

**ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
GENERALIZADOS PARA SIMULAÇÃO DE FALHA ESTRUTURAL  
COM MODELO DE DANO CONTÍNUO**

**GELSON DE SOUSA ALVES**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA  
SIMULAÇÃO DE FALHA ESTRUTURAL COM  
MODELO DE DANO CONTÍNUO**

**GELSON DE SOUSA ALVES**

**ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO  
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.TD-11A/19  
BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2019**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA  
SIMULAÇÃO DE FALHA ESTRUTURAL COM  
MODELO DE DANO CONTÍNUO**

**GELSON DE SOUSA ALVES**

**TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC/UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Sergio Persival Baroncini Proença, DSc. (EESC/USP)**  
(Examinador Externo)

---

**Prof. Egdar Nobuo Mamiya, DSc. (ENM/UnB)**  
(Examinador Externo)

---

**Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD. (ENC/UnB)**  
(Examinador Interno)

**BRASÍLIA/DF, 13 DE AGOSTO DE 2019**

## FICHA CATALOGRÁFICA

ALVES, GELSON DE SOUSA

Estratégia global local pelo método dos elementos finitos generalizados para simulação de falha estrutural com modelo de dano contínuo [Distrito Federal] 2019.

xxix, 133p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2019). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método dos elementos finitos generalizados

2. Estratégia multiescala

3.Enriquecimento global local

4. Dano contínuo

5.Modelos não lineares

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Doutor)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALVES, G. S. (2019). Estratégia global local pelo método dos elementos finitos generalizados para simulação de falha estrutural com modelo de dano contínuo. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-11A/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 133p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gelson de Sousa Alves.

TÍTULO: Estratégia global local pelo método dos elementos finitos generalizados para simulação de falha estrutural com modelo de dano contínuo.

GRAU: Doutorado

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Gelson de Sousa Alves

Departamento de Estruturas, Centro de Tecnologia (CT) - UFPI

Campus Universitário Ministro Petrônio Portela, Avenida Universitária, S/N, Ininga.

64.049-550 Teresina – PI – Brasil.

gelson@ufpi.edu.br

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois sem ele não teria alcançado esta conquista.

Ao meu orientador Evangelista Junior pela orientação objetiva, segura, competente, e confiança depositada desde o início da pesquisa.

A minha mãe Deci, por todo amor e dedicação, ao meu pai Francisco, que de onde estiver olhara por mim. Aos meus irmãos Glébson, Gabriela e demais familiares pelo apoio que a mim foi dado.

Gratidão à minha linda namorada Netinha pelo companheirismo e incentivo durante toda essa trajetória e a minha pequena Isabella pela consideração e cuidado dedicados a mim.

Aos amigos Eduardo, Alejandra, Fabiano e Wanderley, que foram irmãos conquistados ao longo dessa trajetória.

Aos amigos conquistados desde a graduação até agora no doutorado: Agno, Americo, Paulo Júnior, Jhones, Gustavo, Joara, Ewerton, Wallysson, Álvaro, Augusto, Carlos Mariano, Nelson Afanador, Jéssica Borges, Jéssica Siqueira, Carla, Luciano, Iarly, Isabel, Nailde, Dyorgge, Wilber, Pedro, Thiarly, Natanael, Jerfson, Jonathas, João Paulo, Paulo Reis, Wilson, Marcus, Uchôa, Ramon, Sebastião, Wellington, Erwin, Elaine, Marília, Henrique Nery, Maria Cláudia, Vitor, Maria Paz, Cassius, Girleusa, Henrique, Jaqueline, João Leite, João Libório, José Victor, Juscelino, Marcão, Nelsão, Olivar, Tatiane, Rafael e Ribamar.

Aos amigos integrantes do grupo NEXUM: Carlos Valbson, Guilherme Paiva, Iago Almeida, José Fabiano e Nathaly Sarasty pelo auxílio prestado no desenvolvimento desse trabalho, abdicando muito do seu tempo para me ajudar.

À UnB, pela estrutura disponibilizada e aos professores que tive ao longo da minha vida acadêmica, pelos conhecimentos e experiências repassadas, que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

À Universidade Federal do Piauí (UFPI) pelo incentivo ofertado à capacitação do seu corpo docente, o que possibilitou a conclusão desta tese. Agradeço a todos os colegas do departamento de estruturas pela confiança depositada.

À Capes pelo apoio financeiro.

Dedico esta conquista a Deus, a minha  
mãe Deci Alves da Silva e meu  
pai Franscisco de Sousa Alves, os  
responsáveis por eu chegar nesse momento.

## RESUMO

### ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA SIMULAÇÃO DE FALHA ESTRUTURAL COM MODELO DE DANO CONTÍNUO

Autor: Gelson de Sousa Alves

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Agosto de 2019

Esta pesquisa teve como objetivo apresentar uma estratégia de simulação global local com o método dos elementos finitos generalizados (MEFG<sup>g-1</sup>) para modelos de mecânica de dano contínuo não linear em domínios bidimensionais. O problema global é a escala da estrutura, que é discretizada com malhas relativamente grosseiras, enquanto o problema local é um subdomínio de interesse do problema global, onde malhas refinadas podem ser utilizadas. O método proposto empregou a solução convergida do problema local não linear como funções de enriquecimento para o problema global que está na escala da estrutura e considerado linear sem solucionador iterativo. O MEFG<sup>g-1</sup> foi formulado e implementado levando em consideração diferentes membros estruturais: bloco uniaxial, viga sob três pontos, viga compósita heterogênea (matriz e inclusões), bloco com duplo entalhe, barragem de concreto e fêmur humano. A estratégia foi validada e analisada por meio de ensaios experimentais em testes monotônicos e resultados numéricos com propagação de trinca em condições de modo I e modo misto de fratura de materiais quase-frágeis. O método tem a capacidade de transferir os efeitos cinemáticos e a variável de estado de dano que ocorre em uma escala local para prever com precisão o comportamento estrutural sob processo de dano na escala da estrutura, o que garante soluções precisas mesmo com malhas grosseiras. A estratégia leva o método a processar menos graus de liberdade totais com número reduzido de iterações necessárias para convergir em cada etapa de carregamento. Os resultados mostram a eficiência, precisão e robustez do procedimento proposto em relação à análise de elementos finitos e elementos finitos generalizados convencional.

**Palavras chave:** Método dos elementos finitos generalizados, Estratégia multiescala, Enriquecimento global local, Dano contínuo, Modelos não lineares.



## **ABSTRACT**

### **GLOBAL LOCAL STRATEGY BY THE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD FOR SIMULATION OF STRUCTURAL FAILURE WITH CONTINUOUS DAMAGE MODEL**

Author: Gelson de Sousa Alves  
Supervisor: Francisco Evangelista Junior  
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil  
Brasília, August 2019

This research aimed to present a global local simulation strategy with the generalized finite element method (GFEM<sup>g-l</sup>) for models of nonlinear continuum damage mechanics in two-dimensional domains. The global problem is the scale of the structure which is discretized with relative coarse meshes while the local problem is a subdomain of interest of the global problem where refined meshes can be used. The proposed method employed the converged solution of the nonlinear local problem as enrichment functions for the global problem that is on the scale of the structure and considered linear without iterative solver. The GFEM<sup>g-l</sup> was formulated and implemented taking into account different structural members: uniaxial block, three point bending, heterogeneous composite beam (matrix and inclusions), double edge notch, concrete dam and human femur. The proposed strategy was validated and analyzed through experimental results in monotonic tests and numerical results with crack propagation in mode I and mixed mode conditions of quasi-brittle materials. The method has the capability to transfer the kinematic effects and the damage state variable that occurs on a local scale to accurately predict the structural behavior under damage process in the scale of the structure ensuring accurate solutions even with coarse meshes. The strategy leads the method to process fewer total degrees of freedom with reduced number of iterations needed to converge at each loading step. The results show the efficiency, accuracy, and robustness of the proposed procedure in relation to the conventional finite element and generalized finite element analysis.

**Keywords:** generalized finite element method, multiscale strategy, global-local enrichment, continuum damage, nonlinear models.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	MOTIVAÇÃO	2
1.3	ESTADO DA ARTE	3
1.4	OBJETIVOS	6
1.4.1	Objetivo Geral	6
1.4.2	Objetivos Específicos	6
1.5	CONTRIBUIÇÕES	7
1.6	ESTRUTURA DO TRABALHO	8
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, FORMULAÇÃO DO MEFGE E ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL DO MEFGE NÃO LINEAR</b>	<b>9</b>
2.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	9
2.2	APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	9
2.3	ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL DO MEFGE NÃO LINEAR	14
2.3.1	Problema Global Inicial Linear (PGIL)	15
2.3.2	Problema Local Não Linear (PLNL)	16
2.3.3	Problema Global Enriquecido Linear (PGEL)	18
2.4	MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	22
2.4.1	Modelo de dano	24
2.4.2	Programa LACHESIS	26
<b>3</b>	<b>PROGRAMA COMPUTACIONAL</b>	<b>29</b>
3.1	FLUXOGRAMA E PRINCIPAIS FUNÇÕES	29
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA</b>	<b>34</b>
4.1	VERIFICAÇÃO PRELIMINAR	34
4.1.1	Bloco submetido a deslocamento prescrito	34
4.1.2	Estratégia global local pelo MEFGE	35
4.2	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DE PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA	38
4.2.1	Viga sob flexão em três pontos	38
4.2.2	Verificação e validação (PLNL como 100% do problema global)	39

4.2.3	Análise do tipo de entalhe no problema global, refinamento- $p$ , número de iterações e graus de liberdade total .....	44
4.2.4	Análise do tamanho do problema local e refinamento- $h$ .....	49
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA COM COMPÓSITO DE MATRIZ E INCLUSÕES .....</b>	<b>57</b>
5.1	VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS HETEROGÊNEA (INCLUSÕES NA REGIÃO CENTRAL).....	57
5.2	ANÁLISE DO TIPO DE ENTALHE NO PROBLEMA GLOBAL, REFINAMENTO $p$ , NÚMERO DE ITERAÇÕES E GRAUS DE LIBERDADE TOTAL .....	58
5.3	ANÁLISE DO TAMANHO DO PROBLEMA LOCAL E REFINAMENTO- $h$ .....	75
<b>6</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO MISTO DE FRATURA.....</b>	<b>84</b>
6.1	ESTRUTURA COM DUPLO ENTALHE .....	84
6.1.1	Análise do refinamento do problema local, número de iterações e graus de liberdade totais .....	85
6.1.2	Análise dos problemas locais, número de iterações e graus de liberdade totais .....	91
6.2	PROBLEMA ESCALA REAL: BARRAGEM DE CONCRETO.....	95
6.2.1	Geometria, propriedades material e de fratura .....	96
6.2.2	Análise pelo MEFG <sup>g-1</sup> .....	97
6.3	MODELAGEM DE FÊMUR HUMANO .....	103
6.3.1	Estratégia global local do MEFG .....	104
<b>7</b>	<b>ABORDAGEM NÃO INTRUSIVA NA ESTRATÉGIA GLOBAL.....</b>	<b>109</b>
7.1	ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL NÃO INTRUSIVA PARA MODELO COESIVO .....	109
7.1.1	Modelo coesivo linear .....	113
7.2	MODELO DE VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS .....	114
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>116</b>
8.1	CONCLUSÕES .....	116
8.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	118
	<b>APÊNDICE .....</b>	<b>119</b>

