Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA: UMA POSSIBILIDADE PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Ricardo José de Oliveira Paula

Brasília

2023

Ricardo José de Oliveira Paula

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA: UMA POSSIBILIDADE PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB

Departamento de Matemática - MAT

PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Castilho

Brasília

2023

Posição vertical

Ricardo José de Oliveira Paula
PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA: UMA POSSIBILIDADE PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA/ Ricardo José de Oliveira Paula. – Brasília, 2023-
142 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Castilho

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2023.

1. Palavra Chave 1. 2. Palavra Chave 2. I. Nome do Orientador. II. Universidade de Brasília. III. PROFMAT - SBM. IV. Título XYZ

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Princípio de Indução Finita: uma possibilidade para a educação básica

por

Ricardo José de Oliveira Paula

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 14 de Dezembro de 2023

Comissão Examinadora:

José Eduardo Castilho

Prof. Dr. José Eduardo Castilho - FUP/UnB (Orientador)

Profª. Dra. Simone Vasconcelos da Silva - FUP/UnB (Membro)

Prof. Dr. Wembesom Mendes Soares - IFB (Membro)

Dedico este trabalho a minha esposa, Tatiana Pontes de Oliveira Paula, que esteve comigo e me manteve firme mesmo com todas as dificuldades enfrentadas, além de me fazer ser um homem melhor a cada dia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me abençoado e ter me proporcionado as conquistas que tenho tido até então.

À minha esposa, Tatiana Pontes de Oliveira Paula, por ser esta companheira incrível a quem Deus me abençoou em tê-la.

Aos meus pais José Ávila de Paula e Dulcinea de Oliveira Paula a quem sempre oraram por minhas vitórias. Ainda, aos meus irmãos: Ronaldo César, Fábio Luiz, Bruno Inácio e José ávila por sempre mostrarem estar comigo e desejarem o meu sucesso.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Eduardo Castilho, por toda ajuda e dedicação que teve me atendendo e esclarecendo dúvidas, além de todo o aprendizado que consegui com as suas excelentes orientações.

A todos os amigos que conheci durante os estudos do PROFMAT, em especial, Elisângela Fernandes, Danilo Pereira e Élton Soares por toda parceria e auxílio dado ao decorrer dos estudos. Ainda, ao amigo Leonardo Gonçalves da Silva por toda a ajuda gentilmente prestada durante a escrita desta dissertação.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura. "

Bertrand Russell

Resumo

As abordagens e discussões apresentadas nesta dissertação possuem como objetivo central mostrar aos professores e estudantes um recurso de demonstração formal para fórmulas apresentadas na educação básica. O recurso escolhido para a execução das demonstrações formais foi o intitulado Princípio de Indução Finita (P.I.F.). Portanto, vale ressaltar que o tema escolhido neste trabalho possui relevância no que tange ao estudo da importância das demonstrações de fórmulas que são apresentadas na Educação Básica e, em especial, ao método intitulado P.I.F. Trata-se de um método matemático que envolve o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) muito utilizado nas disciplinas de teoria do números, geometria, análise combinatória, etc. O matemático Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu os axiomas necessários para que pudéssemos descrever o conjunto dos números $\mathbb{N}$. Neste trabalho, o leitor encontrará algumas variações para a escrita destes quatro axiomas. De um modo especial, abordaremos o quarto axioma de Peano que também é conhecido como axioma de indução e que servirá como base para o método da demonstração pelo P.I.F. A organização em que os temas são apresentados ao leitor segue uma ordem didaticamente escolhida para que o conteúdo possa ser bem compreendido tanto pelos professores quanto pelos estudantes que eventualmente venham a realizar a leitura deste trabalho. Apresenta-se ao leitor tópicos relacionados a: um pouco a respeito do conjunto dos $\mathbb{N}$ e também de Giuseppe Peano; a legislação que incentiva o uso de métodos que levam o desenvolvimento do pensamento crítico; demonstrações por meio do P.I.F. aplicadas ao ensino médio; aplicações do P.I.F. mediante uso de material concreto e, por fim, apresentação do questionário aplicado aos professores e análise dos resultados.

Palavras-chaves: Indução. Peano. Demonstração. Educação Básica.

Abstract

The approaches and discussions presented in this dissertation have as their central aim to show teachers and students a formal demonstration resource for formulas presented in Basic Education. The resource chosen to carry out the formal demonstrations was the Finite Induction Principle (P.I.F.). Therefore, it is worth highlighting that the theme chosen in this work is relevant when it comes to studying the importance of demonstrations of formulas that are presented in Basic Education and, in particular, the method entitled P.I.F. It is a mathematical method that involves the set of natural numbers ($\mathbb{N}$) widely used in the disciplines of number theory, geometry, combinatorial analysis, etc. Mathematician Giuseppe Peano (1858-1932) established the necessary axioms so that we could describe the set of numbers $\mathbb{N}$. In this work, the reader will find some variations for writing these four axioms. In a special way, we will address Peano's fourth axiom, which is also known as the axiom of induction and which will serve as the basis for the method of demonstration by P.I.F. The organization in which the themes are presented to the reader follows a didactically chosen order so that the content can be well understood by both teachers and students who may eventually read this work. The reader is presented with topics related to: a little about the set of $\mathbb{N}$ and also Giuseppe Peano; legislation that encourages the use of methods that lead to the development of critical thinking; demonstrations through P.I.F. applied to high school; applications of P.I.F. through the use of concrete material and, finally, presentation of the questionnaire applied to teachers and analysis of the results.

Key-words: Induction. Peano. Demonstration. Basic Education.

Lista de ilustrações

Lista de Quadros

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC Base Nacional Curricular Comum

CM Currículo em Movimento da Educação Básica da Secretaria de Educação do Distrito Federal

IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada

LDBEN Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

OBM Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

P.I.F Princípio da Indução Finita

PA Progressão Aritmética

PG Progressão Geométrica

PPP Projeto Político Pedagógico

SBM Sociedade Brasileira de Matemática

SEEDF Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

UE Unidade Escolar

Sumário

Introdução

Iniciaremos o discurso das primeiras ideias desta dissertação reportando as palavras que Pitágoras [1] teria afirmado: “todas as coisas são números”. Esta afirmação, apesar de sua estrutura gramaticalmente simples e de sentido rápido e completo, guarda uma enorme profundidade no que tange não apenas à capacidade de identificação da matemática em nosso cotidiano, mas à consciência de que sua presença é capaz de dar sentido ao novo, buscar a ordenação dos dados de fenômenos por meio de padrões e, ainda, tabular valores correspondentes a eventos do passado, observar precisamente o presente e buscar demonstrações de fatos que, por vezes, são essenciais a compreensão do futuro. Ao citar uma frase que possivelmente foi dita por Pitágoras, estamos nos reportando aproximadamente ao ano 570 a.C. de modo que, hoje, no ano de 2023, ainda se faz necessário o despertar acerca da importância em perceber que a frase supostamente dita por Pitágoras permitirá aos homens contemporâneos uma melhor compreensão das coisas que os circundam.

O ato de perceber a matemática nas coisas é um exercício que excede a mera contemplação de leis matemáticas que regem fenômenos, mas faz com que o homem se torne personagem crítico e participativo da compreensão e prospecção de sua história. Apesar da matemática, por meio de seus axiomas, lemas, teoremas, corolários, proposições e todas mais suas formalizações, buscar descrever padrões e demonstrações que possam auxiliar a compreensão do mundo em que se vive, ressalta-se a importância da iniciativa do próprio homem em buscar estas demonstrações.

E, de um modo especial, quando se tratar de um ambiente educacional, estas demonstrações precisam estar acessíveis aos estudantes. Por este motivo, nesta dissertação realizaremos uma discussão que buscará apresentar ao leitor alguns recortes de documentos oficiais de modo a deixar claro a necessidade do uso de recursos que viabilizem a aplicação do Princípio de Indução Finita (P.I.F.), a formalização deste princípio, a apresentação de alguns exemplos e a identificação de situações presentes na educação básica que podem ser demonstradas pelo P.I.F.

O P.I.F. apresenta-se como uma poderosa ferramenta matemática de demonstração para algumas fórmulas que são apresentadas aos estudantes na educação básica.

Os aspectos apresentados terão uma relevância significativa tanto para professores quanto para estudantes, visto que, durante a educação básica, a demonstração de algumas

[1] "Pitágoras foi um filósofo, matemático, astrônomo e músico grego pré-socrático. Nasceu na ilha de Samos no ano aproximado de 570 a.C. e morreu, provavelmente, em 496 a.C.. Passou boa parte de sua vida na antiga região da Magna Grécia (atual território italiano) e lá fundou a sua escola filosófica".(PORFÍRIO, 2020)

fórmulas são deixadas de lado e é dado ênfase à apresentação de fórmulas fechadas com aplicação em exercícios diversos.

Os fatores como: a necessidade do cumprimento de toda a grade curricular que é apresentada pelas instituições em um curto prazo de tempo; falta de envolvimento dos estudantes em atividades que exijam uso mais apurado do raciocínio lógico; falta de pré-requisitos que permitam o entendimento do P.I.F. e seus possíveis desdobramentos no que se refere a realização de contas de aritmética e álgebra, serão analisados quanto a sua existência ou mesmo a sua gravidade por meio da análise das respostas obtidas no questionário aplicado a um grupo de 37 professores no intuito de verificar se processos de demonstração como, por exemplo, P.I.F. são ou não utilizados corriqueiramente como uma ferramenta de demonstração formal.

Comumente, os professores se deparam com a situação em que o estudante, por meio de conjecturas, deduzem a lei de formação de uma sequência ou mesmo uma fórmula que descreva determinado padrão que foi observado em dado intervalo. Estas conjecturas, que são realizadas por alguns estudantes, normalmente, são embasadas pela observação de alguns poucos exemplos que confirmam a validade da proposição e, por meio daquilo que foi observado, conclui-se que esta fórmula cabe a todos os números naturais. Gera-se neste caso, no estudante, uma certa leviandade no que tange a capacidade de indagar e questionar de modo matemático se determinada conjectura é válida para todos os números naturais[2] ($\mathbb{N}$). Ao se permitir que o estudante conclua as fórmulas fechadas por meio de uma simples observação de um padrão notado em dado intervalo, incorre-se no risco de concluir erroneamente a fórmula ou mesmo privar o estudante de artifícios simples, mas extremamente poderosos na utilização de demonstrações.

Portanto, o P.I.F. é uma alternativa a necessidade de demonstrar formalmente a validade de uma conjectura.

Ainda, segundo Hefez (2009), o P.I.F. é uma grande ferramenta para a exploração da ideia de infinito e aprimoramento e compreensão das propriedades que circundam os números $\mathbb{N}$.

> Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista. É com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é, ao mesmo tempo, sutil e delicado. (HEFEZ, 2009, p.3)

[2] Para fins de escrita deste trabalho adotaremos o 1 como sendo o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$. Deste modo, quando desejarmos que o zero seja o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$, utilizaremos a seguinte escrita: $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Caso o professor regente utilize este trabalho como material de apoio em suas aulas, considera-se a possibilidade de realizar os devidos ajustes de modo a contemplar as necessidades impostas pelas realidades de cada Unidade Escolar.

Com isso, este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, a primeira seção consta de uma abordagem relacionada ao conjunto dos números $\mathbb{N}$ e as contribuições de Giuseppe Peano na formalização de seus axiomas e, na segunda seção, apresentaremos ao leitor uma série de recortes e abordagens de documentos oficiais no intuito de explicitar e respaldar que a inserção de atividades, práticas pedagógicas e ações que permitam aos estudantes a conjecturação e demonstração de fatos matemáticos é de extrema importância e se mostra um ato contemporâneo e embasado legalmente. no Capítulo 2, o processo do P.I.F. é detalhado por meio de alertas a respeito da importância e cuidados de uma conjectura, da formalização do axioma de indução e, ainda, alguns exemplos; no Capítulo 3, uma sequência de demonstrações estão organizadas de modo a propiciar aos professores e estudantes um material teórico para estudo do P.I.F. aplicado a fórmulas matemáticas que são trabalhadas na educação básica; no Capítulo 4, há demonstrações em que os professores e estudantes possam se valer de materiais concretos no auxílio e compreensão das conjecturas e demonstração; por fim, o Capítulo 5 consta de um questionário e a resposta de seus respectivos itens que foram aplicados a professores da educação básica no intuito de levantar dados a respeito do conjunto dos números $\mathbb{N}$ e os meios e a frequência em que são feitas as demonstrações em sala de aula. Por fim, o apêndice é composto pelo questionário aplicado aos professores, sugestões de atividades que fomentem situações em que o P.I.F. pode ser utilizado e algumas demonstrações extras.

1 Os números naturais e o pensamento crítico

1.1 O conjunto dos Números Naturais

1.1.1 Enumerabilidade

O conjunto dos números naturais, mesmo que por alguns não seja conhecido de maneira formal e circundada de termos matemáticos, é aquele em que mesmo os leigos em assuntos matemáticos se arriscariam a enumerá-lo e muito provavelmente a citar exemplos em que sua aplicabilidade pudesse ser demonstrada.

Trata-se de um conjunto conhecido pela sua capacidade de enumerar objetos que podem ser facilmente encontrados em nosso cotidiano. Ainda, é aquele conjunto que primeiro ensinamos as crianças durante a fase de alfabetização. A criança, por meio de estímulos, durante o processo de alfabetização, inicia uma jornada em associar a quantidade de objetos a um som específico e também a um símbolo. Por exemplo, a quantidade de três objetos é aos poucos associada pela criança ao da pronúncia da palavra "três"e a grafia do símbolo "3". E deste modo, de número em número, a criança irá realizando a assimilação entre o som a ser pronunciado, a quantidade a ser associada e a grafia do símbolo que representará esta quantidade. Com isso se tornará o conjunto utilizado para inicialização de uma criança com a ideia de quantidade, escritas dos números e contagem de objetos. Tomamos o conhecimento da existência destes números de uma forma tão lúdica e homeopática que aos poucos ela passa a fazer parte de nosso cotidiano e se torna um instrumento visto e utilizado diariamente em nosso cotidiano. Como, por exemplo, ao: observar as horas em um relógio, buscar por um canal na televisão, digitar o número de telefone, realizar contas em um supermercado, entre outros. Assim, de tão presente em nosso cotidiano, o conjunto dos números naturais se torna, em alguns momentos, imperceptível aos olhos de quem vê nas realizações dos afazeres diários, entretanto guarda a tarefa essencial de quantificar, valorar e criar possibilidade de comparação. Este belo conjunto se torna parte de nossa rotina a ponto de não conseguirmos imaginar como seria nossas vidas sem ele, alias, temos dificuldade em ao menos realizar este exercício mental.

De acordo com Bezerra (2021), professora de História, os números como conhecemos hoje é legado do trabalho de muitas gerações, veja:

> Os números surgiram há mais de 30 mil anos quando os seres humanos tiveram que contar objetos e animais.
>
> Quando sentiam necessidade de contar aquilo que caçavam ou pescavam, os homens e mulheres primitivos desenhavam animais nas paredes para

> indicar sua quantidade.
>
> Com o passar do tempo, as pessoas foram vivendo em grupos maiores, as tribos, e cada uma delas desenvolveu um modo de contar. Por isso, os números não foram inventados por uma só pessoa, mas sim por vários povos. (BEZERRA, 2021)

A citação de Bezerra (2021) demonstra a validade da afirmação de que o conjunto dos números naturais surgiu da necessidade de se realizar a contagem de objetos e é fruto do legado de diversas gerações.

> Os algarismos indo-arábicos são a forma de escrever que utilizamos atualmente. Foi criado pelos hindus e espalhado pelo mundo ocidental pelos árabes. Por isso, ele é chamado indo-arábico.
>
> Os hindus desenvolveram um sistema onde cada número era um símbolo e não era preciso escrever um sinal diferente para indicar cada agrupamento de objetos, como tinham feitos os egípcios. Assim como os babilônios, os algarismos ocupavam diferentes posições de acordo com o valor que possuíam. (BEZERRA, 2021)

Ainda, os números naturais carregam a simplicidade em sua escrita utilizando-se do valor posicional dos algarismos do sistema indo-arábico.

Um conjunto de uma simplicidade singular e que ao mesmo tempo guarda uma série de propriedades que bem aplicadas possuem um enorme poder em demonstrar fórmulas matemáticas, como veremos no Princípio de Indução finita (P.I.F.) que é um método de prova matemática usado para demonstrar a validade de uma proposição. O conjunto dos números naturais, convencionado pelo símbolo $\mathbb{N}$[1], é infinito.

Definição 1.1.1. *Conjunto finito*
Um conjunto X é dito finito se é vazio ou se existe n, tal que $f : In \to X$ é uma bijeção, $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Definição 1.1.2. *Conjunto infinito*
Um conjunto X é dito infinito se X é não vazio e para todo n, $f : In \to X$ não é uma bijeção, $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é infinito, bem como os conjuntos dos números inteiros [2] ($\mathbb{Z}$), racionais [3]($\mathbb{Q}$) e irracionais [4]($\mathbb{I}$), e que por vezes é interpretado de modo errôneo. Por exemplo, é muito comum observarmos nos livros didáticos e também nos quadros de alguns professores o seguinte diagrama:

---

1 Adotamos neste trabalho que: $0 \notin \mathbb{N}$

2 O conjunto dos números inteiros é formado pelo conjunto dos números naturais adicionados aos seus opostos aditivos e ao zero.

3 O conjunto dos números racionais é formado por todos os elementos que podem ser escritos na forma de fração $\frac{p}{q}$ onde p, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

4 O conjunto dos números irracionais é composto pelas dízimas não periódicas e as raízes não exatas

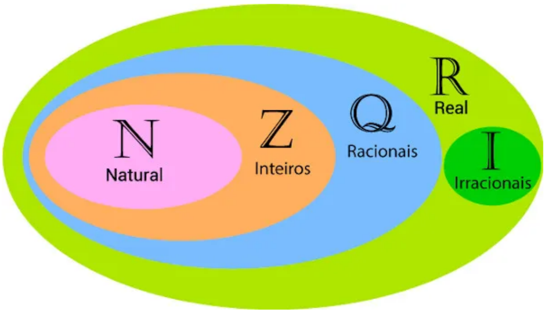


Figura 1 – Modelo do diagrama de Venn comumente apresentado pelos livros didáticos.
Fonte: (RIZZO, 2020)

No diagrama apresentado na Figura 1, a área ocupada pelo conjunto dos números naturais é significativamente menor que a dos demais conjuntos e este fato pode gerar a impressão ao estudante que o conjunto dos números naturais, apesar de ser infinito como o conjunto dos números inteiros, possui um número menor de elementos quando comparado ao conjunto dos números inteiros. Ainda, sugere que existem números reais que não são racionais e nem irracionais. Esta impressão errônea poderá ser comprovada por meio da análise dos dados obtidos no questionário aplicado aos professores.

Segue abaixo, conforme Figura 2, uma sugestão para a representação de $\mathbb{R}$ de modo a tentar minimizar a ideia de que o conjunto $\mathbb{N}$ possui um número significativamente menor de elementos quando comparado com o conjunto $\mathbb{Z}$, e também evitar transmitir a ideia de que existem números reais que não são racionais ou irracionais. Porém, vale ressaltar que o diagrama representado na Figura 2 não representa de modo inteiramente adequado relação de cardinalidade dos conjuntos, mas por uma facilidade didática poderá ser apresentado aos estudantes seguido de suas devidas explicações.

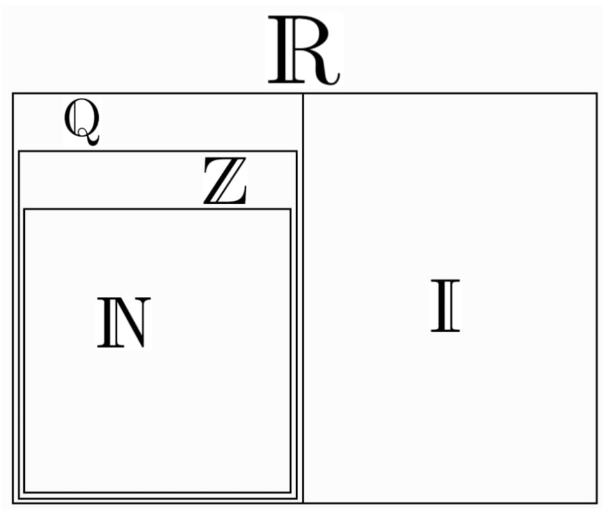


Figura 2 – Diagrama do conjunto dos números Reais
Fonte: Elaborada pelo autor

Para a discussão seguinte utilizaremos o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, isto é, $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ Vejamos, um conjunto pode ser finito ou infinito. Caso seja finito, sua cardinalidade será o número de elementos que compõem este conjunto. Caso o conjunto seja infinito, como são os casos dos conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$) e o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) devemos buscar uma relação de bijeção. Isto é, quando dois conjuntos finitos X e Y possuem uma relação em que cada elemento de X corresponde a um único elemento de Y, e vice-versa, podemos concluir que há uma relação de correspondência biunívoca entre estes dois conjuntos, isto é, dois conjuntos finitos que possuem uma relação biunívoca possuem o mesmo número de elementos e, deste modo, a mesma cardinalidade. Agora, em conjuntos infinitos, é necessário que seja possível notar uma relação de correspondência biunívoca entre estes conjuntos para que conclua-se que eles possuem a mesma cardinalidade.

Vejamos, por exemplo, o caso do conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{Z}$, analisaremos para que possamos chegar a uma conclusão a respeito da cardinalidade destes conjuntos, um em relação ao outro.

Tomaremos a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f(n) &= \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é um número natural par.} \\ -\left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ é um número natural ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

deste modo obtemos as relações:

$$\begin{array}{ccc} & ... & \\ f(5) & \rightarrow & -3 \\ f(3) & \rightarrow & -2 \\ f(1) & \rightarrow & -1 \\ f(0) & \rightarrow & 0 \\ f(2) & \rightarrow & 1 \\ f(4) & \rightarrow & 2 \\ f(6) & \rightarrow & 3 \\ & ... & \end{array}$$

Assim, quando há uma correspondência biunívoca, isto é, uma relação de bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ e um conjunto qualquer C dizemos que o conjunto C é enumerável.

Portanto, observando o comportamento da relação da função $f(n)$ apresentada acima, concluímos que o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{Z}$ possuem a mesma cardinalidade. Em uma discussão deste tipo em sala de aula, provavelmente um estudante perguntaria se o mesmo ocorreria com o conjunto dos números racionais ou mesmo com o conjunto dos números reais. Então, seria o momento de apresentar ao estudante o fato de o conjunto $\mathbb{Q}$ possuir a mesma cardinalidade de o conjunto $\mathbb{N}$, porém o conjunto $\mathbb{R}$ não possui uma relação de bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$, isto é, não possui e mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$. Ainda, mostrar ao estudante que existem diferentes tipos de infinito.

É de grande contribuição para o estudo dos números naturais o fato de, ao explicar este conteúdo em sala, o professor não reduzir o conjunto $\mathbb{N}$ àquele que possui unicamente a função de contar objetos. Ressalta-se a importância de aproveitar a oportunidade para trabalhar a ideia de antecessor (investigar qual natural não possui antecessor) e sucessor; trabalhar a ideia de atribuir a um número natural qualquer a variável n, ao sucessor $s(n+1)$ e ao antecessor $s(n-1)$.

1.1.2 As contribuições de Giuseppe Peano

O processo de axiomatização para a definição do conjunto $\mathbb{N}$ foi feita em 1889, por meio da publicação do livro: "Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita", pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Neste livro, foram enunciados alguns axiomas sobre os números naturais, que ficaram posteriormente conhecidos como os Axiomas de Peano.

Peano caracteriza o conjunto $\mathbb{N}$ por meio dos seguintes axiomas, isto é, o conjunto dos números naturais possuem quatro propriedades básicas e estas foram propriedades-conhecidas por “Axiomas de Peano”.

(A1)’: Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural;

(A2)’: Números naturais diferentes tem sucessores diferentes;

(A3)’: Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

(A4)’: Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Usando o fato de que o sucessor de um número n pode ser escrito da forma $s(n) = n + 1$ e que essa é uma notação viabilizada pela definição de adição em $\mathbb{N}$, fato que rigorosamente não impede o estabelecimento dos axiomas, podemos escrevê-los do seguinte modo:

Axioma 1.1.1. *Axiomas de Peano*

(A1): Todo número natural n tem um único sucessor, representado por $n+1$.

(A2): Se $m+1=n+1$, então $m=n$.

(A3): Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n+1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(A4): Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O matemático Lima (1988), sugere uma forma mais rebuscada matematicamente de reescrever os axiomas de Peano, veja:

> “Um matemático profissional, em sua linguagem direta e objetiva, diria que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:
>
> (A1): Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.
>
> (A2): A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.
>
> (A3): Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
>
> (A4): Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$. (LIMA, 1988, p.27)

Observe que, como estamos chamando de $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, a notação $n \in \mathbb{N}$ significa que n é um número natural. A notação $s(n)$ é provisória. Com a definição da adição, a escrita $s(n)$ poderá ser substituída por $n+1$.

