Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Existência e Multiplicidade de soluções limitadas para uma classe de equações quasilineares elípticas

por

Shirley da Silva Macedo

2009

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e Multiplicidade de soluções limitadas para uma classe de equações quasilineares elípticas

por

Shirley da Silva Macedo

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de março de 2009.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Luiz de Melo - FUP/UnB (Orientador)

Prof. Dra. Ana Maria Amarillo Bertone - MAT/UFU - Membro

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves - MAT/UnB - Membro

“Bem-aventurado o homem que acha sabedoria,
e o homem que adquire conhecimento;
Porque melhor é a sabedoria do que os rubis;
e tudo o que mais se deseja não se pode comparar com ela.”
(Prov. 3:13; 8:11)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que, com sua grandeza e excelência me fez compreender um pouco mais desta ciência, dando-me forças, amparando-me e ajudando-me em todos os momentos.

Ao professor Antônio Luiz de Melo pelo competente, dedicado e excelente trabalho de orientação, profissionalismo, agradeço pela amizade e confiança a mim direcionadas.

Aos professores Ana Maria Amarillo Bertone, José Valdo Abreu Gonçalves e Carlos Alberto Pereira dos Santos, respectivamente membros e suplente da banca examinadora pelas sugestões e correções para a efetivação de um melhor trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da Unb e amigos da Pós-Graduação que, de forma direta ou não, me auxiliaram durante todo o curso.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos meus Pais e ao meu irmão que sempre me acolheram com suas palavras de ânimo, coragem, carinho e atenção no transcorrer de todos os momentos da minha vida.

Ao meu namorado, Vinícius, pelo apoio incondicional, carinho, amor, dedicação, incentivo e companheirismo a mim dedicado.

Aos meus amigos, Antônia, Linda Beatriz e Espedito pela atenção, ajuda e harmonioso convívio.

Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a existência de soluções inteiras positivas de equações elípticas quasilineares de segunda ordem do tipo

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \qquad \mathbb{R}^N$$

onde $f(x,u)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ e $p > 1$.

Usando o conceito de sub e supersolução, demonstraremos que a equação acima possui uma infinidade de soluções positivas limitadas em $\mathbb{R}^N$.

Analisaremos também questões relacionadas ao comportamento assintótico dessas soluções e que as mesmas são limitadas inferiormente por uma constante positiva.

Palavras-chaves: Equações Quasilineares Elípticas, Soluções Inteiras, Comportamento Assintótico, Sub e Supersolução.

ABSTRACT

In this work we study the existence of entire positive solutions for quasilinear elliptic equations of second order of the type

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \qquad \mathbb{R}^N$$

where $f(x,u)$ is a continue function in $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ and $p > 1$.

Using the concept of lower and upper solutions, we prove that the above equation has infinitely many bounded positive solutions in $\mathbb{R}^N$.

We also analyze questions related with the asymptotic behavior of these solutions and that they are limited from below by a positive constant.

Key words: Quasilinear Elliptic Equations, Entire Solutions, Behavior Asymptotic, Lower and Upper Solutions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, consideraremos equações diferenciais parciais elípticas quasilineares de segunda ordem do tipo

$$(P)_p : \qquad -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

onde $f(x,u)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, $p > 1$ e $N \geq 3$.

Por uma solução de $(P)_p$, entenderemos como sendo uma função u de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$, isto é, u é uma solução inteira, tal que $|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ possui derivadas parciais em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\, \varphi \, dx = 0, \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Equações do tipo $-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)$ aparecem frequentemente em modelos matemáticos relacionados ao estudo de problemas de mecânica dos fluidos, mais especificamente, no estudo de fluidos não-Newtonianos. Quando $p > 2$ os fluidos são denominados dilatantes, enquanto $p < 2$ se referem aos denominados pseudo-plásticos. O caso $p = 2$ corresponde aos fluidos Newtonianos. Nesse caso, a equação $(P)_p$ torna-se

$$(P)_2 : \qquad \Delta u + f(x,u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Esse problema foi amplamente estudado, nos últimos anos, por um grande número de pesquisadores, confira [3], [5], [9], [10], [12], [28] e [29] e suas referências.

As razões que motivaram o desenvolvimento de uma ampla literatura sobre o problema $(P)_2$ deve-se, principalmente, ao fato desse aparecer em diversos outros contextos, tais como: a teoria de equações de reação-difusão e a existência em $\mathbb{R}^N$ de métricas completas conformes a métrica euclidiana. Para maiores detalhes, veja [4], [19] e [20] e suas referências.

Estudaremos alguns resultados recentes concernentes à existência, multiplicidade e comportamento assintótico de soluções inteiras positivas da equação $(P)_p$, analisados por Yang e Yin [26], em 2006. Em especial, estaremos interessados em situações onde a função f satisfaz uma condição do tipo

$$| f(x,t) | \leq \rho(x)F(t), \tag{1}$$

para funções ρ e F apropriadas.

Nesse caso, mostraremos a existência de soluções da equação $(P)_p$, relacionando essas com soluções do problema

$$(P)_0 : \begin{cases} -\Delta_p u = \rho(x), \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases}$$

Soluções do problema $(P)_0$ são comumente encontradas quando supomos alguma condição do tipo

$$H_\infty = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s^{N-1}} \int_0^s t^{N-1}\psi(t)dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty$$

onde $\psi(r) = \max\limits_{|x|=r} \rho(x)$.

Alguns exemplos de funções $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0,\infty)$ que satisfazem H_∞, com $p > 2$, são as funções ρ_1 e ρ_2 dadas por:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{1+|x|^p} \qquad \text{e} \qquad \rho_2(x) = \frac{1}{2+sen(|x|^2)+|x|^p}.$$

A condição H_∞ tem sido usada recentemente por muitos autores na busca de solução de equações diferenciais parciais. Confira [5], [10], [11], [26] e suas referências. Esta condição, ou sua similar

$$\widetilde{H}_\infty = \int_0^\infty s\psi(s)ds < \infty$$

generalizam uma condição apresentada por Ni [20].

Observação I.1: Quando $p = 2$, as condições H_∞ e $\widetilde{H}_\infty$ são equivalentes. Confira Lema 3.2, Apêndice A.

Em 1982, Ni [20] considerou a equação

$$\Delta u + K(x)u^{\frac{N+2}{N-2}} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3$$

e demonstrou que esse problema tem uma infinidade de soluções positivas limitadas, com a propriedade que cada uma dessas soluções é limitada inferiormente por uma constante positiva, quando se supõe

$$|K(x)| \leq \frac{c}{|x|^l} \quad \text{para algum} \quad l > 2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

ou $K(x)$ se comporta como $\dfrac{c}{r^2(lnr)^2}$, $r = |x|$ quando $r \to \infty$.

Em 2005, Zhou e Ye [25], inspirados no trabalho de Ni, consideraram a equação semilinear elíptica

$$\Delta u + f(x,u) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{2}$$

e demonstraram que se $f(x,t)$ satisfaz (1), sob hipóteses apropriadas em ρ e F, então o problema (2) tem uma infinidade de soluções positivas limitadas inferiormente por uma constante positiva.

Os resultados estudados aqui, complementam os desenvolvidos por Ni [20] e generalizam, em alguns aspectos, os resultados apresentados por Zhou e Ye [25].

O primeiro teorema que demonstraremos é de grande importância em todo o trabalho pois será usado como ferramenta básica no estabelecimento de multiplicidade de soluções da equação $(P)_p$.

Teorema (ZY)**:** *Suponha que* $f(x,u)$ *é definida em* $\mathbb{R}^{N+1}$ *e é localmente Hölder contínua (com expoente* $\lambda \in$ *(0,1)) em* x*. Suponha, além disso, que existem funções* $v, w \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *tais que*

$$-div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \geq f(x,v), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \tag{3}$$

$$-div(|\nabla w|^{p-2}\nabla w) \leq f(x,w), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

e

$$w(x) \leq v(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

Além disso, $f(x,u)$ *é localmente Lipschitz em* u*, no conjunto*

$$\Sigma = \{(x,u) : x \in \mathbb{R}^N; w(x) \leq u \leq v(x)\}.$$

Então, a equação $(P)_p$ *possui uma solução inteira* $u(x)$ *satisfazendo*

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

O próximo teorema estabalece que, se o problema $(P)_0$ tem solução, então o crescimento de $F(t)$ na origem ou no infinito é determinante para a existência de múltiplas soluções.

Teorema (MS_1)**:** *Seja* $f(x,u)$ *uma função que satisfaça as hipóteses do Teorema* (ZY)*, tal que*

$$|\, f(x,u) \,| \leq \rho(x)F(u) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{6}$$

e ρ localmente Hölder contínua satisfazendo

$$0 < \int_1^{\infty} r^{\frac{1}{p-1}} \psi(r)^{\frac{1}{p-1}} dr < \infty \qquad \text{se} \quad 1 < p \leq 2$$

ou

$$0 < \int_1^{\infty} r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} \psi(r) dr < \infty \qquad \text{se} \quad p \geq 2,$$

onde $\psi(r) = \max_{|x|=r} \rho(x)$ para $N \geq 3$ e $p < N$. Suponha, além disso, que F é contínua em $(0, \infty)$ e satisfaz

$$(i) \lim_{u \to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad (ii) \lim_{u \to \infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0. \tag{7}$$

Então a equação $(P)_p$ possui uma infinidade de soluções positivas em $\mathbb{R}^N$. Além disso, cada solução é limitada inferiormente e superiormente por uma constante positiva.

Esse resultado pode ser aplicado na busca de soluções para os problemas.

$$(E_1) \quad -\Delta_p u = \rho(x) u^{\gamma} [ln(1+u)]^{\eta}, \quad \mathbb{R}^N$$

$$(E_2) \quad -\Delta_p u = \rho(x)(1 - cosu) u^{p-2}, \quad \mathbb{R}^N$$

onde $\rho(x)$ é localmente Hölder contínua, com expoente $\lambda \in (0,1)$ em $\mathbb{R}^N$ satisfazendo H_∞, γ, η são constantes e $p > 1$.

Note ainda que esse teorema se aplica em casos onde $F(u)$ é sublinear ou superlinear. Em particular,

$$(E_3) \quad -\Delta_p u = \rho(x) u^{-\alpha}, \quad \mathbb{R}^N$$

$$(E_4) \quad -\Delta_p u = K(x) u^{p^*-1}, \quad \mathbb{R}^N$$

onde $\alpha > 0$ e $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev, desde que $K(x)$ e $\rho(x)$ satisfaçam H_∞. Assim, temos que E_1, E_2, E_3 e E_4 possuem uma infinidade de soluções positivas em $\mathbb{R}^N$.

Observação I.2: A verificação dos exemplos E_1 ao E_4 encontra-se no Apêndice B.

O próximo teorema mostra que o "crescimento"de $F(t)$ não é fundamental para a existência de múltiplas soluções da equação $(P)_p$. Pode-se encontrar infinitas soluções de $(P)_p$ quando a norma infinito da solução de $(P)_0$ é relativamente pequena.

Teorema (MS_2)**:** *Seja $f(x,u)$ uma função que satisfaça as hipóteses do Teorema (ZY), tal que*

$$| f(x,u) | \leq \rho(x)F(u) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{8}$$

onde ρ é localmente Hölder contínua, e F é uma função contínua definida em $(0,\infty)$. Se existir uma constante positiva $\epsilon_0 = \epsilon_0(F)$, tal que se o problema $(P)_0$ tem uma solução limitada U satisfazendo $U(x) < \epsilon_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, então a equação $(P)_p$ possui uma infinidade de soluções limitadas em $\mathbb{R}^N$. Além disso, essas soluções são limitadas por baixo por uma constante positiva.

O teorema que se segue, estabelece a possibilidade de uma forma integral para o número ϵ_0 do Teorema (MS_2).

Teorema (MS_3)**:** *Seja $f(x,u)$ como no Teorema (ZY), que verifica*

$$0 \leq f(x,u) \leq \rho(x)F(u), \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \tag{9}$$

para alguma função $F : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ derivável e não-decrescente tal que

$$\int_1^\infty \frac{dt}{G(t)^{\frac{1}{p}}} < \infty, \qquad \text{onde} \ \ G(t) = \int_0^t F(s)\, ds. \tag{10}$$

Suponha também que ρ é localmente Hölder contínua, que a solução de $(P)_0$ exista e *verifica*

$$\parallel U \parallel_\infty < \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}. \qquad (11)$$

Então a equação

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0, \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^N, \qquad (12)$$

possui uma infinidade soluções positivas limitadas em $\mathbb{R}^N$. *Além disso, essas soluções são limitadas inferiormente por uma constante positiva.*

Este teorema pode ser aplicado em situações onde os limites (7) do Teorema (MS_1) não se aplicam. Uma dessas situações é o problema:

$$(E_5) \quad -\Delta_p u + \rho(x)(sen^2(u^{\frac{p-1}{2}}) + u^\theta) = 0, \quad \theta > p-1 \quad \text{e} \quad p > 1.$$

Observação I.3: A verificação do exemplo E_5 encontra-se no Apêndice B.

Nosso último resultado pode ser útil quando a condição (7) do Teorema (MS_1) e a condição (11) do Teorema (MS_3) não são satisfeitas.

Teorema (MS_4)**:** *Seja* $f(x,u)$, *como no Teorema* (ZY), *satisfazendo*

$$0 \leq f(x,u) \leq \rho(x)F(u) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \qquad (13)$$

para alguma função $F : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *não-decrescente, derivável e* ρ *localmente Hölder contínua.*

Suponha que a solução U *de* $(P)_0$ *existe e verifica*

$$\parallel U \parallel_\infty < \sup_{t\in(0,\infty)} \left(\frac{t}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} \right).$$

Então a equação $(P)_p$ *possui uma infinidade de soluções positivas limitadas em* $\mathbb{R}^N$. *Além disso, existe uma constante positiva que limita inferiormente essas soluções.*

Um exemplo onde este teorema se aplica é o problema

$$(E_6) \quad -\Delta_p u = \rho(x)u^{p-1}, \quad \mathbb{R}^N$$

onde ρ é uma função localmente Hölder contínua satisfazendo H_∞, confira Apêndice B.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, listamos alguns resultados clássicos de análise que constituem ferramentas necessárias às demonstrações de todos os resultados expostos no transcorrer de toda a dissertação.

No Capítulo 2 focamos nossa atenção à demonstração do Teorema (ZY), sendo este, o ponto principal para o desfecho das demonstrações dos Teoremas $(MS_1) - (MS_4)$.

No Capítulo 3 provamos os Teoremas $(MS_1) - (MS_4)$. Esses resultados garantem a multiplicidade de soluções inteiras positivas limitadas em $\mathbb{R}^N$ para a equação $(P)_p$.

Finalizamos o trabalho com os Apêndices, A e B. Colocamos no Apêndice A alguns resultados técnicos relacionados a prova dos Teoremas (MS_1), (MS_2), (MS_3) e (MS_4), aqui já mencionados, e que serão focalizados, tal como já dito, no Capítulo 3; no Apêndice B, estão registrados os cálculos dos exemplos expostos na parte introdutória deste trabalho e postamos algumas aplicações, sendo estas, de resultados utilizados na demonstração do Teorema (ZY).

CAPÍTULO 1

RESULTADOS CLÁSSICOS DA ANÁLISE

Nesta seção enunciamos algumas definições bem como alguns resultados clássicos de análise utilizados durante as demonstrações dos resultados apresentados no transcorrer deste trabalho.

1.1 Espaços de Schauder

Definição 1.1 (Adams [1])**.** Seja Ω um subconjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^N$ e m um inteiro não negativo. Define-se

$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Se $m = 0$ teremos $C^0(\Omega)$, o qual representaremos por $C(\Omega)$.

