



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UnB  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FE  
PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE

CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS

AVALIAÇÃO FORMATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA POR FEEDBACKS COM O  
APOIO DA METODOLOGIA DA SALA DE AULA INVERTIDA

BRASÍLIA - DF

2023

CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS

AVALIAÇÃO FORMATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA POR FEEDBACKS COM O  
APOIO DA METODOLOGIA DA SALA DE AULA INVERTIDA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília (PPGE/FE/UnB), como parte dos requisitos para a obtenção de título de Doutor em Educação, desenvolvido sob a orientação do Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo.

BRASÍLIA – DF

2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237a Santos, Cleiton Rodrigues dos  
Avaliação formativa em matemática mediada por feedbacks  
com o apoio da metodologia da sala de aula invertida /  
Cleiton Rodrigues dos Santos; orientador Cleyton Hércules  
Gontijo. -- Brasília, 2023.  
173 p.

Tese (Doutorado em Educação) -- Universidade de Brasília,  
2023.

1. Avaliação formativa em matemática. 2. Feedback em  
matemática. 3. Sala de aula invertida. 4. Aprendizagem  
matemática. I. Hércules Gontijo, Cleyton, orient. II.  
Título.

CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS

AVALIAÇÃO FORMATIVA EM MATEMÁTICA MEDIADA POR FEEDBACKS COM O  
APOIO DA METODOLOGIA DA SALA DE AULA INVERTIDA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília (PPGE/FE/UnB), como parte dos requisitos para a obtenção de título de Doutor em Educação, desenvolvido sob a orientação do Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo.

Defendida e aprovada em: Brasília, DF, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2023.

BANCA EXAMINADORA FORMADA POR

---

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo  
Orientador – MAT/UnB

---

Prof. Dr. Mateus Gianni Fonseca  
Membro Externo – IFB

---

Prof. Dra. Deire Lúcia de Oliveira  
Membro Externo – SEEDF

---

Prof. Dr. Wescley Well Vicente Bezerra  
Membro Interno – UnB

---

Prof. Dr. Alexandre Tolentino de Carvalho  
Suplente – SEEDF

## RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar os processos de resolução de tarefas matemáticas de um grupo de estudantes do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede privada de ensino de Brasília, apoiada na avaliação formativa por meio de *feedbacks* estruturados e intencionais, no campo do ensino e da aprendizagem de geometria plana com a metodologia de sala de aula invertida. O estudo, de natureza qualitativa, de caráter exploratório, foi desenvolvido com quarenta e seis estudantes de idades de 14 a 16 anos. Esses estudantes receberam ao longo de 10 semanas de aulas, um conjunto de tarefas de geometria plana com o esclarecimento dos objetivos a serem alcançados e o modo como seriam avaliados. As produções dos estudantes foram analisadas e categorizadas em: tarefa sem resposta, tarefa resolvida incorretamente, tarefa resolvida parcialmente correta e tarefa resolvida corretamente. A partir dessa categorização, forneceu-se *feedback* aos estudantes de modo a superarem as possíveis dificuldades de aprendizagem envolvidas nas tarefas realizadas. Examinou-se as produções dos estudantes por meio da metodologia da análise de conteúdo: pré-análise; exploração dos documentos produzidos; análise e discussão dos dados. As observações iniciais demonstraram que os estudantes não tinham o hábito de estudar em busca de construir conhecimento e ficavam à espera da explicação do professor/pesquisador para esclarecer as suas dúvidas. A insegurança quanto aos procedimentos adotados nas suas resoluções tornou clara as lacunas que precisavam de intervenção para favorecer as aprendizagens. Conhecimentos geométricos com generalizações incorretas e obstáculos algébricos constituíram-se como fontes de análise e discussão durante o desenvolvimento das tarefas. Usando a metodologia de sala de aula invertida, os estudantes foram estimulados a fazer as tarefas, inicialmente de modo individual, mas aos poucos criou-se uma rede colaborativa transformando as aulas regulares, de natureza expositiva, em momentos de aprendizagem dialógica a partir dos *feedbacks* em cada atividade, favorecendo o protagonismo dos estudantes nas aulas. A diversificação dos espaços e recursos pedagógicos imprimiu características de um ensino colaborativo e democrático, no qual a avaliação formativa possibilitou a retomada de conhecimentos de modo a ressignificar o erro. O *feedback* estruturado para a aprendizagem proporcionou ao estudante a participação efetiva em todas as etapas de construção de conhecimento e, ao professor/pesquisador, a possibilidade de rever o planejamento a cada encontro, conhecer as estratégias de resolução dos estudantes e formular *feedbacks* intencionais para cada estudante ou grupo de estudantes em prol de desenvolver a aprendizagem matemática. Esses desdobramentos revelaram o favorecimento da aprendizagem matemática quando aplicada a avaliação formativa apoiada em *feedbacks* estruturados e intencionais com o suporte da metodologia da sala de aula invertida.

Palavras-chave: avaliação formativa em matemática; *feedback* em matemática; sala de aula invertida; aprendizagem matemática.

## ABSTRACT

This research aims at investigating the processes involved in the resolution of mathematical tasks of a group of high school freshmen of a private school in Brasilia, rooted in continuous assessment through intentional and structured feedback, in the field of plane geometry learning following the flipped classroom methodology. The qualitative and exploratory case study was developed with forty six learners ranging from 14 to 16 years of age. These students were assigned a set of plane geometry tasks along a period of 10 weeks of lessons with clearly defined goals to be achieved as well as the assessment criteria adopted. Their production was analysed and categorized as follows: unanswered task, task incorrectly answered, partially correct answered, correctly answered. Feedback was offered to students so as to help them overcome possible learning difficulties involved in the resolution of the tasks assigned. Learner's production was analysed via content analysis: pre- analysis, exploration of the documents produced, data analysis and discussion. Initial observations showed that the learners were not used to studying with a view to building knowledge and sought teachers' explanation to clarify their queries. Insecurity as to the procedures adopted in task resolution made the lacunae which called for intervention to foster learning. Geometrical knowledge with incorrect generalizations and algebraic obstacles constituted sources of analysis and debate during the development of the tasks. Using the flipped classroom methodology, students were motivated to do the tasks, individually at first. Gradually though, a collaborative network emerged converting the regular teacher-centered lessons into moments of dialogical learning, favoring the protagonism of learners in class. The diversity of pedagogical spaces and resources allowed for the existence of collaborative and democratic learning, in which continuous assessment made the resource to knowledge with a view to shedding light on the role played by mistakes in learning processes. The structured feedback to learning provided the learner the opportunity to effectively participate in all stages of learning and the teacher/researcher the possibility of reviewing his planning for every lesson, familiarizing himself with the strategies adopted by learners in the resolution of tasks and formulating intentional to every learner or group of learners in the name of learning mathematics. These observations revealed that the learning of mathematics is favoured when the continuous assessment methodology rooted in structured and intentional feedback is adopted in the flipped classroom.

Keywords: formative assessment in mathematics; feedback in mathematics; flipped classroom; learning mathematics.

À minha mãe, Maria Aparecida Rodrigues dos Santos, e ao meu pai, José da Costa Santos (*in memoriam*).

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Cleyton Hércules Gontijo, que com paciência e maestria soube direcionar-me pelos caminhos que o doutoramento exigiu. Agradeço por toda dedicação à minha pesquisa e pela amizade construída.

Agradeço às minhas quatro pérolas de vida, João Jorge, Marcella, Maitê e Romeu, filhotes e motivos da força que movimentam o meu ser a cada dia e que espero inspirar sempre.

À minha maravilhosa esposa, Livia Zacarias Rocha, que em meio a uma pandemia foi paciente, contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento acadêmico e cuidou, por muitas vezes, sozinha dos nossos filhos.

Ao meu irmão, Claudio, e à minha irmã, Kátia, minhas almas gêmeas que tanto amo.

À minha sogra, Marlene Amâncio, que deu suporte junto aos meus filhos.

Aos amigos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores, Regina Pina, João Viola, Deire Lúcia, Mateus Gianni, Wesley Well e Alexandre Tolentino, que compuseram a banca de qualificação e examinadora e contribuíram para o aprimoramento desta pesquisa.

Aos estudantes que participaram da pesquisa.

Ao Colégio da rede de ensino privado de Brasília que colaborou com esta pesquisa, que na figura dos seus gestores apoiou toda a pesquisa de campo.

À Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, que proporcionou o afastamento remunerado durante o curso de doutorado.

Aos professores e professoras da Universidade de Brasília, que com zelo e dedicação contribuíram para a minha formação.

“... É preciso amar as pessoas como se não houvesse amanhã...”  
Dado/ Bonfá/Renato

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

ADA	Avaliação Diagnóstica da Aprendizagem
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Tese e Dissertações
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CEUB	Centro de Ensino Unificado de Brasília
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EUA	Estados Unidos da América
FAST	Faculdade Santa Terezinha
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PAS	Processo de Avaliação Seriado
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SEEDF	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UDF	Centro Universitário de Brasília
UFG	Universidade Federal do Goiás
UI	Universidade Internacional
UnB	Universidade de Brasília
ZDM	<i>The International Journal on Mathematics Education</i>

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD .....	27
Quadro 2 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD .....	28
Quadro 3 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD .....	31
Quadro 4 - Lista de artigos encontrados no IV SIPEM, GT 8 .....	32
Quadro 5 - Lista de artigos encontrados no V SIPEM, GT3 e GT8.....	33
Quadro 6 - Lista de artigos encontrados no VI SIPEM, GT3, GT6 e GT8.....	33
Quadro 7 - Lista de artigos encontrados no VII SIPEM, GT2, GT6 e GT8.....	34
Quadro 8 - Lista de artigos encontrados periódicos da CAPES com Qualis A1, A2 e A3 .....	35
Quadro 9 - Lista de artigos selecionados na ZDM.....	38

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Resolução do estudante 14. ....	90
Figura 2 - Resolução do estudante 19 .....	92
Figura 3 - Resolução do estudante 04. ....	94
Figura 4 - Resolução do estudante 27. ....	94
Figura 5 - Resolução do estudante 28 .....	94
Figura 6 - Resolução do estudante 32 .....	95
Figura 7 - Resolução do estudante 11 .....	99
Figura 8 - Construção feita pelo pesquisador .....	100
Figura 9 - Resolução do estudante 19. ....	102
Figura 10 - Resolução do estudante 27.....	102
Figura 11 - Resolução do estudante 01.....	107
Figura 12 - Resolução do estudante 04.....	107
Figura 13 - Resolução do estudante 15.....	107
Figura 14 - Resolução do estudante 17.....	111
Figura 15 - Resolução do estudante 29.....	111
Figura 16 - Resolução do estudante 01.....	117
Figura 17 - Resolução do estudante 02.....	120
Figura 18 - Primeira resolução dos estudantes, 02, 34 e 35.....	120
Figura 19 - Segunda resolução dos estudantes, 02, 34 e 35.....	121
Figura 20 - Resolução do estudante 11.....	125
Figura 21- Resolução do estudante 45 .....	128
Figura 22 - Resolução apresentada pelo pesquisador .....	131
Figura 23 - Resolução do estudante 20.....	132

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>19</b>
1.1 Questão de Pesquisa .....	22
1.2 Objetivo Geral .....	22
1.3 Objetivos Específicos .....	22
<b>2 REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA</b> .....	<b>25</b>
<b>3 APORTE TEÓRICO</b> .....	<b>39</b>
3.1 Sala de Aula Invertida .....	39
3.2 Avaliação .....	42
3.2.1 Avaliação Diagnóstica .....	53
3.2.2 Avaliação Formativa .....	56
3.2.3 Avaliação Somativa .....	62
3.3 Feedback .....	64
<b>4 METODOLOGIA</b> .....	<b>76</b>
4.1 Os princípios éticos .....	76
4.2 Os participantes .....	76
4.3 Natureza e desdobramentos da Pesquisa .....	77
4.4 Particularidades da Sala de Aula Invertida na Pesquisa .....	83
4.5 Os instrumentos e procedimentos para a produção de informações .....	83
4.6 O contexto da produção das informações para análise .....	85
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>87</b>
5.1 Primeira semana .....	87
5.2 Segunda semana .....	89
5.3 Terceira semana .....	105
5.4 Quarta semana .....	106
5.5 Quinta semana .....	113
5.6 Sexta semana .....	116
5.7 Sétima Semana .....	122
5.8 Oitava semana .....	132

5.9	Nona Semana.....	135
5.10	Décima Semana .....	140
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>145</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>149</b>
	<b>APÊNDICES .....</b>	<b>160</b>
	<b>APÊNDICE A – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA_1 .....</b>	<b>160</b>
	<b>APÊNDICE B – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA_2 .....</b>	<b>162</b>
	<b>APÊNDICE C – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA_3 .....</b>	<b>163</b>
	<b>APÊNDICE D – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA_4 .....</b>	<b>164</b>
	<b>APÊNDICE E – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA_5 .....</b>	<b>165</b>
	<b>ANEXOS.....</b>	<b>166</b>
	<b>ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – PAIS OU RESPONSÁVEIS.....</b>	<b>166</b>
	<b>ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE).....</b>	<b>169</b>
	<b>ANEXO C – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP .....</b>	<b>171</b>

## APRESENTAÇÃO

Refletindo acerca da minha trajetória, percebo hoje o quanto questioneei por que os meus amigos não viam a sua aprendizagem refletida na avaliação que tinham acabado de fazer ou até mesmo nas tarefas realizadas em sala de aula. É bem verdade que esse tipo de reflexão começou a ocorrer-me nos anos finais do hoje chamado Ensino Fundamental e perdura até hoje com os meus estudantes.

Minha vida estudantil foi realizada, na maioria do tempo, em escola pública e a formação inicial foi técnica, concluída em 1987, por conta do contexto de vida: a necessidade de uma qualificação profissional para ingressar no mercado de trabalho o quanto antes.

Terminei a graduação em 1992, em Ciências e Matemática, no Centro de Ensino Unificado de Brasília (CEUB) e, mesmo antes de terminar o curso, comecei a trabalhar como professor. Na oportunidade, dividia o meu dia em trabalhar como técnico em eletrônica durante o dia e professor no noturno, como contrato temporário em escolas públicas no Distrito Federal. Nesse início, aproveitava o intervalo entre as aulas para conversar com os professores mais experientes e pedia para assistir às suas aulas de modo a compará-las com as minhas, pois o sentimento que tinha com o modelo de aula expositiva, resolução mecânica de tarefas com aplicação direta de fórmulas, trabalho com um certo distanciamento do cotidiano dos estudantes e foco na formação deles para que pudessem “passar no vestibular”, era de fracasso, enquanto profissional da educação.

Alguns anos depois, fui trabalhar na empresa de meu pai, uma indústria metalúrgica de pequeno porte. Foram cinco anos bem conturbados por uma série de problemas administrativos na empresa que, felizmente, todos foram resolvidos. Durante esse período, passei no concurso para professor da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF). As responsabilidades junto à empresa me tomavam muito tempo e, por isso, a minha vivência como professor se dava apenas durante o tempo que estava em sala de aula. Vivência essa que só aumentava a minha não compreensão do que se dava em sala de aula quando ao trabalhar, por exemplo, o cálculo de porcentagem. Quando pedia para os estudantes calcularem 30% de 150, alguns encontravam 450 como resposta e não percebiam o erro.

Exatos cinco anos mais tarde do início do trabalho com meu pai, encerrei essa jornada e fui trabalhar em escolas privadas no Distrito Federal. Agora, os três turnos

ocupados com sala de aula, passei a pesquisar, em livros e congressos, situações de aprendizagem apoiadas em pesquisas de campo com estudo de caso que pudesse replicar, pelo menos em parte, nas minhas salas de aula de modo a dar mais significado ao que fazia. Veio então, com essas pesquisas, a possibilidade de cursar, em 2000, o mestrado em Ciências da Educação na Universidade Internacional (UI), em Lisboa. Os professores, na sua maioria portugueses, vinham à Brasília e ficávamos uma semana inteira com aulas nos três turnos, muito intensas, com trabalhos a serem realizados durante as aulas e, após o fim de cada módulo tínhamos de enviar uma produção que resumia o que fora desenvolvido. O curso conteve doze módulos/disciplinas e a universidade exigia a presença dos estudantes em Portugal em pelo menos três, além da defesa que obrigatoriamente deveria ocorrer nesse país. Por conta de aspectos financeiros justificados junto à universidade, fui às aulas de uma disciplina que durou uma semana e à defesa. Após a defesa entrei com o processo de revalidação do curso no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Goiás (PPGE/UFG), o qual foi prontamente aceito por atender às exigências para o reconhecimento do título.

Durante o curso tive um módulo intitulado de tecnologia educativa, que tratava do uso de tecnologias em educação, ou seja, o uso de ferramentas digitais que oportunizavam o trabalho de modo mais dinâmico, posicionando o estudante no centro do processo de construção do conhecimento. Assim constituí o tema da minha dissertação: “As Implicações do Uso de Recursos Tecnológicos no Ensino de Geometria Plana”. Fui orientado pelo professor Dr. Cristiano Alberto Muniz, da Universidade de Brasília (UnB), com o qual tive conversas que oportunizaram muitas reflexões acerca de temas que circundam a nossa profissão e meu objeto de estudo. Promovi mudanças significativas na minha prática pedagógica, incluindo nas aulas o uso de materiais concretos, de computadores no laboratório de informática das escolas, monitoria com os estudantes de maior rendimento escolar, reorganização do ambiente físico e social de sala de aula, entre outros.

Confesso que percebi melhoras em muitos aspectos, mas um em particular não mudou quase nada, a percepção do estudante quanto ao seu não aprendizado ao realizar uma avaliação que, por conta da padronização da semana de provas nas escolas, só acontecia ao final de cada bimestre, ou seja, a avaliação não era um processo, ainda continuava com situações em que o erro não era percebido e não havia uma reflexão do processo de resolução das avaliações. O erro era visto pela

maioria somente como um fracasso, uma punição por baixar a sua nota nas avaliações, mas não como uma oportunidade de aprendizagem. Durante esse período, comecei a fazer um levantamento estatístico com os percentuais de erros e acertos em cada tópico da avaliação para identificar aqueles que concentravam mais dificuldades para tomar medidas que pudessem minimizar esse não aprendizado. Como o currículo está voltado a uma preparação para as provas de vestibulares, o tempo não permitia uma retomada mais aprofundada dos tópicos que apresentavam maior defasagem entre os estudantes, embora procurasse nos conteúdos seguintes promover a recursividade desses conteúdos para tentar minimizar os danos.

Ingressei mais adiante, como professor, no ensino superior e, num mesmo ano, cheguei a trabalhar com turmas da sexta série do ensino fundamental, hoje chamado de sétimo ano, até as disciplinas do curso de formação de professores de Matemática na Faculdade Santa Terezinha (FAST), na Região Administrativa de Taguatinga/DF e mais adiante nos cursos de Engenharia Civil e Mecânica no Centro Universitário de Brasília (UDF). Em ambos os cursos superiores, encontrei a mesma situação das escolas de ensino fundamental e médio: estudantes que não tinham segurança do que faziam, e a não criticidade quanto aos resultados e processos desenvolvidos durante a resolução das tarefas, que por sua vez traziam contextos mais densos. Declaradamente estudavam para passar na disciplina com o propósito de graduar-se e, nesse processo, apenas a nota que tiravam na avaliação tinha importância.

As inquietudes dessas não aprendizagens me moveram a pesquisar acerca do processo avaliativo como forma de promover a aprendizagem, já que os estudantes davam, e dão, tamanha relevância à avaliação. Em pesquisas, palestras, leituras de livros e artigos, conversas com outros professores, estudos de processos avaliativos e outras situações, decidi intensificar o estudo das avaliações para a aprendizagem de modo a proporcionar essa aprendizagem matemática, tendo o *feedback* estruturado e com intencionalidade por parte do professor para o estudante e, o *feedback* do estudante para o professor de modo a deixar claro quais são as suas estratégias de resolução das tarefas matemáticas como elemento de fundamental importância, a análise do erro como oportunidade de aprendizagem e não fracasso, o posicionamento do estudante como ator principal desse processo e o diversificar de estratégias didáticas tais como o trabalho em grupo, a validação de conhecimento em rodas de conversa, o trabalho com materiais concretos, o uso de plataformas digitais como apoio para aprendizagem, entre outras.

Nessas pesquisas, deparei-me com a estratégia didática chamada de sala de aula invertida, que se desvincula do modelo exclusivamente expositivo de aula. O professor faz uma abordagem introdutória dos conceitos que pretende trabalhar e, em seguida, os estudantes trabalham em grupo ou individualmente, usando recursos tecnológicos ou materiais concretos, pesquisando em livros ou em sites, conversando com os pares e confrontando ideias levando sempre em conta que as pessoas aprendem de formas diferentes e em tempos diferentes. Durante esse processo, o professor faz mediações e intervenções, quando for o caso, acompanhando o desenvolvimento do estudante.

Por fim, venho experimentando a sala de aula invertida em busca de respostas e, com o propósito de aprofundar e dar mais cientificidade aos meus estudos. Ingressei na Universidade de Brasília (UnB) como aluno especial em uma disciplina cujo tema central era criatividade. Construí o projeto de pesquisa e, em julho de 2019, fui aprovado no doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília (PPGE/UnB). Desse modo, constituí o meu objeto de pesquisa: O *feedback*, na perspectiva da avaliação formativa, aplicado na metodologia de sala de aula invertida como processo de desenvolvimento da aprendizagem matemática com estudantes do primeiro ano do ensino médio.

## 1 INTRODUÇÃO

O trabalho docente envolve um conjunto de funções e dentre essas, destaca-se a realização do processo avaliativo, que tem suscitado discussões quanto à forma e à funcionalidade. Quanto à forma, pode-se exemplificar as somativas com características classificatórias; as diagnósticas que podem ser um ponto de partida para se compreender as aprendizagens anteriores desenvolvidas pelos estudantes; e as formativas, que são desenvolvidas como um processo e não um momento estanque do trabalho docente. A discussão quanto à sua função no processo educativo é um tema de muitas abordagens. Autores como Allal (1986), Fernandes (2009), Hadji (2001), Luckesi (2008), Perrenoud (1998), Torrance e Pryor (2001), Villas Boas (1993), dentre outros, promovem com as suas pesquisas discussões acerca dos reflexos, positivos e negativos, que o processo avaliativo pode criar na aprendizagem dos estudantes.

No Brasil, desde o início da aplicação de instrumentos avaliativos em larga escala, nacionais e internacionais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) cuja premissa é “avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos” (BRASIL/MEC, s.d.), tem-se verificado que os resultados do nível de proficiência em matemática para a terceira série do ensino médio, por exemplo, são preocupantes. O nível de proficiência dos estudantes no SAEB é apresentado em uma escala de 11 níveis, numerados de 0 a 10 e, observando os resultados da edição de 2019, em média, aproximadamente 70% dos estudantes dessa série encontram-se até o nível 3 e menos de 5% dos estudantes que concluem o ensino médio atingem o nível 7 ou um superior. Em âmbito internacional, o Brasil é um dos países convidados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realizado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), e os resultados revelam, de modo abrangente, o déficit de proficiência em matemática na educação básica. No PISA de 2018, por exemplo, os estudantes brasileiros obtiveram média de 384 pontos, o que significa aproximadamente 100 pontos abaixo da média geral dos países participantes. Nesse programa, o Brasil não apresenta melhoras significativas de rendimento desde 2009 e diversas variáveis podem ser elencadas para justificar tal déficit, tais como a ineficiência de práticas de ensino em sala de aula

e processo de avaliação que contribua para as aprendizagens. Como aponta Fernandes (2009, p. 19),

os sistemas de educação e de formação continuam a ter dificuldades em concretizar práticas de ensino e de avaliação que contribuam para que as crianças e jovens desenvolvam plenamente as competências indispensáveis para prosseguirem livremente na sua vida escolar ou profissional.

Os sistemas de educação e de formação, em sua maioria, são baseados no modelo de ensino tradicional, que têm por premissa a transmissão dos procedimentos/conteúdos, a reprodução de modelos de avaliação que apenas classificam os estudantes e que, pouco ou quase nada, contribuem com o processo de ensino e aprendizagem em matemática. Vale destacar que a avaliação aplicada nesse modelo de ensino há muito tempo se sustenta sob a justificativa de preparar para exames, para ingresso em universidades.

O modelo de ensino tradicional, muito difundido desde a chegada dos jesuítas no Brasil para ofertar educação à população, surgiu como forma de disciplinar os estudantes e, à época, também como forma de manter a ordem social: “Cada um dos alunos em particular terá o seu lugar fixo, e nenhum deles deixará ou mudará o seu, a não ser por ordem e consentimento do inspetor das escolas” (LA SALLE, 1951, p. 251). Nesse modelo de ensino, há a proposta de domínio da turma com o ensino simultâneo, a gestão do tempo e do espaço de modo a ajustar a postura dos estudantes e, nele, assume-se que todos aprendem no mesmo tempo e do mesmo modo. Críticos de longa data a esse modelo e, outros contemporâneos, como Antonio Gramsci (1891-1937), John Dewey (1859-1952), Michel Foucault (1926-1984), Pierre Bourdieu (1930-2002), Paulo Freire (1921-1997), Morin, Perrenoud, Domingos Fernandes, advogam que cada indivíduo tem o seu ritmo de aprendizado e que não é possível padronizar o mesmo.

Nesse modelo, as tarefas apresentadas para os estudantes, tanto no trabalho diário em sala de aula como nas avaliações, costumam ser estruturadas com frases curtas e muitas vezes num único parágrafo, cujas resoluções são apoiadas em procedimentos de memorização. Não há inconveniência em trabalhar com esse tipo de tarefa, pois ele tem um fundamento pedagógico que o sustenta, mas há de se pensar em diversificar os tipos fazendo referências a contextos reais e com apelo ao uso de estratégias pessoais de resolução, uma vez que as “[...] tarefas podem

desempenhar uma variedade de papéis [...]” (Ponte, 2014, p. 14). O problema está na forma como a tarefa é trabalhada pelo estudante, sem um processo de reflexão do que está constituindo como resolução e do modo como o professor trata esse produto entregue pelo estudante. A mera correção da tarefa ou da avaliação para atribuir uma nota, muitas vezes por conta da carga semanal de trabalho e dos modelos de avaliações que as escolas instituem, não contribui para que ocorram aprendizagens significativas. Fernandes (2009) evidencia essa situação, dizendo que

na verdade, continuam a prevalecer *modelos* que dão ênfase ao ensino de procedimentos rotineiros que pouco mais exigem dos alunos do que a reprodução de informação previamente *transmitida*. Continuam a prevalecer os modelos de avaliação pouco integrados ao ensino e à aprendizagem, sobretudo, orientados para atribuir classificações. A análise atenta do que os alunos sabem e fazem, para compreender as suas eventuais dificuldades e para ajudá-los a superá-las, parece ficar relegada a segundo plano (Fernandes, 2009, p. 19).

Nesse cenário, os estudantes são postos a tentar resolver tarefas similares às que foram exemplificadas em sala de aula, logo após o estudo de um conteúdo e com o objetivo de aplicação do mesmo de modo mecanizado, com vistas à memorização. Miguel (2005, p. 387) retrata que

Geralmente constatamos que a resolução de problemas é tratada na escola, de forma geral, de modo desmotivador, como um conjunto de fixação/aplicação. Nesse modo de agir, a tarefa do aluno geralmente se resume em ‘descobrir’ a conta, fórmula ou procedimento algorítmico para a solução.

Essas tarefas comumente apresentam todos os dados para chegar à resposta com a aplicação direta de um ou mais procedimentos e, geralmente, têm apenas um caminho que leva à solução. As tarefas com essas abordagens podem e devem ser propostas aos estudantes, mas o processo de resolução deve ser estruturado, colaborativo e dialógico de modo que o estudante seja levado a refletir sobre o que está produzindo, que saiba quais são os objetivos que se pretende atingir e, caso cometa algum erro, como tratá-lo em prol do desenvolvimento da sua aprendizagem. As avaliações em sala de aula que se caracterizam como medidas psicométricas e não envolvem a análise do processo, focando apenas o produto, é que devem ser repensadas. É esse tratamento que se dá a essa avaliação que não contribui de modo significativo para a aprendizagem do estudante.

Justifica-se a realização dessa pesquisa devido aos resultados insatisfatórios da aprendizagem em matemática com a abordagem metodológica apoiada na exposição de conteúdos, com a crença de que todos aprendem ao mesmo tempo e da mesma forma, associado a um modelo avaliativo que não produz informações que favoreçam a compreensão dos estudantes e os envolva no processo, pois, não esclarece pontualmente quais são as lacunas de aprendizagem, não é trabalhada como um processo, mas apenas retorna ao estudante uma nota que muitas vezes classifica, puni e contribui para a exclusão dos estudantes do meio acadêmico.

Contrapondo a abordagem tradicional do trabalho com as tarefas e avaliações, propõe-se neste estudo a aplicação da avaliação formativa com a aplicação da estratégia da sala de aula invertida para diversificar os ambientes de estudo, com atividades presenciais individuais e em grupos, tendo no erro e no *feedback* oportunidades de discussões enriquecedoras que posicionam o estudante no centro da construção do conhecimento. Considerando-se esses aspectos, apresenta-se a questão de investigação e os objetivos da pesquisa.

### **1.1 Questão de Pesquisa**

Como favorecer a aprendizagem matemática a partir de *feedbacks* na perspectiva da avaliação formativa associada à sala de aula invertida?

### **1.2 Objetivo Geral**

Investigar os processos de aprendizagem matemática de um grupo de estudantes do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede privada de ensino de Brasília, a partir de *feedbacks* estruturados e intencionais na perspectiva da avaliação formativa com a aplicação da metodologia de sala de aula invertida.

### **1.3 Objetivos Específicos**

Trabalhando de modo mais aprofundado, tem-se dois objetivos específicos:

- Analisar se o uso de *feedbacks* estruturados e intencionais, aplicados às construções dos estudantes no processo de avaliação formativa, contribui para a aprendizagem em matemática e promove a participação ativa dos estudantes nas tarefas de sala de aula.

- Verificar se o modelo de sala de aula invertida utilizado nessa investigação estimula o protagonismo do estudante no processo de construção de conhecimento, contrapondo o modelo tradicional de ensino.

Agregando valor à sala de aula invertida, propõe-se o trabalho com diversos tipos de tarefas que proporcionem desde os *aspectos de memorização*, classificada como uma tarefa de *exigência baixa* até o *fazer matemática* que apresenta um nível de *exigência alta* (NCTM, 2017). Esse diversificar das tarefas deve proporcionar mais diálogos entre os pares quando apresentadas de formas variadas, possibilitando assim, mais oportunidades da análise do processo de aprendizagem. Constituiu-se assim a pesquisa que propõe o uso da avaliação formativa como processo da aprendizagem matemática aplicando-se o modelo de sala de aula invertida em busca dessa aprendizagem matemática.

A avaliação formativa aqui referida consiste em um acompanhamento processual das etapas de construção do conhecimento, tendo como elemento central o *feedback estruturado com intencionalidade* e a proposição de tarefas que oportunizem mais de uma solução, valorizando dessa forma o diálogo sobre o processo, ou seja, as avaliações contribuindo para as aprendizagens. Entende-se a avaliação nesse modelo como

todo e qualquer processo deliberado e sistemático de coleta de informação, mais ou menos participativo e interativo, mais ou menos negociado, mais ou menos contextualizado, acerca do que os estudantes sabem e são capazes de fazer em uma diversidade de situações (Fernandes, 2009, p. 20).

A complexidade do processo avaliativo que Fernandes (2009) menciona sugere a participação, pelo menos em parte, dos estudantes. Tal procedimento inicia-se de conhecimentos previamente trabalhados e com a interatividade apoiada em *feedbacks* cujo objetivo é comunicar com clareza ao estudante o que deve ser feito para alcançar os objetivos pré-definidos.

No acompanhamento dessas avaliações, o *feedback* deve apresentar-se de modo estruturado e com intencionalidade, visando aprimorar as aprendizagens dos estudantes, pois ele está no cerne desse processo. O *feedback*, quando aplicado de modo correto, estimula os recursos cognitivos e metacognitivos dos estudantes, diminuindo a distância entre o que se tem de domínio e o que se deve ter, contribuindo para as aprendizagens. Winne e Butler (1994, p. 387) afirmam que

*feedback* é informação com a qual um aprendiz pode confirmar, adicionar, sobrescrever, sintonizar ou reestruturar informações na memória, seja essa informação conhecimento de domínio, conhecimento metacognitivo, crenças sobre si mesmo e tarefas, ou táticas e estratégias cognitivas.

Ressalta-se que todas essas ações que os estudantes podem e devem promover só serão significativas e estimulantes após o conhecimento das metas que se quer atingir, ou seja, o estudante deve ter conhecimento prévio dos objetivos de aprendizagem e de como acontecerão as avaliações que visam verificar se estes foram ou não alcançados.

Trabalhando com essa proposta, acredita-se que o estudante poderá desenvolver a sua aprendizagem matemática, uma vez que é ele quem mobiliza voluntariamente os seus conhecimentos e experiências na busca por essa aprendizagem. Alguns pesquisadores como Allal (1986), De Ketele (2001), Perrenoud (1998) e Torrance e Pryor (2001) concordam que a aprendizagem está pautada no que os estudantes produzem e pensam, ou seja, os seus processos cognitivos e metacognitivos desempenham um papel nuclear no desenvolvimento das suas aprendizagens.

No planejamento desse processo avaliativo, para que essa hipótese se concretize, cabe ao professor oportunizar tarefas e acompanhar cada período de desenvolvimento do estudante, de modo a conhecer as práticas, as aptidões e o nível de conhecimento que ele apresenta, bem como orientar as etapas para minimizar quaisquer distorções que possam surgir entre o que se pretender alcançar e o que já foi ou não alcançado, bem como incentivar aqueles estudantes que demonstram maior desenvoltura nas tarefas com vistas a desafiá-los a novas conquistas.

Defendemos a tese de que a aprendizagem matemática é positivamente influenciada pela aplicação de *feedbacks* estruturados nas resoluções das tarefas apresentadas, na análise das estratégias de resolução dos estudantes, nas ferramentas e na forma de utilização dessas, por parte dos estudantes e com a intencionalidade que cada tarefa e nível de conhecimento exigir.

A seguir, apresenta-se a revisão da literatura de pesquisas nacionais e internacionais que coadunem com o tema desta pesquisa com vistas a demonstrar o ineditismo e a relevância do tema de estudo.

## 2 REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

A definição dos objetivos da pesquisa passou por um processo de revisão sistemática da literatura de modo a evidenciar a relevância deles. Essa revisão proporciona o rigor de que uma pesquisa científica exige quanto a aspectos como a transparência dos pesquisados, o rigor da escrita, entre outros. De acordo com Faria, (2019, p. 20)

A revisão sistemática caracteriza-se, por conseguinte, por empregar uma metodologia de pesquisa com rigor científico e de grande transparência, cujo objetivo visa minimizar o enviesamento da literatura, na medida em que é feita uma recolha exaustiva dos textos publicados sobre o tema em questão.

A sistematização dessa revisão foi iniciada a partir da definição do problema a ser estudado: Como favorecer a aprendizagem matemática a partir de *feedbacks* na perspectiva da avaliação formativa associada à sala de aula invertida?

A seguir, definiu-se as expressões e palavras-chave que representaram a pesquisa: avaliação formativa em matemática, *feedback*, sala de aula invertida, aprendizagem matemática.

Os critérios de exclusão das pesquisas nos bancos de dados foram estabelecidos a partir da temporalidade de suas publicações, 2009 a 2023; da aplicação dessas pesquisas no ensino médio; do tema central ser a avaliação formativa em matemática apoiada em *feedbacks* estruturados e intencionais; de ser desenvolvido no modelo de sala de aula invertida e relacionada à aprendizagem matemática.

Definidos os critérios, escolheu-se as bases de dados: 1) Biblioteca Digital Brasileira de Tese e Dissertações (BDTD)<sup>1</sup>; 2) Os anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)<sup>2</sup>; 3) Os Periódicos nacionais da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)<sup>3</sup> com *Qualis* A1, A2 e A3 e, entre os periódicos estrangeiros, a revista ZDM <sup>4</sup>– *The International Journal on Mathematics Education*, de *Qualis* A1, na área de Educação Matemática.

---

<sup>1</sup> Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) - (<http://bdtd.ibict.br/vufind/>)

<sup>2</sup> SIPEM: <https://www.even3.com.br/anais/viiiisipemvs2021/>

<sup>3</sup> PERIÓDICOS CAPES: <https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br/index.php?>

<sup>4</sup> <https://link.springer.com/journal/11858/volumes-and-issues>

A pesquisa foi feita em dois momentos: um em dezembro de 2019, para se constatar a relevância e abordagem do tema no meio educacional; e outra em março de 2023, para atualização do banco antes da defesa da tese.

Definiu-se a temporalidade para o período de 2009 até 2023 e, na produção acadêmica brasileira, o levantamento de produções foi iniciado na BDTD, que é um espaço que conglomera e disponibiliza gratuitamente os teores, na íntegra, de teses e dissertações produzidas nas organizações de ensino e pesquisa em âmbito nacional. A BDTD coopera com a disseminação de trabalhos acadêmicos na internet proporcionando, com muita facilidade de acesso, produções de diversas áreas de conhecimento viabilizando a transparência dos investimentos em programas de pós-graduação.

O SIPEM é um espaço de intercâmbio de estudos com a constituição de grupos de trabalho de pesquisadores nacionais e estrangeiros em Educação Matemática. A formação desses grupos possibilita o propalar da produção brasileira e o incrementar, com produções acadêmicas significativas, o arcabouço de pesquisas em Educação Matemática. O Seminário é promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM<sup>5</sup>. Trata-se de um evento que ocorre a cada três anos e a última edição ocorreu em novembro de 2021.

O Portal de Periódicos da CAPES/MEC se constitui de uma ferramenta de consulta com atualização em tempo real de pesquisas de todas as partes do mundo. O acesso objetivo com aplicação de filtros agiliza os estudos com fontes confiáveis para a comunidade acadêmica. O leque denso de publicações de pesquisadores renomados contribui para a visibilidade desse portal e assegura uma fonte com uma vasta lista de trabalhos científicos.

E por último, a revista ZDM, classificada com *Qualis A1*, apresenta temas atuais bem como aspectos históricos da educação matemática. Composta por sete publicações anuais, com os textos revisados por pares e todas os artigos são publicados a partir de convites.

Iniciou-se a busca na Biblioteca Digital Brasileira de Tese e Dissertações (BDTD) em 20/12/2019. Com o enunciado, “Avaliação Formativa em Matemática” no campo de busca avançada, encontrou-se 8 pesquisas que traziam esses termos no título, sendo 5 dissertações e 3 teses. As pesquisas foram subdivididas por assunto

---

<sup>5</sup> <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

em: Matemática - Estudo e Ensino (2); Avaliação de Potencial de Aprendizagem (4); Avaliação Educacional (2). Apresenta-se a seguir um quadro com essas 7 pesquisas.

Quadro 1 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD

Grau e ano de defesa	Autor(a)	Título
Dissertação - 2016	Oliveira, Matheus Couto de	Uma prática de avaliação formativa em ambientes virtuais: processos de regulação e autorregulação
Dissertação - 2017	Ferreira, Joel Silva	Avaliação formativa e comunicação matemática: um estudo sobre a prática na educação de jovens e adultos
Dissertação - 2019	Souza, Meire Nadja Meira de	Avaliação Formativa em Matemática no contexto de jogos: a interação entre pares, autorregulação das aprendizagens e a construção de conceitos.
Dissertação - 2020	Weber, Talita Canassa	Articulação da avaliação somativa com avaliação formativa em aulas de matemática
Dissertação - 2022	Crippa, Márcio Felipe	O processo de avaliação da aprendizagem na perspectiva da avaliação formativa, no curso de licenciatura em matemática na Universidade de Caxias do Sul
Tese - 2004	Brinckmann, Roque	A avaliação formativa da aprendizagem através da matemática nebulosa: uma proposta metodológica
Tese - 2019	Bezerra, Wescley Well Vicente	Avaliação para aprendizagem na disciplina de Cálculo 1: percepções de discentes e docentes da Universidade de Brasília
Tese - 2020	Oliveira, Deire Lúcia de	Avaliação formativa e feedback, compreensão e uso por professores de matemática da rede pública de ensino do Distrito Federal

Fonte: Elaboração própria.

A segunda busca nesta plataforma, com o termo “Avaliação Formativa em Matemática”, trocando-se o campo título por assunto, encontrou 5 dissertações que foram subdivididas em: Avaliação Formativa (4); Ambiente virtual de aprendizagem (1). Apresenta-se, a seguir, um quadro com essas 5 pesquisas.

Quadro 2 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD

Grau e ano de defesa	Autor	Título
Dissertação - 2015	Arruda, Jeferson de	O uso das avaliações escritas de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental em escolas Públicas do Gama - DF
Dissertação - 2020	Carneiro, Jaíne	O uso do Kahoot! E do Ensino Híbrido como ferramentas de ensino e aprendizagem em Matemática
Dissertação - 2022	Santos, Larissa Testolin Schmiescki dos	O portfólio como instrumento de avaliação: concepções e percepções de professores de matemática
Dissertação - 2019	Maziviero, Helio Fernando Gomes	Proposta de um jogo digital como instrumento de apoio a avaliação formativa contínua sobre o conteúdo de funções
Dissertação - 2020	Maciel, Domício Magalhães	Aspectos da avaliação online no contexto de uma disciplina de um curso de licenciatura em Matemática a distância

Fonte: Elaboração própria.

Após a análise dos resumos dessas pesquisas coletadas na BDTD, constatou-se que há uma convergência para o estudo da avaliação da aprendizagem. Essas pesquisas, de cunho qualitativo e quantitativo, apresentam diversas análises do processo avaliativo. Oliveira (2016) desenvolveu a pesquisa em Ambientes Virtuais de Aprendizagens (AVA) com o objetivo de analisar uma prática avaliativa tendo por ferramentas esses ambientes. O autor trabalhou a avaliação como forma da promoção da autorregulação da aprendizagem e constatou que as plataformas favoreceram a regulação das aprendizagens e tornam os estudantes mais proativos e reflexivos.

Ferreira (2017), embasado em Semana e Santos (2012), propôs-se a caracterizar a comunicação entre os estudantes e entre esses e o professor nas aulas

de matemática com a aplicação da avaliação formativa. Concluiu que houve um processo de interação social que promoveu mudanças na práxis do professor e os estudantes assumiram um protagonismo ainda não vivenciado na construção de conhecimentos.

Souza (2019) realizou um estudo de caso em que tinha por proposta tornar o jogo um procedimento avaliativo para a aprendizagem. Destaca a autora a importância do *feedback* na ativação de processos cognitivos e metacognitivos e os resultados sinalizam para a formação de estudantes reflexivos e críticos quanto à percepção do erro e à possibilidade de autorregulação da aprendizagem.

Weber (2020) procurou destacar o conceito de avaliação formativa e avaliação somativa. A partir de uma prática, apresentou argumentos de que a articulação entre esses modelos de avaliação pode favorecer as aprendizagens e coexistir no processo pedagógico da vida escolar. A autora ressalta que a negociação (o *feedback*) durante o processo investigativo pode ser favorecer a aprendizagem de modo democrático e mais justo.

Crippa (2022) elaborou um quadro teórico sobre a avaliação da aprendizagem na licenciatura em matemática na universidade de Caxias do Sul. Os resultados apontam para um processo migratório da avaliação baseada em testes para a avaliação formativa e constata que a aprendizagem se dá ao longo do processo pedagógico planejado e replanejado pelo professor.

Brinckman (2004), trabalhando em um Programa de Pós-Graduação de Engenharia de Produção, propôs uma metodologia que possa instrumentar a avaliação formativa atribuindo sentidos e números a esse processo avaliativo e assim desenvolver a aprendizagem.

Bezerra (2019), com a abordagem qualitativa, pesquisou as percepções de docentes e discentes acerca do processo avaliativo na disciplina de cálculo I na Universidade de Brasília e, nessa pesquisa, encontramos contribuições para as nossas reflexões acerca da abordagem da avaliação formativa e do *feedback* como partes integrantes do processo de ensino e aprendizagem.

Oliveira (2020) analisou as práticas avaliativas bem como os *feedbacks* oferecidos por professores da rede pública de ensino do Distrito Federal em sala de aula na disciplina de matemática, de modo a atender os princípios da avaliação formativa. A autora apresenta uma detalhada pesquisa do vínculo da avaliação

formativa e o *feedback* em Matemática e a construção do seu aporte teórico dá-nos embasamento para algumas pesquisas.

A análise das pesquisas do quadro 2 apresenta propostas diversificadas da avaliação formativa. Arruda (2015), apoiado em dados quantitativos e comparando os instrumentos avaliativos de um grupo de professores com a Prova Brasil, infere que há a necessidade de investimento na formação desses professores com o objetivo de que consigam constituir instrumentos avaliativos que possam contribuir para a aprendizagem.

Carneiro (2020), utilizando o *Kahoot!* e a proposta de ensino híbrido, trabalhou com o *feedback* dinâmico fornecido pela *gamificação* que essa plataforma desenvolve, instituindo avaliações diagnósticas e formativas com o objetivo de promover a regulação da aprendizagem e autonomia do estudante.

