Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

AÇÕES NILPOTENTES EM PRODUTOS TENSORIAIS NÃO ABELIANO DE GRUPOS

Caio Barbosa da Cunha

Brasília
23 de setembro de 2022

Caio Barbosa da Cunha [1]

AÇÕES NILPOTENTES EM PRODUTOS TENSORIAIS NÃO ABELIANO DE GRUPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior

[1] Autor financiado pelo CNPq

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Ações nilpotentes em produtos tensoriais não abeliano de grupos

Caio Barbosa da Cunha*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de setembro de 2022.

Comissão Examinadora:

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior- MAT/UnB (Orientador)

Emerson Ferreira de Melo

Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo – MAT/UnB (Membro)

Danilo Sanção da Silveira

Prof. Dr. Danilo Sanção da Silveira– UFOP (Membro)

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

BC972a

Barbosa da Cunha, CAIO
Ações nilpotentes em produtos tensoriais não abeliano de grupos / CAIO Barbosa da Cunha; orientador Raimundo de Araújo Bastos Júnior . -- Brasília, 2022.
72 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Produto tensorial não abeliano. 2. Ação de grupos. 3. Grupos nilpotentes. 4. Grupos de Engel. 5. Construções livres. I. de Araújo Bastos Júnior , Raimundo, orient. II. Título.

Agradecimentos

Aos meus pais Cassiano Araújo e Marlete Barbosa que nunca mediram esforços para me ajudar e sempre me apoiaram emocionalmente e financeiramente além de me conduzir desde criança no caminho dos estudos. Também agradeço aos meus irmãos Cassio, Caele e Kátia por encorajar meu caminho com uma das mais belas frases de incentivo: "Não fez mais que sua obrigação". De modo mais geral, agradeço a todos meus familiares que ajudaram na concretização do meu mestrado.

Aos meus professores da UFAC, em especial aos professores Ivan Ramos e Sérgio Brazil, que me motivaram sair de minha cidade e correr atrás de planos maiores.

A minha "quase família" Ismael, Gabriel e Gabriela que desde a graduação dividiram emoções, espaço e dívidas comigo.

Aos meus amigos Acrianos, que não irei citar os nomes pois são muitos, que conviveram estes anos comigo na UnB e proporcionaram momentos de alegria. Aos amigos que fiz na UnB e no qual tenho um enorme carinho.

Ao professor Raimundo Bastos por todos os conselhos e conversas regadas a café, por transmitir conhecimentos e guiar meus passos.

Aos professores Emenson Ferreira de Melo e Danilo Sanção da Silveira por dedicar um tempo precioso para a correção desse trabalho e pelas contribuições sobre futuros trabalhos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Sejam G e H grupos que agem de forma compatível entre si. Os artigos [15], [16] e [24] consideram um quociente $\eta(G, H)$ do produto livre $G * H$ que é uma extensão de grupo do produto tensorial não abeliano $G \otimes H$. Este trabalho tem como objetivo mostrar que o grupo $\eta(G, H)$ é nilpotente se G e H são grupos nilpotentes que atuam de forma nilpotente um sobre o outro. Alguns exemplos são dados em detalhes para mostrar que $\eta(G, H)$ não é nilpotente quando pelo menos uma das ações é não nilpotente.
Palavras-chave: Produto tensorial não abeliano; Ação de grupos; Grupos nilpotentes, Grupos de Engel; Construções livres.

ABSTRACT

Let G and H be groups which act compatibly on one another. Papers [15], [16] and [24] consider a quocient $\eta(G, H)$ of the free product $G * H$ which is a group extension of the non-abelian tensor product $G \otimes H$. This work aims to show that the group $\eta(G, H)$ is nilpotent if G and H are nilpotent groups which act nilpotently on each other. A couple of examples are given in detail to show that $\eta(G, H)$ may not be nilpotent when at least one of the actions is non-nilpotent.
Key words: Non-Abelian tensor product; Action of groups; Nilpotent groups; Engel groups; free construction.

lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$X \subseteq Y$	X está contido em Y
$X \subset Y$	X está estritamente contido em Y
$H \leqslant G$	H é um subgrupo de G
$H < G$	H é um subgrupo próprio de G
$N \trianglelefteq G$	N é um subgrupo normal de G
$C_G(H)$	Centralizador de H em G
$N_G(H)$	Normalizador de H em G
$[x, y]$	Comutador de x e y
$[H, K]$	Subgrupo comutador de H e K
G'	Subgrupo derivado de G
x^G	Classe de conjugação de x em G
x^y	Conjugado de x por y ou ação de y sobre x
X^Y	Subgrupo gerado pelos conjugados de X por Y
R^G	Fecho do R em G
$D_H(G)$	Subgrupo derivativo de G por H
$H \times K$	Produto direto de H e K
$G \otimes H$	Produto tensorial não abeliano dos grupos G e H
$N \rtimes H$	Produto semidireto de N por H
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado pelo conjunto X
$G^{(i)}$	i-ésimo termo da série derivada
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo da série central inferior
$Z_i(G)$	i-ésimo termo da série central superior
$dl(G)$	Comprimento derivado de G
$cl(G)$	Classe de nilpotência de G
$(x)\alpha$	Imagem de x pela aplicação α
$G \simeq H$	G e H são isomorfos
S_n	Grupo simétrico de n elementos
A_n	Grupo alternado de n elementos
C_n	Grupo cíclico com n elementos
D_n	Grupo diedral com $2n$ elementos
$\lvert G \rvert$	Ordem do grupo G
$X \backslash Y$	Elementos de X que não estão em Y
$Aut(G)$	Grupo de automorfismos do grupo G
$Im(\alpha)$	Imagem da aplicação α
$Ker(\alpha)$	Núcleo da aplicação α
$Z(G)$	Centro de G
$G * H$	Produto livre de G e H
$N\ char\ G$	N é um subgrupo característico em G
$\mathfrak{X}$	Classe de grupos

Sumário

Introdução

O produto tensorial não abelianos de grupos foi introduzido por R. Brown e J.-L. Loday em [4] no estudo da teoria de homotopia, baseado nos trabalhos de C. Miller [14], K. Dennis [5] e A.S.-T. Lue [12]. Consideremos um par de grupos G e H com ações (à direita)

$$G \times H \longrightarrow G, \ (g,h) \mapsto g^h; \ H \times G \longrightarrow H, \ (h,g) \mapsto h^g$$

tais que, para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$g^{(h^{g_1})} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \text{ e } h^{(g^{h_1})} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}.$$

Se essas condições são satisfeitas, diremos que G e H agem compativelmente um sobre o outro. O produto tensorial não abeliano de grupos, denotado por $G \otimes H$, é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, onde $g \in G$ e $h \in H$ tais que

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \text{ e } g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}),$$

para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Em particular, como a ação por conjugação de um grupo G nele mesmo satisfaz a propriedade de ser compatível, então o quadrado tensorial $G \otimes G$ sempre pode ser definido.

Os trabalhos [7], [16] e [17] consideram a construção de um grupo relacionado ao produto tensorial não abeliano de grupos. I. Nakaoka em [15] toma grupos G e H agindo compativelmente um sobre o outro e H^{φ} uma copia isomórfica de H dada pelo isomorfismo $\varphi : H \longrightarrow H^{\varphi}, \ h \mapsto h^{\varphi}$ para todo $h \in H$, e define o grupo

$$\begin{aligned} \eta(G,H) := \langle G, H^{\varphi} | \ [g,h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}], \ [g,h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}], \\ \text{para todo } g, g_1 \in H, \ h, h_1 \in H \rangle. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 1.4 em [9] que existe um isomorfismo entre o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G,H)$ e o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$, tal que $[g, h^{\varphi}] \mapsto g \otimes h$, para todo $g \in G$ e $h \in H$. Este isomorfismo é muito útil para estudar o produto tensorial dentro de $\eta(G,H)$. Em [19], N. Rocco utiliza essa abordagem para estabelecer um limite para a ordem de $G \otimes G$ quando G é um p-grupo finito, e ainda prova que $\eta(G,G) := \nu(G)$ preserva propriedades de finitude, conjunto de divisores primos, nilpotência e solubilidade.

Utilizando esta mesma abordagem, I. Nakaoka em [16] obtém um limite para as ordens de quadrados tensoriais de grupos solúveis finitos. G. Ellis e F. Leonard em [7] usam um grupo isomorfo à $\eta(G,H)$ para dar um algorítimo computacional para determinar produtos tensoriais (e multiplicadores de Schur) de grupos finitos. Observamos que $[G, H^{\varphi}]$ é um subgrupo normal de $\eta(G,H)$ e cumpre um papel importante, por isso denotaremos $[G, H^{\varphi}] := \tau(G,H)$ e ainda podemos escrever $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^{\varphi}$. De acordo com G. Ellis em [8] o grupo $\eta(G,H)$ é finito se G e H são finitos. E por I. Nakaoka em [15], $\eta(G,H)$ é solúvel se G e H são solúveis. Entretanto, a nilpotência de G e H não implica a nilpotência de $\eta(G,H)$. Veremos no Exemplo 4.10 que dados o grupo cíclico de ordem prima ímpar p, C_p e o grupo cíclico de ordem 2, C_2, onde C_p age trivialmente sobre C_2 e C_2 tem ação sobre C_p dada por

$$\begin{aligned} C_2 \times C_p &\longrightarrow C_p \\ (1, b^i) &\longmapsto b^i \\ (a, b^i) &\longmapsto b^{-i}, \end{aligned}$$

então o grupo $\eta(C_p, C_2)$ tem como subgrupo um diedral de ordem $2p$ (que não é nilpotente).

É bem conhecido que a classe dos grupos nilpotentes não é fechada para extensão de seus elementos. Entretanto, um resultado bem conhecido devido a P. Hall nos dá uma condição suficiente para assegurar que uma dada extensão de grupos nilpotentes seja ainda um grupo nilpotente. O primeiro objetivo desse trabalho será demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 0.1 (Critério de P. Hall, [22], VI.6.g). *Se N é um subgrupo normal de G tal que N e G/N' são nilpotentes de classes s e n, respectivamente, então G é um grupo nilpotente. Ademais, a classe de nilpotência de G é limitada por $cl(G) \leqslant nC_{s+1,2} - C_{s,2}$ (onde $C_{r,2}$ denota o coeficiente binomial $r(r-1)/2$).*

Neste trabalho vamos nos concentrar em apresentar os conceitos de ações de Engelianas e ações nilpotentes que acarretam que o grupo $\eta(G,H)$ de dois grupos nilpotentes G e H com ações compatíveis um sobre o outro é nilpotente. Em particular, vamos provar que

Teorema 0.2 (Nakaoka e Rocco, [17]). *Se G e H são grupos finitamente gerados nilpotentes tais que as ações de um sobre o outro são Engelianas então o grupo $\eta(G,H)$ é nilpotente.*

Na demonstração desse teorema utilizaremos fortemente um dos Teoremas de Gruenberg o qual nos diz que se G é um grupo finitamente gerado, solúvel e Engel então G é nilpotente. Este teorema não apresenta uma cota máxima para a classe de nilpotência. Para obter um limitante superior para a classe de nilpotência pediremos condições mais fortes sobre as ações envolvidas, e provaremos que

Teorema 0.3 (Nakaoka e Rocco, [17]). *Se G e H são grupos nilpotentes com ações nilpotentes um sobre o outro, então o grupo $\eta(G,H)$ é nilpotente com classe de nilpotência limitadas pelas classes de nilpotência dos grupos e da classe de nilpotência das ações dos grupos envolvidos.*

A demonstrar consiste em utilizar o critério de P. Hall e analisar a série central inferior de um subgrupo normal de $\eta(G,H)$, o subgrupo $\tau(G,H)$.

O texto esta dividido da seguinte forma: No Capítulo 1 desse trabalho definiremos o conceito de comutadores que de um modo geral mede a não comutatividade de um grupo. Além disso introduziremos a definição de grupos solúveis, supersolúveis e policíclicos com o intuito de evidenciar importantes classes de grupos. Também descreveremos uma construção de produto de grupos a partir de dois grupos distintos, o produto semidireto de grupos com o objetivo de reescrever grupos como produto de dois subgrupos. Por fim, introduziremos o conceito de grupos livres e apresentações de grupos.

No Capítulo 2 desenvolveremos resultados gerais sobre nilpotência e condições de Engel, evidenciando a importância dos comutadores nas definições e propriedades envolvendo as classes de grupos estudadas. Nesse capítulo demonstramos o famoso Critério de Hall para grupos nilpotentes (Teorema 0.1) o qual mostra que se N é um subgrupo normal de G tal que N e G/N' são nilpotentes, então G é nilpotente e a sua classe de nilpotência é limitada em termos das classes de nilpotência de N e G/N'. Além disso, evidenciaremos a importância de condições de Engel classificando grupos de expoente 3.

No Capítulo 3 introduziremos a definição de produto tensorial não abeliano de grupos e descreveremos algumas de suas propriedades com respeito a solubilidade e nilpotência. Além disso apresentarmos alguns exemplos do produto tensorial não abeliano de grupos.

Em conclusão, no Capítulo 4 definiremos o grupo $\eta(G, H)$ que é uma construção mais geral na qual contém um subgrupo (normal) que é isomorfo ao produto tensorial não abeliano de grupos. Ademais, descreveremos algumas propriedades e exemplificaremos que o grupo $\eta(G, H)$ não é fechado para nilpotência mesmo que G e H sejam nilpotentes. A partir do artigo [16] apresentamos uma descrição para os termos da série central inferior de $\tau(G, H)$. Em um segundo momento, definiremos o conceito de ações Engelianas e ações nilpotentes com o objetivo tornar o grupo $\eta(G, H)$ nilpotente a partir de grupos nilpotentes e ações Engelianas (ou ações nilpotentes).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos que irão nos auxiliar no desenvolvimento da construção do principal grupo que trataremos nesse trabalho assim como outras estruturas que trabalharemos como exemplo ou contra-exemplo. Além disso, definiremos alguns objetos e daremos algumas notações para facilitar a leitura do texto. Alguns resultados estão sem demonstrações, porém pode ser encontradas no livro de Robinson [18], de Rotman [21] e de Schenkmman [22].

1.1 Comutadores

Os comutadores desempenham um papel fundamental na Teoria de Grupos quando queremos discorrer sobre a condição de não comutatividade de um grupo além de encontrar subgrupos normais de um grupo. Neste trabalho utilizaremos os comutadores para facilitar a escrita de objetos que estudaremos. As notações e resultados foram baseadas em [21] e [18].

Definição 1.1. *Sejam G um grupo e $x, y, g_1, g_2, \ldots, g_n$ elementos de G e A, B, C subconjuntos não vazios de G.*

- *Definimos $x^y = y^{-1}xy$ o conjugado de x por y.*
- *Definimos o comutador de x por y o elemento $[x, y] = x^{-1}x^y$. Indutivamente, definimos $[g_1, g_2, \ldots, g_n] = [[g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}], g_n]$ o comutador de peso n. Denotaremos $[a,_n b] = [a, \underbrace{b, ..., b}_{n}]$.*
- *Chamaremos de subgrupo comutador de A e B o subgrupo gerado por todos os comutadores de elementos de A e B, ou seja, $[A, B] = \langle [a, b] |\ a \in A \text{ e } b \in B\rangle$. Indutivamente, definimos $[A, B, C] = [[A, B], C]$. Denotaremos $[A,_n B] = [A, \underbrace{B, ..., B}_{n}]$.*

  Em particular, definimos $[G, G] = G'$ o subgrupo derivado de G.

Proposição 1.2 ([18], Pág. 123)**.** *Sejam x, y, z elementos de um grupo G.*

i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

i) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

iii) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$.

Demonstração.

i) Temos que
$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = [y,x]^{-1}.$$

ii) Temos que
$$\begin{aligned}[xy,z] &= (xy)^{-1}z^{-1}xyz\\ &= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz\\ &= y^{-1}x^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz\\ &= y^{-1}[x,z]y[y,z]\\ &= [x,z]^y[y,z].\end{aligned}$$

E ainda,
$$\begin{aligned}[x,yz] &= x^{-1}(yz)^{-1}xyz\\ &= x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz\\ &= x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz\\ &= [x,z]z^{-1}[x,z]z\\ &= [x,z][x,z]^z.\end{aligned}$$

iii) Temos que
$$\begin{aligned}[x,y^{-1}] &= x^{-1}yxy^{-1}\\ &= yy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}\\ &= (yx^{-1}y^{-1}xyy^{-1})^{-1}\\ &= ([x,y]^{y^{-1}})^{-1}.\end{aligned}$$

E ainda,
$$\begin{aligned}[x^{-1},y] &= xy^{-1}x^{-1}y\\ &= xy^{-1}x^{-1}yxx^{-1}\\ &= (xx^{-1}y^{-1}xyx^{-1})^{-1}\\ &= ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}.\end{aligned}$$

■

Lema 1.3 (Identidade de Hall-Witt, [18])**.** *Se x,y,z são elementos de um grupos G, então vale que*
$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1.$$

Demonstração. Temos que
$$\begin{aligned}[x,y^{-1},z]^y &= y^{-1}[x,y^{-1}]z^{-1}[x,y^{-1}]zy\\ &= y^{-1}(x^{-1}yxy^{-1})^{-1}z^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy\\ &= y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy\\ &= x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy. \qquad (1.1)\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$[y, z^{-1}, x]^z = y^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz; \tag{1.2}$$
$$[z, x^{-1}, y]^x = z^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx. \tag{1.3}$$

Juntando os termos de (1.1), (1.2) e (1.3), obtemos

$$x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zyy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xzz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx = 1.$$

E o resultado segue. ■

Lema 1.4 (Lema dos três subgrupos)**.** *Sejam A, B, C subgrupos de um grupo G. Se $N \trianglelefteq G$ e $[A, B, C], [B, C, A] \leqslant N$, então $[C, A, B] \leqslant N$.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que $N = 1$. Pela identidade de Hall-witt, dados $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, temos que

$$[a, b^{-1}, c]^b[b, c^{-1}, a]^c[c, a^{-1}, b]^a = 1.$$

Como por hipótese $[a, b^{-1}, c]$, $[b, c^{-1}, a] \in N$ e $N \trianglelefteq G$, segue que $[a, b^{-1}, c]^b[b, c^{-1}, a]^c \in N$. Logo,

$$[a, b^{-1}, c]^b = [b, c^{-1}, a]^c = 1.$$

Isso mostra que,

$$\begin{aligned} 1 &= [c, a^{-1}, b]^a \\ &= [c, a^{-1}]^{-1}b^{-1}[c, a^{-1}]b \\ &\Rightarrow [c, a^{-1}]b = b[c, a^{-1}] \\ &\Rightarrow [c, a^{-1}] \in C_G(B) \\ &\Rightarrow [C, A] \leqslant C_G(B). \end{aligned}$$

Logo, $[C, A, B] = 1$ e $[C, A, B] \leqslant N$. Agora, se $N \neq 1$, considere $\overline{A} = AN/N$, $\overline{B} = BN/N$ e $\overline{C} = CN/N$. Note que $\overline{N} = N/N = 1 \trianglelefteq G/N$, assim

$$[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = \left[\frac{AN}{N}, \frac{BN}{N}, \frac{CN}{N}\right] = \frac{[A, B, C]N}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

De modo análogo, $[\overline{B}, \overline{C}, \overline{A}] = 1$. Portanto,

$$[\overline{C}, \overline{A}, \overline{B}] = \left[\frac{CN}{N}, \frac{AN}{N}, \frac{BN}{N}\right] = \frac{[C, A, B]N}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

ou seja, $[\overline{C}, \overline{A}, \overline{B}] \leqslant N$ e o resultado segue. ■

Definição 1.5. *Sejam X, Y subconjuntos não vazios de um grupo G. Definimos o seguinte subgrupo*

$$X^Y := \langle x^y \mid x \in X, y \in Y \rangle.$$

Lema 1.6. *Sejam X um subconjunto de um grupo G. Se K é um subgrupo de G, então $X^K = \langle X, [X, K] \rangle \trianglelefteq \langle X, K \rangle$.*

Demonstração. Note que $X^K \leqslant \langle X, [X,K]\rangle$. De fato, para todo $x \in X$ e $k \in K$, temos

$$x^k = (xx^{-1})x^k = x[x,k] \in \langle X, [X,K]\rangle.$$

Por outro lado,

$$x^{-1}x^k = [x,k] \in X^K$$

Logo, $\langle X, [X,K]\rangle \leqslant X^K$, ou seja, $\langle X, [X,K]\rangle = X^K$. Agora, dados $x, x_1 \in X$ e $k, k_1 \in K$, temos que

$$(x^k)^{x_1} = x_1^{-1}x^k x_1 \in X^K \text{ e } (x^k)^{k_1} = x^{kk_1} \in X^K,$$

portanto, $X^K \trianglelefteq \langle X, K\rangle$. ■

A próxima proposição nos diz que podemos reescrever o subgrupo comutador de dois subgrupos apenas pelo fecho do subgrupo gerado por comutadores de elementos nos conjuntos geradores. Mais precisamente:

Proposição 1.7. *Sejam H, K subgrupos de um grupo G e X, Y subconjuntos de G. Então:*

i) *$[H,K] \trianglelefteq \langle H, K\rangle$;*

ii) *Se $H = \langle X\rangle$, então $[Y,H] = [Y,X]^H$;*

iii) *Se $H = \langle X\rangle$ e $K = \langle Y\rangle$, então $[H,K] = [X,Y]^{HK}$;*

iv) *Se $H, K \trianglelefteq G$ então $[H,K] \trianglelefteq G$.*

Demonstração.

i) É suficiente provar que $H, K \leqslant N_G([H,K])$. Assim, dados $h, h_1 \in H$ e $k, k_1 \in K$ temos que

$$[h,k]^{h_1} = [hh_1,k][h_1,k]^{-1} \in [H,K]$$
$$[h,k]^{k_1} = [h,k_1]^{-1}[h,kk_1] \in [H,K].$$

Logo, $H, K \leqslant N_G([H,K])$ e portanto $[H,K] \trianglelefteq \langle H, K\rangle$.

ii) Primeiramente vamos provar que $[Y,H] = [Y,H]^H$. É claro que $[Y,H]^H \leqslant [Y,H]$, basta tomar $1 \in H$. Vamos mostrar a outra inclusão. Temos que $[Y,H]^H$ é gerado por $[y,h_1]^{h_2}$ com $y \in Y$ e $h_1,\ h_2 \in H$. Segue que

$$[y,h_1]^{h_2} = [y,h_2]^{-1}[y,h_1h_2] \Rightarrow [Y,H]^H \leqslant [Y,H]$$

E o resultado segue.
Note agora que $X \subseteq H$, logo $[Y,X]^H \leqslant [Y,H]^H = [Y,H]$, ou seja, $[Y,X]^H \leqslant [Y,H]$. Por outro lado, seja $y \in Y$ e $h \in H$, então existem $x_1, x_2, \dots x_n \in X$ tais que $h = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ com $\varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1, \dots, n$. Vamos mostrar, por indução sobre n, que $[y,h] \in [Y,X]$. Se $n = 1$, temos que

$$[y,h] = [y,x_1^{\varepsilon_1}] = \begin{cases} [y,x_1], & \text{se } \varepsilon_1 = 1 \\ ([y,x_1]^{x_1^{-1}})^{-1}, & \text{se } \varepsilon_1 = -1 \end{cases} \in [Y,X]^H$$

Agora, supondo que o resultado vale para todo número natural menor que n, segue que

$$[y,h] = [y,x'x_n^{\varepsilon_n}] = [y,x_n^{\varepsilon_n}][y,x']^{x_n^{\varepsilon_n}} \in [Y,X]^H$$

pois $[y,x_n^{\varepsilon_n}] \in [Y,X]$ e $[y,x']^{x_n^{\varepsilon_n}} \in [Y,X]^H$. Assim, $[Y,H] \leqslant [Y,X]^H$.
Portanto, $[Y,H] = [Y,X]^H$.

iii) Se $H = \langle X \rangle$ e Se $K = \langle Y \rangle$, pelo item anterior, temos que

$$[H, K] = [K, H] = [K, X]^H = [X, K]^H = ([X, Y]^H)^K = [X, Y]^{HK}$$

iv) Dados $h \in H$, $k \in K$ e $g \in G$, segue que

$$\begin{aligned} [h, k]^g &= g^{-1}h^{-1}k^{-1}hkg \\ &= g^{-1}h^{-1}gg^{-1}k^{-1}gg^{-1}hgg^{-1}kg \\ &= [h^g, k^g]. \end{aligned}$$

Como H e K são normais em G, o resultado segue.

■

1.2 Grupos solúveis, supersolúveis e policíclicos

Nesta seção vamos explorar os conceitos e propriedades relacionadas à algumas classes de grupos: A classe dos grupos solúveis, que consiste de grupos que podem ser construídos a partir de grupos abelianos por extensões, a classe dos grupos supersolúveis, que formam uma subclasse (própria) dos grupos solúveis; e a classe dos grupos policíclicos que são uma classe de grupos que podem ser construídos a partir de grupos cíclicos por extensão. Nos baseamos em [10], [18] e [21].

Definição 1.8. *Seja G um grupo. Dizemos que uma cadeia finita de subgrupos de G*

$$G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_n = 1,$$

é uma série subnormal (respectivamente, série normal) de G se $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$ (respectivamente, $H_i \trianglelefteq G$) para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Os subgrupos quocientes H_i/H_{i+1} são chamados de fatores da série subnormal (ou normal).

Definição 1.9. *Um grupo G é dito solúvel se ele admite uma série subnormal cujos fatores são abelianos, ou seja, uma série subnormal*

$$G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_n = 1,$$

tal que H_i/H_{i+1} é abeliano para todo natural $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Tal série subnormal também é chamada de série abeliana.

Exemplo 1.10.

i) *Os grupos S_3 (o grupo simétrico de 3 elementos), S_4 (o grupo simétrico de 4 elementos) e o grupos A_4 (o grupo alternado de 4 elementos) são solúveis;*

ii) *O grupo $D_4 = \langle a, b |\ a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ é solúvel;*

iii) *O grupo A_5 (o grupo alternados de 5 elementos) não é solúvel.*

Definição 1.11. *Dado um grupo G definimos, indutivamente, os subgrupos*

$$G^{(0)} := G,\ G^{(1)} := [G^{(0)}, G^{(0)}] = G', \ldots, G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}], \ldots$$

para todo natural i.