E , se $m = \infty$, $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$.

Desde que Ω é aberto, as funções em $C^m(\Omega)$ podem ser ilimitadas. Contudo, se $u \in C(\Omega)$ é limitada e uniformemente contínua em Ω, então podemos estender u para o fecho de Ω continuamente, de modo único. Logo, faz sentido definir:

Definição 1.2 (Adams [1])**.**

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \ \text{ é limitada e uniformemente contínua para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Lembremo-nos que se Ω é aberto e limitado, então o espaço $C(\overline{\Omega})$ é definido por

$$C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \ \text{ é contínua em } \Omega\},$$

o qual, munido da norma $\| \,.\, \|_0$, onde

$$\| \, u \, \|_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|,$$

é um espaço de Banach.

O espaço $C^m(\overline{\Omega})$ munido da norma $\| \,.\, \|_m$, onde

$$\| \, u \, \|_m = \sum_{|\alpha \leq m|} \| \, D^\alpha u \, \|_0,$$

é também um espaço de Banach.

Definição 1.3 (Adams [1])**.** Dado $0 < \lambda \leq 1$ e $u \in C(\overline{\Omega})$. Dizemos que u é *Hölder contínua com expoente* λ se

$$H_\lambda[u] := \sup_{\substack{x,y \, \in \, \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty.$$

Definição 1.4 (Adams [1])**.** Definimos $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ como sendo o seguinte conjunto:

$$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{u : u \ \text{ é Hölder contínua com expoente } \lambda\}$$

$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ munido da norma $\| \,.\, \|_{0,\lambda}$ onde

$$\| \, u \, \|_{0,\lambda} = \| \, u \, \|_0 + H_\lambda[u]$$

é um espaço de Banach.

De maneira análoga, definimos

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\overline{\Omega}) : D^\alpha u \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}),\ \forall\ |\alpha| \leq m\}$$

munido da norma $\|\ .\ \|_{m,\lambda}$ onde

$$\|\ u\ \|_{m,\lambda} = \|\ u\ \|_m + \sum_{|\alpha|\leq m} \|\ D^\alpha u\ \|_{0,\lambda}$$

é um espaço de Banach, denominado *Espaço de Schauder*.

Definição 1.5 (Adams [1])**.** Dados dois espaços vetoriais normados X e Y, dizemos que X está imerso continuamente em Y quando:

(i) $X \subseteq Y$

(ii) a aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua.

Como a inclusão é linear, a propriedade (ii) acima é equivalente a dizer que existe $C > 0$ tal que

$$\|\ x\ \|_Y \leq C\|\ x\ \|_X,\ \forall\ x \in X.$$

Notação: $X \hookrightarrow Y$.

Definição 1.6 (Adams [1])**.** Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Um operador linear, contínuo $T : X \longrightarrow Y$ é compacto quando, para todo subconjunto limitado $A \subseteq X$, tem-se $\overline{T(A)} \subseteq Y$ é compacto.

Alternativamente, X está imerso compactamente em Y se, para toda seqüência limitada $\{u_n\} \subset X$ limitada em X, $\{u_n\} \subset Y$ possui uma subseqüência convergente.

Teorema 1.7 (Adams [1]). *Seja m um inteiro não negativo e $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então:*

(1) $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m}(\overline{\Omega})$

(2) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m}(\overline{\Omega})$

(3) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$

Se além disso, Ω é convexo, temos as imersões:

(4) $C^{m+1,0}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega})$

(5) $C^{m+1,0}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$

Se Ω é limitado, as imersões (2) *e* (3) *são compactas.*

Se Ω é convexo e limitado, as imersões (1) *e* (5) *são compactas.*

Demonstração: Conferir [1], Teorema 1.31, pág. 11.

1.2 Espaços de Sobolev

Definição 1.8 (Brezis [2]). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ da seguinte forma:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável: } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Designamos o espaço $L^\infty(\Omega)$ por:

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ — } f \text{ é mensurável e } \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. } x \in \Omega \}$

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma $\| \,.\, \|_p$, onde

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega |\, u(x) \,|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

E, $L^\infty(\Omega)$, munido da norma $\| \, . \, \|_\infty$, onde

$$\| u \|_\infty = \inf\{C > 0 : | u(x) | \leq C \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega\},$$

é também um espaço de Banach.

Definição 1.9 (Medeiros [18]). Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ um número inteiro, $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multi-índice. Definimos o espaço vetorial $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) : \text{ para todo multiíndice } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \text{ existe e } D^\alpha u \ \in L^p(\Omega)\},$$

onde $D^\alpha u$ é a $\alpha-$ ésima derivada de u no sentido das distribuições.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, define-se a norma de u por:

$$\| u \|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

$$\| u \|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_\infty.$$

Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$, são espaços de Banach, denominados *Espaços de Sobolev*.

O conjunto $W_0^{m,p}(\Omega)$ representa o fecho no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Assim, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe $\{u_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_m \to u \ \text{ em } W^{m,p}(\Omega).$$

Teorema 1.10 (Medeiros [18], Teorema de Rellich-Kondrachov). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^1(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p} \qquad$ *se* $\quad 1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty \qquad$ *se* $\quad p = N$

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\Omega), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 - \dfrac{N}{p} \qquad$ *se* $\quad p > N.$

Demonstração: Conforme [18], Teorema 2.5.4, pág. 79.

1.3 Outros resultados

Proposição 1.11 (Wheeden e Zygmund [27]). *Seja μ uma medida finita em A, f mensurável e limitada em A e ϕ uma função convexa contendo a imagem de f. Então*

$$\phi\left(\frac{\displaystyle\int_A f\ d\mu}{\displaystyle\int_A d\mu}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_A \phi(f)\ d\mu}{\displaystyle\int_A d\mu}.$$

Teorema 1.12 (Wheeden e Zygmund [27], Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $E \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável. Seja também $\{f_k\}$ uma seqüência de funções mensuráveis sobre E tais que $f_k \to f$ q.t.p. em E. Se existe ϕ integrável em E, tal que $|f_k| \leq \phi$ q.t.p. em E para todo k, então*

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Teorema 1.13 (Lima [16], Teorema da Função Implícita). *Sejam os abertos $U \subset \mathbb{R}^N$ e $V \subset \mathbb{R}^M$. Suponha que $a \in U$ e $b \in V$, e além disso, que*

$$\begin{aligned} f : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R}^M \\ (x, y) &\longmapsto (f_1(x,y), \cdots, f_M(x,y)) \end{aligned}$$

é de classe C^k para todo $k \geq 1$, $f(a,b) = 0$ e $\det\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}(a,b)\right) \neq 0$. Então existem abertos $A \subset U$ e $B \subset V$, tais que

- *(i) para cada $x \in A$, existe um único $g(x) \in B$ satisfazendo $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$.*
- *(ii) $g : A \longrightarrow B$, é de classe $C^k(A)$*
- *(iii)*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial x_1} & \frac{\partial g_M}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial x_N} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial y_1} & \frac{\partial f_M}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial y_M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Teorema 1.14 (Lima [15], Fórmula do Valor Médio para Integrais)**.** *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua. Existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Definição 1.15 (Deuel e Hess [6])**.** Uma função u é uma solução fraca do problema

$$(P): \begin{cases} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

se:

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) $u = g$ em $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$,

(iii) $f(x,u) \in L^{p'}(\Omega)$,

(iv) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega f(x,u)\, \varphi\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Definição 1.16 (Deuel e Hess [6])**.** Dizemos que uma função ψ é uma supersolução fraca do problema (P), se:

(i) $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) $\psi = g$ em $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$,

(iii) $f(x,\psi) \in L^{p'}(\Omega)$,

(iv) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla \psi|^{p-2}\, \nabla \psi\, \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega f(x,\psi)\, \varphi\, dx \geq 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$

com $\varphi \geq 0$ em Ω.

Definição 1.17 (Deuel e Hess [6])**.** Dizemos que uma função ϕ é uma subsolução fraca do problema (P), se:

(i) $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) $\phi = g$ em $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$,

(iii) $f(x,\phi) \in L^{p'}(\Omega)$,

(iv) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla \phi|^{p-2}\, \nabla \phi\, \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega f(x,\phi)\, \varphi\, dx \leq 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$

com $\varphi \geq 0$ em Ω.

Teorema (DH) (Deuel e Hess [6]) *Sejam ϕ e ψ, respectivamente sub e supersolução do problema (P) com $\phi(x) \leq \psi(x), \quad \forall\ x \in \Omega$. Se existe uma constante C_1 e uma função $k_1 \in L^{p'}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq k_1(x) + C_1|\xi|^{p-1} \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, t \in [\phi(x), \psi(x)],$$

então o problema $(\widetilde{P})$ admite uma solução fraca u com

$$\phi(x) \leq u(x) \leq \psi(x), \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

<u>Obs 1</u>.: As definições de Deuel e Hess [6] aqui apresentadas, valem para um domínio Ω do $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$, e um operador diferencial de segunda ordem quasilinear elíptico na forma divergente.

Para o próximo teorema considere o seguinte problema:

$$(P^{'}) : \begin{cases} div\ A(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \\ u = \phi & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto, conexo, limitado e regular.

Teorema (GL) (Lieberman [14]) *Sejam $\alpha, \lambda, \Lambda, M_0$ constantes positivas, com $\alpha \leq 1$, $m \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, conexo, limitado e regular.*

Suponha que as funções A e B do problema $(P^{'})$, definidas em $\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, satisfazem as seguintes condições:

$$(i) \quad \sum_{ij=1}^{N} a^{ij}(x,z,\eta)\, \xi_i\, \xi_j \geq \lambda(k + |\eta|)^m\, |\xi|^2,$$

$$(ii) \quad \sum_{ij=1}^{N} |a^{ij}(x,z,\eta)| \leq \Lambda(k + |\eta|)^m,$$

$$(iii) \quad |A(x,z,\eta) - A(y,w,\eta)| \leq \Lambda\, (1 + |\eta|)^{m+1}\, [|x-y|^\alpha + |z-w|^\alpha],$$

$$(iv) \quad |B(x,z,\eta)| \leq \Lambda(1 + |\eta|)^{m+2},$$

para todo $(x,z,\eta) \in \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, $(y,w) \in \Omega \times [-M_0, M_0]$ *e* $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Seja $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ *com* $\|\phi\|_{1+\alpha} \leq \Phi$ *e* u *uma solução fraca do problema* (P'), *com* $\|u\| \leq M_0$ *em* Ω, *onde* Φ *é uma constante.*

Então existe uma constante $\beta = \beta(\alpha, \Lambda/\lambda, m, N) > 0$ *tal que*

$$(a) \quad u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$$

$$(b) \quad \|u\|_{1,\beta} \leq C(\alpha, \Lambda/\lambda, m, M_0, N, \Phi, \Omega).$$

CAPÍTULO 2

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA (ZY)

O Teorema (ZY) tem grande destaque neste trabalho visto que ele nos auxiliará a compreender todos os outros resultados apresentados a posteriori.

No que segue, $w(x)$ é uma subsolução e $v(x)$ uma supersolução da equação $(P)_p$.

Nosso foco é trabalhar com o problema em domínios limitados B_R para estudar a existência e regularidade da solução e, através de um argumento diagonal clássico, fazer o limite quando $R \to \infty$ e encontrar solução para a equação $(P)_p$.

Demonstração: Seja $B_R(0) = B_R$ uma bola centrada na origem de $\mathbb{R}^N$ com raio $R \geq 1$ e considere o seguinte problema de valor de fronteira

$$(P)_R : \begin{cases} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0, & B_R \\ u = g, & \partial B_R \end{cases}$$

onde g é uma função em $C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \in (0,1)$ que satisfaz $w(x) \leq g(x) \leq v(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$.

É imediato observar das hipóteses (3) e (4) do Teorema em pauta, que as funções w e v ainda são, respectivamente, sub e supersolução do problema $(P)_R$ para todo R.

Pelo Teorema (DH),(veja Capítulo 1 e também Apêndice B) o problema $(P)_R$ tem uma solução fraca $u_R \in W^{1,p}(B_R)$ para cada $R \geq 1$, com $w(x) \leq u_R(x) \leq v(x)$ para todo $x \in B_R$.

Análise da regularidade de u_R em B_1 :

Temos que

$$div(|\nabla u_R(x)|^{p-2}\nabla u_R(x)) + f(x, u_R(x)) = 0, \quad \forall\ x \in B_1.$$

Pelo Teorema (GL) (veja Capítulo 1 e também Apêndice B) temos que $u_R \in C^{1,\beta}(\overline{B}_1)$ e existe uma constante $C_1^{'}$, independente de R tal que

$$\| \ u_R \ \|_{C^{1,\beta}(\overline{B}_1)} \leq C_1^{'}, \qquad \forall\ \ R \geq 2 \quad \text{e} \quad 0 < \beta < 1. \tag{2.1}$$

Além disso, pelo Teorema 1.7 sabemos que a imersão

$$C^{1,\beta}(\overline{B}_1) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B}_1)$$

é compacta, para $\alpha < \beta$.

Logo, existe uma subsequência $\{u_{R_1}\}$ de $\{u_R\}$ contida em $C^{1,\beta}(\overline{B}_1)$, tal que

$$u_{R_1} \xrightarrow{R_1 \to \infty} u^{(1)} \qquad \text{em} \qquad C^{1,\alpha}(\overline{B}_1). \tag{2.2}$$

Portanto, como $\{u_R\}$ é solução fraca do problema $(P)_R$, e sendo $\{u_{R_1}\}$ subsequência de u_R, segue pela definição 1.15 que

$$\int_{B_1} |\nabla u_{R_1}|^{p-2}\nabla u_{R_1}\nabla\varphi\ dx - \int_{B_1} f(x, u_{R_1})\ \varphi\ dx = 0, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(B_1).$$

Afirmação 2.1:

$$(i)_1 \quad \int_{B_1} |\nabla u_{R_1}|^{p-2}\nabla u_{R_1}\nabla\varphi\ dx \xrightarrow{R_1\to\infty} \int_{B_1} |\nabla u^{(1)}|^{p-2}\nabla u^{(1)}\nabla\varphi\ dx, \qquad \forall\ \varphi\in C_0^\infty(B_1)$$

e

$$(ii)_1 \quad \int_{B_1} f(x,u_{R_1})\ \varphi\ dx \xrightarrow{R_1\to\infty} \int_{B_1} f(x,u^{(1)})\ \varphi\ dx, \qquad \forall\ \varphi\in C_0^\infty(B_1).$$

Portanto,

$$\int_{B_1} |\nabla u^{(1)}|^{p-2}\nabla u^{(1)}\nabla\varphi\ dx - \int_{B_1} f(x,u^{(1)})\ \varphi\ dx = 0, \qquad \forall\ \varphi\in C_0^\infty(B_1).$$

Com efeito. De (2.2) segue que

$$\|\nabla u_{R_1} - \nabla u^{(1)}\|_0 \xrightarrow{R_1\to\infty} 0.$$

Logo, para cada $x\in B_1$, obtemos

$$\left(|\nabla u_{R_1}|^{p-2}\ \nabla u_{R_1}\ \nabla\varphi\right)(x) \xrightarrow{R_1\to\infty} \left(|\nabla u^{(1)}|^{p-2}\ \nabla u^{(1)}\ \nabla\varphi\right)(x), \qquad \text{q.t.p. } x\in B_1.$$

Além disso, por (2.1), segue que

$$\begin{aligned}
\left||\nabla u_{R_1}|^{p-2}\ \nabla u_{R_1}\ \nabla\varphi\right| &\le |\nabla u_{R_1}|^{p-2}\ |\nabla u_{R_1}|\ |\nabla\varphi| \\
&\le (\max_{\overline{B}_1} |\nabla u_{R_1}|^{p-1})\ |\nabla\varphi| \\
&\le C_1^{'(p-1)}\ |\nabla\varphi|.
\end{aligned}$$

Assim, definindo $\phi := C_1^{'(p-1)}\ |\nabla\varphi|$, é imediato observar que $\phi(x)\ge 0,\ \ \forall\ x\in B_1$, e ϕ é integrável, visto que

$$\int_{B_1} C_1^{'(p-1)}|\nabla\varphi|\ dx = C_1^{'(p-1)} \int_{B_1} |\nabla\varphi|\ dx < \infty.$$

Além disso,

$$\left||\nabla u_{R_1}|^{p-2}\ \nabla u_{R_1}\ \nabla\varphi\right| \le \phi, \qquad \text{q.t.p. } x\in B_1.$$

Daí, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_1} |\nabla u_{R_1}|^{p-2} \, \nabla u_{R_1} \, \nabla \varphi \, dx \xrightarrow{R_1 \to \infty} \int_{B_1} |\nabla u^{(1)}|^{p-2} \, \nabla u^{(1)} \, \nabla \varphi \, dx, \qquad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(B_1),$$

o que verifica o item $(i)_1$.