Santos (2022) procurou compreender como professores de matemática percebem o portfólio como instrumento avaliativo formativo em matemática. Apoiada em Villas Boas (2012) e Luckesi (2011), comparou as concepções que esses professores tinham de um portfólio com as percepções após a conclusão de um curso de formação ministrado pela pesquisadora. O trabalho com essa proposta formativa ressignificou, juntos aos docentes, o conceito de portfólio e as suas potencialidades no processo avaliativo.

Maziviero (2019), com a perspectiva da avaliação formativa apoiada em *feedbacks* contínuos, desenvolveu um jogo que possibilitava o diagnóstico do conhecimento acerca do estudo de funções. Coletando dados quantitativos, comparou dois grupos de estudantes, um que passou por modelos avaliativos tradicionais e o outro com o apoio de jogos e, os resultados sugerem os jogos como um complemento do trabalho manual do professor.

Maciel (2020), pesquisando o processo de avaliação *online* com o objetivo de revelar oportunidades didáticas e pedagógicas com o trabalho da avaliação formativa, encontrou dificuldades que estão relacionadas à falta da discussão da avaliação formativa online em cursos de licenciatura de matemática e a sistematização de disciplinas, nesse curso, que abordem o uso de ambientes virtuais de aprendizagens e suas potencialidades avaliativas.

Seguindo com a plataforma BDTD, associou-se os termos “Avaliação formativa em matemática” AND “feedback” no campo de busca avançada. Foram encontradas

duas pesquisas, a que foi realizada e já abordada anteriormente de Souza (2019) e a de Perez (2015). Segue o quadro 3 com os dados da pesquisa.

Quadro 3 - Lista de dissertações e teses selecionadas na BDTD

Grau e ano de defesa	Autor(a)	Título
Dissertação - 2015	Perez, Leonardo Anselmo	Um estudo sobre o uso de avaliações apoiadas pelas tecnologias
Dissertação - 2019	Souza, Meire Nadja Meira de	Avaliação Formativa em Matemática no contexto de jogos: a interação entre pares, autorregulação das aprendizagens e a construção de conceitos.

Fonte: Elaboração própria.

O estudo de Perez (2015) destacou que a comparação qualitativa e quantitativa de dois grupos, um controle e um experimental, forneceu dados quanto aos efeitos do processo avaliativo formativo com o uso de tecnologias. O *feedback* e a regulação da aprendizagem foram vivenciados ao longo da pesquisa e, segundo o autor, esses fatores podem contribuir para o processo avaliativo aplicados pelos professores de matemática.

As pesquisas destacadas nos três quadros apresentam alguns temas correlatos à pesquisa descrita nessa tese e serão oportunamente citadas ao longo do texto. Encerrou-se a busca na BDTD quando, no campo de busca avançada, as expressões "avaliação formativa em matemática" AND "sala de aula invertida" e depois, "avaliação formativa em matemática" AND "sala de aula invertida" AND "feedback" não apresentaram nenhum trabalho publicado.

Prosseguindo com a análise de pesquisas, partiu-se para a leitura de artigos nos anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), disponíveis no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Em cada edição, selecionou-se os Grupos de Trabalhos que poderiam conter o objeto de estudo dessa pesquisa.

No IV SIPEM realizado em 2009, selecionou-se os Grupos de Trabalho 2 e 3: Educação Matemática nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio; e Grupo de Trabalho 8: Avaliação em Educação Matemática. No primeiro grupo, foram publicados 30 trabalhos, mas em nenhum encontrou-se o contexto da pesquisa a ser

desenvolvida. Dentre os trabalhos não relacionados com o objeto dessa pesquisa, tem-se: “A representação no processo de resolução de problemas de divisão por alunos do ensino fundamental e Educação matemática no ensino médio: das prescrições curriculares ao currículo praticado em sala de aula”. Apresenta-se, a seguir, um quadro com quatro dos seis trabalhos do GT8 que apresentaram algum aspecto abordado na investigação que desenvolvemos.

Quadro 4 - Lista de artigos encontrados no IV SIPEM, GT 8

Tema	Autores
A avaliação enquanto atividade de investigação: contribuições da análise da produção escrita	Jader Otávio Dalto Regina Luzia Corio de Buriasco
Estudo de registros escritos de professores de matemática	Pamela Emanuelli Alves Ferreira Regina Luzia Corio de Buriasco
Uma análise da produção escrita de estudantes do ensino médio em uma questão não rotineira de matemática: algumas informações obtidas	Edilaine Regina dos Santos Regina Luzia Corio de Buriasco
Para além da análise de erros	João Ricardo Viola dos Santos

Fonte: Elaboração própria

Os trabalhos em questão abordam a análise da escrita de estudantes e professores em instrumentos avaliativos e trabalhos rotineiros da sala de aula. Buscam identificar e analisar as estratégias e os procedimentos utilizados nas resoluções com vistas a entender o pensamento do estudante entre o que é pedido no enunciado das questões e o que ele desenvolve. Esses trabalhos trazem os objetos de investigação, a análise do erro e das construções dos estudantes, que também serão apreciados e que servem como experiências para se aprimorar o estudo em questão.

Consultou-se no V SIPEM, ocorrido em outubro de 2012, os trabalhos vinculados ao Grupo de Trabalho 3: Educação Matemática no ensino médio composto de 9 trabalhos e o Grupo de Trabalho 8: Avaliação em Educação Matemática, composto de 8 trabalhos.

Quadro 5 - Lista de artigos encontrados no V SIPEM, GT3 e GT8.

<b>Tema</b>	<b>Autores</b>
Resolução de problemas: que prática pedagógica podemos revelar?	Paulo César Oliveira
Construção do conhecimento matemático mediante um processo de intervenção com leitura e escrita no ensino médio	Roberto Alves de Oliveira Celi Espasandin Lopes
Concepções apresentadas por professores de matemática acerca da avaliação da aprendizagem	Leila Cunha de Albuquerque Cleyton Hércules Gontijo

Fonte: Elaboração própria

Foram encontradas algumas pequenas correlações nos quatro trabalhos mencionados no Quadro 5. Em regra, essas produções trazem a leitura e interpretação dos professores acerca do que os estudantes produziram como forma de intervir ou mediar a construção do conhecimento matemático, tema esse de interesse para dessa pesquisa. Vale ressaltar que não estão no escopo como um todo da pesquisa quer seja quanto ao público-alvo, aos objetos de estudo, aos recursos e ao modelo de ensino que se pretende aplicar.

Os demais trabalhos aqui apresentados não contemplam o objeto da pesquisa investigado nessa tese. Como exemplo desses trabalhos tem-se: “Concepções apresentadas por professores de matemática acerca da avaliação da aprendizagem e Prova em fases: instrumento para aprender”.

O VI SIPEM, realizado em novembro de 2015, foi constituído de treze grupos de trabalho. Nessa edição, estreou-se O GT 3: Educação Matemática no Ensino Médio e o GT8: Avaliação em Educação Matemática, que apresentaram dez trabalhos cada.

Quadro 6 - Lista de artigos encontrados no VI SIPEM, GT3, GT6 e GT8.

<b>Tema</b>	<b>Autores</b>
Avaliação e ensino na educação básica em Portugal e no Brasil: relações com as aprendizagens (AERA)	António Boralho Isabel Lucena
Discussões de professores de Matemática a respeito da avaliação em um grupo de trabalho	João Ricardo Viola dos Santos
Percepções de docentes de matemática de ensino médio em relação ao processo de avaliação da aprendizagem	Valdir Sodré dos Santos Cleyton Hércules Gontijo

Fonte: Elaboração própria.

Os três trabalhos destacados apresentam correlações entre as avaliações e a aprendizagem. O trabalho de Borralho e Lucena (2015) traz a influência que os conhecimentos, as experiências e as concepções dos professores têm sobre o processo avaliativo e o ensino. O texto de Viola dos Santos (2015) tinha como objetivo verificar a avaliação em grupo. O resultado aponta que são diversificados os modos avaliativos e serviu como mola propulsora para o início da formação desses professores. O trabalho de Santos e Gontijo (2018) investigou as percepções de um grupo de professores acerca da avaliação da aprendizagem. Os resultados mostraram que há compromisso com a aprendizagem dos estudantes, embora as avaliações não estejam voltadas para o processo emancipatório dos estudantes e percebeu-se que o grupo ainda avalia segundo as experiências vivenciadas enquanto estudantes.

Dessa forma, esses trabalhos apresentaram pontos que serviram de consultas para as abordagens desenvolvidas em sala de aula relatadas nesta pesquisa. Os demais não são significativos para as abordagens da pesquisa a desenvolver.

O VII SIPEM constituiu quinze grupos de trabalho. Nessa edição, ocorrida em novembro de 2018, separou-se GT2 - Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e o GT8 - Avaliação em Educação Matemática.

Quadro 7 - Lista de artigos encontrados no VII SIPEM, GT2, GT6 e GT8

Tema	Autores
Resolução de problemas: diferentes abordagens no ensino de matemática	Ana Paula Krein Müller Maria Madalena Dullius
Avaliação da Aprendizagem: entre o quantitativo e o qualitativo	Renata Aparecida Viana Roberta D'Angela Menduni Bortoloti

Fonte: Elaboração própria

As estratégias de aplicação de resolução de problemas, os resultados da avaliação diagnóstica para os estudantes ingressos em um curso profissionalizante e os aspectos de abordagens quantitativo e qualitativo da aprendizagem resumem a necessidade de diversificar o processo avaliativo em sala de aula. Esses trabalhos indicam caminhos com vistas à aprendizagem como o estudo do erro, a correlação entre problema matemático e o cotidiano do estudante e a necessidade de avaliar qualitativamente o trabalho do estudante. Nesse SIPEM, foram encontradas contribuições teóricas que suscitaram pesquisas nas bibliografias indicadas.

A busca no último SIPEM, o VIII, nos grupos de trabalho 02 e 06 não se encontrou pesquisas correlacionadas à que se desenvolve. O GT08 trouxe apenas a pesquisa de Maciel (2020), que traz elementos da avaliação formativa já abordada anteriormente.

Findada a busca no SIPEM, partiu-se para os periódicos da CAPES com Qualis A1, A2 e A3. Incluindo o termo “Avaliação em Matemática” associado ao termo “Avaliação Formativa” em todos os campos, filtrando-se a temporalidade de 2009 a 2023 e aplicando-se os critérios de exclusão, foram encontrados 138 trabalhos publicados com esse termo e após a leitura dos resumos desses textos selecionou-se os títulos que estão no quadro 8 que segue.

Quadro 8 - Lista de artigos encontrados periódicos da CAPES com Qualis A1, A2 e A3

Qualis – Periódico - Ano	Tema	Autores
A3 - Revista de Educação Matemática (Online) – 2022.	Estratégias de avaliação: conexões entre Mentalidades Matemáticas e Avaliação Formativa Alternativa	Guilherme Rodrigues Batista; Laissa Figueiredo do Valle; Natan Onoda; Valéria Azzi Collet da Graça; Henrique Marins de Carvalho.
A3 - Revista de Educação Matemática (Online) – 2022.	Avaliação das aprendizagens e Feedback: uma experiência investigativa em sala de aula remota	Carlos Augusto Aguilar Júnior; Felipe Olavo Silva; Amanda Azevedo Abou Mourad; Rafael Guimarães de Assis Motta.
A1 - Boletim de educação matemática BOLEMA - 2021.	Um Estudo sobre o Feedback Formativo na Avaliação em Matemática e sua Conexão com a Atribuição de Notas	Rafael Filipe Novôa Vaz; Lilian Nasser.
A1 - ENSAIO - 2016	A articulação entre a avaliação somativa e a formativa, na prática pedagógica: uma impossibilidade ou um desafio?	Leonor Santos.
A2 – Estudos em Avaliação Educacional - 2009	Avaliação formativa por meio de alunos tutores: efeitos no desempenho cognitivo e na satisfação do aluno	Elaine Aparecida da Silva; José Florêncio Rodrigues Junior.
A1 - Boletim de educação matemática BOLEMA - 2009.	Percepções de estudantes acerca de um instrumento	André Luís Trevisan; Regina Luzia Corio de Buriasco.

	diferenciado de avaliação em aulas de matemática.	
A1 - Boletim de educação matemática BOLEMA - 2009.	Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos)	Regina Luzia Corio de Buriasco; Pamela Emanuelli Alves Ferreira; Andréia Büttner Ciani.
A1 - Boletim de educação matemática BOLEMA - 2009.	O Processo da Avaliação no Ensino e na Aprendizagem de Matemática	Maria Helena de Assis Mondoni; Celi Espasandin Lopes.

Fonte: Elaboração própria

Apoiado em Fernandes (2006) e Boaler (2018), os autores Batista *et al.* (2022) apresentam estratégias avaliativas que propiciam a reflexão do contexto complexo do que se desenvolve em sala de aula. Descrevendo alguns resultados negativos que a avaliação pode produzir e propondo reflexões sobre as possibilidades do processo avaliativo formativo associado a elementos das Mentalidades Matemáticas, os autores trazem estratégias que podem contribuir com o cotidiano da sala de aula. Aguilar Júnior *et al.* (2022), com o objetivo de investigar os efeitos do *feedback* nas aprendizagens dos estudantes, trabalharam com a avaliação formativa. Constataram a ressignificação do erro e a melhora na autoestima dos estudantes face à centralidade do *feedback* neste contexto.

Diferenciando o *feedback* avaliativo (apenas com a emissão de notas) do *feedback* formativo (desenvolvido durante o processo avaliativo), Novôa Vaz e Nasser (2021) apontam motivos que levam os professores a desenvolver com mais frequência o primeiro deles. Os autores, trabalhando com professores e estudantes, discutem aspectos da avaliação formativa e concluem que há possibilidades de transformação do modelo avaliativo voltado para a emissão de notas em um processo mais formativo.

Santos (2016) propõe uma articulação entre a avaliação somativa e formativa de modo complementar. A autora apresenta direções que possibilitam essa articulação tendo por base algumas situações conhecidas da educação matemática como o teste em duas fases ou trabalho com portfólio. Tendo o apoio de estudantes tutores, Silva e Rodrigues Júnior (2009) investigou os efeitos da avaliação formativa quanto à aprendizagem e à satisfação dos estudantes que constituíram um grupo controle e um experimental. Embora não tenha apresentado diferenças significativas na aprendizagem entre os grupos, o grupo experimental registrou que essa dinâmica de trabalho proporcionou um ambiente mais agradável e beneficiou a aprendizagem.

Buscando compreender as Percepções de estudantes acerca de um instrumento diferenciado de avaliação em aulas de matemática, Trevisan e Buriasco (2009) propõem a avaliação com retomadas e o uso dela como parte do processo formativo dos conceitos que se quer avaliar. A avaliação formativa, com o uso do *feedback*, proporcionou a participação dos estudantes no processo avaliativo e ao professor pesquisador, reflexões sobre o instrumento avaliativo e ao modo de avaliar.

Entendendo que a avaliação pode desvendar como os estudantes aprendem, Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) analisaram a escrita dos estudantes levando em conta as estratégias de resolução dos estudantes e o contexto das questões dessas avaliações. As autoras buscaram compreender o que é e o que não é observável com as escritas, ou seja, abordaram o que Hadji (1994, p. 31) diz que “o ato de avaliação, é um ato de ‘leitura’ de uma realidade observável, que aqui se realiza com uma grelha predeterminada, e leva a procurar, no seio dessa realidade, os sinais que dão o testemunho da presença dos traços desejados”. Mondoni e Lopes (2009) desenvolveram estudos de casos diversificando a avaliação formativa de modo formal e informal. Concluíram que houve melhoras no processo de aprendizagem dos estudantes com essa diversificação e sugerem esse processo avaliativo interativo em diferentes etapas.

As pesquisas encontradas nos periódicos da CAPES trouxeram elementos que contribuem significativamente para o trabalho em questão.

A busca na renomada revista *ZDM – Mathematics Education*, após o refinamento da temporalidade e usando os termos, *formative assessment in math* e depois, *formative assessment in math and flipped classroom*, não encontrou artigos com esses termos no título. Ressalta-se que o campo de busca avançada, que proporciona mais refinamentos, traz em seu escopo as guias: 1) com todas as palavras; 2) com a frase exata; 3) com pelo menos uma das palavras; 4) sem as palavras; 5) onde o título contém; 6) onde o autor / editor está. Diversificando o campo de busca e usando a guia 2, a plataforma apresentou 49 títulos dentre os quais destacam-se os que estão no quadro 9 e tratam de temas abordados na pesquisa a ser desenvolvida, tais como o *feedback*, a avaliação formativa e a sala de aula invertida.

Quadro 9 - Lista de artigos selecionados na ZDM

Tema	Autores	Data de Publicação
Combining and integrating formative and summative assessment in mathematics teacher education	Nils Frederik Buchholtz Nadine Krosanke Anna B. Orschulik Katrin Vorhölter	29 May 2018
Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics	Mustafa Cevikbas Gabriele Kaiser	7 October 2020
Training effects on teachers' feedback practice: the mediating function of feedback knowledge and the moderating role of self-efficacy	Birgit Schütze Katrin Rakoczy Eckhard Klieme Michael Besser Dominik Leiss	3 April 2017
Student Engagement in a Flipped Secondary Mathematics Classroom	Mustafa Cevikbas Gabriele Kaiser	04 September 2021
Teacher Professional Learning in Formative Assessments in Mathematics	Hem Chand Dayal	01 January 2022

Fonte: Elaboração própria

Os trabalhos relacionados no quadro anterior trazem situações que serão exploradas na presente pesquisa, mas em nenhum caso apresenta por completo o objeto que se desenvolve nesta tese.

### 3 APORTE TEÓRICO

A seguir, apresenta-se o embasamento teórico que deu suporte à realização da pesquisa. Aborda-se a sala de aula invertida com as suas particularidade e possibilidades, o conceito de avaliação e a influência que os modelos avaliativos da época dos Jesuítas até alguns autores contemporâneos têm sobre as práticas avaliativas na atualidade, assim como os elementos da avaliação diagnóstica, formativa, somativa com as suas reverberações no meio acadêmico e os tipos de *feedbacks* que se pretende trabalhar.

#### 3.1 Sala de Aula Invertida

Os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams (2017) popularizaram o modelo de sala de aula invertida e o motivo que os levou a implementar esse modelo foi a quantidade de vezes que tinham de replicar as explicações dos conteúdos para os estudantes que faltavam às aulas da escola em que trabalhavam. Eles gravavam as aulas ao vivo, disponibilizavam no *Youtube*<sup>6</sup>, os estudantes acessavam e os procuravam, caso precisassem de algum complemento.

Essa denominação, segundo os professores, não foi criada por eles e afirmam ainda que “Ninguém é ‘dono’ dessa designação. Não existe essa coisa denominada *sala de aula invertida*, embora ela tenha se popularizado nas diversas mídias” (Bergmann; Sams, 2017, p. 5, grifo dos autores). Acrescentam também que cada professor que se dispuser a inverter a sua sala de aula o fará de modo único, pois “não existe uma metodologia específica a ser replicada, nem *checklist* a seguir que leve a resultados garantidos” (Bergmann; Sams, 2017, p. 10), mas que a principal mudança que o modelo exige é que “inverter a sala de aula tem mais a ver com certa mentalidade: a de deslocar a atenção do professor para o aprendiz e para a aprendizagem” (Bergmann; Sams, 2017, p. 10), é pensar em transitar a aula em torno do estudante e da aprendizagem (Lostada, 2017).

A proposição da sala de aula invertida requer mudanças na postura do professor, do estudante e um planejamento pedagógico flexível dada a dinâmica da sala de aula (Branco; Alves, 2015). O trabalho didático pode ser iniciado com uma

---

<sup>6</sup> O YouTube é uma plataforma que, entre outras possibilidades, pode-se compartilhar vídeos como os que os autores, Jonathan Bergmann e Aaron Sams, disponibilizaram.

breve introdução do conteúdo a partir de uma provocação, como uma tarefa a ser resolvida pelos estudantes ou um vídeo que apresente a introdução de conteúdos curriculares e, a seguir propõe - se um roteiro de estudos orientado e acompanhado pelo professor de modo presencial e à distância. Valente (2015, p. 12) diz que

De acordo com essa abordagem, o conteúdo e as instruções sobre um determinado assunto curricular não são transmitidos pelo professor em sala de aula. O aluno estuda o material em diferentes situações e ambientes, a sala de aula passa a ser um lugar de aprender ativamente, realizando atividades de resolução de problemas ou projetos, discussões, laboratórios, dentre outros, com o apoio do professor e colaborativamente com os colegas.

Os estudantes são postos a desenvolver as suas atividades e, em pouco tempo de sala de aula, estão agrupados a trabalhar colaborativamente, caso queiram, e assumem uma postura proativa nesse modelo que, em regra, desvincula-se da aula expositiva em frente à turma por parte do professor, com a pretensão de que todos aprendem no mesmo ritmo e da mesma forma. O tempo de sala de aula passa a ser destinado a um acompanhamento sistemático com *feedbacks* do professor para o estudante e o contrário também, em grupo ou individualmente de modo a conhecer o ritmo de cada estudante. Nesse processo, é possível identificar o que trazem de conhecimento, em que estágio do conhecimento que se pretende alcançar o estudante se encontra, quais as estratégias e ferramentas usadas para resolver as tarefas propostas, avalia-se o desenvolvimento do estudante no decorrer das atividades, entre outras possibilidades. Tem-se, portanto, um modelo de trabalho didático que sugere mudanças em alguns aspectos em relação ao modelo expositivo de aula (Berrett, 2012).

Dentre essas mudanças, os autores Bergmann (2018), Pavanelo e Lima (2017) e Tucker (2012) ressaltam a interação mais frequente entre os estudantes e entre esses e o professor. Existe, com essa mudança da dinâmica do trabalho didático de sala de aula, a possibilidade da personalização do ensino por conta do tempo de dedicação do professor ao estudante com o *feedback* estruturado à especificidade do conhecimento existente nessa interação e ao modo como esse estudante aprende (Bergmann; Sams, 2017; Valente, 2015).

Complementando os aspectos positivos acerca da sala de aula invertida, Silveira, De Vit e Bertolini (2022) elencaram outras potencialidades do uso dessa inversão, tais como: a promoção da autonomia do estudante, a inclusão de um

processo avaliativo processual voltado para aprendizagem e a flexibilidade dos processos de ensino e aprendizagem. Essa prática, popularizada por Bergmann e Sams (2017), experienciada por outros professores e pesquisadores, traz o planejamento das atividades e o estabelecimento dos objetivos de aprendizagem, elaboradas pelo professor e comunicados de modo claro aos estudantes, como pontos que contribuem significativamente para estimular a participação dos estudantes.

Há de se ressaltar que o trabalho com a sala de aula invertida também pode produzir problemas. A falta de acesso a dispositivos eletrônicos e a internet, por exemplo, impossibilitaria um estudante de assistir a uma aula gravada pelo professor, necessária para a discussão a ser realizada no encontro presencial da aula seguinte e, dessa forma, essa falta de recursos deixa à margem do processo educativo os estudantes com essas dificuldades. Deve-se então, independente do modelo de aula que se quer trabalhar em uma sala, planejar e tentar abarcar o maior número possível de variáveis que possam atrapalhar alguma etapa do desenvolvimento da atividade, para que se tenha êxito no que se propõe a executar. Para tanto, uma estratégia que pode contribuir para minimizar esses obstáculos, segundo Bergmann e Sams (2017), é o estabelecimento de uma atividade para que se conheça aspectos sociais do grupo de estudantes com os quais vai se trabalhar.

Outras preocupações, tais como o tempo de exposição a telas por conta da estratégia de o estudante de assistir uma aula gravada para depois participar de um debate ou a proposição de um trabalho com o uso de computadores, devem ser pensadas de modo a não causar desconforto com o uso desses recursos. Faz-se necessário um planejamento que diversifique as atividades e recursos em prol de motivar os estudantes a participar e se desenvolver.

Pensando na avaliação para as aprendizagens no modelo de sala de aula invertida, com todo o arcabouço de interações, Valente (2015) e Bergmann e Sams (2017) evidenciam a necessidade do acompanhamento dos modelos avaliativos que, a depender dos objetivos de aprendizagem, pode ser feita por uma produção de vídeo, relatórios, fichamentos, debates, apresentações com slides, avaliações de unidades no modelo somativo, entre outros. O cuidado de se avaliar para a aprendizagem está no processo do que é produzido, pois o estudante ao desenvolver as tarefas sinaliza se há a necessidade de reestruturação do ritmo de trabalho, se é necessário voltar a uma tarefa que envolva o mesmo conhecimento que se quer desenvolver, mas com um nível de complexidade menor, se atingiu o nível de autonomia esperado ou ainda

precisa de mais atenção durante as tarefas, dentre outras situações. Isso pode se dá pelo uso de *feedbacks* estruturados e com a intencionalidade que a tarefa e o nível de conhecimento exigem.

A sala de aula invertida requer mudanças que envolvem diversas esferas de uma escola. O trânsito de estudantes de um espaço para outro e a reorganização do *layout* dos ambientes onde serão desenvolvidas as atividades precisam ser previamente planejados e não dependem exclusivamente do professor. Outro componente que promove mudanças na organização escolar é a avaliação, tema discutido a seguir.

### **3.2 Avaliação**

Avaliar, no sentido amplo da palavra, é uma função que o ser humano exerce várias vezes ao dia. Avalia-se o trajeto de menor tempo até chegar ao trabalho, avalia-se as relações interpessoais no seu cotidiano, dentre tantas outras. Interessa neste estudo a avaliação da aprendizagem matemática ocorrida em sala de aula, as suas contribuições ou não para o processo de aprendizagem dos estudantes. Para tratar desse assunto, será apresentada uma abordagem histórica para compreender as funções da avaliação no âmbito escolar e verificar os pontos comuns dessas avaliações com o que se tem atualmente.

A abordagem será a partir do modelo dos Jesuítas – “os colonizadores educacionais do nosso Brasil” - que ainda é muito presente nas salas de aula na maioria das escolas do nosso país, com o ensino síncrono para um grupo de estudantes em que se acredita que todos aprendam da mesma forma e ao mesmo tempo. A constatação dessa aprendizagem, nas pedagogias Jesuíticas, se dava por avaliações chamadas de *Exames Gerais*, aplicadas ao final do período letivo, com cunho classificatório, excludente e estavam a serviço da manutenção da ordem e dos bons costumes católicos, segundo os Jesuítas (Luckesi, 2021, p. 37).

À época existia o que se chamava de *Pauta do Professor*, uma espécie de acompanhamento do aprendizado do estudante que embasava a reorientação dos processos pedagógicos. Essa, *Pauta do Professor*, pode ser entendida como diagnósticos realizados ao longo do período com o objetivo de dar um norte aos estudantes em prol da eficiência na aprendizagem. Aos dias atuais, pode-se chamar de um conjunto de *feedbacks* que promovem a leitura reflexiva do desenvolvimento

escolar que foi, aos poucos, substituído por múltiplas avaliações que contribuí, como evidenciam Fernandes (2009), Luckesi (2018), Freire (1987), entre outros, para o alto índice de reprovação e exclusão social.

Destaca-se mais adiante, João Amós Comênio (1592-1670), protestante e realista que viveu no período em que surgia a *Era Industrial*, com a substituição de algumas produções manuais por mecanizadas como o tear, e personagens que mudaram a história, como Galileu Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), entre outros. Comênio pregava que todos eram capazes de aprender tudo fazendo as “coisas” e que o deveria fazer de modo a ser tornar um ser sábio, virtuoso e piedoso.

A *Didática Magna*, seu maior escrito, ressaltava as novidades que surgiam nas ciências e pregava, já naquela época, a necessidade de se avaliar o sistema de ensino. Não fugindo ao modelo capitalista da época, as avaliações nas diversas fases da aprendizagem escolar também promoviam a classificação, ao ponto de Comênio afirmar que os estudos superiores não eram para todos. Aos que não tinham um nível intelectual mais elevado, e isso era mensurado nas avaliações ao final do período letivo, indicavam-se outras áreas que serviriam à sociedade, como artesão, comerciante, pessoas que poderiam executar trabalhos manuais em fábricas, entre outras funções, ou seja, também serviam aos interesses da sociedade burguesa da época.

Uma das situações promovidas pelo modelo avaliativo proposto por Comênio produzia o medo à reprovação. O estudante era exposto à sociedade em um evento público durante o processo avaliativo e dessa forma acreditava-se manter a disciplina aos estudos. Outro modelo de avaliação, como orientado na obra “Leis Para a Boa Ordenação da Escola”, poderia ocorrer a cada hora durante o dia de aula, diariamente, durante semanas, aos trimestres e ainda anuais. Cada avaliação tinha uma finalidade. A avaliação que ocorria a cada hora tinha por objetivo manter os estudantes atentos à aula e todos eles deveriam esclarecer, ao professor, os caminhos a percorrer para ensinar e, aos estudantes, era um recurso à aprendizagem com excelência. Vale destacar que, mesmo com esses aspectos negativos que circundaram as avaliações no modelo comeniano, o autor não deixou de dar importância ao que acontecia durante o processo avaliativo e propunha que o professor deveria refletir sobre os caminhos utilizados para ensinar com eficiência. Comênio trazia em suas propostas a necessidade de organizar as escolas para que pudesse ter a sociedade em ordem.

Um pouco mais adiante, durante o *Século das Luzes*, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) tenta estabelecer a Pedagogia com uma ciência, propondo a reflexão entre a teoria e a prática, como forma de se abandonar o ato de educar embasado em empirismo. Para concretizar essa cientificidade à educação, Herbart estava aportado nos conhecimentos filosóficos como forma de compreender o ser humano e se apropriar da teoria do conhecimento; do trabalho moral, com os princípios éticos e o desenvolvimento do ensino; e da aprendizagem com a sabedoria da psicologia, contribuindo para a formação moral do estudante.

Herbart aplicou uma metodologia em quatro passos, que depois foram ampliados para cinco, cujo objetivo era fazer com que as crianças e os jovens conseguissem assimilar novos conhecimentos usando a instrução. A avaliação, que não foi explicitamente discutida pelo autor, está vinculada ao acompanhamento dos cinco passos formais com vistas a orientar o professor no processo de ensino e, aos estudantes, para validar se os novos conhecimentos foram ou não compreendidos.

A formação escolar do cidadão nas Pedagogias Tradicionais “tinham como objetivo comum a formação do ser humano mediante as aprendizagens de conteúdos socioculturais” (Luckesi, 2021, p. 181). O trabalho de manutenção da ordem, da imposição da disciplina comportamental e escolar, às vezes por castigos, da formação cultural e a constituição da mente em prol de formar um cidadão obediente, ético e capaz de agir seguindo os costumes da época, esteve apoiado nas metodologias que os autores citados anteriormente aplicaram nas escolas ou espaços escolares.

A avaliação, que é um dos pilares que orienta o trabalho diário de uma sala de aula, também influenciou a busca dos objetivos de cada corrente teórica. Apesar de ter sido, e ainda é aplicada de modo classificatório e até excludente, a avaliação também serviu como fonte de orientação dos professores no controle da sala de aula e no reordenamento dos processos educativos ao longo do ano letivo. Tal recurso apresentou-se de modo variado quanto à forma (escrita, oral, em grupo) e quanto ao momento (diária, mensal, anual) sempre embasada por um objetivo. Alguns aspectos da corrente tradicional se perderam ao longo dos anos e foram substituídos por mais e mais avaliações, como a Pauta do Professor, que pode ser classificada como um processo avaliativo de acompanhamento do professor, ou seja, não cabe imputar somente às Pedagogias Tradicionais o peso de um processo avaliativo que pode provocar a exclusão de um estudante.

Inicia-se então o movimento pedagógico intitulado de Escola Nova no fim do século XIX e início do XX, marcado por uma mudança significativa no percurso lógico-metodológico de dedutivo para indutivo no processo de ensino e aprendizagem. O ensino ativo como resposta fundamental à formação do ser humano manifesta-se “tendo em vista responder às necessidades emergentes, sociais, econômicas, culturais, psicológicas, de saúde e outras mais.” (Lukcesi, 2021, p. 190). Para essa formação há a rejeição da memorização e o encorajamento da criticidade apoiada no método científico de observação, formulação de hipótese, a comprovação e a lei.

Entre os autores desse movimento, destaca-se, inicialmente, a italiana Maria Montessori (1870 – 1952), formada em Medicina e Filosofia, que rompeu com muitas tradições ao trabalhar a educação de crianças. Ela buscou a construção de móveis equivalentes aos tamanhos das crianças. Na sala, não havia cadeiras e carteiras enfileiradas, as crianças não necessariamente ficavam escutando um adulto falando para todas elas de uma vez só. Com essas mudanças, executou o trabalho pedagógico baseado na ação e, com a observação dessas ações, a proposta avaliativa não foi aportada em exames e provas, mas no acompanhamento contínuo das realizações das crianças, motivando e nunca reprimindo, para perceber a qualidade do que era desenvolvido. Essa avaliação aportava os processos reflexivos por parte das professoras que, por sua vez, utilizavam-se das ações das crianças para apoiá-las na superação de obstáculos e assim, na proposta de Montessori, a avaliação tinha a função diagnóstica.

Outro autor dessa época foi John Dewey (1859-1952). Dewey acreditava na concepção do trabalho educativo ativo em prol da construção de uma sociedade democrática, tanto pela atividade manual como pela atividade social, desenvolvidas na escola sob a orientação de um professor.

Contrário às provas e exames como práticas cotidianas nas escolas, Dewey defendia a avaliação como instrumento que poderia subsidiar os professores de informações que oportunizassem o ajuste no processo de ensino com vistas à aprendizagem satisfatória. O foco não deveria ser os resultados expressos em uma avaliação, mas o processo de desenvolvimento dos conhecimentos que poderiam ser avaliados em diversos momentos e de muitas maneiras de expressões. O ensino guiado somente para os exames e provas, segundo Dewey, estava relacionado ao mecanicismo do fazer escolar e servia aos interesses da burguesia.

Para que a avaliação servisse à aprendizagem, o professor deveria “tomar a lição” (Dewey, 1959, p. 257) e nesta relação professor-estudante o processo avaliativo acontecia, pois não deveria funcionar como uma sabatina, mas como o ratificar da aprendizagem ocorrida ou o direcionamento acompanhado de reflexões dos quais o estudante tinha de usar para desenvolver a aprendizagem em questão. Essas reflexões atuavam com o objetivo de estimular o estudante a estudar para que desvendasse o problema em suas mãos, quer seja no entendimento do que era solicitado ou em alguma etapa do desenvolvimento realizado pelo estudante e ainda incompleta em relação ao que deveria ser feito. Outra abordagem que se dava a essa reflexão era o direcionamento que o professor deveria dar ao estudante durante essa tomada de lição. O professor precisava planejar perguntas que proporcionassem respostas mais elaboradas de modo que fosse possível perceber qual a compreensão do estudante acerca do conhecimento abordado, pois desse modo teria mais dados para analisar e perceber o nível que o estudante se encontrava em relação ao conhecimento em questão. Essa arguição, além de esclarecer para o professor e o estudante se aprendizagem havia se efetivado, conforme Dewey, estava a serviço da capacitação desses estudantes o exercer papel social e político de cada um deles.

Por fim, as pedagogias da Escola Nova ficaram caracterizadas pelo modo ativo de ensino e aprendizagem na perspectiva lógico-indutiva e o por um processo avaliativo que primou por atender, auxiliar o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes.

Um pouco mais contemporâneo, tem-se o movimento pedagógico aportado na Tecnologia Educacional. Caracterizado pelo estudo da modelagem de comportamento dos estudantes. Iniciou-se na primeira parte do século XX, mas teve um número maior de pesquisas após a metade do século. Embasado nas ciências e tecnologia com o propósito de constituir sistemas de ensino eficientes, procurou-se estabelecer planejamentos curriculares aliados a técnicas sistemáticas de ensino que seriam acompanhadas de um processo avaliativo que servia ao modelo de sociedade, o capital. Pensando no modelo social, “A Tecnologia Educacional, desde seu início, teve como meta a conquista da eficiência e da produtividade na aprendizagem dos estudantes no contexto da sociedade na qual viviam” (Luckesi, 2021, p. 276). Essa eficiência está condicionada ao controle e direcionamento do comportamento do estudante diante das técnicas de ensino e a produtividade, por sua vez, em “formar profissionais necessários para o contexto social dominante” (Luckesi, 2021, p. 277).

Um dos autores de expressão desse movimento, Ralph W. Tyler (1902-1994) é considerado o dono da expressão: *avaliação da aprendizagem*. O autor descreve que a avaliação está a serviço da verificação dos resultados dos estudantes e, portanto, no centro do planejamento do processo de ensino e aprendizagem, pois a partir dos seus resultados é que se daria os devidos direcionamentos para o ajuste da conduta do estudante.

Para que esses ajustes aconteçam, faz-se necessário sistematizar o processo de ensino e aprendizagem. Nessa sistematização, o estabelecimento de objetivos a serem alcançados deve ser o primeiro passo a ser comunicado, com clareza, para que se tenha ciência de onde se pretende chegar e o processo de avaliação deve, na concepção do autor, revelar as possíveis mudanças de comportamento do estudante nas etapas de desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

A verificação da mudança do comportamento do estudante tem por embasamento à comparação de dois momentos avaliativos: um antes de se iniciar o processo de ensino e aprendizagem, que apresenta ao professor a realidade do estudante diante do objetivo a ser alcançado e outro ao final, para que se possa constatar se ocorreu a aprendizagem desejada. Acrescenta-se que Tyler tinha na sua proposta a “avaliação de seguimento” que consistia em verificar se a mudança de comportamento provocada por uma aprendizagem foi de fato assimilada. A sistematização propunha ainda outras formas de se avaliar, pois como se pretendia formar um cidadão que atendesse às necessidades da sociedade, a própria exposição desse estudante diante do professor poderia compor parte de um processo avaliativo.

Após a definição dos objetivos e durante o processo de ensino e aprendizagem, o professor deve dar condições ao estudante de se expressar dentro do contexto em que foi ensinado para que ele, de modo que o professor consiga ter dados que deem significado à investigação do que se quer avaliar. Aplicado o processo avaliativo, a etapa de coleta de dados para a sistematização do ensino pode mostrar-se de modo diversificado e tem influência direta na interpretação dos resultados e condutas dos estudantes. Para Tyler, a avaliação deveria buscar a eficiência no processo de ensino e aprendizagem e isso se constatava a partir da observação da mudança de comportamento do estudante mediante os objetivos postos no início do trabalho escolar.

Seguindo a linha de pensamento de Tyler, Benjamin S. Bloom (1913 – 1999) trouxe mais detalhamento aos processos avaliativos que possibilitavam comprovar a

mudança de comportamento dos estudantes, tendo por base os “conhecimentos necessários e habilidades correspondentes” (Luckesi, 2021, p. 304). Esse detalhamento está relacionado à classificação dos objetivos de aprendizagens, divididos em modos comportamentais organizados do objetivo mais simples para o mais complexo. A sistematização desse detalhamento a qual Bloom propôs, embasado também em estudos da Psicologia da Aprendizagem sob influência de John B. Carroll, tinha por objetivo, assim como Tyler, a formação de estudantes com comportamentos eficientes.

A concepção pedagógica de Bloom tinha por premissa acabar ou pelo menos minimizar o processo seletivo que se dava nas escolas. Trabalhando com a avaliação formativa, o autor afirmava que todos seriam capazes de se desenvolver e o ingresso nas universidades, por exemplo, não seria para poucos. Para esse desenvolvimento, caberia ao professor o planejamento dos objetivos que teriam influência direta no modo de agir do estudante e na delimitação dos recursos a serem utilizados, assim como deveria possibilitar a observação dos comportamentos durante o desenvolvimento das etapas da *taxonomia dos objetivos de aprendizagens* (Taxonomias de Bloom) em busca dos resultados esperados. Olhar para o futuro e perceber o que se tem no presente, ou seja, traçar o objetivo de cada etapa e conhecer o estudante que se tem no início das etapas são premissas básicas para estruturar as tarefas que os estudantes vão desenvolver pensando em condutas que podem ser observadas para validar ou não a aprendizagem.

Ao tratar do processo avaliativo de modo formativo, Bloom propõe o uso da avaliação “para aperfeiçoar o ensino e a aprendizagem” (Bloom *et al.*, 1983, p. 8). Esse uso relaciona-se às possibilidades que a avaliação pode oportunizar quanto à diversidade e à quantidade de coleta de dados produzidos durante a realização das tarefas estabelecidas, com objetivos divididos em níveis de complexidade que exijam comportamentos cada vez mais elaborados em prol do desenvolvimento da aprendizagem do estudante. Observados esses dados, o professor tem recursos para direcionar ou redirecionar os percursos didáticos que promovam o migrar de um nível para outro na taxonomia ou voltar e planejar outro modo de atingir o nível esperado.

Aproveitando os estudos de Tyler e Bloom, Norman Edward Gronlund (1920-2010) discute a possibilidade da ampliação do uso da avaliação da aprendizagem para o que chamou de *aprendizagem do desenvolvimento*. Refere-se, segundo o autor, ao nível de aprendizagem que ultrapassou o que era esperado pelos objetivos

previamente estabelecidos, como por exemplo, a reescrita de uma tarefa por parte de um estudante introduzindo elementos que tragam um grau maior de dificuldade na sua resolução.

Gronlund, assim como os outros dois autores, destaca a importância do processo avaliativo como instrumento que deve proporcionar ao professor reflexões acerca do trabalho pedagógico na sua completude, e ao estudante, de forma a orientá-lo quanto a sua real situação frente aos objetivos de aprendizagens previamente estabelecidos e o que deve ser feito para transpor os obstáculos que dificultem essa aprendizagem ou para confirmar o nível de excelência dessa aprendizagem. Essas orientações, aqui entendidas como o processo dialógico que o uso das avaliações pode proporcionar, independente do modelo avaliativo, seja ele diagnóstico, formativo ou somativo, o *feedback* do professor para o estudante e o contrário também pode e deve atuar como parte desse processo. Ainda com aspectos positivos do processo avaliativo, segundo o autor, as avaliações podem melhorar a motivação dos estudantes, aumentar o nível de aprendizagem e aguçar a autocompreensão.

Esses três aspectos podem e devem ser trabalhados ao longo do processo avaliativo, ou seja, o processo investigativo diagnóstico pode ser desenvolvido paralelamente à avaliação formativa., Os comportamentos diante dos objetivos, segundo os autores da corrente da Tecnologia Educacional, devem ser ajustados quando necessário ou corroborados quando apresentarem o nível esperado. O objetivo é esclarecer ao estudante quais são os pontos positivos do seu desenvolvimento, mesmo que apresente falhas e o que é necessário fazer para avançar.

O condicionamento do comportamento do estudante a partir da observação sistemática do processo avaliativo esteve no cerne dessa corrente pedagógica, estimulado pelo estudo científico do comportamento humano e da necessidade de formar cidadãos qualificados para a sociedade do modelo capitalista no ocidente. Com a instrução programada, o estabelecimento de objetivos que dão suporte às observações dos comportamentos dos estudantes e um processo avaliativo que contribui para os ajustes no desenvolvimento das aprendizagens, esses três autores, e outros aqui não citados, contribuíram para a discussão da formação de currículos e processos avaliativos ao longo dos anos e que perdura até a atualidade.

As correntes aqui abordadas têm em comum o trabalho com o objetivo de desenvolver junto aos estudantes o ensino e a aprendizagem. Destacou-se nas

Pedagogias Tradicionais o uso dos processos avaliativos como forma de manter a ordem e classificar o estudante que deveria seguir adiante nos estudos, com exames escolares, entendidos como um variado leque de possibilidade de investigações (oral, escrito, entre outros), aplicados em períodos variados (diariamente, semanalmente, mensalmente, entre outros). O processo de ensino e aprendizagem dessa pedagogia deveria tornar o cidadão capaz de ler para que tivesse conhecimento dos escritos bíblicos e formar-se culto.

O movimento da Escola Nova fez uso do processo avaliativo como recurso para direcionar o professor e o estudante durante o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do estudante. Com salas de aula sem mesas e carteiras enfileiradas, móveis de tamanhos proporcionais às crianças, materiais concretos usados como recursos, circulação de estudantes durante o período de aula, a avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a realização das atividades, a não aplicação de instrumentos pontuais de avaliação, a busca por autonomia e independência do estudante no processo de promoção a níveis mais elevados de aprendizagem e não à reprovação, marcaram esse período.

A Tecnologia Educacional, como se viu, tratou o processo avaliativo de modo sistematizado como forma de observar e ajustar comportamentos mediante os objetivos traçados para cada etapa da aprendizagem. Tentando promover a eficiência da aprendizagem com o uso de reforços positivos, a partir da instrução programada, procurou-se modelar o ensino. Os reforços eram aplicados a cada teste como forma de motivar o estudante a continuar a se desenvolver e, servia ao professor como fonte de observação do comportamento do estudante mediante o conhecimento a ser desenvolvido.

A explanação feita até aqui traz características da forma de ensinar e avaliar do período dos jesuítas até a segunda metade do século XX. O objetivo dessa primeira parte do texto foi trazer de modo sintético as heranças que se usa no cotidiano escolar nos dias de hoje. A partir desse ponto, tratar-se-á da avaliação destacando-se a sua definição segundo alguns autores, diferenciando-se os tipos de avaliações, às suas funções no contexto escolar, as implicações no processo de ensino e aprendizagem para cada tipo de avaliação, bem como as reverberações dos impactos dos resultados de uma avaliação na sociedade.