Observação 1.12.

i) *Note que* $G^{(i+1)} \trianglelefteq G^{(i)}$*, qualquer que seja* i *natural. De fato, vamos mostrar com indução sobre* i*. Se* $i = 0$*, o resultado é claro. Suponha que seja válido para* i*, vamos mostrar que é válido para* $i+1$*. Segue que,* $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$*. Por hipótese de indução* $G^{(i)}$ *é normal em* G*, e pelo item iv) da Proposição 1.7,* $[G^{(i)}, G^{(i)}]$ *é normal em* G*. E o resultado segue.*

ii) *Pelo item i), podemos construir uma cadeia de subgrupos normais de* G

$$G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G^{(n)} \trianglerighteq \ldots.$$

Se existir um n *tal que* $G^{(n)} = 1$*, chamaremos esta cadeia de série derivada de* G*.*

iii) *Seja* $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = 1$ *uma série subnormal de* G *com* G_i/G_{i+1} *abeliano, então* $G_i \geqslant G^{(i)}$ *para todo* $0 \leqslant i \leqslant n$*. De fato, vamos provar com indução sobre* i*. Se* $i = 0$*, temos que,* $G_0 = G = G^{(0)}$*, o resultado é válido. Suponha que o resultado seja válido para* i *natural, vamos mostrar que é válido para* $i+1$*. Como* G_i/G_{i+1} *é abeliano, temos que* $G_{i+1} \geqslant (G_i)'$*. Pela hipótese de indução,* $(G_i)' \geqslant (G^{(i)})' = G^{(i+1)}$*. Portanto,* $G_{i+1} \geqslant G^{(i+1)}$*, e o resultado segue.*

Proposição 1.13. *Um grupo* G *é solúvel se, e somente se,* $G^{(n)} = 1$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Se G é um grupo solúvel, então existe uma série subnormal de G, digamos $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = 1$ tal que G_i/G_{i+1} é abeliano. Pelo item iii) da observação acima, temos que $G_i \geqslant G^{(i)}$, em particular, $G^{(n)} = 1$. Por outro lado, tomando uma série derivada de G, e observando que $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$, logo G_i/G_{i+1} é abeliano, temos uma série subnormal com fatores abelianos, ou seja, G é solúvel. ■

Com essa caracterização dos grupos solúveis, podemos definir um classificação com respeito a propriedade de solubilidade de um grupos.

Definição 1.14. *O menor natural* d *para o qual* $G^{(d)} = 1$ *é chamado de comprimento derivado de* G *e denotamos por* $dl(G)$*.*

Proposição 1.15.

i) *Todo subgrupo de um grupo solúvel é solúvel;*

ii) *Todo quociente de um grupo solúvel é solúvel;*

iii) *Se* H, K *são grupos solúveis então* $H \times K$ *é solúvel;*

iv) *Sejam* G *um grupo e* $H \trianglelefteq G$*. Se* H *e* G/H *são solúveis então* G *é solúvel;*

v) *Seja* $G = HN$ *é um grupo onde* $N \trianglelefteq G$ *e* $H \leqslant G$*, se* N *e* H *são grupos solúveis então* G *é solúvel.*

Demonstração.

i) Seja G um grupo solúvel e $H \leqslant G$. Então, existe

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = 1,$$

uma série subnormal com fatores abelianos. Tomemos

$$H = (H \cap G_0) \geqslant (H \cap G_1) \geqslant \ldots \geqslant (H \cap G_n) = 1. \tag{1.4}$$

Como cada $G_i \trianglerighteq G_{i+1}$, temos que $(H \cap G_i) \trianglerighteq (H \cap G_{i+1})$. Além disso, pelo 2° teorema do isomorfismo e pela Lei de Dedekind, segue que

$$\frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i+1}} = \frac{H \cap G_i}{(H \cap G_i) \cap G_{i+1}} \simeq \frac{G_{i+1}(H \cap G_i)}{G_{i+1}} = \frac{G_{i+1}H \cap G_i}{G_{i+1}} \leqslant \frac{G_i}{G_{i+1}}.$$

Como este último fator é abeliano, temos que $(H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1})$ é abeliano para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Portanto, (1.4) é uma série subnormal com fatores abelianos, ou seja, H é solúvel.

ii) Sejam G um grupo solúvel, $N \trianglelefteq G$ e

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = 1,$$

uma série subnormal com fatores abelianos. Definamos $K_i := NG_i/N$, para todo $0 \leqslant i \leqslant n$. Pelo 3° Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \simeq \frac{NG_i}{NG_{i+1}} \simeq \frac{NG_i/N}{NG_{i+1}/N} = \frac{K_i}{K_{i+1}}$$

logo, $K_{i+1} \trianglelefteq K_i$. Mais ainda,

$$\frac{K_i}{K_{i+1}} = \frac{NG_i/N}{NG_{i+1}/N} \simeq \frac{(NG_{i+1})G_i}{NG_{i+1}} \simeq \frac{G_i}{G_{i+1} \cap NG_i} \simeq \frac{G_i/G_{i+1}}{(G_{i+1} \cap NG_i)/G_{i+1}}$$

e como G_i/G_{i+1} é abeliano, o fator K_i/K_{i+1} é abeliano, logo

$$G/N = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_n = N,$$

é uma série subnormal com fatores abelianos, ou seja, G/N é solúvel.

iii) Como H, K são solúveis existem

$$H = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_n = 1$$

e

$$K = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_m = 1$$

séries abelianas de H e K, respectivamente. Assim, consideremos a cadeia

$$\begin{aligned} H \times K = H_0 \times K_0 \geqslant H_1 \times K_0 \geqslant \ldots \geqslant H_n \times K_0 = \{1\} \times K_0 \geqslant \\ \geqslant \{1\} \times K_1 \geqslant \ldots \geq \{1\} \times K_m = 1. \end{aligned}$$

Note que esta cadeia é uma série abeliana, ou seja, $H \times K$ é solúvel.

iv) Como G/H é um grupo solúvel, existe

$$\frac{G}{H} = K_0^* \geqslant K_1^* \geqslant \ldots \geqslant K_n^* = H,$$

uma série subnormal com fatores abelianos. Pelo Teorema da Correspondência [1.4.6, [18]], para cada K_i^* existe $K_i \leqslant G$ tais que

$$G = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_n = H,$$

com $K_i \trianglelefteq K_{i+1}$ e ainda K_i/K_{i+1} abeliano para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Agora, como H é solúvel, existe uma série abeliana

$$H = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_n = 1.$$

Desse modo, juntando as duas cadeias de subgrupos obtidas acima, temos uma série subnormal com fatores abelianos de G, ou seja, G é solúvel.

v) Note que

$$\frac{G}{N} = \frac{NH}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}$$

é solúvel. Logo, pelo item anterior G é solúvel.

■

Definição 1.16. *Um grupo G é dito supersolúvel se existe uma série normal*

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1,$$

tal que G_{i+1}/G_i é cíclico, para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Tal série também é chamada de série normal cíclica.

Exemplo 1.17.

i) *Os grupos $D_n = \langle a, b |\ a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$, onde n é um inteiro positivo $\geqslant 2$, são supersolúveis;*

ii) *Os grupos $C_n = \langle x |\ x^n \rangle$, onde n é um inteiro positivo, são supersolúveis;*

iii) *Todo grupo supersolúvel é, em particular, solúvel. Note que S_4 é solúvel, mas não é supersolúvel.*

Proposição 1.18.

i) *Todo subgrupo de um grupo supersolúvel é supersolúvel;*

ii) *Todo quociente de um grupo supersolúvel é supersolúvel;*

iii) *Sejam G um grupo e $H \trianglelefteq G$. Se H é cíclico e G/H é supersolúvel então G é supersolúvel;*

iv) *Se H, K são grupos supersolúveis então $H \times K$ é supersolúvel;*

v) *Se G é um grupo supersolúvel e $f : G \longrightarrow H$ é um epimorfismo de grupos, então H é supersolúvel.*

Demonstração.

i) Seja G um grupo supersolúvel e $H \leqslant G$. Então existe uma

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1,$$

um série normal com fatores cíclicos. Tomemos

$$H = (H \cap G_0) \trianglerighteq (H \cap G_1) \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq (H \cap G_n) = 1 \tag{1.5}$$

Como cada $G_i \trianglelefteq G$, temos que $(H \cap G_i) \trianglelefteq G$. Além disso, pelo 2° teorema do isomorfismo segue que

$$\frac{H \cap G_{i+1}}{H \cap G_i} \simeq \frac{G_{i+1}(H \cap G_i)}{G_{i+1}} \leqslant \frac{G_i}{G_{i+1}}.$$

Como este último fator é cíclico, $(H \cap G_i)/(H \cap G_{i+1})$ é cíclico para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Portanto, (1.5) é uma série subnormal com fatores cíclico, ou seja, H é supersolúvel.

ii) Sejam G um grupo supersolúvel, $N \trianglelefteq G$ e

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1,$$

um série normal com fatores cíclicos. Definamos $K_i := NG_i/N$, para todo $0 \leqslant i \leqslant n$. Pelo 3° teorema do isomorfismo,

$$\frac{G}{G_i} \simeq \frac{NG}{NG_i} \simeq \frac{NG/N}{NG_i/N} = \frac{G}{K_i}$$

logo, $K_i \trianglelefteq G$. Mais ainda,

$$\frac{K_i}{K_{i+1}} = \frac{NG_i/N}{NG_{i+1}/N} \simeq \frac{(NG_{i+1})G_i}{NG_{i+1}} \simeq \frac{G_i}{G_{i+1} \cap NG_i} \simeq \frac{G_i/G_{i+1}}{(G_{i+1} \cap NG_i)/G_{i+1}}$$

e como G_i/G_{i+1} é cíclico, o fator K_i/K_{i+1} é cíclico, logo

$$G/N = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_n = N,$$

é uma série normal com fatores cíclicos, ou seja, G/N é supersolúvel.

iii) Como H, K são supersolúveis existem

$$H = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_n = 1$$

e

$$K = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq K_m = 1$$

séries normais cíclicas de H e K, respectivamente. Assim, consideremos a cadeia

$$\begin{aligned} H \times K = H_0 \times K_0 \trianglerighteq H_1 \times K_0 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_n \times K_0 = \{1\} \times K_0 \trianglerighteq \\ \trianglerighteq \{1\} \times K_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \{1\} \times K_m = 1. \end{aligned}$$

Note que esta cadeia é uma série normal cíclica, ou seja, $H \times K$ é supersolúvel.

iv) Como G/H é um grupo supersolúvel, existe

$$\frac{G}{H} = K_0^* \trianglerighteq K_1^* \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq K_n^* = H,$$

uma série normal com fatores abelianos. Pelo teorema da correspondência, para cada K_i^* existe $K_i \trianglerighteq G$ tais que

$$G = K_0 \trianglerighteq K_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq K_n = H,$$

com $K_i \trianglelefteq G$ e ainda K_i/K_{i+1} cíclicos para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Agora, como H é cíclico, temos uma série normal com fatores cíclicos de G, ou seja, G é supersolúvel.

v) Seja $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1$ uma série normal de G com cada fator cíclico. Considere a sequência de subgrupos de H

$$H = (G_0)f \geqslant (G_1)f \geqslant \ldots \geqslant (G_n)f = 1. \tag{1.6}$$

Sejam $(G_i)f \in (G_i)f$ e $h \in H$. Como f é sobrejetiva, existe $g \in G$ tal que $(g)f = h$, daí

$$h^{-1}(h_i)fh = (g)f^{-1}(h_i)f(g)f = (h_i^g)f \in (G_i)f,$$

logo $(G_i)f \trianglelefteq H$ para todo i. Agora, definindo

$$\begin{aligned} \varphi_i : G_i/G_{i+1} &\longrightarrow (G_i)f/(G_{i+1})f \\ g_iG_{i+1} &\longmapsto (g_i)f(G_{i+1})f \end{aligned}$$

temos que φ_i é bem definida. De fato, se $g_1G_i = g_2G_i$ então existe $g \in G_i$ tal que $g_1 = g_2g$. Assim,

$$(g_1G_i)\varphi_i = (g_1)f(G_i)f = (g_2g)f(G_i) = (g_2)f(g)f(G_i)f = (g_2)f(G_i)f = (g_1G_i)\varphi_i.$$

Isso também que φ_i é injetiva. Além disso, φ_i é um homomorfismo sobrejetivo pois f é sobrejetiva. Logo, f é um isomorfismo e $G_i/G_{i+1} \simeq (G_i)f/(G_{i+1})f$, ou seja, $(G_i)f/(G_{i+1})f$ é cíclico e concluímos que (1.6) é uma série normal cíclica, portanto H é supersolúvel.

■

Definição 1.19. *Um grupo G é dito policíclico se existe uma série subnormal de G*

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1,$$

tal que G_{i+1}/G_i é cíclico, para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Exemplo 1.20.

i) *Todo grupo policíclico é, em particular, solúvel;*

ii) $(\mathbb{Q}, +)$ *é um grupo solúvel mas não é policíclico;*

iii) *Note que S_4 é policíclico mas não é supersolúvel.*

A demonstração da próxima proposição são análogas a demonstração da Proposição 1.18.

Proposição 1.21.

i) *Todo subgrupo de um grupo policíclico é policíclico;*

ii) *Todo quociente de um grupo policíclico é policíclico;*

iii) *Sejam G um grupo e $H \trianglelefteq G$. Se H é cíclico e G/H é policíclico então G é policíclico;*

iv) *Se H, K são grupos policíclico então $H \times K$ é policíclico;*

v) *Se G é um grupo policíclico e $f : G \longrightarrow H$ é um epimorfismo de grupos, então H é policíclico.*

Proposição 1.22. *Se G é um grupo policíclico, então G é finitamente gerado.*

Demonstração. Tomemos uma série subnormal de G

$$G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_n = 1,$$

com fatores cíclicos. Seja $h_i \in H_i$ tal que $H_i/H_{i+1} = \langle h_i H_{i+1} \rangle$. Podemos decompor $g \in G$ da seguinte forma: Como $H_0 = G$ existe $h_0^{j_0} \in H_0$ e $b_1 \in H_1$ tais que $g = h_0^{j_0} b_1$, e ainda, existem $h_1^{j_1} \in H_1$ e $b_2 \in H_2$ tais que $g = h_0^{j_0} h_1^{j_1} b_2$. Seguindo esse raciocínio, $g = h_0^{j_0} h_1^{j_1} \ldots h_{n-1}^{j_{n-1}}$ com $h_i^{j_i} \in H_i$. Portanto, $G = \langle h_0, h_1, \ldots, h_{n-1} \rangle$. ■

Em conclusão, podemos estabelecer uma relação entre as classes de grupos finitos apresentadas nesta seção por:

$$\{\text{Cíclico}\} \subset \{\text{Abeliano}\} \subset \{\text{Supersolúvel}\} \subset \{\text{Policíclicos}\} = \{\text{Solúveis}\}.$$

1.3 Produtos Semidireto de Grupos

Na teoria de grupos, dados dois (ou mais) grupos, podemos definir outros grupos a partir destes. Um método de construção de novos grupos é o produto semidireto de grupos. Nesta seção iremos definir este grupo e vamos exibir algumas propriedades e exemplos dele. Muitos grupos podem ser vistos como um produto semidireto de grupos, e em alguns casos isso facilita a interpretação do grupo que dispomos. Além disso, iremos definir ações de grupos que a principio não tem nenhuma correlação.

Definição 1.23. *Seja K um subgrupo (não necessariamente normal) de um grupo G. Diremos que um subgrupo Q de G é complemento de K se $K \cap Q = 1$ e $G = KQ$.*

Um subgrupo K de um grupo G não precisa ter um complemento, e se tem não necessariamente é único. Em S_3 por exemplo, todo subgrupo de ordem 2 tem um complemento em A_3. Por outro lado, se existem complementos normais então eles são únicos a menos de isomorfismos, pois

$$\frac{G}{K} = \frac{KQ}{K} \simeq \frac{Q}{K \cap Q} \simeq Q.$$

Definição 1.24. *Um grupo G é um produto semidireto (interno) de K por Q, e é denotado por $G = K \rtimes Q$, se $K \trianglelefteq G$ e K tem um complemento $Q_1 \simeq Q$.*

Exemplo 1.25.

i) *S_n é o produto semidireto de A_n por $\mathbb{Z}_2$, para todo n inteiro positivo. Basta tomar $Q = \langle (12) \rangle$ como o complemento de A_n.*

ii) *D_n é o produto semidireto de $\mathbb{Z}_n$ por $\mathbb{Z}_2$.*

iii) *Se $G = \langle a \rangle$ é cíclico de ordem 4 e $V = \langle a^2 \rangle$ então G não é um produto semidireto de V por G/V. Caso contrário G seria um produto direto de V por V, um absurdo.*

Lema 1.26 ([21], Pág. 168)**.** *Se K é um subgrupo normal de um grupo G, então são equivalentes:*

i) *G é um produto semidireto de K por G/K (isto é, K tem complemento em G);*

ii) *Existe um subgrupo $Q \leqslant G$ tal que todo elemento $g \in G$ pode ser escrito de modo único por $g = ax$, onde $a \in K$ e $x \in Q$;*

iii) *Existe um homomorfismo $\theta : G/K \longrightarrow K$ com $\alpha\theta = 1_{G/K}$, onde $\alpha : G \longrightarrow G/K$ é a projeção de G sobre K;*

iv) *Existe um homomorfismo $\pi : G \longrightarrow G$ com $ker(\pi) = K$ e $(x)\pi = x$ para todo $x \in Im(\pi)$ (tal homomorfismo π é chamado de retração de G e $Im(\pi)$ é chamado de retrato de G).*

Definição 1.27. *Sejam H e K grupos. Dizemos que H age sobre K se existe uma aplicação $\varphi : H \times K \longrightarrow K$, $(h, k) \mapsto (h, k)\varphi := k^h$ satisfazendo:*

- $k^1 = k$
- $k^{h_1 h_2} = (k^{h_1})^{h_2}$
- $(k_1 k_2)^h = (k_1)^h (k_2)^h$

para quaisquer $k, k_1, k_2 \in K$ e $h, h_1, h_2 \in H$. Quando existir uma ação de H sobre K denotaremos por $H \curvearrowright K$.

Dados grupos H e K (não necessariamente subgrupos de um grupo fixado). Suponhamos que $H \curvearrowright K$. Temos que o conjunto de todos os pares ordenados

$$G = \{(h, k)|\ h \in H, k \in K\}$$

pode ser munido de uma estrutura natural de grupo definindo a seguinte operação $\star$:

$$(h_1, k_1) \star (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2} k_2).$$

O fechamento da operação segue direto da definição, a associatividade é de fácil verificação analisando a igualdade entre os termos, o elemento neutro é $(1, 1)$ e o inverso de um elemento (h, k) é $(h^{-1}, (k^{-1})^{h^{-1}})$.

Definição 1.28. *Sejam H e K grupos. Suponhamos que $H \curvearrowright K$(com ação φ). O grupo G descrito acima é chamado de produto semidireto de K por H (com a ação φ) e denotaremos $G = H \ltimes_\varphi K$. Se $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ então diremos que G é o produto semidireto externo de K por H.*

1.4 Grupos livres

Nesta seção iremos introduzir o conceito de grupos livres e apresentação de grupos. Grupos livres são uma das maiores entidades na teoria dos grupos. Através deles podemos extrair qualquer grupo por imagens homomórficas. Para um maior estudo pode-se consultar [11], [18] e [20].

Definição 1.29. *Sejam F um grupo, X um conjunto não vazio e $\sigma : X \longrightarrow F$ uma função. O par (F, σ) é dito um grupo livre sobre X se para toda função $\alpha : X \longrightarrow G$, G um grupo qualquer, existe um único homomorfismo $\beta : F \longrightarrow G$ tal que $\alpha = \sigma\beta$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observação 1.30. *A função σ da definição acima, é necessariamente injetiva. Com efeito, suponha por absurdo, que $(x_1)\sigma = (x_2)\sigma$ para $x_1 \neq x_2$, com $x_1, x_2 \in X$. Seja G um grupo com pelo menos dois elementos distintos g_1, g_2 tais que $g_1 = (x_1)\alpha, g_2 = (x_2)\alpha$. Segue que,*

$$g_1 = (x_1)\alpha = (x_1)\sigma\beta = (x_2)\sigma\beta = (x_2)\alpha = g_2$$

um absurdo. Portanto, σ é injetiva.

Definição 1.31. *Seja X um conjunto não vazio cujos elementos chamaremos de símbolos. Escolha um conjunto distinto de X e denote-o por $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$. Uma palavra w em X é uma sequência finita de símbolos de $X \cup X^{-1}$, escritas por convenção na forma*

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$$

onde cada $x_{i_j} \in X$, $\epsilon_j = \pm 1$, $n \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. O inteiro n é chamando de comprimento da palavra. No caso em que $n = 0$, w é dita uma palavra vazia e será denotada por 1.

Duas palavras são iguais se, e somente se, tiverem os mesmos símbolos em suas correspondentes posições. O produto de duas palavras é formado por justa posição, isto é, se $u = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $v = x_{j_1}^{\delta_1} x_{j_2}^{\delta_2} \dots x_{j_m}^{\delta_m}$ são palavras em X, então

$$uv = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{j_1}^{\delta_1} x_{j_2}^{\delta_2} \dots x_{j_m}^{\delta_m}.$$

Por convenção, dado w uma palavra de X, $w1 = 1w = w$ e chamaremos de inversa de w a palavra $w^{-1} = x_{i_n}^{-\epsilon_n} x_{i_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} \dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$.

Seja S o conjunto de todas as palavras de X. Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em S da seguinte maneira: duas palavras são ditas equivalentes se é possível obter uma palavra da outra adicionando ou retirando os símbolos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, com $x \in X$.

Proposição 1.32. *Seja X um conjunto não vazio. Então existe uma grupo F e uma função $\sigma : X \longrightarrow F$ tal que F é livre em X.*

Demonstração. Sejam S o conjunto de todas as palavras em X e $\sim$ a relação de equivalência definida anteriormente. Definiremos F como sendo o conjunto de todas as classes de equivalência $[w]$, com $w \in S$. Como o produto de palavras é feita por justa posição, vemos que $uv \sim u'v'$ sempre que $v \sim v'$ e $u \sim u'$ para palavras quaisquer u, v em S. Assim podemos definir uma operação produto em F entre duas classes de equivalência da seguinte forma:

$$[u][v] = [uv].$$

Logo, $[w][1] = [w]$ e $[w][w^{-1}] = [ww^{-1}] = [1]$. Além disso, como $(wu)v = w(uv)$, temos que $([w][u])[v] = [wu][v] = [w(uv)] = [w]([u][v])$. Portanto, F é um grupo com este produto definido. Agora, definimos uma função $\sigma : X \longrightarrow F$ dada por $(x)\sigma = [x]$ e consideremos uma função qualquer $\alpha : X \longrightarrow G$, onde G é um grupo qualquer. Estendo a aplicação α, podemos construir uma outra aplicação $\alpha' : S \longrightarrow G$ dada por $(w)\alpha' = g_{i_1}^{\epsilon_1} g_{i_2}^{\epsilon_2} \dots g_{i_n}^{\epsilon_n}$, onde $(x_{i_j}^{\epsilon_j})\alpha = g_{i_j}^{\epsilon_j}$, $\epsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots n$. Note que $w \sim v$ implica que $(w)\alpha' = (v)\alpha'$, pois $(xx^{-1})\alpha' = (x)\alpha(x^{-1})\alpha = gg^{-1} = 1_G = (x^{-1}x)\alpha'$. Isso nos permite estender α' para uma função bem definida $\beta : F \longrightarrow G$ dada por $([w]\beta) = (w)\alpha'$, em particular, β é um homomorfismo, pois para quaisquer $[w], [v] \in F$,

$$([w][v])\beta = ([wv])\beta = (wv)\alpha' = (w)\alpha'(v)\alpha' = ([w])\beta([v])\beta.$$

Além disso, para todo $x \in X$, temos

$$(x)\sigma\beta = ([x])\beta = (x)\alpha' = (x)\alpha.$$

Finalmente, se $\theta : F \longrightarrow G$ é um homomorfismo tal que $\alpha = \sigma\theta$, então $\sigma\beta = \sigma\theta$ daí β e θ coincidem em $Im(\sigma)$. Mas note que $Im(\sigma) = F$, o que implica que $\beta = \theta$ em F. ∎

Definição 1.33. *Uma palavra w em X é dita reduzida se ela não contém nenhum par de símbolos consecutivos da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, $x \in X$. Por convenção a palavra 1 é reduzida. Em particular, em cada classe de equivalência $[w] \in F$ existe apenas uma única palavra reduzida. Consequentemente $[w]$ de F, com $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ sendo a única forma reduzida desta classe.*

Pela definição de produto em F, temos que

$$[w] = [x_{i_1}^{\epsilon_1}][x_{i_2}^{\epsilon_2}] \dots [x_{i_n}^{\epsilon_n}].$$

Multiplicando as classes iguais, temos

$$[w] = [x_{j_1}]^{l_1} [x_{j_2}]^{l_2} \dots [x_{j_m}]^{l_m}$$

onde cada l_k é um inteiro não nulo, $n \geqslant 0$, $x_{j_s} \neq x_{j_r}$ se $s \neq r$, com $r, s \in \{0, 1, \dots, m\}$. Note que a palavra reduzida pode novamente ser obtida a partir dessa, logo esta expressão é única. Para simplificar a notação, escreveremos apenas w ao invés de $[w]$. Portanto, cada elemento de w de F pode ser escrito da forma

$$w = x_{j_1}^{l_1} x_{j_2}^{l_2} \dots x_{j_n}^{l_n}$$

onde cada l_k é um inteiro não nulo, $n \geqslant 0$ e $x_{j_s} \neq x_{j_r}$ se $s \neq r$, com $r, s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Esta maneira de escrever w é chamada de formal normal de w.

Proposição 1.34. *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. Suponhamos que cada elemento $g \in G$ tem uma única expressão da forma*

$$g = x_{j_1}^{l_1} x_{j_2}^{l_2} \dots x_{j_n}^{l_n},$$

onde $x_{j_s} \in X$, l_s um inteiro positivo, $n \geqslant 0$ e $x_{j_s} \neq x_{j_r}$ se $s \neq r$, com $r, s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Então, G é livre em X.

Demonstração. Seja F um grupo livre sobre X. Mostraremos que $F \simeq G$. Com efeito, dado que F é livre sobre X com a função injetiva $\sigma : X \longrightarrow F$ associada, existe para cada função $\alpha : X \longrightarrow G$ um único homomorfismo $\beta : F \longrightarrow G$ tal que $\alpha = \sigma\beta$. Em particular, podemos considerar α como sendo a função inclusão. Dado que $G = \langle X \rangle$, segue que β é sobrejetiva. Além disso, β é injetivo pela unicidade da forma normal. Portanto, β é um isomorfismo e com β é único, temos que β^{-1} é único, assim G é um grupo livre sobre X. ■

Proposição 1.35. *Sejam G um grupo gerado por um subconjunto X e F um grupo livre sobre um conjunto Y. Se $\alpha : Y \longrightarrow X$ é sobrejetiva, então $\beta : F \longrightarrow G$ é um epimorfismo que estende α. Em particular, todo grupo é imagem de um grupo livre.*

Demonstração. Sejam σ a função associada ao grupo livre F sobre Y. Assim, para a função sobrejetiva $\alpha : Y \longrightarrow X$ existe um único homomorfismo $\beta : F \longrightarrow G$ tal que $\alpha = \sigma\beta$. Como α é sobrejetiva, segue que β é um epimorfismo, pois $G = \langle X \rangle$. ■

Definição 1.36. *Uma apresentação (livre) de um grupo G é um epimorfismo $\pi : F \twoheadrightarrow G$ de um grupo livre F para o grupo G. Se R é o núcleo de π, então os elementos de R são chamados de relatores da apresentação.*

Dada uma apresentação $\pi : F \twoheadrightarrow G$, escolha um conjunto Y de geradores livres de F e um subconjunto S de F tal que $S^F = ker(\pi)$. Note que a imagem de π restrita a Y é um conjunto de geradores de G. Além disso, vemos que $r \in F$ é um relator se, e somente se, $r = (s_{j_1}^{\epsilon_1})^{f_{j_1}} (s_{j_2}^{\epsilon_2})^{f_{j_2}} \dots (s_{j_k}^{\epsilon_k})^{f_{j_k}}$, onde $s_{j_i} \in S$, $f_{j_1} \in F$ e $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, k$. A apresentação π junto com as escolhas de Y e S determinam um conjunto de geradores e relatores para G. Em símbolos, podemos escrever $G = \langle Y | S \rangle$. Frequentemente listamos os geradores de G e as relações definidoras $s(x) = 1, s \in S$, nos geradores de X. Portanto, $G = \langle X |\ s(x) = 1, s \in S \rangle$.

