2009

Dedicatória

Dedico os resultados desta pesquisa primeiramente a Deus, que iluminou meus pensamentos e tornou possível todas as conciliações que tive que fazer durante este período. A todos meus familiares, que sempre de forma ativa e compreensiva, me ajudaram e motivaram ao longo deste caminho. Também dedico aos meus colegas da pós- graduação e a todos os meus valiosos amigos. É claro que não poderia deixar de dedicar aos professores Ademir Santana e José David M. Vianna pelo belo trabalho de orientação voltado a mim ao longo do curso de doutorado. Aos professores Olavo e Paulo Logrado por me recomendarem à pós-graduação. Ao professor Marco Cezar, pelas valiosas discussões que tivemos ao longo da pesquisa. Ao professor Tarcísio Marciano e a todos os outros professores que colaboraram na minha formação.

Agradecimentos

Ao professores Ademir E. Santana e José David M. Vianna, pela paciência, confiança, apoio e incentivo, fundamentais na realização desse trabalho.

Ao professor Faqir Khanna, pela hospitalidade e orientação, no período de pesquisas realizadas na Universidade de Alberta, em Edmonton, no Canadá.

Aos meus amigos da pós-graduação, Nanderson, Abraão, Fábio (229), Fábio Mendes (Einstien), Marcelo Leineker, Nelson Cho, Luciano C. Lapas, Roberto Steiner, Ricardo, Jonatas, Serginho, Ednardo, André, André Penna. Obrigado pelas várias discussões.

Aos meus saudosos amigos da graduação, Tavares, Juraci (inventor do operador juraciniano), Samara, Modesto (in memorian). Aos meus amigos matemáticos Ricardo Saraiva, Edson Almeida, Ronan Amorim, companheiros nas discussões matemáticas e futebolísticas.

Aos estimados amigos da SEDF, em especial ao vascaíno João Tiago, Luís Edvar, Sidiny, Quintina, Jeferson Cassiano, Milton, Junior, Naná, Cleonice, André e Camilo.

Aos amigos cultivados no Canadá, em especial ao corintiano Rodrigo Cuzinatto e ao são-paulino Pedro Pompeia.

Aos funcionários da secretaria da Física.

À minha querida amiga Dayane Negreiros, autoridade em línguas indígenas, por sua amizade e também por revisar essa tese.

Aos meus pais, Sebastião e Hilda, por tudo, tudo mesmo.

Aos amigos do Segue-me.

A todos os meus alunos e ex-alunos.

Agradeço à Deus, e toda a minha grande família, que sempre estiveram presente em minha vida.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos operadores-estrelas definidos a partir do produto de Weyl em geometria não comutativa, para estudar representações unitárias para os grupos de Galilei e de Poincaré. Mediante o estudo da álgebra de Galilei-Lie, fica construído um formalismo autocontido para a mecânica quântica no espaço de fase. E buscando a aplicabilidade, problemas de autovalores da equação de Schroedinger no espaço de fase são discutidos, como o oscilador anarmônico, o potencial de Liouville e o problema de Landau. No contexto do estudo do grupo de Poincaré, escreve-se as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase, escrevendo também as lagrangianas e correntes conservadas para estes dois campos. Para os campos estudados aqui, as quantidades conservadas são deduzidas via o teorema de Noether no espaço de fase. Ainda no aspecto relativístico, discutiu-se o problema da quantização no espaço de fase mediante o formalismo de integrais de trajetórias. A associação com a função de Wigner foi estabelecida em cada contexto. Como uma aplicação, calculamos a função de Wigner para a teoria $\lambda\phi^4$ no espaço de fase. Esse resultado descreve a solução de uma equação do tipo Boltzmann, com o termo de colisão local e não-linear.

Abstract

In this work, we use star operators defined from the Weyl's product of the non-commutative geometry, to study unitary representations for the Galilei and Poincaré groups. By the study of the Galilei Lie algebra, a self-contained formalism is built for quantum mechanics in phase space. As applications, problems of eigenvalues of the Schroedinger equation is discussed in phase space, as the anarmonic oscillator, the Liouville potential and the Landau problem. In this context of phase space, we study the Poincaré group, deriving the Klein-Gordon and Dirac equations, as well as their respective lagrangian densities. For the fields studied here, the conservation law are derived by using the Noether theorem in phase space. Still in the relativistic aspect, the quantization problem on phase space it was discussed by the trajectory integrals formalism. The association with Wigner function it was established in each context. As an application we derive, at the one loop level, the Wigner function for the $\lambda\phi^4$ theory in phase space. This results describes the solution of a Boltzmann-like equation, with a local, non-linear, collision term.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

A geometria não-comutativa teve origem nos trabalhos de Weyl e Moyal, os quais estudaram procedimentos de quantização no espaço de fase [1,2]. Snyder [3] foi o primeiro a desenvolver uma teoria consistente para coordenadas de espaços não-comutativos, baseada na representação de álgebras de Lie. Nas últimas décadas, a geometria não-comutativa tem estado em destaque, devido a alguns resultados da gravitação, da matéria condensada e da teoria de cordas [4,5]. Um interesse particular nesse contexto é o desenvolvimento de teorias de representação para campos não-comutativos [6]. Contudo, esse tipo de abordagem não tem sido muito explorada no contexto do programa de Weyl-Moyal (espaço de fase). Nesta pesquisa, abordamos esse problema, com base no recente trabalho de Oliveira et al [7], em que foi considerada uma representação para o grupo de Galilei numa variedade simplética. Como resultado, a equação de Schroedinger foi deduzida no espaço de fase e ficou estabelecida a associação desse formalismo com a função de Wigner. O formalismo foi usado para tratar o oscilador harmônico e também para analisar o conceito de estados coerentes sob o ponto de vista do espaço de fase.

A noção de espaço de fase na mecânica quântica foi introduzida em 1932, em um trabalho de Wigner [8], que buscou efetuar correções quânticas para a mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase, tendo em vista que problemas como a superfluidez do hélio não poderiam ser resolvidos a partir de uma teoria clássica [9]. O formalismo de Wigner tem se desenvolvido desde então e sido aplicado em diferentes áreas, tais como a física nuclear, a física da matéria condensada [10–13] e a óptica quântica [14–21]. Recentes trabalhos também destacam a relevância do formalismo de Wigner em problemas relacionados à tomografia quântica, nos estudos de reconstrução de estados quânticos e do operador densidade [22–26]. No formalismo de Wigner, cada operador, representado por A, definido em um espaço de Hilbert, H, é associado com uma função, denotada por $a_W(q,p)$, no espaço de fase, Γ. Essa associação pode ser vista como uma aplicação $\Omega_W : A \rightarrow a_W(q,p)$, tal que, a álgebra associativa de operadores definida em H corresponde a uma álgebra também associativa (mas não-comutativa) em Γ, dada por

$\Omega_W : AB \rightarrow a_W(q,p) \star b_W(q,p)$, em que o produto-estrela (ou produto de Moyal) $\star$ é definido por [9]

$$a_W(q,p) \star b_W(q,p) = a_W(q,p) \exp[\frac{i}{2}(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q})] b_W(q,p). \tag{1.1}$$

Note que a equação (1.1) pode ser vista como um operador $\widehat{A} = a_W \star$, atuando nas funções b_W, tais que $\widehat{A}(b_W) = a_W \star b_W$.

Do ponto de vista da matemática e da física, o espaço de fase quântico e o produto de Moyal podem ser explorados sob diferentes aspectos [6,10,12,13]. Contudo, mostra-se interessante para estudar representações irredutíveis e unitárias de grupos cinemáticos, considerando operadores do tipo $\widehat{A}$, que levam a uma mecânica quântica simplética. Neste trabalho, mostramos que é possível extender a representação de [7] para o caso relativístico com o grupo de Poincaré-Lie [27]. Em outras palavras, usando a noção de estrutura simplética e do produto de Moyal, construímos representações unitárias para a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, a partir das quais deduzimos as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase. Apresentamos a conexão entre o nosso formalismo e as funções de Wigner relativísticas, discutimos alguns aspectos de campos com interação, incluindo campos de calibre, e demonstramos o teorema de Noether no espaço de fase. É importante mencionar ainda que essa representação da teoria de campos nos fornece um caminho para considerar a formulação de Wigner da mecânica quântica com base nas teorias de grupos de simetria. Na continuidade da pesquisa, tratamos da teoria quântica de campos no espaço de fase, e introduzimos os funcionais geradores para os campos bosônicos e fermiônicos, incluindo o problema de interação. A partir dos funcionais geradores, escrevemos a função de Green no espaço de fase e estabelecemos a interpretação física do formalismo mediante a relação dessas funções com a função de Wigner. No aspecto de quantização no espaço de fase, tratamos também da quantização canônica do campo de Klein-Gordon e da teoria $\lambda\phi^4$. No escopo não relativístico, estudamos problemas de autovalores para a equação de Schroedinger no espaço de fase, submetida a potenciais não-lineares, tais como o de Liouville, o quártico e o problema de Landau no espaço de fase, escrevendo as amplitudes e as funções de Wigner para cada caso.

A apresentação deste trabalho está disposta da seguinte forma: no capítulo 2, revisamos o método da função de Wigner, demonstrando suas principais propriedades. Ainda nesse capítulo, definimos o produto estrela e tratamos de suas características, que serão utéis no desenvolvimento dos capítulos posteriores. No capítulo 3, revisamos alguns aspectos da mecânica quântica simplética. Vimos em particular que é possível escrever a equação de Schoedinger no espaço de fase a partir da representação unitária e irredutível do grupo de Galilei, utilizando operadores-estrela para essa finalidade. Nos capítulos 2 e 3, seguimos as referências [7, 8, 13, 28–30]. No capítulo 4, tratamos o problema de Landau no espaço de fase e analisamos os potenciais de Liouville e quártico. No capítulo 5, construímos representações unitárias do grupo de Poincaré via o produto de Weyl e chegamos às equações de Dirac e Klein-Gordon, escritas no espaço de fase. Ainda nesse capítulo, demonstramos o teorema de Noether, analisamos problemas com interação e discutimos o calibre abeliano no espaço de fase. No capítulo 6, desenvolvemos o formalismo funcional no espaço de fase e também estudamos a quantização canônica do campo escalar carregado no espaço de fase. Por fim, no capítulo 7, apresentamos nossas considerações finais e perspectivas.

2 *Função de Wigner e Produto Estrela*

Wigner propôs em 1932 [9, 11] o primeiro formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, objetivando fazer correções quânticas à mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase [12], que é a variedade natural em que teorias cinéticas clássicas ou quânticas são escritas (tendo em vista que problemas como a superfluidez do hélio não poderiam ser resolvidos a partir de uma teoria clássica). O formalismo proposto por Wigner tem se desenvolvido desde então e se mostra útil em diversas áreas, tais como a óptica quântica e a física da matéria condensada [9, 11, 13–19, 21–26]. Embora o formalismo de Wigner tenha surgido no contexto da mecânica estatística, o mesmo é também útil a sistemas compostos por uma única partícula submetida a potenciais específicos, como os harmônicos e de Liouville. Neste capítulo, nosso propósito é fazer uma revisão desse método, com ênfase particular em alguns aspectos algébricos. Também faremos um estudo das propriedades do produto-estrela não-comutativo, pois exploraremos estes aspectos para estabelecer representações dos grupos de Galilei e de Poincaré no espaço de Hilbert associado ao espaço de fase. Baseamos esta revisão nas referências [9,11,13,30,31].

2.1 A equação de Liouville - von Neumann

O problema de muitos corpos na mecânica quântica usual pode ser estudado via um tratamento estatístico, sendo que o estado macroscópico de um sistema pode ser representado mediante a matriz densidade,

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|,$$

onde $\{|\psi_i\rangle\}$ são os estados microscópicos do ensemble estatístico e $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ é o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i\rangle$. A matriz densidade ρ contém todas as informações sobre o sistema. O valor esperado de um operador A na formulação da mecânica estatística quântica é dado por

$$\langle A\rangle = Tr(\rho A).$$

A matriz densidade, ρ, apresenta as seguintes propriedades,

(i) hermiticidade:$\rho^\dagger = \rho$;

(ii)traço:$tr\rho = 1$.

Uma equação de evolução temporal para ρ pode ser deduzida a partir da equação de Schroedinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle,$$

onde $H(t) = K + V$. Dado que $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ (por simplicidade consideramos o estado puro), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} &= (\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|) \\ &= \frac{1}{i\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H(t).\end{aligned}$$

O que nos fornece

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \tag{2.1}$$

que é a equação de Liouville-von Neumann.

Mostramos a seguir que a partir de ρ é possível introduzir uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase, conhecida como método da função de Wigner.

2.2 Definição da Função de Wigner

O conhecido princípio da incerteza torna o conceito de espaço de fase na mecânica quântica bastante problemático. Devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, que atesta que uma partícula não pode ter simultaneamente posição e momentum bem definidos, também não é possível definir uma verdadeira distribuição de probabilidades no espaço de fase. No entanto, funções que possuem um conteúdo de espaço de fase, "funções distribuição de quaseprobabilidades", tem demonstrado grande utilidade no estudo de sistemas quânticos. Essas funções não são úteis somente como ferramentas de cálculos, mas também nos fornecem informações nas conexões entre a mecânica clássica e a mecânica quântica.

A função de Wigner $f_W(q,p)$ é definida como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, ou seja,

$$f_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp(\frac{ipz}{\hbar}) \langle q - \frac{z}{2}|\rho|q + \frac{z}{2}\rangle, \tag{2.2}$$

ou

$$f_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dk \exp(\frac{-iqk}{\hbar}) \langle p - \frac{k}{2}|\rho|p + \frac{k}{2}\rangle. \tag{2.3}$$

Até aqui a exposição envolve o operador densidade, que pode descrever estados puros e impuros. Contudo, o principal foco deste trabalho não está na mecânica estatística. Assim, podemos considerar o sistema quântico descrito por um estado puro $|\psi\rangle$ e o correspondente operador densidade fica dado por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Desse modo, a definição da função de Wigner se reduz a

$$f_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger(q + \frac{z}{2})\psi(q - \frac{z}{2})dz. \tag{2.4}$$

A função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade, pois a mesma pode assumir valores positivos e negativos. De fato, se $f_{W\alpha}$ e $f_{W\beta}$ são duas funções de Wigner associadas, respectivamente, aos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, então

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-3} \int f_{W\alpha}(q,p;t) f_{W\beta}(q,p;t) dq dp. \tag{2.5}$$

O lado esquerdo dessa equação é positivo ou nulo (neste caso, se os kets forem ortogonais). No último caso, temos, como consequência, a integral de $f_{W\alpha}f_{W\beta}$ nula. Como $f_{W\alpha}$ e $f_{W\beta}$ não são necessariamente nulas, em geral, resulta que $f_{W\alpha}$ e $f_{W\beta}$ devem assumir valores negativos e positivos, de tal modo a anular a referida integral. Considerando que qualquer probabilidade deve ser positiva, fica justificada a afirmação de que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade no espaço de fase.

2.3 Propriedades da Função de Wigner

Vejamos algumas propriedades importantes que podem ser deduzidas a partir da função de Wigner. Apesar de a função de Wigner não representar uma distribuição de probabilidade no espaço de fase, densidades são conseguidas a partir da função de Wigner por meio da integração. Por exemplo, a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre q e $q + dq$ é obtida na propriedade 2.3.1.

- Propriedade 2.3.1

$$|\psi(q)|^2 = \int f_W(q,p)dp = \langle q|\rho|q\rangle. \tag{2.6}$$

Demonstração

Para demonstrar esta propriedade, o ponto de partida será a definição da função de Wigner, substituindo (2.2) em (2.6); o que leva a

$$\int dpf_W(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dpdz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Se for realizada a integração em p, temos,

$$\int dpf_W(q,p) = \int dz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dpe^{\frac{ipz}{\hbar}}),$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(z)$. Assim,

$$\int dpf_W(q,p) = \int dz\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\delta(z).$$

Utilizando a propriedade da função delta, $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, temos

$$\int dpf_W(q,p) = \langle q|\rho|q\rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.3.2

Outra propriedade, que é simétrica a anterior, é dada por

$$|\widetilde{\psi}(p)|^2 = \int f_W(q,p)dq = \langle p|\rho|p\rangle, \tag{2.7}$$

que expressa a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre p e $p+dp$.

Demonstração

Substituindo a equação (2.3) em (2.7), temos

$$\int dqf_W(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dpdk\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}}.$$

Se for feita a integração primeiro em q, segue que

$$\int dqf_W(q,p) = \int dk\langle p-\frac{k}{2}|\rho|p+\frac{k}{2}\rangle(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dqe^{\frac{-iqk}{\hbar}}),$$

em que o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(k)$, e, assim,

$$\int dq f_W(q,p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2}|\rho|p + \frac{k}{2}\rangle \delta(k).$$

Isto se reduz a

$$\int dq f_W(q,p) = \langle p|\rho|p\rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.3.3

Mostramos agora a normalização da função de Wigner, isto é,

$$\int f_W(q,p) dq dp = Tr\rho = 1. \tag{2.8}$$

Demonstração

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.8), obtemos

$$\int f_W(q,p) dq dp = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz dq dp exp(\frac{ipz}{\hbar}) \langle q - \frac{z}{2}|\rho|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

Se for calculada a integral na variável p, temos

$$\int f_W(q,p) dq dp = \int dz dq \langle q - \frac{z}{2}|\rho|q + \frac{z}{2}\rangle ((2\pi\hbar)^{-3} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}}).$$

O termo entre parênteses é a função delta de Dirac. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \int f_W(q,p) dq dp &= \int dz dq \langle q - \frac{z}{2}|\rho|q + \frac{z}{2}\rangle \delta(z) \\ &= \int dq \langle q|\rho|q\rangle = Tr\rho = 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

A questão agora é a seguinte: será que é possível encontrar para qualquer operador quântico $A(Q,P)$ uma função correspondente, $A_W(q,p)$, na representação de Wigner? A resposta é positiva. De forma análoga ao que foi feito na definição da função de Wigner, definimos as funções $A_w(q,p)$ associadas ao operador $A(Q,P)$ por,[1],

$$A_W(q,p) = \int dz exp(\frac{ipz}{\hbar}) \langle q - \frac{z}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z}{2}\rangle \tag{2.9}$$

[1]Os operadores quânticos referentes a posição e ao momentum serão representados pelas letras maiúsculas Q e P, respectivamente, com $Q|q\rangle = q|q\rangle$ e $P|p\rangle = p|p\rangle$.

ou

$$A_W(q,p) = \int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p - \frac{k}{2}|A(Q,P)|p + \frac{k}{2}\rangle. \tag{2.10}$$

Chamaremos estas funções de equivalentes de Wigner dos operadores $A(Q,P)$. Assim também podemos escrever que a função de Wigner é o equivalente de Wigner do operador ρ:

$$f_W = (2\pi\hbar)^{-3}\rho_W.$$

Com a definição dos equivalentes a quaisquer operadores quânticos na representação de Wigner, escrevemos o valor esperado de um observável, num estado $|\psi\rangle$, como

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dqdpA_W(q,p)f_W(q,p) = Tr\rho A. \tag{2.11}$$

Demonstração

Vamos primeiro calcular

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dqdpA_W(q,p)f_W(q,p).$$

Substituindo as equações (2.2) e (2.9) na equação (2.11), temos

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= (\frac{1}{2\pi\hbar})^3\int dqdpdz'dz''\exp(\frac{ipz'}{\hbar})\\ &\times\langle q - \frac{z'}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z'}{2}\rangle\exp(\frac{ipz''}{\hbar})\langle q - \frac{z''}{2}|\rho|q + \frac{z''}{2}\rangle.\end{aligned}$$

Integrando na variável p, obtemos

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= (\frac{1}{2\pi\hbar})^3\int dp\exp(\frac{ip(z' + z'')}{\hbar})\\ &\times\int dqdz'dz''\langle q - \frac{z'}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z'}{2}\rangle\langle q - \frac{z''}{2}|\rho|q + \frac{z''}{2}\rangle,\end{aligned}$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(z' + z)$. Com isso,

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \int dqdz'dz''\langle q - \frac{z'}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z'}{2}\rangle\langle q - \frac{z''}{2}|\rho|q + \frac{z''}{2}\rangle\delta(z' + z'')\\ &= \int dqdz'\langle q - \frac{z'}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z'}{2}\rangle\langle q + \frac{z'}{2}|\rho|q - \frac{z'}{2}\rangle.\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$\overline{q} = \frac{1}{2}(q - \frac{z}{2})$$

$$\overline{z} = \frac{1}{2}(q + \frac{z}{2}),$$

temos

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \int d\overline{q}d\overline{z}\langle\overline{q}|A(Q,P)|\overline{z}\rangle\langle\overline{z}|\rho|\overline{q}\rangle \\ &= Tr\rho A = \langle A\rangle.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

O problema agora consiste em mostrar a correspondência unívoca entre um operador quântico $A(Q,P)$ e o equivalente na representação de Wigner $A_W(q,p)$. Para isso utilizamos a regra de quantização de Weyl, que é definida da forma a seguir. Dada uma função no espaço de fase, $\alpha(\tau,\sigma)$, então temos um operador quântico no espaço de Hilbert, $A(Q,P)$, associado a $\alpha(\tau,\sigma)$, tal que

$$A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}\alpha(\tau,\sigma), \tag{2.12}$$

em que τ está associada à coordenada de posição e σ à coordenada de momentum no espaço de fase. Se escrevemos $A(Q,P)$ em termos de $A_w(q,p)$, temos o seguinte resultado

$$\alpha(\tau,\sigma) = \int dqdpe^{\frac{i(\sigma q+\tau p)}{\hbar}}A_w(q,p). \tag{2.13}$$

Para verificar essa equivalência, deve ser mostrado que o operador definido por $W(Q,P) = e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}$ satisfaz uma espécie de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores do tipo $A(Q,P)$. Primeiro, utilizando a fórmula de Glauber, dada por $e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, reescrevemos então $W(Q,P)$, encontrando

$$W(Q,P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}}e^{\frac{i\tau P}{\hbar}}e^{-\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}},$$

em que usamos o fato de que $[Q,P] = i\hbar$. Podemos então calcular o valor da expressão

$$\langle q'|e^{\frac{\pm i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = \langle q'|e^{\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar}}e^{\frac{\pm i\tau P}{\hbar}}e^{\frac{\pm i\sigma\tau}{2\hbar}}|q\rangle,$$

utilizando a propriedade do operador translação $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}}|q\rangle = |q-\tau\rangle$. Dessa forma, obtemos

$$\langle q'|e^{\frac{\pm i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = e^{\frac{\pm i\sigma}{\hbar}(q'\pm\frac{\tau}{2})}\delta(q'-q\pm\tau).$$

O que implica

$$Tre^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma)\delta(\tau),$$

pois, por definição $TrA = \int dqdp\langle q'|A|q\rangle = (2\pi\hbar)^{-3}\int dqdpA_w(q,p)$. Portanto,

$$\begin{aligned} Tre^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} &= (2\pi)^{-3}\int dqdp\int dz\exp(ipz)\langle q-\frac{z}{2}|e^{\frac{i(\sigma Q-\tau P)}{\hbar}}|q+\frac{z}{2}\rangle \\ &= (2\pi)^{-3}\int dqdp\int dz\exp(ipz)\exp(i\sigma(q-z-\tau))\delta(z+\tau). \end{aligned}$$

Utilizando a delta de Dirac e integrando em z, temos

$$Tre^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi)^{-3}\int dqdpe^{\frac{ip\tau}{\hbar}}e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}.$$

Identificamos, assim, duas deltas na forma integral, ou seja,

$$Tre^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma)\delta(\tau).$$

Isso nos leva às relações de ortogonalidade

$$Tre^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma' Q+\tau' P)}e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma'-\sigma)\delta(\tau'-\tau). \tag{2.14}$$

Para provar a equivalência entre as equações (2.9)-(2-10) e as equações (2.12)-(2-13), assumimos que a expansão

$$A(Q,P) = \int d\sigma d\tau\alpha(\sigma,\tau)e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)} \tag{2.15}$$

existe. Sendo assim, usando a relação de ortogonalidade mostrada anteriormente, facilmente notamos que

$$\alpha(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi\hbar}Tr\{A(Q,P)e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q'+\tau P')}\}.$$

Para provar a existência da equação (2.15) , substituímos a equação

$$\alpha(\sigma,\tau) = \int dqdpe^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma q+\tau p)}A_w(q,p), \tag{2.16}$$

na própria equação (2.15). Calculando os elementos de matriz na representação de posição, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q,P)|q'\rangle &= (2\pi\hbar)^{-3}\int d\sigma d\tau dq''dq'''\langle q''|A(Q,P)|q'''\rangle \\ &\times\langle q'''|e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q'+\tau P')}|q''\rangle\langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q'\rangle. \end{aligned}$$

E ainda, com o uso da equação (2.14), obtemos a seguinte identidade

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle \equiv \langle q|A(Q,P)|q'\rangle. \tag{2.17}$$

O que prova a existência da expansão (2.15). Isso prova também que é possível usar as equações (2.15) e (2.16) para trabalhar em ambas direções: dado $A(Q,P)$, podemos determinar $A_w(q,p)$ univocamente e vice-versa.

2.4 Equivalência dos Operadores na Representação de Wigner

Como percebemos, uma das principais características desse formalismo é que as variáveis dinâmicas são representadas por funções sobre o espaço de fase e não por operadores. O próximo passo será demonstrar algumas propriedades, que podem ser deduzidas a partir dos resultados já obtidos. Tais propriedades são referentes a equivalência entre os operadores escritos na representação usual e seus respectivos equivalentes na representação de Wigner.

- Propriedade 2.4.1

Se $A = A(P)$ (isto é, A é independente de Q), então $A_W(q,p) = A(p)$. Ou seja, $A(P)$ e $A_W(q,p) = A(p)$ possuem a mesma forma funcional, com a ressalva que os operadores P serão substituídos pelas variáveis p.

Demonstração

Um operador $A(P)$ pode ser expandido em uma série de P, como

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + ...$$

Utilizando a equação (2.9), já substituindo $A(Q,P)$ pela sua expansão, temos

$$A_W(q,p) = \int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p - \frac{k}{2}|A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + ...|p + \frac{k}{2}\rangle.$$

Utilizando $P|p\rangle = p|p\rangle$, obtemos

$$A_W(q,p) \quad = \quad A(0)\int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p - \frac{k}{2}|p + \frac{k}{2}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&+A'(0)\int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})(p+\frac{k}{2})\langle p-\frac{k}{2}|p+\frac{k}{2}\rangle \\
&+A''(0)\int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})\frac{(p+\frac{k}{2})^2}{2!}\langle p-\frac{k}{2}|p+\frac{k}{2}\rangle+....
\end{aligned}
$$

Observando também que $\langle p-\frac{k}{2}|p+\frac{k}{2}\rangle=\delta(k)$ e utilizando a propriedade da delta para calcular a integral em k, chegamos a

$$A_W(p)=A(0)+pA'(0)+\frac{p^2}{2!}A''(0)+...=A(p).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.2

Se $A=A(Q)$ (isto é, $A(Q)$ é independente de P), então $A_W(p,q)=A(q)$. Ou seja, $A(Q)$ e $A_W(q,p)=A(q)$ terão a mesma forma funcional, com a ressalva que os operadores Q serão substituídos pelas variáveis q.

Demonstração

Um operador $A(Q)$ pode ser expandido em uma série de Q, como

$$A(Q)=1A(0)+QA'(0)+\frac{Q^2}{2!}A''(0)+....$$

Utilizando a equação (2.10), já substituindo $A(Q,P)$ pela sua expansão, temos

$$A_W(q,p)=\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|1A(0)+QA'(0)+\frac{Q^2}{2!}A''(0)+...|q+\frac{z}{2}\rangle.$$

Utilizando $Q|q\rangle=q|q\rangle$, obtemos

$$
\begin{aligned}
A_W(q,p) \;=\;& 1A(0)\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|q+\frac{z}{2}\rangle \\
&+A'(0)\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})(q+\frac{z}{2})\langle q-\frac{z}{2}|q+\frac{z}{2}\rangle \\
&+A''(0)\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\frac{(q+\frac{z}{2})^2}{2!}\langle q-\frac{z}{2}|q+\frac{z}{2}\rangle+....
\end{aligned}
$$

Observando também que $\langle q-\frac{z}{2}|q+\frac{z}{2}\rangle=\delta(z)$ e utilizando a delta de Dirac para calcular a integral em z, chegamos a

$$A_W(q)=1A(0)+qA'(0)+\frac{q^2}{2!}A''(0)+...=A(q).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.3

Se $A(Q,P) = 1c$, onde c é uma constante, isto é, $A(Q,P)$ é um múltiplo do operador 1 então $A_W(q,p) = A(Q,P) = c$.

Demonstração

Esta propriedade é demonstrada de forma imediata. Basta tomar a equação (2.9), e no lugar de $A(Q,P)$ colocar a constante c. Como uma constante, obviamente, não age nos kets, temos

$$A_W(q,p) = \int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q - \frac{z}{2}|c|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

E então se for utilizado $\langle q - \frac{z}{2}|q + \frac{z}{2}\rangle = \delta(z)$ e for integrado em z, obtemos

$$A_W(q,p) = c\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q - \frac{z}{2}|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

O que leva a

$$A_W(q,p) = c = A(Q,P).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.4

$TrA = (2\pi\hbar)^{-3}\int dqdqA_W(q,p)$.