A.1 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DA VIGA HETEROGÊNEA COM REFINAMENTO $p$ .....	119
A.2 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DA VIGA HETEROGÊNEA COM REFINAMENTO $h$ .....	122
A.3 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DO <i>DENT</i> PARA DOIS PLNL.....	124
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>125</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Descrição das funções principais do CLOTHO <sup>g-1</sup> .....	32
Tabela 4.1 – Propriedades do material e de fratura do bloco uniaxial. ....	34
Tabela 4.2 – Propriedades de rigidez, resistência e de fratura da <i>TPB</i> .....	39
Tabela 4.3 – Graus de liberdade usados no primeiro passo de carga para MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> .....	47
Tabela 4.4 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG 1841 elem e MEFG <sup>g-1</sup> .....	53
Tabela 5.1 – Propriedades de rigidez, resistência e de fratura da <i>TPB</i> heterogênea. ....	58
Tabela 5.2 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> juntamente com os respectivos $d_r$ com 101 elementos no problema global e 67 no PLNL. ....	64
Tabela 5.3 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> juntamente com os respectivos $d_r$ com 107 elementos no problema global e 73 no PLNL. ....	64
Tabela 5.4 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> ...	65
Tabela 5.5 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> juntamente com as respectivas $d_r$ para 205 elementos no problema global e 425 no PLNL. ....	79
Tabela 5.6 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG 1841 ele e MEFG <sup>g-1</sup> .....	79
Tabela 6.1 – Propriedades do material e de fratura do <i>DENT</i> .....	85
Tabela 6.2 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 130 elem e MEFG <sup>g-1</sup> com 130PG(P0) 66PLNL(P1) e 130PG(P0) 246PLNL(P0).....	89
Tabela 6.3 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG 130 elem (P1) e MEFG <sup>g-1</sup> com 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1) e 130PG(P1) 106PLNL1,2(P0).....	93
Tabela 6.4 – Propriedades do material e de fratura da barragem. ....	96
Tabela 6.5 – Número e tipo de elemento nos diferentes métodos.....	99
Tabela 6.6 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 9835 elem e MEFG <sup>g-1</sup> com 2720PG(P0) 2375PLNL(P0). ....	100
Tabela 6.7 – Propriedades do material e de fratura do fêmur.....	103
Tabela 6.8 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 6719 elem e MEFG <sup>g-1</sup> com 5952PG(P0) 847PLNL(P0). ....	106
Tabela 7.1 – Dimensões, propriedades do material e de fratura da <i>TPB</i> .....	114

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Construção das funções de forma do Mefg para enriquecimentos; (a) contínuos; (b) descontínuos. ....	11
Figura 2.2 – Etapas da metodologia do Mefg <sup>g-1</sup> para análise não linear; (a) PGIL; (b) Escolher PLNL; (c) Discretização local; (d) PGEL; (e) CC para $k > 1$ .....	15
Figura 2.3 – Estratégia de integração e transferência da variável escalar de dano; (a) PGIL e nó com função de enriquecimento global local; (b) Malha do PLNL; (c) PGEL com pontos de integração contendo variável escalar de dano incorporados da malha local aninhada. ....	21
Figura 2.4 – Fluxograma da metodologia do Mefg <sup>g-1</sup> para análise não linear.....	21
Figura 2.5 – Modelo de Dano Contínuo; (a) PVC; (b) Elemento de volume representativo.....	22
Figura 2.6 – Curva de amolecimento e modelo de dano; (a) Lei de amolecimento bilinear com equivalência de deformação através do $l_c$ ; (b) Comportamento constitutivo do modelo de dano escalar (Adaptada de Evangelista Jr. <i>et al.</i> , 2013a). ....	25
Figura 2.7 – Malha de elementos finitos regular com diferentes refinamentos e o dano ao final da simulação para a viga sob flexão em três pontos (Moreira, 2016). ....	27
Figura 2.8 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ para simulações com diferentes malhas com $l_c$ sendo o tamanho típico do elemento na seção central da viga (Moreira, 2016). ....	27
Figura 2.9 – Malha regular com 917 elementos e irregular com 1325 elementos e o dano ao final da simulação (Moreira, 2016). ....	28
Figura 2.10 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ para simulações com diferentes malhas com $l_c$ sendo o tamanho típico do elemento na seção central da viga (Moreira, 2016). ....	28
Figura 3.1 – Fluxograma com as principais funções. ....	30
Figura 3.2 – Funcionamento do programa computacional. ....	33
Figura 4.1 – Geometria e carregamento do bloco uniaxial submetido a deslocamento imposto. ....	34
Figura 4.2 – Malha utilizada para solução de referência. ....	35
Figura 4.3 – Curva $\sigma$ vs. $\delta$ para o bloco. ....	35
Figura 4.4 – Malhas utilizadas e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	36

Figura 4.5 – Curvas $\sigma$ vs. $\delta$ da solução de referência e do MEF $G^{g-1}$ para primeira abordagem. ....	36
Figura 4.6 – Malhas utilizadas e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	37
Figura 4.7 – Curvas $\sigma$ vs. $\delta$ da solução de referência e do MEF $G^{g-1}$ para segunda abordagem. ....	38
Figura 4.8 – Geometria, carregamento e CC da viga sob flexão em três pontos. ....	38
Figura 4.9 – Malhas da simulação do MEF $G^{g-1}$ com 39 elementos utilizadas no problema global e local; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	40
Figura 4.10 – Malhas da simulação do MEF $G^{g-1}$ com 107 elementos utilizadas no problema global e local; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	40
Figura 4.11 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ experimentais, simuladas pelo MEF $G^{g-1}$ para malha com 39 e 107 elementos e simuladas pelo MEF $G$ com 107 elementos para; (a) 50 e; (b) 200 passos de carga.....	41
Figura 4.12 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ experimentais, simuladas pelo MEF $G^{g-1}$ sob condições de tensão e deformação plana com 200 passos de carga para malha com; (a) 39 e; (b) 107 elementos.....	43
Figura 4.13 – Malhas utilizadas na simulação do MEF $G^{g-1}$ com entalhe explícito; (a) PGIL com 101 elementos; (b) PLNL com 67 elementos; (c) PGEL com 101 elementos.....	44
Figura 4.14 – Malhas utilizadas na simulação do MEF $G^{g-1}$ ; (a) PGIL com 107 elementos; (b) PLNL com 73 elementos com entalhe implícito; (c) PGEL com 107 elementos.....	45
Figura 4.15 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução experimental, MEF $G$ e MEF $G^{g-1}$ com 101 elementos no problema global e 67 elementos no PLNL; (a) 50 passos de carga; (b) 200 passos de carga.....	45
Figura 4.16 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução experimental, MEF $G$ e MEF $G^{g-1}$ com 107 elementos no problema global e 73 elementos no PLNL; (a) 50 passos de carga; (b) 200 passos de carga.....	46
Figura 4.17 – Trabalho relativo do resíduo dos modelos com; (a) entalhe explícito; (b) entalhe implícito.....	47

Figura 4.18 – Número de iterações em função do número do passo para; (a) MEFG 101 ele (P2) e 67PLNL(P2) com entalhe explícito; (b) MEFG 107 ele (P2) e 73PLNL(P2) com entalhe implícito. ....	48
Figura 4.19 – Graus de liberdade totais para; (a) MEFG 101 elem (P2) e MEFG <sup>g-1</sup> com 101PG(P2) 67PLNL(P2); (b) MEFG 107 ele (P2) e MEFG <sup>g-1</sup> com 107PG(P2) 73PLNL(P2). ....	48
Figura 4.20 – Distribuição de dano na viga para os dois cenários do MEFG <sup>g-1</sup> : 101PG(P2) 67PLNL(P2) com entalhe explícito; (a) passo 16 e (b) passo 200; e 107PG(P2) 73PLNL(P2) com entalhe implícito (c) passo 16 e (d) passo 200.....	49
Figura 4.21 – Malhas utilizadas no PGIL, PLNL e PGEL; (a) 205 elementos no PGIL; (b) 209 elementos no PLNL e 14 nós com funções global local; (c) 425 elementos no PLNL e 28 nós com funções global local; (d) 641 elementos no PLNL e 42 nós com funções global local. ....	50
Figura 4.22 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução experimental, do MEFG e MEFG <sup>g-1</sup> com 205 elementos no problema global e; (a) 209 elementos no PLNL; (b) 425 elementos no PLNL e (c) 641 elementos no PLNL para $nelid \geq 3$ e $neltd \geq 0, 1$ e $nelid$ . ....	52
Figura 4.23 – Trabalho relativo do resíduo para; (a) 205PG(P2) 209PLNL(P0); (b) 205PG(P2) 425PLNL(P0); (c) 205PG(P2) 641PLNL(P0). ....	53
Figura 4.24 – Relação entre o $Nit$ e $Np$ para MEFG 1841 elem e MEFG <sup>g-1</sup> para 209PLNL(P0), 425PLNL(P0) e 641PLNL(P0).....	54
Figura 4.25 – Graus de liberdade totais para MEFG 1841 elem e MEFG <sup>g-1</sup> com 205PG(P2) 209PLNL(P0), 205PG(P2) 425PLNL(P0) e 205PG(P2) 641PLNL(P0).....	55
Figura 4.26 – Distribuição de dano na viga; (a) 205PG(P2); (b) 209PLNL(P0); (c) 425PLNL(P0) e; (d) 641PLNL(P0). ....	55
Figura 5.1 – Geometria, carregamento e CC da viga sob flexão em três pontos. ....	57
Figura 5.2 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL para viga compósita heterogênea com 101 elementos no problema global e 67 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	59
Figura 5.3 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL para viga compósita heterogênea com 107 elementos no problema global e 73 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.....	60



Figura 5.4 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1/E_2=1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 61

Figura 5.5 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1/E_2=1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 61

Figura 5.6 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1/E_2=5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 62

Figura 5.7 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1/E_2=5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 62

Figura 5.8 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1/E_2=100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 63

Figura 5.9 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEEG e MEEG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1/E_2=100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 63

Figura 5.10 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1/E_2=1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ . 66

Figura 5.11 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com  $E_1/E_2=1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ . 66

Figura 5.12 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1/E_2=5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ . 67

Figura 5.13 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com  $E_1/E_2=5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ . 67

Figura 5.14 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1/E_2=100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .  
..... 68

Figura 5.15 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	68
Figura 5.16 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	69
Figura 5.17 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	70
Figura 5.18 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	70
Figura 5.19 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	71
Figura 5.20 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	71
Figura 5.21 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	72
Figura 5.22 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	73
Figura 5.23 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	73
Figura 5.24 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	73
Figura 5.25 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	74
Figura 5.26 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o primeiro cenário com $E_1/E_2 = 100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	74
Figura 5.27 – Distribuição de dano na <i>TPB</i> para o segundo cenário com $E_1/E_2 = 100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .	74
Figura 5.28 – Geometria, carregamento e CC da <i>TPB</i> com matriz e inclusões.	75

Figura 5.29 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL com 205 elementos no problema global e 425 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL com trinca e inclusões; (c) Refinamento do PLNL; (d) PGEL. ....	76
Figura 5.30 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução do MEF $G$ e MEF $G^{g-1}$ para $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	77
Figura 5.31 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução do MEF $G$ e MEF $G^{g-1}$ para $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	77
Figura 5.32 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ da solução do MEF $G$ e MEF $G^{g-1}$ para $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	78
Figura 5.33 – Número de iterações em função do número do passo para $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	80
Figura 5.34 – Número de iterações em função do número do passo para $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	80
Figura 5.35 – Número de iterações em função do número do passo para $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	81
Figura 5.36 – Graus de liberdade totais para $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	82
Figura 5.37 – Graus de liberdade totais para $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	82
Figura 5.38 – Graus de liberdade totais para $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	83
Figura 6.1 – Geometria, carregamento e CC na estrutura com duplo entalhe.....	84
Figura 6.2 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL para malha com; (a) 130 elementos no PGIL; (b) 66 elementos no PLNL; (c) 246 elementos no PLNL; (d) 130 elementos no PGEL. ....	86
Figura 6.3 – Curvas $P_v$ vs. $CTOD$ da solução experimental e a metodologia do MEF $G^{g-1}$ para malha com 130 elementos no problema global e 66 elementos no PLNL para; (a) 50 e; (b) 250 passos de carga. ....	86