Teorema 1.37 (de Von Dyck)**.** *Sejam G e H grupos com apresentações $\epsilon : F \twoheadrightarrow G$ e $\delta : F \twoheadrightarrow H$ tais que cada relator de ϵ é um também um relator de δ. Então a função*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow H \\ (f)\epsilon &\longmapsto (f)\delta \end{aligned}$$

é um epimorfismo bem definido de G em H.

Demonstração. A condição de que cada relator de ϵ é também relator de δ significa que $ker(\epsilon) \subseteq ker(\delta)$. Agora, para mostrar que a aplicação é ϕ bem definida, note que se $(f)\epsilon = (f_1)\epsilon$ então $f = kf_1$, onde $k \in ker(\epsilon) \subset ker(\delta)$. Consequentemente, $(f)\delta = (k)\delta(f_1)\delta = (f_1)\delta$, de modo que ϕ esta bem definida. Como ϵ e δ são epimorfismos, então ϕ é um homomorfismo. Em particular, para todo $(f)\delta \in H$ existe $g \in G$ tal que $(f)\epsilon = g$, logo ϕ é também um epimorfismo. ■

Lema 1.38. *Sejam F, G e H grupos e $\beta : F \longrightarrow G$, $\alpha : F \longrightarrow H$ homomorfismos tais que $Im(\beta) = G$ e $ker(\beta) \subseteq ker(\alpha)$. Então existe um homomorfismo $\alpha' : G \longrightarrow H$ tal que $\alpha = \beta\alpha'$.*

Demonstração. Dado que $Im(\beta) = G$, então para todo $g \in G$ existe $f \in F$ tal que $(f)\beta = g$. Com isso, definiremos $\alpha' : G \longrightarrow H$ por $(g)\alpha' = (f)\alpha$. Em particular, α' é bem definida pois tomando $f, f' \in F$ tais que $(f)\beta = (f')\beta$, temos que $f = f'k$, com $k \in ker(\beta) \subseteq ker(\alpha)$. Daí, $(f)\alpha = (f')\alpha$. Portanto, o valor de $(f)\alpha$ independe da escolha de $f \in Im^{-1}(g)$. Além disso, α' é um homomorfismo, pois se $(f)\beta = g$ e $(f')\beta = g'$ são elementos quaisquer de G então dado que β é um homomorfismo, temos $gg' = (ff')\beta$ e com α é um homomorfismo que

$$(gg')\alpha' = (ff')\alpha = (f)\alpha(f')\alpha = (g)\alpha'(g')\alpha'.$$

Por fim, $\alpha = \beta\alpha'$. Isso segue do fato que $f \in Im^{-1}((F)\beta)$, assim $((f)\beta)\alpha' = (f)\alpha$, para todo $f \in F$. ■

Proposição 1.39 (Teste de substituição)**.** *Sejam $G = \langle X|R\rangle$ uma apresentação de um grupo G, H um grupo e $\theta : X \longrightarrow H$ uma função. Então, θ se estende para um homomorfismo $\alpha' : G \longrightarrow H$ se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $(x)\theta$ em r nos dá a identidade em H.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dado que $G = \langle X|R\rangle$ é uma apresentação de G, existe um grupo livre e um epimorfismo $\beta : F \twoheadrightarrow G$ cujo núcleo é o fecho normal de R em F. Além disso, por definição, para a função $\theta : X \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $\alpha : F \longrightarrow H$ que estende θ. Suponhamos que o resultado da substituição de x por $(x)\theta$ em $r \in R$ nos dá o elemento identidade de H. Então, $R \subseteq ker(\alpha)$, logo, $ker(\beta) \subseteq ker(\alpha)$, pois $ker(\beta) = R^F$ e $ker(\alpha) \trianglelefteq F$. Logo, pelo teorema anterior existe um homomorfismo $\alpha' : G \longrightarrow H$ induzido por α, estendendo θ.
($\Rightarrow$) Suponhamos que existe um homomorfismo $\alpha' : G \longrightarrow H$ que estende $\theta : X \longrightarrow H$. Então,

$$R \subseteq R^F = ker(\beta) \subseteq ker(\alpha'\beta) = ker(\alpha).$$

E resultado segue. ■

Definição 1.40. *Sejam $\{G_\lambda |\ \lambda \in \Lambda\}$ uma família não vazia de grupos. Um produto livre dos grupos G_λ é um grupo G e uma coleção de homomorfismos $i_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G$ com a seguinte propriedade: dado um conjunto de homomorfismos $\varepsilon_\lambda : G_\lambda \longrightarrow H$ sobre qualquer grupo H, existe um único homomorfismo $\varepsilon : G \longrightarrow H$ tal que $\varepsilon_\lambda = i_\lambda\varepsilon$, isto é, que todos os diagramas*

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "\varepsilon_\lambda"'] & G \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\ H & \end{tikzcd}$$

são comutativos, para qualquer $\lambda \in \Lambda$. Os grupos $G_\lambda' s$ são chamados de fatores livres de G. Quando $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto finito, denotaremos $G = G_{\lambda_1} * G_{\lambda_2} * \cdots * G_{\lambda_n}$.

Observação 1.41.

i) *As funções i_λ são injetivas. Com efeito, se H é algum G_λ e $\varphi_\mu = id_H$ para todo $\mu \neq \lambda$, então, por definição existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G_\lambda$ tal que $id_H = \varphi i_\lambda$, de modo que i_λ é injetiva para todo $\lambda \in \Lambda$.*

ii) *Dado uma família* $\{G_\lambda |\ \lambda \in \Lambda\}$ *não vazia de grupos o produto dos grupos* G_λ *existe e é único.*

Proposição 1.42 ([13], Pág. 196)**.** *Seja* $G * H$ *o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador* $[G, H]$ *é normal em* $G * H$*. Ainda,* $[G, H]$ *é um grupo livre sobre o conjunto* $X = \{[g, h] | g \in G, h \in H, g, h \neq 1\}$.

A demonstração dessa proposição segue do fato de que podemos escrever um elemento $g \in G * H$ em termos da combinação de elementos de G e H, com isso podemos usar as propriedades de comutadores de um grupo.

Capítulo 2

Nilpotência e condições de Engel

2.1 Grupos nilpotentes

Neste trabalho, estamos interessados em mostrar que um dado grupo é nilpotente. Para isso vamos definir e apresentar algumas propriedades de grupos nilpotentes. Os grupos nilpotentes, em particular os grupos nilpotentes finitos, são grupos os quais podem ser caracterizados através de seus subgrupos normais (p-subgrupos de Sylow). Vamos fundamentar nossa teoria em [10], no capítulo 5 do livro de Robinson [18] e no capítulo 5 do livro de Rotman [21].

Definição 2.1. *Dizemos que um grupo G é nilpotente se existir uma série normal*

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1,$$

tal que $G_i/G_{i+1} \leqslant Z(G/G_{i+1})$.

Observação 2.2.

i) *Séries como descritas na definição acima são comumente chamadas de séries centrais.*

ii) *Todo grupo nilpotente é solúvel, mas a recíproca não é verdadeira, por exemplo S_3 é solúvel mas não é nilpotente.*

iii) *Sejam G um grupo e $N \leqslant H$ subgrupos de G com $N \trianglelefteq G$. Então,*

$$\frac{H}{N} \leqslant Z\left(\frac{G}{N}\right) \Longleftrightarrow [H, G] \leqslant N.$$

De fato, se $H/N \leqslant Z(G/N)$, então dados $hN \in H/N$ e $gN \in G/N$, temos que $[hN, gN] = [h, g]N = N$ se, e somente se, $[h, g] \in N$.

Proposição 2.3.

i) *Todo subgrupo de um grupo nilpotente é nilpotente;*

ii) *Todo quociente de um grupo nilpotente é nilpotente;*

iii) *Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$ um subgrupo central. Se G/N é nilpotente então G é nilpotente.*

Demonstração.

i) Dado H um subgrupo de um grupo nilpotente G. Então, existe uma série central

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1.$$

Tomemos

$$H = (H \cap G_0) \trianglerighteq (H \cap G_1) \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq (H \cap G_n) = 1. \tag{2.1}$$

Como cada $G_i \trianglelefteq G$, temos que $(H \cap G_i) \trianglelefteq H$. Além disso, $[H \cap G_i, H] \leqslant H \cap G_{i+1}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. De fato, temos que $[H \cap G_i, H] \leqslant [H, H] \leqslant H$, e ainda $[H \cap G_i, H] \leqslant [G_i, G] \leqslant G_{i+1}$. Logo, $[H \cap G_i] \leqslant H \cap G_{i+1}$, e a série (2.1) é central, ou seja, H é nilpotente.

ii) Dado N um subgrupo normal de um grupo nilpotente G e

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_n = 1,$$

uma série central de G. Definamos $K_i := NG_i/N$, para todo $0 \leqslant i \leqslant n$. Assim, pelo teorema da correspondência, $K_i := NG_i/N \trianglelefteq G/N$. E ainda,

$$\begin{aligned}\left[K_i, \frac{G}{N}\right] = \left[\frac{NG_i}{N}, \frac{G}{N}\right] &= \frac{[NG_i, G]N}{N} = \frac{[N, G][G_i, G]N}{N} \\ &\leqslant \frac{[G_i, G]N}{N} \leqslant \frac{NG_{i+1}}{N} = K_{i+1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$G/N = K_0 \trianglerighteq K_0 \trianglerighteq \ldots K_n = N$$

é uma série central e G/N é nilpotente.

iii) Se G/N é nilpotente existe uma série central

$$G = \frac{G_0}{N} \geqslant \frac{G_1}{N} \geqslant \ldots \geqslant \frac{G_n}{N} = \frac{N}{N},$$

e pelo Teorema da correspondência, temos que

$$G = \overline{G_0} \geqslant \overline{G_1} \geqslant \ldots \geqslant \overline{G_n} = N, \tag{2.2}$$

é uma série com fatores centrais. E como N é um subgrupo central de G, então podemos estender (2.2) para uma série central, ou seja, G é nilpotente.

■

Vamos definir séries de subgrupos de um grupo a fim de caracterizar nilpotência assim como foi feito com grupos solúveis no capítulo anterior.

Definição 2.4. *Seja G um grupo. Definimos indutivamente os subgrupos $\gamma_i(G)$ e $Z_i(G)$ de G, para todo $i \in \mathbb{N}$ como sendo*

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G],\ \ldots, \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G], \ldots$$

e

$$Z_0(G) = 1,\ Z\left(\frac{G}{Z_0(G)}\right) = \frac{Z_1(G)}{Z_0(G)},\ \ldots, Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}\right) = \frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)}, \ldots$$

Observação 2.5.

i) *Note que* $\gamma_2(G) = [G, G] = G'$*;*

ii) $\gamma_i(G)$ *é característico em* G*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*. Vamos mostrar por indução sobre* i*. Se* $i = 1$ *o resultado é claro. Suponha que o resultado seja válido para todo natural menor ou igual a* i*. Temos que* $\gamma_{i+1}(G) = [G,_i G]$ *é gerado por* $[x, y]$ *tal que* $x \in \gamma_i(G)$ *e* $y \in G$*. Assim, dado* $\varphi \in Aut(G)$*, temos que*

$$([x, y])\varphi = (x^{-1}y^{-1}xy)\varphi = (x)\varphi^{-1}(y)\varphi^{-1}(x)\varphi(y)\varphi = [(x)\varphi, (y)\varphi]$$

Como $[(x)\varphi, (y)\varphi] \in [G,_i G] = \gamma_{i+1}(G)$*, então* $(\gamma_{i+1}(G))\varphi \subseteq \gamma_{i+1}(G)$ *e o resultado segue.*

iii) $Z_i(G) \trianglelefteq G$*, em particular,* $Z_i(G) \trianglelefteq Z_{i+1}(G)$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*.*

iv) $\gamma_i(G) \trianglelefteq G$*, em particular,* $\gamma_{i+1}(G) \trianglelefteq \gamma_i(G)$*, para todo inteiro positivo* i*. De fato, vamos mostrar com indução sobre* i*. Se* $i = 0$ *o resultado é claro. Suponha que seja válido para* i*, vamos mostrar que é válido para* $i+1$*. Segue que,* $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$*. Por hipótese de indução,* $\gamma_i(G)$ *é normal em* G *e pelo item iv) da Proposição 1.7,* $[\gamma_i(G), G]$ *é normal em* G*. E o resultado segue.*

v) *Pelos itens anteriores, podemos criar uma cadeia de subgrupos normais de* G *de modo que*

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \gamma_n(G) \trianglerighteq \ldots \tag{2.3}$$

e ainda,

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) = Z(G) \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq Z_n(G) \trianglelefteq \ldots . \tag{2.4}$$

Lema 2.6 ([18], Pág. 126)**.** *Seja* G *um grupo. Para todo* $i, j \geqslant 1$ *natural, vale que :*

i) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leqslant \gamma_{i+j}(G)$*;*

ii) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leqslant \gamma_{ij}(G)$*.*

Demonstração.

i) Vamos provar com indução sobre j. Se $j = 1$, temos que

$$[\gamma_i(G), \gamma_1(G)] = [\gamma_i(G), G] = \gamma_{i+1}(G).$$

E o resultado é válido para $j = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $j \geqslant 1$, vamos provar que é válido para $j + 1$. Pelo Lema 1.4, temos que

$$\begin{aligned}[\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(G)] &= [\gamma_{j+1}(G), \gamma_i(G)]\\ &= [\gamma_j(G), G, \gamma_i(G)]\\ &\subseteq [G, \gamma_i(G), \gamma_j(G)][\gamma_i(G), \gamma_j(G), G].\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $[\gamma_i(G), \gamma_j(G), G] \leqslant [\gamma_{i+j+1}(G)]$. E o resultado segue.

ii) Vamos provar com indução sobre i. Se $i = 1$, temos que

$$\gamma_1(\gamma_j(G)) = \gamma_j(G) = \gamma_{1.j}(G).$$

Logo o resultado é válido para todo $i = 1$. Suponha que seja válido para o natural positivo i, vamos mostrar que é válido para $i + 1$. Segue que

$$\begin{aligned}\gamma_{i+1}(\gamma_j(G)) &= [\gamma_i(\gamma_j(G)), \gamma_j(G)] \\ &= [\gamma_{ij}(G), \gamma_j(G)] \\ &\leqslant \gamma_{ij+j}(G) = \gamma_{(i+1)j}(G). && \text{(Pelo item anterior)}\end{aligned}$$

E o resultado segue.

■

Proposição 2.7. *Seja G um grupo. São equivalentes:*

i) *G é nilpotente;*

ii) *Existe um inteiro positivo c tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$;*

iii) *Existe um inteiro positivo c tal que $Z_c(G) = G$.*

Demonstração. Demonstraremos as equivalências da seguinte forma $i) \Leftrightarrow ii)$ e $i) \Leftrightarrow iii)$. Vamos fixar uma série central de G, digamos

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = 1.$$

i) ⇒ ii) Vamos mostrar, com indução sobre j, que $\gamma_j(G) \leqslant G_{j-1}$ para todo $j \geqslant 1$. Com efeito, para $j = 1$ temos que $\gamma_1(G) = G = G_0$. Suponha que o resultado seja válido para j, vamos mostrar que vale para $j + 1$. Segue que

$$\gamma_{j+1}(G) = [\gamma_j(G), G] \leqslant [G_{j-1}, G] \leqslant G_j.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $j \geqslant 1$, em particular, para $j = n + 1$ temos que $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

ii) ⇒ i) Se existe $c + 1$ tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$, tomemos a série $\{\gamma_i(G)\}_{i=1}^{c+1}$. Note que por definição $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$ e temos uma série central.

i) ⇒ iii) Vamos mostrar, com indução sobre j, que $G_{n-j} \leqslant Z_j(G)$ para todo $j \geqslant 0$. Com efeito, se $j = 0$ temos que $G_n = 1 = Z_0(G)$. Suponha que o resultado seja válido para j, vamos mostrar que é válido para $j + 1$. Segue que,

$$[G_{n-(j+1),G}] \leqslant G_{n-j} \leqslant Z_j(G) \leqslant Z_{j+1}(G).$$

Portanto, o resultado é válido para todo $j \geqslant 0$, em particular, para $j = n$ temos que $Z_n(G) = G$ e o resultado segue.

iii) ⇒ i) Se $Z_c(G) = G$, tomemos a série $\{Z_i(G)\}_{i=0}^{c}$ e por definição temos que

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_i(G)}\right),$$

logo G é nilpotente. ■

Observação 2.8. *A partir da demonstração acima, podemos dar nomes para as séries (2.3) e (2.4) de maneira intuitiva quando G é um grupo nilpotente. Chamaremos (2.3) de série central inferior e (2.4) série central superior. E ainda, para toda série central de G temos que $\gamma_j(G) \leqslant G_{j+1} \leqslant Z_{n-j}(G)$.*

Com a caracterização dos grupos nilpotentes dada pela Proposição 2.7, podemos definir uma classificação com respeito a propriedade de nilpotência de grupos.

Definição 2.9. *Um grupo é dito nilpotente de classe $c \geqslant 0$ se existe uma série central para G de comprimento c, ou seja, uma série central $\{G_i\}_{i=0}^{c}$. A classe dos grupos nilpotentes de classe $\leqslant c$ é denotada por $\mathcal{N}_c := \{G| \ cl(G) \leqslant c\}$.*

Considerando a série central superior de um grupo nilpotente, obtemos a seguinte caracterização a respeito do grupo quocientado pelo seu centro.

Lema 2.10. *A classe de nilpotência de um grupo G é, no máximo, c se, e somente se, a classe de nilpotência do grupo quociente $G/Z(G)$ é, no máximo, $c-1$.*

Exemplo 2.11. *Vamos dar alguns exemplos de grupos nilpotentes.*

i) *Os grupos abelianos são nilpotentes de classe 1. Por convenção, o grupo trivial é abeliano de classe de nilpotência 0.*

ii) *Os p-grupos são nilpotentes. Com efeito, seja G um grupo tal que $|G| = p^n$, pela equação das classes $Z(G) \neq 1$ assim como todos os seus subgrupos e grupos quocientes. Assim, considere a serie central superior de G, como o grupo G é finito existe um inteiro positivo c tal que $Z_c(G) = 1$. Portanto, G é nilpotente.*

iii) *Os grupos S_3, A_4 e S_4 são solúveis e não são nilpotentes, basta observar o centro deles é trivial.*

iv) *O grupo $Q_8 = \langle x, y| \ x^4 = 1, \ y^2 = x^2, \ yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$, chamado de quatérnio de 8 elementos, e D_4 o diedral de ordem 8 são nilpotentes de classe 2.*

v) *Os grupos $D_n = \langle x, y| \ x^n = y^2 = 1, \ x^y = x^{-1}\rangle$, onde $n \geq 2$ são chamados de grupos diedrais de ordem $2n$. Assim, D_n é nilpotente se, e somente se, n é uma potência de 2. De fato, temos que $\gamma_i(D_n) = \langle x^{2^i}\rangle$, $i \geq 2$. Logo, $\gamma_i(D_n) = 1$ se, e somente se, $x^{2^i} = 1$, ou seja, $n = 2^i$.*

Observação 2.12. *Note que $\gamma_i(H \times K) = \gamma_i(H) \times \gamma_i(K)$.*

Com esta observação podemos dar uma cota superior para a classe de nilpotência de subgrupos e quocientes de grupos nilpotentes.

Lema 2.13 ([21], pág. 116)**.** *Seja G um grupo e $N_1, N_2 \trianglelefteq G$. Se G/N_1 é um grupo nilpotente de classe c_1 e G/N_2 é um grupo nilpotente de classe c_2 então $G/(N_1 \cap N_2)$ é nilpotente de classe no máximo $\max\{c_1, c_2\}$.*

Dados G um grupo nilpotente e H, K subgrupos de G com K normal, o produto HK não é necessariamente nilpotente, por exemplo em $S_3 = \langle(12)\rangle\langle(123)\rangle$. Mas se impormos que os subgrupos são normais então podemos garantir que o produto é nilpotente e tem uma classe de nilpotência máxima definida pela classe nilpotência de cada subgrupo normal.

Teorema 2.14 (Teorema de Fitting). *Sejam A, B subgrupos normais de G. Suponhamos que A e B são nilpotentes de classe a e b, respectivamente. Então o subgrupo AB é nilpotente de classe, no máximo, $a+b$.*

Demonstração. Vamos provar este teorema com indução sobre a soma das classes de nilpotência dos grupos envolvidos. Sem perca de generalidade, podemos supor que $G = AB$. Se $a = 0$ ou $b = 0$, temos que $G = B$ ou $G = A$ e neste caso o resultado é válido. Agora, suponhamos a nilpotência de todos os grupos K que podem ser escritos como produto de dois subgrupos normais nilpotentes $K = K_1K_2$, tais que $c_1 + c_2 < a + b$, sendo $cl(K_i) = c_i$, $i = 1, 2$. Podemos supor que $a, b \geqslant 1$ e como A e B são nilpotentes, segue que ambos tem centro não triviais. Chamaremos $Z_1 = Z(A)$ e $Z_2 = Z(B)$, daí $Z_1 \; char A \trianglelefteq G$ e $Z_2 \; char B \trianglelefteq G$, logo $Z_1, Z_2 \trianglelefteq G$. Com isso temos que

$$\frac{G}{Z_1} = \frac{AB}{Z_1} = \frac{A}{Z_1}\frac{BZ_1}{Z_1} \text{ e } \frac{G}{Z_2} = \frac{AB}{Z_2} = \frac{AZ_2}{Z_2}\frac{B}{Z_2}.$$

Vamos estudar os quocientes $G/Z_i's$ e os termos envolvidos nos respectivos produtos. Pelo Lema 2.10, $cl(A/Z_1) \leqslant a-1$ e $cl(B/Z_2) \leqslant b-1$. Pelo teorema dos isomorfismos

$$\frac{BZ_1}{Z_1} \simeq \frac{B}{B\cap Z_1} \text{ e } \frac{AZ_2}{Z_2} \simeq \frac{A}{A\cap Z_2}.$$

Com isso, $cl(AZ_2/Z_2) \leqslant a$ e $cl(BZ_1/Z_1) \leqslant b$. Voltando aos grupos quocientes G/Z_1 e G/Z_2 e obtemos, por hipótese de indução, que ambos são subgrupos nilpotentes e suas classes não ultrapassam $a + b - 1$. Pelo Lema 2.13 $G/(Z_1 \cap Z_2)$ é nilpotente com classe no máximo $a + b - 1$. Por outro lado, $(Z_1 \cap Z_2) \leqslant Z(G)$, e pelo teorema dos isomorfismos

$$\frac{G}{Z(G)} \simeq \frac{G/((Z_1\cap Z_2))}{Z(G)/(Z_1\cap Z_2)}.$$

Dessa forma, $cl(G/Z(G)) \leqslant a+b-1$ e pelo Lema 2.10, G é nilpotente de classe no máximo $a + b$. ■

Observação 2.15. *Para uma outra demonstração do resultado acima veja [18].*

Podemos estender o Lema 1.4 para encontrar um subgrupo comutador de peso n dentro de um subgrupo de produtos de comutadores. Isso será útil para uma reordenação em comutadores de peso n de subgrupos normais de um grupo.

Lema 2.16 ([22],VI.6.d.). *Sejam A, B e C subgrupos normais de G. Então, para todo inteiro positivo n vale que*

$$\prod_{i+j=n} [A,_i C, [B,_j C]] \geqslant [A, B,_n C].$$

Demonstração. Vamos provar com indução sobre n. Para $n = 1$, pelo Lema 1.4, temos que

$$\prod_{i+j=1} [A,_i C, [B,_j C]] = [A, C, B][A, [B, C]] = [C, A, B][B, C, A] \geqslant [A, B, C].$$

Suponha que o resultado seja válido para n, vamos provar que o resultado é válido para $n+1$. Primeiramente, note que para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
[A,_{i+1} C, [B,_{n-i} C]][A,_i C, [B,_{n-i+1} C]] &= [[A,_i C], C, [B,_{n-i} C]][[B,_{n-i+1} C], [A,_i C]] \\
&= [C, [A,_i C], [B,_{n-i} C]][[B,_{n-i} C], C, [A,_i C]] \\
&\geqslant [A,_i C, [B,_{n-i} C], C].
\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
[A,_{n+1} C, B][A,_n C, [B, C]] = [C, [A,_n C], B][B, C, [A,_n C]] \geqslant [A,_n C, B, C]; \\
[A, C, [B,_n C]][A, [B,_{n+1} C]] = [C, A, [B,_n C]][[B,_n C], C, A] \geqslant [A, [B,_n C], C].
\end{aligned}$$

Assim, variando todos os $i's$, novamente pelo Lema 1.4, segue que

$$\begin{aligned}
\prod_{i+j=n+1} [A,_i C, [B,_j C]] &= \prod_{i=1}^{n} [A,_i C, [B,_{n-i+1} C]][A,_{i-1} C, [B,_{n-i+2} C]] \\
&\quad [A,_{n+1} C, B][A, [B,_{n+1} C]] \\
&\geqslant \prod_{i=1}^{n} [A,_i C, [B,_{n-i} C], C][A,_n C, B, C][A, [B,_n C], C] \\
&\geqslant \left[\prod_{i+j=n} [A,_i C, [B,_j C]], C \right] \\
&\geqslant [A, B,_n C, C] = [A, B,_{n+1} C].
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado é válido para $n+1$, e assim o resultado para todo inteiro positivo. ■

O próximo resultado é uma generalização do Lema 2.16 com um subgrupo normal sendo termos da série central inferior.

Lema 2.17 ([22],VI.6.e)**.** *Se N é um subgrupo normal de um grupo G tal que $[N,_n G] \leqslant N'$ então para todo inteiro positivo r, vale que $[\gamma_r(N),_{k_r} G] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$, onde $k_r = r(n-1)+1$.*

Demonstração. Vamos provar com indução sobre r. Se $r = 1$ o resultado é imediato pela hipótese. Suponha que o resultado seja válido para todo inteiro positivo $\leqslant r-1$, e vamos mostrar que é válido para r. Pelo Lema 2.16, segue que

$$[\gamma_r(N),_{k_r} G] = [\gamma_{r-1}(N), N,_{k_r} G] \leqslant \prod_{i+j=k_r} [\gamma_{r-1}(N),_i G, [N,_j G]].$$

Como o subgrupo $[\gamma_r(N),_{k_r} G]$ esta em contido em um produtório é suficiente mostrar que todos os termos do produtório em questão estão dentro de $\gamma_{r+1}(N)$. Dessa forma, se $i \geqslant k_{r-1} = (r-1)(n-1)+1 = (r(n-1)+1) - n + 1$, então por hipótese de indução $[\gamma_{r-1}(N),_i G] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$, e como $\gamma_l(N) \trianglelefteq G$ para todo inteiro positivo l, temos que $[\gamma_{r-1}(N),_i G, [N,_j G]] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$ consequentemente, $[\gamma_r(N),_{k_r} G] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$. Por outro lado, se $i < k_{r-1}$ então, $j \geqslant n$, daí $[N,_j G] \leqslant N'$. Com isso,

$$[\gamma_{r-1}(N),_i G, [N,_j G]] \leqslant [\gamma_{r-1}(N),_i G, \gamma_2(N)] \leqslant [\gamma_{r-1}(N), \gamma_2(N)] \leqslant \gamma_{r+1}(N).$$

Logo, $[\gamma_r(N),_{k_r} G] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$. E o resultado segue. ■

É bem conhecido que a classe dos grupos nilpotentes não é fechada para a formação de extensão de seus elementos. Mais precisamente, seja N um subgrupo normal de um grupo G, se N e G/N são nilpotentes não podemos garantir que o grupo G é nilpotente. Podemos observar este fato no grupo simétrico S_3. Por outro lado, P. Hall mostrou que se N e G/N' são nilpotentes, então G é nilpotente e a sua classe de nilpotência é limitada em termos da classe de nilpotência de G/N' e N.

