

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Equações de difusão associadas a  
séries temporais estocásticas:  
Kramers-Moyal versus Fokker-Planck**

**Márcio Tavares de Castro**

Março 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Equações de difusão associadas a  
séries temporais estocásticas:  
Kramers-Moyal versus Fokker-Planck**

**Márcio Tavares de Castro**

Orientador: Annibal Dias de Figueiredo Neto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Março 2009

Aos meus pais,  
Berilo e Marli,  
e aos meus irmãos.

# Agradecimentos

Acima de tudo, agradeço a Deus, que em sua infinita bondade, guiou os meus passos ao longo desses árduos anos de estudos. Agradeço, especialmente, aos meus pais e irmãos pelo amor e carinho a mim confiados. Agradeço ainda aos meus amigos, fiéis companheiros de luta.

Gostaria de agradecer ao meu orientador o Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto pela orientação técnica e importantes conselhos, que foram imprescindíveis no desenvolvimento deste projeto. Agradeço também ao grupo de Física Matemática da UnB pelas discussões sobre o assunto. Por fim, agradeço a Universidade de Brasília pela ajuda institucional e ao CNPq pela ajuda financeira.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Processos Estocásticos</b>	<b>6</b>
2.1 Variáveis Aleatórias e Probabilidade . . . . .	6
2.2 Condição de Compatibilidade . . . . .	8
2.3 Processo Markoviano Marginal . . . . .	9
2.4 Valor Esperado e Momentos . . . . .	11
2.5 Função Característica . . . . .	13
2.6 Função de Lévy . . . . .	16
<b>3 Equação de Difusão</b>	<b>19</b>
3.1 Processos Estocásticos . . . . .	19
3.2 Equação de Difusão . . . . .	20
3.2.1 Sistemas Determinísticos . . . . .	23
3.2.2 Equação de Fokker-Planck . . . . .	23

3.2.3	Expansão de Kramers-Moyal . . . . .	24
3.2.4	Lema de Pawula . . . . .	24
3.3	Forma Canônica de Lévy . . . . .	26
3.3.1	Interpretação do resultado . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Processos contínuos e descontínuos</b>	<b>32</b>
4.1	Variáveis de retorno auto-similares . . . . .	32
4.2	Continuidade em distribuição . . . . .	35
4.2.1	Exemplo de processo contínuo . . . . .	35
4.2.2	Exemplo de processo descontínuo . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Movimento Browniano</b>	<b>46</b>
5.1	Equação Diferencial Estocástica . . . . .	46
5.2	Movimento Browniano . . . . .	48
5.3	Processo Contínuo . . . . .	51
5.3.1	Simulação Computacional . . . . .	52
5.4	Processo Descontínuo . . . . .	52
5.4.1	Simulação Computacional . . . . .	54
5.5	Coefficientes de Kramers-Moyal . . . . .	56
5.5.1	Variável Contínua . . . . .	57
5.5.2	Variável Descontínua . . . . .	58
5.5.3	Simulação Computacional . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Teoremas Limite e Equações de Difusão</b>	<b>69</b>
6.1	Teorema do Limite Central . . . . .	69
6.2	Teorema limite de Lévy . . . . .	71
6.3	Mapas lineares com ruído . . . . .	74
6.3.1	Hipótese de Infinitesimalidade . . . . .	77
6.3.2	Quebra da infinitesimalidade . . . . .	77

6.4	Processos Estocásticos . . . . .	79
6.4.1	Variável aleatória contínua . . . . .	79
6.4.2	Variável aleatória descontínua . . . . .	80
6.5	Caso simples . . . . .	80
6.5.1	Processos Contínuos . . . . .	83
6.5.2	Processos Descontínuos . . . . .	84
6.6	Caso Geral . . . . .	85
6.6.1	Processos Contínuos . . . . .	87
6.6.2	Processos Descontínuos . . . . .	89
6.6.3	Solução integral para ruídos descontínuos . . . . .	92
6.7	Análise das soluções . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>100</b>

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um processo markoviano marginal . . . . .	10
4.1	Convergência de uma distribuição gaussiana, para vários valores de $\Delta t$ . Assumimos $\mu_\theta = 0$ e $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$ . A distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de $\Delta t$ vai diminuindo. . . . .	36
4.2	Funções distribuição acumuladas de uma variável com densidade gaussiana para vários valores de $\Delta t$ . Assumimos $\mu_\theta = 0$ e $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma função degrau conforme o valor de $\Delta t$ vai ficando menor.	37
4.3	Processo de convergência de uma distribuição gaussiana descontínua, assumindo vários valores para $\Delta t$ . Aqui, $\mu_\theta = 0$ e $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$ e $a = 1.0$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de $\Delta t$ vai ficando menor. O traço vertical indica que $f(\theta)$ é infinito quando $\theta = 0$ para a distribuição dada, qualquer que seja o valor de $\Delta t$ . . . . .	43

- 4.4 Funções distribuição acumuladas de uma variável com distribuição gaussiana descontínua analisada para vários valores de  $\Delta t$ . Aqui,  $\mu_\theta = 0$  e  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$  e  $a = 1,0$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma função degrau conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor. . . . . 44
- 4.5 Função de Lévy  $\omega_{\Delta t}$  relacionada a uma distribuição gaussiana descontínua, calculada para vários valores de  $\Delta t$ . Aqui,  $\mu_\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$  e  $a = 1,0$ . . . . . 45
- 5.1 Série temporal obtida a partir da simulação do movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano definido no intervalo  $[-0, 125; 0, 125]$ . Assumimos o tempo  $t_0 = 0$ ,  $\gamma = 1$ , o valor da condição inicial  $x_0 = 0$  e valor de  $\Delta t = 0,01$ . Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes. . . 53
- 5.2 Série temporal estocástica obtida da simulação do movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano definido no intervalo  $[-0, 125; 0, 125]$ . Assumimos o tempo  $t_0 = 0$ ,  $\gamma = 1$ , o valor da condição inicial  $x_0 = 0$  e valor de  $\Delta t = 0,01$ . Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes. 56
- 5.3 Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_1$  e  $C_2$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_1$  comporta-se como uma reta e o coeficiente  $C_2$  assume um valor constante diferente de zero. . . . . 63

- 5.4 Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_3$  e  $C_4$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que os coeficientes  $C_3$  e  $C_4$  tornam-se nulos. . . . . 64
- 5.5 Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_5$  e  $C_6$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que os coeficientes  $C_5$  e  $C_6$  tornam-se nulos. . . . . 65
- 5.6 Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_1$  e  $C_2$  para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_1$  comporta-se como uma reta e o coeficiente  $C_2$  assume um valor constante diferente de zero. . . . . 66
- 5.7 Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_3$  e  $C_4$  para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_3$  torna-se nulo e o coeficiente  $C_4$  assume um valor constante diferente de zero. . . . . 67

5.8	Coeficientes de Kramers-Moyal $C_5$ e $C_6$ para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de $\Delta t$ . Assumimos $\delta = 0,05$ , número de pontos $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de $\Delta t$ vai ficando menor notamos que o coeficiente $C_5$ torna-se nulo e o coeficiente $C_6$ assume um valor constante diferente de zero. . . . .	68
6.1	Ilustração para entendimento do significado da variável $j\Delta t$ .	93
7.1	Comparação entre uma série temporal real da taxa cambial Real/Dolar (Intra-dia, 2002) [1] e uma série temporal simulada pelo nosso programa do movimento Browniano geométrico . .	104
7.2	Comparação entre densidades de probabilidade do retornos reduzidos $\overline{Z_{\Delta t}}$ de taxas cambiais [1] de Austrália, Grã-Bretanha, Canadá, Bélgica, Índia e Brasil, observados em intervalos de tempo $\Delta t$ entre 1 e 240 dias. . . . .	106
7.3	Função de Lévy para a taxa cambial Rupia/Dolar [1] . . . . .	107
7.4	Comportamento da taxa cambial Rupia/Dolar (diária, 2002) [1]	108

# Resumo

Equações de difusão são largamente utilizadas na obtenção de propriedades de séries temporais estocásticas. O objetivo principal deste trabalho é determinar os processos pelos quais uma equação de difusão deve ser modelada por uma expansão de Kramers-Moyal ou por uma equação de Fokker-Planck. Este estudo será feito através da utilização de funções características em sua forma canônica e da chamada função de Lévy, introduzida pelo matemático francês Paul Lévy para medir a distância de distribuições para uma gaussiana. Verificaremos como a convergência de distribuições de variáveis aleatórias influencia a escolha do tipo de equação difusiva a ser adotada. Veremos que os conceitos de auto-similaridade e continuidade em distribuição na análise de variáveis aleatórias são determinantes na obtenção das propriedades difusivas de um sistema estocástico. Em particular, estudaremos o movimento Browniano modelado por mapas lineares com ruído aleatório. Daremos bastante ênfase ao papel do ruído ao mostrar, analiticamente e computacionalmente, que sua forma influi no tipo de difusão apresentado pelo sistema. Como perspectiva de trabalho, enfocaremos a possibilidade de utilização de equações difusivas na modelagem de séries financeiras.

# Abstract

Diffusion equations are widely used to obtain properties of stochastic time series. The main goal of this work is to determine the processes by which a diffusion equation can be modeled by a Kramers-Moyal expansion or by a Fokker-Planck equation. This study will be done through the use of characteristic functions in its canonical form and the so-called Lévy function, introduced by French mathematician Paul Lévy to measure the distance of distributions from the Gaussian. We will show how the convergence of random variables distributions affects the choice of diffusive equation to be adopted. We will see how the concepts of self-similarity and continuity in distribution in the random variables' analysis are crucial to obtain the diffusive properties of a stochastic system. In particular, we will study the Brownian motion modeled by linear maps with random noise. We will rather focus on the role of noise to show, analytically and computationally, that its form affects the type of diffusion presented by the system. As work perspective, we will focus the use of diffusive equations for modeling financial series.

# Capítulo 1

## Introdução

Flutuações são propriedades muito comuns em um grande número de sistemas. Tais flutuações surgem de influências externas ou internas a um sistema e seu comportamento não é completamente conhecido. As equações de difusão lidam com estas flutuações que são resultado de muitos e pequenos distúrbios, cada um dos quais geram mudanças nas variáveis do sistema de forma imprevisível. Por isso, tais variáveis são tidas como aleatórias e o sistema é descrito por um processo estocástico.

Uma equação de difusão foi pela primeira vez utilizada na descrição do movimento Browniano, sistema no qual uma partícula pequena, mas macroscópica está imersa em um fluido. Os choques sucessivos da partícula com as moléculas do fluido levam-na a descrever um movimento flutuativo imprevisível. Devido a tais flutuações, não conhecemos nem a posição, nem a velocidade exata da partícula ao longo do tempo. A máxima informação que pode ser obtida é a probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada região e com certa velocidade. Com a utilização de uma equação de difusão tal probabilidade pode ser determinada.

Equações de difusão tem sido tradicionalmente foco de extensas pesquisas em diversos ramos das ciências naturais como, por exemplo: física do estado

sólido, óptica quântica, química, biologia teórica e teoria de circuitos. Sua aplicabilidade estende-se ainda a problemas relacionados a economia em estudos voltados para a teoria de especulações e flutuações no mercado financeiro. Apesar de vários aspectos destas equações serem compreendidos, ainda hoje, muitas questões persistem em aberto.

A equação de difusão associada a um processo estocástico é dada por uma equação diferencial exata para uma densidade de probabilidade. Esta equação é de primeira ordem com relação ao tempo e envolve uma expansão em todas as ordens das derivadas parciais com relação às variáveis estocásticas, esta expansão conhecida como expansão de Kramers-Moyal.

A literatura sobre o assunto utiliza predominantemente uma forma truncada da expansão de Kramers-Moyal que é uma equação diferencial de segunda ordem, denominada equação de Fokker-Planck. No entanto, o problema desta escolha concentra-se no fato de que, na maioria dos casos, este truncamento é feito sem uma justificativa plausível.

O objetivo central desta dissertação é esclarecer esta questão, mostrando de maneira definitiva as condições sob as quais podemos descrever uma equação difusiva através de uma equação de Fokker-Planck ou através de uma expansão de Kramers-Moyal.

A partir destes resultados, podemos definir um conjunto de medidas estatísticas interessantes para caracterização de processos estocásticos em séries temporais reais, aplicadas ao estudo de séries financeiras. Métodos estocásticos mostram-se poderosos meios de análise de mercados cambiais. O estudo sobre o assunto mostra que o comportamento dos retornos de taxas de câmbio em diferentes intervalos de tempo pode ser descrito em termos de equações de difusão. O capítulo 7 tratará com detalhes sobre este assunto.

A seguir, indicamos como esta dissertação foi organizada.

O capítulo (2) recapitula alguns dos conceitos básicos da teoria de probabilidade, necessários para o perfeito entendimento dos demais capítulos.

A seção (2.1) é dedicada à definição do conceito de processo estocástico e do significado de densidade de probabilidade.

Na seção (2.2), apresentamos a relação de compatibilidade de Chapman-Kolmogorov, que define os chamados processos de marginalização. Na seção (2.3), utilizamos tais processos de maneira adequada, chegando a relação de compatibilidade para a malha de dois tempos, relação esta, pilar central na obtenção de uma equação de difusão.

As seções (2.4) e (2.5) definem os conceitos de momentos probabilísticos e funções características, respectivamente. A seção (2.6) reapresenta a função característica, agora no formalismo canônico de Lévy. É a partir dela que obtemos a função de Lévy, que pode ser utilizada como uma poderosa ferramenta no estudo de convergência de variáveis aleatórias para regimes não-gaussianos.

O capítulo 3 é destinado à obtenção da equação de Difusão. Na seção 3.1 discutimos brevemente sobre processos estocásticos.

Na seção (3.2) obtemos a equação de difusão através da utilização de funções características, e a classificamos em três diferentes tipos. Por fim, demonstramos o lema de Pawula, útil, mas não completo, na determinação da forma específica que a equação de Difusão apresentará.

Na seção (3.3), obtemos a equação de difusão através da utilização de funções características canônicas de Lévy. Este novo formalismo permite-nos enxergar claramente se o processo estocástico analisado será descrito por uma equação de Fokker-Planck ou uma expansão de Kramers-Moyal. Concluiremos que uma simples análise da função de Lévy nos fornecerá tal resposta.

O capítulo (4) apresenta os conceitos de auto-similaridade e continuidade de variáveis aleatórias em termos de suas distribuições de probabilidade. Neste capítulo, mostramos uma série de propriedades estatísticas interessantes relacionadas que estabelecem uma forma específica para equações difusivas (Fokker-Planck ou Kramers-Moyal).

A seção (4.1) apresenta o conceito de auto-similaridade e suas implicações. A seção (4.2) define variáveis aleatórias contínuas e descontínuas, funções características e equação de difusão a elas relacionadas.

O capítulo (5) refere-se a um estudo teórico e computacional do movimento Browniano. Na seção (5.1) apresentamos a equação de Langevin, equação diferencial ordinária contendo uma parte determinística e um termo adicional contendo um ruído aleatório. Tal equação não apresenta solução única devido às várias maneiras de definir uma integral estocástica. Por isso, estabelecemos métodos para podermos considerar a equação de Langevin como um mapa linear com ruído, eliminando tal problema.

Na seção (5.2) discutimos o movimento Browniano de partículas em sua forma mais simples, suficiente para elucidação de nossas hipóteses sobre equações difusivas. Estabelecemos aqui as propriedades físicas e probabilísticas gerais relacionadas a este movimento.

Na seção (5.3) simulamos computacionalmente o movimento Browniano em sua forma tradicional, utilizando um ruído gaussiano contínuo. Já na seção (5.4), consideramos o ruído como uma variável aleatória descontínua. Analisamos as novas propriedades obtidas com esta nova hipótese e simulamos computacionalmente o mesmo.

A seção (5.5) refere-se a obtenção dos coeficientes de Kramers-Moyal relacionados aos tipos específicos de movimentos Brownianos apresentados, teoricamente e computacionalmente. Coeficientes estes que determinam a forma

específica que a equação de difusão possuirá. A partir dos resultados obtidos, teremos mais uma vez a confirmação das hipóteses estabelecidas.

O capítulo (6) faz uma análise criteriosa do processo de convergência de soma de variáveis aleatórias, caracterizando de modo preciso sua convergência ou afastamento de uma distribuição gaussiana. Isto pode ser feito através da análise de teoremas limite.

A seção (6.1) apresenta o famoso e de importância ímpar em estatística teorema do limite central em sua forma clássica, de acordo com a versão de Lindeberg. A seção (6.2) apresenta a versão de Lévy para o mesmo teorema. A vantagem da versão de Lévy é podermos utilizar a sua forma canônica para uma função característica no estudo da convergência de um processo de soma de variáveis aleatórias.

Na seção (6.3) utilizamos o conceito de soma de variáveis aleatórias a partir da utilização de equações iterativas oriundas de mapas lineares com ruído. Na seção (6.4) designamos quais tipos de processos estocásticos estarão associados a tais mapas lineares para a obtenção de suas propriedades estatísticas.

Na seção (6.5) fazemos análises de convergência associadas a processos estocásticos que satisfaçam a hipótese de infinitesimalidade, o que constitui um caso mais simples de análise. Na seção (6.6) partimos para a análise de processos estocásticos mais gerais e, desta forma, a hipótese de infinitesimalidade não é mais assegurada.

A seção (6.7) apresenta uma discussão geral sobre os resultados obtidos durante toda a dissertação, estabelecendo ligações entre processos estocásticos, continuidade em distribuição, convergência de variáveis aleatórias e tipos específicos da equação de difusão.

O capítulo (7) apresenta conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Processos Estocásticos

### 2.1 Variáveis Aleatórias e Probabilidade

Processo Estocástico é definido como uma coleção indexada de variáveis aleatórias  $\{X(t), t \in T\}$ . O parâmetro  $t$ , interpretado como o tempo, pode ser discreto ou contínuo. O conjunto de índices  $T$  indica se o processo é contínuo ou discreto.

Consideremos, então, um sistema cujas propriedades possam ser descritas em termos da variável estocástica  $X$ . A seguinte notação será utilizada para a densidade de probabilidade da variável  $X$ :

$$f(x_1, t_1) \equiv \text{densidade de probabilidade da variável} \\ \text{estocástica } X \text{ assumir o valor } x_1 \text{ no tempo } t_1; \quad (2.1)$$

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) \equiv \text{densidade de probabilidade conjunta da} \\ \text{variável estocástica } X \text{ assumir o valor } x_1 \\ \text{no tempo } t_1 \text{ e } x_2 \text{ no tempo } t_2. \quad (2.2)$$

De maneira análoga, podemos definir  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  como sendo a densidade de probabilidade conjunta da variável estocástica  $X$  assumir o valor  $x_1$  no tempo  $t_1, \dots, x_n$  no tempo  $t_n$ , onde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Esta

coleção de vários instantes de tempo  $t$ , na qual a variável  $X$  assume diferentes valores, é denominado de malha temporal.

Para desfazer certas confusões terminológicas, muito presentes na literatura sobre o assunto, vamos analisar como tais densidades podem ser obtidas. Dado os números reais  $x_1, \dots, x_n$  que podem assumir valores de  $-\infty$  a  $\infty$ , definimos como função distribuição acumulada de uma variável estocástica contínua  $X$ , a seguinte função:

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P(\{X \leq x_1\}, t_1; \dots; \{X \leq x_n\}, t_n). \quad (2.3)$$

Desta forma,  $F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  é igual a probabilidade de  $X \leq x_1$  no tempo  $t_1, \dots, X \leq x_n$  no tempo  $t_n$ . Uma função distribuição acumulada possui as seguintes propriedades: (i) é não-decrescente; (ii) é contínua à direita; (iii)  $F(-\infty, t_1; \dots, -\infty, t_n) = 0$ ; (iv)  $F(\infty, t_1; \dots; \infty, t_n) = 1$ .

Assumindo que  $F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  é uma função contínua de  $X$  e possui derivadas parciais até a ordem  $n$ , a quantidade

$$f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (2.4)$$

é denominada de densidade de probabilidade conjunta.

É importante ressaltar que a densidade de probabilidade conjunta é sempre positiva ( $f \geq 0$ ), e de (2.4) segue a seguinte condição de normalização:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \\ = F(\infty, t_1; \dots; \infty, t_n) - F(-\infty, t_1; \dots, -\infty, t_n) = 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde usamos propriedades (iii) e (iv), definidas acima, da função distribuição acumulada. Podemos ainda concluir que:

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n) dx'_1 \dots dx'_n \quad (2.6)$$

## 2.2 Condição de Compatibilidade

As densidades de probabilidade  $f$  devem satisfazer a condição de compatibilidade de Chapman-Kolmogorov [2], expressa por integrais, válida para  $i < n$

$$f(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_{i+1} \dots dx_n \quad (2.7)$$

Desta forma, a integração de  $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  com respeito a certas variáveis, implica na densidade conjunta das variáveis remanescentes. A nova densidade obtida é denominada densidade de probabilidade marginal. Da mesma forma, se em  $F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  substituirmos certas variáveis por  $\infty$ , também obteremos a função distribuição acumulada conjunta das variáveis remanescentes.

Esta condição de compatibilidade garante-nos que se acrescentarmos mais tempos na nossa malha temporal, então as novas probabilidades de realização devem ser compatíveis com a malha anterior ao acréscimo.

Podemos agora definir a densidade de probabilidade condicional conjunta  $f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)$  da variável estocástica  $X$  assumir o valor  $x_{k+1}$  no tempo  $t_{k+1}$ ,  $\dots$ ,  $x_n$  no tempo  $x_n$  dado que a variável assumiu os valores  $x_1$  no tempo  $t_1$ ,  $\dots$ ,  $x_k$  no tempo  $t_k$ , onde  $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n$ . Ela é definida através da seguinte identidade:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \\ = \frac{f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n)}{f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vamos discutir agora a regra para remover certas variáveis da densidade condicional [3]. Para remover um determinado número de variáveis à esquerda da linha condicional ( $|$ ), integramos a densidade de probabilidade

condicional com respeito a estas variáveis

$$\begin{aligned} & f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) dx_{k+2} \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para remover um determinado número de variáveis à direita da linha condicional (|), multiplicamos por uma densidade condicional das variáveis a serem eliminadas condicionadas as variáveis a serem mantidas e integra-se

$$\begin{aligned} & f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_k, t_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \\ & \quad \times f(x_1, t_1; \dots; x_{k-1}, t_{k-1} | x_k, t_k) dx_1 \dots dx_{k-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

A prova destas regras segue da identidade em (2.8) e da relação entre densidades marginais e conjuntas.

## 2.3 Processo Markoviano Marginal

Com as regras estabelecidas em (2.9) e (2.10), embasados pela condição de compatibilidade de Chapman, e utilizando a identidade (2.8), podemos realizar reduções em probabilidades condicionais até encontrarmos a seguinte densidade de probabilidade condicional marginal:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \frac{f(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1})}{f(x_k, t_k)} \quad (2.11)$$

Utilizando processos de marginalização em (2.11), obtemos a condição de Chapman-Kolmogorov para malha de dois tempos, que estabelece a seguinte relação entre densidades de probabilidade:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) f(x_k, t_k) dx_k \quad (2.12)$$

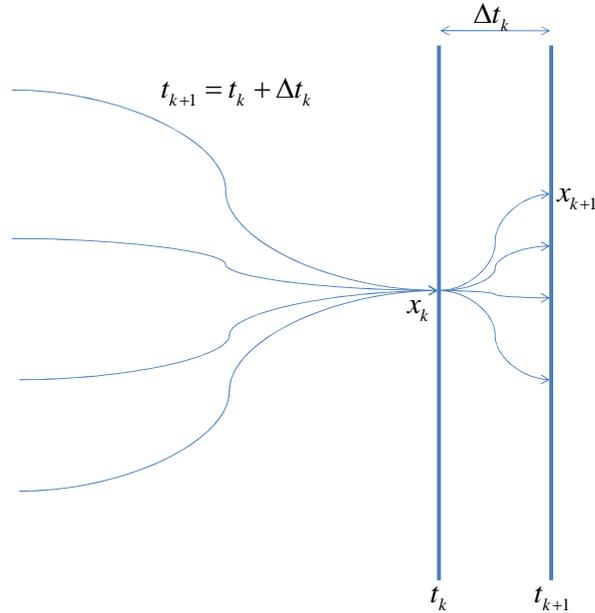


Figura 2.1: Ilustração de um processo markoviano marginal

Isto é, as densidades de probabilidades marginais de  $x_{k+1}$  e  $x_k$  estão relacionados por uma probabilidade de transição marginal.

A figura 2.1 fornece uma ilustração gráfica das equações (2.11) e (2.12). O processo de marginalização que define a densidade  $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$  resulta na soma de todos os possíveis caminhos que levam a um certo par  $x_k$  e  $x_{k+1}$  nos tempos  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , respectivamente, dividido pelo número de caminhos que levam até  $x_k$  no tempo  $t_k$ . De fato, esta é uma probabilidade que pode ser interpretada como uma probabilidade de transição associada ao ensemble de trajetórias possíveis.

As equações markovianas 2.11 e 2.12 permite-nos concluir que a densidade de probabilidade condicional marginal  $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$  dependerá do valor

de  $x_k$  no tempo  $t_k$  e do intervalo de tempo  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ , ou seja:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \rho(x_k, t_k, \Delta t_k) \quad (2.13)$$

A diferença  $t_{k+1} - t_k$  da probabilidade condicional  $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$  é definido arbitrariamente. Em geral, se a diferença é grande, a dependência de  $f$  em  $x_k$  será pequena, ou seja, terá pouca correlação com esta variável aleatória. Por outro lado, se a diferença é infinitesimalmente pequena, a probabilidade condicional possuirá um valor de pico  $x_k$ , i.e.,

$$\lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \delta(x_{k+1} - x_k). \quad (2.14)$$

Na verdade, esta equação expressa que a variável estocástica não pode ter saltos instantâneos [2].