Figura 6.4 – Curvas $P_v$ vs. $CTOD$ da solução experimental e a metodologia do MEF $G^{s-1}$ para malha com 130 elementos no problema global e 246 elementos no PLNL para; (a) 50 e; (b) 250 passos de carga..	87
Figura 6.5 – Curvas $P_h$ vs. $\delta_h$ da solução experimental e a metodologia do MEF $G^{s-1}$ para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 66 elementos no PLNL; (b) 246 elementos no PLNL.	88
Figura 6.6 – Trabalho relativo do resíduo para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 66 elementos no PLNL; (b) 246 elementos no PLNL.	88
Figura 6.7 – Número de iterações em função do número do passo para MEF 130 elem e; (a) 66PLNL(P1); (b) 246PLNL(P0).	89
Figura 6.8 – Graus de liberdade totais para MEF 130 elem e MEF $G^{s-1}$ ; (a) 130PG(P0) 66PLNL(P1); (b) 130PG(P0) 246PLNL(P0).	90
Figura 6.9 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras experimental; Distribuição de dano para o modelo do MEF $G^{s-1}$ com (b) 130PG(P0) 66PLNL(P1); (c) 130PG(P0) 246PLNL(P0).	90
Figura 6.10 – Malhas utilizadas; (a) 130 elementos no PGIL; (b) 29 elementos no PLNL1,2; (c) 106 elementos no PLNL1,2; (d) 130 elementos no PGEL.	91
Figura 6.11 – Curvas $P_v$ vs. $CTOD$ da solução experimental e a metodologia do MEF $G^{s-1}$ para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.	92
Figura 6.12 – Curvas $P_h$ vs. $\delta_h$ da solução experimental e a metodologia do MEF $G^{s-1}$ para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.	92
Figura 6.13 – Número de iterações em função do número do passo para MEF $G$ 130 elem (P1) e; (a) 29PLNL1,2(P1); (b) 106PLNL1,2(P0).	93
Figura 6.14 – Graus de liberdade totais para MEF $G$ 130 elem (P1) e MEF $G^{s-1}$ ; (a) 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1); (b) 130PG(P1) 106PLNL1,2(P0).	94
Figura 6.15 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras experimental; Distribuição de dano para o modelo do MEF $G^{s-1}$ com (b) 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1); (c) 130PG(P1) 106PLNL1,2 (P0).	95
Figura 6.16 – Geometria, carregamento e CC na barragem (Adaptada de Wu <i>et al.</i> , 2019).	96

Figura 6.17 – Malhas utilizadas na estratégia global local; (a) PGIL e PGEL; (b) PLNL; (c) nós enriquecidos por funções global local. ....	97
Figura 6.18 – Curvas $h_{ov}$ vs. $\delta_{ch}$ das simulações pelo MEF, MEFG <sup>g-1</sup> e outros autores com diferentes metodologias. ....	98
Figura 6.19 – Trabalho relativo do resíduo para solução do MEFG <sup>g-1</sup> ao longo dos passos de carga. ....	99
Figura 6.20 – Curvas $h_{ov}$ vs. $\delta_{ch}$ da solução do MEF e MEFG <sup>g-1</sup> para dois passos de carga. ....	100
Figura 6.21 – Número de iterações acumuladas em função do número do passo normalizado pela quantidade total de passos para o MEF com 9835 elementos e 2369PLNL(P0). ....	101
Figura 6.22 – Graus de liberdade totais para MEF com 9835 elementos e MEFG <sup>g-1</sup> com 2720 elementos no problema global e 2375 elementos no PLNL. ....	101
Figura 6.23 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras de Wu <i>et al.</i> (2019) com tensão plana; (b) Dano para o modelo do MEFG <sup>g-1</sup> com deformação plana. ....	102
Figura 6.24 – Geometria, carregamento e CC na estrutura do fêmur. ....	103
Figura 6.25 – Apresentação do fêmur; (a) Fêmur real (Polguy <i>et al.</i> , 2013); (b) Classificação dos ossos (Willems <i>et al.</i> , 2014); (c) Malha utilizada para simulação no PGIL; (d) Domínio local e nós enriquecidos por funções global local no PGEL; (e) PLNL refinado. ....	104
Figura 6.26 – Curvas $P_v$ vs. $\delta_v$ da solução do MEF e a estratégia global local do MEFG <sup>g-1</sup> . ....	105
Figura 6.27 – Trabalho relativo do resíduo para fêmur. ....	106
Figura 6.28 – Número de iterações acumuladas em função do número do passo para o MEF com 6719 elementos e 847PLNL(P0). ....	106
Figura 6.29 – Graus de liberdade totais para MEF e MEFG <sup>g-1</sup> para modelo do fêmur. ....	107
Figura 6.30 – Caminho da falha para modelo do fêmur; (a) estratégia global local; (b) Curvas de ensaio realizado por Freitas <i>et al.</i> (2014). ....	108
Figura 7.1 – Interface da sub-rotina de usuário UEXTERNALDB (Abaqus, 2014). ....	110
Figura 7.2 – Interface da sub-rotina de usuário DISP (Abaqus, 2014). ....	111
Figura 7.3 – Procedimento do MEFG <sup>g-1</sup> não intrusivo proposto. ....	112
Figura 7.4 – Lei coesiva para curva de amolecimento linear. ....	113

Figura 7.5 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL com trinca e elementos coesivos; (c) Refinamento do PLNL; (d) PGEL. ....	114
Figura 7.6 – Curvas $P$ vs. $CMOD$ das soluções experimentais, do MEF e MEFG <sup>g-1</sup> no <i>Abaqus</i> . ....	115
Figura A.1 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	119
Figura A.2 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	120
Figura A.3 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	120
Figura A.4 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	121
Figura A.5 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	121
Figura A.6 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	122
Figura A.7 – Trabalho relativo do resíduo para $E_1/E_2=1$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	123
Figura A.8 – Trabalho relativo do resíduo para $E_1/E_2=5$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	123
Figura A.9 – Trabalho relativo do resíduo para $E_1/E_2=100$ e; (a) $f_{t_1}/f_{t_2}=0,5$ ; (b) $f_{t_1}/f_{t_2}=1$ ; (c) $f_{t_1}/f_{t_2}=2$ ; (d) $f_{t_1}/f_{t_2}=\infty$ .....	124
Figura A.10 – Trabalho relativo do resíduo para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.....	124

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta A$	Área constituída de defeitos
$\delta A_0$	Área da seção transversal
$\delta A'$	Área resistente efetiva
$C$	Tensor constitutivo de Hooke
$D$	Variável Escalar de dano
$D_0$	Tensor constitutivo não danificado
$D_{GL}^k$	Variável escalar de dano global local
$D_L$	Número total de funções de enriquecimento
$E$	Módulo de Elasticidade do material
$E_1$	Módulo de Elasticidade das inclusões
$E_2$	Módulo de Elasticidade da matriz
$E_c$	Módulo de Elasticidade do osso cortical
$E_t$	Módulo de Elasticidade do osso trabecular
$G_f$	Energia de fratura inicial
$G_F$	Energia de fratura total
$G_{IC}$	Energia de fratura total dissipada para lei linear
$H$	Função Heaviside
$H^1$	Espaço de Hilbert
$I_{\varepsilon_1}$	Primeiro invariante do tensor de deformações
$\mathfrak{S}$	Conjunto de funções de enriquecimento
$\mathfrak{S}_{gl}$	Conjunto de nós enriquecidos por funções de enriquecimento global local
$J_{\varepsilon_2}$	Segundo invariante do tensor de deformações
$K_0$	Rigidez de penalidade
$L_{ai}$	Funções de enriquecimento
$L_{ai}^d$	Funções de enriquecimento descontínua
$L_{ai}^p$	Funções de enriquecimento polinomiais
$N$	Número de funções definidas
$P$	Força

$P_h$	Força horizontal
$P_v$	Força vertical
$P_{m\acute{a}x}$	Força maxima
$\mathfrak{R}^n$	Domínio n-dimensional
$\mathbf{R}_G^{kT}$	Resíduo não linear da solução do PGEL
$T$	Tensão
$T_{m\acute{a}x}$	Máxima tensão que a interface da trinca resistir
$U$	Deslocamentos
$\mathbf{X}(\Omega)$	Discretização do espaço de Hilbert definido no domínio
$\mathbf{X}_G^{K-1}(\Omega_G)$	Discretização do espaço de Hilbert definido no problema global inicial
$\mathbf{X}_G^K(\Omega_G)$	Discretização do espaço de Hilbert definido no problema global enriquecido
$\mathbf{X}_L^K(\Omega_L)$	Discretização do espaço de Hilbert definido no problema local
$W_G$	Trabalho relativo do resíduo
$\mathbf{b}$	Forças de corpo
$\mathbf{d}_G^k$	Vetor de deslocamentos nodais
$\mathbf{d}_r$	diferenças relativas
$\mathbf{f}_{G,ext}^k$	Vetor de forças externas
$\mathbf{f}_{G,int}^k$	Vetor de forças internas
$f_c$	Resistência  compressão
$f_t$	Resistência  tração
$f_{t_1}$	Resistência  tração das inclusões
$f_{t_2}$	Resistência  tração da matriz
$h_\alpha$	Maior comprimento da aresta do elemento
$h_{ov}$	<i>Overflow</i>
$i$	Número da função de enriquecimento
$k$	Passo de carga vigente
$l_c$	Tamanho característico



$\mathbf{n}$	Vetor normal unitário
$\vec{n}$	Versor
$n_{máx}$	Número total de passos de carga
$\vec{t}$	Vetor carregamento
$\mathbf{u}$	Campo vetorial
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	Aproximação do MEFG e MEFG <sup>g-1</sup>
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor deslocamento
$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x})$	Aproximação da solução de referência definido na nuvem
$\mathbf{u}_{\alpha i}$	Graus de liberdade nodal
$\mathbf{u}_{\alpha i}^p$	Graus de liberdade do campo contínuo
$\mathbf{u}_{\alpha i}^d$	Graus de liberdade do campo descontínuo
$\mathbf{u}_{\beta j}^k$	Graus de liberdade nodais da função de enriquecimento global local
$\mathbf{u}_{Lj}^k$	Componentes cartesianas do vetor deslocamento
$\mathbf{u}_\alpha^p$	Aproximação do MEFG do campo contínuo
$\mathbf{u}_\alpha^d$	Aproximação do MEFG do campo descontínuo
$\mathbf{u}_{\alpha i}^k$	Graus de liberdade no PLNL
$\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$	Solução do PGIL
$\mathbf{u}_{G,0}^k$	Condições de contorno no passo de carga k
$\mathbf{u}_G^k$	Solução do PGEL no passo de carga k
$\mathbf{u}_L^k$	Função de enriquecimento no PLNL
$\mathbf{v}_G^{k-1}$	Deslocamentos virtuais no PGIL
$\mathbf{v}_L^k$	Deslocamentos virtuais no PLNL
$(x, y)$	Coordenada cartesianas
$\mathbf{x}_\alpha$	Ponto nodal de coordenada $(x_\alpha, y_\alpha)$
$(x_\alpha, y_\alpha)$	Coordenadas dos pontos nodais a enriquecer
$\alpha$	Numeração do nó
$\beta$	Nó enriquecido por funções global local
$\Gamma$	Contorno

$\Gamma_G$	Contorno global
$\Gamma^f$	Contorno no domínio em relação a força
$\Gamma_G^f$	Contorno no domínio global em relação a força
$\Gamma^u$	Contorno no domínio em relação ao deslocamento
$\Gamma_G^u$	Contorno no domínio global em relação ao deslocamento
$\Gamma_L$	Contorno local
$\gamma$	Relação entre a resistência à compressão e à tração
$\Delta_n$	Separação de materiais
$\delta$	Deslocamento prescrito
$\delta_h$	Deslocamento horizontal
$\delta_{hc}$	Deslocamento horizontal da crista
$\delta_n$	Deslocamento correspondente a abertura completa da trinca
$\delta_{nc}$	Deslocamento crítico correspondente ao início do dano
$\delta_v$	Deslocamento vertical
$\varepsilon_1, \varepsilon_k, \varepsilon_f$	Deformação relacionada a largura de abertura de trinca
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de Deformação
$\varepsilon$	Deformação nominal
$\varepsilon_{d0}$	Deformação limite
$\varepsilon_{eq}$	Deformação equivalente
$\varepsilon_{eq}^{MA}$	Deformação equivalente de Mazars
$\varepsilon_{eq}^{VM}$	Deformação equivalente de von Mises modificado
$\varepsilon_i$	Deformação principal na direção $i$
$\eta$	Monômio correspondente ao enriquecimento polinomial
$\eta^*$	Parâmetro de Penalidade
$K$	Rigidez da mola
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_c$	Coefficiente de Poisson do osso cortical
$\nu_t$	Coefficiente de Poisson do osso trabecular
$\xi$	Monômio correspondente ao enriquecimento polinomial