Demonstração

Utilizando $(2\pi\hbar)^{-3}\int dqdqA_W(q,p)$ e substituindo nela a equação (2.9), temos

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dqdpA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int dqdp\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q - \frac{z}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

Integrando em p, é identificada a função delta de Dirac na forma integral,

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dqdpA_W(q,p) = \int dqdz\langle q - \frac{z}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z}{2}\rangle((2\pi\hbar)^{-3}\int dp\exp(\frac{ipz}{\hbar})).$$

Utilizando a delta para integrar em z,temos

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dqdpA_W(q,p) = \int dqdz\langle q - \frac{z}{2}|A(Q,P)|q + \frac{z}{2}\rangle\delta(z).$$

Ficamos com

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dqdpA_W(q,p) = \int dq\langle q|A(Q,P)|q\rangle = TrA.$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.5

$\int dpA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle q|A|q\rangle$.

Demonstração

Para mostrar essa propriedade, basta substituir a equação (2.9) em $\int dpA_W(q,p)$,

$$\int dpA_W(q,p) = \int dp\int dz\exp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z}{2}\rangle.$$

Se a integração for feita em p, temos

$$\int dpA_W(q,p) = \int dz\langle q-\frac{z}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z}{2}\rangle(\int dpexp(\frac{ipz}{\hbar})).$$

Assim, fica identificada a forma integral da delta de Dirac:

$$\int dpA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int dz\langle q-\frac{z}{2}|A(Q,P)|q+\frac{z}{2}\rangle\delta(z).$$

Obtemos então

$$\int dpA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle q|A(Q,P)|q\rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.6

$\int dqA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle p|A|p\rangle$.

Demonstração

Para mostrar essa propriedade, basta substituir a equação (2.10) em $\int dqA_W(q,p)$,

$$\int dqA_W(q,p) = \int dq\int dkexp(\frac{-iqk}{\hbar})\langle p-\frac{k}{2}|A(Q,P)|p+\frac{k}{2}\rangle.$$

Se a integração for calculada em q,

$$\int dqA_W(q,p) = \int dk\langle p - \frac{k}{2}|A(Q,P)|p + \frac{k}{2}\rangle(\int dqexp(\frac{-iqk}{\hbar})),$$

identificamos a forma integral da delta de Dirac

$$\int dqA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\int dk\langle p - \frac{k}{2}|A(Q,P)|p + \frac{k}{2}\rangle\delta(-k).$$

Obtemos então,

$$\int dqA_W(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3}\langle p|A(Q,P)|p\rangle.$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.7

$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-6}\int d\sigma e^{i\sigma\frac{(q+q')}{2\hbar}}\alpha(\sigma, q-q')$, onde $\alpha(\sigma,\tau)$ é a transformada de Fourier de $A_W(q,p)$.

Demonstração

Utilizando a expressão $A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}\alpha(\tau,\sigma)$, temos,

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = \int d\sigma d\tau\alpha(\sigma,\tau)\langle q|e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}|q'\rangle.$$

E usando a equação (2.14), segue que

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-6N}\int d\sigma e^{i\sigma\frac{(q+q')}{2\hbar}}\alpha(\sigma, q-q').$$

Como queríamos demonstrar.

Agora que já sabemos como se dá a equivalência de operadores na representação de Wigner, nossa meta é descobrir como é que se representa a equivalência de produtos de operadores na representação de Wigner, pois isto é fundamental na descrição da dinâmica.

2.5 Produtos de Operadores na Representação de Wigner

Trataremos agora da equivalência em Wigner de um produto de operadores AB. Encontraremos a expressão que mostra $(AB)_W$ em termos de A_W e B_W. Temos que

$$(AB)_W = \int dze^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2}|AB|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

Utilizando a relação de completeza $\int dq|q\rangle\langle q| = 1$, podemos escrever

$$(AB)_W = \int dzdq' e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2}|A|q'\rangle\langle q'|B|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

Usando a propriedade (2.4.7), temos

$$\begin{aligned}(AB)_W &= (2\pi\hbar)^{-12} \int dzdq' e^{\frac{ipz}{\hbar}} \int d\sigma d\sigma' e^{\frac{i\sigma}{2\hbar}(q+q'-\frac{z}{2})} \alpha(\sigma, q' - q + \frac{z}{2}) \\ &\quad \times e^{\frac{i\sigma'}{2\hbar}(q+q'+\frac{z}{2})} \beta(\sigma', q - q' + \frac{z}{2}).\end{aligned}$$

Em seguida, fazendo as mudanças de variáveis, $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$ e $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$, chegamos a

$$(AB)_W = (2\pi\hbar)^{-12} \int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau' e^{\frac{i(\sigma q + \tau p)}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau) e^{\frac{i(\sigma'\tau + \sigma\tau')}{2\hbar}} \beta(\sigma', \tau') e^{\frac{i(\sigma' q + \tau' p)}{\hbar}}.$$

Percebemos que o fator $e^{\frac{i(\sigma'\tau+\sigma\tau')}{2\hbar}}$ no integrando pode ser trocado de modo equivalente por $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}$, onde Λ é o operador parêntese de Poisson,

$$\Lambda = \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q} - \overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}.$$

Escrevendo $A_W(q,p) = \int dqdpe^{\frac{i(\sigma q+\tau p)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma)$ e $B_W(q,p) = \int dqdpe^{\frac{i(\sigma' q+\tau' p)}{\hbar}} \beta(\tau', \sigma')$, temos então

$$(AB)_W = A_W(q,p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_W(q,p)$$

ou

$$(AB)_W = B_W(q,p) e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} A_W(q,p).$$

E ainda

$$(AB)_W = A_W(q - \frac{\hbar\partial_p}{2i}, p + \frac{\hbar\partial_q}{2i}) B_W(q,p),$$

em que foi utilizado nessa última relação o fato de que $f(q)e^{a\overleftarrow{\partial_q}} = f(q+a)$. Mas aqui temos $a = c\overrightarrow{\partial_p}$.

Definimos a operação denominada produto-estrela como

$$(AB)_W = A_W(q,p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_W(q,p) = A_W(q,p) \star B_W(q,p). \tag{2.18}$$

Notamos, assim, que o produto-estrela não é comutativo. Ainda nesse capítulo, faremos um estudo de algumas propriedades do produto-estrela.

Agora que já se conhece como é implementada a representação do produto de operadores na representação de Wigner, a procura será por equações que nos dêem a evolução temporal de tais operadores. Para isso, serão utilizadas as propriedades que já conhecemos acerca da função de Wigner, bem como o produto-estrela.

2.6 Evolução Temporal

Suponhamos que seja conhecida a função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner num dado instante e que desejamos determinar os correspondentes operadores num instante posterior. Para isso, é preciso conhecer uma equação que dê a evolução temporal da função de Wigner. Essa equação existe e é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo, que pode ser obtida a partir da equação de Liouville - von Neumman, representada no espaço de fase.

Tomando a equação (2.1), aplicando o operador

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|.|q+\frac{z}{2}\rangle,$$

em ambos os lados, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\{(2\pi\hbar)^{-3}\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|\rho|q+\frac{z}{2}\rangle\} &= (2\pi\hbar)^{-3}\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|H\rho|q+\frac{z}{2}\rangle \\ &-(2\pi\hbar)^{-3}\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|\rho H|q+\frac{z}{2}\rangle. \end{aligned}$$

O que leva a

$$i\hbar\frac{\partial f_W(q,p,t)}{\partial t} = H_W(q,p,t)\star f_W(q,p,t) - f_W(q,p,t)\star H_W(q,p,t).$$

Definindo o parêntese de Moyal,

$$\{a,b\}_M = a\star b - b\star a, \tag{2.19}$$

temos

$$i\hbar\frac{\partial f_W(q,p,t)}{\partial t} = \{H_W, f_W\}_M, \tag{2.20}$$

em que observamos que essa equação dinâmica é análoga à equação de Liouville-von Neumman, notando que o estado do sistema é descrito pela função de Wigner e o comutador foi substituído pelo parêntese de Moyal.

O parêntese de Moyal pode ser escrito da seguinte forma

$$\{a(q,p), b(q,p)\} = 2a(q,p)\sin\left[\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q} - \overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p})\right]b(q,p), \tag{2.21}$$

onde foi utilizado $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} - e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} = 2i\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})$.

Obtemos um resultado interessante, se expandirmos em série de potências o seno da última expressão, que define o parêntese de Moyal,

$$\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2}) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{\hbar\Lambda}{2})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\hbar\Lambda}{2})^5 + ...$$

No limite em que $\hbar \to 0$, obtemos como resultado que a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com H_W no lugar da função hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_W}{\partial t} = \frac{\partial H_W}{\partial q}\frac{\partial f_W}{\partial p} - \frac{\partial H_W}{\partial p}\frac{\partial f_W}{\partial q} = \{H_W, f_W\}, \tag{2.22}$$

e ainda

$$\frac{\partial H_W}{\partial q} = \dot{p} \quad e \quad \frac{\partial H_W}{\partial p} = \dot{q}. \tag{2.23}$$

Vale a pena tratar os casos em que H_W coincide com a função hamiltoniana clássica. Entre esses casos, podemos tomar como exemplo a situação em que o sistema é conservativo e está sujeito a um potencial que depende somente da posição:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Para provar esse fato, consideraremos que a hamiltoniana clássica possa ser escrita como uma soma de uma função de q com uma função de p, isto é,

$$H(q,p) = g(q) + h(p).$$

E, além disso, que a função $g(q)$ possa ser escrita como uma série de potências

$$g(q) = \sum a_n q^n.$$

E o correspondente operador quântico seja escrito como

$$g(Q) = \sum a_n Q^n,$$

e que seja dado na representação de Wigner como

$$g_W(q) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2}|g(Q)|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

E também que

$$g_W(q) = \sum a_n \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2}|Q|q + \frac{z}{2}\rangle.$$

Levando em conta o fato de que $Q^n|q\rangle = q^n|q\rangle$, chegamos a

$$g_W(q) = \sum a_n \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} (q + \frac{z}{2})^n \delta(z),$$

$$g_W(q) = g(q).$$

Procedendo de forma análoga para $h(p)$, chegamos a $h_W(q,p) = h(p)$, concluindo que[2]

$$H_W(q,p) = H(q,p).$$

Portanto, chegamos à seguinte equação

$$i\hbar \frac{\partial f_W}{\partial t} = \{H(q,p), f_W\}_M.$$

E, no limite clássico ($\hbar \to 0$),

$$\frac{\partial f_W}{\partial t} = \{H(q,p), f_W\}. \tag{2.24}$$

Isto explica, em particular, a importância da descrição de Wigner na mecânica quântica na análise do limite clássico e no desenvolvimento de métodos semi-clássicos [13].

O estudo apresentado sobre o método de Wigner, até o momento, foi baseado na descrição de Schroedinger da mecânica quântica, ou seja, considerando que apenas os estados (e não os operadores) evoluem com o tempo. No entanto, é possível desenvolver um tratamento em termos de operadores expressos na descrição de Heisenberg, onde os operadores evoluem com o tempo e os estados ficam estáticos. A equação de Heisenberg

[2]Aqui $H(q,p)$ é a hamiltoniana clássica.

para um operador $A(t)$ é escrita como

$$i\hbar\frac{\partial A(t)}{\partial t}=[A(t),H(t)]. \tag{2.25}$$

Se for aplicado um procedimento análogo ao que levou à equação de Liouville na representação de Wigner, ou seja, aplicando o operador $\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q-\frac{z}{2}|.|q+\frac{z}{2}\rangle$ em ambos os lado da equação, chegamos a

$$i\hbar\frac{\partial A_W(t)}{\partial t}=A_W(t)\star H_W-H_W\star A_W(t),$$

e, então,

$$i\hbar\frac{\partial A_W(t)}{\partial t}=\{A_W,H_W\}_M, \tag{2.26}$$

ou, ainda,

$$i\hbar\frac{\partial A_W(t)}{\partial t}=2H_W\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})A_W. \tag{2.27}$$

A integração dessa última equação fornece

$$A_W(q,p,t)=\exp[(\frac{2t}{\hbar})H_W\sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})]A_W(0),$$

que é a solução para a equação (2.26).

2.7 Equação de $\star$-valores envolvendo a Função de Wigner

Para o caso de estados correspondentes às autofunções do hamiltoniano, no formalismo de Wigner, existe uma função de Wigner associada a alguma equação de autovalores, em que está envolvido o produto estrela. Ou seja, dada a equação de autovalores, para o formalismo usual,

$$H(Q,P)\psi(q)=E\psi(q), \tag{2.28}$$

procuramos a equação estrela,

$$H_W(q,p)\star f_W(q,p)=Ef_W(q,p), \tag{2.29}$$

onde E é um autovalor do hamiltoniano. De fato, essa equivalência é verdadeira [32].

Tomemos o hamiltoniano como

$$H(Q,P)=\frac{P^2}{2m}+V(Q),$$

e suponha que $f_W(q,p)$ seja a função de Wigner correspondente à autofunção $\psi(q)$ do hamiltoniano, conforme a equação (2.28). A função de Wigner, como vimos, é dada por

$$f_W(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2})\psi(q-\frac{z}{2}).$$

Tomando o produto-estrela entre a função de Wigner e o hamiltoniano na representação de Wigner, temos

$$H_W(q,p)\star f_W(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dz \frac{1}{2m}[(p-\frac{i\hbar\partial_q}{2})^2 + V(q-\frac{z}{2})]e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2})\psi(q-\frac{z}{2}).$$

Após duas integrações por partes, chegamos a

$$H_W(q,p)\star f_W(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dz [\frac{-\hbar^2}{2m}(\partial_z - \frac{\partial_q}{2})^2 + V(q-\frac{z}{2})]e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2})\psi(q-\frac{z}{2}).$$

Notamos que os operadores diferenciais nessa equação se anulam, quando aplicados a $\psi^\dagger$, pois

$$(\partial_z - \frac{\partial_q}{2})\psi^\dagger(q+\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}\dot{\psi}^\dagger(q+\frac{z}{2}) - \frac{1}{2}\dot{\psi}^\dagger(q+\frac{z}{2}) = 0,$$

onde o ponto sobre $\psi^\dagger$ indica a derivada com relação ao argumento. Isso nos diz que $\psi^\dagger$ pode passar para o lado esquerdo dos operadores diferenciais. E, assim, ainda é possível escrever a equação de Schroedinger independente do tempo na forma

$$[\frac{-\hbar^2}{2m}(\partial_z - \frac{\partial_q}{2})^2 + V(q-\frac{z}{2})]\psi(q-\frac{z}{2}) = E\psi(q-\frac{z}{2}).$$

Na equação $H(Q,P)\psi(q) = E\psi(q)$ fizemos a mudança de coordenadas:$q \to q - \frac{z}{2}$. Com isso, finalmente, temos

$$H_W(q,p)\star f_W(q,p) = E\{\frac{1}{2\pi\hbar}\int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2})\psi(q-\frac{z}{2})\} = Ef_W(q,p). \tag{2.30}$$

Logo,

$$H_W(q,p)\star f_W(q,p) = Ef_W(q,p).$$

Se a função de Wigner, $f_W(q,p)$, corresponde a uma autofunção do hamiltoniano, então satisfará a equação-estrela de autovalor: equação (2.29).

O próximo passo será estudar o produto-estrela e suas propriedades. Pois é a partir dele que definiremos operadores que nos ajudarão a estabelecer uma representação simplética da álgebra de Galilei e obter um formalismo para a mecânica quântica no espaço de fase.

2.8 Propriedades do Produto de Weyl (Produto Estrela)

O enfoque nesta seção será no estudo do produto estrela, explorando e demonstrando suas propriedades. Já foi visto anteriormente que o produto envolvendo dois operadores quânticos na representação de Wigner é igual ao produto estrela dos respectivos equivalentes em Wigner. Também foi estudado que em toda equação dinâmica envolvendo a função de Wigner o produto estrela sempre está presente. Além disso, será importante o estudo do produto-estrela para se realizar a definição do operador-estrela, que será utilizado para a construção de representações unitárias dos grupos de Galilei e de Poincaré no espaço de fase.

Primeiro apresentamos duas maneiras para definir o produto estrela, que são equivalentes e se reduzem uma na outra e cada uma apresenta suas vantagens em diferentes situações. Como já foi mencionado no capítulo anterior, o produto estrela (também denominado produto de Weyl), entre duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$, é definido por

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p) \exp[\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})]g(q,p), \qquad (2.31)$$

onde as setas sobre os operadores diferenciais indicam o sentido em que eles se aplicam. A equação (2.31) pode ser reescrita como

$$f(q,p) \star g(q,p) = lim_{q',p' \to q,p} \exp[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})]f(q,p)g(q',p').$$

Expandindo a exponencial numa série de potências, temos

$$exp[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{i\hbar}{2})^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n.$$

E, ainda, escrevendo a expressão $(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n$ usando o binômio de Newton,

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q\partial_{p'}]^{n-m}[\partial_p\partial_{q'}]^m,$$

podemos finalmente escrever o produto estrela numa forma operacional muito útil, qual seja,

$$f(q,p)\star g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{i\hbar}{2})^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}[\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)][\partial_q^m\partial_p^{n-m}g(q,p)]. \quad (2.32)$$

Iremos discutir algumas propriedades envolvendo o produto estrela explorando a equação (2.32)

- Propriedade 2.8.1

Produto estrela em que um dos fatores é uma função constante: Seja $c \in C$. Então

$$c\star f(q,p) = f(q,p)\star c = cf(q,p). \quad (2.33)$$

Demonstração

Considerando a expressão em série para o produto estrela, equação (2.32), temos

$$c\star f(q,p) = c\{1+\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}-\overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})+\frac{1}{2!}\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p}-\overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})^2+...\}f(q,p).$$

Observamos que todos os operadores diferenciais que atuam à esquerda se anularão, restando apenas a primeira parcela: $cf(q,p)$. A discussão para o produto estrela por c aplicado do lado direito é a mesma.

- Propriedade 2.8.2

O Operador-estrela: O produto estrela entre duas funções no espaço de fase eleva uma delas à categoria de operador.

$$\begin{aligned} f(q,p)\star g(q,p) &= f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p}, p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p) \\ &= f(q,p)\star g(q,p) = f(q,p)g(q-\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}, p+\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_q}). \end{aligned}$$

Demonstração

Definindo $a=\overrightarrow{\partial_p}$ e $b=\overrightarrow{\partial_q}$, temos

$$f(q,p)\star g(q,p) = f(q,p)e^{\frac{i\hbar}{2}(a\overleftarrow{\partial_q}-b\overleftarrow{\partial_p})}g(q,p).$$

Usando o fato que $e^{a\partial_x}f(x)=f(x+a)$, chegamos a

$$f(q,p)\star g(q,p) = f(q+\frac{i\hbar}{2}a, p-\frac{i\hbar}{2}b)g(q,p).$$

Substituindo a e b, temos

$$f(q,p)\star g(q,p)=f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p},p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p).$$

Definimos

$$\widehat{f}(q,p)=f(q,p)\star,$$

que será chamado operador-estrela.

- Propriedade 2.8.3

O produto estrela é associativo. Ou seja, considere f, g e h funções no espaço de fase. Então,

$$(f(q,p)\star g(q,p))\star h(q,p)=f(q,p)\star(g(q,p)\star h(q,p)). \tag{2.34}$$

Demonstração

Utilizando a propriedade 2.8.2, temos

$$(f(q,p)\star g(q,p))\star h(q,p)=\{f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p},p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p)\}h(q-\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p},p+\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_q}),$$

e por outro lado,

$$f(q,p)\star(g(q,p)\star h(q,p))=f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p},p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})\{g(q,p)h(q-\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p},p+\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_q})\}.$$

Como os operadores diferenciais envolvidos aqui são associativos, segue que o produto estrela é associativo.

- Propriedade 2.8.4

O produto estrela não é comutativo. Isto é

$$f(q,p)\star g(q,p)\neq g(q,p)\star f(q,p).$$

Temos na verdade,

$$f(q,p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q,p)=g(q,p)e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}}f(q,p). \tag{2.35}$$

Por exemplo, tomemos dois casos de interesse:

$$q\star p=(q+\frac{i\hbar}{2}\partial_p)p=qp+\frac{i\hbar}{2},$$

e

$$p \star q = (p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q)q = pq - \frac{i\hbar}{2},$$

esse é um resultado básico em geometrias não-comutativas [28].

- Propriedade 2.8.5

O produto estrela e a conjugação complexa: A conjugação complexa inverte a ordem do produto estrela. Um fato análogo ao conjugado complexo de dois operadores usuais.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \tag{2.36}$$

Demonstração

Para mostrar essa propriedade, será utilizada a equação (2.32), tomando seu complexo conjugado, isto é,

$$(f(q,p)\star g(q,p))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{i\hbar}{2})^n\{(-1)^n \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f^\dagger(q,p)][\partial_q^m\partial_p^{n-m} g^\dagger(q,p)]\}, \tag{2.37}$$

em que o fator $(-1)^n$ é proveniente da conjugação complexa do fator $(\frac{i\hbar}{2})^n$. Observe agora o seguinte:

$$\begin{aligned} (-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n &= (\partial_p\partial_{q'} - \partial_q\partial_{p'})^n \\ &= (\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n \\ &= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_p\partial_{q'}]^{n-m}[\partial_q\partial_{p'}]^m. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Utilizando as duas últimas equações, encontramos

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n f(q,p) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)][\partial_q^m\partial_p^{n-m} g(q,p)]$$

e

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n f(q,p) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)][\partial_q^m\partial_p^{n-m} f(q,p)].$$

Comparando essas duas últimas equações, chegamos a

$$(-1)^n \qquad \sum_{m=0}^{n}(-1)^m[\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)][\partial_q^m\partial_p^{n-m} g(q,p)]$$

$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)][\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q,p)]. \quad (2.39)$$

Se substituirmos a equação (2.38) na equação (2.37), temos

$$\begin{aligned} (f(q,p)\star g(q,p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{i\hbar}{2})^n \\ &\times\{(-1)^n \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g^\dagger(q,p)][\partial_q^m \partial_p^{n-m} f^\dagger(q,p)]\} \\ &= g^\dagger(q,p)\star f^\dagger(q,p). \end{aligned} \quad (2.40)$$

- Propriedade 2.8.6

A forma integral do produto estrela.

$$f\star g = (\frac{1}{\pi\hbar})^2\int dq'dq''dp'dp''f(q',p')g(q'',p'')e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}.$$

Demonstração

Mostramos, agora, como representar o produto estrela utilizando a forma integral. Primeiro escrevemos a expressão

$$f(q,p) = \int dq'dp'f(q',p')\delta(q'-q)\delta(p'-p). \quad (2.41)$$

Considerando as representações das deltas de Dirac na forma integral, temos

$$\delta(q'-q) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{-iu(q'-q)}{\hbar}}du \quad (2.42)$$

e

$$\delta(p'-p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{-iv(p'-p)}{\hbar}}dv. \quad (2.43)$$

Substituindo as equações (2.42) e (2.43) na equação (2.41), segue

$$f(q,p) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^2\int dudvdq'dp'f(q',p')e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]}.$$

Utilizando a propriedade (2.8.2) e a última equação, chegamos a

$$\begin{aligned} f(q,p)\star g(q,p) &= f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p}, p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p) \\ &= (\frac{1}{2\pi\hbar})^2\int dudvdq'dp'f(q',p')e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]}e^{\frac{-i}{\hbar^2}[-iu\partial_p+iv\partial_q]}g(q,p). \end{aligned}$$

Se for feita uma pequena manipulação algébrica e também a transformação de variáveis,

$$q'' = q + \frac{v}{2} \quad e \quad p'' = p - \frac{u}{2},$$

obtemos o resultado

$$f(q,p) \star g(q,p) = (\frac{1}{2\pi\hbar})^2 \int dudvdq'dp'f(q',p')e^{\frac{-2i}{\hbar}[(p'-p)(p-p'')+(q''-q')(q'-q)]}g(q'',p'').$$

O que resulta em

$$f \star g = (\frac{1}{\pi\hbar})^2 \int dq'dq''dp'dp''f(q',p')g(q'',p'')e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}, \tag{2.44}$$

que é a forma integral do produto estrela.

- Propriedade 2.8.7

A integral do produto estrela no espaço de fase possui a seguinte propriedade

$$\int f(q,p) \star g(q,p)dqdp = \int f(q,p)g(q,p)dqdq. \tag{2.45}$$

Ou seja, ao se efetuar uma integração de um produto estrela entre duas funções, $f(q,p) \star g(q,p)$, no espaço de fase, esse produto se triaviliza dentro da integral. Como vimos na equação (2.45). É evidente que para essa propriedade fazer sentido é necessário a convergência da integral. A condição necessária para a convergência ocorra é que as funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ seja nulas no infinito.

Demonstração

Para demonstrar essa propriedade, o ponto de partida será a equação (2.45) e a forma integral do produto estrela, dada pela equação (2.44), o que leva a

$$\int f \star gdqdp = (\frac{1}{\pi\hbar})^2 \int dqdq'dq''dpdp'dp''f(q',p')g(q'',p'')e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}.$$

Notemos agora que a exponencial do primeiro fator dentro dos colchetes, juntamente com a integração em p, é identificada como a delta de Dirac, isto é,

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dpe^{\frac{-2ip(q'-q'')}{\hbar}} = \delta(q'-q'').$$

Nesse caso,

$$\int f \star gdqdp = (\frac{1}{\pi\hbar})^2 \int dqdq'dq''dp'dp''f(q',p')g(q'',p'')e^{\frac{-2i}{\hbar bar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]}\delta(q'-q''),$$

o que conduz a

$$\int f \star g dq dp = (\frac{1}{\pi\hbar})^2 \int dq dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i[p'(q''-q)+p''(q-q'')]}{\hbar}}.$$

Rearranjando os termos e raciocinando novamente em termos da delta de Dirac, chegamos ao resultado:

$$\int f \star g dq dp = \int dq'' dp' f(q'', p') g(q'', p').$$

Com a mudança de variáveis $q'' \to q$ e $p' \to p$, segue

$$\int f \star g dq dp = \int dq dp f(q, p) g(q, p).$$

No próximo capítulo, serão definidos alguns operadores-estrela para construirmos uma representação unitária do grupo de Galilei. Isso permite a construção da mecânica quântica compatível com o formalismo de Wigner, empregando a noção de amplitudes no espaço de fase.

3 *Mecânica Quântica Simplética e o Grupo de Galilei*

Neste capítulo, utilizamos a noção de estrutura simplética e do produto de Weyl de uma geometria não-comutativa, a fim de construir representações unitárias [1] para o grupo de Galilei e mostrar como escrever a equação de Schroedinger no espaço de fase [7, 32]. Incorporamos assim à descrição da mecânica quântica no espaço de fase a noção de espaço de Hilbert $H(\Gamma)$. Sabemos também que, com a representação da mecânica quântica no espaço de fase a partir de uma teoria de representação, o formalismo passa a ser autocontido, podendo ser generalizado para outros contextos, como o da teoria quântica de campos, por exemplo. A revisão apresentada neste capítulo baseia-se principalmente nas referências [7, 32, 33].

3.1 Espaço de Hilbert e Estrutura Simplética

Considerando uma variedade diferencial, M, n-dimensional, na qual cada ponto é especificado pelas coordenadas $q = (q^1, ..., q^n)$, temos que as coordenadas de cada ponto em no espaço cotangente,T^*M, podem ser denotadas por $(q, p) = (q^1, ..., q^n, p^1, ..., p^n)$. O espaço T^*M é equipado com uma estrutura simplética pela introdução da 2-forma

$$\omega = dq \wedge dp, \tag{3.1}$$

chamada de forma simplética. Essa forma simplética, em conjunto com o operador

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}, \tag{3.2}$$

induz o parentêses de Poisson ($f = f(q, p)$ e $g = g(q, p)$),

$$\{f, g\} = \omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g, \tag{3.3}$$

[1]representações unitárias são representações em termos de operadores unitários, os quais atuam em espaços de Hilbert

onde

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}. \tag{3.4}$$

O espaço das funções $f(q,p)$ C^∞ é chamado de espaço de fase e será denotado por Γ. Na equação (3.3), usamos o fato de que os operadores,

$$X_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{3.5}$$

e

$$X_g = g\Lambda = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{3.6}$$

determinam campos vetoriais sobre Γ.

A introdução da noção de espaço de Hilbert associado ao espaço de fase Γ, pode ser feita considerando o conjunto das funções complexas de quadrado integrável, $\phi(q,p)$ em Γ, tal que

$$\int dpdq\phi^*(q,p)\phi(q,p) < \infty \tag{3.7}$$

é uma forma bilinear real. Nesse caso, podemos escrever $\phi(q,p) = \langle q,p|\phi\rangle$, com

$$\int dpdq|q,p\rangle\langle q,p| = 1, \tag{3.8}$$

sendo $\langle\phi|$ o vetor dual de $|\phi\rangle$. Vamos denominar este espaço de Hilbert por $H(\Gamma)$.

3.2 O Grupo de Galilei em $\boldsymbol{H}(\Gamma)$

Nessa seção, vamos estudar as representações do grupo de Galilei no espaço de Hilbert $H(\Gamma)$. Para isso, consideramos transformações unitárias $U : H(\Gamma) \to H(\Gamma)$, tal que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ seja invariante. Assim, iniciamos com o operador Λ definindo um mapeamento $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} = \star : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$, chegamos ao chamado produto-estrela ou produto de Weyl, representado por meio da expressão

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p)exp[\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})]g(q,p), \tag{3.9}$$

onde f e g estão em $H(\Gamma)$. A constante de Planck é utilizada aqui para fixar as unidades.

Já enfatizamos que no formalismo de Wigner as variáveis dinâmicas são representadas por funções, ao invés de operadores, e os produtos envolvendo as variáveis dinâmicas são deformados segundo as regras do produto estrela, já estudadas no capítulo anterior.