## 2.4 Valor Esperado e Momentos

O valor esperado, também denominado de média ou esperança, de uma função arbitrária  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ , onde  $X_i = X(t_i)$ , é dado por:

$$\langle \varphi(X_1, \dots, X_n) \rangle = \int \dots \int \varphi(x_1, \dots, x_n) dF(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \quad (2.15)$$

A integral dada em (2.15) é compreendida como sendo do tipo Riemann-Stieltjes. Não entraremos em detalhes sobre este tipo de integração. Para maiores detalhes, consulte a referência [4]. Estamos interessados nos casos em que a variável  $X$  possui densidade.<sup>1</sup> Assim, podemos definir

$$\langle \varphi(X_1, \dots, X_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.16)$$

---

<sup>1</sup>Este sempre será o caso se utilizamos adequadamente densidades de probabilidade descritas por uma delta de Dirac para lidarmos com as descontinuidades da distribuição de probabilidade.

e o valor esperado assume sua forma usual como uma integral de Riemann de uma densidade de probabilidade. Isto ocorre pois  $dF$  pode ser enxergado como a probabilidade de encontrarmos a variável estocástica contínua  $X$  no intervalo  $x_i \leq X \leq x_i + dx_i$ , no tempo  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e podemos dizer que:

$$\begin{aligned}
 dF(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= P(\{x_1 \leq X \leq x_1 + dx_1\}, t_1; \dots; \{x_n \leq X \leq x_n + dx_n\}, t_n) \\
 &= \frac{\partial^n F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n \\
 &= f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

O valor

$$\langle [X(t_k) - b]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - b)^n f(x_k, t_k) dx_k \tag{2.18}$$

é definido como  $n$ -ésimo momento da variável  $X(t_k)$  em torno de  $b$ , para  $b$  real e  $k$  inteiro não-negativo. Se  $b = 0$ , então  $\langle X^n(t_k) \rangle$  é chamado simplesmente de  $n$ -ésimo momento de  $X(t_k)$ . Se o valor esperado  $\mu_k = \langle X(t_k) \rangle$  existe, então o  $n$ -ésimo momento em torno da média  $\langle X(t_k) - \mu_k \rangle$  chama-se  $n$ -ésimo momento central de  $X(t_k)$ , que obviamente é igual a zero. O segundo momento central  $[\langle X^2(t_k) \rangle - \langle X(t_k) \rangle^2]$  é denominado de variância e sua raiz quadrada é chamada de desvio-padrão  $\sigma_k$ .

De grande importância também, temos o momento da variável estocástica  $X$  em diversos tempos, definido por [5]

$$\langle X_1 \dots X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_k f(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) dx_1 \dots dx_k \tag{2.19}$$

que nos fornece a correlação entre os valores da variável estocástica  $X$  em diferentes tempos. Caso as variáveis, em diferentes tempos, sejam indepen-

dentados entre si então

$$\begin{aligned}\langle X_1 \dots X_n \rangle &= \langle X_1 \rangle \dots \langle X_n \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, t_1) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_k f(x_k, t_k) dx_k\end{aligned}\quad (2.20)$$

## 2.5 Função Característica

O valor esperado pode ser utilizado para caracterizar, parcialmente ou completamente, uma determinada variável aleatória. A função característica é um tipo de valor esperado que sempre existe e sempre caracteriza uma distribuição de probabilidade de forma completa e unívoca. Ela é uma ferramenta de grande utilidade para o estudo do conceito de convergência em distribuições de variáveis aleatórias e na demonstração de alguns teoremas de extrema relevância.

Considerando a variável estocástica  $X(t)$ , a função característica associada é dada por:

$$\psi_X(z, t) = \langle e^{IzX(t)} \rangle = \langle \cos [zX(t)] \rangle + I \langle \sin [zX(t)] \rangle = \int e^{Izx} dF(x, t)\quad (2.21)$$

Somente no caso de  $X$  possuir densidade a função característica torna-se a usual transformada de Fourier [6] da densidade de probabilidade:

$$\psi_X(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx\quad (2.22)$$

Desta forma, mesmo que uma densidade não esteja definida, ainda assim é possível definir a função característica de uma variável estocástica. A função característica possui importantes propriedades [4]:

1. A função característica é limitada por um:  $|\psi_X(z, t)| \leq 1$ ;
2. A função característica assume o valor um no ponto zero:  $\psi_X(0, t) = 1$ ;

3.  $\overline{\psi_X(z, t)} = \psi_X(-z, t)$ , onde  $\bar{c}$  é o complexo conjugado de  $c$ ;
4. Se  $X(t)$  e  $X(t')$  são independentes, então a função característica da soma das variáveis  $X(t)$  e  $X(t')$  é igual ao produto das funções características de cada uma delas;
5. A variável aleatória  $X$  tem distribuição simétrica em torno de zero se e somente se  $\psi_X(z, t)$  é real para todo  $z$ ;
6. Se  $X = aY + b$ , onde  $a$  e  $b$  são reais e  $Y$  é uma variável estocástica, então  $\psi_X(z, t) = e^{Izb}\psi_Y(az, t)$ ;
7. Se a função característica associada a  $X$  é analítica, todos os momentos estatísticos de  $X$  serão finitos, ou seja,  $\langle |X(t)|^n \rangle < \infty, \forall n \in N$ . Então,  $\psi_X(z, t)$  possui infinitas derivadas contínuas e

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \psi_X(z, t) = \int (Ix)^n e^{Izx} dF(x, t), \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.23)$$

A partir da propriedade 7 da função característica, obtemos:

$$\frac{1}{I^n} \frac{\partial^n \psi_X(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0} = \langle X^n(t) \rangle \quad (2.24)$$

Deste modo, a função característica pode ser vista como uma espécie de função geradora de momentos. Podemos ainda expandir a função característica em termo dos momentos da variável estocástica:

$$\psi_X(z, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (Iz)^n \langle X^n(t) \rangle \quad (2.25)$$

Se conhecemos todos os momentos, então obtemos a função característica.

Assumindo a existência da densidade de probabilidade, a função característica é a transformada de Fourier da densidade de probabilidade. Logo,

a densidade de probabilidade é a transformada inversa de Fourier da função característica

$$f(x, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Izx} \psi_X(z, t) dz \quad (2.26)$$

### Distribuição Gaussiana

Por ser de grande interesse para nossos propósitos, vamos definir a função característica específica associada a uma variável aleatória  $X(t)$ , cuja densidade de probabilidade é descrita por uma distribuição gaussiana, dada por:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.27)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são respectivamente a média e o desvio-padrão de  $x$ .

Utilizando a equação (2.22), a função característica associada a esta variável com distribuição gaussiana será dada por:

$$\psi_{gauss}(z, t) = e^{I\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \quad (2.28)$$

Considerando  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , a densidade na equação (2.27) torna-se

$$f(x, t) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2.29)$$

denominada de distribuição normal-padrão. E a função característica associada a distribuição normal-padrão, será dada por:

$$\psi_X(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (2.30)$$

Podemos escrever, de um modo geral, a função característica associada a uma variável aleatória com uma distribuição qualquer, sem a utilização de integrais. Este método é realizado com a utilização da função de Lévy, apresentada na seção a seguir.

## 2.6 Função de Lévy

A função de Lévy foi utilizada na literatura [1, 7] para analisar o processo de convergência de soma de variáveis aleatórias em séries temporais estocásticas. Ela pode ser utilizada para medir distribuições assintóticas e caracterizar de modo preciso seus afastamentos em relação à distribuição normal. Isto é feito através da utilização de uma forma canônica da função característica proposta originalmente por Paul Lévy [8].

Primeiramente, será útil definir o conceito de variável aleatória reduzida, dada por:

$$\overline{X(t)} = \frac{X(t) - \mu}{\sigma} \quad (2.31)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a média e o desvio-padrão de  $X(t)$ . Este tipo de variável é também denominada de padronização de  $X(t)$ , pois expressa tal variável em unidades de desvio-padrão. Ela possui sempre média igual a zero e variância igual a um.

Lévy demonstrou [8, 9] que, para qualquer variável aleatória com variância finita, a função característica associada à sua variável reduzida pode ser escrita como

$$\psi_{\overline{X}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+w(z)]} \quad (2.32)$$

A função  $w(z)$  é denominada de função de Lévy. Ela é uma função complexa e contínua em um intervalo real aberto  $-\epsilon < z < \epsilon$ , podendo ser escrita da seguinte forma:

$$w(z) = w_R(z) + Iw_I(z) \quad (2.33)$$

A definição acima é dada de tal modo que a função  $w_R(z)$  seja uma função par e  $w_I(z)$  seja uma função ímpar e  $w(0) = 0$ .

A função de Lévy pode ser calculada a partir da função característica  $\psi_{\overline{X}}(z, t)$ . De acordo com a definição dada em (2.21) para função carac-

terística, podemos reescrevê-la como:

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = \psi_R(z, t) + I\psi_I(z, t) \quad (2.34)$$

onde:

$$\begin{aligned} \psi_R(z, t) &= \langle \cos [zX(t)] \rangle \\ \psi_I(z, t) &= \langle \sin [zX(t)] \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Com isso, obtemos a parte real de  $w(z)$  através da fórmula:

$$w_R(z) = -\frac{z^2 + 2 \ln \left( \sqrt{\psi_R^2(z, t) + \psi_I^2(z, t)} \right)}{z^2} \quad (2.36)$$

e sua parte imaginária:

$$w_I(z) = \frac{1}{z^2} \arctan \left[ \frac{\psi_I(z, t)}{\psi_R(z, t)} \right] \quad (2.37)$$

onde a função arco-tangente computa o valor principal do argumento  $\theta$  do número complexo  $x + iy \equiv r(\cos\theta + i \sin\theta)$ , o que significa que  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

Note que a forma específica da função de Lévy defini o quanto a distribuição de probabilidade relacionada a uma variável aleatória se aproxima ou se afasta da distribuição normal. Somente quando  $w(z) = 0$ , a função característica associada será

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (2.38)$$

que é a função característica associada a distribuição normal-padrão.

### Comentários sobre notações

Designaremos a variável estocástica por  $X$  enquanto sua realização será dada por  $x$ . Isto é feito pois é costume da literatura de teoria da probabilidade a utilização de diferentes símbolos para diferenciar a variável estocástica em si e a correspondente variável em distribuições de probabilidade.

É costume da literatura usar indistintamente o termo distribuição de probabilidade para designar o que tecnicamente é a densidade de probabilidade associada a função de distribuição. Sendo este o costume da literatura, usaremos a expressão indistintamente, pois ficará claro, ao longo desta dissertação, que em todas as aplicações trataremos sempre da densidade e não da distribuição em si.

# Capítulo 3

## Equação de Difusão

### 3.1 Processos Estocásticos

Toda nossa derivação gira em torno da relação de integração fundamental

$$f(x', t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', t + \Delta t | x, t) f(x, t) dx \quad (3.1)$$

onde  $f(x', t + \Delta t | x, t)$  é a densidade de probabilidade de obtermos  $x'$  no tempo  $t + \Delta t$  condicionado em  $x$  no tempo  $t$ , que é o caso para malha de dois tempos da relação de consistência de Chapman-Kolmogorov (2.7).

A equação (3.1) permite-nos que possamos definir processos estocásticos markovianos através da seguinte relação [2]:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \theta(x, t, \Delta t) \quad (3.2)$$

De um ponto de vista probabilístico, a equação (3.2) descreve uma transformação probabilística que relaciona a variável  $X$  do tempo  $t$  à variável  $X$  no tempo  $t + \Delta t$ . Esta transformação é feita através da variável aleatória  $\theta$  que possui  $dF[\theta(x, t, \Delta t)]$  como probabilidade associada, condicionada ao valor de  $X$  no tempo  $t$  e ao intervalo de tempo  $\Delta t$ . Esta variável  $\theta$  será chamada de variável de retorno.

As equações (3.1) e (3.2) permitem-nos inferir a seguinte relação probabilística:

$$\begin{aligned} f(\theta, t + \Delta t|x, t) &= f(\{X = x'\} - x, t + \Delta t|x, t). \\ &= f(x', t + \Delta t|x, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta relação pode ser entendida da seguinte maneira: em um tempo  $t$  obtemos que a variável estocástica  $X$  assume um valor  $x$ . Em um tempo  $t + \Delta t$ , a variável  $x$  não possuirá mais uma probabilidade associada, pois o seu valor já foi anteriormente obtido. Assim, a probabilidade associada a  $\theta$  será a probabilidade associada a  $x'$ , satisfazendo a relação (3.3).

Apesar de expressar um processo estocástico em termos da equação (3.2) possa ser suficiente em determinados casos, isto pode mostrar-se ineficiente para a obtenção da totalidade de suas propriedades estatísticas. Na grande maioria dos casos, o mais plausível é formular equações em termos de suas densidades de probabilidade: as denominadas equações de difusão. O método que será desenvolvido na seção seguinte é baseado na obtenção da equação de difusão em termos dos momentos estatísticos da variável de retorno  $\theta$ , equação esta obtida a partir do uso de funções características.

## 3.2 Equação de Difusão

Nesta seção, vamos derivar formalmente a Equação de Difusão, equação diferencial parcial que é construída para densidades de probabilidades. Este tipo de equação é utilizada para expressar leis de movimento de vários sistemas físicos.

Como primeiro passo, obteremos a relação entre as funções características associadas às variáveis aleatórias  $X(t + \Delta t)$  e  $X(t)$ , respectivamente. Para

$X(t)$ , temos:

$$\psi_X(z, t) = \langle e^{IzX(t)} \rangle = \int e^{Izx} dF(x, t) \quad (3.4)$$

onde  $dF(x, t)$  representa a probabilidade de encontrar variável  $X$  no intervalo  $(x, x + dx)$  em um tempo  $t$ .

A partir da definição dada para a variável  $\theta$  na equação (3.2), a função característica associada a variável  $X(t + \Delta t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_X(z, t + \Delta t) &= \langle e^{IzX(t+\Delta t)} \rangle \\ &= \langle e^{Iz[X(t)+\theta(x,t,\Delta t)]} \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

A distribuição de probabilidade  $dF(\theta, t + \Delta t; x, t)$  pode ser escrita como:

$$dF(\theta, t + \Delta t; x, t) = dF(x, t) dF[\theta(x, t, \Delta t)] \quad (3.6)$$

Desta forma, a equação (3.5) será dada por:

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int e^{Izx} dF(x, t) \int e^{Iz\theta} dF[\theta(x, t, \Delta t)] \quad (3.7)$$

A segunda integral é a função característica no ponto  $z$ , associada a probabilidade condicional de  $\theta$ , i.e.

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = \int e^{Iz\theta} dF[\theta(x, t, \Delta t)] \quad (3.8)$$

Supondo que as densidades de probabilidade  $f(x, t)$  existem, podemos escrever  $dF(x, t) = f(x, t)dx$  e reescrever a equação (3.7) como:

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} \psi_\theta(z) f(x, t) dx \quad (3.9)$$

Assumiremos que a função característica da variável  $\theta$  é analítica para qualquer intervalo de tempo  $\Delta t$ . Isto implica que todos os seus momentos estatísticos são finitos. Desta forma, podemos expandir a função característica em séries de Taylor:

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \theta^n \rangle}{n!} (Iz)^n \quad (3.10)$$

onde  $\langle \theta^n \rangle$  é o  $n$ -ésimo momento da variável  $\theta$ .

Caso a função característica fosse não-analítica deveríamos expandi-la também em termos de potenciais fracionários de  $z$ . No entanto, este tipo de função característica não entra no âmbito desta dissertação.

Substituindo (3.10) em (3.9), obtemos:

$$\psi_X(z, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} f(x, t) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \langle \theta^n \rangle f(x, t) dx \quad (3.11)$$

Note que a primeira integral é a função característica da variável estocástica  $X$  no tempo  $t$ . Assim:

$$\psi_X(z, t + \Delta t) - \psi_X(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Iz)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{Izx} \langle \theta^n \rangle f(x, t) dx \quad (3.12)$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa  $L^{-1}$  na equação (3.12), obtemos:

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\langle \theta^n \rangle f(x, t)] \quad (3.13)$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.13) por  $\Delta t$ , obtemos a seguinte equação de diferenças finitas:

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[ \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} f(x, t) \right] \quad (3.14)$$

Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [D_n(x, t) f(x, t)] \quad (3.15)$$

onde  $D_n$  são denominados de coeficientes de Kramers-Moyal, dados por:

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n f(x', t + \Delta t | x, t) dx' \quad (3.16)$$

A equação (3.15) é a forma geral da Equação de Difusão. A forma específica desta equação depende essencialmente do comportamento dos coeficientes  $D_n$ 's quando  $\Delta t$  tende a zero. Podemos classificá-la em três classes:

Sistemas determinísticos, Equação de Fokker-Planck e Expansão de Kramers-Moyal, cada uma correspondendo a uma diferente forma da equação de difusão.

### 3.2.1 Sistemas Determinísticos

Os sistemas determinísticos são definidos para variáveis de retorno  $\theta(x, t, \Delta t)$  para as quais os seguintes limites na equação (3.15) são satisfeitos:

$$\begin{aligned} D_1(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta \rangle}{\Delta t} = G_1(x, t) \neq 0 \\ D_n(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Neste caso, a equação de difusão (3.15) torna-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [G_1(x, t)f(x, t)] \quad (3.18)$$

Esta equação não é verdadeiramente uma equação de difusão, porque ela possui apenas termos de desvio.

### 3.2.2 Equação de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck [10], [11] é obtida quando os seguintes limites são satisfeitos:

$$\begin{aligned} D_1(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta \rangle}{\Delta t} = G_1(x, t) \neq 0 \\ D_2(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\Delta t} = G_2(x, t) \neq 0 \\ D_n(X, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = 0, \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Neste caso, escrevemos a equação de difusão (3.15) como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [G_1(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G_2(x, t)f(x, t)] \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Expansão de Kramers-Moyal

A expansão de Kramers-Moyal [2], [12] é obtida da seguinte maneira: se

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = G_n(x, t) \neq 0 \quad \text{para algum } n \geq 3 \text{ e par,} \quad (3.21)$$

então pode-se mostrar que todos os coeficientes  $D_n$  pares são diferentes de zero e a equação 3.15 será dada por uma expansão de infinitos termos, do seguinte modo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [D_n(x, t)f(x, t)] \quad (3.22)$$

Neste caso, a equação (3.15) assume sua forma exata.

Na seção a seguir, nós apresentamos o lema de Pawula que garante a existência da expansão de Kramers-Moyal quando as condições acima estabelecidas são satisfeitas e as condições necessárias para a obtenção de uma equação de Fokker-Planck.

### 3.2.4 Lema de Pawula

Geralmente, o coeficiente de Kramers-Moyal  $D_n$  é diferente de zero para qualquer valor de  $n$ . Entretanto, o lema de Pawula [13], que é construído para transições de probabilidade positivas, mostra-nos que se  $D_n = 0$  para algum  $n$  par, então todos os coeficientes  $D_n$ , para  $n \geq 3$ , serão iguais a zero. Desta forma, a expansão de Kramers-Moyal deve parar depois do primeiro ou do segundo termo. Caso  $D_n \neq 0$ , para algum  $n$  par e maior que dois, a expansão possuirá infinitos termos.

Para derivarmos o lema de Pawula, necessitamos da desigualdade de Schwartz generalizada [14]:

$$\left[ \int a(x)b(x)f(x)dx \right]^2 \leq \int a^2(x)f(x)dx \int b^2(x)f(x)dx \quad (3.23)$$

onde  $f(x)$  é uma função não-negativa e  $a(x)$  e  $b(x)$  são funções arbitrárias.

Se fizermos as seguintes considerações ( $n, m \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} a(x) &= (\theta)^n \\ b(x) &= (\theta)^{n+m} \\ f(x) &= f(x', t + \Delta t | x, t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23) para o limite de  $-\infty$  a  $\infty$ , obtemos a seguinte relação:

$$\langle \theta^{2n+m} \rangle^2 \leq \langle \theta^{2n} \rangle \cdot \langle \theta^{2n+2m} \rangle \quad (3.25)$$

Para  $m = 0$ , temos que  $\langle \theta^{2n} \rangle^2 \leq \langle \theta^{2n} \rangle^2$ , que é obviamente satisfeito para qualquer valor de  $n$ . Já para  $n = 0$ , temos  $\langle \theta^m \rangle^2 \leq \langle \theta^{2m} \rangle$ , que relacionado com os coeficientes de Kramers-Moyal  $D_n$  fica:

$$D_m^2 \cdot (\Delta t)^2 \leq D_{2m} \cdot \Delta t \quad (3.26)$$

Como  $\Delta t \rightarrow 0$ , nada podemos dizer, a partir da relação acima, para os coeficientes de Kramers-Moyal. Por isso, consideramos (3.25) para  $n \geq 1$  e  $m \geq 1$ , obtendo:

$$D_{2n+m}^2 \leq D_{2n} \cdot D_{2n+2m} \quad (3.27)$$

Se  $D_{2n}$  é igual a zero,  $D_{2n+m}$  também deve ser, i.e.,

$$D_{2n} = 0 \Rightarrow D_{2n+1} = D_{2n+2} = \dots = 0, \quad \text{para } n \geq 1 \quad (3.28)$$

Se  $D_{2n+2m}$  é igual a zero,  $D_{2n+m}$  também deve ser, i.e.,

$$\begin{aligned} D_{2r} = 0 &\Rightarrow D_{r+n} = 0, \quad \text{para } n = 1, \dots, r-1 \\ D_{2r-1} &= \dots = D_{r+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Utilizando (3.28) e o repetido uso de (3.29), concluímos que se  $D_{2r} = 0$  para  $r \geq 1$ , todos os coeficientes  $D_n$  com  $n \geq 3$  desaparecem, i.e.,

$$D_{2r} = 0 \Rightarrow D_3 = D_4 = \dots = 0, \quad \text{para } r \geq 1 \quad (3.30)$$

O lema de Pawula segue imediatamente desta última conclusão. Devemos lembrar que o valor de  $n$  deve ser par. Caso encontremos algum coeficiente  $D_n = 0$  para  $n$  ímpar, nada poderemos concluir a respeito dos demais coeficientes.

Note que o lema acima não garante que a equação de Fokker-Planck é uma boa aproximação para a equação de Difusão. O lema unicamente nos leva a conclusão de que a densidade de probabilidade de um processo estocástico não pode ser descrito corretamente por um número finito, maior do que dois, de termos da expansão de Kramers-Moyal.

A utilidade do lema está quando calculamos os coeficientes  $D_n$  a partir de séries temporais reais. Primeiramente, calculamos  $D_1$  e  $D_2$ . Então calculamos um coeficiente  $D_n$  com  $n$  par e maior que três e se este coeficiente for nulo, então não haverá a necessidade de calcular os outros coeficientes. Evitamos assim gastos experimentais ou computacionais.

Para encontrar sob quais condições obtemos Fokker-Planck ou Kramers-Moyal, devemos utilizar as ferramentas estatísticas propostas por Paul Lévy. A seção a seguir fala exatamente disso.

### 3.3 Forma Canônica de Lévy

Nesta seção, vamos utilizar a forma canônica de Lévy para a função característica da variável estocástica  $\theta$  para a obtenção da equação de difusão. Este formalismo, por nós desenvolvido, para a equação de Difusão é inédito na literatura sobre o assunto e abre a possibilidade de caracterização de processos difusivos através do estudo de convergência de distribuições associadas séries temporais estocásticas. Com isso, podemos estabelecer condições gerais para a resolução da questão proposta no final da seção anterior.

O primeiro passo consiste em centralizar e normalizar a variável de retorno

$\theta$ :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \mu_\theta}{\sigma_\theta} \quad (3.31)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu_\theta &= \mu(x, t, \Delta t) = \langle \theta \rangle \\ \sigma_\theta^2 &= \sigma^2(x, t, \Delta t) = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como visto no capítulo anterior, a forma canônica de Lévy para função característica associada à variável reduzida  $\bar{\theta}$ , é dada por:

$$\psi_{\bar{\theta}}(z, t, \Delta t) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega_{\Delta t}(z)]} \quad (3.33)$$

De acordo com as propriedades de funções características, podemos escrever:

$$\theta = \sigma_\theta \bar{\theta} + \mu_\theta \Rightarrow \psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{I\mu_\theta z} \psi_{\bar{\theta}}(\sigma_\theta z, t, \Delta t) \quad (3.34)$$

A partir de (3.34), obtemos:

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{I\mu_\theta z} e^{-\frac{(\sigma_\theta z)^2}{2}[1+\omega_{\Delta t}(\sigma_\theta z)]} \quad (3.35)$$

De (3.9), obtemos a seguinte equação de diferenças:

$$\frac{\psi_X(z, t + \Delta t) - \psi_X(z, t)}{\Delta t} = \int e^{Izx} f(x, t) \left[ \frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] dx \quad (3.36)$$

Como  $\Delta t \rightarrow 0$ , a equação (3.36) se torna:

$$\frac{\partial \psi_X(z, t)}{\partial t} = \int e^{Izx} f(x, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] dx \quad (3.37)$$

Analisando a equação acima, notamos que toda a questão se resume em poder avaliar o limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right]. \quad (3.38)$$

Reescrevendo a função característica como:

$$\psi_\theta(z, t, \Delta t) = e^{G_{\Delta t}(z)} \quad (3.39)$$

onde:

$$G_{\Delta t}(z) = I\mu_\theta z - \frac{(\sigma_\theta z)^2}{2} - \frac{(\sigma_\theta z)^2}{2} \omega_{\Delta t}(\sigma_\theta z) \quad (3.40)$$

Podemos expandir a equação (3.39) em séries de Taylor, obtendo:

$$\frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} = \frac{G_{\Delta t}(z)}{\Delta t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{G_{\Delta t}^n(z)}{\Delta t} \quad (3.41)$$

O limite (3.38) existe se e somente se as seguintes condições forem obedecidas:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_\theta}{\Delta t} &= \mu(x, t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_\theta^2}{\Delta t} &= \sigma^2(x, t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(\sigma_\theta z) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(\sigma(x, t)\sqrt{\Delta t}z) = \omega(z; x, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Condições essas necessárias e suficientes para a existência do limite.

Aplicando o limite e as condições (3.42) à expansão (3.41), obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\psi_\theta(z, t, \Delta t) - 1}{\Delta t} \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G_{\Delta t}(z)}{\Delta t} \\ &= I\mu(x, t)z - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} \omega(z; x, t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) na equação (3.37), obtemos:

$$\frac{\partial \psi_X(z, t)}{\partial t} = \int e^{Izx} f(x, t) \left[ I\mu(x, t)z - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} - \frac{\sigma^2(x, t)z^2}{2} \omega(z; x, t) \right] dx \quad (3.44)$$

Calculando a transformada inversa de Fourier  $L^{-1}$  desta equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)f(x, t)] \\ &\quad + L^{-1} \left\{ \int e^{Izx} f(x, t) \sigma^2(x, t) \left[ -\frac{z^2}{2} \omega(z; x, t) \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

A equação acima é a equação de difusão expressa através do formalismo de Lévy. Escrita desta forma, a caracterização do processo difusivo associada a variável de retorno  $\theta$  dependerá exclusivamente da forma específica da função de Lévy  $\omega(z; x, t)$ . Vemos claramente que se  $\omega(z; x, t) = 0$  para qualquer valor de  $z$ , obtemos a equação de Fokker-Planck; caso contrário, com  $\omega(z; x, t) \neq 0$ , o que obtemos é a expansão de Kramers-Moyal.

A grande vantagem de escrever a equação de difusão neste formalismo é a facilidade da implementação numérica, e conseqüentemente computacional, da função de Lévy  $\omega(z; x, t)$ , como recentemente feito por Annibal Figueiredo e colaboradores [1, 7].

Pode-se mostrar que a função de Lévy, utilizada para medir distribuições assintóticas e caracterizar de modo preciso seus afastamentos com relação a uma distribuição gaussiana, pode ser obtida diretamente dos dados de séries temporais estocásticas reais, independentemente dos conhecimentos dos momentos estatísticos da distribuição. Podemos, então, utilizar a função de Lévy para caracterizar de modo único, preciso e direto a distribuição associada a variável de retorno  $\theta$ .