Teorema 2.18 (Critério de P. Hall, [22], VI.6.g)**.** *Se N é um subgrupo normal de G tal que N e G/N' são nilpotentes de classes s e n, respectivamente, então G é um grupo nilpotente e $cl(G) \leqslant nC_{s+1,2} - C_{s,2}$ (onde $C_{r,2}$ denota o coeficiente binomial $r(r-1)/2$).*

Demonstração. Como G/N' é nilpotente de classe n, temos que

$$\gamma_{n+1}\left(\frac{G}{N'}\right) = \frac{\gamma_{n+1}(G)N'}{N'} = \frac{N'}{N'} \Rightarrow \gamma_{n+1}(N) \leqslant N' \Rightarrow [N,_n G] \leqslant [G,_n G] \leqslant N'.$$

Pelo lema anterior, temos que $[\gamma_r(N),_{k_r} G] \leqslant \gamma_{r+1}(N)$, onde r é um inteiro positivo e $k_r = r(n-1)+1$. Tomemos $c = \sum_{r=1}^{s} k_r$, note que

$$\begin{aligned}
\gamma_{c+1}(G) = [G,_c G] &= [G,_n G,_{k_2} G,_{k_3} G, \ldots,_{k_s} G] \\
&\leqslant [\gamma_2(N),_{k_2} G,_{k_3} G, \ldots,_{k_s} G] \\
&\leqslant [\gamma_3(N),_{k_3} G,_{k_4} G, \ldots,_{k_s} G] \\
&\leqslant [\gamma_4(N),_{k_4} G,_{k_5} G, \ldots,_{k_s} G] \\
&\ \vdots \\
&\leqslant [\gamma_s(N),_{k_s} G] \leqslant \gamma_{s+1}(N) = 1.
\end{aligned}$$

E concluímos que $[G,_c G] = 1$, ou seja, G é nilpotente de classe no máximo c. Podemos ainda reescrever c da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
c &= (n-1)+1+2(n-1)+1+\ldots+s(n-1)+1 \\
&= \frac{s(s+1)(n-1)}{2} + s \\
&= \frac{ns(s+1) - s(s+1)}{2} + s \\
&= \frac{ns(s+1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} \\
&= nC_{s+1,2} - C_{s,2}.
\end{aligned}$$

E o resultado segue. ∎

Assim como os grupos nilpotentes, os grupos supersolúveis não são fechados para a formação de extensão de seus elementos, ou seja, dados um grupo G e um subgrupo N normal de G, se G/N e N são supersolúveis não podemos garantir que o grupo G é supersolúvel. Este fato ocorre em S_4. Entretanto, se tivermos mais condições sobre N e G/N', então podemos garantir a supersolubilidade de G. Mais precisamente:

Proposição 2.19 ([18], Pág. 157)**.** *Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Se N é nilpotente e G/N' é supersolúvel, então G é supersolúvel.*

2.2 Condições de Engel

Nesta seção iremos discorrer sobre as Condições de Engel que propõe condições para que um grupo seja nilpotente. Vamos definir e mostrar alguns resultados sobre elementos e grupos de Engel além de classificar uma classe de grupos (classe dos grupos de expoente 3) com respeito a nilpotência. Exclusivamente nesta seção, utilizaremos a notação de exponencial para funções para facilitar a leitura do texto.

Definição 2.20. *Seja G um grupo e g um elemento de G.*

- *O elemento g é chamado de Engel à direita se para cada $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ tal que $[g,_n x] = 1$ nessa ordem. Se n pode ser escolhido independentemente de x, então g é um elemento n-Engel à direita de G, ou menos precisamente, g é um elemento Engel à direita limitado.*

- *Seja n um inteiro positivo. Dizemos que G satisfaz a n-ésima condição de Engel à direita (ou simplesmente, G é n-Engel à direita) se todos os elementos de G são n-Engel. Equivalentemente, G satisfaz a condição*

$$[x,_n y] = 1, \text{ para todo } x,y \in G.$$

Observação 2.21. *Acima definimos os conceitos de Engelianidade à direita, mas existem ainda conceitos com respeito de Engelianidade à esquerda, porém nosso foco principal envolve as definições à direita. Para um melhor embasamento teórico sobre Engelianidade consultar [18].*

O Lema de Zorn é um dos teoremas mais conhecidos da Teoria dos Grupos com respeito a condição de Engel e nilpotência de um grupo. Com ele temos a garantia de que se um grupo é finito e Engel então é nilpotente.

Lema 2.22 (Zorn, [18], Pág. 372)**.** *Um grupo finito Engel é nilpotente.*

O lema anterior (em geral) não é válido se o grupo for infinito. Mas podemos caracterizar alguns grupos n-Engel com respeito à nilpotência . A seguir iremos classificar grupos de expoente pequeno para mais tarde utiliza-los em exemplos de grupos nilpotentes.

Lema 2.23. *Sejam G um grupo. Então, G é 2-Engel se, e somente se, $[x, g] \in \mathrm{Z}(\langle x, g\rangle)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $[x,_2 g] = 1$, temos que $[x, g] \in \mathrm{Z}(\langle g\rangle)$. Pela Identidade de Hall-Witt, temos que

$$1 = [g, x^{-1}, x^{-1}]^x[x, x, g]^{x^{-1}}[x^{-1}, g^{-1}, x^{-1}]^g = [x^{-1}, g^{-1}, x] = [[g, x]^{-1}, x] = [[x, g], x].$$

Logo, $[x, g]$ comuta com x e portanto $[x, g] \in \mathrm{Z}(\langle x, g\rangle)$.
($\Leftarrow$) Se $[x, g] \in \mathrm{Z}(\langle x, g\rangle)$ então $[x, g]$ comuta com g e, consequentemente, $[x,_2 g] = 1$. ∎

Lema 2.24. *Se G é um grupo 2-Engel, então $[x, y]^n = [x^n, y]$ para todo $x, y \in G$ e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos provar com indução sobre n Para $n = 0, 1$ é claro. Para $n = 2$, temos que

$$[x, y]^2 = x^{-1}x^y x^{-1}x^y = x^{-2}(x^y)^2 = x^{-2}y^{-1}xyy^{-1}xy = x^{-2}(x^2)^y = [x^2, y].$$

Suponha que o resultado seja válido para n, vamos provar que é válido para $n + 1$. Pelo Lema 2.23, segue que

$$\begin{aligned}[x, y]^{n+1} &= [x, y]^n[x, y] = [x^n, y][x, y] = x^{-n}(x^n)^y x^{-1}x^y \\ &= x^{(-n-1)}(x^n)^y x^y = (x^{n+1})^{-1}(x^{n+1})^y = [x^{n+1}, y].\end{aligned}$$

E o resultado é válido para $n + 1$ e portanto é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.25. *Seja G um grupo 2-Engel e $x, y, z, t \in G$. Então:*

i) *x^G é abeliano;*

ii) *$[x, y, z] = [z, x, y]$;*

iii) *$[x, y, z]^3 = 1$;*

iv) *$[x, y, z, t] = 1$;*

v) *G é nilpotente (de classe $\leqslant 3$).*

Demonstração.

i) Note que

$$[x, x^y] = [x, x[x, y]] = [x, [x, y]][x, x]^x = [x, [x, y]]$$

Como G é 2-Engel, temos que

$$[y, x, x] = [[y, x], x] = 1.$$

Daí, x comuta com $[y, x]$ e, consequentemente, x comuta com $[x, y]$. Logo, $[x, x^y] = 1$ e como y é qualquer, segue que x comuta com qualquer classe de x^G.
Agora, tomemos $x^g, x^h \in x^G$, $g, h \in G$. Obtemos que

$$x^g x^h = g^{-1}xgx^h g^{-1}g = g^{-1}xx^{hg^{-1}}g = g^{-1}x^{hg^{-1}}xg = g^{-1}gx^h g^{-1}xg = x^h x^g.$$

Portanto, x^G é abeliano.

ii) Sejam $A = \langle x^G \rangle$, $g \in G$ um elemento qualquer de G. Então,

$$\begin{aligned}\psi_g : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^{\psi_g} = [a, g].\end{aligned}$$

é um endomorfismo. De fato, dados $a, a_1 \in A$, temos

$$(aa_1)^{\psi_g} = [aa_1, g] = [a, g]^{a_1}[a_1, g].$$

Como $[a,g] = a^{-1}a^g \in A$, e A é abeliano pelo item anterior, temos que $[a,g]^{a_1} = [a,g]$. Daí, $(aa_1)^{\psi_g} = [a,g][a_1,g] = a^{\psi_g}{a_1}^{\psi_g}$, e concluímos que ψ_g é um endomorfismo, qualquer que seja $g \in G$. Pelas propriedades de comutadores, temos que

$$\begin{aligned}
a^{\psi_{yz}} &= [a,yz] \\
&= [a,z][a,y]^z \\
&= [a,z][a,y][a,y]^{-1}[a,y]^z \\
&= [a,z][a,y][[a,y],z] \\
&= [a,y][a,z][a,y,z] \\
&= a^{\psi_y}a^{\psi_z}a^{\psi_y\psi_z} \\
&= a^{\psi_y+\psi_z+\psi_y\psi_z}
\end{aligned}$$

onde $a^{\psi_y\psi_z} = [a,y,z]$. E ainda,

$$1 = a^{\psi_{gg^{-1}}} = a^{\psi_g}a^{\psi_{g^{-1}}}a^{\psi_g\psi_{g^{-1}}} \Rightarrow a^{\psi_{g^{-1}}} = a^{-\psi_g}a^{-\psi_g\psi_{g^{-1}}}.$$

Como $[a,g,g] = 1$, temos que $[a,g]$ comuta com g e, consequentemente, $[a,g]$ comuta com g^{-1}, para todo $g \in G$. Assim,

$$a^{\psi_{g^{-1}}} = a^{-\psi_g}a^{-\psi_g\psi_{g^{-1}}} = a^{-\psi_g}[a,g,g^{-1}]^{-1} = a^{-\psi_g}.$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= a^{\psi_1} \\
&= a^{\psi_{yz(yz)^{-1}}} \\
&= a^{\psi_{yz}+\psi_{(yz)^{-1}}+\psi_{yz}\psi_{(yz)^{-1}}} \\
&= a^{\psi_{yz}+\psi_{(yz)^{-1}}} \\
&= a^{\psi_{yz}}a^{\psi_{y^{-1}z^{-1}}} \\
&= a^{\psi_y+\psi_z+\psi_y\psi_z}a^{\psi_{y^{-1}}+\psi_{z^{-1}}+\psi_{y^{-1}}\psi_{z^{-1}}} \\
&= a^{\psi_y+\psi_z+\psi_y\psi_z}a^{-\psi_y-\psi_z-\psi_y\psi_{z^{-1}}} \\
&= a^{\psi_y+\psi_z+\psi_y\psi_z-\psi_y-\psi_z-\psi_y\psi_{z^{-1}}} \\
&= a^{\psi_y\psi_z-\psi_{z^{-1}}\psi_y} \\
&= a^{\psi_y\psi_z}a^{-\psi_{z^{-1}}\psi_y} \\
\Rightarrow a^{\psi_{z^{-1}}\psi_y} &= a^{\psi_y\psi_z}.
\end{aligned}$$

Como $x \in A$, segue que

$$\begin{aligned}
x^{\psi_{z^{-1}}\psi_y} &= x^{\psi_y\psi_z} \\
[x,z^{-1},y] &= [x,y,z] \\
[([x,z]^{z^{-1}})^{-1},y] &= [x,y,z] \\
[[x,z]^{-1},y] &= [x,y,z] \\
[z,x,y] &= [x,y,z].
\end{aligned}$$

E o resultado segue.

iii) Pelo item ii) e pela Proposição 2.23 temos que

$$[x, y^{-1}, z]^y = [z, x, y^{-1}]^y = [z, x, y^{-1}] = [x, y^{-1}, z].$$

E ainda,

$$\begin{aligned}[x, y^{-1}, z]^y &= [x, y^{-1}, z] = [(([x, y]^{y^{-1}})^{-1}, z] = [[x, y]^{-1}, z] \\ &= ([x, y, z]^{[x,y]^{-1}})^{-1} = [x, y, z]^{-1}.\end{aligned}$$

Agora, pela identidade de Hall-Witt, temos

$$\begin{aligned}[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x &= 1 \\ [x, y, z]^{-1}[y, z, x]^{-1}[z, x, y]^{-1} &= 1 \\ [x, y, z]^{-1}[x, y, z]^{-1}[x, y, z]^{-1} &= 1 \\ [x, y, z]^{-3} &= 1 \\ [x, y, z]^3 &= 1.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

iv) Com a mesma notação do item b), temos que

$$a^{\psi_y\psi_z}a^{\psi_z\psi_y} = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}0 &= a^{\psi_y\psi_{zt}}a^{\psi_{zt}\psi_y} \\ &= a^{\psi_y(\psi_z+\psi_t+\psi_z\psi_t)}a^{\psi_z\psi_y+\psi_t\psi_y+\psi_z\psi_t\psi_y} \\ &= a^{\psi_y\psi_z+\psi_y\psi_t+\psi_y\psi_z\psi_t+\psi_z\psi_y+\psi_t\psi_y+\psi_z\psi_t\psi_y} \\ &= a^{2\psi_y\psi_z\psi_t} \\ \Rightarrow [a, y, z, t]^2 &= 1.\end{aligned}$$

Em particular, $[x, y, z, t]^2 = 1$, e pelo Lema 2.24 $[x, y, z, t]^3 = [[x, y, z]^3, t] = 1$ temos que $[x, y, z, t] = 1$.

v) Como $[x, y, z, t] = 1$ para quaisquer $x, y, z, t \in G$ segue que G é nilpotente de classe menor ou igual a 3.

■

Com os resultados anteriores, podemos determinar a classe de nilpotência máxima de um grupo de expoente 3.

Proposição 2.26. *Um grupo de expoente* 3 *é* 2*-Engel.*

Demonstração. Sejam G um grupo de expoente 3 e $x, y \in G$. Note que

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(xy^{-1})^2y^2 &= yx^{-1}y^2 = y^{-2}x^{-1}y^{-1} = y^{-1}xx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \\ &= y^{-1}x(x^{-1}y^{-1})^2 = y^{-1}xyx = x^yx.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(xy^{-1})^2y^2 = yx^{-1}y^2 = xy^{-1}xy^{-1}y^2 = xy^{-1}xy = xx^y.$$

Assim, x comuta com x^y. Note ainda que

$$(x^y)^{-1}x = y^{-1}x^{-1}xy = [y, x].$$

Daí,

$$[y,_2 x] = [[y, x], x] = [(x^y)^{-1}x, x] = [(x^y)^{-1}, x]^x[x, x] = 1.$$

Como x, y são arbitrários, G é 2-Engel. ■

Nos resultados acima, mostramos que um grupo satisfazendo a segunda condição de Engel é nilpotente de classe 3. Entretanto, grupos satisfazendo uma condição de Engel não precisam ser nilpotentes, ainda que eles sejam finitamente gerados. Entretanto, o matemático britânico Karl W. Gruenberg em [10] provou que grupos solúveis finitamente gerados Engel são nilpotentes.

Lema 2.27 (Gruenber, [10], Theorem 1)**.** *Se G é um grupo finitamente gerado, solúvel e Engel, então G é nilpotente.*

O que foi mencionado nesse capítulo nos permitirá, com alguns ajustes, estudar ações Engel e ações nilpotentes em produtos tensoriais. Para mais detalhes sobre grupos Engel é possível se aprofundar em [1] e [18].

Capítulo 3

Produto tensorial não abelianos de grupos

Neste capítulo vamos definir e apresentar algumas propriedades sobre o produto tensorial não abeliano de grupos que foi introduzido por Ronald Brown e Jean-Louis Loday em [4] seguindo os trabalhos de Keith Dennis em [5], Abraham Sek-Tong Lue em [12] e Clair Miller em [14].

Na seção 1.3 definimos o conceito de ação de G em H. Equivalentemente, podemos definir o conceito de ação através dos automorfismo dos grupos em questão.

Definição 3.1. *Sejam G e H grupos. Uma ação (à direita) de G sobre H é um homomorfismo $\theta : G \longrightarrow Aut(H)$, em que para cada $g \in G$ e $h \in H$ denotamos por $(h)((g)\theta) = h^g$. Em particular, G age sobre si mesmo por conjugação, ou seja, $g^x = x^{-1}gx$, para todo $x, g \in G$. Caso θ seja o homomorfismo trivial, ou seja, $h^g = h$ para todos $g \in G$ e $h \in H$, dizemos que G age trivialmente sobre H ou que H é G-trivial.*

Para definir o produto tensorial não abeliano de grupos, precisamos de uma correlação entre grupos "arbitrários". Para isso, vamos definir o conceito de compatibilidade de ações que serão essenciais para a construção deste trabalho.

Definição 3.2. *Sejam G e H grupos munidos com uma ação de G sobre H e uma de H sobre G. Suponha ainda que cada grupo age sobre si mesmo por conjugação. Dizemos que as ações de G sobre H e de H sobre G são compatíveis se para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ vale que*

$$\begin{aligned} g^{(h^{g_1})} &= (((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}) \\ h^{(g^{h_1})} &= (((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}). \end{aligned}$$

Agora com esta relação entre grupos arbitrários, podemos definir o conceito de produto tensorial não abeliano de grupos.

Definição 3.3. *Sejam G, H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Definimos o produto tensorial não abeliano de G e H como sendo o grupo gerado pelos símbolos da forma $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, que satisfazem:*

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{3.1}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{3.2}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Indicaremos tal grupo por $G \otimes H$. Assim

$$G \otimes H = \langle g \otimes h |\ R, g \in G,\ h \in H \rangle$$

sendo que $R = \{(gg_1 \otimes h)^{-1}(g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) = (g \otimes hh_1)^{-1}(g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) = 1\}$.

Observação 3.4.

i) *Nas definições acima, tomando $G = H$ então as ações por conjugação são compatíveis. Com efeito, se $g, h, g_1 \in G$, então*

$$g^{h^{g_1}} = g^{g_1^{-1}hg_1} = (g_1^{-1}hg_1)^{-1}g(g_1^{-1}hg_1) = g_1^{-1}h^{-1}g_1gg_1^{-1}hg_1 = ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1}.$$

Se não for dito o contrário, sempre utilizaremos as ações por conjugação de um grupo nele mesmo.

ii) *As relações de um produto tensorial não abeliano dos grupos G e H lembram das propriedades de comutadores, uma vez que*

$$[xy, z] = [x^y, z^y][y, z] \text{ e } [x, yz] = [x, z][x^z, y^z].$$

iii) *Note que $1_G \otimes h$ é o elemento neutro de $G \otimes H$, onde 1_G é o elemento neutro de G e $h \in H$ qualquer. De fato, dados $g \in G$ e $h \in H$, temos que*

$$(g \otimes h)(1_{G\otimes H}) = g \otimes h = (g1_G) \otimes h = (g^{1_G} \otimes h^{1_G})(1_g \otimes h) = (g \otimes h)(1_G \otimes h).$$

E ainda,

$$(1_{G\otimes H})(g \otimes h) = g \otimes h = g \otimes (h1_H) = (g \otimes 1_H)(g^{1_H} \otimes h^{1_H}) = (g \otimes 1_H)(g \otimes h).$$

Pela unicidade do elemento neutro segue o resultado. De modo análogo, podemos provar que $g \otimes 1_H = 1_{G\otimes H}$ para qualquer $g \in G$ e 1_H o elemento neutro de H. Portanto, $1_G \otimes h = g \otimes 1_H = 1_{G\otimes H}$.

Vamos construir um exemplo do produto tensorial não abelianos de grupos.

Exemplo 3.5. *Considere $G = \langle a |\ a^2 \rangle$ e $H = \langle b |\ b^p \rangle$ com p primo ímpar, e suponha que G é H-trivial e G age sobre H de modo que $h^a = h^{-1}$ para qualquer $h \in H$. Estas ações são compatíveis pois para quaisquer $g \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos que*

$$g^{(h^a)} = g^{h^{-1}} = g \text{ e } ((g^{a^{-1}})^h)^a = ((aga)^h)^a = (aga)^a = a^2ga^2 = g.$$

E ainda,

$$g^{h^1} = g^h = ((g^1)^h)^1.$$

Por outro lado,

$$h^{a^{h_1}} = h^a = h^{-1} \text{ e } ((h^{h_1^{-1}})^a)^{h_1} = (h^a)^{h_1} = (h^{-1})^{h_1} = h^{-1}.$$

Dessa forma, $h^{a^{h_1}} = ((h^{h_1^{-1}})^a)^{h_1}$. Pela definição de $G \otimes H = \langle 1_{G\otimes H}, a \otimes b, a \otimes b^2, \ldots, a \otimes b^{p-1} \rangle$. Vamos mostrar, por indução sobre $r \geqslant 1$ natural, que $(a \otimes b)^r = a \otimes b^r$.

É claro que vale para $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para r, vamos mostrar que vale para $r + 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} a \otimes b^{r+1} &= a \otimes bb^r = (a \otimes b^r)(a^b \otimes (b^r)^b) \\ &= (a \otimes b)(a \otimes b^r) = (a \otimes b)(a \otimes b)^r = (a \otimes b)^{r+1}. \end{aligned}$$

Portanto $G \otimes H = \langle a \otimes b \rangle$, em particular, para $r = p$ temos que

$$1_{G \otimes H} = a \otimes 1_H = a \otimes b^p = (a \otimes b)^p$$

logo $|G \otimes H| = 1$ ou p. Vamos construir um isomorfismo entre $G \otimes H$ e $\mathbb{Z}_p$. Para tal, seja $K = \{g \otimes h |\ g \in G,\ h \in H\}$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha' : \quad K &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}_p \\ g \otimes h &\longmapsto \begin{cases} \overline{0}, & se\ g \otimes h = 1_{G \otimes H} \\ \overline{n}, & se\ g \otimes h = a \otimes b^n \neq 1_{G \otimes H} \end{cases} \end{aligned}$$

Note que α' satisfaz as condições do Teste de Substituição, então α' se estende para um homomorfismo $\alpha : G \otimes H \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ onde $(a \otimes b)\alpha = \overline{1}$ e como $Im(\alpha) = \mathbb{Z}_p$, obtemos o isomorfismo desejado.

Definição 3.6. *Sejam G e H agindo compativelmente um sobre o outro e L um grupo. Dizemos que a aplicação $\psi : G \times H \longrightarrow L$ é uma biderivação se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ vale que*

$$(gg_1, h)\psi = (g^{g_1}, h^{g_1})\psi(g_1, h)\psi \text{ e } (g, hh_1)\psi = (g, h_1)\psi(g^{h_1}, h^{h_1})\psi.$$

Pela Proposição 1.39 obtemos que uma biderivação determina um único homomorfismo $\psi^* : G \otimes H \longrightarrow L$, tal que para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$ temos que $(g \otimes h)\psi^* = (g, h)\psi$. Um dos exemplos mais claros de uma biderivação é quado $G = H = L$ e ψ leva dois elementos de G em seu comutados.

Exemplo 3.7. *Como a ação de G sobre ele mesmo por conjugação é compatível, consideremos a aplicação $\psi : G \times G \longrightarrow G$ dada por $(g, h)\psi = [g, h]$. Usando as propriedades de comutadores obtemos que ψ satisfaz as condições para ser uma biderivação. De fato, dados $g, g_1, h, h_1 \in G$, temos que*

$$(gg_1, h)\psi = [gg_1, h] = [g^{g_1}, h^{g_1}][g_1, h] = (g^{g_1}, h^{g_1})\psi(g_1, h)\psi,$$

e ainda,

$$(g, hh_1)\psi = [g, hh_1] = [g, h_1][g^{h_1}, h^{h_1}] = (g, h_1)\psi(g^{h_1}, h^{h_1})\psi.$$

Portanto, ψ é uma biderivação.