O A3, terceiro axioma de Peano, estabelece o número 1 como sendo o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, o 1 é menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$. Mas, principalmente, no ensino fundamental e ensino médio é comum adotar o número 0 (zero) como sendo o menor elemento do conjunto dos números naturais.

1.2 Recortes da Legislação Educacional quanto a construção de um raciocínio lógico

Veremos ao longo desta seção que as publicações em documentos oficiais mais recentes no que tange ao papel educativo de uma Unidade Escolar (UE) deve contemplar em seu currículo práticas que favorecem a problematização, instrumentalização e o aprimoramento na capacidade de elaborar e discutir temas que permitam a conjecturação, demonstração e análise de resultados. A busca pela criação e modelagem de problemas matemáticos desenvolvem no estudante a capacidade de mensuração e análise de dados coletados, deste modo, tornando-o mais crítico e participativo na construção de sua própria história.

Por exemplo, o ato de conjecturar possíveis padrões observados em sequências numéricas é capaz de despertar no estudante uma série de questionamentos como: este padrão que observei está correto? existe outro padrão que descreva esta mesma sequência? sequências distintas podem ser descritas pelo mesmo padrão? em qual conjunto numérico estou trabalhando? posso demonstrar formalmente isto que estou conjecturando? perguntas como estas possibilitam que uma grande variedade de conceitos sejam revisitados ou mesmo inseridos ao longo das discussões.

A partir do marco temporal em que evidencia-se de modo expresso, por meio de documentos oficiais, a necessidade de que os conteúdos embarcados nos currículos da UE, bem como outros documentos como o projeto político pedagógico possam levar, ou ao menos contribuir, para a formação de um sujeito crítico, ativo e participativo quanto a construção da escrita de sua própria história, temos a atribuição de contribuir e facilitar o processo de construção da autonomia do estudante. De um modo especial, proporcionar ao estudante situações diversas que permitam a conjecturação e demonstração de padrões e modelos matemáticos por meio de conteúdos e atividades adequadas de modo a atender a demanda da comunidade escolar.

O P.I.F., apesar de não fazer parte da grade curricular do ensino médio atualmente, mostra-se como uma poderosa ferramenta a ser explorada de modo a propiciar aos estudantes um momento de conjectura e demonstração de fórmulas matemáticas, contribuirá para o desconstrução da ideia de que as fórmulas matemáticas estão prontas e acabadas não cabendo qualquer tipo de questionamento ou mesmo a necessidade de demonstrações.

Lançar mão de demonstrações utilizando o P.I.F. permitirá aos estudantes o combate à ideia que de não há necessidade de demonstrar fórmulas matemáticas e, ainda, de que para se provar fórmulas matemáticas basta realizar o teste para alguns números que corrobore com o desejado. O P.I.F. auxiliará no trabalho educativo que, segundo Saviani (1995), o trabalho educativo é o ato de produzir, direta e intencionalmente, em cada indivíduo singular, a humanidade que é produzida histórica e coletivamente pelo conjunto dos homens.

Assim, a exploração do método de Indução será permeado pela intencionalidade em buscar novas formas de demonstrações de fórmulas matemáticas, aprimoramento da construção de um raciocínio mais lógico e não homogêneo.

1.2.1 O que diz a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) disciplina o sistema educacional brasileiro, do ensino infantil até o superior, assegurando, dessa forma, os direitos aos estudantes brasileiros.

> art. 2º: "A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho", trata-se de uma Lei que visa assegurar as condições mínimas para que a educação possa ser organizada de modo a atender as necessidades dos estudantes levando-os a uma formação integral que faça-os alcançar o pleno desenvolvimento, as condições para o exercício da cidadania e a qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1996)

Faz-se relevante a reflexão acerca dos temas abordados nas UEs de modo que esses possam auxiliar no alcance dos termos que são apregoados na LDBEN, isto é, as UEs devem seguir uma organização curricular que seja capaz de atender as demandas trazidas pelos estudantes e criar oportunidades de reflexão e discussão de temas relevantes para a formação integral [5] do estudante. Acrescenta-se que a abordagem de temas matemáticos relacionados à educação básica que possam ser demonstrados pelo P.I.F. são de valia quanto a contribuição da composição de uma organização curricular que possa contribuir com a formação integral do estudante, visto que tal princípio propicia momentos de reflexão acerca de padrões matemáticos que envolvem diversos conceitos e conjecturas.

A LDBEN, em seu art. 35, III, mantém consonância com o exposto no CM ao expressar a necessidade do ensino médio em contribuir com o aprimoramento do educando como pessoa humana. Ainda, nesse inciso, ressalta de forma expressa o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico, ou seja, abre caminhos a serem abordados que tratem da inserção, ou mesmo da manutenção, de conteúdos que possam aprimorar a capacidade crítica dos estudantes.

> Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996)

No art.35, III, da LDBEN, é atrelado o aprimoramento do educando como pessoa humana ao desenvolvimento do pensamento crítico. O pensamento crítico deve ser um

[5] Na chamada formação integral, há um esforço por parte do colégio em trabalhar o social, o psicológico, o pedagógico e o afeto do estudante; já na educação em tempo integral, a preocupação maior é com o número de horas que a criança ou o adolescente passa dentro da instituição de ensino, independente de receber ou não uma formação integral. Fonte: (ESCOLA MELHOR, 1988)

processo racional e consciente que permita aos estudantes uma melhoria em sua qualidade de vida e formação de seu caráter. Atividades que incentivem o pensamento crítico e lógico, como é o caso das demonstrações que utilizam o P.I.F., possuem uma série de vantagens como por exemplo: incentivar a curiosidade por meio de questionamentos e observações; motivar a discussão de temas matemáticos e definições; desenvolver a capacidade de liderança diante da necessidade de se posicionar e defender suas conjecturas; entre outras. O P.I.F. auxilia o estudante quanto a compreensão de definições e na identificação de etapas e processos de demonstração que estão viciados por algum tipo de inconsistência matemática. Portanto, a inserção do P.I.F. como ferramenta de demonstração na educação básica é uma ação que contribuirá para o alcance de umas das finalidades do ensino médio. No inciso I, a LDBEN apresenta uma finalidade que pode ser alcançada com o auxílio de demonstrações obtidas pelo P.I.F., pois a consolidação dos conhecimentos apresentados no ensino fundamental poderão ser retomados de modo mais aprofundado no ensino médio e seguido de demonstrações e reflexões teóricas.

O pensamento crítico faz-se um importante processo a ser almejado para o alcance das finalidades descritas na LDBEN. Francis Bacon [6], em uma de suas frases, deixa bem claro qual é conceito do pensamento crítico. veja:

> Pensar criticamente é ter o desejo de procurar, a paciência de duvidar, a propensão para meditar, a lentidão para afirmar, a vontade de considerar, o cuidado de pôr em ordem e o ódio a todo o tipo de imposições. (IBERDROLA, 2020)

O P.I.F. é um processo de demonstração da validade de uma proposição que por seu procedimento [7] é capaz de proporcionar aos estudantes o desejo de buscar e investigar se tal proposição é válida mediante o exercício do pensamento crítico.

1.2.2 O que diz a Base Nacional Curricular Comum

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC), ressalta a importância de que alguns aspectos de relevância sejam desenvolvidos, são eles: desenvolvimento relativo ao processo de investigação, atinge-se este aspecto por meio da propositura de situações e problemas que desafiem os estudantes a investigar, justificar e explicar os caminhos adotados e as motivações para o exercício de tal procedimento bem como a capacidade de organização e registro dos cálculos e ideias concatenadas; construção de modelos, um aspecto que exige a capacidade de identificar padrões matemáticos e, por meio de observações, levantar conjecturas a respeito da veracidade e validade de suas proposições, bom como aplicar

[6] Francis Bacon (1561-1626) foi um filósofo, político inglês e um dos fundadores do método indutivo de investigação científica, o qual estava baseado no Empirismo. Seus estudos contribuíram para a história da ciência moderna.(TODA MATERIA, 2023)

[7] O Princípio de Indução Finita é composto por duas etapas sendo elas: caso base e passo indutivo.

ações já conhecidas na comprovação da validade das proposições apresentadas; resolução de problemas, que de acordo com a BNCC, este aspecto deve contemplar os mais diversos contextos e situações, inclusive lançar mão do uso de tecnologias computacionais.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018)

Ainda observamos, na citação anterior, que a BNCC ressalta a necessidade do uso de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados que visam atender as demandas relacionadas ao processo investigativo. O método de ensino baseado no processo investigativo é composto por uma abordagem que promova o planejamento, o questionamento, a escolha de evidências, as explicações com bases em evidências . Ainda, segundo Nunes (2021), o ensino por investigação envolve tarefas multifacetadas como:

1. a realização de observações;
2. a colocação de questões;
3. a pesquisa em livros e outras fontes de informação;
4. o planejamento de investigações;
5. a revisão do que já se sabe sobre a experiência;
6. a utilização de ferramentas para analisar e interpretar dados;
7. a exploração;
8. a previsão e a resposta à questão;
9. a comunicação dos resultados.

Ressalta-se que essas tarefas que foram listadas são traços comuns à metodologia de resolução de problemas e à metodologia de modelagem matemática.

Por fim Nunes (2021) apresenta que outras características do ensino por investigação são: o envolvimento dos alunos em questões científicas, dando prioridade às evidências para responder às questões; o uso de evidências para desenvolver explicações, promovendo a ligação dessas com o conhecimento científico; e a comunicação e justificação das suas explicações.

Diante do exposto, o P.I.F. apresenta-se, novamente, como um importante instrumento que poderá auxiliar o professor no processo investigativo de modo a mobilizar os estudantes a fim de que as habilidades relacionadas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas sejam abordados em um contexto matemático e, ainda, aprimorados e revisitados ao longo do ano.

Ainda, a BNCC apresenta em suas competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio cinco itens que descrevem competências que se completam e visam o desenvolvimento da cognição, atitudes de autoestima e de perseverança na busca de soluções. Apesar destas competências específicas não apresentarem uma ordem preestabelecida e, juntas, formarem um todo, destacaremos um item dentre os cinco que nos servirá de incentivo para a defesa do uso e inclusão do P.I.F. em atividades da educação básica.

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.531)

A arte de conjecturar e investigar os conceitos e propriedades matemáticas são etapas importantes e indispensáveis para a construção de uma vida escolar madura e que possa permitir o prosseguimento dos estudos. Por isso, faz-se de grande importância o uso de procedimentos matemáticos que sejam capazes de propiciar aos estudantes momentos de reflexão e demonstrações matemáticas. Ao longo dos conteúdos abordados nos ensino fundamental e médio, há diversas situações em que o ato de investigar e conjecturar podem ser trabalhados e, de um modo muito especial, em demonstrações de propriedades matemáticas. Quanto as demonstrações, a BNCC ressalta a importância da validação de uma conjectura por meios formais, isto é, rompe-se a ideia, comumente apresentada pelos estudantes (conforme veremos dados apresentados no resultado do questionário) de que a conjectura é uma forma de demonstração suficiente e capaz de garantir integralmente a validade de uma propriedade. Ainda, conforme a Figura 3, desde o 1° ano do ensino fundamental, a BNCC destaca a importância da observação de padrões matemáticos por meio de figuras e também por sequências.

Álgebra	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)

Figura 3 – Unidade temática e objetivos de conhecimento - 1° Ano.

Fonte: (BRASIL, 2018), Pág. 278. À esquerda, refere-se a unidade temática. À direita, refere-se aos objetivos de conhecimento - Anos Iniciais - 1° ano.

1.2.3 O que diz o Currículo em Movimento da Educação Básica

O Currículo em Movimento da educação básica da Secretaria de Educação do Distrito Federal (CM) é um documento norteador quanto as ações que devem ser adotadas no âmbito da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), mas pelo seu formalismo e contemporaneidade se torna um útil arcabouço pedagógico a todas as instituições educacionais, sejam públicas ou privadas. Este documento está pautado em ações que possuem como referencial as ideias exploradas na pedagógica Histórico-Crítica.

> O processo pedagógico deve possibilitar aos educandos, através do processo de abstração, a compreensão da essência dos conteúdos a serem estudados, a fim de que sejam estabelecidas as ligações interna específicas desses conteúdos com a realidade global. Com a totalidade da prática social e histórica. Este é o caminho por meio do qual os educandos passam do conhecimento empírico ao conhecimento teórico-científico, desvelando os elementos essenciais da prática imediata do conteúdo e situando-o no contexto da totalidade social (GASPARIN, 2005, p.7)

De acordo com a pedagogia Histórico-Crítica, o aluno deve compreender sua realidade e se apropriar do conhecimento historicamente elaborado pela humanidade, assim a prática social inicial será o ponto de partida. Ainda, o CM apresenta um esquema que exemplifica as etapas da construção do conhecimento. Vale ressaltar que o P.I.F. é um método de demonstração que mostra-se aberto a contemplar todas estas etapas.

Figura 4 – Processo de construção dos conhecimentos.
Fonte: (SEEDF, 2018a).

De acordo com a Figura 4, podemos ter uma ideia das etapas do processo de construção dos conhecimentos. A prática social deve ser entendida como o ponto de partida (prática social inicial ou prática social dos estudantes) e também o de chegada (prática social final) de modo que a prática social final de uma ação anterior se tornará a prática social inicial de uma nova ação que seja posterior aquela aplicada. A prática social inicial é comum a professores e estudantes e conterá o conjunto de saberes e experiências que foram vivenciadas e construídas durante a vida do estudante e são imprescindíveis para que os temas que venham a ser trabalhados possam fazer sentido. Em seguida, a problematização que é um ato intencional e deliberado; tem a tarefa de identificação de situações problemas na prática social inicial. Após esta etapa, a instrumentalização que é propriamente dito a apropriação de instrumentos técnicos, teóricos e práticos que auxiliarão na solução da problematização desencadeada pela prática social inicial, ou seja, a instrumentalização é fruto da mediação do professor. Então, chegamos a catarse / síntese que é a incorporação dos instrumentos, vale ressaltar que esta etapa poderá não ocorrer em todas as aulas. Por fim, ocorre a prática social final que nada mais é que o aprimoramento de uma visão mais ampla e transformadora do problema e de sua solução.

> "A humanidade se desenvolve a partir dos conhecimentos que elabora para compreender o mundo em que vive. Dessa forma, todo saber é elaborado considerando resolução de situações-problema que emergem das relações do indivíduo com o mundo e a busca de sua transcendência. A Matemática, como conhecimento, surge das necessidades do ser humano de cada época, que constrói conceitos e procedimentos para obter novos significados e novas respostas em contextos históricos, culturais, geográficos, políticos e econômicos determinados. (SEEDF, 2018b, p.151)

Este documento deixa claro que há uma relação direta entre o desenvolvimento dos conhecimentos que são elaborados e a compreensão do mundo a qual nos fazemos inseridos, ou seja, os conteúdos trabalhados nas UEs devem comunicar com as necessidades reais dos estudantes e, de modo direto e intencional, auxiliá-lo na tomada de decisões e na construção do senso crítico. O P.I.F., conforme veremos nos capítulos seguintes, basea-se em encontrar um valor que seja válido para determinada proposição (ponto de partida do princípio que chamaremos de caso base) e, também, demonstrar a validade de uma implicação (ideia de continuidade da validade que será demonstrada em uma etapa chamada de passo indutivo). Curiosamente, a tomada de decisões cotidianas e a construção de um sujeito ativo são permeadas pela validade de diversas implicações visto que, bem como na matemática, a construção do sujeito depende de etapas válidas e intencionais.

Ao longo da história da humanidade o ensino tem passado por modificações e atualizações que são direcionadas pelas necessidades e contextos históricos de cada época. Estes ajustes são necessários para que o ensino apresentado nas instituições educacionais sejam, ao menos, minimamente significativo aos estudantes e possam surgir os efeitos desejados em cada contexto histórico. Porém, segundo Tarouco, Silva e Silva (2016), esta mudança demanda tempo e não ocorre de forma rápida.

> Entretanto, essa mudança não ocorreu de maneira repentina, ainda hoje, nota-se que o ensino da matemática possui características didáticas voltadas para transmissão, com pouca ênfase em atividades que levem os sujeitos a refletirem sobre seu significado. (TAROUCO; SILVA; SILVA, 2016)

As mudanças na organização da disposição dos conteúdos, por exemplo, visa atender as novas demandas que surgiram com o advento de novos recursos tecnológicos e, também, as exigências do mercado de trabalho. Segundo Tarouco, Silva e Silva (2016), as mudanças relacionadas ao processo educativo não ocorre de forma repentina. Este fato se dá pelo motivo de que a construção do conhecimento exige esforço, paciência e dedicação quanto a compreensão do mundo a nossa volta. O P.I.F. nos faz compreender melhor a ideia de implicação ligada a validade de uma proposição que permanecerá válida infinitamente e este ato de validar e o tornar perpétuo circunda as noções de construção do conhecimento.

Ainda, de acordo com o CM, o conhecimento matemático é imprescindível à humanidade, por meio dele somos capazes da construção de uma sociedade crítica e ativa diante das situações do dia a dia. Os conhecimentos matemáticos devem ser instrumentalizados a favor da habilidade de desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Estes conhecimentos devem favorecer a tomada de decisões que envolvam a necessidade da utilização do raciocínio lógico de modo a contribuir com a melhoria da qualidade de vida do indivíduo e, consequentemente, a inserção e o reconhecimento dele na sociedade como alguém capaz de estruturar seus conhecimentos matemáticos a serviço de si próprio e do bem comum.

> "O conhecimento matemático é imprescindível à humanidade e ao desenvolvimento de cada sujeito dentro e fora da escola. Os conteúdos propostos e a forma como esses serão tratados em sala de aula darão condições para o cidadão resolver problemas de seu dia a dia e desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo. Assim, a Matemática é compreendida também como uma ferramenta e um elemento de inclusão social." (SEEDF, 2018b, p.152).

Portanto, fica explícito que a prática pedagógica é permeada pela intencionalidade das ações pedagógicas e ela deve ser pensada de modo concatenado com o exposto no Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola. E, ainda em consonância com o CM, o PPP é um documento político no sentido de ser permeado de intencionalidade antes, durante e após a sua execução. Ainda, por meio da leitura e reflexão dos trechos citados nesta subseção, é possível estabelecer uma relação entre as necessidades e almejos do CM em relação a preocupação em aplicar aos estudantes atividades e vivências que possam fazer sentido e, consequentemente, auxiliar na melhoria das condições de vida como sujeito. O P.I.F. surge como uma ferramenta capaz de trazer a tona pontos que podem contribuir com os objetivos explícitos no CM. Portanto, pode ser entendido como uma base legal norteadora para a construção de demonstrações que, intencionalmente, possam levar os estudantes ao exercício do aprimoramento da construção de um raciocínio mais lógico e não homogêneo.

Diante dos recortes legais expostos neste capítulo, vale ressaltar que o P.I.F. se apresenta como uma forte ferramenta que visa na contribuição do pensamento crítico, lógico e não homogêneo dos estudantes por meio da validação de diversas fórmulas estudadas ao longo de sua vida escolar. Este princípio lança mão de um novo olhar a respeito da validação das conjecturas realizadas pelos estudantes. Ainda, apresenta-se como uma ferramenta que vem a corroborar com as fórmulas que até então são apresentadas as estudantes da educação básica.

2 O Princípio de Indução Finita

Apresentaremos neste capítulo a formalização do P.I.F. conforme Axioma 2.2.1 e duas variações deste princípio, conforme os Axiomas 2.3.1 e 2.3.2. Ainda, as formalizações foram seguidas de exemplos e comentários de modo a explicitar ao leitor as particularidades deste princípio.

2.1 Importância e cuidados de uma conjetura

Iniciaremos esta discussão apresentado algumas ideias de Lima (1988), onde ele chama a atenção no trecho citado para a importância da demonstração de uma conjectura aplicada aos números naturais e não apenas o teste de tal conjectura para um determinado intervalo de números reais.

> O perigo de fazer generalizações apressadas relativamente a asserções sobre números naturais fica evidenciado com o seguinte exemplo:
> Exemplo 7. Considere o polinômio $p(n) = n^2 - n + 41$ e a afirmação "o valor de $p(n)$ é sempre um primo para "$n = 0, 1, 2, 3, ...$". Embora isso seja verdadeiro para $n = 0, 1, 2, 3, ..., 40$ temos $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo, logo a afirmação não é verdadeira.
> Semelhantemente, a expressão $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ fornece primos para $n = 1, 2, 3, ..., 79$, mas $q(80) = 802 - 79.80 + 1601 = 1681$ não é primo, pois é divisível por 41. (LIMA, 1988, p.3),

A fim de ilustrar melhor as tentativas que foram realizadas em relação as conjecturas de que o polinômio $p(n) = n^2 - n + 41$ ou mesmo o polinômio $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ pudesse ser uma fórmula fechada[1] para determinarmos os números primos, seguem as Figuras 5 e 6 que expressam algumas tentativas para um determinado intervalo de n.

---

[1] Fórmula fechada: uma expressão é dita ser uma expressão de forma fechada se, e somente se, pode ser expressa analiticamente em termos de um número delimitado de certas funções bem conhecidas.

Figura 5 – Conjectura para $p(n) = n^2 - n + 41$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

n	p(n)		n	p(n)
0	41		21	461
1	41		22	503
2	43		23	547
3	47		24	593
4	53		25	641
5	61		26	691
6	71		27	743
7	83		28	797
8	97		29	853
9	113		30	911
10	131		31	971
11	151		32	1033
12	173		33	1097
13	197		34	1163
14	223		35	1231
15	251		36	1301
16	281		37	1373
17	313		38	1447
18	347		39	1523
19	383		40	1601
20	421		41	1681

Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme a Figura 5, a conjectura da validade de $p(n) = n^2 - n + 41$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é válida até $n = 40$ e não é válida para $n = 41$. Este fato se torna fácil de observar ao gerar um quadro, por exemplo no Excel, como foi feito. Porém, os estudantes, em sala de aula, no intuito de provar a validade de tal proposição, caso realizassem a conjectura para alguns poucos números de n incorreriam em um erro. Este é um exemplo claro de que a conjectura pode levar o estudante a uma conclusão falsa.

Figura 6 – Conjectura para $q(n) = n^2 - 79n + 1601$, $n \in \mathbb{N}$

n	p(n)		n	p(n)		n	p(n)		n	p(n)
1	1523		21	383		41	43		61	503
2	1447		22	347		42	47		62	547
3	1373		23	313		43	53		63	593
4	1301		24	281		44	61		64	641
5	1231		25	251		45	71		65	691
6	1163		26	223		46	83		66	743
7	1097		27	197		47	97		67	797
8	1033		28	173		48	113		68	853
9	971		29	151		49	131		69	911
10	911		30	131		50	151		70	971
11	853		31	113		51	173		71	1033
12	797		32	97		52	197		72	1097
13	743		33	83		53	223		73	1163
14	691		34	71		54	251		74	1231
15	641		35	61		55	281		75	1301
16	593		36	53		56	313		76	1373
17	547		37	47		57	347		77	1447
18	503		38	43		58	383		78	1523
19	461		39	41		59	421		79	1601
20	421		40	41		60	461		80	1681

Fonte: Elaborada pelo autor

O exemplo exposto na Figura 6 exige ainda mais cuidado do estudante pois, conforme apresentado, o caso é válido até $n = 79$ e não é válido em $n = 80$, isto é, caso o estudante realizasse o teste da validade de $q(n) = n^2 - 79n + 1601$, $n \in \mathbb{N}$ para determinar um polinômio capaz de descrever os números primos, provavelmente incorreria em um erro. Vale ressaltar que, caso o estudante considerasse o zero como sendo natural, ainda assim obteria o primo 1601.

Cuidado, o exercício de observar padrões por meio de conjecturas é um ato de grande importância no que tange o desenvolvimento da habilidade de investigação. Porém, deve-se atentar ao fato de que a conjectura de uma proposição em um determinado intervalo conhecido não é suficiente como prova de demonstração da validade desta proposição para todos os números naturais. Para que a conjectura de uma proposição $p(n)$ seja vista como prova de demonstração da validade deve ser seguida do cálculo de todos os valores de $p(n)$ para todos os valores de n o que torna impossível para n infinito e inviável para valores com diversas casa decimais.

Ainda, segundo Lima (1988) a demonstração deve apoiar-se em métodos que assegurem a validade das etapas percorridas e, ainda, sejam permeadas de definições válidas e bem definidas. Veja abaixo um exemplo.

> Exemplo 5. Todo número natural é pequeno.
> Ora, 1 certamente é pequeno. E se n é pequeno, $n+1$ não vai subitamente tornar-se grande, logo também é pequeno. (O erro aqui consiste em que a noção "número pequeno"não é bem definida.) (LIMA, 1988, p.38)

Veja que Lima (1988) chama a atenção em dizer que o erro da demonstração de que "Todo número natural é pequeno" está no fato de que a definição do que seria um número pequeno não está bem elaborada e por este motivo incorreríamos em uma demonstração equivocada, isto é, o fato do exemplo não se apoiar em uma definição clara e bem elaborada fez com que obtivéssemos uma conclusão errônea de que todo número natural é pequeno.