Para se utilizar esta construção da álgebra de Galilei-Lie no espaço de fase, definimos os seguintes operadores:

$$\widehat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p \tag{3.10}$$

e

$$\widehat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q. \tag{3.11}$$

Vamosainda definir k_i como,

$$k_i = mq_i - tp_i, \tag{3.12}$$

onde m e t representam parâmetros, temos que o operador estrela correspondente a esta função é

$$\widehat{K} = k_i\star = mq_i\star - tp_i\star = m\widehat{Q_i} - t\widehat{P_i}. \tag{3.13}$$

Da mesma forma, correspondendo às funções

$$l_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k, \tag{3.14}$$

introduzimos o correspondente operador estrela

$$\widehat{L_i} = \epsilon_{ijk}\widehat{Q_j}\widehat{P_k} = \epsilon_{ijk}q_j p_k - \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}p_k\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial p_k}. \tag{3.15}$$

Já para a função

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \tag{3.16}$$

temos o operador estrela a seguir descrito:

$$\begin{aligned}\widehat{H} = \quad & \frac{\widehat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(\widehat{P_1}^2 + \widehat{P_2}^2 + \widehat{P_3}^2) = \frac{1}{2m}[(p_1 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_1})^2 \\ & +(p_2 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_2})^2 + (p_3 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_3})^2].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Proposição 1 Os operadores $\widehat{L}$, $\widehat{K}$, $\widehat{P}$ e $\widehat{H}$ satisfazem a álgebra de Galilei-Lie, dada pelas seguintes relações de comutação:

$$[\widehat{L_i}, \widehat{L_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L_k}, \tag{3.18}$$

$$[\widehat{L_i}, \widehat{K_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K_k}, \tag{3.19}$$

$$[\widehat{L_i}, \widehat{P_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P_k}, \tag{3.20}$$

$$[\widehat{K_i}, \widehat{K_j}] = 0, \tag{3.21}$$

$$[\widehat{K_i}, \widehat{P_j}] = i\hbar m\delta_{ij}\mathbf{1}, \tag{3.22}$$

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = i\hbar\widehat{P}_i, \tag{3.23}$$

$$[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0, \tag{3.24}$$

$$[\widehat{P}_i, \widehat{H}] = 0, \tag{3.25}$$

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = 0. \tag{3.26}$$

As relações de comutação acima encontram-se demonstradas na referências [32,33]. Como $m \neq 0$ temos naturalmente uma representação projetiva do grupo de Galilei [70,83].

Em termos de simetria, $\widehat{P}$ é o gerador de translações, sendo identificado como operador momentum. De fato, $\widehat{P}_j$ se transforma pelo *boost* (transformação pura de Galilei) de acordo com

$$exp(-i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar})\widehat{P}_j exp(i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{P}_j + mv_j\mathbf{1}. \tag{3.27}$$

Assim, $\widehat{Q}$ é interpretado como o operador de posição, se transformando de acordo com o *boost* como esperado:

$$exp(-i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar})\widehat{Q}_j exp(i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{Q}_j + v_j t\mathbf{1}. \tag{3.28}$$

As relações (3.27) e (3.28) mostram que $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$ se transformam como posição e momentum, respectivamente. E, por consistência, eles satisfazem a relação de Heisenberg,

$$[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n] = i\hbar\delta_{jn}\mathbf{1}, \tag{3.29}$$

reafirmando a consistência de se interpretar $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$ como observáveis posição e momentum.

Os invariantes da álgebra de Galilei nessa representação são dados por

$$I_1 = \widehat{H} - \frac{\widehat{P}^2}{2m} \quad e \quad I_2 = \widehat{L} - \frac{1}{m}\widehat{K} \times \widehat{P}. \tag{3.30}$$

O invariante de Casimir, por sua, vez dado por I_1, descreve o hamiltoniano para uma partícula livre, enquanto o invariante I_2 está associado ao spin. Os parâmetros m e t são interpretados como massa e tempo. Aqui será dado atenção às representações escalares, isto é, com $I_2 = 0$. Utilizando as relações de comutação demonstradas aqui, podemos mostrar que os invariantes comutam com os geradores dessa álgebra.

O gerador de translações temporal é $\widehat{H}$. Com isso, a evolução no tempo de um observável $\widehat{A}$ é especificada por

$$exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar}) = \widehat{A}(t), \tag{3.31}$$

onde $\widehat{A}(t)$ representa o observável $\widehat{A}$ no instante t, e $\widehat{A}(0)$, no instante inicial. Podemos obter uma equação dinâmica para $\widehat{A}$ ao derivar a equação (3.31) com relação ao tempo:

$$\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i\widehat{H}}{\hbar}exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar}) - exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\frac{-i\widehat{H}}{\hbar},$$

$$\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i\widehat{H}}{\hbar}\widehat{A}(t) - \widehat{A}(t)\frac{i\widehat{H}}{\hbar},$$

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \widehat{A}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{A}(t) = [\widehat{A}(t), \widehat{H}].$$

Ao particularizar para os operadores posição e momentum, temos, por exemplo

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{Q}(t)}{\partial t} = [\widehat{Q}(t), \widehat{H}], \tag{3.32}$$

e

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{P}(t)}{\partial t} = [\widehat{P}(t), \widehat{H}]. \tag{3.33}$$

Vamos agora mostrar como construir uma base em $H(\Gamma)$ com conteúdo de espaço de fase. Quando foram definidos, os operadores posição e momentum tinham a seguinte estrutura:

$$\widehat{P} = p\star = p\mathbf{1} - \frac{i\hbar}{2}\partial_q = p\mathbf{1} + \frac{1}{2}\widetilde{P}, \tag{3.34}$$

e

$$\widehat{Q} = q\star = p\mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2}\partial_p = q\mathbf{1} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}. \tag{3.35}$$

Definindo então operadores proporcionais à identidade (operadores c-*números*) como

$$\overline{P} = 2p\mathbf{1} \quad e \quad \overline{Q} = 2q\mathbf{1}, \tag{3.36}$$

os operadores de posição e momentum ficam escritos como

$$\widehat{P} = \frac{1}{2}(\overline{P} + \widetilde{P}) \quad e \quad \widehat{Q} = \frac{1}{2}(\overline{Q} + \widetilde{Q}). \tag{3.37}$$

Sob o *boost* $\overline{Q}$ e $\overline{P}$ se transformam como

$$exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})2\overline{Q}exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = 2\overline{Q} + vt\mathbf{1}, \tag{3.38}$$

e

$$exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})2\overline{P}exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = 2\overline{P} + mv\mathbf{1}. \tag{3.39}$$

Para obter esse resultado, utilizamos

$$e^{A}Be^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}[A,B]_n,$$

onde $[A,B]_0 = B, [A,B]_1 = [A,B], ..., [A,B]_n = [A,[A,B]_{n-1}], \quad n \geq 2$. Ou seja, $\overline{Q}$ e $\overline{P}$ se transformam como posição e momentum. Contudo, $\overline{Q}$ e $\overline{P}$ não podem ser classificados como observáveis posição e momentum, pois não satisfazem a relação de comutação de Heisenberg, pelo fato de que $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$. No entanto, é possível usá-los para construir um referencial no espaço de Hilbert com conteúdo de espaço de fase. Assim sendo, vamos definir um conjunto de autovetores ortonormalizados, denotados por $|q,p\rangle$, sendo $\{q\}$ e $\{p\}$, respectivamente, um conjunto de autovalores, satisfazendo

$$\overline{Q}|q,p\rangle = q|q,p\rangle, \tag{3.40}$$

e

$$\overline{P}|q,p\rangle = p|q,p\rangle. \tag{3.41}$$

Temos ainda

$$\langle q,p|q',p'\rangle = \delta(q-q')\delta(p-p'), \tag{3.42}$$

onde vale a relação de completeza,

$$\int dqdp|q,p\rangle\langle q,p| = 1. \tag{3.43}$$

Considerando um vetor de estado $|\psi\rangle$, os operadores $\widetilde{Q}$ e $\widetilde{P}$ na base $|q,p\rangle$ são tais que

$$\widetilde{Q}\psi(q,p) = \langle q,p|\widetilde{Q}|\psi\rangle = i\hbar\partial_p\psi(q,p), \tag{3.44}$$

e

$$\widetilde{P}\psi(q,p) = \langle q,p|\widetilde{P}|\psi\rangle = -i\hbar\partial_q\psi(q,p), \tag{3.45}$$

onde $\langle q',p'|\psi\rangle = \psi(q',p')$. Assim, é possível reconhecer

$$\langle q,p|\widetilde{Q}|q',p'\rangle = i\hbar\delta(q-q')\delta(p-p')\partial_p. \tag{3.46}$$

E, analogamente,

$$\langle q,p|\widetilde{P}|q',p'\rangle = i\hbar\delta(q-q')\delta(p-p')\partial_q. \tag{3.47}$$

Os operadores $\overline{Q}$ e $\overline{P}$, cujos autovalores são $\{q,p\}$, são coordenadas de um espaço de fase Γ, em que a estrutura simplética é utilizada na definição do produto estrela. De fato, a partir do operador Λ podemos construir a aplicação

$$e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} : \Gamma\times\Gamma \to \Gamma, \tag{3.48}$$

estabelecendo o produto estrela. Desse modo, a representação do grupo de Galilei que foi construída está estruturada sobre a noção de variedade simplética.

3.3 A Equação de Schroedinger no Espaço de Fase

Na seção anterior, mostramos que os operadores-estrelas são os objetos representativos dos observáveis no espaço de Hilbert, $H(\Gamma)$. Logo, é possível a construção da mecânica quântica, explicitando os postulados escritos em termos dos operadores-estrelas e sua álgebra. O primeiro passo é a definição de alguns postulados análogos aos que definem a mecânica quântica no espaço de Hilbert habitual.

Vamos considerar a projeção dos *kets* sobre o espaço de Hilbert gerado pelos autovetores simultâneos dos operadores $\overline{Q}$ e $\overline{P}$, $|q,p\rangle$. Tomamos $|\psi(t)\rangle$ em $H(\Gamma)$ como uma representação de um estado específico de um sistema quântico. Quando projetamos o vetor de estado, $|\psi(t)\rangle$, sobre o espaço de Hilbert, $H(\Gamma)$, gerado pelos kets $\{|q,p\rangle\}$, encontramos uma função das variáveis q, p e t,

$$\psi(q,p,t) = \langle q,p|\psi(t)\rangle. \tag{3.49}$$

Vale destacar que $\psi(q,p,t)$ é uma função de onda, mas não com o conteúdo entendido na mecânica quântica usual, pois p e q são autovalores dos operadores $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ que são representações das coordenadas da variedade simplética.

Com o uso da relação de completeza, temos

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|(\int dqdp|q,p\rangle\langle q,p|)|\phi\rangle = \int dqdp\psi^\dagger(q,p)\phi(q,p), \tag{3.50}$$

onde $\psi^\dagger(q,p) = \langle\psi|q,p\rangle$ e $\phi(q,p) = \langle q,p|\phi\rangle$.

A respeito da equação (2.45), vimos que o produto estrela se trivializa quando integrado no espaço de fase, assim a equação (3.50) pode ser escrita da seguinte forma

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int dqdp\psi^\dagger(q,p) \star \phi(q,p). \tag{3.51}$$

Os observáveis são representados por operadores estrela auto-adjuntos, tal que

$$\langle q,p|A|\psi\rangle = \int dq'dp'\langle q,p|A|q',p'\rangle\langle q',p'|\psi\rangle. \tag{3.52}$$

Considerando

$$\langle q,p|A|q,p\rangle = \widehat{A}(q,p)\delta(p-p')\delta(q-q'), \tag{3.53}$$

obtém-se

$$\langle q,p|A|\psi\rangle = \widehat{A}(q,p)\psi(q,p). \tag{3.54}$$

E, por construção, $\widehat{A}(q,p)$ é associado a uma função $a(q,p)$ por meio do produto estrela,

$$\widehat{A}(q,p) = a(q,p)\star. \tag{3.55}$$

O valor esperado de um observável $\widehat{A}$ em um dado estado $|\psi\rangle$ é dado por

$$\langle\widehat{A}\rangle = \langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle = \int dqdp \int dq'dp'\langle\psi|q,p\rangle\langle q,p|\widehat{A}|q',p'\rangle\langle q',p'|\psi\rangle, \tag{3.56}$$

em que foi utilizada a relação de completeza antes e depois do operador.

Em geral, se for escrito $\widehat{A}(q,p) = a(q,p)\star$, e utilizadas as propriedades do produto estrela, encontramos

$$\langle\widehat{A}\rangle = \int dqdpa(q,p)[\psi^\dagger(q,p)\star\psi(q,p)]. \tag{3.57}$$

Assim, notamos que $\langle\widehat{A}\rangle$ poderá ser real, se o espectro de $\widehat{A}$ for real. Em particular, para $\widehat{A} = \widehat{Q}$, temos

$$\langle\widehat{Q}\rangle = \int dqdpq[\psi^\dagger(q,p)\star\psi(q,p)], \tag{3.58}$$

que é escrito como

$$\langle\widehat{Q}\rangle = \int dqq\sigma(q), \tag{3.59}$$

onde $\sigma(q)$ representa a densidade de probabilidade associada à medida do observável $\widehat{Q}$, na posição q. Comparando as equações (3.58) e (3.59), a conclusão é que

$$\sigma(q) = \int dp[\psi(q,p)\star\psi^\dagger(q,p)]. \tag{3.60}$$

Analogamente, a densidade de probabilidade associada ao momentum nos fornece

$$\sigma(p) = \int dq[\psi(q,p) \star \psi^{\dagger}(q,p)]. \tag{3.61}$$

A evolução temporal de um operador arbitrário, conforme já foi visto, depende somente das propriedades algébricas do grupo de Galilei. Utilizamos então a equação (3.31) para descrever a evolução temporal dos observáveis físicos de tal maneira que o estado permaneça inalterado (descrição de Heisenberg). E, a partir daqui, vamos fazer a interpretação física. Assim, temos as equações de Heisenberg para os observáveis $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$,

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{Q}(t)}{\partial t} = [\widehat{Q}(t), \widehat{H}], \tag{3.62}$$

e

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{P}(t)}{\partial t} = [\widehat{P}(t), \widehat{H}]. \tag{3.63}$$

Em regra, para um observável $\widehat{A}$,

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = [\widehat{A}(t), \widehat{H}], \tag{3.64}$$

temos como solução geral

$$\widehat{A} = exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar}). \tag{3.65}$$

O valor esperado do observável $\widehat{A}(t)$ é dado por

$$\langle\widehat{A}(t)\rangle = \int dqdp\varphi^{\dagger} \star \widehat{A}(t) \star \varphi, \tag{3.66}$$

onde φ não depende explicitamente do tempo.

Definindo a exponencial estrela, $e_{\star}^{u}$, como

$$e_{\star}^{u} = 1 + u + \frac{1}{2!}u \star u + \frac{1}{3!}u \star u \star u + ..., \tag{3.67}$$

e usando ainda $\widehat{H} = h\star$, chegamos a

$$\langle\widehat{A}(t)\rangle = \int dqdp\varphi^{\dagger} \star e_{\star}^{\frac{iht}{\hbar}} \star A(0) \star e_{\star}^{\frac{iht}{\hbar}} \star \varphi. \tag{3.68}$$

Definindo $\psi(t)$ como

$$\psi(t) = e_{\star}^{\frac{iht}{\hbar}} \star \varphi = e_{\star}^{\frac{iht}{\hbar}} \star \psi(0), \tag{3.69}$$

temos, por consequência,

$$\psi^{\dagger}(t) = \psi^{\dagger}(0) \star e_{\star}^{\frac{-iht}{\hbar}}. \qquad (3.70)$$

Com isso, o valor esperado do operador $\widehat{A}(t)$, quando forem inseridas as equações (3.69) e (3.70) na equação (3.68), fica dado por

$$\langle \widehat{A}(t) \rangle = \int dqdp \psi(t) \star A(0) \star \psi^{\dagger}(t) = \int dqdp \psi(t) \widehat{A}(0) \psi^{\dagger}(t). \qquad (3.71)$$

Nesse caso, os observáveis estão definidos num certo instante de tempo. E os estados, por sua vez, evoluem no tempo. Isso define a descrição de Schroedinger.

Já temos uma equação dinâmica para os observáveis. Mas ao considerarmos ψ dependente do tempo, devemos procurar uma outra equação dinâmica que descreva a evolução de ψ. Para isso, basta derivar a equação (3.69) com relação ao tempo,

$$\partial_t \psi(t) = \frac{i}{\hbar} h \star e_{\star}^{\frac{iht}{\hbar}} \star \psi(0) = \frac{i}{\hbar} h \star \psi(t) = \frac{i}{\hbar} \widehat{H} \psi(t),$$

o que resulta em

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = \widehat{H} \psi(t), \qquad (3.72)$$

ou ainda

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = h \star \psi(t), \qquad (3.73)$$

que é a equação dinâmica procurada.

Se for considerada uma partícula sujeita a um potencial $V(\widehat{Q})$, podemos escrever $\widehat{H} = h\star = (\frac{\widehat{P}^2}{2m} + V(\widehat{Q}))$, de modo que a equação (3.72) se reduz a

$$i\hbar \partial_t \psi(q,p,t) = (\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m} \frac{\partial}{\partial q}) \psi(q,p,t) + V(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}) \psi(q,p,t); \qquad (3.74)$$

que é a equação de Schroedinger representada no espaço de fase [7].

Outros aspectos, tais como a equação dinâmica para a matriz densidade e o teorema de Ehrenfest no espaço de fase, o que foi demonstrado nas referências [32, 33].

3.4 Conexão com o Formalismo de Wigner

Vamos considerar a função

$$f(q,p) = \psi(q,p,t) \star \psi^{\dagger}(q,p,t). \qquad (3.75)$$

Mostraremos que $f = f(q,p,t)$ satisfaz todas as propriedades da função de Wigner, apresentadas no capítulo 2.

Para começar, tomamos a equação (3.73) e seu conjugado hermiteano,

$$i\hbar\partial_t\psi(t) = h \star \psi(t), \tag{3.76}$$

e

$$-i\hbar\partial_t\psi(t)^\dagger = \psi(t)^\dagger \star h, \tag{3.77}$$

e multiplicamos a equação (3.76) à esquerda por $\psi\star$ e a equação (3.77) à direita por $\star\psi^*$. Depois subtraímos uma da outra, o que leva a

$$i\hbar\partial_t(\psi \star \psi^\dagger) = h \star (\psi \star \psi^\dagger) - (\psi \star \psi^\dagger) \star h. \tag{3.78}$$

Mas $\partial_t(\psi \star \psi^\dagger) = \psi \star (\partial_t\psi^\dagger) + (\partial_t\psi) \star \psi^\dagger$ e $f = \psi \star \psi^\dagger$. Com isso, temos

$$i\hbar\partial_t f = h \star f - f \star h, \tag{3.79}$$

ou ainda

$$i\hbar\partial_t f = \{h, f\}_M, \tag{3.80}$$

que, como foi visto no capítulo 2, é a equação dinâmica da função de Wigner.

Também podemos notar que

$$\int dqdpf(q,p) = \int dqdp\psi \star \psi^\dagger = |\psi(q,p)|^2 = 1, \tag{3.81}$$

propriedade essa que também é satisfeita pela função de Wigner.

Temos ainda que

$$\langle \widehat{A} \rangle = \int dqdp\psi(\widehat{A}(q,p) \star \psi^\dagger). \tag{3.82}$$

E, aplicando as propriedades do produto estrela, obtemos

$$\langle \widehat{A} \rangle = \int dqdp\widehat{A}(q,p)(\psi \star \psi^\dagger), \tag{3.83}$$

o que resulta em

$$\langle \widehat{A} \rangle = \int dqdp\widehat{A}(q,p)f(q,p), \tag{3.84}$$

que também é uma propriedade satisfeita pela função de Wigner.

Podemos observar que $f = \psi \star \psi^\dagger$ é uma função real. Para isso, consideramos

$$f^\dagger = (\psi \star \psi^\dagger)^\dagger. \tag{3.85}$$

Utilizando a propriedade da conjugação complexa do produto estrela, temos,

$$f^\dagger = (\psi \star \psi^\dagger)^\dagger = (\psi^\dagger)^\dagger \star (\psi)^\dagger = \psi \star \psi^\dagger = f, \tag{3.86}$$

logo $f^\dagger = f$. Assim, percebemos que f é uma função real.

As equações (3.60) e (3.61) nos mostram que

$$\sigma(q) = \int dp[\psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)] = \int dp f(q,p) \tag{3.87}$$

e

$$\sigma(p) = \int dq[\psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)] = \int dq f(q,p), \tag{3.88}$$

que é mais uma propriedade da função de Wigner.

Podemos então escrever

$$f(q,p) = f_W(q,p) = \psi(q,p,t) \star \psi^\dagger(q,p,t). \tag{3.89}$$

Observamos ainda a equação de autovalores para o hamiltoniano,

$$h \star \psi = E\psi. \tag{3.90}$$

Aplicando o produto estrela à direita por $\psi^\dagger$, obtemos

$$h \star f_W = E f_W, \tag{3.91}$$

mostrando que $\psi(q,p)$ e $f_W(q,p)$ satisfazem a mesma equação de autovalor. Portanto, a procura por soluções reais para ψ leva a funções de Wigner. Além disso, outras funções de Wigner são obtidas mediante o produto $\psi(q,p,t) \star \psi^\dagger(q,p,t)$.

Com a finalidade de exemplificar a aplicação desse método, vamos resolver agora a equação de Schroedinger para o oscilador harmônico no espaço de fase. Esse problema já foi resolvido no espaço de fase, utilizando um método algébrico [7]. Vamos seguir aqui um procedimento diferente, baseados na equação diferencial. Para isso, tomamos a equação de autovalores escrita no espaço de fase

$$h(q,p) \star \psi(q,p) = E\psi(q,p), \tag{3.92}$$

aqui $h(q,p) = \frac{p^2+q^2}{2}$. Nesse caso, ficamos com, [2]

[2]tomamos $\hbar = 1$ e $m = 1$

$$(\frac{p^2+q^2}{2}) \star \psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{3.93}$$

Utilizando as propriedades do produto estrela, temos

$$[(p-\frac{i}{2}\partial_q)^2 + (q+\frac{i}{2}\partial_p)^2]\psi(q,p) = 2E\psi(q,p), \tag{3.94}$$

que leva a

$$[p^2 - \frac{i}{2}p\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 + \frac{i}{2}q\partial_p - \frac{1}{4}\partial_p^2]\psi(q,p) = 2E\psi(q,p). \tag{3.95}$$

Podemos escrever ainda

$$[p^2 - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 - \frac{1}{4}\partial_p^2 - 2E]\psi(q,p) + [-\frac{i}{2}p\partial_q + \frac{i}{2}q\partial_p]\psi(q,p) = 0. \tag{3.96}$$

Igualando a parte real e a imaginária da equação (3.96) a zero, temos

$$[p^2 - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 - \frac{1}{4}\partial_p^2 - 2E]\psi(q,p) = 0, \tag{3.97}$$

e

$$[-p\partial_q + q\partial_p]\psi(q,p) = 0. \tag{3.98}$$

Tomando $\psi(q,p) = \psi(4h)$, notamos que tanto a parte real quanto a parte imaginária da equação são satisfeitas. Dessa forma, definindo $z = 4h$, temos

$$\partial_q = \frac{\partial z}{\partial q}\partial_z \rightarrow \partial_q = 4q\partial_z,$$

$$\partial_p = \frac{\partial z}{\partial p}\partial_z \rightarrow \partial_p = 4p\partial_z$$

e ainda

$$\partial_q^2 = 4q^2\partial_z^2 + 2\partial_z,$$

$$\partial_p^2 = 4p^2\partial_z^2 + 2\partial_z.$$

Substituindo nas equações (3.97) e (3.98), ficamos com

$$[\frac{z}{4} - E - \frac{1}{8}((16q^2 + 16p^2)\partial_z^2 + 8\partial_z)]\psi(z) = 0, \tag{3.99}$$

$$[\frac{z}{4} - E - z\partial_z^2 - \partial_z]\psi(z) = 0. \tag{3.100}$$

Tomando $\psi(z) = e^{\frac{-z}{2}}L(z)$ e substituindo na equação (3.100), temos

$$[z\partial_z^2 + (1-z)\partial_z + E - \frac{1}{2}]L(z) = 0, \tag{3.101}$$

que é uma das equações diferenciais de Laguerre. De fato, lembrando que a equação diferencial de Laguerre é dada por

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (m+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad onde \quad y = L_n^m(x). \tag{3.102}$$

Temos nesse caso, $m = 0$ e $n = E - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, ...$ Assim as soluções reais do problema do oscilador harmônico são dadas por

$$\psi_n(q,p) = e^{-2(q^2+p^2)}L_n(q^2+p^2), \tag{3.103}$$

onde L_n representa o polinômio de Laguerre de ordem n. Vale a pena observar que no espaço de fase encontramos a solução da equação de evolução do sistema como funções escritas em termos de polinômios de Laguerre, enquanto que na descrição usual o estado é dado em termos de polinômios de Hermite.

A associação com a função de Wigner pode ser feita se tomarmos o produto estrela da solução dada acima com ela mesma. Para obter uma expressão geral dessas funções, escrevemos a solução para o problema dado da seguinte forma:

$$\psi_n = C_n \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega})L_n(4h/\hbar\omega), \tag{3.104}$$

onde C_n são constantes de normalização. As correspondentes funções de Wigner são dadas por

$$f_W^{(n)}(q,p) \sim \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega}) \star [L_n(4h/\hbar\omega) \star \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega})] \star L_n(4h/\hbar\omega). \tag{3.105}$$

Contudo, dada uma função $f(h)$, expressa em série de potências,

$$g(h) = \sum_n f_n h^n, \tag{3.106}$$

temos, utilizando as propriedades do produto estrela,

$$f(h) \star e^{\frac{-2h}{\hbar\omega}} = constante \times e^{\frac{-2h}{\hbar\omega}}. \quad (3.107)$$

Considerando esse resultado, podemos escrever a equação (3.105) como

$$f_W^{(n)}(q,p) \sim \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega}) \star [\exp(\frac{-2h}{\hbar\omega})L_n(4h/\hbar\omega)], \quad (3.108)$$

o que nos fornece

$$f_W^{(n)}(q,p) \sim \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega}) \star \psi_n = \exp(\frac{-2\widehat{h}}{\hbar\omega})\psi_n. \quad (3.109)$$

Como ψ_n é autofunção de $\widehat{h}$, podemos escrever

$$\exp(\frac{-2\widehat{h}}{\hbar\omega})\psi_n = \exp(\frac{-2E_n}{\hbar\omega})\psi_n \sim \psi_n. \quad (3.110)$$

Assim, as funções de Wigner para o oscilador harmônico são [13]

$$f_W^{(n)}(q,p) \sim \exp(\frac{-2h}{\hbar\omega})L_n(4h/\hbar\omega), \quad (3.111)$$

que são coincidentes com as soluções encontradas para as amplitudes. Esse fato é consistente, já que elas obedecem a mesma equação de autovalores. O comportamento de alguns casos para as amplitudes e das respectivas funções de Wigner podem ser vistos por meio dos gráficos dados nas figuras (1-6).

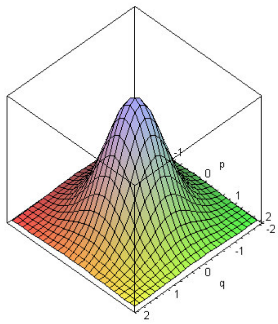

Figura 1: Amplitude para o oscilador harmônico, n=0

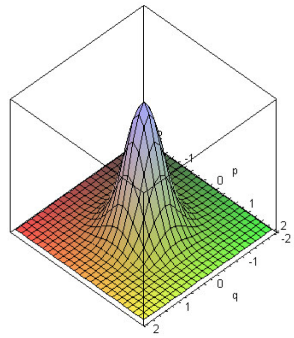

Figura 2: Função de Wigner para o oscilador harmônico, n=0

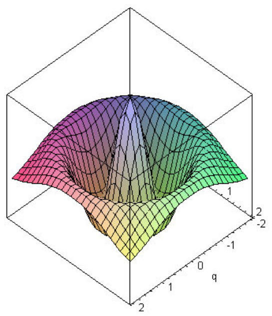

Figura 3: Amplitude para o oscilador harmônico, n=2

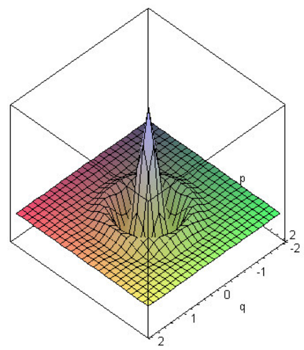

Figura 4: Função de Wigner para o oscilador harmônico, n=2

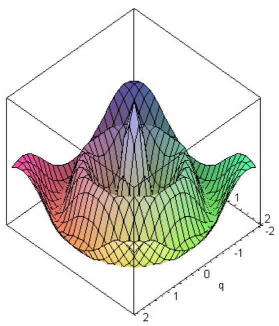

Figura 5: Amplitude para o oscilador harmônico, n=4

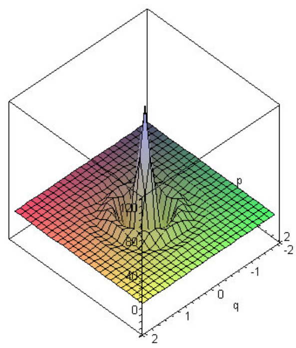

Figura 6: Função de Wigner para o oscilador harmônico, n=4

Consideraremos agora, como um segundo exemplo, a resolução da equação de Schroedinger no espaço de fase para o caso com interação magnética. Nesse caso, consideraremos que as coordenadas sejam comutativas. A análise desse exemplo será útil a fim de compararmos com o caso das coordenadas não-comutativas que desenvoveremos no próximo capítulo.