Proposição 3.8 (Proposition 2.3, [3])**.** *Sejam G e H agindo compativelmente um sobre o outro. Então G e H agem sobre $G \otimes H$ de maneira que se $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$*

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\longrightarrow Aut(G \otimes H) \\ g &\longmapsto \theta_g : G \otimes H \longrightarrow G \otimes H \\ &\qquad (g_1 \otimes h) \longmapsto g_1^g \otimes h^g, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\theta_2 \colon H &\longrightarrow Aut(G\otimes H)\\ h &\longmapsto \theta_h : G\otimes H \longrightarrow G\otimes H\\ &\qquad (g\otimes h_1) \longmapsto g^h \otimes h_1^h.\end{aligned}$$

Desse modo, podemos definir uma ação de $G * H$ em $G\otimes H$ tal que

$$\begin{aligned}\theta \colon G * H &\longrightarrow Aut(G\otimes H)\\ t &\longmapsto \theta_t : G\otimes H \longrightarrow G\otimes H\\ &\qquad (g\otimes h) \longmapsto g^t \otimes h^t.\end{aligned}$$

Demonstração. Dado $g\in G$, defina a aplicação $\phi_g : G\times H \longrightarrow G\otimes H$ colocando $(g_1,h)\phi_g = g_1^g\otimes h^g$, para todo $g_1\in G$ e $h\in H$. Desse modo, ϕ_g é uma biderivação para qualquer $g\in G$. Com efeito, se $g,g_1,g_2\in G$ e $h\in H$, então,

$$\begin{aligned}(g_1g_2,h)\phi_g &= (g_1g_2)^g\otimes h^g\\ &= ((g_1^g)^{g_2^g}\otimes (h^g)^{g_2^g})(g_2^g\otimes h^g)\\ &= ((g_1^g)^{g^{-1}g_2g}\otimes (h^g)^{g^{-1}g_2g})(g_2^g\otimes h^g)\\ &= ((g_1^{g_2})^g\otimes (h^{g_2})^g)(g_2^g\otimes h^g)\\ &= (g_1^{g_2},h^{g_2})\phi_g(g_2,h)\phi_g\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}(g_1,hh_1)\phi_g &= g_1^g\otimes (hh_1)^g\\ &= g_1^g\otimes (h^g h_1^g\\ &= (g_1^g\otimes h_1^g)((g_1^g)^{h_1^g}\otimes (h^g)^{h_1^g}\\ &= (g_1^g\otimes h_1^g)((((g_1^g)^{g^{-1}})^{h_1})^g\otimes ((h^g)^{g^{-1}})^{h_1})^g)\\ &= (g_1^g\otimes h_1^g)((g_1^{h_1})^g\otimes (h^{h_1})^g)\\ &= (g_1,h_1)\phi_g(g_1^{h_1})^g,(h^{h_1})^g)\phi_g.\end{aligned}$$

Logo, ϕ_g determina um único homomorfismo $\alpha_g : G\otimes H \longrightarrow G\otimes H$ tal que para quaisquer $g_1\in G$ e $h\in H$, $(g_1\otimes h)\alpha_g = g_1^g\otimes h^g$. Note que $\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}\alpha_g = 1$. Portanto, α_g é um automorfismo e a aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : G &\longrightarrow Aut(G\otimes H)\\ g &\longmapsto \alpha_g : G\otimes H\longrightarrow G\otimes H\\ &\qquad (g_1\otimes h)\longmapsto (g_1^g\otimes h^g)\end{aligned}$$

é um homomorfismo bem definido pois $\alpha_{g_1g_2} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_2}$ para quaisquer $g_1,g_2\in G$. Assim, obtemos uma ação de G sobre $G\otimes H$ tal que $(g_1\otimes h)^g = g_1^g\otimes h^g$. Procedendo de modo análogo, podemos provar o outro caso. ■

Proposição 3.9 (Proposition 1, [3]). *Sejam G e H agindo compativelmente um sobre o outro. Existe um único isomorfismo $\theta : G\otimes H \longrightarrow H\otimes G$ onde $(g\otimes h)\theta = (h\otimes g)^{-1}$ para todo $g\in G$ e $h\in H$.*

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : G \times H \longrightarrow H \otimes G$ dada por $(g, h)\phi = (h \otimes g)^{-1}$. Note que ϕ é uma biderivação. De fato, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi &= (h \otimes g_1g_2)^{-1}\\ &= ((h \otimes g_2)(h^{g_2} \otimes g_1^{g_2}))^{-1}\\ &= (h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})^{-1}(h \otimes g_2)^{-1}\\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}(g, h_1h_2)\phi &= (h_1h_2 \otimes g)^{-1}\\ &= ((h_1^{h_2} \otimes g^{h_2})(h_2 \otimes g))^{-1}\\ &= (h_2 \otimes g)^{-1}(h_1^{h_2} \otimes g^{h_2})^{-1}\\ &= (g, h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{h_2})\phi.\end{aligned}$$

De modo análogo podemos mostrar que $(g, h_1h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_1}, h_2^{h_1})\phi$ para quaisquer $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Assim, pelo Teste de Substituição ϕ determina um único homomorfismo $\theta : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G$ tal que $(g \otimes h)\phi = (h \otimes g)^{-1}$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. De maneira análoga, existe um único homomorfismo $\mu : H \otimes G \longrightarrow G \otimes H$ tal que $(h \otimes g)\mu = (g \otimes h)^{-1}$ para todo $g \in G$ e $h \in H$. Note que $\theta\mu = id_{G\otimes H}$ e $\mu\theta = id_{H\otimes G}$. Portanto, θ é um isomorfismo único. ∎

Proposição 3.10 (Proposition 1, [3]). *Sejam $\alpha : G \longrightarrow A$ e $\beta : H \longrightarrow B$ homomorfismo de grupos e suponha que A e B agem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservam as ações, ou seja,*

$$\begin{aligned}(h^g)\beta &= (h\beta)^{(g)\alpha}\\ (g^h)\alpha &= (g\alpha)^{(h)\beta}\end{aligned}$$

para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. Nessas condições existe um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta$: $G\otimes H \longrightarrow A\otimes B$ onde $(g\otimes h)(\alpha\otimes\beta) = (g)\alpha\otimes(h)\beta$. Além disso, se α e β são sobrejetoras, então $\alpha \otimes \beta$ também é sobrejetora.

Demonstração. Consideremos a aplicação $\phi : G \times H \longrightarrow A \otimes B$ dada por $(g, h)\phi = (g)\alpha \otimes (h)\beta$, para todo $g \in G$ e $h \in H$. Temos que ϕ é uma biderivação. De fato, dados $g_1, g_2 \in G$ segue que

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi &= (g_1g_2)\alpha \otimes (h)\beta\\ &= ((g_1)\alpha(g_2)\alpha) \otimes (h)\beta\\ &= ((g_1)\alpha^{(g_2)\alpha} \otimes (h)\beta^{(g_2)\alpha}) \otimes ((g_2)\alpha \otimes (h)\beta)\\ &= ((g_1^{g_2}\alpha) \otimes (h^{g_2})\beta) \otimes ((g_2)\alpha \otimes (h)\beta)\\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi.\end{aligned}$$

Analogamente, temos que $(g, h_1h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{h_2})\phi$ para todo $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Assim, existe um único homomorfismo $\alpha\otimes\beta : G\otimes H \longrightarrow A\otimes B$ tal que $(g\otimes h)(\alpha\otimes\beta) = (g)\alpha\otimes(h)\beta$, para todo $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras, dados $a \in A$ e $b \in B$, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $(g)\alpha = a$ e $(h)\beta = b$, ou seja, $(g\otimes h)(\alpha\otimes\beta) = a\otimes b$. Como $\{a \otimes b|\ a \in A \text{ e } b \in B\}$ gera $A \otimes B$ obtemos a sobrejetividade de $\alpha \otimes \beta$. ∎

Vamos provar que o produto tensorial não abeliano de grupos satisfazem propriedades interessantes, que serão úteis para realizar manipulações envolvendo elementos desse grupo.

Proposição 3.11 (Proposition 3, [3]). *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, valem*

i) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

ii) $(g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h)$;

iii) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$ *e* $(g_1 \otimes h^{-g}h) = (g \otimes h)^{g_1}(g \otimes h)$;

iv) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g_1 g^h \otimes h_1^{-g_1} h_1$.

Demonstração.

i) Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} 1 \otimes h &= g^{-1}g \otimes h \\ &= ((g^{-1})^g \otimes h)(g \otimes h) \\ &= (g^{-1} \otimes h)(g \otimes h). \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} g \otimes 1 &= g \otimes h^{-1}h \\ &= (g \otimes h)(g^h \otimes (h^{-1})^h) \\ &= (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h. \end{aligned}$$

Como $1 \otimes h = g \otimes 1$, segue que $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$.

ii) Sejam $u, v \in G$ e $x, y \in H$. Pelas equações (3.1) e (3.2) definidoras do produto tensorial não abeliano, temos que

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (u \otimes xy)^v (v \otimes xy) \\ &= ((u \otimes y)(u \otimes x)^y)^v ((v \otimes y)(v \otimes x)^y) \\ &= (u \otimes y)^v (u \otimes x)^{yv} (v \otimes y)(v \otimes x)^y. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (uv \otimes y)(uv \otimes x)^y \\ &= (u \otimes y)^v (v \otimes y)((u \otimes x)^v (v \otimes x))^y \\ &= (u \otimes y)^v (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy} (v \otimes x)^y. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y) = (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}. \tag{3.3}$$

Fazendo $u = g_1^{g^{-1}h^{-1}}$, $v = g$, $x = h_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h$ em (3.3) temos

$$(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh},$$

Pela Proposição 3.8, temos que

$$\begin{aligned}(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) &= (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}hg}(g \otimes h) \\ &= (g_1 \otimes h_1)(g \otimes h),\end{aligned}$$

assim como,

$$(g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} = (g_1 \otimes h_1)(g \otimes h)^{g^{-1}h^{-1}gh}.$$

Além disso, como G e H agem compativelmente um sobre o outro, temos

$$\begin{aligned}g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} &= (g_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} \\ &= (g^{-1}g_1^{g^{-1}h^{-1}}g)^h \\ &= g^{-h}g_1^{g^{-1}h^{-1}h}g^h \\ &= g^{-h}g_1^{g_1}g^h,\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} &= (h_1^{g^{-1}})^{h^{-1}gh} \\ &= h_1^{g^{-1}g^h} \\ &= h_1^{g^{-1}g^h},\end{aligned}$$

assim, obtemos

$$\begin{aligned}(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} &= g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \\ &= g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} \\ &= (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h}.\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{h^{-g}h} \text{ e } h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = h_1^{h^{-g}h},$$

e assim,

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}.$$

Portanto,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g \otimes h)^{[g,h]} = (g \otimes h)^{g^{-1}g^h} = (g \otimes h)^{h^{-g}h}.$$

iii) Pela Proposição 3.8, temos que

$$\begin{aligned}(g^{-1}g^h) \otimes h_1 &= (g^{-h^{-1}}g \otimes h_1^{h^{-1}})^h \\ &= ((g^{-h^{-1}g} \otimes h_1^{h^{-1}g})(g \otimes h_1^{h^{-1}}))^h \\ &= (g^{-h^{-1}g} \otimes h_1^{h^{-1}g})^h(g \otimes h_1^{h^{-1}})^h \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes (hh_1)h^{-1})^h\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}((g \otimes h^{-1})(g^{h^{-1}} \otimes (hh_1)^{h^{-1}}))^h \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g^{h^{-1}} \otimes (hh_1)^{h^{-1}})^h \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes (hh_1)) \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes (hh_1)) && \text{(Pelo item i))} \\
&= (g \otimes h_1)^{-gh^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\
&= (g \otimes h_1)^{-[g,h]}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} && \text{(Pelo item ii))} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}.
\end{aligned}
$$

E o resultado segue.

iv) Temos que

$$
\begin{aligned}
[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1^{-g}h_1} && \text{(Pelo item ii))} \\
&= g^{-1}g^g \otimes h_1^{-g_1}h_1. && \text{(Pelo item iii))}
\end{aligned}
$$

■

Definição 3.12. *Dados grupos G e H, dizemos que um homomorfismo $\theta : H \longrightarrow G$ juntamente com uma ação de G sobre H é um módulo cruzado se as seguintes condições são satisfeitas*

$$(h^g)\theta = g^{-1}((h)\theta)g \ \text{ e } \ (h_1)^{(h)\theta} = h^{-1}h_1h$$

para todo $g \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Exemplo 3.13. *Sejam G um grupo e H subgrupo central de G. Então a função inclusão $i : H \longrightarrow G$ tal que $(h)i = h$, para todo $h \in H$ juntamente com a ação por conjugação nos fornecem um exemplo trivial de módulo cruzado de grupos. Com efeito, dados $h, h_1 \in H$ e $g \in G$, temos que*

$$
\begin{aligned}
&(h^g)i = (g^{-1}hg)i = (h)i = h = g^{-1}hg = g^{-1}(h)ig \\
&(h_1)^{(h)i} = h_1^h = h^{-1}h_1h = h^{-1}(h_1)ih.
\end{aligned}
$$

Lema 3.14 (2.1, [25])**.** *O núcleo de um módulo cruzado $\theta : H \longrightarrow G$ é um subgrupo central de H e $Im(\theta) \trianglelefteq G$.*

Demonstração. Sejam $h' \in ker(\theta)$ e $h \in H$. Pela definição de módulo cruzado, segue que $h^{h'} = h^{(h')\theta} = h^1 = h$, isto é, $ker(\theta)$ é um subgrupo central de H. Agora, sejam $g \in G$ e $g_1 \in Im(\theta)$, então existe $h_1 \in H$ tal que $(h_1)\theta = g_1$. Como θ é um módulo cruzado, temos que

$$g_1^g = g^{-1}g_1g = g^{-1}(h_1)\theta g = (h_1^g)\theta \in Im(\theta)$$

e o resultado segue. ■

Proposição 3.15 (Proposition 2.3, [4])**.** *Sejam G e H agindo compativelmente um sobre o outro. Então:*

i) *Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \longrightarrow G$ e $\mu : G \otimes H \longrightarrow H$ tais que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$ e $(g \otimes h)\mu = h^{-g}h$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$;*

ii) *O homomorfismo λ, juntamente com a ação de G sobre $G \otimes H$ definido na Proposição 3.8, é um módulo cruzado. Analogamente, o homomorfismo μ, juntamente com a ação de H sobre $G \otimes H$ definido na Proposição 3.8, é um módulo cruzado;*

iii) *Se $g \in G$, $h \in H$ e $t \in G \otimes H$, então $(t)\lambda \otimes h = t^{-1}t^h$ e $g \otimes (t)\mu = t^{-g}t$;*

iv) *$(t)\lambda \otimes (t_1)\mu = [t, t_1]$ para todo $t, t_1 \in G \otimes H$;*

v) *$g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ e $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$ para todo $g \in G$, $h \in H$ e $t \in G \otimes H$;*

vi) *As ações de G sobre $ker(\mu)$ e de H sobre $ker(\lambda)$ são triviais.*

Demonstração.

i) Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : G \times H &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longrightarrow (g,h)\alpha = g^{-1}g^h. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que α é uma biderivação. Para quaisquer $g, g_1 \in G$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} (gg_1,h)\alpha &= (gg_1)^{-1}(gg_1)^h \\ &= g_1^{-1}g^{-1}g^h g_1^h \\ &= g_1^{-1}g^{-1}g_1g_1^{-1}g^h g_1 g_1^{-1} g_1^h \\ &= g_1^{-1}g^{-1}g_1(g^h)^{g_1}g_1^{-1}g_1^h \\ &= (g^{-1})^{g_1}(g^{g_1g_1^{-1}h})^{g_1}g_1^{-1}g_1^h \\ &= (g^g)^{-1}(g^{g_1})^{h^{g_1}}g_1^{-1}g_1^h \\ &= (g^{g_1}, h^{g_1})\alpha(g_1,h)\alpha. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que $(g, hh_1)\alpha = (g, h_1)\alpha(g^{h_1}, h^{h_1})\alpha$ para quaisquer $g \in G$ e $h, h_1 \in H$. Portanto, α é uma biderivação. Logo, existe um único homomorfismo $\lambda : G \otimes H \longrightarrow G$ tal que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$ para todo $g \in G$ e $h \in H$.
Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : G \times H &\longrightarrow H \\ (g,h) &\longrightarrow (g,h)\alpha = h^{-g}h. \end{aligned}$$

A aplicação β é uma biderivação. De fato, dados $g, g_1 \in G$ e $h \in H$, temos que

$$(gg_1,h)\beta = h^{-gg_1}h = h^{-g_1g_1^{-1}gg_1}h^{g_1}h^{-g_1}h = (h^{-g_1g^{g_1}}h^{g_1})(h^{-g_1}h) = (g^{g_1},h^{g_1})\beta(g_1,h)\beta.$$

De modo análogo, podemos mostrar que $(g, hh_1)\beta = (g, h_1)\beta(g^{h_1}, h^{h_1})$ e concluímos que β é uma biderivação. Logo, existe um único homomorfismo $\mu : G \otimes H \longrightarrow H$ tal que $(g \otimes h)\lambda = h^{-g}h$ para todo $g \in G$ e $h \in H$.

ii) Pelo item anterior λ e μ são homomorfismos. Vamos mostrar que λ e μ são módulos cruzados junto com a ação de G em $G \otimes H$ e H em $G \otimes H$, respectivamente, definidas na Proposição 3.8. Com efeito, sejam $g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$, segue que

$$\begin{aligned}((g_1 \otimes h)^g)\lambda &= (g_1^g \otimes h^g)\lambda \\ &= (g_1^g)^{-1}(g_1^g)^{h^g} \\ &= g_1^{-g} g_1^{gg^{-1}hg} \\ &= g_1^{-g} g_1^{hg} \\ &= (g_1^{-1} g_1^h)^g \\ &= g^{-1}(g_1 \otimes h)g.\end{aligned}$$

Agora, pelo item ii) da Proposição 3.11, para quaisquer $g \otimes h,\ g_1 \otimes h_1 \in G \otimes H$,temos

$$(g_1 \otimes h_1)^{(g\otimes h)\lambda} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h),$$

o que mostra que λ é um módulo cruzado com a ação definida. Analogamente, pode-se mostrar que μ é também um módulo cruzado com sua respectiva ação.

iii) Vamos mostrar que o resultado é válido para os geradores de $G \otimes H$. Tomemos $g_1 \otimes h_1 \in G \otimes H,\ g \in G$ e $h \in H$. Pelos itens iii) e iv) da Proposição 3.11, temos que

$$(\ g_1 \otimes h_1)\lambda \otimes h = g_1^{-1} g_1^{h_1} \otimes h = (g_1 \otimes h_1)^{-1} \otimes (g_1 \otimes h_1)^h.$$

Daí, o resultado é válido para todo $t \in G \otimes H$ pois λ é um homomorfismo. Por outro lado, temos que

$$g \otimes (\ g_1 \otimes h_1)\mu = g \otimes h_1^{-g_1} g_1 = (g_1 \otimes h_1)^{-g} \otimes (g_1 \otimes h_1).$$

Portanto, o resultado é válido para todo $t \in G \otimes H$ pois μ é um homomorfismo.

iv) Sejam $g \otimes h,\ g_1 \otimes h_1 \in G \otimes H$. Como λ e μ são homomorfismos, basta provar o resultado para os geradores de $G \otimes H$. Pelo item v) da Proposição 3.11 temos que

$$(g \otimes h)\lambda(g_1 \otimes h_1)\mu = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1 = [g \otimes h, g_1 \otimes h_1].$$

Portanto, o resultado é válido para todo $t, t_1 \in G \otimes H$.

v) Vamos mostrar que o resultado é válido para ps geradores de $G \otimes H$. Como as ações de G sobre H e de H sobre G são compatíveis, temos que

$$g^{(x\otimes y)\lambda} = g^{x^{-1}x^y} = g^{x^{-1}y^{-1}xy} = g^{y^{-x}y} = g^{(x\otimes y)\mu},$$

e ainda,

$$h^{(x\otimes y)\lambda} = h^{x^{-1}x^y} = h^{x^{-1}y^{-1}xy} = h^{y^{-x}y} = h^{(x\otimes y)\mu},$$

para todos $g, x \in G,\ h, y \in H$. Portanto o resultado é válido para todo $t \in G \otimes H$ pois λ e μ são homomorfismos.

vi) Sejam $t \in ker(\mu)$ e $g \in G$. Pelo item iii), temos que

$$g \otimes (t)\mu = g \otimes 1_H = 1_{G\otimes H} = t^{-g}t.$$

Logo $t^g = t$, ou seja, a ação é trivial. O caso em que H agem trivialmente sobre $ker(\lambda)$ é análogo.

■

Proposição 3.16. *Se G e H são abelianos grupos com ações compatíveis um sobre o outro, então $G \otimes H$ é abeliano.*

Demonstração. Se G e H são abelianos, então G é G-trivial e H é H-trivial uma vez que a ação que estamos considerando de um grupo nele mesmo é por conjugação. Dados $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos que $g^{h_1^{-1}} g_1 \otimes h^{g_1^{-1}} h_1 \in G \otimes H$. Pelas equações (3.1) e (3.2) definidoras do produto tensorial não abeliano de grupos, temos que

$$\begin{aligned} g^{h_1^{-1}} g_1 \otimes h^{g_1^{-1}} h_1 &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h^{g_1^{-1} g_1} h_1^{g_1})(g_1 \otimes h^{g_1^{-1}} h_1) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g^{h_1^{-1} g_1 h_1^{g_1}} \otimes h^{h_1^{g_1}})(g_1 \otimes h_1)(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g^{g_1} \otimes h^{h_1^{g_1}})(g_1 \otimes h_1)(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1)(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g^{h_1^{-1}} g_1 \otimes h^{g_1^{-1}} h_1 &= (g^{h_1^{-1}} g_1 \otimes h_1)(g^{h_1^{-1} h_1} g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g_1 \otimes h_1)(g^{h_1^{-1} h_1 g_1^{h_1}} \otimes h^{g_1^{-1} h_1 g_1^{h_1}})(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g_1 \otimes h_1)(g^{g_1^{h_1}} \otimes h^{h_1})(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}) \\ &= (g^{h_1^{-1} g_1} \otimes h_1^{g_1})(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h)(g_1^{h_1} \otimes h^{g_1^{-1} h_1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pela igualdade de (3.4) e (3.5) e retirando os termos iguais, segue que

$$(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1 \otimes h_1).$$

Portanto, $G \otimes H$ é abeliano. ■

Proposição 3.17. *Sejam G e H grupos que agem compativelmente um sobre o outro. Se $t_1, \dots, t_n \in G \otimes H$, então*

$$[t_1, \dots, t_n] = [(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda] \otimes (t_n)\mu,$$

para $n \geqslant 2$ um natural qualquer.

Demonstração. Vamos provar o resultado com indução sobre n. Para $n = 2$ o resultado é válido pelo item iv) da Proposição 3.15. Suponha que o resultado seja válido para n, vamos provar que é válido para $n+1$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} [t_1, \dots, t_n, t_{n+1}] &= [[t_1, \dots, t_n], t_{n+1}] \\ &= [[(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda] \otimes (t_n)\mu], t_{n+1}] \\ &= ([(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda] \otimes (t_n)\mu)\lambda \otimes (t_{n+1})\mu \\ &= [(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda]^{-1}[(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda]^{(t_n)\mu} \otimes (t_{n+1})\mu \\ &= [(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda]^{-1}[(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda]^{(t_n)\lambda} \otimes (t_{n+1})\mu \\ &= [(t_1)\lambda, \dots, (t_{n-1})\lambda, (t_n)\lambda] \otimes (t_{n+1})\mu. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado é válido para qualquer natural n maior ou igual a 2. ■

Comentários gerais

Apesar de um campo de estudo relativamente novo, é sabido que o produto tensorial não abeliano de grupos satisfaz propriedades interessantes de grupos. Por exemplo em [3] R. Brown, D.L. Johnson, E. F. Robertson estudaram sobre a solubilidade e nilpotência do produto tensorial não abeliano de grupos dadas condições sobre os grupos trabalhados (cf. [24], [16]); em [8] Ellis mostrou que o produto tensorial de grupos finitos é ainda finito; em também em [2] R. Bastos, I. Nakaoka e N. Rocco apresentaram critérios para a finitude do produtos tensoriais em termos de certos subconjuntos envolvendo os geradores (cf. [23]). Recentemente, um estudo de G. Donadze, M. Ladra e V. Z. Thomas em [6] concluíram que a propriedade de supersolubilidade, nilpotência-por-finito, solubilidade-por-finito, localmente solúvel, localmente nilpotente, localmente policíclico e localmente supersolúvel são fechadas sob a formação do produto tensorial não abeliano de grupos.

Capítulo 4

O grupo $\eta(G, H)$

Neste capítulo, preliminarmente apresentaremos o grupo que aparece em [16] e em [17] e faremos exemplos da construção desse grupo. Em um segundo momento, daremos condições de nilpotência para tal grupo. Este conceito é uma generalização do produto tensorial não abeliano de grupos além de ter um subgrupo normal isomorfo ao produto tensorial não abeliano que é útil para cálculos computacionais.

4.1 Definição e propriedades

Em [19] N. Rocco realiza uma construção de um grupo a partir de um grupo para estudar o quadrado tensorial não abeliano de uma forma mais geral. Podemos ainda generalizar esta construção para dois grupos distintos.

Definição 4.1. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, H^{φ} uma cópia isomorfa de H dada pelo isomorfismo $\varphi : H \longrightarrow H^{\varphi}$ determinado por $(h)\varphi = h^{\varphi}$ para todo $h \in H$. Com isso, podemos definir o grupo*

$$\eta(G, H) := \langle G, H^{\varphi} |\ R\rangle,$$

onde,

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}], [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}], \forall g, g_1 \in G \text{ e } h, h_1 \in H\}. \tag{4.1}$$

Observação 4.2. *Equivalente a esta definição, podemos dizer que*

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^{\varphi}}{\langle R\rangle^{[G,H^{\varphi}]}}.$$

Se $G = H$ na definição acima, denotamos o grupo $\eta(G, G)$ por $\nu(G)$ que foi introduzida por N. Rocco em [19].

A partir de subgrupos de G e H podemos identificar subgrupos de $\eta(G, H)$ e exibir propriedades que serão úteis para calculação em $\eta(G, H)$.

Definição 4.3. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Dizemos que um subgrupo M de G é um H-subgrupos se $m^h \in M$ para todo $m \in M$ e $h \in H$.*

Proposição 4.4 (Proposition 2.4, [16])**.** *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Se M é um H-subgrupo normal de G e N é um G-subgrupo normal de H então vale que:*

i) $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$;

ii) $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$ *para todo* $i, j \geqslant 1$;

iii) $[M^{(i)}, (N^{(j)})^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$ *para todo* $i, j \geqslant 0$.

Demonstração.

i) Pelas relações (4.1), temos que $[m, n^{\varphi}]^g = [m^g, (n^g)^{\varphi}]$ para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $g \in G$. Como $M \trianglelefteq G$ e N é um G-subgrupo normal de H, segue que $m^g \in M$, $n^g \in N$, logo $(n^g)^{\varphi} \in N^{\varphi}$, ou seja, G normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Por outro lado, $[m, n^{\varphi}]^h = [m^h, (n^h)^{\varphi}]$ pela relação de (4.1), e como $N \trianglelefteq H$ e M é um H-subgrupo normal de G, então $m^h \in M$ e $n^h \in N$, daí $[m^h, (n^h)^{\varphi}] \in [M, N^{\varphi}]$, ou seja, H^{φ} normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Como G, H^{φ} são os geradores de $\eta(G,H)$, temos que $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$.

ii) Como $\gamma_i(M)\ char M$ e $M \trianglelefteq G$, então $\gamma_i(M) \trianglelefteq G$. Vamos mostrar, com indução sobre i, que $\gamma_i(M)$ é um H-subgrupo de G. Com efeito, se $i = 1$, $\gamma_1(M) = M$ e M é um H-subgrupo de G. Suponhamos que o resultado seja válido para $i-1$, vamos mostrar que é válido para i. Dados $x = [x_{i-1}, m] \in \gamma_i(M)$ onde $x_{i-1} \in \gamma_{i-1}(M)$ e $m \in M$, temos que

$$x^h = [x_{i-1}, m]^h = [x_{i-1}^h, m^h] \in [\gamma_{i-1}(M), M] = \gamma_i(M),$$

para todo $h \in H$, logo o resultado é válido para todo $i \in \mathbb{N}$ Analogamente, $\gamma_j(N)$ é um G-subgrupo normal de H. Portanto, pelo item anterior temos que $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$.

iii) Como $M^{(i)}$ *char* M e $M \trianglelefteq G$, então $M^{(i)} \trianglelefteq G$. Vamos mostrar, com indução sobre i, que $M^{(i)}$ é um H-subgrupo de G. Com efeito, se $i = 1$, $M^{(1)} = M$ e M é um H-subgrupo de G. Suponhamos que o resultado seja válido para $i-1$, vamos mostrar que é válido para i. Dados $x = [x_{i-1}, x_{i-1}] \in M^{(i)}$ onde $x_{i-1} \in M^{(i-1)}$, temos que

$$x^h = [x_{i-1}, x_{i-1}]^h = [x_{i-1}^h, x_{i-1}^h] \in [M^{(i-1)}, M^{(i-1)}] = M^{(i)}$$

para todo $h \in H$. Analogamente, $N^{(j)}$ é um G-subgrupo normal de H. Portanto, pelo item i) temos que $[M^{(i)}, (N^{(j)})^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$.