Para prova do item $(ii)_1$, recordemos que f é localmente Lipschitz em u_{R_1}, logo, contínua em u_{R_1}. Assim, para cada $x \in B_1$ e de (2.2),

$$f(x, u_{R_1}(x)) \, \varphi(x) \xrightarrow{R_1 \to \infty} f(x, u^{(1)}(x)) \, \varphi(x), \qquad \text{q.t.p. } \ x \in B_1.$$

Como $C_1^1 \leq w(x) \leq u_{R_1}(x) \leq v(x) \leq C_1^2, \quad \forall \, x \in B_1$, e

$$|f(x, u_{R_1}(x)) \, \varphi(x)| \leq \max_{(x,t) \ \in \ \overline{B}_1 \times \, [C_1^1, C_1^2]} |f(x,t)| \, |\varphi(x)| \ := \ A \, |\varphi(x)|, \quad \forall \ \ x \in B_1,$$

definindo $\Phi(x) := A \, |\varphi(x)|$, segue que $\Phi(x) \geq 0, \ \ \forall \, x \in B_1$, é integrável e,

$$|f(x, u_{R_1}(x)) \, \varphi(x)| \leq \Phi(x), \qquad \text{q.t.p. } \ x \in B_1.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{B_1} f(x, u_{R_1}) \, \varphi \, dx \xrightarrow{R_1 \to \infty} \int_{B_1} f(x, u^{(1)}) \, \varphi \, dx, \qquad \forall \ \ \varphi \in C_0^\infty(B_1),$$

o que prova o item $(ii)_1$.

Logo, de $(i)_1$ e $(ii)_1$, concluímos que

$$\int_{B_1} |\nabla u^{(1)}|^{p-2} \nabla u^{(1)} \nabla \varphi \, dx - \int_{B_1} f(x, u^{(1)}) \, \varphi \, dx = 0, \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(B_1),$$

o que prova a afirmação 2.1.

Agora, repetindo o procedimento anterior para a sequência u_{R_1} na bola B_2, concluiremos que existe uma constante $C_2' > 0$ tal que

$$\| \, u_{R_1} \, \|_{C^{1,\beta}(\overline{B}_2)} \leq C_2', \qquad \forall \ \ R_1 \geq 3.$$

Desde que a imersão

$$C^{1,\beta}(\overline{B}_2) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B}_2)$$

é compacta para $\alpha < \beta$, então existe uma subsequência $\{u_{R_2}\}$ de $\{u_{R_1}\}$ tal que

$$u_{R_2} \xrightarrow{R_2 \to \infty} u^{(2)} \qquad \text{em} \qquad C^{1,\alpha}(\overline{B}_2).$$

Desta maneira,

$$u^{(2)}\big|_{B_1} = u^{(1)},$$

e

$$(i)_1 \quad \int_{B_2} |\nabla u_{R_2}|^{p-2} \nabla u_{R_2} \nabla \varphi \; dx \xrightarrow{R_2 \to \infty} \int_{B_2} |\nabla u^{(2)}|^{p-2} \nabla u^{(2)} \nabla \varphi \; dx, \qquad \forall \; \varphi \in C_0^\infty(B_2),$$

$$(ii)_1 \quad \int_{B_2} f(x, u_{R_2}) \; \varphi \; dx \xrightarrow{R_2 \to \infty} \int_{B_2} f(x, u^{(2)}) \; \varphi \; dx, \qquad \forall \; \varphi \in C_0^\infty(B_2).$$

Ou seja,

$$\int_{B_2} |\nabla u^{(2)}|^{p-2} \nabla u^{(2)} \nabla \varphi \; dx - \int_{B_2} f(x, u^{(2)}) \; \varphi \; dx = 0, \qquad \forall \; \varphi \in C_0^\infty(B_2).$$

Assim, dado $k \in \mathbb{N}$, repetindo por indução o mesmo argumento para a bola B_k, obteremos uma constante $C_k^{'} > 0$ tal que

$$\| \; u_{R_{k-1}} \; \|_{C^{1,\beta}(\overline{B}_k)} \leq C_k^{'}, \qquad \forall \;\; R_{k-1} \geq k+1.$$

Sabendo que a imersão

$$C^{1,\beta}(\overline{B}_k) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B}_k)$$

é compacta para $\alpha < \beta$, então existe uma subsequência $\{u_{R_k}\}$ de $\{u_{R_{k-1}}\}$ tal que

$$u_{R_k} \xrightarrow{R_k \to \infty} u^{(k)} \qquad \text{em} \qquad C^1(\overline{B}_k),$$

donde segue que

$$u^{(k)}\big|_{B_R} = u^{(R)}, \qquad \forall \;\; R \leq k-1.$$

Observe então que

$$
\begin{array}{lllll}
u_{R_1} \xrightarrow{R_1\to\infty} u^{(1)} & \text{em} & \overline{B}_1 & \Rightarrow & u_{1_1}, u_{2_1}, u_{3_1}, \cdots \xrightarrow{C^1(\overline{B}_1)} u^{(1)} \\
u_{R_2} \xrightarrow{R_2\to\infty} u^{(2)} & \text{em} & \overline{B}_2 & \Rightarrow & u_{1_2}, u_{2_2}, u_{3_2}, \cdots \xrightarrow{C^1(\overline{B}_2)} u^{(2)} \\
 & \vdots & & & \\
u_{R_k} \xrightarrow{R_k\to\infty} u^{(k)} & \text{em} & \overline{B}_k & \Rightarrow & u_{1_k}, u_{2_k}, u_{3_k}, \cdots \xrightarrow{C^1(\overline{B}_k)} u^{(k)} \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

Defina $v_k := u_{k_k}$. Logo, por um processo diagonal temos as seguintes implicações

$$
\begin{array}{l}
\forall\ k \geq 1 \ \Rightarrow\ \{v_k\} \text{ é uma subsequência de } \{u_{R_1}\} \ \Rightarrow\ v_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} u^{(1)}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{B}_1. \\
\forall\ k \geq 2 \ \Rightarrow\ \{v_k\} \text{ é uma subsequência de } \{u_{R_2}\} \ \Rightarrow\ v_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} u^{(2)}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{B}_2. \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\forall\ k \geq n \ \Rightarrow\ \{v_k\} \text{ é uma subsequência de } \{u_{R_n}\} \ \Rightarrow\ v_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} u^{(n)}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{B}_n. \\
\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Seja $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$ definida por $u(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$.

Assim, $w(x) \leq u(x) \leq v(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, donde segue que $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Além do que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\, \varphi = 0, \qquad \forall\ \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De fato, dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $\widetilde{B}_\varphi \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in \widetilde{B}^c_\varphi$.

Considere $s > 0$, um inteiro tal que $\widetilde{B}_\varphi \subset B_s$. Desta forma,

$$\int_{B_s} |\nabla v_k|^{p-2}\, \nabla v_k\, \nabla\varphi - \int_{B_s} f(x,v_k)\, \varphi = 0, \qquad \forall\ \ k > s \quad \text{e} \quad \forall\ \ \varphi \in C_0^\infty(B_s).$$

De forma análoga aos casos anteriores, temos as seguintes convergências

$$\int_{Bs} |\nabla v_k|^{p-2}\, \nabla v_k\, \nabla\varphi \xrightarrow{k\to\infty} \int_{Bs} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla\varphi$$

e

$$\int_{Bs} f(x, v_k)\, \varphi \xrightarrow{k \to \infty} \int_{Bs} f(x, u)\, \varphi.$$

Portanto,

$$\int_{Bs} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla \varphi - \int_{Bs} f(x, u)\, \varphi = 0, \quad \forall\, s.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\, \nabla \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)\, \varphi = 0, \quad \forall\;\; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

o que conclui a demonstração do Teorema (ZY).

CAPÍTULO 3

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO $(P)_P$

Neste capítulo provaremos os Teoremas (MS_1), (MS_2), (MS_3) e (MS_4), os quais mostram que a equação $(P)_p$ possui uma infinidade de soluções positivas e limitadas. Para tanto, em todos os resultados, recorreremos ao Teorema (ZY) demonstrado no capítulo anterior.

Os resultados abaixo serão de fundamental importância para a demonstração dos referidos teoremas.

Proposição 3.1. *Suponha que $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função localmente Hölder contínua e*

$$H_\infty = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s^{N-1}} \int_0^s t^{N-1}\psi(t)dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty, \tag{3.1}$$

onde $\psi(r) = \max\limits_{|x|=r} \rho(x)$.

Então a equação

$$-div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) = \rho(x) \tag{3.2}$$

tem uma solução $U \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *para algum* $0 < \alpha < 1$, *satisfazendo* $\lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = 0$.

Lema 3.2. *Se* $N \geq 3$ *e* $p < N$ *então a condição (3.1) da Proposição 3.1 pode ser substituída pelas condições*

$$\begin{array}{llll} (A) & 0 < \displaystyle\int_1^\infty r^{\frac{1}{p-1}}\, \psi(r)^{\frac{1}{p-1}}\, dr < \infty & se & 1 < p \leq 2 \\ (B) & 0 < \displaystyle\int_1^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}\, \psi(r)\, dr < \infty & se & p \geq 2. \end{array}$$

Observação: A prova da Proposição 3.1 e do Lema 3.2 encontra-se no Apêndice A.

3.1 Demonstração do Teorema (MS_1): (Introdução)

A demonstração do Teorema (MS_1) consiste em considerar as soluções U de (3.2) e a partir destas, encontrar soluções para $(P)_p$.

Demonstração: Considere $C = 2\| U \|_\infty$ e em seguida, defina $V_+ := C+U$ e $V_- := C-U$. Daí, segue que $V_-(x) \leq V_+(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Adicionalmente,

$$0 < C_2 \leq V_-(x) \leq V_+(x) \leq C_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.3}$$

onde $C_1 = 3\| U \|_\infty$ e $C_2 = \| U \|_\infty$. Consideremos inicialmente que F satisfaz a hipótese de (MS_1) $(7)-(i)$, ou seja,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^{p-1}} = 0,$$

de tal modo que, dado $\epsilon = C_1^{1-p} > 0$, existe $a > 0$ tal que se $t < aC_1$, então $\dfrac{F(t)}{t^{p-1}} \leq C_1^{1-p}$.

Mostraremos agora que aV_+ é supersolução e aV_- subsolução para a equação $(P)_p$. De fato, como $aV_+ < aC_1$, temos

$$\frac{F(aV_+)(V_+)^{p-1}}{(aV_+)^{p-1}} \leq C_1^{1-p}(V_+)^{p-1} = \left(\frac{V_+}{C_1}\right)^{p-1}.$$

Daí, de (3.3), segue que $\left(\frac{V_+}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1$. Como consequência deste fato,

$$\frac{F(aV_+)(V_+)^{p-1}}{(aV_+)^{p-1}} \leq 1. \tag{3.4}$$

Por hipótese, temos que ρ é localmente Hölder contínua e H_∞ é finita. Daí, segue pela Proposição 3.1, que a equação (3.2) tem uma solução limitada U, não-negativa em $\mathbb{R}^N$.

Desde que,

$$\begin{aligned}
div(|\nabla(aV_+)|^{p-2}\nabla(aV_+)) + f(x, aV_+) &= a^{p-1}div(|\nabla(C+U)|^{p-2}\nabla(C+U)) + f(x, aV_+)\\
&\overset{(3.2)}{=} -a^{p-1}\rho(x) + f(x, aV_+)\\
&\overset{(6)}{\leq} -a^{p-1}\rho(x) + \rho(x)F(aV_+)\\
&= -a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \frac{F(aV_+)(V_+)^{p-1}}{(aV_+)^{p-1}}\right] \overset{(3.4)}{\leq} 0,
\end{aligned}$$

e sendo U de classe $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, onde $\alpha \in (0,1)$, segue que aV_+ é supersolução da equação $(P)_p$. Observe agora que, de (3.3),

$$\left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1, \tag{3.5}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}
div(|\nabla(aV_-)|^{p-2}\nabla(aV_-)) + f(x, aV_-) &= a^{p-1}div(|\nabla(C-U)|^{p-2}\nabla(C-U)) + f(x, aV_+) \\
&\overset{(3.2)}{=} a^{p-1}\rho(x) + f(x, aV_-) \\
&\overset{(6)}{\geq} a^{p-1}\rho(x) - \rho(x)F(aV_-) \\
&= a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \frac{F(aV_-)(V_-)^{p-1}}{(aV_-)^{p-1}}\right] \\
&\geq a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1}\right] \overset{(3.5)}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos utilizados para concluir que aV_+ é supersolução, segue que aV_- é subsolução de $(P)_p$. Assim, pelo Teorema (ZY), existe uma solução u da equação $(P)_p$ que satisfaz

$$0 < aC_2 \leq aV_-(x) \leq u(x) \leq aV_+(x) \leq aC_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.6}$$

Desde que podemos escolher $a > 0$ arbitrariamente pequeno, tome $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$, de modo que

$$\frac{aC_1}{n_1} < aC_2.$$

Desta maneira, multiplicando (3.6) por $\dfrac{1}{n_1}$ temos que

$$0 < \frac{aC_2}{n_1} \leq \frac{aV_-}{n_1}(x) \leq \frac{aV_+}{n_1}(x) \leq \frac{aC_1}{n_1} < aC_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.7}$$

Note que $\dfrac{aV_+}{n_1} \leq aV_+ < aC_1$. Assim,

$$\frac{F((a/n_1)V_+)}{((a/n_1)V_+)^{p-1}}(V_+)^{p-1} \leq C_1^{1-p}(V_+)^{p-1} = \left(\frac{V_+}{C_1}\right)^{p-1}.$$

Mas, de (3.3) temos que $\left(\dfrac{V_+}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1$. Logo,

$$\frac{F((a/n_1)V_+)}{((a/n_1)V_+)^{p-1}}(V_+)^{p-1} \leq 1. \tag{3.8}$$

Como

$$\begin{aligned} div(|\nabla((a/n_1)V_+)|^{p-2}\nabla((a/n_1)V_+) &= (a/n_1)^{p-1}div(|\nabla V_+|^{p-2}\nabla V_+) \\ &= (a/n_1)^{p-1}div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) \\ &\overset{(3.2)}{=} -(a/n_1)^{p-1}\rho(x), \end{aligned}$$

tem-se

$$div(|\nabla((a/n_1)V_+)|^{p-2}\nabla((a/n_1)V_+) + f(x,(a/n_1)V_+) = -(a/n_1)^{p-1}\rho(x) + f(x,(a/n_1)V_+). \tag{3.9}$$

Segue de (3.9), (6) e de (3.8) que

$$div(|\nabla((a/n_1)V_+)|^{p-2}\nabla((a/n_1)V_+) + f(x,(a/n_1)V_+) \leq 0.$$

E, sabendo que $(a/n_1)V_+ = (a/n_1)(C+U)$ pertence ao espaço $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $(a/n_1)V_+$ é supersolução de $(P)_p$.