$\rho_a$	Massa específica da água
$\rho_c$	Massa específica do concreto
$\sigma$	Tensor de tensões
$\bar{\sigma}$	Tensor nominal
$\sigma'$	Tensão efetiva
$\varphi_\alpha$	Funções de forma PU
$\phi_{\alpha i}$	Funções de Forma do MEF <sub>G</sub>
$\phi_\alpha^k$	Funções de forma do MEF <sub>G</sub> <sup>s-1</sup> no passo de carga k
$\chi_\alpha$	Espaço de aproximação local
$\psi$	<i>kink point</i>
$\Omega$	Domínio
$\Omega_G$	Domínio global
$\Omega_L$	Domínio local
$\omega_\alpha$	Nuvem de influência dos pontos nodais
$\omega_\alpha^+$	Região de um dos lados da nuvem

## LISTA DE ABREVIACOES

CC	Condioes de Contorno
CLOTHO <sup>g-1</sup>	Programa computacional desenvolvido
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
COORDS	Coordenadas dos nos
CTOD	<i>Crack Tip Opening Displacement</i>
CTODc	<i>Critical Crack Tip Opening Displacement</i>
DENT	<i>Double Edge Notch Tension</i>
DISP	Sub-rotina de usuário
DTIME	Incremento do passo de carga
ISET	<i>Illinois Scientific and Engineering Toolkit</i>
JDOF	Direao do grau de liberdade
KINC	Número do incremento
KSTEP	Número da análise corrente
LACHESIS	Programa computacional para simulaçao não linear
LOP	Estagio que a sub-rotina será chamada
LRESTART	Gravaao do arquivo de reinicializaao
MDC	Modelo do Dano Contínuo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFG <sup>g-1</sup>	Método dos Elementos Finitos Generalizados Global Local
MPU	Método Partilha da Unidade
NEXUM	Grupo de pesquisa do programa de estruturas da Universidade de Brasília
<i>nelid</i>	número mínimo de elementos locais que inicia o dano
<i>neltd</i>	número de elementos locais totalmente danificado
NGL	Número de Graus de Liberdade
<i>Nit</i>	Número de iteraoes
<i>Nitacum</i>	Número de iteraoes acumuladas
NODE	Número do não
NOEL	Número do elemento
<i>Np</i>	Número do passo
<i>Ntp</i>	Número total de passos

PG	Refere-se ao PGIL e PGEL
PGIL	Problema Global Inicial Linear
PLNL	Problema Local Não Linear
pl- $\epsilon$	Estado plano de deformação
pl- $\sigma$	Estado plano de tensão
PGEL	Problema Global Enriquecido Linear
PU	Partição de Unidade
PVC	Problema de Valor de Contorno
<i>TIME</i>	Valor corrente e total do passo de carga
<i>TPB</i>	<i>Three Point Bending</i>
<i>UEXTERNALDB</i>	Sub-rotina de usuário
<i>XFEM</i>	<i>eXtended Finite Element Method</i>
P0	Sem função de enriquecimento
P1	Função de enriquecimento polinomial de grau 1
P2	Função de enriquecimento polinomial de grau 2
Pn	Função de enriquecimento polinomial de grau n

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As estruturas empregadas na engenharia são projetadas e executadas com um grau de complexidade que vem crescendo com o passar dos anos, com peças cada vez mais leves, esbeltas e maior capacidade resistente. Essa complexidade exige que se desenvolvam novas ferramentas e metodologias para investigações e análises mais precisas do comportamento das estruturas para prever possíveis patologias, destacando-se o aparecimento de defeitos como as fissuras.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método computacional de destaque até os dias atuais para modelagem e simulação do aparecimento e propagação de defeitos. No entanto, novas ferramentas que introduzem flexibilidades para modelagem e simulação vêm sendo desenvolvidas e ganhando cada vez mais espaço nos diferentes setores da indústria, especialmente para prever e analisar o dano. Entre os métodos em destaque encontra-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O MEFG consegue oferecer soluções às dificuldades e limitações encontradas no MEF, pois o MEFG utiliza a estrutura das funções de aproximação do MEF com a adição de famílias de funções ditas de enriquecimento. Essas funções são construídas a partir da adaptação de algum conhecimento da solução do problema que se deseja aproximar (Duarte *et al.*, 2000, 2001; Strouboulis *et al.*, 2000, 2001). Essas famílias de funções podem ser polinomiais, descontínuas, singulares ou podem ser adaptadas de soluções numéricas (Duarte e Babuška, 2005; Duarte e Kim, 2008; Kim *et al.*, 2008, 2010). Estas soluções numéricas podem ser obtidas dos resultados de simulações de subdomínios de maior interesse, em geral de estruturas com geometrias específicas e complexas. Esta técnica é denominada Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento Global Local (MEFG<sup>g-l</sup>) (Duarte e Babuška, 2005; Duarte e Kim, 2008; Kim *et al.*, 2008; Evangelista Jr *et al.*, 2013b; Fillmore e Duarte, 2018).

O MEFG<sup>g-l</sup> possibilita a modelagem e simulação de problemas da mecânica da fratura linear elástica (Duarte e Babuška, 2005; Duarte e Kim, 2008; Kim *et al.*, 2008, 2010, 2011; Pereira *et al.*, 2011; Gupta *et al.*, 2012; Evangelista Jr *et al.*, 2012, 2013b; Garzon

*et al.*, 2013; Malekan e Barros, 2016, 2018; Malekan *et al.* 2018; Fillmore e Duarte, 2018). O mesmo foi investigado em problemas que simulam o crescimento de trincas ocasionadas por fadiga (Pereira *et al.*, 2012; O'Hara *et al.*, 2016). O método foi aplicado em modelos envolvendo transferência de calor, efeitos termo-estrutural localizados e análise de termo-plasticidade (Plews e Duarte, 2014, 2016). O MEF<sup>g-1</sup> também foi aplicado em problemas de transferência de calor transiente (O'Hara *et al.*, 2013) e com aplicação em solda por pontos (Li e Duarte, 2018; Li *et al.*, 2019). Em problemas não lineares usando o MEF<sup>g-1</sup>, que é o tema desta pesquisa, tem-se modelos com plasticidade confinada (Kim, 2009; Kim *et al.*, 2012; Gupta *et al.*, 2013) e Kim e Duarte (2015) que utilizaram o MEF<sup>g-1</sup> para crescimento de trincas com modelos de zona coesiva.

Métodos similares a estratégia global local do MEF<sup>g-1</sup> são encontrados na literatura sob a denominação de MEF multiescala (Hou e Wu, 1997), método da projeção multiescala (Loehnert e Belytschko, 2007; Holl *et al.*, 2013), método FE<sup>2</sup> (Massart *et al.*, 2007), método de decomposição de domínio (Cresta *et al.*, 2007; Pebrel *et al.*, 2008), método de descontinuidade agregada multiescala (Belytschko *et al.* 2008), o método dos elementos finitos estendido multiescala (Guidault *et al.*, 2008; Pierres *et al.*, 2010), o método dos elementos finitos estendido multigrid (Rannou *et al.*, 2009; Passieux *et al.*, 2011, 2013), estratégia de acoplamento não intrusivo global local (Gendre *et al.*, 2009, 2011; Duval *et al.* 2014). A diferença do MEF<sup>g-1</sup> nesta pesquisa em relação aos demais métodos está na solução do domínio de interesse não linear ser utilizada para enriquecer o domínio global linear, por meio da estrutura da partição de unidade.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Em campos de aplicação, como em estruturas que demandam análises não lineares para prever propagação de trincas e evolução de dano, o MEF tradicional divide espaço com novos métodos para modelagem e simulação de estruturas. Para esses campos de aplicação, o MEF encontra algumas limitações dando maior destaque a discretização do modelo que requer um elevado refinamento da malha para capturar o comportamento real da estrutura e um possível remalhamento à medida que o dano se propaga ao longo da estrutura. Essa exigência aumenta o custo computacional da modelagem e simulação, especialmente para algoritmos que alteram a topologia com adaptação e refino da malha.

O MEFG tem grande destaque pela sua capacidade de flexibilização da aproximação, por meio da adição de funções de enriquecimento, construídas a partir da solução do problema que se deseja analisar (Babuška *et al.*, 1994). O método se adapta ao PVC desejado, o que leva a sanar muitas dificuldades encontradas na solução de problemas simulados pelo MEF.

A estratégia global local do MEFG encontra-se em intenso desenvolvimento para minimizar os inconvenientes encontrados no MEF e MEFG convencionais. As aproximações são obtidas de forma precisa em geometrias complexas, por meio da construção das funções de enriquecimento a partir da solução numérica em subdomínios específicos do problema original onde acontecem processos de interesse. O MEFG<sup>g-1</sup>, com sua capacidade de flexibilização na aproximação apresenta condições propícias na resolução de problemas solucionados pelo MEF e MEFG com certa dificuldade.

### 1.3 ESTADO DA ARTE

Nesta seção são apresentados de forma mais detalhada, estudos referentes ao MEFG<sup>g-1</sup>, nos quais obtiveram soluções com acurácia em diversos campos de atuação. Pode-se mencionar Duarte e Kim (2008) que investigaram para o MEFG<sup>g-1</sup>, a influência do tamanho do domínio local, a utilização da solução global como condições de contorno ao invés da solução exata desconhecida, as taxas de convergência entre os problemas globais e locais e o custo computacional que demandou a simulação comparado com o MEFG convencional. Kim *et al.* (2008) mostraram que o MEFG<sup>g-1</sup> é mais eficiente do que o método dos elementos finitos global local para a extração do fator de intensidade de tensões. Concluíram que a qualidade das condições de contorno locais afeta em menor proporção e com resultados mais precisos no MEFG<sup>g-1</sup>, mesmo sem a trinca ser modelada no problema global. Além do mais, concluíram para o MEFG<sup>g-1</sup> que a interação entre as trincas pode acontecer com o mesmo ou diferentes tamanhos de escalas, mesmo que a trinca não seja modelada no problema global.

Kim *et al.* (2010) simularam diferentes modelos de pequenas trincas no mesmo domínio pelo MEFG<sup>g-1</sup>. Investigaram a influência quanto a utilização de diferentes condições de contorno (*Dirichlet, Neumann e Cauchy*), assim como o custo computacional do método proposto foi mais eficiente que o MEFG – *hp*, por considerar um problema global inicial sem trinca uma única vez com malha pouco refinada e cada trinca simulada em



um pequeno domínio, com o problema global aumentando apenas na parcela do enriquecimento, ao invés de simular para cada trinca um problema global refinado por vez.

Kim *et al.* (2011) apresentaram e simularam problemas envolvendo múltiplas trincas em domínios de engenharia complexos, no qual utilizaram uma metodologia do MEF<sup>g-1</sup>, de maneira paralelizada. O'Hara *et al.* (2011), (2013) investigaram a aplicação do MEF<sup>g-1</sup> para problemas de transferência de calor transiente. Gupta *et al.* (2012) aprimoraram a influência das condições de contorno inexatas nos problemas locais do MEF<sup>g-1</sup> por duas estratégias. Uma estratégia é baseada em uma zona de amostragem denominada “zona *buffer*” e outra estratégia foi realizar múltiplas interações global local em problemas da mecânica da fratura. Gupta *et al.* (2012) e Fillmore e Duarte (2018) utilizaram uma abordagem não intrusiva do MEF<sup>g-1</sup>, onde o problema global é modelado e simulado no software comercial de análise de elementos finitos *Abaqus* e o problema local em um software de MEF e o problema global enriquecido em um software com a combinação do MEF e MEF<sup>g-1</sup> para problemas da mecânica da fratura.

Pereira *et al.* (2012) apresentaram um algoritmo eficaz implementado pelo MEF<sup>g-1</sup> para simulação de crescimento de trincas por fadiga em alto ciclo. As trincas não são modeladas no problema global grosseiro e sim são modelados por funções de enriquecimento global local, devido a isso não houve alteração do problema global inicial durante os passos de crescimento. Isto combinado com a natureza hierárquica das funções de forma do MEF<sup>g-1</sup> permitiu a fatoração da matriz de rigidez global durante a simulação, consequentemente o custo computacional dessa metodologia foi menor do que o do MEF – *hp* quando comparado ao longo dos passos de propagação da trinca.