■

Observação 4.5. *Pela proposição acima, temos que o subgrupo* $[G, H^{\varphi}]$ *é normal em* $\eta(G,H)$. *Denotaremos este subgrupo normal de* $\eta(G,H)$ *por* $\tau(G,H) := [G, H^{\varphi}]$. *Note ainda que* $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^{\varphi}$ *pois* $\tau(G,H)$ *é normal em* $\eta(G,H)$, $G \cup H^{\varphi}$ *gera* $\eta(G,H)$ *e* $h^{\varphi}g = [g^{-1}, (h^{-1})^{\varphi}]gh^{\varphi}$ *para quaisquer* $g \in G$ *e* $h \in H$.

Em [15] I. Nakaoka provou de maneira alternativa a partir de um trabalho de D. Gilbert e P. J. Higgins [9] que os grupos $\tau(G,H)$ e $G \otimes H$ são isomorfos.

Teorema 4.6. *Existe um isomorfismo* $\alpha : \tau(G,H) \longrightarrow G \otimes H$ *tal que* $([g, h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$.

Demonstração. Considere o produto livre $G * H^{\varphi}$. Pelo Lema 1.42 o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $G * H^{\varphi}$ é livre, livremente gerado pelos elementos $[g, h^{\varphi}]$, onde $g \in G \backslash \{1\}$ e $h \in H \backslash \{1\}$. Sejam os conjuntos

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}], [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y, (h^y)^{\varphi}], g, x \in G\backslash\{1\} \text{e } h, y \in H\backslash\{1\}\}$$

$$S = \{[gg_1, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}], [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g, (h_1)^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}],$$
$$g, g_1 \in G\backslash\{1\} \text{e } h, h_1 \in H\backslash\{1\}\}.$$

Como $[G, H^{\varphi}]$ é um subgrupo normal de $G * H^{\varphi}$, R e S são subconjuntos de $[G, H^{\varphi}]$.

Afirmação 4.6.1. $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G*H^{\varphi}$.

De fato, sejam $s=[gg_1,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}][g_1,h^{\varphi}]$ e $x\in G$. Pelas propriedades de comutadores temos que

$$\begin{aligned}
s =&[gg_1,h^{\varphi}]^{-x}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{x}[g_1,h^{\varphi}]^{x}\\
=&([gg_1,h^{\varphi}]^{x}[x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{x}[x,(h^{g_1})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g_1,h^{\varphi}]^{x}[x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1}\\
=&([(gg_1)x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g_1x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1}\\
=&[x,h^{\varphi}][(gg_1)x,h^{\varphi}]^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}]^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]\\
&[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[(gg_1)x,h^{\varphi}][(gg_1)x,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}][g_1x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1}\\
=&[x,h^{\varphi}]([(gg_1)x,h^{\varphi}]^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}])([x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}]^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}])\\
&([(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[(gg_1)x,h^{\varphi}])([(gg_1)x,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}][g_1x,h^{\varphi}])[x,h^{\varphi}]^{-1}\\
=&[x,h^{\varphi}]([(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[(gg_1)x,h^{\varphi}])^{-1}s_1\\
&([(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[(gg_1)x,h^{\varphi}])s_2[x,h^{\varphi}]^{-1}\\
=&(s_1^{[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[(gg_1)x,h^{\varphi}]}s_2)^{[x,h^{\varphi}]^{-1}}
\end{aligned}$$

sendo que,

$$\begin{aligned}
s_1&=[x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}]^{-1}[(g^{g_1})x,(h^{g_1})^{\varphi}]\in S\\
s_2&=[(gg_1)x,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}][g_1x,h^{\varphi}]\in S.
\end{aligned}$$

Logo, $s^{x}\in\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$. Agora, para $y\in H$, temos

$$\begin{aligned}
s^{y^{\varphi}} =&[gg_1,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{y^{\varphi}}[g_1,h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}\\
=&([gg_1,y^{\varphi}]^{-1}[gg_1,(hy)^{\varphi}])^{-1}([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])([g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
=&([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}])([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])([g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
=&([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}])[g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}][g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}[(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}][g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]\\
&[g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}[(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}]^{-1}([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])[g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]([g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]^{-1}\\
&[g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
=&([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}][g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}])([g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}[(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}][g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}])\\
&[g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}([(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])[g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]([g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]^{-1}\\
&[g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
=&s_3s_4[g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}s_5[g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]s_6\\
=&s_3s_4s_5^{[g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]}s_6
\end{aligned}$$

sendo que,

$$\begin{aligned}
s_3&=[gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}][g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]\in S\\
s_4&=[g^{y}g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]^{-1}[(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}][g_1^{y},(h^{y})^{\varphi}]\in S\\
s_5&=[(g^{y})^{g_1^{y}},((h^{y})^{g_1^{y}})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}\in S\\
s_6&=[g_1^{y},((h^{y}))^{\varphi}]^{-1}[g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}]\in S.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $s^{y^{\varphi}}\in\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}}$. De forma análoga podemos provar que o conjugado de um elemento de S da forma $[g,(hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g,(h_1)^{\varphi}][g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}]$ por um elemento qualquer de $G*H^{\varphi}$ pertence à $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$ e segue que $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}\trianglelefteq G*H^{\varphi}$.

Afirmação 4.6.2. $\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$.

Com efeito, consideremos elementos r, r' de R da forma

$$r = [g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}] \text{ e } r' = [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y, (h^y)^{\varphi}].$$

Temos que

$$\begin{aligned} r &= [g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}] \\ &= [x, h^{\varphi}][gx, h^{\varphi}]^{-1}[g^x, (h^x)^{\varphi}] \\ &= [x, h^{\varphi}][gx, h^{\varphi}]^{-1}[g^x, (h^x)^{\varphi}][x, h^{\varphi}][x, h^{\varphi}]^{-1} \\ &= t^{[x,h^{\varphi}]^{-1}} \end{aligned}$$

onde $t = [gx, h^{\varphi}]^{-1}[g^x, (h^x)^{\varphi}][x, h^{\varphi}]$. E ainda,

$$\begin{aligned} r' &= [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y, (h^y)^{\varphi}] \\ &= [g, (hy)^{\varphi}]^{-1}[g, y^{\varphi}][g^y, (h^y)^{\varphi}] \\ &= t' \in S. \end{aligned}$$

onde $t' = [g, (hy)^{\varphi}]^{-1}[g, y^{\varphi}][g^y, (h^y)^{\varphi}]$. Logo, $R \subseteq \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$.
Agora, sejam s, s' elementos de S tais que

$$\begin{aligned} s &= [gg_1, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}] \\ s' &= [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g, (h_1)^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} s &= [gg_1, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}] \\ &= ([g, h^{\varphi}]^{g_1}[g_1, h^{\varphi}])^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}] \\ &= [g_1, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{g_1})^{-g}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}][g_1, h^{\varphi}] \\ &= r^{[g_1,h^{\varphi}]} \in \langle R\rangle^{[G,H^{\varphi}]}. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} s' &= [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g, (h_1)^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}] \\ &= ([g, h_1^{\varphi}][g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}})^{-1}[g, (h_1)^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}] \\ &= [g, h^{\varphi}]^{-h_1^{\varphi}}[g, h_1^{\varphi}]^{-1}[g, (h_1)^{\varphi}][g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}] \\ &= [g, h^{\varphi}]^{-h_1^{\varphi}}[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}] \\ &= r' \in \langle R\rangle^{[G,H^{\varphi}]}. \end{aligned}$$

Assim, $R \subseteq \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$ e $S \subseteq \langle R\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \subseteq \langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}$. De acordo com a Afirmação 4.6.1, temos que $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G * H^{\varphi}$, e concluímos que $\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$.
Das afirmações 4.6.1 e 4.6.2, segue que

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^{\varphi}}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}}$$

e portanto,

$$\tau(G, H) = \frac{[G, H^{\varphi}]}{\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}}.$$

Com isso, o homomorfismo $\psi : [G, H^{\varphi}]G \longrightarrow G \otimes H$ dado por $([g, h^{\varphi}])\psi = g \otimes h$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$ induz um homomorfismo $\alpha : \tau(G, H) \longrightarrow G \otimes H$ determinado por $([g, h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$. Por outro lado, a aplicação $\theta : G \times H \longrightarrow \tau(G, H)$ dada por $(g, h)\theta = [g, h^{\varphi}]$ é uma biderivação e assim induz um homomorfismo $\beta : G \otimes H \longrightarrow \tau(G, H)$ determinado por $(g, h)\beta = [g, h^{\varphi}]$. Podemos notar que $\alpha\beta = Id_{\tau(G,H)}$ e $\beta\alpha = Id_{G\otimes H}$, ou seja, α é um isomorfismo, como queríamos demonstrar. ■

Sabendo que os grupos $\tau(G, H)$ e $G \otimes H$ são isomorfos, podemos reformular as propriedades do produto tensorial não abeliano dos grupos G e H para o grupo $\eta(G, H)$.

Proposição 4.7 (Proposition 2.3, [4]). *Sejam G, H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Em $\eta(G, H)$, temos que*

a) *Para todo $g, x \in G$ e $h, y \in H$ as seguintes identidades são válidas*

- ***i)*** $[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-1}x^{y}} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-x}y)^{\varphi}}$;
- ***ii)*** $[g, h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]^{-1}} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-y}x} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-1}y^{x})^{\varphi}}$;
- ***iii)*** $[g^{-1}g^{h}, y^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}$;
- ***iv)*** $[x, (h^{-g}h)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-x}[g, h^{\varphi}]$;
- ***v)*** $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] = [g^{-1}g^{h}, (y^{-x}y)^{\varphi}]$;
- ***vi)*** $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]^{-1}] = [g^{-1}g^{h}, (y^{-1}y^{x})^{\varphi}]$.

b) *Existem homomorfismos de grupos $\lambda : \tau(G, H) \longrightarrow G$ e $\mu : \tau(G, H) \longrightarrow H$ tais que $([g, h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^{h}$ e $([g, h^{\varphi}])\mu = h^{-g}h$ para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$;*

c) $[(t_1)\lambda, ((t_2)\mu)^{\varphi}] = [t_1, t_2]$, *para quaisquer $t_1, t_2 \in \tau(G, H)$;*

d) $[(t)\lambda, h^{\varphi}] = t^{-1}t^{h}$ *e* $[g, ((t)\mu)^{\varphi}] = t^{-g}t$ *para quaisquer $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G, H)$;*

e) $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ *e* $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$ *para todo $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G, H)$;*

f) *$ker(\lambda)$ e $ker(\mu)$ são subgrupos centrais de $\tau(G, H)$.*

Demonstração.

a) Segue diretamente do Teorema 4.6 e da Proposição 3.11.
Os demais itens seguem do Teorema 4.6 juntamente da Proposição 3.15.

■

Observação 4.8. *No decorrer deste trabalho, fixaremos a notação de λ e μ para os homomorfismos da Proposição 4.7.*

Como $\ker(\lambda)$ e $\ker(\mu)$ são centrais em G e H, respectivamente, e sabendo ainda que tais subgrupos são centrais em $\tau(G, H)$, então a interseção desses núcleos é central em $\eta(G, H)$, lembrando que $\eta(G, H) = GH^{\varphi}\tau(G, H)$.

Proposição 4.9. *Sejam G, H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Então, $ker(\lambda) \cap \ker(\mu)$ age trivialmente sobre $\eta(G, H)$. Ademais, $ker(\lambda) \cap \ker(\mu) \leqslant Z(\eta(G, H))$.*

No próximo exemplo iremos mostrar que se G, H são grupos nilpotentes não necessariamente o grupo $\eta(G, H)$ é nilpotente.

Exemplo 4.10. *Sejam p um primo ímpar, $C_p = \langle a|\ a^p = 1\rangle$ o grupo cíclico de ordem p e $C_2 = \langle b|\ b^2 = 1\rangle$ o grupo cíclico de ordem 2. Suponha que C_p age trivialmente sobre C_2 e C_2 age por inversão sobre C_p, ou seja, $a^b = a^{-1}$. Foi provado no Exemplo 3.5 que estas ações são compatíveis. Assim , podemos definir o grupo $\eta(C_p, C_2)$ que tem a apresentação dada por*

$$\eta(C_p, C_2) = \langle a, b^\varphi | a^p = (b^\varphi)^2 = 1, [a, b^\varphi]^a = [a, b^\varphi], [a, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a^{-1}, b^\varphi]\rangle.$$

Como $1 = [a^{-1}a, b^\varphi] = [a^{-1}, b^\varphi]^a[a, b^\varphi] = [a^{-1}, b^\varphi][a, b^\varphi]$, *então*

$$[a^{-1}, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^{-1}. \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$[a^2, b^\varphi] = [aa, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^a[a, b^\varphi] = [a, b^\varphi][a^2, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^2. \tag{4.3}$$

Com isso, vamos provar que $[a^n, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^n$ para todo inteiro n,com indução sobre n. Consideremos o caso em que $n \geqslant 0$, é claro que o resultado é válido para $n = 0, 1$ e para $n = 2$ é válido por (4.3). Suponha que o resultado seja válido para n, vamos provar que é válido para $n + 1$. Com efeito,

$$[a^{n+1}, b^\varphi] = [a^na, b^\varphi] = [a^n, b^\varphi]^a[a, b^\varphi] = [(a^n)^a, (b^a)^\varphi][a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^n[a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^{n+1}.$$

Para o caso em que $n \leqslant 0$, existe $m \geqslant 0$ tal que $-m = n$, daí, por (4.2) e pelas considerações anteriores, segue que

$$[a^n, b^\varphi] = [(a^{-1})^m, b^\varphi] = [a^{-1}, b^\varphi]^m = [a, b^\varphi]^{-m} = [a, b^\varphi]^n.$$

Portanto, o resultado é válido para todo inteiro n.
Logo, $[a, b^\varphi]$ tem ordem um divisor de p. Para mostrar que este elemento não é o trivial em $\eta(C_p, C_2)$ vamos usar as informações acima para construir concretamente um grupo de ordem $2p^2$ isomorfo à $\eta(C_p, C_2)$. Sejam $V = \langle x, y|\ x^p = y^p = 1,\ [x, y] = 1\rangle$ ($\simeq C_p \times C_p$) e α um automorfismo de V tal que $x^\alpha = xy$ e $y^\alpha = y^{-1}$. Tomando $\langle\alpha\rangle \leqslant Aut(V)$ e uma ação de $\langle\alpha\rangle$ sobre V dada por $v^{\alpha^i} = (v)\alpha^i$ para quaisquer $i \in \mathbb{Z}$ é possível definir o produto semidireto $\langle\alpha\rangle \ltimes V$.
Afirmamos que $\langle\alpha\rangle \ltimes V \simeq \eta(C_p, C_2)$.
De fato, consideremos a aplicação $\theta : \{a, b^\varphi\} \longrightarrow \langle\alpha\rangle \ltimes V$ dada por $a^\theta = (1_{Aut(V)}, x)$ e $(b^{\varphi^\theta}) = (\alpha, 1_V)$. Podemos aplicar o Teste de Substituição (uma vez que θ satisfaz as relações (4.1) definidoras de $\eta(G, H)$) existe um homomorfismo $\theta_1 : \eta(G, H) \longrightarrow \langle\alpha\rangle \ltimes V$ que estende θ. Agora, seja $\theta_2 : \langle\alpha\rangle \ltimes V \longrightarrow \eta(G, H)$ dada por $(a^\varepsilon, x^iy^j)\theta_2 = a^i[a, b^\varphi]^j(b^\varphi)^\varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Temos que θ_2 é um homomorfismo e vemos que $\theta_1\theta_2 = Id_{\eta(G,H)}$ e $\theta_2\theta_1 = Id_{\langle\alpha\rangle \ltimes V}$, ou seja, θ_1 é um isomorfismo e $\langle\alpha\rangle \ltimes V \simeq \eta(G, H)$.
Note que,

$$(1, y)\theta_2 = [a, b^\varphi] \text{ e } (1, y) = ([a, b^\varphi])\theta_1.$$

Portanto, $[a, b^\varphi]$ tem ordem p e $\tau(C_p, C_2) \simeq C_p$. E concluímos que $\eta(C_p, C_2)$ não é nilpotente pois contém um subgrupo diedral de ordem $2p$ (não nilpotente, pelo exemplo 2.11 e lembrando que p é primo ímpar) gerado pelos elementos $[a, b^\varphi]$ e b^φ.

Exemplo 4.11. *Consideremos $V_4 = \langle a, b|\ a^2 = b^2 = 1, [a, b] = 1\rangle$ o grupo de Klein de 4 elementos agindo trivialmente sobre o cíclico de ordem 3, $C_3 = \langle c|\ c^3 = 1\rangle$ agindo sobre V_4 permutando ciclicamente os elementos de ordem 2, ou seja, $a^c = b, b^c = ab$. Estas ações* *são compatíveis. De fato, temos que a ação de V_4 sobre C_3 é trivial, logo é compatível. Agora, dado $g \in V_4$, temos que*

$$a^{(c^g)} = a^c = b \text{ e } a^{g^{-1}cg} = a^{cg} = b^g = b$$
$$b^{(c^g)} = b^c = ab \text{ e } a^{g^{-1}cg} = b^{cg} = (ab)^g = ab,$$

logo a ação de C_3 sobre V_4 é compatível. Das relações que definem $\eta(V_4, C_3)$, segue que

$$[a^ib^j, c^\varphi]^a = [a^ib^j, c^\varphi] = [a^ib^j, c^\varphi]^b \text{ e}$$
$$[a^ib^j, c^\varphi]^{c^\varphi} = [(a^i)^c(b^j)^c, c^\varphi] = [b^ia^jb^j, c^\varphi] = [a^jb^{i+j}, c^\varphi],$$

para todo $0 \leqslant i, j \leqslant 1$, onde a soma $i + j$ é tomada módulo 2. Consequentemente, temos que

$$1 = [a^2, c^\varphi] = [a, c^\varphi]^a[a, c^\varphi] = [a, c^\varphi]^2 \text{ e}$$
$$1 = [b^2, c^\varphi] = [b, c^\varphi]^b[b, c^\varphi] = [b, c^\varphi]^2$$

e como $ab = ba$, temos que

$$[ab, c^\varphi] = [a, c^\varphi]^b[b, c^\varphi] = [a, c^\varphi][b, c^\varphi] = [b, c^\varphi][a, c^\varphi] = [ab, c^\varphi].$$

Isso mostra que $[a, c^\varphi]$ e $[b, c^\varphi]$ tem ordem no máximo 2. Por outro lado.

$$[a, (c^\varphi)^2] = [a, c^\varphi][a, c^\varphi]^{c^\varphi} = [a, c^\varphi][b, c^\varphi] = [ab, c^\varphi].$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
[a, (c^\varphi)^3] &= [a, c^\varphi][a, (c^\varphi)^2]^{c^\varphi} \\
&= [a, c^\varphi]([a, c^\varphi][b, c^\varphi])^{c^\varphi} \\
&= [a, c^\varphi][b, c^\varphi][ab, c^\varphi] \\
&= [a, c^\varphi][b, c^\varphi][a, c^\varphi][b, c^\varphi] \\
&= [a, c^\varphi]^2[b, c^\varphi]^2.
\end{aligned}$$

Assim, a apresentação de $\eta(V_4, C_3)$ pode ser dada por

$$\begin{aligned}
\eta(V_4, C_3) =& \langle a, b, c^\varphi | a^2 = b^2 = (c^\varphi)^3 = [a, b] = 1, [a, c^\varphi]^a = [a, c^\varphi], [a, c^\varphi]^b = [a, c^\varphi], \\
& [a, c^\varphi]^{c^\varphi} = [b, c^\varphi], [b, c^\varphi]^a = [a, c^\varphi], [b, c^\varphi]^b = [b, c^\varphi], [b, c^\varphi]^{c^\varphi} = [ab, c^\varphi]\rangle.
\end{aligned}$$

Vamos construir uma estrutura concreta isomorfa ao grupo $\eta(V_4, C_3)$ de modo análogo ao construído no Exemplo 4.10. Para isso, considere um 2-grupo abeliano elementar de ordem 16, digamos $W = \langle x, y, z, w\rangle$, e β um automorfismo de W definido pelos geradores $x \mapsto xz$, $y \mapsto yw$, $z \mapsto w$, $w \mapsto zw$. Note que $o(\beta) = 3$, então o grupo $W \rtimes \langle\beta\rangle$ tem ordem 48. Assim, existe uma aplicação $\theta : \eta(V_4, C_3) \longrightarrow W \rtimes \langle\beta\rangle$ tal que $a \mapsto x$, $b \mapsto y$,$c^\varphi \mapsto \beta$, $[a, c^\varphi] = a^{-1}a^{c^\varphi} \mapsto z$ e $[b, c^\varphi] = b^{-1}b^{c^\varphi} \mapsto w$. Isso resulta em um isomorfismo de $\eta(V_4, C_3)$ em $W \rtimes \langle\beta\rangle$, onde o subgrupo $[V_4, C_3^\varphi]C_3^\varphi$ é isomorfo ao subgrupo $H = \langle z, w, \beta\rangle$. Mas H é isomorfo ao grupo alternado A_4, logo H não é nilpotente. Consequentemente, como $H \leqslant \eta(V_4, C_3)$ concluímos que $\eta(V_4, C_3)$ não é nilpotente.

Definição 4.12. *Sejam G, H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Chamaremos o subgrupo $D_H(G) := \langle g^{-1}g^h | g \in G \text{ e } h \in H\rangle$ de G de subgrupo derivativo de G por H.*

Observação 4.13. *Note que se G e H agem compativelmente um sobre o outro, então $D_H(G) = Im(\lambda)$ e $D_G(H) = Im(\mu)$, sendo que λ e μ são as aplicações fixadas na Observação 4.8.*

Proposição 4.14 (Proposition 2.5, [16]). *Sejam G, H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Então:*

i) *$D_H(G)$ é um H-subgrupo normal de G e $D_G(H)$ é um G-subgrupo normal de H;*

ii) *Para quaisquer $i \geqslant 1$ e $j \geqslant 0$ temos que $\gamma_i(D_H(G))$ e $D_H(G)^{(j)}$ são H-subgrupos normais de G e $\gamma_i(D_G(H))$ e $D_G(H)^{(j)}$ são G-subgrupos normais de H;*

iii) *$D_H(G)^{(i)} = (\tau(G, H)^{(i)})\lambda$ e $D_G(H)^{(i)} = (\tau(G, H)^{(i)})\mu$ para qualquer $i \geqslant 0$.*

Demonstração.

i) Como a ação de G sobre H é compatível, para quaisquer $g, x \in G$ e $h \in H$, temos que
$$(g^{-1}g^h)^x = (g^{-1})^x(g^h)^x = (g^x)^{-1}g^{xx^{-1}hx} = (g^x)^{-1}(g^x)^{h^x} \in D_H(G),$$
daí, $D_H(G) \trianglelefteq G$. Agora, se $g \in G$ e $h, y \in H$, temos que
$$(g^{-1}g^h)^y = (g^y){-}1(g^h)^y = (g^y){-}1g^{yy^{-1}hy} = (g^y){-}1(g^y)^{h^y} \in D_H(G).$$
Logo, $D_H(G)$ é um H-subgrupo normal de G. E ainda, como a ação de G sobre H é compatível, podemos mostrar de modo análogo que $D_G(H)$ é um G-subgrupo normal de H.

ii) Como para qualquer inteiro positivo i, $\gamma_i(D_H(G))$ é um subgrupo característico de $D_H(G)$ e pelo item anterior $D_H(G) \trianglelefteq G$, então $\gamma_i(D_H(G)) \trianglelefteq G$. Agora, vamos provar com indução sobre $n \geqslant 1$ que $\gamma_i(D_H(G))$ é um H-subgrupo de G. Se $n = 1$ o resultado é válido pelo item anterior. Suponha que o resultado seja válido para i, vamos provar que vale para $i + 1$. Para $x = [a, b] \in \gamma_{i+1}(D_H(G))$ com $a \in \gamma_i(D_H(G))$, $b \in D_H(G)$ e $h \in H$, temos que $[a, b]^h = [a^h, b^h] \in [\gamma_i(D_H(G)), D_H(G)] = \gamma_{i+1}(D_H(G))$. Logo, o resultado é válido para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $\gamma_i(D_H(G))$ é um H-subgrupo normal de G. De modo análogo podemos provar os outros casos.

iii) Vamos provar com indução sobre $i \in \mathbb{N}$. Como a ação de G sobre H é compatível, para $i = 0$ temos que
$$D_H(G)^{(0)} = D_H(G) = (\tau(G, H))\lambda = (\tau(G, H)^{(0)})\lambda.$$
Suponha que o resultado seja válido para o natural i, vamos mostrar que vale para $i + 1$. Com efeito,
$$\begin{aligned}(\tau(G, H)^{(i+1)})\lambda &= ([\tau(G, H)^{(i)}, \tau(G, H))^{(i)}])\lambda \\ &= [(\tau(G, H)^{(i)})\lambda, (\tau(G, H)^{(i)})\lambda] \\ &= [D_H(G)^{(i)}, D_H(G)^{(i)}] \\ &= D_H(G)^{(i+1)}.\end{aligned}$$
Assim, o resultado é válido para todo $i \in \mathbb{N}$. De modo análogo podemos mostrar que $D_G(H)^{(i)} = (\tau(G, H)^{(i)})\mu$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

■

Apresentaremos agora uma descrição dos termos das séries centrais do subgrupo $\tau(G, H)$. Tal resultado é fundamental para deduzir a nilpotência e a solubilidade de $\tau(G, H)$ condicionado à nilpotência e a solubilidade dos derivativos de G e H.

Teorema 4.15 (Teorema A, [16])**.** *Sejam G e H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Então:*

i) *Para $i \geqslant 2$*

$$\gamma_i(\tau(G, H)) = [\gamma_{i-1}(D_H(G), (D_G(H))^\varphi].$$

Em particular, se G é nilpotente, então $\tau(G, H)$ é nilpotente.

ii) *Para $i \geqslant 1$, temos que*

$$\tau(G, H)^{(i)} = [D_H(G)^{(i-1)}, (D_G(H)^{(i-1)})^\varphi].$$

Em particular, se G é solúvel, então $\tau(G, H)$ é solúvel.