Sendo assim, consideremos que o hamiltoniano que correspondente ao problema de um elétron se movendo num plano que é perturbado por um campo magnético, B, perpendicular ao plano, possa ser escrito da seguinte forma,

$$h = \frac{1}{2m}(p + \frac{e}{c}A)^2, \tag{3.112}$$

onde escolhemos o calibre que nos leva a $A = (-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x)$ e $q = (x, y)$, $p = (p_x, p_y)$. Consideraremos ainda que $\hbar = m = e = c = 1$.

Nesse caso, o hamiltoniano fica dado por

$$h = \frac{1}{2}(p_x - \frac{B}{2}y)^2 + \frac{1}{2}(p_y + \frac{B}{2}x)^2. \tag{3.113}$$

E, portanto, a equação de Schroedinger no espaço de fase é dada por,

$$H \star \psi(q, p) = E\psi(q, p). \tag{3.114}$$

De forma que, usando a as relações, $p_i\star = p_i - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}$ e $q_i\star = q_i + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_i}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \quad & [\quad p_x^2 - ip_x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - Bp_xy + i\frac{B}{2}y\frac{\partial}{\partial_x} - i\frac{B}{2}p_x\frac{\partial}{\partial p_y} \\ & - \quad \frac{B}{8}\frac{\partial^2}{\partial x\partial p_y} + \frac{B^2}{4}y^2 + i\frac{B^2}{4}y\frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{B^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}]\psi(q, p) \\ & + \quad \frac{1}{2}[p_y^2 - ip_y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Bp_yx + i\frac{B}{2}x\frac{\partial}{\partial_y} + i\frac{B}{2}p_y\frac{\partial}{\partial p_x} \\ & + \quad \frac{B}{8}\frac{\partial^2}{\partial y\partial p_x} + \frac{B^2}{4}x^2 + i\frac{B^2}{4}x\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{B^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}]\psi(q, p) = E\psi(q, p). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Agora, a fim de solucionar a equaçao diferencial dada, admitamos que $\psi(q, p) = \psi(z)$, onde $z = \frac{1}{2}(p_x^2 - Bp_xy + \frac{B^2}{4}y^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + Bp_yx + \frac{B^2}{4}x^2)$. Nesse sentido, podemos simplificar a equação (3.115). Para esse fim, precisamos das seguintes derivadas:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = (\frac{1}{2}Bp_y + \frac{B^2}{4}x)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = (-\frac{1}{2}Bp_x + \frac{B^2}{4}y)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_x} = (p_x - \frac{1}{2}By)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial p_y} = (p_y + \frac{1}{2}Bx)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (\frac{1}{2}Bp_y + \frac{B^2}{4}x)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (\frac{1}{2}Bp_y + \frac{B^2}{4}x)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (-\frac{1}{2}Bp_x + \frac{B^2}{4}y)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p_x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial z} + (p_x - \frac{1}{2}By)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p_y^2} = \frac{\partial\psi}{\partial z} + (p_y + \frac{1}{2}Bx)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p_x\partial y} = -\frac{B}{2}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (p_x - \frac{1}{2}By)(-\frac{1}{2}Bp_x + \frac{B^2}{4}y)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p_y\partial x} = \frac{B}{2}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (p_y + \frac{1}{2}Bx)(\frac{1}{2}Bp_y + \frac{B^2}{4}x)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

E agora, substituindo essas derivadas na equação (3.115), obtemos:

$$z\psi(z) - \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{B^2}{4}z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = E\psi(z). \tag{3.116}$$

Ou ainda,

$$z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{4}{B^2}(z - E)\psi(z) = 0. \tag{3.117}$$

Se tomarmos $r = \frac{4z}{B}$, teremos $\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{4}{B}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{16}{B^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$. E ainda, se definirmos também que $\psi(r) = e^{-\frac{r}{2}}L(r)$, a equação (3.117) pode ser escrita da seguinte forma,

$$r\frac{\partial^2 L(r)}{\partial r^2} + (1 - r)\frac{\partial L(r)}{\partial r} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{B}E)L(r) = 0, \tag{3.118}$$

que é a equação diferencial de Laguerre, cuja solução é dada em termos dos polinômios de Laguerre $L_n(r)$. Portanto, a solução do nosso problema é dada por,

$$\psi(q,p) = e^{\frac{-2z}{B}}L_n(4z/B), \tag{3.119}$$

onde $z = \frac{1}{2}(p_x^2 - Bp_xy + \frac{B^2}{4}y^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + Bp_yx + \frac{B^2}{4}x^2)$.

E as funções de Wigner podem ser encontradas mediante mediante o produto $\psi(q,p)\star\psi^\dagger(q,p)$.

Nesse caminho, calcularemos agora as funções de Wigner. Antes nos lembremos das relações , $H \star \psi_n(q,p) = E_n \psi(q,p)$ e $H = z$.

Iniciaremos nossos cálculos com a função de Wigner de ordem zero e depois generalizaremos o resultado.

Para iniciar, lembremos que $\psi_0(q,p) = e^{\frac{-2H}{B}}$. Dessa forma a função de Wigner nesse caso será dada por,

$$f_W^{(0)}(q,p) = e^{\frac{-2H}{B}} \star e^{\frac{-2H}{B}}. \tag{3.120}$$

Se fizermos a expansão em Taylor na primeira exponencial e aplicarmos na segunda, obtemos,

$$f_W^{(0)}(q,p) = [\psi_0 + (\frac{-2}{B})H \star \psi_0 + \frac{1}{2!}(\frac{-2}{B})^2 H^2 \star \psi_0 + ... + \frac{1}{n!}(\frac{-2}{B})^n H^n \star \psi_0]. \tag{3.121}$$

Observe que podemos escrever a expressão acima da seguinte forma,

$$f_W^{(0)}(q,p) = [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{-2}{B})^n E^n]\psi_0(q,p). \tag{3.122}$$

Com isso, chegamos, finalmente, na expressão para a função de Wigner de ordem zero, que é dada por

$$f_W^{(0)}(q,p) = e^{\frac{-2E_n}{B}} e^{\frac{-2z}{B}}. \tag{3.123}$$

O mesmo raciocínio vale para o cálculo de $f_w^{(n)}(q,p)$. Sendo assim, obtemos

$$f_W^{(n)}(q,p) = C_n e^{\frac{-2z}{B}} L_n(4z/B), \tag{3.124}$$

onde $C_n = e^{\frac{-2E_n}{B}} L_n(4E_n/B)$.

No próximo capítulo, resolveremos a equação de Schroedinger no espaço de fase em outros contextos, tais como a partícula carregada submetida à interação magnética, o potencial de Liouville e o potencial quártico. Com isso, esperamos evidenciar a aplicabilidade do método, determinando as amplitudes no espaço de fase e as funções de Wigner correspondentes a cada caso.

4 *O Problema de Landau no Espaço de Fase e Potenciais Não-Lineares*

Neste capítulo, focamos nossa atenção em algumas aplicações da equação de Schroedinger no espaço de fase. Em primeiro lugar, fizemos uma análise do problema de Landau no espaço de fase, introduzindo a não-comutatividade também nas coordenadas de posição. Com isso, encontramos as amplitudes e as correspondentes funções de Wigner para o problema de Landau. Em seguida resolvemos a equação de Schroedinger no espaço de fase para dois potenciais não-lineares. Nesse sentido, tratamos o potencial de Liouville e por último, por meio de um tratamento perturbativo, resolvemos o problema do potencial quártico. Encontramos as funções de Wigner em cada problema apresentado. No fim do capítulo, fizemos uma análise voltada à mecância estatística, onde calculamos a suscetibilidade magnética para uma partícula que se move sob a ação de um campo magnético, utilizando para isso operadores-estrela, definidos no capítulo 3. Ao final, chegamos ao resultado exato para o diamagnetismo de Landau.

4.1 O Problema de Landau no Espaço de Fase

A análise do comportamento de uma partícula carregada restrita ao plano e na presença de um campo magnético externo ortogonal ao plano é conhecido como o problema de Landau [34]. No regime em que o campo magnético é extremamente elevado, as coordenadas da partícula passam a ser não-comutativas. Diferentes aspectos do problema de Landau em coordenadas não-comutativas têm sido estudados exaustivamente, como aparece, por exemplo, na referência [35]. Nosso objetivo aqui é determinar as amplitudes no espaço de fase e as respectivas funções de Wigner quando as coordenadas de posição são não-comutativas.

4.1.1 O hamiltoniano não-comutativo

Com a finalidade de escrever o hamiltoniano com as coordenadas de posição não comutativas, introduziremos o produto-estrela-θ,

$$*_\theta = \exp \frac{i\theta}{2}(\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_y} - \overleftarrow{\partial_y}\overrightarrow{\partial_x}). \tag{4.1}$$

Nesse sentido, as coordenadas obedecem ao parentêse de Moyal, dado por

$$[x, y]_M = x *_\theta y - y *_\theta x = i\theta,$$

onde θ é um parâmetro constante.

A quantização do sistema é obtida pelo estabelecimento da relação de quantização canônica usual,

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{4.2}$$

Temos aqui $q = (x, y)$ e $p = (p_x, p_y)$. Interpretaremos as derivadas em q como operador momentum, $\partial_q = \frac{i}{\hbar}p$.

A equação de Schroedinger em coordenadas não-comutativas pode ser escrita em um primeiro momento da seguinte forma ($h *_\theta \psi = E\psi$),

$$\frac{1}{2}(p_x - \frac{B}{2}y)^2 + \frac{1}{2}(p_y + \frac{B}{2}x)^2 *_\theta \psi(q) = E\psi(q). \tag{4.3}$$

Para expandir esse hamiltoniano, utilizaremos as relações

$$x*_\theta = x + i\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$y*_\theta = y + i\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial x}.$$

E precisaremos também das relações

$$x^2*_\theta = x^2 + i\theta x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\theta^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

e

$$y^2*_\theta = y^2 - i\theta y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Dessa forma, a equação diferencial (4.3) fica escrita como

$$\frac{1}{2}[\frac{B^2}{4}(x^2 + y^2) + (B + \frac{\theta B^2}{4})(xp_y - yp_x) + (1 + \frac{B\theta}{4})^2(p_x^2 + p_y^2)]\psi(q) = E\psi(q). \tag{4.4}$$

Assim, podemos escrever $B + \frac{\theta B^2}{4} = (1 + \frac{\theta B}{4})B$. Definindo $k = \frac{\theta B}{4}$, podemos reescrever a equação (4.4) como

$$\frac{1}{2}[((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 + ((1+k)p_y - \frac{B}{2}x)^2]\psi(q) = E\psi(q). \tag{4.5}$$

Dessa forma, podemos reconhecer o hamiltoniano não-comutativo como

$$h = \frac{1}{2}[((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 + ((1+k)p_y - \frac{B}{2}x)^2]. \tag{4.6}$$

4.1.2 A equação de Schroedinger no espaço de fase submetida a interação magnética

A equação de Schroedinger no espaço de fase, de acordo com os capítulos anteriores, é ser escrita da seguinte forma:

$$h \star \psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.7}$$

Se utilizarmos a equação (4.6), escrevemos a equação de Schroedinger, que descreve o problema de Landau no espaço de fase, como

$$\frac{1}{2}[((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 + ((1+k)p_y - \frac{B}{2}x)^2] \star \psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.8}$$

Resolveremos esta equação por dois métodos diferentes. Primeiro, consideraremos a resolução mediante um tratamento algébrico e, no segundo método, abordaremos o problema analiticamente, por meio da resolução da equação diferencial.

Com o intuito de solucionar a equação (4.8), mediante um método algébrico diretamente da álgebra dos operadores-estrela, definiremos os seguintes operadores

$$\widehat{a} = a\star = \frac{1}{\sqrt{2B(1+k)}}[(p_x \star - \frac{B}{2}y\star) - i(p_y \star + \frac{B}{2}x\star)], \tag{4.9}$$

e

$$\widehat{a^\dagger} = a^\dagger\star = \frac{1}{\sqrt{2B(1+k)}}[(p_x \star - \frac{B}{2}y\star) + i(p_y \star + \frac{B}{2}x\star)], \tag{4.10}$$

de forma que a equação (4.8) possa ser escrita como

$$(1+k)B(a^\dagger \star a \star + \frac{1}{2})\psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.11}$$

Os operadores $a\star$ e $a^\dagger\star$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação. Esses operadores satisfazem as seguintes propriedades

$$[a\star, a^\dagger\star] = 1, \tag{4.12}$$

e

$$[h\star, a\star a^\dagger\star] = [h\star, a^\dagger \star a\star] = 0. \tag{4.13}$$

A equação (4.13) nos mostra que o hamiltoniano, $h\star$, comuta com o operador $a^\dagger\star a\star$. Dessa forma, é possível estabelecer para esses objetos um conjunto comum de autovalores. Além disso, seus autovalores diferem apenas por uma quantidade $\frac{(1+k)B}{2}$. Considerando esses argumentos, o problema de autovalores resume-se à equação

$$a^\dagger \star a \star \psi_n(q,p) = \lambda_n \psi_n(q,p). \tag{4.14}$$

Se combinarmos a equação (4.12) com a equação (4.14), encontramos

$$a^\dagger \star a \star (a^\dagger \star \psi_n(q,p)) = (\lambda_n + 1)(a^\dagger \star \psi_n(q,p)), \tag{4.15}$$

e

$$a^\dagger \star a \star (a \star \psi_n(q,p)) = (\lambda_n - 1)(a \star \psi_n(q,p)). \tag{4.16}$$

Essas duas últimas relações comprovam que $a\star$ e $a^\dagger\star$, de fato, são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Além disso, todos os autovalores λ_n são inteiros e positivos,

$$E_n = (1+k)B(n + \frac{1}{2}), \tag{4.17}$$

onde $\lambda_n = n$. Isso implica que o operador de destruição aplicado à função de estado correspondente ao estado de mais baixa energia deve ser nulo:

$$a \star \psi_0(q,p) = 0. \tag{4.18}$$

A solução dessa equação conduz à determinação do estado de mais baixa energia. Mais explicitamente, esta equação diferencial pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &((1+k)p_x - \frac{B}{2}y - \frac{1}{2}(1+k)\partial_y + \frac{B}{4}\partial_{p_x})\psi_0(q,p) \\ &+i(-(1+k)p_y - \frac{B}{2}x - \frac{1}{2}(1+k)\partial_x - \frac{B}{4}\partial_{p_y})\psi_0(q,p) = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Resolvendo simultaneamente as equações diferenciais para a parte real e para a parte imaginária, encontramos a seguinte solução geral

$$\psi_0(q,p) = N_0 e^{\frac{-1}{B(1+k)}[((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 + ((1+k)p_y + \frac{B}{2}x)^2]} = N_0 e^{\frac{-2h}{B(1+k)}}, \tag{4.20}$$

onde N_0 é a constante de normalização.

É preciso utilizar o operador de criação repetidas vezes sobre a função de mais baixa energia, $\psi_0(q,p)$, para determinar as outras autofunções. Nesse processo, é preciso precaução com relação às constantes de normalização, admitindo que N_0 está ajustada de modo que ψ tenha norma igual à unidade. Isto é, para qualquer valor de $n \geq 1$, a autofunção

$$\psi_n(q,p) = N_n a^\dagger \star \psi_{n-1},$$

deve ser normalizada. Aplicando as propriedades do produto-estrela, encontramos para a constante de normalização,

$$N_n = \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Então, partindo da autofunção de menor energia e aplicando o operador de criação sucessivamente, todas as autofunções normalizadas podem ser obtidas pela relação

$$\psi_n(q,p) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger\star)^n\psi_0. \tag{4.21}$$

Antes de determinarmos as autofunções, precisamos encontrar o valor da constante de normalização N_0. A norma da autofunção ψ_0 é dada por

$$\int dqdp\psi_0^\dagger \star \psi_0 = N_0 \int dqdpe^{\frac{-2h}{(1+k)B}} \star e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} = 1. \tag{4.22}$$

Antes de calcularmos a integral, é conveniente observar que

$$e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} \star e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} = e^{\frac{-2h\star}{(1+k)B}} e^{\frac{-2h}{(1+k)B}},$$

e, ainda,

$$e^{\frac{-2h\star}{(1+k)B}} e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-2}{(1+k)B})^n(h\star)^n e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}.$$

Usando o fato de que $e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}$ é autofunção (estado fundamental) do operador $h\star$, temos que,

$$(h\star)^n e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} = (\frac{(1+k)B}{2})^n e^{\frac{-2h}{(1+k)B}},$$

e portanto,

$$e^{\frac{-2h\star}{(1+k)B}} e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} = \frac{1}{e} e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}.$$

Utilizando esses resultados, finalmente encontramos o resultado da integral e concluimos que a função de onda para o estado fundamental normalizada é dada por

$$\psi_0(q,p) = \sqrt{\frac{e}{\pi}} e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.23}$$

As primeiras autofunções, obtidas a partir da autofunção fundamental explicitada na equação antes descrita, são

$$\psi_1(q,p) \sim [((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 - i((1+k)p_y + \frac{B}{2}x)^2]e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}, \tag{4.24}$$

$$\psi_2(q,p) \sim [((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 - i((1+k)p_y + \frac{B}{2}x)^2]^2 e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}, \tag{4.25}$$

e, de forma geral,

$$\psi_n(q,p) \sim [((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 - i((1+k)p_y + \frac{B}{2}x)^2]^n e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.26}$$

Podemos escrever também

$$\psi_n(q,p) \sim (a^\dagger)^n e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.27}$$

A partir desse resultado, podemos encontrar as funções de Wigner. Para tal objetivo, tomemos que

$$f_W^n(q,p) \sim (a^\dagger)^n \star (e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} \star e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}) \star a^n, \tag{4.28}$$

ou seja,

$$f_W^n(q,p) \sim (a^\dagger)^n \star e^{\frac{-2h}{(1+k)B}} \star a^n. \tag{4.29}$$

Em particular, para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} f_W^{(1)}(q,p) \sim\ & [(1+k)(p_x - \frac{i}{2}\partial_x) - \frac{B}{2}(y + \frac{i}{2}\partial_{p_y}) + i(1+k)(p_y - \frac{i}{2}\partial_y) + i\frac{B}{2}(x + \frac{i}{2}\partial_{p_x})] \\ & [(1+k)(p_x - \frac{i}{2}\partial_x) - \frac{B}{2}(y + \frac{i}{2}\partial_{p_y}) - i(1+k)(p_y - \frac{i}{2}\partial_y) - i\frac{B}{2}(x + \frac{i}{2}\partial_{p_x})] \\ & \times e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Após uma manipulação algébrica, chegamos ao resultado

$$f_W^{(1)}(q,p) \sim [1 - \frac{4h}{(1+k)B}]e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.31}$$

Cálculos semelhantes resultam em

$$f_W^{(2)}(q,p) \sim [1 - 4\frac{4h}{(1+k)B} + (\frac{4h}{(1+k)B})^2]e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.32}$$

Os termos dentro dos colchetes podem ser identificados como polinômios de Laguerre, de sorte que, em geral, podemos afirmar que

$$f_W^{(n)}(q,p) \sim L_n(4h/(1+k)B)e^{\frac{-2h}{(1+k)B}}. \tag{4.33}$$

Essas são as funções de Wigner referentes ao problema de Landau no espaço de fase.

Como enfatatizamos no início dessa seção, esse problema pode ser abordado do ponto de vista de equações diferenciais. Para esse fim, consideraremos a equação (4.8), desenvolveremos o produto-estrela e definiremos também $\gamma = (1+k)B$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[(1+k)^2(p_x^2 - ip_x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}) + \frac{B^2}{4}(x^2 + ix\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}) \\
&+\gamma(p_x y + \frac{i}{2}p_x\frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{i}{2}y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial p_y x}) + (1+k)^2(p_y^2 - ip_y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}) \\
&+\frac{B^2}{4}(y^2 + iy\frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}) + \gamma(p_y x + \frac{i}{2}p_y\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{i}{2}x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial p_x y})] \\
&\times\psi(q,p) = E\psi(q,p).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Se admitirmos que $\psi(q,p) = \psi(w)$, onde $w = \frac{1}{2}[((1+k)p_x - \frac{B}{2}y)^2 + ((1+k)p_y - \frac{B}{2}x)^2]$, podemos simplificar a equação (4.34).

Para efetuar a simplificação desejada, precisamos do cálculo de algumas derivadas, que estão explicitadas nas relações abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= (\frac{1}{2}\gamma p_y + \frac{B^2}{4}x)\frac{\partial\psi}{\partial w}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= (-\frac{1}{2}\gamma p_x + \frac{B^2}{4}y)\frac{\partial\psi}{\partial w}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial p_x} &= ((1+k)^2 p_x - \frac{1}{2}\gamma y)\frac{\partial\psi}{\partial w}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial p_y} &= ((1+k)^2 p_y + \frac{1}{2}\gamma x)\frac{\partial\psi}{\partial w}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial w} + (\frac{1}{2}\gamma p_y + \frac{B^2}{4}x)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial w} + (\frac{1}{2}\gamma p_y + \frac{B^2}{4}x)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= \frac{B^2}{4}\frac{\partial\psi}{\partial w} + (-\frac{1}{2}\gamma p_x + \frac{B^2}{4}y)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial p_x^2} &= (1+k)^2\frac{\partial\psi}{\partial w} + ((1+k)^2 p_x - \frac{1}{2}\gamma y)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial p_y^2} &= (1+k)^2\frac{\partial\psi}{\partial w} + ((1+k)^2 p_y + \frac{1}{2}\gamma x)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial p_x\partial y} &= -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial\psi}{\partial w} + ((1+k)^2 p_x - \frac{1}{2}\gamma y)(-\frac{1}{2}\gamma p_x + \frac{B^2}{4}y)\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}, \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial p_y\partial x} &= \frac{\gamma}{2}\frac{\partial\psi}{\partial w} + ((1+k)^2 p_y + \frac{1}{2}\gamma x)(\frac{1}{2}\gamma p_y + \frac{B^2}{4}x)\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação (4.34) e realizando algumas simplificações, chegamos a

$$w\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}+\frac{\partial\psi}{\partial w}-\frac{4}{\gamma^2}(w-E)\psi(w)=0. \tag{4.35}$$

Se tomarmos $r=\frac{4w}{\gamma}$, teremos $\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{4}{\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}=\frac{16}{\gamma^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$. Definindo $\psi(r)=e^{-\frac{r}{2}}L_n(r)$, a equação (4.35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$r\frac{\partial^2 L_n(r)}{\partial r^2}+(1-r)\frac{\partial L_n(r)}{\partial r}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}E)L_n(r)=0. \tag{4.36}$$

Novamente chegamos à equação diferencial de Laguerre, cuja solução é dada em termos dos polinômios de Laguerre $L_n(r)$. Portanto, as soluções do nosso problema são dadas por

$$\psi_n(q,p)=e^{\frac{-2w}{\gamma}}L_n(4w/\gamma), \tag{4.37}$$

onde $w=\frac{1}{2}[((1+k)p_x-\frac{B}{2}y)^2+((1+k)p_y-\frac{B}{2}x)^2]$. E as funções de Wigner podem ser encontradas mediante mediante o produto $\psi(q,p)\star\psi^\dagger(q,p)$.

O procedimento para o cálculo da função de Wigner para o caso não-comutativo é análogo ao caso do oscilador harmônico, estudado no capítulo precedente. Ou seja, a função de Wigner pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_W^n(q,p)=D_n e^{\frac{-2w}{\gamma}}L_n(4w/\gamma), \tag{4.38}$$

onde $D_n=e^{\frac{-2E_n}{\gamma}}L_n(4E_n/\gamma)$.

Se nos lembrarmos que $w=h$ e $\gamma=(1+k)B$, percebemos que as soluções dadas em (4.33) possuem a mesma forma das soluções dadas em (4.38). Isso evidencia a possibilidade da solução do problema pelos dois metodos discutidos nesse trabalho.

Nas equações (4.33) e (4.38), percebemos que as funções de Wigner correspondentes ao problema de Landau são dependentes do parâmetro θ. No entanto, um dos principais problemas do ponto de vista teórico nos modelos não comutativos é a determinação do parâmetro θ. Na maioria dos modelos tal parâmetro é arbitrário. Uma questão de grande relevância para a aceitação de modelos não-comutativos como candidatos à descrição de fenômenos físicos é, portanto, a de como o parâmtero θ possa estar relacionado as quantidades físicas observáveis [36–38].

4.2 Potencial de Liouville

Nosso objetivo aqui é resolver o problema do potencial de Liouville no espaço de fase, ou melhor, solucionar a equação de autovalores para esse potencial, buscando soluções reais. O referido potencial apresenta aplicações em diversas áreas, tais como a gravidade quântica e a teoria de cordas [39, 40]. Esse problema já foi solucionado no espaço de fase [13], no qual foi utlizado o formalismo usual da função de Wigner, ou seja, determinar tal função a partir do estado dado como solução da equação de Schroedinger. Nosso intuito é solucionar tal potencial utlizando o formalismo autocontido e baseado em uma teoria de representação, conforme já foi destacado nesse trabalho. O potencial de Liouville possui a seguinte forma $V(q) = Ae^{2q}$. Nesse caso teremos $h(q,p) = p^2 + e^{2q}$, onde tomamos $m = \frac{1}{2}$, $A = 1$ e $\hbar = 1$. A equação de autovalores a ser resolvida é

$$h(q,p) \star \psi(q,p) = (p^2 + e^{2q}) \star \psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.39}$$

Utilizando as propriedades do produto estrela, ficamos com

$$[\frac{1}{2}p^2 - \frac{i}{4}p\partial_q - \frac{1}{8}\partial_q^2 + e^{2q}e^{i\partial_p}]\psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.40}$$

Usando a identidade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, temos

$$[\frac{1}{2}p^2 - \frac{i}{4}p\partial_q - \frac{1}{8}\partial_q^2 + e^{2q}\cos\partial_p + ie^{2q}\sin\partial_p]\psi(q,p) = E\psi(q,p). \tag{4.41}$$

Separando agora a parte real da parte imaginária, temos para a parte real,

$$\frac{1}{2}p^2\psi(q,p) - \frac{1}{8}\partial_q^2\psi(q,p) + e^{2q}\cos\partial_p\psi(q,p) - E\psi(q,p) = 0 \tag{4.42}$$

e, para a parte imaginária,

$$-\frac{1}{4}p\partial_q\psi(q,p) + e^{2q}\sin\partial_p\psi(q,p) = 0. \tag{4.43}$$

Utilizando agora as identidades $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ e também o fato de que $e^{a\partial_x}f(x) = f(x+a)$, ficamos com a seguinte expressão, para a parte imaginária,

$$\frac{1}{4}p\partial_q\psi(q,p) = \frac{1}{2i}e^{2q}[\psi(q,p+i) - \psi(q,p-i)] \tag{4.44}$$

e, para a parte real,

$$e^{-2q}(p^2 - E - \frac{1}{4}\partial_q^2)\psi(q,p) = \frac{-1}{2}[\psi(q,p+i) + \psi(q,p-i)]. \tag{4.45}$$

Derivando a equação (4.44) com relação a q, obtemos

$$\partial_q^2\psi(q,p) = \partial_q\{\frac{1}{2ip}e^{2q}[\psi(q,p+i) - \psi(q,p-i)]\}, \tag{4.46}$$

e

$$\partial_q^2\psi(q,p) = \frac{1}{ip}e^{2q}[\psi(q,p+i) - \psi(q,p-i)] + \frac{1}{2ip}e^{2q}[\partial_q\psi(q,p+i) - \partial_q\psi(q,p-i)]. \tag{4.47}$$

Recorrendo novamente à equação (4.44) para substituir no último colchete da equação (4.47), temos

$$\begin{aligned}\partial_q^2\psi(q,p) &= \frac{1}{ip}e^{2q}[\psi(q,p+i) - \psi(q,p-i)] \\ &\quad -\frac{1}{4p^2}e^{4q}[\psi(q,p+2i) - 2\psi(q,p) + \psi(q,p-2i)].\end{aligned}$$

E, utilizando a equação (4.45), finalmente chegamos a

$$\begin{aligned}(E-p^2) &= \psi(q,p) + (\frac{e^{2q}}{4p})^2[\psi(q,p+2i) - 2\psi(q,p) + \psi(q,p-2i)] + \frac{i}{4p}e^{2q}[\psi(q,p+i) \\ &\quad -\psi(q,p-i)] + \frac{e^{2q}}{2}[\psi(q,p+i) + \psi(q,p-i)].\end{aligned} \tag{4.48}$$

Essa é uma equação de diferenças, cuja solução aparece na literatura [13] sob a seguinte forma:

$$\psi(q,p) = \frac{\sinh(\pi\sqrt{E})}{8\pi^3}G_{04}^{40}(\frac{e^{4q}}{16} \mid \frac{i\sqrt{E}-ip}{2}, \frac{-i\sqrt{E}-ip}{2}, \frac{i\sqrt{E}+ip}{2}, \frac{-i\sqrt{E}+ip}{2}), \tag{4.49}$$

onde a função G_{pq}^{mn} é conhecida como função de Meijer, definida por [56, 57]

$$G_{pq}^{mn} = \left(x \mid \begin{matrix} a_1, ..., a_q \\ b_1, ..., b_p \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s)\prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)}. \tag{4.50}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que a solução dada em termos da função de Meijer, equação (4.49), realmente satisfaz a equação (4.40). Para isso, antes escreveremos a equação (4.48) da seguinte forma

$$\begin{aligned}(E-p^2)\psi(q,p) &= \frac{1}{p^2}(\frac{e^{4q}}{16})[\psi(q,p+2i)-2\psi(q,p)+\psi(q,p-2i)]+\frac{i}{p}(\frac{e^{4q}}{16})^{\frac{1}{2}}[\psi(q,p+i)\\ &-\psi(q,p-i)]+2(\frac{e^{4q}}{16})^{\frac{1}{2}}[\psi(q,p+i)+\psi(q,p-i)]. \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Para simplificar a notação e facilitar os cálculos, definiremos as seguintes variáveis:

$$\frac{sinh(\pi\sqrt{E})}{8\pi^3}=K,$$
$$\frac{i\sqrt{E}-ip}{2}=a,$$
$$\frac{-i\sqrt{E}-ip}{2}=b,$$
$$\frac{i\sqrt{E}+ip}{2}=c,$$
$$\frac{-i\sqrt{E}+ip}{2}=d,$$
$$\frac{e^{4q}}{16}=x.$$