Para $(a/n_1)V_-$, o raciocínio é análogo, visto que $(a/n_1)V_- \leq aV_- \leq aC_1$, o que implica

$$\frac{F((a/n_1)V_-)}{((a/n_1)V_-)^{p-1}}(V_-)^{p-1} \leq C_1^{1-p}(V_-)^{p-1} = \left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1, \tag{3.10}$$

donde segue de (3.2), (6) e de (3.10) que

$$div(|\nabla((a/n_1)V_-)|^{p-2}\nabla((a/n_1)V_-) + f(x,(a/n_1)V_-) \geq 0.$$

E, como $(a/n_1)V_-$ é uma função de $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $(a/n_1)V_-$ é subsolução de $(P)_p$. Tomando

$$\delta_1 = \frac{aC_2}{n_1}, \qquad V_-^{(1)} = \frac{aV_-}{n_1} \quad \text{e} \quad V_+^{(1)} = \frac{aV_+}{n_1},$$

temos de (3.7) que

$$0 < \delta_1 \leq V_-^{(1)}(x) \leq V_+^{(1)}(x) \leq \frac{aC_1}{n_1} < aC_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.11}$$

Assim, pelo Teorema (ZY) existe uma solução da equação $(P)_p$, a qual denotaremos por $u^{(1)}$, tal que

$$0 < \delta_1 \leq V_-^{(1)}(x) \leq u^{(1)}(x) \leq V_+^{(1)}(x) \leq \frac{aC_1}{n_1} < aC_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.12}$$

Daí, de (3.6) e (3.12) temos $u^{(1)}(x) < u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Considere agora $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $\dfrac{aC_1}{n_2 n_1} < \delta_1$. Multiplicando (3.11) por $\dfrac{1}{n_2}$ temos

$$0 < \frac{\delta_1}{n_2} \leq \frac{V_-^{(1)}}{n_2}(x) \leq \frac{V_+^{(1)}}{n_2}(x) \leq \frac{1}{n_2}\left(\frac{aC_1}{n_1}\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.13}$$

Com raciocínio análogo ao caso anterior, no qual consideramos $n_1 \in \mathbb{N}$, mostra-se que

$$V_-^{(2)} = \frac{V_-^{(1)}}{n_2} \qquad \text{e} \qquad V_+^{(2)} = \frac{V_+^{(1)}}{n_2}$$

são, respectivamente, sub e supersolução da equação $(P)_p$ e, pelo mesmo teorema, existe uma solução $u^{(2)}$ satisfazendo

$$0 < \frac{\delta_1}{n_2} \leq V_-^{(2)}(x) \leq u^{(2)}(x) \leq V_+^{(2)}(x) < \frac{aC_1}{n_2 n_1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.14}$$

E, de (3.6), (3.12) e (3.14) segue que $u^{(2)}(x) < u^{(1)}(x) < u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Considere agora $\delta_2 = \dfrac{\delta_1}{n_2}$ e $n_3 \in \mathbb{N}$, de forma que $n_3 > n_2 > n_1$ e $\dfrac{aC_1}{n_3 n_2 n_1} < \delta_2$. Daí, substituindo $V_-^{(2)}$ e $V_+^{(2)}$ em (3.13) e, multiplicando a mesma desigualdade por $\dfrac{1}{n_3}$, obtemos

$$0 < \frac{\delta_2}{n_3} \leq \frac{V_-^{(2)}}{n_3}(x) \leq \frac{V_+^{(2)}}{n_3}(x) \leq \frac{1}{n_3}\left(\frac{aC_1}{n_2 n_1}\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

sendo que pelo mesmo teorema, existe uma solução $u^{(3)}$, tal que

$$0 < \frac{\delta_2}{n_3} \leq V_-^{(3)}(x) \leq u^{(3)}(x) \leq V_+^{(3)}(x) \leq \frac{1}{n_3}\left(\frac{aC_1}{n_2 n_1}\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$u^{(3)}(x) < u^{(2)}(x) < u^{(1)}(x) < u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Repetindo esse processo, por indução, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $u^{(k)}$ tal que

$$u^{(k)}(x) < u^{(k-1)}(x) < u^{(k-2)}(x) < \cdots < u^{(2)}(x) < u^{(1)}(x) < u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^N$$

possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas, e cada solução é limitada inferiormente e superiormente por uma constante positiva.

Suponha agora que F satisfaz a hipótese $(7)-(ii)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^{p-1}} = 0.$$

Assim, dado $\epsilon = C_1^{1-p} > 0$, existe $a_1 > 0$ tal que se $t \in (0,\infty)$ e $t > a_1$, então $\dfrac{F(t)}{t^{p-1}} < C_1^{1-p}$. Tome $a > 0$ tal que $aC_2 > a_1$. Como $aV_+ > aC_2 > a_1$, segue que $\dfrac{F(aV_+)}{(aV_+)^{p-1}} < C_1^{1-p}$. Logo,

$$\frac{F(aV_+)(V_+)^{p-1}}{(aV_+)^{p-1}} < \left(\frac{V_+}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} div(|\nabla(aV_+)|^{p-2}\nabla(aV_+)) + f(x,aV_+) &\overset{(3.2)}{=} -a^{p-1}\rho(x) + f(x,aV_+) \\ &\overset{(6)}{\leq} -a^{p-1}\rho(x) + \rho(x)F(aV_+) \\ &= -a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \frac{F(aV_+)(V_+)^{p-1}}{(aV_+)^{p-1}}\right] \leq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$-div(|\nabla(aV_+)^{p-2}\nabla(aV_+)) \geq f(x,aV_+).$$

Como $U \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, verifica-se que aV_+ é supersolução de $(P)_p$. De forma semelhante ao que foi feito para aV_+, mostraremos que aV_- é subsolução de $(P)_p$.

Sabendo que $aV_- > aC_2 > a_1$, temos que

$$\frac{F(aV_-)(V_-)^{p-1}}{(aV_-)^{p-1}} \leq \left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1} \Rightarrow -\frac{F(aV_-)(V_-)^{p-1}}{(aV_-)^{p-1}} \geq -\left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1},$$

e como $\left(\dfrac{V_-}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} div(|\nabla(aV_-)|^{p-2}\nabla(aV_-)) + f(x, aV_-) &\overset{(3.2)}{=} a^{p-1}\rho(x) + f(x, aV_-) \\ &\overset{(6)}{\geq} a^{p-1}\rho(x) + \rho(x)F(aV_-) \\ &= a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \frac{F(aV_-)(V_-)^{p-1}}{(aV_-)^{p-1}}\right] \\ &\geq a^{p-1}\rho(x)\left[1 - \left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1}\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Daí, aV_- é subsolução de $(P)_p$. Portanto, pelo Teorema (ZY), existe uma solução u da equação $(P)_p$ que satisfaz

$$0 < aC_2 \leq aV_-(x) \leq u(x) \leq aV_+(x) \leq aC_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.15}$$

Desde que podemos escolher $a > 0$ suficientemente grande, então tomando $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$ tal que $n_1 aC_2 > aC_1 > a_1$, multiplicando (3.15) por n_1, obtemos

$$n_1 aC_2 \leq n_1 aV_-(x) \leq n_1 aV_+(x) \leq n_1 aC_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $n_1 aV_+ > n_1 aC_2 > a_1$, então $\dfrac{F(n_1 aV_+)}{(n_1 aV_+)^{p-1}}(V_+)^{p-1} \leq \left(\dfrac{V_+}{C_1}\right)^{p-1}$. Mas por (3.3), $\left(\dfrac{V_+}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1$. Desta forma,

$$\frac{F(n_1 aV_+)}{(n_1 aV_+)^{p-1}}(V_+)^{p-1} \leq 1. \tag{3.16}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
div(|\nabla(n_1aV_+)|^{p-2}\nabla(n_1aV_+)) + f(x, n_1aV_+) &= (n_1a)^{p-1}div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) + f(x, n_1aV_+) \\
&\overset{(3.2)}{=} -(n_1a)^{p-1}\rho(x) + f(x, n_1aV_+) \\
&\overset{(6)}{\leq} -(n_1a)^{p-1}\rho(x) + \rho(x)F(n_1aV_+) \\
&= -(n_1a)^{p-1}\rho(x)\left[1 - \frac{F(n_1aV_+)}{(n_1aV_+)^{p-1}}(V_+)^{p-1}\right] \\
&\overset{(3.16)}{\leq} 0,
\end{aligned}
$$

e, sabendo que $U \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que n_1aV_+ é supersolução de $(P)_p$.

Por outro lado, $n_1aV_- > n_1aC_2 > a_1$. Então $\dfrac{F(n_1aV_-)}{(n_1aV_-)^{p-1}} < C_1^{1-p}$, donde segue que

$$
\frac{F(n_1aV_-)}{(n_1aV_-)^{p-1}}(V_-)^{p-1} \leq \left(\frac{V_-}{C_1}\right)^{p-1} \leq 1.
$$

Utilizando este fato, obtemos que

$$
div(|\nabla(n_1aV_-)|^{p-2}\nabla(n_1aV_-)) + f(x, n_1aV_-) \geq 0.
$$

Daí, segue que n_1aV_- é ainda subsolução de $(P)_p$.

Representando $\beta_1 = n_1aC_2$, $\gamma_0 = aC_1$, $\widehat{V}^{(1)}_- = n_1aV_-$ e $\widehat{V}^{(1)}_+ = n_1aV_+$, segue que as funções $\widehat{V}^{(1)}_-$ e $\widehat{V}^{(1)}_+$ são também sub e supersoluções, respectivamente, da equação $(P)_p$, com $V^{(1)}_-(x) \leq V^{(1)}_+(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. Logo, pelo Teorema (ZY) temos que existe uma solução $\widehat{u}^{(1)}$, satisfazendo

$$
\beta_1 \leq \widehat{V}^{(1)}_-(x) \leq \widehat{u}^{(1)}(x) \leq \widehat{V}^{(1)}_+(x) \leq \gamma_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.17}
$$

onde $\gamma_1 = n_1\gamma_0$. Daí, de (3.15) e (3.17) segue que $\widehat{u}^{(1)}(x) > u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Tomando $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ de maneira que $\beta_2 = n_2\beta_1 > \gamma_1$, temos que

$$n_2\beta_1 \leq n_2\widehat{V}_-^{(1)}(x) \leq n_2\widehat{V}_+^{(1)}(x) \leq n_2\gamma_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Considerando $\widehat{V}_-^{(2)} = n_2\widehat{V}_-^{(1)}$ e $\widehat{V}_+^{(2)} = n_2\widehat{V}_+^{(1)}$, estas, são ainda sub e supersoluções respectivamente da equação $(P)_p$. Pelo Teorema (ZY), concluímos que existe uma solução $\widehat{u}^{(2)}$ que satisfaz

$$n_2\beta_1 \leq \widehat{V}_-^{(2)}(x) \leq \widehat{u}^{(2)}(x) \leq \widehat{V}_+^{(2)}(x) \leq n_2\gamma_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.18}$$

Agora, tomando $\gamma_2 = n_2\gamma_1$ e β_2 como definido acima, segue de (3.18) que

$$\beta_2 \leq \widehat{V}_-^{(2)}(x) \leq \widehat{u}^{(2)}(x) \leq \widehat{V}_+^{(2)}(x) \leq \gamma_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.19}$$

Portanto, de (3.15), (3.17) e (3.19) concluímos que

$$\widehat{u}^{(2)}(x) > \widehat{u}^{(1)}(x) > u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

O próximo passo consiste em tomar $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2 > n_1$, tal que $\beta_3 > \gamma_2$. Com idéia semelhante utilizada para $\beta_2 > \gamma_1$, obtemos uma solução $u^{(3)}$, via Teorema (ZY) da equação $(P)_p$ que satisfaz

$$\beta_3 \leq \widehat{V}_-^{(3)}(x) \leq \widehat{u}^{(3)}(x) \leq \widehat{V}_+^{(3)}(x) \leq \gamma_3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Por esta razão, segue que

$$\widehat{u}^{(3)}(x) > \widehat{u}^{(2)}(x) > \widehat{u}^{(1)}(x) > u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Por indução, concluímos que

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \qquad \forall\ \ x \in \mathbb{R}^N$$

possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas. Além disso, estas soluções são limitadas inferiormente por aC_2, sendo esta, uma constante positiva.

3.2 Demonstração do Teorema (MS_2): (Introdução)

Demonstração: Seja $r_0 > 0$ um número positivo tal que $F(r_0) > 0$ e defina

$$\begin{aligned} h_{r_0} : [r_0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto h_{r_0}(r) = \max_{s \,\in\, [r_0, r]} F(s). \end{aligned}$$

Desde que $F(s) \leq \max\limits_{s \,\in\, [r_0, \infty)} F(s)$, segue então que

$$F(s) \leq h(s), \qquad \forall \;\; s \in [r_0, \infty). \tag{3.20}$$

Considere agora um número positivo $a > 0$ arbitrário, e seja

$$\epsilon_0 = \frac{a}{h(2a + 2r_0)^{\frac{1}{p-1}}}\,, \qquad \epsilon_1 = \frac{a}{h(a + r_0)^{\frac{1}{p-1}}} \qquad \text{e} \qquad \epsilon_2 = \frac{a}{h(2a + r_0)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Sendo $c = \| U \|_\infty$, defina $\underline{v}_0 = r_0 + a - ac^{-1}U$ e $\overline{v}_0 = r_0 + a + ac^{-1}U$.

Afirmação 3.2.1: Se $\|U\|_\infty \leq \epsilon_0$ então $\underline{v}_0 = r_0 + a - ac^{-1}U$ é uma subsolução da equação $(P)_p$.

De fato, observe que $\|U\|_\infty \leq \epsilon_1$, daí segue que $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{p-1} \geq \left(\dfrac{a}{\epsilon_1}\right)^{p-1}$. Isto é,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{p-1} \geq h(a + r_0). \tag{3.21}$$

Além disso, como h é não-decrescente e $a + r_0 > a + r_0 - ac^{-1}U$, então

$$h(a + r_0) \geq h(a + r_0 - ac^{-1}U) \overset{(3.20)}{\geq} F(a + r_0 - ac^{-1}U). \tag{3.22}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
div(|\nabla \underline{v}_0|^{p-2}\nabla \underline{v}_0) + f(x,\underline{v}_0) &= div(|\nabla(r_0+a-ac^{-1}U)|^{p-2}\nabla(r_0+a-ac^{-1}U)) + f(x,\underline{v}_0)\\
&= (-ac^{-1})^{p-1}\, div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) + f(x,\underline{v}_0)\\
&\overset{(3.2)}{=} (ac^{-1})^{p-1}\rho(x) + f(x,\underline{v}_0)\\
&\overset{(8)}{\geq} \rho(x)[(ac^{-1})^{p-1} - F(\underline{v}_0)]\\
&\overset{(3.21)}{\geq} \rho(x)[h(a+r_0) - F(\underline{v}_0)].
\end{aligned}$$

Pela definição da função h e por (3.22), temos que

$$div(|\nabla \underline{v}_0|^{p-2}\nabla \underline{v}_0) + f(x,\underline{v}_0) \;\geq\; \rho(x)\left[F(r_0+a-ac^{-1}U) - F(r_0+a-ac^{-1}U)\right] = 0.$$

Ou seja,

$$-div(|\nabla \underline{v}_0|^{p-2}\nabla \underline{v}_0) \leq f(x,\underline{v}_0).$$

Portanto, $\underline{v}_0$ é subsolução de $(P)_p$, o que prova a afirmação 3.2.1.