Demonstração. Primeiramente, note que se $D_H(G) = 1$ então pela Proposição 4.7, temos

$$[g, h^\varphi]^{[x,y^\varphi]} = [g, h^\varphi]^{x^{-1}x^y} = [g, h^\varphi],$$

para todo $g, x \in G$ e $h, y \in H$. Portanto, $\tau(G, H)$ é um grupo abeliano e, consequentemente, $D_G(H)(= Im(\mu))$ também é abeliano. Assim, podemos assumir que $D_H(G)$ é não trivial.

i) Vamos provar o resultado com indução sobre i. Pela Proposição 4.7, temos que $[u, v] = [(u)\lambda, ((v)\mu)^\varphi]$. Como $D_H(G) = Im(\lambda)$ e $D_G(H) = Im(\mu)$, segue que

$$\begin{aligned}\gamma_2(\tau(G, H)) &= [\tau(G, H), \tau(G, H)]\\ &= [(\tau(G, H))\lambda, ((\tau(G, H))\mu)^\varphi]\\ &= [\gamma_1(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi].\end{aligned}$$

Logo o resultado é válido para $i = 2$. Suponha válido para i, vamos provar que é válido para $i + 1$. Pela Proposição 1.7, segue que

$$\begin{aligned}\gamma_{i+1}(\tau(G, H)) =&[\gamma_{i-1}(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi, \tau(G, H)]\\ =&\langle [x, ((v)\mu)^\varphi, t]^z \mid x \in \gamma_{i-1}(D_H(G)), v, t \in \tau(G, H) \text{ e}\\ & z \in [\gamma_{i-1}(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi]\rangle.\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 4.7, temos que

$$\begin{aligned}[x, ((v)\mu)^\varphi, t] &= [(x, ((v)\mu)^\varphi)\lambda, ((t)\mu)^\varphi]\\ &= [x^{-1}x^{(v)\mu}, ((t)\mu)^\varphi]\\ &= [x^{-1}x^{(v)\lambda}, ((t)\mu)^\varphi] \in [\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi].\end{aligned}$$

Pelas proposições 4.4 e 4.14, temos que $[\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi] \trianglelefteq \eta(G, H)$, com isso

$$[x, ((v)\mu)^\varphi, t]^z \in [\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^\varphi],$$

para todo $x \in \gamma_{i-1}(D_H(G))$,$v, t \in \tau(G, H)$ e $z \in [\gamma_{i-1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}]$. Logo,

$$\gamma_{i+1}(\tau(G, H)) \subseteq [\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}].$$

Por outro lado,

$$[\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}] = \langle [[x, (v)\lambda], ((t)\mu)^{\varphi}]^g | \ x \in \gamma_{i-1}(D_H(G)), \ v, t \in \tau(G, H) \text{ e } g \in \gamma_i(D_H(G)) \rangle.$$

Como $\gamma_{i+1}(\tau(G, H)) \trianglelefteq \eta(G, H)$,

$$[[x, (v)\lambda], ((t)\mu)^{\varphi}]^g = [x^{-1}x^{(v)\lambda}, ((t)\mu)^{\varphi}]^g = [[x, (v)\mu], ((t)\mu)^{\varphi}]^g \in \gamma_i(D_H(G)).$$

Portanto, $\gamma_{i+1}(\tau(G, H)) = [\gamma_i(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}]$, e o resultado segue.

ii) Vamos provar com indução sobre i. Para $i = 1$, pelo item anterior, temos

$$\tau(G, H)^{(1)} = \gamma_2(\tau(G, H)) = [D_H(G)^{(0)}, (D_G(H)^{(0)})^{\varphi}].$$

Suponha que o resultado seja válido para i, vamos provar que é válido para $i + 1$. Segue da Proposição 1.7 que

$$\begin{aligned}\tau(G, H)^{(i+1)} &= [\tau(G, H)^{(i)}, \tau(G, H)^{(i)}] \\ &= [[D_H(G)^{(i-1)}, (D_G(H)^{(i-1)})^{\varphi}], [D_H(G)^{(i-1)}, (D_G(H)^{(i-1)})^{\varphi}]] \\ &= [X, X]^{\tau(G,H)^{(i)}\tau(G,H)^{(i)}},\end{aligned}$$

sendo que $X = \{[g, h^{\varphi}] | \ g \in D_H(G)^{(i-1)}, \ h \in D_G(H)^{(i-1)}\}$. Pela Proposição 4.14, segue que

$$[D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}] = [(\tau(G, H)^{(i)})\lambda, ((\tau(G, H)^{(i)})\mu)^{\varphi}].$$

Logo,

$$[D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}] = [Y, Y_1]^{\tau(G,H)^{(i)}\tau(G,H)^{(i)}},$$

onde

$$\begin{aligned}Y &= \{([t, u])\lambda | \ t, u \in \tau(G, H)^{(i-1)}\} \\ Y_1 &= \{(([t, u])\mu)^{\varphi} | \ t, u \in \tau(G, H)^{(i-1)}\}\end{aligned}$$

Dados $g, g_1 \in D_H(G)^{(i-1)}$ e $h, h_1 \in D_G(H)^{(i-1)}$, pela Proposição 1.7, existem elementos $t, t_1, u, u_1 \in \tau(G, H)^{(i-1)}$ tais que

$$g = (t)\lambda, \ g_1 = (t_1)\lambda, \ h = (u)\mu, \ h_1 = (u_1)\mu.$$

Desse modo, pelas proposições 4.7 e 1.7, temos que

$$\begin{aligned}[][g, h^{\varphi}], [g_1, h_1^{\varphi}]] &= [g^{-1}g^h, (h_1^{-g_1}h_1)^{\varphi}] \\ &= [((t)\lambda)^{-1}((t)\lambda)^{(u)\mu}, (((u_1)\mu)^{-(t_1)\lambda}(u_1)\mu)^{\varphi}] \\ &= [([t, u])\lambda, (([t_1, u_1])\mu)^{\varphi}].\end{aligned}$$

Isso mostra que $[X, X] = [Y, Y]$. De acordo com a Proposição 4.14, obtemos $[D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$, segue que

$$\begin{aligned}\tau(G, H)^{(i+1)} &= [X, X]^{\tau(G,H)^{(i)}\tau(G,H)^{(i)}}\\ &= [Y, Y_1]^{\tau(G,H)^{(i)}\tau(G,H)^{(i)}}\\ &\subseteq [D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}].\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$[D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}] \subseteq \tau(G, H)^{(i+1)}$$

Portanto,

$$\tau(G, H)^{(i+1)} = [D_H(G)^{(i)}, (D_G(H)^{(i)})^{\varphi}].$$

E o resultado segue.

■

Do Teorema 4.15 segue que se $D_H(G)$ é nilpotente (respectivamente solúvel) então $\tau(G, H)$ é nilpotente e $cl(\tau(G, H)) \leqslant cl(D_H(G)) + 1$ (respectivamente solúvel e $dl(\tau(G, H)) \leqslant dl(D_H(G)) + 1$). Assim, o grupo $\tau(G, H)$ pode ser solúvel/nilpotente sem que G e H sejam solúveis/nilpotentes. Tais propriedades dependem apenas dos respectivos derivativos. Note ainda que a nilpotência do grupo $\tau(G, H)$ depende apenas da nilpotência do derivativo de G por H.

Teorema 4.16 (Corollary 2.6, [16]). ***i)*** *Se $D_H(G)$ é nilpotente de classe c então, $\tau(G, H)$ é nilpotente de classe c ou $c + 1$;*

ii) *Se $D_H(G)$ é solúvel de comprimento derivado l então $\tau(G, H)$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$.*

Demonstração.

i) Suponhamos que $D_H(G)$ é nilpotente de classe c. Pelo Teorema 4.15, temos que

$$\gamma_{c+2}(\tau(G, H)) = [\gamma_{c+1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}] = 1.$$

Portanto, $\tau(G, H)$ é nilpotente de classe no máximo $c + 1$. Vamos mostrar que sua classe não pode ser inferior à c. Sejam $M = [\gamma_{c-1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}]$ e $\alpha = \lambda|_M$. Note que, $Im(\alpha) = [\gamma_{c-1}(D_H(G)), D_G(H)]$. Entretanto,

$$\begin{aligned}[\gamma_{c-1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}] &= \langle g^{-1}g^h |\ g \in \gamma_{c-1}(D_H(G)) \text{ e } h \in D_G(H)\rangle\\ &= \langle g^{-1}g^{(t)\mu} |\ g \in \gamma_{c-1}(D_H(G)) \text{ e } t \in \tau(G, H)\rangle\\ &= \langle g^{-1}g^{(t)\lambda} |\ g \in \gamma_{c-1}(D_H(G)) \text{ e } t \in \tau(G, H)\rangle\\ &= \gamma_c(D_H(G)).\end{aligned}$$

Como a classe de nilpotência de $D_H(G)$ é c, temos que $\gamma_c(D_H(G)) \neq \{1\}$ e com isso $Im(\alpha) \neq \{1\}$. Pelo Teorema 4.15, segue que

$$\gamma_c(\tau(G, H)) = [\gamma_{c-1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}] = M \neq \{1\}.$$

E concluímos que $cl(\tau(G, H)) \geqslant c$.

ii) Suponhamos que $D_H(G)$ é solúvel de comprimento derivado l. Pelo Teorema 4.15, temos que
$$\tau(G,H)^{(l+1)} = [D_H(G)^{(l)}, ((D_G(H))^{\varphi})^{(l)}] = 1.$$
Portanto, $\tau(G,H)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l+1$. Vamos mostrar que seu comprimento derivado não pode ser inferior à l. Sejam $N = [D_H(G)^{(l-1)}, ((D_G(H))^{\varphi})^{l-1}]$ e β a restrição do homomorfismo λ à N. Note que, $Im(\beta) = [D_H(G)^{l-1}, D_G(H)^{(l-1)}]$. Entretanto,

$$\begin{aligned}
[D_H(G)^{l-2}, ((D_G(H))^{\varphi})^{(l-2)}] &= \langle g^{-1}g^{h} |\ g \in D_H(G)^{(l-2)} \text{ e } h \in D_G(H)^{(l-2)} \rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\mu} |\ g \in D_H(G)^{(l-2)} \text{ e } t \in \tau(G,H)^{(l-2)} \rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\lambda} |\ g \in D_H(G)^{(l-2)} \text{ e } t \in \tau(G,H)^{(l-2)} \rangle \\
&= D_H(G)^{(l-2)}.
\end{aligned}$$

Como o comprimento derivado de $D_H(G)$ é l, temos que $D_H(G)^{(l-1)} \neq \{1\}$ e com isso $Im(\beta) \neq \{1\}$. Pelo Teorema 4.15, segue que

$$\gamma_c(\tau(G,H)) = [\gamma_{c-1}(D_H(G)), (D_G(H))^{\varphi}] = M \neq \{1\}.$$

E concluímos que $cl(\tau(G,H)) \geqslant 1$.

■

Podemos relacionar a condição de Engel do subgrupo derivativo do grupo G com a condição de Engel do grupo $\tau(G,H)$.

Proposição 4.17 (Teorema 9.3, [15]). *Sejam G e H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Se $D_H(G)$ satisfaz a condição de Engel então $\tau(G,H)$ e $D_G(H)$ também satisfazem a condição de Engel. E ainda, se $D_H(G)$ é n-Engel, então $\tau(G,H)$ e $D_G(H)$ são $(n+1)$-Engel.*

Demonstração. Suponha que $D_H(G)$ seja um grupo que satisfaz a condição de Engel. Dados $t, t' \in G \otimes H$, temos que $(t)\lambda, (t')\lambda \in D_H(G)$, logo existe $n = n(t,t') \in \mathbb{N}$ tal que $[(t)\lambda, ({}_n t')\lambda] = 1_G$. Pela Proposição 3.17, temos que

$$[t,_{n+1} t'] = [(t)\lambda,_n (t')\lambda] \otimes (t')\mu = 1_G \otimes (t')\mu = 1_{G\otimes H}.$$

Portanto, $G \otimes H$ satisfaz a condição de Engel, e como $\tau(G,H) \simeq G \otimes H$ obtemos o resultado desejado. Agora, sabendo que $\tau(G,H)$ satisfaz a condição de Engel, sejam $h, h_1 \in D_G(H)$ então existem $v, v_1 \in \tau(G,H)$ tais que $h = (v)\mu$ e $h_1 = (v_1)\mu$. Daí existe $m = m(v, v_1)$ tal que $[v,_m v_1] = 1$. Pela Proposição 3.17, temos que

$$[h,_{m+1} h_1] = [(v)\mu,_{m+1} (v_1)\mu] = ([v,_{m+1} v_1])\mu = 1.$$

Assim, $D_G(H)$ também satisfazem a condição de Engel. Claramente, se $D_H(G)$ é n-Engel, então $\tau(G,H)$ e $D_G(H)$ são $(n+1)$-Engel. ■

4.2 Condições para nilpotência de $\eta(G,H)$

No Exemplo 4.10 vimos que dados G e H dois grupos nilpotentes com ações compatíveis entre eles nem sempre o grupo $\eta(G,H)$ é nilpotente. O motivo de que a nilpotência de G e H não implicar a nilpotência de $\eta(G,H)$ se deve ao fato de que os termos da série central inferior dependem das ações de G sobre H e de H sobre G. Desse modo, iremos impor algumas condições adicionais sobre tais ações.

Definição 4.18. *Sejam G e H grupos, $g \in G$ e $h \in H$. Definiremos $[g,_0 h] := g^{-1}$, $[g,_1 h] := g^{-1}g^h$ e para todo $i \geqslant 1$ natural $[g,_{i+1} h] := [[g,_i h], h]$. Além disso, definiremos $[G,_0 H] := G$, $[G,_1 H] := \langle g^{-1}g^h | g \in G \text{ e } h \in H\rangle = D_H(G)$, e para todo $i \geqslant 1$ natural, $[G,_{i+1} H] := [[G,_i H], H]$.*

Definição 4.19. *Sejam G e H grupos. Diremos que uma ação de H sobre G é n-Engeliana (à direita) se $[g,_n h] = 1$ para todo $g \in G$ e $h \in H$.*
Em particular, se $G = H$ e a ação é por conjugação, então as ações n-Engelianas (à direita) coincidem com a condição de n-Engel (à direita) de G.

Definição 4.20. *Sejam G e H grupos. Diremos que uma ação de H sobre G é nilpotente (à direita) de classe c se $[G,_c H] = 1$ e $[G,_{c-1} H] \neq \{1\}$.*
Em particular, se $G = H$ e a ação é por conjugação, então as ações nilpotentes (à direita) de classe c coincidem com a classe de nilpotência c de G.

Exemplo 4.21.

i) *Uma ação é nilpotente de classe 1 se, e somente se, esta ação é trivial.*

ii) *Considere o grupo $D_{2^k} = \langle a, b |\ a^{2^k} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle$, onde $k \geqslant 2$. Consideremos a ação de D_{2^k} nele mesmo por conjugação. Vamos mostrar que esta ação é Engeliana. Para todo inteiro positivo i, temos que*

$$[a^i, a] = 1,\ [a^i b, a] = a^2 \text{ e } [a^i b,_2 a] = [a^2, a] = 1. \tag{4.4}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
[a^i, b] &= a^{-2i}\\
[a^i,_2 b] &= [a^{-2i}, b] = a^{2^2 i}\\
[a^i,_3 b] &= [a^{2^2 i}, b] = a^{-2^3 i}\\
&\vdots\\
[a^i,_n b] &= a^{(-2)^n i}.
\end{aligned}$$

Em particular, para $n = k$ temos que $[a^i,_k b] = a^{(-2)^k i} = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
[a^i b, b] &= a^{2i}\\
[a^i b,_2 b] &= [a^{2i}, b] = a^{-2^2 i}\\
[a^i b,_3 b] &= [a^{-2^2 i}, b] = a^{2^3 i}\\
&\vdots\\
[a^i b,_n b] &= a^{(-1)^{n-1} 2^n i}.
\end{aligned}$$

Em particular, para $n = k$ temos que $[a^i b,_k b] = a^{(-1)^{k-1}2^k i} = 1$. Isso mostra que a ação por conjugação de D_{2^k} nele mesmo é $k -$ Engeliana.
Mais que isso, temos que a ação é nilpotente. Com efeito, pelas equações (4.4) temos que $[a^i b^j,_2 a] = 1$ para todos inteiros positivos i e j. Daí,

$$[a^i b, a, b] = [a^2, b] = a^{-4} \Rightarrow [a^i b, a, b, a] = 1.$$

E ainda,

$$[a^i b, b, a] = [a^2, a] = 1, \;\; [a^i, b, a] = [a^{-2i}, a] = 1, \;\; logo, \; [a^i b^j, b, a] = 1.$$

Assim, em um comutador de peso maior que 3 se aparecerem os 2 geradores então o comutados é 1. Dessa forma, sabendo que a ação é k-Engeliana, então a ação é nilpotente de classe k.

Observação 4.22.

- ***i)*** *Note que toda ação nilpotente é Engeliana mas nem toda ação Engeliana é nilpotente. Basta notar que nem todo grupo que satisfaz a condição de Engel é nilpotente.*
- ***ii)*** *Há diferença na definição de ações n-Engeliana à direita e ações n-Engeliana à esquerda. Neste trabalho sempre que nos referirmos a ações n-Engelianas estamos omitindo que ela é uma ação à direita.*

Proposição 4.23 (Theorem 3.7, [17])**.** *Sejam G e H grupos com ações um sobre o outro. Se a ação de H sobre G é n-Engeliana (resp. nilpotente de classe c) então $D_H(G)$ satisfaz a condição n-Engel (resp. é nilpotente de classe no máximo c).*

Demonstração. Pela Proposição 4.7 existem homomorfismos de grupos $\lambda : \tau(G,H) \longrightarrow G$ e $\mu : \tau(G,H) \longrightarrow H$ dados por $([g, h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^h$ e $([g, h^{\varphi}])\mu = h^{-g}h$, tais que $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ e $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$ para todo $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G,H)$.

Afirmação 4.23.1. *Dados $g, x_1, x_2, \ldots, x_i \in D_H(G)$ temos que*

$$[g, x_1, x_2, \ldots, x_i] \in [D_H(G),_i (Im(\mu))],$$

para todo natural $i \geqslant 1$.

Vamos demonstrar esta afirmação com indução sobre i. Se $i = 1$, então existe $t_1 \in \tau(G,H)$ tal que $x_1 = (t_1)\lambda$. Daí,

$$[g, x_1] = [g, (t_1)\lambda] = g^{-1}g^{(t_1)\lambda} = g^{-1}g^{(t_1)\mu} = [g, (t_1)\mu] \in [D_H(G),_1 (Im(\mu))].$$

Suponha que o resultado é válido para i, então

$$[g, x_1, x_2, \ldots, x_i] = [g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu]$$

para algum $g' \in D_H(G)$ e $t_1, t_2, \ldots, t_i \in \tau(G,H)$. Vamos provar que é válido para $i + 1$. Com efeito, dados $g, x_1, x_2, \ldots, x_{i+1} \in D_H(G)$ existe $t_{i+1} \in \tau(G,H)$ tal que $x_{i+1} = (t_{i+1})\lambda$. Segue que,

$$\begin{aligned} [g, x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}] &= [[g, x_1, x_2, \ldots, x_i], x_{i+1}] \\ &= [[g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu], (t_{i+1})\lambda] \\ &= [g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu]^{-1}[g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu]^{(t_{i+1})\lambda} \\ &= [g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu]^{-1}[g', (t_1)\mu, (t_2)\mu, \ldots, (t_i)\mu]^{(t_{i+1})\mu} \\ &= [[g, x_1, x_2, \ldots, x_i], (t_{i+1})\mu] \in [D_H(G),_{i+1} (Im(\mu))]. \end{aligned}$$

Isso mostra que a afirmação é verdadeira.
Agora, se a ação de H sobre G é n-Engeliana, tomando $i = n$ e $x = x_1 = x_2 = \ldots = x_i$ temos que $[g,_n x] \in [D_H(G),_n (Im(\mu))] \leqslant [G,_n H]$, ou seja, $D_H(G)$ é n-Engel. Por outro lado, se a ação de H sobre G é nilpotente de classe c temos tomando $i = c$ temos que $[D_H(G),_c D_H(G)] \leqslant [D_H(G),_c (Im(\mu))] \leqslant [G,_c H] = 1$, ou seja $D_H(G)$ é nilpotente de classe no máximo c. ■

Uma aplicação direta das proposições 4.23 e 4.17 o seguinte corolário é válido.

Corolário 4.23.1. *Sejam G e H grupos com ações compatíveis um sobre o outro. Se a ação de H sobre G é n-Engeliana (resp. nilpotente de classe c) então $G \otimes H$ é $(n+1)$-Engel (resp. nilpotente de classe no máximo $c+1$).*

Observação 4.24. *A volta da Proposição 4.23 é falsa. No Exemplo 4.10 o subgrupo $[C_p, C_2]$ de C_p é nilpotente, mas a ação de C_2 sobre C_p não é Engeliana. De fato, observe que $a^{-1}a^b = a^{-2} \neq 1$, logo $[C_p, C_2]$ é não trivial e como é subgrupo de $[C_p, C_2] = C_p$, logo $[C_p, C_2]$ nilpotente. Por outro lado,*

$$[a,_n b] = \begin{cases} a^{-2}, \text{se } n \text{ é par} \\ a, \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ou seja, a ação de C_2 sobre C_p não é Engeliana.

Definição 4.25. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro, H^φ uma cópia isomórfica de H pelo isomorfismo $\varphi : H \longrightarrow H^\varphi$. Definimos o conjunto*

$$C_{ij} := [\gamma_{i+1}(G), \gamma_j(H^\varphi)][\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(H^\varphi)], \ \forall\ i, j \geqslant 1.$$

Lema 4.26 (Lemma 2.6, [17]). *Sejam $g \in \gamma_i(G)$, $h \in \gamma_j(H)$, $x \in G$ e $y \in H^\varphi$. Vale que:*

i) $[[g, h^\varphi], [x, y^\varphi]] \in C_{ij}$;

ii) $[g, h^\varphi]^x \equiv [g, h^\varphi][g, [h, x]^\varphi] (mod\ C_{ij})$;

iii) $[g, h^\varphi]^{y^\varphi} \equiv [g, h^\varphi][[g, y], h^\varphi] (mod\ C_{ij})$;

iv) $[g, h^\varphi]^{xy^\varphi} \equiv [g, h^\varphi][g, [h, x]^\varphi][[g, y], h^\varphi][[g, y^\varphi], [x, h^\varphi]^{-1}] (mod\ C_{ij})$.

Demonstração.

i) Pela Proposição 4.7, temos que

$$\begin{aligned}
[g, h^\varphi]^{[x, y^\varphi]} &= [g, h^\varphi]^{x^{-1}y^{-\varphi}xy^\varphi} \\
&= [g^{x^{-1}y^{-1}xy}, (h^{x^{-1}y^{-1}xy})^\varphi] \\
&= [g^{x^{-1}x^y}, (h^{y^{-x}y})^\varphi] \\
&= [[x^{-1}x^y, g^{-1}]g, ([y^{-x}y, h^{-1}]h)^\varphi] \\
&= [[x^{-1}x^y, g^{-1}], h^\varphi]^g [[x^{-1}x^y, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi g} [g, h^\varphi][g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi} \\
&= [[x^{-1}x^y, g^{-1}], h^\varphi]^g [g, h^\varphi][[x^{-1}x^y, g^{-1}], [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi]^{gh^\varphi} [g, [y^{-x}y, h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}[[g,h^\varphi],[x,y^\varphi]] =&[g,h^\varphi]^{-1}[g,h^\varphi]^{[x,y^\varphi]}\\ =&[g,h^\varphi]^{-1}[[x^{-1}x^y,g^{-1}],h^\varphi]^g[g,h^\varphi][[x^{-1}x^y,g^{-1}],[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]^{gh^\varphi}\\ &[g,[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi}\\ =&[[x^{-1}x^y,g^{-1}],h^\varphi]^{g[g,h^\varphi]}[[x^{-1}x^y,g^{-1}],[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]^{gh^\varphi}\\ &[g,[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi}.\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}&[[x^{-1}x^y,g^{-1}],h^\varphi]\in[\gamma_{i+1}(G),\gamma_j(H^\varphi)]\\ &[[x^{-1}x^y,g^{-1}],[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]\in[\gamma_{i+1}(G),\gamma_{j+1}(H^\varphi)]\leqslant[\gamma_{i+1}(G),\gamma_j(H^\varphi)]\\ &[g,[y^{-x}y,h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi}\in[\gamma_i(G),\gamma_{j+1}(H^\varphi)],\end{aligned}$$

e pela Proposição 4.4, $C_{ij}\trianglelefteq\eta(G,H)$, portanto, $[[g,h^\varphi],[x,y^\varphi]]\in C_{ij}$.

ii) Temos que

$$\begin{aligned}[g,h^\varphi]^x &= [g^x,(h^x)^\varphi]\\ &= [[x,g^{-1}]g,(h^x)^\varphi]\\ &= [[x,g^{-1}],h^\varphi]^g[g,(h^x)^\varphi].\end{aligned}$$

Como $[[x,g^{-1}],h^\varphi]\in C_{ij}\trianglelefteq\eta(G,H)$, segue que

$$\begin{aligned}[g,h^\varphi]^x &\equiv [g,(h^x)^\varphi]\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,(hh^{-1}h^x)^\varphi]\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,h^\varphi(h^{-1}h^x)^\varphi]\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,(h^{-1}h^x)^\varphi][g,h^\varphi]^{(h^{-1}h^x)^\varphi}\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,[h,x]^\varphi][g,h^\varphi]^{[x,h^\varphi]^{-1}}\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,[h,x]^\varphi][g,h^\varphi][g,h^\varphi]^{-1}[g,h^\varphi]^{[x,h^\varphi]^{-1}}\ (mod\ C_{ij})\\ &\equiv [g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi][[g,[h,x]^\varphi],[g,h^\varphi]][[g,h^\varphi],[x,h^\varphi]]\ (mod\ C_{ij}).\end{aligned}$$

Pelo item i),

$$\begin{aligned}&[[g,h^\varphi],[x,h^\varphi]^{-1}]\in C_{ij}\\ &[[g,[h,x]^\varphi],[g,h^\varphi]] = ([[g,h^\varphi],[g,[h,x]^\varphi]])^{-1}\in C_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, $[g,h^\varphi]^x\equiv[g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi]\ (mod\ C_{ij})$.

iii) Temos que

$$\begin{aligned}[g,h^\varphi]^{y^\varphi} &= [g^y,(h^y)^\varphi]\\ &= [g^y,([y,h^{-1}]h)^\varphi]\\ &= [g^y,h^\varphi][g^y,[y,h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi}.\end{aligned}$$

Como $[g^y,[y,h^{-1}]^\varphi]^{h^\varphi} \in C_{ij}$, segue que

$$\begin{aligned}
[g,h^\varphi] &\equiv [g^y,h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g(g^{-1}g^y),h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi]^{g^{-1}g^y}[g^{-1}g^y,h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi][g,h^\varphi]^{-1}[g,h^\varphi]^{[g,y]}[g^{-1}g^y,h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) && \text{(pela Proposição 4.7)} \\
&\equiv [g,h^\varphi][[g,h^\varphi],[g,y]][[g,y],h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) && \text{(pelo item i))} \\
&\equiv [g,h^\varphi][[g,y],h^\varphi] \ (mod\ C_{ij}).
\end{aligned}$$

iv) Como consequência dos itens ii) e iii), temos que

$$\begin{aligned}
[g,h^\varphi]^{xy^\varphi} &\equiv ([g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi])^{y^\varphi} \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi]^{y^\varphi}[g,[h,x]^\varphi]^{y^\varphi} \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi][[g,y],h^\varphi][g,[h,x]^\varphi][[g,y],[h,x]^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi][[g,y],h^\varphi][[[g,y],h^\varphi],[g,[h,x]^\varphi]] \\
&\quad [g^{-1}g^y,(h^{-1}h^x)^\varphi] \ (mod\ C_{ij}) \\
&\equiv [g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi][[g,y],h^\varphi][[[g,y],h^\varphi],[g,[h,x]^\varphi]] && \text{(pelo item i))} \\
&\quad [[g,y^\varphi],[x,h^\varphi]^{-1}] \ (mod\ C_{ij}) && \text{(Pela Proposição 4.7)} \\
&\equiv [g,h^\varphi][g,[h,x]^\varphi][[g,y],h^\varphi][[g,y^\varphi],[x,h^\varphi]^{-1}] \ (mod\ C_{ij}).
\end{aligned}$$

E o resultado segue.