Por fim, Lima (1988) adverte que a demonstração deve atentar-se para o fato de que a validade deve ser comprovada para todos os números naturais.

> A moral da história é: Só aceite que uma afirmação sobre os números naturais é realmente verdadeira para todos os naturais se isso houver de fato sido demonstrado! (LIMA, 1988, p.38)

2.2 Princípio de Indução Finita

A demonstração por indução pode gerar em alguns estudantes, durante o início dos estudos deste tema, um certo desconforto em pensar que há uma falha no processo pelo fato de, na hipótese durante o passo indutivo, estar sendo suposto como válida exatamente aquilo que se quer demonstrar.

> Para habituar-se com o método de demonstração por indução é preciso praticá-lo muitas vezes, a fim de perder aquela vaga sensação de desonestidade que o principiante tem quando admite que o fato a ser provado é verdadeiro para n, antes de demonstrá-lo para $n+1$. (LIMA, 1988, p.39)

Elon Lages Lima, em uma de suas observações, reforça a afirmação em dizer que a exercitação de demonstrações que envolvam o P.I.F. leva o estudante a segurança em não pensar que esteja realizando um demonstração supostamente viciada.

Abaixo, iniciaremos algumas discussões de modo a tornar claro o P.I.F. e, ainda, apresentar ao leitor alguns exemplos que possam exemplificar e diferenciar as atenuações deste poderosíssimo processo de demonstração.

Desejamos determinar uma fórmula para a soma: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. É comum iniciar-se pela exploração de sua estrutura e validação para alguns valores de n no intuito de determinar um padrão. Em sala de aula, os estudantes possuem o hábito de, diante de alguma fórmula, realizar o teste com alguns números no desejo da validação do que se quer provar. Veja:

Para $n=1$: $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$

Para $n=2$: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Para $n=3$: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{8+1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

Para $n=4$: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{15+1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

Ao analisar os valores obtidos em um número específico de tentativas, conjectura-se que: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

A observação de padrões auxilia na elaboração de conjecturas que possam levar a proposições que sejam capazes de exprimir uma fórmula fechada que descreva estes padrões. O P.I.F. baseia-se em uma propriedade fundamental dos números naturais que foi listada por Giussepe Peano.

O quarto axioma [2] de Peano que também é chamado de Axioma de Indução servirá de arrimo para o axioma escrito abaixo que intitularemos de Princípio de Indução Finita (P.I.F.) ou Princípio de Indução Matemática.

[2] Conforme exposto no Capítulo 1, abreviamos o quarto axioma de Peano por (A4). De modo que (A4): Seja X um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Axioma 2.2.1. *Seja $p(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:*

1. *p(1) é válida;*

2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $p(n)$ implica a validez de $p(n+1)$.*

Então, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que a validação, em 1), corresponde a 1 pertencer ao conjunto dos números naturais para os quais a propriedade é verdadeira. Deste modo, ao provar que $p(1)$ é verdadeira, mostramos que $1 \in X$, onde X é um conjunto de números naturais, isto é, $X \subset \mathbb{N}$.

Em 2) chamaremos de "passo de indução" que será constituído de hipótese, tese e demonstração da implicação.

Observemos que, em 2), temos a demonstração da implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, isto é $n \in X \Rightarrow s(n) = n+1 \in X$.

Então, o passo de indução possui a finalidade de mostrar que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por uma questão didática, ao longo deste trabalho, as demonstrações por indução serão organizadas da seguinte forma: inicialmente, será definida a propriedade $p(n)$ que se deseja provar a validade. Em seguida, a validação do caso base. Então, após a demonstração da validade do caso base para um determinado n, normalmente [3] para $n = 1$, partiremos para o passo indutivo que será constituído de hipótese que, em geral, associa válida $p(n)$; tese que, em geral, busca demonstrar a validade de $p(n+1)$ e por fim a demonstração da implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Retornaremos a conjectura de que $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$. Então, faremos a demonstração utilizando o P.I.F.

Exemplo 2.2.1. *Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Caso base: *demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.*

[3] O valor a que o caso base será iniciado dependerá da particularidade imposta pelo proposição a que se quer provar.

$$\begin{aligned} p(1) : \frac{1}{1.2} &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, p(1) é válida.

Hipótese: *vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

$$p(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{para algum } n \in \mathbb{N}$$

Tese: *devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.*

$$p(n+1) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Demonstração:

Somaremos aos dois lados da hipótese o termo: $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Portanto, $p(n+1)$ também é verdadeira, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Logo, por indução $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2.1 A importância da validade do caso base

Vale ressaltar a importância da verificação da validade do caso base pois o passo de indução trata-se da demonstração de uma implicação ($\Rightarrow$).

Exemplo 2.2.2. *Inicialmente, definamos a proposição $p(n)$: Todo número natural é igual ao seu sucessor, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Hipótese: *vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

$$p(n) : n \;=\; n+1, \text{para algum } n \in \mathbb{N}$$

Tese: *devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.*

$$p(n+1) : n+1 \;=\; n+2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} p(n+1) &: n+1 = (n+1)+1 \\ p(n+1) &: n+1 = n+2 \end{aligned}$$

Observe que a demonstração apresentada no exemplo 2.2.2 teve a validade do caso base ignorada, mas não teve a demonstração da implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ prejudicada. Agora, verificaremos, em separado, a validade do caso base em $p(n)$

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : 1 &= 1+1 \\ p(1) : 1 &= 2 \end{aligned}$$

Obtivemos um absurdo $(1 = 2)$. Portanto, o exemplo 2.2.2 deixa claro ao leitor que é possível demonstrar, em alguns casos, a validade da implicação de uma proposição mesmo que ela seja falsa. O P.I.F. fundamenta-se na validação do caso base e de $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Ainda, evidencia-se que uma implicação, por exemplo, $p \Rightarrow q$ só é falsa no caso em que p é verdadeira e q é falsa, veja o Quadro abaixo:

Quadro 2.1 – Valor lógico da implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor

O Quadro 2.1 com os valores lógicos da implicação($\Rightarrow$) evidencia que em $p \Rightarrow q$ sempre que p for falso a implicação terá seu valor lógico verdadeiro. Assim, o caso em que deve ser analisado com cautela é a situação em que p é verdadeira, pois neste caso a implicação só será verdadeira se q também for verdadeira. Por isso atribuímos, momentaneamente, à hipótese o valor lógico verdadeiro e buscamos mostrar que a implicação será verdadeira, isto é, se atribuirmos p verdadeira e demonstrarmos que a implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ também é verdadeira, concluímos que a tese q também é verdadeira.

Deste modo, o fato de o passo de indução $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ ser verdadeiro não depende diretamente da propriedade p ser verdadeira, isto é, é perfeitamente possível demonstrar o passo de indução em uma propriedade que não seja verdadeira. O passo de indução mostra a validade da implicação em uma propriedade p e não a validade da propriedade em si. Por isso, ressalta-se, a extrema importância da verificação, em um primeiro instante, da validade do caso base. Pois se o caso base é comprovadamente verdadeiro e, em seguida, prova-se a implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, entende-se o caso base como sendo um início válido para então desencadear os sucessores válidos. O passo de indução está supondo temporariamente que a propriedade é válida para um certo n para então demonstrar que também é válida para o seu sucessor $n+1$. Para sinalizar a importância da verificação do caso base, mostraremos um exemplo em que o caso base se não verificado, poderá levar o estudante ao erro.

Assim consideraremos a seguinte conjectura:

$$p'(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Lembre-se que acabamos de provar a validade de: $p(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ no exemplo 2.2.1. Portanto, sabemos que a proposição $p'(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ não é válida.

Exemplo 2.2.3. *Definamos a proposição* $p'(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$ *, para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Faremos primeiramente o passo indutivo, isto é, propositalmente ignoraremos a verificação da validade do caso base.

Hipótese: *vamos supor válida* $p'(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$$p'(n) : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}, \textit{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Tese: *devemos mostrar que* $p'(n+1)$ *também é válida.*

$$p'(n+1): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2n+3}{n+2}\ \textit{, para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Somaremos aos dois lados da hipótese o termo: $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{2n+1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(2n+1)(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2+4n+n+2+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2+5n+3}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(2n+3)(n+1)}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n+3}{n+2}
\end{aligned}$$

Então, se $p'(n)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, então $p'(n+1)$ também é, ou seja, demonstramos que a implicação $p'(n) \Rightarrow p'(n+1)$ no caso em que $p'(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{n+1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ é verdadeira.

Agora, observe que o fato da implicação $p'(n) \Rightarrow p'(n+1)$ ser verdadeira não depende necessariamente da propriedade ser verdadeira pois, conforme o Quadro 2.1, a implicação $p \Rightarrow q$ pode ser verdadeira mesmo quando p é falso. Isso nos evidencia que apenas demonstrar a validade da implicação não nos garante a validade da proposição. Para isso, se faz necessário a verificação da validade do caso base. Veja, a verificação da implicação apenas nos garante que se a propriedade é válida para algum número natural, então ela valerá para o seu sucessor. Porém, enquanto não for verificada a validade do caso base, não podemos garantir que tal propriedade é válida para algum número natural n.

Em resumo, o caso base prova que a propriedade p é válida para algum número natural n. Em seguida, o passo indutivo busca mostrar que se a propriedade é válida para um certo valor n então também o será para $n+1$.

Finalizando a análise a respeito da propriedade $p'(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{n+1}$, faremos a verificação da validade do caso base, isto é, verificaremos se $p'(1)$ é válida.

Caso base: demonstraremos a validade de $p'(n)$ para $n=1$.

$p'(1) : \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{2n+1}{n+1}$ quando $n = 1$ é $\dfrac{2.1+1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$.

Veja, o caso base $p'(1)$ não foi validado na proposição $p'(n) : \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{2n+1}{n+1}$, ou seja, este fato impede que consideremos $p'(n)$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, concluímos que o exemplo 2.2.3 satisfez a condição 2 do axioma 2.2.1, mas não satisfez a condição 2.

Exemplo 2.2.4. *Vejamos uma questão que está presente no livro Matemática Discreta.*

> *Diga onde está o erro da seguinte demostração da afirmativa*
>
> $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n = 2^{n+1}$
>
> *A propriedade é trivialmente válida para* $n = 1$*. Suponhamos que seja válida para* n*, ou seja,* $1+2+4+8+...+2^n = 2^{n+1}$*. Então* $1+2+4+8+...+2^n+2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2.2^{n+1} = 2^{n+2}$*.*
>
> *Portanto, a propriedade também é válida para* $n + 1$*. Logo, pelo Princípio de Indução Finita,* $1+2+4+8+...+2^n = 2^{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. (MORGADO; CARVALHO, 2015)*

Veja que neste exemplo 2.2.4, o autor do livro deseja que o erro seja indicado. Então, diante da analise dos cálculos apresentados no passo indutivo, não encontramos erro algum. Para melhor esclarecer, reescreveremos o passo indutivo descrito pelo autor utilizando o formato adotado neste trabalho para a apresentação da aplicação do P.I.F..

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n = 2^{n+1}$.

Tese: devemos mostrar que $p(n + 1)$ também é válida.

$p(n + 1) : 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n + 2^{n+1} &= 2^{n+1} + 2^{n+1} \\ &= 2.2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

Conclusão: $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2}$

Portanto a implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é válida em $p(n) : 1+2+4+8+...+2^n = 2^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Agora, verificaremos a validade do caso base:

Caso base: $p(1) : 1 + 2^1 = 3 \neq 2^{1+1} = 4$
Portanto, o erro se encontra na verificação da validade do caso base, isto é, a propriedade $p(n) : 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n = 2^{n+1}$ não é válida para quando $n = 1$.

Vale a pena ressaltar que o caso base deve ser validado para um valor de n que atenda as condições do problema, isto é, não é necessário a obrigatoriedade do caso base ser verificado para $n = 1$ ou mesmo $n = 0$. A seguir, o leitor observará duas variações do P.I.F., conforme os Axiomas 2.3.1 e 2.3.2.

2.3 Variações do Princípio de Indução Finita

Caso base para naturais diferentes de 1.

Axioma 2.3.1. *Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p(n)$ na qual se podem verificar as seguintes propriedades:*
(a) $p(n_0)$ é verdadeira;
(b) se $p(n)$ é verdadeira então $p(n + 1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.
Então, $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

Vejamos um exemplo de uma propriedade (número de diagonais de um polígono convexo) que poderá ser verificada utilizando a variação citada acima, Axioma 2.3.1

A fórmula do número de diagonais d de um polígono convexo pode ser obtida utilizando combinação simples. Veja:

Consideraremos um polígono convexo de n lados, a combinação de n elementos tomados 2 a 2 resultará em um valor que corresponderá ao número de diagonais acrescentado ao número de lados deste polígono. Então, para obtermos apenas o número de diagonais de um polígono de n lados faremos $d_n = C_{n,2} - n$, onde d_n é o número de diagonais de um polígono de n lados, d_{n+1} é o número de diagonais de um polígono de $n + 1$ lados e $C_{n,2}$ é a combinação de n tomados 2 a 2. No apêndice B, o leitor encontrará uma sugestão para atividade investigativa que o auxiliará, junto com seus estudantes, na conjectura da fórmula que descreva o número de diagonais de um polígono convexo.

$$\begin{aligned}
d_n &= C_{n,2} - n \\
&= \frac{n!}{(n-2)!.2!} - n \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2 \cdot 1} - n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - n \\
&= \frac{n(n-1) - 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n - 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n}{2} \\
d_n &= \frac{n(n-3)}{2}
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o P.I.F., realizaremos a demonstração da validade de $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Exemplo 2.3.1. *Inicialmente, definamos a proposição*

$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 3$. *(o caso do triângulo)*

$$\begin{aligned}
p(3) : d_3 &= \frac{3(3-3)}{2} \\
p(3) &= 0
\end{aligned}$$

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ *, para algum* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Tese: *devemos mostrar que* $p(n+1)$ *também é válida.*

$p(n+1) : d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

Observe que na demonstração ocorrerá: d_n *representa o número de diagonais de um polígono de* n *lados; no momento em que o polígono passou a ter* $n+1$ *lados, o termo* "$+1$" *surge pelo fato de que o segmento que ligava o vértice* 1 *ao vértice de número* n *deixa de ser contado como sendo um lado e passa a ser contado como uma diagonal (segmento em vermelho na Figura 7); e por fim,* $(n+1-3)$ *representa o número das novas diagonais que passaram a existir no momento em que o polígono passou a ter* $n+1$ *lados (segmentos em verde na Figura 7).*

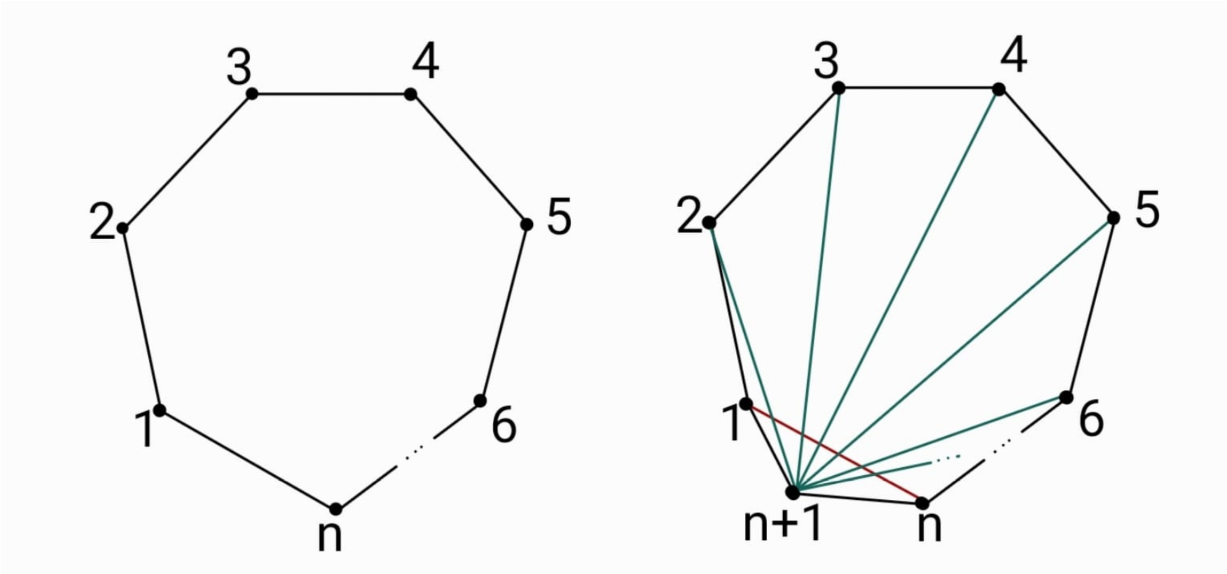


Figura 7 – Polígono de n lados que passou a ter $n+1$ lados.
Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
d_{n+1} &= d_n + 1 + (n+1-3) \\
&= d_n + 1 + (n-2) \\
&= \frac{n.(n-3)}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2n-4}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2 + 2n - 4}{2} \\
&= \frac{n^2 - 2n + n - 2}{2} \\
&= \frac{n(n-2) + 1(n-2)}{2} \\
d_{n+1} &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusão: $d_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Desta forma, mostramos que $d_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$*, ou seja, que* $p(n)$ *implica* $p(n+1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Portanto, pelo P.I.F., $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ *, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Vejamos agora um outro exemplo em que também utilizaremos o Axioma 2.3.1.

Exemplo 2.3.2. *Mostre que para todo número* $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, *vale que* $2^n < n!$.

Admitiremos a proposição $p(n) : 2^n < n!$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 4$.

$p(4) : 2^4 = 16 < 4! = 4.3.2.1 = 24$

Portanto o caso base é válido pois $p(4) : 2^4 < 4!$.

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

$p(n) : 2^n < n!$

Tese: *devemos mostrar que* $p(n+1)$ *também é válida.*

$p(n+1) : 2^{n+1} < (n+1)!$

Demonstração:

Inicialmente utilizaremos a seguinte desigualdade para nos auxiliar: $2 < n+1$, *pois* $n \geq 3$.

Agora, partindo da hipótese, multiplicaremos o lado direito por 2 *e o lado esquerdo por* $n+1$. *Como* $2 < n+1$ *a desigualdade presente na hipótese não se alterará.*

$$\begin{aligned} 2^n &< n! \\ 2^n.2 &< n!.(n+1) \\ 2^{n+1} &< (n+1)! \end{aligned}$$

Portando $2^{n+1} < (n+1)!$

Observamos então que há situações em que o caso base pode ser, por uma condição imposta pela natureza da questão, ser calculado em um valor distinto de, como é corriqueiramente utilizado, zero ou um.

Ainda, observamos na demonstração acima que o P.I.F. foi utilizado para a demonstração de uma desigualdade.

P.I.F. na demonstração de identidades

Vale ressaltar que, quando o P.I.F. é utilizado para a demonstração de identidades que se compõem por meio da igualdade entre termos, a demonstração, comumente, é obtida por meio de:

a) manipulação direta dos termos da hipótese de modo a demonstrar a implicação;

b) ou mesmo, manipulando um dos membros da tese para com a utilização da hipótese conseguirmos demonstrar o outro membro da tese.

Vejamos abaixo a demonstração exemplificando as situações a) e b) em um mesmo exemplo. Para isso utilizaremos a seguinte proposição $p(n) : 1.2+2.3+3.4+...+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3.3. *Demonstração da proposição* $p(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *utilizando a situação a), veja:*

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 1$.

$p(1) : 1.2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1.2.3}{3} = 1.2$

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Tese: *devemos mostrar que* $p(n + 1)$ *também é válida.*

$p(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Demonstração: *Partindo da hipótese, somaremos em ambos os lados o termo* $(n + 1)(n + 2)$

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n + 1)(n + 2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 2.3.4. *Agora, demonstração da proposição* $p(n) : 1.2+2.3+3.4+...+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *utilizando a situação b), veja:*

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 1$.

$p(1) : 1.2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1.2.3}{3} = 1.2$

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Tese: *devemos mostrar que* $p(n + 1)$ *também é válida.*

$p(n) : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Demonstração: *Utilizaremos o lado esquerdo da igualdade apresentada na tese.*

$$\begin{aligned} 1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)+(n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Deste modo, apresentamos duas possíveis formas para que sejam realizadas as manipulações na demonstração da implicação $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ em um processo de indução finita quando trata-se de uma igualdade.

P.I.F. na demonstração de desigualdades

Agora, quando se tratar de uma desigualdade, a demonstração da implicação pelo P.I.F., nem sempre, é demonstrada de forma direta, isto é, normalmente a demonstração da implicação em uma desigualdade exige o uso de outras desigualdades, como foi o caso que vimos no exemplo 2.3.2, ou mesmo o uso do Teorema 2.3.1.

Faremos a demonstração do teorema da Transitividade pois ele será utilizado em demonstrações que estão contidas logo a frente.

Teorema 2.3.1. *(Transitividade) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*

Demonstração:

Se $m < n$ e $n < p$, então $n = m+k$ e $p = n+r$, r e $k \in \mathbb{N}$. Logo $p = (m+k)+r = m+(k+r)$, portanto $m < p$.

Exemplo 2.3.5. *Demonstraremos a seguinte proposição $p(n) : 2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Caso base: *demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.*

$p(1) : 2^1 > 1$. *Logo, $p(1)$ é válida pois $2 > 1$.*

Hipótese: *vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

$p(n) : 2^n > n$ *para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Tese: *devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.*

$p(n) : 2^{n+1} > n+1$

Demonstração:

Partiremos da hipótese e multiplicaremos ambos os lados da desigualdade por 2.

$$2^n.2 > 2n$$

Considerando que para todo n natural, temos que $2n \geq n+1$.

Pela transitividade da desigualdade temos: $2^{n+1} > 2n > n+1$

Portanto $2^{n+1} > n+1$.

P.I.F. na demonstração de divisibilidades

Ainda, o P.I.F. apresenta-se como uma grande ferramenta na demonstração de problemas de divisibilidade conforme demonstração em seguida.

Exemplo 2.3.6. *Demonstraremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.*

Para isso definiremos a proposição $p(n) : 4^n + 6n - 1$ é divisível por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: *demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.*

$p(1) : 4^1 + 6.1 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$ *e* 9 *é divisível por* 9.

Hipótese: *vamos supor válida $p(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

$p(n) : 4^n + 6n - 1$ *é divisível por* 9*, para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Tese: *devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.*

$p(n+1) : 4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ *é divisível por* 9.

Demonstração:

Como, por hipótese, 4^n+6n-1 é divisível por 9, escreveremos a seguinte igualdade $4^n + 6n - 1 = 9k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 4^n + 6n - 1 &= 9k \\ 4^n &= 9k - 6n + 1 \end{aligned}$$

A seguir em determinado momento da manipulação, faremos algumas operações, como por exemplo: multiplicaremos ambos os lados por 4; somaremos $6(n+1) - 1$ em ambos os lados; colocaremos o 9 em evidência;

$$\begin{aligned}
4^n.4 &= 4.(9k-6n+1)\\
4^{n+1} &= 36k-24n+4\\
4^{n+1}+6(n+1)-1 &= 36k-24n+4+6(n+1)-1\\
4^{n+1}+6(n+1)-1 &= 36k-24n+4+6n+6-1\\
4^{n+1}+6(n+1)-1 &= 36k-18n+9\\
4^{n+1}+6(n+1)-1 &= 9(4k-2n+1)
\end{aligned}$$

Por fim, tomaremos $4k-2n+1=d$, sendo $d\in\mathbb{Z}$. Teremos $4^{n+1}+6(n+1)-1=9d$.

Portanto, $4^{n+1}+6(n+1)-1$ é divisível por 9.

Caso base para um conjunto não-unitário ou sequência finita em $\mathbb{N}$.

Axioma 2.3.2. *Seja $p(n)$ uma sentença aberta relativa ao natural n. Suponhamos que:*
i) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, ...,$p(n_0)$ são verdadeiras;
ii) Para todo $n\in\mathbb{N}$,a validez de $p(n)$, $p(n+1)$, $p(n+2)$, ..., $p(n+n_0-1)$ implica a validez de $p(n+n_0)$.
Então, $p(n)$ é válida para todo $n\in\mathbb{N}$.

Há ainda uma outra variante do princípio de indução finita, nesta verifica-se, no caso base, a validade para $n=1,2,3,...,n_0$. Veja:

Exemplo 2.3.7. *Veja o exemplo abaixo:*

Seja (F_n) definida por

$$\begin{cases} F_1=F_2=1\\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\end{cases},\forall n\in\mathbb{N}.$$

Provaremos que $F_n\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Antes, definamos a proposição $p(n): F_n\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Caso base: *demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n=1$ e $n=2$.*

$p(1): F_1=1\geq\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2}$

Temos que: $1\geq\frac{2}{3}$

$p(2) : F_2 = 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2}$

Temos que: $1 \geq 1$

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n-1)$ *e* $p(n)$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$p(n-1) : F_{n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$

$p(n) : F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

Tese: *devemos provar a validade de* $p(n+1)$.