Afirmação 3.2.2: Se $\|U\|_\infty \leq \epsilon_0$ então $\overline{v}_0 = r_0 + a + ac^{-1}U$ é uma supersolução da equação $(P)_p$.

De fato, observe que $\|U\|_\infty \leq \epsilon_2$. Daí, $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{p-1} \geq \left(\dfrac{a}{\epsilon_2}\right)^{p-1}$. Logo,

$$-\left(\frac{a}{c}\right)^{p-1} \leq -\left(\frac{a}{\epsilon_2}\right)^{p-1}.$$

Ou seja,

$$-\left(\frac{a}{c}\right)^{p-1} \leq -h(2a+r_0).$$

Adicionalmente, sabendo que

$$2a + r_0 > r_0 + a + ac^{-1}U,$$

e, sendo a função h não-decrescente, segue que

$$h(2a + r_0) \geq h(r_0 + a + ac^{-1}U).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
div(|\nabla \overline{v}_0|^{p-2}\nabla \overline{v}_0) + f(x, \overline{v}_0) &= div(|\nabla(r_0 + a + ac^{-1}U)|^{p-2}\nabla(r_0 + a + ac^{-1}U)) + f(x, \overline{v}_0) \\
&\overset{(3.2)}{=} -(ac^{-1})^{p-1}\ \rho(x) + f(x, \overline{v}_0) \\
&\overset{(8)}{\leq} -(ac^{-1})^{p-1}\ \rho(x) + \rho(x)\ F(\overline{v}_0) \\
&= -(ac^{-1})^{p-1}\ \rho(x) + \rho(x)\ F(r_0 + a + ac^{-1}U) \\
&\leq -\left(\frac{a}{\epsilon_2}\right)^{p-1} \rho(x) + \rho(x)\ F(r_0 + a + ac^{-1}U) \\
&\leq -h(2a + r_0)\ \rho(x) + \rho(x)\ h(r_0 + a + ac^{-1}U) \leq 0.
\end{aligned}$$

E, daí segue que $\overline{v}_0$ é supersolução de $(P)_p$, o que prova a afirmação 3.2.2.

Desde que as funções $\underline{v}_0$ e $\overline{v}_0$ são tais que $\underline{v}_0(x) \leq \overline{v}_0(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema (ZY) que a equação $(P)_p$, possui uma solução u satisfazendo

$$\underline{v}_0(x) \leq u(x) \leq \overline{v}_0(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Seja agora $r_1 > r_0$ tal que $r_1 \in [r_0, 2r_0)$, e defina as funções

$$\underline{v}_1 = r_1 + a - ac^{-1}U \quad \text{e} \quad \overline{v}_1 = r_1 + a + ac^{-1}U.$$

Mostraremos que $\underline{v}_1$ e $\overline{v}_1$ são, respectivamente, sub e supersolução de $(P)_p$. Observe que

$$2a + 2r_0 > 2a + r_1 > a + r_1.$$

Assim, pela monotonicidade de h tem-se que

$$\epsilon_0 < \frac{a}{h(2a+r_1)^{\frac{1}{p-1}}} < \frac{a}{h(a+r_1)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Definindo

$$\epsilon_1^1 = \frac{a}{h(a+r_1)^{\frac{1}{p-1}}} \qquad \text{e} \qquad \epsilon_2^1 = \frac{a}{h(2a+r_1)^{\frac{1}{p-1}}},$$

concluímos como no caso anterior, que $\underline{v}_1$ e $\overline{v}_1$ são, respectivamente, sub e supersolução da equação $(P)_p$. Assim, pelo Teorema (ZY), a equação $(P)_p$ tem uma solução u_1 tal que

$$\underline{v}_1 < u_1 < \underline{v}_1.$$

Desde que

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0,$$

segue que

$$\lim_{|x|\to\infty} \overline{v}_0(x) = \lim_{|x|\to\infty} \underline{v}_0(x) = r_0 + a$$

e

$$\lim_{|x|\to\infty} \overline{v}_1(x) = \lim_{|x|\to\infty} \underline{v}_1(x) = r_1 + a.$$

Portanto,

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = r_0 + a \qquad \text{e} \qquad \lim_{|x|\to\infty} u_1(x) = r_1 + a.$$

Assim,

$$u(x) \neq u_1(x).$$

Repetindo este processo, concluímos que para cada $r \in [r_0, 2r_0)$, a equação $(P)_p$ tem uma solução u_r tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} u_r(x) = r + a.$$

Portanto, a equação $(P)_p$ possui infinitas soluções limitadas em $\mathbb{R}^N$, todas maiores ou iguais a r_0.

3.3 Demonstração do Teorema (MS_3): (Introdução)

Para demonstrar o Teorema (MS_3) necessitamos do resultado abaixo que será demonstrado no Apêndice A.

Lema 3.3. *Seja F uma função tal que $F : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ é não-decrescente e satisfaz*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{G(t)^{\frac{1}{p}}} < \infty, \qquad \textit{onde} \;\; G(t) = \int_0^t F(s)\, ds.$$

Então,

$$\int_1^\infty \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty. \tag{3.23}$$

A idéia da demonstração do Teorema (MS_3) é construir sub e supersolução de (12) e em seguida aplicar o Teorema (ZY). Para tanto, provaremos inicialmente que existem constantes positivas a, b onde $a < b$ de modo que

$$U(x) < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.3, temos que

$$\int_1^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty. \tag{3.24}$$

Afirmação 3.3.1: Existem constantes positivas a, b onde $a < b$ tais que

$$U(x) < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, por (11)

$$U(x) < \parallel U \parallel_\infty < \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

A prova do Lema 3.3 encontra-se no Apêndice A.

e

$$\int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \int_0^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} + \int_1^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Então, temos dois casos a considerar

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty$$

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \infty$$

Analisando o caso (1):

Como

$$\int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty,$$

tome $\eta_1, \eta_2 > 0$, de tal modo que $\eta_1 < \eta_2$ e

$$\| U \|_\infty < \eta_1 < \eta_2 < \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Observe que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Portanto, existe $b \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq b$, tem-se

$$\int_0^n \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} > \eta_2.$$

Tomando $n = b$, temos que

$$\int_0^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} > \eta_2. \tag{3.25}$$

Ou seja, para $0 < a < b$, a desigualdade (3.25) é reescrita da seguinte forma

$$\eta_2 < \int_0^a \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} + \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Desde que

$$\lim_{s \to 0} \int_0^s \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = 0,$$

então existe $a > 0$ tal que

$$\int_0^a \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \eta_2 - \eta_1.$$

Desta forma,

$$\eta_2 - \int_0^a \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} > \eta_1. \tag{3.26}$$

Daí, de (3.25) e (3.26), temos

$$U(x) < \eta_1 < \eta_2 - \int_0^a \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \int_0^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} - \int_0^a \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}$$

e, sendo $a < b$,

$$U(x) < \eta_1 < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Portanto, se

$$\int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty,$$

segue que existem constantes positivas a, b onde $a < b$ tais que

$$U(x) < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Analisando o caso (2):

Como

$$\int_0^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \infty,$$

segue que

$$\lim_{s \to 0} \int_s^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \infty.$$

Então, existe $a > 0$ tal que

$$\int_a^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} > \| U \|_\infty.$$

Consequentemente,

$$\| U \|_\infty < \int_a^1 \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall\, b \geq 1.$$

Portanto, segue dos casos (1) e (2) que existem constantes positivas a, b tais que

$$0 \leq U(x) < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{3.27}$$

Defina $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow (a, b)$ dada por

$$U(x) = \int_{v(x)}^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

No que segue, provaremos que a função v está bem definida. Para tanto, faremos uso do Teorema da Função Implícita.

Inicialmente, defina

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\ s\ ,\ x\ ) & \longmapsto & \varphi(s,x) = \displaystyle\int_s^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} - U(x). \end{array}$$

A aplicação φ tal como foi definida, é de classe $C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$, visto que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x) = -\frac{1}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(s,x) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$$

são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}^N$, pois F é contínua por hipótese e $U \in C^1(\mathbb{R}^N)$ pela Proposição 3.1. Adicionalmente, de (3.27), temos que, se $s > b$, então $\varphi(s,x) < 0$ e se $s < a$, $\varphi(s,x) > 0$, pois

$$0 < \int_a^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} - U(x) < \int_s^b \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} - U(x).$$

Como $F(t) > 0$, concluímos pelo Teorema do Valor Intermediário que para cada $x \in \mathbb{R}^N$, existe um único $\theta(x) \in (a,b)$ tal que $\varphi(\theta(x),x) = 0$. Sabendo que F é não-decrescente, segue que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x) = -\frac{1}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\theta(x),x) = -\frac{1}{F(\theta(x))^{\frac{1}{p-1}}} < 0$$

Logo, pelo Teorema da Função Implícita existem abertos $A \subset (a,b)$ e $B \subset \mathbb{R}^N$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, existe $\delta_x > 0$ e uma única função ξ_x de classe $C^1(B_{\delta_x}(x),(a,b))$ tal que

$\varphi(\xi_x(y), y) = 0$, para todo $y \in B_{\delta_x}(x)$. Por unicidade segue que $\xi_x(y) = \theta(y)$, para todo $y \in B_{\delta_x}(x)$. Daí, $\theta \in C^1(B_{\delta_x}(x), (a,b))$. Seja $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow (a,b)$ dada por $v(y) = \xi_x(y)$, para cada $B_{\delta_x}(x)$. Desta maneira, $v \in C^1(\mathbb{R}^N, (a,b))$ e v está bem definida.

Afirmação 3.3.2: v tal como definida, é subsolução de (12).

De fato,

$$\begin{aligned}
-\rho(x) &= div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla U|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\left(-\frac{1}{F(v)^{\frac{1}{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(-\frac{1}{F(v)^{\frac{1}{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x_N}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{F(v)^{\frac{1}{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{1}{F^2(v)^{\frac{p-2}{p-1}}}|\nabla v|^{p-2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{F(v)^{\frac{1}{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{|\nabla v|^{p-2}}{F(v)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\
&= -\frac{1}{F(v)}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{F'(v)}{F^2(v)}\sum_{i=1}^{N}\left(|\nabla v|^{p-2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{F(v)} div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \frac{F'(v)|\nabla v|^p}{F^2(v)},
\end{aligned}$$

além disso, como F é não-decrescente, então $F'(u) \geq 0$ para todo $u \in (0,\infty)$. Logo,

$$\begin{aligned}
-\rho(x) &= div(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) = -\frac{div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)}{F(v)} + \frac{F'(v)|\nabla v|^p}{F^2(v)} \\
&\geq -\frac{div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)}{F(v)}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \geq \rho(x)F(v) \geq f(x,v),$$

onde a última desigualdade segue pela hipótese (9). Portanto, v é uma subsolução de (12), o que prova a afirmação 3.3.2. Tomando $w = b$, temos que w é uma supersolução de (12), visto que

$$0 = div(|\nabla w|^{p-2}\nabla w) \leq f(x,w), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

e $w \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Partindo do fato que, v e w são sub e supersolução respectivamente de (12), e mais, que $v(x) \leq w(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, concluímos pelo Teorema (ZY) que existe uma função $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ que é solução de (12) satisfazendo $v(x) \leq u(x) \leq b$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, pela Proposição 3.1, temos que

$$0 = \lim_{|x|\to\infty} U(x) = \lim_{|x|\to\infty} \int_{v(x)}^{b} \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Logo, $\lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = b$ e, como $w = b$ é supersolução, temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = b.$$

Tome agora $b_1 > b$ e considere v_1 tal que

$$U(x) = \int_{v_1(x)}^{b_1} \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Com raciocínio análogo, v_1 é subsolução e b_1 supersolução de (12), onde $v_1(x) \leq b_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Assim, pelo Teorema (ZY), existe uma solução u_1 de (12) tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} u_1(x) = b_1 > b.$$

Por esta razão, $u_1 \neq u$.

Desde que b pode ser escolhido como uma constante positiva suficientemente grande, a equação (12) possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas, todas elas limitadas inferiormente pelo número positivo a.

3.4 Demonstração do Teorema (MS_4): (Introdução)

Demonstração: Inicialmente, escolha $a > 0$ tal que $\| U \|_\infty < \dfrac{a}{F(a)^{\frac{1}{p-1}}}$.

Como $U(x) \geq 0$, segue que

$$0 \leq U(x) \leq \| U \|_\infty < \frac{a}{F(a)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Além disso, como F é contínua por hipótese, então existe algum $\epsilon > 0$ tal que

$$0 \leq U(x) \leq \frac{a}{F(a+\epsilon)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{3.28}$$

Nosso objetivo é encontrar soluções para a equação $(P)_p$ usando o Teorema (ZY). Para tanto, observe inicialmente que $v_1 \equiv \epsilon$ é subsolução da equação $(P)_p$ pois

$$0 = div(|\nabla \epsilon|^{p-2} \nabla \epsilon) \leq f(x, \epsilon), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

além do que, $v_1 \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Agora, seja

$$v_2 = \left(\frac{a}{c}\right) U + \epsilon$$

onde $c = \| U \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, segue que

$$\begin{aligned} -div(|\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2) &= -div(|\nabla (ac^{-1}U + \epsilon)|^{p-2} \nabla (ac^{-1}U + \epsilon)) \\ &= -(ac^{-1})^{p-1} div(|\nabla U|^{p-2} \nabla U) \\ &= (ac^{-1})^{p-1} \rho(x). \end{aligned}$$

De (3.28), temos que

$$c = \| U \|_{L^\infty} \leq \frac{a}{F(a+\epsilon)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Deste modo, obtemos

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{p-1} \geq F(a+\epsilon).$$

Sabendo que $a+\epsilon \geq \dfrac{a}{c}\, U(x)+\epsilon$, então

$$F(a+\epsilon) \geq F(v_2). \tag{3.29}$$

Logo, da hipótese (13) e de (3.29), segue que

$$-div(|\nabla v_2|^{p-2}\nabla v_2) = (ac^{-1})^{p-1}\rho(x) \geq F(a+\epsilon)\rho(x) \geq F(v_2)\rho(x) \geq f(x,v_2).$$

E, sendo v_2 de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$, segue que esta é supersolução de $(P)_p$. Adicionalmente, $v_1(x) \leq v_2(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Daí, pelo Teorema (ZY), existe uma solução $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ para a equação $(P)_p$ satisfazendo

$$0 < v_1(x) \leq u(x) \leq v_2(x), \quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\lim_{|x|\to\infty} v_2(x) = \lim_{|x|\to\infty} (ac^{-1}U(x)+\epsilon) = \epsilon \qquad \text{e} \qquad v_1(x) = \epsilon,$$

temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \epsilon.$$

Agora, considere $\epsilon_1 < \epsilon$ tal que $U(x) \leq \dfrac{a}{F(a+\epsilon_1)^{\frac{1}{p-1}}}$. Observe que $v_1^{(1)} = \epsilon_1$ é ainda subsolução da equação $(P)_p$ e definindo $v_2^{(1)} = ac^{-1}U + \epsilon_1$, esta, é ainda supersolução de $(P)_p$. Além disso, $v_1^{(1)}(x) \leq v_2^{(1)}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Daí, concluímos pelo Teorema (ZY) que existe $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ que é solução da equação $(P)_p$ e satisfaz

$$0 < \epsilon_1 \leq u_1(x) \leq v_2^{(1)}(x), \quad \forall\ x\ \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que,

$$\lim_{|x|\to\infty} v_2^{(1)}(x) = \epsilon_1 < \epsilon,$$

e

$$v_1^{(1)} = \epsilon_1,$$

temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u_1(x) = \epsilon_1$$

e, portanto, $u_1(x) \neq u(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, a equação $(P)_p$ possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas.