Assim, temos a seguinte solução

$$\psi(q,p)=KG^{40}_{04}(x\mid a,b,c,d). \qquad (4.52)$$

Agora, explicitaremos as correspondentes funções da equação de diferenças, tomadas em pontos adjacentes,

$$\psi(q,p+2i)=KG^{40}_{04}(x\mid a+1,b+1,c-1,d-1),$$
$$\psi(q,p-2i)=KG^{40}_{04}(x\mid a-1,b-1,c+1,d+1),$$
$$\psi(q,p+i)=KG^{40}_{04}(x\mid a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2}),$$
$$\psi(q,p-i)=KG^{40}_{04}(x\mid a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},d+\frac{1}{2}).$$

Desse modo, a equação (4.48) fica escrita da seguinte forma

$$(E-p^2)G^{40}_{04}(x\mid a,b,c,d) = (x)^2[G^{40}_{04}(x\mid a+1,b+1,c-1,d-1)$$

$$
\begin{aligned}
&-2G^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d) + G^{40}_{04}(x \mid a-1,b-1,c+1,d+1)]\\
&+\frac{i}{p}(x)^{\frac{1}{2}}[G^{40}_{04}(x \mid a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2})\\
&-G^{40}_{04}(x \mid a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},d+\frac{1}{2})]\\
&+2(x)^{\frac{1}{2}}[G^{40}_{04}(x \mid a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2})\\
&+G^{40}_{04}(x \mid a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},d+\frac{1}{2})]. \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Utilizando a propriedade da função de Meijer, dada por

$$
x^{\sigma}G^{mn}_{pq}\left(x \mid \begin{array}{c} a_r \\ b_s \end{array}\right) = G^{mn}_{pq}\left(x \mid \begin{array}{c} a_r+\sigma \\ b_s+\sigma \end{array}\right),
$$

a equação (4.48) fica da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(E-p^2)G^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d) \;=\; &[G^{40}_{04}(x \mid a+2,b+2,c,d) - 2G^{40}_{04}(x \mid a+1,b+1,c+1,d+1)\\
&+G^{40}_{04}(x \mid a,b,c+2,d+2)] + \frac{i}{p}[G^{40}_{04}(x \mid a+1,b+1,c,d)\\
&-G^{40}_{04}(x \mid a,b,c+1,d+1)] + 2[G^{40}_{04}(x \mid a+1,b+1,c,d)\\
&+G^{40}_{04}(x \mid a,b,c+1,d+1)]. \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

Usando agora uma outra propriedade da função de Meijer, dada por [56, 57]

$$
(1-a_1+b_1)G^{mn}_{pq}\left(x \mid \begin{array}{c} a_1,...,a_p \\ b_1,...,b_q \end{array}\right) = G^{mn}_{pq}\left(x \mid \begin{array}{c} a_1-1,...,a_p \\ b_1,...,b_q \end{array}\right) + G^{mn}_{pq}\left(x \mid \begin{array}{c} a_1,...,a_p \\ b_1+1,...,b_q \end{array}\right),
$$

temos que

$$
G^{40}_{04}(x \mid a+2,b+2,c,d) = a^2b^2G^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d),
$$

$$
G^{40}_{04}(x \mid a,b,c+2,d+2) = c^2d^2G^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d),
$$

$$
G^{40}_{04}(x \mid a+1,b+1,c+1,d+1) = abcdG^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d),
$$

$$
G^{40}_{04}(x \mid a+1,b+1,c,d) = abG^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d),
$$

$$
G^{40}_{04}(x \mid a,b,c+1,d+1) = cdG^{40}_{04}(x \mid a,b,c,d).
$$

Como $a^2b^2 = c^2d^2 = abcd$ e $ab = cd = \frac{-1}{4}(-E+p^2)$, fica claro que o segundo e o terceiro colchetes da equação de diferenças são identicamente nulos. Assim

$$
\begin{aligned}
(E-p^2) &= G_{04}^{40}(x \mid a,b,c,d) + 2[\frac{-1}{4}(-E+p^2)G_{04}^{40}(x \mid a,b,c,d) \\
&\quad + \frac{-1}{4}(-E+p^2)G_{04}^{40}(x \mid a,b,c,d)],
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

mostrando que a solução da equação de diferenças é realmente da forma dada na equação (4.49).

Nesse caso a solução para o potencial de Liouville, em termos da amplitude no espaço de fase, é dada na equação (4.49) e a respectiva função de Wigner é dada por

$$
f_w(q,p) = \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p). \tag{4.56}
$$

Os comportamentos da amplitude e da respectiva função de Wigner podem ser comparados por meio dos gráficos dados na figuras (7-12).

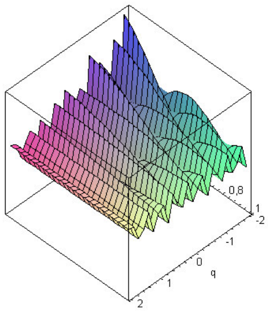

Figura 7: Amplitude para o potencial de Liouville, E=49

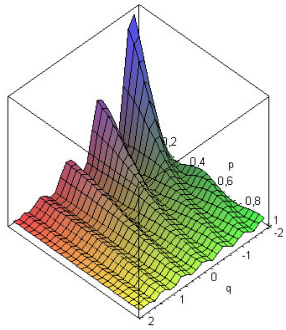

Figura 8: Função de Wigner para o potencial de Liouville, E=49

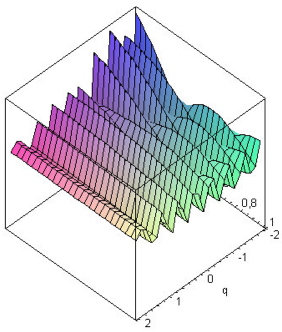

Figura 9: Amplitude para o potencial de Liouville, E=64

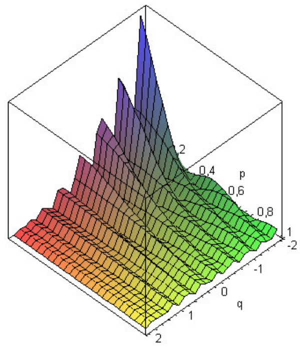

Figura 10: Função de Wigner para o potencial de Liouville, E=64

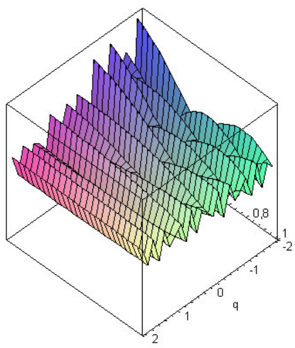

Figura 11: Amplitude para o potencial de Liouville, E=144

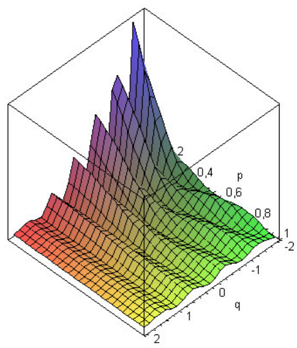

Figura 12: Função de Wigner para o potencial de Liouville, E=144

4.3 Oscilador Quártico

Nessa seção, estudaremos a equação de Schroedinger no espaço de fase para o oscilador harmônico submetido à perturbação, que, neste caso, será dada pelo potencial quártico. Nosso objetivo aqui é solucionar a equação de Schroedinger, encontrando as amplitudes no espaço de fase e, posteriormente, as respectivas funções de Wigner para esse problema. O problema do oscilador harmônico submetido a um potencial quártico é também conhecido na literatura como oscilador anarmônico. Esse problema apresenta diversas aplicações, dentre as quais, destacamos as seguintes: na teoria de campo cristalino para o cálculo de susceptibilidades magnéticas de sais de níquel, cromo, ferro e cobalto [41, 42]; no formalismo de cosmologia quântica, modelos de Friedmann-Robertson-Walker na presença de constante cosmológica negativa e radiação, a quantização do modelo leva a equações WD, que possuem a forma da equação de Schroedinger para o oscilador anarmônico [43]; no problema de órbitas periódicas em sistemas caóticos [44] e também em sistemas quânticos caóticos [45].

4.3.1 O Hamiltoniano Quártico

O hamiltoniano para o potencial oscilador harmônico é escrito da seguinte forma,

$$\widehat{H}_0 = \frac{1}{2m}\widehat{P}^2 + m\omega^2\widehat{Q}^2,$$

em que os operadores posição e momentum que aparecem aqui são dados segundo as equações (3.10) e (3.11). O hamiltoniano para o oscilador anarmônico é dado por

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{P}^2 + m\omega^2\widehat{Q}^2 + \widehat{Q}^4. \tag{4.57}$$

Se escrevermos $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$ em termos dos operadores de aniquilação e criação, dados por [7],

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\widehat{Q} + \frac{i}{m\omega}\widehat{P}), \tag{4.58}$$

e

$$\widehat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\widehat{Q} - \frac{i}{m\omega}\widehat{P}), \tag{4.59}$$

obtemos o correspondente hamiltoniano

$$\widehat{H} = \hbar\omega(\widehat{A}\widehat{A}^\dagger - \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(\widehat{A} + \widehat{A}^\dagger)^4. \tag{4.60}$$

Os operadores $\widehat{A}$ e $\widehat{A}^\dagger$ satisfazem a seguinte relação de comutação,

$$[\widehat{A}, \widehat{A}^\dagger] = 1,$$

e $\widehat{H}_0 = \hbar\omega(\widehat{A}\widehat{A}^\dagger - \frac{1}{2})$.

A aplicação desses operadores de aniquilação e criação numa autofunção do oscilador harmônico no espaço de fase não submetido à perturbação, que representaremos por $\psi_n^{(0)}(q,p)$, nos fornece as seguintes relações:

$$\psi_n^{(0)}(q,p) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{A}^\dagger)^n \psi_0^{(0)}(q,p), \tag{4.61}$$

e, ainda,

$$\widehat{A}\psi_n^{(0)}(q,p) = \sqrt{n}\psi_{n-1}^{(0)}(q,p), \tag{4.62}$$

$$\widehat{A}^\dagger\psi_n^{(0)}(q,p) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}^{(0)}(q,p). \tag{4.63}$$

Outra forma de se escrever os operadores de criação e aniquilação é a seguinte:

$$\widehat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}[(q + \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p) + \frac{i}{m\omega}(p - \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_q)]$$

e

$$\widehat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}[(q + \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p) - \frac{i}{m\omega}(p - \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_q)],$$

conforme estudado na referência [7].

4.3.2 Teoria de Perturbação

Para solucionar a equação de Schroedinger no espaço de fase submetida ao potencial quártico, tomaremos, como base, a teoria de perturbação de primeira ordem. A função de onda com o sobrescrito zero é correspondente ao autoestado do problema do oscilador harmônico não perturbado.

Assim, tomaremos a equação de Schroedinger no espaço de fase para o oscilador harmônico sem perturbação,

$$\widehat{H}_0\psi_n^{(0)}(q,p) = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}(q,p), \tag{4.64}$$

e sujeitaremos o oscilador a uma perturbação do tipo $V(\widehat{Q}) = \lambda\widehat{Q}^4$, onde λ é um parâmetro pequeno. Por outro lado, se $\psi_n(q,p)$ for a função de onda do sistema perturbado, temos

$$\widehat{H}\psi_n(q,p) = (\widehat{H}_0 + \lambda V)\psi_n(p,q) = E_n\psi_n(q,p). \tag{4.65}$$

No entanto, se conhecemos as funções de onda $\psi_n^{(0)}$, podemos calcular um valor aproximado para ψ_n e E_n, por meio da teoria de perturbação. Para esse fim, suponha que ψ_n e E_n possam ser escritos como

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda\psi_n^{(1)} \tag{4.66}$$

e

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)}, \tag{4.67}$$

onde $\psi_n^{(1)}$ é a correção de primeira ordem para a função de onda para o sistema não perturbado e $E_n^{(1)}$ é a correção de primeira ordem para a energia do sistema não perturbado.

Se substituirmos as equações (4.66) e (4.67) na equação (4.65), utilizarmos a equação (4.64) e, ainda, desprezarmos os termos quadráticos em λ, já que este último é um parâmetro pequeno, obtemos

$$(\widehat{H}_n^{(0)} - E_n^{(0)})\psi_n^{(1)} = (E_n^{(1)} - V)\psi_n^{(0)}. \tag{4.68}$$

Podemos expandir $\psi_n^{(1)}$ em termos das funções de onda do sistema não perturbado da seguinte forma:

$$\psi_n^{(1)} = \sum_k a_k\psi_k^{(0)}. \tag{4.69}$$

Se substituirmos a equação (4.69) na equação (4.68), multiplicarmos ambos os membros por $\psi_m^{(0)\dagger}$ e integrarmos em todo o espaço de fase, obtemos

$$\sum_k a_k(E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) \int \psi_m^{(0)\dagger} \star \psi_k^{(0)} dqdp = \int \psi_m^{(0)\dagger}(E_n^{(1)} - V)\psi_n^{(0)} dqdp. \tag{4.70}$$

Se assumirmos que as funções de onda do sistema não perturbado são ortogonais, isto é,

$$\int \psi_m^{(0)\dagger} \star \psi_n^{(0)} dqdp = \delta_{mn},$$

então a equação (4.70) pode ser escrita como

$$a_m(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) = E_n^{(1)}\delta_{mn} - \int \psi_m^{(0)\dagger} V \psi_n^{(0)} dqdp. \tag{4.71}$$

Agora, temos dois casos a considerar, quais sejam, isto é, quando $m = n$ e quando $m \neq n$. Para $m = n$, a equação (4.71) nos fornece a correção de primeira ordem para a energia do sistema não perturbado, que é igual a

$$E_n^{(1)} = \int \psi_n^{(0)\dagger} V \psi_n^{(0)} dqdp = \langle V \rangle. \tag{4.72}$$

Para $m \neq n$, a equação (4.71) nos fornece

$$a_m = \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} V \psi_n^{(0)} dqdp}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})}. \tag{4.73}$$

Se fizermos uso da equação (4.69) e trocarmos o índice k por m, podemos escrever

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger} V \psi_n^{(0)} dqdp}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}. \tag{4.74}$$

Finalmente, chegamos à conclusão que, em primeira aproximação, a função de onda ψ_n do sistema perturbado pode ser escrita como

$$\psi_n(q,p) = \psi_n^{(0)}(q,p) + \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger}(q,p) V \psi_n^{(0)}(q,p) dqdp}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}(q,p). \tag{4.75}$$

4.3.3 Amplitudes e Funções de Wigner

Agora, podemos voltar ao problema do oscilador anarmônico e utilizar o resultado da última seção para calcular as funções de onda para o potencial quártico no espaço de fase. Precisamos calcular a seguinte expressão:

$$\psi_n(q,p) = \psi_n^{(0)}(q,p) + \sum_{m \neq n} \frac{\int \psi_m^{(0)\dagger}(q,p) \widehat{Q}^4 \psi_n^{(0)}(q,p) dqdp}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}(q,p). \tag{4.76}$$

Para efetuar tal cálculo, utilizaremos os operadores de aniquilação e criação dados nas equações (4.58) e (4.59), juntamente com as relações dadas nas equações (4.62) e (4.63). Com isso, obtemos a seguinte expressão para a correção em primeira ordem da função de onda para o oscilador anarmônico no espaço de fase (fizemos aqui $\hbar = \omega = m = 1$):

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(q,p) \;=\; & \frac{1}{8}[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{2}\psi_{n-4}^{(0)} + (\sqrt{n(n-1)^3} + \sqrt{n(n-1)(n-2)^2} \\ & + \sqrt{n^3(n-1)})\psi_{n-2}^{(0)} - (\sqrt{n^2(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)(n+1)^3} \\ & + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)^2} + \sqrt{n(n+2)^3})\psi_{n+2}^{(0)} \\ & - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{2}\psi_{n+4}^{(0)}]. \end{aligned} \tag{4.77}$$

E a função de onda para o potencial anarmônico no espaço de fase fica escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi_n(q,p) \;=\; & \psi_n^{(0)} + \frac{1}{8}[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{2}\psi_{n-4}^{(0)} + (\sqrt{n(n-1)^3} + \sqrt{n(n-1)(n-2)^2} \\ & + \sqrt{n^3(n-1)})\psi_{n-2}^{(0)} - (\sqrt{n^2(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)(n+1)^3} \end{aligned}$$

$$+\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)^2}+\sqrt{n(n+2)^3})\psi^{(0)}_{n+2}$$
$$-\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{2}\psi^{(0)}_{n+4}]. \tag{4.78}$$

Obtemos as correspondentes funções de Wigner por meio da seguinte expressão:

$$f_W(q,p) = \psi_n(q,p) \star \psi^{\dagger}_n(q,p). \tag{4.79}$$

O comportamento, tanto das amplitudes quanto das funções de Wigner, pode ser observado por meio dos gráficos apresentados nas figuras (13-18).

4.4 O Diamagnetismo de Landau

Nesta seção, calculamos a função partição de um sistema constituído de elétrons que se movimentam na presença de um campo magnético perpendicular ao plano do movimento. Para efetuar os cálculos, usamos os estados $\star$-coerentes e suas propriedades. Estruturamos o problema no espaço de fase quântico. Como resultado, determinamos o diamagnetismo de Landau.

A equação de Schroedinger no espaço de fase [7], para um elétron se movendo em um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, quando negligenciamos o spin, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\star + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2\psi_n(q,p) = E\psi_n(q,p). \tag{4.80}$$

Utilizaremos o campo magnético na direção z, isto é, $\mathbf{B} = (0,0,B)$ e também os operadores

$$\widehat{P}_j = p_j\star = p_j - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q_j} \tag{4.81}$$

e

$$\widehat{Q}_i = q_j\star = q_j + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_j}. \tag{4.82}$$

Usaremos ainda a convenção: $p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$ e $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$.

Efetuando o cálculo do rotacional e escolhendo um calibre para o campo externo, encontramos os seguintes resultados: $A_x = \frac{-B}{2}y$ e $A_y = \frac{B}{2}x$. Com isso, o hamiltoniano fica dado por,

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}[(p_x\star - \frac{eB}{2c}y\star)^2 + (p_y\star + \frac{eB}{2c}x\star)^2]. \tag{4.83}$$

Se definirmos $\omega = \frac{eB}{mc}$, temos

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m\hbar\omega}[(p_x \star - \frac{m\omega}{2}y\star)^2 + (p_y \star + \frac{m\omega}{2}x\star)^2]. \tag{4.84}$$

Podemos definir agora os seguintes operadores:

$$\widehat{a} = a\star = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}[(p_x \star - \frac{eB}{2c}y\star) - i(p_y \star + \frac{eB}{2c}x\star)], \tag{4.85}$$

e

$$\widehat{a^\dagger} = a^\dagger\star = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}[(p_x \star - \frac{eB}{2c}y\star) + i(p_y \star + \frac{eB}{2c}x\star)]. \tag{4.86}$$

Esses operadores satisfazem a seguinte relação de comutação: $[\widehat{a}, \widehat{a^\dagger}] = 1$. Utilizando tais operadores, o hamiltoniano pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\widehat{H} = \hbar\omega(\widehat{a^\dagger}\widehat{a} + \frac{1}{2}). \tag{4.87}$$

4.4.1 Estados $\star$-Coerentes

Os estados $\star$-coerentes são definidos por meio da equação de autovalores para o operador de destruição, isto é,

$$a \star \phi_\alpha = (\frac{\hbar}{2m\omega})^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{il^2}\phi_\alpha. \tag{4.88}$$

Dessa forma, fica evidente que $\phi_0 = \psi_0(q, p)$. A construção dos estados $\star$-coerentes segue a referência [7].

Para nossa proposta, é suficiente considerar o estado coerente normalizado

$$\phi_\alpha = exp_\star(\frac{-|\alpha|^2}{4l^2} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a) \star \phi_0, \tag{4.89}$$

onde $l = (\frac{\hbar}{m\omega})^{\frac{1}{2}}$.

Também podemos escrever o operador-estrela de deslocamento,

$$D_\alpha = e_\star^{\alpha a^\dagger - \alpha^\dagger a}, \tag{4.90}$$

que é definido de modo a satisfazer

$$D_\alpha \star \phi_\eta = \phi_{\alpha+\eta}. \tag{4.91}$$

Na sequência, temos que os estados $\star$-coerentes satisfazem as seguintes relações

$$|(\phi_\alpha, \phi_\beta)| = e^{-|\alpha-\beta|^2}, \tag{4.92}$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int \phi_\alpha \star \phi_\alpha^\dagger d^2\alpha = 1. \tag{4.93}$$

4.4.2 Função Partição

Agora procederemos ao cálculo da função partição, pois é por meio desta ferramenta que determinaremos a susceptibilidade magnética para o esse problema. O procedimento utilizado aqui é análogo ao da referência [46]. A função partição é definida da maneira usual, isto é,

$$Z = Tre^{-\beta\widehat{H}}. \tag{4.94}$$

Se escrevermos a função partição em termos do hamiltoniano do nosso problema e representarmos a integral por meio de estados $\star$-coerentes [47], temos

$$Z = \int \frac{d^2\alpha}{2\pi l}\phi_\alpha^\dagger \star e^{-\hbar\beta(\widehat{a^\dagger}\widehat{a}+\frac{1}{2})} \star \phi_\alpha. \tag{4.95}$$

Podemos notar que somente a parte do hamiltoniano que é transversa ao campo magnético contribui para o cálculo da energia livre, pois a parte paralela independe do campo magnético **B**. Para calcular essa integral, utilizaremos a seguinte identidade:

$$e^{xa^\dagger\star a\star} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^x-1)^n}{n!}a^{\dagger n}\star a^n\star, \tag{4.96}$$

onde a e $a^\dagger$ devem satisfazer $[a, a^\dagger] = 1$. Dessa forma, a função partição pode ser reescrita como

$$Z = e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}\int \frac{d^2\alpha}{2\pi l}\phi_\alpha^\dagger \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{\hbar\omega\beta}-1)^n}{n!}a^{\dagger n}\star a^n \star \phi_\alpha. \tag{4.97}$$

Utilizando a relação explicitada na equação (4.88), a equação (4.92) e as propriedades do produto estrela, podemos escrever

$$Z = e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}\int \frac{d^2\alpha}{2\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-\hbar\beta\omega}-1)}{n!}|\alpha|^{2n} \tag{4.98}$$

e, ainda,

$$Z = e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}\int_0^\infty 2\pi|\alpha|d|\alpha|\exp\left[-|\alpha|^2(1-e^{-\hbar\beta\omega})\right]. \tag{4.99}$$

Se utilizarmos a identidade $\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$, chegamos a

$$Z = e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}\frac{1}{(1-e^{-\hbar\beta\omega})}. \tag{4.100}$$

Um pouco de álgebra nos fornece, finalmente,

$$Z = \frac{1}{\sinh(\frac{\hbar\beta\omega}{2})}. \tag{4.101}$$

A energia livre pode ser calculada usando $F = -\frac{n}{\beta}\ln(Z)$. Utilizando essa relação, obtemos

$$F = \frac{n}{\beta}\ln(\sinh(\frac{\hbar\beta\omega}{2})). \tag{4.102}$$

A magnetização é calculada por $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$. Isso resulta em

$$M = -\frac{ne\hbar}{2mc}\coth(\frac{\hbar\beta\omega}{2}). \tag{4.103}$$

E a susceptibilidade magnética é obtida usando $\chi = -\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial B}$, do qual temos

$$\chi = -(\frac{e\hbar}{2mc})^2\beta\frac{1}{\sinh^2(\frac{\hbar\beta\omega}{2})}. \tag{4.104}$$

Sabendo que a série de potências da função seno hiperbólico até a segunda ordem é dada por $\sinh x = x + 1/3!x^3$, podemos escrever

$$\chi = -(\frac{e\hbar}{2mc})^2\beta\frac{1}{x^2(1+\frac{x^2}{3!})^2}, \tag{4.105}$$

onde $x = \frac{\hbar\omega\beta}{2}$. Utilizando agora a aproximação $(1+y)^{-n} = 1 - n\frac{y}{1!}$, podemos escrever, ainda,

$$\chi = -(\frac{e\hbar}{2mc})^2\beta(\frac{1}{(\frac{\hbar\omega\beta}{2})^2} - \frac{1}{3}). \tag{4.106}$$

Se tomarmos o limite $\beta \to \infty$, chegamos finalmente a

$$\chi = -\frac{1}{3}(\frac{e\hbar}{2mc})^2\beta. \tag{4.107}$$

Esse é o valor correto para o diamagnetismo de Landau, conforme aparece na literatura [48, 49].

No próximo capítulo, extrapolaremos o nosso formalismo para o escopo relativístico. Mediante representações do grupo de Poincaré, utilizando operadores-estrela, escreveremos as equações de Dirac e de Klein-Gordon no espaço de fase. Também iniciaremos nosso estudo da teoria de campos a partir dessas representações.

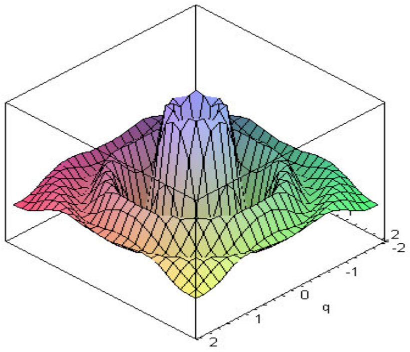

Figura 13: Amplitude para o potencial Quártico, n=4

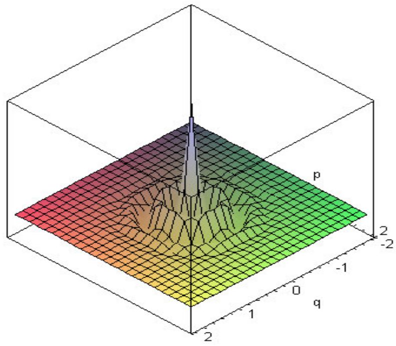

Figura 14: Função de Wigner para o potencial Quártico, n=4

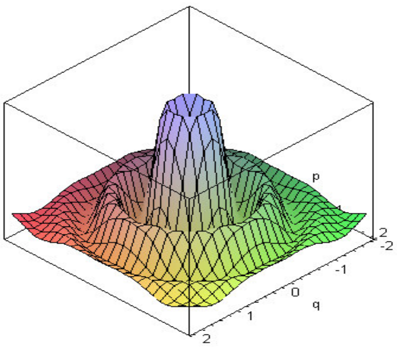

Figura 15: Amplitude para o potencial Quártico, n=5

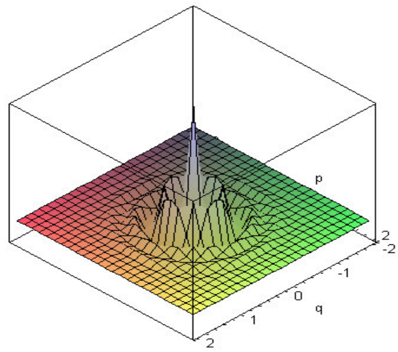

Figura 16: Função de Wigner para o potencial Quártico, n=5

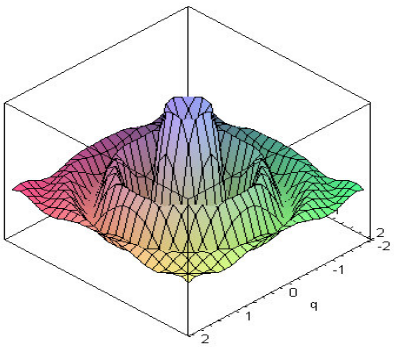

Figura 17: Amplitude para o potencial Quártico, n=6

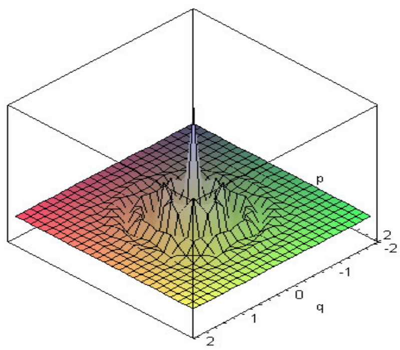

Figura 18: Função de Wigner para o potencial Quártico, n=6

5 Variedade Simplética e o Grupo de Poincaré

Neste capítulo, definiremos um conjunto de operadores-estrelas para construir representações unitárias do grupo de Poincaré num espaço de Hilbert, associado a uma variedade simplética, e, como consequência, derivaremos as equações de Klein-Gordon e de Dirac, escritas no espaço de fase. Também trataremos do teorema de Noether, campos em interação e simetrias de calibre no escopo do espaço de fase. Os resultados apresentados neste capítulo constituem nosso recente trabalho, mencionado na referência [27]

5.1 Estrutura simplética e espaço de Hilbert

Considere um espaço de fase $2N$-dimensional como uma variedade Γ, definida por meio da 2-forma,

$$\omega = dq^{\mu} \wedge dp_{\mu}, \tag{5.1}$$

chamada forma simplética. Essa forma simplética, em conjunto com o operador

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^{\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^{\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_{\mu}}, \tag{5.2}$$

induz o parentêses de Poisson,

$$\{f, g\} = \omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g, \tag{5.3}$$

onde

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^{\mu}} \frac{\partial g}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p^{\mu}} \frac{\partial g}{\partial q_{\mu}}. \tag{5.4}$$

e ($f = f(q^{\mu}, p^{\mu})$ e $g = g(q^{\mu}, p^{\mu})$). Estamos usando $\mu = 0, 1, 2, 3$ e a métrica dada por $-g^{00} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ e $g^{\mu\nu} = 0$ ($\mu \neq \nu$). Os campos vetoriais sobre Γ são dados por

$$X_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}. \tag{5.5}$$

Já o espaço das funções $f(q^\mu, p^\mu)$ C^∞ é chamado de espaço de fase relativístico e denotado por Γ.