### 3.3.1 Interpretação do resultado

Vamos agora retomar um importante resultado obtido no segundo capítulo desta dissertação. Vimos através da equação (2.14) que a diferença  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  da probabilidade condicional  $f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k)$  poderia ser definida arbitrariamente e quando essa diferença fosse infinitesimalmente pequena, a probabilidade condicional possuiria um valor de pico  $x_k$ , i.e.,

$$\lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) = \delta(x_{k+1} - x_k) \quad (3.46)$$

O que a equação (3.46) nos diz é que a distribuição de probabilidade da variável  $\theta$  sempre convergirá para uma delta de dirac centrada em zero,

conforme  $\Delta t$  for tendendo a zero. Assim, como esta convergência é pelo menos da ordem de  $\Delta t$ , como visto na relação (3.43), podemos dizer que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\theta) - \delta(\theta)}{\Delta t} = 0 \quad (3.47)$$

Podemos ainda dizer que independente de  $\omega(z)$  ser nulo ou não, a distribuição de  $\theta$  convergirá para uma delta de Dirac. No entanto, a forma específica da função de Lévy determinará que tipo de distribuição de probabilidade a variável  $\theta$  possuirá.

Como já visto, a função característica de uma distribuição gaussiana é dada por:

$$\psi_{gauss}(z, t, \Delta t) = e^{I\mu(x,t)\Delta tz - \frac{\sigma^2(x,t)\Delta tz^2}{2}} \quad (3.48)$$

A equação (3.48) nada mais é que a função característica associada a uma variável aleatória cuja função  $\omega(z)$  é nula. Desta forma, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , teremos uma distribuição gaussiana que converge para uma delta de Dirac.

Entretanto, quando  $\omega(z)$  associado a variável aleatória é diferente de zero, temos um comportamento diferente para a sua distribuição de probabilidades. Utilizando (3.43), vamos tomar a função característica da variável de retorno, comparando-a à função característica de uma gaussiana, e analisemos sua convergência quando  $\Delta t \rightarrow 0$  através da seguinte relação:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi_{\theta}(z, t, \Delta t) - \psi_{gauss}(z, t, \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\sigma^2}{2} z^2 \omega(z) \quad (3.49)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na relação acima, obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\theta) - \text{Gauss}(\theta)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-Iz\theta} \left[ -\frac{\sigma^2(x, t)}{2} z^2 \omega(z) \right] dz \quad (3.50)$$

Podemos então concluir que para  $\omega(z) \neq 0$ , a distribuição de probabilidade da variável aleatória não será descrito por uma gaussiana. De qualquer

forma, esta distribuição também converge para uma delta de Dirac quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Com estes resultados obtidos, chegamos a seguinte conclusão: o tipo de distribuição de probabilidade associada a variável  $\theta$  determinará o tipo de equação difusiva que melhor descreve o processo estocástico a ela associada:

- Quando  $\omega(z) = 0$ , sua distribuição será descrita por uma gaussiana que converge para um delta de Dirac quando  $\Delta t$  tende a zero. Neste caso, a equação de difusão é melhor descrita por uma equação de Fokker-Planck;
- Quando  $\omega(z) \neq 0$ , sua distribuição será não-gaussiana e da mesma forma convergirá para um delta de Dirac quando  $\Delta t$  tende a zero. Entretanto, a equação de difusão será melhor descrita por uma expansão de Kramers-Moyal.

Até o presente momento, ainda não descrevemos qual seria a distribuição de  $\theta$  que nos levaria a cada um desses dois resultados. No próximo capítulo, procuramos estabelecer formas específicas para a distribuição de probabilidade de  $\theta$  que nos leve a conclusões universais no estudo de equações de difusão.

# Capítulo 4

## Processos contínuos e descontínuos

### 4.1 Variáveis de retorno auto-similares

Antes de falarmos sobre processos contínuos e descontínuos, vamos falar sobre uma classe de sistemas que possuem uma interessante propriedade que pode estar associada à variável de retorno  $\theta(x, t, \Delta t)$ : a auto-similaridade assintótica desta variável em relação ao intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Uma variável aleatória é dita auto-similar com respeito a  $\Delta t$ , se e somente se suas propriedades estatísticas são as mesmas qualquer que seja o valor de  $\Delta t$ . Em outras palavras, isto significa que esta variável aleatória reduzida é independente do intervalo de tempo  $\Delta t$ . Ela será assintoticamente auto-similar se estas propriedades são satisfeitas considerando  $\Delta t$  como suficientemente pequeno.

Vamos então utilizar esta propriedade no estudo de processos difusivos. Consideremos um processo estocástico descrito pela equação (3.2), assumindo que a variável de retorno  $\theta$  é assintoticamente auto-similar com respeito ao intervalo de tempo  $\Delta t$ , assumido como sendo muito pequeno. A variável de retorno ser auto-similar significa que a variável reduzida  $\bar{\theta} = (\theta - \mu_\theta)/\sigma_\theta$  é

independente de  $\Delta t$ , onde  $\mu_\theta = \langle \theta \rangle$  e  $\sigma_\theta^2 = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2$  são respectivamente a média e a variância de  $\theta$ .

Para que possamos obter uma equação de difusão, a partir do processo estocástico definido por (3.2), devemos satisfazer as condições estabelecidas em (3.42). Vamos então supor as seguintes condições, feitas para  $\Delta t$  muito pequeno:

$$\begin{aligned}\mu_\theta &= \mu(x, t)\Delta t \\ \sigma_\theta &= \sigma(x, t)\sqrt{\Delta t}\end{aligned}\tag{4.1}$$

A escolha da forma que o desvio-padrão  $\sigma_\theta$  apresentará, é de vital na determinação do comportamento e das propriedades que a densidade  $f(\theta)$  possuirá. Isto porque o desvio-padrão pode ser utilizado como medida de largura de uma distribuição. Além disso, a escolha apropriada de  $\sigma_\theta$  pode determinar a convergência da densidade  $f(\theta)$  para uma determinada distribuição com o aumento ou diminuição do seu valor.

O desvio-padrão também é a medida mais comum de dispersão estatística. Se o desvio-padrão de uma variável aleatória é igual a zero, então o valor desta variável não muda com o passar do tempo. A delta de Dirac é utilizada para representar tal variável, pois é uma distribuição nula em todo o seu domínio exceto em ponto no qual será infinito.

Assim, podemos concluir que assumir  $\sigma_\theta \rightarrow 0$  implicará na convergência da densidade  $f(\theta)$ <sup>1</sup> a uma delta de Dirac. Em nossos estudos sobre processos estocásticos, analisamos densidades condicionais tais que a escolha de um intervalo de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequeno implica na convergência de tais densidades para a delta de Dirac.

Como sabemos, a função característica associada à variável reduzida  $\bar{\theta}$ , é

---

<sup>1</sup>A partir deste capítulo, omitiremos a dependência em  $t$  e  $\Delta t$  das distribuições e funções características associadas a variável  $\theta$ , sendo retomada quando se fizer necessário.

dada por:

$$\psi_{\bar{\theta}}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega_{\Delta t}(z)]} \quad (4.2)$$

O índice  $\Delta t$  designa que a função  $\omega_{\Delta t}(z)$ , em geral, possui dependência em  $\Delta t$ . Como a variável reduzida  $\theta$  é assumida como assintoticamente auto-similar, então a função característica  $\psi_{\bar{\theta}}(z)$  deve ser independente de  $\Delta t$ . Isto implica que a função de Lévy  $\omega_{\Delta t}(z)$  também não dependerá de  $\Delta t$ , ou seja:

$$\omega_{\Delta t}(z) = \omega(z), \quad (4.3)$$

Assim, ao aplicarmos as condições (3.42), obteremos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_{\theta}}{\Delta t} &= \mu(x, t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta}^2}{\Delta t} &= \sigma^2(x, t) \\ \omega(z; x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(\sigma_{\theta} z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\sigma(x, t)\sqrt{\Delta t}z) = \omega(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Este resultado indica-nos que a função de Lévy, associada a uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade é assintoticamente auto-similar e que satisfaz as condições acima descritas, é sempre nula. Desta forma, a auto-similaridade assintótica é condição suficiente para obtenção de uma equação de Fokker-Planck.

Se a variável de retorno não possuir a propriedade de auto-similaridade assintótica, então a função de Lévy  $\omega_{\Delta t}(z)$  depende de  $\Delta t$ . No entanto, só poderemos dizer que tipo de equação difusiva estará associada a esta variável, quando o limite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(\sigma_{\theta} z)$  for analisado. Assim, a quebra da auto-similaridade assintótica é condição necessária, mas não suficiente, na obtenção de uma expansão de Kramers-Moyal.

## 4.2 Continuidade em distribuição

Na teoria de processos estocásticos, existem muitas maneiras de um processo ser considerado como contínuo. Utilizaremos aqui o conceito de continuidade em distribuição [3]: uma variável aleatória será contínua, se sua função distribuição acumulada for contínua.

Enquanto que uma distribuição de probabilidade é contínua se sua função distribuição acumulada for contínua, ela será descontínua caso a sua função distribuição acumulada apresente descontinuidade. Nesse caso, dizemos que a variável aleatória, associada a esta distribuição é descontínua.

### 4.2.1 Exemplo de processo contínuo

Um caso particular muito importante de distribuições contínuas é a densidade gaussiana, dada por:

$$f(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta - \mu_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}} \quad (4.5)$$

A figura 4.1 mostra a densidade  $f(\theta)$  para vários valores de  $\Delta t$ . Note que conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor, a largura da distribuição vai ficando cada vez menor e em contrapartida, o seu valor de pico aumenta.

Na verdade, o processo de convergência da figura 4.1 sugere que a densidade  $f(\theta)$  tende a uma delta de Dirac, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Isto porque obteremos uma função nula em todo o seu domínio exceto em  $\theta = 0$ , ponto no qual será infinito.

A função distribuição acumulada de  $\theta$  será dada por:

$$F(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(\theta') d\theta' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\theta - \mu_\theta}{\sigma_\theta \sqrt{2}}\right) \quad (4.6)$$

onde  $\operatorname{erf}(\theta)$  é a função erro, contínua em todo seu domínio, encontrada integrando-se a função normal-padrão:

$$\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-\theta'^2} d\theta'. \quad (4.7)$$

Ela possui as propriedades:  $erf(-|\theta|/\sigma_\theta) \rightarrow -1$  e  $erf(|\theta|/\sigma_\theta) \rightarrow 1$ , para  $|\theta| \gg 1$ . Como esta função é inversamente proporcional a  $\sqrt{\Delta t}$ , quanto menor o valor de  $\Delta t$  mais rapidamente estas propriedades serão satisfeitas. Logo, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos a função Degrau.

A figura 4.2 representa a função distribuição de uma variável cuja densidade de probabilidade é descrita por distribuição gaussiana. Note que ela não apresenta nenhuma descontinuidade e que ela tende a uma função Degrau conforme  $\Delta t$  vai ficando menor.

Para distribuições gaussianas com média e desvio-padrão dados por (4.4), a função de Lévy  $\omega_{\Delta t}(z) = 0$ . Logo, estas distribuições gaussianas são auto-similares em relação a  $\Delta t$ . Desta forma, a equação de Fokker-Planck deve ser a utilizada na descrição de variáveis de retorno gaussianamente distribuídas.

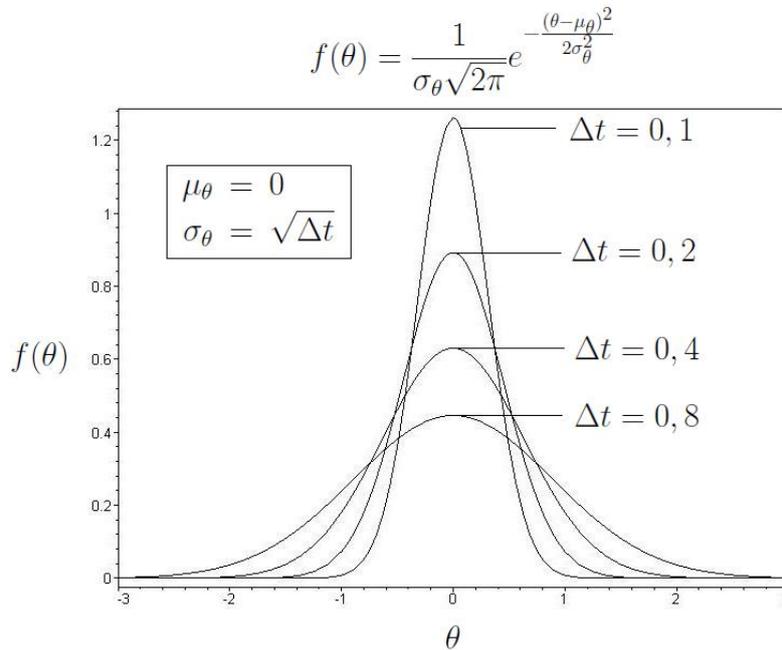


Figura 4.1: Convergência de uma distribuição gaussiana, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\mu_\theta = 0$  e  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$ . A distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de  $\Delta t$  vai diminuindo.

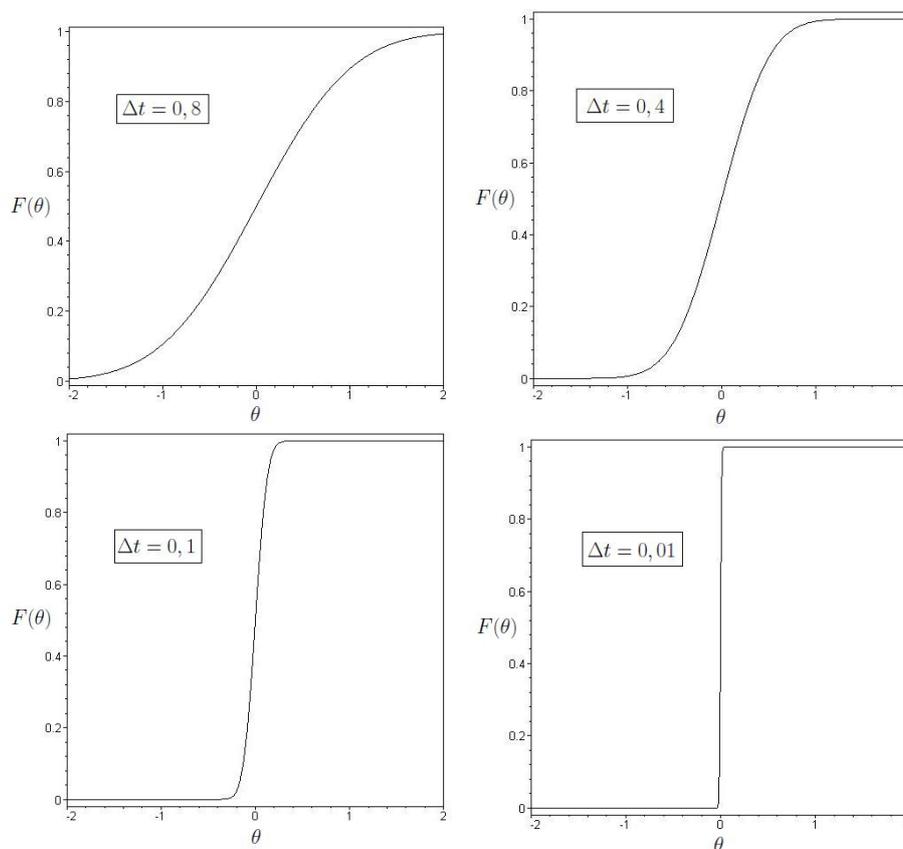


Figura 4.2: Funções distribuição acumuladas de uma variável com densidade gaussiana para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\mu_\theta = 0$  e  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma função degrau conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor.

### 4.2.2 Exemplo de processo descontínuo

Agora, devemos buscar uma densidade de probabilidade para uma variável aleatória descontínua que tenda para uma delta de Dirac quando  $\Delta t$  torna-se suficientemente pequeno. Um tipo interessante de função descontínua, que obedece tal propriedade, é a densidade de probabilidade utilizada para descrever processos colisionais [15].

Considere uma molécula com velocidade  $x$ . Considerando o tempo inicial

$t_0 = 0$ , definimos

$$P(t) \equiv \text{Probabilidade que a molécula não} \\ \text{sofra uma colisão em um tempo } t. \quad (4.8)$$

Naturalmente,  $P(0) = 1$ . Entretanto,  $P(t)$  decresce conforme o tempo  $t$  aumenta, já que uma molécula é constantemente exposta ao risco de sofrer uma colisão. Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $P(t) \rightarrow 0$ .

Para descrever as colisões, definimos

$$adt \equiv \text{Probabilidade da molécula sofrer uma colisão} \\ \text{dentro do intervalo de tempo } t \text{ e } t + dt, \quad (4.9)$$

onde  $dt$  é um intervalo de tempo infinitesimal. A quantidade  $a$  é a probabilidade por unidade de tempo de a molécula sofrer uma colisão, ou seja, uma taxa de colisão. Assumimos ainda que a taxa  $a$  é independente da história da molécula, ou seja, não importa quando a molécula sofreu a última colisão. Em geral,  $a$  depende da velocidade  $x$  da molécula em consideração.

Com estes resultados, podemos calcular a probabilidade  $P(t)$ . A probabilidade  $P(t + dt)$  de uma molécula não sofrer colisão em um intervalo de tempo  $t + dt$  deve ser igual [a probabilidade que tal molécula não sofra uma colisão em um tempo  $t$ ] multiplicada pela [probabilidade da molécula não sofrer uma colisão dentro do intervalo de tempo  $t$  e  $t + dt$ ], ou seja:

$$P(t + dt) = P(t)(1 - a dt) \quad (4.10)$$

ou

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} = -aP(t)dt. \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é uma equação diferencial. A sua solução é dada por:

$$P(t) = Ce^{-at} = e^{-at} \quad (4.12)$$

onde  $C = 1$ , devido a condição inicial  $P(0) = 1$ .

No entanto, estamos interessados no comportamento da molécula em um intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ . Assim, a equação (4.12) torna-se:

$$P(\Delta t) = e^{-a\Delta t} \quad (4.13)$$

Como tratamos de um intervalo de tempo  $\Delta t \ll 1$ , então podemos utilizar a seguinte aproximação para esta probabilidade:

$$P(\Delta t) \approx 1 - a\Delta t \quad (4.14)$$

Os resultados acima descritos estabelecem apenas a probabilidade de ocorrência (colisão) ou não-ocorrência de um evento. No entanto, nada falam sobre qual distribuição de probabilidade estará associada em cada um dos casos.

Sabemos que  $\theta$  é uma variável que relaciona a transição probabilística da variável estocástica  $X$  de um tempo  $t$  para um tempo  $t + \Delta t$ . Vamos então considerar que a ocorrência de um evento tenha como significado uma mudança de valor da variável estocástica  $X$  segundo uma densidade de probabilidade específica  $g(\theta)$ . Assim, a densidade de probabilidade relacionada a uma transição de estados de um tempo  $t$  para um tempo  $t + \Delta t$ , será dado pela relação  $(a\Delta t)g(\theta)$ .

A função delta de Dirac pode ser utilizado como uma densidade de probabilidade que especifica uma não-transição probabilística. Multiplicando pela probabilidade  $P(\Delta t)$  encontramos então a densidade de probabilidade  $(1 - a\Delta t)\delta(\theta)$  que nenhuma transição ocorra após um intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Como a ocorrência e a não-ocorrência da transição são eventos mutuamente exclusivos, a densidade de probabilidade da variável de retorno  $\theta$  será dada por:

$$f(\theta) = (1 - a\Delta t)\delta(\theta) + (a\Delta t)g(\theta) \quad (4.15)$$

onde  $\delta(\theta)$  é a função delta de Dirac e  $g(\theta)$  é uma densidade de probabilidade contínua qualquer.

Vamos agora considerar uma variável aleatória, diferente de  $\theta$ , associada somente a densidade  $g(\theta)$ . Consideramos então que esta nova variável possui média  $\mu(x, t)$  e desvio-padrão  $\sigma(x, t)$ . Com esta definição obtemos as propriedades estatísticas relacionadas a variável  $\theta$  (função característica, momentos, etc), que são compostas pela análise individual de cada uma das densidades que compõem a distribuição  $f(\theta)$ .

### Função Característica

A partir da densidade de probabilidade  $f(\theta)$ , podemos definir a função característica associada a  $\theta$ , dada por:

$$\psi_{\theta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta} f(\theta) d\theta = (1 - a\Delta t) + (a\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta} g(\theta) d\theta \quad (4.16)$$

onde utilizamos a seguinte propriedade da função delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) d\theta = 1 \quad (4.17)$$

A função característica associada à variável aleatória reduzida cuja densidade de probabilidade é dada por  $g(\theta)$ , é igual a:

$$e^{-\frac{z^2}{2}[1+w(z)]}. \quad (4.18)$$

Vamos assumir o desvio-padrão desta variável, relacionada unicamente a  $g(\theta)$ , como sendo igual a  $\sigma(x, t)$  e sua média igual a zero. Assim, poderemos inferir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Iz\theta} g(\theta) d\theta = e^{-\frac{\sigma^2(x,t)}{2} z^2 [1+w(\sigma(x,t)z)]} \quad (4.19)$$

Como consequência da definição (4.15), temos que  $\sigma_{\theta} = \sigma(x, t)\sqrt{a\Delta t}$  e  $\mu_{\theta} = 0$ . Utilizando a relação (4.19), a equação (4.16) e (3.34), obtemos:

$$\psi_{\theta}(z) = (1 - a\Delta t) + (a\Delta t)e^{-\frac{\sigma^2(x,t)}{2} z^2 [1+w(\sigma(x,t)z)]} \quad (4.20)$$

A função característica associada à variável reduzida  $\bar{\theta}$  será, por fim, dada por:

$$\begin{aligned}\psi_{\bar{\theta}}(z) &= \langle e^{I\bar{\theta}z} \rangle = \langle e^{I\frac{\theta}{\sigma}z} \rangle = \psi_{\theta}\left(\frac{z}{\sigma(x,t)\sqrt{a\Delta t}}\right) \\ &= (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2\left[1+w\left(\frac{z}{\sqrt{a\Delta t}}\right)\right]}\end{aligned}\quad (4.21)$$

### Função canônica de Lévy

Vamos agora encontrar a conexão entre a função  $\omega_{\Delta t}(z)$  com  $w(z)$ . Não confunda uma com a outra. A primeira é a função de Lévy associada à variável reduzida de  $\theta$ , enquanto a segunda é a função de Lévy da variável reduzida associada a variável aleatória cuja densidade de probabilidade é dada por  $g(\theta)$ .

Como sabemos, a função característica da variável reduzida  $\bar{\theta}$ , é dada por:

$$\psi_{\bar{\theta}}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega_{\Delta t}(z)]}\quad (4.22)$$

Podemos então aplicar o logaritmo natural em ambos os lados da equação (4.22), obtendo:

$$\ln[\psi_{\bar{\theta}}(z)] = -\frac{z^2}{2}[1 + \omega_{\Delta t}(z)]\quad (4.23)$$

Por fim, a função canônica de Lévy  $\omega_{\Delta t}(z)$  associada a função característica da variável reduzida, é igual a:

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{2 \ln[\psi_{\bar{\theta}}(z)] + z^2}{z^2}\quad (4.24)$$

Substituindo (4.21) na equação (4.24), obtemos:

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{2 \ln\left\{(1 - a\Delta t) + a\Delta t \exp\left\{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2\left[1 + w\left(\frac{z}{\sqrt{a\Delta t}}\right)\right]\right\}\right\} + z^2}{z^2}\quad (4.25)$$

Note que a função de Lévy  $\omega_{\Delta t}(z)$ , associada a uma variável de retorno reduzida cuja distribuição de probabilidade é descontínua, não é independente de  $\Delta t$ . Concluimos então que processos descontínuos não possuem a propriedade da auto-similaridade em relação a  $\Delta t$ .

Aplicando a condição (3.42), obtemos:

$$\begin{aligned}\omega(z; x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(\sigma_{\theta} z) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{2 \ln \left\{ (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{\sigma^2(x,t)}{2} z^2 [1 + \omega(\sigma(x,t)z)]} \right\}}{\sigma^2(x,t) a \Delta t z^2} - 1\end{aligned}\quad (4.26)$$

Como o limite acima é indeterminado, aplicamos a regra de L'Hospital, obtendo desta forma:

$$\omega(z; x, t) = \frac{2 \left\{ 1 - e^{-\frac{\sigma^2}{2} z^2 [1 + \omega(\sigma z)]} \right\}}{\sigma^2 z^2} - 1\quad (4.27)$$

Como  $\omega(z; x, t) \neq 0$ , a equação difusiva associada a variável de retorno será descrita por uma expansão de Kramers-Moyal.

### Distribuição Gaussiana Descontínua

Para efeitos de ilustração, vamos considerar que a densidade  $g(\theta)$  é uma densidade gaussiana. Desta forma, a densidade  $f(\theta)$  será igual a:

$$f(\theta) = (1 - a\Delta t)\delta(\theta) + (a\Delta t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}}\quad (4.28)$$

onde consideramos para a variável  $\mu(x, t) = 0$  e  $\sigma(x, t) = \sigma$  constante.

A figura 4.3 mostra a densidade  $f(\theta)$  para vários valores de  $\Delta t$ . Note que conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor, a distribuição vai espalhando-se. Temos ainda uma descontinuidade em  $\theta = 0$ , onde a função assume um valor infinito.