Freitas (2002) relembra que o processo pedagógico desenvolvido nas escolas é um ato político que requer, como todo modelo democrático, debates, negociações,

reflexões, entre outras. Dentro desse arcabouço de situações possíveis no processo pedagógico encontra-se a avaliação. Percebe-se na leitura dos parágrafos anteriores, a forte influência exercida pelo modelo avaliativo na constituição do modelo pedagógico adotado para o trabalho a ser feito nas escolas, pois a avaliação

é um valioso e precioso instrumento na trama educativa, na possibilidade de realização de um necessário e permanente repensar no processo de ensino-aprendizagem e nas propostas pedagógicas consolidadas em um espaço e tempo que justifiquem e que compõem intencionalmente toda ação pedagógica (Santos; Gontijo, 2018, p. 21).

Precisam, todos as pessoas que participam do processo educativo em uma escola, tomar conhecimento de que a avaliação “é um elemento da organização do trabalho pedagógico” (Santos; Gontijo, 2018, p. 22) e não apenas uma atividade que deve encerrar um ciclo.

A avaliação aplicada em sala de aula, um dos temas dessa pesquisa, é muito abordada em estudos ao redor do planeta. Os seus tipos tais como, informal, formal, diagnóstica, formativa, somativa e outras denominações próximas dessas, bem como as suas funções que visam constatar se há progresso na aprendizagem, promovem o estudante, ou não, à série seguinte e classificam, entre outras, apontam características singulares. Outro aspecto que os tipos de avaliações se diferenciam, tange às reverberações dos seus resultados no âmbito escolar e social. Geralmente, o professor se dedica mais ao estudante que tem melhor desempenho nas avaliações, os estudantes promovem uma exclusão velada aos que não apresentam “boas notas” na hora de participar de algum processo avaliativo em grupo, por exemplo, ou o estudante chega a desistir de continuar os estudos por conta da frustração promovida por avaliações que não são acompanhadas de cuidados que serão tratados mais adiante nesta pesquisa.

Portanto, discutir a avaliação que acontece em sala de aula é procurar melhoras tanto no processo de ensino e aprendizagem quanto na prevenção das possíveis consequências que um processo avaliativo que não expresse clareza no que seus objetivos podem provocar, como destaca Gontijo (2008).

[...] a falta de clareza acerca do papel da avaliação na escola tem feito com que seja usada predominantemente para classificar em “aprovados” ou em “reprovados”, sem buscar por meio dos seus recursos, proceder a uma análise do trabalho pedagógico desenvolvido com vistas a verificar em que medida os objetivos desse trabalho foram alcançados. Uma das hipóteses para o descuido com

a avaliação pode estar assentada em práticas pedagógicas que privilegiam o trabalho com os conteúdos a serem ensinados. Independente de uma análise crítica acerca de seus objetivos no currículo escolar. Essa caracterização do processo avaliativo é resultado do modelo pedagógico que predomina em nossas escolas no qual a avaliação é tratada como um meio disciplinador e autoritário, não apenas relacionado ao processo cognitivo assentado no modelo transmissão – assimilação, como também nas condutas sociais, no contexto social global” (GONTIJO, 2008).<sup>7</sup>

A abordagem do autor revela uma avaliação que não dialoga com os estudantes democraticamente, pois impõe, por meio do *medo da reprovação*, a condição de ser disciplinado durante a transmissão do conhecimento e dessa forma a avaliação não se propõe a tornar o estudante um agente ativo no processo de ensino e aprendizagem. Para mudar esse quadro, faz-se necessário o entendimento dos modelos de avaliação que se inicia, aqui, pelo informal.

A avaliação informal, ao contrário da formal, não tem um dia e horário para acontecer no ambiente escolar, logo os estudantes podem não saber que estão passando por uma avaliação. Ela pode ser realizada em uma conversa na sala dos professores, em um conselho de classe, na discussão de uma atividade em sala de aula de modo a complementar a avaliação formativa, entre outras possibilidades.

Villas Boas (2017, p. 142) considera que “a avaliação informal, também conhecida como permanente, processual, contínua, participativa, espontânea e realizada segundo o ‘olho do professor’, é poderosa”. Essa avaliação carrega a subjetividade de quem a pratica, pode estabelecer laços que contribuam significativamente para o aprendizado, ou não, dos estudantes e pode ocorrer durante os trabalhos pedagógicos realizados em sala de aula ou em outro ambiente escolar. Há de se tomar cuidado com o olhar, como afirma Perrenoud (1984, p. 265), pois

A avaliação informal põe em evidência os alunos que têm dificuldades, se bem que o professor pode ajudá-los a superá-las, mas ao mesmo tempo, na próxima vez, ele espera encontrar os mesmos alunos diante das mesmas dificuldades. O que configura que a regulação é mais conduzida sobre o trabalho em curso do que das aprendizagens.

Os rótulos atribuídos aos estudantes que não produzem o esperado em sala de aula retratam essa situação que pode ser agravada, construir representações

---

<sup>7</sup> GONTIJO. C. H. Avaliação da Aprendizagem Matemática. Texto não publicado. Digitado. 2008.

negativas e contribuir para o fracasso no ano escolar. Freitas (2002, p. 313) destaca ainda que

Professores e alunos defrontam-se na sala de aula construindo representações uns dos outros. Tais representações e juízos orientam novas percepções, traçam possibilidades, estimam desenlaces, abrem ou fecham portas e, do lado do professor, afetam o próprio envolvimento deste com os alunos, terminando por interferir positiva ou negativamente com as estratégias de ensino postas em marcha na sala de aula. É aqui que se joga o sucesso ou o fracasso do aluno – nesse plano informal e não no plano formal. De fato, quando o aluno é reprovado pela nota, no plano formal, ele já tinha sido, antes, reprovado no plano informal, no nível dos juízos de valor e das representações do professor – durante o próprio processo.

As relações estabelecidas nas escolas podem e devem suscitar no estudante o sentimento de corresponsabilidade pelo processo de aprendizagem, e no professor, como adulto da relação e mediador dessa aprendizagem, a democratização dos processos estabelecidos em sala de aula, ou seja, não cabe “ao professor referir-se “à minha aula”, “à minha disciplina”, “a minha prova”, “a minha turma” etc., excluindo a corresponsabilidade dos alunos” (Villas Boas, 2008, p. 25). Desse modo, a avaliação informal pode contribuir, por exemplo, para a complementariedade do entendimento das dificuldades encontradas no processo de avaliação formal.

Antes de desenvolver os tipos de avaliação formal cabe destacar que o termo *avaliação da aprendizagem* é de autoria do educador Ralph Tyler, em 1930. No Brasil, esse termo ganhou força com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB n. 9394/96) e abarca os tipos de avaliação formal que acontece nas escolas nos dias de hoje.

Bloom (1983) classifica a avaliação da aprendizagem formal em três tipos: 1) Diagnóstica; 2) Formativa; 3) Somativa. Essas denominações são tratadas com essas conotações nesta pesquisa, ou seja, os atributos dados a cada uma delas carrega em seu escopo o modo e a função de desenvolver o processo avaliativo uma vez que, esse processo deve revelar a qualidade da realidade (Luckesi, 2021, p. 312), embora tenha-se ciência de que, a depender do tratamento dado ao processo avaliativo, não se pode garantir que os objetivos são contemplados.

### **3.2.1 Avaliação Diagnóstica**

A avaliação diagnóstica, como destacam Fernandes (2006), Lukcesi (2018), Kraemer (2005), Perrenoud (1998), Earl (2008), Santos e Gontijo (2018), Carvalho

(2014) e outros, caracteriza-se por esclarecer ao professor o nível de conhecimento que o estudante tem em relação ao objeto de estudo que se pretende desenvolver e por não ser uma avaliação que promova a classificação, aprovação ou reprovação de nenhum estudante. A literatura recomenda que se aplique essa avaliação antes do início de cada etapa de desenvolvimento da proposta de uma nova aprendizagem de modo a constatar se os estudantes têm os conhecimentos que são basilares para a compreensão do que está por vir. O ponto de partida, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é o que o estudante traz de conhecimento para o ambiente escolar.

Se eu tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980, p. 137).

Ou seja, deve-se investigar o que o estudante tem de conhecimento acerca do que se pretende trabalhar e, a partir desse ponto, propor tarefas, principalmente, aquelas que possibilitem pelo menos mais de uma estratégia resolução que contemplem a construção do conhecimento que se espera.

Em consonância com os autores citados, Luckesi (2008) afirma que pode iniciar o trabalho com os estudantes por uma avaliação diagnóstica.

Em primeiro lugar, há que partir para a perspectiva de uma avaliação diagnóstica. Com isso, queremos dizer que a primeira coisa a ser feita, para que a avaliação sirva à democratização do ensino, é modificar a sua utilização de classificatória para diagnóstica. Ou seja, a avaliação deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem. Se é importante aprender aquilo se ensina na escola, a função da avaliação será possibilitar ao educador condições de compreensão do estágio em que o aluno se encontra, tendo em vista poder trabalhar com ele para que saia do estágio defasado em que se encontra e possa avançar em termos dos conhecimentos necessários (2008, p. 81).

Com essa avaliação, compete ao professor seguir a diante com o seu planejamento ou, reordená-lo de modo a respeitar o que o estudante traz de lacunas de aprendizagem que podem dificultar ou até impedir essa aprendizagem.

Luckesi (2011, p. 277) destaca ainda que

Avaliar é diagnosticar, e diagnosticar, no caso da avaliação, é o processo de qualificar a realidade por meio de sua descrição, com

base em seus dados relevantes, e, a seguir, pela qualificação que é obtida pela comparação da realidade descrita como um critério, assumido como qualidade desejada.

Pode-se exemplificar essa definição com o exemplo de uma tarefa em que o professor quer constatar se o estudante reconhece a forma de um triângulo retângulo, tendo indicado na figura a medida do ângulo de noventa graus, apresentando sem mencionar no texto que se trata desse tipo de triângulo, e fornecendo a medida de dois dos seus lados, o estudante deve ser capaz de determinar a medida do lado desconhecido. Levando em conta apenas essas informações, o estudante tem de conhecer o teorema de Pitágoras para resolver a tarefa e ser capaz de desenvolver o processo algébrico que envolve essa resolução.

Na concepção de Luckesi (2017), os *dados relevantes* seriam o reconhecimento do triângulo retângulo e a associação que se faz desse triângulo com o Teorema, logo, cometer alguma incoerência durante o desenvolvimento do processo algébrico pode ser tratado como uma variável de menor relevância na análise diagnóstica da tarefa. Há de se destacar que o planejamento da tarefa, com a estrutura do que se pretende avaliar e a definição dos critérios e objetivos dessa avaliação, devem ser delineados de modo a dar condições ao professor de comparar a realidade descrita com a qualidade desejada. Esse delineamento pode ser entendido como a construção da tarefa em etapas para que sejam avaliadas e, assim, o professor tem condições de saber em que etapa do conhecimento a ser construído o estudante tem lacunas de aprendizagem, ou não.

O planejamento tem impacto considerável na estruturação das tarefas, portanto, os objetivos de aprendizagens e os critérios avaliação têm de ser comunicados de forma clara aos estudantes, de modo a evitar qualquer ruído entre o que o professor espera do estudante e o que será apresentado por esse estudante no desenvolvimento da tarefa.

Destaca-se que o diagnóstico do nível de aprendizagem do estudante a partir da análise de suas produções deve ser feito individualmente pelo professor, mas a proposta de trabalho para a retomada dos conhecimentos ainda não compreendidos pelos estudantes, depois desse diagnóstico, pode ser estruturada com o agrupamento dos estudantes que apresentam dificuldades semelhantes, objetivando trabalhar colaborativamente com a mediação do professor. Quando o que o estudante traz de conhecimento está muito distante do que se espera, há de se dedicar individualmente

a esse estudante. Lembra-se aqui que o planejamento deve contemplar o estudante que apresenta desenvoltura nas tarefas propostas, ou seja, o professor deve ter mais de uma opção de proposta de trabalho para esses estudantes com o objetivo de motivá-los a seguir mais adiante. Estar preparado para situações não planejadas durante o trabalho com os estudantes é um fator que sugere a flexibilidade do planejamento.

Uma vez diagnosticada a realidade de cada estudante face ao conhecimento a ser desenvolvido e estruturadas as próximas etapas de trabalho, diversas pesquisas indicam o trabalho com a avaliação formativa, como se pode constatar a seguir.

### **3.2.2 Avaliação Formativa**

Retomando a minha história enquanto estudante e professor, percebo que a função da avaliação, como ainda é vivenciada nas escolas, não apresentou mudanças significativas no processo educativo, pois continua a não contribuir ou contribui pouco para a aprendizagem. Ela ainda classifica, puni e, em muitos casos, promove a exclusão e desistência da vida escolar (Fernandes, 2009).

Ressalta-se que os cuidados a serem tomados com a reverberações sociais de um processo avaliativo meramente classificatório nas etapas de formação básica são inúmeros, mas, em contrapartida, o migrar de um nível ou ano escolar para outro pressupõe que as etapas anteriores de aprendizagem em matemática foram desenvolvidas com êxito. Entretanto, a experiência mostra que isso de fato não tem ocorrido e essa “promoção” vai acompanhada de lacunas de aprendizagem que tornam o processo cada vez mais complexo.

Alguns passos para mudar essa realidade são apontados nas pesquisas de Brookhart (2017), Fernandes (2006, 2007, 2009), Freitas (2002), Hadji (2001), Hoffmann (2008), Luckesi (2011), Oliveira (2020), Perrenoud (2002), Sadler (1989), Sant’Anna (2014), Santos e Gontijo (2018), Villas Boas (2017), entre outros. Essas pesquisas destacam a necessidade de se discutir e melhorar o processo avaliativo de modo a promover as aprendizagens e de se perceber o processo comunicativo que a avaliação pode promover com todos os partícipes para que as modificações necessárias, em todas as esferas e agentes que circundam as salas de aula, sejam instituídas com vistas a mudar o quadro de insucesso que se apresenta no ensino. Vale lembrar que a avaliação também fornece a informação de que o estudante que já desenvolveu os conhecimentos esperados pode avançar para outras etapas.

Esses autores apontam para a necessidade de se tratar a avaliação como um processo e não apenas como um produto que por si só basta para determinar se houve, ou não, a aprendizagem, pois “é possível obter um quantitativo alto de acertos em um teste objetivo apenas por assinalar, ao acaso, as respostas adequadas, mesmo que não se saiba qual a certa e menos ainda o porquê” (Oliveira, 2020, p. 27). Ao se trabalhar a avaliação de modo processual, oportuniza-se ao estudante a recursividade das suas construções de modo a promover ajustes, quando necessário, com o objetivo de atingir a meta de aprendizagem.

Essa necessidade pode ser atendida com o que Michael Scriven denominou na década de 1960 de “Avaliação Formativa”. Villas Boas (2017, p. 157) a define como

o processo pelo qual são analisadas continuamente todas as atividades em desenvolvimento e as desenvolvidas pelos estudantes, para que eles e os professores identifiquem o que foi aprendido e o que falta ser aprendido, a fim de que se providencie os meios para que todos avancem sem interrupções e sem percalços. Essa análise permite a organização/reorganização do trabalho pedagógico com vistas ao alcance das aprendizagens por todos.

A autora enfatiza a análise do processo como forma de obter informações das aprendizagens dos estudantes, bem como a possibilidade de ajustes no processo pedagógico em curso, na busca de uma avaliação que contribua para as aprendizagens. As informações mencionadas não constituem uma via de comunicação única, pois o ato educativo, com todas as suas particularidades, deve ser feito de modo dialógico (Freire, 1980; Romão, 2011).

Fernandes (2009) destaca que a avaliação deve ser um processo capaz de revelar a real situação do aprendizado dos estudantes diante do objeto de conhecimento em questão, face aos objetivos estabelecidos. O autor apresenta a denominação de Avaliação Formativa Alternativa, como uma proposta que se diferencia da avaliação da corrente behaviorista em que o professor, nesse complexo ato de avaliar, deve

- organizar o processo de ensino;
- propor tarefas apropriadas aos alunos;
- definir prévia e claramente os propósitos e a natureza do processo de ensino e avaliação;
- diferenciar as suas estratégias;
- utilizar um sistema permanentemente e inteligente de feedback que apoie efetivamente os alunos na regulação de suas aprendizagens;

- ajustar sistematicamente o ensino de acordo com as necessidades e;
- criar um adequado clima de comunicação interativa entre os alunos e entre estes e o professor. (p. 59-60)

Quanto aos estudantes, o autor destaca as suas responsabilidades:

- participar ativamente nos processos de aprendizagem e de avaliação;
- desenvolver as tarefas que lhes são propostas pelos professores;
- utilizar o *feedback* que lhes é fornecido pelos professores para regularem as suas aprendizagens;
- analisar seu próprio trabalho mediante seus processos metacognitivos e de autoavaliação;
- regular suas aprendizagens tendo em conta os resultados da autoavaliação e de seus recursos cognitivos e metacognitivos;
- partilhar seu trabalho, suas dificuldades e seus sucessos como o professor e com seus colegas; e
- organizar seu próprio processo de aprendizagem. (p. 59 e 60)

Esse processo deve ser participativo, com possibilidade de interações em prol de negociá-lo e motivar os partícipes na busca por “ações que regulem os processos de aprendizagem e ensino” (Fernandes, 2009, p. 21). Aos estudantes, deve esclarecer quais são as lacunas de aprendizagem que têm de ser preenchidas para que consigam superar o obstáculo em questão, quando houver e, caso contrário, confirmar que os esforços empreendidos nesta etapa promoveram o seu aprendizado. Quanto ao professor, dar condições de identificar o que deve ser feito por ambos, professor e estudante, para que a aprendizagem seja efetivada. Sadler (1989) destaca a necessidade da interação para que essa participação ocorra e não apenas o fornecimento de uma informação.

Essas condições estão relacionadas com o que Luckesi (2011, p. 13) destaca ao mencionar que a avaliação “subsidiaria as decisões sobre os atos pedagógicos e administrativos”. Acredita-se, nesta pesquisa, que esses subsídios pedagógicos podem ser mais detalhadamente obtidos a partir do momento em que a avaliação faz parte do processo de ensino e aprendizagem, pois “quando a avaliação é contínua, feita ao longo do ano pelos professores, ela se dilui no fluxo do trabalho cotidiano em aula” (Luckesi, 2011, p. 43), por conta do acompanhamento sistemático que todo processo requer, possibilitando, assim, tomadas de decisões que devem favorecer a aprendizagem. A avaliação deve ser posta a serviço do planejamento pedagógico dos

professores e das instituições de ensino, pois trata-se de um processo que, se bem planejado e executado, movimenta toda a escola.

Considerar a avaliação como um processo que pertence à organização do trabalho pedagógico, é entender o seu potencial na constituição ou não das relações estabelecidas entre a avaliação e as suas possibilidades, pois “a avaliação regula o trabalho, as atividades, as relações de autoridade a cooperação em sala de aula e, de uma certa forma, as relações entre a família e a escola ou entre profissionais de educação” (Perrenoud, 1998, p. 11). Contrário a isso, se a avaliação for concebida “em vista mais do desconto do que da análise dos erros” (Perrenoud, 1998, p. 15), por exemplo, contribuirá para categorizar o grupo de estudantes em estratos que podem ter conotação pejorativa e não estimular o progresso das aprendizagens.

A avaliação formativa apresenta algumas características que descreve os caminhos da sua constituição, o modo de trabalho e possibilidades de observação do processo de ensino por ela propiciado. São elas, segundo Fernandes (2009, p. 60-61):

- a avaliação é deliberativamente organizada para proporcionar um *feedback* inteligente e de elevada qualidade, tendo em vista melhorar as aprendizagens dos estudantes;
- o *feedback* é determinante para ativar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos, que, por sua vez, regulam e controlam os processos de aprendizagem, assim como para melhorar a sua motivação;
- a natureza da interação e comunicação entre professores e alunos é absolutamente central porque os professores têm que estabelecer pontes entre o que se considera ser importante aprender e o complexo mundo dos alunos (o que eles são, o que sabem, como pensam, como aprendem, o que sentem, como sentem etc.);
- os alunos são deliberada, ativa e sistematicamente envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, responsabilizando-se pelas suas aprendizagens e tendo amplas oportunidades para elaborarem suas respostas e partilharem o que e como compreenderam;
- as tarefas propostas aos alunos que, desejavelmente, são tanto de ensino, como de avaliação e de aprendizagem, são criteriosamente selecionadas e diversificadas, representam os domínios estruturantes do currículo e ativam os processos mais complexos do pensamento (analisar, sintetizar, avaliar, relacionar, integrar, selecionar);
- as tarefas refletem estreita relação entre as didáticas específicas das disciplinas, que se constituem como elementos de referência indispensáveis, e a avaliação, que desempenham um papel relevante na regulação dos processos de aprendizagem;
- o ambiente de avaliação das salas de aula induz uma cultura positiva de sucesso baseada no princípio de que todos os alunos podem aprender.

O ato de avaliar na perspectiva formativa, que é complexo, deve ser pensado, após as definições dos objetivos e critérios de avaliação, como um instrumento repleto de tarefas que oportunizem *feedbacks* com contexto, ou seja, não basta informar, tem de ser possível promover a reflexão do estudante sobre o que ele produziu e esse processo de devolução deve possuir mão dupla, pois ao estudante não cabe apenas escutar, tem de esclarecer ao professor o que compreendeu e quais são as etapas que não conseguiu alcançar, para que o professor possa criar estratégias que possibilite a aprendizagem. Fundamentados de que todos os estudantes podem aprender, o estímulo ao processo colaborativo no trabalho com a avaliação formativa pode propiciar um clima de cooperação em sala de aula.

Fernandes (2009), ao elencar as funções do professor e do estudante no processo de desenvolvimento da aprendizagem na perspectiva da avaliação formativa, destaca o trabalho produzido pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA - *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*. Esse Conselho publicou em 1989 as *Normas Para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar (NCTM)*, dando ênfase à resolução de problemas como estratégia para aprendizagem da matemática.

Mais adiante, em 2000, o *NCTM* publica *Princípios e Normas*, com o objetivo de promover uma revisão e atualização nas *Normas* com base nas pesquisas e experiências vivenciadas desde que a primeira edição foi publicada. Em 2014, o *NCTM* publica os *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*, e há a adoção em quarenta e cinco estados dos EUA do *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*, uma possibilidade de padronizar o currículo e dessa forma trabalhar com os *Princípios e Normas* com o objetivo de aprimorar o currículo, o ensino e a avaliação.

A análise dos *Princípios para a Ação* que, distribuída em seis orientações para se trabalhar a matemática nas escolas, revela a necessidade da associação de um currículo de excelência com o trabalho colaborativo e individual aportados em experiências que tornem significativa a matemática nas vidas dos estudantes e dessa forma promova o ensino e a aprendizagem dessa disciplina escolar. Trabalhando dessa forma, os estudantes precisam de acesso às condições de iguais aprendizagens com o estabelecimento de um currículo que privilegie as conjecturas entre os campos de estudo da matemática e suas relações com a realidade.

Com o propósito de efetivar este ensino e a aprendizagem abrangente, deve-se oportunizar aos estudantes ferramentas matemáticas e acesso às tecnologias com o objetivo de realizar experiências que possam comunicar os aprendizados desenvolvidos e promover o raciocínio matemático. Colocar em prática todo esse arcabouço de situações é possível, segundo os *Princípios para a Ação (NCTM)*, com o desenvolvimento de um processo avaliativo que seja capaz de acompanhar as realizações dos estudantes, diversificando as estratégias de abordagens didáticas e *feedbacks*, motivando os estudantes a desenvolverem e, aos professores, possibilitar ajustes durante o processo de ensino e aprendizagem com base nas suas competências e profissionalismo.

Na publicação de *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática (2017)*, o *NCTM* discute o que denomina de “*Elementos Essenciais*”, os quais são destacados como: *Acesso e Equidade, Currículo, Ferramentas e Tecnologias, Avaliação e Profissionalismos*. Temas que estão interligados no ato pedagógico com repercussões no âmbito acadêmico, social, político e outras mais. A Avaliação, um dos temas dessa pesquisa, é abordada levando em conta que

Um programa de matemática de excelência assegura que a avaliação seja uma parte integrante do processo de ensino, fornecendo evidências sobre a competência em conteúdos e práticas matemáticas importantes, utilizando uma diversidade de estratégias e de fontes de dados, que irão informar o retorno para os alunos, as decisões sobre o ensino e a melhoria de programas (NCTM, 2017, p.91).

A avaliação formativa contempla as funções citadas nesse trecho, pois ela auxilia o professor no cuidado com o progresso dos estudantes, revelando os pontos que precisam de mais atenção ou indicando que é possível aprofundar o nível de aprendizagem. Realizada durante o processo de ensino e aprendizagem, pode proporcionar *feedbacks* entre os estudantes e entre estes e os professores e fornece dados que servem de embasamento para os ajustes nos programas de ensino.

Há, neste trabalho com a avaliação formativa, a centralidade do *feedback* como um dos pontos de partida para a mudança do quadro de aprendizagem dos estudantes. A sua frequência pode indicar com mais brevidade para o professor o nível de aprendizagem dos estudantes e a necessidade de ajustes no planejamento das tarefas, ou seja, quanto mais *feedbacks* dados aos estudantes, mais cuidados com as estratégias de modo a direcioná-los em busca dos objetivos de aprendizagens.

Ressalta-se que o *feedback* deve atuar em qualquer modelo de avaliação, quer seja para contribuir com os ajustes necessários durante as avaliações, diagnóstica e formativa, ou para comunicar ao estudante a sua nota ou classificação em uma avaliação somativa, modelo avaliativo tratado a seguir.

### **3.2.3 Avaliação Somativa**

O período conhecido como *Idade da Eficiência* (1900-1930), em que se procurou sistematizar o modo de ensinar, estabelecer padrões e avaliar a eficiência do estudante, foi adotado pelos sistemas educacionais com o apoio de governos pensando na formação de profissionais éticos e capazes. À avaliação caberia a função de medir os conhecimentos em uma etapa específica, interrompendo o processo de ensino e aprendizagem e classificando os estudantes apenas pelo resultado dessas avaliações. Essa é uma herança que os sistemas de ensinos atuais ainda aplicam por uma série de motivos, tais como, a necessidade de treinar o estudante para as provas de ingressos nas universidades. Pensando nisso, as instituições de ensino privado investem nesse treino para captar mais estudantes para as suas redes de ensino e as avaliações seletivas para uma vaga de emprego público, entre outros exemplos que reforçam o modelo avaliação somativa.

Fernandes (2009, p. 46) lembra que “trata-se, como vimos, de uma conceitualização em que avaliação e medida são sinônimos”. A avaliação somativa, segundo o autor, é um processo em que não há a participação do estudante na sua constituição, acontece de forma descontextualizada e busca, a partir de uma norma, a quantificação dos resultados com a possibilidade de comparação entre os estudantes. Perrenoud (1999, p. 66) comenta que a avaliação aplicada na maioria das escolas “absorve a melhor parte da energia dos alunos e dos professores”: de um lado, o professor preocupado em tratar os conhecimentos de forma isolada em sala de aula; e do outro, o estudante preocupado em estudar para essa avaliação, revelando assim uma “*transposição didática conservadora*” (Perrenoud, 1998, p. 66).

Luckesi (2011, p. 175) diferencia a avaliação somativa da formativa, entre outros aspectos, quanto à quantidade de processos que se aplicam nestes atos investigativos. Na avaliação somativa, também denominada de “avaliação de certificação”, descreve-se e qualifica a realidade do objeto de estudo; e na avaliação formativa, acrescenta-se a intervenção da realidade. O autor descreve a avaliação somativa como um exame que tem por finalidade investigar se o que o estudante

produziu acerca do objeto de estudo foi satisfatório, classificando-o perante os demais e, cita que esse grau de importância dado ao produto pode revelar-se ineficiente ao passo que, um estudante que consiga burlar o ato investigativo será classificado como apto a prosseguir nos estudos em outras etapas sem demonstrar o conhecimento necessário. Atribui-se ao estudante a responsabilidade pelo resultado produzido, seja ele satisfatório ou não, e o professor assume o papel de avaliador sem que seja responsável pelo resultado do estudante. Não há um diálogo acerca do que o estudante construiu ao longo do período que antecede a avaliação somativa, vale o que foi por ele, estudante, representado quando foi avaliado e “por serem classificatórios, implicam a seletividade, o que é natural numa situação de concurso; porém, na sala de aula, a seletividade é grave, pois atinge as raias da exclusão” (Luckesi, 2011, p. 198).

Hoffmann (2008, p. 22) faz críticas às finalidades das avaliações aplicadas nas escolas quando diz que “as notas e as provas funcionam como redes de segurança em termos do controle exercido pelos professores sobre seus alunos”. Ao estudante é imputada a obrigação de estudar para obter êxito na avaliação e assim ser promovido à série seguinte e desse modo a avaliação somativa exerce a função probatória.

A avaliação somativa que tem em seu escopo todas as características abordadas pelos autores citados, há muito tempo faz parte do processo de ensino e aprendizagem e é aportada pelo sistema de ensino tradicional. Outro destaque a esse modelo avaliativo é a sua aplicação em exames de larga escala, como documento que chancela o ingresso ao ensino superior, compõe uma das etapas que seleciona candidatos para os cargos públicos ou privados, entre outras possibilidades. A crítica que se faz é quanto à sua utilidade no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, muitos estudiosos apontam que essa modalidade mais contribui para o distanciamento do estudante do processo de ensino, estudando de forma descontextualizada para somente “*tirar uma nota*” e ser aprovado à etapa seguinte, do que desenvolver uma aprendizagem crítica e significativa de forma a dar corpo ao que foi vivenciado na escola.

O uso quase que exclusivo da avaliação somativa contribui para a identificação de algumas limitações, como descreve Fernandes (2009, p. 86),

- avaliam um leque relativamente estreito das competências previstas no currículo;
- tendem a fracionar o conhecimento, assumindo a independência e não a interdependência dos objetivos educacionais;
- tendem a centrar-se em objetivos que suscitam mais a utilização de processos algorítmicos ou de procedimentos rotineiros e menos o uso de processos complexos de pensamento, porque se pressupõe incorretamente que os alunos só podem resolver problemas de certos graus de complexidade depois de poderem resolver problemas muito simples.

A facilidade de “quantificar” os conhecimentos dos estudantes em uma avaliação somativa é mais simples se comparada a uma avaliação de natureza formativa, até mesmo pela concepção de subjetividade do trabalho formativo, avaliando entre outros aspectos os comportamentos sociais envolvidos no contexto que circunda esse processo mais complexo (Broadfoot, 1987). Levando em conta a realidade das escolas públicas e privadas que preparam os estudantes para o ingresso em universidades, com o compromisso de cumprir com o currículo de ensino e dar conta de contribuir para a formação de cidadãos éticos e críticos, concorda-se com alguns autores que afirmam ser possível a coexistência dos dois modelos avaliativos e até de certa forma complementares (Fernandes, 2009; Lester; Kroll, 1990; Ravel, 1992; Schoenfeld; 1985). Entende-se que há possibilidade de se trabalhar com os três modelos avaliativos e que cabe ao professor o planejamento de todo esse complexo trabalho que pode e deve envolver todos os agentes que circundam as salas de aula.

Salienta-se que o processo avaliativo interfere em processos administrativos da escola, exige a organização e até a reorganização do espaço escolar, influencia diretamente no planejamento dos professores, modifica o ambiente em sala de aula, estabelece relações entre professores e estudantes e entre estes. Outro elemento que modifica as relações citadas é o *feedback*, pois permeia todas as instâncias desse processo avaliativo, possibilita ajustes de rotas no processo de ensino e aprendizagem e regula as relações entre os partícipes dessa convivência escolar. A seguir, tem-se o destaque que o *feedback* exige nesta pesquisa.

### **3.3 Feedback**

O processo de avaliação formativa tem como um de seus pilares o *feedback*. A *relação*, como já mencionada, complexa e com desdobramentos, traz

responsabilidades mútuas e, o modo como o *feedback* será instituído nessa relação, define se o processo vai ou não ser democrático, construtivo e possibilitar a construção do conhecimento matemático. O *feedback* possibilita ao professor conhecer os procedimentos adotados pelos estudantes de modo a aproximá-lo do nível de aprendizagem que esse estudante possui acerca do objeto de estudo em questão (NCTM, 2007). Entre outras situações, redireciona, quando for o caso, o planejamento das tarefas e dos objetivos de aprendizagem e, para o estudante, esclarece o seu desenvolvimento quanto ao nível que se encontra e quais os conteúdos, habilidades e procedimentos têm de mobilizar para atingir os objetivos estabelecidos.

As possibilidades citadas podem ser desenvolvidas quando o *feedback* consta como parte da avaliação de modo a criar as situações mencionadas, ou seja, “um bom *feedback* deve fazer parte de um ambiente de avaliação em sala de aula em que os alunos veem a crítica construtiva como uma coisa boa e entendem que a aprendizagem não pode ocorrer sem prática” (Brookhart, 2017, p. 2).

A instituição do *feedback*, nesse ato de comunicar-se com o estudante, deve ser clara, objetiva, adequada ao seu nível de compreensão e possibilitar mudanças nos campos cognitivo e emocional (Brookhart, 2017). Proporcionar um *feedback* com termos não compreendidos pelos estudantes apenas traz mais uma lacuna de aprendizagem e o afastamento dessa relação cotidiana da sala de aula, com estudantes cada vez menos participativos. A clareza e o aspecto construtivo com que o *feedback* deve ser feito tende a estimular os estudantes a ter vontade em fazer e perceber que a sua aprendizagem vem acompanhada da sua prática. Para que os estudantes compreendam a linguagem utilizada no *feedback*, deve-se usar a mesma ou estar bem próxima da que é utilizada em sala no cotidiano escolar (Santos; Dias, 2006; Oliveira, 2020).

Além de contemplar o *feedback* no seu planejamento e trabalhar os cuidados comunicativos da linguagem ao emití-lo, o professor tem de entender, com embasamento teórico científico, a definição de *feedback*. Entende-se por *feedback*, nesta pesquisa, assim como os autores Black (1995), Black e Wiliam (2001), Brookhart (2017), Fernandes (2005), Hatie (2012), Oliveira (2020), Perrenoud (1998), Tunstall e Gipps (1996), a troca de informações acerca das ações e dos processos de construções desenvolvidas pelos estudantes, o esclarecer dialógico dos procedimentos didáticos estabelecidos na relação entre professor e estudante, o

conhecer, comunicar e contribuir positivamente com nessas construções para a melhoria dos aspectos emocionais, envolvidos pelo ato de estudar e, o desenvolvimento do estudante no processo de ensino e aprendizagem.

Dá-se ênfase, nesta pesquisa, ao que se entende por *feedback estruturado e intencional*, que consiste na análise de cada passo do processo de construção do conhecimento de modo a direcionar a reflexão do estudante acerca do que está pesquisando ou desenvolvendo. Conforme sinaliza Fernandes (2009),

O *feedback*, em si mesmo, não resolve qualquer problema se não for devidamente pensado, estruturado e adequadamente integrado no processo de aprendizagem dos alunos. Na verdade, tem de ser bem mais que uma simples mensagem: temos de garantir que o que se pretende comunicar aos alunos seja efetivamente percebido de forma que eles possam saber o que fazer com tal comunicação (p. 97).

Oliveira (2020, p. 81), apoiada em Wiggins (2012), descreve que

É necessário um conjunto de aspectos que façam do feedback mais do que prescrições, recomendações ou meras dicas, ele deve conter um arcabouço de possibilidades de intervenções complexas que reconheça as peculiaridades de cada aluno e os estimulem a seguir rumo ao objetivo.

Deve ser estruturado para oferecer um leque de opções de recursos para que o estudante aprenda a desenvolver a sua aprendizagem e ao mesmo tempo, constituído de etapas que respeitem e organizem o nível de aprendizado que o estudante se encontra e deseja avançar. Intencional, porque vai propor caminhos que podem ser personalizados, dadas as especificidades de cada estudante e o conhecimento em desenvolvimento, que oportunizem tarefas que iniciam com conhecimentos de níveis mais simples, respeitando o nível e o ritmo do estudante e trazendo a relação teórica e prática do objeto de conhecimento que se quer desenvolver.

Para que essa intencionalidade tenha o propósito de fazer o estudante refletir e encontrar caminhos de desenvolvimento para o seu aprendizado, deve-se dar importância sobremaneira ao planejamento desse *feedback*, pois se o estudante tem algum entendimento sobre o que é proposto e comete algum tipo de erro, deve-se tomar um caminho para as correções pontuais de rota entre outras ações, mas se o estudante está em um nível de conhecimento que não contempla em nada do que se quer trabalhar, o caminho a ser abordado pelo *feedback* tem de ser outro, com mais

profundidade, ferramentas, recursos e tempo. Entretanto, se o estudante consegue trabalhar com desenvoltura e atinge os objetivos estabelecidos, o *feedback* deve reforçar essa postura e propor tarefas que o desafiem, como resolvê-la de formas diferentes, ou até mesmo reescrevê-la.

Vivenciar as situações possíveis e descritas anteriormente está intimamente ligado ao foco do estilo, ao assunto e ao modo de *feedback* que se pretende trabalhar junto ao estudante. Conforme Fernandes (2009, p. 98-99),

- pode estar mais centrado nos resultados e levar às chamadas atividades de remediação ou de reforço, à motivação e, por fim, à consecução dos objetivos previamente estabelecidos. É uma concepção muito associada às perspectivas behavioristas da aprendizagem;
- pode estar associado à ideia de recompensar o esforço, melhorando a autoestima dos alunos que, por sua vez, conduz a mais esforço e, normalmente, a melhor aprendizagem; ou
- pode conceber-se como estando mais orientado para os processos utilizados, mais centrado na natureza das tarefas de avaliação propostas e na qualidade das respostas dos alunos. Um processo deliberado e planejado que ajuda os alunos a perceberem e a interiorizarem o que é trabalho de elevada qualidade e quais as estratégias cognitivas e/ou metacognitivas, os conhecimentos, as atitudes ou as capacidades que necessitam desenvolver para que aprendam, compreendendo.

Nesta pesquisa, será aplicada a última abordagem que é centrada nos processos desenvolvidos durante as tarefas. Refletir a aplicação do *feedback* ao longo do processo de desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes está imbuído na avaliação formativa e deve contribuir para o avançar dos estudantes rumo às competências de autoavaliação e, durante e não apenas ao final, do processo de desenvolvimento da aprendizagem matemática.

Ressalta-se que, para que o *feedback* ocorra e atinja os objetivos de aprendizagem como descrito, o professor tem de criar um clima em que todos, simplesmente todos os argumentos sejam discutidos, seja para confirmá-los ou não, reconstruí-los ou não e até mesmo desconsiderá-los, pois são as construções que circundam cada fala que importam e não apenas a conclusão de cada argumento. Essa comunicação se dá a partir da interação do professor e dos estudantes tendo por objeto de análise, o processo de aprendizagem em curso com o cuidado de ser construtivo e não procurar culpados para quaisquer situações que aconteçam, ou seja, o *feedback* pode provocar efeitos positivos e negativos.

As pesquisas abordadas mais adiante, de modo geral, correlacionam os efeitos do *feedback* à eficácia. O cuidado com o tipo de *feedback*, com o momento de realizá-lo e a forma como ele é apresentado, tem de estar pautado no objetivo que se quer atingir, principalmente por conta dos efeitos que podem surgir nesta etapa. Estudos acerca dos efeitos do *feedback* no processo de desenvolvimento de tarefas, como trazem Kluger e DeNisi (1996), Hattie (1999), Hattie e Timperley (2007), apontaram que esses são mais eficazes e produzem efeitos mais positivos quando direcionam ou fortalecem os estudantes. Esse direcionamento está relacionado à proposição da mudança de trilha de aprendizagem com o objetivo de o estudante buscar outras correlações que oportunizem a resolução da tarefa proposta para aqueles que não atingiram os objetivos da aprendizagem, ou para o encorajamento da busca de novas soluções da mesma tarefa para aqueles que já atingiram os objetivos pré-estabelecidos, mas ainda podem enriquecer o seu leque de conhecimentos; já o fortalecimento está intimamente ligado às informações acerca das respostas corretas. Entende-se que esse direcionamento deve promover a reflexão que auxilie o estudante ao desenvolvimento da aprendizagem matemática e não um roteiro que indique cada passo a ser seguido por parte do estudante.

Outro aspecto que caracteriza os efeitos do *feedback*, como positivo ou negativo, é o grau de dificuldade da tarefa a ser desenvolvida bem como do objetivo que se quer alcançar, lembrando que esse objetivo deve estar explícito para todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Kluger e DeNisi (1996) demonstraram que o *feedback* é mais eficaz e produz efeitos mais positivos quando aplicados para as tarefas mais desafiadoras. Ao longo do processo, uma vez que o *feedback* aplicado à atividade de nível mais simples, pelo mero desempenho, não traz o efeito esperado, pois não acrescenta nova informação ao que foi desenvolvido. Oliveira (2020, p. 63) acrescenta que “a oferta e o recebimento de *feedback* efetivo podem reestruturar a relação de poder entre professores e alunos, redirecionando para uma sensação de cooperação e partilha, devido ao envolvimento e responsabilização do aluno com a própria formação”.

Pensando em *feedback* efetivo, Hattie e Timperley (2007) apontaram três perguntas importantes na sua estruturação: 1) Para onde estou indo? 2) Como estou indo? 3) Para onde ir? As respostas podem prover dados que favoreçam o direcionamento e a intencionalidade dos *feedbacks*. Segundo os autores, essas perguntas têm por finalidade dar direcionamento quanto aos objetivos que se quer

atingir, ao desenvolvimento que o estudante está ou não vivenciando e que caminhos deve trilhar para prosperar, respectivamente.

Responde-se a primeira pergunta esclarecendo ao estudante os objetivos que se quer alcançar e isso se dá

quanto a que tipo ou nível de desempenho deve ser atingido para que eles possam direcionar e avaliar suas ações e esforços de acordo. O *feedback* permite que eles estabeleçam metas razoáveis e acompanhem seu desempenho em relação aos seus objetivos, de modo que ajustes no esforço, direção e até mesmo na estratégia possam ser feitos conforme necessário. (Locke; Latham, 1990, p. 23).

Os autores destacam a necessidade do conhecimento dos objetivos para que os esforços tenham um direcionamento com vistas a reduzir a distância entre o nível que o estudante se encontra e o nível desejado. É provável que não se tenha um *feedback* efetivo se os objetivos que o circundam não são claros (Earley *et al.*, 1990).

O direcionamento do estudante, geralmente dado pelo professor, responde a segunda pergunta quando consegue ajustar a rota de construção do conhecimento, pois, “o *feedback* é eficaz quando consiste em informações sobre o progresso e/ou sobre como proceder”, Hattie e Timperley (2007). Essas informações precisam ser estruturadas de modo a provocar no estudante uma reflexão em que ele tenha parâmetros de comparação entre a produção anterior e posterior ao *feedback* instituído.

Responder ao estudante para onde ele deve ir não necessariamente deve incluir mais tarefas, pois só aumentar a quantidade de “coisas” a fazer não garante a eficácia do *feedback*. Esse direcionamento pode ser a proposta de uma releitura do contexto da tarefa de modo a suscitar no estudante outra estratégia de resolução, quando for possível, ou a proposição da retomada de um conceito que proporcione o avançar na tarefa sempre com o viés reflexivo.

Recomenda-se encorajar os estudantes a refletirem sobre cada uma dessas perguntas, pois o *feedback* só será efetivo se provocar a mudança de postura do estudante mediante o que precisa fazer para alcançar o objetivo de aprendizagem. Assim, a busca por essas respostas pode estimular o estudante a interpretar a releitura da tarefa, a análise e a reflexão do que foi por ele desenvolvido e o reestruturação de estratégia que favoreçam a sua aprendizagem.

Essa mudança de postura pode ser mais dinâmica se o *feedback* for efetivo e possuir um foco bem definido (Hattie; Timperley, 2007). É importante que o professor responda de forma propositiva sobre o que o estudante produziu como resultado de uma tarefa, destacando o que há de positivo e tomando os devidos cuidados ao tratar as incoerências, mas sem eufemismos, pois a comunicação deve ser clara e entendida pelo estudante. Caso o foco seja o processo de resolução da tarefa, deve-se procurar dar ênfase à interpretação do texto e dos procedimentos desenvolvidos pelo estudante, pois o não entendimento do objetivo da tarefa certamente impede até o iniciar da mesma. Outro foco deve ser direcionado à reflexão do processo de resolução, ou seja, se o estudante conseguiu desenvolver algum raciocínio que precisa de ajustes para chegar ao objetivo, o professor pode propor processos comparativos com construções desenvolvidas anteriormente, por exemplo, para que o estudante possa retomar e superar o obstáculo que se apresenta. Por último, mas não menos importante, o *feedback* direcionado para as realizações pessoais pode contribuir para, por exemplo, a proatividade em trabalhar a fluência nas resoluções de tarefas.