Iremos introduzir um espaço de Hilbert associado ao espaço de fase Γ relativístico, considerando o conjunto de funções complexas de quadrado integrável, $\psi(q,p)$ em Γ, tal que

$$\int d^4pd^4q\psi^\dagger(q,p)\psi(q,p) < \infty, \tag{5.6}$$

é uma forma bilinear real. Nesse caso, podemos escrever $\psi(q,p) = \langle q,p|\psi\rangle$, com

$$\int d^4pd^4q|q,p\rangle\langle q,p| = 1, \tag{5.7}$$

tal que

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int d^4pd^4q\psi^\dagger(q,p)\phi(q,p), \tag{5.8}$$

sendo $\langle\psi|$ um vetor dual de $|\psi\rangle$. Vamos denominar este espaço de Hilbert por $H(\Gamma)$. Na sequência vamos deduzir uma representação do grupo de Poincaré a partir de $H(\Gamma)$.

5.2 A álgebra de Lie do grupo de Poincaré

A álgebra de Lie do grupo de Poincaré é dada por

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu), \tag{5.9}$$

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0, \tag{5.10}$$

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}), \tag{5.11}$$

onde $\widehat{M}_{\mu\nu}$ são geradores de rotações e $\widehat{P}_\mu$ de translações.

Os invariantes de Cassimir da álgebra de Poincaré são dados por $C_1 = P^2 = \widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu = m^2$ e $C_2 = \widehat{W}_\mu \widehat{W}^\mu = -m^2 s(s+1)$, onde $\widehat{W}_\mu$ é o pseudovetor de Pauli-Lubanski, $\widehat{W}_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{M}^{\nu\rho}\widehat{P}^\sigma$. A massa corresponde ao primeiro invariante. Já o segundo invariante é referente ao spin da partícula.

As representações escalares para esta álgebra são construídas aqui pela definição,

$$\widehat{M}_{\nu\sigma} = \widehat{Q}_\nu \widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma \widehat{P}_\nu, \tag{5.12}$$

sendo ainda válida a relação de comutação

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = ig_{\mu\nu}. \tag{5.13}$$

A representação simplética para a álgebra de Poincaré é obtida a partir dos operadores dados por

$$\widehat{P}^\mu = p^\mu \star = p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}, \tag{5.14}$$

$$\widehat{Q}^\mu = q^\mu \star = q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}, \tag{5.15}$$

definidos no espaço de Hilbert $H(\Gamma)$.

Nossa tarefa agora é mostrar que os operadores-estrela definidos pelas equações (5.12), (5.14) e (5.15) satisfazem à álgebra de Lie do grupo de Poincaré. Procedendo assim, teremos os fundamentos da construção da teoria dos campos relativísticos no espaço de fase.

- Equação (5.13)

Iniciaremos as demonstrações pela relação de comutação

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = ig_{\mu\nu},$$

que será muito útil nas demonstrações da demais relações de comutação.

Demonstração

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = \widehat{Q}_\mu \widehat{P}_\nu - \widehat{P}_\nu \widehat{Q}_\mu.$$

Aplicando o comutador em uma função $f(q,p) \equiv f$ e utilizando as equações (5.14)-(5.15), temos

$$\begin{aligned}
[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f &= (q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu})(p^\nu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\nu})f - ((p^\nu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\nu})(q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu})f \\
&= q^\mu p^\nu - \frac{iq^\mu}{2}\frac{\partial f}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2}\frac{\partial(p^\nu f)}{\partial p_\mu} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial q_\nu} - p^\nu q^\mu - \frac{i}{2}\frac{p^\nu \partial f}{\partial p_\mu} \\
&\quad + \frac{i}{2}\frac{\partial(q^\mu f)}{\partial q_\nu} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial p_\mu}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de a função f ser contínua e diferenciável e, ainda, utilizando a métrica para subir e descer índices, chegamos a

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = [q^\mu, p^\nu]f + \frac{i}{2} f g^{\rho\mu}\frac{\partial q_\rho}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2} f g^{\rho\nu}\frac{\partial p_\rho}{\partial p_\mu}.$$

Como $[q^\mu, p^\nu] = 0$, resta-nos o seguinte:

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = \frac{i}{2} f g^{\rho\nu}\delta^\mu_\rho + \frac{i}{2} f g^{\rho\mu}\delta^\nu_\rho = i f g^{\mu\nu}.$$

Ou seja,

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = i g_{\mu\nu},$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.10)

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0.$$

Demonstração

Substituindo na equação (5.10) o operador dado na equação (5.14) e aplicando o comutador numa função $f \equiv f(q,p)$ suposta contínua e diferenciável, temos

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = (p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu})(p^\nu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\nu})f - (p^\nu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\nu})(p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu})f.$$

Desenvolvendo essa expressão, chegamos a

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = (p_\mu p_\nu)f - \frac{i}{2}\frac{\partial(p^\mu f)}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2}\frac{\partial(p^\mu f)}{\partial q_\nu} - \frac{i}{2}\frac{\partial(p^\nu f)}{\partial q_\mu} + \frac{i}{2}\frac{\partial(p^\nu f)}{\partial q_\mu} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial q_\mu} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu}.$$

Como sabemos que $[p_\mu, p_\nu] = 0$, então,

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0,$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.9)

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu).$$

Demonstração

Para demonstrar essa relação de comutação, utilizaremos a equação (5.12) e a propriedade distributiva da comutação. Temos então

$$\begin{aligned}
[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma] \\
&= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma] \\
&= [\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu + \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu - \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma].
\end{aligned}$$

Utilizando as equações (5.10) e (5.14), ficamos com

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\sigma\mu}P_\nu),$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.11)

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}).$$

Demonstração

Para demonstrar essa relação de comutação, utilizaremos a equação (5.12) e a propriedade distributiva da comutação. Usando $\widehat{M}_{\nu\sigma} = \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\nu$, temos então

$$\begin{aligned}
[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] \\
&= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] \\
&= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho] - [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho] + [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma].
\end{aligned}$$

E, ainda,

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\nu + \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{Q}_\rho] - [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]$$

$$-[\widehat{Q}_\nu,\widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\mu-\widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu,\widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]+[\widehat{Q}_\nu,\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu+\widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu,\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma].$$

Utilizando novamente a propriedade distributiva da comutação, obtemos

$$\begin{aligned}[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{M}_{\sigma\rho}] &= \widehat{Q}_\sigma[\widehat{Q}_\mu,\widehat{P}_\rho]\widehat{Q}_\nu+[\widehat{Q}_\mu,\widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\nu+\widehat{Q}_\sigma\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu,\widehat{P}_\rho]\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu,\widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho\\ &-\widehat{Q}_\rho[\widehat{Q}_\mu,\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu-[\widehat{Q}_\mu,\widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\sigma-\widehat{Q}_\rho\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu,\widehat{P}_\sigma]-\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu,\widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma\\ &-\widehat{Q}_\sigma[\widehat{Q}_\nu,\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\mu-[\widehat{Q}_\nu,\widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\mu-\widehat{Q}_\nu\widehat{Q}_\sigma[\widehat{P}_\mu,\widehat{P}_\rho]-\widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu,\widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho\\ &+\widehat{Q}_\rho[\widehat{Q}_\nu,\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu+[\widehat{Q}_\nu,\widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma\widehat{P}_\mu+\widehat{Q}_\nu\widehat{Q}_\rho[\widehat{P}_\mu,\widehat{P}_\sigma]+\widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu,\widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma.\end{aligned}$$

Utilizando as relações $[\widehat{P}_\mu,\widehat{P}_\nu]=0$,$[\widehat{Q}_\mu,\widehat{Q}_\nu]=0$ e $[\widehat{Q}_\mu,\widehat{P}_\nu]=ig_{\mu\nu}$, temos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{M}_{\sigma\rho}]=ig_{\mu\rho}(\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\sigma-\widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\nu)-ig_{\nu\rho}(\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\sigma-\widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\mu)+ig_{\mu\sigma}(\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\nu-\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\rho)-ig_{\nu\sigma}(\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\mu-\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\rho).$$

O que finalmente nos fornece

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{M}_{\sigma\rho}]=-i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma}-g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu}-g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}),$$

como queríamos demonstrar.

Tendo demonstrado as relações de comutação que definem a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, podemos mostrar que $P^2=\widehat{P}_\mu\widehat{P}^\mu$ é um invariante dessa álgebra. Se P^2 é um invariante, logo ele deve comutar com os geradores da álgebra. Obviamente, P^2 comuta com $\widehat{P}_\mu$, resta-nos mostrar que ele também comuta com $\widehat{M}_{\mu\nu}$. Nesse caso, utilizando a propriedade distributiva da comutação, temos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},P^2]=\widehat{P}_\sigma[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{P}^\sigma]+[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}^\sigma.$$

Se fizermos uso da métrica para descer alguns índices, obtemos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},P^2]=g^{\rho\sigma}\widehat{P}_\rho[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{P}_\sigma]+g^{\rho\sigma}[\widehat{M}_{\mu\nu},\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\sigma.$$

Utilizando a equação (5.10), temos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},P^2]=g^{\rho\sigma}\widehat{P}_\rho i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_\mu-g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu)+g^{\rho\sigma}i(g_{\nu\rho}\widehat{P}_\mu-g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu)\widehat{P}_\sigma.$$

Distribuindo os produtos e observando que $g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu}=\delta^\rho_\nu$, chegamos a

$$[\widehat{M}_{\mu\nu},P^2]=i\delta^\rho_\nu\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\mu-i\delta^\rho_\mu\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\nu+i\delta^\sigma_\nu\widehat{P}_\mu\widehat{P}_\sigma-i\delta^\sigma_\mu\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\sigma.$$

Após manipularmos as deltas (efetuarmos as somas), obtemos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = i\widehat{P}_\nu \widehat{P}_\mu - i\widehat{P}_\mu \widehat{P}_\nu + i\widehat{P}_\mu \widehat{P}_\nu - i\widehat{P}_\nu \widehat{P}_\mu.$$

E finalmente encontramos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = 0.$$

Assim, fica claro que os operadores-estrela definidos aqui determinam uma representação do grupo de Poincaré. Nas próximas seções, faremos uso desta álgebra para escrever as equações de movimento para campos relativísticos.

5.3 A Equação de Klein-Gordon no Espaço de Fase

Estamos em condições de escrever uma equação de onda para uma partícula escalar, que possui apenas uma componente que denotaremos por ψ. A equação de onda é obtida a partir do primeiro invariante desta álgebra, que é relacionado com a camada de massa[1]. Assim, podemos escrever

$$\widehat{P}^2\psi = \widehat{P}^\mu \widehat{P}_\mu \psi = m^2\psi. \tag{5.16}$$

Substituindo na equação (5.16) o operador dado na equação (5.15), obtemos

$$(p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu})(p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu})\psi = m^2\psi. \tag{5.17}$$

O que nos fornece

$$\frac{-1}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - ip^\mu \frac{\partial\psi}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2)\psi = 0, \tag{5.18}$$

que é a equação de Klein-Gordon no espaço de fase. Essa equação possui uma solução de partícula livre dada por

$$\psi(q_\mu, p_\mu) = \xi(p_\mu)e^{-i4p^\mu q_\mu}, \tag{5.19}$$

onde $\xi(p_\mu)$ é uma função que depende das condições de contorno.

A equação de Klein-Gordon, equação (5.18), pode ser deduzida a partir da densidade lagrangiana

$$\pounds = \frac{-1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial q^\mu}) - (p^\mu p_\mu - m^2)\psi\psi^*, \tag{5.20}$$

[1]É importante lembrar que $\psi = \psi(q,p)$

onde se utilizarmos as equações de Euler-Lagrange para campos, obtemos a equação esperada.

Podemos fazer a associação do estado $\psi(q,p)$ com a função de Wigner $f_W(q,p)$. Mostraremos que a função definida por

$$f_W(q,p) = \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p) \tag{5.21}$$

é a função de Wigner. Assim, começaremos nossa demonstração escrevendo a equação de Klein-Gordon no espaço de fase como

$$p^2 \star \psi(q,p) = m^2 \psi(q,p). \tag{5.22}$$

Multiplicando a equação (5.22) a direita por $\psi^\dagger$, obtemos

$$(p^2 \star \psi(q,p)) \star \psi^\dagger(q,p) = m^2 \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p). \tag{5.23}$$

Tomando o complexo conjugado da equação (5.22) e multiplicando a esquerda por ψ, chegamos a

$$\psi(q,p) \star (\psi^\dagger(q,p) \star p^2) = m^2 \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p). \tag{5.24}$$

Subtraindo as equações (5.23) e (5.24) e utilizando a propriedade associativa do produto estrela, temos

$$p^2 \star f_W - f_W \star p^2 = 0,$$

em que a notação $f_W(q,p) = \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)$ foi usada.

Se utilizarmos os parênteses de Moyal e o fato que $\{g,f\}_M = g(2sen\frac{i\Lambda}{2})f$, podemos escrever a equação (5.24) como

$$\{p^2, f_W\}_M = p_\mu \frac{\partial f_W}{\partial q_\mu} = 0, \tag{5.25}$$

onde usamos $p^2\Lambda = -2p\partial_q$, $p^2\Lambda^2 = 2\partial_q^2$ e $p^2\Lambda^3 = 0$. A solução para a equação (5.25) é a função de Wigner relativística.

5.4 Equação de Dirac no Espaço de Fase

Iremos considerar uma representação para partículas de spin $\frac{1}{2}$. Para isso, introduzimos o operador $\gamma^\mu \widehat{P}_\mu$, onde $\widehat{P}_\mu$ é definido na equação (5.14). Escrevemos então

$$\gamma^\mu \widehat{P}_\mu \psi = \gamma^\mu p_\mu \star \psi = m\psi. \tag{5.26}$$

Utilizando a equação (5.14) chegamos a

$$\gamma^\mu (p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu})\psi = m\psi, \tag{5.27}$$

que é a equação de Dirac no espaço de fase.

Sabemos que as soluções da equação de Dirac devem ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Iremos então aplicar um operador na equação de Dirac, de modo a torná-la uma equação de segunda ordem. Nesse caso, temos

$$(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu)(\gamma^\nu \widehat{P}_\nu)\psi = m^2\psi. \tag{5.28}$$

Se utilizarmos a equação (5.14), chegamos a

$$\gamma^\mu (p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu})\gamma^\nu (p_\nu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^{nu}})\psi = m^2\psi. \tag{5.29}$$

E, ainda, temos que

$$(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu)(\gamma^\nu \widehat{P}_\nu) = \widehat{P}_\mu \widehat{P}_\mu = P^2, \tag{5.30}$$

$$(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu)(\gamma^\nu \widehat{P}_\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu \widehat{P}_\mu \widehat{P}_\nu. \tag{5.31}$$

Observe que $\gamma^\mu \gamma^\nu$ pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e uma parte antissimétrica. Assim,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \widehat{P}_\mu \widehat{P}_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\widehat{P}_\mu \widehat{P}_\nu. \tag{5.32}$$

E para que a equação de Klein-Gordon seja satisfeita, devemos ter

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}, \tag{5.33}$$

que é a relação satisfeita pelos geradores da álgebra de Clifford.

A equação de Dirac, equação (5.27), pode ser deduzida a partir da densidade lagrangiana para este campo, que é escrita como

$$\pounds = \frac{-i}{4}[(\partial_\mu \overline{\psi})\gamma^\mu \psi - \overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu \psi)] - (m - \gamma^\mu p_\mu). \tag{5.34}$$

5.5 Teorema de Noether e grandezas conservadas

O objetivo agora á demonstrar o teorema de Noether em uma versão para o espaço de fase relativístico. O enunciado do teorema de Noether aqui é o seguinte: "A todo grupo de transformações contínuas de ψ, que mudam $\pounds$ no máximo por uma divergência, existe associada uma corrente conservada". O divergente no espaço de fase relativístico é definido por

$$D_\mu S^\mu = (\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})S^\mu.$$

A demonstração esboçada aqui está baseada na referência [51]

Demonstração

Considere uma transformção infinitesimal $\psi(q,p) \rightarrow \psi'(q,p) = \psi(q,p) + \delta\psi(q,p)$, tal que $\pounds \rightarrow \pounds + \delta\pounds$ em que $\delta\pounds = (\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})S^\mu$.

Agora,

$$\delta\pounds = \frac{\partial\pounds}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}\frac{\partial\delta\psi}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}\frac{\partial\delta\psi}{\partial p^\mu}.$$

Utilizando a equação de movimento para ψ(equações de Euler-Lagrange) dada por

$$\frac{\partial\pounds}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})} - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})} = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
\delta\pounds &= (\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}\delta\psi + \frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}\delta\psi) + (\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}\frac{\partial\delta\psi}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}\frac{\partial\delta\psi}{\partial p^\mu}) \\
&= \frac{\partial}{\partial q^\mu}(\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}\delta\psi) + \frac{\partial}{\partial p^\mu}(\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}\delta\psi).
\end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})j^\mu = 0.$$

E a corrente conservada é então

$$j^\mu = \frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}\delta\psi + \frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}\delta\psi - S^\mu. \tag{5.35}$$

Como queríamos demonstrar.

Agora utilizaremos o teorema de Noether para estudar alguns casos de transformações do espaço-tempo.

(a)Translações no espaço-tempo

$$q^\mu \to q'^\mu = q^\mu + \varepsilon^\mu,$$

$$p^\mu \to p'^\mu = p^\mu + \lambda^\mu.$$

Para simplificar a notação, definiremos a coordenada simplética $\eta^\mu = (q^\mu, p^\mu)$, como também $\epsilon^\mu = (\varepsilon^\mu, \lambda^\mu)$.

Temos

$$\psi(q,p) = \psi'(q',p')$$

ou

$$\psi(\eta) = \psi'(\eta').$$

Ou seja, $\psi'(\eta) = \psi(\eta - \epsilon)$, tal que

$$\delta\psi(\eta) = \psi'(\eta) - \psi(\eta).$$

Fazendo uma expansão em Taylor até primeira ordem, temos

$$\psi(q-\varepsilon, p-\lambda) = \psi(q,p) - \varepsilon_\nu \frac{\partial\psi(q,p)}{\partial q^\nu} - \lambda_\nu \frac{\partial\psi(q,p)}{\partial p^\nu},$$

ou

$$\psi(\eta - \epsilon) = \psi(\eta) - \epsilon_\nu \frac{\partial\psi(\eta)}{\partial\eta^\nu}.$$

Assim, obtemos

$$\delta\psi(\eta) = -\epsilon_\nu \frac{\partial\psi(\eta)}{\partial q^\nu}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta\pounds &= \pounds(\psi + \delta\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu} + \frac{\partial\delta\psi}{\partial\eta^\nu}) - \pounds(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu}) \\
&= \pounds(\psi', \frac{\partial\psi'}{\partial\eta^\nu}) - \pounds(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu})
\end{aligned}$$

$$= \quad \pounds(\eta - \epsilon) - \pounds(q,p) = -\epsilon_\mu \frac{\partial \pounds}{\partial \eta^\mu}.$$

Substituindo $\delta\psi(\eta) = -\epsilon_\nu \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial q^\nu}$ na equação (5.34), temos

$$j^\mu = (\frac{\partial \pounds}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial \eta^\mu})})(-\epsilon_\nu \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\nu}) + \epsilon^\mu \pounds.$$

Ou, mais explicitamente

$$j^\mu = (\frac{\partial \pounds}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial q^\mu})} + \frac{\partial \pounds}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial p^\mu})})(-\varepsilon_\nu \frac{\partial \psi}{\partial q^\nu} - \lambda^\nu \frac{\partial \psi}{\partial p^\mu}) + \epsilon^\mu \pounds.$$

Lembrando que ϵ é arbitrário, obtemos a conservação do tensor energia-momentum canônico, qual seja

$$(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\theta^{\mu\nu} = 0.$$

Em que o tensor energia-momentum canônico é dado por

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \pounds}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial \eta^\mu})} \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\nu} - g^{\mu\nu} \pounds. \tag{5.36}$$

Para exemplificar, tomaremos o caso das translações somente na coordenada associada à posição, ou seja, $\lambda = 0$.

Exemplo 5.1 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a densidade de lagrangiana dada na equação (5.20) e substituindo na equação (5.36), temos

$$\theta^{\mu\nu} = \quad \frac{-1}{4}(\frac{\partial \psi^*}{\partial q_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \psi}{\partial q_\mu}\frac{\partial \psi^*}{\partial q_\nu}) + \frac{1}{2} i p^\mu (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\nu}) - g^{\mu\nu} \pounds. \tag{5.37}$$

Exemplo 5.2 Campo de Dirac

Partindo da densidade de lagrangiana para o campo de Dirac, dada na equação (5.34) e substituindo na equação (5.36), obtemos

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{-i}{4}(-\overline{\psi}\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} + \gamma^\mu \psi \frac{\overline{\psi}}{\partial q_\nu}) - g^{\mu\nu} \pounds. \tag{5.38}$$

Nesses dois exemplos, um 4-vetor constante no tempo é definido por

$$P^{\nu} = \int \theta^{0\nu} d^3q d^3p, \tag{5.39}$$

em que a integração não é realizada em q^0 e p^0.

(c) Rotações no espaço-tempo (Grupo das Rotações)

Considere

$$\delta q^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} q_{\nu},$$

$$\delta p^{\mu} = \lambda^{\mu\nu} p_{\nu},$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu},$$

$$\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu},$$

$$q^{\nu} \to q^{\nu} + \epsilon^{\mu\nu} q_{\nu},$$

$$p^{\nu} \to p^{\nu} + \lambda^{\mu\nu} p_{\nu}.$$

Para simplificar, utilizando a notação $\eta^{\mu} = (q^{\mu}, p^{\mu})$, temos

$$\delta\eta^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} \eta_{\nu}.$$

Assim, o campo $\psi(\eta)$ se transforma de acordo com alguma representação do grupo, isto é,

$$\psi(\eta) \to \psi'(\eta) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}\eta) = D(\Lambda)\psi(\eta^{\mu} - \varepsilon^{\mu\nu}\eta_{\nu}).$$

Como a transformação é infinitesimal, $D(\Lambda)$ é próximo à identidade e tem a forma $D(\Lambda) = I + \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} I^{\rho,\sigma}$. Assim,

$$\psi'(\eta) = \psi(\eta) - \frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{2}[\eta_{\nu}\partial_{\mu} - \eta_{\mu}\partial_{\nu} - iI_{\mu\nu}]\psi(\eta).$$

Ou seja,

$$\delta\psi = -\frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{2}[\eta_\nu\partial_\mu - \eta_\mu\partial_\nu - iI_{\mu\nu}]\psi(\eta).$$

Por outro lado, sendo a densidade lagrangiana um escalar, temos

$$\delta\pounds = -\varepsilon^{\mu\nu}\eta_\nu\partial_\mu\pounds = \frac{-1}{2}\varepsilon^{\lambda\nu}\partial^\mu[(x_\nu g_{\mu\lambda} - x_\lambda g_{\mu\nu})\pounds].$$

A corrente conservada é então

$$j^\mu(\eta) = \frac{\varepsilon_{\lambda\nu}}{2}[\frac{\partial\pounds}{\partial(\partial_\mu\psi)}(\eta^\lambda\partial^\nu - \eta^\nu\partial^\lambda + iI^{\lambda\nu})\psi + (\eta^\nu g^{\mu\lambda} - \eta^\lambda g^{\mu\nu})\pounds].$$

Como $\varepsilon_{\lambda\nu}$ é um tensor infinitesimal arbitrário, temos que

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0,$$

em que $M^{\mu\nu\lambda}$ é o tensor densidade de momentum angular, dado por

$$M^{\mu\nu\lambda} = -q^\lambda\theta^{\mu\nu} - p^\lambda\theta^{\mu\nu} + q^\nu\theta^{\mu\lambda} + p^\nu\theta^{\mu\lambda} + i\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}I^{\nu\lambda}\psi + i\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu})}I^{\nu\lambda}\psi. \tag{5.40}$$

Exemplo 5.3 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a lagrangiana para o campo de Klein-Gordon, equação (5.20), podemos escrever o tensor densidade de momentum angular para este campo como

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\lambda} = & - q^\lambda\theta^{\mu\nu} - p^\lambda\theta^{\mu\nu} + q^\nu\theta^{\mu\lambda} + p^\nu\theta^{\mu\lambda} + i\frac{\partial\pounds}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu})}I^{\nu\lambda}\psi + i\frac{\partial\psi^*}{\partial q_\mu}I^{\nu\lambda}\psi + i\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu}I^{\nu\lambda}\psi^* \\ & - \frac{1}{2}p^\mu\psi^* I^{\nu\lambda}\psi + \frac{1}{2}p^\mu\psi I^{\nu\lambda}\psi^*, \end{aligned} \tag{5.41}$$

em que $\theta^{\mu\lambda}$ é dado na equação (5.37).

Exemplo 5.4 Campo de Dirac

$$M^{\mu\nu\lambda} = -q^\lambda\theta^{\mu\nu} - p^\lambda\theta^{\mu\nu} + q^\nu\theta^{\mu\lambda} + p^\nu\theta^{\mu\lambda} - \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma^\mu I^{\nu\lambda}\psi + \frac{1}{4}\gamma^\mu\psi I^{\nu\lambda}\overline{\psi}, \tag{5.42}$$

onde $\theta^{\mu\lambda}$ é dado na equação (5.38).

Em ambos os casos considerados, podemos determinar o momentum angular por meio de

$$M^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu 0} d^3q d^3p. \tag{5.43}$$

(c) Simetrias Internas

Além das simetrias geométricas induzidas por transformações no espaço-tempo, podemos considerar as simetrias internas, que são as simetrias associadas com transformações intrínsecas do campo. O caso que analisaremos aqui é o da simetria de calibre de primeira espécie, que, embora não seja tão relevante fisicamente, nos fornece correntes conservadas. Para esse fim, consideraremos as transformações

$$\psi' = e^{-i\Lambda}\psi \quad e \quad \overline{\psi'} = e^{i\Lambda}\overline{\psi},$$

em que Λ é uma constante. Fazendo uma expansão até primeira ordem, temos

$$\psi' = (1 - i\Lambda)\psi \quad \rightarrow \quad \delta\psi = -i\Lambda\psi$$

e

$$\overline{\psi'} = (1 + i\Lambda)\overline{\psi} \quad \rightarrow \quad \delta\overline{\psi} = i\Lambda\overline{\psi}.$$

Para esse tipo de transformação $\delta \pounds = 0$.

Exemplo 5.5 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a transformação dada e substituindo na equação (5.35), obtemos a corrente conservada para o campo de Klein-Gordon,

$$j^{\mu} = \frac{i}{4}(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial q_{\mu}} + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial q_{\mu}}) + p^{\mu}\psi^*\psi. \tag{5.44}$$

Exemplo 5.6 Campo de Dirac

Utilizando a transformação dada e substituindo na equação (5.35), obtemos a corrente conservada para o campo de Dirac,

$$j^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{5.45}$$

Nesses dois casos, podemos encontrar uma quantidade identificada como a carga do campo,

$$Q = \int j^0 d^3q d^3p. \tag{5.46}$$

5.6 Interação

Podemos, nesse contexto de espaço de fase, explorar problemas com interação. Para isso, tomemos a densidade de lagrangiana

$$\pounds = \frac{-1}{4}\frac{\partial \psi}{\partial q_\mu}\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial q^\mu} - \psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial q^\mu}) - (p^\mu p_\mu - m^2)\psi\psi^\dagger + U(\psi\psi^\dagger), \tag{5.47}$$

que leva à equação de Klein-gordon sujeita ao potencial dado,

$$\frac{-1}{4}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - ip^\mu \frac{\partial \psi}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2)\psi - V(\psi) = 0, \tag{5.48}$$

em que $V(\psi) = \frac{\partial U(\psi\psi^\dagger)}{\partial \psi^\dagger}$. Notamos que p é apenas um parâmetro nesta equação diferencial parcial.

A fim de buscar soluções para a equação de Klein-Gordon, equação (5.48), utilizaremos o método da função de Green. Para isso, suponhamos uma distribuição pontual, a qual uma função $G = G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu)$ satisfaz

$$\frac{-1}{4}\frac{\partial^2 G}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - ip^\mu \frac{\partial G}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2)G = \delta(q^\mu - q'^\mu)\delta(p^\mu - p'^\mu), \tag{5.49}$$

onde G é a função de Green. Pelo princípio da superposição, temos que a solução para nossa equação é dada por

$$\psi(q^\mu, p^\mu) = \psi_0(q^\mu, p^\mu) + \int d^4q'^\mu d^4p'^\mu G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu)V(\psi), \tag{5.50}$$

em que $\psi_0(q^\mu, p^\mu)$ é solução do problema livre.