■

Agora temos condições para provar um dos resultados principais desse trabalho. Podemos reescrever o Teorema 0.2 como sendo

Teorema A 4.27. *Sejam G e H grupos nilpotentes de classe a e b, respectivamente. Suponha que a ação de H sobre G é l-Engeliana e a ação de G sobre H é k-Engeliana. Então $\eta(G,H)/\tau(G,H)'$ satisfaz a condição de n-Engel para $n = c + (2c-1)m$, onde $c = \max\{a,b\}$ e $m = \max\{l,k\}$. Em particular, se G e H são finitamente gerados então, $\eta(G,H)$ é nilpotente.*

Demonstração. Pela Proposição 4.4 temos que $[\gamma_i(G),\gamma_j(H^\varphi)] \trianglelefteq \eta(G,H)$ para todo $i,j \geqslant 1$. Sejam u,v elementos de $\eta(G,H)$, $c = \max\{a,b\}$ e $m = \max\{l,k\}$, vamos provar, com indução sobre $s \geqslant 0$, que

$$[u,_{c+sm}v] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{s+1}[\gamma_i(G),\gamma_{s+2-i}(H^\varphi)] \right). \tag{4.5}$$

Para $s=0$, como $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^\varphi$, e

$$\frac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)} = \frac{(\tau(G,H) \rtimes G) \rtimes H^\varphi}{\tau(G,H)} \simeq G \times H^\varphi,$$

temos que

$$\gamma_i\left(\frac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)}\right) \simeq \gamma_i(G \times H^\varphi) \simeq \gamma_i(G) \times \gamma_i(H^\varphi), \forall\ i \geqslant 1.$$

Assim, $\gamma_{c+1}\left(\dfrac{\eta(G,H)}{\tau(G,H)}\right) = 1$, logo $[u,_c v] \in \tau(G,H) = [G, H^{\varphi}] = [\gamma_1(G), \gamma_1(H^{\varphi})]$, ou seja, $[u,_c v] \equiv 1(mod\ \tau(G,H))$. E o resultado é válido para $s = 0$. Suponha que (4.5) seja válido para s, então podemos escrever

$$[u,_{c+sm} v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}](mod\ \tau(G,H)'),$$

onde $g_{i_t} \in \gamma_i(G)$, $h_{i_t} \in \gamma_{s+2-i}(H)$, $1 \leqslant t \leqslant r_i$, $1 \leqslant i \leqslant s+1$. Além disso, podemos escrever $v = zxy^{\varphi} \in \eta(G,H)$ com $z \in \eta(G,H)$, $x \in G$ e $y \in H$. Para demonstrar que (4.5) vale para $s+1$, primeiramente afirmamos que

$$[u,_{(c+sm+j)} v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y], h_{i_t}^{\varphi}]\ (mod\ K) \tag{4.6}$$

onde $K = \tau(G,H)'\prod_{i=1}^{s+2}[\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H^{\varphi})]$ e $j \geqslant 1$.
Demonstraremos esta afirmação com indução sobre j. Para $j = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
[u,_{(c+sm+1)} v] &= [[u,_{(c+sm)} v], v] \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], zxy^{\varphi}\right](mod\ \tau(G,H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], xy^{\varphi}\right]\left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], z\right]^{xy^{\varphi}}(mod\ \tau(G,H)')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], xy^{\varphi}\right](mod\ \tau(G,H)') \\
&\equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{xy^{\varphi}}(mod\ \tau(G,H)').
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.26, temos que

$$[u,_{(c+sm+1)} v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}][g_{i_t}, [h_{i_t}, x]^{\varphi}][[g_{i_t}, y], h_{i_t}^{\varphi}][[g_{i_t}, y^{\varphi}], [x, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}]$$
$$\left(mod\ \tau(G,H)'\prod_{i=1}^{s+1}[\gamma_{i+1}(G), \gamma_{s+2-i}(H^{\varphi})][\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H^{\varphi})]\right)$$

ou seja,

$$[u,_{(c+sm+1)} v] \equiv \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t}, x]^{\varphi}][[g_{i_t}, y], h_{i_t}^{\varphi}]\left(mod\ \tau(G,H)'\prod_{i=1}^{s+2}[\gamma_i(G), \gamma_{s+3-i}(H^{\varphi})]\right).$$

Logo, o resultado é válido para $j=1$. Suponha que (4.6) seja válido para j, vamos mostrar que é válido para $j+1$. Com efeito, pela Proposição 4.7 item vi), segue que

$$\begin{aligned}
[u,_{(c+sm+j+1)} v] =& [[u,_{(c+sm+j)} v], v] \\
\equiv & \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}], zxy^{\varphi}\right] \ (mod\ K) \\
\equiv & \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}], xy^{\varphi}\right] \\
& \left[\prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}], z\right]^{xy^{\varphi}} \quad (mod\ K) \\
\equiv & \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}([g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}])^{xy^{\varphi}} \\
& (mod\ K) \\
\equiv & \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}[g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}]^{xy^{\varphi}}[[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}]^{xy^{\varphi}} \\
& (mod\ K) \\
\equiv & \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}([g_{i_t},[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][g_{i_t},[[h_{i_t},_j x],x]^{\varphi}] \\
& [[g_{i_t},y],[h_{i_t},_j x]^{\varphi}][[g_{i_t},y^{\varphi}],[x,[h_{i_t},_j x]^{\varphi}]^{-1}])([[g_{i_t},_j y],h_{i_t}^{\varphi}][[g_{i_t},_j y],[h_{i_t},x]^{\varphi}] \\
& [[[g_{i_t},_j y],y],h_{i_t}^{\varphi}][[[g_{i_t},_j y],y^{\varphi}],[x,h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}]) \ (mod\ K) \\
\equiv & \prod_{i=1}^{s+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},_{j+1} x]^{\varphi}][[g_{i_t},_{j+1} y],h_{i_t}^{\varphi}] \ (mod\ K)\,.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a afirmação é verdadeira. Em particular, para $j=m$, temos que

$$[u,_{(c+(s+1)m)} v] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{(s+1)+1} [\gamma_i(G), \gamma_{(s+1)+2-i}(H^{\varphi})] \right),$$

uma vez que as ações de G sobre H e de H sobre G são l e k engelianas respectivamente, e $m=\max\{l,k\}$. Portanto, (4.5) é válido para todo $s \geqslant 0$.
Por fim, note que se $s=2c-1$ então

$$[u,_{c+(2c-1)m} v] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{2c}[\gamma_i(G), \gamma_{2c+1-i}(H^{\varphi})] \right). \tag{4.7}$$

Desse modo, se $1 \leqslant i \leqslant c$ então $2c+1-i \geqslant c+1$, daí $\gamma_{2c+1-i}(H^{\varphi})=1$, ou seja, $[u,_{c+(2c-1)m} v] \equiv 1\ (mod\ \tau(G,H)')$. Por outro lado, se $c \leqslant i \leqslant 2c$ então $\gamma_i(G)=1$ e $[u,_{c+(2c-1)m} v] \equiv 1\ (mod\ \tau(G,H)')$. Em ambos os casos $[u,_{c+(2c-1)m} v] \in \tau(G,H)'$, ou seja, $\eta(G,H)/\tau(G,H)'$ satisfaz a condição de n-Engel para $n=c+(2c-1)m$.
Agora, supondo que G e H grupos nilpotentes são finitamente gerados. Em particular G e H são solúveis, I. Nakaoka em [16] provou que então $\eta(G,H)$ é solúvel, logo $\eta(G,H)/\tau(G,H)'$ é um grupo solúvel finitamente gerado que satisfaz a condição de Engel, portanto, pelo Lema 2.27, é nilpotente. Como G é nilpotente então $\tau(G,H)$ é nilpotente pelo Teorema 4.15, de acordo com o critério de P. Hall, $\eta(G,H)$ é nilpotente. ∎

Note que o Teorema 4.27 não indica uma classe de nilpotência de $\eta(G, H)$. Para isso vamos utilizar hipóteses mais fortes sobre as as ações dos grupos envolvidos. Podemos reformular o Teorema 0.3 da seguinte forma

Teorema B 4.28. *Sejam G e H grupos nilpotentes de classe a e b, respectivamente. Suponha que a ação de H sobre G é nilpotente de classe l e a ação de G sobre H é nilpotente de classe k. Consideremos $c = \max\{a, b\}$, $m = \max\{l, k\}$, $n = c + (2c-1)m$ e $s = 1+\min\{a, l\}$. Então $\eta(G, H)$ é um grupo nilpotente de classe no máximo $nC_{s+1,2}-C_{s,2}$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $\eta(G, H)/\tau(G, H)'$ é nilpotente de classe no máximo n. Para isso, considere $u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m}$ elementos de $\eta(G, H)$, α um inteiro positivo qualquer. Vamos mostrar com indução sobre α que

$$[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m}] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G, H)' \prod_{i=1}^{\alpha+1} [\gamma_i(G), \gamma_{\alpha+2-i}(H^{\varphi})] \right). \tag{4.8}$$

Como $\eta(G, H) = \tau(G, H)GH^{\varphi}$, e

$$\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \simeq \frac{(\tau(G, H) \rtimes G) \rtimes H^{\varphi}}{\tau(G, H)} \simeq G \times H^{\varphi},$$

temos que

$$\gamma_i \left(\frac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \right) \simeq \gamma_i(G \times H^{\varphi}) \simeq \gamma_i(G) \times \gamma_i(H^{\varphi}), \forall\ i \geqslant 1.$$

Assim, $\gamma_{c+1} \left(\dfrac{\eta(G, H)}{\tau(G, H)} \right) = 1$, logo $[u, v_1, v_2, \ldots, v_c] \in \tau(G, H) = [G, H^{\varphi}] = [\gamma_1(G), \gamma_1(H^{\varphi})]$, ou seja, $[u, v_1, v_2, \ldots, v_c] \equiv 1(mod\ \tau(G, H))$. Logo, o resultado é válido para $\alpha = 0$. Suponha que o resultado seja válido para α, então podemos escrever

$$[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m}] \equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}](mod\ \tau(G, H)'),$$

onde $g_{i_t} \in \gamma_i(G)$, $h_{i_t} \in \gamma_{\alpha+2-i}(H)$, $1 \leqslant t \leqslant r_i$, $1 \leqslant i \leqslant \alpha+1$. Para mostrar que o resultado é válido para $\alpha+1$, consideremos $v_{c+\alpha m+1}, v_{c+\alpha m+2}, \ldots, v_{c+\alpha m+j} \in \eta(G, H)$, j um inteiro positivo, de modo que $v_{c+\alpha m+w} = z_w x_w y_w^{\varphi}$, $0 \leqslant w \leqslant j$, onde cada $z_w \in \tau(G, H)$, $x_w \in G$ e $y_w \in H$, vamos mostrar que

$$[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+j}] \equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1} \prod_{t=1}^{r_i} [g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1, x_2, \ldots, x_j]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1, y_2, \ldots, y_j], h_{i_t}^{\varphi}] \\ (mod\ K), \tag{4.9}$$

onde

$$K = \tau(G, H)' \prod_{i=1}^{\alpha+2} [\gamma_i(G), \gamma_{\alpha+3-i}(H^{\varphi})],$$

para qualquer inteiro positivo j.

Para $j = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+1}] &= [u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m}, z_1 x_1 y_1^{\varphi}] \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], z_1 x_1 y_1^{\varphi}\right] (mod\ \tau(G, H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], x_1 y_1^{\varphi}\right]\left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], z_1\right]^{x_1 y_1^{\varphi}} (mod\ \tau(G, H)') \\
&\equiv \left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}], x_1 y_1^{\varphi}\right] (mod\ \tau(G, H)') \\
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{x_1 y_1^{\varphi}} (mod\ \tau(G, H)').
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.26, temos que

$$\begin{aligned}
[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+1}] \equiv &\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}[g_{i_t}, h_{i_t}^{\varphi}][g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1], h_{i_t}^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1^{\varphi}], [x_1, h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}] \\
&\left(mod\ \tau(G, H)' \prod_{i=1}^{\alpha+1}[\gamma_{i+1}(G), \gamma_{\alpha+2-i}(H^{\varphi})][\gamma_i(G), \gamma_{\alpha+3-i}(H^{\varphi})]\right)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+1}] \equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1], h_{i_t}^{\varphi}]\ (mod\ K)\,.$$

Logo, o resultado é válido para $j = 1$. Suponha que (4.9) seja válido para j, vamos mostrar que é válido para $j + 1$. Com efeito, tomando $q = [u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+j+1}]$, pela Proposição 4.7 item vi) temos que

$$\begin{aligned}
q =&[u, v_1, v_2, \ldots, v_{c+\alpha m+j}, v_{c+\alpha m+j+1}] \\
\equiv&\left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1, x_2, \ldots, x_j]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1, y_2, \ldots, y_j], h_{i_t}^{\varphi}], z_{j+1} x_{j+1} y_{j+1}^{\varphi}\right] \\
&(mod\ K) \\
\equiv&\left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1, x_2, \ldots, x_j]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1, y_2, \ldots, y_j], h_{i_t}^{\varphi}], x_{j+1} y_{j+1}^{\varphi}\right] \\
&\left[\prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t}, [h_{i_t}, x_1, x_2, \ldots, x_j]^{\varphi}][[g_{i_t}, y_1, y_2, \ldots, y_j], h_{i_t}^{\varphi}], z_{j+1}\right]^{xy^{\varphi}} (mod\ K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}\\
&\quad([g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}])^{x_{j+1}y_{j+1}^{\varphi}} \pmod K\\
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}\\
&\quad[g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}]^{x_{j+1}y_{j+1}^{\varphi}}[[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}]^{x_{j+1}y_{j+1}^{\varphi}} \pmod K\\
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}([g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}])^{-1}\\
&\quad[g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j,x_{j+1}]^{\varphi}]\\
&\quad[[g_{i_t},y_{j+1}],[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_{j+1}^{\varphi}],[x_{j+1},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}]^{-1}]\\
&\quad[[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],h_{i_t}^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],[h_{i_t},x_{j+1}]^{\varphi}]\\
&\quad[[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j,y_{j+1}],h_{i_t}^{\varphi}][[[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],y_{j+1}^{\varphi}],[x_{j+1},h_{i_t}^{\varphi}]^{-1}] \pmod K\\
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j,x_{j+1}]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j,y_{j+1}],h_{i_t}^{\varphi}]\\
&\quad[[g_{i_t},y_{j+1}],[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j],[h_{i_t},x_{j+1}]^{\varphi}] \pmod K\\
&\equiv \prod_{i=1}^{\alpha+1}\prod_{t=1}^{r_i}[g_{i_t},[h_{i_t},x_1,x_2,\ldots,x_j,x_{j+1}]^{\varphi}][[g_{i_t},y_1,y_2,\ldots,y_j,y_{j+1}],h_{i_t}^{\varphi}] \pmod K.
\end{aligned}
$$

Portanto, (4.9) é válido para todo inteiro positivo j. Em particular, para $j=m$, temos que

$$[u,v_1,v_2,\ldots,v_{c+(\alpha+1)m}] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{\alpha+2}[\gamma_i(G),\gamma_{\alpha+3-i}(H^{\varphi})]\right),$$

uma vez que as ações de G sobre H e de H sobre G são l e k nilpotentes respectivamente, e $m=\max\{l,k\}$. Portanto, (4.8) é válido para todo $\alpha \geqslant 0$.
Por fim, note que se $\alpha = 2c-1$ então

$$[u,v_1,v_2,\ldots,v_{c+(2c-1)m}] \equiv 1 \left(mod\ \tau(G,H)' \prod_{i=1}^{2c}[\gamma_i(G),\gamma_{2c+1-i}(H^{\varphi})]\right).$$

Desse modo, se $1 \leqslant i \leqslant c$ então $2c+1-i \geqslant c+1$, daí $\gamma_{2c+1-i}(H^{\varphi}) = 1$, ou seja, $[u,_{c+(2c-1)m} v] \equiv 1 \ (mod\ \tau(G,H)')$. Por outro lado, se $c \leqslant i \leqslant 2c$ então $\gamma_i(G)=1$ e $[u,v_1,v_2,\ldots,v_{c+(2c-1)m}] \equiv 1 \ (mod\ \tau(G,H)')$. Logo, $[u,v_1,v_2,\ldots,v_{c+(2c-1)m}] \in \tau(G,H)'$, ou seja, $\eta(G,H)/\tau(G,H)'$ é nilpotente de classe no máximo $n = c+(2c-1)m$.
Como G é nilpotente de classe a, então $D_H(G)$ é nilpotente de classe no máximo a, e pelo Teorema 4.16, $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo $a+1$. Agora, como a ação de H sobre G é nilpotente de classe l, pela Proposição 4.23 $D_H(G)$ é nilpotente de classe l, e novamente pelo Teorema 4.16 $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo $l+1$. Tomando $s = 1+\min\{a,l\}$, temos que $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo s. Portanto, pelo critério de P. Hall 2.18 $\eta(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo $nC_{s+1,2} - C_{s,2}$. ■

Exemplo 4.29. *Tomemos* $Q_8 = \langle x, y|\ x^4 = 1,\ y^2 = x^2,\ yxy^-1 = x^{-1}\rangle$ *o grupo dos quatérnios de ordem* 8 *e* $D_4 = \langle a, b|\ a^4 = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle$ *o grupo diedral de ordem* 8*. Considere que* D_4 *é* Q_8*-trivial e* Q_8 *age da seguinte forma sobre* D_4*:*

$$a^x = a^{-1} \text{ e } b^x = b$$
$$a^y = a^{-1} \text{ e } b^y = b.$$

Vamos mostrar que estas ações são compatíveis. Como a ação de D_4 *em* Q_8 *é trivial então ela é compatível. Temos que,*

$$a^{x^a} = a^x = a^{-1} \text{ e } a^{a^{-1}xa} = a^{-1} \Rightarrow a^{x^a} = a^{a^{-1}xa},$$
$$a^{x^b} = a^x = a^{-1} \text{ e } a^{b^{-1}xb} = (bab)^{xb} = (a^{-1})^{xb} = a^b = a^{-1} \Rightarrow a^{x^b} = a^{b^{-1}xb}.$$

E ainda,

$$b^{x^a} = b^x = b \text{ e } b^{a^{-1}xa} = (aba^{-1})^{xa} = (a^2b)^{xa} = (a^{-2b})a = b \Rightarrow b^{x^a} = b^{a^{-1}xa},$$
$$b^{x^b} = b^x = b \text{ e } b^{b^{-1}xb} = b^{xb} = b^b = b \Rightarrow b^{x^b} = a^{b^{-1}xb}.$$

Portanto, as ações são compatíveis. Agora, vamos provar que as ações são nilpotentes. Para todo inteiro positivo i*, segue que*

$$[a^i, x] = a^{-i}(a^i)^x = a^{-2i}$$
$$[a^i,_2 x] = [a^{-2i}, x] = a^{2i}(a^{-2i})^x = a^{4i} = 1.$$

E ainda,

$$[a^ib, x] = ba^{-i}(a^ib)^x = ba^{-i}a^{-i}b = a^{2i}$$
$$[a^ib,_2 x] = [a^{2i}, x] = a^{-2i}(a^{2i})^x = a^{-4i} = 1.$$

De modo análogo, mostramos que $[a^ib^j,_2 y] = 1$*. E como os geradores de* Q_8 *agem de maneira similar sobre* D_4*, concluímos que a ação de* Q_8 *sobre* D_4 *é nilpotente de classe* 2*. Pelo Exemplo 2.11,* Q_8 *e* D_4 *são nilpotentes de classe* 2*. Então pelo Teorema 4.28 temos que* $\eta(Q_8, D_4)$ *é nilpotente de classe no máximo* $7 = 8C_{2,2} - C_{2,2}$*.*

No Exemplo 4.11, vimos que o grupo $\eta(V_4, C_3)$ não é supersolúvel pois contém um subgrupo isomorfo ao grupo A_4 (não supersolúvel). Portanto, mesmo sendo finitos não podemos garantir que o grupo $\eta(G, H)$ é supersolúvel à partir de dois grupos G e H supersolúveis finitos com ações compatíveis um sobre o outro. Porém ao adicionarmos ações Engelianas nos grupos envolvidos podemos garantir que o subgrupo $\tau(G, H)$ é nilpotente.

Proposição 4.30. *Sejam* G *e* H *grupos finitos. Suponha que* G *e* H *agem compativelmente um sobre o outro com uma ação Engeliana. Então,* $G \otimes H$ *é nilpotente.*

Demonstração. Sabemos pela Proposição 4.7 que $Im(\lambda) = D_H(G)$ e $ker(\lambda)$ é um subgrupo central de $\tau(G, H)$. Pelo Teorema do isomorfismo, temos que

$$\frac{\tau(G, H)}{ker(\lambda)} \simeq D_H(G).$$

Pela Proposição 4.23, $D_H(G)$ satisfaz a condição de Engel e é finito pois G é finito. Assim, pelo Teorema 2.22, $D_H(G)$ é nilpotente e, consequentemente, $\tau(G, H)/ker(\lambda)$ é nilpotente. Como $ker(\lambda)$ é central em $\tau(G, H)$, pela Proposição 2.3 concluímos que $\tau(G, H)$ é nilpotente. E como $\tau(G, H) \simeq G \otimes H$, obtemos o resultado desejado. ■

Concluímos esse capítulo com a seguinte questão relacionada aos grupos supersolúveis:

Questão 4.31. *Sejam G e H grupos supersolúveis finitos. Suponha que G e H agem compativelmente um sobre o outro com uma ação Engeliana. Então $\eta(G, H)$ é supersolúvel?*

Observação 4.32. *Para demonstrar a questão acima é suficiente mostrar que o grupo $\eta(G, H)/\tau(G, H)'$ é supersolúvel (Proposições 4.30 e 2.19).*

Capítulo 5

Considerações finais

Em [19] Rocco mostra que o grupo $\nu(G)$ é nilpotente, de classe $c+1$ ou c, se o grupo G é nilpotente de classe c. Além disso, mostramos no Teorema 4.15 que se os grupos G e H são solúveis então o grupo $\eta(G,H)$ é solúvel. É factível pensar que se este resultado é válido para o grupo $\eta(G,H)$, ou seja, dados dois grupos nilpotentes com ações compatíveis um sobre o outro então o grupo $\eta(G,H)$ é nilpotente. Mas este raciocínio não é válido, pois dados C_p e C_2 os grupos cíclicos de ordem p e 2 respectivamente, com p primo ímpar, provamos em 4.10 que o grupo $\eta(C_p, C_2)$ não é nilpotente. Assim, mesmo que os grupos envolvidos sejam cíclicos não podemos garantir a nilpotência do grupo $\eta(G,H)$. Dessa forma, para garantir que o grupo $\eta(G,H)$ seja nilpotente, exigimos que os grupos sejam finitamente gerados e as ações dos grupos envolvidos cumpre mais uma propriedade, além de serem compatíveis. Com isso, provamos em 4.27 que se os grupos envolvidos são nilpotentes finitamente gerados e as ações são compatíveis e cumprem a condição de Engel então o grupo $\eta(G,H)$ é nilpotente. Note que não estipulamos a classe de nilpotência do grupo $\eta(G,H)$, e para obter uma cota máxima de nilpotência, devemos exigir condições mais fortes sobre as ações dos grupos e em contra partida podemos retirar a exigência que os grupos sejam finitamente gerados. Dessa forma, provamos em 4.28 que se os grupos G e H são nilpotentes de classe a e b, respectivamente tal que a ação de H sobre G é nilpotente de classe l e a ação de G sobre H é nilpotente de classe k então $\eta(G,H)$ é um grupo nilpotente de classe no máximo uma cota em termos das classes de nilpotência dos grupos e das ações envolvidas.

São conhecidas muitas classes de grupos entre nilpotentes finitos e solúveis finitos como por exemplo: os grupos supersolúveis, os grupos que satisfazem torre de Sylow, grupos que satisfazem a recíproca do Teorema de Lagrange entre outras classes. No Exemplo 4.11 provamos que o grupo $\eta(G,H)$ não é necessariamente supersolúvel se os grupos G e H são supersolúveis finitos. Assim, podemos nós questionar quais classes de grupos são preservadas nas construções do produto tensorial não abeliano de grupos e na construção do grupo $\eta(G,H)$. Mais precisamente: consideramos uma classe de grupos finitos $\mathfrak{X}$ entre nilpotentes e solúveis. Se G e H são grupos em $\mathfrak{X}$, com ações nilpotentes entre eles, então o grupo $\eta(G,H)$ esta na classe $\mathfrak{X}$?

Bibliografia

[1] A. Abdollahi. Engel elements in groups. *In: Groups St Andrews 2009 in Bath. Cambridge University Press, Cambridge*, pages Volume 1, 94–117, 2011.

[2] R. Bastos, I. N. Nakaoka, and N. R. Rocco. Finiteness conditions for the non-abelian tensor product of groups. *Monatsh. Math.*, 187(4):603–615, 2018.

[3] R. Brown, D. L. Johnson, and E. F. Robertson. Some computations of non-abelian tensor products of groups. *J. Algebra*, 111(1):177–202, 1987.

[4] R. Brown and J.-L. Loday. Van Kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology*, 26(3):311–335, 1987. With an appendix by M. Zisman.

[5] R. K. Dennis. In search of new homology functors having a close relationship to k-theory. *Preprint, Cornell University*, 1976.

[6] G. Donadze, M. Ladra, and V. Z. Thomas. On some closure properties of the non-abelian tensor product. *J. Algebra*, 472:399–413, 2017.

[7] G. Ellis and F. Leonard. Computing Schur multipliers and tensor products of finite groups. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 95(2):137–147, 1995.

[8] G. J. Ellis. The nonabelian tensor product of finite groups is finite. *J. Algebra*, 111(1):203–205, 1987.

[9] N. D. Gilbert and Philip J. Higgins. The non-abelian tensor product of groups and related constructions. *Glasgow Math. J.*, 31(1):17–29, 1989.

[10] K. W. Gruenberg. Two theorems on Engel groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49:377–380, 1953.

[11] D. L. Johnson. *Presentations of groups*, volume 15 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1997.

[12] A. S.-T. Lue. The Ganea map for nilpotent groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(2):309–312, 1976.

[13] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations.* Interscience Publishers [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1966.

[14] C. Miller. The second homology group of a group; relations among commutators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:588–595, 1952.

[15] I. N. Nakaoka. *Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos solúveis.* Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 1998.

[16] I. N. Nakaoka. Non-abelian tensor products of solvable groups. *J. Group Theory*, 3(2):157–167, 2000.

[17] I. N. Nakaoka and N. R. Rocco. Nilpotent actions on non-abelian tensor products of groups. volume 21, pages 223–238. 2001. 16th School of Algebra, Part II (Portuguese) (Brasília, 2000).

[18] D. J. S. Robinson. *A course in the theory of groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1996.

[19] N. R. Rocco. On a construction related to the nonabelian tensor square of a group. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 22(1):63–79, 1991.

[20] J. S. Rose. *A course on group theory*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1978.

[21] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

[22] E. Schenkman. *Group theory*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1965.

[23] Viji Z. Thomas. The non-abelian tensor product of finite groups is finite: a homology-free proof. *Glasg. Math. J.*, 52(3):473–477, 2010.

[24] M. P. Visscher. On the nilpotency class and solvability length of nonabelian tensor products of groups. *Arch. Math. (Basel)*, 73(3):161–171, 1999.

[25] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:453–496, 1949.