Na verdade, a figura 4.3 sugere um processo de convergência na qual a densidade  $f(\theta)$  tende a uma delta de Dirac, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Isto porque

$$f(\theta) = (1 - a\Delta t)\delta(\theta) + (a\Delta t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

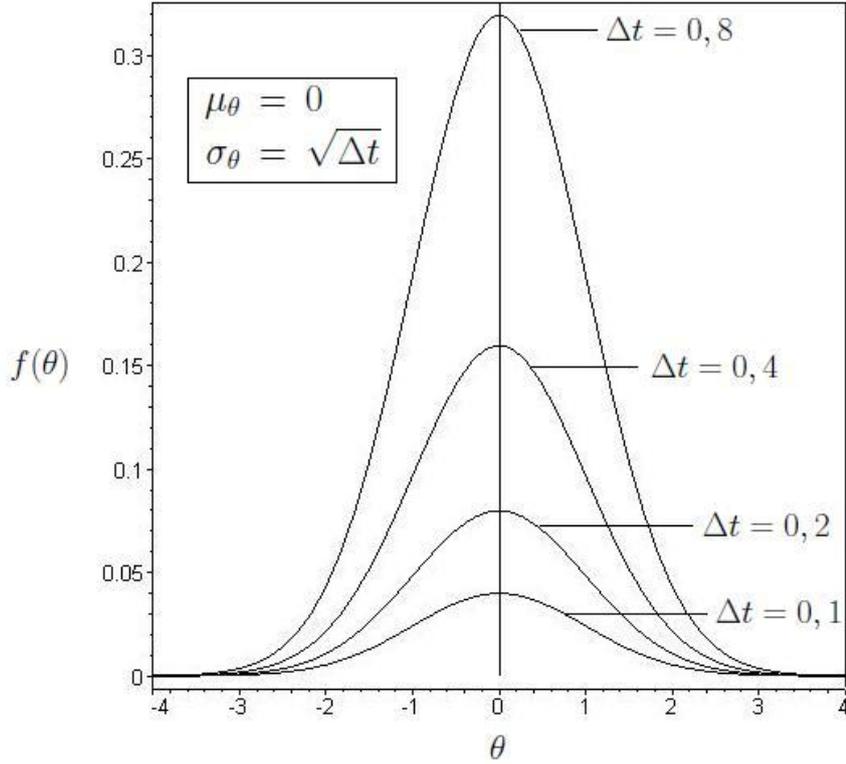


Figura 4.3: Processo de convergência de uma distribuição gaussiana descontínua, assumindo vários valores para  $\Delta t$ . Aqui,  $\mu_\theta = 0$  e  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$  e  $a = 1.0$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma delta de Dirac conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor. O traço vertical indica que  $f(\theta)$  é infinito quando  $\theta = 0$  para a distribuição dada, qualquer que seja o valor de  $\Delta t$ .

obteremos uma função nula em todo o seu domínio exceto em  $\theta = 0$ , ponto no qual será infinito.

Para mostrar que a variável  $\theta$  é associada a uma distribuição descontínua, vamos calcular a função distribuição acumulada de  $\theta$ :

$$F(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(\theta')d\theta' = (1 - a\Delta t)\Theta(\theta) + \frac{a}{2}\Delta t \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{\sigma}\sqrt{2}\right) + \frac{a\Delta t}{2} \quad (4.29)$$

onde  $\Theta(\theta)$  é a função degrau definida como:

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Note que, neste caso,  $F(\theta)$  é uma função descontínua. Vemos claramente que  $F(\theta)$  converge para uma função Degrau quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

A figura 4.4 representa a função distribuição acumulada da variável  $\theta$ . Note que ela apresenta descontinuidade para  $\theta = 0$  e tende a uma função Degrau conforme  $\Delta t$  vai ficando menor.

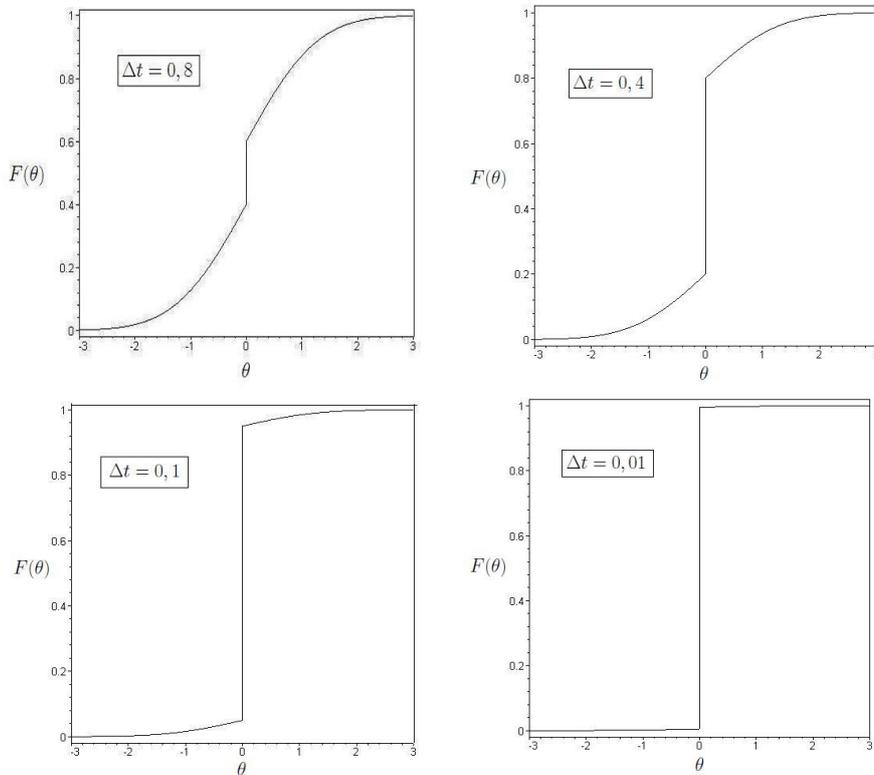


Figura 4.4: Funções distribuição acumuladas de uma variável com distribuição gaussiana descontínua analisada para vários valores de  $\Delta t$ . Aqui,  $\mu_\theta = 0$  e  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$  e  $a = 1, 0$ . Note que a distribuição aproxima-se cada vez mais de uma função degrau conforme o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor.

Vamos agora obter a função  $\omega_{\Delta t}(z)$  para uma distribuição gaussiana descontínua. Neste caso, a função  $w(z)$  será igual a zero e a função característica

associada a variável  $\theta$  será dada por:

$$\psi_\theta(z) = (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2} \quad (4.31)$$

Temos que:

$$\ln \left[ (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2} \right] = -\frac{z^2}{2} [1 + \omega_{\Delta t}(z)] \quad (4.32)$$

Por fim, a função de Lévy  $\omega_{\Delta t}$  será dada por:

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{\ln \left[ (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2} \right] + z^2}{z^2} \quad (4.33)$$

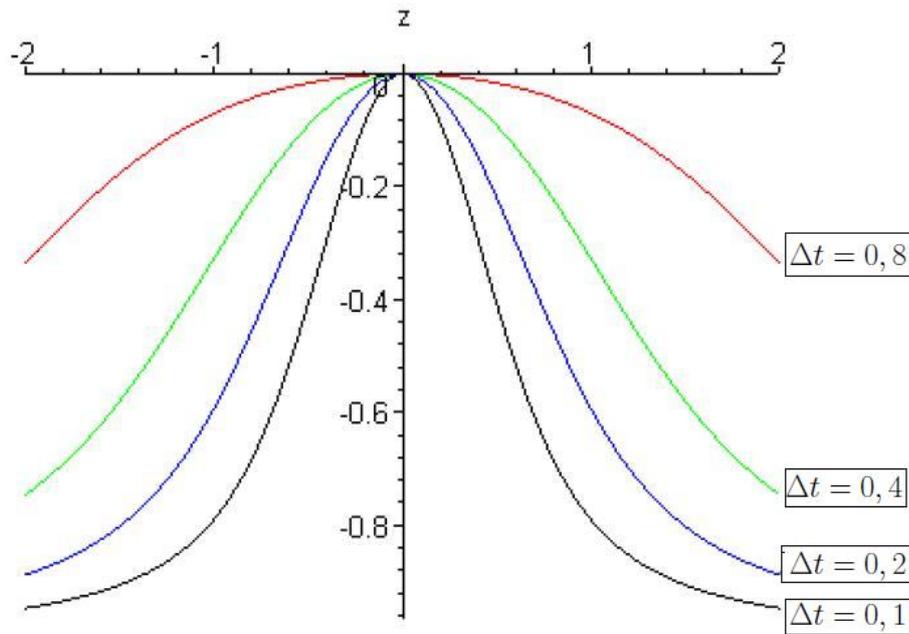


Figura 4.5: Função de Lévy  $\omega_{\Delta t}$  relacionada a uma distribuição gaussiana descontínua, calculada para vários valores de  $\Delta t$ . Aqui,  $\mu_\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta = \sqrt{\Delta t}$  e  $a = 1,0$ .

A figura 4.5 ilustra a função (4.33) em função de  $z$  para vários valores de  $\Delta t$ . Podemos ver claramente que a variável  $\theta$  não é assintoticamente auto-similar.

# Capítulo 5

## Movimento Browniano

### 5.1 Equação Diferencial Estocástica

Como foi visto, qualquer processo estocástico pode ser descrito em termos de uma equação em um intervalo  $[t, t + \Delta t]$  por:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \theta(x, t, \Delta t) \quad (5.1)$$

A literatura sobre o assunto prefere descrever processos estocásticos em termos de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE), que são equações diferenciais em que pelo menos um de seus termos é um processo estocástico. Obtemos uma EDE facilmente dividindo a equação (5.1) por  $\Delta t$  para o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , ou seja:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(x, t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.2)$$

Em física, EDE's normalmente usadas são as equações de Langevin, dadas por:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) + D(x, t)\epsilon(t) \quad (5.3)$$

onde  $F(x, t)$  e  $D(x, t)$  são funções diferenciáveis e  $\epsilon(t)$  é um ruído aleatório.

Para resolver a equação (5.3) precisamos integrá-la e o principal problema está no fato de que este sistema diferencial não é bem definido. O clássico

teorema de existência e unicidade de soluções não se aplica a tal caso, pois o ruído  $\epsilon(t)$  não é uma função contínua. Reescrevendo a equação (5.3) no formato integral, obtemos:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} F(x, t') dt' + \int_t^{t+\Delta t} D(x, t') \epsilon(t') dt' \quad (5.4)$$

Podemos até inferir uma boa definição para resolver a equação (5.4), o problema é que sua solução não é unívoca. A literatura sobre o assunto fornece duas diferentes maneiras de definir integrais estocásticas: a) a definição de Itô-Dobb; e b) a definição de Stratanovich. Para uma discussão mais detalhada, veja a referência [14]. A análise desenvolvida nessa dissertação, conforme descrito a seguir, é compatível com a definição de Itô.

O presente trabalho centra-se em um método de análise de processos estocásticos sem a utilização de equações diferenciais, de tal forma que não é necessário inferir qualquer definição que remeta a integrais estocásticas. Na verdade, acreditamos que a utilização de EDE's tem seu grau de importância em determinados casos, mas a simples utilização de mapas lineares como o da equação (5.1), pode ser mais plausível na obtenção de propriedades estatísticas de processos estocásticos, como visto nos capítulos anteriores. Vamos então utilizar um método no qual possamos considerar a equação de Langevin (5.3) como um mapa linear.

A função  $\epsilon(t)$  é tida como um ruído contínuo. Para adequá-la à utilização de mapas, consideramos que o ruído  $\epsilon(t)$  é contínuo e constante dentro de um intervalo de tempo  $[t_i, t_{i+1})$ , de tal forma que:

$$\epsilon(t) = \epsilon_{i+1}; \quad \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad i=1,2,\dots \quad (5.5)$$

com  $\epsilon \in \mathbf{R}$ .

Para facilitar a discussão, vamos considerar que os intervalos são igualmente espaçados, ou seja,  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$  para todo  $i \in N$ . Como o valor de

$\epsilon(t)$  é mantido constante dentro do intervalo  $[t_i, t_{i+1})$ , a equação (5.3) possui solução única dentro deste intervalo.

O intervalo  $\Delta t$  deve ser considerado como suficientemente pequeno, de modo que possamos simplificar a equação de Langevin (5.3) na seguinte equação linear com respeito a  $\Delta t$ :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x, t)\Delta t + D(x, t)\epsilon[\Delta t]. \quad (5.6)$$

Para termos uma maior ilustratividade sobre a utilização da equação de Langevin, nas próximas seções vamos fazer diversas análises sobre as propriedades estatísticas do movimento Browniano.

## 5.2 Movimento Browniano

O Movimento Browniano recebeu esse nome graças ao botânico inglês Robert Brown, que descobriu e caracterizou o movimento irregular de grãos de pólen imersos num fluido [16], em 1827. Inicialmente, Brown acreditou que se tratava de uma nova forma de vida, pois ainda não se tinha completa ciência da existência de moléculas, e as partículas pareciam descrever movimentos por vontade própria. Investigações experimentais subseqüentes, apoiadas no desenvolvimento de técnicas de microscopia, revelaram que o fenômeno é bem mais geral, ocorrendo em suspensões de diversos tipos de partículas microscópicas em fluidos não muito viscosos.

Em 1900, Bachelier [17] mostrou a conexão entre o movimento Browniano e a equação de difusão, na proposta de um modelo referente à ativos financeiros. Entretanto, o cientista que explicou corretamente esse movimento foi Albert Einstein [18] (1905), utilizando-o como uma evidência direta da natureza atômica da matéria. Ainda em 1923, uma rigorosa teoria matemática à respeito do movimento foi construída por Wiener [19], razão pela qual o

movimento Browniano também é conhecido como processo de Wiener.

Se uma pequena partícula de massa  $m$  e velocidade  $x$  é imersa em um fluido, então uma força de fricção age na partícula. A expressão mais simples para descrever tal força é dada pela lei de Stokes

$$F_c = -\alpha x. \quad (5.7)$$

Na ausência de forças adicionais, a equação de movimento da partícula é dada por:

$$m \frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \quad (5.8)$$

ou

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = 0 \quad (5.9)$$

onde:

$$\gamma = \frac{\alpha}{m} \quad (5.10)$$

Note que aqui estamos diante de uma equação diferencial determinística de fácil resolução. A física por trás desse processo de fricção está ligada às colisões das moléculas do fluido com a partícula, onde o momento da partícula é transferido para as moléculas do fluido e a velocidade inicial da partícula  $v(0)$  decresce exponencialmente até zero com tempo de dissipação característico  $t_\gamma = 1/\gamma$ .

No entanto, esta equação determinística só é válida para partículas cuja massa é grande se comparada à massa das moléculas do fluido. Neste caso, a velocidade da partícula, devido a flutuações térmicas, pode ser negligenciada e (5.9) vale aproximadamente.

Para partículas de massa menores devemos realizar uma modificação na equação (5.9), de modo a satisfazer a lei da equipartição, que fornece a energia média da partícula (caso unidimensional):

$$\frac{1}{2}m \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}kT, \quad (5.11)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura. A modificação a ser realizada consiste em adicionar uma força de flutuação  $F_f(t)$  no lado direito de (5.8), ou seja, o total de forças agindo na partícula é composta de uma força de fricção  $F_c(t)$  e uma força de flutuação  $F_f(t)$  [20], ou seja,

$$F(t) = F_c(t) + F_f(t) = -\alpha x(t) + F_f(t). \quad (5.12)$$

Dividindo a equação (5.12) pela massa  $m$ , encontramos o modo clássico como o movimento Browniano é apresentado na literatura:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x(t) = \epsilon(t) \quad (5.13)$$

onde

$$\epsilon(t) = \frac{F_f(t)}{m} \quad (5.14)$$

é a força de flutuação por unidade de massa denominada força de Langevin, a qual é definida como um ruído contínuo aleatório.

Podemos considerar a equação (5.13), que descreve o movimento Browniano, como um mapa linear. Isto é feito da seguinte maneira:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \theta(x, t, \Delta t) = -(\gamma \Delta t)x(t) + \epsilon[\Delta t], \quad (5.15)$$

onde  $\Delta t \ll 1$ .

Tradicionalmente, o ruído  $\epsilon$  é tratado como um processo de Wiener, apresentando as seguintes características:

1.  $\epsilon$  é uma variável aleatória distribuída gaussianamente;
2. A média de  $\epsilon$  é zero:

$$\langle \epsilon[\Delta t] \rangle = 0; \quad (5.16)$$

3. A variância de  $\epsilon$  é  $\sigma^2 \Delta t$ , onde  $\sigma$  é uma constante:

$$\langle (\epsilon[\Delta t])^2 \rangle - \langle \epsilon[\Delta t] \rangle^2 = \sigma^2 \Delta t. \quad (5.17)$$

Estas propriedades definidas para  $\epsilon$  são coerentes fisicamente. Assumimos que a média sobre este ensemble deve ser zero porque a equação de movimento relacionada velocidade média  $\langle x(t) \rangle$  da partícula deve ser dada pela equação (5.9). Assumimos que a variância é proporcional a  $\Delta t$  porque desta forma a energia média da partícula será finita, de acordo com o estabelecido pela lei da equipartição (5.11) - veja seção (6.7).

Podemos então enunciar as principais características estatísticas do movimento Browniano. Como consequência das definições dadas, a média da variável de retorno  $\theta$  será:

$$\langle \theta(x, t, \Delta t) \rangle = -\gamma x(t) \Delta t, \quad (5.18)$$

enquanto sua variância será dada por:

$$\langle \theta^2(x, t, \Delta t) \rangle - \langle \theta(x, t, \Delta t) \rangle^2 = \sigma^2 \Delta t \quad (5.19)$$

Nas seções seguintes, vamos obter numericamente a solução do movimento Browniano. Na seção (5.3) o movimento Browniano é obtido em seu formalismo tradicional. Na seção (5.4) apresentamos um novo formalismo no qual o ruído  $\epsilon$  ao invés de ser definido com uma distribuição contínua é definido como uma variável aleatória descontínua.

### 5.3 Processo Contínuo

Nesta seção, vamos considerar o formalismo tradicional do movimento Browniano onde o descrevemos como uma equação de Langevin (5.3) com ruído  $\epsilon$  definido com uma distribuição contínua.

### 5.3.1 Simulação Computacional

Em nossa simulação computacional, consideramos que a distribuição de  $\epsilon[\Delta t]$  é gaussiana, dada pela formula:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2\Delta t}} \quad (5.20)$$

O programa solicita como entrada a condição inicial  $x_0$ , o tempo inicial  $t_0$ , o valor do intervalo de tempo  $\Delta t$ , o valor do parâmetro  $\gamma$ , o número total de pontos a serem gerados e o intervalo no qual a distribuição do ruído  $\epsilon$  será definido. Como saída, o programa fornece a série temporal estocástica relacionada ao movimento browniano determinado pelos valores de entrada fornecidos ao programa.

Com os dados de entrada fornecidos, o movimento Browniano é obtido computacionalmente pela seguinte equação iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \gamma x_i \Delta t + \epsilon_{i+1} \sqrt{\Delta t} \quad (5.21)$$

Aqui adotamos o ruído  $\epsilon[\Delta t] = \epsilon_{i+1} \sqrt{\Delta t}$ . A variável  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , ou seja, é distribuída gaussianamente com média igual a zero e variância igual a  $\sigma^2$ , , valor esse constante e obtido a partir do intervalo no qual a distribuição do ruído  $\epsilon_i$  foi definido. Para que  $\epsilon_i$  seja gaussianamente distribuído utilizamos a rotina *gasdev()* presente na referência [21].

A figura 5.1 ilustra um processo estocástico gerado com a utilização do nosso programa. Como o ruído é contínuo, o comportamento apresentado será uma *randon walk*, oscilando erráticamente em torno de zero.

## 5.4 Processo Descontínuo

Nesta seção, vamos apresentar a nova formulação para a equação de Langevin (5.3), na qual o ruído  $\epsilon$  ao invés de ser definido com uma distribuição contínua

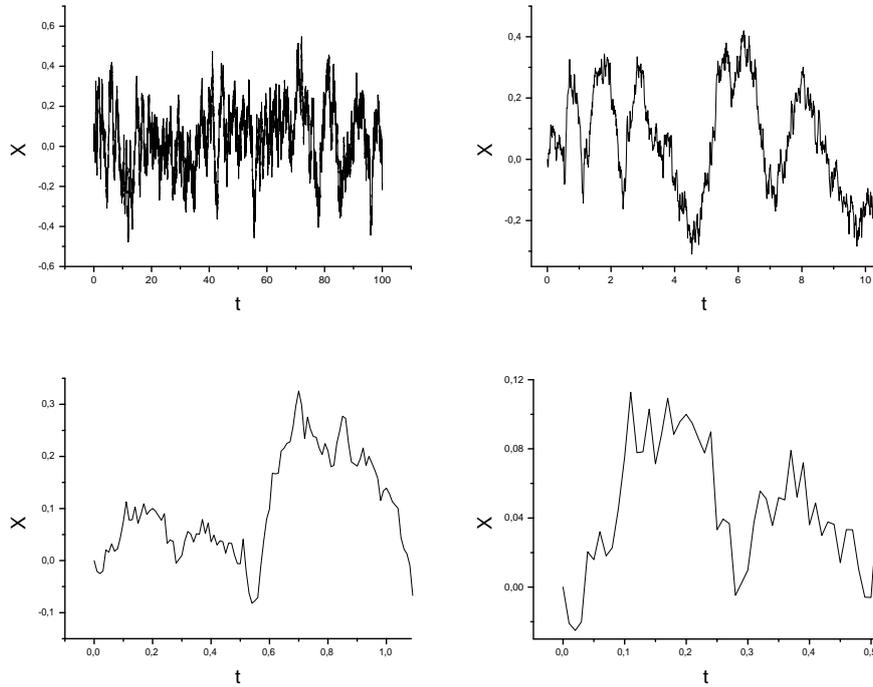


Figura 5.1: Série temporal obtida a partir da simulação do movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano definido no intervalo  $[-0, 125; 0, 125]$ . Assumimos o tempo  $t_0 = 0$ ,  $\gamma = 1$ , o valor da condição inicial  $x_0 = 0$  e valor de  $\Delta t = 0,01$ . Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes.

é definido como uma variável aleatória descontínua, com a seguinte densidade de probabilidade:

$$f(\epsilon) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)g(\epsilon) \quad (5.22)$$

O ruído  $\epsilon$  ser descontínuo significa que as flutuações da partícula devido a força  $F_f(t)$  acontecem em tempos discretos e isto está relacionado ao valor dos parâmetro  $a$  e  $\Delta t$ . Para encontrarmos o significado do parâmetro  $a$  devemos calcular a densidade de probabilidade associada a probabilidade de ocorrência da flutuação térmica e isso é feito derivando (4.12). Assim,

obtemos:

$$\rho(t) = a e^{-at} \quad (5.23)$$

Esta é a distribuição de Poisson. Ela é uma distribuição de probabilidade descontínua que expressa a probabilidade de um certo número de eventos ocorrerem num dado período tempo, caso estes ocorram com uma taxa média conhecida e caso cada evento seja independente do tempo decorrido desde o último evento.

Vamos agora definir  $t_a \equiv \langle t \rangle$  como sendo o tempo médio entre flutuações e vamos chamá-lo de tempo característico de flutuação. O valor  $t_a$  é então dado pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} t_a \equiv \langle t \rangle &= \int_0^{\infty} t \rho(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} a t e^{-at} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{a} y e^{-y} dy = \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assim, notamos que o parâmetro  $a$  é o inverso do tempo característico de flutuação.

### 5.4.1 Simulação Computacional

Em nossa simulação computacional, consideramos que a distribuição de  $\epsilon[\Delta t]$  é uma gaussiana descontínua, dada pela formula:

$$f(\epsilon) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} \quad (5.25)$$

O programa solicita como entrada a condição inicial  $x_0$ , o tempo inicial  $t_0$ , o valor do intervalo de tempo  $\Delta t$ , o valor dos parâmetros  $\gamma$  e  $a$ , o número total de pontos a serem gerados e o intervalo no qual a distribuição do ruído  $\epsilon$  será definido. Como saída, o programa fornece a série temporal estocástica

relacionada ao movimento browniano determinado pelos valores de entrada fornecidos ao programa.

Em nossa simulação computacional, o processo descontínuo será descrito pela seguinte equação iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \gamma x_i \Delta t + \epsilon_{i+1} \quad (5.26)$$

A variável  $\epsilon_i$  apresentará uma distribuição descontínua dada pela equação (5.22). Sua média é igual a zero e sua variância igual a  $\sigma^2$ , valor esse constante e obtido a partir do intervalo no qual a distribuição do ruído  $\epsilon_i$  foi definido.

Vamos agora explicar como o ruído é definido computacionalmente para que sua densidade de probabilidade seja descrita por (5.25). Aqui teremos uma certa distribuição probabilística que determinará a ocorrência ou a não-ocorrência do ruído dentro de um intervalo  $\Delta t$ . A probabilidade de não-ocorrência é dada pela equação

$$P(\Delta t) = 1 - a\Delta t \quad (5.27)$$

Com um  $\Delta t$  fixo e assumindo um valor constante e adequado para a variável  $a$ , obteremos um determinado valor, que deve estar entre 0 e 1, que determinará a probabilidade  $P(\Delta t)$  do evento não-ocorrer, o que significa  $\epsilon_i = 0$ .

Utilizamos então a rotina *ran4()*, também presente na referência [21], que nos fornece uma distribuição uniforme entre 0 e 1. Caso este valor seja maior que o valor obtido para  $P(\Delta t)$ , então o evento não ocorrerá. Do contrário, o evento ocorre e  $\epsilon_i$  assume um valor determinado por uma distribuição probabilística. No nosso caso, esse valor será obtido de acordo com uma distribuição gaussiana, mais uma vez dada pela rotina *gasdev()*.

A figura 5.2 ilustra um processo estocástico gerado com a utilização do nosso programa. Como o ruído é descontínuo, o valor de  $x$  decai expo-

nencialmente enquanto a flutuação não ocorre. Quando a flutuação ocorre, observamos a presença de saltos aleatórios.

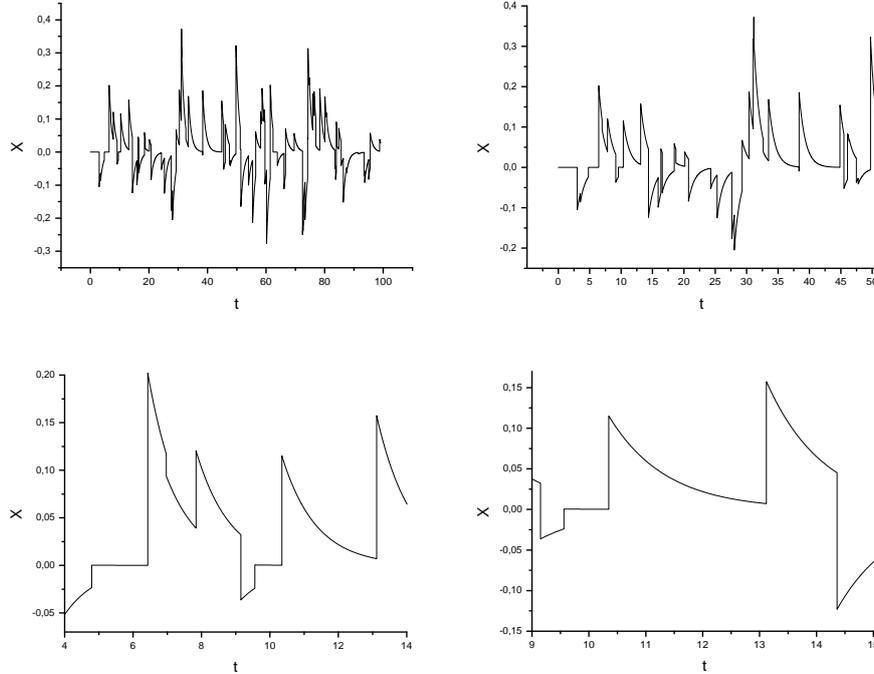


Figura 5.2: Série temporal estocástica obtida da simulação do movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano definido no intervalo  $[-0, 125; 0, 125]$ . Assumimos o tempo  $t_0 = 0$ ,  $\gamma = 1$ , o valor da condição inicial  $x_0 = 0$  e valor de  $\Delta t = 0,01$ . Para uma melhor visualização do comportamento desta série temporal, plotamos gráficos para quatro escalas de tempo diferentes.