$p(n+1) : F_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Demonstração:

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

$F_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} . \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} . \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$F_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]$

$F_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} . \frac{10}{9}$

Como $\frac{10}{9} > 1$*, temos* $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} . \frac{10}{9} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Logo: $F_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Neste capítulo o leitor pôde ser apresentado à formalização seguida de exemplos do P.I.F., conforme Axioma 2.2.1, e suas duas variações, conforme os Axiomas 2.3.1 e 2.3.2. Agora, no capítulo seguinte, o leitor terá a oportunidade de observar a aplicação do P.I.F. em fórmulas que são trabalhadas na educação básica.

3 Demonstrações por meio do Princípio de Indução Finita aplicadas à Educação Básica

Neste capítulo, abordaremos diversas fórmulas que são apresentadas ao longo do Ensino Médio aos estudantes e que por vezes carecem de demonstração formal ou mesmo que quando raramente demonstradas, utilizam processos distintos ao realizado pelo P.I.F.. Assim, apresentamos neste capítulo uma sequência de fórmulas matemáticas que podem ter sua validade demonstrada por meio do P.I.F. e que em cada uma delas estão indicados o caso base e o passo indutivo (hipótese e tese) que é composto por: tese, hipótese e demonstração. Portanto, o leitor observará que, neste capítulo, as demonstrações priorizaram o P.I.F. com exceção da relação de Stífel que foi demonstrada pela manipulação de termos.

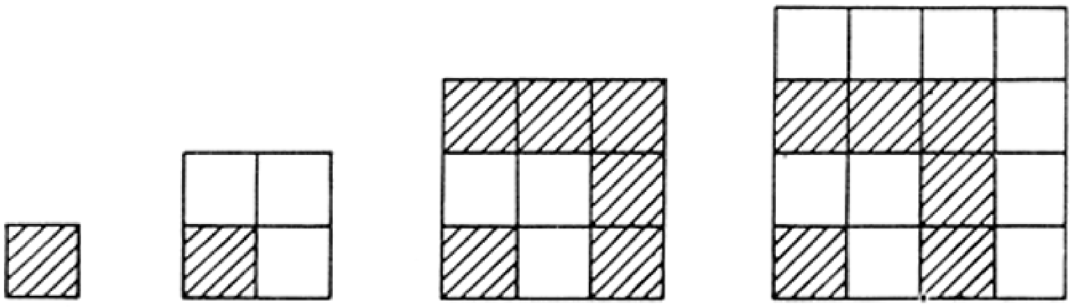
Esta organização se dá para que o conteúdo deste capítulo possa ser utilizado pelos professores da educação básica em suas aulas. Portanto, tornando-se assim um auxílio pedagógico para que o P.I.F. possa fazer parte dos planejamentos de aula dos professores. Ainda, proporcionando aos estudantes um momento que, segundo os recortes de documentos oficiais aqui apresentados no capítulo 1, possa auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, na capacidade de conjecturação, no aprimoramento do processo de investigação, na aplicação das propriedades matemáticas, no emprego de estratégias de resolução e desenvolvimento dos cálculos, no desenvolvimento da capacidade de observar padrões e realizar conjecturas seguras do ponto de vista matemático, no desenvolvimento da capacidade de realizar experimentações para que se possa analisar a validade de tal conjectura de modo a não ferir algum princípio matemático ou mesmo no incentivo do uso de recursos tecnológicos para observação e comprovação de padrões observados.

3.1 Soma de n primeiros números naturais

Nesta seção apresentaremos a demonstração das formulas para a soma dos n primeiros números ímpares e para a soma dos n primeiros números pares utilizando o Axioma 2.2.1 . Ainda, realizaremos previamente a conjectura de suas fórmulas.

Soma dos n primeiros números ímpares

É possível a partir de um quadrado unitário, formar quadrados maiores, acrescen-



1   1 + 3 = 4 = 2²   1+3 + 5 = 9 = 3²   1 + 3 + 5 + 7= 16 = 4²

Figura 8 – Conjectura para soma dos n primeiros números ímpares

Fonte: Rampazzo (1988)

tando progressivamente outros quadrados unitários, conforme Rampazzo (1988).

Observando a Figura 8 podemos conjecturar que a soma dos n primeiros números ímpares pode ser obtida por meio da expressão n^2.

Exemplo 3.1.1. *Inicialmente definamos a proposição* $p(n) : 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) &: 1 = 1^2 \\ &: 1 = 1 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(1)$.

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$

Tese: *devemos mostrar que* $p(n + 1)$ *também é válida.*

$p(n + 1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Demonstração:

Partiremos da manipulação da expressão $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1)$, *e nesta expressão substituiremos* $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ *por* n^2 *de acordo com a hipótese.*

$$\begin{aligned} &= 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Conclusão: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Portanto, pelo P.I.F., $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Soma dos n primeiros números pares

Assim como realizado na conjectura do exemplo 3.1.1, observaremos o padrão que se pode criar por meio de figuras compostas por quadrados unitários. Agora, utilizaremos retângulos que podem ser decompostos em quadrados unitários conforme a Figura 9.

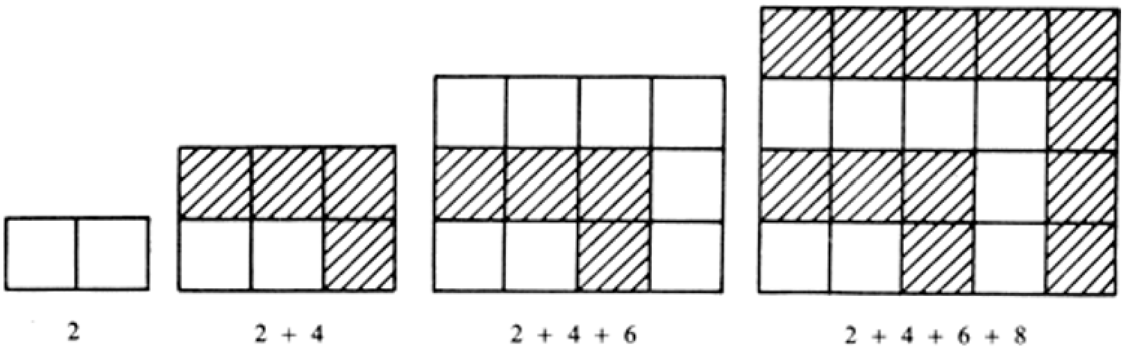


Figura 9 – Conjectura para soma dos n primeiros números pares
Fonte: Rampazzo (1988)

Podemos conjecturar que a soma dos n primeiros números pares pode ser obtida por meio da expressão $n(n + 1)$, pois observando a Figura 9, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= 1(1 + 1) \\ 6 &= 2(2 + 1) \\ 12 &= 3(3 + 1) \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.2. *Inicialmente definamos a proposição* $p(n) : 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: *demonstraremos a validade de* $p(n)$ *para* $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) &: 2.1 = 1(1 + 1) \\ &: 2 = 2 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(1)$.

Hipótese: *vamos supor válida* $p(n)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$

Tese: *devemos mostrar que* $p(n+1)$ *também é válida.*

$p(n+1) : 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$

Demonstração:

Partiremos da manipulação da expressão $2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1)$, *e nesta expressão substituiremos* $2 + 4 + 6 + ... + 2n$ *por* $n(n+1)$ *de acordo com a hipótese.*

$$\begin{aligned} &= 2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) \\ &= (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Conclusão: $2 + 4 + 6 + ... + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$.

Portanto, pelo P.I.F., $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Sequência de Fibonacci

Sendo a sequência de Fibonacci[1] definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_1 = F_2 = 1$ uma recorrência[2] de 2º ordem[3], a esta recorrência temos a equação característica $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r'' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Com isso a solução da equação de recorrência é da forma $a_n = C_1 r^n + C_2 r^n$, onde C_1 e C_2 são determinadas pelos termos iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, conforme descrito a seguir.

Utilizando a equação característica $r^2 + pr + q = 0$, onde $(q \neq 0)$, teremos:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\triangle = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$$

[1] Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, (Pisa, c. 1170 — Pisa, c. 1250) mais reconhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano nomeado como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela divulgação da sequência de Fibonacci e pela sua participação na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

[2] Relação de recorrência (ou passo recorrente) é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos.

[3] Relação de Recorrência de Segunda Ordem: Quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos.

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1}$$

$$r^{'} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r^{''} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Solução: $a = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Agora, vamos determinar C_1 e C_2 conhecendo F_1 e F_2:

$$F_1 = C_1.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \qquad \text{(a)}$$

$$F_2 = C_1.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \qquad \text{(b)}$$

Manipulando (a), temos: $2 = C_1\left(1+\sqrt{5}\right) + C_2\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Logo: $C_1 = \dfrac{2 - C_2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1+\sqrt{5}}$.

Manipulando (b), temos: $4 = C_1\left(6+2\sqrt{5}\right) + C_2\left(6-2\sqrt{5}\right)$

Substituindo (a) em (b):

$$4 = \left(\frac{2 - C_2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(6+2\sqrt{5}\right) + C_2\left(6-2\sqrt{5}\right)$$

$$4\left(1+\sqrt{5}\right) = 2\left(6+2\sqrt{5}\right) - C_2\left(1-\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right) + C_2\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$4+4\sqrt{5} = 12+4\sqrt{5} - 6C_2 - 2C_2\sqrt{5} + 6C_2\sqrt{5} + 10C_2 + 6C_2 + 6C_2\sqrt{5} - 2C_2\sqrt{5} - 10C_2$$

$$-8 = 8C_2\sqrt{5}$$

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Substituindo o valor encontrado de C_2 na manipulação de (a): $2 = C_1(1+\sqrt{5})+C_2(1-\sqrt{5})$, temos:

$$\begin{aligned}
2 &= C_1(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)\\
2 &= C_1(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{\sqrt{5}} + 1\\
2\sqrt{5} &= C_1(\sqrt{5}+5) - 1 + \sqrt{5}\\
C_1 &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+5}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\\
&= \frac{5-1}{5-\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}\\
&= \frac{4}{4\sqrt{5}}\\
C_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Concluímos que a sequência de Fibonacci é descrita por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3.2.1 Demonstração da sequência de Fibonacci

Mostraremos, utilizando o P.I.F. por meio do Axioma 2.3.2, que o termo geral da sequência de Fibonacci é dada por:

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

conforme encontrado anteriormente por recorrência.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$ e $n = 2$.

$$
\begin{aligned}
p(1) : F_1 &= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(2) : F_2 &= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} \\
&= \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ e $p(n+1)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
p(n) : F_n &= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \text{para algum n} \in \mathbb{N} \\
p(n+1) : F_{n+1} &= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \text{para algum n} \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Tese: devemos mostrar que $p(n+2)$ também é válida.

$$
p(n+2) : F_{n+2} = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}
$$

Demonstração:

Por definição, temos que a sequência de Fibonacci é obtida por meio de $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Pela hipótese, temos que

$$
\begin{aligned}
F_n + F_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Nesta etapa, faremos a seguinte substituição: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ por $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$ e $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ por $\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}$.

$$
= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}
$$

Agora, usaremos o fato de que: $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = \left(6+2\sqrt{5}\right)$ e também $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = \left(6-2\sqrt{5}\right)$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} \\
&= F_{n+2}
\end{aligned}
$$

Desta forma, mostramos que $F_{n+2} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$, ou seja, que $p(n)$ e $p(n+1)$ implica $p(n+2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portando, pelo P.I.F., $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Propriedade na sequência de Fibonacci

Demonstraremos a seguinte propriedade na Sequência de Fibonacci:

$$F_k^2 = F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}$$

Levando em consideração que a sequência de Fibonacci é descrita por:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_3 &= 2 \\
F_4 &= 3 \\
F_5 &= 5 \\
F_6 &= 8 \\
F_7 &= 13 \\
&\vdots \\
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

É possível conjecturar que ao tomar um elemento F_k de modo que $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ e elevá-lo ao quadrado (F_k^2) temos que $F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}$. Veja a conjectura:

$$\begin{aligned}
1 = F_2^2 &= F_1.F_3 - 1 \\
4 = F_3^2 &= F_2.F_4 + 1 \\
9 = F_4^2 &= F_3.F_5 - 1 \\
25 = F_5^2 &= F_4.F_6 + 1 \\
&\vdots \\
F_k^2 &= F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}
\end{aligned}$$

Inicialmente, definamos a proposição

$p(k) : F_k^2 = F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$

Caso base: demonstraremos a validade de $p(k)$ para $k = 2$.

$$\begin{aligned}
p(2) : F_2^2 &= F_1.F_3 + (-1)^2 \\
&= 1.2 + (-1)^{2-1} \\
&= 1.2 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

$p(k) : F_k^2 = F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}$

Tese: devemos mostrar que $p(k+1)$ também é válida.

$p(k+1) : F_{k+1}^2 = F_k.F_{k+2} + (-1)^k$

Demonstração:

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_{k+1} \\ &= F_{k+1}.(F_k + F_{k-1}) \\ F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_k + F_{k+1}.F_{k-1} \end{aligned}$$

Agora, manipulando a hipótese, temos:

$$\begin{aligned} F_k^2 &= F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1} \\ F_{k-1}.F_{k+1} &= F_k^2 - (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

Substituiremos esta manipulação em $F_{k+1}^2 = F_{k+1}.F_k + F_{k+1}.F_{k-1}$. Veja:

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_k + F_{k+1}.F_{k-1} \\ F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_k + F_k^2 - (-1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainda, faremos uma outra substituição, $-(-1)^{k-1} = (-1)^k$.

Pois: $-(-1)^{k-1} = -\left[\dfrac{(-1)^k}{-1}\right] = (-1)^k$.

Então, continuando a demonstração temos:

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_k + F_k^2 - (-1)^{k-1} \\ &= F_{k+1}.F_k + F_k^2 + (-1)^k \\ &= F_k(F_{k+1} + F_k) + (-1)^k \\ F_{k+1}^2 &= F_k.F_{k+2} + (-1)^k \end{aligned}$$

Concluímos que $F_{k+1}^2 = F_k.F_{k+2} + (-1)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Desta forma, mostramos que $F_{k+1}^2 = F_k.F_{k+2} + (-1)^k$, ou seja, que $p(k)$ implica $p(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Portanto, pelo P.I.F., $p(k) : F_k^2 = F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$.

3.3 Propriedades dos coeficientes binomiais

3.3.1 Relação de Stifel

A relação de Stifel é uma identidade envolvendo coeficientes binomiais, e também utilizada para facilitar a construção do triangulo de Pascal [4] pois para encontrar um termo, basta realizar a soma do termo que está na linha acima dele e na mesma coluna com o termo que está na coluna e linha anteriores a ele. Ainda, ela servirá de apoio às demonstrações deste seção.

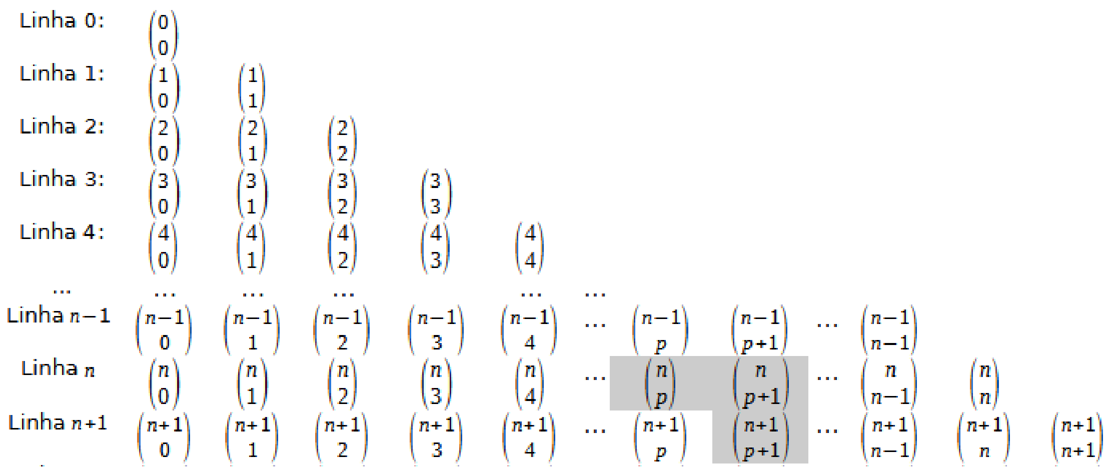


Figura 10 – Relação de Stifel no triângulo de Pascal.

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 10, temos uma indicação dos binomiais que estão sendo generalizados pela relação de Stifel.

Demonstraremos a relação de Stifel por meio de manipulações algébricas.

Relação de Stifel: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

Nesta etapa utilizaremos a notação $C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$, onde $C_{n,p}$ representa a combinação de n elementos tomados p a p; $C_{n,p+1}$ representa a combinação de n elementos tomados $p+1$ a $p+1$ e $C_{n+1,p+1}$ representa a combinação de $n+1$ elementos tomados $p+1$ a $p+1$.

Realizaremos a manipulação do primeiro membro: $C_{n,p} + C_{n,p+1}$ de modo a aplicarmos a fórmula da combinatória simples.

Portanto,

[4] Blaise Pascal (1623-1661) foi um importante cientista francês do século XVII que realizou grandes contribuições para a física e a matemática. Inventou uma das primeiras calculadoras mecânicas, e era reconhecido por sua grande erudição. Converteu-se ao jansenismo, e dedicou os últimos anos de sua vida ao estudo da teologia e filosofia.(SILVA, 2021)

$$
\begin{aligned}
C_{n,p} + C_{n,p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n![(p+1) + (n-p)]}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= C_{n+1,p+1}.
\end{aligned}
$$

3.3.2 Teorema das Linhas

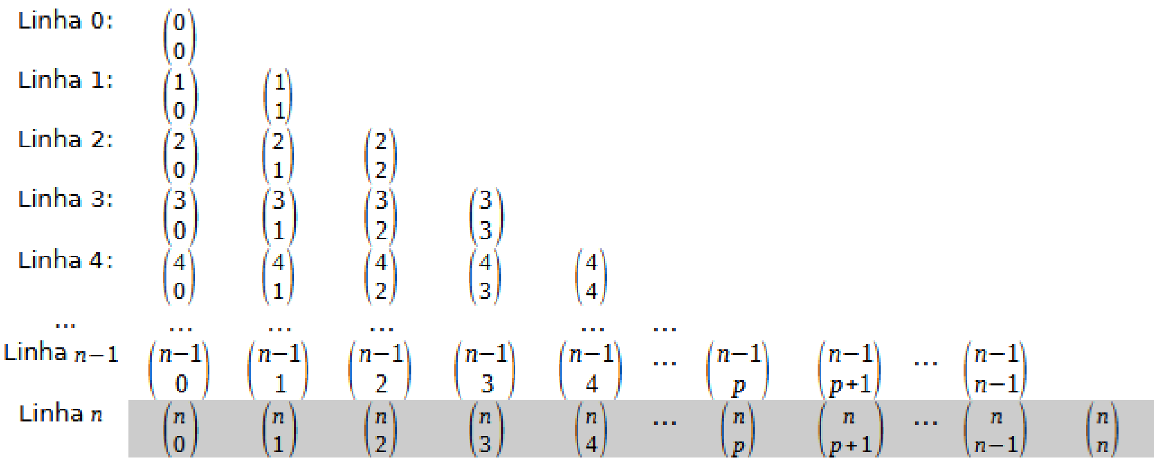


Figura 11 – Teorema das linhas no triângulo de Pascal.
Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstraremos o teorema das linhas utilizando o P.I.F.. Para isso, em determinado momento, nos reportaremos a Relação de Stifel.

Mostraremos utilizando o processo de indução que $C_{n,0} + C_{n,1} + ... + C_{n,n} = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : C_{n,0} + C_{n,1} + ... + C_{n,n} = 2^n$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 0$.

$$\begin{aligned} p(0) &: C_{n,0} \\ &= \frac{n!}{0!n!} \\ &= 1 \\ p(0) = &\ 2^0 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$p(n) : C_{n,0} + C_{n,1} + ... + C_{n,n} = 2^n, \text{para algum } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$$p(n+1) : C_{n+1,0} + C_{n+1,1} + ... + C_{n+1,n} + C_{n+1,n+1} = 2^{n+1}$$

Demonstração:

Partindo da hipótese e realizando a multiplicação por 2, temos:

$$\begin{aligned} C_{n,0} + C_{n,1} + ... + C_{n,n} &= 2^n \\ 2.(C_{n,0} + C_{n,1} + ... + C_{n,n}) &= 2^n.2 \\ C_{n,0} + C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,2} + C_{n,3} + ... + C_{n,n-1} + C_{n,n-1} + C_{n,n} + C_{n,n} &= 2^n.2 \end{aligned}$$

Usaremos a relação de Stifel para substituir alguns termos, por exemplo:

$$\begin{aligned} C_{n,0} + C_{n,1} &= C_{n+1,1} \\ C_{n,1} + C_{n,2} &= C_{n+1,2} \\ C_{n,2} + C_{n,3} &= C_{n+1,3} \\ &\dots \\ C_{n,n-1} + C_{n,n} &= C_{n+1,n} \end{aligned}$$

Ainda, faremos as seguintes substituições $C_{n,0}$ por $C_{n+1,0}$ e $C_{n,n}$ por $C_{n+1,n+1}$.

Assim obteremos:

$$\begin{aligned} C_{n,0}+C_{n,0}+C_{n,1}+C_{n,1}+C_{n,2}+C_{n,2}+C_{n,3}+...+C_{n,n-1}+C_{n,n-1}+C_{n,n}+C_{n,n} &= 2^n.2 \\ C_{n+1,0}+C_{n+1,1}+C_{n+1,2}+...+C_{n+1,n}+C_{n+1,n+1} &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Desta forma, mostramos que $C_{n+1,0}+C_{n+1,1}+...+C_{n+1,n}+C_{n+1,n+1}=2^{n+1}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F., $C_{n,0}+C_{n,1}+...+C_{n,n}=2^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.3.3 Teorema das colunas

Demonstraremos o teorema das colunas utilizando o P.I.F. Para isso, em determinado momento, nos reportaremos a Relação de Stífel.

Mostraremos, utilizando o processo de indução, que
$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

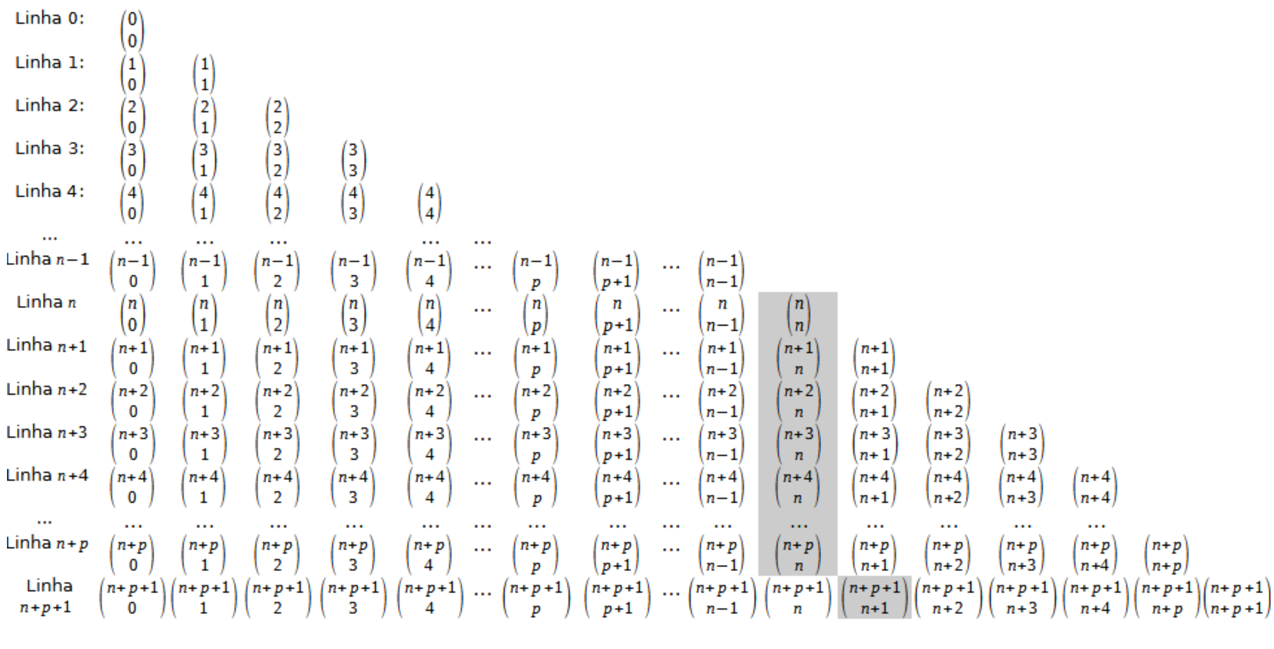


Figura 12 – Teorema das colunas no triângulo de Pascal.

Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente, definamos a proposição

$p(n)$: $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n=0$.

$$\begin{aligned} p(0) : C_{0,0} &= \binom{0}{0} \\ &= \frac{0!}{0!0!} \\ &= 1 \\ p(0) &= \binom{1}{1} \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p(n) \ : \ \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+2}{n+1}$

Demonstração:

Partindo da hipótese, somaremos em ambos os lados o termo $\binom{n+p+1}{n}$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} + \binom{n+p+1}{n}$$

$$= \binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n}$$

Pela relação de Stifel temos que $\binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+2}{n+1}$

Conclusão:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+2}{n+1}$$

Desta forma, mostramos que $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}+\binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+2}{n+1}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F., $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.3.4 Teorema das diagonais

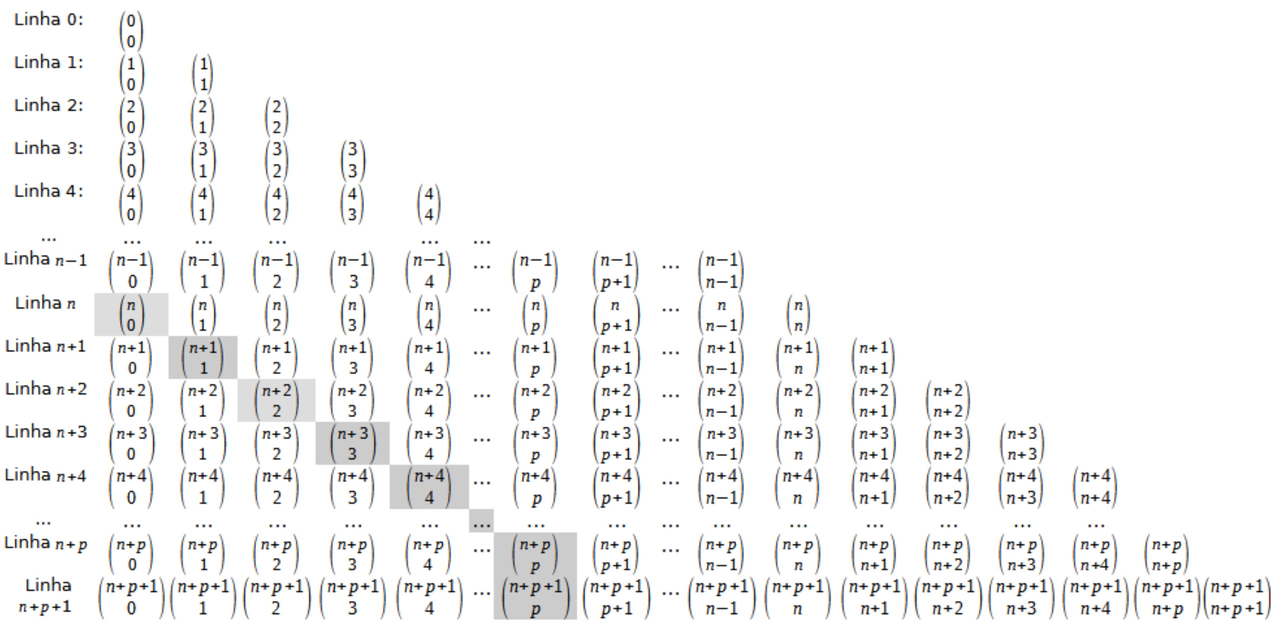


Figura 13 – Teorema das diagonais no triângulo de Pascal.
Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstraremos o teorema das diagonais utilizando o P.I.F. Para isso, em determinado momento, nos reportaremos a Relação de Stífel.

Mostraremos, utilizando o processo de indução, que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Inicialmente, definamos a proposição

$$p(n):\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n=0$.

$$\begin{aligned}
p(0): C_{0,0} &= \binom{0}{0}\\
&= \frac{0!}{0!0!}\\
&= 1\\
p(0) &= \binom{1}{0}
\end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$p(n)$: $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : \binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}+\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$

Demonstração:

Partindo da hipótese, somaremos em ambos os lados o termo $\binom{n+p+1}{p+1}$.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}+\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+1}{p}+\binom{n+p+1}{p+1}$$

Pela relação de Stifel temos que $\binom{n+p+1}{p}+\binom{n+p+1}{p+1}=\binom{n+p+2}{p+1}$

Conclusão: $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}+\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$

Desta forma, mostramos que $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p}+\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F., $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.3.5 Binômio de Newton

Mostraremos, utilizando o processo de indução, que $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : (x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : (x+a)^1 &= \sum_{p=0}^{1}\binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p \\ &= \binom{1}{0}.x^{1-0}.a^0+\binom{1}{1}.x^{1-1}.a^1 \\ p(1) = \ & x+a \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : (x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p,$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : (x+a)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p}.x^{n+1-p}.a^p$

Para a demonstração utilizaremos o fato de que:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n \cdot (x+a) = (x+a)^n \cdot x + (x+a)^n a$$

Demonstração:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n \cdot (x+a)$$

Utilizando a hipótese, temos:

$$\begin{aligned} (x+a)^n \cdot (x+a) &= \left[\left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p\right).(x+a)\right] \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p \cdot x + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p.a \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p+1}.a^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^{p+1} \end{aligned}$$

Abrindo o somatório:

$= \binom{n}{0}x^{n+1}a^0 + \binom{n}{1}x^n a^1 + \binom{n}{2}x^{n-1}a^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^2 a^{n-1} + \binom{n}{n}x^1 a^n + \binom{n}{0}x^n a^1 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^2 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^3 + ... + \binom{n}{n-1}x^1 a^n + \binom{n}{n}x^0 a^{n+1}$

$= \binom{n}{0}x^{n+1}a^0 + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] x^n a^1 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] x^{n-1}a^2 + ... + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] x^1 a^n + \binom{n}{n}x^0 a^{n+1}$

Faremos as seguintes substituições:

$$\binom{n}{0}x^{n+1}a^0 \text{ por } \binom{n+1}{0}x^{n+1}a^0 \text{ e}$$

$$\binom{n}{n}x^0 a^{n+1} \text{ por } \binom{n+1}{n+1}x^0 a^{n+1}.$$

Ainda, utilizando a relação de Stifel, faremos as seguintes substituições:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1} \text{ por } \binom{n+1}{1}$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2} \text{ por } \binom{n+1}{2}$$
$$\cdots$$
$$\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} \text{ por } \binom{n+1}{n}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1}a^0+\binom{n+1}{1}x^na^1+\binom{n+1}{2}x^{n-1}a^2+...+\binom{n+1}{n}x^1a^n+\binom{n+1}{n+1}x^0a^{n+1} \\ &= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}.x^{n+1-p}.a^p \end{aligned}$$

Conclusão: $(x+a)^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}.x^{n+1-p}\cdot a^p$

Desta forma, mostramos que $(x+a)^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}.x^{n+1-p}.a^p$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $(x+a)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

3.4 Progressão aritmética (PA)

3.4.1 Termo geral de uma PA

PA é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. A essa diferença r damos o nome de razão. Deste modo a sequência $(a_1,a_2,a_3,...,a_n,...)$ é uma progressão aritmética quando:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+r \\ a_3 &= a_2+r=a_1+r+r=a_1+2r \\ a_4 &= a_3+r=a_1+2r+r=a_1+3r \\ \cdots & \\ a_n &= a_{n-1}+r=a_1+(n-2)r+r=a_1+(n-1)r \end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que o termo geral a_n pode ser escrito como $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : a_1 &= a_1 + (1-1)r \\ &= a_1 + 0.r \\ p(1) &= a_1 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

$p(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$, para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : a_{n+1} = a_1 + nr$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + r \\ &= a_1 + (n-1).r + r \\ &= a_1 + nr - r + r \\ a_{n+1} &= a_1 + nr \end{aligned}$$

Conclusão: $a_{n+1} = a_1 + nr$.

Desta forma, mostramos que $a_{n+1} = a_1 + nr$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.4.2 Soma dos termos de uma PA

Quanto a soma dos termos de uma PA, antes, faremos algumas ponderações.

Veja:

Observamos que em uma PA: $a_{k+q} = a_k + qr$ e sendo:

$a_1, ..., a_p, ..., a_q, ..., a_n$ onde $p - 1 = k$ e $n - q = k$.

Temos:

$$\begin{cases} a_p = a_1 + k.r \\ a_q = a_n - kr \end{cases}$$

Somando os termos de cada um dos membros do sistema acima: $a_p + a_q = a_1 + a_n$.

Agora, conhecendo essas questões, analisaremos a soma dos termos de uma PA.

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{cases}$$

Somando ambos os termos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Considerando que:

$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = ... = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$

temos:

$2S_n = (a_1 + a_n).n$

Logo,

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : S_1 &= \frac{(a_1 + a_1).1}{2} \\ &= \frac{2a_1}{2} \\ p(1) &= a_1 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos demonstrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_{n+1}).(n+1)}{2}$

Demonstração:

Durante a demonstração, usaremos o fato de que $a_{n+1} = a_n + r$, isto é, $a_n = a_{n+1} - r$. Ainda, o fato de que $a_1 = a_{n+1} - nr$, isto é, $-nr = a_1 - a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1} - r)n}{2} + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1})n - nr + 2a_{n+1}}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1})n + a_1 - a_{n+1} + 2a_{n+1}}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1})n + a_1 + a_{n+1}}{2} \\
S_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Conclusão: $S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}$.

Desta forma, mostramos que $S_{n+1} = \dfrac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}$, ou seja, $p(n)$ implica em $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.5 Progressão geométrica (PG)

3.5.1 Termo geral de uma PG

Por definição, uma PG é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $a_{n+1} = a_n q$ onde q é um número real fixo, diferente de 0 e de 1, chamado de razão.

Utilizaremos da recorrência para obter a termo geral da PG. Veja:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
a_4 &= a_3 q \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} q
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros de cada uma das igualdades:

$$a_2.a_3.a_4...a_n = a_1q.a_2q.a_3q...a_{n-1}q$$

Simplificando os termos semelhantes:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Deste modo, por recorrência, identificamos o termo geral de uma progressão geométrica.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n)$: $a_n = a_1 q^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : a_1 &= a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 q^{1-1} \\ &= a_1.q^0 \\ p(1) &= a_1 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : a_n = a_1 q^{n-1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : a_{n+1} = a_1 q^n$

Demonstração:

Pela definição de progressão geométrica, temos que $a_{n+1} = a_n q$. Então:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n q \\ &= a_1 q^{n-1}.q \\ a_{n+1} &= a_1 q^n \end{aligned}$$

Conclusão: $a_{n+1} = a_1 q^n$.

Desta forma, mostramos que $a_{n+1} = a_1 q^n$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $a_n = a_1 q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.5.2 Soma dos termos de uma PG finita

Para determinar a soma dos termos de uma PG finita utilizaremos o fato de que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q \\ a_3 &= a_2q = a_1q^2 \\ a_4 &= a_3q = a_1q^3 \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1}q = a_1q^{n-1} \end{aligned}$$

Por definição temos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

Realizando algumas substituições, temos:

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$ (1)

Multiplicaremos ambos o membros por q.

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ (2)

Fazendo a subtração de (1) por (2):

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} - (a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n) \\ S_n - qS_n &= a_1 - a_1q^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ S_n &= a_1\frac{1-q^n}{1-q} \\ S_n &= a_1\frac{q^n-1}{q-1} \end{aligned}$$

Portanto : $S_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Agora, utilizando o P.I.F., demonstraremos a validade de $S_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : S_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) : S_1 &= a_1 \\ &= a_1\frac{q^1-1}{q-1} \\ p(1) &= a_1 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : S_{n+1} = a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Demonstração:

Temos que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, então:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_{n+1} \\ &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_n q \\ S_{n+1} &= \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_n q}{q - 1} \end{aligned}$$

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_1 q^{n-1} q}{q - 1} \\ &= \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_1 q^n}{q - 1} \\ &= \frac{a_1(q^n - 1) + a_1 q^{n+1} - a_1 q^n}{q - 1} \\ &= \frac{a_1 q^n - a_1 + a_1 q^{n+1} - a_1 q^n}{q - 1} \\ &= \frac{-a_1 + a_1 q^{n+1}}{q - 1} \\ S_{n+1} &= \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

Conclusão: $S_{n+1} = \dfrac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$.

Desta forma, mostramos que $S_{n+1} = a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

p(1): m+(n+1)=(m+n)+1.

3.6 Divisibilidade

3.6.1 Caso $(a-b)$ divide (a^n-b^n), para todo natural

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : (a-b)|(a^n-b^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota 3.6.1. *Como este trabalho se destina ao estudo e demonstrações do P.I.F. aplicado a situações que podem ser encontradas na educação básica, vela a pena, ressalvar o significado da notação a/b já que, comumente, esta notação não é utilizada neste segmento. Ainda, caso o professor considere mais conveniente, poderá rescrever os passos aqui demonstrados utilizando-se da maneira escrita " a divide b por exemplo ao invés de a/b. De qualquer forma, a/b significa que a divide b,ou seja, que existirá $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a.q$.*

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $p = 1$.

$p(1) : (a-b)|(a^1-b^1)$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : (a-b)|(a^n-b^n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : (a-b)|(a^{n+1}-b^{n+1})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^{n+1}-b^{n+1} &= a^{n+1}-ab^n+ab^n-b^{n+1} \\ &= a(a^n-b^n)+b^n(a-b) \end{aligned}$$

Por hipótese, $(a-b)|(a^n-b^n)$. Ainda, temos que $(a-b)|(a-b)$.

Portanto: $(a-b)|[a(a^n-b^n)+b^n(a-b)]$.

Concluímos que $(a-b)|a^{n+1}-b^{n+1}$.

Desta forma, mostramos que$(a-b)|a^{n+1}-b^{n+1}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $(a-b)|a^{n+1}-b^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.6.2 3 divide $n(n+1)(n+2)$, quando n inteiro não negativo

Vamos mostrar que o número 3 é capaz de dividir o produto de três números naturais consecutivos, isto é $3|n(n+1)(n+2)$. Ainda, equivale a dizer que o produto de três números naturais é múltiplo de 3.

Inicialmente definamos a proposição $p(n) : 3|n(n+1)(n+2)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 0$.

$$\begin{aligned} p(0) &: 3|0(0+1)(0+2) \\ &: 3|0.1.2 \\ p(0) &: 3|0 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(0)$ pois $3|0$ (3 divide 0).

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p(n) : 3|n(n+1)(n+2)$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : 3|(n+1)(n+2)(n+3)$

Demonstração:

Faremos a seguinte consideração, utilizando a hipótese: $3|n(n+1)(n+2)$ temos que existe um q tal que $3.q = n(n+1)(n+2)$, onde $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 3.q &= n(n+1)(n+2), \text{ onde } q \in \mathbb{Z}. \\ &= (n^2+n)(n+2) \\ &= n^3+2n^2+n^2+2n \\ 3q &= n^3+3n^2+2n \end{aligned}$$

Agora, manipularemos a expressão: $(n+1)(n+2)(n+3)$.

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+2n+n+2)(n+3) \\ &= (n^2+3n+2)(n+3) \\ &= n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6 \\ (n+1)(n+2)(n+3) &= n^3+3n^2+2n+3(n^2+3n+2) \end{aligned}$$

Usando o fato de que $3.q = n^3+3n^2+2n$, onde $q \in \mathbb{Z}$, temos:

$$
\begin{aligned}
(n+1)(n+2)(n+3) &= n^3+3n^2+2n+3(n^2+3n+2) \\
&= 3.q+3(n^2+3n+2) \\
(n+1)(n+2)(n+3) &= 3(q+n^2+3n+2)
\end{aligned}
$$

Conclusão $(n+1)(n+2)(n+3) = 3(q+n^2+3n+2)$. Isto é: $3|(n+1)(n+2)(n+3)$.

Desta forma, mostramos que $3|(n+1)(n+2)(n+3)$, ou seja, $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F. $p(n) : 3|n(n+1)(n+2)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.7 Desigualdades

3.7.1 $n!$ é maior que 3^n, para todo natural a partir de 6

Inicialmente definamos a proposição $p(n) : n! > 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 7$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 7$.

$$
\begin{aligned}
p(7) &: 7! = 5040 > 3^7 = 2187 \\
p(7) &: 7! > 2187
\end{aligned}
$$

De fato, o caso base é válido em $p(7)$ pois $7! > 2187$.

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 7$.

$p(n) : n! > 3^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 7$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : (n+1)! > 3^{n+1}$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
n! &> 3^n \\
(n+1)n! &> 3^n(n+1)
\end{aligned}
$$

Considerando que $n+1>3$ para $n\geq 7$, temos:

$$(n+1)! > 3^n(n+1) > 3^n.3$$

Pelo Teorema 2.3.1 $(n+1)! > 3^{n+1}$:

Conclusão $(n+1)! > 3^{n+1}$.

Desta forma, mostramos que $(n+1)! > 3^{n+1}$, ou seja, $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 7$.

Portanto, pelo P.I.F., $p(n) : n! > 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 7$.

3.7.2 $n^2 > n+1$, para todo natural a partir do um

Inicialmente definamos a proposição $p(n) : n^2 > n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 2$.

$$\begin{aligned} p(2) &: \ 2^2 > 2+1 \\ p(2) &: \ 4 > 3 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(2)$ pois $4 > 3$.

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

$p(n) : n^2 > n+1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : (n+1)^2 > (n+1)+1$

Demonstração:

Partindo da hipótese, temos que $n^2 > n+1$. somando $(+1)$ em ambos os membros da desigualdade temos: $n^2+1 > n+2$.

Como $n^2+2n+1 > n^2+1$, temos $n^2+2n+1 > n^2+1 > n+2 = (n+1)+1$

Pelo Teorema 2.3.1: $(n+1)^2 > n+2$

Conclusão $(n+1)^2 > (n+1)+1$.

Desta forma, mostramos que $(n+1)^2 > (n+1)+1$, ou seja, $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$.

Portanto, pelo P.I.F., $p(n) : n^2 > n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

4 Aplicações do Princípio de Indução Finita mediante uso de material concreto

A indução finita como é trabalhada normalmente deixa para o aluno a impressão de algo puramente algébrico e sem aplicabilidade. No entanto, problemas envolvendo geometria ou jogos com o auxílio do uso de materiais concretos podem ser abordados no trabalho com o método de indução finita. Como exemplo, tem-se o problema de se determinar a relação entre o número de diagonais de um polígono convexo com o número de lados desse polígono e o problema de se determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados. (SAVIOLI, 2006)

Em cada seção deste capítulo, o leitor encontrará uma situação em que o P.I.F. pode ser aplicado de modo a aproximar a formalização de uma demonstração matemática e uma situação que pode ser descrita por meio de material concreto em sala de aula.

No apêndice B, o leitor encontrará sugestões de atividades para auxiliar na conjectura das fórmulas que serão demonstradas nesta seção.

4.1 Torre de Hanói

Material concreto necessário: Torre de Hanói[1]

Este jogo constitui-se em uma base com três pinos, na posição vertical em relação à base. No pino de uma das extremidades, há uma sequência de discos de ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o terceiro pino, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, com o detalhe de que no momento da passagem, os discos que possuem maior diâmetro, nunca fiquem sobre os de menor diâmetro. Normalmente, esse jogo encontra-se contendo três discos, mas a quantidade pode aumentar, tornando o grau de dificuldade mais elevado de acordo com o número de discos utilizados, conforme Ferreira (2016).

> Problema: Qual número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói com n discos?

Após observar o comportamento das peças e realizarmos, com o auxílio do Quadro 4.1, a contagem dos movimentos para um determinado número de discos, podemos chegar

[1] Torre de Hanói é um jogo criado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883 (BRITO; BRITO, 2018).

a seguinte conjectura: $n(d) = 2^d - 1$ onde, d é o número de discos e $n(d)$ o número mínimo de movimentos necessários.

O apêndice B, consta de uma atividade de investigação que poderá ser conduzida pelo professor de modo a incentivar e auxiliar os estudantes no preenchimento de duas tabelas que facilitará a obtenção de uma fórmula que possa descrever o número mínimo de movimentos para n discos. Os valores observados no Quadro 4.1 podem ser obtidos por meio da atividade investigativa presente no apêndice B.

Quadro 4.1 – Número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói com n discos

n	$n(d)$	Reescrita para $n(d)$
1	1	$1 = 2^1 - 1$
2	3	$3 = 2^2 - 1$
3	7	$7 = 2^3 - 1$
4	15	$15 = 2^4 - 1$
5	31	$31 = 2^5 - 1$
6	63	$63 = 2^6 - 1$
7	127	$127 = 2^7 - 1$
8	255	$255 = 2^8 - 1$
...	...	...
n	...	$n(d) = 2^d - 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : n(d) = 2^d - 1$ para todo $d \in \mathbb{N}$.

Caso Base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) &: n(1) = 2^1 - 1 \\ p(1) &: n(1) = 1 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $n(d)$ para algum $n \in \mathbb{N}$

$p(n) : n(d) = 2^d - 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Tese: devemos mostrar que $n(d+1)$ também é válida.

$p(n+1) : n(d+1) = 2^{d+1} - 1$

Vamos considerar uma torre com $n+1$ discos numerados como 1 o menor disco e $n+1$ o maior disco. Para remover o disco $n+1$ é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os n discos (por hipótese, remover n discos levará $n(d)$ movimentos) que estão acima dele colocando-os em uma das hastes, feito isso, mova o disco $n+1$ para a haste restante. Agora mova de acordo com as regras os n para a haste que se encontra o disco $n+1$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} n(d+1) &= 2.n(d)+1 \\ &= 2(2^n-1)+1 \\ &= 2^{n+1}-2+1 \\ n(d+1) &= 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

Desta forma, mostramos que $n(d+1) = 2^{n+1} - 1$, ou seja, $n(d)$ implica $n(d+1)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., fica demonstrada a validade de $n(d) = 2^d - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal

Material concreto necessário: Folha A4 e régua.

Problema: Qual é o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal?

Considere uma linha poligonal [2] formada por 2 semirretas e por n segmentos de reta. A Figura 14 ilustra a situação para $n = 2$.

O objetivo é investigar e encontrar um conjectura e provar sua validade.

Encontre uma fórmula para o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal e demonstre que sua fórmula está correta utilizando o P.I.F.

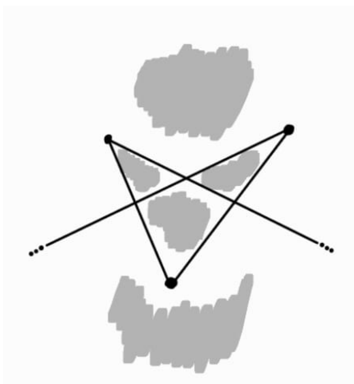


Figura 14 – Número máximo de regiões determinadas por 2 semirretas e 2 segmentos.
Fonte: Elaborada pelo autor

[2] Linha poligonal é formada por segmentos de reta consecutivos que não possuem a mesma direção. Por exemplo, a linha poligonal $A_1A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$ é formada pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$. Ainda; pode ser linha poligonal aberta: quando pontos extremos não são iguais; linha poligonal fechada: quando pontos extremos são iguais; linha poligonal simples: quando não há intersecção entre dois segmentos consecutivos; ou linha poligonal não-simples.

Em sala de aula, o professor poderá solicitar aos estudantes que, na folha A4, possam desenhar algumas simulações, conforme a Figura 15 com o intuito de obter o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal para alguns casos ou mesmo a generalização da fórmula.

Inicialmente, faremos o esboço dos casos para $n = 1, 2, 3$, conforme Figura 15, para que possamos visualizar melhor a relação entre o número de segmentos e o número de regiões geradas.

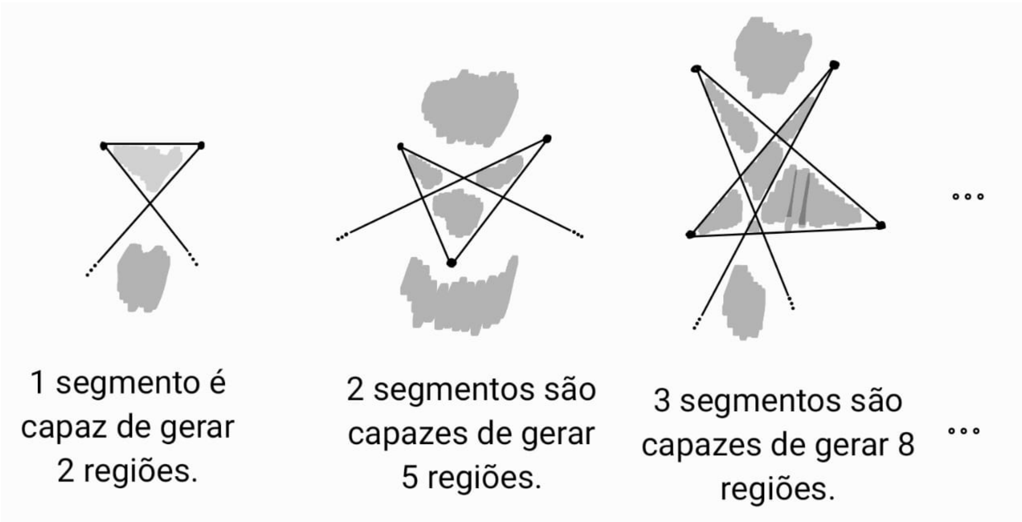


Figura 15 – Número máximo de regiões determinadas por 2 semirretas e 1, 2, 3 segmentos, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentaremos duas formas de se obter a fórmula que descreva o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal. Porém, vale ressaltar que alguns estudantes que vierem a estudar para a OBM, OBMEP ou outros exames poderão utilizar do conceito de PA de segunda ordem após observar o padrão existente. Apenas para fins de aprofundamento, apresentaremos um Quadro mostrando que os valores obtidos para o número máximo de regiões estão descritos por uma PA de segunda ordem.