Agora nosso trabalho consiste em encontrar a função de Green. Para isso, aplicaremos uma transformada de Fourier na equação (5.48), em que as coordenadas correspondentes no espaço de Fourier serão $q^\mu \to k^\mu$ (note que a transformada de Fourier foi calculada apenas na coordenada posição). Após a transformação, tal que $F[\frac{\partial^2 G}{\partial q^\mu \partial q_\mu}] = -k^2\widetilde{G}(k^\mu, p^\mu)$, $F[\frac{\partial G}{\partial q^\mu}] = -ik^\mu \widetilde{G}(k^\mu, p^\mu)$ e $F[G] = \widetilde{G}(k^\mu, p^\mu)$, segue que

$$\frac{1}{4}k^2\widetilde{G}(k^\mu,p^\mu) - p^\mu k_\mu \widetilde{G}(k^\mu,p^\mu) + (p^\mu p_\mu - m^2)\widetilde{G}(k^\mu,p^\mu) = \delta(p^\mu - p'^\mu), \tag{5.51}$$

onde $F[g]$ representa a transformada de Fourier da função g. E, então, obtemos

$$\widetilde{G}(k^\mu,p^\mu,p'^\mu) = \frac{\delta(p^\mu - p'^\mu)}{\frac{1}{4}k^2 - p^\mu k_\mu + (p^\mu p_\mu - m^2)}. \tag{5.52}$$

Desse modo

$$\begin{aligned} G(q^\mu,q'^\mu,p^\mu,p'^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu e^{-ik^\mu q_\mu}\widetilde{G}(k^\mu,p^\mu) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k^\mu \frac{\delta(p^\mu - p'^\mu)e^{-ik^\mu q_\mu}}{\frac{1}{4}k^2 - p^\mu k_\mu + (p^\mu p_\mu - m^2)}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

E a solução da equação fica dada com a substituição da última expressão em

$$\psi(q^\mu,p^\mu) = \psi_0(q^\mu,p^\mu) + \int d^4q'^\mu d^4p'^\mu G(q^\mu,q'^\mu,p^\mu,p'^\mu)V(\psi), \tag{5.54}$$

que é uma solução para o problema proposto.

5.7 Simetrias de Calibre no Espaço de Fase

5.7.1 Calibre Abeliano

Outro aspecto relativo a campos em interação que vale a pena ser analisado no contexto do espaço de fase é a simetria de calibre. Iniciaremos nossa discussão com o caso abeliano, tratando do campo escalar, considerando uma transformação de fase local, dada por $\phi'(q,p) = e^{i\alpha(q,p)}\phi(q,p)$. Tomando α pequeno, temos $\phi \to \phi - i\alpha\phi$, $\delta\phi = -i\alpha\phi$, $\delta\phi^\dagger = i\alpha\phi^\dagger$, tal que

$$\delta[(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\phi] = -i[(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\alpha]\phi - i\alpha(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\phi, \tag{5.55}$$

e

$$\delta[(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\phi^\dagger] = i[(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\alpha]\phi^\dagger + i\alpha(\frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu})\phi^\dagger. \tag{5.56}$$

Usando a densidade de lagrangiana dada na equação (5.20) para o campo escalar livre, obtemos

$$\delta\pounds = i[\frac{i}{4}(\phi\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial q_\mu} + \phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial q_\mu}) + p^\mu\phi^\dagger\phi]\partial_\mu\alpha = j^\mu\partial_\mu\alpha. \tag{5.57}$$

Contudo, se utilizarmos a invariância da lagrangiana sob tranformações de gauge, introduzimos o campo de calibre $U(1)$, tal que a lagrangiana total é dada por

$$\begin{aligned}\pounds_{total} &= \frac{-1}{4}\frac{\partial\phi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} - \phi\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial q^\mu}) - (p^\mu p_\mu - m^2)\phi\phi^\dagger \\ &- ej^\mu A_\mu + e^2A_\mu A^\mu\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Podemos escrevê-la ainda da seguinte forma:

$$\pounds_{total} = (p_\mu\phi - \frac{i}{2}\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} + ieA_\mu\phi)(p^\mu\phi^\dagger + \frac{i}{2}\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial q_\mu} - ieA^\mu\phi^\dagger) + m^2\phi\dagger\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{5.58}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{q_\mu}A_\nu - \partial_{q_\nu}A_\mu$.

Uma derivada covariante pode ser definida por

$$D_\mu = (p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + ieA_\mu), \tag{5.59}$$

levando a

$$\pounds = D_\mu\phi D^\mu\phi^\dagger + m^2\phi\phi^\dagger - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{5.60}$$

É importante notar que o acoplamento mínimo é dado por $\widehat{P_\mu} \rightarrow p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + ieA_\mu$, como era esperado.

5.7.2 Calibre Não-Abeliano

Discutiremos agora a construção de uma teoria de calibre não-abeliano no espaço de fase. Iniciaremos nossa discussão, considerando que a densidade de lagrangiana para o campo de Klein-Gordon no espaço de fase pode ser escrita por meio da expressão

$$\pounds = (p^\mu \star \phi)(p_\mu \star \phi^\dagger) + m^2\phi\phi^\dagger. \tag{5.61}$$

Nesse sentido, percebemos que se utilizarmos a propriedade da integração do produto estrela, podemos escrever o Lagrangeano escalar da seguinte forma,

$$S = \int d^4q d^4p \left((p^\mu \star \phi) \star (p_\mu \star \phi^\dagger) + m^2\phi \star \phi^\dagger\right). \tag{5.62}$$

Consideraremos, também, que a lei de transformação local para os campos $\phi(q,p)$ e $\phi^\dagger(q,p)$, seja dado por,

$$\phi(q,p) = \phi(q,p) \star g(q,p), \tag{5.63}$$

e

$$\phi^\dagger(q,p) = g^\dagger(q,p) \star \phi^\dagger(q,p), \tag{5.64}$$

tal que,

$$g(q,p) = e^{i\lambda(q,p)},$$

onde, se considerarmos $|\lambda| \ll 1$, as variações nos campos ficam dadas por

$$\delta\phi(q,p) = i\phi(q,p) \star \lambda(q,p), \tag{5.65}$$

e

$$\delta\phi^\dagger(q,p) = -i\lambda(q,p) \star \phi^\dagger(q,p). \tag{5.66}$$

Estudaremos agora, como são dadas as variações do primeiro termo da lagrangiana, $(p^\mu \star \phi(q,p)) \star (p_\mu \star \phi^\dagger(q,p))$ sob a mesma tranformação dada nas equações. Nesse sentido, percebemos que,

$$\delta(p^\mu \star \phi) = ip^\mu \star \phi \star \lambda(q,p) + \frac{1}{2}\phi \star \frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q_\mu}, \tag{5.67}$$

e

$$\delta(p_\mu \star \phi^\dagger) = i\lambda(q,p) \star p_\mu \star \phi^\dagger + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q^\mu} \star \phi^\dagger, \tag{5.68}$$

não se tranformam covariantemente como $\phi(q,p)$ e $\phi^\dagger(q,p)$ fazem. Dessa forma, precisamos construir uma derivada covariante, de forma análoga à do caso abeliano. Para esse fim, definamos a derivada covariante dada por,

$$D_\mu\phi(q,p) = p_\mu \star \phi(q,p) - i\phi(q,p) \star W_\mu, \tag{5.69}$$

e

$$(D_\mu\phi(q,p))^\dagger = p_\mu \star \phi^\dagger(q,p) + iW_\mu \star \phi^\dagger(q,p). \tag{5.70}$$

E, ainda, devemos considerar que o potencial calibrante, W_μ, se transforma de acordo com,

$$\delta(W_\mu) = -\frac{i}{2}\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q^\mu} + i\{W_\mu, \lambda(q,p)\}_M, \tag{5.71}$$

onde, $\{A,B\}_M = A \star B - B \star A$, representa o parêntese de Moyal.

Agora, avaliaremos se, sob essas condições, teremos as transformações dadas corretamente. Vejamos como fica dado $\delta(D_\mu\phi(q,p))$.

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\phi(q,p)) &= \delta(p_\mu\star\phi(q,p)) - i\delta\phi(q,p)\star W_\mu - i\phi(q,p)\star\delta W_\mu \\
&= ip_\mu\star\phi(q,p)\star\lambda(q,p) + \frac{1}{2}\phi(q,p)\star\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q^\mu} \\
&\quad +\phi(q,p)\star\lambda(q,p)\star W_\mu - \frac{1}{2}\phi(q,p)\star\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q_\mu} \\
&\quad +\phi(q,p)\star\{W_\mu,\lambda(q,p)\}_M \\
&= i(p_\mu\star\phi(q,p) - i\phi(q,p)\star W_\mu)\star\lambda(q,p) \\
&= i(D_\mu\phi(q,p))\star\lambda(q,p),
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado, ou seja, a regra para a transformação covariante. O mesmo vale para a derivada covariante de $\phi^\dagger(q,p)$, $(D_\mu\phi(q,p))^\dagger$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\delta((D_\mu\phi(q,p))^\dagger) &= \delta(p_\mu\star\phi^\dagger(q,p)) - i\delta W_\mu\star\phi^\dagger(q,p) - iW_\mu\star\delta\phi^\dagger(q,p) \\
&= ip_\mu\star\lambda(q,p)\star\phi^\dagger(q,p) + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q^\mu}\star\phi^\dagger(q,p) \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda(q,p)}{\partial q^\mu}\star\phi^\dagger(q,p) - W_\mu\star\lambda(q,p)\star\phi^\dagger(q,p) \\
&\quad -\lambda(q,p)\star W_\mu\star\phi^\dagger(q,p) + W_\mu\star\lambda(q,p)\star\phi^\dagger(q,p) \\
&= -i\lambda(q,p)\star(p_\mu\star\phi^\dagger(q,p) + iW_\mu\star\phi^\dagger(q,p)) \\
&= -i\lambda(q,p)\star(D_\mu\phi(q,p))^\dagger,
\end{aligned}$$

que é o resultado esperado. Além disso, podemos adicionar na lagrangiana o termo que resulta na dinâmica do campo de calibre no espaço de fase, $W_{\mu\nu}\star W^{\mu\nu}$, onde

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial W_\nu}{\partial q^\mu} + \frac{\partial W_\mu}{\partial q^\nu} - i\{W_\mu, W_\nu\}_M. \tag{5.72}$$

Dessa forma, ficamos com a ação dada por,

$$S = \int d^4q d^4p \left((D_\mu\phi(q,p))\star(D_\mu\phi(q,p))^\dagger + m^2\phi\star\phi^\dagger + W_{\mu\nu}\star W^{\mu\nu}\right). \tag{5.73}$$

As equações de movimento, obtidas a partir da equação de Euler-Lagrange, ficam escritas da seguinte forma,

$$\frac{\partial W_{\mu\nu}}{\partial q_\nu} - iW^\nu\star W_{\mu\nu} = (D_\mu\phi(q,p))\star\phi^\dagger(q,p) + \phi(q,p)\star(D_\mu\phi(q,p))^\dagger, \tag{5.74}$$

onde podemos identificar a fonte J_μ como,

$$J_\mu = D_\mu\phi(q,p))\star\phi^\dagger(q,p) + \phi(q,p)\star(D_\mu\phi(q,p))^\dagger. \tag{5.75}$$

No próximo capítulo, continuaremos nossa discussão no contexto da teoria de campos no espaço de fase. Buscaremos, por meio da escrita dos funcionais geradores, escrever a função de Green e relacioná-la com a função de Wigner. Estudaremos também aspectos da quantização canônica no espaço de fase.

6 Integral de Trajetória no Espaço de Fase

Neste capítulo, continuaremos nossa análise da teoria de campos no espaço de fase. Nosso objetivo numa primeira etapa é estudar a quantização dos campos de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase, utilizando métodos funcionais. Por meio de um formalismo em termos do funcional gerador, escreveremos o propagador e estabeleceremos a relação entre a função de Green no espaço de fase e a função de Wigner. Em seguida, analisaremos o campo escalar complexo com interação quártica. Em segundo plano, discutiremos também o processo de quantização canônica do campo de Klein-Gordon no espaço de fase. Os resultados apresentados nesse capítulo constituem nosso recente trabalho, mencionado na referência [50]

Como é conhecido na literatura [51, 52], há três métodos de quantização de campos clássicos, quais sejam: o método da quantização canônica, o método das integrais de trajetórias e o método da quantização estocástica. A quantização canônica é um método intuitivo, pois guarda analogias com a quantização de pontos materiais. Já o método das integrais de trajetórias, introduzido por Feynman, é bastante útil, especialmente na quantização de sistemas com vínculos. O terceiro método, que consiste na quantização estocástica, é o mais recente dos três e constitui uma alternativa bastante interessante para a quantização por meio de integrais de trajetórias. Esse terceiro método não será discutido aqui. Como já destacamos, nosso objetivo neste capítulo é estudar os dois primeiros métodos de quantização no aspecto do espaço de fase. Iniciaremos nossa análise pelo funcional gerador do campo escalar complexo.

6.1 Funcional Gerador para o Campo Escalar Complexo

Podemos definir, para o campo escalar complexo livre na presença das fontes $J(q,p)$ e $J^*(q,p)$, o seguinte funcional

$$\begin{aligned} Z_0[J,J^*] &= \int D\phi(q,p)\int D\phi^*(q,p) \\ &\times \exp i\int d^4qd^4p[\pounds_0(\phi,\phi^*) - J(q,p)\phi^* - J^*(q,p)\phi(q,p)], \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que $\int D\phi$ e$\int D\phi^*$ representam as integrais funcionais de $\phi(q,p)$ e $\phi^*(q,p)$, enquanto $\int d^4qd^4p$ representa a integração em todo o espaço de fase. Apesar de estarmos trabalhando no espaço de fase, toda maquinaria para tratar integrais funcionais continua válida. Percebemos, então, que a equação (6.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Z[J,J^*] &= \int D\phi(q,p)\int D\phi^*(q,p) \\ &\times \exp i\int d^4qd^4p[\frac{-1}{4}\frac{\partial\phi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu}) \\ &-(p^\mu p_\mu - m^2)\phi(q,p)\phi^*(q,p) - J(q,p)\phi^*(q,p) - J^*(q,p)\phi(q,p)]. \end{aligned}$$

(6.3)

Admitindo que as funções $\phi(q,p)$ e $\phi^*(q,p)$ são bem comportadas, temos

$$\int d^4qd^4p\frac{-1}{4}\frac{\partial\phi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu} = \frac{1}{4}\int d^4qd^4p\phi^*\partial_q^2\phi \tag{6.4}$$

e

$$\int d^4qd^4p\frac{1}{2}ip^\mu(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu}) = \int d^4qd^4pip^\mu\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu}. \tag{6.5}$$

Com o uso das equações (6.4) e (6.5), a equação (6.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Z_0[J,J^*] &= \int D\phi(q,p)\int D\phi^*(q,p) \\ &\times \exp i\int d^4qd^4p[\frac{1}{4}\int d^4qd^4p\phi^*\partial_q^2\phi + ip^\mu\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} \\ &-\phi^*(q,p)(p^2 - m^2)\phi(q,p) - J(q,p)\phi^*(q,p) - J^*(q,p)\phi(q,p)]. \end{aligned}$$

(6.7)

E agora, se utlizarmos

$$\int D\phi D\phi^* \exp[-\int \phi^* A\phi dx] = (\det A)^{-1}, \tag{6.8}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z_0[J,J^*] &= [\det(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - (p^2 - m^2 + i\varepsilon))]^{-1} \\ &\times \exp[i\int J^*(q,p)[\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \\ &-(p^2 - m^2 + i\varepsilon)]J(q',p')dqdpdq'dp']. \end{aligned}$$

E ainda, na ausência de fontes, temos

$$Z_0[0] = [\det(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - (p^2 - m^2 + i\varepsilon))]^{-1}. \tag{6.9}$$

Nesse sentido, o propagador satisfaz a equação

$$(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - (p^2 - m^2 + i\varepsilon))\triangle_F(q-q',p-p') = \delta(q-q')\delta(p-p'), \tag{6.10}$$

tal que

$$\triangle_F(q-q',p-p') = [\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - (p^2 - m^2)]^{-1}. \tag{6.11}$$

Dessa forma, o funcional gerador para o campo escalar complexo livre pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_0[J,J^*] &= [\det(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial q} + ip^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - (p^2 - m^2))]^{-1} \\ &\exp[i\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q',p-p')J(q',p')dqdpdq'dp']. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Usando esse funcional gerador, a função de dois pontos pode ser escrita como

$$G_0(q-q',p-p') = -\frac{\delta^2 Z_0[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)\delta J(q',p')}|_{J=J^*=0} = \langle 0|T[\phi(q,p)\phi^*(q',p')]|0\rangle, \tag{6.13}$$

em que T é o operador de ordenação do tempo. A relação entre $\triangle_F(q-q',p-p')$ e $G_0(q-q',p-p')$ é dada por

$$G_0(q-q',p-p') = i\triangle_F(q-q',p-p'). \tag{6.14}$$

Obtemos a interpretação física para o nosso formalismo, notando que $G_0(q-q',p-p')$

é relacionada com a função de Wigner por meio de

$$f_W^0(q,p) = \lim_{q',p' \to q,p} \exp\left(i\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial q'}\frac{\partial}{\partial p}\right) G_0(q-q', p-p'). \tag{6.15}$$

Com esse resultado, podemos escrever que o valor médio de um observável $A(q,p)$ no espaço de fase é dado por

$$\langle A \rangle = \int A(q,p)\{\lim_{q',p' \to p,p} \exp\left(i\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial q'}\frac{\partial}{\partial p}\right) G_0(q-q', p-p')\} dqdp. \tag{6.16}$$

6.2 Funcional Gerador para o Campo de Dirac

Vamos analisar agora a quantização do campo de Dirac livre. Os métodos funcionais no espaço de fase para férmions são introduzidos mediante a definição da álgebra de Grassmann em Γ, que é similar ao caso usual. Dessa forma, escrevemos o funcional gerador para o campo de Dirac como

$$\begin{aligned} Z_0[\eta,\overline{\eta}] &= \frac{1}{N}\int D\psi D\overline{\psi} \exp\{i\int[\frac{-i}{4}(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial q^\mu}\gamma^\mu\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}) \\ &\quad -\overline{\psi}(m-\gamma^\mu p_\mu)\psi + \eta(q,p)\overline{\psi}(q,p) + \overline{\eta}(q,p)\psi(q,p)]dqdp\}. \end{aligned}$$

Definindo $\overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu}\psi \equiv (\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial q^\mu})\gamma^\mu\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}$, temos

$$\begin{aligned} Z_0[\eta,\overline{\eta}] &= \frac{1}{N}\int D\psi D\overline{\psi} \exp\{i\int[\frac{-i}{4}\overline{\psi}(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu} - (m-\gamma^\mu p_\mu))\psi \\ &\quad +\eta(q,p)\overline{\psi}(q,p) + \overline{\eta}(q,p)\psi(q,p)]dqdp\}, \end{aligned}$$

em que η e $\overline{\eta}$ são as fontes de ψ e $\overline{\psi}$, respectivamente. Escrevendo o inverso do propagador como $\mathrm{S}^{-1} = \frac{-i}{4}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu} - (m^2 - \gamma^\mu p_\mu)$,obtemos a expressão para o funcional gerador:

$$\begin{aligned} Z_0[\eta,\overline{\eta}] &= \frac{1}{N}\int D\psi D\overline{\psi} \exp\{i\int[\overline{\psi}S^{-1}\psi + \eta(q,p)\overline{\psi}(q,p) \\ &\quad +\overline{\eta}(q,p)\psi(q,p)]dqdp\}. \end{aligned}$$

Essa expressão nos leva a

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}] = \frac{1}{N}\exp[-i\int \overline{\eta}(q,p)S\eta(q',p')dqdpdq'dp']det(iS^{-1}). \tag{6.17}$$

Sabendo que $N = \det(iS^{-1})$, temos

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}] = \exp[-i\int \overline{\eta}(q,p)S(q-q',p-p')\eta(q',p')dqdpdq'dp']. \tag{6.18}$$

E a função de dois pontos é dada por

$$S(q-q',p-p') = -\frac{\delta^2 Z[\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(q',p')\delta\overline{\eta}(q,p)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}. \tag{6.19}$$

E a relação dessa função com a função de Wigner fica dada por

$$f_W(q,p) = \lim_{(q',p'\to q,p)} \exp{(i\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial q'}\frac{\partial}{\partial p})} S(q-q',p-p'), \tag{6.20}$$

o que nos leva à interpretação física do formalismo. Na próxima seção, discutiremos o formalismo funcional para campos em interação. Trataremos, em particular, da interação $\lambda\phi^4$.

6.3 Funcional Gerador para Campos em Interação

Consideraremos agora o funcional gerador do campo de Kelin-Gordon complexo com interação no espaço de fase Γ. A Lagrangiana é $\pounds = \pounds_0 + \pounds_{int}(\phi,\phi^*)$, em que $\pounds_0$ é a Lagrangiana do problema livre e $\pounds_{int}$ é a Lagrangiana referente à interação. Nesses termos, o funcional gerador normalizado é dado por,

$$Z[J,J^*] = \frac{1}{Z_0}\int D\phi D\phi^* \exp{[iS - i\int dqdp(J(q,p)\phi^*(q,p) + J^*(q,p)\phi(q,p))]}, \tag{6.21}$$

onde $S = \int d^4q d^4p \pounds$. Nosso objetivo agora é encontrar uma expressão para o caso dos campos em interação análoga à equação (6.12), obtida no caso dos campos livres. Vamos iniciar nossa discussão notando que a derivada funcional de $Z_0[J,J^*]$ com relação a $J^*(q,p)$ é

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)} &= -\int dq'dp' \triangle_F(q-q',p-p')J(q',p') \\ &\quad \times \exp{(-i\int J^*(q,p)\triangle_F J(q',p')dqdpdq'dp')}.\end{aligned}$$

Usando $[\frac{1}{4}\partial_q^2 + ip\partial_q - (p^2-m^2)]$, encontramos a equação diferencial para $Z_0[J,J^*]$, isto é,

$$[\frac{1}{4}\partial_q^2 + ip\partial_q - (p^2-m^2)]\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)} = J(q,p)Z_0[J,J^*]. \tag{6.22}$$

A partir da equação (6.21), podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)} &= \frac{1}{Z_0}\int D\phi D\phi^* \phi(q,p) \\ &\quad \times \exp{[iS - i\int dqdp(J(q,p)\phi^*(q,p) + J^*(q,p)\phi(q,p))]}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Introduzindo o funcional

$$\widehat{Z}[\phi,\phi^*]=\frac{\exp iS}{Z_0}, \tag{6.24}$$

é possível escrever

$$Z[J,J^*]=\int D\phi D\phi^*\widehat{Z}[\phi,\phi^*]\exp\left[-i\int dqdp(J(q,p)\phi^*(q,p))\right], \tag{6.25}$$

que é uma espécie de transformada de Fourier do funcional gerador.

A derivada funcional de $\widehat{Z}[\phi,\phi^*]$ com relação a ϕ^* implica em

$$i\frac{\delta\widehat{Z}[\phi,\phi^*]}{\delta\phi^*}=[(\frac{1}{4}\partial_q^2+ip\partial_q-(p^2-m^2))\phi(q,p)+\frac{\partial\pounds_{int}}{\partial\phi^*}]\widehat{Z}[\phi,\phi^*]. \tag{6.26}$$

Multiplicando a equação (6.26) por $\exp[-i\int dqdp(J\phi^*+J^*\phi)]$ e integrando sobre ϕ e ϕ^*, encontramos

$$\begin{aligned} I[J] &= (\frac{1}{4}\partial_q^2+ip\partial_q-(p^2-m^2))\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)} \\ &\quad -\frac{\delta\pounds_{int}}{\delta\phi^*(q,p)}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}]Z[J,J^*], \end{aligned}$$

em que

$$I[J]=i\int D\phi D\phi^*\frac{\delta\widehat{Z}[\phi,\phi^*]}{\delta\phi^*}\exp\left[-i\int dqdp(J\phi^*+J^*\phi)\right]. \tag{6.27}$$

Integrando por partes o lado esquerdo da equação (6.27) , encontramos a equação diferencial

$$\begin{aligned} -J(q,p)Z[J,J^*] &= [\frac{1}{4}\partial_q^2+ip\partial_q-(p^2-m^2)]\frac{1}{i}\frac{\delta Z[J,J^*]}{\delta J^*(q,p)} \\ &\quad -\frac{\delta\pounds_{int}}{\delta\phi^*(q,p)}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}]Z[J,J^*]. \end{aligned}$$

Podemos mostrar que a solução da equação precedente é dada por

$$Z[J,J^*]=N\exp\left[-i\int dqdp\pounds_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}]\right]Z_0[J,J^*], \tag{6.28}$$

em que N é um fator normalizante. Para demonstrar esse resultado, usaremos a fórmula de Baker-Hausdorff,

$$\exp(A)B\exp(-A)=B+[A,B]+\frac{1}{2}[A,[A,B]]+...,$$

em conjunto com as relações

$$[J(q,p),\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q',p')}]=i\delta(q-q')\delta(p-p'), \tag{6.29}$$

e

$$[J^*(q,p), \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q',p')}] = i\delta(q-q')\delta(p-p'). \tag{6.30}$$

Nesse caso, segue que

$$FJ(q,p)F^* = J(q,p) + \frac{\delta \pounds_{int}}{\delta\phi^*(q,p)}(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q',p')}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q',p')}), \tag{6.31}$$

onde $F = \exp{(i\int d^4qd^4p\pounds_{int})}$ e $F^* = \exp{(-i\int d^4qd^4p\pounds_{int})}$.

Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} J(q,p)Z[J,J^*] &= NJ(q,p) \\ &\times \exp{[-i\int dqdp\pounds_{int}(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q',p')}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q',p')})]}Z_0. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Usando a equação (6.26) essa expressão nos fornece

$$\begin{aligned} L[J] &= N\exp{[i\int dqdp\pounds_{int}(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q,p)}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q,p)})]} \\ &\times[J(q,p) + \frac{\partial}{\partial\phi^*(q,p)}\pounds_{int}(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q',p')}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q',p')})] \\ &\times Z_0[J(q,p), J^*(q,p)], \end{aligned} \tag{6.33}$$

onde

$$L[J] = J(q,p)Z[J(q,p), J^*(q,p)]. \tag{6.34}$$

Tomando a equação diferencial para $Z_0[J,J^*]$ e trocando $\pounds'_{int}$ e $\exp i\int \pounds_{int}$, a equação anterior se reduz a equação diferencial para $Z[J,J^*]$, como queríamos demonstrar. De posse desses resultados, trataremos na próxima seção da interação $\lambda\phi^4$.

6.3.1 Teoria ϕ^4

Como um exemplo, consideraremos aqui o campo escalar complexo em Γ com a auto-interação $\lambda\phi^4$. Esse potencial descreve bósons em interação de contato. Nosso objetivo é determinar a função de Wigner para esse processo. O primeiro passo é determinar a função de dois pontos para esse exemplo. Para isso, considere a densidade de Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \pounds &= \frac{-1}{4}\frac{\partial\phi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial q^\mu}) \\ &-(p^\mu p_\mu - m^2)\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4!}(\phi\phi^*)^2. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Vamos então utilizar o método desenvolvido na seção anterior para determinar a função de Green desse caso, tratando o termo de interação como uma série de potências até segunda ordem na constante λ. Dessa forma, o funcional gerador $Z[J,J^*]$ torna-se

$$\begin{aligned} Z[J,J^*] &= N\{1+i\frac{\lambda}{4}\int dqdp(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q,p)})^2(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q,p)})^2 \\ &\quad -\frac{\lambda^2}{16}\int dqdp(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q,p)})^2(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q,p)})^2(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q',p')})^2 \\ &\quad \times dq'dp'(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q',p')})^2+O(\lambda^3)\}Z_0[J,J^*]. \end{aligned}$$

É importante observar que para a ordem λ^0, temos $Z_0[J,J^*]$, que é o funcional gerador do campo livre. Para analisar a ordem λ, precisamos calcular a derivada funcional $(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q,p)})^2(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q,p)})^2 Z_0[J,J^*]$. A primeira derivada é dada por

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q'',p'')}\exp{[i\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q',p-p')J(q',p')dqdpdq'dp']}, \tag{6.36}$$

o que leva a

$$\begin{aligned} (\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J,J^*]}{\delta J(q'',p'')}) &= \int J^*(q,p)\triangle_F(q''-q,p''-p)dqdp \\ &\quad \times\exp{[i\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q',p-p')J(q',p')dqdpdq'dp']}. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q'',p'')})^2\exp{[i\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q',p-p')J(q',p')dqdpdq'dp']} \\ = &[\int J^*(q,p)\triangle_F(q''-q,p''-p)dqdp]^2 \\ &\times\exp{[i\int J^*(q,p)\triangle_F J(q',p')dqdpdq'dp']}. \end{aligned}$$

E ainda, temos também que

$$\begin{aligned} (\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q'',p'')})(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q'',p'')})^2 Z_0 &= \triangle_F(q''-q'',p''-p'')2[\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q'',p-p''] \\ &\quad\times\exp{[i\int J^*(q,p)\triangle_F J(q',p')]} \\ &\quad+[\int J^*(q,p)\triangle_F(q''-q,p''-p)dqdp]^2 \\ &\quad\times[\int \triangle_F(q''-q',p''-p')J(q',p')dqdp] \\ &\quad\times\exp[i\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q',p-p')J(q',p')]. \end{aligned}$$

Definindo $\chi_0[J^*,J]=(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^*(q'',p'')})^2(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(q'',p'')})^2 Z_0[J^*,J]$,finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\chi_0[J^*,J] &= \{2\triangle_F^2(q''-q'',p''-p'')+4\triangle_F(q''-q'',p''-p'')\\ &\times([\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q'',p-p'')dqdp]\\ &\times[\int \triangle_F(q''-q',p''-p')J(q',p')dq'dp'])\\ &+[\int J^*(q,p)\triangle_F(q-q'',p-p'')dqdp]^2\\ &\times[\int dq'dp'\triangle_F(q''-q',p''-p')J(q',p')]^2\}Z_0[J^*,J].\end{aligned}$$

Dessa forma, a função de dois pontos é dada por

$$G(q_1,q_2;p_1,p_2) = -\frac{\delta^2 Z[J^*,J]}{\delta J(q_1,p_1)\delta J^*(q_2,p_2)}|_{J=J^*=0}. \tag{6.37}$$

Se considerarmos até a primeira ordem em λ, temos

$$\begin{aligned}G(q,q';p,p') &= G_0(q,q';p,p')\\ &-i\frac{\lambda}{2}G_0(0)\int dq''dp''G_0(q''-q,p''-p)\\ &\times G_0(q''-q',p''-p')+O(\lambda^2),\end{aligned}$$

em que trocamos q_1 e p_1 por q e p e q_2 e p_2 por q' e p' . A partir dessa expressão, concluímos que as regras de Feynman para os campos no espaço de fase são similares às regras para o caso usual da teoria de campos no espaço de configuração. A diferença está no fato de que nesse caso o propagador é escrito no espaço de fase. A partir dessa função de dois pontos, calculamos a função de Wigner por

$$f_W(q,p) = \lim_{(q',p'\to q,p)} \exp\frac{i}{2}(\partial_q\partial_{p'}-\partial_{q'}\partial_p)G(q,q';p,p'). \tag{6.38}$$

Aplicando o limite e expandindo o produto estrela até segunda ordem (que é equivalente a considerar termos quadrático na constante de Planck), obtemos

$$\begin{aligned}f_W(q,p) &= f_W^0(q,p)-\frac{\lambda}{2}G_0(0)\int dq''dp''\\ &\times G_0(q''-q,p''-p)G_0(q''-q',p''-p')\\ &+\frac{1}{2}\lim_{(q',p'\to q,p)}(\frac{\partial^2 G_0(q-q',p-p')}{\partial q'\partial p}-\frac{\partial^2 G_0(q-q',p-p')}{\partial q\partial p'})\\ &+\frac{\lambda}{4}G_0(0)\lim_{(q',p'\to q,p)}(\partial_q\partial_{p'}-\partial_{q'}\partial_p)\\ &\times\int dq''dp''G_0(q''-q,p''-p)G_0(q''-q',p''-p')+....,\end{aligned} \tag{6.39}$$

em que

$$f_W^0(q,p) = \lim_{(q',p'\to q,p)} \exp^{\frac{i}{2}(\partial_q \partial_{p'} - \partial_{q'}\partial_p)} G_0(q,q';p,p') \tag{6.40}$$

corresponde a ordem zero em λ e descreve partículas livres se movendo no espaço de fase. A primeira ordem em λ, contudo, $f_W(q,p)$, descreve bósons em interação de contato no ponto (q,p).