## 5.5 Coeficientes de Kramers-Moyal

Os coeficientes de Kramers-Moyal  $D_n$  podem ser obtidos a partir da seguinte relação:

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n f(x', t + \Delta t | x, t) dx' \quad (5.28)$$

Note que os coeficientes  $D_n$  são calculados em termos dos momentos de  $\theta$ . Primeiro, vamos definir a densidade de probabilidade condicional relacionada à  $\theta$ . Ela pode ser dada através da seguinte relação:

$$\begin{aligned} f(x', t + \Delta t | x, t) &= f((1 - \gamma \Delta t)x + \epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) \\ &= f(\epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Desta forma, o  $n$ -ésimo momento  $\langle \theta^n \rangle$  é definido a partir da relação:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n f(\epsilon[\Delta t], t + \Delta t | x, t) dx' \quad (5.30)$$

Vamos então calcular o valor dos coeficientes de Kramers-Moyal para cada tipo de variável de retorno (contínua ou descontínua).

### 5.5.1 Variável Contínua

Para uma variável  $\theta$  com ruído gaussiano, temos que:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2 \Delta t}} dx' \quad (5.31)$$

Substituindo  $x'$  por  $(1 - \gamma \Delta t)x + \epsilon$  na equação (5.31), obtemos:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma \Delta t x + \epsilon)^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2 \Delta t}} d\epsilon \quad (5.32)$$

Como resultado para a equação (5.32) teremos a seguinte soma de integrais, associada ao binômio de Newton:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-\gamma x \Delta t)^{n-k} (\epsilon)^k \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \Delta t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2 \Delta t}} d\epsilon = \\ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} (\Delta t)^{n-\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se dividirmos a equação (5.33) por  $\Delta t$  e tendermos este a zero, obtemos o coeficiente de Kramers-Moyal  $D_n$ :

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} (\Delta t)^{\frac{2(n-1)-k}{2}} \quad (5.34)$$

A partir da equação (5.34) vemos que  $D_n$  só não será nulo para o primeiro e o segundo momento. Assim:

$$D_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma x, & n = 1 \\ \sigma^2, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases} \quad (5.35)$$

Como já esperado, este resultado mostra que para um ruído gaussiano contínuo, a equação difusiva associada é descrita por uma equação de Fokker-Planck, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \quad (5.36)$$

### 5.5.2 Variável Descontínua

Para uma variável  $\theta$  com ruído descontínuo gaussiano, temos que:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} \right] dx' \quad (5.37)$$

Substituindo  $x'$  por  $(1 - \gamma\Delta t)x + \epsilon$  na equação (5.31), obtemos:

$$\langle \theta^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma\Delta tx + \epsilon)^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} \right] d\epsilon \quad (5.38)$$

Como resultado para a equação (5.38) teremos

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} (-\gamma\Delta tx + \epsilon)^n (1 - a\Delta t) \delta(\epsilon) d\epsilon \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (a\Delta t) (-\gamma x \Delta t)^{n-k} (\epsilon)^k \frac{1}{\sigma \epsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}} d\epsilon \\
& = (-\gamma x \Delta t)^n - (-\gamma x \Delta t)^n a \Delta t \\
& + \sum_{k=0}^n \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} a (\Delta t)^{n-k+1}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Se dividirmos a equação (5.39) por  $\Delta t$  e tendermos este a zero, obtemos o coeficiente de Kramers-Moyal  $D_n$ :

$$\begin{aligned}
D_n(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\gamma x)^n (\Delta t)^{n-1} - a (-\gamma x \Delta t)^n \\
& + \sum_{k=0}^n \frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) [1 + (-1)^k] (\sigma)^k (-\gamma x)^{n-k} a (\Delta t)^{n-k}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Desta forma,  $D_n$  será dado por:

$$D_n(x, t) = \begin{cases} -\gamma x, & n = 1 \\ a \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (\sigma)^n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases} \tag{5.41}$$

Como esperado, este resultado mostra-nos que para um ruído gaussiano descontínuo, a equação difusiva associada é descrita por uma equação de Kramers-Moyal, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma)^{2n}}{(2n)!} \frac{2^{\frac{2n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x, t) \tag{5.42}$$

### 5.5.3 Simulação Computacional

Definimos os momentos estatísticos através da utilização de integrais. Mas computacionalmente falando, a utilização destas integrais não é plausível. Devemos utilizar outro raciocínio válido para a obtenção dos coeficientes.

Uma análise intuitiva para definir momentos, baseia-se na interpretação de probabilidade como limite de frequências relativas. Tomando o caso discreto, interpretamos uma variável estocástica  $\xi$  como um característico numérico do resultado de um experimento aleatório. Pensemos na realização deste experimento  $n$  vezes ( $n$  grande), de tal maneira que as realizações sejam independentes. A lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos  $n$  valores observados é aproximadamente igual a  $\langle \xi \rangle$ , quando  $n$  é grande; de fato, ela afirma que esta média aritmética das observações converge para o valor esperado  $\langle \xi \rangle$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Tratemos agora de construir um modelo para o experimento repetido que contemplamos acima. Em nossa simulação computacional, geramos um conjunto de valores para a variável  $X$  em vários tempos diferentes. A variável de retorno  $\theta$  é obtida a partir da diferença da variável  $X$  dada pela relação  $\theta(x, t, \Delta) = x(t + \Delta t) - x(t)$ .

Analisando o processo (5.15), vemos que  $\theta$  é um processo Markoviano, com ruídos independentes temporalmente e identicamente distribuídos, seja o ruído contínuo ou descontínuo. Desta forma, a densidade de probabilidade condicional relacionada a  $\theta$  será descrita como um processo estacionário, ou seja:

$$f(x', t + \Delta t | x, t) = f(x', t + \Delta t + \tau | x, t + \tau) \quad (5.43)$$

onde  $\tau$  é arbitrário.

Consideremos então que o valor  $x$  foi observado em algum tempo qualquer. Como estamos tratando de um mapa linear estocástico, este mesmo valor será observado um determinado número  $n$  de vezes em vários tempos diferentes. Como o processo que descreve  $\theta$  é estacionário, então para calcular o  $k$ -ésimo momento de  $\theta$  condicionado a  $x$ , consideremos os  $n$  valores

$(\theta_1, \dots, \theta_n)$  condicionados ao mesmo valor  $x$  e calculamos:

$$\langle \theta^k \rangle_x = \frac{\theta_1^k + \dots + \theta_n^k}{n} \quad (5.44)$$

Desta maneira, não precisamos realizar nosso procedimento computacional um número incalculável de vezes para que tenhamos uma boa aproximação para do  $k$ -ésimo momento de  $\theta$ . Apenas um procedimento é suficiente, o que reduz consideravelmente nossos gastos computacionais.

Para obtermos uma precisão maior no cálculo dos momentos, além dos valores de  $\theta$  condicionados a  $x$ , consideramos também os seus vizinhos mais próximos. Por vizinhos mais próximos consideramos todos aqueles valores que se localizam a uma distância euclidiana menor que um determinado valor  $\delta$ . Como estamos tratando de um problema unidimensional, os vizinhos mais próximos  $x_v$  de  $x$  serão aqueles que satisfazem a seguinte relação:

$$|x_v - x| \leq \delta \quad (5.45)$$

Este método gera uma boa aproximação para o cálculo dos momentos de  $\theta$  e conseqüentemente no cálculo dos coeficientes de Kramers-Moyal, como será visto a seguir. A obtenção destes coeficientes é simplesmente dada pela relação:

$$D_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \theta^n(x, t, \Delta t) \rangle}{\Delta t} \quad (5.46)$$

Para obter este limite, calcularemos os coeficientes  $C_n$

$$C_n(x, t) = \frac{\langle \theta^n(x, t, \Delta t) \rangle}{\Delta t} \quad (5.47)$$

para valores de  $\Delta t$  cada vez menores e analisaremos o processo de convergência dos coeficientes  $C_n$  para os coeficientes de Kramers-Moyal  $D_n$ .

O nosso programa solicita como entrada o valor do intervalo de tempo  $\Delta t$ , o valor de  $\delta$ , qual coeficiente  $D_n(x, t)$  se deseja calcular, o número de pontos  $nmax$  da série temporal estocástica a ser analisada e os valores de  $x$  para os quais se deseja calcular o coeficiente de Kramers-Moyal.

**Processo Contínuo**

As figura 5.3, 5.4 e 5.5 mostram a convergência dos coeficientes  $C_n$  para os coeficientes de Kramers-Moyal  $D_n$  de um processo estocástico descrito por um ruído contínuo gaussiano. Note que para  $\Delta t = 0.01$  já temos uma boa aproximação para os coeficientes  $D_n$ .

Note que os resultados obtidos computacionalmente vêm corroborar com os resultados obtidos em (5.35). Veja que os coeficientes  $C_4$  e  $C_6$  para  $\Delta t$  suficientemente pequeno são nulos. De acordo com o lema de Pawula, se um coeficiente  $D_n$ , para  $n$  par e maior que três, for nulo, então todos os  $D_n$  para  $n \geq 3$  serão nulos. Desta forma, comprovamos que para um ruído contínuo gaussiano, a equação difusiva a ela associada será uma equação de Fokker-Planck.

**Processo Descontínuo**

A figura 5.6, 5.7 e 5.8 mostram a convergência dos coeficientes  $C_n$  para os coeficientes de Kramers-Moyal  $D_n$  de um processo estocástico descrito por um ruído descontínuo gaussiano. Note que para  $\Delta t = 0.01$  já temos uma boa aproximação para os coeficientes  $D_n$ .

Os resultados obtidos em nossa simulação reafirmam a validade dos resultados obtidos em (5.41). Os coeficientes  $C_n$ , para  $n$  ímpar e maior que 1, anulam-se, pois estamos tratando de uma distribuição simétrica. Note que os coeficientes  $C_4$  e  $C_6$  são não-nulos e constantes. Assim, de acordo o lema de Pawula, todos os outros coeficientes  $D_n$  para  $n$  par também não serão nulos. Desta forma, vemos que a equação difusiva a associada a um ruído descontínuo gaussiano será uma expansão de Kramers-Moyal.

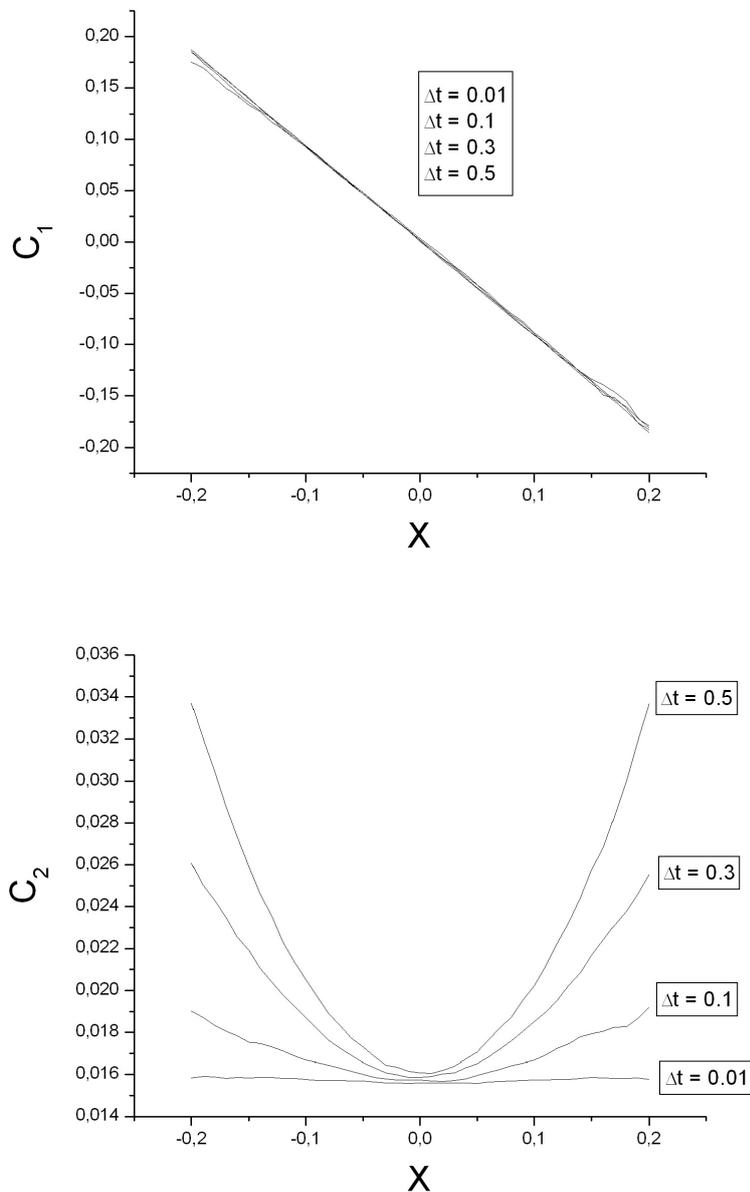


Figura 5.3: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_1$  e  $C_2$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_1$  comporta-se como uma reta e o coeficiente  $C_2$  assume um valor constante diferente de zero.

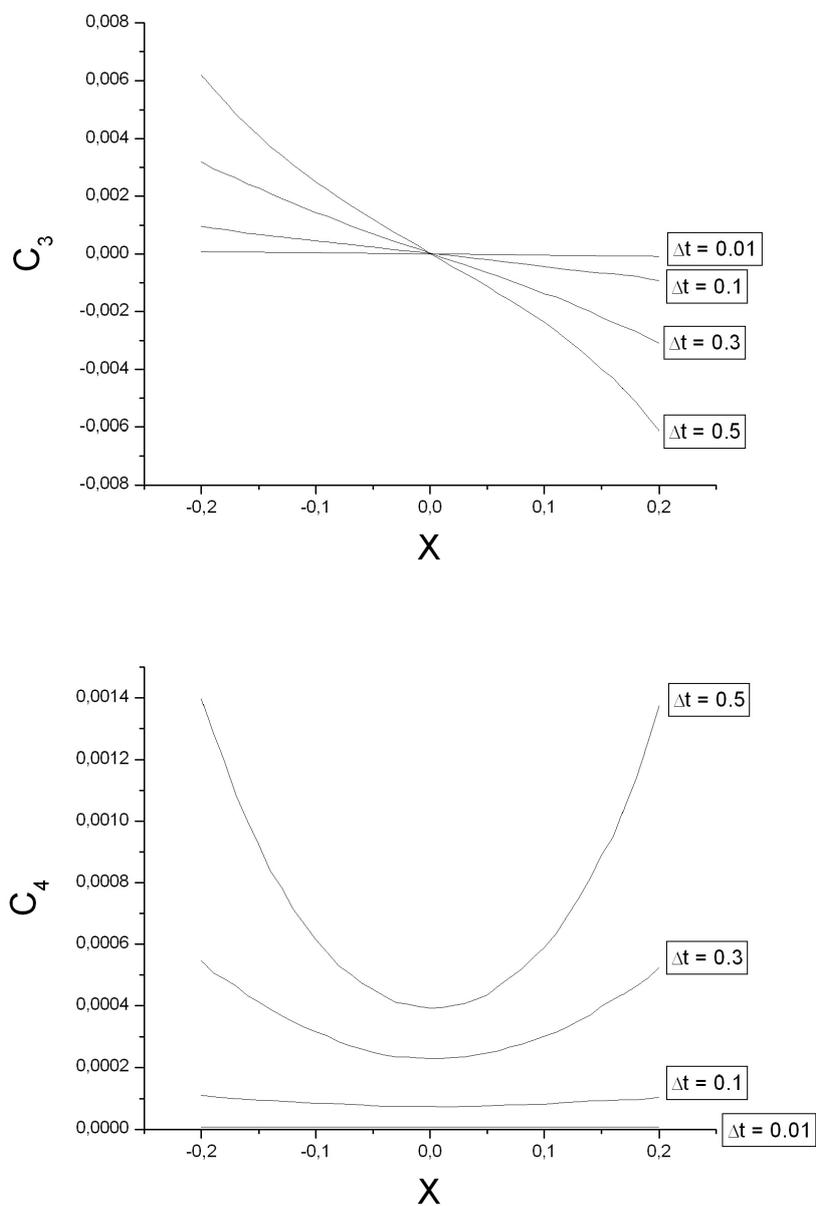


Figura 5.4: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_3$  e  $C_4$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0,2; 0,2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que os coeficientes  $C_3$  e  $C_4$  tornam-se nulos.

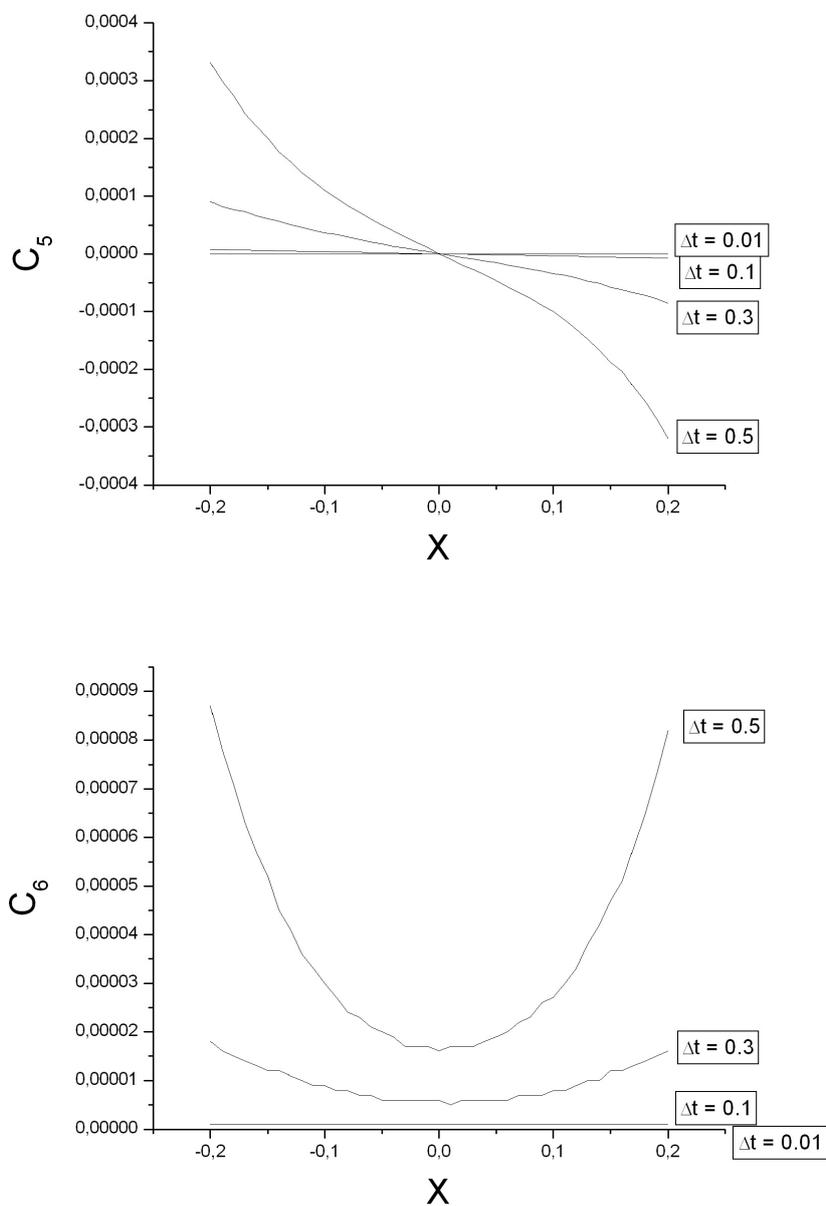


Figura 5.5: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_5$  e  $C_6$  para o movimento Browniano com ruído contínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0,2; 0,2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que os coeficientes  $C_5$  e  $C_6$  tornam-se nulos.

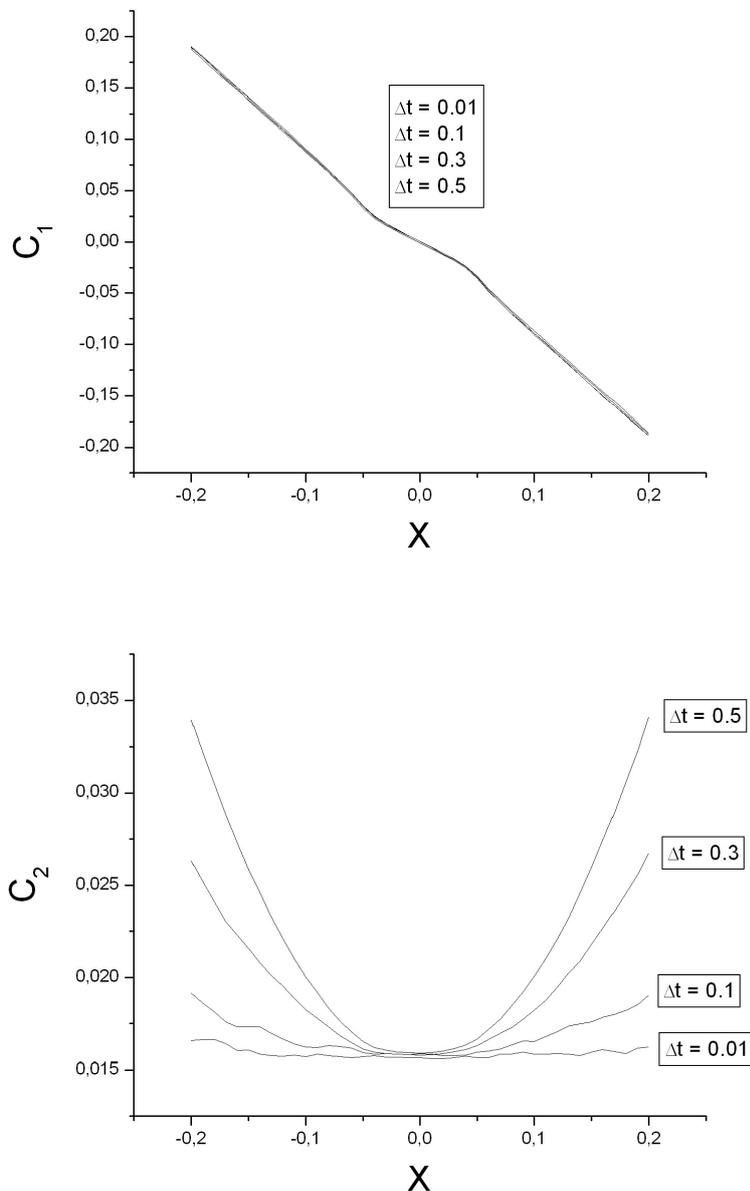


Figura 5.6: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_1$  e  $C_2$  para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $n_{max} = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0,2; 0,2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_1$  comporta-se como uma reta e o coeficiente  $C_2$  assume um valor constante diferente de zero.

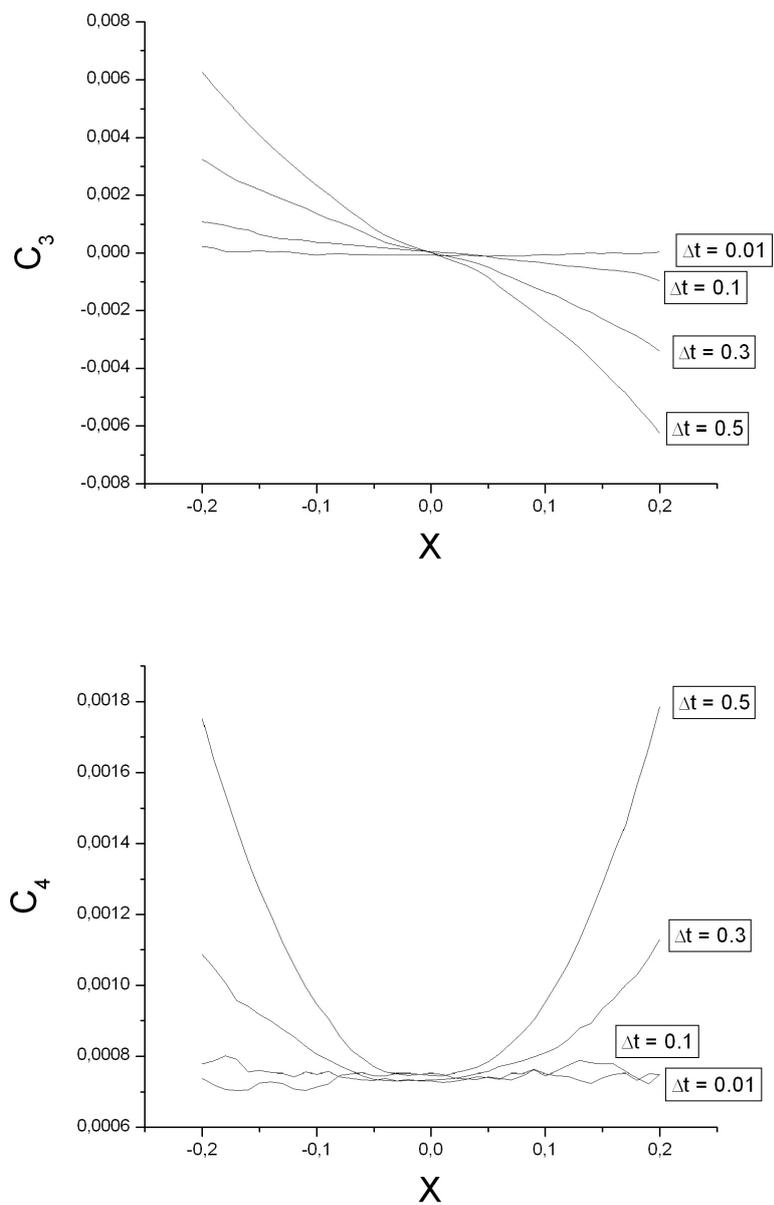


Figura 5.7: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_3$  e  $C_4$  para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_3$  torna-se nulo e o coeficiente  $C_4$  assume um valor constante diferente de zero.