Evangelista *et al.* (2013b) aplicaram a metodologia do MEF<sup>g-1</sup> em PVC realistas, no caso simulação de crescimento de trincas em lajes de concreto de aeroportos. Múltiplas trincas de diferentes tamanhos foram modeladas e simuladas em diferentes domínios locais, porém de maneira simultânea resultando na geração de maneira implícita das trincas para o domínio global. Garzon *et al.* (2013) analisaram o comportamento de possíveis trincas existentes em pavimentos de aeroportos, onde a ordem de grandeza da trinca é muito pequena comparado ao tamanho do pavimento. O'Hara *et al.* (2015) analisaram fraturas estáticas, além disso também focaram em uma atenção na

propagação de trincas por fadiga. No trabalho de O'Hara *et al.* (2016) focaram na propagação por fadiga de múltiplas trincas, de modo que as trincas coalesceram.

Para problemas em campos de gradiente descontínuo em uma estratégia global local, o trabalho de Plews *et al.* (2011) utiliza a estratégia para resolver problemas de gradientes de temperatura com a utilização do *Abaqus* para simulação dos problemas. Plews e Duarte (2014), (2015) e (2016) aplicaram essa estratégia global local em múltiplas escalas locais para um único problema global resolvendo os problemas locais em processamento paralelo, para modelos envolvendo transferência de calor, efeitos termo-estrutural localizados e análise de termo-plasticidade. Em problemas que envolvem soldas por pontos Li e Duarte (2018) simularam a análise global local convencional além de apresentarem um algoritmo para paralelização de problemas locais e Li *et al.* (2019) investigaram os fatores de intensidade de tensões nas estruturas sujeitos a carregamentos termomecânicos.

Em relação ao MEF $G^{g-1}$  para simulação em estruturas com análises não lineares Kim (2009) construiu funções de enriquecimento global local para simulação de plasticidade confinada em que sua evolução é gradual, porém as funções de enriquecimento não lineares foram construídas para cada passo de carga onde foi aplicada em cada passo de carga do problema global não linear. Kim *et al.* (2012) construíram funções de enriquecimento global local para problemas de plasticidade confinada. Gupta *et al.* (2013) estudaram o MEF $G^{g-1}$  para plasticidade confinada, no entanto para problemas não lineares da mecânica da fratura. As funções de enriquecimento nos trabalhos mencionados foram criadas de forma incremental até o passo de carga final. As funções globais locais enriqueceram todos os passos de carga em um problema global não linear, no qual obtiveram resultados satisfatórios nas análises. Kim e Duarte (2015) simularam para o MEF $G^{g-1}$  problemas não lineares utilizando leis coesivas para a propagação de trincas. Empregaram problemas locais não lineares, em ordem para não construir apenas as funções de enriquecimento, além disso identificar estados de dano no problema global, o que garantiram soluções globais precisas em malhas grosseiras.

No Brasil, Alves (2012) apresentou e simulou problemas da mecânica da fratura linear elástica com a metodologia do MEF $G^{g-1}$ . Malekan *et al.* (2016) apresentaram uma estrutura de programação orientada a objetos para o MEF $G^{g-1}$  na plataforma computacional INSANE desenvolvido pelo grupo de pesquisa da Universidade Federal

de Minas Gerais. Malekan e Barros (2016) analisaram o condicionamento do sistema de equações do MEF<sup>g-1</sup> com a aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável e Malekan *et al.* (2017) apresentaram uma estrutura de programação generalizada para imposição das condições de contorno no problema local. Malekan e Barros (2018) investigaram os efeitos causados na estrutura com uma trinca principal, juntamente com defeitos, tais como: pequenos vazios, micro trincas e micro heterogeneidades. Malekan *et al.* (2018) modelaram a propagação de trincas em problemas de placas Reissner-Mindlin com o fator de intensidade de tensões como variável de controle para a trinca iniciar e indicar a possível direção da propagação. Novelli (2019) abordou uma estratégia global local para simulação de estruturas fisicamente não lineares, onde a não linearidade é simulada no problema global e ao final de cada passo incremental convergido será transferido as condições de contorno para a resolução de um problema local linear.

## **1.4 OBJETIVOS**

### **1.4.1 Objetivo Geral**

A presente tese tem como objetivo geral formular e desenvolver uma estratégia global local do MEF<sup>g</sup> para simulação de falha estrutural em estruturas 2D com consideração de um modelo de dano contínuo.

### **1.4.2 Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos da presente pesquisa são:

- 1 Desenvolver um programa de simulação computacional com a utilização do MEF<sup>g-1</sup> para simular estruturas sob condição de modo I e modo misto de fratura por meio de um modelo de dano contínuo;
- 2 Propor estratégia de modelo não linear na escala local;
- 3 Analisar materiais compósitos heterogêneos, com as matrizes e inclusões possuindo diferentes propriedades mecânicas;
- 4 Verificar a influência dos refinamentos  $p$  e  $h$  na convergência dos domínios globais e locais;

- 5 Analisar a eficiência computacional com relação ao número de graus de liberdade e o número de iterações no método secante entre o MEF<sup>g-1</sup> e o MEF ou MEF<sup>g</sup> convencionais;
- 6 Propor estratégias de modelagem para a presença de entalhes ou pré trincas dos efeitos cinemáticos do problema local para o global;
- 7 Implementar uma abordagem não intrusiva utilizando o programa *Abaqus* para simular o processo de danificação por meio do modelo de zona coesiva.

## 1.5 CONTRIBUIÇÕES

A estratégia proposta contribui com uma nova abordagem do MEF<sup>g-1</sup>, que incorpora um modelo de dano contínuo para simular propagação de trinca sob condições de modo I e modo misto de fratura. A metodologia vincula a variável de estado de dano que ocorre em uma escala local à escala global usando funções de enriquecimento construídas a partir da solução do problema local.

O método proposto considera a solução iterativa do problema local não linear enquanto o problema global é considerado linear. Não há estudos relatados na literatura sobre a aplicação do MEF<sup>g-1</sup> em análises não lineares envolvendo modelos de dano contínuo para simular problemas estruturais, onde o domínio local é não linear e o domínio global se comporta como linear. Essa estratégia leva o método a processar menos graus de liberdade totais com número reduzido de iterações, necessárias para convergir em cada etapa de carregamento. O método proporciona flexibilidade para considerar características importantes à propagação de danos, como a descontinuidade devido à presença de um entalhe apenas implicitamente modelado no problema local não linear, assim como as propriedades mecânicas, devido a presença de heterogeneidades, por meio de inclusões e matriz.

O problema global em todas as simulações foi preparado no software *Matlab*, no qual o programa computacional desenvolvido foi intitulado de CLOTHO<sup>g-1</sup>, o que torna outra contribuição, pois problemas não lineares de muitos graus de liberdade não é convencional ser simulado pelo *Matlab* devido limitações quanto ao aumento no processamento e memória. O *Matlab* foi utilizado pois as soluções são lineares para o problema global, o que torna viável a sua escolha pelo ambiente simples de

programação. No problema local podem ser escolhidos diferentes softwares de elementos finitos, seja comercial ou não, que tenha capacidade de se conectar com outros programas.

Além disso, também como contribuição será implementado uma abordagem não intrusiva para simulação do MEF<sup>g-1</sup>, na qual se utilizou uma plataforma de análise de elementos finitos comercial. Foi escolhido o *software Abaqus/Standard* versão 6.14 com modelo de zona coesiva para simular o processo de danificação em um domínio local de interesse. Denomina-se abordagem não intrusiva devido a não alteração nas características do programa de elementos finitos. Apesar da escolha do *Abaqus*, pode-se empregar outras plataformas de análise de elementos finitos que se comunique com outros softwares. Nas pesquisas recentes, o *Abaqus* é modelado e simulado no domínio global linear. Nesta pesquisa o *Abaqus* será empregado como subdomínio do problema global, onde acontecem processos de interesse solucionados de maneira não linear.

## **1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO**

Esta pesquisa está dividida em oito capítulos, sendo o Capítulo 1 dedicado à introdução ao assunto da estratégia global local pelo MEF<sup>g</sup>, seguido da motivação, estado da arte, objetivos geral, específicos e contribuições. O capítulo 2 apresenta uma fundamentação teórica do MEF<sup>g</sup> convencional e MEF<sup>g-1</sup> para analisar estruturas com comportamento não linear, propósito desta pesquisa e finaliza com a fundamentação da teoria da Mecânica do Dano Contínuo e o modelo de dano que será utilizado. O capítulo 3 descreverá as principais funções do programa computacional CLOTHO<sup>g-1</sup> desenvolvido. O capítulo 4 apresenta a verificação preliminar sobre a aplicação do MEF<sup>g-1</sup> em um bloco sob tração e a validação preliminar no comportamento na falha de uma viga sob flexão em três pontos, assim como o Capítulo 5, que tratará a mesma viga, porém com a adição de compósitos heterogêneos de matriz e inclusões. No Capítulo 6 é simulado o modelo de um bloco com duplo entalhe que está submetido a modo misto de fratura, seguido de uma aplicação real em uma barragem de concreto e finalizará no estudo de uma estrutura biomecânica, por meio de um fêmur humano. O Capítulo 7 aborda a análise não intrusiva com o programa de elementos finitos *Abaqus*. O Capítulo 8 reúne as conclusões alcançadas pelos resultados obtidos nas simulações dos modelos e as sugestões para desenvolvimento de trabalhos futuros. Por fim, são apresentados o apêndice e as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento dessa pesquisa.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, FORMULAÇÃO DO MEEG E ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL DO MEEG NÃO LINEAR

Este capítulo define o problema de valor de contorno genérico, seguido pela descrição da aproximação do MEEG e a estratégia global local do MEEG para análise não linear de estruturas. Finaliza-se com os conceitos fundamentais da mecânica do dano contínuo, apresentação do modelo de dano aplicado nesta pesquisa e descrição do programa LACHESIS.

### 2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se o problema de estado estacionário de domínio  $\Omega$  com um contorno  $\Gamma$ . Esse contorno é decomposto como  $\Gamma = \Gamma^u \cup \Gamma^t$  com  $\Gamma^u \cap \Gamma^t = \emptyset$ . A equação de equilíbrio do problema sem consideração de forças inerciais e a equação constitutiva são definidas, respectivamente:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{b} \text{ no } \Omega \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon} \text{ no } \Omega \quad (2.2)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\mathbf{b}$  são as forças de corpo,  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo de Hooke e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformação linear. O vetor carregamento  $\bar{\mathbf{t}}$  e o deslocamento  $\bar{\mathbf{u}}$  são prescritos como condições de contorno (CC) no  $\Gamma^t$  e  $\Gamma^u$ , respectivamente, como se estabelece nas equações a seguir:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ no } \Gamma^u \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ no } \Gamma^t \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário ao contorno  $\Gamma^t$ .

### 2.2 APROXIMAÇÃO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O MEEG deriva do Método da Partição da Unidade (MPU) e foi proposto a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) com as denominações: Método dos Elementos Finitos Especiais e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade. Uma estratégia similar foi também proposta por

Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996) e Oden *et al.* (1998), com as denominações Nuvens *hp* e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp* (Duarte *et al.*, 2000). Outra abordagem foi proposta por Belytschko e Black (1999) e Möes *et al.* (1999) com a denominação de método dos elementos finitos estendido conhecido na literatura como *eXtended Finite Element Method (XFEM)* e vários outros métodos sem malha propostos podem ser classificados como casos especiais do MPU (Duarte e Kim, 2008).