Para as três perguntas destacadas anteriormente, devem ser aplicados, a cada uma, quatro níveis de *feedback* propostos por Hattie e Timperley (2007): 1) Sobre a tarefa; 2) Sobre o desenvolvimento da tarefa; 3) Sobre o estágio da aprendizagem; 4) Sobre o estudante - com a função de esclarecer para o professor se o estudante tem compreensão do que se trata a tarefa proposta, sobre os caminhos que o estudante trilha ou deve trilhar, sobre as certezas e incertezas dos conceitos mobilizados durante a realização da tarefa e sobre os aspectos pessoais do estudante enquanto um ser em desenvolvimento cognitivo, social e afetivo.

Associando as três perguntas a cada nível proposto pelos autores, constitui-se o diálogo com a retomada do *feedback* emitido pelo professor, ou seja, a resposta ao *feedback* do professor, por parte do estudante e assim por diante. O trabalho com a dinâmica de responder essas perguntas e motivar o estudante a refletir sobre as suas construções exige o processo de retomada do *feedback* por ambos, professor e estudante, para que encontrem os ajustes que devem ser feitos em decorrência do que foi primeiramente indicado e, caso tenha sido efetivo, siga-se adiante. Mas, se não tiver produzido o efeito esperado, que se analise a linguagem que foi utilizada, as correlações indicadas na proposta de resolução da tarefa, entre outras abordagens inseridas no contexto do *feedback*.

O acompanhamento desse complexo processo das intervenções, mediações e estruturação dos *feedbacks* leva em conta os aspectos da *temporalidade*, *amplitude do tempo* e *democratização* na constituição do trabalho com a avaliação formativa. A abordagem da *temporalidade* na avaliação formativa faz uso do passado do estudante, de forma diagnóstica, para desenvolver e aprimorar o presente, com retomadas personalizadas quando for o caso, revendo as tarefas elaboradas com os seus respectivos objetivos, ajustando os níveis de complexidade para construir o conhecimento que se almeja, usando materiais adequados, propondo tarefas com linguagens claras e bem definidas, entre outras ações de planejamentos necessários para alcançar os objetivos de aprendizagem.

O acompanhamento dessas ações para se estruturar os *feedbacks* na avaliação formativa visa trabalhar com as *soluções* apresentadas pelos estudantes e não com o problema que se apresenta (Fernandes, 2006). São os caminhos percorridos, certos ou errados, completos ou incompletos dessas soluções, que fornecem os dados que estruturam o *feedback*, e devem ser investigados de modo a direcionar o trabalho em busca da aprendizagem e do desempenho satisfatório dos estudantes. Vislumbra-se o resultado dessas soluções na avaliação formativa, mas dá-se maior atenção ao investimento no *processo de constituição* desse resultado, sem relegar a segundo plano esse resultado que, de uma forma ou de outra, vai certificar essa aprendizagem, ou seja, caminhando junto com os objetivos que se pretende atingir, a construção do conhecimento (produto).

Durante o investimento no processo de constituição desse resultado, o trabalho com o *feedback* no desenvolvimento da avaliação formativa possibilita uma *relação* constante entre o estudante, o professor e o processo de ensino e de aprendizagem. Essa relação é complexa por conta dos desdobramentos que se apresentam durante seus trabalhos, ou seja, o professor e o estudante têm responsabilidades quanto ao ato de avaliar e de ser avaliado. Após a aplicação de um instrumento avaliativo, por exemplo, um professor não está liberto das reverberações que os resultados podem apresentar, de modo a não admitir as possíveis vulnerabilidades existentes, e o estudante não pode ser encarado como o único responsável pelo seu resultado, mas também há implicações que são de seu encargo (Luckesi, 2011).

A avaliação formativa apoiada em *feedbacks* leva em conta a *amplitude do tempo* para que o estudante e o professor desenvolvam essa relação e trabalhem juntos a avaliação como um processo pedagógico. Como afirma Luckesi (2011), o “ato

de avaliar é construtivo”, feito a muitas mãos, pois importa-se com o modo como o estudante vinha se desenvolvendo, com os ajustes que o professor deve fazer durante o seu trabalho e do estudante, com o planejamento flexível a depender das especificidades dos objetivos, dos recursos disponíveis, sendo uma avaliação dialógica entre outras ações, mas sempre pensando num processo diagnóstico, reflexivo e movimentado (Romão, 2011).

Trabalhando a avaliação desse modo cooperativo, com a participação do estudante em todas as etapas do desenvolvimento do conhecimento, tem-se como *consequência* a inclusão dos estudantes e não a exclusão e evasão que, a depender de como é trabalhada a avaliação, pode promover por conta dos insucessos e fracassos (Fernandes, 2006; Villas Boas, 2017). A participação, aqui considerada, traz todos os aspectos *democráticos* que a ação pedagógica pode produzir, com base na avaliação formativa e nas relações estabelecidas em sala de aula, ou seja, *feedbacks* para estimular a construção do conhecimento de modo coletivo e a aprendizagem de todos, independente do ritmo do estudante.

A democratização do processo avaliativo, levando em conta a relação dialógica que se constitui a partir dos *feedbacks*, pode provocar efeitos que aproximam e contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem do estudante ou, a depender do modo como é emitido e recebido, pode provocar efeitos contrários (Hattie; Timperley, 2007).

A relação dialógica, aqui abordada, apresenta-se basicamente de duas formas, o *feedback* escrito e *feedback* oral, que podem ser complementares, feitos individualmente ou em grupo e durante todas as etapas do processo pedagógico. Ambas as formas devem ser cercadas de cuidados quanto ao momento, à forma e à intensidade de se aplicar. O *feedback* escrito e o oral, de modo *descritivo* como definiram Tunstall e Gipps (1996), apresentam especificidades de cada forma, com os cuidados mencionados, tendo como foco o processo de desenvolvimento das tarefas.

Escrever palavras que contemplem a intencionalidade e o direcionamento reflexivo, sem se deixar levar para o roteirizar dos passos que o estudante deve seguir e alcançar o objetivo esperado, é uma tarefa que contém muitos cuidados.

O cuidado com a clareza do que se quer comunicar implica deixar tangível ao estudante o que ele deve fazer para sair do estágio em que se encontra. Os termos, as palavras e as expressões não podem trazer ideias vagas, mas para além do reconhecimento do esforço do estudante, independente do nível de compreensão do

que se espera que ele tenha do que é proposto, devem estimular a reflexão sobre o que construiu até o momento do *feedback* e apontar ações que proporcionem o repensar dos procedimentos adotados com a intencionalidade e o direcionamento mencionados. O *feedback* deve ser capaz de provocar algum movimento reflexivo no estudante, pois se não há mudança na percepção do estudante acerca do que deve produzir após essa etapa, o *feedback* não contribuiu para a aprendizagem (Brookhart, 2017).

Atenção à quantidade e à qualidade do que escrever no *feedback* deve constar como outra prioridade. Não se pode comunicar nem mais nem menos do que o estudante necessita para progredir na construção do seu conhecimento. Um caminho para dosar essa quantidade é se colocar no papel do estudante enquanto leitor e quanto à qualidade, estar atento para não esperar que o estudante desvende charadas, mas faça conjecturas que correlacionem os conhecimentos de que precisa. Ambos os pontos são sensíveis, pois há estudantes que com poucas informações se desenvolvem, já outros precisam de mais detalhes e, desse modo, conhecer o estudante pode ser a saída para que se tenha certeza na quantidade e qualidade do *feedback* a ser posto.

A sensatez do *feedback* escrito deve proporcionar o tom do que se espera do estudante. Elaborar perguntas que direcionem e escrever curtas mensagens propositivas são caminhos possíveis de serem acompanhados pelo professor para constatar se o estudante compreendeu o que fora escrito e se contribuiu com o avanço do estudante. O *feedback* escrito voltado à interpretação das tarefas é mais complexo, pois envolve conceitos não apreendidos ou entendidos com equívocos pontuais que dificultam ou impossibilitam a resolução das tarefas e esses, demandam estratégias de comunicação que não podem roteirizar a resolução, mas descrever procedimentos que possibilitem a reflexão do que se pretende desenvolver (Santos, 2008).

Entende-se, assim como Brookhart (2017), que existe um *bom tempo* para que o *feedback* tenha sentido para o estudante e o professor possa fazer esse acompanhamento. Consiste na aplicação desse *feedback* durante o desenvolvimento das tarefas e, para que isso ocorra, o planejamento deve apresentar um *continuum*, ou seja, caso o *feedback* que se deseja aplicar não seja possível no dia em que ocorreu a necessidade, o próximo encontro deve proporcionar a reflexão sobre o que

precisa ser retomado e contemplar outra tarefa para a validação do conhecimento que precisa ser desenvolvido.

Com o devido cuidado para essa retomada, o *feedback* oral pode ser o ponto de partida para o que ficou em aberto e ser um complemento do *feedback* escrito. Aplica-se também sem o *feedback* escrito e apresenta a especificidade da interação dinâmica entre professor e estudante e entre estudantes. Tem-se dois momentos dessa interação, o que ocorre durante a realização das tarefas e o outro que ocorre a *posteriori*. Acredita-se que o modelo descritivo de *feedback* oral deve ser o mais apropriado, pois a fala deve ser direcionada para destacar o que foi feito e o que deve melhorar, nunca como deve ser feito, assim como auxiliar os processos de construção do conhecimento.

Um aspecto importante a ser destacado, devido a interação, é o momento que o professor deve dar esse *feedback*, pois deve deixar o estudante mobilizar tudo que sabe e tirar as suas conclusões para que possa contribuir ou, quando chamado a participar do processo de construção. A interrupção inapropriada com a intenção de fazê-lo acertar não contribui para o processo de desenvolvimento da aprendizagem uma vez que não vai ser por seu próprio esforço que o estudante vai chegar aos objetivos estabelecidos.

Os cuidados mencionados no *feedback* escrito também devem ser aqui considerados e, para além desses, o dinamismo da conversa deve ser tomado por cautela na escolha das palavras, independente de ser o *feedback* oral em grupo ou individualmente. O *feedback* oral em grupo deve ser dado quando algum aspecto comum aparecer, quer seja um erro, a proposição de um caminho reflexivo, um elogio, entre outros. O *feedback* oral individual apresenta-se de modo formal ou informal. O rigor do *feedback* oral formal traz uma estrutura pautada na especificidade da atividade desenvolvida pelo estudante e procura atuar nomeadamente na superação do ponto de entrave da atividade que não é superada sem a intervenção do professor e, em regra, em um momento único da aula. Por outro lado, o *feedback* informal, apresenta-se sem uma programação prévia, é dado de modo mais curto durante o circular do professor em sala, com o sinalizar de uma construção que precisa de mais cuidado, que pode ser dado com perguntas para contribuir na reflexão do estudante, dentre outras particularidades.

O *feedback* individual conduz a personalização do ensino, trabalha de modo singular o que o estudante precisa, comunica ao estudante a importância e o cuidado

do professor com o seu desempenho. Durante essa dinâmica, o *feedback* deve ser direcionado a posicionar o estudante como responsável pelo seu trabalho, oportunizar o protagonismo na explicação dos procedimentos adotados com devolutivas positivas e promover a reflexão aportada em critérios que esclareçam o que precisa ser trabalhado, com foco na aprendizagem. A outra abordagem do *feedback* individual refere-se ao elogio do desempenho do estudante na construção do que é proposto, validando o que o estudante demonstra e é uma oportunidade de propor desafios ressaltando a sua capacidade.

O *feedback* trabalhado com a perspectiva da avaliação formativa pode proporcionar muitas aproximações do professor com os estudantes em torno do objeto de estudo, oportunizar diálogos que apresentam o entendimento dos estudantes sobre o que o professor propõe em sala de aula, possibilitar o acompanhamento das estratégias de resolução que revelam se há ou não conhecimento do que se faz em cada tarefa, entre outras possibilidades. Esse trabalho deve ser cíclico, ou seja, uma vez emitido o *feedback*, deve-se retomar o diálogo mais adiante para constatar se houve a aprendizagem e realizar os ajustes necessários, sejam eles o tipo de *feedback*, a estratégia de abordagem do conhecimento em questão com figuras, materiais concretos e outros mais, pois como destaca Oliveira (2020, p. 90):

A oferta de pistas sobre a produção dos alunos não é garantia de promoção das aprendizagens, há que se manter em constante estado de alerta para promover o *feedback* de maneira eficaz e estabelecer uma percepção constante e retroalimentada sobre as aprendizagens e os efeitos de tais ações.

A busca pelo *feedback* eficaz passa pelo conhecimento dos aspectos que os diversos autores aqui mencionados explicitaram em seus trabalhos e destaca-se o cuidado do professor em proporcionar um ambiente em que os estudantes se sintam seguros, respeitados e tratados com a certeza de todos, absolutamente todos, são capazes de aprender.

## **4 METODOLOGIA**

Este capítulo especifica a justificativa para a escolha da abordagem de ensino apoiado na sala de aula invertida como elemento condutor das atividades desenvolvidas com os estudantes durante a pesquisa. Distribuído em tópicos, apresenta o registro dos princípios éticos, a natureza da pesquisa, o contexto escolar indicando os participantes, os procedimentos metodológicos que foram desenvolvidos descrevem as particularidades da sala de aula invertida para a pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e as abordagens teóricas para a análise de dados.

### **4.1 Os princípios éticos**

Todo e qualquer projeto de pesquisa que contenha seres humanos, direta ou indiretamente envolvidos, deve ser submetido à análise do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), de acordo com a resolução 466/2012. Há especificidades que devem ser abordadas quando se trata de um público menor de idade, por exemplo. Neste caso os termos de consentimento e assentimento livre e esclarecido devem ser direcionados aos responsáveis. Outra apreciação desse comitê refere-se ao ambiente virtual, onde a pesquisa também será desenvolvida com vistas a seguir a Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD).

O projeto desta pesquisa foi submetido ao CEP e aprovado sob o parecer de número 5.288.165 (Anexo C).

### **4.2 Os participantes**

Participaram da pesquisa quarenta e seis estudantes da primeira série do ensino médio de uma escola da rede privada de ensino do Distrito Federal, com idades de 14 a 16 anos, sendo vinte e quatro do sexo masculino e vinte e duas do sexo feminino. Esses estudantes foram convidados a participar da pesquisa e, por se tratar de estudantes menores de idade, precisaram ser autorizados pelos responsáveis por meio de um termo de consentimento livre e esclarecido – TCLE (Anexo A) e de um termo de assentimento livre e esclarecido – TALE (Anexo B).

Ressalta-se que a escola na qual a pesquisa foi desenvolvida tinha cinco turmas da primeira série, mas por conta da quantidade de informações produzidas, uma turma foi selecionada aleatoriamente para a análise desses dados. Para

preservar as identidades dos estudantes, eles serão identificados pelos seus respectivos números da chamada de sala de aula. Justifica-se a escolha dessa escola pelo vínculo empregatício do pesquisador que atua como professor regente nas turmas de ensino médio dessa unidade. O planejamento e o acompanhamento de todas as atividades foram realizados pelo professor/pesquisador que, nesta pesquisa, será designado apenas como pesquisador.

### **4.3 Natureza e desdobramentos da Pesquisa**

Associado à sala de aula invertida, trabalhou-se com o ensino exploratório que tem como uma das suas características o processo de comunicação constituído a partir da interação entre os estudantes e entre esses e o pesquisador (Ponte, 2005). Segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), trabalhar a aprendizagem na perspectiva do ensino exploratório é cuidar do desenvolvimento de um processo

simultaneamente individual e coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma certa atividade matemática, e também da interação com os outros (colegas e professor), sobrevivendo processos de negociação de significados. (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013, p. 3).

Ao professor, exige-se a mudança de postura quanto às relações sociais e acadêmicas desenvolvidas na sala de aula, um planejamento que admite flexibilidade e com etapas a serem vivenciadas sob a sua vigilância pedagógica que vai da “escolha criteriosa da tarefa e o delineamento da respectiva exploração matemática com vista ao cumprimento do seu propósito matemático” (Canavarro, 2011, p. 11).

A mudança de postura está relacionada à dinâmica da sala de aula em que os estudantes assumem um protagonismo diferente do que se vivencia em aulas totalmente expositivas. Os estudantes circulam a qualquer hora pela sala, acessam dispositivos eletrônicos para pesquisas, usam o quadro da sala para expor as suas construções, conversam praticamente o tempo todo, entre outras situações as quais o professor atua, na maioria das vezes, como mediador e observador. Quanto à flexibilidade, deve-se ter em pauta a possibilidade de trabalhar por um período mais longo um dado conhecimento face às dificuldades apresentadas e, aos estudantes que são mais desenvolvidos academicamente, ter alternativas de trabalho para que não fiquem ociosos durante esse tempo.

Nessa dinâmica em sala de aula, o ensino exploratório tem o propósito de atrair os estudantes a desenvolver modelos complexos de pensamento e esse direcionamento é constituído de quatro fases: apresentação da tarefa, desenvolvimento da tarefa, discussão compartilhada e sistematização (Rodrigues; Cyrino; Oliveira, 2018).

A *apresentação da tarefa* é acompanhada da organização da sala quanto aos aspectos físicos e a disponibilidade de recursos. Cabe ao professor certificar-se de que todos os estudantes têm iguais condições de iniciar a atividade a ser desenvolvida e vale ressaltar que, por conta da proposta da avaliação formativa nesta pesquisa, aos estudantes foi apresentado e discutido os objetivos e o modo pelo qual foram avaliados. O *desenvolvimento da tarefa* exige do professor o direcionamento preciso com uma comunicação efetiva das etapas a cumprir, determinar se o trabalho será realizado individualmente, estipular o tempo duração da atividade, limitar ou não os recursos disponíveis, propor tarefas que migrem de um nível mais simples para um mais desafiador são características que estão presentes nesta fase (Stein; Smith, 1998).

A terceira fase, *discussão compartilhada*, é coberta de cuidados por conta da exposição das construções dos estudantes. Deve-se primar pelo respeito com as construções de cada estudante para que ninguém se sinta desprestigiado, acolhendo assim todas as tentativas de se mostrar o que foi concebido. Agruparam-se as resoluções que apresentaram construções comuns para que se pudesse dar *feedback* estruturado e com intencionalidade em grupos, abrindo espaço para que todos participassem e contribuíssem com as construções uns dos outros buscando superar os obstáculos, caso existissem, ou confirmar os diversos modos de se resolver uma tarefa, quando era o caso. A sistematização foi acompanhada do encorajamento dos estudantes em demonstrar o que aprenderam, ficando ao pesquisador a função de mediador e, quando não havia outra possibilidade, fazia-se intervenções. De posse das resoluções das tarefas, validou-se conceitos e procedimentos, propôs-se generalizações e reescritas das resoluções apresentadas com o objetivo consolidar a aprendizagem (Rodrigues; Cyrino; Oliveira, 2018; Smith; Stein, 2013).

As fases descritas foram desenvolvidas no modelo de sala de aula invertida, que propõe o protagonismo do estudante, dando-lhe a liberdade de circular pela sala de aula e trabalhar colaborativamente com os demais estudantes. A inversão consiste, como afirmaram Bergmann e Sams (2017, p. 10), em “deslocar a atenção do professor

para o aprendiz e para a aprendizagem”. Esses autores ainda destacam que a inversão está diretamente relacionada com o fato de o estudante iniciar de algum modo, orientado pelo professor, o processo de aprendizagem e, quando necessário, o professor participa com mediações e intervenções pontuais (Bergmann; Sams, 2017, p. 10).

Nesta pesquisa, a inversão se deu a partir do instante em que os estudantes receberam as tarefas com os objetivos delineados e foram orientados quanto ao modo como seriam avaliados. Em seguida, se propunham a resolver as tarefas com os conhecimentos que traziam e, após a correção por parte do pesquisador, ora em sala por conta da simplicidade da tarefa e ora no contraturno, dado um contexto mais complexo que exigia mais tempo de análise dessas construções. A partir da entrega das atividades com os *feedbacks* escritos, os estudantes retomavam as suas construções com o objetivo de compreender o que ainda estava por desenvolver com a estrutura e intencionalidade que cada *feedback* deveria fornecer por conta da especificidade das resoluções entregues.

Esse segundo momento com a atividade era acompanhado da possibilidade de pesquisa com o objetivo de atingir o nível de aprendizagem desejado. A dinâmica, na maioria das vezes, foi realizada na biblioteca da escola, espaço que os estudantes gostavam de frequentar e que continha muitos recursos, como computadores, mesas redondas, cabines individuais e coletivas, sala de reunião e, naturalmente, livros, muitos livros. Pesquisou-se em livros, sites, usou-se materiais concretos, constituíram fóruns de discussão em volta das mesas redondas e compartilharam construções no quadro móvel que ficava à disposição dos estudantes. A sala de computadores, como é chamada pelos estudantes, também foi utilizada para as pesquisas individuais no início da retomada da resolução das tarefas para que o pesquisador pudesse observar as estratégias adotadas pelos estudantes, mas em pouco tempo transformava-se em discussões coletivas em volta de um estudante que havia desenvolvido algo, o que se assemelha ao que Pina (2002) chamou de “Quem descobre mostra” durante a sua pesquisa de mestrado.

Abordagens individuais e em grupos, por parte do pesquisador, foram realizadas tanto durante a resolução das tarefas quanto nos momentos em que os estudantes estavam pesquisando os conteúdos envolvidos. A atuação do pesquisador também ocorreu individualmente por conta das resoluções que apresentavam estratégias mais bem elaboradas e que fugiam do padrão que se esperava de um

estudante dessa faixa etária, ou quando a resolução estava muito distante do que era tido como aceitável para a tarefa em questão. Já a abordagem com grupos, foi realizada com base nas construções que apresentavam estratégias de resoluções comuns. Em diversos momentos, o pesquisador foi chamado a participar do processo de construção do conhecimento e esses momentos foram, na maioria das vezes, para aprimorar o que estava sendo discutido pelos estudantes e confirmar o conceito ou procedimento que estava no contexto das suas construções.

Em consonância com os desdobramentos descritos, justifica-se a abordagem qualitativa nesta pesquisa por conta das características de sua realização que, segundo Godoy (1995, p. 58).

[...] não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo.

Particularidades como a atuação do pesquisador como professor da turma onde a pesquisa será desenvolvida, utilizando o “Ambiente Natural” (Creswell, 2010), que são as salas de aula nas quais as atividades pedagógicas foram desenvolvidas com os estudantes e onde os *feedbacks* foram aplicados durante os processos de ensino e aprendizagem, possibilitam a obtenção de informações que uma pesquisa qualitativa exige. Além disso, as etapas da pesquisa foram desenvolvidas com flexibilidade no decorrer das atividades, adaptando-se ao contexto de investigação, sem impor-lhe regras e rotinas.

A pesquisa qualitativa “aprofunda-se no mundo dos significados das ações e relações humanas, um lado não perceptível e não captável em equações, médias e estatísticas” (Minayo, 2003). Busca-se, nesta pesquisa, compreender como os *feedbacks* proporcionaram aos estudantes a aprendizagem matemática. Conforme Godoy (1995), na pesquisa qualitativa o foco está relacionado à obtenção de informações sobre os processos de resolução das tarefas, às interações constituídas durante a realização do trabalho pedagógico, ao uso do *feedback* recebido pelo estudante e ao desenvolvimento da avaliação formativa como uma das etapas da aprendizagem em uma sala de aula invertida.

Os estudantes foram observados durante o desenvolvimento de suas atividades acadêmicas, coletando informações por meio de conversas, analisando os procedimentos adotados durante a resolução das tarefas propostas, vivenciando as trocas entre os pares na construção do conhecimento, estudando o comportamento diante dos erros e acertos cometidos, fornecendo *feedbacks* estruturados e com intencionalidades, ora escritos nas atividades entregues aos estudantes, ora em conversas coletivas ou em grupos e levando em conta o diálogo com o devido respeito e oportunidades iguais para todos os envolvidos. O registro desses diálogos foi anotado no diário de bordo do pesquisador ou ainda com a gravação em áudio deles. Há de se destacar que a pesquisa em questão possuiu flexibilidade no planejamento das atividades propostas e no modelo de coleta de informações, uma vez que a pesquisa tem a lente interpretativa do pesquisador com base no objeto de estudo e em sua experiência.

A pesquisa usou informações quantitativas e qualitativas para a análise das produções e dos diálogos como os estudantes na aplicação da avaliação formativa e a inversão da sala de aula. A composição da pesquisa com os dois tipos de informação é perfeitamente possível, como afirmam Minayo e Sanches (1993, p. 247):

A relação entre quantitativo e qualitativo, entre objetividade e subjetividade não se reduz a um continuum, ela não pode ser pensada como oposição contraditória. Pelo contrário, é de se desejar que as relações sociais possam ser analisadas em seus aspectos mais “ecológicos” e “concretos” e aprofundadas em seus significados mais essenciais. Assim, o estudo quantitativo pode gerar questões para serem aprofundadas qualitativamente, e vice-versa.

Houve, portanto, uma complementaridade entre informações quantitativas e qualitativas de modo a dar sustentação ao processo interpretativo da pesquisa.

E, por fim, em função de interação entre os participantes que foram colocados em situações de igualdade quanto ao processo de comunicação, assumindo papéis de protagonismo, emitindo opiniões buscando validar as suas construções, recebendo e emitindo *feedbacks*, é que se optou por analisar as informações aportados na análise de conteúdo (Bardin, 2011). As informações foram coletadas na pesquisa com o objetivo de responder as perguntas que norteiam esse estudo. A autora define a análise de conteúdo como

um conjunto de técnicas de análise das comunicações. Não se trata de um instrumento, mais de um leque de apetrechos; ou, com maior

rigor, será um estilo lento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações. (Bardin, 2011, p. 37).

A escolha dessa técnica de análise de informações justifica-se por conta das possibilidades de categorização das respostas que se espera coletar, da diversidade de formas de dados que poderão ser encontradas, tais como as resoluções representadas por desenhos ou gráficos, textos explicativos ou interrogativos, comentários por escrito ou orais, explanações dos procedimentos desenvolvidos para se atingir os objetivos esperados, dentre outros. Após vivenciar esses momentos de produção de informações, essas foram agrupadas por semelhança e proximidade para que se pudesse categorizá-las e extrair as conclusões pertinentes.

Aliado à análise de conteúdo, trabalhou-se as informações coletados com o viés fenomenológico buscando a “compreensão interpretativa das experiências dos indivíduos dentro do contexto que foram vivenciadas” (Goldenberg, 2011, p. 19). Interpretar os desdobramentos dos processos de resolução das tarefas apoiados em *feedbacks* estruturados e intencionais, aplicando-se a metodologia da sala de aula invertida com o uso da avaliação formativa na construção do conhecimento matemático tendo por base epistemológica a fenomenologia implica em ter o olhar cuidadoso sobre os participantes, os objetos e os objetivos de pesquisa, como destaca Bezerra (2019, p. 91)

Uma pesquisa em avaliação dentro da perspectiva fenomenológica deve, necessariamente, levar em consideração a importância dos sujeitos no processo de ensino e aprendizagem e, além disso, considerar a relação entre o sujeito e o objeto de aprendizagem que valorize as aspirações e as características dos indivíduos.

A compreensão do que está por trás das atitudes dos participantes da pesquisa, dos seus “sentidos e significados” (Fontes, 2021, p. 55) compõe parte das informações coletadas, pois trabalhando com o viés fenomenológico, procurou-se investigar os discursos dos estudantes durante as suas produções e construções individuais e coletivas, bem como os seus procedimentos antes, durante e após a emissão dos *feedbacks* sem se prender aos dados quantitativos (Bicudo, 2004).

#### **4.4 Particularidades da Sala de Aula Invertida na Pesquisa**

Após a apresentação dos contextos que circundam o modelo de sala de aula invertida destacados no aporte teórico, relata-se as particularidades dessa metodologia na pesquisa em questão. O processo de resolução das tarefas foi totalmente presencial, pois faz parte da coleta das informações a observação do contexto social no qual os estudantes realizam as suas construções, a análise da influência do modelo de sala de aula invertida nas relações estabelecidas entre os estudantes e entre o pesquisador e os estudantes, as implicações do uso do *feedback* no desenvolvimento da aprendizagem matemática.

A inversão foi iniciada após os estudantes tomarem conhecimento dos objetivos de cada tarefa e como seriam avaliados. Foi entregue uma atividade com algumas tarefas de conteúdos contemplados em anos escolares anteriores, em seguida foram convidados a resolvê-las com tempo cronometrado, em algumas ocasiões com apoio de materiais de consulta e em outras não, por conta dos objetivos específicos de cada tarefa. A duração das tarefas foi condicionada ao nível de dificuldade e às condições impostas tais como, ao apoio ou não pesquisador, ao uso ou não de materiais e sites, entre outras situações que podem fugir ao controle do pesquisador por se tratar de uma escola em movimento.

Vale lembrar que as avaliações foram apoiadas em *feedbacks* individuais e coletivos, estruturados e intencionais, com retomadas pontuais de todos os erros e acertos cometidos pelos estudantes, independente do nível de complexidade, com a ressignificação desse erro e o incentivo desse acerto na vida dos estudantes, com o apoio de plataformas digitais, livros, materiais concretos que proporcionem pesquisas, e caracterizados como um processo minucioso de avaliações das aprendizagens que vão desde o diagnóstico do que o estudante traz acerca do que se quer tratar até a validação do conhecimento a ser trabalhado.

#### **4.5 Os instrumentos e procedimentos para a produção de informações**

Os procedimentos de produção de informações foram diversificados por conta dos ambientes e instrumentos de realização da pesquisa, ou seja, os estudantes estiveram em salas de aulas convencionais, na biblioteca e na sala dos computadores. Esses ambientes foram preparados para o uso de materiais comumente utilizados (lápiz, caneta, borracha, caderno, entre outros) e com o uso de computadores e

celulares. Usou-se o diário de bordo para o registro de falas pontuais dos estudantes e fez-se o registro por gravação em áudio de diversos momentos ao longo da pesquisa. A análise das resoluções das tarefas foi outro importante documento de registro, pois possibilitou o entendimento do pensamento dos estudantes diante das tarefas e serviu como um dos pontos de partida dos *feedbacks* individuais e coletivos.

O uso do diário de bordo na sala de aula para Porlán e Marin (1997, p. 19-20),

Permite refletir sobre o ponto de vista do autor e sobre os processos mais significativos da dinâmica em que está imerso. É um guia para reflexão sobre a prática, favorecendo a tomada de consciência do professor sobre seu processo de evolução sobre seus modelos de referência. Favorece, também, uma tomada de decisões mais fundamentadas. Por meio do diário, pode-se realizar focalizações sucessivas na problemática que se aborda, sem perder as referências ao contexto. Por último, propicia também o desenvolvimento dos níveis descritivos, analítico-explicativos e valorativos do processo de investigação e reflexão do professor.

A importância do diário de bordo se traduz em informações que podem subsidiar o planejamento do ritmo das atividades para cada estudante ou grupo de estudantes, o nível de complexidade das tarefas, a escolha dos ambientes de realização das atividades; sinalizar os processos de aprendizagem, entre outras possibilidades.

Quanto às reuniões coletivas, destaca-se as possibilidades de interações entre os participantes, o compartilhamento de ideias que são passíveis de discordâncias e “as diferenças de status entre os participantes não são levadas em consideração; e o debate se fundamentam uma discussão racional” (Gaskel, 2002, p. 79).

Alguns cuidados metodológicos permearam esse ambiente, tais como não desviar o foco do objeto de discussão, proporcionar e garantir a tranquilidade e igualdade de oportunidade de participação para todos. Segundo Gatti (2005, p. 13),

Com esses procedimentos, é possível reunir informações e opiniões sobre um tópico em particular, com certo detalhamento e profundidade, não havendo necessidade de preparação prévia dos participantes quanto ao assunto, pois o que se quer é levantar aspectos da questão em pauta considerados relevantes, social ou individualmente, ou fazer emergir questões inéditas sobre o tópico particular, em função das trocas efetuadas.

Com as abordagens mencionadas, esperou-se ter informações que possibilitassem uma análise detalhada dos procedimentos e conhecimentos

desenvolvidos pelos estudantes. Espera-se que o tratamento das informações em categorias, a estrutura flexível do planejamento das atividades, com o uso da “Lente Teórica” (Creswell, 2010) na análise dos dados e do caráter interpretativo das construções dos estudantes na resolução das tarefas, possibilite o registro dos conhecimentos matemáticos envolvidos em cada resolução, das estratégias e procedimentos adotadas a cada tarefa, das contribuições, ou não, que os *feedbacks* podem apresentar cada vez que os estudantes o receberem, entre outras possibilidades.

As observações do pesquisador foram direcionadas para categorizar cada etapa desenvolvida, tais como analisar os registros dos estudantes no desenrolar das atividades antes e depois do *feedback* e investigar a compreensão da influência, ou não, do trabalho com a avaliação formativa em uma sala de aula invertida como estratégia para melhorar a aprendizagem matemática dos estudantes. A leitura pelo pesquisador dos registros dos estudantes quer seja os apresentados nas tarefas ou durante os *feedbacks* teve por norte os objetivos de pesquisa explicitados anteriormente, considerando a flexibilidade de planejamento com vistas a fazer os ajustes necessários para atingir esses objetivos em decorrência do nível e ritmo de desenvolvimento da pesquisa.

#### **4.6 O contexto da produção das informações para análise**

A pesquisa foi desenvolvida durante as aulas duplas que, consiste em dois horários consecutivos de cinquenta minutos cada, semanalmente durante 4 meses, ao longo do segundo semestre de 2022. Envolveu uma turma com quarenta e seis estudantes da primeira série do ensino médio, com idades de 14 a 16 anos, sendo vinte e quatro do sexo masculino e vinte e duas do sexo feminino. Ressalta-se que a escola na qual a pesquisa foi desenvolvida tinha cinco turmas da primeira série e que a turma foi selecionada aleatoriamente. Para preservar as identidades dos estudantes, eles serão identificados pelos seus respectivos números na chamada de sala de aula.

A cada atividade os estudantes eram previamente esclarecidos quanto aos objetivos que se pretendia atingir e como seriam avaliados. Durante o desenvolvimento da pesquisa, registrou-se os comentários ocorridos no diário de bordo do pesquisador e reuniu-se para *feedbacks* individuais e em grupos com a gravação em áudio dos diálogos. Essas reuniões apresentaram o processo de

comunicação em que os estudantes interagiam entre si e com o pesquisador, constituindo e compartilhando conceitos matemáticos e estratégias de resolução das tarefas, o que caracteriza o ensino exploratório (Ponte, 2005). Quanto à avaliação do desenvolvimento das atividades pelos estudantes, observou-se quatro tipos de respostas: tarefa sem resposta, tarefa resolvida incorretamente, tarefa resolvida parcialmente correta e tarefa resolvida corretamente. Dividiu-se em três modalidades a análise de conteúdo aplicada: pré-análise; exploração dos documentos produzidos; análise e discussão dos dados (Bardin, 2011).

A pré-análise foi constituída pela escolha das tarefas e determinação dos objetivos de aprendizagem. A exploração dos documentos produzidos foi feita com base nos tipos de respostas, agrupando-as quando apresentavam características comuns e tratando as respostas incomuns, tanto as certas quanto as erradas, com a especificidade que cada uma pedia. A análise e discussão das informações foi aportada nas mensagens que as resoluções e os diálogos estabelecidos apresentados ao longo de toda a pesquisa.

Quanto ao *feedback* ofertado, estruturou-se de forma escrita e oral. Com menor incidência, na forma escrita apontou-se as incoerências, quando ocorreram, sempre de modo propositivo e, com propostas de avanço quando as construções estavam corretas. O diálogo foi constante ao longo da realização das tarefas e buscou-se, com o *feedback* nessa modalidade, compreender os processos de resolução dos estudantes vivenciando-se em diversos momentos a interação entre os estudantes e os conhecimentos e procedimentos metodológicos.

Relembra-se, conforme aporte teórico, que as tarefas foram classificadas em: *exigência baixa (memorização)*, *exigência baixa (procedimentos sem conexões)*, *exigência alta (procedimentos com conexões)* e *exigência alta (fazer matemática)*, segundo Stein e seus colaboradores (Stein; Grover; Henningsen, 1996; Stein; Smith, 1998).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As informações produzidas, bem como as análises realizadas, serão apresentadas conforme cronologia das aulas, por meio de registros semanais. Optou-se por essa forma para possibilitar a observação das progressões das aprendizagens a partir das dinâmicas *feedbacks* realizados ao longo da pesquisa. De antemão, registra-se que a pesquisa foi marcada por momentos de grande aprendizado para os estudantes e para o pesquisador.

### 5.1 Primeira semana

A primeira atividade, implementada na primeira semana da pesquisa, denominada Atividade Avaliativa Diagnóstica\_1 (Apêndice A), tinha por objetivo verificar quais os conhecimentos que esses estudantes tinham acerca das relações métricas no triângulo retângulo e sobre semelhança de triângulos. Esses objetos matemáticos fazem parte do currículo dos anos finais do ensino fundamental e, nessa atividade, foram explorados como forma de recapitulação de saberes apreendidos anteriormente. A atividade foi desenvolvida em sala de aula pelos estudantes usando-se os dois horários de cinquenta minutos, individualmente e sem consulta aos pares, livros e bases de dados disponíveis na internet. Ao final, foram avisados de que na semana seguinte teriam a atividade corrigida com a possibilidade de retomada do processo de resolução para atingir os objetivos aos quais a atividade exigia, caso precisassem.

Após a correção da atividade de cada estudante, ocorrida ao longo da semana e feita no contraturno pelo pesquisador, de modo a disponibilizar o resultado individual dos estudantes, esses foram levados à biblioteca para retomarem as suas resoluções com os respectivos *feedbacks*. Os estudantes que não desenvolveram nenhum tipo de raciocínio na atividade foram convidados a um *feedback* coletivo em uma sala na biblioteca que é indicada para estudos em grupos, enquanto os demais receberam a orientação de rever as suas resoluções com os *feedbacks* individuais indicados em suas respectivas atividades e seguir com o objetivo de concluir o que ficou em aberto ou apresentava algum tipo de incoerência.

Aplicou-se a metodologia de sala de aula invertida (Bergmann; Sams, 2017; Branco; Alves, 2015; Valente 2015) que se desvincula da aula expositiva em frente à turma, proporciona o protagonismo do estudante diante do processo de

aprendizagem, torna o pesquisador um mediador desse processo de construção do conhecimento, ficando mais próximo de cada estudante com a possibilidade de avaliar o seu desenvolvimento processualmente, e revela o ritmo e a forma como o estudante aprende.

O objetivo com essa metodologia foi observar quais as estratégias usadas pelos estudantes para resolver as tarefas em aberto ou com incoerências em suas resoluções após a indicação dos *feedbacks* em cada tarefa da atividade. O tempo de sala de aula passou a ser destinado a um acompanhamento em grupo ou individualmente de modo a conhecer a progressão de cada estudante, o que trazem de conhecimento e quais as ferramentas usadas para resolver as tarefas propostas. Os pontos observados para estruturar os *feedbacks* de modo a favorecer as aprendizagens foram os seguintes:

- constatar se o estudante reconhecia os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo;
- verificar se o estudante reconhecia as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa e a semelhança entre os triângulos envolvidos;
- verificar se o estudante conhecia o teorema de Pitágoras para calcular a medida da hipotenusa tendo a medida dos catetos, ou calcular a medida de um dos catetos tendo a medida da hipotenusa e do outro cateto;
- analisar as estratégias de resolução dos estudantes para calcular as medidas das projeções dos catetos, a altura relativa à hipotenusa, as medidas dos catetos e da hipotenusa.

A análise das produções dos estudantes partiu dos conhecimentos envolvidos e dos tipos de estratégias utilizadas, considerando as especificidades que cada tarefa continha. Após essa análise, estruturou-se os *feedbacks* de modo individual quando a resolução apresentada continha elementos que destoavam significativamente do que era considerado como correto e, em grupos, quando as construções elaboradas apresentavam elementos comuns.

Dentre os estudantes, quatro entregaram a atividade sem evidências de tentativas de resolução. Justificaram a atitude informando que não lembravam do conteúdo que deveriam aplicar para tais tarefas. Foram convidados a retomar o estudo sobre triângulos retângulos e indicou-se assistir vídeos que tratassem inicialmente do teorema de Pitágoras por conta da preferência por essa estratégia de retomada pelos

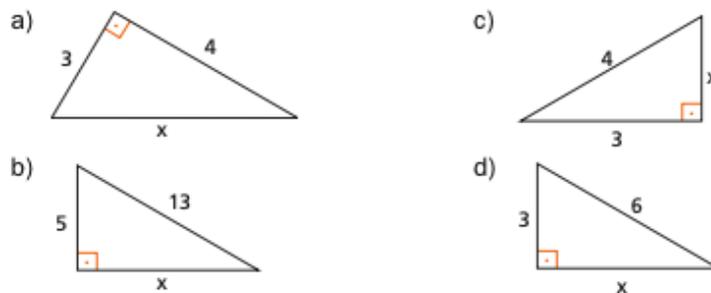
estudantes. Esse grupo integrou-se aos demais e propuseram-se à retomada indicada.

Os outros estudantes, como detalhado mais adiante, deixaram uma ou outra tarefa sem resolução, mas apresentaram empenho durante a atividade. A seguir, descreve-se o desenvolvimento da atividade com os respectivos *feedbacks* e seus desdobramentos ocorridos no segundo encontro.

## 5.2 Segunda semana

Na primeira tarefa, que pode ser classificada como de *baixa exigência* por conta aplicação direta da *memorização* do teorema de Pitágoras, sete estudantes escreveram o teorema de Pitágoras de forma incorreta, por consequência dessa escrita não obtiveram sucesso na resolução e, trinta e cinco estudantes responderam corretamente. Veja a atividade e a seguir algumas resoluções com os respectivos *feedbacks*.

*Primeira tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.*



O equívoco mais comum na resolução dessa atividade foi, ao aplicar o teorema de Pitágoras, calcular a medida de  $x$  como se em todos os triângulos ele representasse a hipotenusa. Nota-se que o  $x$  representa a medida da hipotenusa apenas no triângulo correspondente à letra a, nos demais ele representa a medida de um dos catetos. Veja alguns exemplos.

Figura 1 - Resolução do estudante 14.

a)  $x^2 = 4^2 + 3^2$   
 $x = 5$   
ótimo! ✓

b)  $x^2 = 13^2 + 5^2$   
 $x = \sqrt{194}$   
 Vamos voltar no desenho e observar os elementos.

c)  $x^2 = 4^2 + 3^2$   
 $x = 5$   
 Vamos comparar as letras a e c.

d)  $x^2 = 6^2 + 3^2$   
 $x = \sqrt{45}$   
 Quem são os catetos e a hipotenusa

Fonte: arquivo pessoal

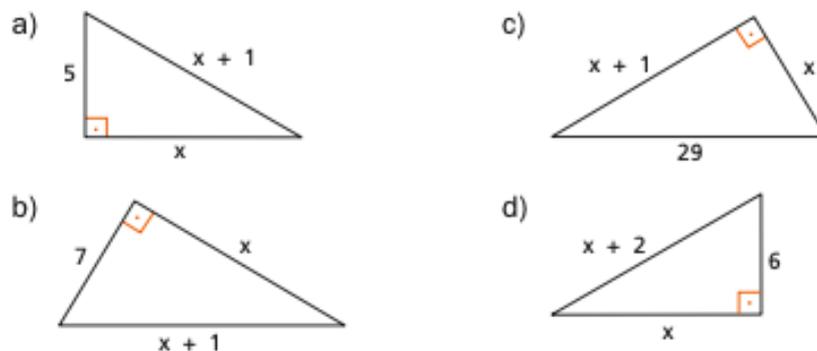
Estruturou-se o feedback de modo escrito para cada uma das resoluções que não correspondiam à aplicação adequada do teorema de Pitágoras, ou seja, o quadrado da medida da hipotenusa igualado à soma dos quadrados dos catetos, mas com os elementos em posições trocadas.

Para favorecer a aprendizagem pelos estudantes, optou-se por retomar conteúdos que embasassem os argumentos usados nos feedbacks. O redirecionar da aprendizagem voltando ao estudo de níveis mais simples que possibilite ao estudante atingir o nível complexo fazendo associações entre conceitos e procedimentos que validem o conhecimento em questão, tanto para aqueles que não responderam as atividades quanto para os que usaram estratégias equivocadas, são pontos centrais

na estruturação dos feedbacks e, nessa primeira tarefa, foi realizada uma explanação sobre a condição de existência de um triângulo que diz que, a medida do lado maior do triângulo, se houver, deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados, isso por conta de ter encontrado em duas resoluções medidas que contrariam essa condição e, em seguida, descrever quais são os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo. Para confirmar a condição de existência de um triângulo, os estudantes cortaram tiras de papel cartolina com tamanhos que não possibilitassem a confecção de um triângulo e, finalizando essa etapa de orientação, propôs-se a busca da demonstração do teorema de Pitágoras com vídeos no Youtube<sup>8</sup> e a retomada das resoluções.

Após essa abordagem, com o complemento do vídeo, foi oportunizado aos estudantes a possibilidade de resolver novamente as tarefas apoiados nos feedbacks, acentuando o caráter processual e formativo da atividade para favorecer as aprendizagens. As novas produções evidenciaram que os conceitos e procedimentos foram apreendidos, resultando em resoluções corretas por todos os estudantes.