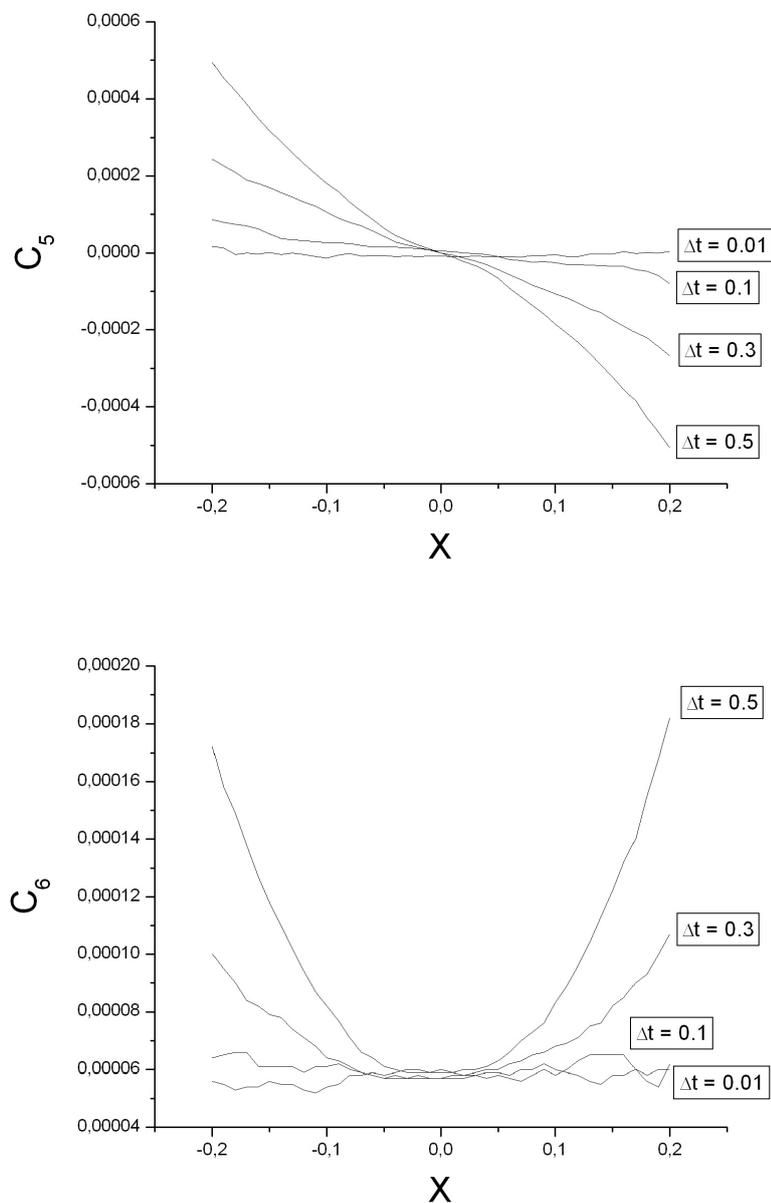


Figura 5.8: Coeficientes de Kramers-Moyal  $C_5$  e  $C_6$  para o movimento Browniano com ruído descontínuo gaussiano, para vários valores de  $\Delta t$ . Assumimos  $\delta = 0,05$ , número de pontos  $nmax = 1.000.000$ . Calculamos os coeficientes para valores de  $x = [-0, 2; 0, 2]$ . Quando o valor de  $\Delta t$  vai ficando menor notamos que o coeficiente  $C_5$  torna-se nulo e o coeficiente  $C_6$  assume um valor constante diferente de zero.

# Capítulo 6

## Teoremas Limite e Equações de Difusão

### 6.1 Teorema do Limite Central

Todos os teoremas clássicos de convergência de variáveis aleatórias são baseados na hipótese de infinitesimalidade, este conjunto de resultados, que ficou conhecido como Teorema do Limite Central, é o mais fino acabamento do trabalho sucessivo dos mais brilhantes estatísticos e matemáticos da primeira metade do século vinte.

O Teorema do Limite Central clássico (TLC), também conhecido como segundo teorema fundamental de probabilidade (o primeiro é o teorema dos grandes números), é enunciado, segundo Lindeberg, do seguinte modo:

*Vamos considerar uma sequência de variáveis aleatórias independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tais que*

$$\begin{aligned} l_i &= \langle x_i \rangle \\ m_i^2 &= \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 \\ \bar{x}_i &= \frac{x_i - l_i}{m_i} \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $(\forall i = 1, \dots, n)$   $m_i < \infty$  e pelo menos um  $m_i > 0$ . Seja

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (6.2)$$

e

$$\begin{aligned} L_n &= \langle S_n \rangle \\ M_n^2 &= \langle S_n^2 \rangle - \langle S_n \rangle^2 = m_1^2 + \dots + m_n^2 \\ \overline{S}_n &= \frac{S_n - L_n}{M_n} = \frac{m_1 \overline{x}_1 + m_2 \overline{x}_2 + \dots + m_n \overline{x}_n}{M_n}. \\ dF_i(x) &= dF(x)|_{x=x_i} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Então, podemos afirmar que a distribuição da variável reduzida  $\overline{S}_n$  converge para a distribuição normal-padrão  $N(0, 1)$  quando  $n \rightarrow \infty$  se e somente se a seguinte condição, chamada condição de Lindeberg, seja satisfeita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-l_i| > \epsilon M_n} (x - l_i)^2 dF_i(x) = 0 \quad \forall \epsilon > 0. \quad (6.4)$$

Observação: a notação  $\int_{|x-l_i| > \epsilon M_n}$  significa que a integração é feita em  $\{x : |x - l_i| > \epsilon M_n\} = (-\infty, l_i - \epsilon M_n) \cup (l_i + \epsilon M_n, \infty)$ .

A condição de Lindeberg significa, basicamente, que as parcelas  $\frac{x_i - l_i}{M_n}$  da soma  $\overline{S}_n$  são uniformemente pequenas para  $n$  grande. Assim, a condição de Lindeberg, para  $n \rightarrow \infty$  implica que

$$\frac{\mu_n}{M_n} \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

onde:

$$\mu_n = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \quad (6.6)$$

ou seja, para  $n$  grande, os desvios-padrões das parcelas são uniformemente pequenas em relação ao desvio-padrão da soma. A relação (6.5) é conhecida

como hipótese de infinitesimalidade [22]. Esta versão do teorema é a forma mais utilizada do TLC pela literatura.

Em uma versão menos geral do Teorema do Limite Central, ao invés de impormos a condição de Lindeberg, consideramos apenas que as variáveis aleatórias devem ser, além de independentes, identicamente distribuídas. É fácil mostrar que neste caso a hipótese de Lindeberg (6.4) é satisfeita.

Paul Lévy também forneceu a sua versão sobre o Teorema do Limite Central, onde ele utiliza funções características para prová-lo. A seção a seguir apresenta o formalismo desenvolvido por Lévy.

## 6.2 Teorema limite de Lévy

A partir dos anos sessenta até o presente tem se desenvolvido uma vasta literatura em teoremas limites sem a hipótese de infinitesimalidade, com amplo destaque para os trabalhos do matemático russo Zolotarev. Estes trabalhos têm se baseado na caracterização das diferentes possibilidades de decomposição de uma variável aleatória em suas somas, em termos de funções características. Isto significa estudar as diferentes possibilidades de decomposição de uma certa função característica em um produto de outras funções características.

Nesta dissertação, desenvolvemos trabalhos baseados na forma original como Paul Lévy pensou o problema. Partimos de um ponto de vista, onde procuramos caracterizar os processos estocásticos a partir da estrutura de formação dos desvios padrões das variáveis aleatórias envolvidas na soma. Com isto, podemos demonstrar uma série de resultados sobre a convergência de somas de variáveis aleatórias para distribuições não gaussianas e que não definem leis estatísticas estáveis. Podemos, com isso, definir um conjunto de medidas estatísticas que podem ser utilizadas na caracterização do processo

de convergência em séries temporais reais.

Suponhamos a sequência de variáveis aleatórias independentes  $x_1, \dots, x_n$  associadas às respectivas funções características  $\psi_1(z), \dots, \psi_n(z)$ . Então, a função característica associada a soma  $S_n$  possuirá a seguinte forma:

$$\psi(z) = \psi_1(z) \dots \psi_n(z) \quad (6.7)$$

como pode-se verificar facilmente.

Como já dito anteriormente, Lévy demonstrou que a função característica associada à variável reduzida  $\bar{x}_i$ , com  $m_i < \infty$ , pode ser escrita como:

$$\psi_i(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+w_i(z)]} \quad (6.8)$$

Com estas definições estabelecidas, podemos enunciar o teorema fundamental de Lévy da seguinte maneira:

*Vamos considerar uma sequência de variáveis aleatórias independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tais que  $(\forall i = 1, \dots, n)$   $m_i^2$  sejam finitos e positivos e que estas variáveis constituam uma família de distribuição normal, ou seja,*

$$|w_i(z)| \leq h(z), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

*onde  $h(z)$  designa uma função par de  $z$ , nula quando  $z = 0$  e não-decrescente para  $|z| < \varsigma$ . Seja ainda  $\mu_n$  o maior valor dentre as variâncias  $m_1, \dots, m_n$ , i.e.,*

$$\mu_n = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}. \quad (6.10)$$

*Caso a hipótese de infinitesimalidade seja satisfeita, i.e:*

$$\frac{\mu_n}{M_n} \rightarrow 0, \quad (6.11)$$

*então quando  $n \rightarrow \infty$  podemos afirmar que a distribuição da variável  $\bar{S}_n$  converge para a distribuição normal-padrão  $N(0, 1)$ .*

A demonstração do teorema de Lévy permite-nos inferir uma série de resultados de vital importância para o estudo convergência em distribuição, ou seja, a análise de funções características no estudo da convergência de soma de variáveis aleatórias.

Da hipótese de independência das variáveis aleatórias na equação (6.7), podemos estabelecer a seguinte função característica associada a variável aleatória reduzida  $\overline{S}_n$ :

$$\phi_n(z) = \psi_1\left(\frac{m_1}{M_n}z\right) \psi_2\left(\frac{m_2}{M_n}z\right) \dots \psi_n\left(\frac{m_n}{M_n}z\right) \quad (6.12)$$

Utilizando a equação acima, podemos definir a função característica, em sua forma canônica, para a variável  $\overline{S}_n$ :

$$\phi_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\Omega_n(z)]} \quad (6.13)$$

onde:

$$\Omega_n(z) = \frac{m_1^2}{M_n^2}w_1\left(\frac{m_1}{M_n}z\right) + \dots + \frac{m_n^2}{M_n^2}w_n\left(\frac{m_n}{M_n}z\right) \quad (6.14)$$

Caso a hipótese de família de distribuição normal seja satisfeita, podemos associar estes resultados a desigualdade dada em (6.9) e podemos afirmar que:

$$0 \leq |\Omega_n(z)| \leq h\left(\frac{\mu_n}{M_n}z\right) \quad (6.15)$$

Se a hipótese de infinitesimalidade (6.11) é satisfeita, então temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\frac{\mu_n}{M_n}z\right) = 0 \quad (6.16)$$

e a função  $|\Omega_n(z)|$  em (6.15) tenderá a zero. Logo, se as três hipóteses do teorema de Lévy são satisfeitas, então

$$\phi_n(z) \rightarrow e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (6.17)$$

que é a função característica de uma distribuição gaussiana.

Note que, com estes resultados, podemos estabelecer o seguinte corolário:

- Se  $\phi_n(z) \rightarrow e^{-\frac{z^2}{2}} \forall z$ , então  $\overline{S_n}$  converge em distribuição para uma variável aleatória  $S$  que possui distribuição normal-padrão  $N(0, 1)$ .

Aqui temos um importante resultado: a simples análise da função característica para variáveis reduzidas de Lévy informa-nos sobre sua convergência ou não para uma gaussiana. Com isso, temos uma poderosa ferramenta de estudo de convergência, que é válido mesmo quando a hipótese de infinitesimalidade é quebrada.

O tipo de convergência da função característica canônica de Lévy é de vital utilidade na análise de qual equação (Fokker-Planck ou Kramers-Moyal) deve ser utilizada para descrever um processo estocástico associado a uma equação difusiva. As próximas seções tratam desse assunto.

### 6.3 Mapas lineares com ruído

De acordo com o que foi visto até agora, podemos descrever processos estocásticos através de equações diferenciais estocásticas, normalmente escritas como equações de Langevin. O método de resolução para tais equações não é único e a literatura clássica nos fornece dois métodos de integração para sua resolução. Nesta dissertação, seguimos um caminho diferente resolvendo através do uso de mapas com ruído. Restringimo-nos ao caso linear, representado por um modelo simples para o famoso movimento browniano, suficiente para os objetivos deste trabalho.

De modo geral, podemos escrever um mapa linear com ruído  $\epsilon$ , em uma versão iterativa, da seguinte maneira:

$$x_{i+1} = \lambda x_i + \epsilon_{i+1} \quad (6.18)$$

Vamos, então, supor as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\langle \epsilon_{i+1} \rangle &= 0 \\ \langle \epsilon_{i+1}^2 \rangle &= m^2.\end{aligned}\tag{6.19}$$

Assumimos ainda que o valor de  $m^2 < \infty$ . Consideraremos ainda as seguintes condições para o valor inicial  $x_0$ :

$$\begin{aligned}\langle x_0 \rangle &= 0 \\ \langle x_0^2 \rangle &= m_0^2\end{aligned}\tag{6.20}$$

Vamos agora iterar o mapa (6.18)  $n$  vezes, obtendo:

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda x_0 + \epsilon_1 \\ x_2 &= \lambda x_1 + \epsilon_2 = \lambda^2 x_0 + \lambda \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda^n x_0 + \lambda^{n-1} \epsilon_1 + \dots + \lambda \epsilon_{n-1} + \epsilon_n\end{aligned}\tag{6.21}$$

Pode-se ver claramente que a variável  $x_n$  representa a soma das variáveis aleatórias independentes  $\epsilon_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) e mais a variável aleatória  $x_0$ .

Com todas estas definições, a variância  $M_n^2$  de  $x_n$  é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}M_n^2 &= \langle x_n^2 \rangle = \lambda^{2n} m_0^2 + \lambda^{2(n-1)} m^2 + \dots + \lambda^2 m^2 + m^2 \\ &= \lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \left[ 1 + \lambda^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^2)^3 + \dots + (\lambda^2)^{n-1} \right]\end{aligned}\tag{6.22}$$

O termo entre colchetes em (6.22) é uma progressão geométrica (PG). Aplicando a propriedade de soma de termos de uma PG, obtemos:

$$M_n^2 = \lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \frac{1 - \lambda^{2n}}{1 - \lambda^2}\tag{6.23}$$

A função característica  $\psi_{\bar{n}}(z)$  associada à variável reduzida

$$\bar{x}_n = \frac{x_n}{M_n}, \quad (6.24)$$

será dada por:

$$\psi_{\bar{n}}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\Omega_n(z)]} \quad (6.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Omega_n(z) = & \frac{\lambda^{2n}m_0^2}{M_n^2}\omega_0\left(\frac{\lambda^n m_0}{M_n}z\right) + \frac{\lambda^{2(n-1)}m^2}{M_n^2}\omega\left(\frac{\lambda^{n-1}m}{M_n}z\right) + \dots \\ & + \frac{\lambda^2 m^2}{M_n^2}\omega\left(\frac{\lambda m}{M_n}z\right) + \frac{m^2}{M_n^2}\omega\left(\frac{m}{M_n}z\right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Vamos discutir agora um pouco sobre o significado do valor da variável  $\lambda$ . Quando  $\lambda = 1$ , podemos reescrever a equação (6.18) da seguinte maneira:

$$x_{i+1} - x_i = \epsilon_{i+1}. \quad (6.27)$$

e o valor de  $M_n$  atinge um limite indeterminado em (6.23). Aplica-se, desta forma, a regra de L'Hospital e  $M_n$  assume o valor:

$$M_n^2 = m_0^2 + m^2 n \quad (6.28)$$

Mostra-se então que a hipótese de infinitesimalidade é assegurada.

Quando  $\lambda \neq 1$ , temos uma quebra da inferência de infinitesimalidade e resta-nos apenas utilizar a função característica associada à variável reduzida  $\bar{x}_n$  em sua forma canônica (6.25) para o estudo de processos de convergência, segundo a versão do teorema do limite central proposta por Paul Lévy.

Vamos discutir, nas subseções a seguir, as consequências para as duas diferentes possibilidades para  $\lambda$  discutidos.

### 6.3.1 Hipótese de Infinitesimalidade

Para o caso clássico do teorema do limite central, temos ( $\lambda = 1$ ) e desta forma:

$$M_n = \sqrt{m_0^2 + m^2 n} \quad (6.29)$$

A equação (6.26) pode ser simplificada para:

$$\Omega_n(z) = \frac{m_0^2}{M_n^2} \omega_0\left(\frac{m_0}{M_n} z\right) + \frac{m^2}{M_n^2} \omega\left(\frac{m}{M_n} z\right) + \dots + \frac{m^2}{M_n^2} \omega\left(\frac{m}{M_n} z\right) \quad (6.30)$$

Substituindo (6.29) em (6.30), obtemos:

$$\Omega_n(z) = \frac{m_0^2}{m_0^2 + m^2 n} \omega_0\left(\frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z\right) + \frac{m^2 n}{m_0^2 + m^2 n} \omega\left(\frac{m}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z\right) \quad (6.31)$$

Definindo  $\mu = \max\{m_0, m\}$ , considerando a existência de uma função  $h(z)$  tal que  $|\omega_0(z)| \leq h(z)$ ,  $|\omega(z)| \leq h(z)$  e utilizando a definição dada em (6.15), obtemos:

$$|\Omega_n(z)| \leq \left(\frac{m_0^2}{m_0^2 + m^2 n} + \frac{m^2}{m_0^2 + m^2 n}\right) h\left(\frac{\mu}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z\right) = h\left(\frac{\mu}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z\right) \quad (6.32)$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ , vemos claramente que  $|\Omega_n(z)| \rightarrow 0$ . Desta forma, quando o número de variáveis aleatórias independentes tende a ser muito grande, a variável reduzida  $\bar{x}_n$  tende a distribuição gaussiana.

### 6.3.2 Quebra da infinitesimalidade

Vamos agora analisar os casos em que  $\lambda \neq 1$ , que tem como consequência a quebra da hipótese de infinitesimalidade. Note que o valor de  $M_n$  permanece o mesmo de (6.23).

Vamos considerar que as funções  $\omega_0(z)$ ,  $\omega(z)$  e  $\Omega_n(z)$  são analíticas e,

desta forma, podem ser expandidas em série:

$$\begin{aligned}\omega_0(z) &= \sum_p W_{0p} z^p \\ \omega(z) &= \sum_p W_p z^p \\ \Omega_n(z) &= \sum_p \Omega_{np} z^p\end{aligned}\tag{6.33}$$

Vamos então aplicar as expansões (6.33) em (6.26), obtendo:

$$\begin{aligned}\Omega_{np} &= \frac{(\lambda^{2+p})^n}{M_n^{2+p}} m_0^{2+p} W_{0p} + \frac{(\lambda^{2+p})^{n-1}}{M_n^{2+p}} m^{2+p} W_p + \dots \\ &\quad + \frac{(\lambda^{2+p})}{M_n^{2+p}} m^{2+p} W_p + \frac{1}{M_n^{2+p}} m^{2+p} W_p \\ \Omega_{np} &= \frac{m_0^{2+p} W_{0p}}{M_n^{2+p}} (\lambda^{2+p})^n + \frac{m^{2+p} W_p}{M_n^{2+p}} [1 + (\lambda^{2+p}) + \dots + (\lambda^{2+p})^{n-1}]\end{aligned}\tag{6.34}$$

Como o termo entre colchetes em (6.34) é uma progressão geométrica, podemos aplicar a propriedade de soma de termos de uma PG a ela, obtendo:

$$\Omega_{np} = \frac{m_0^{2+p} W_{0p}}{M_n^{2+p}} (\lambda^{2+p})^n + \frac{m^{2+p} W_p}{M_n^{2+p}} \frac{1 - (\lambda^{2+p})^n}{1 - (\lambda^{2+p})}\tag{6.35}$$

Substituindo  $M_n^2$  em (6.34), obtemos:

$$\Omega_{np} = \frac{m_0^{2+p} W_{0p}}{(\lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \frac{1-\lambda^{2n}}{1-\lambda^2})^{\frac{2+p}{2}}} (\lambda^{2+p})^n + \frac{m^{2+p} W_p}{(\lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \frac{1-\lambda^{2n}}{1-\lambda^2})^{\frac{2+p}{2}}} \frac{1 - (\lambda^{2+p})^n}{1 - (\lambda^{2+p})}\tag{6.36}$$

Não podemos ainda dizer se a função  $\Omega_n(z)$  é ou não nula para todo  $z$ . Isto depende da forma específica como o ruído é definido. Na seção a seguir, explicitaremos sobre os tipos de processos estocásticos e seus ruídos que serão de interesse para nossos objetivos.

## 6.4 Processos Estocásticos

Nesta seção, vamos discutir que tipos de processos estocásticos serão considerados para análise. Um processo estocástico markoviano pode ser descrito através do seguinte mapa:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \theta[t, x(t), \Delta t] \quad (6.37)$$

Lembrando que assumimos  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Nossa análise será restrita ao caso em que:

$$\theta[t, x(t), \Delta t] = -(\gamma \Delta t)x(t) + \epsilon[\Delta t] \quad (6.38)$$

onde:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle_{\Delta t} &= 0 \\ \langle \epsilon^2 \rangle_{\Delta t} &= c \Delta t \end{aligned} \quad (6.39)$$

Note mais uma vez que as considerações feitas acima são as mesmas definições utilizadas para descrever o movimento browniano do modo tradicional como encontrado na literatura sobre o assunto.

O ruído  $\epsilon[\Delta t]$  pode ser contínuo ou descontínuo. Para a mesma equação (6.37), podemos obter resultados completamente diferentes dependendo do tipo de ruído utilizado (contínuo ou descontínuo). Vamos definir então estes tipos de ruídos.

### 6.4.1 Variável aleatória contínua

Para processos estocásticos, descritos por equações do tipo (6.37) e que possui como ruído uma variável aleatória contínua, a seguinte função característica é utilizada:

$$\psi_{\bar{\epsilon}}(z) = \langle e^{iz\bar{\epsilon}[\Delta t]} \rangle = e^{-\frac{z^2}{2}[1+\omega_{\Delta t}(z)]} \quad (6.40)$$

Consideraremos nesta dissertação processos contínuos tais que exista uma função  $h(z)$  de tal forma que

$$|\omega_{\Delta t}(z)| \leq h(z), \quad (6.41)$$

para qualquer valor de  $\Delta t$ , ou seja, os ruídos aleatórios pertencem a família de distribuição normal.

### 6.4.2 Variável aleatória descontínua

Vamos estudar variáveis aleatórias descontínuas que possuem a seguinte densidade de probabilidade:

$$f(\epsilon[\Delta t]) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)g(\epsilon) \quad (6.42)$$

onde  $\delta(\epsilon)$  é a função delta de Dirac e  $g(\epsilon)$  é a densidade de probabilidade da variável  $\epsilon$ .

Como já obtido na seção (4.2), a partir da densidade de probabilidade  $f(\epsilon[\Delta t])$ , a função característica associada a variável reduzida  $\overline{\epsilon[\Delta t]}$  será dada por:

$$\psi_{\overline{\epsilon}}(z) = (1 - a\Delta t) + a\Delta t e^{-\frac{1}{2a\Delta t}z^2 \left[1 + w\left(\frac{z}{\sqrt{a\Delta t}}\right)\right]} \quad (6.43)$$

A partir desta função característica, podemos encontrar a função  $\omega_{\Delta t}(z)$  associada a variável reduzida  $\overline{\epsilon[\Delta t]}$ :

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{2 \ln \left\{ (1 - a\Delta t) + a\Delta t \exp \left\{ -\frac{1}{2a\Delta t} z^2 \left[ 1 + w \left( \frac{z}{\sqrt{a\Delta t}} \right) \right] \right\} \right\}}{z^2} + z^2 \quad (6.44)$$

## 6.5 Caso simples

Nesta seção e na próxima, analisaremos o comportamento da função canônica de Lévy para processos estocásticos descritos por mapas lineares com ruído.

Esta análise é de vital importância para o estudo do comportamento da equação de difusão como equação de Fokker-Planck ou como expansão de Kramers-Moyal.

Aqui, vamos considerar o caso mais simples do mapa linear (6.38), no qual  $\gamma = 0$ :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \epsilon[\Delta t] \quad (6.45)$$

Para facilitar nosso estudo, vamos utilizar as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i \\ x(t + \Delta t) &= x_{i+1} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Assim, o mapa linear será dado por:

$$x_{i+1} = x_i + \epsilon_{i+1}[\Delta t] \quad (6.47)$$

Podemos ver claramente que supor  $\gamma = 0$  para o mapa linear (6.37), levamos ao caso em que  $\lambda = 1$  e, desta maneira, a hipótese de infinitesimalidade é assegurada e o teorema do limite central clássico no estudo de convergência de soma de variáveis aleatórias é válido.

Vale a pena ressaltar que definimos o nosso mapa com ruído em incrementos de tempo  $\Delta t$ . Definindo  $t_0$  como sendo o tempo inicial, depois de iterarmos o mapa  $n$  vezes, o tempo  $t$  será dado por:

$$t = t_0 + n\Delta t \quad (6.48)$$

Desta forma:

$$n\Delta t = t - t_0 \leftrightarrow \Delta t = \frac{t - t_0}{n}. \quad (6.49)$$

Com isso, chegamos à conclusão de que se  $\Delta t \rightarrow 0$ , então  $n \rightarrow \infty$ . Este resultado será muito útil logo à frente.

Se iterarmos o mapa (6.47), obteremos o seguinte:

$$x_n = x_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \quad (6.50)$$

Aqui temos que  $x_n$  representa o somatório do ruído  $\epsilon$  em  $n$  tempos diferentes e mais a variável  $x_0$ . É importante deixar claro que o estudo de convergência concentra-se apenas na análise do somatório do ruído. Por isso, definiremos a função  $\omega_0$  associada à variável  $x_0$  e a função  $\omega_{\Delta t}$  associada aos ruídos  $\epsilon_{i+1}$ . É somente a forma específica da função  $\omega_{\Delta t}$  que vai determinar a convergência ou não da distribuição de  $\theta$  para a distribuição gaussiana.

A função  $\Omega_n(z)$  associada à variável  $x_n$  será dada por:

$$\Omega_n(z) = \frac{m_0^2}{m_0^2 + m^2 n} \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z \right) + \frac{m^2 n}{m_0^2 + m^2 n} \omega_{\Delta t} \left( \frac{m}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z \right) \quad (6.51)$$

onde relembremos o fato de que  $M_n^2 = m_0^2 + m^2 n$  para o caso aqui estudado.