Quanto a PA de segunda ordem, temos que o operador $\triangle$ (ou de diferença) para uma sequência a_n é definido por $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$. Ainda, uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $(\triangle a_n)$ é uma sequência constante. Ainda, utilizaremos a proposição abaixo:

Proposição 4.2.1. *a_n é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, a_n é um polinômio de segundo grau em n.*

Quadro 4.2 – Dedução do número máximo de regiões formadas por n segmentos usando P.A.

n	$p(n)$	$\triangle p(n)$	$\triangle^2 p(n)$
1	3	2	1
2	5	3	1
3	8	4	1
4	12	5	1
5	17	...	1
...	...	...	1
n	...	...	1

Fonte: Elaborada pelo autor

Então, os valores obtidos em $p(n)$ formam um PA de segunda ordem. Portanto, a proposição 4.2.1 nos indica um caminho de que a fórmula que descreva tal situação é um polinômio do segundo grau $p(n) = an^2 + bn + c$.

Na primeira solução apresentada, espera-se que após o estudante desenhar algumas situações para facilitar a contagem do número de regiões, como mostra o Quadro 4.2, tente buscar um padrão. Vale ressaltar que como a PA de segunda ordem não é trabalhada no ensino médio e para que não haja um desestímulo em relação a resolução do problema, pede-se que o professor insira ao final da questão a seguinte sugestão: ainda, considere que a fórmula procurada pode ser escrita da forma $p(n) = an^2 + bn + c$. Deste modo, espera-se que o estudante desenhe e observe ao menos para três valores de n e então aplique estes valores na sugestão dada pelo professor. Conforme faremos abaixo:

Solução 1

De acordo com o esquema abaixo, observamos que:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ segmento} & \rightarrow & 3 \text{ Regiões} \\ 2 \text{ segmentos} & \rightarrow & 5 \text{ Regiões} \\ 3 \text{ segmentos} & \rightarrow & 8 \text{ Regiões} \end{array}$$

Agora, aplicaremos estes valores observados na sugestão dada pelo professor:

$$\begin{aligned} p(1) &= 3 \\ a.1^2 + b.1 + c &= 3 \\ a + b + c &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) &= 5 \\ a.2^2 + b.2 + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(3) &= 8 \\ a.3^2 + b.3 + c &= 8 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 3 & (1) \\ 4a + 2b + c = 5 & (2) \\ 9a + 3b + c = 8 & (3) \end{cases} \quad \text{fazendo } (2) - (1) \text{ e } (3) - (2), \text{ temos:}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 2 & (4) \\ 5a + b = 3 & (5) \end{cases} \quad \text{fazendo } (5) - (4), \text{ temos } a = \frac{1}{2}.$$

Substituindo $a = \frac{1}{2}$ em (4), temos $b = \frac{1}{2}$.

Substituindo $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$ em (1), temos $c = 2$.

Então, concluímos que a fórmula é descrita por $p(n) = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + 2$ ou $p(n) = \dfrac{n^2 + n + 4}{2}$.

Solução 2

Na segunda solução apresentada, espera-se que o estudante, após desenhar algumas situações para facilitar a contagem do número de regiões, escreva os valores de forma recursiva [3] de modo a tentar observar um padrão, conforme faremos abaixo:

[3] Recursividade: propriedade daquilo que se pode repetir um número indefinido de vezes.

Quadro 4.3 – Dedução do número máximo de regiões formadas por n segmentos usando recursividade.

Fato observado na Figura 15	Onde a_k é o número de regiões para k segmentos	Substituindo $a_1 = 3$ por $2+1$
1 segmento forma 3 regiões	$a_1 = 3$	$a_1 = 2+1$
2 segmentos formam 5 regiões	$a_2 = a_1 + 2$	$a_2 = 2+1+2$
3 segmentos formam 8 regiões	$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3$	$a_3 = 2+1+2+3$
4 segmentos formam 12 regiões	$a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 2 + 3 + 4$	$a_4 = 2+1+2+3+4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n segmentos formam a_n regiões	$a_n = a_{n-1} + n$ $= a_1 + 2 + 3 + ... + n$	$a_n = 2+1+2+3+...+n$
$n+1$ segmentos formam a_{n+1} regiões	$a_{n+1} = a_n + (n+1)$ $= a_1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)$	$a_{n+1} = 2+1+2+3+...+n+(n+1)$

Fonte: Elaborada pelo autor

Usaremos a fórmula da soma dos termos de uma PA finita $S(n) = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$, onde $S(n)$ é a soma dos termos de uma PA, a_1 é o primeiro termo da PA, a_n é o último termo da PA e n o número de termos da PA. Então, faremos a soma dos termos da PA $1 + 2 + 3 + ... + n$.

$S(n) = \dfrac{(1+n).n}{2}$, isto é, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(1+n).n}{2}$

Substituiremos em a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 1 + 2 + 3 + ... + n \\ &= 2 + \frac{(1+n).n}{2} \\ a_n &= \frac{n^2 + n + 4}{2} \end{aligned}$$

Deste modo, apresentamos duas formas distintas de obter a fórmula que descreva o número máximo de regiões formadas por 2 semirretas e por n segmentos de reta.

Agora, utilizando o P.I.F., demonstraremos a validade de $a_n = \dfrac{n^2 + n + 4}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Admitiremos a proposição $p(n) : a_n = \dfrac{n^2 + n + 4}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 1$.

$$\begin{aligned} p(1) &: a_1 = 2 + 1 \\ p(1) &: 3 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n) : a_n = \dfrac{n^2 + n + 4}{2}$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n + 1)$ também é válida.

$p(n + 1) : a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 6}{2}$

Demonstração:

Partiremos da hipótese e somaremos $(n + 1)$ em ambos os lados. Ainda, pela recursividade apresentada no Quadro 4.3, realizaremos a seguinte substituição $a_n + (n+1)$ por a_{n+1}.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2 + n + 4}{2} \\ a_n + (n + 1) &= \frac{n^2 + n + 4}{2} + (n + 1) \\ a_{n+1} &= \frac{n^2 + n + 4}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n^2 + n + 4 + 2n + 2}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{n^2 + 3n + 6}{2} \end{aligned}$$

Concluímos que $a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 6}{2}$.

Desta forma, mostramos que $a_{n+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 6}{2}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $a_n = \dfrac{n^2 + n + 4}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Pizza de Steiner

Material concreto necessário: Folha A4 e régua.

Este é um clássico problema e um problema investigativo mais simples pode ser o de encontrar o (maior) número de partes em que n ($n \in \mathbb{N}$) cortes retilíneos divide uma pizza grande e fina, conhecido como Pizza de Steiner (equivalente ao problema de quantas regiões n retas dividem um plano) mais fácil de visualizar e de fazer tentativas, experimentos, conjecturas, erros e acertos, segundo Salvador (2020).

Dentre as formas de realizar a pergunta para este problema "Qual é o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido por n retas?"ou "Qual é o número máximo de pedaços[4] em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos?"

Problema: Qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos?

O apêndice B apresenta uma sugestão de atividade investigativa que auxiliará o estudante a conjecturar a fórmula de qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos. Para isso, a atividade apresenta três situações em que os cortes poderão ser realizados de modo a levar o estudante a conclusão de qual situação é mais viável para a construção da conjectura.

Inicialmente obteremos de três modos[5] distintos a fórmula que descreve o número máximo de pedaços a_n em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos, para só então comprovarmos a sua validade por meio do P.I.F.

Solução 1 - Por conjectura

A figura 16 ilustra o número máximo de regiões para 0 corte, 1 corte, 2 cortes e 3 cortes.

[4] Utilizaremos o termo "pedaços"como sendo um sinônimo de "regiões".
[5] Por uma questão didática, chamaremos de solução 1, solução 2 e solução 3

Figura 16 – Número máximo de regiões ao realizar cortes retilíneos.
Fonte: Elaborada pelo autor

Então, por meio da observação e conjectura, podemos elaborar um Quadro que descreva a possível relação entre o número de cortes e o números máximo de pedaços que podem ser gerados. Para isso, observemos o Quadro 4.4.

Quadro 4.4 – Conjectura do número máximo de pedaços formados por n cortes retilíneos.

n cortes	a_n *regiões*
0	1
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 1 + 1 + 2$
3	$7 = 1 + 1 + 2 + 3$
4	$11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$
5	$16 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
...	...
n	$a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$

Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda, pelo Quadro 4.4 observamos que $a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$. Neste momento, a expressão $1 + 2 + 3 + ... + n$ substituiremos pela soma dos termos de uma PA, obtemos então:

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+2+3+4+5+...+n \\ &= 1+\frac{(1+n).n}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o número máximo a_n de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos é descrito por meio da conjectura $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Solução 2 - Por P.A. de segunda ordem

Quadro 4.5 – Dedução do número máximo de pedaços formados por n cortes retilíneos.

n retas	a_n *regiões*
0	1
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 2 + 2$
3	$7 = 4 + 3$
4	$11 = 7 + 4$
5	$16 = 11 + 5$
...	...
n	$a_n = a_{n-1} + n$
$n+1$	$a_{n+1} = a_n + (n+1)$

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao observar o Quadro 4.5, podemos concluir que $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. Isto é $a_{n+1} - a_n = (n+1)$.

Teorema 4.3.1. *Se a diferença $a_{n+1} - a_n$ é uma função do 1° grau, então a sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Portanto, considerando o Teorema 4.3.1, vale a pena calcular a_n onde: $a_n = an^2 + bn + c$.

Usando os valores presentes na primeira, segunda e terceira linha, respectivamente, do Quadro 4.5 temos:

$$\begin{cases} 1 = a.0^2 + b.0 + c \\ 2 = a + b + c \\ 4 = 4.a + 2.b + c \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, obtemos: $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}$ e $c = 1$.

Substituindo os valores de a, b e c em $a_n = an^2 + bn + c$ concluímos que $a_n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + 1$, isto é, $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Solução 3 - Por Recorrência

Ainda, ao observar o Quadro 4.5 podemos observar que $a_n = a_{n-1} + n$. Portanto:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 1 \\ a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 \\ &... \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

Somando cada um dos termos em cada um dos membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n &= a_0 + 1 + a_1 + 2 + a_2 + 3 + a_3 + 4 + ... + a_{n-1} + n \\ a_n &= a_0 + 1 + 2 + 3 + ... + n \\ &= 1 + \frac{(1+n)n}{2} \\ &= \frac{2 + n + n^2}{2} \\ a_n &= \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

Agora, faremos a demonstração da validade de $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$, tal que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ tal que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 0$.

$$\begin{aligned} p(0) &: a_n = \frac{0^2 + 0 + 2}{2} \\ p(0) &: 1 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(0)$.

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p(n) : a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$$p(n+1) : a_n + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$$

Demonstração:

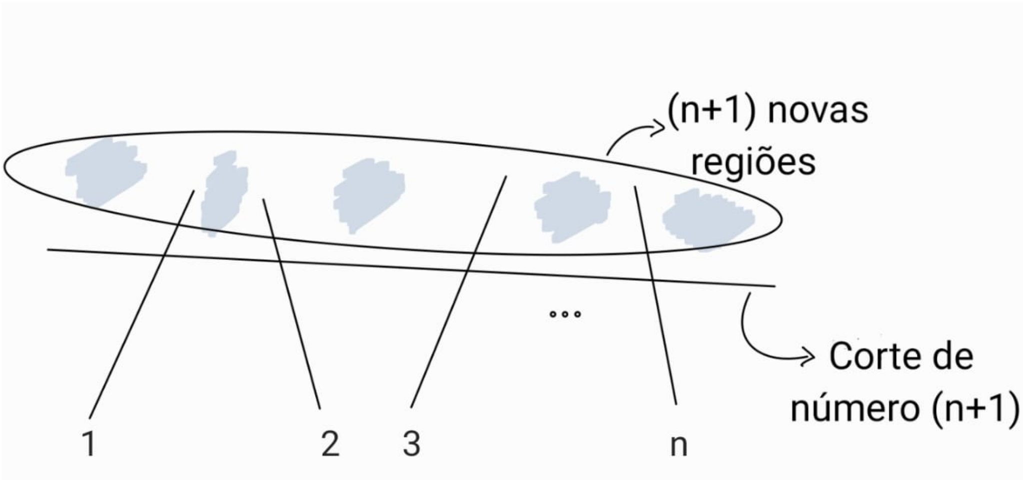


Figura 17 – Número de novas regiões ao fazer o $(n+1)$ corte.
Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme mostrado na imagem 17, ao fazer o corte $(n+1)$ precisará cortar todas as retas anteriores para que se tenha o número máximo de novas regiões.

Com o corte $(n+1)$, passamos a ter as regiões que já existiam, isto é, $\frac{n^2+n+2}{2}$; adicionadas as novas regiões que são $(n+1)$, ficamos com:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} \\ &= \frac{(n^2+2n+1)+(n+1)+2}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} \end{aligned}$$

Conclusão $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$.

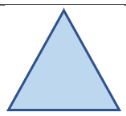
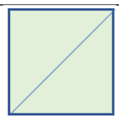
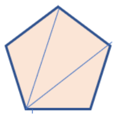
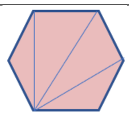
Desta forma, mostramos que $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portando, pelo P.I.F., $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.4 Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Problema: A soma dos ângulos internos de um polígono é expressa por $S_n = (n - 2) \cdot 180°$

A soma dos ângulos internos S_n de um polígono convexo de n lados, onde $n \geq 3$, pode ser conjecturada utilizando a decomposição de figuras em triângulos e para isso basta ser conhecido que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180°. Veja a conjectura abaixo:

Figura	**nº de lados**	**Pode ser decomposto em**	**Soma dos ângulos internos**
	3 lados	1 triângulo	$S_3 = 1 \cdot 180°$
	4 lados	2 triângulos	$S_4 = 2 \cdot 180°$
	5 lados	3 triângulos	$S_5 = 3 \cdot 180°$
	6 lados	4 triângulos	$S_6 = 4 \cdot 180°$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n lados		$n - 2$ triângulos	$\boxed{S_n = (n-2) \cdot 180°}$

Quadro 4.6 – Soma dos ângulos internos de um polígono de n lados

Fonte: Elaborada pelo autor

O valores obtidos no Quadro 4.6 poderão ser trabalhados em sala de aula por meio da atividade investigativa que consta no apêndice B.

Agora, realizaremos a demonstração da validade de $S_n = (n-2) \cdot 180°$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, onde S_n é a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados e S_{n+1} é a soma dos ângulos internos de um polígono de $n+1$ lados.

Inicialmente, definamos a proposição $p(n) : S_n = (n-2).180°$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 3$.

$$\begin{aligned} p(3) : S_3 &= (3-2) \cdot 180° \\ S_3 &= 180° \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

$p(n) : S_n = (n-2) \cdot 180°$, para algum $n \in \mathbb{N}$ sendo $n \geq 3$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : S_{n+1} = (n-1) \cdot 180°$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + 180° \\ &= (n-2) \cdot 180° + 180° \\ &= 180°n - 360° + 180° \\ &= 180°n - 180° \\ S_{n+1} &= (n-1) \cdot 180° \end{aligned}$$

Conclusão: $S_{n+1} = (n-1) \cdot 180°$

Desta forma, mostramos que $S_{n+1} = (n-1) \cdot 180°$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Portanto, pelo P.I.F., $S_n = (n-2) \cdot 180°$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

4.5 Partição de quadrados

Trata-se de um problema de existência, isto é, utilizaremos o P.I.F. para demonstrar a existência da situação imposta pelo problema. Vejamos:

> Problema: Prove que todo quadrado pode ser subdividido em n quadrados, para todo $n \geq 6$

Um fato curioso é que para $n = 4$ é possível que a partição seja realizada, como mostrado na Figura 18. Porém, para $n = 5$ não é possível que a partição seja realizada. Por este motivo, a restrição da demonstração respeitará $n \geq 6$.

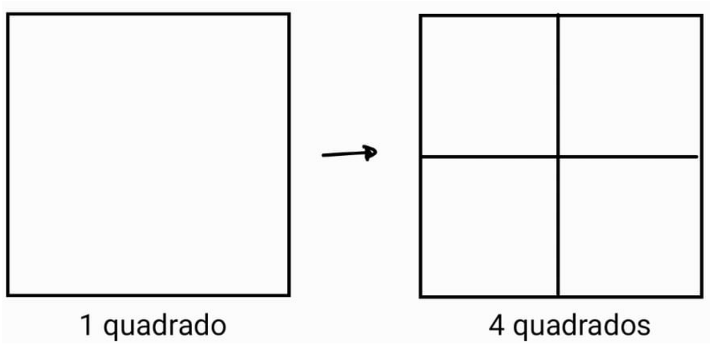


Figura 18 – 1 quadrado pode ser subdividido em 4 quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Observação 4.5.1. *Ainda, a Figura 18 permite observar que ao subdividir* 1 *quadrado em* 4 *quadrados, houve um acréscimo de* 3 *quadrados em relação a situação anterior à subdivisão, ou seja, ao realizar a partição mostrada na figura, temos um total de quadrados acrescentados igual a expressão numérica* $(4-1)$*, onde* 4 *foi o total de quadrados formados pela subdivisão porém a estes exclui-se o quadrado já existente.*

Uma conjectura inicial nos permite mostrar que é possível realizar a subdivisão de 1 quadrado em 6, 7 e 8 quadrados, respectivamente, como mostra a Figura 19.

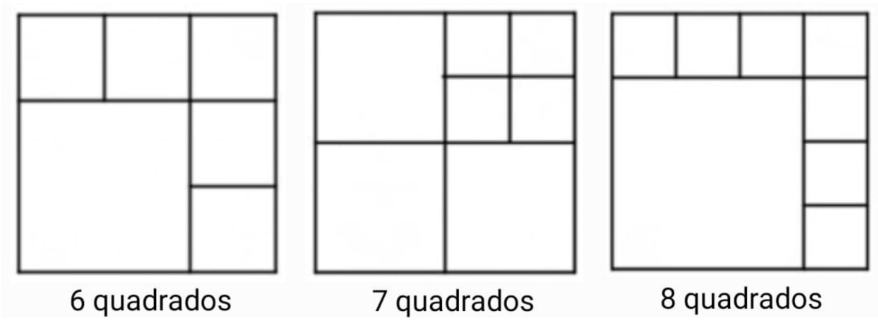


Figura 19 – Subdivisão de 1 quadrado em 6, 7 e 8 quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Usando a Figura 19, no caso de 6 quadrados, combinada com o fato exposto na observação 4.5.1, podemos conjecturar o padrão observado na Figura 20, ou seja, obteremos a subdivisão do quadrado inicial em $3k$ quadrados, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

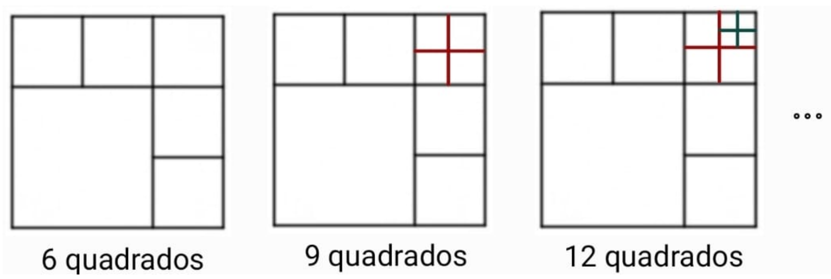


Figura 20 – Conjectura da subdivisão do quadrado inicial em $3k$ quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

De modo análogo, usando o caso para 7 quadrados da Figura 19, obteremos a subdivisão do quadrado inicial em $3k+1$ quadrados, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ conforme Figura 21.

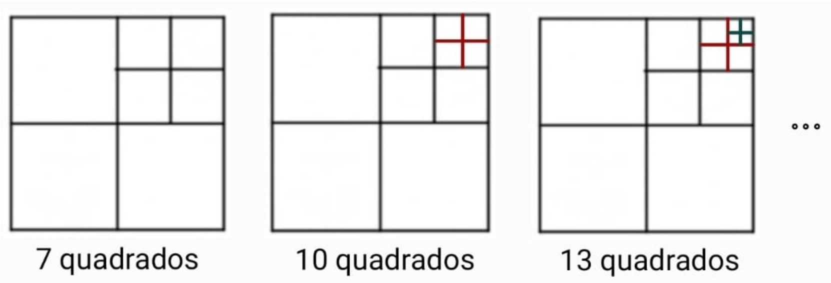


Figura 21 – Conjectura da subdivisão do quadrado inicial em $3k+1$ quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda, usando o caso para 8 quadrados da Figura 19, obteremos a subdivisão do quadrado inicial em $3k+2$ quadrados, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ conforme Figura 22.

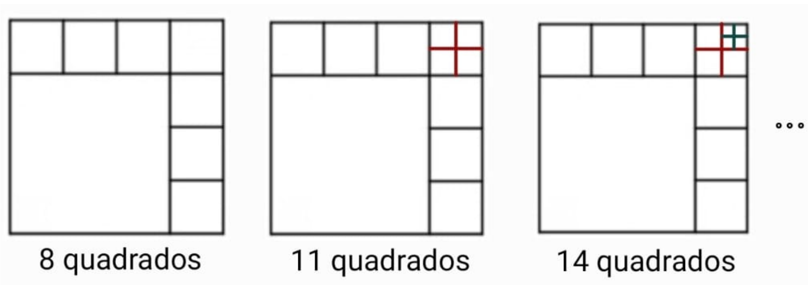


Figura 22 – Conjectura da subdivisão do quadrado inicial em $3k+2$ quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente, definamos as proposições: $p(k) : 3k$; $p'(k) : 3k+1$ e $p"(k) : 3k+2$ onde $k \geq 2$ e $p(k)$, $p'(k)$ e $p"(k)$ são, respectivamente, o número de quadrados n, $n+1$ e $n+2$ onde $n \geq 6$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(k) : 3k$; $p'(k) : 3k+1$ e $p"(k) : 3k+2$ onde $k = 2$.

$$\begin{aligned} p(2) : 3.2 &= 6 \\ p'(2) : 3.2+1 &= 7 \\ p"(2) : 3.2+2 &= 8 \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(k) : 3k$; $p'(k) : 3k+1$ e $p"(k) : 3k+2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
$p(k) : 3k$;

$p'(k) : 3k + 1;$
$p"(k) : 3k + 2.$

Tese: devemos mostrar que $p(k + 1)$, $p'(k + 1)$ e $p"(k + 1)$ também são válidas.
$p(k + 1) : 3k + 3;$
$p'(k + 1) : 3k + 4;$
$p"(k + 1) : 3k + 5.$

Desenvolveremos a demonstração utilizando as ideias apresentadas na observação 4.5.1 e na hipótese.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
p(k+1) &: p(k) + (4-1)\\
&: 3k + 4 - 1\\
p(k+1) &: 3k + 3\\
\\
p'(k+1) &: p'(k) + (4-1)\\
&: 3k + 1 + 4 - 1\\
p'(k+1) &: 3k + 4\\
\\
p"(k+1) &: p"(k) + (4-1)\\
&: 3k + 2 + 4 - 1\\
p"(k+1) &: 3k + 5
\end{aligned}$$

Desta forma, mostramos a validade de $p(k+1)$, $p'(k+1)$ e $p"(k+1)$, ou seja, que $p(k)$ implica $p(k+1)$; $p'(k)$ implica $p'(k+1)$ e $p"(k)$ implica $p"(k+1)$; para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Portanto, pelo P.I.F., $p(k) : 3k$; $p'(k) : 3k + 1$ e $p"(k) : 3k + 2$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Este problema, em especial, guarda uma sutileza em apresentar ao leitor o fato de que a demonstração da validade do problema inicialmente proposto para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ depende da validação de três proposições, $p(k)$, $p'(k)$ e $p"(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, isto é, juntas, estas três proposições são capazes de cobrir, ou melhor, assegurar a validade a que se queria demonstrar para os naturais.

Neste capítulo, o leitor pôde encontrar atividades que, por meio do uso de materiais concretos, possam levar seus estudantes a obtenção e investigação de uma conjectura e, ainda, realizar a demonstração por meio do P.I.F. De acordo com os recortes dos documentos apresentados no capítulo 1, essas atividades podem promover o desenvolvimento da arte de elaborar conjecturas e procurar demonstrações por meios cada vez mais formais.