A formulação do MEFG a ser apresentada baseia-se nos trabalhos de Duarte *et al.* (2000), Strouboulis *et al.* (2000), (2001), Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008), Pereira *et al.* (2008), (2009) e Evangelista Jr. *et al.* (2012), (2013b). Para a classe de MPU, os espaços de discretização para um método de Garlekin são definidos utilizando o conceito da partição da unidade (PU) e os espaços de aproximação são selecionados com base em um conhecimento a priori a respeito da solução do problema. Devido a isso, a determinação das aproximações que se almejam num domínio obtido pelo MEFG é construída por funções de forma. As funções de forma do MEFG,  $\phi_{\alpha i}$ , são construídas a partir do produto entre uma função PU,  $\varphi_{\alpha}$ , que é a função de interpolação do MEF e uma função de aproximação local, intitulada como função de enriquecimento,  $L_{\alpha i}$ , como descritas a seguir:

$$\{\phi_{\alpha i}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{D_L} = \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})\{L_{\alpha i}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{D_L} \quad i \in \mathfrak{T}(\alpha) \quad (\text{não se soma em } \alpha) \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{x}$  indica a posição no domínio,  $L_{\alpha i}$  são as funções de enriquecimento,  $\alpha = 1, \dots, N$  é o nó,  $N$  é a quantidade total de nós,  $i$  é a função de enriquecimento corrente, com  $i=1$  recupera-se a solução do MEF, uma vez que  $L_{\alpha i}(\mathbf{x})=1$ ,  $\mathfrak{T}$  é o conjunto ao qual a função de enriquecimento pertence,  $D_L$  é o total de funções de enriquecimento,  $\varphi_{\alpha}$  são as funções de forma Lagrangeanas Lineares tradicionais do MEF. Essas funções constituem uma PU, ou seja, um grupo de  $N$  funções definidas em um domínio  $\Omega$  que respeitam a seguinte propriedade:

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1 \quad (\text{para todo } \mathbf{x} \text{ pertencente ao domínio } \Omega). \quad (2.6)$$

Maiores detalhes sobre as propriedades da PU podem ser encontrados em Bathe (1996), Reddy (2006) e Zienkiewicz *et al.* (2005).

Um conceito essencial do MEFG é o de nuvens (suporte) de influência entre os elementos de maneira análoga ao do método de nuvem  $hp$  de Duarte e Oden (1996), na qual uma malha de elementos finitos é usada para posicionar os nós  $\alpha$ . As nuvens  $\omega_\alpha$  são formadas pelo conjunto dos elementos finitos que compartilham o nó de coordenada,  $\mathbf{x}_\alpha$ , que definem a função PU,  $\varphi_\alpha$ . A função  $\varphi_\alpha$  possui valor não nulo na nuvem  $\omega_\alpha$  e a mesma é visualizada em uma implementação 2D na parte superior da Figura 2.1. Na parte central da Figura 2.1 são representadas as funções de enriquecimento contínua (Figura 2.1(a)) e descontínua (Figura 2.1(b)), no qual é representada pela função Heaviside ( $H$ ). Os gráficos da parte inferior da Figura 2.1 representam as funções de forma MEFG, que é o resultado do produto entre a PU e a função de enriquecimento, conforme expresso na Equação (2.5).

Cada nuvem é associada com o espaço dimensional e com isso o espaço de aproximação local  $\chi_\alpha$  das funções de enriquecimento  $L_{\alpha i}$  que são definidas nas nuvens é estabelecido a seguir:

$$\chi_\alpha = \text{conjunto} \left\{ L_{\alpha i}, 1 \leq i \leq D_L, L_{\alpha i} \in H^1(\omega_\alpha) \right\} \quad (2.7)$$

em que  $H^1$  é o espaço de Hilbert.

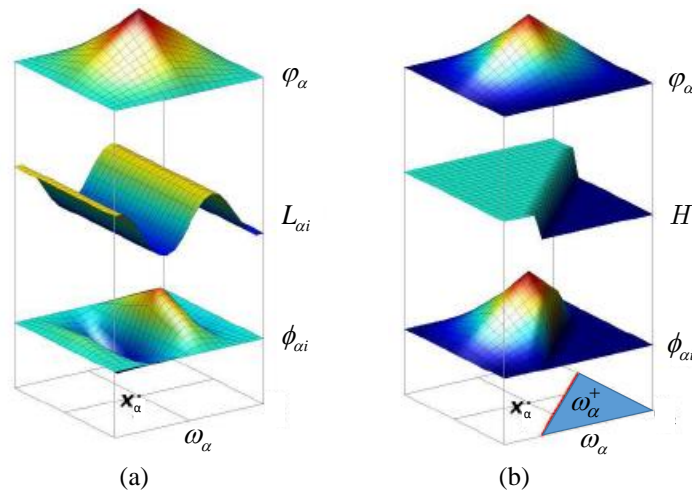


Figura 2.1 – Construção das funções de forma do MEFG para enriquecimentos; (a) contínuos; (b) descontínuos.

Pela combinação descrita na Equação (2.5) e visualizada na Figura 2.1, chega-se a uma aproximação do MEFG de um campo vetorial  $\mathbf{u}$  definido em um domínio  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n, n = 1, 2, 3$  apresentadas nas Equações (2.8) à (2.11):



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i} \phi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}$  são os graus de liberdade nodal e  $\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x})$  é uma aproximação da solução de referência definida no domínio e restrita em  $\omega_{\alpha}$  pela função  $\varphi_{\alpha}$ .

As funções de enriquecimento do MEFG podem ser selecionadas, de modo a melhorar a aproximação local com a função de forma do MEF, o que permite uma versatilidade nos diferentes tipos de simulações encontrados na mecânica (Duarte *et al.*, 2000). Em problemas com solução suave, as funções de enriquecimento polinomiais,  $L_{\alpha i}^p$ , podem ser aplicadas por usar malhas grosseiras sem perda de precisão. Essas funções se definem de forma hierárquica obedecendo o triângulo de Pascal para o domínio bidimensional. Nas Equações (2.12) à (2.14) mostram-se respectivamente, as funções sem enriquecimento (P0), funções de enriquecimento polinomiais de primeiro (P1) e segundo (P2) graus de aproximação:

$$L_{\alpha i}^p(\mathbf{x}) = \{1\} \quad (2.12)$$

$$L_{\alpha i}^p(\mathbf{x}) = \{1, \xi, \eta\} \quad (2.13)$$

$$L_{\alpha i}^p(\mathbf{x}) = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2\} \quad (2.14)$$

em que  $\xi$  e  $\eta$  são monômios utilizados para enriquecer as funções de forma do MEF representados pelas Equações (2.15) e (2.16) a seguir:

$$\xi = \frac{x - x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \quad (2.15)$$

$$\eta = \frac{y - y_{\alpha}}{h_{\alpha}} \quad (2.16)$$

em que  $(x, y)$  são as coordenadas físicas dos pontos de gauss do elemento,  $(x_\alpha, y_\alpha)$  são as coordenadas dos nós a enriquecer e  $h_\alpha$  é o maior comprimento da aresta do elemento que compartilha o nó de coordenada  $(x_\alpha, y_\alpha)$ .

A precisão da solução obtida é ampliada com o aumento do grau da função de enriquecimento, conseqüentemente se eleva o número de graus de liberdade (NGL), pois cada monômio equivale dois graus de liberdade. A aproximação pelo MEFM do campo contínuo com funções de enriquecimento polinomiais é expressa a seguir:

$$\mathbf{u}_\alpha^p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i}^p L_{\alpha i}^p(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}^p$  são os graus de liberdade nodais relacionado aos enriquecimentos polinomiais  $L_{\alpha i}^p$ . As funções de forma do MEFM para os enriquecimentos polinomiais possuem dependência linear, esse problema é solucionado pelo algoritmo iterativo desenvolvido por Babuška (Duarte *et al.*, 2000; Strouboulis *et al.*, 2000).

Para problemas que envolve solução descontínua, como problemas de mecânica da fratura, funções de enriquecimento descontínua,  $L_{\alpha i}^d(\mathbf{x})$ , como a da Figura 2.1(b) podem ser aplicadas, de modo a não precisar flexibilizar a malha no entorno da superfície da trinca conforme definida a seguir:

$$\{L_{\alpha i}^d\} = H = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \omega_\alpha^+ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.18)$$

em que  $\omega_\alpha^+$  é a região de um dos lados da nuvem. A aproximação pelo MEFM do campo descontínuo com as funções de enriquecimento é descrita a seguir:

$$\mathbf{u}_\alpha^d(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{D_L} \mathbf{u}_{\alpha i}^d L_{\alpha i}^d(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}^d$  são os graus de liberdade nodais relacionado aos enriquecimentos descontínuos. Maiores detalhes sobre formulação, implementação e funções de enriquecimento do MEFM são encontrados nos trabalhos de Duarte *et al.* (2000), Strouboulis *et al.* (2000), (2001), Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008), Pereira *et al.* (2008), (2009).

### 2.3 ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL DO MEFG NÃO LINEAR

Com as características do MEFG de trabalhar com funções especiais para fornecer uma melhora na qualidade da aproximação, Duarte e Babuška (2005), Duarte e Kim (2008), Kim *et al.* (2008), (2010) aplicaram ao MEFG, uma estratégia global local para resolução do PVC, no qual denomina-se Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento Global Local (MEFG<sup>g-l</sup>). O MEFG<sup>g-l</sup> surgiu como uma alternativa às estratégias global local aplicadas ao MEF apresentados em Noor (1986), assim como a metodologia do MEFG convencional apresentada na seção 2.2. As formulações para a determinação das aproximações são fundamentadas dos trabalhos de Duarte e Babuška (2005), Duarte e Kim (2008), Kim (2009), Kim *et al.* (2009), (2010), (2012), Gupta *et al.* (2013) e Kim e Duarte (2015).

No MEFG<sup>g-l</sup> as funções de enriquecimento são construídas numericamente a partir da solução de um PVC local, que aproximam as características locais do problema a analisar tais como: trincas, vazios, interface material, fibras, inclusões dentre outros. As CC para resolução do problema local são fornecidas pela solução de um PVC global, que consiste por uma malha de poucos elementos com ou sem a consideração das características locais de interesse.

O procedimento não linear requer a resolução do problema de maneira incremental iterativa em passos de carga e / ou deslocamentos, daqui em diante ambos serão referidos como passos de carga. A formulação detalhada de cada etapa com suas respectivas características é descrita nas seções a seguir. A notação para o MEFG<sup>g-l</sup> adota os subscritos G e L para o domínio global e local, respectivamente,  $k$  indica o passo de carga corrente com  $k = 1, \dots, n_{m\acute{a}x}$ , em que  $n_{m\acute{a}x}$  é o número total de passos de carga da simulação.

A ideia para a determinação da aproximação nessa classe de problema está em construir numericamente as funções de enriquecimento global local, no qual descrevam de maneira precisa esse comportamento não linear para usá-la no enriquecimento da PU da solução global (Kim *et al.*, 2012). O processo completo para determinação da aproximação envolve as etapas ilustradas na Figura 2.2. Note que apenas a etapa (a) é totalmente linear e todas as outras etapas delimitadas pela linha tracejada tem algum comportamento não linear. As CC na porção  $\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$  são inexatas, pois são

valores estimados a serem aplicados. Por outro lado, as CC prescritas no contorno  $\Gamma_L$  que intersectam os contornos  $\Gamma_G^u$  ou  $\Gamma_G^t$  são prescritas com valor exato em cada passo de carga  $k$  (Duarte e Kim, 2015).

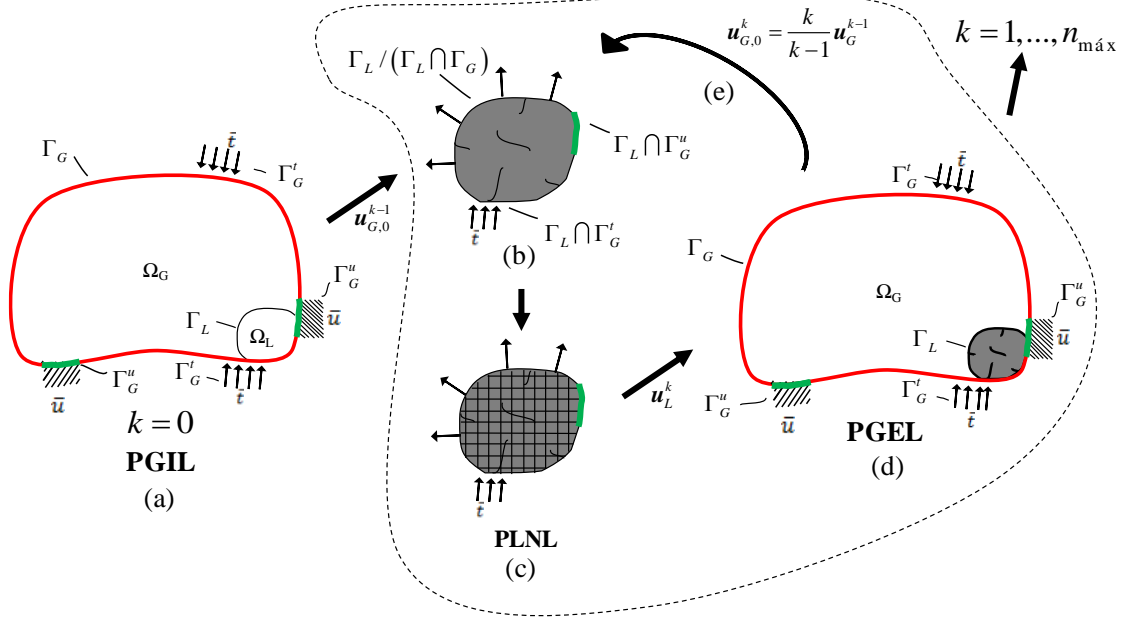


Figura 2.2 – Etapas da metodologia do MEFG<sup>s-1</sup> para análise não linear; (a) PGIL; (b) Escolher PLNL; (c) Discretização local; (d) PGEL; (e) CC para  $k > 1$ .