*Segunda tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.*



Essa tarefa, também de *baixa exigência* por não apresentar conexões com conceitos e primar pelo desenvolvimento do algoritmo, curiosamente não foi respondida por seis estudantes que responderam a primeira tarefa. Quando questionados, disseram que não lembravam como desenvolver o termo  $(x + 1)^2$ . O desenvolvimento incorreto do quadrado da soma de dois termos,  $(x + 1)^2$ , igualando-o a  $x^2 + 1$ , ocorreu em oito atividades. Os demais 28 estudantes responderam corretamente à questão. O exemplo que segue traz o desenvolvimento descrito anteriormente.

<sup>8</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PGPRh4JBIsq>. Acesso em: 1 jun. 2022.

Figura 2 - Resolução do estudante 19

2. a)  $(x+1)^2 = 5^2 + x^2$   
 $x^2 + 1 = 25 + x^2$   
 $x = 24$

b)  $x^2 + 1 = 7^2 + x^2$   
 $x^2 + 1 = 49 + x^2$   
 $= 48$

c)  $29^2 = (x+1)^2 + x^2$   
 $841 = x^2 + 1 + x^2$   
 $= 841 - 1 = 2x^2$   
 $840 = 2x^2$   
 $840 - 2x^2 = 0$  ?

d)  $x^2 + 4 = 6^2 + x^2$   
 $x^2 + 4 = 36 + x^2$   
 $= 32$  ?

Fonte: arquivo pessoal

Começou-se a retomada dos conhecimentos envolvidos nesta tarefa com esse grupo de quatorze estudantes (os seis que deixaram em branco e os oito que desenvolveram com algumas incoerências algébricas), desenvolvendo-se o quadrado de números naturais, mostrando que  $3^2 = 3 \cdot 3$ , para que o estudante relembresse que a potência pode ser escrita como um processo multiplicativo e, em seguida, aplicasse o mesmo conhecimento no desenvolvimento do termo  $(x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1)$ . O desenvolvimento do produto notável foi revisado com os estudantes para a resolução das tarefas.

Com a intenção de mostrar outro caminho para buscar explicações sobre o conteúdo em discussão, recomendou-se aos estudantes pesquisar em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Abordou-se o produto notável utilizando o cálculo da área de um quadrado, desenvolvendo o quadrado da soma e, dessa forma, ressaltou-se que não há a necessidade de decorar nenhuma regra, mas raciocinar com elementos que são, há bastante tempo, vivenciados em sala de aula.

Durante essas duas abordagens com o grupo de estudantes que deixou a questão em branco ou respondeu incorretamente, alguns se manifestaram com as seguintes falas:

*Estudante 06: "...Como não lembrei, era só fazer o chuveirinho..."*

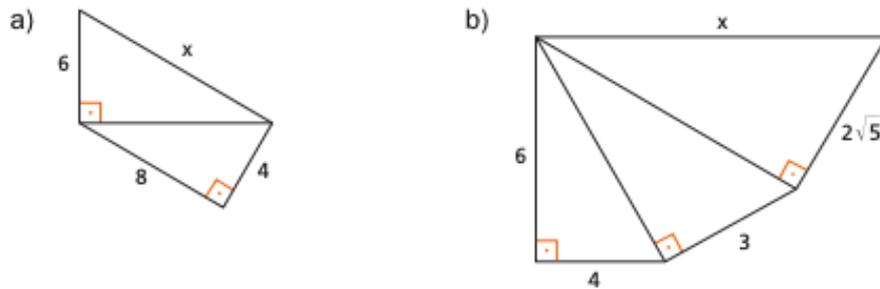
*Estudante 13: "...Multiplica ele por ele duas vezes, né?..."*

*Estudante 16: "...Mas tem uma regrinha que vai direto..."*

O objetivo com o trabalho de pesquisa do livro didático e com o vídeo foi mostrar as diversas fontes de consulta que estão disponíveis e colocá-los inicialmente para

trabalhar as mesmas tarefas de modo individual. O professor deve oportunizar diferentes estratégias de aprendizagem (Basso; Abrahão, 2016), diversificar os recursos de pesquisa que favoreçam os diferentes modos de aprender dos estudantes (Morin, 2001) e proporcionar um ambiente que contribua para a aprendizagem e autonomia dos estudantes (Rosário, 2004). Após essa etapa de orientação e acompanhamento por parte do pesquisador, com base nas observações dos autores citados, todos responderam corretamente às tarefas.

*Terceira tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.*



A terceira tarefa, ainda classificada como de *baixa de exigência* por estar apoiada no desenvolvimento de algoritmos com complexidade cognitiva limitada, teve, somados aos quatro estudantes que deixaram a atividade toda em branco, mais três estudantes que também não responderam, dezessete usaram procedimentos incorretos e vinte dois acertaram. Os estudantes que não concluíram corretamente a resolução trabalharam a hipotenusa dos triângulos que tinham as medidas dos catetos também como hipotenusa dos triângulos seguintes, ou desenvolveram incorretamente os procedimentos algébricos, ora extraíndo a raiz quadrada de modo incorreto, ora executando somas e subtrações indevidas. Encontrou-se também a aplicação do conceito de semelhança de triângulos como um dos modelos de resolução. Veja alguns exemplos.

Figura 3 - Resolução do estudante 04.

3. a)  $x^2 = 8^2 + 4^2$      $x^2 = 6^2 + \sqrt{30}^2$     b)  $6 - y$      $4,5 - z$      $3,3 - x$   
 $x^2 = 64 + 16$      $x^2 = \sqrt{116}$      $4 - 3$      $4 \geq 3$      $3 \geq 2\sqrt{5}$   
 $x = \sqrt{80}$      $e$      $4y = 18$      $4z = 13,5$      $6,6\sqrt{5} = 3x$   
 $x = 4\sqrt{5}$         $y = 4,5$      $z = 3,3$      $x = 2,2\sqrt{5}$

Figura 4 - Resolução do estudante 27.

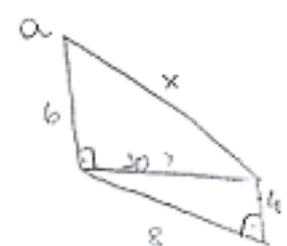
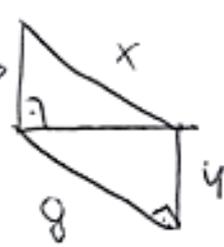
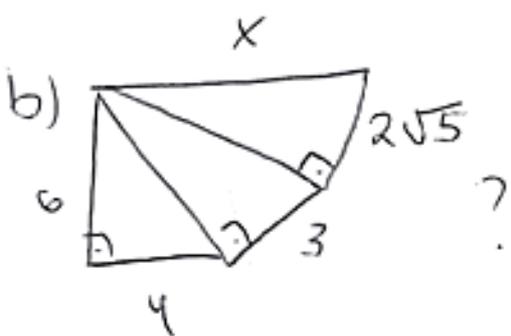
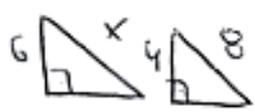
3.  
  
 $y^2 = 8^2 + 4^2$      $x^2 = 6^2 + 30^2$   
 $y^2 = 64 + 16$      $x^2 = 36 + 900$   
 $y^2 = 80$      $y = \sqrt{80}$      $x = \sqrt{936}$   
 $y = 4\sqrt{5}$      $y = 30$

Figura 5 - Resolução do estudante 28

3.  
a)   
b)   
  
 $4x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{4}$      $x = 12$

Os estudantes que deixaram em branco, emitiram os seguintes comentários:

Estudante 32: "...Não entendi a figura..."

*Estudante 21: "...Fui fazer a primeira e deu uma raiz que não era exata, daí pensei que estava errado, apaguei o que fiz e desisti de fazer o restante..."*

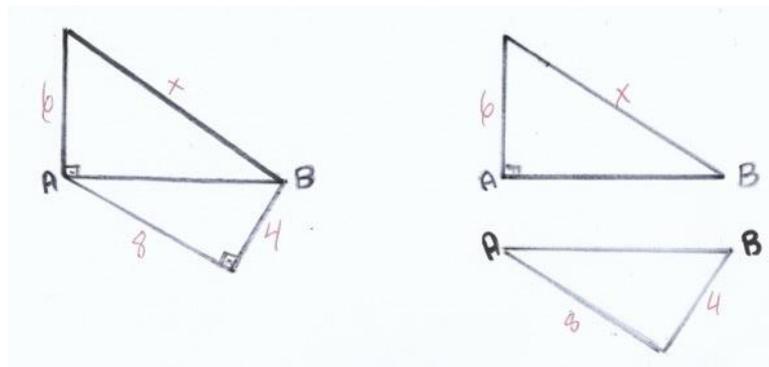
*Estudante 10: "... Não sou bom quando tem essas figuras coladas..."*

*Estudante 19: "... Achei que dava pra resolver por semelhança de triângulos, mas calculei um que deu um número estranho e não continuei..."*

O *feedback* para os estudantes que deixaram a questão em branco e os outros dezessete mencionados teve por intenção tratar o erro como uma possibilidade de aprendizagem. Indicou-se que desmembrassem os triângulos e observassem novamente as figuras com a indicação de que as medidas dos lados podem ser representadas por raízes quadradas não exatas (números irracionais). Os estudantes que acertaram a questão receberam orientações estimuladoras para se manterem interessados nas atividades e aplicarem os conhecimentos revisados/construídos em outras tarefas. A seguir, tem-se um fragmento do diálogo dos estudantes 32 e 21 com a construção que fizeram após o *feedback*.

*Estudante 32: "... Entendi o que ele disse. Basta fazer o desenho descolando um triângulo do outro que vamos ver os valores. Olha só ..."*

Figura 6 - Resolução do estudante 32



*Estudante 32: "... Agora a gente calcula essa hipotenusa que coloquei como lado AB e usa o valor no triângulo que tem o x para calcular o valor dele..."*

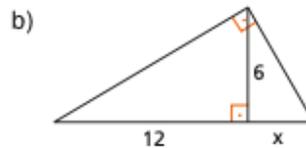
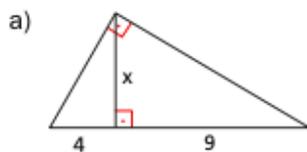
*Estudante 21: "... Não precisa nem tirar a raiz, porque vai elevar ao quadrado quando for fazer Pitágoras no outro triângulo..."*

Destaca-se nesse diálogo a construção de conhecimento a partir da reconstrução da figura entregue na tarefa como estratégia para entender o que deveria ser feito. "Quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas de variadas formas, demonstram uma compreensão mais profunda e uma capacidade fortalecida de resolução de

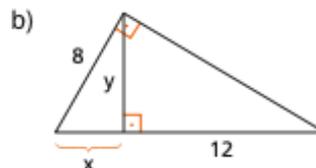
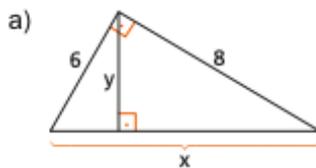
problemas” (NCTM, 2017, p. 24). Há, portanto, a aprendizagem a partir da interação do estudante com o objeto de conhecimento (Piaget, 1998). Em seguida, os estudantes que deixaram em branco ou desenvolveram algum procedimento incoerente, retomaram a tarefa e concluíram com êxito.

As três tarefas que seguem trazem em comum o mesmo contexto de resolução. O estudante poderia optar por aplicar a semelhança de triângulos ou recorrer às relações métricas no triângulo retângulo e, por isso, apesar de calcular medidas diferentes tais como as projeções dos catetos sobre a hipotenusa ou a medida da altura relativa à hipotenusa, colocou-se a análise das produções sob a mesma ótica do *feedback* emitido. A aplicação das relações métricas e a semelhança de triângulos, de modo incoerente com a definição desses conhecimentos, foram as produções mais comuns. Seguem algumas resoluções e seus diálogos.

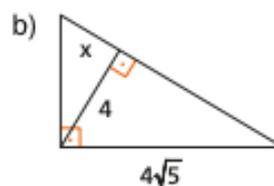
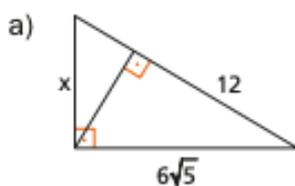
*Quarta tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.*



*Quinta tarefa: Determine o valor de  $x$  e  $y$  nos casos seguintes.*



*Sexta tarefa: Determine o valor de  $x$  e  $y$  nos casos seguintes.*



As três tarefas estão no grupo de *baixa exigência*, pois a memorização das relações trigonométricas com a aplicação de operações básicas de matemática possibilita a sua resolução. O total de produções dos estudantes com essas três tarefas em branco foi surpreendente: vinte e duas. A quarta tarefa foi corretamente desenvolvida por vinte e dois estudantes e apenas dois dos que fizeram, tiveram resoluções com algumas incoerências. As resoluções da quinta tarefa tiveram quinze corretas e nove incorretas. Quanto à sexta tarefa, dez das resolvidas estavam corretas

e quatorze com resoluções que apresentavam algumas incoerências, portanto, incorretas.

A entrega das atividades logo após a análise da correção foi acompanhada de um *feedback* coletivo para entender os motivos pelos quais um grupo de estudantes deixou essas três tarefas totalmente em branco e os motivos que levaram o grupo dos estudantes que apresentou construções com procedimentos incorretos. Na escuta desse primeiro grupo, a conversa começou com a seguinte pergunta:

*O que houve para vocês deixarem em branco essas três tarefas?*

As respostas demonstraram o tamanho do desafio e a necessidade de abordagens diversificadas uma vez que todos não aprendem da mesma forma (Correia, 2007; Madureira; Leite, 2003; Nóvoa, 2005; Rodrigues, 2006; Rodrigues; Nogueira, 2011). Veja parte das respostas:

*Estudante 03: “...Não lembrava daquele monte de fórmula. Tem num tem?...”*

*Estudante 07: “...Misturou desenho com letra e número, tipo deu um nó na minha cabeça...”*

*Estudante 26: “... Tentei resolver com Pitágoras, mas achei uns números estranhos e apaguei...”*

*Estudante 14: “...Cheguei na equação do segundo grau, aquela do delta e achei que não tinha nada de correto alí e daí apaguei...”*

A estratégia inicial para esses dois grupos foi recortar esses triângulos de modo que destacassem com cores diferentes da usada para desenhar a medida que deveria ser calculada e os ângulos internos dos triângulos.

Representar ideias matemáticas de diferentes formas é uma prática importante usada por matemáticos e solucionadores de problemas de alto nível. Quando estão trabalhando, os matemáticos representam ideias de muitas maneiras distintas – com gráficos, tabelas, palavras, expressões e, menos conhecidos, desenhos e até rabiscos. (Boaler, 2018, p. 160).

Com o manuseio desse material, juntando e separando as figuras, fizeram conexões como:

*Estudante 18: “... O cateto desse triângulo é a hipotenusa do outro...”*

*Estudante 29: “...Olha, eles vão ter os mesmos ângulos...”*

*Estudante 46: “...Pega esse triângulo da quatro e faz semelhança deles...”*

*Estudante 17: “...Dá pra fazer todos assim ó, é só girar...”*

Os estudantes sobrepuseram os triângulos e aplicaram a semelhança de triângulos para resolver essas três questões. Um dos estudantes percebeu a relação, *o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa*, com a aplicação da semelhança de triângulos. Alguns estudantes não lembravam desse conteúdo, então todos foram convidados a assistir a um vídeo<sup>9</sup> sobre semelhança de triângulos e outro sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Nesta etapa, um estudante perguntou o seguinte:

*Estudante 06: “...Beleza, você indicou os caminhos, mas a ideia não é a gente andar sozinho?...”*

E complementou.

*Estudante 06: “...Se não sei o conteúdo como vou saber o que procurar?...”*

Os demais olharam e balançaram a cabeça em concordância com a sua colocação. O *feedback* foi simples, bastou dizer que eles podem ter essa mediação com o professor até que aprendam a buscar a informação de que precisam, mas que o objetivo neste início era saber se eles são capazes de ter certeza de que aprenderam e podem resolver outras tarefas similares, que envolvam essa aprendizagem e, ainda, se conseguem perceber que o modo como estão sendo avaliados, conforme desenvolvido na pesquisa, contribui para a sua aprendizagem. Após o envolvimento dos estudantes, todos os estudantes desses grupos conseguiram coletivamente resolver as tarefas.

Ainda quanto aos diálogos durante a retomada dessas três tarefas, a análise da resolução do estudante 11 para a quarta tarefa contribuiu para o entendimento por parte do pesquisador de algumas lacunas de aprendizagem. O estudante, inicialmente, aplicou do teorema de Pitágoras no triângulo de catetos medindo, doze e seis unidades de medidas, atribuiu à hipotenusa desse triângulo a letra  $y$  e, embora na escrita falte elevar o número doze ao quadrado, o resultado encontrado foi correto. A seguir, aplicou o mesmo teorema no triângulo de catetos seis e  $x$ , representando com a letra  $z$  a medida da sua hipotenusa. Com o objetivo de entender a linha de

---

<sup>9</sup> Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=a6ABh1Q\\_KYk](https://www.youtube.com/watch?v=a6ABh1Q_KYk). Acesso em: 1 jul. 2022.  
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rqldtpMD0Y8>. Acesso em: 1 jul. 2022.

raciocínio desse estudante, que reproduziu em outras tarefas esse modelo de resolução, registrou-se o seguinte diálogo:

Figura 7 - Resolução do estudante 11

4.a)

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } y^2 = 12^2 + 6^2 \leadsto y = \sqrt{180} \\
 z^2 = 6^2 + x^2 \leadsto z = 6 + x \\
 \frac{\sqrt{180}}{12} = \frac{6+x}{6+x} \quad ? \quad 144 + 12x = 6\sqrt{180} + x\sqrt{180} \\
 144x \quad \quad \quad ??
 \end{array}$$

*Pesquisador: "... Pode, por gentileza, explicar o seu raciocínio nesta resolução? [...] Entendi parte do que fez e gostaria de saber o que o levou a essa construção..."*

*Estudante 11: "... Eu vi que dava para calcular a hipotenusa desse triângulo maior que chamei de y com o 12 e o 6. Isso está certo né?..."*

*Pesquisador: "... Sim, tranquilo..."*

*Estudante 11: "... Aí eu quis fazer a mesma coisa com esse triângulo pequeno. Chamei de z, essa hipotenusa e achei essa expressão. Fiquei com duas letras e pensei que estava errado. Lembrei que o professor do ano passado disse que essas fórmulas eram da semelhança de triângulo, então tentei montar por aí. Coloquei, a hipotenusa está para o cateto desse triângulo (apontou o triângulo de catetos 6 e 12), assim como a hipotenusa do triângulo grande está para o cateto que era o z (apontou para hipotenusa do triângulo de catetos 6 e x). Achei que as contas estavam ficando complicadas e parei..."*

Iniciou-se o *feedback* com o apontamento das construções que estavam corretas, como o cálculo da medida da hipotenusa do triângulo de catetos 12 e 6, e a montagem do cálculo da hipotenusa do triângulo de catetos 6 e x. Em seguida, reproduziu-se a expressão do cálculo de z, que o estudante pensou e substituiu-se o valor de x por 5, para que pudesse exemplificar o desenvolvimento do que havia escrito. Veja a construção e diálogo que seguiu.

Figura 8 - Construção feita pelo pesquisador

$$z^2 = 6^2 + x^2 \implies z = 6 + x$$

$$z^2 = 6^2 + 5^2 \implies z = 6 + 5$$

$$z^2 = 36 + 25$$

$$z^2 = 61$$

$$z = \sqrt{61}$$

$$z = 11$$

*Pesquisador: "... Se substituirmos o x por 5, por exemplo, olha como fica o valor de z (apontou-se para os cálculos desenvolvidos). Tem de elevar o 5 ao quadrado primeiro, depois soma-se com o 36 e indica-se o valor da raiz. Olha aqui (apontando-se para  $z = 6 + x$ ). Quando se substituiu o x por 5 aqui também, deveria encontrar o resultado da raiz quadrada de 61. O que não é verdade ..."*

*Estudante 11: "... Então estava certo até aqui (mostrando o cálculo  $z^2 = 6^2 + x^2$ ), mas não podia tirar a raiz, né?..."*

*Pesquisador: "... Sim e a sua lembrança da semelhança de triângulos estava correta..."*

*Estudante 11: "... Outro jeito era deixar a raiz aqui (apontando para  $6^2 + x^2$ ) e aplicar Pitágoras no triângulo maior..."*

*Pesquisador: "... Isso aí, você enxergou uma saída diferente da que fez. Excelente. Precisa retomar a semelhança de triângulos, pois parte do que fez traz uma incoerência..."*

*Estudante 11: "... Usei os lados errados, né? ..."*

*Pesquisador: "... Talvez tenha faltado separar os triângulos como havia indicado, para que pudesse escrever a razão de semelhança de modo correto. Sugiro que separe os triângulos envolvidos na sua construção e tente fazer os cálculos. Muito boa a segunda saída que você mostrou. Caso encontre outra, faça os cálculos e confronte o valor para validar o que fez..."*

O objetivo desse último *feedback* foi instigar o estudante a pesquisar sobre as relações métricas que possibilitariam calcular de imediato o valor de x, ou seja, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Veja.

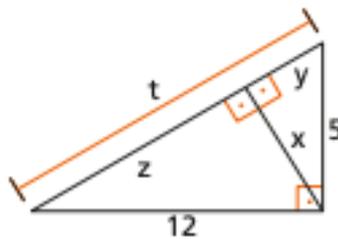
$$6^2 = x \cdot 12 \implies x = 3$$

Alguns motivos podem ser elencados para o surgimento de construções algébricas com certas lacunas de aprendizados, como as que foram apresentadas pelos estudantes. Pesquisadores como Lima (2001), Ribeiro (2001), Da Rocha Falcão (2003), Notari (2002), entre outros, apontam a falta de continuidade do trabalho

desses conceitos ao longo da vida acadêmica dos estudantes. A fatoração, por exemplo, como descreve Lima (2001), é apresentada nos livros didáticos no oitavo ano do ensino fundamental de forma compartimentada e depois não há uma retomada para que se conecte esses conhecimentos a outros que necessitam dessa aprendizagem. Vergnaud (1990) descreve o aprendizado de um conceito como um processo longo, que precisa de conexões, como a raiz quadrada e o quadrado perfeito, a multiplicação e a divisão e tantos outros.

A seguir, tem-se a sétima tarefa.

*Sétima tarefa: Na figura, determine os elementos,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ .*



*Baixa exigência* é a classificação dessa tarefa que apesar de ter vários elementos a serem calculados, são encontrados com a aplicação das relações métricas, por exemplo. A sétima tarefa foi deixada em branco por vinte estudantes. Quinze estudantes não concluíram a tarefa, acertando um ou dois dos quatro elementos e deixando os outros por fazer, e os outros onze estudantes utilizaram algum procedimento não válido, de modo que não obtiveram a solução apropriada. Entre esses últimos, observou-se o uso incorreto das relações métricas ou o desenvolvimento de cálculos incorretos, embora tenham usado a relação métrica apropriada. Veja dois exemplos.

Figura 9 - Resolução do estudante 19.

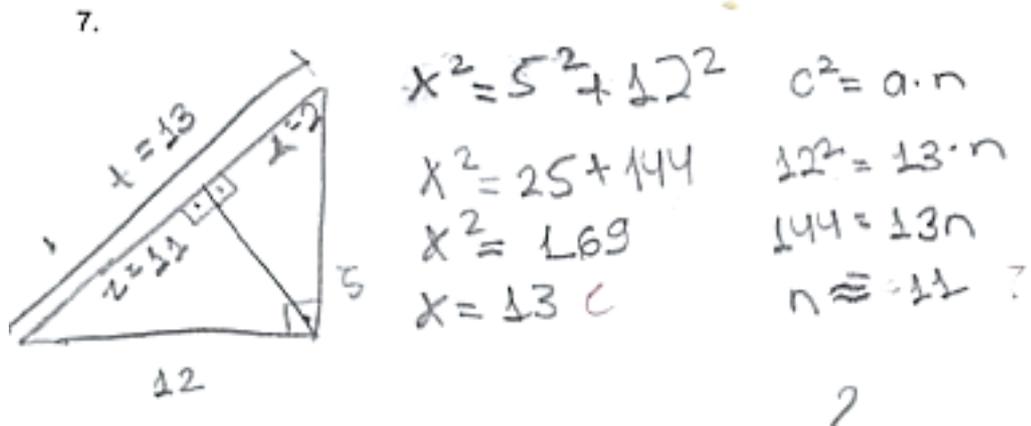
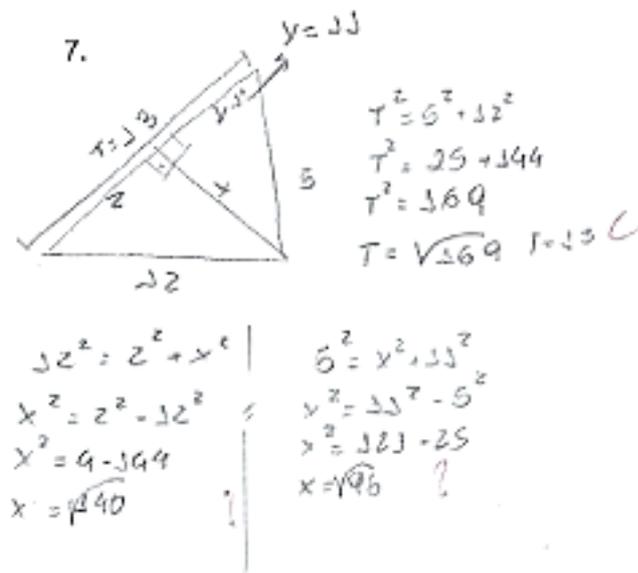


Figura 10 - Resolução do estudante 27.



Estudante 19: "... Era muita coisa para calcular e tentei fazer pensando que aquele  $x$  era a bissetriz, mas não vi como aplicar isso. Já tinha deixado em branco outras para trás e quando vi o tanto de letra para calcular, nem tentei..."

Estudante 28: "...Usei a hipotenusa no lado errado..."

Estudante 31: "...Me enrolei nas contas..."

A construção do estudante 19 apresenta corretamente as relações métricas, embora o desenvolvimento algébrico do cálculo da projeção que o estudante escreve com a letra  $n$ , que no desenho é representada por  $z$ , é finalizado com uma aproximação. Em abordagem ao estudante, ele diz que pensava não ter problema em aproximar o valor da medida do lado do triângulo desde que deixasse indicado na resolução. Afirmou ainda que, como o resultado não deu exato, acreditava estar

errado. O estudante foi encorajado a trabalhar com frações e a terminar as questões no grupo que estava inserido.

O estudante 27 inicia a resolução de modo correto com o cálculo de  $t$ , em seguida, como relatou em uma abordagem individual na biblioteca, inferiu que o valor de  $y$  era 11 e o de  $z$  era 2. Nessa abordagem, o estudante apenas afirma que foi um jeito de continuar as contas já que não lembrava como fazer e que o cálculo com números em frações dificulta o seu entendimento. O convite à participação nos grupos o motivou a entender como poderia trabalhar essa dificuldade.

As falas registradas demonstraram a falta dos conhecimentos envolvidos na atividade, a dificuldade de visualizar os elementos contidos no triângulo, o estranhamento com cálculos que não apresentam resultados com números naturais e a falta de coerência entre o que fez e o que realmente deve ser feito para representar a resposta correta, ou seja, tem-se exemplos de raciocínios em que o estudante calcula a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo obtendo uma medida maior que a hipotenusa e para ele não há erro. Essa situação nos reporta novamente às questões conceituais não apreendidas pelos estudantes, como a condição de existência de um triângulo. Como aponta o NCTM (2017, p. 7), “a compreensão de conceitos estabelece a base necessária para desenvolver a fluência em procedimentos”, isto é, para o uso significativo e flexível de procedimentos para resolver problemas.

As duas primeiras situações demonstram que não houve aprendizagem quando esses estudantes tiveram contato com o referido conteúdo. Quanto ao estranhamento e a falta de coerência mencionados, percebe-se o mero processo mecânico de aplicação de uma fórmula, sem que se tenha preocupação com a aplicação do conceito que circunda tais cálculos, logo basta para emitir uma resposta, seja ela qual for.

As falas e construções dos estudantes revelam a preocupação de pesquisadores da aprendizagem de longa data. O filósofo Bachelard (1996), ao definir obstáculo epistemológico, aponta que um conceito já construído e que contenha erros cria resistência à formulação de novos conceitos ou até mesmo à reformulação do que foi erroneamente constituído. Pavanello (2009) destaca o abandono do ensino de geometria, principalmente nas escolas públicas, e aponta algumas variáveis que contribuem para o entendimento do quadro que se encontra, tais como a forma descontextualizada de se trabalhar a geometria, os conteúdos de matemática

ensinados de forma estanque, a falta de formação dos professores, entre outros. Fiorentini (1995) ressalta os efeitos do trabalho de modo mecânico da matemática que a torna um conjunto de regras, o uso de fórmulas ou um conjunto de algoritmos para se chegar a um resultado sem que se tenha a preocupação com os processos reflexivos e autorregulatórios da aprendizagem.

Nesta última tarefa, dividiu-se a turma em grupos com quatro ou cinco estudantes, propôs-se o uso dos triângulos recortados que haviam utilizado para responder as tarefas de número quatro a sete e não se interferiu nas trocas ocorridas com as resoluções em grupos. Durante esse período, registrou-se algumas falas, tais como:

*Estudante 02: "...Vamos fazer outros triângulos e colocar as letras que estão na questão..."*

*Estudante 08: "... Basta usar as fórmulas..."*

*Estudante 19: "...Olha o triângulo grande, dá pra calcular o t usando Pitágoras..."*

*Estudante 27: "...Não dá pra calcular o z, não tem o x..."*

*Estudante 12: "...Vai ter de achar o x para depois achar os outros. Ele está no meio..."*

Ao final do tempo destinado a essas trocas, que durou vinte minutos, um estudante de cada grupo entregou a resolução feita de forma coletiva com todos os cálculos corretos. Como apontam Boyd *et al.* (2019), o *feedback* dos colegas pode ser útil em classes de habilidades mistas. Os alunos podem fazer melhorias em seu próprio trabalho, explicando seus pensamentos uns aos outros. Uma vez que o *feedback* interativo desse tipo se estabeleça em uma sala de aula, os alunos se sentirão mais à vontade para falar sobre os aspectos do trabalho que consideram difíceis. Suas discussões também podem fornecer *feedback* valioso para o professor sobre o quão bem eles entenderam alguma coisa.

Percebeu-se, no decorrer da atividade, que os *feedbacks*, em grupo ou individual, contribuíram para o envolvimento dos estudantes em cada etapa, indicando possíveis caminhos que possibilitassem aprendizagem, não tendo o erro como um insucesso, mas uma oportunidade de retomada. De acordo com Boyd *et al.* (2019), pesquisas demonstraram que os alunos podem se esforçar para interpretar e agir de acordo com o *feedback* dos professores e dos colegas, compartilhando suas compreensões das mensagens recebidas. Assim, sentem-se mais motivados para apresentar as suas soluções sobre como agir de acordo com o *feedback* ao revisar seu trabalho e a tomar decisões sobre o que fazer em seguida. Ao término da atividade

em grupo, os autores recomendam que um aluno de cada grupo resuma os pontos principais de suas produções e compartilhe com toda a turma. Algumas falas dos estudantes evidenciam essa perspectiva:

*Estudante 08: “... Gostei da ideia de estudar o erro que a gente cometeu com todo mundo...”*

*Estudante 13: “... A gente erra as mesmas coisas, será que aprendemos do mesmo jeito errado...”*

*Estudante 19: “... Ficou mais fácil depois que usamos os triângulos que cortamos...”*

*Estudante 27: “... Nem vi a aula passar e consegui ver o que fiz de errado...”*

*Estudante 02: “... Não ficou naquela coisa do senhor ir lá na frente e corrigir tudo, a gente copia e pronto. Só vemos como fazer certo, mas não aprendemos...”*

O protagonismo vivenciado pelos estudantes com a metodologia de sala de aula invertida modificou em muitos aspectos a dinâmica da aula. Os estudantes circularam entre os grupos, utilizaram o quadro para discutir as construções, produziram materiais cortando os triângulos, acessaram os vídeos indicados e outros que encontravam na internet, mostraram uns para os outros os erros cometidos, bem como as construções feitas em busca do acerto, constituindo dessa forma um verdadeiro fórum presencial de colaboração coletiva de conhecimentos. A instrução por pares, segundo Mattar (2017), incentiva o envolvimento dos estudantes nas atividades tanto em sala de aula quanto fora dela e possibilita a autonomia na escolha de estratégias de aprendizagem. Fontes (2021) destacou o surgimento de um *workshop* com a instrução por pares durante o desenvolvimento das atividades de modo coletivo em sala de aula. Mazur (2015) aponta para o surgimento de *feedbacks* pontuais e imediatos com essa metodologia e o trabalho com planejamento flexível em decorrência das situações que surgem.

### **5.3 Terceira semana**

Com o *feedback* positivo dos estudantes quanto à forma de se trabalhar, seguiu-se para a segunda atividade, denominada Atividade Avaliativa Diagnóstica 2 (Apêndice B), aplicada na terceira semana de pesquisa. O foco foi o estudo de áreas de figuras planas, conteúdo vivenciado em diversas etapas do ensino fundamental e que teve os seguintes objetivos:

- constatar se os estudantes reconheciam a diagonal de um quadrado;

- verificar se os estudantes conheciam a relação entre a medida do lado e a medida da diagonal do quadrado;
- verificar se os estudantes conheciam a relação entre a medida do lado e da área do quadrado;
- verificar se os estudantes conheciam a relação entre a medida da diagonal e da área do quadrado;
- constatar se os estudantes reconheciam, no texto, que o retângulo possuía lados de medidas distintas;
- constatar se os estudantes conheciam a relação entre perímetro e lados do retângulo;
- constatar se os estudantes conheciam a relação entre área e lados do retângulo;
- verificar se os conhecimentos que os estudantes tinham possibilitavam resolver as tarefas corretamente e como eles percebiam se o que apresentavam como resposta era correto ou não.

Composta de duas tarefas com uma abordagem direta dos conteúdos envolvidos, a atividade foi entregue aos estudantes que tiveram cinquenta minutos para resolvê-la sem consulta a qualquer tipo de pesquisa que pudesse lhes auxiliar em suas construções nesse primeiro momento. Por conta de uma palestra com todos os estudantes da primeira série no teatro da escola, encerrou-se o encontro da semana com o compromisso da retomada da atividade, já com os *feedbacks* estruturados.

#### 5.4 Quarta semana

Neste encontro, os estudantes voltaram para a biblioteca e receberam a atividade com o objetivo de retomar as suas produções. Os estudantes que desenvolveram algum procedimento em desacordo com o que a tarefa exigia, foram orientados a seguir o *feedback* estruturado em suas respectivas tarefas e, os estudantes que a concluíram corretamente foram convidados a procurar uma estratégia de resolução diferente da apresentada. Durante esse processo que ocupou os dois tempos de aula, procurou-se participar dos diálogos. A seguir, tem-se algumas atividades com os desdobramentos das participações.

*Primeira tarefa: Calcule a área, em  $cm^2$ , de um quadrado cuja diagonal mede 6 cm.*

O enunciado direto, sem a necessidade de conexões procedimentais, com a aplicação dos conceitos de área e diagonal de um quadrado, classifica a tarefa como

de *baixa exigência*. Analisando as quarenta e seis resoluções, encontrou-se vinte e sete com algum tipo de construção incorreta e dezenove desenvolvidas corretamente. Entre os tipos de resoluções com alguma incoerência, tem-se o cálculo incorreto da medida do lado do quadrado com aplicação do teorema de Pitágoras e o desenvolvimento da relação entre a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal com o processo algébrico incoerente. As figuras seguintes retratam essas construções.

Figura 11 - Resolução do estudante 01

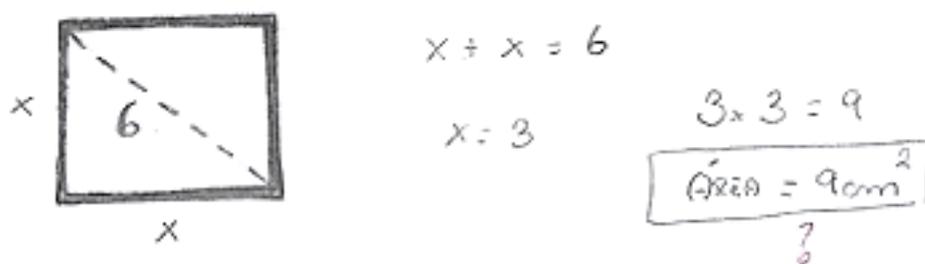


Figura 12 - Resolução do estudante 04.

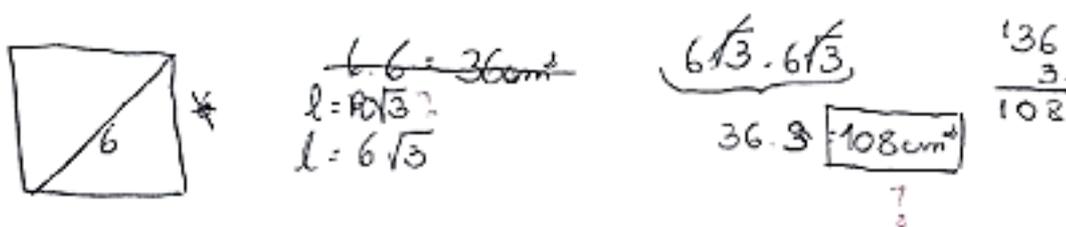
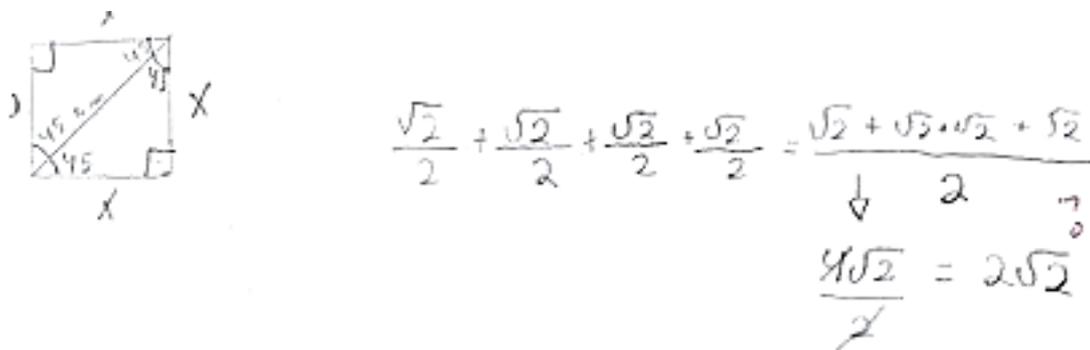


Figura 13 - Resolução do estudante 15



O estudante 01 consegue identificar no esboço do quadrado desenhado a medida da diagonal, denomina por  $x$ , a medida do lado desse quadrado, calcula  $x$  afirmando que a diagonal é igual à soma das medidas de dois desses lados e, em seguida, aplica a fórmula que possibilita o cálculo da área do quadrado. O estudante 11

também faz o esboço do quadrado, destaca a diagonal indicando a sua medida, escreve a relação entre a medida do lado ( $l$ ) de um triângulo equilátero e o raio da circunferência ( $r$ ) que o circunscribe,  $l = r\sqrt{3}$ , e com isso calcula a medida da área do quadrado. O estudante 15 destaca no seu esboço de quadrado a medida da diagonal como bissetriz, denomina por  $x$  a medida do lado do quadrado sem apresentar cálculo que justifique resposta  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  para a medida desse lado e deixa como cálculo final a soma das medidas encontradas, ou seja o perímetro.

As construções relatadas demonstram a falta de conhecimento das características de um quadrado, do conceito de diagonal, da relação entre medida do lado e medida da diagonal do quadrado, do conceito de área de um quadrado, da diferença entre perímetro e área e conhecimento do teorema de Pitágoras. Essas lacunas de aprendizagem coadunam com o trabalho segmentado da geometria conforme afirma Pavanello (2009).

Destaca-se que o primeiro conteúdo foi trabalhado na Atividade Diagnóstica 1 e o segundo, em conversas informais, não é considerado por eles como algo complexo, mas bastou não fornecer a medida do lado do quadrado que as dificuldades surgiram, como relata o estudante 05, logo a seguir.

Acreditava-se que esses estudantes tivessem superado as dificuldades em relação a esse primeiro conteúdo, todavia, a nova atividade trouxe elementos ainda não pensados na abordagem dos *feedbacks* trabalhados por conta das respostas dos estudantes quando se tratou esse conteúdo, tais como a necessidade de se destacar as possíveis aplicações desses conceitos em outras áreas de conhecimento, o ressaltar do uso de um conhecimento assimilado como ferramenta para o trabalho com outros conceitos e a aproximação do que é estudado com o cotidiano do estudante de modo que se constitua significado no que é vivenciado em sala de aula, ou seja, a importância do contexto na formulação das tarefas matemáticas, Ponte (2012).

Seguiu-se com o objetivo de compreender o que houve promovendo-se uma abordagem em que o estudante que se sentisse à vontade faria perguntas acerca das características do quadrado tendo, como norte, que constituir conhecimentos que possibilitassem resolver a questão que não havia concluído corretamente. Formou-se inicialmente um grupo com quinze estudantes, mas em poucos minutos, os demais ao

perceberem o movimento próximo ao quadro disponível para as resoluções em grupo, se juntaram e participaram desse momento. Surgiram as seguintes indagações.

*Estudante 01: "... O que é a diagonal do quadrado?..."*

*Estudante 05: "... Se tivesse o lado do quadrado era fácil..."*

*Estudante 15: "... A diagonal também é bissetriz?..."*

*Estudante 04: "... Tem como calcular a diagonal com Pitágoras?..."*

*Estudante 10: "... Dá para calcular a área do quadrado fazendo duas vezes a área do triângulo?..."*

*Estudante 22: "... No quadrado as diagonais são iguais?..."*

*Estudante 04: "... A diagonal tem uma fórmula que usa o lado?..."*

Esses questionamentos foram respondidos, quase que na sua totalidade, pelos estudantes que acertaram a tarefa e com o complemento do pesquisador, em alguns casos. Sugeriu-se o trabalho em grupos, formados por estudantes que sabiam e não sabiam responder. Tem-se destaque nessa atividade a fala de dois estudantes quanto ao ambiente físico onde se realizava essa dinâmica.

*Estudante 16: "... Estudar aqui com a liberdade de andar e participar de qualquer grupo é bem melhor do que na sala de aula..."*

*Estudante 22: "... Tem mais espaço e a atmosfera é outra..."*

Essa atividade ocorreu na biblioteca da escola que foi reservada pelo pesquisador mais uma vez a pedido dos estudantes, onde podiam usar os computadores, pesquisar em livros, circular entre os grupos, escrever em um quadro e pedir ajuda ao pesquisador. Surgiu então as situações a-didáticas (Brousseau, 1986), momentos em que o pesquisador foi deixado de lado e os estudantes empreenderam esforços independentes na busca de conhecimento.

Durante esse movimento de colaboração entre os estudantes, o estudante 31, que desenvolveu corretamente as duas tarefas e sempre apresentou um comportamento introvertido e com poucas participações durante as aulas, iniciou o seguinte diálogo:

*Estudante 31: "... Professor, achei as questões tranquilas, mas vejo que alguns estudantes não conseguem interpretar mesmo quando o texto é pequeno..."*

*Pesquisador: "... Verdade, meu querido..."*

*Estudante 31: "... Acho que o maior trabalho é interpretar direito. Quando a questão é grande acho mais difícil, mas essas são diretas. Como posso ajudar com essa dificuldade de interpretar, pois só sei fazer mostrando como se faz...?"*

*Pesquisador: "... Muito boa essa sua preocupação com os seus amigos. Acredito que um caminho é você propor a leitura do texto em partes, depois de identificar o que o*

*autor da tarefa quer que você resolva. Escute o que seu amigo sabe sobre o assunto que a tarefa traz. Procure fazer perguntas direcionadas para os termos que você acha que são fundamentais para a resolução da tarefa. Nesta segunda tarefa, por exemplo, pergunte o que é o perímetro, como se calcula a área e, por fim, proponha o desenho de um retângulo com a informação que o texto apresenta sobre as medidas dos lados. Caso o seu amigo não perceba a escrita das medidas dos lados como  $x$  e  $x + 8$ , como você fez, exemplifique com valores a escrita: uma medida excede a outra em oito unidades e veja como ele se comporta. Esse trabalho de ajudar o outro a entender, trará a você mais aprendizados e segurança no que está fazendo. Parabéns pela iniciativa...”*

*Estudante 31: “...Ok, vou tentar...”*

É possível inferir que a dinâmica da sala de aula invertida foi responsável por mobilizar o estudante para colaborar com os colegas, bem como a expor a sua inquietude e a iniciar o diálogo. O diálogo revela a mudança de postura do estudante, que passa a ser ativo no processo de aprendizagem, sente-se à vontade para interagir expondo as suas ideias e busca autonomia (Bergmann; Sams, 2017).