5 Proposta Metodológica do levantamento de dados

Por meio de aplicativos de mensagens, o questionário (presente em anexo) foi disponibilizado em formato do formulário Google e ficou disponível para preenchimento entre os dias 18/09/2023 e 24/09/2023, por meio do link <https://forms.gle/XT2GsLWZbMNriMXy6>. Possui como objetivo a coleta de informações para o levantamento de impressões de voluntários escolhidos por conveniência. Neste período, foram coletadas 37 respostas de professores de matemática que atuam na educação básica distribuídos entre ensino fundamental e médio do ensino regular. Ainda, a pesquisa possui o objetivo de realizar uma verificação a respeito de como os números naturais e as demonstrações de fórmulas matemáticas estão sendo tratados na educação básica pelos professores e, também, verificar a frequência com que as demonstrações vêm sendo feitas bem como saber se o P.I.F. é utilizado em sala de aula.

1. Atualmente, o(a) senhor(a) leciona na rede:

   a) particular.

   b) pública.

   c) ambas.

Objetivo: Realizar o levantamento percentual do número de professores que atuam exclusivamente na rede pública em comparação com aqueles que atuam na rede particular de ensino.

Levando em conta que os apontamentos realizados neste trabalho visam a discussão da utilização do P.I.F. em todos os contextos da educação básica, isto é, refiro-me a instituições públicas e privadas. Por este motivo, a pesquisa procurou abranger os profissionais que atuam em ambos segmentos.

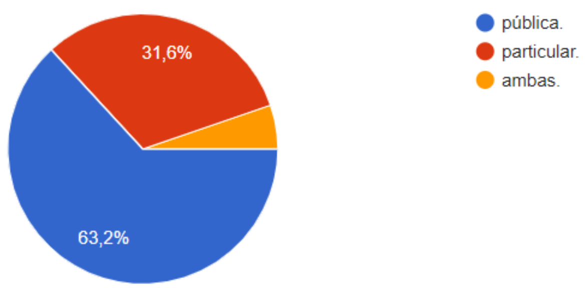


Figura 23 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 1.
Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar que $63,2\%$ dos entrevistados estão atuando na rede pública de ensino, deste modo espera-se que a realidade das marcações e respostas discursivas apresentadas nesta pesquisa retratem de modo mais próximo as condições encontradas na rede pública de ensino. Porém, as respostas obtidas pelo percentual de $31,6\%$ referente aos entrevistados que estão lecionando na rede particular de ensino são de grande relevância para o conhecimento dos dados e de suas condições referentes aos aspectos ligados ao conjunto dos números naturais. Observou-se um baixo percentual, $5,3\%$, de profissionais que estão atuando em ambas as redes, pública e privada.

2. Há quantos anos exerce a profissão?

   a) A menos de 5 anos.

   b) Entre 5 e 10 anos.

   c) Entre 10 e 15 anos.

   d) A mais de 15 anos.

Objetivo: Realizar o levantamento percentual do tempo de atuação na profissão dos profissionais que responderam ao questionário.

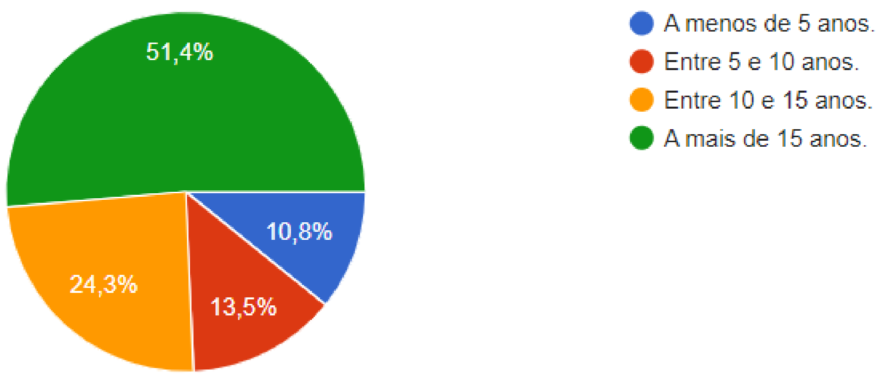


Figura 24 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 2.
Fonte: Elaborado pelo autor

Constatamos que $51,4\%$ dos professores que participaram da entrevista possuem mais de 15 anos de experiência, isto é, espera-se que os dados apresentados no questionário estejam embasados em profissionais considerados, ao nosso ver, de longa experiência em sala de aula. Ainda, $24,3\%$ dos entrevistados possuem entre 10 e 15 anos de experiência em sala de aula. Presume-se, então, que pelo fato de mais de 75% dos entrevistados possuírem longa experiência em sala de aula, os dados apresentados relatam uma realidade madura e, desde modo, possuem validação para sua análise. Vale ressaltar que os percentuais de $10,8\%$ e $13,5\%$ que corresponde aos entrevistados que exercem a profissão a "menos de 5 anos"ou "entre 5 e 10 anos" respectivamente, também possuem enorme relevância na análise dos dados, pois estes profissionais estão em processo de construção de sua identidade em sala.

3. O conjunto dos números naturais é um conjunto conhecido e reconhecido pela maioria dos estudantes da educação básica?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

    Objetivo: Realizar o levantamento acerca da identificação dos números naturais por parte dos estudantes segundo uma visão do professor, isto é, identificar, ao ministrar uma aula introdutória de conjuntos numéricos, aquilo que o professor espera que o estudante saiba em relação ao conjunto dos números naturais.

    Caso o professor tenha consciência de que seus estudantes possuam os conhecimentos suficientes para a identificação e reconhecimento dos elementos do conjunto $\mathbb{N}$, poderá seguir a diante com a conceituação dos outros conjuntos. Caso contrário, deverá tratar inicialmente das propriedades do conjunto dos números naturais.

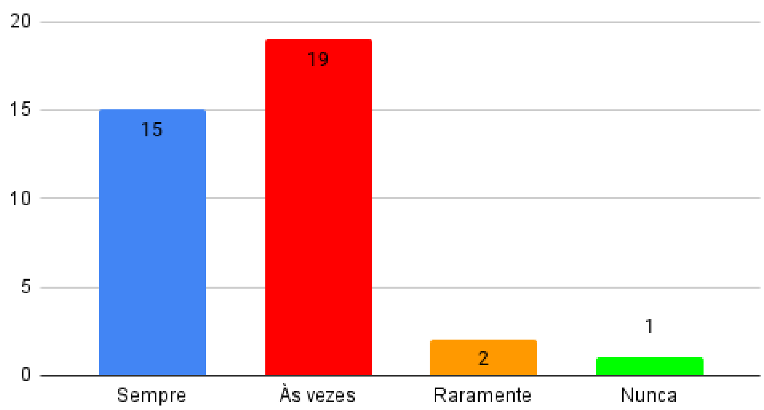


Figura 25 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 3.
Fonte: Elaborado pelo autor

Em torno de 40% dos entrevistados afirmaram que seus estudantes sempre reconhecem quais são os números naturais e que aproximadamente 51% às vezes reconhecem o conjunto dos números naturais. Desta forma, aproximadamente 91% dos estudantes, segundo os entrevistados, são capazes de reconhecer o conjunto dos números naturais mesmo que ás vezes. Este dado possui relevância pelo fato de que há a necessidade do reconhecimento e entendimento por parte do estudante quanto as propriedades do conjunto dos números naturais para que se possa cogitar um trabalho que envolva o P.I.F.

4. Os estudantes acreditam que o conjunto dos números naturais possui uma quantidade menor de elementos quando comparado ao conjunto dos números inteiros?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

Objetivo: Identificar se o professor reconhece que alguns estudantes acreditam que o conjunto dos números naturais possui um número menor de elementos quando comparado ao conjunto dos números inteiros.

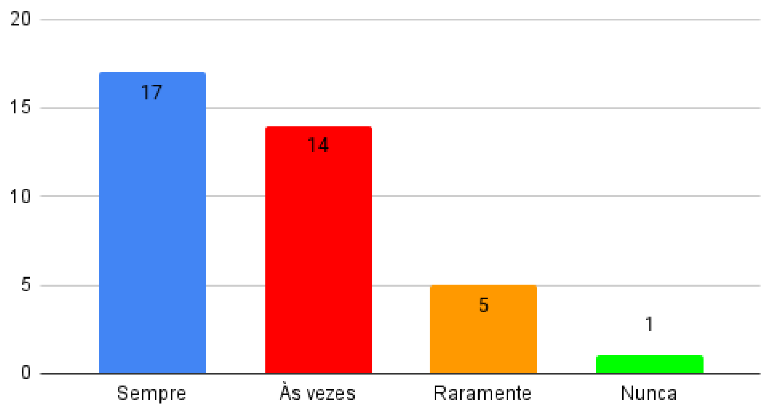


Figura 26 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 4.
Fonte: Elaborado pelo autor

Aproximadamente 46% dos entrevistados identificam que seus estudantes acreditam que o conjunto dos números naturais possui um número menor de elementos quando comparado com o conjunto dos números inteiros. Acredito que esse fato é reforçado pelo fato do conjunto dos números naturais ser subconjunto dos números inteiros e, ainda, no diagrama de Venn [1] a área reservada ao conjunto dos números naturais,

[1] "O diagrama de Venn, também conhecido como diagrama de Venn-Euler, é uma maneira de representar graficamente um conjunto, para isso utilizamos uma linha fechada que não possui auto-intersecção

normalmente, é significativamente menor que a área reservada ao conjunto dos números inteiros.

5. O(a) senhor(a) possui o hábito de demonstrar formalmente as fórmulas apresentadas aos estudantes?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

Objetivo: Identificar a frequência com que os professores demonstram as fórmulas matemáticas em sala de aula.

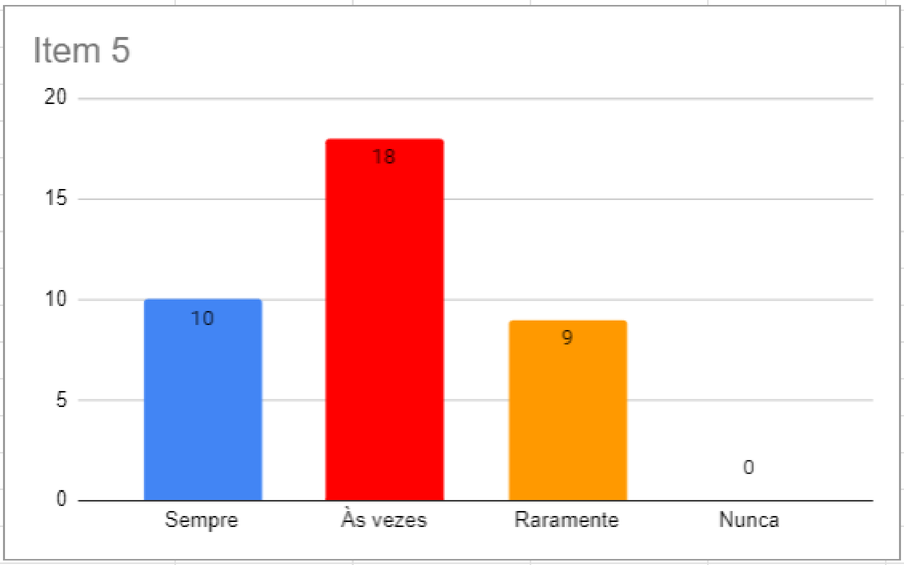


Figura 27 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 5.
Fonte: Elaborado pelo autor

Aproximadamente 48% dos entrevistados dizem às vezes demonstrar as fórmulas matemáticas em sala de aula. Dentre os entrevistados aproximadamente 27% relatam sempre realizam as demonstrações das fórmulas matemáticas que são apresentadas. Ainda, fica evidente que há um percentual de entrevistados que nunca ou raramente realizam demonstrações matemáticas (aproximadamente 24%). O percentual de entrevistados que sempre realizam demonstrações matemáticas se iguala a soma dos percentuais daqueles que raramente ou nunca realizam demonstrações.

e representamos os elementos do conjunto no interior dessa linha. A ideia do diagrama é facilitar o entendimento nas operações básicas de conjuntos, como: relação inclusão e pertinência, união e intersecção, diferença e conjunto complementar."(LUIZ, 2009)

6. A organização dos conteúdos curriculares propicia momentos de demonstração de fórmulas matemáticas?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

    Objetivo: Diante das discussões relacionadas às alterações na BNCC e alterações recentes na LDBEN, identificar se elas propiciaram momentos de demonstrações de fórmulas matemáticas.

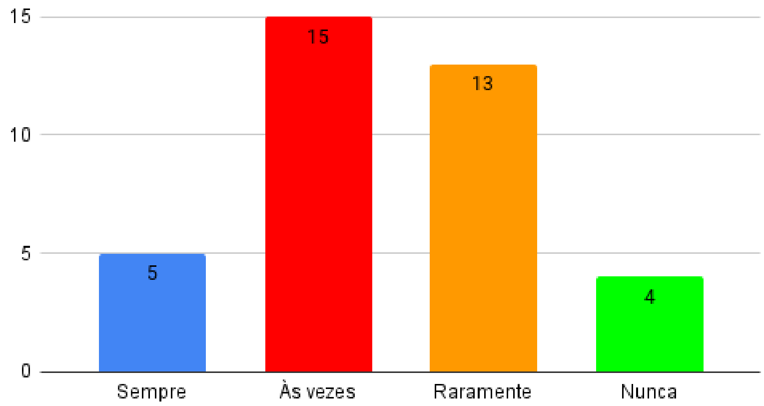


Figura 28 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 6.
Fonte: Elaborado pelo autor

Apenas $13,5\%$ dos entrevistados acreditam que a organização dos conteúdos curriculares propicia momentos de demonstração de fórmulas matemáticas, isto é, conseguem realizar as demonstrações utilizando a organização curricular existente. Por outro lado, mesmo diante das constantes alterações na BNCC e LDBEN, ainda há uma porcentagem de entrevistados que percebem a necessidade na reorganização dos conteúdos, como é o caso daqueles que marcaram a opção "às vezes"ou "raramente". Ainda, aproximadamente $10,8\%$ dos entrevistados relataram nunca perceber que a organização dos conteúdos curriculares possam auxiliá-los na tarefa de demonstração de fórmulas matemáticas.

7. Os estudantes cobram do professor que as fórmulas apresentadas sejam demonstradas?

    a) Sempre

b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

Objetivo: Identificar por meio de um depoimento dado pelo professor se os estudantes cobram que as fórmulas apresentadas em sala sejam demonstradas.

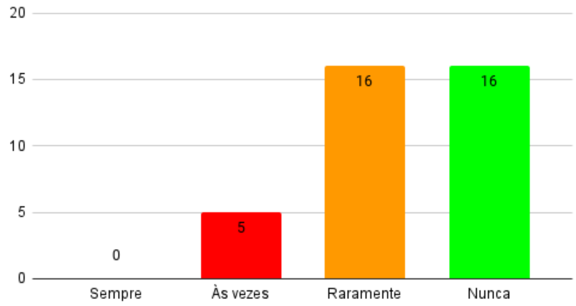


Figura 29 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 7.
Fonte: Elaborado pelo autor

A imagem acima explicita que a maioria dos estudantes, segundo relato dos entrevistados, estão concentrados entre "raramente" exigirem demonstrações de fórmulas matemáticas, aproximadamente 43%, ou "nunca", aproximadamente 43%, exigirem demonstrações matemáticas. Dentre os entrevistados, não houve marcação relatando que existem estudantes que sempre cobram as demonstrações.

8. Os conteúdos de matemática que são apresentados na educação básica permitem que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico?

a) Sempre b) Às vezes c) Raramente d) Nunca

Objetivo: Identificar o nível de contribuição dado pela disposição e escolha dos conteúdos matemáticos apresentados aos estudantes para que se possa desenvolver o pensamento crítico durante as atividades escolares.

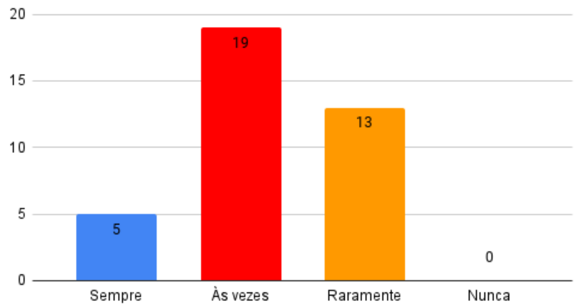


Figura 30 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 8.
Fonte: Elaborado pelo autor

O maior percentual de marcações se concentrou, aproximadamente $51,3\%$, em afirmar que às vezes os conteúdos auxiliam no desenvolvimento do pensamento crítico. As recentes modificações na BNCC tiveram como pauta a reorganização e remanejamento de conteúdos de modo a propiciar o desenvolvimento do pensamento crítico. Porém, mesmo diante das constantes modificações, os entrevistados ainda não relatam uma melhora em relação ao tema.

9. Os estudantes, de acordo com a grade curricular apresentada pelos órgãos oficiais, são levados a exercitarem o ato de conjecturar e estruturar padrões matemáticos?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

Objetivo: Identificar o nível de contribuição dado pela disposição e escolha dos conteúdos matemáticos apresentados aos estudantes de modo que sejam levados a exercitarem o ato de conjecturar e estruturar padrões matemáticos durante as atividades escolares.

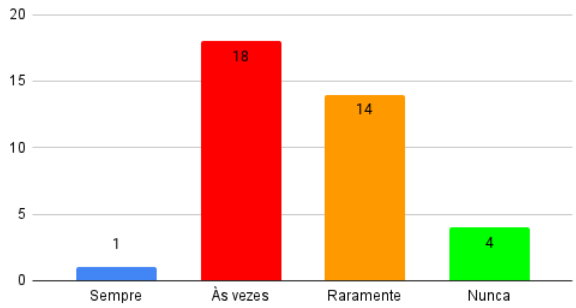


Figura 31 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 9.
Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados obtidos neste item mostram que a grade curricular apresentada pelos órgãos Estaduais e Distritais, segundo os entrevistados, na maioria das vezes não propicia o ato de conjecturar e estruturar padrões matemáticos.

10. Em sala de aula, caso tivesse que realizar a validação, a pedido de um estudante, da fórmula da soma dos n primeiros números ímpares, qual caminho possivelmente o senhor utilizaria?

A soma de n números ímpares

Soma de 1 número ímpar ______________________ $1=1^2$

Soma de 2 números ímpares ________________ $1+3=2^2$

Soma de 3 números ímpares ______________ $1+3+5=3^2$

Soma de 4 números ímpares ____________ $1+3+5+7=4^2$

...

Soma de n números ímpares $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$

Figura 32 – Soma dos n números ímpares.
Fonte: Elaborada pelo autor

a) Testaria / mostraria a validade da fórmula para alguns valores conforme a imagem acima.

b) Utilizaria algum outro artifício de demonstração.

Objetivo: Identificar a postura do professor, ao ser indagado por um estudante em uma situação hipotética, de como se portaria para mostrar a validade da fórmula da soma dos n primeiros números ímpares.

A marcação do primeiro item mostra que a validação da fórmula está sendo realizada pela conjectura da validade da fórmula apenas para alguns números naturais. Enquanto, a marcação do segundo item mostra a preocupação da escolha de um outro método de validação que não seja a conjectur validade para um intervalo isolado de valores.

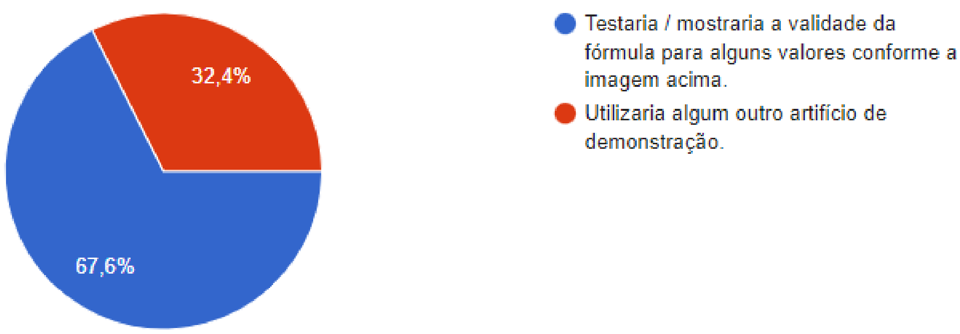


Figura 33 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 10.
Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com os entrevistados, aproximadamente 67%, para realizarem a validação da fórmula apresentada para a soma dos n primeiros números ímpares, fariam o teste da fórmula para um determinado intervalo de números. Sabe-se que tal prática, não atesta a validade de uma proposição, ou seja, caso se deseje elaborar a demonstração da validade desta fórmula, deve-se buscar um método de demonstração formal.

Ainda, é necessário cuidar para que a conjectura da validade de uma fórmula para um determinado intervalo de números não seja confundida como sendo uma demonstração formal. De acordo com a experiência do autor desta pesquisa, é muito comum que os estudantes apenas testem a validade para um ou dois valores e já afirmem que servirá em qualquer situação. Temos ai, então, uma boa oportunidade para mostrar aos estudantes a diferença entre conjectura e demonstração de fórmulas matemáticas.

11. Das formas de demonstração apresentadas abaixo, qual é a mais utilizada pelo(a) senhor(a) em sala?

    a) Demonstração direta

    b) Demonstração por contrapositiva

    c) Demonstração por redução ao absurdo

    d) Demonstração pelo Princípio Indução Finita

    e) Não realizo ou raramente realizo demonstrações em sala

Objetivo: Identificar quais os métodos mais utilizados para a demonstração de fórmulas matemáticas e, de um modo especial, levantar o dado se algum dos entrevistados escolheria o P.I.F.

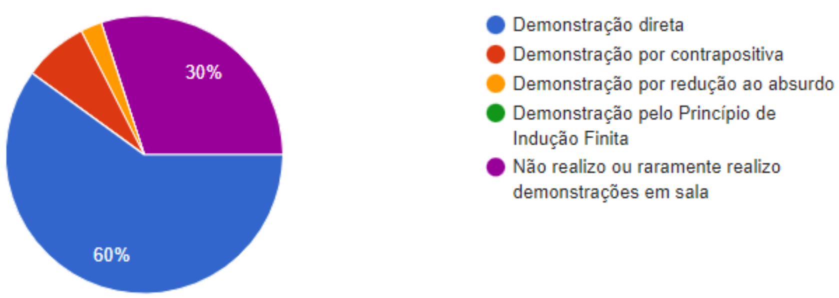


Figura 34 – Questionário aplicado ao professor: resultado do item 11.
Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com os entrevistados, 60% utilizam o método de demonstração direta em sala. Este é um método que em diversas situações pode ser utilizada sem grandes complicações para a demonstração de fórmulas matemáticas que são apresentadas na educação básica. Demonstrações por contraposição ou mesmo por absurdo já incidiram com um percentual menor $7,5\%$ e $2,5\%$, respectivamente. Quanto a utilização do P.I.F., não houve marcação, isto é, dos entrevistados nenhum recorreria ao P.I.F. Os resultados obtidos neste item podem refletir alguns aspectos como: tipo de formação inicial do docente, realidade em que o colégio está inserido, exigências apresentadas pela comunidade entre outros.

12. Caso o senhor(a), no item anterior, tenha selecionado a opção "Não realizo ou raramente realizo demonstrações em sala", peço, gentilmente, que justifique brevemente os motivos que desmotivam o professor em realizar demonstrações matemáticas em sala de aula.

    Objetivo Obter o relato dos entrevistados de modo a justificarem o motivo pelo qual não realizam as demonstrações de fórmulas matemáticas em sala de aula.

    Dos 37 professores que responderam ao questionário, 19 deixaram registrado neste item alguns motivos que desencorajam o professor em realizar demonstrações matemáticas em sala de aula. São eles:

    a) "OS ALUNOS (NA SUA GRANDE MAIORIA) NÃO SE INTERESSAM PELAS DEMONSTRAÇÕES E SIM PELO USO DIRETO DAS FORMULAS E OU CONCEITOS."

    b) "Pois acredito que os alunos não tem base de conhecimento para compreenderem as demonstrações."

    c) "Nosso estudantes (fundamental 1) têm dificuldade de entender e/ou não se interessam."

    d) "Um dos motivos é o desinteresse dos estudantes, pois a demonstração exige alta capacidade de argumentação e linguagem própria. O estudante que não se esforçar, dificilmente irá entender o que foi explicado."

    e) "Trabalho com 6° e 7° anos. A maior parte do conteúdo é conceituação. Quando dá para demonstrar, prefiro de forma direta, por causa minha audiência."

    f) "Trabalhando com o Ensino Médio, vejo que, infelizmente, o conteúdo exigido pelo PAS é demais para a carga horária da disciplina. Muitas vezes temos que cortar alguns conteúdos, ou pelo menos não aprofundar tanto. Assim, é praticamente inviável fazer as demonstrações. Geralmente, consigo mostrar as demonstrações em horário alternativo, para um ou outro aluno que demonstre interesse."