É importante ainda ressaltar que a função característica  $\psi_n(z)$  associada à variável  $x_n$  relaciona-se com a função característica  $\psi_{\bar{n}}(z)$  da variável reduzida  $\bar{x}_n$  da seguinte forma:

$$\psi_n(z) = \psi_{\bar{n}}(M_n z) = e^{-\frac{(M_n z)^2}{2} [1 + \Omega_n(M_n z)]} \quad (6.52)$$

Tanto para processos contínuos como para descontínuos, temos  $m^2 = \langle \epsilon^2 \rangle_{\Delta t} = c \Delta t$ , onde  $c$  é constante. Utilizando este fato e o resultado (6.49), obtemos:

$$M_n = M(t; \Delta t) = \sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)} \quad (6.53)$$

Aplicando (6.53) na equação (6.51), obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega(t, z; \Delta t) &= \frac{m_0^2}{m_0^2 + c(t - t_0)} \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) \\ &+ \frac{c(t - t_0)}{m_0^2 + c(t - t_0)} \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sqrt{c} \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) \end{aligned} \quad (6.54)$$

### 6.5.1 Processos Contínuos

Vamos primeiramente fazer uma análise sobre processos contínuos. Trabalhamos sempre com incrementos de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequenos, de forma que  $\Delta t \rightarrow 0$ . Com este limite, a variável  $M^2(t; \Delta t)$  apresenta a seguinte característica:

$$M^2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M^2(t; \Delta t) = m_0^2 + c(t - t_0) \quad (6.55)$$

Devemos aplicar este limite, no qual  $\Delta t \rightarrow 0$ , à função  $\Omega(t, z; \Delta t)$ :

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Omega(t, z; \Delta t) = \frac{m_0^2}{m_0^2 + c(t - t_0)} \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + m^2 n}} z \right) \\ &+ \frac{c(t - t_0)}{m_0^2 + c(t - t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sqrt{c} \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Toda a discussão concentra-se no estudo do limite na equação (6.56), pois quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Utilizamos então a função majorante  $h(z)$  para este caso, obtendo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sqrt{c} \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) \right| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} h \left( \frac{\sqrt{c} \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) = 0 \quad (6.57)$$

Por fim,  $\Omega(t, z)$  é dado por:

$$\Omega(t, z) = \frac{m_0^2}{m_0^2 + c(t - t_0)} \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + c(t - t_0)}} z \right) \quad (6.58)$$

O resultado da equação (6.57) é muito importante. Ele nos diz que para os tipos de processos contínuos aqui apresentados, as funções de Lévy relacionadas a variável  $\theta$  são sempre nulas. Como consequência, a equação de difusão relacionada a estes processos contínuos é sempre uma equação de Fokker-Planck.

### 6.5.2 Processos Descontínuos

Para processos descontínuos, de acordo com (6.42), temos que  $m^2 = \langle \epsilon^2 \rangle_{\Delta t} = c\Delta t$ , onde  $c = a\sigma^2$ . Aplicando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos para  $M^2(t; \Delta t)$ :

$$M^2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M^2(t; \Delta t) = m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0) \quad (6.59)$$

Aplicando este mesmo limite à função  $\Omega(t, z; \Delta t)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Omega(t, z; \Delta t) \\ &= \frac{m_0^2}{m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0)} \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0)}} z \right) \\ &\quad + \frac{a\sigma^2(t - t_0)}{m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sigma\sqrt{a\Delta t}}{\sqrt{m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0)}} z \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Utilizando a equação (6.44), vemos que a função  $\omega_{\Delta t}$  pode ser escrita como:

$$\omega_{\Delta t}(A\sqrt{a\Delta t}z) = -\frac{2 \ln \left\{ (1 - a\Delta t) + a\Delta t \exp \left\{ -\frac{A^2}{2} z^2 [1 + w(Az)] \right\} \right\}}{A^2 a \Delta t z^2} - 1 \quad (6.61)$$

onde:

$$A = \frac{\sigma}{\sqrt{m_0^2 + a\sigma^2(t - t_0)}} \quad (6.62)$$

Aplicando então o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  à equação (6.61), obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(A\sqrt{a\Delta t}z) = \frac{2 \left\{ (1 - \exp \left\{ -\frac{A^2}{2} z^2 [1 + w(Az)] \right\} \right\}}{A^2 z^2} - 1 \quad (6.63)$$

Assim, a solução de  $\Omega(t, z)$  para processos descontínuos é dada por:

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= \frac{m_0^2}{\sigma^2} A^2(t) \omega_0 \left( \frac{m_0}{\sigma} A(t) z \right) \\ &\quad + \frac{2 \left\{ (1 - \exp \left\{ -\frac{A^2(t)}{2} z^2 [1 + w(A(t)z)] \right\} \right\}}{A^2(t) z^2} - 1 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Analisando agora o limite no qual  $t \rightarrow \infty$ , temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{a(t-t_0)}} = 0 \quad (6.65)$$

O resultado do limite (6.65) tem como consequência:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t, z) = 0 \quad (6.66)$$

O limite 6.66 nos mostra que para estes processos descontínuos a convergência da soma das variáveis aleatórias tende para distribuição gaussiana somente no comportamento assintótico do sistema.

## 6.6 Caso Geral

Aqui, vamos considerar o caso mais geral do mapa linear (6.37), no qual  $\gamma \neq 0$ . Desta forma:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -(\gamma \Delta t)x(t) + \epsilon[\Delta t] \quad (6.67)$$

Para facilitar, vamos mais uma vez utilizar as identificações:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i \\ x(t + \Delta t) &= x_{i+1} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Com isso, teremos o mapa:

$$x_{i+1} = \lambda x_i + \epsilon_{i+1}[\Delta t] \quad (6.69)$$

onde:

$$\lambda = 1 - \gamma \Delta t. \quad (6.70)$$

Podemos ver claramente que supor  $\gamma \neq 0$  para o mapa linear (6.37), levamos ao caso em que  $\lambda \neq 1$ . Desta vez, a hipótese de infinitesimalidade não é

assegurada e o teorema do limite central clássico não é mais satisfeito. Neste caso, poderemos recorrer somente ao teorema limite na versão de Paul Lévy para analisar convergência em distribuições.

Podemos então aplicar as formula obtidas para  $\lambda \neq 1$  na seção (6.3). O valor de  $x_n$  baseado na equação (6.21), é dado por:

$$x_n = \lambda^n x_0 + \lambda^{n-1} \epsilon_1 + \lambda^{n-2} \epsilon_2 + \dots + \lambda \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \quad (6.71)$$

É importante ratificar que o estudo de convergência concentra-se apenas na análise do somatório do ruído. Por isso, definiremos a função  $\omega_0$  associada a variável  $x_0$  e a função  $\omega_{\Delta t}$  associada aos ruídos  $\epsilon_{i+1}$ . É somente a forma específica da função  $\omega_{\Delta t}$  que vai determinar a convergência ou não de  $\theta$  para a distribuição gaussiana.

Como já vimos,  $\Omega_n(z)$  é igual a:

$$\begin{aligned} \Omega_n(z) &= \frac{\lambda^{2n}}{M_n^2} m_0^2 \omega_0 \left( \frac{\lambda^n}{M_n} m_0 z \right) + \frac{\lambda^{2(n-1)}}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left( \frac{\lambda^{n-1}}{M_n} m z \right) \\ &+ \frac{\lambda^{2(n-2)}}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left( \frac{\lambda^{n-2}}{M_n} m z \right) + \dots \\ &+ \frac{\lambda^2}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left( \frac{\lambda}{M_n} m z \right) + \frac{m^2}{M_n^2} \omega_{\Delta t} \left( \frac{m}{M_n} z \right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

E o valor de  $M_n^2$  é dado por:

$$M_n^2 = \lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \frac{1 - \lambda^{2n}}{1 - \lambda^2} \quad (6.73)$$

Mais uma vez, é importante ainda ressaltar a relação entre a função característica  $\psi_n(z)$  associada a variável  $x_n$  com a função característica  $\psi_{\bar{n}}(z)$  da variável reduzida  $\bar{x}_n$ :

$$\psi_n(z) = \psi_{\bar{n}}(M_n z) = e^{-\frac{(M_n z)^2}{2} [1 + \Omega_n(M_n z)]} \quad (6.74)$$

Aqui, relembremos que tanto para processos contínuos e descontínuos temos  $m^2 = \langle \epsilon^2 \rangle_{\Delta t} = c \Delta t$ . Lembramos, mais uma vez, que o incremento

de tempo  $\Delta t \rightarrow 0$  e desta forma  $\gamma\Delta t \approx 0$ . Desta forma, podemos inferir a seguinte aproximação:

$$\lambda = 1 - \gamma\Delta t \approx e^{-\gamma\Delta t} \quad (6.75)$$

Substituindo a aproximação dada em (6.75) em (6.73), obtemos:

$$M^2(t; \Delta t) = e^{-2\gamma n\Delta t} m_0^2 + c\Delta t \frac{1 - e^{-2\gamma n\Delta t}}{(1 + \lambda)(1 - \lambda)} \quad (6.76)$$

Como já explicitado na seção anterior,  $n\Delta t = t - t_0$ . Utilizando este fato, obtemos:

$$M^2(t; \Delta t) = e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + c\Delta t \frac{1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}}{(2 - \gamma\Delta t)(\gamma\Delta t)} \quad (6.77)$$

Aplicando (6.77) na equação (6.72), obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_n(z) &= \frac{e^{-2\gamma n\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} m_0^2 \omega_0 \left( \frac{e^{-\gamma n\Delta t}}{M(t; \Delta t)} m_0 z \right) \\ &\quad + c\Delta t \sum_{i=1}^n \frac{e^{-2\gamma(n-i)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sqrt{c\Delta t} e^{-\gamma(n-i)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} z \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Aplicando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$M^2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M^2(t; \Delta t) = e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \frac{c}{2\gamma} [1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}] \quad (6.79)$$

Vamos agora analisar os resultados obtidos para cada tipo de processo (contínuo e descontínuo).

### 6.6.1 Processos Contínuos

Vamos primeiramente fazer uma análise do processo de convergência de processos contínuos. Para facilitar, escrevemos:

$$\Omega_n(z) = \frac{e^{-2\gamma n\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} m_0^2 \omega_0 \left( \frac{e^{-\gamma n\Delta t}}{M(t; \Delta t)} m_0 z \right) + W \quad (6.80)$$

Vamos então utilizar a função  $h(z)$  que nos fornece um limitante superior para o valor da função  $\omega_{\Delta t}$ :

$$\omega_{\Delta t} \left( \frac{e^{-\gamma\Delta t} \sqrt{c}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \leq h \left( \frac{\sqrt{c}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right). \quad (6.81)$$

A validade da relação (6.81) implica a seguinte relação para a variável  $W$ :

$$|W| \leq c\Delta t \left( \frac{1 + e^{-2\gamma\Delta t} + \dots + e^{-2\gamma(n-1)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} \right) h \left( \frac{\sqrt{c}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \quad (6.82)$$

E, reescrevendo (6.82), obtemos:

$$|W| \leq c\Delta t \frac{1 + e^{-2\gamma\Delta t} + \dots + e^{-2\gamma(n-1)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} h \left( \frac{\sqrt{c}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \quad (6.83)$$

Podemos, por fim, aplicar o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |W| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \leq c \frac{1 + e^{-2\gamma\Delta t} + \dots + e^{-2\gamma(n-1)\Delta t}}{M^2(t)} \Delta t h \left( \frac{\sqrt{c}}{M(t)} \sqrt{\Delta t} z \right) = 0 \quad (6.84)$$

O resultado da equação (6.84) nos diz que para estes tipos de processos contínuos, ou seja, que pertencem à família de distribuição normal, tanto no caso geral ( $\gamma \neq 0$ ) como no caso simples, as funções de Lévy relacionadas ao ruído  $\epsilon$  são sempre nulas para  $\Delta t \rightarrow 0$ . Desta forma, a equação de difusão relacionada a estes processos contínuos é sempre uma equação de Fokker-Planck.

Utilizando todos os resultados obtidos, encontramos que:

$$\Omega(t, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Omega(t, z; \Delta t) = \frac{e^{-2\gamma(t-t_0)}}{M^2(t)} m_0^2 \omega_0 \left( \frac{e^{-\gamma(t-t_0)}}{M(t)} m_0 z \right) \quad (6.85)$$

### 6.6.2 Processos Descontínuos

Aqui, vamos supor que as funções  $\omega_0(z)$ ,  $\omega_{\Delta t}(z)$  e  $\Omega(t, z; \Delta t)$  são analíticas e, desta forma, podemos expandi-las em séries de Taylor da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\omega_0(z) &= \sum_p \omega_{0p} z^p \\ \omega_{\Delta t}(z) &= \sum_p \omega_p(\Delta t) z^p \\ \Omega(t, z; \Delta t) &= \sum_p \Omega_p(t; \Delta t) z^p\end{aligned}\tag{6.86}$$

Vamos relembrar as fórmulas para o coeficiente  $\Omega_{np}$  obtidas na seção de mapas lineares:

$$\begin{aligned}\Omega_{np} &= \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} \lambda^{(2+p)n}}{M_n^{2+p}} + \frac{m^{2+p} \omega_p(\Delta t)}{M_n^{2+p}} [1 + \lambda^{2+p} + \dots + \lambda^{(2+p)(n-1)}] \\ &= \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} \lambda^{(2+p)n}}{M_n^{2+p}} + \frac{m^{2+p} \omega_p(\Delta t)}{M_n^{2+p}} \frac{1 - \lambda^{(2+p)n}}{1 - (\lambda^{2+p})}\end{aligned}\tag{6.87}$$

Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos fazer as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}\lambda &= e^{-\gamma \Delta t} \\ \lambda^{2+p} &= e^{-(2+p)\gamma \Delta t} \\ M_n &= M(t) \\ \Omega_n &= \Omega(t, z; \Delta t) \\ 1 - e^{-(2+p)\gamma \Delta t} &\approx (2+p)\gamma \Delta t\end{aligned}\tag{6.88}$$

Aplicando estas aproximações, obtemos:

$$\begin{aligned}\Omega_p(t; \Delta t) &= \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} + \\ &+ \frac{(a\Delta t)^{\frac{2+p}{2}} \sigma^{2+p} \omega_p(\Delta t)}{M^{2+p}(t)} \frac{1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{(2+p)\gamma \Delta t}\end{aligned}\tag{6.89}$$

onde:

$$M^2(t) = e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \frac{a\sigma^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})\tag{6.90}$$

Para um processo descontínuo, sabemos que:

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{2 \ln \left\{ (1 - a\Delta t) + a\Delta t \exp \left\{ -\frac{1}{2a\Delta t} z^2 \left[ 1 + w \left( \frac{z}{\sqrt{a\Delta t}} \right) \right] \right\} \right\} + z^2}{z^2} \quad (6.91)$$

Para ruídos analíticos,  $w(z)$  pode ser expandido em séries de potência dadas por:

$$w(z) = \sum_p w_p z^p \quad (6.92)$$

onde:

$$w_p = \frac{1}{p!} \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} \quad (6.93)$$

De maneira análoga, temos séries de potência para  $\omega_{\Delta t}(z)$ :

$$\omega_{\Delta t}(z) = \sum_p \omega_p(\Delta t) z^p \quad (6.94)$$

onde:

$$\omega_p(\Delta t) = \frac{1}{p!} \left. \frac{d\omega_{\Delta t}(z)}{dz} \right|_{z=0} \quad (6.95)$$

Todos os coeficientes  $\omega_p(\Delta t)$  possuem a seguinte forma:

$$\omega_p(\Delta t) = \frac{d_p + e_p(a\Delta t)}{(a\Delta t)^{\frac{p}{2}}} \quad (6.96)$$

onde  $e_p(a\Delta t)$  possui o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_p(a\Delta t) = 0 \quad (6.97)$$

### Limite para $\Omega(t, z; \Delta t)$

Vamos agora analisar o efeitos de  $\Delta t \rightarrow 0$  em  $\Omega(t, z; \Delta t)$ . Primeiramente quando este limite é satisfeito, podemos inferir a seguinte aproximação:

$$\omega_p(\Delta t) \approx d_p \frac{1}{(a\Delta t)^{\frac{p}{2}}} \quad (6.98)$$

Desta forma, substituindo (6.98) em (6.89), obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_p(t, \Delta t) &= \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} \\ &+ \frac{(a\Delta t)^{\frac{2+p}{2}} \sigma^{2+p} \left( d_p \frac{1}{(a\Delta t)^{\frac{p}{2}}} \right)}{M^{2+p}(t)} \frac{1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{(2+p)\gamma\Delta t} \end{aligned} \quad (6.99)$$

Aplicando por fim o limite que queremos calcular, obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_p(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Omega(t, z; \Delta t) \\ \Omega_p(t) &= \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} + \frac{d_p}{(2+p)} \frac{a}{\gamma} \sigma^{2+p} \left( \frac{1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} \right) \end{aligned} \quad (6.100)$$

### Formula assintótica para $t \rightarrow \infty$

Vamos analisar o que acontece para tempos muito longos, ou seja,  $t \rightarrow \infty$ .

Aplicando este limite a função  $\Omega(z, t)$ , obtemos:

$$\Omega_\infty(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t, z) = \sum_p \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_p(t) z^p \quad (6.101)$$

A variável  $M_n$  para tempos muito longos é dada por:

$$M_\infty^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} M^2(t) = \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma} \sigma^2 \quad (6.102)$$

Ou seja:

$$M_\infty = \left( \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \quad (6.103)$$

Aplicando (6.103) na equação (6.100) e aplicando o limite para tempos muito longos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_p(t) = \frac{2^{\frac{2+p}{2}} d_p}{(2+p)} \left( \frac{\gamma}{a} \right)^{\frac{p}{2}} = D_p \left( \frac{\gamma}{a} \right)^{\frac{p}{2}} \quad (6.104)$$

onde:

$$D_p = \frac{2^{\frac{2+p}{2}} d_p}{(2+p)} \quad (6.105)$$

Por fim, encontramos que:

$$M_\infty^2 = \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma} \sigma^2$$

$$\Omega_\infty(z) = \sum_p D_p \left( \frac{\gamma}{a} \right)^{\frac{p}{2}} z^p \quad (6.106)$$

Note a importância do resultado acima. Desta vez, a função  $\Omega$  não se anula nem mesmo quando o tempo  $t \rightarrow \infty$ . Assim, a equação de difusão que modela tal processo descontínuo é descrita através de uma expansão de Kramers-Moyal.

### 6.6.3 Solução integral para ruídos descontínuos

Nesta seção, vamos obter a função característica associada a um processo descontínuo geral, sem considerar as expansões em série de Taylor dadas pela equação (6.86).

Na seção (6.6.2), obtivemos a seguinte função característica associada à um processo descontínuo geral para um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{[M(t, \Delta t)z]^2}{2}} [1 + \Omega(t, M(t, \Delta t)z)] \quad (6.107)$$

O valor de  $\Omega(t, z, \Delta t)$  é dado pela relação:

$$\Omega(t, z, \Delta t) = \frac{e^{-2\gamma(t-t_0)}}{M^2(t, \Delta t)} m_0^2 \omega_0 \left( \frac{e^{-\gamma(t-t_0)}}{M^2(t, \Delta t)} m_0 z \right) + W(t, z, \Delta t) \quad (6.108)$$

onde:

$$W(t, z, \Delta t) = a\sigma^2 \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{e^{-2\gamma(n-i)\Delta t}}{M^2(t, \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sigma e^{-\gamma(n-i)\Delta t}}{M^2(t, \Delta t)} \sqrt{a\Delta t} z \right) \quad (6.109)$$

O valor  $j\Delta t = t_j - t_0$ , para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Esta relação pode ser claramente visualizada na figura 6.1. Desta forma, podemos escrever  $W(t, z, \Delta t)$  da seguinte forma:

$$W(t, z, \Delta t) = a\sigma^2 \Delta t \sum_{j=1}^n \frac{e^{-2\gamma(t_j-t_0)}}{M^2(t, \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left( \frac{\sigma e^{-\gamma(t_j-t_0)}}{M^2(t, \Delta t)} \sqrt{a\Delta t} z \right) \quad (6.110)$$

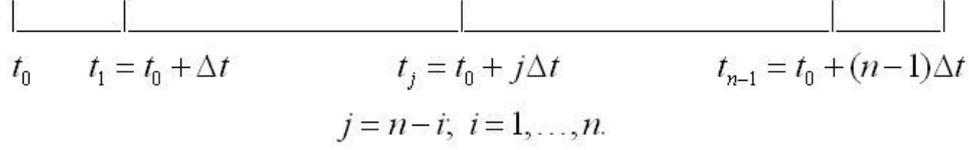


Figura 6.1: Ilustração para entendimento do significado da variável  $j\Delta t$

De acordo com o obtido na seção em (6.91), a função  $\omega_{\Delta t}(z)$  é dada por:

$$\omega_{\Delta t}(z) = -\frac{2 \ln \left\{ (1 - a\Delta t) + a\Delta t \exp \left\{ -\frac{1}{2a\Delta t} z^2 \left[ 1 + w \left( \frac{z}{\sqrt{a\Delta t}} \right) \right] \right\} \right\} + z^2}{z^2} \quad (6.111)$$

Lembramos ainda da validade da seguinte relação,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\Delta t}(A\sqrt{a\Delta t}z) = \omega(Az) = \frac{2 \left\{ 1 - e^{-\frac{A^2}{2} z^2 [1 + \omega(Az)]} \right\} - A^2 z^2}{A^2 z^2} \quad (6.112)$$

Então, obtemos:

$$\begin{aligned} W(t, z) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} W(t, z, \Delta t) \\ &= a\sigma^2 \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^n (t_{j+1} - t_j) \frac{e^{-2\gamma(t_j - t_0)}}{M^2(t)} \omega \left( \frac{\sigma e^{-\gamma(t_j - t_0)}}{M^2(t)} z \right) \end{aligned} \quad (6.113)$$

Como  $n \rightarrow \infty$  então podemos substituir o somatório em (6.113) por uma integral, da seguinte forma:

$$W(t, z) = \frac{a\sigma^2}{M^2(t)} \int_{t_0}^t e^{-2\gamma(t' - t_0)} \omega \left( \frac{\sigma e^{-\gamma(t' - t_0)}}{M^2(t)} z \right) dt' \quad (6.114)$$

### Processos Gaussianos Descontínuos

Para um processo gaussiano descontínuo, temos que  $w(z) = 0$ , então:

$$\omega(A(t')z) = \frac{2 \left\{ 1 - e^{-\frac{A^2(t')}{2} z^2} \right\} - A^2(t') z^2}{A^2(t') z^2} \quad (6.115)$$

onde:

$$A(t') = \frac{\sigma e^{-\gamma(t'-t_0)}}{M^2(t)} \quad (6.116)$$

Então, a integral que define  $W(t, z)$  pode ser calculada como:

$$W(t, z) = -\frac{\sigma^2}{2M^2(t)} + \frac{1}{\delta z^2} \left[ g + \ln \left( \frac{\sigma^2 z^2}{2M^2(t)} \right) + \int_1^\infty \frac{e^{-t' \frac{\sigma^2 z^2}{2M^2(t)}}}{t'} dt' \right] \quad (6.117)$$

onde:

$$M^2(t) = e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma} \sigma^2 [1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}], \quad (6.118)$$

e  $g$  é a constante de Euler.

Para  $t \rightarrow \infty$ , temos que:

$$W_\infty(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(t, z) = -1 + \frac{1}{\delta z^2} \left[ g + \ln(\delta z^2) + \int_1^\infty \frac{e^{-t' \delta z^2}}{t'} dt' \right] \quad (6.119)$$

A função característica que corresponde a este  $W_\infty(z)$  é:

$$\bar{\psi}_\infty(z) = e^{-\frac{z^2}{2}[1+W_\infty(z)]} = K \frac{e^{\frac{1}{2\delta} \int_1^\infty \frac{\exp(-t' \delta z^2)}{t'} dt'}}{z^{\frac{1}{\delta}}} \quad (6.120)$$

onde:

$$K = e^{-\frac{g}{2\delta}} \delta^{-\frac{1}{2\delta}} \quad (6.121)$$

## 6.7 Análise das soluções

As formulas para funções características obtidas para processos descontínuos são translúcidas. Vamos relembrar os resultados obtidos para processos descontínuos:

1. Função característica para a variável estocástica  $x_n$ :

$$\psi(z, t) = e^{-\frac{[M(t)z]^2}{2}[1+\Omega(t, M(t)z)]} \quad (6.122)$$

2. Função  $\Omega(t, z)$ :

$$\Omega(t, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_p \Omega_p(t; \Delta t) z^p \quad (6.123)$$

onde:

$$\Omega_p(t) = \frac{m_0^{2+p} \omega_{0p} e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} + \frac{d_p}{(2+p)} \frac{a}{\gamma} \sigma^{2+p} \left( \frac{1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{M^{2+p}(t)} \right) \quad (6.124)$$

3. Variância  $M^2(t)$ :

$$M^2(t) = e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \frac{a\sigma^2}{2\gamma} [1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}] \quad (6.125)$$

Qual é a universalidade aqui? Qual é a independência das propriedades de um ruído? Certamente, existem três fatos que caracterizam um ruído descontínuo: 1) o parâmetro  $a$ ; 2) o parâmetro  $\gamma$ ; e 3) a densidade de probabilidade  $g(\epsilon)$ . A natureza específica da densidade  $g(\epsilon)$  aparece nas fórmulas acima através dos valores de  $\sigma$  e  $d_p$ .

Vamos analisar com mais cuidado este conceito de universalidade. A primeira propriedade geral, satisfeita para qualquer processo descontínuo, é o fato que  $M^2(t)$  satura para um valor finito quando  $t \rightarrow \infty$ . Em sistemas físicos, associamos este com o conceito de energia térmica, assumindo a temperatura do sistema como igual a  $T$ , através da seguinte relação:

$$M_\infty^2 = \frac{1}{2} kT \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{a}{\gamma} \sigma^2 = \frac{1}{2} kT \quad (6.126)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann.

Aqui, é importante enfatizar que podemos associar o comportamento assintótico de um dado processo estocástico com o equilíbrio do sistema. Para avaliar o significado de temperatura em termos de parâmetros estocásticos, devemos estar cientes que a relação (6.126) não fixa qualquer valor específico

para os parâmetros  $a$ ,  $\gamma$  e  $\sigma$ . Certamente, uma dada temperatura fixa apenas implica que parâmetros relacionados não podem ser escolhidos livremente, devendo satisfazer a relação (6.126).

Seguindo com nossa análise assintótica (equilíbrio térmico), vamos definir um parâmetro  $\delta = \gamma/a$ . Assim, a formula assintótica para  $\Omega(t, z)$  torna-se:

$$\Omega_\infty(z) = \sum_p D_p \delta^{\frac{p}{2}} z^p \quad (6.127)$$

onde:

$$D_p = \frac{2^{\frac{2+p}{2}} d_p}{(2+p)} \quad (6.128)$$

Da equação (6.127), vemos claramente que se  $\delta \rightarrow 0$  então  $\Omega_\infty(z) = 0$ . Desta forma, a função característica  $\psi_\infty(z)$  será escrita aproximadamente como:

$$\psi_\infty(z) \approx e^{-\frac{(M_\infty z)^2}{2}} \Leftrightarrow f_\infty(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi M_\infty}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{M_\infty^2}} \quad (6.129)$$

onde  $f_\infty(x)$  é a densidade de probabilidade assintótica de  $x$ .

Nas relações acima temos outra propriedade universal: para qualquer processo estocástico tal que  $\delta$  é muito pequeno, a densidade de probabilidade assintótica (densidade de probabilidade de equilíbrio) da variável  $x$  será próxima a gaussiana, não importando os detalhes do ruído. Novamente lembramos que detalhes do ruído são as propriedades que dependem da densidade  $g(\epsilon)$  (matematicamente estes detalhes aparecem através das constantes  $d_p$  na equação (6.127)).