*Segunda tarefa: Calcule a área, em  $m^2$ , de um retângulo cujo perímetro mede 36 m, observando que o lado maior excede o lado menor em 8 m.*

Essa tarefa pode ser classificada como de *alta exigência* por conta de conexões e procedimentos que estão subjacentes a conceitos matemáticos. Vinte e quatro estudantes apresentaram construções com procedimentos algébricos incoerentes sendo que, dezesseis deles, apenas inferiram valores para as medidas dos lados, como o estudante 29 na figura que segue, de modo que o perímetro fosse igual a 36 m e um lado excedesse o comprimento do outro em 8 m. Os outros oito estudantes escreveram a relação entre as medidas dos lados do retângulo, mas procederam incorretamente em pelo menos uma das etapas de desenvolvimento dos seus cálculos. O estudante 17, por exemplo, escreveu a fórmula da área do retângulo, representou por  $x$  e  $y$  as medidas dos lados, dividiu o perímetro por quatro e supostamente testou possíveis valores que excediam um ao outro em 8 m, considerou os valores dos lados como 17 e 1, para o cálculo da área. Veja o que foi descrito.

Figura 14 - Resolução do estudante 17

2. Calcule a área, em  $m^2$ , de um retângulo cujo perímetro mede 36m, observando que o lado maior excede o menor em 8 m.

$$\frac{36}{4} = 9$$

$$x = 9 - 8 = 1$$

$$y = 9 + 8 = 17$$

$$a = b \cdot h$$

$$a = 17 \cdot 1$$

$$a = 17$$

Figura 15 - Resolução do estudante 29

2. Calcule a área, em  $m^2$ , de um retângulo cujo perímetro mede 36m, observando que o lado maior excede o menor em 8 m.

$$36$$

$$- 16$$

$$\hline 20$$

$$10 \cdot 8 = 80$$

Conversando individualmente com esses estudantes para fornecer *feedbacks* personalizados, chamou-nos a atenção as atitudes do estudante 17, que manifestou a preocupação de não querer deixar em branco e tentar acertar. Dois aspectos encontrados na construção do estudante contribuíram para esse *feedback*: a percepção do estudante quanto aos comprimentos das medidas dos lados diferentes e a escrita correta da fórmula da área do retângulo. Pediu-se a explicação do raciocínio do estudante e o diálogo se deu com as falas seguintes.

*Estudante 17: "... Como os lados são diferentes, peguei 36 e dividi por quatro. Daí somei e subtraí oito de nove. Achei que os lados nove e dezessete iam dar um retângulo muito grande aí escolhi as medidas nove e um. Não tinha certeza de que estava correto..."*

*Pesquisador: "... Quer perguntar algo?..."*

*Estudante 17: “... Vi que na minha atividade o senhor pediu para que retomasse a leitura da tarefa e te procurasse se fosse o caso. O meu problema está na interpretação, né?...”*

*Pesquisador: “... Você traz algumas escritas que têm coerência. Você entende que o retângulo, nesta questão, tem o comprimento e a largura com medidas distintas e se recorda da fórmula da área do retângulo, ou seja, precisamos de alguns ajustes nessa interpretação para deixá-lo com mais segurança. Acredito que uma leitura mais atenta e um pouco mais de prática pode ajudar. Entender os conceitos e dados que estão explicitamente ou implicitamente colocados no texto é de fundamental importância. Nesta questão temos, área, perímetro e o quanto o lado maior excede o menor. Você lembra como se calcula o perímetro de um retângulo?...”*

*Estudante 17: “... Sim, é só somar os lados. Então não era para dividir por quatro. Mas ia dar um sistema se colocasse o  $2x + 2y$ . Vai ficar complicado...”*

*Pesquisador: “... Trabalhando desse modo vamos mesmo ter um sistema que não é tão complicado de resolver, mas veja (apontou-se para o quadro na biblioteca e entregou um pincel ao estudante). Pense num lado de um retângulo medindo  $x$  metros e escreva que o outro lado excede esse em 8 metros usando o  $x$ ...”*

*Estudante 17: “... Vai ficar  $x + 8$  já que é maior. Ah, olha só, agora é só escrever o perímetro usando  $x$  e  $x+8$ . Como não vi isso? Mas lá na hora da prova o senhor não pode fazer essas perguntas...”*

*Pesquisador: “... Mas entender os conceitos, pesquisar e praticar aqui ou em casa vai trazer segurança e autonomia quando tiver que resolver só. Quando não entender ou lembrar de algum conceito, propriedade, enfim, algo que esteja na questão e que precise usar, pesquise o conteúdo que já foi visto, converse com os amigos tentando aprender com eles e é claro, pergunte a mim...”*

*Estudante 17: “... Preciso correr mais atrás. Estamos acostumados a esperar a correção dos professores e isso nem sempre...”*

*O estudante 29, que observou a conversa, trouxe a seguinte argumentação:*

*Estudante 29: “... Professor, ouvi mais ou menos o que vocês conversaram e vi o meu erro.”*

*Pesquisador: “... Pode explicar como você pensou?...”*

*Estudante 29: “... Eu sempre que vejo uma questão que posso testar valores não penso duas vezes, imagino alguns que acho que dão certo e coloco como resposta. Em questão de marcar uma alternativa consigo acertar algumas, mas quando tem que desenvolver as contas, me complico...”*

*Pesquisador: “... O que acha mais complicado neste tipo de tarefa?...”*

*Estudante 29: “... Não consigo enxergar esse raciocínio com letras para montar as equações. Acho mais fácil quando tem só que aplicar as fórmulas...”*

*Pesquisador: “... E quando o professor explica o enunciado, você entende?...”*

*Estudante 29: “... Sim, mas se mudar um pouco do que foi explicado em outras questões já me complica. Fiquei olhando o senhor explicar e entendi que não podia colocar qualquer valor, mas calcular ele. Vou ler com mais cuidado para tentar entender o que está sendo pedido e procurar saber o que tenho que fazer com os dados. É como o senhor falou, preciso pensar mais e pesquisar quando não der conta de fazer...”*

*Pesquisador: “...Excelente o seu entendimento. Procure-me para que possamos interpretar juntos. Inicialmente faça algumas perguntas para que você possa*

*pesquisar, responder e concluir o que deve ser feito na tarefa. Fique tranquilo, vai dar certo e obrigado pela participação...*

As dificuldades nas construções dos estudantes que incorreram em estratégias que não foram suficientes para alcançar o objetivo das tarefas, tanto na primeira quanto na segunda, justifica a preocupação de estudiosos quanto ao processo de interpretação do contexto das tarefas matemáticas. O contexto matemático compreende o conjunto de conceitos, propriedades e informações apresentadas nas tarefas que podem variar com uma linguagem aportada na “educação matemática realista”, trabalhada inicialmente por Hans Freudenthal (1973), cuja premissa indica que inicialmente a apresentação de tarefas deve conter contextos oriundos do cotidiano dos estudantes de modo que a aprendizagem tenha significado para eles. Outro aspecto inerente ao contexto matemático formulado a partir da realidade dos estudantes refere-se às estratégias de resoluções informais, baseadas no contexto concreto da tarefa (Gravemeijer, 2005).

Ponte e Quaresma (2012, p. 200) ressaltam o contexto extra matemático, que “[...] se podem referir a atividade da vida corrente, mas também a objetos imaginários [...]”. Esse contexto é a próxima etapa na formulação de tarefas matemáticas que são permeadas por informações associadas à realidade dos estudantes e a construções com certo grau de abstração, o que exige mais atenção às relações entre os conhecimentos matemáticos e caminha-se para uma matemática de contexto mais formal, possibilitando a aplicação dos conhecimentos em variadas tarefas mais complexas.

Finalizando essa atividade, o estudante demonstrou empenho ao tentar resolver a tarefa após o *feedback* e a concluiu de modo correto. Ao pesquisador, o final dessa quarta semana de pesquisa, o diálogo e as vivências revelam as dificuldades dos estudantes em interpretar o enunciado, a necessidade de apresentar tarefas com contextos concretos e próximos das realidades dos estudantes, estruturar *feedbacks* que oportunizem a reflexão dos estudantes e tarefas que oportunizem as relações entre os conceitos já trabalhados e novos contextos que desses necessitem.

## **5.5 Quinta semana**

A Atividade Avaliativa Diagnóstica 3 (Apêndice C), iniciada na quinta semana de pesquisa, tratou novamente do estudo de áreas de superfícies planas, com foco

na área do losango e do hexágono regular inscrito em uma circunferência. As tarefas envolvendo esses conteúdos tinham um contexto que não explicitava diretamente os dados a serem utilizados pelos estudantes e, portanto, classificam-se como de *exigência alta* uma vez que os estudantes tinham de mobilizar conhecimentos contidos nas características das figuras planas e que exige um certo nível de compreensão e conjecturas para resolvê-las.

A atividade foi entregue aos 44 estudantes presentes. A aula foi dividida em etapas e, inicialmente, os estudantes foram convidados a resolver a atividade sem qualquer tipo de consulta. Invertendo-se novamente a sala de aula, objetivou-se com essa atividade os seguintes pontos:

- constatar se o estudante reconhece um losango e um hexágono regular;
- constatar se o estudante reconhece as propriedades das diagonais de um losango;
- verificar se o estudante percebe a relação entre as medidas das diagonais de um losango e a área da sua superfície;
- constatar se o estudante reconhece hexágono regular inscrito em uma circunferência;
- verificar se o estudante percebe a relação entre a medida do lado do hexágono regular e a medida do raio da circunferência circunscrita a ele;
- verificar se o estudante reconhece a relação entre a medida do lado do hexágono regular e a medida da área da sua superfície;
- verificar se o estudante consegue resolver as tarefas apresentando mais de uma solução.

A atividade foi realizada num primeiro momento sem a consulta de nenhuma fonte de pesquisa, tendo o tempo de vinte minutos. A primeira tarefa foi feita por trinta e um estudantes e desses, quinze apresentaram solução correta, dezesseis incorreram em algum procedimento com inconsistência e treze deixaram em branco. A segunda tarefa foi resolvida de modo incorreto por vinte estudantes e os demais, vinte e quatro, deixaram-na em branco, ou seja, ninguém a acertou. Em seguida, corrigiu-se a Atividade Avaliativa Diagnóstica 3 e devolveu-se aos estudantes. Durante o tempo de correção, que durou trinta minutos, os estudantes foram para a sala que possui computadores conectados à internet e pesquisaram, de modo individual, acerca dos conteúdos de que tratavam a atividade. Após a correção, os estudantes receberam a atividade sem *feedbacks*, se propuseram a refazê-la de modo que não

apagasse a resolução corrigida, caso houvesse, e esse momento consumiu mais vinte minutos.

O tempo restante, já na biblioteca da escola, por conta da necessidade de separar os grupos para conversas pontuais, foi destinado a um *feedback* coletivo com os estudantes que deixaram pelo menos uma das tarefas em branco na primeira etapa, para entender o que houve e estruturar o *feedback*. Esse grupo ficou reunido em uma sala da biblioteca com o pesquisador.

Aos demais estudantes que não deixou nenhuma das tarefas em branco, tanto os que acertaram quanto os que desenvolveram com algum procedimento incorreto na sua resolução, foi pedido que encontrassem uma forma diferente de responder a atividade em relação à resolução que construíram após a pesquisa na sala com os computadores e esse procedimento foi realizado em mesas individuais na biblioteca.

A seguir, tem-se o registro de algumas falas que surgiram no grupo de estudantes que não apresentou soluções para a atividade.

*Pesquisador: "... Alguém gostaria de dizer o motivo de ter deixado a primeira tarefa ou a segunda em branco?..."*

*Estudante 11: "...Não lembrava da fórmula da área e nem das características do losango. Até fiz o desenho e coloquei uma fórmula que depois de pesquisar vi que estava errado..."*

*Estudante 23: "... Não lembro muito das fórmulas e losango não é uma figura que os professores trabalharam muito comigo..."*

*Estudante 24: "... Acho geometria muito difícil. Têm muitas fórmulas e cada desenho tem um detalhe diferente..."*

*Estudante 26: "... É basicamente isso professor, não lembramos das fórmulas..."*

*Pesquisador: "... E agora que fizeram a pesquisa, vocês acreditam que conseguem resolver?..."*

*Estudante 27: "...Sim, a fórmula da área do losango é a metade do produto das diagonais, daí é só dividir dezoito por dois..."*

*Pesquisador: "... Tranquilo. O que acharam de informação acerca do hexágono regular inscrito a uma circunferência?..."*

*Estudante 42: "... O raio da circunferência e o lado do hexágono são iguais. Daí é só aplicar a fórmula da área do hexágono..."*

*Pesquisador: "... Alguém pesquisou algo a mais sobre o losango e hexágono regular ou apenas se preocupou em ver a fórmula que possibilitava o cálculo da área?..."*

*Estudante 11: "... Só vi a fórmula que dava para resolver a questão e fiz..."*

*Pesquisador: "... Tranquilo. Entendo que o conhecimento da fórmula possibilita a resolução das tarefas, mas é pouco diante da quantidade informações que estão contidas nessas figuras. O conhecimento das características de cada figura possibilita a resolução de modo variado e as tarefas de maior complexidade exigem mais que o memorizar de fórmulas. E, em regra, sabendo dessas características vocês*

*conseguem compreender as fórmulas e ter melhor desempenho nessas resoluções. Então, vamos retornar para mais pesquisas...”*

Ao longo do diálogo os demais concordaram com a fala do estudante 11, em seguida retornou-se com todos os estudantes que estavam na biblioteca para a sala de aula e foram informados de que na semana seguinte teriam o *feedback* para contribuir com o aprendizado de cada um e as atividades foram recolhidas novamente.

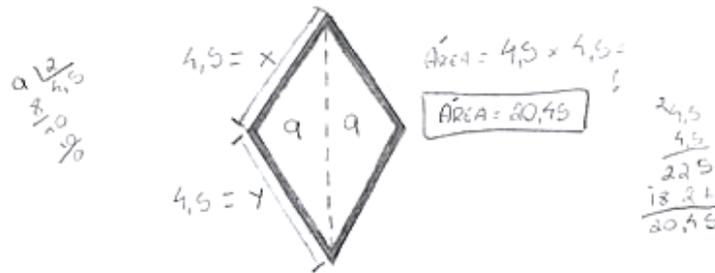
O diálogo revela que muitos estudantes associam a resolução da tarefa de geometria ao memorizar das fórmulas, ou seja, não há uma construção de conhecimento que apresente outro viés de resolução. Pensar o ensino da geometria de modo mecanizado como ressalta Fiorentini (1995) e sem contextualização com a realidade dos estudantes, pode justificar o quadro que Casado (2011), Fernandes, Grossi e Martins (2022) e Pavanello (2009), chamam de abandono do ensino da geometria. Não basta, também, identificada essa situação de não aprendizagem, apenas oferecer alguns recursos como materiais concretos ou inserir recursos tecnológicos que possibilitem a resolução do que se pede ao estudante. É preciso avaliar o que o estudante tem de conhecimento acerca do que se quer trabalhar (avaliação diagnóstica), analisar o processo de resolução que esse estudante empreende ao tentar resolver as tarefas que recebe (avaliação formativa) e a partir desses pontos, constituir o *feedback* personalizado, quando for o caso, ou em grupos quando as construções que se apresentam de modo inconsistentes têm pontos comuns. A seguir, tem-se o desenrolar da próxima semana.

## **5.6 Sexta semana**

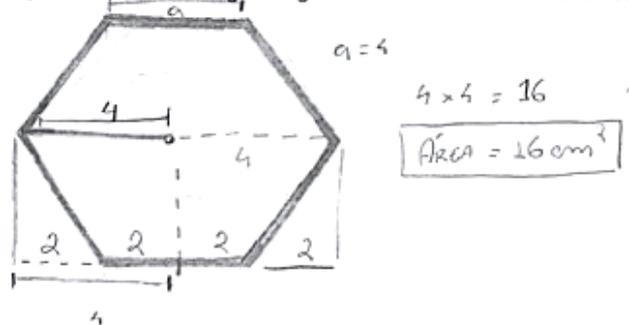
A semana seguinte, novamente na biblioteca, foi marcada por conversas individuais para alguns, e em grupos com os estudantes que apresentavam estratégias comuns de resolução. O diálogo começou pelo estudante 01 que tentou resolver as duas tarefas.

Figura 16 - Resolução do estudante 01

1. Calcule a área de um losango, em  $\text{cm}^2$ , sabendo que o valor numérico do produto das suas diagonais é igual a 18.



2. Calcule a área, em  $\text{cm}^2$ , de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4 cm.



Pesquisador: "... Você pode explicar o seu raciocínio da tarefa 1, antes da pesquisa na sala de computadores?..."

Estudante 01: "... Eu sei que o losango tem lados iguais. Na minha leitura eu peguei o 18 e dividi por dois e coloquei nove em cada triângulo quando separei o losango. Como deu 9 e os lados são iguais, coloquei 4,5 para cada lado e fiz a área como o produto deles..."

Pesquisador: "... Tranquilo. Veja você reconhece que o losango possui os quatro lados com a mesma medida. Quando leu que era um losango a única informação que lembrou foi quanto às medidas dos lados?..."

Estudante 01: "... Sim, mas vi na pesquisa feita depois que além da fórmula que possibilitava fazer direto, era só dividir por dois e já dava o resultado, pesquisei as características que o senhor recomendou da outra vez. Quando o senhor deixa pesquisar as informações sobre a figura, por exemplo, fica mais fácil. Porque na internet tem muitas oportunidades e daí a gente escolhe aquela que acha mais fácil..."

Pesquisador: "... Dentre as escolhas de pesquisa qual o modo que você mais procura?..."

Estudante 01: "... Prefiro a que tenho que ler, só o assistir não me ajuda. Vi uma que o professor resolveu comentando por escrito, o passo a passo..."

Pesquisador: "... Pode me dizer o que viu..."

Estudante 01: "... O professor lá explicou três modos de calcular a área do losango. Ele disse que o modo que vamos usar depende dos dados que temos. O primeiro exemplo foi exatamente o que o senhor colocou na questão. Se tiver as diagonais basta multiplicar uma pela outra e dividir o resultado por dois. Depois ele mostrou como calcular dividindo o losango em dois triângulos e em quatro triângulos. Tem uma que

*não lembro de ter visto na vida. Calcula a área do triângulo com o seno do ângulo e depois multiplica por dois que dá a área do losango. Lembrei do senhor dizendo que tínhamos de entender de onde veio cada fórmula e saber das características da figura. Não tem nada de certo no que fiz na primeira vez...”*

*Pesquisador: “... Entendi. Vejo uma postura muito boa de sua parte. Procurar aprofundar sobre o conteúdo que a tarefa traz resulta em muitos aprendizados. Como soube que a sua resposta depois da pesquisa estava correta?...”*

*Estudante 01: “... Pois é, lembrei que o senhor disse que em muitas situações dá para fazer as questões de mais de uma forma, apliquei a fórmula direta e deu 9 e depois dividi o losango em quatro triângulos retângulos e pronto, deu 9 novamente...”*

*Pesquisador: “... Ótimo, veja que se nos colocamos em prol de pesquisar aquilo que temos dúvida e estabelecer um modo de fixar o que estudamos, esse aprendizado aparece. Não é só praticar, tem de refletir o que fazer com os dados recebidos e sobre o que faz, entender o que a tarefa te pede e buscar soluções que te tragam segurança. A ideia de pensar em triângulos para compor o losango foi excelente...”*

*Estudante 01: “...Foi isso que vi depois da pesquisa quando fui resolver a questão do hexágono. Era só calcular a área de um triângulo e multiplicar por seis, já que todos são iguais. Como a circunferência está fora, a medida do raio e do lado são iguais...”*

*Pesquisador: “... Aproveitando essa fala, antes da pesquisa, o que você lembrava do hexágono regular?...”*

*Estudante 01: “... Que os lados são iguais e que a circunferência que está fora tem o raio igual ao lado do hexágono...”*

*Pesquisador: “... Você lembrava por que a medida do raio da circunferência e do lado do hexágono regular são iguais?...”*

*Estudante 01: “... Não, apenas lembrava que eram...”*

*Pesquisador: “... Você pesquisou o que o hexágono regular traz de informação?...”*

*Estudante 01: “... Sim, são muitas coisas...”*

*Pesquisador: “... E como você acha que vai conseguir lembrar dessas informações quando tiver de resolver uma tarefa desse conteúdo?...”*

*Estudante 01: “... Acho que preciso praticar um pouco mais, fazer o desenho e destacar cada elemento que tem nele, ver de onde vem as fórmulas que preciso usar e procurar até resolver de mais de um modo a mesma tarefa. Essa ideia de variar o jeito de resolver ajuda a entender melhor...”*

*Pesquisador: “... Excelente. Quando entender, procure ajudar alguém. Tentando explicar algo que sabemos acabamos nos aprimorando. Parabéns e você está no caminho certo...”*

Tem-se no diálogo que o estudante domina alguns conceitos, mesmo que não consiga explicar, por exemplo, porque o lado do hexágono regular e o raio da circunferência circunscrita a ele são congruentes. Assim como o estudante 01, vários outros têm pouco ou nenhum conhecimento acerca dessas figuras planas e, uns poucos estudantes conhecem algumas características do hexágono regular e do losango (Santos, 2016). Pesquisadores como Fiorentini (1995), Dante (1996), D’Ambrósio (1989, 2010) justificam esse quadro de lacunas de aprendizado à forma

como a matemática e não somente a geometria é trabalhada. Os autores apresentam em suas pesquisas, por exemplo, que o modo tecnicista e mecanizado de explorar os conteúdos matemáticos, reduz a compreensão dos conceitos matemáticos à simples aplicação de regras e técnicas que não exigem dos estudantes o processo de compreensão e reflexão acerca do que se está trabalhando.

Diante desse quadro de desconhecimento, tendo percebido que todos já trabalharam com esse conteúdo em alguma etapa de suas vidas estudantis e verificado que nenhum estudante sabia, por exemplo, explicar como as fórmulas que poderiam usar surgiram, o *feedback* foi estruturado de modo que os estudantes alcançassem cada um dos objetivos da atividade, que foram apresentados ao resolverem a atividade pela primeira vez e sem consulta.

Os estudantes tinham de calcular a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência conhecendo o seu raio e apresentar mais de um caminho de resolução. Diversificando as oportunidades, foi disponibilizado folha de papel A4 e tesoura para o recorte no formato da figura, o quadro com régua e compasso, além de livros e computadores que estão disponíveis na biblioteca.

Introduziu-se, nesta atividade, a ênfase da busca por processos de resolução, ou seja, uma vez resolvida a tarefa o estudante tinha de propor outro caminho que confirmasse o resultado encontrado inicialmente, com vista ao desenvolvimento da fluência matemática (NCTM, 2017). Caso o resultado encontrado não confirmasse a resposta da primeira resolução, os estudantes eram convidados a explicar ao pesquisador o que fizeram para que pudesse mediar o desenvolvimento do que construíram como resposta ou, poderiam retornar para a pesquisa e tentar em grupo encontrar o que não estava em conformidade com o que seria a resposta. Cada estudante ou grupo formado, apresentou ao pesquisador o processo de resolução com as suas construções.

A seguir, tem-se o processo de resolução do grupo composto pelos estudantes, 02, 34 e 35. Escolheram começar com a resolução do estudante 02, visto que não lembrar das fórmulas era comum a eles e esse estudante foi único dos três que escreveu algo nesta tarefa. Tem-se, a seguir, as etapas da resolução e o diálogo entre os estudantes.

Figura 17 - Resolução do estudante 02

2. Calcule a área, em  $\text{cm}^2$ , de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4 cm.



Sei o conteúdo  
Mas esquecia fórmulas  
que tem que usar?

Estudante 02: "...Vamos fazer o desenho na folha e anotar as fórmulas que dão para resolver a questão..."

Estudante 35: "... Pega o compasso..."

Estudante 34: "... Mas como vai garantir que o hexágono aí dentro é regular?..."

Estudante 35: "... O raio é igual o lado do hexágono. Lembra que a gente viu na sala dos computadores?..."

Estudante 02: "... Verdade..."

Estudante 02: "... São seis triângulos equiláteros..."

Estudante 35: "... Aqui ó, dá para calcular a altura do triângulo usando o seno de sessenta..."

Estudante 35: "... Faz a área do triângulo vezes seis e pronto..."

Estudante 34: "... Dá para achar a altura do triângulo usando Pitágoras também..."

Estudante 34: "... Divide no meio, fica quatro na hipotenusa e dois no cateto. Aí acha a altura..."

Estudante 02: "...Vai dar a mesma coisa..."

Estudante 34: "...Vamos mostrar para o professor..."

Figura 18 - Primeira resolução dos estudantes, 02, 34 e 35

2. Calcule a área, em  $\text{cm}^2$ , de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4 cm.



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{4}$$

$$2H = 4\sqrt{3}$$

$$H = 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} \cdot 4 : 2 \text{ no área triângulo}$$

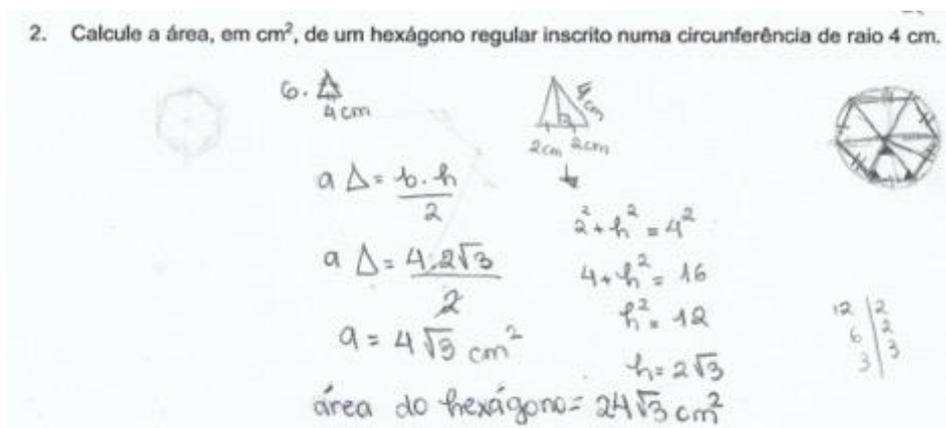
$$8\sqrt{3} : 2 \rightarrow 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} \cdot 6 \rightarrow 24\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{A área é igual à } 24\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 19 - Segunda resolução dos estudantes, 02, 34 e 35



O diálogo, agora inserindo o pesquisador, em busca da validação do que fizeram prosseguiu:

*Estudante 34: "... Professor, olha aqui o que fizemos..."*

*Estudante 35: "... Foi só lembrar as fórmulas que demos conta..."*

*Pesquisador: "... Que maravilha! Qual a fórmula que vocês lembraram?..."*

*Estudante 02: "... Da área do triângulo..."*

*Pesquisador: "... Vejo muito mais detalhes aqui. Lembraram da congruência entre o raio da circunferência e o lado do hexágono regular? [...] de que esse hexágono é composto de seis triângulos equiláteros? [...] da relação trigonométrica e do cálculo da altura com Pitágoras? [...] E tomando caminhos diferentes chegaram ao mesmo resultado? [...] O que esse fato, caminhos diferentes produziram o mesmo resultado, significa para vocês?..."*

*Estudante 02: "... Que está certo..."*

*Estudante 34: "... Que dá pra sair da prova sabendo de fato o que acertou..."*

*Estudante 35: "... Que aprendemos..."*

*Estudante 02: "... Professor, entendi a sua pesquisa. O senhor quer que a gente saiba se o que fazemos durante as resoluções está certo né?..."*

*Pesquisador: "... Ótimo, meu querido. Eu quero que você seja autônomo durante a sua aprendizagem a ponto de saber se de fato aprendeu o que estudou e o que deve fazer para aprender, caso ainda não tenha alcançado o objetivo que se pretende com o conteúdo que está estudando. Outro ponto muito importante, é você refletir sobre as estratégias que usa para aprender e diversificá-las quando possível..."*

*Estudante 34: "... Estudar assim aqui vai nos deixar mais rápidos e confiantes nas provas..."*

*Estudante 02: "... Valeu, professor..."*

Percebe-se nesse diálogo o desenvolvimento da aprendizagem segundo a perspectiva apresentada pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Os estudantes trouxeram construções que demonstraram entendimento do que pesquisaram – *compreensão dos conceitos*; perceberam mais de uma estratégia de resolução – *fluência em procedimentos*; usaram mais de um conceito para a mesma

tarefa – competências em estratégias e; confirmaram, em suas falas, conhecimento do que estavam produzindo – adequação de raciocínios. Vale ressaltar que, nesta etapa, foi observado o processo de resolução apoiado na pesquisa anteriormente feita e ainda com a possibilidade de consulta, embora o grupo em questão não tenha procurado nenhuma fonte neste dia. Outra abordagem relevante é a percepção do objetivo do projeto de pesquisa, mesmo que de modo sintético, por parte do grupo.

O diálogo mostra alguns efeitos positivos do trabalho com a avaliação formativa e, corroborando com Hattie (1999) e Kluger e DeNisi (1996), pode-se afirmar que estabelecendo-se o *feedback* com a intencionalidade que a tarefa exige e preocupando-se em estruturá-lo de acordo com o nível de compreensão que o estudante demonstra em cada etapa das suas resoluções, aspectos motivacionais são vivenciados e o desenvolvimento da aprendizagem se encaminha de modo mais leve.

Perpassando pelos grupos, ora apenas observando e ora respondendo algum questionamento em prol de validar as resoluções, encerrou-se a atividade três com o combinado de que a partir da próxima atividade todos procurariam mais de um modo de resolver a mesma tarefa.

## 5.7 Sétima Semana

Iniciando-se a atividade, foi dada a opção aos estudantes de inverterem a sala de aula e construírem as suas resoluções aportadas por materiais de apoio, tais como: computadores conectados à internet, papel, régua, compasso, tesoura e cola para confeccionar os sólidos caso quisessem; ou revisar o conteúdo com o pesquisador de modo prévio para depois se dedicar à resolução da atividade. O resultado dessa proposta foi que todos os estudantes partiram para a sala de aula invertida.

Com a entrega da atividade na sala dos computadores e com os materiais concretos disponibilizados em duas mesas, os estudantes iniciaram, de modo individual, as suas construções. Os objetivos dessa atividade foram:

- constatar se o estudante reconhece os vértices, as arestas e faces dos sólidos planejados;
- constatar se o estudante reconhece os lados congruentes do triângulo isósceles;
- verificar se o estudante reconhece uma pirâmide reta de base quadrada;
- verificar se o estudante reconhece um octaedro;

- verificar se o estudante consegue calcular a área de um triângulo isósceles conhecendo as medidas dos seus lados;
- verificar se o estudante consegue calcular a área total da superfície de uma pirâmide;
- verificar se o estudante consegue calcular o volume de uma pirâmide e de um octaedro;
- verificar se o estudante consegue resolver as tarefas apresentando mais de uma solução.

A Atividade Avaliativa Diagnóstica 4 (Apêndice D) continha duas tarefas e foi resolvida por trinta e nove estudantes visto que, sete estudantes não compareceram à aula. Após vinte minutos do início, recolheu-se a atividade para conferir quantos haviam concluído corretamente a primeira tarefa. Essa conferência se deu apenas pelo resultado apresentado e durou cerca de dez minutos. Após a entrega da atividade, não foi informado a eles quem havia acertado e pediu-se que continuassem com a resolução da segunda tarefa. Os trinta e nove estudantes que resolveram a primeira tarefa disseram que a planificação não foi um fator que trouxe dificuldade, embora somente dez deles tivessem acertado todos os cálculos. Durante a retomada da atividade para resolver a segunda tarefa, o pesquisador circulou em sala buscando entender as estratégias de resolução e estabelecendo diálogos em prol de contribuir com o processo reflexivo de aprendizagem dos estudantes.

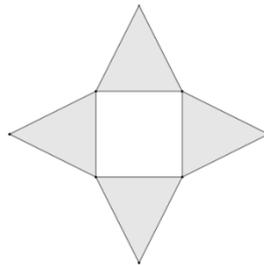
Dado o volume de *feedbacks*, as atividades foram estendidas até a semana seguinte (oitava semana). A primeira tarefa pedia o cálculo da área da superfície total e do volume de uma pirâmide de base quadrada cujo desenho estava planificado. A segunda tarefa, também com um sólido planificado, trouxe dificuldade de entendimento por conta da complexidade do desenho, um octaedro. Essa tarefa não foi concluída corretamente por nenhum dos estudantes.

Essa dificuldade de entender a visualização de figuras geométricas é encontrada nas pesquisas de Arcavi (2003), Costa (2002), Settimy (2014), Zimmermann e Cunningham (1991), dentre outros. Esses estudos relatam, por exemplo, que não se ensina a desenhar as figuras em três dimensões nas escolas e que, portanto, os estudantes têm mais dificuldades em compreender o que circunda essa planificação. Outra causa desse quadro de insucesso é o processo de linearização e compartimentalização do saber científico geométrico que, após ajustes por conta dos currículos, levam a linearizar e compartimentar o conhecimento

geométrico tornando-o em apenas um processo algébrico com a memorização e aplicação de regras. Ainda segundo os autores, o trabalho com o vocabulário geométrico (vértices, faces e arestas) associado à manipulação de materiais concretos (caixas em forma de cubos) e o uso de sólidos geométricos em acrílico podem contribuir para o entendimento das figuras planificadas.

As tarefas, por conta do volume de informações que as circundava e dos objetivos relatados, foram analisadas em partes e são classificadas com de *exigência alta* devido à complexidade da forma de apresentação das figuras, das conexões entre os conceitos envolvidos e dos procedimentos algébricos com maior nível de dificuldade. A seguir, tem-se o que foi pedido aos estudantes e os diálogos ocorridos durante o processo de resolução e após a primeira correção.

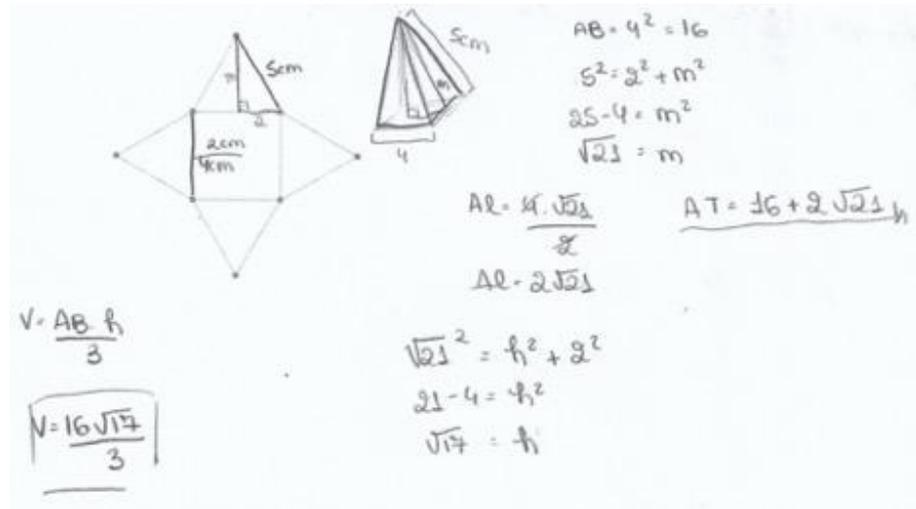
*Primeira tarefa: Calcule a área total e o volume da pirâmide planificada que segue, considerando que o quadrilátero é regular, de aresta 4 cm e, os triângulos são isósceles de aresta 5 cm.*



A não compreensão do desenho impossibilitava a resolução da tarefa, mas todos os estudantes compreenderam que se tratava de uma pirâmide cuja base era um quadrado. Apesar de somente dez estudantes concluírem corretamente essa tarefa, todos acertaram o cálculo da medida da área da superfície da base. Prossegue-se com alguns processos de resolução e os devidos diálogos.

Percorrendo a sala em meio a estudantes em pé junto as mesas, outros concentrados no uso dos computadores e alguns recortando as folhas deixadas na mesa na tentativa de reproduzir o desenho da tarefa, iniciou-se um diálogo com o estudante 11 que parecia ter terminado a primeira tarefa.

Figura 20 - Resolução do estudante 11



Estudante 11: "... Olha aqui professor!..."

Pesquisador: "... Olha só, que legal..."

Estudante 11: "... Tá certo?..."

Pesquisador: "... Vamos conferir juntos? [...] Vou fazer algumas perguntas para direcionar a nossa revisão do processo de resolução que você construiu. Explica quem são esses números e letras que você colocou na figura planificada..."

Estudante 11: "... O 5 é a medida do lado do triângulo, 4 é medida do lado da base da pirâmide e a base do triângulo da lateral..."

Pesquisador: "... E esse número 2 e a letra  $m$ ?..."

Estudante 11: "... O 2 é o apótema do quadrado e ele forma o triângulo retângulo para achar a altura do triângulo que é esse  $m$  que fica na lateral depois que a gente fecha a pirâmide..."

Pesquisador: "... Tranquilo. Depois que fechamos a pirâmide, como você disse e colocou o desenho aqui, sabe o nome desse  $m$  pensando na pirâmide e não no triângulo que está na lateral...?"

Estudante 11: "... Não lembro, mas sei que dá para achar com Pitágoras, como eu fiz..."

Pesquisador: "... Ok, ótimo. Depois revisaremos esses elementos, mas você já desenvolveu uma parte muito importante para responder a tarefa. Por que você calculou esse  $m$ ?..."

Estudante 11: "... Era a altura de cada triângulo da lateral. Aí fiz base vezes altura dividido por dois, que é a fórmula da área do triângulo..."

Pesquisador: "... Continue, explique como chegou ao resultado da área da superfície total da pirâmide..."

Estudante 11: "... Depois foi só somar a área do quadrado da base com a área lateral. Eita!..."

Pesquisador: "... O que foi?..."

Estudante 11: "... Errei. Esqueci de multiplicar a área do triângulo por quatro. Somei a área de um só..."

*Pesquisador: “... Muito bom, você percebeu apenas recapitulando o que havia feito! [...] E o volume, pode explicar também?...”*

*Estudante 11: “... Sim, é multiplicar a área da base pela altura e dividir por três. Tinha que calcular a altura. Usei o triângulo retângulo com o  $m$  que já tinha calculado e com o apótema do quadrado para calcular a altura da pirâmide. Achei o número estranho, mas o senhor disse que isso pode ocorrer...”*

*Pesquisador: “... Corretíssimo. Você usou alguma fonte de pesquisa para revisar esse conteúdo ou lembrava de anos anteriores?...”*

*Estudante 11: “... A área do quadrado e do triângulo foi tranquilo. Só esqueci de multiplicar a área do triângulo por quatro, mas sabia que tinha que somar essas áreas para calcular a área total. O volume é que não lembrava. Olhei no livro da escola e lembrei da fórmula. Vi um desenho que tinha detalhado como calculava a altura da pirâmide que vai lá do vértice até a base. Podia calcular usando o  $m$  e o apótema do quadrado ou a diagonal da base e a aresta da lateral...”*

*Pesquisador: “... Simplesmente excelente a sua postura de procurar aprender e ainda se preocupar em tentar explicar. Sugiro observar no livro da escola ou em outra fonte, os nomes dos elementos que constituem a pirâmide. Precisa saber em uma pirâmide, por exemplo, quem é o apótema da base, o apótema da pirâmide, a sua altura, a diferença entre face lateral e área lateral, enfim tudo que a circunda...”*

*Estudante 11: “... Vou olhar no livro e se tiver dúvidas procuro o senhor...”*

*Pesquisador: “... Mais uma vez, parabéns e vamos para a segunda tarefa...”*

O estudante demonstra empenho ao tentar resolver a tarefa, como retrata o diálogo. Algumas falas como, “[...] O apótema do quadrado[...]”, precisam ser ajustadas para “[...] O apótema da base da pirâmide[...]”, para que o estudante constitua o conhecimento com o rigor que merece, mas são abordagens simples de se entender com a pesquisa e a mediação do professor. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 267) aponta para a necessidade de desenvolver junto aos estudantes a competência de “[...] compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática[...]”, como forma de correlacionar os conhecimentos matemáticos e, dessa forma, constituir e usar esses conhecimentos. O trabalho em prol da compreensão dessas relações torna esses conceitos e procedimentos, objetos de conhecimento na resolução de tarefas (Santos; Lima, 2010).

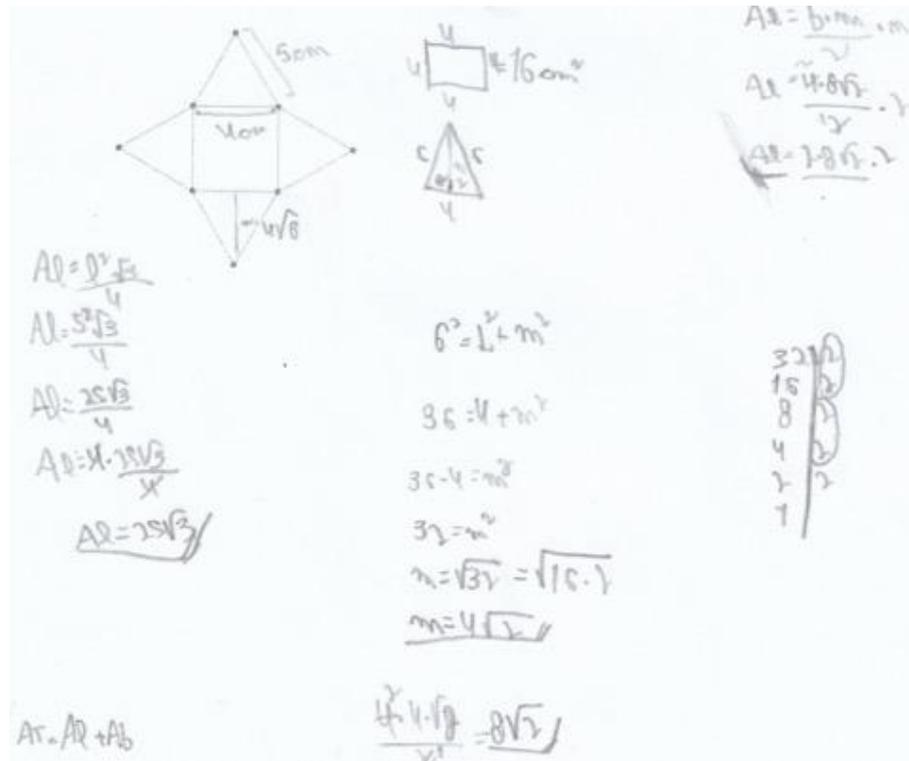
A explicação dos procedimentos tomados pelo estudante caracteriza que, apesar de não conhecer tudo que era necessário para resolver a tarefa, já havia vivenciado esse conteúdo quando afirma que, “[...] O volume é que não lembrava[...]”. Percebe-se nessa afirmação que há a necessidade de trabalhar junto ao estudante esse conceito e usar diversas estratégias de aprendizagem pode possibilitar esse aprendizado, mas como desenvolvido nessa pesquisa, o primeiro passo é procurar saber o que o estudante tem de conhecimento sobre esse conceito.

O uso da sala de aula invertida com o apoio de todo e qualquer aparato disponível também não garante a aprendizagem significativa. O processo de aprendizagem matemática, assim como em outras áreas, é complexo e necessita de um acompanhamento sistemático das etapas de aprendizagem: a apropriação da linguagem matemática por parte do estudante, a compreensão das estratégias que o estudante usa ao tentar resolver uma tarefa, os tipos de erros cometidos e os motivos que o levaram a tal erro, como ele percebe esse erro, quais os impactos motivacionais que o sucesso e o insucesso ao resolver uma tarefa provocam nesse estudante, entre outras particularidades (Cury, 2004, 2012, 2013) . Diante desse complexo de situações que podem ser vivenciadas no ato de aprender matemática, destaca-se o trabalho com a avaliação formativa apoiada no *feedback* estruturado como forma de possibilitar ao estudante a participação efetiva no processo de aprendizagem como tem sido feito nesta pesquisa.

O estudante 11 conseguiu resolver parcialmente a primeira tarefa, mas só após a mediação do professor é que percebe uma incoerência. O modo de pesquisa deve ser orientado para a aprendizagem e não apenas para resolver as tarefas. Acredita-se que a aprendizagem pode se dá pelo uso contínuo e flexível do *feedback* estruturado, com intencionalidade e reflexão sobre o processo desenvolvido com acompanhamento sistemático do professor. Hadji (2001) descreve a função da avaliação formativa voltada para esse aprendizado como forma de um processo. Cardinet (1986) destaca a orientação ordenada que a avaliação formativa promove junto ao estudante no ato de aprender; e Fernandes (2006) aponta para a possibilidade de a avaliação formativa promover uma autoavaliação do processo de aprendizagem desse estudante. A confirmação dessa aprendizagem vai ser ratificada quando o estudante conseguir usar os conhecimentos trabalhados para resolver tarefas mais complexas ou com o mesmo nível de dificuldade em contextos diferentes do que foi vivenciado.

Procurando por mais diálogo, uma vez que os estudantes estavam empenhados na resolução da segunda tarefa que teve um nível de complexidade maior em relação à primeira, o estudante 45 também pediu para observar o que havia feito. Segue a sua resolução e o diálogo.

Figura 21- Resolução do estudante 45



Estudante 45: "... Acho que fiz algumas coisas certas aqui..."

Pesquisador: "... Pelo que entendi você fez os cálculos para determinar a área total da superfície da pirâmide..."

Estudante 45: "... Isso mesmo..."

Pesquisador: "... Tranquilo. Você pesquisou algo sobre pirâmides antes de tentar resolver?..."