APÊNDICE A

RESULTADOS TÉCNICOS

Neste apêndice provaremos alguns resultados auxiliares utilizados nas demonstrações dos Teoremas do Capítulo 3.

A.1 Demonstração da Proposição 3.1:

Demonstração: Defina

$$V(x) = \int_{|x|}^{\infty} \left(\frac{1}{s^{N-1}} \int_0^s t^{N-1}\psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

Observe que pela hipótese (3.1), V está bem definida.

Afirmação A.1.1: V é uma solução fraca de

$$-div(|\nabla V|^{p-2}\nabla V) = \psi(|x|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato,

$$V(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds-\int_0^{|x|}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds \quad (A.1)$$

Daí, derivando (A.1) com relação a x_i obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) &= 0-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{|x|}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\right)\\ &= -\left[|x|^{-\frac{(N-1)}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]\frac{x_i}{|x|}\\ &= -x_i|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}|\nabla V|^{p-2} &= \left[|x|^{\frac{2(-N-p+2)}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{2}{p-1}}(x_1^2+...+x_N^2)\right]^{\frac{p-2}{2}}\\ &= \left[|x|^{\frac{-Np+2N+p-2}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\nabla V|^{p-2}\nabla V &= -x|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{1}{p-1}}|x|^{\frac{-Np+2N+p-2}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\\ &= -x|x|^{\frac{-N-p+2-Np+2N+p-2}{p-1}}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right)^{\frac{p-2+1}{p-1}}\\ &= -x|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\;dt\right).\end{aligned}$$

Seja $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V|^{p-2}\nabla V \ \nabla\varphi \ dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[-x|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)\right]\nabla\varphi\ dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)x_i\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ dx\\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)x_i\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ dx\\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)x_i\right]\ \varphi\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i|x|^{-N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)\right]\ \varphi\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)|x|^{-N}x_i+\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)|x|^{-N}\right]\ \varphi\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}|x|^{N-1}\psi(|x|)\frac{x_i}{|x|}|x|^{-N}x_i\ \varphi\ dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)(-N)|x|^{-N-1}\frac{x_i}{|x|}x_i\ \varphi\ dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}N\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)|x|^{-N}\varphi\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(x_1^2+...+x_N^2)|x|^{N-N-2}\psi(|x|)\ \varphi\ dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}\frac{x_1^2+...+x_N^2}{|x|}\left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt\right)(-N)|x|^{-N-1}\ \varphi\ dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\mathbb{R}^N} N \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\, dt \right) |x|^{-N} \varphi \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2-2}\psi(|x|)\, \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{|x|} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\, dt \right) (-N)|x|^{-N-1}|x| \, \varphi \, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} N \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\, dt \right) |x|^{-N} \, \varphi \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(|x|)\, \varphi \, dx.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V|^{p-2}\nabla V \ \nabla\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(|x|)\, \varphi \, dx, \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).
$$

Portanto, V é solução fraca de

$$
-div(|\nabla V|^{p-2}\nabla V) = \psi(|x|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.
$$

Como $\psi(|x|) = \max\limits_{|y|=r} \ \rho(y) \geq \rho(x)$, tem-se que

$$
-div(|\nabla V|^{p-2}\nabla V) \geq \rho(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.
$$

Observe que ρ é localmente Hölder contínua. Afirmamos que $V \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ onde $\lambda \in (0,1)$. De fato, provaremos inicialmente que $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$. É imediato observar que para $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, temos que $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ é contínua. Mostraremos, portanto, a continuidade desta função no zero. Considerando V como em (A.1), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_i}(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{V(0+he_i)-V(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\displaystyle\int_0^{|he_i|}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{|h|}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds}{h}.
\end{aligned}
$$

Daí, se $h \to 0^+$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_i}(0) &= -\lim_{h\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{h}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds}{h} \\
&\overset{\text{L'Hopital}}{=} -\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h^{N-1}}\int_0^h t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} = 0,
\end{aligned}
$$

visto que

$$
\lim_{h\to 0^+}\left|\left(\frac{1}{h^{N-1}}\int_0^h t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}}\right| = 0.
$$

De modo análogo, tem-se que $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}(0) = 0$ quando $h \to 0^-$. Logo,

$$
\frac{\partial V}{\partial x_i}(0) = 0.
$$

Agora, mostraremos que

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = 0.
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left| x_i |x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| &\leq \left| x_i |x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} |x|^{\frac{N-1}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} \psi(t) dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| \\
&\leq |x_i||x|^{-1} \left(\int_0^{|x|} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq \left(\int_0^{|x|} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}},
\end{aligned}
$$

então, passando ao limite na desigualdade acima quando $|x| \to 0$, obtemos

$$
\lim_{x\to 0} \left| x_i |x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| \leq \lim_{x\to 0} \left(\int_0^{|x|} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} = 0.
$$

Isto é,

$$
\lim_{x\to 0} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \right| = 0.
$$

ou seja,

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}(0) = 0.
$$

Portanto, as derivadas parciais de V existem e são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Consequentemente, $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

No que segue, vamos mostrar que $V \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ onde $\lambda \in (0,1)$. Para tanto, basta verificar que $\nabla V \in C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, isto é, para todo $z \in \mathbb{R}^N$, existe $r_z > 0$ tal que $\nabla V \in C^{0,\lambda}(B_{r_z}(z))$.

Defina

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\
z &\longmapsto h(z) = \frac{\partial V(z)}{\partial z_i}.
\end{aligned}
$$

Inicialmente, mostraremos para $z \neq 0$, isto é, dado $z \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, existe $\delta_z > 0$ tal que

$$
\sup_{\substack{x,y\, \in\, B_\delta(z) \\ x \neq y}} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty, \quad \text{para algum } \lambda \in (0,1).
$$

De fato, seja $\delta_z > 0$, tal que $B_{\delta_z}(z) \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} &= -\delta_{ij}|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} - x_i \frac{\partial}{x_i} \left(|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= -\delta_{ij}|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&- \ x_i \left(\frac{-N-p+2}{p-1} \right) |x|^{\frac{-N-2(p-1)}{p-1}}\ \frac{x_i}{|x|} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&- \ x_i |x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\frac{1}{p-1} \right) \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{-p+2}{p-1}} |x|^{N-1}\ \psi(|x|) \frac{x_i}{|x|} \\
&= -\delta_{ij}|x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&- \ x_i^2 |x|^{\frac{-N-p+1}{p-1}} \left(\frac{-N-p+2}{p-1} \right) \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&- \ x_i^2 |x|^{\frac{-2N+Np-3p+4}{p-1}}\ \psi(|x|) \left(\frac{1}{p-1} \right) \left(\int_0^{|x|} t^{N-1}\psi(t)\ dt \right)^{\frac{-p+2}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ é contínua para todo $z \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, o que implica $V \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$. Isto é, dado $z \in (\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$, existe $\delta_z > 0$ tal que $V \in C^2(\overline{B_{\delta_z}(z)})$ com $\overline{B_{\delta_z}(z)} \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Além disso, pelo Teorema 1.7, vale a imersão

$$
V \in C^2(\overline{B_{\delta_z}(z)}) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\overline{B_{\delta_z}(z)}), \quad \forall\ \lambda \in (0,1).
$$

Como $z \in \mathbb{R}^N$ foi tomado arbitrariamente, segue que $V \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$.

Se $z = 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^{\lambda}} &= |x|^{-\lambda} \left| x_i |x|^{\frac{-N-p-2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| \\
&\leq |x|^{-\lambda+1} |x|^{\frac{-N-p+2}{p-1}} \left(\int_0^{|x|} t^{N-1} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= |x|^{-\lambda} \left(\int_0^{|x|} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}},
\end{aligned}$$

assim, pela Fórmula do Valor Médio para integrais (Teorema 1.14), temos

$$\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^{\lambda}} \leq |x|^{-\lambda}\, \psi(\theta(x))^{\frac{1}{p-1}}\, |x|^{\frac{1}{p-1}} = |x|^{\frac{1}{p-1}-\lambda}\, \psi(\theta(x))^{\frac{1}{p-1}},$$

onde $0 \leq \theta(x) \leq |x|$.

Tomando $0 < \lambda \leq \frac{1}{p-1}$, obtemos

$$\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^{\lambda}} \leq |x|^{\frac{1}{p-1}-\lambda}\, \psi(\theta(x))^{\frac{1}{p-1}} < C,$$

onde C é uma constante.

Portanto, $V \in C^{1,\lambda}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. E assim, concluímos que V é uma supersolução para a equação $(P)_p$ onde tomamos $f(x,t) = \rho(t)$. Observe ainda que $w = 0$ é subsolução para o referida equação e

$$0 \leq V(x) = \int_{|x|}^{\infty} \left(\frac{1}{s^{N-1}} \int_0^s t^{N-1} \psi(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

ou seja, a subsolução é menor ou igual a supersolução para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, concluímos pelo Teorema (ZY) que a equação

$$-div(|\nabla U|^{p-2} \nabla U) = \rho(x)$$

possui uma solução inteira U, limitada pela sub e supersolução, respectivamente. Ou seja,

$$0 \leq U(x) \leq V(x) \leq H_{\infty} < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \lim_{|x|\to\infty}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds - \int_0^{|x|}\left(\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds\right] = 0,$$

segue que

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0,$$

e isso conclui a demonstração da Proposição 3.1.

A.2 Demonstração do Lema 3.2: (Capítulo 3)

Demonstração: Considere

$$J(r) = \int_0^r \left(t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}\psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \tag{A.2}$$

Reescrevendo (A.2) temos

$$J(r) = \int_0^1 \left(t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}\psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_1^r \left(t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}\psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \tag{A.3}$$

Note que para demonstrar esta proposição temos dois casos a considerar, isto é, o caso em que $1 < p \leq 2$ e outro, quando $p \geq 2$. No que segue, provaremos o caso 1.

<u>**Caso1:**</u> $1 < p \leq 2$

De (A.3), vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}\psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt &\leq \int_0^1 t^{\frac{1-N}{p-1}}\, t^{\frac{N-1}{p-1}}\left(\int_0^t \psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt\\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t \psi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt\\ &= \int_0^1 \psi(\theta(t))^{\frac{1}{p-1}}\, t^{\frac{1}{p-1}}\,dt < \infty,\end{aligned}$$

onde $0 \leq \theta(t) \leq t$. Então

$$J(r) \leq C_1 + \int_1^r \left(t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \psi(s)\, ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt,$$

onde

$$C_1 := \int_0^1 \psi(\theta(t))^{\frac{1}{p-1}}\ t^{\frac{1}{p-1}}\ dt.$$

Agora, considerando a função convexa $\phi(t) = t^{\frac{1}{p-1}}$, teremos

$$\phi\left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s) ds \right) = \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Assim, pela proposição 1.11 (desigualdade de Jensen), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} &\leq \frac{\int_0^t \left(t s^{N-1}\psi(s) \right)^{\frac{1}{p-1}} ds}{t} \\
&= t^{\frac{-p+2}{p-1}} \int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} \psi(s)^{\frac{1}{p-1}} ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
J(r) &\leq C_1 + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq C_1 + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(t^{\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{p-1}} \int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} \psi(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right) dt \\
&= C_1 + \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}} \left(\int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} \psi(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right) dt \\
&= C_1 + \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}} \left(\int_0^1 s^{\frac{N-1}{p-1}} \psi(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right) dt \\
&+ \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}} \left(\int_1^t s^{\frac{N-1}{p-1}} \psi(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right) dt\ .
\end{aligned}$$

Sabendo que,

$$
\begin{aligned}
\int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}}\left(\int_0^1 s^{\frac{N-1}{p-1}}\psi(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\right)dt &\leq \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}}\left(\int_0^1 \psi(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\right)dt \\
&= C_2\int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}}dt \\
&= C_2\left[\left(\frac{p-1}{-N+2}\right)r^{\frac{-N+2}{p-1}}-\left(\frac{p-1}{-N+2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

onde pela Fórmula do Valor Médio para integrais (Teorema 1.14), $C_2 := \psi(\theta(t))^{\frac{1}{p-1}}$ e, como por hipótese $N \geq 3$, segue, passando o limite quando $r \to \infty$ na última desigualdade que

$$\int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}}\left(\int_0^1 s^{\frac{N-1}{p-1}}\ \psi(s)^{\frac{1}{p-1}}\ ds\right)dt = C_3 < \infty.$$

Agora tomando $C_4 = C_1 + C_3$, obtemos

$$J(r) \leq C_4 + \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}}\left(\int_1^t s^{\frac{N-1}{p-1}}\psi(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\right)dt. \tag{A.4}$$

Integrando (A.4) por partes, implica que

$$
\begin{aligned}
J(r) &\leq C_4 + \int_1^t s^{\frac{N-1}{p-1}}\psi(s)^{\frac{1}{p-1}}ds\left(\frac{p-1}{-N+2}\right)t^{\frac{-N+2}{p-1}}\Bigg|_1^r \\
&- \left(\frac{p-1}{-N+2}\right)\int_1^r t^{\frac{-N+2}{p-1}}(t^{\frac{N-1}{p-1}}\psi(t)^{\frac{1}{p-1}}-\psi(1)^{\frac{1}{p-1}})dt \\
&= C_4 + \left(\frac{p-1}{-N+2}\right)r^{\frac{-N+2}{p-1}}\int_1^r s^{\frac{N-1}{p-1}}\psi(s)^{\frac{1}{p-1}}ds \\
&- \left(\frac{p-1}{-N+2}\right)\int_1^r t^{\frac{1}{p-1}}\psi(t)^{\frac{1}{p-1}}dt + \left(\frac{p-1}{-N+2}\right)\int_1^r t^{\frac{-N+2}{p-1}}\psi(1)^{\frac{1}{p-1}}dt \\
&\leq C_4 + C_5\int_1^r t^{\frac{1}{p-1}}\psi(t)^{\frac{1}{p-1}}dt,
\end{aligned}
$$

onde $C_5 = \left(\frac{p-1}{N-2}\right) > 0$.

Daí, passando ao limite a desigualdade acima quando $r \to \infty$, temos que

$$\lim_{r\to\infty} J(r) \leq \lim_{r\to\infty} \left(C_4 + C_5 \int_1^r t^{\frac{1}{p-1}} \psi(t)^{\frac{1}{p-1}} \right). \tag{A.5}$$

Aplicando a hipótese (A) do Lema 3.2 na integral de (A.5), obtemos

$$H_\infty = \lim_{r\to\infty} J(r) < \infty.$$

Fica, assim, demonstrado o primeiro caso.