6.4 Quantização Canônica do Campo de Klein-Gordon

Nosso intuito agora é analisar a quantização canônica do Campo de Klein-Gordon no espaço de fase. O método da quantização canônica de campos segue o procedimento de quantização de Dirac. Os cálculos realizados nessa seção são semelhantes aos desenvolvidos na referência [53], que trata da quantização canônica de teorias não-comutativas.

A partir da densidade de lagrangiana para o campo de Klein-Gordon no espaço de fase, que pode também ser escrita como

$$\pounds = p^\mu \star \phi(q,p) p_\mu \star \phi^\dagger(q,p) + m^2 \phi(q,p)\phi^\dagger(q,p), \tag{6.41}$$

definimos os momenta conjugados aos campos $\phi(q,p)$ e $\phi^\dagger(q,p)$, da seguinte forma:

$$\pi = \frac{\partial \pounds}{(\partial_0 \phi)} \quad e \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \pounds}{(\partial_0 \phi^\dagger)}.$$

Realizando os cálculos, escrevemos

$$\pi = \frac{-1}{4}\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial q^0} + \frac{1}{2} i p_0 \phi^\dagger = \frac{-1}{2} i p^0 \star \phi^\dagger$$

e

$$\pi^\dagger = \frac{1}{4}\frac{\partial \phi}{\partial q^0} - \frac{1}{2} i p_0 \phi = \frac{1}{2} i p^0 \star \phi.$$

Os campos ϕ e π são agora operadores definidos no espaço de Hilbert $H(\Gamma)$. Seguindo a prescrição usual de processos de quantização canônica, impomos as seguintes regras de comutação:

$$[\pi(q,q_0;p), \phi(q\prime,q_0;p\prime)] = i\delta(q-q\prime)\delta(p-p\prime), \tag{6.42}$$

e

$$[\pi^{\dagger}(q,q_0;p),\phi^{\dagger}(q\prime,q_0;p\prime)] = i\delta(q-q\prime)\delta(p-p\prime), \tag{6.43}$$

sendo que os demais comutadores entre os campos e momenta são nulos.

6.4.1 Decomposição de Fourier do Campo. Operadores de Criação e Destruição de Partículas

Os campos $\phi(q,p)$ e $\phi^{\dagger}(q,p)$ são operadores, cujas expansões de Fourier podem ser escritas como

$$\phi(q,p) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[a(k,p)e^{-ikq} + b^{\dagger}(k,p)e^{ikq}], \tag{6.44}$$

e

$$\phi^{\dagger}(q,p) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[b(k,p)e^{-ikq} + a^{\dagger}(k,p)e^{ikq}]. \tag{6.45}$$

em que $\omega_k = [(\frac{1}{2}\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + m^2]^{1/2}$ e as variáveis canônicas relativas a posição são dadas por $q \rightarrow k$.

É importante destacar que as funções

$$f_k(q) = \frac{e^{-ikq}}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}}},$$

formam um conjunto ortonormal

$$\int f_k^*(q)\widetilde{p^0\star} f_{k'}(q)d^3q = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{6.46}$$

em que $A\widetilde{p^0\star}B = A(p^0\star B) - (p^0\star A)B$.

Sendo assim, os campos $\phi(q,p)$ e $\phi^{\dagger}(q,p)$ podem ser escritos como

$$\phi(q,p) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[a(k,p)f_k(q) + b^{\dagger}(k,p)f_k^*(q)] \tag{6.47}$$

e

$$\phi^{\dagger}(q,p) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[b(k,p)f_k(q) + a^{\dagger}(k,p)f_k^*(q)]. \tag{6.48}$$

As equações (6.47) e (6.48) podem ser invertidas utilizando a equação (6.46), o que resulta em:

$$a(k,p) = \int d^3q[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}} f_k^*\widetilde{p^0\star}\phi(q,p); \tag{6.49}$$

$$b(k,p) = \int d^3q[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}} f_k^*\widetilde{p^0\star}\phi^{\dagger}(q,p); \tag{6.50}$$

$$a^{\dagger}(k,p) = \int d^3q[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}} \phi^{\dagger}(q,p)\widetilde{p^0\star} f_k; \tag{6.51}$$

$$b^\dagger(k,p) = \int d^3q[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}}\phi(q,p)\widetilde{p^0\star} f_k. \tag{6.52}$$

A partir das equações (6.49) e (6.51), podemos calcular o comutador:

$$[a(k,p), a^\dagger(k',p')] = \int d^3q d^3q'(2\pi)^3(2\omega_k 2\omega_{k'})^{\frac{1}{2}}[f_k^* \widetilde{p^0\star}\phi(q,p), \phi^\dagger(q',p')\widetilde{p^0\star} f_{k'}],$$

$$= \int d^3q d^3q'(2\pi)^3(2\omega_k 2\omega_{k'})^{\frac{1}{2}}[f_k^* p^0 \star \phi - p^0 \star f_k^*\phi, \phi^\dagger p^0 \star f_{k'} - p^0 \star \phi^\dagger f_{k'}],$$

$$= \int d^3q d^3q'(2\pi)^3(2\omega_k 2\omega_{k'})^{\frac{1}{2}}\{f_k^* p^0 \star f_{k'}[p^0 \star \phi, \phi^\dagger] + f_{k'} p^0 \star f_{k'}^*[\phi, p^0 \star \phi^\dagger]\},$$

$$= \int d^3q d^3q'(2\pi)^3(2\omega_k 2\omega_{k'})^{\frac{1}{2}} f_k^* \widetilde{p^0\star} f_{k'}.$$

O que finalmente nos leva a

$$[a(k,p), a^\dagger(k',p')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{6.53}$$

Similarmente, podemos demonstrar que

$$[b(k,p), b^\dagger(k',p')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{6.54}$$

e que os demais comutadores são nulos.

Os operadores $a(k,p)$, $a^\dagger(k,p)$, $b(k,p)$ e $b^\dagger(k,p)$ serão fundamentais na interpretação de partícula da teoria de campos quantizados no espaço de fase. Nesse caminho, podemos definir os operadores

$$N(k,p) = a^\dagger(k,p)a(k,p) \tag{6.55}$$

e

$$M(k,p) = b^\dagger(k,p)b(k,p). \tag{6.56}$$

É uma tarefa simples mostrar que $N(k,p)$ e $N(k',p')$ comutam, como veremos a seguir,

$$\begin{aligned}
[N(k,p), N(k',p')] &= [a^\dagger(k,p)a(k,p), a^\dagger(k',p')a(k',p')] \\
&= a^\dagger(k,p)[a(k,p), a^\dagger(k',p')]a(k',p') \\
&\quad + a^\dagger(k',p')[a^\dagger(k,p), a(k',p')]a(k,p) \\
&= (a^\dagger(k,p)a(k',p') - a^\dagger(k',p')a(k,p))\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')
\end{aligned}$$

$$= \quad 0. \tag{6.57}$$

De forma análoga, podemos mostrar também que $[M(k,p), M(k',p')] = 0$.

$$\begin{aligned}
[M(k,p), M(k',p')] &= [b^\dagger(k,p)b(k,p), b^\dagger(k',p')b(k',p')] \\
&= b^\dagger(k,p)[b(k,p), b^\dagger(k',p')]b(k',p') \\
&\quad +b^\dagger(k',p')[b^\dagger(k,p), b(k',p')]b(k,p) \\
&= (b^\dagger(k,p)b(k',p') - b^\dagger(k',p')b(k,p))\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Assim, podemos escrever,

$$N(k,p)|n(k,p)\rangle = n(k,p)|n(k,p)\rangle, \tag{6.59}$$

e

$$M(k,p)|m(k,p)\rangle = m(k,p)|m(k,p)\rangle. \tag{6.60}$$

E ainda, se considerarmos as seguintes relações de comutação, $[N(k,p), a^\dagger(k,p)] = a^\dagger(k,p)$ e $[N(k,p), a(k,p)] = -a(k,p)$, notamos que são válidas as seguintes expressões,

$$N(k,p)a^\dagger(k,p)|n(k,p)\rangle = (n(k,p)+1)a^\dagger(k,p)|n(k,p)\rangle, \tag{6.61}$$

e

$$N(k,p)a(k,p)|n(k,p)\rangle = (n(k,p)-1)a(k,p)|n(k,p)\rangle. \tag{6.62}$$

Do mesmo modo, encontramos

$$M(k,p)b^\dagger(k,p)|m(k,p)\rangle = (m(k,p)+1)b^\dagger(k,p)|m(k,p)\rangle \tag{6.63}$$

e

$$M(k,p)b(k,p)|m(k,p)\rangle = (m(k,p)-1)b(k,p)|m(k,p)\rangle. \tag{6.64}$$

As equações (6.59), (6.61) e (6.62) nos informam que, se o estado $|k,p\rangle$ tem autovalor $n(k,p)$, e os estados $a^\dagger(k,p)|n(k,p)\rangle$ e $a(k,p)|n(k,p)\rangle$ são autoestados de $N(k,p)$ com autovalores $n(k,p)+1$ e $n(k,p)-1$, respectivamente. E, analogamente, por meio das equações (6.60), (6.63) e (6.64) pecebemos que o estado $|k,p\rangle$ tem autovalor $m(k,p)$ e os estados $b^\dagger(k,p)|m(k,p)\rangle$ e $b(k,p)|m(k,p)\rangle$ são autoestados de $M(k,p)$ com autovalores $m(k,p)+1$ e $m(k,p)-1$, respectivamente. Dessa forma, os operadores $a^\dagger(k,p)$ e $a(k,p)$ são interpretados como operadores de criação e aniquilação de partículas, respectivamente. E, de forma análoga, $b^\dagger(k,p)$ e $b(k,p)$ podem ser interpretados como operadores de criação e aniquilação de antipartículas, respectivamente.

Nesse sentido, se utilizarmos o ordenamento normal, podemos escrever o hamiltoniano do campo de Klein-Gordon no espaço de fase utilizando os operadores de aniquilação e criação. Podemos escrever, então,

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a^\dagger(k,p)a(k,p) + b^\dagger(k,p)b(k,p)]. \tag{6.65}$$

E a carga do campo de Klein-Gordon no espaço de fase, escrita em termos desses mesmos operadores, é dada por

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a^*(k,p)a(k,p) - a^*(k,p)a(k,p)]. \tag{6.66}$$

Podemos mostrar também que as partículas que são os quanta do campo de Klein-Gordon obedecem à estatística de Bose-Einstein. Para isso, basta notarmos que

$$|n(k,p), m(k,p)\rangle = \frac{1}{(n(k,p)!m(k,p)!)^{1/2}}[a^\dagger(k,p)]^n[b^\dagger(k,p)]^m|0\rangle. \tag{6.67}$$

Pela relação acima, percebemos que não há restrição para $n(k,p)$ e $m(k,p)$, ou seja, qualquer número de partículas e antipartículas pode existir em um mesmo estado. Portanto, as partículas são classificadas como bósons. Esse resultado se deve às relações de comutação dadas nas equações (6.53) e (6.54). Essas conclusões são conhecidas como a conexão entre spin e estatística, que foi primeiro tratado por Pauli [54].

Uma importante relação que pode ser mostrada facilmente, trata da correspondência entre a solução da equação de Klein-Gordon livre $\varphi(q,p) = \xi(p^\mu)e^{-ik_\mu q^\mu}$ e a expressão $\langle 0|\phi(q,p)|k,p\rangle$, que é dada por,

$$\varphi(q,p) = \langle 0|\phi(q,p)|k,p\rangle. \tag{6.68}$$

Para demonstrar essa relação, introduziremos a equação (6.44) na equação (6.68), obtendo,

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(q,p)|k,p\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[a(k,p)e^{-ikq} + b^\dagger(k,p)e^{ikq}]|k,p\rangle \\ &= \delta(p-p')e^{-ikq}. \end{aligned}$$

Resultado que corresponde a solução da equação de Klein-Gordon livre no espaço de fase.

Estabeleceremos agora a relação entre a função de Green calculada no capítulo 5, equação (5.53), e a expressão $\langle 0|T[\phi(q,p)\phi^\dagger(q',p')]|0\rangle$, que é importante por estabelecer a relação entre o processo de quantização canônico e o processo de quantização via formalismo funcional. Nesse sentido, iniciaremos os cálculos a partir da função de Green, dada por

$$G(q^\mu, p^\mu, p'^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k^\mu \frac{\delta(p^\mu - p'^\mu) e^{-ik^\mu q_\mu}}{(\frac{1}{2}k_0 - p_0)^2 - [(\frac{1}{2}\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m^2]}. \tag{6.69}$$

Podemos escrevê-la ainda da seguinte forma,

$$G(q^\mu, p^\mu, p'^\mu) = \delta(p - p') \int \frac{d^3\mathbf{k} dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikq}}{2\omega_k} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}k_0 - p_0 - \omega_k + i\epsilon} - \frac{1}{\frac{1}{2}k_0 - p_0 + \omega_k - i\epsilon} \right), \tag{6.70}$$

onde $\omega_k^2 = (\frac{1}{2}\mathbf{k} - \mathbf{p})^2$. A integração, após uma mudança de variáveis e a utilização do teorema de Cauchy, nos fornece

$$G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu) = 2i \frac{\delta(p^\mu - p'^\mu)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_k} [\theta(q_0 - q_0') e^{-ik(q-q')} + \theta(q_0' - q_0) e^{ik(q-q')}]. \tag{6.71}$$

Por outro lado, temos a partir da susbstituição dos operadores dados nas equações (6.44) e (6.45) na relação $\langle 0|T[\phi(q,p)\phi^\dagger(q',p')]|0\rangle$ o seguite resultado,

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\phi(q,p)\phi^\dagger(q',p')]|0\rangle = \quad & \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6 (2\omega_{k'}\omega_k)^{1/2}} [\theta(q_0 - q_0') e^{-i(kq - k'q')} \langle 0|a(k,p) a^\dagger(k',p')|0\rangle \\ & + \theta(q_0' - q_o) e^{-i(kq' - k'q)} \langle 0|a(k,p) a^\dagger(k',p')|0\rangle], \end{aligned}$$

onde a função degrau $\theta(x)$ é definida por $\theta(x) = 1$, para $x > 1$, $\theta(x) = 0$, para $x < 1$. Usando a relação de comutação dada na equação (6.53),chegamos a,

$$\langle 0|T[\phi(q,p)\phi^\dagger(q',p')]|0\rangle = \frac{\delta(p^\mu - p'^\mu)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_k} [\theta(q_0 - q_0') e^{-ik(q-q')} + \theta(q_0' - q_0) e^{ik(q-q')}]. \tag{6.72}$$

E, assim, podemos escrever,

$$\langle 0|T[\phi(q,p)\phi^\dagger(q',p')]|0\rangle = \frac{i}{2} G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu). \tag{6.73}$$

Com isso, encontramos uma interpretação para a função de dois pontos em termos da criação, propagação e destruição da partícula entre dois pontos no espaço de fase.

7 *Conclusão e Perspectivas*

O conceito de espaço de fase na mecânica quântica foi introduzido em 1932 por Wigner, buscando efetuar correções quânticas na mecânica estatística. Desde então, o método da função de Wigner tem demonstrado ser bastante útil numa diversidade de problemas práticos da mecânica estatística, física nuclear, óptica quântica, física da matéria condensada e também em trabalhos na área de tomografia quântica. No formalismo de Wigner, cada operador quântico usual é associado a uma função *c-número* e o produto entre dois operadores quântico é obtido na representação de Wigner, mediante o produto estrela entre as respectivas funções *c-números.* Isso nos remete a uma relação entre o formalismo de Wigner e a geometria não-comutativa. A inserção da não-comutatividade como parte da estrutura física dos fenômenos foi estabelecida por Heisenberg em 1930, que além da sua famosa relação de incerteza, sugeriu a introdução de relações de comutação para as coordenadas espaço-tempo. A partir da proposta de Heisenberg, a geometria não-comutativa passou a ser utilizada em diversos contextos, tais como na física da matéria condensada, como a supercondutividade e o efeito Hall quântico, nas propostas de violações da simetria de Lorentz e no desenvolvimento da teoria de cordas.

Nesta tese, estudamos alguns aspectos da mecânica quântica no espaço de fase, baseados em representações do grupo de Galilei e também do grupo de Poincaré em um espaço de Hilbert definido a partir de uma variedade simplética. Neste contexto, no capítulo 1, abordamos alguns pontos do método da função de Wigner, estudando suas principais propriedades. Entendemos que, embora a função de Wigner, $f_w(q,p)$, seja identificada como uma quase-distribuição de probabilidades no espaço de fase, as integrais $\int dq f_w(q,p)$ e $\int dp f_w(q,p)$ são distribuições de probabilidades. Vimos que, na tentativa de representar um produto de operadores no formalismo de Wigner, surge a definição de produto estrela, assim como as equações que descrevem a evolução temporal da função de Wigner aparecem constituídas do produto estrela. Nesse sentido, devido à importância do produto estrela no formalismo de Wigner, ainda no capítulo 1, estudamos as propriedades do produto de Weyl.

No capítulo 3, vimos que, na representação simplética do grupo de Galilei, as variáveis canônicas são dadas por $\widehat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p$ e $\widehat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q$ e os estados do sistema são especificados por vetores no espaço de Hilbert no espaço de fase, dados por $\psi(q,p,t)$. O formalismo quântico usual é obtido usando o método da função de Wigner. Isto é, mostramos que a função dada por $f(q,p,t) = \psi(q,p,t) \star \psi^{\dagger}(q,p,t)$, definida no espaço de fase, é uma função de Wigner. E, em seguida, no capítulo 4, aplicamos a equação de Schroedinger no espaço de fase para encontrar as amplitudes de probabilidade para os seguintes casos: o potencial quártico, o potencial de Liouville e o problema de Landau. Todos esses problemas de autovalores foram resolvidos com base num formalismo autocontido, mostrando como o método aqui introduzido pode ser utilizado para o cálculo da função de Wigner utilizando as técnicas vantajosas de espaços lineares (Hermiteanos) Nesse método, a informação sobre os sistemas quânticos no espaço de fase é obtida de forma direta, abandonando as dificuldades do formalismo de Wigner, tais como a não-positividade da função de Wigner.

À procura de resultados relativísticos, no capítulo 5, utilizamos novamente operadores-estrela e construímos representações para o grupo de Poincaré num espaço de Hilbert, associado a uma variedade simplética, obtendo como resultado as equações de Klein-Gordon e de Dirac, escritas no espaço de fase. Também construímos lagrangianas para as equações de Klein-Gordon e de Dirac e obtivemos, a partir destas lagrangianas, as correntes conservadas parta estes dois campos. Analisamos a equação de Klein-Gordon sujeita a uma autointeração, aplicando para isso o método da função de Green. E o ponto principal está no fato de que, assim como no caso não relativístico, estabelecemos a relação entre as amplitudes no espaço de fase e a função de Wigner. Estudamos, ao final, as simetrias de calibre não-abelianos. Com o objetivo de prolongar essas discussões, no capítulo 6, estudamos a quantização no espaço de fase, usando, para isso, o método de integrais de trajetória e também o formalismo canônico.

Aspectos interessantes que ainda podem ser estudados são outros pontos da teoria perturbativa, tais como a construção do potencial efetivo e os processos de quebra de simetria no espaço de fase. Além disso, merecem ser estudados, por exemplo, o problema de muitos corpos, a teoria do espalhamento no espaço de fase e a discussão de aspectos de quantização geométrica nesse contexto. .

.

Referências

[1] H. Weyl, Z. Phys. **46** (127) 1

[2] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949) 99.

[3] H. S. Snyder,Phys. Rev. **71** (1947) 38.

[4] R. J. Szabo, Phys. Rep. **378** (2003) 207.

[5] N. Seiberg, E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, hepth/9909142.

[6] R. Amorim, F. A. Farias, Phys. Rev. D **69** (2004) 045013.

[7] M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. M. D. Vianna, Ann. Phys. (2004).

[8] E. P. Wigner, Z. Phys. Chem. **B19 40** (1932) 749.

[9] M. Hillery, R. F. O´Connel, M. O. Scully, E. P. Wigner; Phys. Rep. **106** (1984) 121.

[10] E. P. Wigner, Ann. Math. **40** (1939) 149.

[11] S. Chountassis, A. Vourdas, Phys. Rev. A **58** (1998) 1794.

[12] Y. S. Kim, M. S. Noz, *Phase Space Picture on Quantum Mechenics-Group Theoretical Approach* (World Scientific, Londres,1991).

[13] T. Curtright, D. Fairlie, C. Zacos, Phys. Rev. D **58** (1998) 25002.

[14] V. V. Dodonov, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 7721.

[15] V. V. Dodonov, V. I Manko, Physica **137A** (1986) 306.

[16] V. V. Dodonov, V. I Manko, O. V. Shakhmistova Phys. Lett. **102A** (1984) 295.

[17] V. V. Dodonov, V. I Manko, O. V. Manko, Physical Review A **50** (1994) 813.

[18] V. V. Dodonov, L.A. de Souza, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 13955.

[19] V. V. Dodonov, V. I Manko, D. L. Ossipov, Physica **132A** (1985) 269.

[20] V. V. Dodonov, Phys. Lett. A **364** (2007) 368.

[21] V. V. Dodonov, V. I Manko, O. V. Manko, Physical Review A **49** (1994) 2993.

[22] A. Wunsche, J. Mod. Optics **44** (1997) 2293.

[23] U. Leonhardt, J. Mod. Optics **44** (1997) 2271.

[24] L. M. Artiles, R. D. Gill, M. I. Guta, J. R. Statist. Soc. B **67** (2005) 109.

[25] M. G. Raymer, Contemporary Physics **38**(1997) 343.

[26] L. G. Lutterbach, L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 2547.

[27] R. G. G. Amorim,M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, Phys. Lett. A **361** (2007) 467

[28] K. Imre, E. Ozizmir,M. Rosembaum, P. F. Zweifel, J. Math. Phys. **8** (1967) 1097.

[29] T. Curtright, T. Uematsu, C. Zachos,Generating all Wigner Functions, (2001) [hep-th/0011137]

[30] D. Galetti, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Notas do Curso Apresentado na III Escola Mário Schenberg de Pós-Graduação, João Pessoa, 1986.

[31] F. C. Khanna, A. P. C. Malboisson, J. M. C. Malboisson, A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (W. Scientific, London, 2009).

[32] M. D. Oliveira,*Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Dissertação de Mestrado, IF-UFBA, Salvador, 2002.

[33] R. G. G. Amorim, *Formulação de Teorias de Campos via estruturas simpléticas e o produto de Weyl*, Dissertação de Mestrado, IF-UnB, Brasília, 2006.

[34] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantun Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1977).

[35] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Preprint, hep-th/0202062.

[36] X. Calmet, Eur. Phys. J. C**41** (2005) 269.

[37] A. Kokado, T. Okamura, T. Saito, Phys. Rev. D**69** (2004) 128007.

[38] A. Jellal, J. Phys. A**34** (2001) 10159.

[39] I. R. Klebanov, Phys. Rev. D **51** (1995) 1836.

[40] C. Charmousis, Class. Quantum Grav.**19** (2002) 83.

[41] W. G. Penney, R. Schalapp, Phys. Rev. D **41** (1932)194.

[42] W. G. Penney, R. Schalapp, Phys. Rev. D **42** (1932)666.

[43] N A. Lemos, G. A. Monerat, E. V. Corrêa Silva, G. A. Oliveira Neto, L. G. Ferreira Filho, Phys. Rev. D **75** (2007)161.

[44] F. A. Bajay, Órbitas Periódicas em Sistemas Caóticos,Tese de Doutorado, IF-UNICAMP, São Paulo, 1996.

[45] H. Higuchi, K. Takatsuka, Phys. Rev. E **66** (2002).

[46] A. Feldman and A. H. Kahn, Phys. Rev. B **1** (1970) 4584.

[47] J. R. Klauder and B. Skargestan, *Coherent States: application in physics and mathematical physics* **213**(World Scientific, NY, 1985).

[48] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Edusp, SP, 2005).

[49] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley Sons, NY, 1987).

[50] Ronni G. G. Amorim, Faqir C. Khanna, Ademir E. Santana, José David M. Vianna, Physica A **388** (2009)3771.

[51] M. O. Caminha Gomes, *Teoria Quântica de Campos* (Edusp, São Paulo, 2002).

[52] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*(Princeton University Press, Princeton, 2003).

[53] R. Amorim, J. Barcelos Neto, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 8851.

[54] R. Jost in M. Fierz V. F. Weisskopf (eds.), *Theoretical Physics in the Twenthieth Century*, Interscience, 1960.

[55] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems*,(Addison-Wesley, Massachusetts, 1962).

[56] A. Ederlyi et al, *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project(McGraw-Hill, New York, 1953).

[57] A. Erdelyi et al., *Tables of Integral Transforms*, Bateman Manuscript Project (McGraw-Hill, New York,1954).

[58] M. C. B.Fernandes, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 3841.

[59] A. E. Santana, A. MatosNeto, J. D. M. Vianna, F. C. Khanna; Phys. A **280** (2001) 405.

[60] M. C. B. Andrade, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 3841.

[61] M. C. B. Andrade, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 4015.

[62] A. E. Santana, F. C. Khanna, Y. Takahashi, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 327.

[63] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, in Recent Res. Devel. Phys. **1** (2000) 45.

[64] T. Fillippakis, P. Fillippakis, D. Vavougios,A. Jannussis,Hadronic Journal **13** (1990) 1.

[65] M. R. Douglas, N. Nekrasof, *Noncomutative Field Theory*, (2001), [hep-th/0106048].

[66] A. E. Santana, J. D. M. Vianna, Rev. Bras. Ens. Fís. **14** (1992) 72.

[67] A. E. Santana, Rev. Bras. Ens. de Fís., **19** (1997) 113.

[68] E. Inonu, E. P. Wigner, Nuovo Cimento **9** (1952) 705.

[69] Y. Takahashi, Fortschr. Phys. **36** (1988) 63.

[70] Hamermesh, Ann. Phys.,(N.Y.) **17** (1960) 518.

[71] J. M. Levy-Leblond, J. Math. Phys. **4** (1963) 776.

[72] A. Loinger, Ann. Phys. (N.Y.)**20** (1962) 132.

[73] D. B. Fairlie, *Moyal Brackets, Star Products and generalised Wigner Functions*, (1998) [hep-th/9806198].

[74] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).

[75] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dinamics:A modern Perspective*(John Wiley, New York, 1974).

[76] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980).

[77] B. Shutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londres, 1980).

[78] A. Messiah, *Quantum Mechanics*(Wiley, New York, 1961).

[79] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3ªEd.(Wiley, New York, 1977).

[80] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1977).

[81] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).

[82] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. Stegun, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. Nº 55(U.S. GPO, Washington,D.C.1965).

[83] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*(Dover, New York,1950).

[84] T. M. Rocha Filho, *Mecânica Clássica*(2004).www.fis.unb.br.