Estudante 45: "... Não, porque as figuras já são conhecidas e tentei buscar na memória como o senhor tinha comentado uma vez. O volume vou dar uma olhada porque não lembro como se faz..."

Pesquisador: "... Ok, pode me contar por onde iniciou e como desenvolveu o seu raciocínio..."

Estudante 45: "... Vi que a base é um quadrado com o lado valendo 4. Daí a área deu 16. Essa foi tranquila. O lado do triângulo vale 5. Aí calculei a área com essa fórmula que é só elevar o lado ao quadrado, multiplicar por raiz de 3 e dividir por 4. Isso dá a área de um triângulo e aí multiplica por 4 que é o número de triângulos. Soma a área do quadrado com essa dos triângulos que vai dar a total..."

Pesquisador: "... Ok. Gostaria que retomasse a leitura da tarefa para responder algumas perguntas. Pode ser?..."

Estudante 45: "... Sim..."

Pesquisador: "... Você identificou corretamente que a base é um quadrado e em seguida calculou a sua área. Excelente..."

Pesquisador: "... Você colocou corretamente na figura os valores indicados no texto. Agora dá uma olhada nos valores que você colocou no triângulo que desenhou logo abaixo do desenho do quadrado..."

Estudante 45: "... Vixi, por que coloquei esse 6 aqui? [...] Está tudo errado..."

*Pesquisador: “... Espera aí, têm boas construções aqui. Quem seria esse m que colocou no triângulo?...”*

*Estudante 45: “...A altura dele que ajuda a calcular a área...”*

*Pesquisador: “... Isso mesmo. Você lembra de boa parte do conteúdo que precisamos. [...] Fiquei curioso por dois cálculos que você fez. Aqui no lado esquerdo da folha você fez o cálculo da área lateral usando essa fórmula que descreveu e, do lado direito, também calculou a área lateral usando o valor de m. Veja, as duas trazem a área lateral e apresentam resultados distintos. [...] O que isso te indica?...”*

*Estudante 45: “... Que alguma coisa está errada...”*

*Pesquisador: “... Sabe explicar essa fórmula do lado direito para a área lateral?...”*

*Estudante 45: “... É a área de um triângulo multiplicado pela quantidade de lados da base da pirâmide...”*

*Pesquisador: “... Então vamos fazer o seguinte, coloque o 5 no lugar do 6 para calcular o valor de m e, em seguida, vamos calcular a área lateral usando essa fórmula...”*

*Estudante 45: “... Beleza. O m deu raiz quadrada de 2. [...] A área deu 8 vezes a raiz quadrada de 21. Continua diferente do outro valor...”*

*Pesquisador: “... Essa fórmula que você usou no cálculo da área do triângulo pode ser usada em qualquer tipo de triângulo?...”*

*Estudante 45: “... Sim, é a mais básica. Base vezes altura sobre dois...”*

*Pesquisador: “... E a outra, que tem o quadrado do lado vezes a raiz quadrada de três e tudo dividido por quatro?...”*

*Estudante 45: “... Nossa, fiz muito errado. É do triângulo equilátero. [...]E no texto ainda está escrito que o triângulo é isósceles. [...] Muita falta de atenção...”*

*Pesquisador: “... Veja, podemos retirar alguns bons aprendizados dessa situação. A leitura com o assinalar das palavras que achar mais importante, quer seja sublinhando, usando marca texto, fazendo um balão, dentre outras formas, ajuda-nos a ficar mais atento ao que o autor nos fornece de informação...”*

*Estudante 45: “... Até fiz em algumas palavras, mas deixei o tipo de triângulo de fora...”*

*Pesquisador: “... Procure praticar isso. Vai ser tranquilo. [...] Agora que vai fazer a pesquisa para resolver o restante procure destacar o que achar que é importante para a resolução da tarefa, mas mais que isso, tem de entender o que significa cada elemento das fórmulas, saber como elas surgiram, destacar as características que cada figura geométrica carrega, buscar compreender os conceitos que serão usados em cada tarefa e refletir sobre o que fez é fundamental para a sua aprendizagem...”*

*Pesquisador: “... Deixa exemplificar. Vou falar de algo que já sabe, pelo que vi, para que note a importância de se destacar algumas palavras e fazer essa reflexão. Se o triângulo é isósceles, a altura relativa à base também pode ser chamada de mediana, que divide o lado em duas partes iguais, por exemplo e forma um triângulo retângulo, onde você aplicou o teorema de Pitágoras para calcular essa altura. Entendeu, há muitas informações que não estão explícitas no texto, mas que são fundamentais para a resolução da tarefa...”*

*Estudante 45: “... Vou pesquisar e tentar resolver o que ficou sem fazer...”*

*Pesquisador: “... Parabéns, a sua resolução está bem encaminhada...”*

O estudante voltou-se para o livro, usou o computador e desenhou em uma folha A4 a figura da primeira tarefa para destacar cada elemento da pirâmide. Em

seguida, resolveu corretamente o cálculo da área da superfície total e o volume da pirâmide.

A resolução do estudante mostra uma leitura com certa falta de atenção e há dois cálculos para a área da superfície lateral da pirâmide com resultados distintos e ambos com incoerências. Pelo que parece, não há um processo de revisão e reflexão do que desenvolveu e o mero uso de fórmulas que parece bastar para a emissão de uma resposta. Talvez seja esse um dos maiores desafios quando se pretende avaliar para promover a aprendizagem: exercitar junto ao estudante o processo reflexivo sobre o conhecimento mobilizado e as estratégias usadas para resolver as suas tarefas. Souza e Campos (2016, p. 86) destacam que há a necessidade de praticar “[...] a tomada de consciência dos procedimentos utilizados no raciocínio[...]”, pois “[...] não surge espontaneamente para o aluno[...]”, e acrescentam ainda que os estudantes com essa prática diária “[...]vão adquirindo suas próprias maneiras de justificar e representar suas ideias e pensamentos[...]”. Não é novidade no campo da educação matemática a discussão sobre resoluções de problemas e metodologias que podem dar suporte aos estudantes em suas atividades. Polya (1945), por exemplo, apresentou uma metodologia composta por 4 etapas, sendo a última, a da revisão. Nesta pesquisa, esse trabalho foi apoiado em *feedbacks* estruturados e com intencionalidades, muitas vezes individualizados como os diálogos apresentados ou em grupos com desenvolvimentos comuns. O trabalho possibilitado nessa pesquisa com as trocas entre os estudantes, discutindo as suas construções é outro fator que, segundo Souza e Campos (2016), também favorece esse processo reflexivo.

Vale ressaltar que, quando se procura desenvolver a aprendizagem por parte dos estudantes, esse exercício deve aos poucos deixar de ter a participação do professor durante a reflexão e, somente ao final ou quando surgir um entrave que impeça o estudante de progredir, o professor deve mediar o processo de construção de conhecimento.

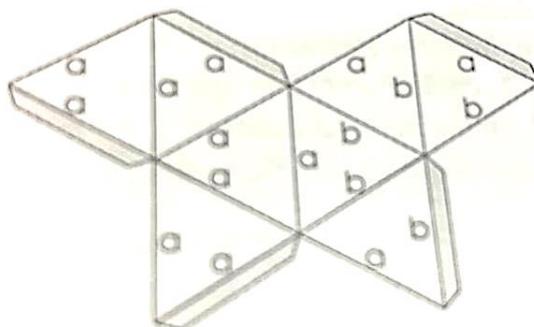
As atividades foram recolhidas ao final da aula de horário duplo e mais uma vez estendeu-se para a próxima semana o *feedback* das construções de cada estudante.

Partiu-se para a análise da segunda tarefa que, por conta do desenho, segundo os estudantes, foi muito difícil. Concorda-se com os estudantes, pois classifica-se essa tarefa como uma de *exigência alta (procedimentos com conexões)* com o

potencial de instigar os estudantes a desenvolver formas complexas de raciocínio (Smith; Stein, 2013).

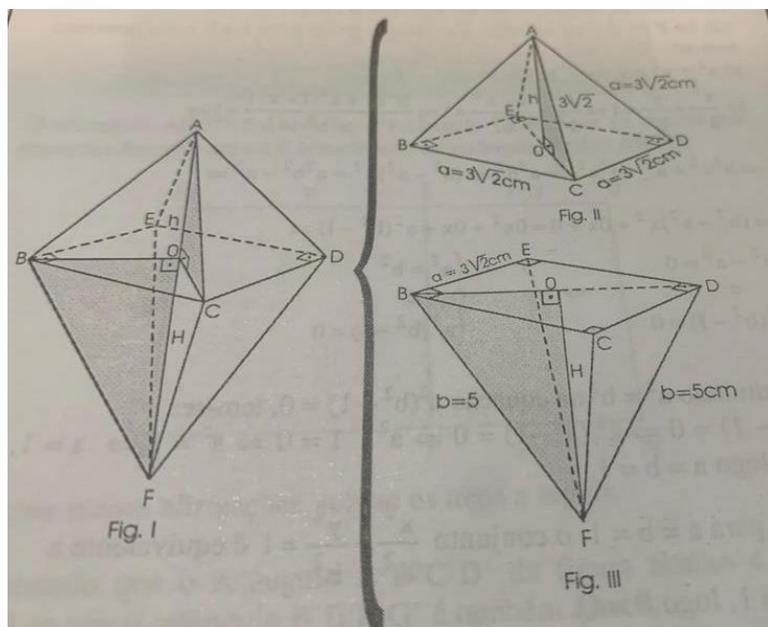
Veja o que foi pedido.

*Segunda tarefa: Calcule o volume, em  $\text{cm}^3$ , do sólido obtido ao se recortar a figura abaixo, dobrar segundo as arestas e colar as bordas hachuradas. Considere  $a = 3\sqrt{2}$  cm e  $b = 5$  cm.*



A segunda tarefa foi deixada em branco por treze estudantes cuja justificativa foi não ter entendido o que a figura representava nessa planificação após colar as bordas hachuradas, como sugere o texto. Seis estudantes não fizeram nenhum tipo de desenho e calcularam o volume inferindo se tratar de uma pirâmide com base triangular. Os vinte estudantes restantes tentaram, mas sem sucesso, confeccionar o sólido recortando os papéis deixados sobre a mesa ou reproduzindo com desenhos, o que seria esse sólido. Veja como deveria ficar o desenho.

Figura 22 - Resolução apresentada pelo pesquisador



## 5.8 Oitava semana

A oitava semana se inicia na mesma sala dos computadores e foi sugerido aos estudantes que recortassem uma pirâmide de base quadrada para ver se encontravam alguma semelhança com o desenho da tarefa. Foram estimulados a trabalhar em grupos com até quatro estudantes para esta etapa.

Durante esse período, o estudante 20 foi chamado para um diálogo dada a proximidade da sua resolução com a resposta esperada e do desenho confeccionado. Seguiu-se com o diálogo durante o tempo destinado aos demais estudantes para trabalharem na construção da pirâmide de base quadrada.

Figura 23 - Resolução do estudante 20

Handwritten mathematical work showing the calculation of the volume of a square-based pyramid. The work includes diagrams of two pyramids (I and II) and several equations:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$A_b = (3\sqrt{2})^2$$

$$9 \cdot 2 = 18 \text{ cm}^2$$

$$V_T = \frac{18 \cdot 3\sqrt{3}}{3} + \frac{18 \cdot 4}{2}$$

$$V_T = 18\sqrt{3} + 24 \text{ cm}^3$$

Intermediate steps shown:

$$I' \quad 25 = 4 + h^2$$

$$h = 4$$

$$II \quad \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot h}{2}$$

$$3 \cdot \sqrt{3} = h$$

$$3\sqrt{3}$$

Pesquisador: "... Fiquei muito feliz com a sua resolução. Você acertou parcialmente o que foi pedido e apresentou uma construção muito interessante..."

Estudante 20: "... Sério, o que acertei? [... Pensei que estava tudo errado. Perdi muito tempo analisando a figura e quando percebi como era para fazer, já faltava pouco tempo..."

Pesquisador: "... Pelo contrário, está quase tudo certo. [...] Uma situação me deixou curioso. [...] Pode explicar por que desenhou duas pirâmides?..."

*Estudante 20: “... Contei a quantidade de arestas e vi que não poderia ser só uma pirâmide, mas não sabia desenhar as duas coladas e como não pesquisei em nenhum lugar deixei assim mesmo. [...] Fica errado se desenhar separado...”*

*Pesquisador: “... Caso o autor da questão peça o desenho, sim. Como neste caso não foi exigido, não há problema. Vamos à sua resolução. Entendi o cálculo da área da base, mas pode explicar como surgiu esse 4 que está igualado a  $h$ ?...”*

*Estudante 20: “... Na figura I, que indiquei aqui, apliquei Pitágoras com a metade da diagonal da base e a aresta lateral. Achei então a altura dessa pirâmide. Entendeu?...”*

*Pesquisador: “... Sim, excelente. Tranquilo. E essa etapa que está indicada por II?...”*

*Estudante 20: “... Calculei a área do triângulo equilátero que tem a fórmula específica e igualei à fórmula básica para achar a altura. Espera, mas aí eu achei foi a altura da face e não da pirâmide...”*

*Pesquisador: “... Muito bom...”*

*Estudante 20: “... Vai dar um triângulo retângulo e isósceles. A altura é 3. O volume que deu 24 está certo, né?...”*

*Pesquisador: “... Sim...”*

*Estudante 20: “... O outro vai ficar 18 e tudo dá 42...”*

*Pesquisador: “... Excelente, parabéns. Qual o caminho que você sugere aos seus amigos para entender esse desenho?...”*

*Estudante 20: “... É só contar a quantidade de arestas e pensar que elas vão se unir...”*

*Pesquisador: “... Obrigado pela atenção e se você achar que é possível, ajude algum grupo depois que eu terminar alguns questionamentos que vou fazer. Lembre-se de colocá-los para pensar...”*

O estudante apresenta domínio do conteúdo e desenvoltura algébrica ao conseguir até suprimir alguns cálculos, como o uso da metade do valor da diagonal ao calcular a altura da pirâmide conforme o diálogo descreve. Uma tomada de decisão incorreta foi, ao perceber que todas as faces laterais da pirâmide II, indicada no desenho, são triângulos equiláteros, o estudante calculou a altura dessa face e a tomou como a altura da pirâmide.

O *feedback* mais uma vez foi constituído de forma que o estudante entenda o que fez, revise e reflita de modo a perceber o que está em desacordo com o que deve ser feito. Em seguida, pede-se ao estudante que colabore com os demais como forma de dar significado ao seu aprendizado, vivenciar dúvidas que podem levar a outras formas de resolver a mesma tarefa e assim construir mais conhecimentos matemáticos. Nessa perspectiva de aprendizagem colaborativa, Cândido (2001) destaca que os estudantes devem ser estimulados a comunicar os seus processos de solução com os colegas e com os professores para que possa organizar, reavaliar e validar as suas construções. Cabe ao professor contribuir com o desenvolvimento das habilidades de comunicação dos estudantes como forma de promover o pensamento matemático e, para tanto, deve-se encorajar as interações entre os estudantes e

cuidar da negociação de significados dos conceitos abordados pelos estudantes para que se tenha o conhecimento construído de modo correto (Matinho; Ponte, 2005).

Durante a conversa com o estudante 20, notou-se o circular de estudantes entre os grupos, a exposição das construções e uma contribuição mútua em prol de resolver a tarefa. Vale ressaltar que o comportamento dos estudantes em nada se parece com o que se estava habituado nesta sala de aula com a dinâmica apoiada no modelo expositivo. Os estudantes, ao longo das semanas de pesquisa, vêm desenvolvendo de modo crescente esse poder de comunicação, participando cada vez mais do processo de aprendizagem, expondo as suas construções nos grupos aos quais pertencem e em outros grupos, procurando o pesquisador para discutir as suas construções e se posicionando no centro das atividades propostas.

Voltando-se aos grupos reunidos, agora com a possibilidade de pesquisa e discussões sobre a montagem da figura, pediu-se que, caso quisessem expor para toda a turma, bastava ir à frente da sala, falar os nomes dos participantes do grupo e relatar como procederam para construir o desenho que a tarefa exigia. Iniciou-se com o seguinte questionamento:

*Pesquisador: "... Algum grupo quer compartilhar e explicar o desenho que fez?..."*

*Estudante 08: "... Somos os estudantes 08, 12, 15 e 17. Tinha cinco regiões hachuradas medindo o valor de  $a$ , como está escrito no texto. Como elas é que deveriam ser dobradas concluímos que seria a base. O grupo percebeu que eram duas pirâmides por conta do número de faces, uma com a base quadrada e triângulos equiláteros, colada na outra com triângulos isósceles. Daí calculamos o volume delas em separado e somamos mais adiante..."*

*Estudante 21: "... O nosso grupo fez mais ou menos a mesma coisa, mas o que me chamou mais a atenção foi construir junto as pirâmides com os amigos usando o material que o senhor deixou na mesa e as pesquisas que fizemos na internet. A ideia de poder desenhar no computador durante a resolução ajudou muito. Outra coisa foi a pesquisa da solução, ou seja, não esperamos o senhor resolver, nós resolvemos..."*

*Pesquisador: "... E dessa forma vocês acreditam que aprendem mais, conseguem fixar o conteúdo e aplicá-lo em outras tarefas..."*

*Estudante 16: "... Sim e, eu e o meu grupo, estamos aplicando isso em Física. Nós perguntamos para a professora qual seria o próximo conteúdo e estamos estudando antecipadamente. Quando a professora dá a aula conseguimos entender melhor e até participamos mais..."*

*Pesquisador: "... Estão se reunindo na escola, fazendo uma videochamada, que estratégia estão usando para estudar?..."*

*Estudante 16: "... Achamos melhor ficar na escola a tarde pois nos concentramos mais e tem o apoio do plantonista de Física que ajuda quando travamos..."*

*Pesquisador: "... Parabéns pela iniciativa. Alguém mais quer compartilhar as suas estratégias de resolução? Muito obrigado e parabéns!!!..."*

Após essa apresentação, nenhum grupo se manifestou para mostrar a sua produção. Como apontam Boyd *et al.* (2019), os alunos precisam aprender como fornecer um bom suporte entre colegas e como se comportar em uma atividade de *feedback* de pares, especialmente quando ocorrem em apresentações para toda a turma. O receio em apresentar procedimentos incorretos faz com que os estudantes se silenciem nas aulas. O trabalho em grupo e com a mediação dos professores favorece a construção de atitudes positivas, levando-os a apresentar seus argumentos com mais naturalidade. Trata-se de uma construção que pode demorar um tempo.

O relato resumido do estudante 08, apresentando a discussão ocorrida no grupo com as conclusões acerca da figura que, de modo unânime, foi o fator que dificultou a sua resolução. Informalmente, recolheu-se junto aos grupos as impressões acerca do que poderia favorecer a resolução. Evidenciaram que a compreensão da figura era essencial e que a colaboração dos colegas e a pesquisa foram fundamentais para encontrar alguma fórmula que poderia tornar a tarefa mais fácil de ser resolvida.

Nota-se no relato do estudante 21 que a oportunidade de pesquisa, a disponibilidade de recursos e a possibilidade de trocas entre os membros dos grupos e entre os grupos, oportunizou uma dinâmica em sala de aula que motivou os estudantes na busca pela resolução da tarefa. Autores como Hoffmann (2008) e Almeida (2007) destacam a avaliação formativa como uma das variáveis responsáveis pela mudança de postura dos estudantes em sala aula, proporcionando a análise colaborativa do processo de resolução dos estudantes, oportunizando o retomar das suas produções e, para isso, deve ocorrer que foi relatado pelo estudante 21. O estudante apresenta o resultado encontrado como o produto de um esforço coletivo que pode ser mediado pelo professor, mas que não é algo pronto e acabado com todo o desenvolvimento produzido pelo professor. Outra mudança de postura é apontada na fala do estudante 16, quanto aos estudos na disciplina de Física. Encerrou-se a semana com essa atividade.

## 5.9 Nona Semana

A nona semana inicia-se com a Atividade Avaliativa Diagnóstica 5 (Apêndice E), que teve a participação de quarenta e dois estudantes. Tem-se mais uma atividade de *exigência alta com o fazer matemática*, em decorrência da proposta da primeira

tarefa, que exige um pensamento mais complexo e menos algorítmico com a exploração de conceitos. A proposta inicial foi a resolução individual das duas tarefas com a possibilidade de pesquisa na biblioteca da escola que, além dos livros, também têm mesas redondas, cabines individuais de estudos com computadores conectados à internet, salas reservadas para estudos em grupos e assentos mais confortáveis sem o apoio de mesas. Os estudantes afirmam gostar desse ambiente por conta dessa variedade de escolhas.

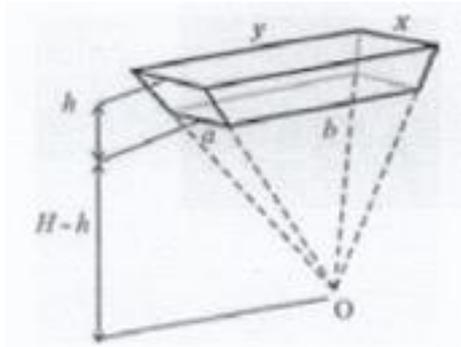
A atividade foi dividida em dois momentos: o primeiro, com duração de cinquenta minutos para a resolução das tarefas; e o segundo, com quarenta minutos para conversas sobre as percepções dos estudantes acerca da atividade.

A proposta de resolução individual teve como objetivo a leitura para a coleta de dados, por parte do pesquisador, das estratégias utilizadas pelos estudantes quanto ao tipo de recurso escolhido e dos processos desenvolvidos na resolução das tarefas. Mais uma vez nenhum estudante procurou o pesquisador para obter explicações do conteúdo contido nas tarefas.

A atividade apresentou uma figura composta de uma pirâmide cujo vértice estava voltado para baixo, com linhas pontilhadas e, em linhas contínuas destacou-se um tronco de pirâmide. Os objetivos complementares aos que foram relatados são os seguintes:

- constatar se o estudante reconhece os vértices, as arestas e faces dos sólidos;
- constatar se o estudante reconhece uma pirâmide de base retangular;
- verificar se o estudante reconhece um tronco de pirâmide reta de base retangular;
- verificar se o estudante reconhece sólidos semelhantes;
- verificar se o estudante consegue estabelecer a relação entre a medida da altura do tronco e do seu volume;
- verificar se o estudante consegue calcular o volume de uma pirâmide e de um tronco de pirâmide;
- verificar se o estudante consegue resolver as tarefas apresentando mais de uma solução.

O texto trazia uma pequena contextualização do desenho para explicar a confecção de um tronco de pirâmide a partir de uma pirâmide.



A figura acima ilustra um modelo hipotético do casco de um navio. O sólido destacado foi obtido a partir de uma pirâmide de altura  $H$ , cuja base é um retângulo de lados  $x$  e  $y$ , e de um corte paralelo à base, o qual determinou outro retângulo de lados  $a$  e  $b$ . O resultado é um objeto com bases paralelas, separadas por uma distância  $h$ . A pirâmide menor, de altura  $H - h$ , foi desprezada e o volume do sólido, denominado tronco de pirâmide, pode ser calculado a partir dos volumes dessas pirâmides. Com base nessas informações, julgue o item 1 e faça o que se pede no item 2, que é do tipo B.

1. Fixando-se as medidas de  $x, y$  e  $H$  e dobrando-se o valor de  $h$ , o volume do tronco de pirâmide também dobrará.
2. Considere, no modelo apresentado  $x = 250 \text{ m}, y = 800 \text{ m}, a = 200 \text{ m}, b = 640 \text{ m}, H = 750 \text{ m}$  e  $h = 150 \text{ m}$ . Nesse caso, sabendo que o volume de uma pirâmide é dado por um terço do produto da área da base pela altura, calcule, em  $10^5 \text{ m}^3$ , o volume do casco do navio.

A primeira tarefa foi deixada em branco por sete estudantes; nove emitiram o julgamento entre certo e errado sem apresentar justificativa, embora o texto não tenha pedido para justificar, solicitou-se, então, que o fizessem; e vinte e seis estudantes julgaram e apresentaram algum argumento.

Os estudantes que deixaram em branco a primeira tarefa foram convidados para uma sala de estudos em grupos para um *feedback* coletivo e, enquanto isso, aos demais estudantes foi solicitado que colocassem no caderno tudo que classificassem como importante acerca do estudo de tronco de pirâmide e ainda deveriam registrar as fontes de pesquisa para consulta, caso necessário fosse. A escolha dos estudantes que deixaram em branco justifica-se por não ser hábil o tempo de análise das resoluções e os *feedbacks* correspondentes a cada um dos desenvolvimentos dos estudantes que conseguiram responder ainda na aula.

Voltando-se aos estudantes na sala de reuniões, o diálogo se desenhou da seguinte forma:

*Pesquisador: "... Tudo tranquilo? Alguém quer falar algo a respeito da primeira tarefa? O que quiser..."*

*Estudante 40: "... Fiquei em dúvida pois lembrei que como era volume tinha de elevar ao cubo, mas não sabia se elevava a altura. Preferi não chutar..."*

*Estudante 30: "... Professor, tem uma ideia de proporção na questão, mas acho que é só para medida de duas dimensões. Não sabia por onde ir e deixei em branco..."*

*Estudante 22: "... Esse tipo de exercício sempre achei muito difícil. Não tem número para colocar. Não consigo raciocinar assim..."*

*Estudante 36: "... Coloquei a fórmula do volume da pirâmide e vi que a altura não é elevada a nada, apenas multiplicada pela área da base, mas se dobra a medida da altura diminui o tamanho do a e do b. Aí não sabia se ia duplicar a medida do volume..."*

*Estudante 10: "... Olhei a fórmula do volume do tronco e achei muito estranha. No texto está escrito que dá para calcular o volume do tronco usando o volume das pirâmides, basta subtrair o volume da maior pela menor, mas como dobra a altura do tronco eu não vi o que acontecia com a área do retângulo de a e b..."*

*Pesquisador: "... Excelente, alguém mais quer falar?..."*

*Estudante 18: "... Fiz mais ou menos a mesma coisa que eles. Não sabia como ter certeza se duplicava o volume apesar de entender que a altura dobrando, os valores de a e b diminuam..."*

*Pesquisador: "... Tranquilo. Vejam que vocês têm algumas construções, embora alguns não tenham colocado no papel, como disseram. Vou fazer um resumo para que possamos trabalhar um pouco. [...] Há uma ideia de proporcionalidade, como vocês apontaram, mesmo com falas diferentes. Ao dobrar uma medida tem-se mudanças em outras partes da figura, como a diminuição dos valores de a e b, ou seja, vocês percebem algumas modificações. Precisa comprovar o quanto o dobrar da altura reflete, por exemplo, nos valores de a e b. Alguém lembra qual é o conteúdo que trabalha essa ideia de proporcionalidade?..."*

*Estudante 30: "... A semelhança de triângulo..."*

*Estudante 36: "... Então basta pegar os triângulos das laterais junto com a altura e fazer a semelhança para ver quanto altera no valor de a e de b?..."*

*Pesquisador: "... Isso, ótimo. O que vão pesquisar então?..."*

*Estudante 22: "... Vou procurar esse tipo de questão com a aplicação de semelhança de triângulo..."*

*Pesquisador: "... Use o quadro, experimentem trabalhar juntos. Qualquer dúvida, basta procurar-me..."*

Somente um, dos sete estudantes que estavam na sala, não se pronunciou, mas demonstrou, com expressões não verbais, concordância com os comentários dos demais. Acompanhando-se a dinâmica desse grupo que se uniu em volta de um quadro após essa rápida conversa, registrou-se o seguinte diálogo:

*Estudante 30: "... Vamos resolver juntos. A gente pega o computador, faz o desenho no Geogebra e procura no livro o estudo de semelhança de triângulos..."*

*Estudante 36: "...Não precisa, o professor disse que tem proporcionalidade. É só a gente desenhar o triângulo de uma lateral com a altura da pirâmide que dá para ver o que acontece..."*

*Estudante 30: "... Você consegue fazer esse desenho?..."*

*Estudante 36: "... Sim..."*

*Estudante 22: "... Olha aqui, se dobrar o tamanho dessa altura, diminui o valor de a e de b. Esse retângulo vai ficar com uma área menor..."*

*Estudante 18: "... Foi o que eu disse, mas não sei quanto diminui. Tem de ver o que acontece com as medidas desse a e desse b..."*

*Estudante 40: "... E se a gente colocar uns valores de para o x, y, a, b, h e H? Calculamos o volume e depois dobramos o valor de h para ver o que acontece..."*

*Estudante 22: "... Mas mesmo assim tem de calcular as novas medidas que o a e o b vão ter..."*

*Estudante 40: "... Sim, mas é só fazer a proporção..."*

A proposta de atribuir valores às medidas indicadas na figura foi aceita e o grupo veio validar o que construiu.

*Estudante 22: "... Pronto professor. O item é errado..."*

*Estudante 40: "... Não dobra o valor porque o retângulo que tinha a e b ficou muito menor apesar de dobrar a altura. Fizemos as contas e percebemos que não dá..."*

*Pesquisador: "... Parabéns pela iniciativa. Percebo que a troca entre vocês produziu alguns questionamentos sobre o que estavam fazendo e isso acabou levando para um caminho de pesquisa associada a experimentação do que era colocado no grupo. Como vocês percebem a estratégia de trabalhar o conteúdo a partir de uma atividade avaliativa que, a priori, não tinham conseguido desenvolver, mas com o apoio de alguns recursos como, o uso de livros, a pesquisa em mais de uma fonte e o diálogo entre vocês, proporciona a resolução de modo correto?..."*

*Estudante 18: "... Eu tenho gostado desse jeito que o senhor tem levado as aulas porque não ficamos o tempo todo sentado só te ouvindo. A gente procura o que errou sempre tentando entender o conceito que está por trás do que é pedido, como o senhor indicou para fazer..."*

*Estudante 36: "... Isso. E acho que dá para fixar mais o conteúdo, mas tem de sair do conforto de esperar o senhor resolver e buscar mais informação..."*

*Estudante 22: "... Fui fazer isso em Física e fiquei uma hora para dar conta de resolver uma questão, mas sou capaz de explicar a questão para qualquer amigo. Esse trabalho de pesquisar faz aprender mais..."*

*Estudante 30: "... É muito diferente a gente tentar entender do que só ver alguém explicar. Dá muito mais trabalho, mas acho que é melhor para aprender o conteúdo. E quando tudo trava, o senhor propõe um caminho que não dá a resposta direto, mas possibilita resolver. Outra coisa é a oportunidade de conseguir a pontuação fazendo a atividade mais de uma vez procurando entender o que errou e buscando acertar. Isso também motiva estudar dessa forma ..."*

*Pesquisador: "... Muito obrigado pelo empenho de vocês e concordo plenamente. A pesquisa, o trabalho em grupo com um propósito bem definido, a disposição para ouvir*

*o outro, a boa vontade de experimentar uma estratégia de resolução e tantos outros pontos positivos que vivenciei aqui, só podem produzir um resultado, o aprendizado...”*

As respostas dos estudantes demonstram o envolvimento com a atividade, as dificuldades encontradas, as ideias repletas de dúvidas, as propostas de experiências em prol de resolver a tarefa e a preocupação em validar o que foi construído. Acrescenta-se, a satisfação com a estratégia didática aplicada em relação ao ensino centrado no professor, mesmo que reconhecidamente o trabalho do estudante seja muito mais intenso.

A fala do estudante 30, quando menciona a questão da pontuação, revela um dos efeitos da avaliação, quando utilizada para classificar, pois pode promover a exclusão e a desistência da vida escolar (Fernandes, 2009). A avaliação, entre outras funções sociais, deve oportunizar a democratização do ensino (Luckesi, 2008).

O estudante está preocupado com a nota que vai obter, portanto estuda para fazer a avaliação, já que afinal é o que importa para ser promovido à próxima série. O trabalho com a avaliação formativa, analisando o processo de resolução do estudante, comunicando ao estudante e ao professor a real situação da aprendizagem dos objetivos traçados anteriormente, a possibilidade de flexibilizar o planejamento da aula, o engajamento do estudante ao realizar a avaliação com a clareza de que o erro vai ser uma oportunidade de aprendizagem de modo que “tome consciências de suas dificuldades” (Hadji, 2001, p. 26) e o acompanhamento apoiado em *feedbacks* que proporcionem a reflexão de tudo que se está a construir (Fernandes, 2009) são fatores que motivam os estudantes a aprender. A nota é obtida de forma natural a partir do momento que o estudante se envolve com as tarefas e o objetivo passa a ser o aprender de modo efetivo. Partiu-se para a semana seguinte com o objetivo de finalizar as resoluções e vivenciar os diálogos dessas construções.

### **5.10 Décima Semana**

A décima semana começou com a retomada da Atividade Avaliativa Diagnóstica 5. Os estudantes receberam as suas construções com os devidos *feedbacks* e foram orientados a retomar o processo de resolução para que pudessem terminá-la. Nesta aula, separou-se os nove estudantes que responderam a primeira tarefa sem apresentar justificativa na sala de estudos em grupos da biblioteca em um primeiro momento e depois desse grupo, os vinte e seis estudantes que responderam

com argumentações. Enquanto isso, o grupo de sete estudantes que deixou a atividade em branco, mas trabalhou com o pesquisador na nona semana, pesquisou em sites e livros tudo que concluísse como importante acerca do estudo de tronco de pirâmides e registrou em seus cadernos como os demais haviam feito. Abordou-se o primeiro grupo da seguinte forma.

*Pesquisador: "... Olá, tudo bem? Vou projetar a atividade no quadro para auxiliar quem quiser falar, caso precise. Vocês, ao responder a primeira tarefa, não justificaram o porquê do certo ou errado que colocaram. Alguém quer falar a respeito?..."*

*Estudante 01: "... Coloquei errado porque lembrei da sua fala de ter cuidado com os itens que envolvem área e volume quando o autor diz que se dobrar uma medida dobra a outra também. Mas não tinha certeza da resposta..."*

*Estudante 04: "... Coloquei certo porque a altura na fórmula não está elevada a nenhuma potência, logo pensei que se dobra uma, dobra a outra..."*

*Estudante 21: "... Coloquei certo também. Pensei que se aumentando a altura aumentaria a área interna na mesma proporção, mas não tenho dados para comprovar isso. Foi apenas a impressão..."*

*Estudante 23: "... Acho que acertei colocando o item como errado. Porque se dobrar a altura, a área onde estão o valor de  $a$  e  $b$  (apontando para o desenho), vai ser reduzida pela metade e multiplicando as duas novas medidas, porque é um retângulo, não vai dobrar o volume..."*

*Estudante 24: "... Não tive esse raciocínio todo. Coloquei errado só por pensar que não dá para dobrar a medida do volume, que é uma unidade que está elevada ao grau 3, dobrando a medida da altura que não vai ser elevada à terceira..."*

*Pesquisador: "... Alguém mais?..."*

*Estudante 33: "... Acho que é mais ou menos isso professor..."*

Os outros três estudantes não se manifestaram, mas durante a fala dos demais acenaram positivamente para as explicações dadas.

*Pesquisador: "... Desde já, muito obrigado por partilhar os seus raciocínios. Acredito que o desenho pode contribuir na construção de uma argumentação mais robusta, mas para termos certeza, tem de constatar o que acontece com o volume ao dobrar a medida da altura do tronco e para isso, temos conceitos que podem ajudar nesse entendimento. Na semana passada, quando receberam a atividade, pensaram em lançar mão de algum conteúdo já visto para comprovar a sua justificativa?..."*

*Estudante 23: "... Sim, semelhança de triângulos. Cheguei a tentar, mas fiz como se a base fosse um quadrado para ter uma ideia do que aconteceria, mas acabei desistindo..."*

*Pesquisador: "... Ótimo. E por que um quadrado?..."*

*Estudante 23: "... Tem mais informações e já fizemos diversas questões com ele na base..."*

*Estudante 24: "... Fui mais pela fórmula. Vi que era só diminuir o volume da grande pela pequena como está no texto, então pensei nas unidades de medida que são elevadas ao quadrado e ao cubo..."*

*Pesquisador: "... Tranquilo. Obrigado. Sugeri alguns caminhos nas resoluções que vocês entregaram para que tentem resolver com mais propriedade a atividade. Voltaremos a conversar depois que vocês retomarem e seguirem as orientações apontadas. Tudo bem? [...] Muito obrigado..."*

Em seguida, reuniu-se o grupo de vinte e seis estudantes que emitiram algum tipo de argumento para justificar a escolha do item como certo ou errado. Segue o diálogo.

*Pesquisador: "... Tranquilo, tudo em paz? Vocês escreveram as suas justificativas na primeira tarefa da atividade e gostaria que explicassem um pouco mais o que foi posto. Alguém se habilita?..."*

*Estudante 37: "... Não fiz conta, mas ao dobrar a altura, as medidas de x e y não vão continuar as mesmas e, como tem de calcular a nova área com essas medidas e na área, a medida vai estar ao quadrado, então não pode dobrar o volume..."*

*Pesquisador: "... Alguém mais trabalhou assim?..."*

Neste momento, doze estudantes levantaram a mão. Continuou-se o diálogo.

*Pesquisador: "... Excelente. Pode continuar..."*

*Estudante 27: "... Marquei certo e escrevi que a área interna dobraria. Fui apenas pelo desenho..."*

*Pesquisador: "... Alguém mais inferiu algo apenas pela visualização da figura?..."*

Dessa vez, quatro estudantes afirmaram ter seguido essa linha de raciocínio.

*Pesquisador: "... Tranquilo. Mais participações?..."*

*Estudante 20: "Coloquei que era errado porque se dobrasse a altura, o volume seria multiplicado por oito, que é dois ao cubo..."*

*Estudante 11: "... Como o senhor orientou lá atrás, eu li as duas tarefas e fiz a segunda primeiro porque tinha todos os dados e era só usar a fórmula. Depois, dobrei a altura e calculei novamente percebendo que o volume não dobrava. Por isso marquei errado..."*

*Pesquisador: "... Como você fez para calcular a área da base superior do tronco cuja altura era o dobro da altura do tronco anterior?..."*

*Estudante 11: "... Apliquei a semelhança de triângulos..."*

*Pesquisador: "... Excelente. Por gentileza, mais contribuições? Vocês vão encontrar algumas sugestões de complementos de pesquisas para construir as suas respostas de forma mais robusta. Peço que voltem aos grupos de estudo que formaram e continuem com os estudos para trabalhar um pouco mais nas suas resoluções dessa atividade. Algo mais? [...] Grato mais uma vez..."*

Os argumentos trazem a resolução da tarefa a partir visualização da figura, do trabalho algébrico com a fórmula, da análise do estudo de potências e o experimentar

com cálculos, como fez o estudante 11. Nas construções analisadas, cujo argumento estava baseado na fórmula, não houve um desenvolvimento algébrico que justificasse com propriedade tais argumentações, ou seja, apenas observaram a fórmula e inferiram que não seria possível. Quanto às justificativas que tratavam da figura, os estudantes se basearam no fato de que dobrando a altura, aumentaria a região interna do tronco e, portanto, dobraria a medida do volume.

Nos dois casos, do trabalho com a fórmula e a análise da figura, encontrou-se o argumento de que não sabia como provar o que havia escrito, mas que acreditava ser dessa forma. Para ambos os grupos, o *feedback* foi estruturado com a retomada do estudo de proporcionalidade, em seguida com a semelhança de triângulos e, por último, a semelhança de sólidos. Indicou-se o uso do material da escola por conta da familiaridade desses estudantes com esse material. Encorajou-se a fazer o desenho de um triângulo retângulo com uma reta paralela a um dos catetos e pediu-se que escrevessem a relação de semelhança entre os triângulos formados. A oportunidade de aprendizagem nesta tarefa se configurou como um processo que poderia se dar a partir da demonstração dos conceitos e propriedades envolvidos (Almeida, 2007; NCTM, 2017; Rosale, 2018).

Alguns estudantes atribuíram medidas para as suas construções e diversas trocas foram evidenciadas durante esse processo. Os debates em torno dos *feedbacks* e das construções coletivas ao longo da pesquisa revelam o processo de dialogicidade que Paulo Freire apresenta quando diz que “[...] a educação é comunicação, é diálogo, na medida em que não é a transferência de saber, mas um encontro de sujeitos interlocutores que buscam a significação dos significados.” (Freire, 1980, p. 69). Os estudantes, com a oportunidade de rever as suas resoluções e constituir diálogos para partilhar experiências em prol de validar os conhecimentos envolvidos nas tarefas com o trabalho formativo da avaliação, desvendam as suas estratégias de trabalho que podem orientar o planejamento das próximas atividades, quer seja a retomada de conhecimentos já trabalhados, a adaptação do ritmo de trabalho, quais as ferramentas que mais utilizam e sinalizam o exato estágio que se encontram diante do objeto de aprendizagem.

Após o estudo da semelhança de sólidos, os estudantes concluíram corretamente a atividade e em um diálogo com toda a turma informou-se o fim da produção de informações para a pesquisa. Segue o último diálogo.

*Pesquisador: "... Vou começar com um agradecimento inestimável por todas as contribuições que vocês fizeram durante estas dez semanas e confesso que tenho muito a trabalhar. Levo dessa pesquisa mudanças significativas para o meu trabalho e um olhar, acredito, que ainda mais reflexivo quanto à forma que cada um de vocês aprende. Espero de algum modo ter contribuído para o desenvolvimento de vocês e a coleta de dados terminou, mas o trabalho continua. Muito obrigado mesmo!!!..."*

*Estudante 18: "... Posso falar?..."*

*Pesquisador: "... Sim, por favor..."*

*Estudante 18: "... A sua pesquisa esteve na minha casa. Meus pais disseram que depois que cresci nunca tinham me visto com tanto empenho para estudar. Pediram para conhecer o senhor. Eu aprendi como estudar e parece que voltei a ser a criança que não tinha vergonha de perguntar quando não entendia. Eu que agradeço por sua paciência e trabalho..."*

*Estudante 21: "... Quando começamos cheguei a comentar com uma amiga que isso daria muito trabalho. Era mais simples o senhor apenas corrigir no quadro e nós acompanharmos, mas percebi a mudança quando passei a ajudar outros amigos, ou seja, aprendi de fato o conteúdo. Muito obrigado..."*

*Estudante 30: "... Aprender a aprender, como os meus pais sempre me disseram, acho que esse foi o meu maior ganho na sua pesquisa. Estou aplicando o que o senhor tem feito com a gente em Física e Química. Tenho notas boas e, mais que isso, estou confortável com o ato de estudar. Valeu professor..."*

*Estudante 15: "... Ainda tenho algumas dificuldades, pois nunca fui tão bom nos estudos, mas vejo com outros olhos essas minhas dificuldades. O que mais vou levar da sua pesquisa é que o erro é só mais uma oportunidade de aprender e que basta nos juntarmos que a aprendizagem acontece..."*

*Pesquisador: "... Confesso que fiquei emocionado em diversos momentos da pesquisa e só tenho a agradecer. Vocês são estudantes brilhantes, cada um com as suas particularidades e todos com um coração lindo. Muito obrigado mais uma vez..."*

*Esse momento de encerramento da pesquisa foi repleto de depoimentos, mas não dá para relator todos e o contexto dos demais é semelhante aos aqui colocados. Os estudantes demonstraram mudanças significativas quanto ao ato de estudar tais como, preferiram pesquisar os conhecimentos que envolviam as tarefas e não pediram ao pesquisador que resolvesse a tarefa, mas que indicasse alguma saída sem dar a resposta, participaram efetivamente do processo de aprendizagem, trataram o erro como algo que poderia contribuir para o aprender, circularam em sala de aula e nos outros ambientes com o objetivo de partilhar as suas construções, trabalharam coletivamente expondo os seus trabalhos, perceberam no feedback dado pelo pesquisador e pelos colegas, a intencionalidade de ajudá-los ao longo desses encontros, dentre outras situações de grande ganho.*

Dessa forma, encerrou-se o processo de produção de informações e as análises possíveis para essa pesquisa.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dez semanas de encontro com os estudantes tornou o pesquisador um professor mais atento às reverberações que o processo avaliativo pode provocar nos estudantes e nas pessoas envolvidas à sua volta que, de algum modo, podem interferir em aspectos sociais e cognitivos da sua aprendizagem. Os comentários acerca do que o estudante errou ou acertou pode criar rótulos que pouco ou nada contribui para o seu desenvolvimento e deve-se entender, por exemplo, que a nota cinco em uma avaliação não quer dizer que o estudante seja mediano, mas que o nível cognitivo desse estudante nesse determinado conteúdo ainda não é satisfatório.

O período das aulas duplas, com duração de cem minutos, muitas vezes passou despercebido pelos estudantes diante da dinâmica do modelo de sala de aula invertida. O circular dos estudantes pelos grupos na sala de aula, na biblioteca e na sala dos computadores, proporcionou diálogos ainda não vivenciados, posturas proativas junto ao quadro de sala de aula com a construção de resoluções de tarefas colaborativamente, pesquisas em sites e em livros com o objetivo de revisar conceitos e propriedades geométricas, constituição de verdadeiros fóruns de discussão na busca da validação de conhecimentos. Com a análise dessas atitudes, verificou-se que o modelo de sala de aula invertida estimulou o protagonismo do estudante no processo de construção de conhecimento. A interação que existiu durante as atividades contribuiu para o envolvimento de todos os estudantes desde a etapa de apresentação das tarefas até a sistematização das resoluções encontradas. O fato de ter trabalhado o nível de complexidade diferenciado, oportunizou aos estudantes a associação, aos poucos, de conceitos e procedimentos, alcançando maior desenvoltura no processo de resolver tarefas do tipo “fazer matemática”.