No que segue, passaremos a demonstrar o

Caso 2: $p \geq 2$

Para tanto, considere

$$H(t) = \int_0^t s^{N-1} \psi(s) ds.$$

Consequentemente, uma das alternativas abaixo ocorrerá:

$$(i) \quad H(t) < 1, \quad \forall\, t > 0 \qquad \text{ou}$$

$$(ii) \quad H(t_0) = 1 \text{ para algum } t_0 > 0.$$

Se (i) ocorrer, então

$$H(t)^{\frac{1}{p-1}} \leq 1, \quad \forall\, t > 0. \tag{A.6}$$

Como consequência deste fato, temos

$$\begin{aligned} J(r) &= \int_0^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &\leq C_1 + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &\overset{(A.6)}{\leq} C_1 + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} dt. \end{aligned}$$

Assim, usando a hipótese de que $p < N$, e passando ao limite a desigualdade acima quando $r \to \infty$, obtemos

$$H_\infty = \lim_{r\to\infty} J(r) \leq C_1 + \left(\frac{p-1}{-N+p}\right) \lim_{r\to\infty} r^{\frac{-N+p}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{-N+p}\right) < \infty.$$

Por outro lado, se ocorrer (ii), então existe $s_0 > 0$ tal que para todo $s \geq s_0$, tem-se que $H(s) > 1$. Daí, segue que

$$H(s)^{\frac{1}{p-1}} \leq H(s), \quad \forall s \geq s_0. \tag{A.7}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
J(r) &= \int_0^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s)ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s)ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s)ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq C_1 + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq C_1 + \int_1^{s_0} t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_{s_0}^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\overset{(A.7)}{\leq} C_1 + \int_1^{s_0} t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_{s_0}^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t) dt \\
&= C_7 + \int_{s_0}^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t) dt
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$J(r) = \int_0^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^t s^{N-1}\psi(s)ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt \leq C_7 + \int_{s_0}^r t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t) dt \tag{A.8}$$

onde $C_7 = C_1 + C_6$ e,

$$C_6 = \int_1^{s_0} t^{\frac{1-N}{p-1}} H(t)^{\frac{1}{p-1}} dt.$$

Integrando por partes a desigualdade (A.8), segue que

$$
\begin{aligned}
J(r) &\leq C_7 + \int_0^t s^{N-1}\psi(s)ds \left(\tfrac{p-1}{-N+p}\right) t^{\frac{-N+p}{p-1}}\Big|_1^r \\
&- \left(\tfrac{p-1}{-N+p}\right) \int_1^r t^{\frac{-N+p}{p-1}} t^{N-1}\psi(t)dt \\
&= C_7 + \left(\tfrac{p-1}{-N+p}\right) r^{\frac{-N+p}{p-1}} \int_0^r s^{N-1}\psi(s)ds \\
&- \left(\tfrac{p-1}{-N+p}\right) \int_0^1 s^{N-1}\psi(s)ds - \left(\tfrac{p-1}{-N+p}\right) \int_1^r t^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\psi(t)dt \\
&\leq C_7 + C_8 + C_9 \int_1^r t^{\frac{N(p-2+1)}{p-1}}\psi(t)dt,
\end{aligned}
$$

onde

$$C_8 = \left(\frac{p-1}{-N+p}\right) r^{\frac{-N+p}{p-1}} \int_0^r s^{N-1}\psi(s)ds \quad \text{e} \quad C_9 = -\left(\frac{p-1}{-N+p}\right).$$

Considerando $C_{10} = C_7 + C_8$, segue que

$$J(r) \leq C_{10} + C_9 \int_1^r t^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\psi(t)dt.$$

Passando ao limite a desigualdade acima quando $r \to \infty$, e usando a hipótese (B), obtemos

$$H_\infty = \lim_{r\to\infty} J(r) < \infty.$$

Assim, acabamos de demonstrar do Lema 3.2.

A.3 Demonstração do Lema 3.3: (Capítulo 3)

Demonstração: Para demonstrar este lema, observe que existem constantes positivas δ e M, tais que

$$F(s)^{\frac{1}{p-1}} \geq s\ \delta^p, \qquad \forall\ \ s \geq M. \tag{A.9}$$

De fato, suponha por contradição que o resultado (A.9) seja falso. Logo, assumiremos que existe uma sequência crescente $\{s_j\}$, tal que $\lim_{j\to\infty} s_j = \infty$, e também que

$$\frac{F(s_j)^{\frac{1}{p-1}}}{s_j} < \frac{1}{j}\,, \qquad \forall\;\; j = 1, 2, \cdots \tag{A.10}$$

Logo por (A.10),

$$F(s_j)^{-\frac{1}{p-1}} > \frac{j}{s_j}\,, \qquad \forall\;\; j = 1, 2, \cdots . \tag{A.11}$$

Desde que, por hipótese, F é não-decrescente, segue que

$$F(s) \leq F(s_j), \qquad \forall\;\; s \in [0, s_j]. \tag{A.12}$$

Sabendo que por hipótese,

$$G(s) \;=\; \int_0^s F(t)\,dt \;\leq\; \int_0^s F(s)\,dt \;=\; F(s)\int_0^s dt \;=\; s\,F(s), \tag{A.13}$$

segue que

$$G(s) \;\leq\; s\,F(s), \qquad \forall\;\; s > 0$$

e, por (A.12) obtemos

$$G(s) \;\leq\; s\,F(s) \;\leq\; s\,F(s_j), \qquad \forall\;\; s \in [0, s_j].$$

Consequentemente, para $1 < s_1 < s_j$, segue que

$$\int_{s_1}^{s_j} G(s)^{-\frac{1}{p}}\,ds \;\geq\; \int_{s_1}^{s_j} [s\,F(s_j)]^{-\frac{1}{p}}\;ds \;=\; \int_{s_1}^{s_j} s^{-\frac{1}{p}}\;[F(s_j)]^{-\frac{1}{p}}\;ds. \tag{A.14}$$

Mas por (A.11),

$$F(s_j) < \left(\frac{s_j}{j}\right)^{p-1}. \tag{A.15}$$

Elevando (A.15) à $-1/p$, temos

$$F(s_j)^{-\frac{1}{p}} > \left(\frac{j}{s_j}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{A.16}$$

Logo, aplicando (A.16) em (A.14), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_j} G(s)^{-\frac{1}{p}}\, ds &\geq \left(\frac{j}{s_j}\right)^{\frac{p-1}{p}} \int_{s_1}^{s_j} s^{-\frac{1}{p}}\, ds \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{j}{s_j}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left({s_j}^{\frac{p-1}{p}} - {s_1}^{\frac{p-1}{p}}\right) \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right) j^{\frac{p-1}{p}} \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_j}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\int_{s_1}^{s_j} G(s)^{-\frac{1}{p}}\, ds \geq \left(\frac{p}{p-1}\right) j^{\frac{p-1}{p}} \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_j}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right). \tag{A.17}
$$

Portanto, segue de (A.17) que

$$
\lim_{j\to\infty} \int_{s_1}^{s_j} G(s)^{-\frac{1}{p}}\, ds = \infty
$$

contradizendo o fato de

$$
\int_{1}^{\infty} G(t)^{-\frac{1}{p}}\, dt < \infty.
$$

Assim, existem constantes positivas δ e M, tais que

$$
F(s)^{\frac{1}{p-1}} \geq s\, \delta^p, \qquad \forall\ \ s \geq M.
$$

Observe que por (A.13)

$$
G(s) \leq s\, F(s).
$$

Então, por (A.9), temos que (A.13) é tal que

$$
G(s) \leq \frac{F(s)^{\frac{p}{p-1}}}{\delta^p}, \quad \forall\ \ s \geq M.
$$

Daí, inferimos que

$$
G(s)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{F(s)^{\frac{1}{p-1}}}{\delta}, \quad \forall\ \ s \geq M.
$$

e consequentemente, temos que

$$\frac{1}{G(s)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\delta}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad \forall \ \ s \geq M. \tag{A.18}$$

Agora reescrevendo a equação (3.23), obtemos que

$$\int_1^\infty \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} \ = \ \int_1^M \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} + \int_M^\infty \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{A.19}$$

e como a integral de 1 a M é finita, uma vez que temos a integração de uma função monótona num compacto, segue por (A.18), que a equação A.19 é tal que

$$\int_1^\infty \frac{1}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}}\, ds \leq C + \frac{1}{\delta}\int_1^\infty \frac{ds}{G(s)^{\frac{1}{p}}},$$

onde

$$C = \int_1^M \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Mas por hipótese, δ é um número real positivo e

$$\int_1^\infty \frac{ds}{G(s)^{\frac{1}{p}}} \ < \infty.$$

Concluímos então que

$$\int_1^\infty \frac{ds}{F(s)^{\frac{1}{p-1}}} < \infty,$$

o que prova o Lema 3.3.

APÊNDICE B

VERIFICAÇÃO DE EXEMPLOS E ADAPTAÇÃO DOS TEOREMAS (DH) E (GL) AO TEOREMA (ZY)

Neste apêndice, faremos a verificação dos exemplos apresentados na introdução deste trabalho e mostraremos que as hipóteses do Teorema (ZY) podem ser adaptadas de forma que possamos fazer uso dos Teoremas (DH) e (GL) utilizados no capítulo 2, enunciados no Capítulo 1. Nos exemplos que se seguem, ρ é uma função que satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1 e $\psi(r) = \max_{|x|=r} \rho(x)$.

B.1 Verificação dos exemplos E_1 e E_2 :

$$(E_1) \quad -\Delta_p u = \rho(x)u^\gamma[ln(1+u)]^\eta, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Considere $F(u) = u^\gamma \ [ln(1+u)]^\eta$ e analisemos os limites $(i)-(iv)$ com restrições impostas a γ e η.

$$(i) \quad \lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0 \quad \text{quando} \quad \gamma > p-1 \quad \text{e} \quad \eta \geq 0$$

$$(ii) \quad \lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0 \quad \text{quando} \quad \gamma = p-1 \quad \text{e} \quad \eta > 0$$

$$(iii) \quad \lim_{u\to \infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0 \quad \text{quando} \quad \gamma = p-1 \quad \text{e} \quad \eta = 0$$

$$(iv) \quad \lim_{u\to \infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0 \quad \text{quando} \quad 0 < \gamma < p-1 \quad \text{e} \quad \eta \text{ arbitrário,}$$

e, em seguida, aplicaremos o Teorema (MS_1).

Observe que os casos $(i)-(iii)$ seguem trivialmente. Já no caso (iv), temos algumas possibilidades para η. Quando $\eta = 0$ ou $\eta < 0$, obtemos $\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0$. Se $\eta = 1$, temos que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{[ln(1+u)]^\eta}{u^{(p-1)-\gamma}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{\eta\ [ln(1+u)]^{\eta-1}}{(1+u)((p-1)-\gamma)u^{(p-1)-\gamma-1}}.$$

Tomando $C = (p-1)-\gamma$, segue que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{[ln(1+u)]^\eta}{Cu^{(p-1)-\gamma-1} + Cu^{(p-1)-\gamma}}. \tag{B.1}$$

Assim, usando L'Hopital $N+m$ vezes em (B.1), onde m é um inteiro positivo, o numerador tende a um número positivo pequeno e o denominador a infinito. Logo,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{[ln(1+u)]^\eta}{u^{(p-1)-\gamma}} = 0.$$

Desde que a função $f(x,u) = \rho(x)\ u^\gamma\ [ln(1+u)]^\eta$ é localmente Hölder contínua na variável x, localmente Lipschitz em u e além disso,

$$|f(x,u)| = |\rho(x)||u^\gamma\ [ln(1+u)]^\eta| \leq \psi(|x|)u^\gamma\ [ln(1+u)]^\eta,$$

segue pelo Teorema (MS_1) que o problema E_1 possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas. Além do que, cada uma dessas soluções são limitadas inferiormente e superiormente por uma constante positiva.

Agora analisaremos o problema

$$(E_2) \quad -\Delta_p u = \rho(x)(1 - cosu)u^{p-2}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para tanto, seja $F(u) = u^{p-2}(1 - cosu)$. A função F, tal como definida, satisfaz

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 0,$$

visto que

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1 - cosu}{u} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{u\to 0^+} senu = 0$$

para todo $p > 1$.

Agora, tomando ρ nas condições da Proposição 3.1 e de forma semelhante ao que foi feito no exemplo E_1, concluímos que E_2 possui uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas em $\mathbb{R}^N$, onde cada uma dessas soluções é limitada por baixo uma constante positiva.

B.2 Verificação dos exemplos E_3 e E_4 :

$$(E_3) \quad -\Delta_p u = \rho(x)u^{-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

onde $\alpha > 0$.

Seja $F(u) = u^{-\alpha}$. Suponha que exista $\psi(|x|)$ tal que $\rho(x) \leq \psi(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Observe que a hipótese (7) do Teorema (MS_1) também se mantém, visto que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to\infty} u^{-\alpha-(p-1)} \overset{\alpha \geq 0}{=} 0.$$

Agora, para o problema

$$(E_4) \quad -\Delta_p u = K(x)u^{p^*-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, suponha que exista $\psi(|x|)$ onde $K(x) \leq \psi(|x|)$, ambas localmente Hölder contínuas e H_∞. Note que

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to 0^+} u^{\frac{p^2}{N-p}} = 0$$

onde $p < N$. Logo, pelo Teorema (MS_1) segue que E_3 e E_4 possuem uma infinidade de soluções inteiras positivas limitadas inferiormente por uma constante positiva.

B.3 Verificação do exemplo E_5 :

Recordemo-nos que

$$(E_5) \quad -\Delta_p u + \rho(x)(sen^2(u^{\frac{p-1}{2}}) + u^\theta) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \theta > p-1 \quad \text{e} \quad p > 1.$$

Considere $F(u) = sen^2(u^{\frac{p-1}{2}}) + u^\theta$. Mostraremos inicialmente que o Teorema (MS_1) não é aplicável ao problema E_5. Para tanto, calcularemos os limites da hipótese (7) do referido teorema.

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to 0^+} \left\{ \frac{sen^2(u^{\frac{p-1}{2}})}{u^{p-1}} + u^{\theta-(p-1)} \right\}.$$

Fazendo $t = u^{\frac{p-1}{2}}$, observe que quando $u \to 0^+$, $t \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{sen^2(u^{\frac{p-1}{2}})}{u^{p-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{sen^2 t}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{sent}{t}\right)^2 = 1$$

Logo,

$$\lim_{u\to 0^+} \left\{ \frac{sen^2(u^{\frac{p-1}{2}})}{u^{p-1}} + u^{\theta-(p-1)} \right\} = 1,$$

visto que

$$\lim_{u\to 0^+} u^{\theta-(p-1)} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{F(u)}{u^{p-1}} = \lim_{u\to\infty}\left\{\frac{sen^2(u^{\frac{p-1}{2}})}{u^{p-1}} + u^{\theta-(p-1)}\right\} = \infty.$$

Logo, o Teorema (MS_1) não é aplicável. Agora,

$$G(t) = \int_0^t F(s)\, ds = \int_0^t sen^2(u^{\frac{p-1}{2}})\, ds + \int_0^t s^\theta\, ds \geq \int_0^t s^\theta\, ds = \frac{t^{\theta+1}}{(\theta+1)} < \infty,$$

daí segue que

$$\frac{1}{G(t)^p} \leq \left(\frac{(\theta+1)}{t^{\theta+1}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, t > 0.$$

Assim,

$$\int_1^\infty \frac{dt}{G(t)^{\frac{1}{p}}} \leq \int_1^\infty \left(\frac{\theta+1}{t^{\theta+1}}\right)^{\frac{1}{p}} dt = \left(\frac{p\,(\theta+1)^{\frac{1}{p}}}{p-(\theta+1)}\right)\lim_{r\to\infty}\left(r^{\frac{p-(\theta+1)}{p}} - 1\right) = \left(\frac{p\,(\theta+1)^{\frac{1}{p}}}{p-(\theta+1)}\right),$$

visto que por hipótese, $\theta > p-1$. Desta forma, note que a hipótese (10) do Teorema (MS_3) está verificada. Note que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{(sen^2(t^{\frac{p-1}{2}}) + t^\theta)^{\frac{1}{p-1}}}\\ &\leq \int_0^\infty t^{-\frac{\theta}{p-1}}\, dt\\ &= \left(\frac{p-1}{p-(\theta+1)}\right)\left\{\lim_{r\to\infty} r^{\frac{p-(\theta+1)}{p-1}} - \lim_{r\to 0} r^{\frac{p-(\theta+1)}{p-1}}\right\} = \infty.\end{aligned}$$

Então, tome ρ tal que

$$\parallel U \parallel_\infty < \int_0^\infty \frac{dt}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Logo, a hipótese (11) está verificada, donde concluímos que o problema E_5 possui uma infinidade de soluções positivas limitadas em $\mathbb{R}^N$.