As próximas subseções detalham a formulação dos problemas globais e locais usados na abordagem proposta.

### 2.3.1 Problema Global Inicial Linear (PGIL)

Considere o domínio  $\Omega_G$  com contorno  $\Gamma_G$ , no qual são prescritos como CC o vetor carregamento  $\bar{t}$  e deslocamento  $\bar{u}$  no  $\Gamma_G^t$  e  $\Gamma_G^u$ , respectivamente. A aproximação da solução obtida pelo MEF ou MEFG convencional definido nas Equações (2.1) à (2.4) é denominado  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$ , que simboliza estar no passo de carga  $(k-1)$  e assume uma relação constitutiva elástico linear. Este problema corresponde a Figura 2.2(a) denominado como Problema Global Inicial Linear (PGIL). A aproximação  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$  é a solução do problema a seguir.

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_{G,0}^{k-1} \in \mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \text{ tal que } \forall \mathbf{v}_{G,0}^{k-1} \in \mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(\Omega_G):$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{G,0}^{k-1}) d\Omega + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \mathbf{u}_{G,0}^{k-1} \mathbf{v}_{G,0}^{k-1} d\Gamma = \int_{\Gamma_G^t} \bar{\mathbf{t}}^{k-1} \mathbf{v}_{G,0}^{k-1} d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \bar{\mathbf{u}}^{k-1} \mathbf{v}_{G,0}^{k-1} d\Gamma \quad (2.20)$$

em que  $\mathbf{v}_{G,0}^{k-1}$  são os deslocamentos virtuais e  $\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(\Omega_G)$  é a discretização do espaço de Hilbert  $H^1(\Omega_G)$  definido no  $\Omega_G$ , no qual se constrói com as funções de forma do MEF ou do MEEG convencional. Emprega-se nesta pesquisa CC de *Dirichlet*, impostas pelo método da penalidade, por meio do parâmetro de penalidade,  $\eta^*$ , devido sua simplicidade e generalidade (Kim *et al.*, 2010). O espaço  $\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(\Omega_G)$  é representado pela expressão a seguir:

$$\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(\Omega_G) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_G} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha i}^{k-1} L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.21)$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}^{k-1}$  são os graus de liberdade. A solução da Equação (2.20) é dada por um sistema de equações linear com uma malha de elementos finitos quase uniforme constituída por poucos elementos, no qual resulta a obtenção dos graus de liberdade desconhecidos de  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$  (Duarte e Kim, 2008).

### 2.3.2 Problema Local Não Linear (PLNL)

A aproximação proposta nessa seção requer a solução  $\mathbf{u}_L^k$  de um PVC local definido no  $\Omega_L$  que é um subdomínio de  $\Omega_G$ , onde enquadra todas as características locais de interesse, no caso desta pesquisa o comportamento não linear do material. Este problema corresponde a Figura 2.2(b) e (c) denominado Problema Local Não Linear (PLNL). Este problema é resolvido no subdomínio  $\Omega_L$ , no qual é submetido a condições de contorno  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$  concedidos inicialmente pelo PGIL no passo de carga  $(k-1)$  como pode ser visualizado na Figura 2.2(b) e (c). Nos demais passos de carga são submetidos às condições de contorno  $\mathbf{u}_{G,0}^k$  fornecido pelo problema global enriquecido que será discutido adiante. A aproximação  $\mathbf{u}_L^k$  é a solução do problema a seguir.

Encontrar  $\mathbf{u}_L^k \in \mathbf{X}_L^k(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L)$  tal que  $\forall \mathbf{v}_L^k \in \mathbf{X}_L^k(\Omega_L)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L^k) d\Omega + \eta^* \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \mathbf{u}_L^k \mathbf{v}_L^k d\Gamma + \kappa \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \mathbf{u}_L^k \mathbf{v}_L^k d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \bar{\mathbf{t}}^k \mathbf{v}_L^k d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \bar{\mathbf{u}}^k \mathbf{v}_L^k d\Gamma + \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \left( \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^k) \cdot \mathbf{n} + \kappa \mathbf{u}_{G,0}^k \right) \mathbf{v}_L^k d\Gamma \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que  $\mathbf{X}_L^k(\Omega_L)$  é a discretização do espaço de Hilbert  $H^1(\Omega_L)$  definido no  $\Omega_L$ , construído com as funções de forma do MEF ou MEFG convencional, definido pela expressão:

$$\mathbf{X}_L^k(\Omega_L) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_i} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha i}^k L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.23)$$

em que  $\mathbf{u}_{\alpha i}^k$  são os graus de liberdade nodais no passo de carga  $k$  e as funções de forma  $\varphi_{\alpha}$  são definidas no domínio  $\Omega_L$ . Na Equação (2.22) o parâmetro  $\kappa$  é uma rigidez de mola definida no contorno  $\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$  do problema local (Figura 2.2(b)), no qual estabelece o tipo de CC fornecida pela solução do problema global,  $\mathbf{u}_{G,0}^k$ . Nesta pesquisa são prescritas CC de *Dirichlet*, que corresponde ao caso da rigidez da mola  $\kappa = \eta^* \gg 1$  (Kim *et al.*, 2010). Essas CC segundo Kim e Duarte (2015) são fornecidas por uma estimativa da solução global no passo de carga  $k$ , como visualizada na Figura 2.2(e) por meio da expressão a seguir:

$$\mathbf{u}_{G,0}^k = \frac{k}{k-1} \mathbf{u}_G^{k-1} \quad (2.24)$$

A malha local necessita estar aninhada com a malha global para facilitar na integração numérica do domínio. O aspecto chave do PLNL apresentado está na incorporação da resposta não linear, por intermédio de um modelo de dano contínuo. Isto é conseguido usando na Equação (2.22) um modelo constitutivo do tipo:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) = (1 - D_{GL}^k) \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_L^k) \quad (2.25)$$

em que  $D_{GL}^k$  é a variável de dano escalar e  $\mathbf{D}_0$  é o tensor constitutivo não danificado. As especificidades do modelo de dano empregado são descritas na seção 2.4. O sistema não linear de equações é resolvido por um algoritmo iterativo usando a matriz de rigidez secante no problema local. Apesar da matriz de rigidez secante ter um maior número de iterações devido a convergência linear, o que o torna mais lento na solução em comparação com a matriz de rigidez tangente, o mesmo foi utilizado devido a garantia de uma solução convergida como descrito em Goyal (2002), Rodriguez-Ferran *et al.* (2004) e Travesa (2006). Além disso, a matriz secante se determina de maneira simples a partir do módulo elástico danificado em cada ponto de integração  $(1 - D_{GL}^k) \mathbf{D}_0$ .

### 2.3.3 Problema Global Enriquecido Linear (PGEL)

A solução  $\mathbf{u}_L^k$  definida pelas etapas descritas nas Seções 2.3.1 e 2.3.2 é manuseada de tal forma, que permita a criação numérica das funções de enriquecimento global local para o passo de carga vigente  $k$ . A principal característica do MFG<sup>g-1</sup> proposto para problemas com não linearidade material está no processo iterativo ocorrer apenas no PLNL. O problema global vincula a informação da variável escalar de dano obtido pela solução convergida do PLNL,  $D_{GL}^k$ , no qual é denominada variável escalar de dano global local.

O problema global é enriquecido com a função de enriquecimento global local,  $\mathbf{u}_L^k$ , o que resulta na solução global enriquecida,  $\mathbf{u}_G^k$ , denominado de Problema Global Enriquecido Linear (PGEL), como se visualiza na Figura 2.2(d). A solução  $\mathbf{u}_G^k$  é utilizada para prescrever as CC para o PLNL no passo de carga seguinte  $\mathbf{u}_{G,0}^k$ , com aplicação da Equação (2.24) para que ocorra uma atualização da solução local  $\mathbf{u}_L^{k+1}$ , como se visualiza respectivamente, na Figura 2.2(e), (b) e (c). Posteriormente a Figura 2.2(d) e (e) são novamente repetidas, onde as funções de enriquecimento global local atualizadas enriquecem a PU do problema global e prescrevem novas CC para o PLNL. Esse procedimento segue até que se obtenham as soluções para todos os passos de carga, com finalização no passo de carga  $n_{máx}$ . As funções de forma do MFG<sup>g-1</sup> para análises não lineares no passo de carga  $k$ ,  $\phi_\alpha^k$ , estabelece-se pela expressão a seguir:

$$\phi_\alpha^k(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}_L^k(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

em que  $\mathbf{u}_L^k$  é a função de enriquecimento global local no passo de carga  $k$ . A função PU é definida em cada nó  $\mathbf{x}_\alpha$ , cuja nuvem  $\omega_\alpha$  é compreendida no domínio local  $\Omega_L$ . As funções de enriquecimento global local se atualizam à medida que o dano se propaga entre os elementos. A formulação do PGEL definido anteriormente, é definida a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } \mathbf{u}_G^k \in \mathbf{X}_G^k(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \text{ tal que } \forall \mathbf{v}_G^k \in \mathbf{X}_G^k(\Omega_G): \\ \int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^k) d\Omega + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \mathbf{u}_G^k \mathbf{v}_G^k d\Gamma = \int_{\Gamma_G^t} \bar{\mathbf{t}} \mathbf{v}_G^k d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \bar{\mathbf{u}} \mathbf{v}_G^k d\Gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que  $\mathbf{X}_G^k(\Omega_G)$  é o espaço  $\mathbf{X}_G^{k-1}(\Omega_G)$  definido na Equação (2.21) com adição das funções de forma do MEFG<sup>g-1</sup> definida na Equação (2.26) e descrito a seguir:

$$\mathbf{X}_G^k(\Omega_G) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_G} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{ai}^k L_{ai}(\mathbf{x}) + \sum_{\beta \in \mathfrak{S}_{gl}} \varphi_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\beta^{gl,k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.28)$$

em que  $\mathfrak{S}_{gl}$  é o conjunto de todos os nós da malha global enriquecidos pelas funções de enriquecimento  $\mathbf{u}_L^k$  e  $\mathbf{u}_\beta^{gl,k}$  definido na expressão a seguir:

$$\mathbf{u}_\beta^{gl,k}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\beta 1}^k & \mathbf{u}_{L1}^k(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}_{\beta 2}^k & \mathbf{u}_{L2}^k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

em que  $\mathbf{u}_{\beta j}^k$ ,  $\beta \in \mathfrak{S}_{gl}$ ,  $j=1,2$ , são os graus de liberdade nodais e  $\mathbf{u}_{Lj}^k(\mathbf{x})$  são as componentes cartesianas do vetor deslocamento  $\mathbf{u}_L^k$  sendo descrito na Seção 2.3.2. Nas Equações (2.28) e (2.29) se estabelece para cada nó enriquecido a adição de 2 graus de liberdade para problemas 2D independentemente do número de graus de liberdade necessários para resolver o PLNL.