Durante essa movimentação, diversos diálogos entre os estudantes e entre estes e o pesquisador foram iniciados a partir de um erro cometido por um grupo. Esses diálogos caracterizaram-se como momentos de *feedbacks* recíprocos. Inicialmente, poucos estudantes tomavam a palavra para se posicionar diante do erro cometido, mas aos poucos, todos, ou quase todos, participaram de algum modo e começaram a trabalhar, primeiro para resolver o que estava errado e, depois, entenderam que tinham de buscar a causa do erro cometido e o que tinham de fazer para não mais errar.

Tratando o erro como algo inerente ao processo pedagógico, construiu-se momentos ricos de aprendizagens. Por muitas vezes, um erro trouxe à discussão conceitos que não estavam diretamente contidos na resolução abordada, mas proporcionou outros caminhos de resolução levando a generalizações não planejadas para aquele modelo de tarefa. A forma como os *feedbacks* foram estruturados, sempre de modo construtivo e democrático ao longo das atividades, mostrou que os estudantes entenderam o erro como uma oportunidade de aprendizagem.

O trabalho da retomada das tarefas que apresentavam alguma incoerência, inicialmente, foi visto como uma forma de cumprir com as obrigações escolares com a devida correção, mas com o caminhar dos encontros, tendo os *feedbacks* como orientadores das atividades, os estudantes entenderam que se tratava de buscar o que não foi aprendido e reconheceram que estudar dessa forma demanda mais tempo e dedicação. Conforme alguns relatos, anteriormente descritos, os estudantes afirmaram ser trabalhoso aprender a aprender e que isso foi possível porque tiveram a oportunidade de retomar as suas construções quantas vezes fossem necessárias. Pode-se afirmar que essas retomadas a partir do processo de avaliação formativa tornaram o estudante um membro participativo desse processo de avaliação e contribuiu fortemente para a aprendizagem.

A avaliação formativa possibilitou ao pesquisador, uma aproximação mais imediata do nível de aprendizado de cada estudante, do entendimento das estratégias das suas resoluções e do ajuste de rota no planejamento considerando o ritmo e as necessidades específicas de cada um. Todo esse trabalho, do estudante e do pesquisador, foi possível por conta da aplicação da avaliação formativa no desenvolvimento das tarefas e, que se constituiu por um processo de idas e vindas com o objeto de estudo, depois de esclarecido os objetivos que se queria alcançar e o modo como os estudantes seriam avaliados. As características desse modelo avaliativo deram corpo ao trabalho desenvolvido, pois movimentaram diversos setores e pessoas da escola.

A cada retomada das resoluções dos estudantes, característica da avaliação formativa, o *feedback* ganhava mais centralidade na relação entre o estudante e o erro, o conhecimento, as estratégias e procedimentos de resolução, o pesquisador, os recursos didáticos, ou seja, permeava todos os momentos. O planejamento do *feedback*, no que tange à estrutura e à intencionalidade, estava diretamente relacionado ao tipo e nível de exigência que a tarefa propunha. Apesar de emitir os

dois tipos, oral e escrito, notou-se mais receptividade ao primeiro pelo dinamismo que lhe é atribuído.

Os diálogos, durante os encontros, tornaram claras as influências que o *feedback* estruturado e com intencionalidade provocaram, tanto no trabalho do estudante que apresentava bom desempenho quanto naquele que tinha algum tipo de dificuldade. Foram proporcionadas reflexões acompanhadas de diálogos em prol da busca por soluções com estratégias diferentes das encontradas pelos estudantes desenvolvidos. Também foram feitas retomadas iniciadas por perguntas direcionadas que circundavam desde os aspectos da leitura para se constatar o nível de entendimento do estudante acerca da tarefa proposta até o conjunto de conceitos necessários para que concluísse corretamente a tarefa. Esse processo reflexivo provocado pelo *feedback* no contexto da avaliação formativa pode, quando aplicados às construções dos estudantes, contribuir significativamente para a aprendizagem em matemática.

Nesta pesquisa, buscou-se trabalhar o processo de aprendizagem com os estudantes que apresentavam algum tipo de dificuldade, mas deu-se a devida atenção àqueles que desenvolveram com tranquilidade as tarefas propostas. Esses foram convidados a apresentar resoluções diferentes das que entregaram, a contribuir como monitor durante as atividades em grupo entre outras propostas. Vale destacar que, mesmo sem solicitar, esses estudantes se propuseram a ajudar e, embora não tenha sido objeto desta pesquisa, percebeu-se que o trabalho em pares pode contribuir para a aprendizagem matemática na perspectiva da avaliação formativa.

A partir desses elementos destacados, reafirmamos a tese da pesquisa de que a aprendizagem matemática é positivamente influenciada pela aplicação de *feedbacks* estruturados nas resoluções das tarefas apresentadas, na análise das estratégias de resolução dos estudantes, nas ferramentas e na forma de utilização dessas, por parte dos estudantes e com a intencionalidade que cada tarefa e nível de conhecimento exigir.

Algumas limitações da pesquisa referem-se à falta de tempo para a realização de *feedbacks* escritos individualizados que pudessem orientar de maneira específica formas de superar dificuldades encontradas por alguns estudantes. Outra dificuldade está relacionada à obrigatoriedade de cumprimento do currículo escolar, fato que não permitiu personalizar ainda mais os processos de ensino para aqueles estudantes que apresentaram dificuldades acentuadas. Cita-se ainda a complexidade de realizar uma

pesquisa centrada nos *feedbacks* sem a participação de pesquisadores colaboradores que pudessem captar outros elementos para além das palavras como gestos, movimentos e expressões não verbais para complementar os sentidos das falas captadas.

Por fim, a partir da experiência da pesquisa com a prática do *feedback* vislumbra-se, futuramente, incluir outros elementos na investigação como os processos metacognitivos e autorregulatórios na aprendizagem matemática.

## REFERÊNCIAS

- AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto. AGUILAR JÚNIOR, C. A.; MOURAD, A. A. A.; MOTTA, R. G. A.; SILVA, F. O. Avaliação das aprendizagens e Feedback: uma experiência investigativa em sala de aula remota. **REMAT: Revista Eletrônica Da Matemática**, v. 19, p. 1, 2022.
- ALLAL, Linda *et al.* **A avaliação formativa**: num ensino diferenciado. (Actas do colóquio realizado na Universidade de Genebra, março de 1978.) Coimbra: Almedina, 1986.
- ALMEIDA, Júlio César Porfírio. **Argumentação e prova na matemática escolar no ensino básico**: as somas das medidas dos ângulos internos de um triângulo. 2007. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.
- AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. Interamericana, 1980.
- BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**: contribuições para a psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BASSO, Fabiane Puntel; ABRAHÃO, Maria Helena Menna Barreto. Atividades de Ensino que Desenvolvem a Autorregulação da Aprendizagem. **Educ. Real.**, v. 43, n. 2, p. 495-512, 2018. DOI: 10.1590/2175-623665212
- BERGMANN, Jonathan. **Aprendizagem Invertida para resolver o Problema do Dever de Casa**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Rio de Janeiro: LTC, v. 114, 2017.
- BERRETT, Dan. How 'flipping' the classroom can improve the traditional lecture. **The chronicle of higher education**, v. 12, n. 19, p. 1-3, 2012.
- BEZERRA, Wescley Well Vicente. **Avaliação para aprendizagem na disciplina de Cálculo 1**: percepções de discentes e docentes da Universidade de Brasília. 2019. 200 f., il. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2019.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAUJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 99–112.

BLACK, Paul. Can teachers use assessment to improve learning? **British Journal of Curriculum & Assessment**, v. 5, n. 2, p. 7-11, 1995. Artigo traduzido e publicado com a autorização do autor e da Editora Hodder and Stoughton. Tradução de Fernando Zan Vieira. Disponível em:

<http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/717/657>. Acesso em: 12 nov. 2021

BLACK, P.; WILIAM, D. Inside the Black Box, Raising Standards Through Classroom Assessment, 2001. Disponível em: em

<http://ww2.fcoe.org/uploads/cgreenlaw/blackbox.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2021.

BLOOM, Benjamin S.; HASTING, Thomas; MADDAUS, George. **Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar**. São Paulo: Editora Pioneira, 1983.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas**: estimulando o potencial de estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BORRALHO, Antônio; LUCENA, Isabel. Avaliação e Ensino na Educação Básica em Portugal e no Brasil: Relações com as Aprendizagens (AERA). *In*: ORTIGÃO, M. I. (org.). **Actas do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Pirenópolis (CA): SIPEM, 2015. Disponível em:

<http://hdl.handle.net/10174/17730> Acesso em: 20 abr. 2023

BOYD, Elaine; GREEN, Anthony; HOPFENBECK, Therese N.; STOBART, Gordon. **Effective feedback**: the key to successful assessment for learning. ELT position papers: Oxford University Press, 2019.

BRANCO, Carla Castello; ALVES, Marcia Maria. Complexidade e sala de aula invertida: considerações sobre o método. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 12., 2015, Curitiba. Educere XII. **Anais** [...]. Curitiba: PUC, 2015. Disponível em: [https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/20881\\_9548.pdf](https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/20881_9548.pdf). Acesso em: 10 fev. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRINCKMAN, Roque. **A avaliação formativa da aprendizagem através da matemática nebulosa**: uma proposta metodológica. 2004. 146. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistema) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2004.

BROADFOOT, Patricia. **Introducing Profiling**: A practical manual. London: MacMillan Education LTD, 1987.

BROOKHART, Susan M. **How to give effective feedback to your students**. Alexandria, Virginia: ASCD, 2017.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

CÂNDIDO, Patrícia T. **Comunicação em matemática. Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, p. 15-28, 2001.

CARDINET Jean. A avaliação formativa: um problema actual. *In*: ALLAL, Linda; CARDINET Jean, PERRENOUD PPhilippe. **A avaliação formativa num ensino diferenciado**. Coimbra: Livraria Almedina, 1986. p.14.

CASADO, Jocássia Emanuelle Silva. **As consequências do abandono do ensino de geometria**: um estudo de caso. 2011. 43 f. Monografia (Especialização em Educação com foco em Ensino e Aprendizagem) - Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, Paraíba, Brasil, 2011.

CORREIA, Luis Miranda. A Igualdade de Oportunidades e as Necessidades Educativas Especiais. **Diversidades**, v. 5, n. 17, p. 4-11, 2007.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

COSTA, Conceição. Visualização, veículo para a educação em geometria. *In*: SARAIVA, M; COELHO, I.; MATOS, J. (org.). **Ensino e Aprendizagem de Geometria**. Lisboa, Portugal Editora, 2002. p. 157-184.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2010.

CURY, Helena Noronha; CASSOL, Mariana. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 6, n. 1, p. 27-36, 2004.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CURY, Helena Noronha. **O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012. p. 19-48.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. **Psicologia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como Ensinar Matemática Hoje?** Brasília, 2010.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Temas e debates. *In*: D'AMBRÓSIO, Beatriz. **Como ensinar Matemática hoje**. Brasília: SBEM, 1989. p. 15-19.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas da Matemática**. São Paulo: Ática, 1996.

DE KETELE, Jean-Marie. Évolution des problématiques issues de l'évaluation formative. *In*: FIGARI, Gérard; ACHOUCHE, Mohammed. (ed.). **L'activité évaluative réinterrogée**: Regards scolaires et socioprofessionnels. Busselles: De Boeck, 2001. p. 102-108.

DEWEY, John. **Como Pensamos**. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

EARLEY, P. Christopher; NORTHCRAFT, Gregory B.; LEE, Cynthia; LITUCHY, Terri R. Impact of process and outcome feedback on the relation of goal setting to task performance. **Academy of management journal**, v. 33, n. 1, p. 87-105, 1990.

FARIA, Paulo M. **Revisão Sistemática da Literatura**: contributo para um novo paradigma investigativo. Santo Tirso: White Books, 2019.

FERNANDES, D. **Avaliação das Aprendizagens**: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas. Lisboa: Texto Editores, 2005.

FERNANDES, Domingos. **Avaliar para aprender**: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FERNANDES, Domingos. Para uma teoria da avaliação formativa. **Revista Portuguesa de Educação**, Portugal, p. 21-50, 2006.

FERREIRA, C. **A Avaliação no Quotidiano da Sala de Aula**. Porto: Porto Editora, 2007.

FERNANDES, Filipe Santos; GROSSI, Flávia Cristina Duarte Pôssas; MARTINS, Maria de Fátima Almeida. A cidade "abandonou" a geometria; o campo, não! Reflexões sobre a geometria e o seu ensino na perspectiva da Educação do Campo. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 134-162, dez. 2022

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Ano 3, n. 4, p. 1-19, 1995.

FONTES, Líviam Santana. **As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral**. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23., 2021.

FREIRE, Paulo. **Extensão ou comunicação?** 5. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1980.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREITAS, Luiz Carlos. A internalização da Exclusão. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 23, n. 80, p. 299-325, set. 2002.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel, 1973.

GASKEL, George. Entrevistas individuais e grupais. *In: GASKEL, George; BAUER, Martin W. (org). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: Um manual prático.** Petrópolis: Vozes, 2002. p. 64-89.*

GATTI, Bernardete Angelina. **Grupo focal na pesquisa em Ciências Sociais e Humanas.** Brasília: Liber Livros, 2005.

GODOY, Arlida Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, p. 57-63, 1995.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Editora Record, 2011.

GONTIJO, Cleyton Hércules. **Avaliação da Aprendizagem Matemática.** Texto não publicado. Digitado. 2008.

GRAVEMEIJER, Koeno P. E. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? *In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P.; BROCARD, J. (ed.). **Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas.** Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.*

HADJI, Charles. **Avaliação desmistificada.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo.** 4.ed. Portugal: Porto, 1994.

HATTIE, John. Influences on student learning. **Inaugural lecture given on August**, v. 2, n. 1999, p. 21, 1999.

HATTIE, John. Know thy impact. **Educational Leadership**, v. 70, n. 1, p. 18- 23. 2012.

HATTIE, John; TIMPERLEY, Helen. The power of feedback. **Review of educational research**, v. 77, n. 1, p. 81-112, 2007.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover: as setas do caminho.** 27. ed. Porto Alegre: Meditação, 2008.

KLUGER, Avraham N.; DENISI, Angelo. The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. **Psychological bulletin**, v. 119, n. 2, p. 254, 1996.

KRAEMER, Maria Elisabeth Pereira. Avaliação da aprendizagem como construção do saber. *In: COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE GESTIÓN UNIVERSITARIA EM LA AMERICA DEL SUL*, 5., 2005. **Anais [...].** Mar del Plata: Universidad Nacional de Mar del Plata, 2005.

LA SALLE, Jean Batiste de. *Conduite des écoles chrétiennes – Manuscrito 11.759.* Paris: Bibliothèque Nationale, 1951. [Publicação original em 1706]. Laschuk. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 9-10.

LESTER, F. K.; DAN KROLL, D. L. Assessing Student Growth in Mathematical Problem Solving. *In: DALAM KULM, G. (ed.). **Assessing High Order Thinking in***

**Mathematics.** Washington: American Association for the Advancement of Science, 1990.

LIMA, E. L. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, 2001.

LOCKE, Edwin A.; LATHAM, Gary P. **A theory of goal setting & task performance.** United States of America: Prentice-Hall, Inc, 1990.

LOSTADA, Lauro Roberto. Resenha - Sala de Aula Invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem. Do livro de BERGMANN, J.; SAMS, A. **Revista Contexto & Educação**, Rio de Janeiro, v. 32, n. 102, p. 205- 209, maio/ago. 2017. <https://doi.org/10.21527/2179-1309.2017.102.205-209>.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem:** componente do ato pedagógico. São Paulo: Cortez, 2011.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem escolar:** estudos e proposições. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar:** passado, presente e futuro. São Paulo: Cortez, 2021.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação em educação:** questões epistemológicas e práticas. São Paulo: Cortez, 2018.

MADUREIRA, Isabel Pizarro; LEITE, Teresa. **Necessidades Educativas Especiais.** Lisboa: Universidade Aberta, 2003.

MARTINHO, Maria Helena; PONTE, João Pedro da. Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. *In:* BROCARD, J.; MENDES, F.; BOAVIDA, A. M. (ed.). **Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Évora, 2005. Setubal: APM, 2005.

MATTAR, João. **Metodologias ativas:** para a educação presencial, *blended* e a distância. São Paulo: Artesanato Educacional, 2017.

MAZUR, Eric. **Peer instruction:** a revolução da aprendizagem ativa. Porto Alegre, RS: Penso Editora, 2015.

MIGUEL, José Carlos. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos:** implicações teórico-metodológicas. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. 2005. p. 375-394. Disponível em: <http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-MatematicaEnfoque-Conceitos.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2021.

MINAYO, Marília Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

MINAYO, Maria Cecilia de S.; SANCHES, Odécio. Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade? **Cadernos de Saúde Pública**, v. 9, p. 237-248, 1993.

MORIN, Edgar. **Os Sete Saberes Necessários à Educação do Futuro**. São Paulo: Cortez, 2001.

NEVES, Regina da Silva Pina; SILVA, Regina. **Formação de Conceitos Geométricos no Contexto dos Projetos de Trabalho Mediada pelo Cabri Geomètre**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2002.

NCTM. **Princípios para a Ação**: assegurar a todos o sucesso em matemática. Associação de Professores de Matemática: Lisboa, 2017.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2007.

NOTARI, Alexandre Marques. **Simplificação de frações aritméticas e algébricas: um diagnóstico comparativo dos procedimentos**. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

NÓVOA, A. S. **Evidentemente**: Histórias da Educação. Porto: Edições ASA, 2005.

OLIVEIRA, Hélia; MENEZES, Luís; CANAVARRO, Ana Paula. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-54, 2013.

OLIVEIRA, Deire Lúcia de. Avaliação formativa e feedback: compreensão e uso por professores de matemática da Rede Pública de Ensino do Distrito Federal 2020. 260 f., il. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

OLIVEIRA, Hélia; CYRINO, Márcia. Developing knowledge of inquiry-based teaching by analyzing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. **SISYPHUS - Journal of education**, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 1, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v1i1.8646822. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822>. Acesso em: 26 out. 2022.

PAVANELO, Elisangela; LIMA, Renan. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 58, ago. 2017. Disponível em: [https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-636X2017000200739](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2017000200739). Acesso em: 20 fev. 2023.

PERRENOUD, Philippe; THURLER, Mônica Gather; MACEDO, Lino de; MACHADO, Nilson José; ALLESSANDRINI, Cristina Dias. **As Competências para Ensinar no Século XXI**. A Formação dos Professores e o Desafio da Avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PERRENOUD, Philippe. **La fabrication de l'excellence scolaire dans l'enseignement primaire**: du curriculum aux pratiques d'évaluation: vers une

analyse de la réussite, de l'échec et des inégalités comme réalités construites par le système scolaire. 1984. Tese de Doutorado. Libr. Droz.

PERRENOUD, Philippe. From formative evaluation to a controlled regulation of learning processes. Towards a wider conceptual field. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, v. 5, n. 1, p. 85-102, 1998.

PIAGET, Jean. **A psicologia da criança**. Rio de Janeiro: Bertrand, 1998.

POLYA, George. **Polya, un clásico en resolución de problemas**. 1945.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. *In: GTI (ed.). O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In: PONTE, J. P. da (org.). Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação, 2014. p. 13 – 27

PONTE, João Pedro da.; QUARESMA, Marisa. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Revista Interações**, v. 8, n. 22, 2012. DOI: 10.25755/int.1542. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/1542>. Acesso em: 22 abr. 2023.

PORLÁN, Rafael; MARTÍN, José. **El diario del professor**: un recurso para la investigación en el aula. Sevilla: Díada, 1997

RAVEN, John. A model of competence, motivation, and behavior, and a paradigm for assessment. **Toward a new science of educational testing and assessment**, p. 85-116, 1992.

REY, L. **Planejar e Redigir Trabalhos Científicos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

RODRIGUES, Cristina; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

RODRIGUES, Renata Viviane Raffa; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida. Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, p. 967-989, 2018.

RODRIGUES, David. **Dez idéias (mal) feitas sobre a educação inclusiva**. Inclusão e educação: doze olhares sobre a educação inclusiva. São Paulo, SP: Summus, 2006. p. 299-318.

RODRIGUES, David; NOGUEIRA, Jorge. **Educação especial e inclusiva em Portugal: fatos e opções**. Revista Brasileira de Educação Especial, v. 17, p. 3-20, 2011.

ROMÃO, José Eustáquio. **Avaliação dialógica: desafios e perspectivas**. São Paulo: Cortez, 2011.

ROSALE, André Rodrigues. **Argumentação e prova matemática na educação básica**. 2018. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

ROSÁRIO, Pedro. **(Des)venturas do Testas: estudar o estudar**. Porto: Porto Editora, 2004.

SADLER, D. Royce. Formative assessment and the design of instructional systems. **Instructional Science**, v. 18, p. 119-144. 1989.

SANT' ANNA, Ilza Martins. **Por que avaliar? Como avaliar?: critérios e instrumentos**. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

SANTOS, José Ricardos Viola dos. Discussões De professores de matemática a respeito da avaliação em um grupo de trabalho. *In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 6., 2015. **Anais [...]**. Goiás: UFG, 2015.

SANTOS, Leonor; DIAS, Sónia. **Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback**. Profmat2006 (CD-ROM). Lisboa: APM. 2006.

SANTOS, Valdir Sodré Dos; GONTIJO, Cleyton Hércules. **Avaliação em matemática: percepções docentes e implicações para o ensino e aprendizagem**. Curitiba: Appris, 2018.

SANTOS, Washington Leonardo Quirino. **Desenho Geométrico: a régua e o compasso como recurso didático na compreensão de propriedades de Polígonos Regulares**. 2016. 81 f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2016. Set./2002. Artigo disponível em: <http://www.cedes.unicamp.br>.

SCHOENFELD, Alan H. Making sense of "out loud" problem-solving protocols. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 4, n. 2, p. 171-191, 1985.

SETTIMY, Thais Fernanda de Oliveira. **Elaboração e análise de atividades de visualização em Geometria 3D utilizando recursos convencionais**. 2014. 34 f. Monografia (Bacharelado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

SILVEIRA, Sidnei Renato; DE VIT, Antonio Rodrigo Delepiane; BERTOLINI, Cristiano. Aplicação da Metodologia Ativa de Aprendizagem da Sala de Aula Invertida no Ensino Remoto: um relato de experiências. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO*, 18., 2022. **Anais Estendidos [...]**. p. 225-228. Acesso em: 10 jan. 2023.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. Five practices for orchestrating productive mathematics discussion. **National Council of Teachers of Mathematics**, 2013, Reston, Virginia.

SOUZA, Denize S.; CAMPOS, V. G. S. Metacognição e relação com o saber: estratégias que beneficiam a aprendizagem matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: ENEM, 2016.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p.268-275, 1998.

STEIN, Mary Kay; GROVER, Barbara W.; HENNINGSEN, Marjorie. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 33, n. 2, p. 455-488, 1996.

TORRANCE, Harry; PRYOR, John. Developing formative assessment in the classroom: Using action research to explore and modify theory. **British Educational Research Journal**, v. 27, n. 5, p. 615-631, 2001.

TUCKER, Bill. The Flipped Classroom: online instruction at home frees class time for learning. **Education Next**, v. 12, n. 1, p. 82, 2012. Disponível em: [http://www.msuedtechsandbox.com/MAETELY2-2015/wpcontent/uploads/2015/07/the\\_flipped\\_classroom\\_article\\_2.pdf](http://www.msuedtechsandbox.com/MAETELY2-2015/wpcontent/uploads/2015/07/the_flipped_classroom_article_2.pdf). Acesso em: 16 jun. 2022.

TUNSTALL, Pat; GIPPS, Caroline. Teacher Feedback to Young Children in Formative Assessment: A Typology. **British Educational Research Journal**, v. 22, n. 4, p. 389-404, 1996. Disponível em: [http://datause.cse.ucla.edu/DOCS/pt\\_tea\\_1996.pdf](http://datause.cse.ucla.edu/DOCS/pt_tea_1996.pdf). Acesso em: 12 nov. 2021

VALENTE, José A. Prefácio *In*: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; DE MELLO TREVISANI, Fernando. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Penso Editora, 2015.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, v. 10, n. 2.3, pp. 133-170, 1990.

VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas (org.). **Avaliação: Interações com o trabalho pedagógico**. Campinas, SP: Papirus. 2017.

VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. **Práticas Avaliativas e organização do trabalho pedagógico**. 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, São P, FE/Unicamp, 1993.

VILLAS BOAS, Benigna Maria de Freitas. **Virando a escola do avesso por meio da avaliação**. Campinas, SP: Papirus, 2008.

WINNE, P. H.; BUTLER, D. L. Student cognition in learning from teaching. **International encyclopedia of education**, v. 2, p. 5738-5775, 1994.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steven. Editor's Introduction: What is mathematical visualization? *In*: ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steven. (org.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991. p. 1-7.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA\_1

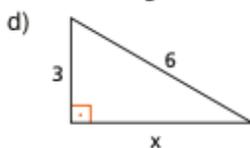
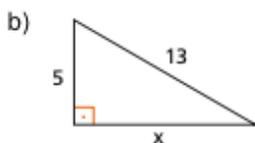
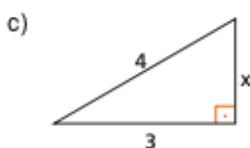
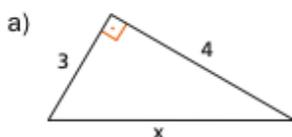
Colégio: \_\_\_\_\_

Estudante: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

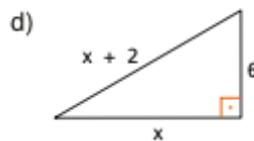
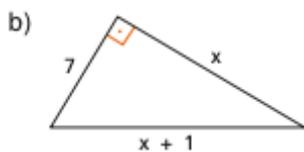
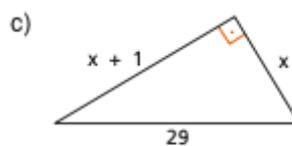
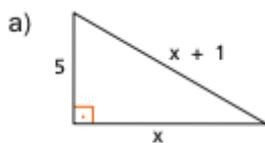
Professor: Cleiton

Matemática: 1ª Série

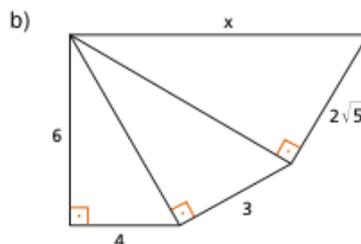
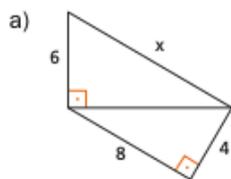
Primeira tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.



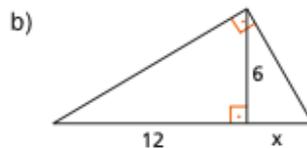
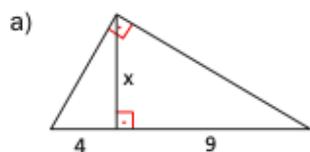
Segunda tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.



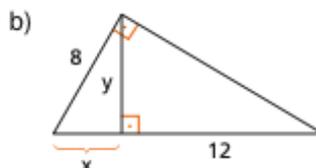
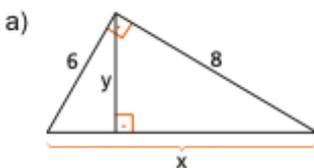
Terceira tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.



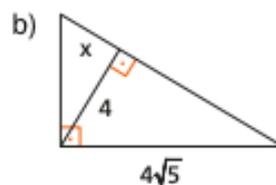
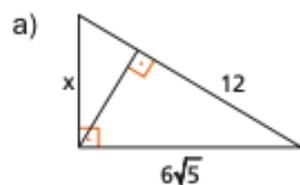
Quarta tarefa: Determine o valor de  $x$  nos casos seguintes.



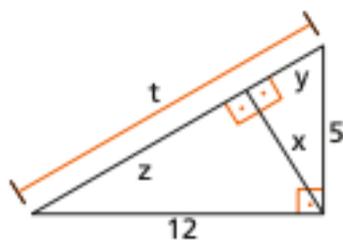
Quinta tarefa: Determine o valor de  $x$  e  $y$  nos casos seguintes.



Sexta tarefa: Determine o valor de  $x$  e  $y$  nos casos seguintes.



Sétima tarefa: Na figura, determine os elementos,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ .



**APÊNDICE B – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA\_2**

Colégio:

Estudante: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

Professor: Cleiton

Matemática: 1ª Série

Primeira tarefa: Calcule a área, em  $\text{cm}^2$ , de um quadrado cuja diagonal mede 6 cm.

Segunda tarefa: Calcule a área, em  $\text{m}^2$ , de um retângulo cujo perímetro mede 36 m, observando que o lado maior excede o lado menor em 8 m.



## APÊNDICE D – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA\_4

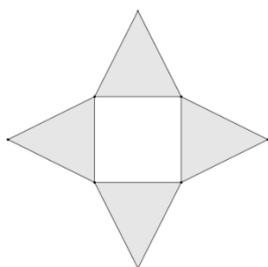
Colégio:

Estudante: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

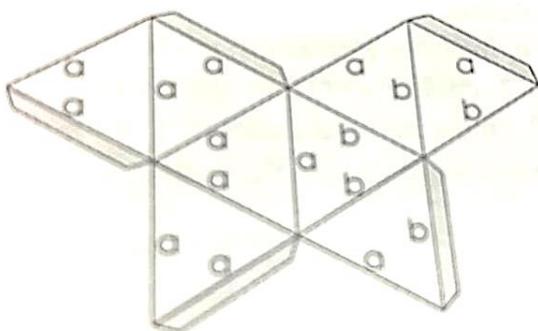
Professor: Cleiton

Matemática: 1ª Série

Primeira tarefa: Calcule a área total e o volume da pirâmide planificada que segue, considerando que o quadrilátero é regular, de aresta 4 cm e, os triângulos são isósceles de aresta 5 cm.



Segunda tarefa: Calcule o volume, em  $\text{cm}^3$ , do sólido obtido ao se recortar a figura abaixo, dobrar segundo as arestas e colar as bordas hachuradas. Considere  $a = 3\sqrt{2}$  cm e  $b = 5$  cm.



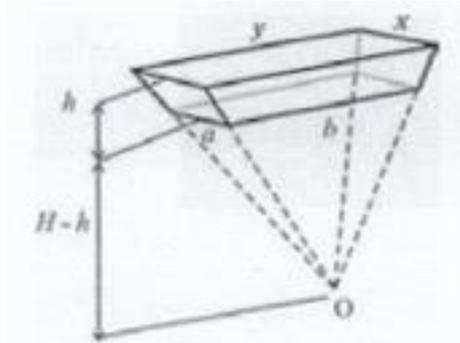
## APÊNDICE E – ATIVIDADE AVALIATIVA DIAGNÓSTICA\_5

Colégio:

Estudante: \_\_\_\_\_ N° \_\_\_\_\_

Professor: Cleiton

Matemática: 1ª Série



(UnB) - A figura acima ilustra um modelo hipotético do casco de um navio. O sólido destacado foi obtido a partir de uma pirâmide de altura  $H$ , cuja base é um retângulo de lados  $x$  e  $y$ , e de um corte paralelo à base, o qual determinou outro retângulo de lados  $a$  e  $b$ . O resultado é um objeto com bases paralelas, separadas por uma distância  $h$ . A pirâmide menor, de altura  $H - h$ , foi desprezada, e o volume do sólido, denominado tronco de pirâmide, pode ser calculado a partir dos volumes dessas pirâmides. Com base nessas informações, julgue o item 1 e faça o que se pede no item 2, que é do tipo B.

3. Fixando-se as medidas de  $x, y$  e  $H$  e dobrando-se o valor de  $h$ , o volume do tronco de pirâmide também dobrará.
4. Considere, no modelo apresentado  $x = 250 \text{ m}, y = 800 \text{ m}, a = 200 \text{ m}, b = 640 \text{ m}, H = 750 \text{ m}$  e  $h = 150 \text{ m}$ . Nesse caso, sabendo que o volume de uma pirâmide é dado por um terço do produto da área da base pela altura, calcule, em  $10^5 \text{ m}^3$ , o volume do casco do navio.

## ANEXOS

### ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezado(a) Senhor(a), gostaríamos de convidar seu(ua) filho(a) a participar da pesquisa intitulada por “**Avaliação Como Processo de Autorregulação da Aprendizagem Matemática na Perspectiva do Ensino Híbrido**”, realizada pelo Programa de Pós-graduação da Faculdade Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE/UnB, em parceria com um Colégio da rede de ensino privado de Brasília. O objetivo desta pesquisa é investigar se o uso de *feedbacks* nas avaliações ponto a ponto, realizadas em um modelo híbrido de ensino, pode estimular a autorregulação da aprendizagem matemática. A participação dele(a) é muito importante e se dará, caso concorde autorizar a participação dele(a), da seguinte forma:

- 1) Participar, duas vezes por semana, de um pequeno curso de matemática no turno vespertino. As aulas ocorrerão sempre das 14h30 às 15h30, com início previsto para 04 de março e término em 02 de dezembro de 2022);
- 2) Preencher diário de bordo ao final de cada aula; e,
- 3) Participar de roda de conversa.

Quanto ao Diário de Bordo, trata-se de anotações que os estudantes deverão preencher ao final de cada encontro. Isso será realizado de modo a colher suas impressões da aula, avaliando a metodologia utilizada e buscando compreender como o estudante se sentiu em cada encontro.

Já no tocante à roda de conversa, essa ocorrerá ao final de cada aula, objetivando conhecer ainda mais sobre as impressões dos estudantes no que se refere a percepção que eles possuem a respeito da matemática, às aulas de matemática e ao curso ora realizado. Trata-se de momento em que o pesquisador apresentará questionamentos dessa natureza para ouvir as respostas que os estudantes podem oferecer. Um momento de conversa para que cada um possa expressar aquilo que acredita. Essa roda de conversa será gravada para posterior análise.

Cabe esclarecer que a participação dele(a) é totalmente voluntária, sendo permitido que ele(a) se recuse a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo a ele(a). Dessa maneira, estende-se

ao senhor(a) o direito a se recusar assinar essa autorização, caso não concorde em autorizar seu(ua) filho(a) a participar da pesquisa.

As informações serão utilizadas para fins desta e outras pesquisas relacionadas e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade.

A coleta de dados será realizada por meio de **acompanhamento/observação de aulas, formulação de fóruns virtuais/presencias e análise dos resultados obtidos no processo avaliativo**. É para estes procedimentos que você está sendo convidado a participar.

Espera-se com esta pesquisa **discutir elementos que possam contribuir para a autorregulação da sua aprendizagem matemática. E ainda, acredita-se que esta pesquisa será de grande importância para a sua formação bem como para a busca da sua autonomia de modo a proporcionar o aumento da sua criticidade na vida.**

Por benefício esperado tem-se a oportunidade de que os participantes da pesquisa, após o período de realização do curso sejam levados a autorreflexão sobre suas formas de pensar e de fazer matemática. É garantido, no entanto, que eventuais despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação na pesquisa.

Se você tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, você pode me contatar através do telefone **(61) 9 9987 2902** ou pelo e-mail **[profcleitonrs@gmail.com](mailto:profcleitonrs@gmail.com)**. **Lembrando que o pesquisador seguirá as orientações da CONEP (Comissão Nacional de Ética em Pesquisa) para procedimento em pesquisas com etapas em ambiente virtual, de acordo OFÍCIO CIRCULAR Nº 2/2021/CONEP/SECNS/MS de 24 de fevereiro de 2021.**

A equipe de pesquisa (pesquisador e orientador) garantem que os resultados do estudo se tornarão públicos por meio de publicações em periódicos utilizados pela comunidade científica de Educação do PPGE/FE/UnB, tão logo a tese seja defendida e disponibilizada no repositório de teses da UnB.

As informações com relação à assinatura do TCLE ou aos direitos do participante da pesquisa podem ser obtidas por meio **do e-mail do CEP/CHS: [cep\\_chs@unb.br](mailto:cep_chs@unb.br) ou pelo telefone: (61) 3107 1592.**

Este documento será elaborado em duas vias, uma ficará com a pesquisador responsável pela pesquisa e a outra com você participante. **E seguindo as orientações da CONEP para procedimento em pesquisas com etapas em ambiente virtual.**

Pesquisadores Responsáveis: Drndo.: Cleiton Rodrigues dos Santos e orientador Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo Matrícula UnB: 16/0064431 Matrícula UnB: 1.036.041

Eu \_\_\_\_\_, tendo sido devidamente esclarecido(a) sobre os procedimentos da pesquisa, e tendo recebido todas as informações que julguei necessárias do(a) pesquisador(a) responsável, concordo em autorizar a participação voluntária de \_\_\_\_\_(inserir nome do estudante), de quem sou responsável.

Assinatura do(a) Responsável: \_\_\_\_\_ Data: / /2022.

Este documento será elaborado em duas vias, uma ficará com a pesquisadora responsável pela pesquisa e a outra com você participante. **E seguindo as orientações da CONEP para procedimento em pesquisas com etapas em ambiente virtual.**



**Cleiton Rodrigues dos Santos**

Pesquisador responsável pela pesquisa

## **ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)**

O seu filho(a) está sendo convidado para participar da pesquisa “Avaliação Como Processo de Autorregulação da Aprendizagem Matemática na Perspectiva do Ensino Híbrido”, realizada pelo Programa de Pós-graduação da Faculdade Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE/UnB, em parceria com um Colégio da rede de ensino privado de Brasília. O objetivo desta pesquisa é investigar se o uso de *feedbacks* nas avaliações ponto a ponto, realizadas em um modelo híbrido de ensino, pode estimular a autorregulação da aprendizagem matemática. Seu(s) responsável (veis) permitiu (iram) que você participasse.

Os estudantes que irão participar dessa pesquisa têm de 14 a 16 anos de idade. O seu filho(a) não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito dele(a) e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita no Colégio. A participação dele(a) é muito importante e se dará, caso concorde participação, da seguinte forma:

- 1) Participar, duas vezes por semana, de um pequeno curso de matemática no turno vespertino. As aulas ocorrerão sempre das 14h30 às 15h30, com início previsto para 04 de março e término em 02 de dezembro de 2022);
- 2) Preencher diário de bordo ao final de cada aula; e,
- 3) Participar de roda de conversa.

Para isso, será usado caderno, lápis, borracha, calculadora, computadores e *tablets* da escola. O uso desse material é considerado, seguro, mas é possível ocorrer riscos por conta do processo de discussão dos procedimentos de resolução de cada situação problema, mas asseguro a participação cordial de cada estudante bem como o controle harmônico no ambiente em sala de aula. Caso aconteça algo errado, você, responsável ou estudante, pode nos procurar pelo telefone 061 999872902 do pesquisador Cleiton Rodrigues dos Santos.

Por benefício esperado tem-se a oportunidade de que os participantes da pesquisa, após o período de realização do curso sejam levados a autorreflexão sobre suas formas de pensar e de fazer matemática. É garantido, no entanto, que eventuais despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação na pesquisa.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados

da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar o seu nome, obedecendo a Lei Geral de Proteção de Dados - Lei nº 13.709/2018. Seguiremos as orientações da CONEP (Comissão Nacional de Ética em Pesquisa) para procedimento em pesquisas com etapas em ambiente virtual, de acordo OFÍCIO CIRCULAR Nº 2/2021/CONEP/SECNS/MS de 24 de fevereiro de 2021. A equipe de pesquisa (pesquisador e orientador) garantem que os resultados do estudo se tornarão públicos por meio de publicações em periódicos utilizados pela comunidade científica de Educação do PPGE/FE/UnB, tão logo a tese seja defendida e disponibilizada no repositório de teses da UnB.

Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar ou a pesquisador: Cleiton Rodrigues dos Santos. Contato: 061 9 99872902.

Eu \_\_\_\_\_ responsável pelo(a) menor \_\_\_\_\_ a participar da pesquisa Avaliação Como Processo de Autorregulação da Aprendizagem Matemática na Perspectiva do Ensino Híbrido”, realizada pelo Programa de Pós-graduação da Faculdade Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE/UnB, em parceria com o Colégio. O objetivo desta pesquisa é investigar se o uso de feedbacks nas avaliações ponto a ponto, realizadas em um modelo híbrido de ensino, pode estimular a autorregulação da aprendizagem matemática.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar. Mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir que ninguém vai ficar furioso. Os pesquisadores tiraram dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Recebi uma via deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Brasília, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do responsável

\_\_\_\_\_  
Assinatura do (a) pesquisador

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o e-mail do CEP/CHS: cep\_chs@unb.br ou pelo telefone: (61) 3107 1592.

**ANEXO C – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP**

INSTITUTO DE CIÊNCIAS  
HUMANAS E SOCIAIS DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA -  
UNB

**PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP****DADOS DO PROJETO DE PESQUISA**

**Título da Pesquisa:** Avaliação Como Processo de Autorregulação da Aprendizagem Matemática na Perspectiva do Ensino Híbrido

**Pesquisador:** CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS

**Área Temática:**

**Versão:** 3

**CAAE:** 54061721.4.0000.5540

**Instituição Proponente:** PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PPGE/FE/UnB

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

**DADOS DO PARECER**

**Número do Parecer:** 5.288.165

**Apresentação do Projeto:**

Inalterado em relação ao parecer consubstanciado emitido pelo CEP/CHS no dia 27 de janeiro de 2022.

**Objetivo da Pesquisa:**

Inalterado em relação ao parecer consubstanciado emitido pelo CEP/CHS no dia 27 de janeiro de 2022.

**Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Inalterado em relação ao parecer consubstanciado emitido pelo CEP/CHS no dia 27 de janeiro de 2022.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

Inalterado em relação ao parecer consubstanciado emitido pelo CEP/CHS no dia 27 de janeiro de 2022.

**Endereço:** CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT-01/2 - Horário de  
**Bairro:** ASA NORTE **CEP:** 70.910-900  
**UF:** DF **Município:** BRASÍLIA  
**Telefone:** (61)3107-1592 **E-mail:** cep\_chs@unb.br

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS  
HUMANAS E SOCIAIS DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA -  
UNB**



Continuação do Parecer: 5.288.165

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

O Pesquisador apresentou uma nova versão do TCLE direcionado aos pais ou responsáveis pelos menores de idade, bem como uma nova versão do TALE.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

O projeto de pesquisa está adequado às exigências das Resoluções CNS 466/2012, 510/2016 e complementares.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1794536.pdf	17/02/2022 22:16:06		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TERMO_DE_ASSENTIMENTO_LIVRE_E_ESCLARECIDO_CLEITON.pdf	17/02/2022 22:13:45	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_CLEITON_R_SANTOS.pdf	17/02/2022 22:12:57	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	Carta_de_Revisao_etica_de_Pesquisa_CLEITON_RODRIGUES.pdf	13/01/2022 14:28:38	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	Instrumento_de_Coleta_de_Dados_CLEITON_RODRIGUES.pdf	13/01/2022 14:25:25	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Cronograma	CronogramadepesquisaCLEITONRODRIGUES.pdf	02/12/2021 16:28:58	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	Lattes_Cleyton_Hercules_Gontijo.pdf	02/12/2021 15:48:00	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	Lattes_Cleiton_Rodrigues_dos_Santos.pdf	02/12/2021 15:47:10	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Folha de Rosto	FolhadeRostoCleitonRodrigues.pdf	18/10/2021 20:21:57	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Declaração de	cepihmodelocartadeencaminhamento	05/10/2021	CLEITON	Aceito

**Endereço:** CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT-01/2 - Horário de  
**Bairro:** ASA NORTE **CEP:** 70.910-900  
**UF:** DF **Município:** BRASÍLIA  
**Telefone:** (61)3107-1592 **E-mail:** cep\_chs@unb.br

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS  
HUMANAS E SOCIAIS DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA -  
UNB**



Continuação do Parecer: 5.288.165

Pesquisadores	CLEITONRODRIGUES.pdf	20:27:59	RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	ProjetoDetalhadoBrochuraDoPesquisadorCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:21:33	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	cepCHSmodelotermoderesponsabilidadepelousododocumentosCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:15:11	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Declaração de concordância	TermodeAutorizacaoparautilizacaoeimagemesomdevozCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:10:40	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Orçamento	OrcamentodepesquisaCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:09:40	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	cepCHSmodelotermodeaceiteinstitucionalCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:08:01	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito
Outros	CartadeEncaminhamentoCLEITONRODRIGUES.pdf	05/10/2021 20:04:39	CLEITON RODRIGUES DOS SANTOS	Aceito

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

BRASILIA, 12 de Março de 2022

Assinado por:  
**ANDRE VON BORRIES LOPES**  
(Coordenador(a))

**Endereço:** CAMPUS UNIVERSITÁRIO DARCY RIBEIRO - FACULDADE DE DIREITO - SALA BT-01/2 - Horário de  
**Bairro:** ASA NORTE **CEP:** 70.910-900  
**UF:** DF **Município:** BRASILIA  
**Telefone:** (61)3107-1592 **E-mail:** cep\_chs@unb.br