B.4 Verificação do exemplo E_6 :

$$(E_6) \quad -\Delta_p u = \rho(x)u^{p-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Seja $F(u) = u^{p-1}$. Desde que

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 1$$
$$\lim_{u\to \infty} \frac{F(u)}{u^{p-1}} = 1,$$

segue que a condição (7) do Teorema (MS_1) não é satisfeita. Além disso, observe que

$$G(t) = \int_0^t F(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{s^{p-1}}\, ds = \frac{t^{2-p}}{2-p}$$

donde temos

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dt}{G(t)^{\frac{1}{p}}} = \int_1^\infty \left(\tfrac{2-p}{t^{2-p}}\right)^{\frac{1}{p}} dt &= (2-p)^{\frac{1}{p}} \int_1^\infty (t^{p-2})^{\frac{1}{p}} dt \\
&= (2-p)^{\frac{1}{p}} \lim_{r\to\infty} \int_1^r t^{\frac{p-2}{p}} dt \\
&= (2-p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{2p-2}\right) \lim_{r\to\infty} (r^{\frac{2p-2}{p}} - 1) = \infty.
\end{aligned}$$

Desta maneira, o Teorema (MS_3) não é apropriado para este exemplo. Mas, observe que

$$\frac{t}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{t}{t} = 1.$$

Logo,

$$\sup_{t\in(0,\infty)} \left(\frac{t}{F(t)^{\frac{1}{p-1}}}\right) = 1.$$

E, se $\parallel U \parallel_\infty < 1$, então o Teorema (MS_4) se aplica. Observe ainda que, quando

$$\parallel U \parallel_\infty \geq 1,$$

tome $\lambda > 0$ tal que $\lambda \| U \|_\infty < 1$. Assim,

$$-\Delta_p(\lambda^{\frac{1}{p-1}} U) = \lambda(-\Delta_p U) = \lambda\rho(x).$$

Logo, o problema

$$(P)_\lambda : \begin{cases} -\Delta_p U = \lambda\rho(x), & \mathbb{R}^N \\ U(x) > 0 \quad \text{em} & \mathbb{R}^N \\ U(x) \to 0 \quad \text{quando} & |x| \to \infty \end{cases}$$

tem uma solução $V = \lambda U$. Além disso, existe um número $\lambda^* > 0$ tal que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda\rho(x)F(u) = 0, & \mathbb{R}^N \\ u(x) > 0 \quad \text{em} & \mathbb{R}^N \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções positivas, limitadas inferiormente por uma constante positiva, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

B.5 Aplicação do Teorema (DH) (Capítulo 1)

Observe que, como B_R é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, então as funções v e w assumem valores máximo e mínimo em pontos de $\overline{B}_R$. Ou seja,

$$C_R^1 \leq w(x) \leq g(x) \leq v(x) \leq C_R^2, \qquad \forall\, x \in \overline{B}_R.$$

Desde que, pelo Teorema (ZY), f é uma função real localmente Lipschitz contínua na variável u no conjunto Σ, segue que f é contínua na variável u. Daí, f assume valores máximo e mínimo em pontos do intervalo compacto $[C_R^1, C_R^2]$. Desta forma,

$$|f(x,u)| \leq \max_{t\, \in\, [C_R^1, C_R^2]} |f(x,t)|.$$

Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, f é limitada na variável u, o que motiva a seguinte definição

$$k_{1,R}(x) := \max_{t \,\in\, [C_R^1, C_R^2]} |f(x,t)|.$$

<u>**Afirmação B.5.1:**</u> $k_{1,R} \in L^{p'}(B_R)$, onde $1 < p < \infty$.

Para tanto, observe que por hipótese do Teorema (ZY), f é uma função real definida em $\mathbb{R}^{N+1}$ e é localmente Hölder contínua com expoente $\lambda \in (0,1)$ na variável x. Logo, f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e portanto, para todo $x \in \overline{B}_R$. Daí, segue que

$$|f(x,u)| \leq \sup_{(y,s) \,\in\, \overline{B}_R \times\, [C_R^1, C_R^2]} |f(y,s)| \leq \widehat{C}_R$$

o que implica,

$$k_{1,R}(x) \leq \widehat{C}_R \qquad \text{em} \;\; B_R.$$

Como consequência deste fato, $k_1 \in L^\infty(B_R) \subset L^{p'}(B_R)$. Agora, w é subsolução em $\mathbb{R}^N$ da equação $(P)_p$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \; dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(x,w)\, \varphi \; dx \quad \forall \;\; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \varphi \geq 0.$$

Considere $\sigma \in W_0^{1,p}(B_R)$, $\sigma \geq 0$ e $\psi_n \geq 0 \in C_0^\infty(B_R)$ tal que $\psi_n \xrightarrow{n \to \infty} \sigma$ em $W^{1,p}(B_R)$. Defina $\widetilde{\psi}_n : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x), & x \in B_R \\ \\ 0, & x \in B_R^C \end{cases}$$

Logo, $\widetilde{\psi}_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\widetilde{\psi}_n \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \widetilde{\psi}_n dx = \int_{B_R} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \widetilde{\psi}_n \; dx \;\; &\leq \;\; \int_{B_R} f(x,w)\, \widetilde{\psi}_n \; dx \\ &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} f(x,w)\, \widetilde{\psi}_n \; dx, \quad \forall \, n \geq 1. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_{B_R} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \psi_n \; dx \;\; \leq \;\; \int_{B_R} f(x,w)\, \psi_n \; dx, \quad \forall \, n \geq 1.$$

Segue, passando ao limite a última desigualdade, que

$$\int_{B_R} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla \sigma \; dx \;\; \leq \;\; \int_{B_R} f(x,w)\; \sigma \; dx.$$

De forma análoga, obtemos que v é supersolução fraca do problema $(P)_R$ para toda φ em $W_0^{1,p}(B_R)$ com $\varphi \geq 0$ em B_R. Portanto, concluímos que o problema $(P)_R$ admite uma solução fraca u_R com

$$w(x) \leq u_R(x) \leq v(x), \qquad \forall\; x \in B_R.$$

B.6 Aplicação do Teorema (GL) (Capítulo 1)

A idéia básica da aplicação deste Teorema é considerar Ω como sendo B_{R_0}, uma bola de raio R_0 em $\mathbb{R}^N$ e funções apropriadas que satisfaçam as hipóteses pertinentes.

Para $R_0 = 2$, temos que u_R é solução fraca do problema $(P)_R$ para todo $x \in B_2$. Prosseguindo, verificaremos as condições $(i) - (iv)$ do Teorema em pauta.

Para todo $(x,z,\eta) \in \partial B_R \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, e para todo $(y,w) \in B_R \times [-M_0, M_0]$ onde $M_0 = max\,\{max\; v, -min\; w\}$ consideremos

$$A(x,z,\eta) = |\eta|^{p-2}\;\eta \qquad \text{e} \qquad A^i(x,z,\eta) = |\eta|^{p-2}\;\eta_i.$$

Segue-se então que,

$$a^{ij}(x,z,\eta) = \frac{\partial A^i}{\partial \eta_j}(x,z,\eta) = (p-2)\;|\eta|^{p-3}\;\frac{\eta_j}{|\eta|}\eta_i + |\eta|^{p-2}\;\delta_{ij}.$$

Ou seja,

$$a^{ij}(x,z,\eta) = (p-2)\;|\eta|^{p-4}\;\eta_i\;\eta_j + |\eta|^{p-2}\;\delta_{ij}.$$

Sabendo disso, temos

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x,z,\eta)\;\xi_i\;\xi_j = \sum_{i,j=1}^{N}(p-2)\;|\eta|^{p-4}\;\eta_i\;\eta_j\;\xi_i\;\xi_j + \sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\;\delta_{ij}\;\xi_i\;\xi_j.$$

Como,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \eta_j\ \xi_i\ \xi_j &= \sum_{i=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \xi_i\ \sum_{j=1}^{N}\eta_j\ \xi_j \\
&= \sum_{i=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \xi_i\ (\eta\ \xi) = (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ (\eta\ \xi)\ \sum_{i=1}^{N}\eta_i\ \xi_i \\
&= (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ (\eta\ \xi)\ (\eta\ \xi) = (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ (\eta\ \xi)^2,
\end{aligned}$$

e,

$$\sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\ \delta_{ij}\ \xi_i\ \xi_j = \sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\ \xi_i^2 = |\eta|^{p-2}\ |\xi|^2,$$

então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}a^{ij}(x,z,\eta)\ \xi_i\ \xi_j &= \sum_{i,j=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \eta_j\ \xi_i\ \xi_j + \sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\ \delta_{ij}\ \xi_i\ \xi_j \\
&= (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ (\eta\ \xi)^2 + |\eta|^{p-2}\ |\xi|^2 \\
&\geq |\eta|^{p-2}\ |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Considerando $\lambda = 1,\ k = 0$ e $m = p-2$, temos que a condição (i) do Teorema (GL) é satisfeita.

Para a condição (ii), assumindo $\xi = (1, 1, \cdots, 1, 1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \eta_j\ \xi_i\ \xi_j + \sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\ \delta_{ij}\ \xi_i\ \xi_j &= (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ (\eta\ \xi)^2 + |\eta|^{p-2}\ |\xi|^2 \\
&\leq (p-2)\ |\eta|^{p-4}\ |\eta|^2|\xi|^2 + |\eta|^{p-2}\ |\xi|^2 \\
&\leq N(p-1)\ |\eta|^{p-2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x,z,\eta)\right| &= \left|\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x,z,\eta)\xi_i\ \xi_j\right| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{N}(p-2)\ |\eta|^{p-4}\ \eta_i\ \eta_j\ \xi_i\ \xi_j + \sum_{i,j=1}^{N}|\eta|^{p-2}\ \delta_{ij}\ \xi_i\ \xi_j\right| \\
&\leq \left|N(p-1)\ |\eta|^{p-2}\right| \\
&= N(p-1)\ |\eta|^{p-2}.
\end{aligned}$$

Tomando Λ uma constante tal que $\Lambda \geq N(p-1)$, concluimos que a condição (ii) está verificada.

Afirmamos que o item (iii) é imediato, visto que

$$|A(x,z,\eta) - A(y,w,\eta)| = |\eta|^{p-2}\eta - |\eta|^{p-2}\eta = 0 \leq \Lambda(1+|\eta|)^{m+1}\ [\ |x-y|^{\alpha} + |z-w|^{\alpha}\ ]$$

Quanto ao item (iv), tal como visto na afirmação B.5.1 da aplicação do Teorema (DH), observe que

$$|B(x,z,\eta)| = |f(x,z)| \leq \max_{(y,s)\ \in\ \overline{B}_2\times\ [C_1^1, C_1^2]} |f(y,s)| \leq \widehat{C}_1 \leq \widehat{C}_1(1+|\eta|)^{p-2+2} = \widehat{C}_1(1+|\eta|)^{m+2}.$$

Logo, tomando $\Lambda = max(\widehat{C}_1, N(p-1))$, segue que a condição (iv) está verificada. E, visto que u_R é uma solução fraca do problema $(P)_R$ com

$$\parallel u_R \parallel_{L^\infty(B_2)} \leq \parallel w \parallel_{L^\infty(B_2)} + \parallel v \parallel_{L^\infty(B_2)} = M_0,$$

então pelo Teorema (GL) existe uma constante $\beta = \beta(\Lambda/\lambda, m, N) > 0$ tal que $u_R \in C^{1,\beta}(\overline{B}_1)$. Como pelo Teorema 1.7 vale a imersão $C^{1,\beta}(\overline{B}_1) \hookrightarrow C^1(\overline{B}_1)$, então $u_R \in C^1(\overline{B}_1)$. Além disso,

$$\parallel u_R \parallel_{1,\beta} \leq C_1'(\Lambda/\lambda, m, M_0, N, B_1).$$

Tomando agora $\Omega = B_3$ no Teorema (GL), obteremos que existe uma constante

$$C_2' = C_2'(\Lambda/\lambda, m, M_0, N, B_3)$$

tal que

$$\| u_R \|_{1,\beta} \leq C_2'.$$

Logo, para toda bola com raio $R \geq 2$, o mesmo argumento se aplica, donde teremos que a norma de u_R no espaço $C^{1,\beta}(B_{R_0})$ é limitada por uma constante independente de R.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] Brezis, H. and Kamin, S., *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math. 74 (1992), no. 1, 87-106.

[4] Cheng, K. S. and Ni, W. M., *On the structure of the conformal scalar curvature equation on* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), no. 1, 261-278.

[5] Cirstea, F. C. and Radulescu, V., *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 229 (1999), no. 2, 417-425.

[6] Deuel, J. and Hess, P., *A Criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic*, Boundary value problems 74 (1976) 49-54.

[7] DiBenedetto, E., $C^{1+\alpha}$ *Local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 7 (1983), no. 7, 8 pp.

[8] Figueiredo, D. G., *Equações elípticas não-lineares*, IMPA, Rio de Janeiro,1977.

[9] Ghergu, M. and Radulescu, V., *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term* , J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), no. 1, 265-273.

[10] Gonçalves, J. V. and Santos, C. A., *Existence and asymptotic behavior of non-radially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Anal. 65 (2006), no. 4, 719-727.

[11] Gonçalves, J. V. and Santos, C. A., *Positive solutions for a class of quasilinear singular equations*, Electron. J. Differential Equations, (2004), no. 56, 15 pp.

[12] Gonçalves, J. V., Melo, A. L., Santos, C. A., *On existence of L^∞- ground states for singular elliptic equations in the presence of a strongly nonlinear term*, Adv. Nonlinear Stud. 7 (2007), no. 3, 475-490.

[13] Ladyzhenskaya, O. A. and Ural'tseva, N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, London, 1968

[14] Lieberman, G. M., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 12 (11) (1988) 1203-1219.

[15] Lima, E. L., *Análise Real*, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[16] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[17] Lu, Q., Yang, Z. and Twizell, E. H., *Existence of entire explosive positive solutions of quasi-linear elliptic equations*, Appl. Math. and Comput. 148 (2004), 359-372.

[18] Medeiros, L. A. e Miranda M. M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[19] Ni, W. M. , *On the elliptic equation* $\Delta u + K(x)e^{2u} = 0$, *and conformal metrics with prescribed Gaussian curvatures* , Invent. Math. 66 (1982), no. 2, 343-352.

[20] Ni, W. M. , *On the elliptic equation* $\Delta u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$, *its generalizations, and applications in geometry* , Indiana Univ. Math. 31 (1982), no. 4, 493-529.

[21] Tolksdorf, P., *On the Dirichletproblem for quasilinear equations in domains with conical boundary points* , Comm. in Partial Differential Equations 8 (7) (1983), 773-817.

[22] Tolksdorf, P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Equations 51 (1984), 126-150.

[23] Yang, Z. *Existence of positive bounded entire solutions for quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Comput. 156 (2004), 743-754.

[24] Yang, Z. and Xu, B., *Entire Bounded Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Equations*, Boundary Value Problems 2007, Article ID 16407, 8 pp.

[25] Ye, D. and Zhou, F., *Invariant criteria for existence of bounded positive solutions*, Discr. Continuous Dynam. Syst. 12 (3) (2005), 413-424.

[26] Yin, H. and Yang, Z., *Some new results on the existence of bounded positive entire solutions for quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Comput. 177 (2006), 606-613.

[27] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1977).

[28] Zhang, Z., *A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 215 (1997), no. 2, 579-582.

[29] Zhang, Z., *A remark on the existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Anal. 67 (2007), no.1, 147-153.