Os alunos não gostam de demonstração e na maioria dos casos é porque eles não compreendem os caminhos. Os estudantes ficam confusos, acham chato e sofrem com falta de pré-requisitos para entender o que o professor apresenta. Nesse sentido, é desmotivador tentar tentar demonstrar a origem de fórmulas e conceitos matemáticos."

g) "Os alunos do ensino fundamental para o qual leciono são muito desmotivados e estão mais preocupados em como usar determinada fórmula ao invés de como surgiu ou como foi descoberta. Além disso o currículo é muito extenso e sobra pouco tempo para demonstrações formais. Acredito que no Ensino Médio as demonstrações sejam melhores aproveitadas pelos alunos, já que eles estão um pouco mais maduros e questionadores sobre o porquê das fórmulas."

h) "Discrepância entre a bagagem/base de conhecimento dos estudantes, tempo de aula e interesse"

i) "O planejamento pedagógico que está enraizado na BNCC. Não temos tempo hábil para tais demonstrações."

j) "O conhecimento dos alunos, em maioria das vezes, é tão baixo que tentar demonstrar algo a um aluno é algo quase que impossível, visto que em boa parte das vezes a falta de pré requisito é o que há!"

Os relatos acima expostos evidenciam que existem aspectos que impedem a utilização de demonstrações em sala da aula. Dentre eles, a falta de interesse dos estudantes; a falta de pré-requisito para que se chegue a compreensão do procedimento adotado durante as demonstrações; planejamento engessado pela BNCC; alguns estudantes não gostam de demonstrações matemáticas. Vale ressaltar que os tópicos mais frequentes são a falta de interesse dos estudantes por demonstrações e a falta de pré-requisito.

Considerações Finais

Após decorrido os capítulos que compõem esta dissertação, torna-se disponível aos professores e estudantes da educação básica um material sucinto, porém completo para que o P.I.F. possa ser um método de demonstração que seja inserido na grade curricular dos professores de modo a propiciar a toda a comunidade escolar um contato, possivelmente o primeiro, com uma poderosa ferramenta de demonstração.

As informações contidas no primeiro capítulo desta dissertação, servirão de enorme ajuda no trabalho de conscientização e aprendizado dos estudantes no que se refere as respostas obtidas no questionário do professor: resultado do item 4 onde aproximadamente 45% dos entrevistados identificam que seus estudantes acreditam que o conjunto dos números naturais possui um número maior de elementos quando comparado com o número de elementos do conjunto dos números inteiros. Este fato, conforme observamos nas respostas aos questionários, é comum e deve ser alertado aos estudantes.

Uma importante contribuição dada por este trabalho, foi a exposição dos trechos de três dos principais documentos norteadores da educação brasileira no que tange à necessidade do uso de métodos que fomentem o desenvolvimento do pensamento crítico.

Foi apresentada uma sequência de demonstrações utilizando o P.I.F. de modo a contemplar as principais fórmulas apresentadas na educação básica, dentre elas a fórmula de Fibonacci, teorema das linhas, colunas e diagonais, dentre outros, isto é, demonstrações que podem ser aplicadas aos estudantes de forma didática e concatenadas com o conteúdo a ser trabalhado em cada etapa do ensino médio.

Ainda, foram apresentados alguns problemas que podem ser exemplificados de modo prático em sala de aula, como são os casos da Torre de Hanoi, o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal, pizza de Steiner e a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Estes problemas podem ser inseridos em atividades práticas de sala de aula de modo que o material concreto possa auxiliar na conjecturação da fórmula e no P.I.F. durante a demonstração formal.

Com base nos dados obtidos pelas respostas dos questionários, evidenciou-se que o P.I.F. se apresenta como uma ferramenta desconhecida no segmento da educação básica, porém capaz de atender as demandas apresentadas no próprio questionário na medida em que, por meio da aplicação deste princípio, os professores e estudantes possam por exemplo: retomar os conteúdos que são pré-requisitos e não foram assimilados no período em que foram vistos em sala de aula, experienciar uma nova forma de demonstração formal para as conjecturas realizadas em sala ou se sentirem capazes de buscar novos caminhos, como é o caso do P.I.F., para a realização de demonstrações.

Por fim, todos os temas e problemas abordados ao longo desta dissertação serão reavivados em estudos e pesquisas posteriores e, para isso, o apêndice B contribuiu com a apresentação de atividades investigativas.

Referências

BEZERRA, J. *História dos números: origem e evolução dos número*. 2021. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/historia-dos-numeros-origem-e-evolucao-dos-numeros/>. Acesso em 27/09/2023. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso: 28/09/2023. Citado na página 34.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso: 28/11/ 2022. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 38.

BRITO, M.; BRITO, A. *Biblioteca de objetos matemáticos da UFPA - Projeto PROINT*. 2018. Disponível em: <https://www.aedi.ufpa.br/bom/images/pdf/hanoi.pdf>. Acesso: 06/11/2023. Citado na página 93.

ENSINO, A. C. de. *Indução Matemática - Tópicos Adicionais*. 2000. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/wdjtvu7tk5wow.pdf>. Acesso: 26/05/2023. Nenhuma citação no texto.

ESCOLA MELHOR. *Entenda a diferença entre educação integral e educação em tempo integral*. 1988. Disponível em: <https://www.melhorescola.com.br/artigos/entenda-a-diferenca-entre-educacao-integral-e-educacao-em-tempo-integral#:~:text=Na%20chamada%20forma%C3%A7%C3%A3o%20integral%2C%20h%C3%A1,independente%20de%20receber%20ou%20n%C3%A3o>. Acesso em 29/09/2023. Citado na página 34.

FERREIRA, L. B. P. *TORRE DE HANÓI: UM RECURSO PEDAGÓGICO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA*. 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5794_2982_ID.pdf>. Acesso: 06/11/2023. Citado na página 93.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos matemáticos - A experiência Russa*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012. Nenhuma citação no texto.

FRIEDMANN, C. V. P.; SANTOS, J. N. dos; ESQUINCALHA, A. da C. *POSSIBILIDADES PARA O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR*. 2016. Disponível em: <https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5264_2368_ID.pdf>. Acesso: 26/06/2023. Nenhuma citação no texto.

GASPARIN, J. L. *Uma Didática para a Pedagogia Histórico–Crítica*. 7. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2005. Citado na página 38.

HEFEZ, A. *Indução Matemática*. 2009. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em 04/04/2023. Citado na página 24.

HEFEZ, A. *Exercícios resolvidos de Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016. Nenhuma citação no texto.

IBERDROLA. *O valor do pensamento crítico na sociedade atual.* 2020. Disponível em: <https://www.iberdrola.com/talentos/o-que-e-pensamento-critico-como-desenvolver>. Acesso em 11/10/2023. Citado na página 35.

LIMA, E. L. *O Princípio da indução.* 1988. Disponível em: Revista Eureka, n. 3, p. 26-41, 2 maio 1988 (Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)). <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf>. Acesso em 26/05/2023. Citado 4 vezes nas páginas 32, 43, 45 e 46.

LUIZ, R. *Diagrama de Venn.* 2009. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/diagrama-de-venn.htm>. Acesso em 17/10/2023. Citado na página 117.

MORGADO, A. césar; CARVALHO, P. cezar pinto. *Matemática Discreta.* 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado na página 52.

NUNES, T. *O que é ensino por investigação?* 2021. Disponível em: <https://pontodidatica.com.br/o-que-e-ensino-por-investigacao/?doing_wp_cron=1696245779.2871921062469482421875#:~:text=O%20ensino%20por%20investiga%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20aquele%20capaz%20de,a%20partir%20de%20problema%20reais%20e%20culturalmente%20relevantes>. Acesso em 02/10/2023. Citado na página 36.

OLIVEIRA, K. irraciel martins; FERNáNDEZ adán josé corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012. Nenhuma citação no texto.

PORFÍRIO, F. *Pitágoras.* 2020. Disponível em: Brasil Escola. <https:brasilescola.uol.com.br/filosofia/pitagoras-1.htm#:~:text=Pit%C3%A1goras%20foi%20um%20fil%C3%B3sofo%2C%20matem%C3%A1tico%2C%20astr%C3%B4nomo%20e%20m%C3%BAsico%20grego%20pr%C3%A9,fundou%20a%20sua%20escola%20filos%C3%B3fica%20>. Acesso em 08/10/2023. Citado na página 23.

RAMPAZZO, L. *Progressões Aritméticas na 6.a série?* 1988. Disponível em: Revista Professor de Matemática). <https:/rpm.org.br/cdrpm/13/10.htm>. Acesso em 18/12/2023. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 65.

RIZZO, M. L. A. *Números reais.* 2020. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/numeros-reais.htm>. Acesso em 07/10/2023. Citado na página 29.

SALVADOR, J. A. *Cortando bolo, pizza e grissini.* 2020. Disponível em: Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. <https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2020/01/art1_vol8_2020_SBM_PMO_final.pdf>. Acesso em 07/10/2023. Citado na página 101.

SAVIANI. *Pedagogia histórico-crítica: Primeiras aproximações.* [S.l.: s.n.], 1995. Citado na página 33.

SAVIOLI, A. M. P. das D. *Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma experiência.* 2006. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1247>. Acesso em 11/10/2023. Citado na página 93.

SEEDF. *CURRÍCULO EM MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - PRESSUPOSTOS TEÓRICOS.* 2018. Disponível em: <https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteud

o/uploads/2018/02/1_pressupostos_teoricos.pdf>. Acesso: 27/06/ 2023. Citado na página 38.

SEEDF. *CURRÍCULO EM MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - PRESSUPOSTOS TEÓRICOS*. 2018. Disponível em: <https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Curriculo-em-Movimento-Ens-Fundamental_17dez18.pdf>. Acesso: 17/10/2023. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

SILVA, D. neves. *Blaise Pascal*. 2021. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/biografias/blaise-pascal.htm>. Acesso em 03/10/2023. Citado na página 73.

SILVA, L. A. da et al. *Os conjuntos dos números naturais e dos inteiros possuem o mesmo "número de elementos"!* 2023. Disponível em: <https://ciencia.bambui.ifmg.edu.br/index.php/arquivos/arquivo/janeiro-2023/os-conjuntos-dos-numeros-naturais-e-dos-inteiros-possuem-o-mesmo-numero-de-elementos>. Acesso: 28/09/2023. Nenhuma citação no texto.

TAROUCO, V. L.; SILVA, G. de P.; SILVA, A. C. da. *Marcas do ensino tradicional sobre a compreensão da operação de multiplicação em professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. 2016. Disponível em: <https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5884_3173_ID.pdf>. Acesso em 26/05/2023. Citado na página 40.

TODA MATERIA. *Francis Bacon*. 2023. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/francis-bacon/>. Acesso em 11/10/2023. Citado na página 35.

APÊNDICE A – Questionário aplicado aos professores

A.1 Questionário aplicado aos professores

1. Atualmente, o(a) senhor(a) leciona na rede:

    a) particular.

    b) pública.

    c) ambas.

2. Há quantos anos exerce a profissão?

    a) A menos de 5 anos.

    b) Entre 5 e 10 anos.

    c) Entre 10 e 15 anos.

    d) A mais de 15 anos.

   Professor, de acordo com sua experiência de sala de aula, marque a alternativa que melhor represente sua resposta em cada item.

3. O conjunto dos números naturais é um conjunto conhecido e reconhecido pela maioria dos estudantes da educação básica?

    a) Sempre

    b) Às vezes

    c) Raramente

    d) Nunca

4. Os estudantes acreditam que o conjunto dos números naturais possui uma quantidade menor de elementos quando comparado ao conjunto dos números inteiros?

    a) Sempre

    b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

5. O(a) senhor(a) possui o hábito de demonstrar formalmente as fórmulas apresentadas aos estudantes?

a) Sempre

b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

6. A organização dos conteúdos curriculares propicia momentos de demonstração de fórmulas matemáticas?

a) Sempre

b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

7. Os estudantes cobram do professor que as fórmulas apresentadas sejam demonstradas?

a) Sempre

b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

8. Os conteúdos de matemática que são apresentados na educação básica permitem que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico?

a) Sempre

b) Às vezes

c) Raramente

d) Nunca

9. Os estudantes, de acordo com a grade curricular apresentada pelos órgãos oficiais, são levados a exercitarem o ato de conjecturar e estruturar padrões matemáticos?

   a) Sempre

   b) Às vezes

   c) Raramente

   d) Nunca

10. Em sala de aula, caso tivesse que realizar a validação, a pedido de um estudante, da fórmula da soma dos n primeiros números ímpares, qual caminho possivelmente o senhor utilizaria?

A soma de n números ímpares

Soma de 1 número ímpar ______ $1=1^2$

Soma de 2 números ímpares ______ $1+3=2^2$

Soma de 3 números ímpares ______ $1+3+5=3^2$

Soma de 4 números ímpares ______ $1+3+5+7=4^2$

...

Soma de n números ímpares $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

Figura 35 – Soma dos n números ímpares.
Fonte: Elaborada pelo autor

   a) Testaria / mostraria a validade da fórmula para alguns valores conforme a imagem acima.

   b) Utilizaria algum outro artifício de demonstração.

11. Das formas de demonstração apresentadas abaixo, qual é a mais utilizada pelo(a) senhor(a) em sala?

   a) Demonstração direta

   b) Demonstração por contrapositiva

   c) Demonstração por redução ao absurdo

   d) Demonstração pelo Princípio de Indução Finita

   e) Não realizo ou raramente realizo demonstrações em sala

12. Caso o senhor(a), no item anterior, tenha selecionado a opção "Não realizo ou raramente realizo demonstrações em sala", peço, gentilmente, que justifique brevemente os motivos que desmotivam o professor em realizar demonstrações matemáticas em sala de aula.

APÊNDICE B – Atividade investigativa

B.1 Torre de Hanói

Atividade de investigação

Estudante:_____________________________________ **Turma:** _________

Torre de Hanói

Caro estudante, o objetivo do jogo é transportar os discos do pino 1 para o pino 3. Em cada movimento é permitido deslocar apenas 1 disco por vez. Em todos os movimentos, em cada pino, o tamanho dos discos deve ser decrescente, de baixo para cima. Busque utilizar o mínimo de movimentos possíveis para completar a tarefa.

Objetivo da atividade: Dedução da fórmula que descreva o número mínimo de jogadas de modo a transportar os discos do primeiro pino para o terceiro.

d: número de discos	$n(d)$: número mínimo de movimentos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Estudante, inicie a observação utilizando apenas 1 disco. Em seguida, faça o exercício utilizando 2 discos e, deste modo, procure chegar a ter 6 discos em seu jogo. Lembre-se sempre de anotar, em cada situação, qual foi o número mínimo de movimentos necessários para completar a tarefa.	

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6
d: número de discos	$n(d)$: número mínimo de movimentos	Escreva o valor obtido na coluna 2 adicionado de 1 unidade	Escreva o resultado da coluna 3 em forma de potência de base 2	Escreva o valor obtido na coluna 4 subtraído de 1 unidade	Compare os valores obtidos nas colunas 2 e 5
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Após ter preenchido toda a tabela acima, discuta com seus colegas um possível número mínimo de jogadas para um número n de discos.

Fórmula obtida:

B.2 Soma dos ângulos internos de um polígono

Atividade de investigação

Estudante:____________________________________ Turma: _________

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Objetivo: Deduzir a fórmula que descreva a soma dos ângulos dos ângulos internos de um polígono convexo.

Materiais: Papel colorido, tesoura, cola bastão e régua.

1) Desenhe um triângulo pequeno na folha branca, recorte-o e, em seguida, pinte seus ângulos, sendo cada ângulo de uma cor. Recorte com a mão os três ângulos. Cole os ângulos de maneira que eles fiquem consecutivos. Observe a figura formada e complete a frase abaixo.

A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede _______.

2) Cada integrante do grupo deve recortar polígonos com diferentes quantidades de lados. Escolher um dos vértices (somente um em cada figura) e ligá-lo a todos os outros vértices não adjacentes. Colar estes polígonos na parte inferior desta folha ou em seu verso. Observe as figuras que foram coladas e complete o Quadro abaixo.

Número de lados	Figura	Quantidade de triângulos obtidos	Soma dos ângulos internos

Observe atentamente os valores obtidos para a soma dos ângulos internos de cada um dos polígonos e busque fazer uma generalização para um polígono de n lados.

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é descrita por $S(n)$=___________.

B.3 Número de diagonais de um polígono

Atividade de investigação

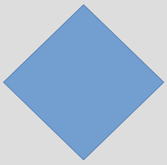
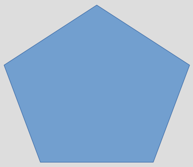
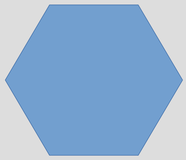
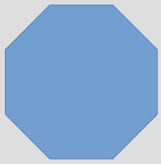
Estudante:____ **Turma:** __________

Número de diagonais de um polígono

Objetivo: Encontrar uma fórmula para o número de diagonais de polígonos a partir da observação e registro de regularidades numéricas.

Materiais: Régua.

Nas figuras abaixo, escolha 1 vértice em cada uma, e descubra quantas diagonais partem desse vértice, comparado ao número de lados do polígono. Use cores diferentes para traçar as diagonais.

	Polígono 1	Polígono 2	Polígono 3	Polígono 4
				
Nome do polígono				
Número de lados				
Número de diagonais ligando cada vértice				
Assim podemos generalizar que em um polígono de n lados, para cada vértice deste polígono haverá ____________________ diagonais partindo dele.				

Polígono	Número de lados	Número de vértices	Número de diagonais ligando cada vértice	Número total de diagonais
1				
2				
3				
4				
Para um polígono de n lados, teremos n vértices. Cada um será ligado aos demais vértices não consecutivos, ou seja, $n-3$ diagonais. O total de ligações seria então o produto de n por $n-3$. Entretanto, dois vértices são ligados apenas uma vez entre si, não podendo ser contado duas vezes.				

Assim podemos generalizar que um polígono de n lados possui d diagonais:

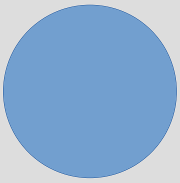
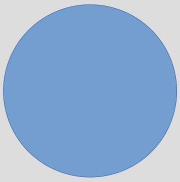
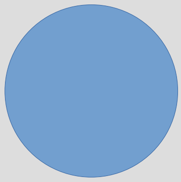
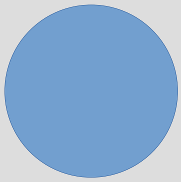
B.4 Pizza de Steiner

Atividade de investigação

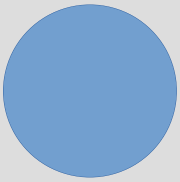
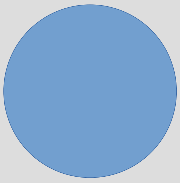
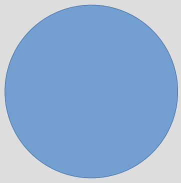
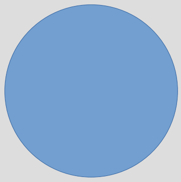
Estudante:____ **Turma:** __________

A Pizza de Steiner

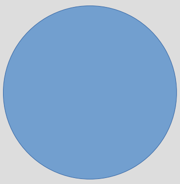
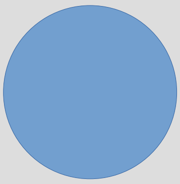
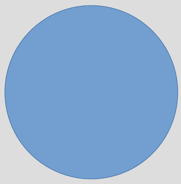
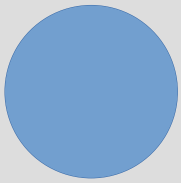
O grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu, em 1826, o seguinte problema: **Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?**

Situação 1				
Número de cortes paralelos entre si	1	2	3	4
Quantidade de regiões formadas				

Assim podemos generalizar que se todos os n cortes retilíneos forem paralelos entre si, teremos __________ regiões.

Situação 2				
Número de cortes contendo o centro	1	2	3	4
Quantidade de regiões formadas				

Assim podemos generalizar que se todos os n cortes retilíneos distintos forem concorrentes no mesmo ponto central, teremos _________ regiões.

Situação 3				
Número de cortes não paralelos entre si e não contendo o centro	1	2	3	4
Quantidade de regiões formadas				

Assim podemos generalizar que o caso mais geral com n cortes lineares de uma pizza não tendo dois paralelos e nem três deles concorrentes num mesmo ponto, teremos _________ regiões.

APÊNDICE C – Demonstrações

C.1 Caso $(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$

Inicialmente, definamos a proposição $p(n):(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $p=1$.

$$\begin{aligned} p(1) &: (a+b)|(a^2-b^2) \\ p(1) &: (a+b)|(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$p(n):(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$, para algum $n \in \mathbb{N}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1):(a+b)|(a^{2n+2}-b^{2n+2})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^{2n+2}-b^{2n+2} &= a^{2n+2}-a^2b^{2n}+a^2b^{2n}-b^{2n+2} \\ &= a^2(a^{2n}-b^{2n})+b^{2n}(a^2-b^2) \end{aligned}$$

Por hipótese, $(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$. Ainda, temos que $(a+b)|(a^2-b^2)$ pois $(a+b)|(a+b)(a-b)$.

Portanto: $(a+b)|a^2(a^{2n}-b^{2n})+b^{2n}(a^2-b^2)$.

Concluímos que $(a+b)|(a^{2n+2}-b^{2n+2})$.

Desta forma, mostramos que$(a+b)|(a^{2n+2}-b^{2n+2})$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo P.I.F., $(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

C.2 Caso $(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$

Inicialmente, definamos a proposição $p(n):(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$ para todo $a,b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $p = 1$.

$$\begin{aligned} p(0) &: (a+b)|(a^{2.0+1}+b^{2.0+1}) \\ p(0) &: (a+b)|(a+b) \end{aligned}$$

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p(n) : (a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : (a+b)|a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1})$, isto é $p(n+1) : (a+b)|(a^{2n+3}+b^{2n+3})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} a^{2n+3}+b^{2n+3} &= a^{2n+3}+a^2b^{2n+1}-a^2b^{2n+1}+b^{2n+3} \\ a^{2n+3}+b^{2n+3} &= a^2(a^{2n+1}+b^{2n+1})+b^{2n+1}(b^2-a^2) \end{aligned}$$

Por hipótese, $(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$. Ainda, temos que $(a+b)|(b^2-a^2)$, pois $(a+b)|(b+a)(b-a)$.

Portanto: $(a+b)|a^2(a^{2n+1}+b^{2n+1})+b^{2n+1}(b^2-a^2)$. Concluímos que $(a-b)|(a^{2n+3}+b^{2n+3})$.

Desta forma, mostramos que$(a+b)|(a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1})$, ou seja, que $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F., $(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

C.2.1 $2|n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vamos mostrar que o número 2 é capaz de dividir o produto de dois números naturais consecutivos, isto é $2|n(n+1)$. Ainda, equivale a dizer que o produto de dois números naturais é múltiplo de 2.

Inicialmente definamos a proposição $p(n) : 2|n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 0$.

$$\begin{aligned} p(0) &: 2|0(0+1) \\ &: 2|0.1 \\ p(0) &: 2|0 \end{aligned}$$

De fato, o caso base é válido em $p(0)$ pois $2|0$ (2 divide 0).

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p(n) : 2|n(n+1)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : 2|(n+1)(n+2)$

Demonstração:

Inicialmente faremos a seguinte consideração, utilizando a hipótese: $2|n(n+1)$ temos que existe um q tal que $2.q = n(n+1)$, onde $q \in \mathbb{Z}$, isto é, $2q = n^2 + n$.

Ainda, consideraremos a seguinte manipulação: $(n+1)(n+2) = n^2 + 2n + n + 2$.

Usando a hipótese, temos:

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2) &= n^2 + n + 2n + 2 \\
&= 2.q + 2n + 2 \\
&= 2.q + 2(n+1) \\
(n+1)(n+2) &= 2(q+n+1)
\end{aligned}$$

Conclusão $(n+1)(n+2) = 2(q+n+1)$. Isto é: $2|(n+1)(n+2)$.

Desta forma, mostramos que $2|(n+1)(n+2)$, ou seja, $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F. $p(n) : 2|n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

C.3 $9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vamos mostrar que o número 9 é capaz de dividir a soma dos cubos de três números naturais consecutivos, isto é $9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. Ainda, equivale a dizer que a soma dos cubos de três naturais é múltiplo de 9.

Inicialmente definamos a proposição $p(n) : 9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Caso base: demonstraremos a validade de $p(n)$ para $n = 0$.

$$\begin{aligned} p(0) \quad &: \quad 9|0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3) \\ &: \quad 9|0 + 1^3 + 2^3 \end{aligned}$$
$$p(0): \quad 9|9$$

De fato, o caso base é válido em $p(0)$ pois $9|9$ (9 divide 9).

Hipótese: vamos supor válida $p(n)$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$p(n) : 9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Tese: devemos mostrar que $p(n+1)$ também é válida.

$p(n+1) : 9|(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$

Demonstração:

Inicialmente faremos a seguinte consideração, utilizando a hipótese: $9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ temos que existe um q tal que $9.q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, onde $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 9.q &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ onde } q \in \mathbb{Z}. \\ &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ 9.q &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \end{aligned}$$

Agora, manipularemos a expressão: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= 9.q + 9(n^2 + 3n + 3) \\ (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= 9.(q + n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

Conclusão $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9.(q + n^2 + 3n + 3)$. Isto é: $9|(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$.

Desta forma, mostramos que $9|(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$, ou seja, $p(n)$ implica $p(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, pelo P.I.F. $p(n) : 9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.