Qual o significado do parâmetro  $\delta$ ? Vamos relembrar as expressões básicas que definem um processo estocástico descontínuo

$$x(t + \Delta t) = (1 - \gamma\Delta t)x(t) + \epsilon[\Delta t] \quad (6.130)$$

onde a densidade de probabilidade do ruído  $\epsilon[\Delta t]$  é dada por:

$$f(\epsilon[\Delta t]) = (1 - a\Delta t)\delta(\epsilon) + (a\Delta t)g(\epsilon) \quad (6.131)$$

Para  $\Delta t \ll 1$ , podemos escrever as aproximações

$$\begin{aligned}(1 - \gamma\Delta t) &\approx e^{-\gamma\Delta t} \\ (1 - a\Delta t) &\approx e^{-a\Delta t}\end{aligned}\tag{6.132}$$

e, desta forma, podemos interpretar  $\gamma$  e  $a$  como inversos de tempos característicos. Então, definimos o tempo de dissipação característico  $t_\gamma$ :

$$t_\gamma = \frac{1}{\gamma},\tag{6.133}$$

o tempo de flutuação característico  $t_a$ :

$$t_a = \frac{1}{a},\tag{6.134}$$

e, por fim,  $\delta$  será redefinido como:

$$\delta = \frac{t_a}{t_\gamma},\tag{6.135}$$

Então, a situação onde  $\gamma$  é muito pequeno implica que  $t_\gamma \gg t_a$ , ou seja, o tempo característico de dissipação é muito maior que o tempo característico de flutuação. Em uma linguagem física: o tempo característico do sistema de dissipação da energia a ele acrescido, essencialmente feito por forças estocásticas que agem no sistema, é muito maior que o tempo característico desta força aleatória. Neste caso a distribuição gaussiana pode ser uma boa aproximação para descrever o estado de equilíbrio.

Para valores pequenos de  $\delta$ , devemos esperar pequenos desvios da distribuição do sistema em relação à distribuição gaussiana, entretanto tais desvios podem ser tão diminutos que podem ser imperceptíveis a qualquer verificação experimental. Para processos em que o parâmetro  $\delta$  não é tão pequeno, estes desvios gaussianos podem ser então medidos.

Até o presente momento, analisamos apenas propriedades universais do estado assintótico do sistema, ou em outras palavras, suas propriedades em

um estado de equilíbrio térmico. O que dizer sobre o estado transiente do processo? À primeira vista parece que apenas a análise dos tempos característicos não é suficiente, porque o parâmetro  $\sigma$  também aparece nas fórmulas que descrevem o tempo de evolução transiente do sistema. Entretanto, mostraremos que o mesmo tipo de raciocínio feito para o estado de equilíbrio pode ser utilizado para o regime transiente. Primeiramente, substituímos o valor de  $\sigma$  nas fórmulas que obtivemos, usando a relação:

$$\frac{a}{\gamma}\sigma^2 = kT \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{kT\delta}. \quad (6.136)$$

Então, as expressões para  $M^2(t)$  e  $\Omega_p(t)$  tornam-se:

$$\begin{aligned} M^2(t) &= e^{-2\gamma(t-t_0)}m_0^2 + \frac{1}{2}kT [1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}] \\ \Omega_p(t) &= \frac{m_0^{2+p}\omega_{0p}e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{\left[e^{-2\gamma(t-t_0)}m_0^2 + \frac{1}{2}kT(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})\right]^{\frac{2+p}{2}}} \\ &\quad + \frac{d_p}{(2+p)}\delta^{\frac{p}{2}} \frac{1 - e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{\left[e^{-2\gamma(t-t_0)}r + (1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})\right]^{\frac{2+p}{2}}} \end{aligned} \quad (6.137)$$

onde:

$$r = \frac{m_0^2}{\frac{1}{2}kT} \quad (6.138)$$

Desta forma, podemos ver que o comportamento transiente de  $M^2(t)$  é universal para qualquer processo descontínuo. Em outras palavras, o comportamento de  $\Omega_p(t)$  torna-se mais e mais independente dos detalhes do ruído se e somente se  $\delta \ll 1$ . Neste caso,  $\Omega_p(t)$  pode ser escrito aproximadamente como:

$$\Omega_p(t) \approx \frac{m_0^{2+p}\omega_{0p}e^{-(2+p)\gamma(t-t_0)}}{\left[e^{-2\gamma(t-t_0)}m_0^2 + \frac{1}{2}kT(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})\right]^{\frac{2+p}{2}}} \quad (6.139)$$

Esta aproximação junto com a evolução temporal para  $M^2(t)$  mostra que esta solução universal é exatamente a mesma obtida para um ruído contínuo (veja as seções anteriores), no qual a solução possui a seguinte equação de

Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}xf(x, t) + \frac{a\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, t). \quad (6.140)$$

É importante frisar que a equação de Fokker-Planck tem uma característica universal no sentido de descrever um processo no qual os detalhes do ruído não importam. Certamente, como mostrado acima, existe uma condição específica para a validade de uma equação de Fokker-Planck para descrever o equilíbrio e o regime transiente: esta condição é que  $\delta \ll 1$ .

Finalmente, concluímos que as equações de difusão para qualquer processo descontínuo, não importa quão grandes ou pequenos sejam os parâmetros  $\delta$  e  $T$ , devem ser descritos por uma expansão de Kramers-Moyal. Esta equação é escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) = \gamma\frac{\partial}{\partial x}xf(x, t) + \frac{a\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, t) + a\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{n!}D_n\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x, t) \quad (6.141)$$

A equação acima é correta apenas para ruídos descontínuos analíticos, que são ruídos para os quais todos os momentos estatísticos são finitos. Se não for o caso, a equação acima deve ser substituída por uma expansão de Kramers-Moyal fracionária. Também, neste caso, todos os raciocínios baseados nos parâmetros  $\delta$  e  $T$  permanecem válidos. Certamente, o aparecimento de derivadas fracionárias na expansão de Kramers-Moyal é apenas consequência de um detalhe associado ao ruído: ele não é analítico.

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

Ao longo deste trabalho fizemos uma análise que nos possibilitou uma melhor compreensão de equações difusivas para processos estocásticos, assim como das técnicas necessárias para sua aplicação.

Como primeiro grande resultado, estabelecemos as condições necessárias para a determinação do tipo específico de equação difusiva que descreverá o processo estocástico em análise. Isto está ligado à forma como a distribuição de probabilidade de uma variável estocástica de retorno  $\theta$  converge para a função delta de Dirac quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tende a zero. A função de Lévy  $\omega$ , analisada no limite em que  $\Delta t \rightarrow 0$ , mostrou-se como ferramenta indispensável para esta análise, pois a sua forma específica determina o tipo de distribuição específica que está associada a variável  $\theta$ . Os resultados obtidos mostram que para  $\omega = 0$ , teremos uma distribuição gaussiana que converge para uma delta de Dirac quando  $\Delta t \rightarrow 0$  e a equação de Fokker-Planck será a adequada na descrição de  $\theta$ . Em contrapartida, para  $\omega \neq 0$ , temos uma distribuição não-gaussiana à convergir para a delta de Dirac e a expansão de Kramers-Moyal é o modelo descritivo a ser adotado para  $\theta$ .

Em seguida, demonstramos quais são as propriedades de  $\theta$  que determinam a forma específica que a função  $\omega$  terá. Utilizando o conceito de

continuidade em distribuição, definimos dois tipos de variáveis: contínuas e descontínuas. Vimos que a auto-similaridade assintótica é condição suficiente para obtenção de uma equação de Fokker-Planck e condição necessária na obtenção de uma expansão de Kramers-Moyal. As variáveis contínuas assintoticamente auto-similares são descritas por uma função de Lévy nula. Como as variáveis descontínuas geram uma quebra da auto-similaridade elas são descritas por uma função  $\omega \neq 0$ .

Mostramos ainda que uma equação de Langevin pode ser descrita através da utilização de mapas com ruído aleatório. A grande vantagem deste método reside no fato de que este modo de tratar o problema elimina problemas com integrações estocásticas. Além disso, podemos gerar soluções numéricas através destes mapas que podem ser utilizados na resolução de processos estocásticos onde a solução analítica não é possível, o que de fato ocorre na maioria dos casos.

As propriedades do ruído são importantes na determinação das características de um movimento Browniano descrito por mapas lineares com ruído. No caso do movimento Browniano clássico, governado por um ruído gaussiano contínuo, os resultados teóricos e computacionais confirmaram que as distribuições associadas a tal sistema são descritas por equações de Fokker-Planck. No estudo do movimento Browniano, governado por um ruído gaussiano descontínuo, demonstramos que a equação difusiva relacionada a este sistema é descrita por uma expansão de Kramers-Moyal.

Como uma última análise, estudamos processos de convergência em distribuição de soma de variáveis aleatórias, através do estudo de teoremas limite. Desenvolvemos o famoso teorema do limite central clássico, mas um enfoque maior foi dado ao teorema limite de Paul Lévy. Mais uma vez, utilizamos a função de Lévy no estudo de convergência de soma de variáveis

aleatórias, obtidas a partir de mapas lineares com ruído aleatório. Os resultados obtidos vieram mais uma vez ratificar a validade de todos os resultados acima descritos: processos contínuos, que pertencem a uma família de distribuição normal, possuem uma distribuição gaussiana associada a sua variável de retorno e serão descritos por uma Equação de Fokker-Planck; processos descontínuos sempre serão descritos por Expansões de Kramers-Moyal com uma distribuição não-gaussiana associada.

A modelagem apresentada neste trabalho serve de base para o tratamento de problemas que vão além da análise do movimento Browniano. Problemas relacionados a equações de difusão surgem também em economia: em um pioneiro trabalho, o matemático Bachelier mostrou que a probabilidade de ativos financeiros pode ser determinada em termos da equação de Chapman-Kolmogorov e de processos de Wiener. Tendo derivado uma equação de difusão para processos estocásticos, ele mostrou que probabilidade pode difundir de maneira semelhante ao calor.

Durante as duas últimas décadas [23], muitos estudos em teoria de especulações e flutuações no mercado financeiro tem sido desenvolvidos em uma interessante combinação de esforços e treinamentos distintos entre economistas e físicos, criando uma nova subárea da ciência: a econofísica. Econofísica é o neologismo utilizado para se referir ao ramo da física dos sistemas complexos que vem procurando fazer um levantamento completo das propriedades estatísticas dos mercados financeiros, usando o imenso volume de dados agora disponíveis e a metodologia de trabalho da física. Tudo isto pode levar a um progresso genuíno em nosso entendimento dos mercados financeiros.

A pesquisa em econofísica mostra que mercados financeiros apresentam diversas das propriedades que caracterizam sistemas complexos. Esses mercados são sistemas onde muitas subunidades interagem de forma não-linear

na presença de feedback e regras estáveis. Embora não se possa descartar dinâmicas caóticas em mercados financeiros, a econofísica toma como ponto de partida a hipótese de que a dinâmica dos preços de ativos é um processo estocástico.

O termo econofísica foi introduzido pelos pesquisadores Rosário Mantega e Gene Stanley [24], que observaram leis de escala no comportamento do índice Standard & Poor's 500. O uso de leis de escala na análise de flutuações de ativos financeiros tem levado muitos físicos a encontrar analogias destes a fenômenos físicos. Para muitos autores [25, 26, 27] a determinação do comportamento de mercados cambiais é descrita através da utilização da equação de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma(x, t)f(x, t)] \quad (7.1)$$

onde  $x$  representa a taxa de câmbio.

O modelo padrão utilizado para descrever o movimento de taxas cambiais, que satisfaz a equação de Fokker-Planck, é o movimento Browniano geométrico. Este modelo é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dW. \quad (7.2)$$

Assim, esta equação descreve um processo de difusão de Itô homogêneo no tempo, com os parâmetros dados por  $\mu(x, t) = \mu x$  e  $\sigma(x, t) = \sigma x$ , e  $dW$  é um processo de Wiener. Mais sucintamente,  $dW = \varphi\sqrt{dt}$  e  $\varphi \sim N(0, 1)$ .

Neste contexto mais aplicado a finanças, podemos interpretar (7.2) da seguinte maneira: o retorno incremental  $\frac{dx}{x}$  é composto por duas partes: uma determinística,  $\mu dt$  (onde  $\mu$  é uma medida da taxa média de crescimento do preço do ativo em um pequeno intervalo de tempo  $dt$ ), e uma aleatória,  $\sigma dW$  (sendo  $\sigma$  a volatilidade, que mede o desvio-padrão dos retornos). Esta parte

aleatória pode ser identificada como efeitos externos que mudam o valor da taxa cambial.

A justificativa teórica para a adoção deste modelo é a consideração da hipótese dos mercados eficientes, que nos diz que toda história está totalmente refletida no valor atual da taxa de câmbio que se adéqua perfeitamente a equação (7.2).

A justificativa empírica está no fato de que o modelo representa as séries temporais da taxa cambial bastante satisfatoriamente. A figura 7.1 ilustra a similaridade entre uma série temporal de taxas cambiais e uma simulação computacional do movimento Browniano geométrico.

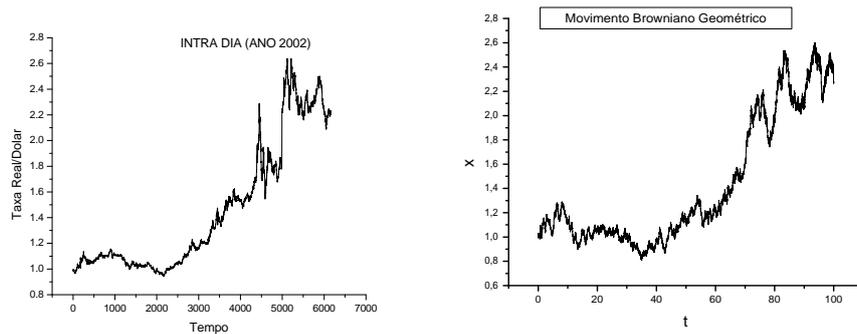


Figura 7.1: Comparação entre uma série temporal real da taxa cambial Real/Dólar (Intra-dia, 2002) [1] e uma série temporal simulada pelo nosso programa do movimento Browniano geométrico

As principais características do movimento Browniano geométrico são:

1. satisfaz a propriedade de Markov, ou seja,  $x(t + dt)$  depende apenas do valor de  $x(t)$ .
2.  $\langle dx \rangle = \mu x dt \Leftrightarrow \left\langle \frac{dx}{x} \right\rangle = \mu dt$
3.  $\langle (dx)^2 \rangle - \langle dx \rangle^2 = \sigma^2 x^2 dt \Leftrightarrow \left\langle \left( \frac{dx}{x} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \left( \frac{dx}{x} \right) \right\rangle^2 = \sigma^2 dt$

4. a trajetória de  $x$  pode ser descrita por uma random walk lognormal. Isto significa que os logaritmos dos retornos possuem uma distribuição gaussiana. Então,  $x$  possuirá uma distribuição log-normal.

Desta forma, a nossa análise concentra-se no estudo do logaritmo da densidade de probabilidade associada à variável de retorno  $dx$ . Adotando a concepção de mapas lineares com ruído, ao invés de analisarmos  $dx$ , nossa variável de retorno será dada pela relação:

$$Z_{\Delta t}(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \quad (7.3)$$

Uma das propriedades marcantes de tais sistemas estocásticos são as chamadas “leis de escala” observadas em situações tão distintas como problemas vindos da biologia e comportamento das bolsas de valores. Ela nos diz que as distribuições de probabilidade associadas a variável  $\overline{Z_{\Delta t}}$ , para vários valores de  $\Delta t$ , são aproximadamente iguais. Isto significa que o retorno  $Z_{\Delta t}$  é auto-similar assintoticamente. Observando as variações diárias e comparando-as com as variações mensais, nota-se que elas correspondem perfeitamente.

A figura 7.2 apresenta os logaritmos das densidades de probabilidade das variáveis de retorno reduzidas  $\overline{Z_{\Delta t}}$  para alguns países selecionados. Apesar de muitas das distribuições seguirem a lei de escala, na grande maioria dos casos as leis de escala não são as mais adequadas para a análise do problema. Quando observamos, por exemplo, a Rupia indiana, vemos uma figura que não se ajusta à distribuição normal ou gaussiana. A curva se alonga em vez de cair rapidamente. Em outras palavras, a curva apresenta fat tails.

A figura 7.3 apresenta a função de Lévy relacionada ao retorno  $Z_{\Delta t}$  da taxa cambial Rupia/Dolar, para vários valores de  $\Delta t$ . O comportamento da função de Lévy  $w(z)$  apresentada é muito similar ao comportamento

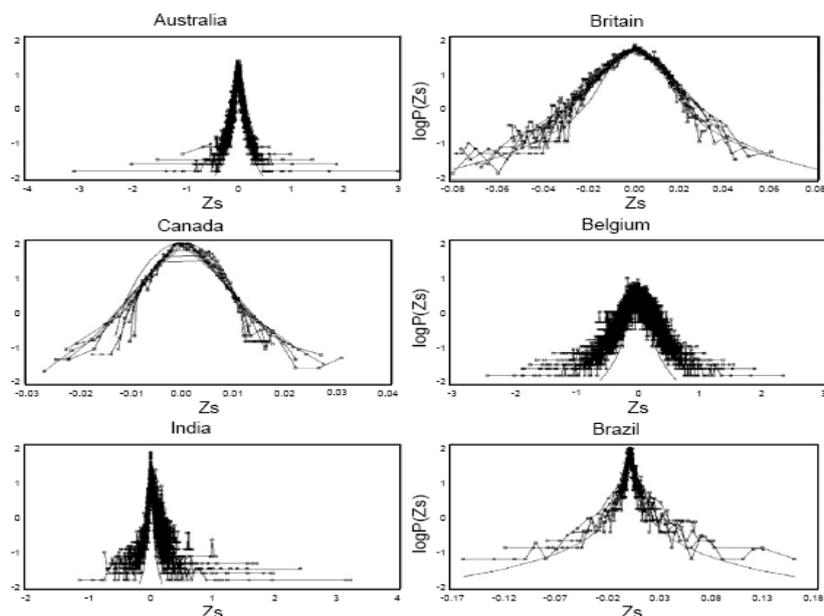


Figura 7.2: Comparação entre densidades de probabilidade do retornos reduzidos  $\overline{Z_{\Delta t}}$  de taxas cambiais [1] de Austrália, Grã-Bretanha, Canadá, Bélgica, Índia e Brasil, observados em intervalos de tempo  $\Delta t$  entre 1 e 240 dias.

da função de Lévy (4.33), utilizada na descrição de processos descontínuos. Desta forma, este comportamento sugere que a variável  $Z_\theta$  não é assintoticamente auto-similar e sua distribuição possa ser descrita como um processo descontínuo.

A figura 7.4 mostra o comportamento da taxa cambial Rupia/Dolar em função do tempo. A forma ascendente apresentada neste gráfico sugere o movimento Browniano geométrico na modelagem do comportamento desta taxa cambial. Ao olharmos mais de perto, observamos a existência de vários platôs. Este comportamento reforça a idéia de que podemos descrever esta taxa cambial por um movimento Browniano geométrico, considerando, no entanto, o ruído como descontínuo com distribuição dada por (4.15).

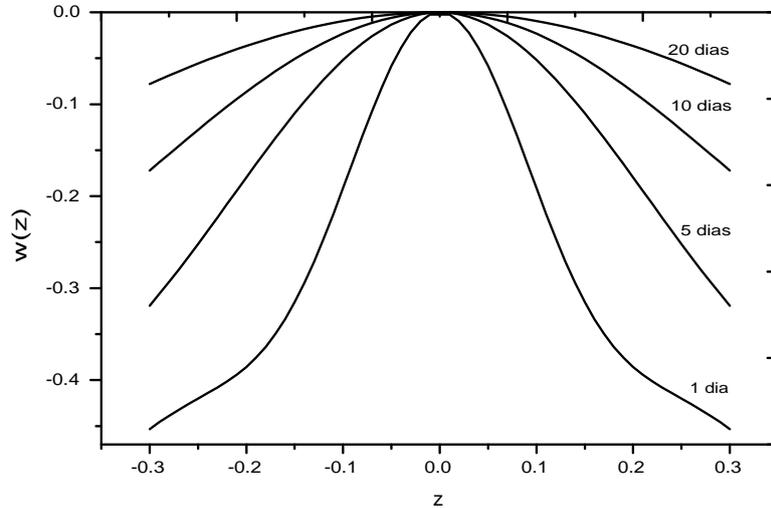


Figura 7.3: Função de Lévy para a taxa cambial Rupia/Dolar [1]

O comportamento apresentado pela taxa de câmbio da moeda indiana é geralmente observada em regimes cambiais fixos, onde as escalas de intervenção do estado na fixação das taxas cambiais são grandes. Assim, as variações de preço serão mais controladas. Desta forma, considerar o ruído aleatório como descontínuo parece-nos mais plausível para estes casos. Acreditamos ainda que o tempo característico de flutuação  $t_a$ , pode ser um importante parâmetro na obtenção do tempo médio em que essas flutuações ocorrem.

De posse dos resultados acima obtidos, vemos que uma expansão de Kramers-Moyal seria mais apropriada para descrever este tipo de comportamento. Isto porque, como já demonstramos, a quebra da auto-similaridade assintótica aliada a descontinuidade do ruído leva-nos a obtenção de uma expansão de Kramers-Moyal.

Desta forma, uma equação difusiva que pode descrever o comportamento

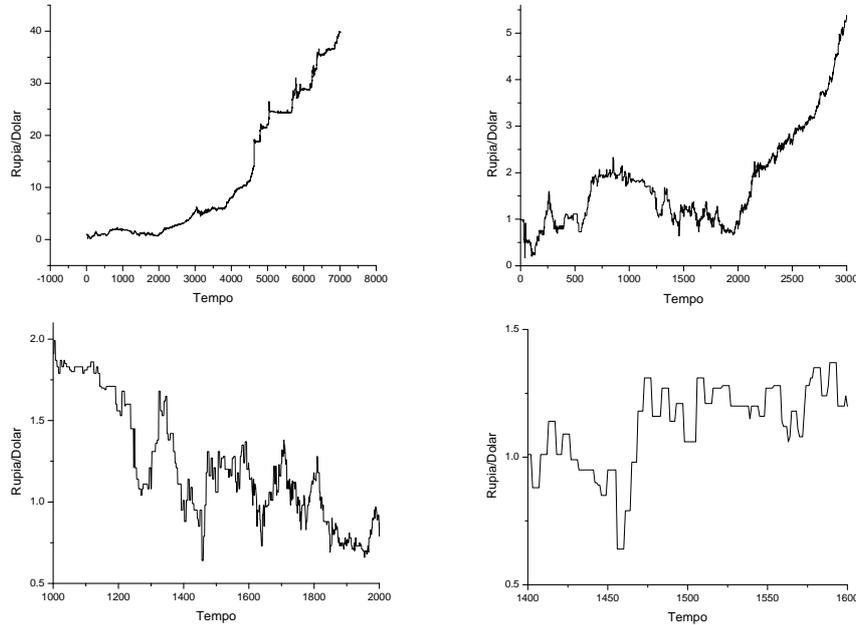


Figura 7.4: Comportamento da taxa cambial Rupia/Dolar (diária, 2002) [1]

da taxa de câmbio Rupia/Dolar, seria dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} [x f(x, t)] + \frac{a}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f(x, t)] + a \sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{n!} D_n \sigma^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} [x^n f(x, t)] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Concluimos então que a análise empírica das distribuições e do comportamento de séries financeiras pode nos fornecer a melhor equação difusiva a elas associadas, seja Fokker-Planck ou Kramers-Moyal. Uma vez que a evolução no tempo de muitas variáveis financeiras passou a ser monitorada continuamente, torna-se possível testar o poder preditivo dos modelos usando os dados disponíveis. A equivalência dos comportamentos das propriedades de séries financeiras com os resultados obtidos ao longo dessa dissertação

abre caminho para um tratamento de séries temporais reais a partir de um formalismo semelhante ao considerado nessa dissertação.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. SILVA. Autocorrelation as a source of truncated lévy flights in foreign exchange rates. *Physica A*, 323:601–625, 2003.
- [2] J. E. MOYAL. Stochastic processes and statistical physics. *Journal of Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 11:150–210, 1949.
- [3] P. ATHANASIOS. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw Hill Inc., 1965.
- [4] B. R. JAMES. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. impa, 1981.
- [5] L. E. REICHL. *A modern course in statistical physics*. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- [6] E. BUTKOV. *Física Matemática*. Guanabara Koogan, 1988.
- [7] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. SILVA. On the origins of truncated lévy flights. *Physics Letters A*, 315:51–60, 2003.
- [8] P. LEVY. Théorie des erreurs. la loi de gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52:49–85, 1924.
- [9] D. DUGUÉ. *Oeuvres de Paul Lévy, Vol. III: Eléments Aléatoires*. Gauthiers-Villars, 1976.

- [10] A. D. FOKKER. The median energy of rotating electrical dipoles in radiation fields. *Annalen der Physik*, 43:810–820, 1914.
- [11] M. PLANCK. *Ann. Physik*, 43:810, 1914.
- [12] H. A. KRAMERS. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7, 7:284–304, 1940.
- [13] R. F. PAWULA. Approximation of the linear boltzmann equation by the fokker-planck equation. *Physical Review*, 162:186–188, 1967.
- [14] H. RISKEN. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 1984.
- [15] F. REIF. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw Hill Book Company, 1965.
- [16] R. BROWN. A brief account of microscopical observations made in the months on june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4:161, 1828.
- [17] BACHELIER. *La Thóerie de la Spéculatióon*. PhD thesis, Cambridge, 1988.
- [18] A. EINSTEIN. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [19] N. WIENER. Differential-space. *J. Math. and Physics*, 2:131–174, 1923.
- [20] P. LANGEVIN. Sur la theorie du mouvement brownien. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 146:530, 1908.

- [21] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, and B. P. FLANNERY. *Numerical Recipes in Fortran 77: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988.
- [22] V. M. ZOLOTAREV. *Modern Theory of Summation of Random Variables*. VSP BV, 1997.
- [23] G. L. VASCONCELOS. A guided walk down wall street: an introduction to econophysics. *Brazilian Journal of Physics*, 34:1039–1065, 2004.
- [24] R. N. MANTEGNA and H. E. STANLEY. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [25] R. FRIEDRICH and J. PEINKE. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Physical Review Letters*, 84:5224–5227, 2000.
- [26] D. SORNETTE. Fokker-planck equation of distributions of financial returns and power laws. *Physica A*, 290:211–217, 2001.
- [27] A. P. SMIRNOV, A. B. SHMELEV, and E. Ya. SHEININ. Analysis of fokker-planck approach for foreign exchange market statistics study. *Physica A*, 344:203–206, 2004.