A transferência das variáveis escalares de dano,  $D_{GL}^k$ , obtidas pela solução do PLNL para o PGEL acontece por meio da relação de dano contínuo, dado na Equação (2.25) nos respectivos pontos de integração da malha do problema global com passo de carga sem iteração não linear. Isso, no entanto, só é garantido desde que a magnitude do trabalho relativo do resíduo,  $W_G$ , seja pequena (Duarte e Kim, 2015) e esteja dentro das tolerâncias utilizadas na prática e definidas por:

$$W_G = \frac{\mathbf{R}_G^{kT} \mathbf{d}_G^k}{\mathbf{f}_{G,ext}^{kT} \mathbf{d}_G^k} \quad (2.30)$$

em que  $W_G$  é o trabalho relativo das forças residuais pelo trabalho das forças externas,  $\mathbf{d}_G^k$  é o vetor de deslocamentos nodais no passo de carga  $k$ ,  $\mathbf{R}_G^{kT}$  é o resíduo não linear da solução do PGEL definida pela Equação (2.31):

$$\mathbf{R}_G^{kT} = \mathbf{f}_{G,ext}^k - \mathbf{f}_{G,int}^k \quad (2.31)$$



em que  $\mathbf{f}_{G,ext}^k$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{f}_{G,int}^k$  o vetor de forças internas definidos respectivamente por:

$$\mathbf{f}_{G,ext}^k = \int_{\Omega_G} \bar{\varphi}^{-T} \mathbf{b}^k d\Omega + \int_{\Gamma_G^t} \bar{\varphi}^{-T} \mathbf{t}^{-k} d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \bar{\varphi}^{-T} \mathbf{u}^{-k} d\Gamma \quad (2.32)$$

$$\mathbf{f}_{G,int}^k = \int_{\Omega_G} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \bar{\varphi}^{-T} \mathbf{u}_G^k d\Gamma \quad (2.33)$$

Nas simulações numéricas apresentadas adiante mostram-se que  $W_G$  possui valores pequenos dentro de tolerâncias usadas na prática, o que acarreta na não necessidade de iterações não lineares no PGEL para pequenos passos de carga, o que valida o propósito desta pesquisa. Kim e Duarte (2015) adotaram procedimento similar para problemas usando modelos de zona coesiva.

O PGEL aproveita a mesma malha de elementos finitos do PGIL. A transferência da variável escalar de dano ocorre no momento da integração numérica do PGEL com o auxílio das malhas do PLNL, de forma que as malhas locais estejam aninhadas na malha global. Isso garante a simulação de um problema de escala global (estrutural) linearmente e de problemas de escala fina (danificação) de maneira não linear. A Figura 2.3 ilustra a estratégia de integração e transferência da variável escalar de dano do PLNL para o PGEL, no qual se inicia com a definição do PGIL e o nó que é enriquecido pelas funções global local como se detalha na Figura 2.3(a). A Figura 2.3(b) mostra o detalhe do PLNL com a malha refinada e os pontos de integração, onde as variáveis escalares de dano são obtidas em cada elemento. Por fim, na Figura 2.3(c) apresenta o PGEL com pontos de integração contendo a variável escalar de dano, incorporados da malha local aninhada.

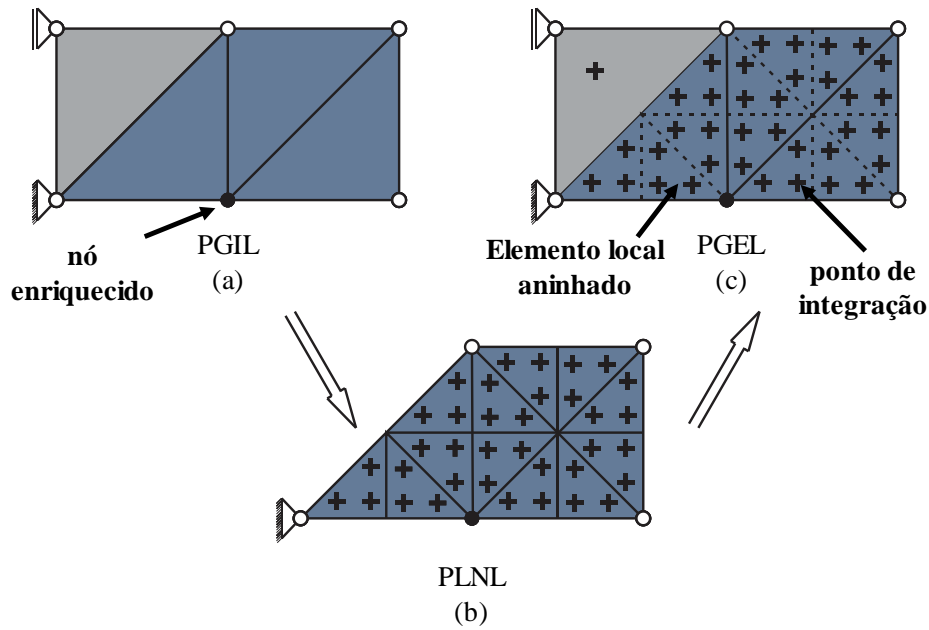


Figura 2.3 – Estratégia de integração e transferência da variável escalar de dano; (a) PGIL e nó com função de enriquecimento global local; (b) Malha do PLNL; (c) PGEL com pontos de integração contendo variável escalar de dano incorporados da malha local aninhada.

Os elementos do PGEL situados fora da nuvem de influência das funções de enriquecimento global local segue a regra de integração numérica da quadratura de Gauss padrão. A ordem da integração numérica aplicada a simulação do domínio global local deve seguir uma regra mínima de pontos. A mesma descreve que a ordem adotada deve ser a maior entre a ordem do domínio global sem considerar funções global local ou a ordem do elemento local acrescido de um (Duarte e Kim, 2008; Kim *et al.*, 2010). A Figura 2.4 resume por meio de um fluxograma todas etapas descritas ao longo desta seção em relação ao MEF<sup>g-1</sup> para a análise não linear proposta nesta pesquisa.

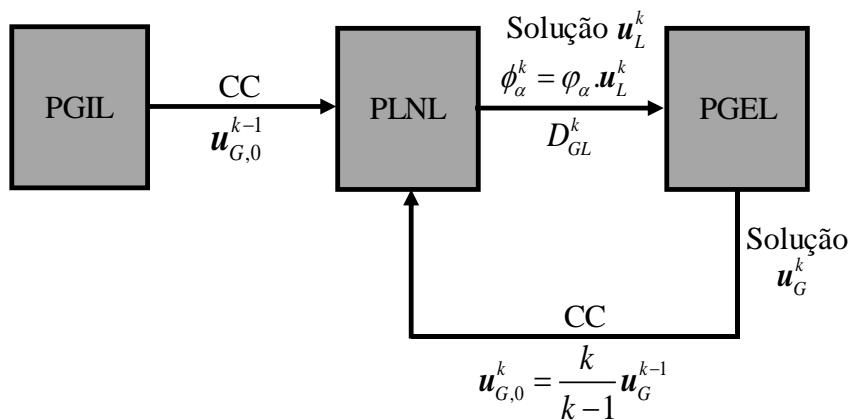


Figura 2.4 – Fluxograma da metodologia do MEF<sup>g-1</sup> para análise não linear.

## 2.4 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) estuda o comportamento do material de forma local, onde se inicia em uma conformação inicial sem defeitos, seguido de um processo de deterioração até chegar em uma condição final onde ocorre a visualização macroscópica das fissuras. Durante o processo de danificação, reduções nas propriedades mecânicas ocorrem, sendo como exemplo, a redução da rigidez e da resistência. Pode-se considerar o início dos estudos da MDC em Kachanov (1958) em problemas relacionados a observação da ruptura de metais em um período de deformação lenta. Para entendimento da MDC deve-se inicialmente selecionar um elemento de volume representativo, retirado de um corpo sólido danificado, de modo que o elemento represente a heterogeneidade presente no sólido conforme a Figura 2.5.

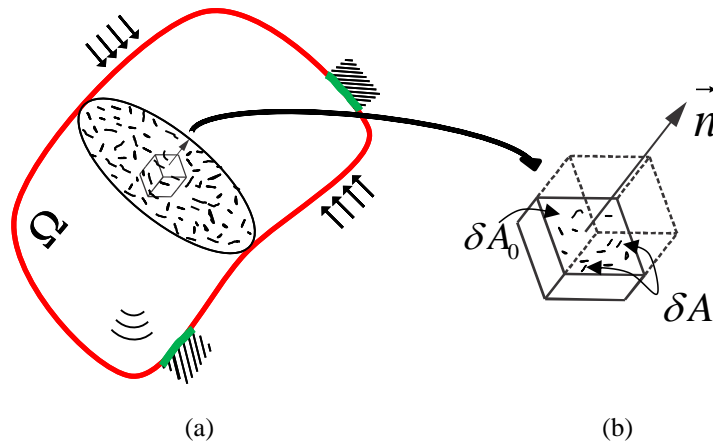


Figura 2.5 – Modelo de Dano Contínuo; (a) PVC; (b) Elemento de volume representativo.

Considere a seção do elemento, cuja área total da superfície é representada por  $\delta A_0$  perpendicular ao vetor  $\vec{n}$ , no interior dessa superfície a parcela  $\delta A$  corresponde a área de microdefeitos, conforme se visualiza na Figura 2.5(b). O estado de danificação do elemento de volume representativo é definido pela relação estabelecida a seguir:

$$D = \frac{\delta A}{\delta A_0} \quad (2.34)$$

em que  $D$  é a quantificação superficial do dano com relação a um plano definido pelo vetor normal  $\vec{n}$ . A variável de dano contém valores positivos, no qual varia no intervalo,  $0 \leq D \leq 1$ , onde para  $D = 0$  corresponde a um material íntegro e para  $D = 1$  o material está totalmente danificado. Observando a Equação (2.34), o operador  $D$

modifica a área atual,  $\delta A_0$ , para uma área efetiva menor e contínua da seção,  $\delta A'$ , como definida na expressão a seguir:

$$\delta A' = \delta A_0 - \delta A = \delta A_0 - \delta A_0 D = \delta A_0 (1 - D) \quad (2.35)$$

A tensão efetiva,  $\sigma'$ , na mecânica do dano foi introduzida por Rabotnov (1969) e se relaciona com a superfície que resiste efetivamente um carregamento, no qual é definida pela Equação (2.36) a seguir:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (2.36)$$

em que  $\sigma'$  é o tensor de tensões para o material danificado e  $\sigma$  é o tensor de tensões para o material não danificado. Rabotnov (1969) estabeleceu que um material integro descreve qualquer comportamento de um material danificado, desde que a tensão do material não danificado seja substituída pela tensão efetiva. Considerando isso, pode-se estabelecer nas seguintes expressões:

$$\sigma' = D_0 \varepsilon \quad (2.37)$$

$$\frac{\sigma}{(1 - D)} = D_0 \varepsilon \quad (2.38)$$

$$\sigma = (1 - D) D_0 \varepsilon \quad (2.39)$$

em que  $D_0$  é o tensor constitutivo de Hooke de quarta ordem para o material integro e  $\varepsilon$  é o tensor de deformações. A parcela  $(1 - D)$  surge como um fator de penalização, no qual pode obter o valor das tensões para qualquer estado de danificação do material.

Uma situação em relação ao dano está na definição do mesmo em função da orientação do versor normal  $\vec{n}$ . Pode-se considerar que os microdefeitos são distribuídos de maneira uniforme sem a preocupação da orientação do versor normal, o que leva ao processo de danificação ocorrer de maneira isotrópica, sendo definido como uma variável escalar. A variável escalar de dano se inicia e aumenta continuamente nos membros de uma estrutura com o critério da deformação equivalente. Nesta pesquisa serão abordados a seguir o critério da deformação equivalente proposto por Mazars (1984) e Von Mises.

### 2.4.1 Modelo de dano

O modelo de dano contínuo proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2019) para materiais e estruturas quase-frágeis é utilizado com a estratégia do MEEG<sup>s-1</sup> proposta nas seções anteriores. O modelo estabelece as hipóteses que o material apresenta comportamento elástico mesmo em processo de dano evolutivo, o dano é propiciado pelos alongamentos nas direções principais de deformação, o que ocasiona o desenvolvimento no modo I ou modo misto (I + II) das rupturas locais. O meio é isotrópico e o dano é considerado como uma variável escalar ( $0 \leq D \leq 1$ ) que penaliza o tensor constitutivo inicial como definido na Equação (2.25).

A deformação equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ ) é a variável de controle adotada, no qual se relaciona com o tensor de deformações sendo encarregada por interpretar em uma medida escalar o estado de deformação. Quando a estrutura estiver submetida a um carregamento que produz um modo I puro de fratura ou quando as tensões de tração são predominantes utiliza-se o critério de deformação equivalente proposto por Mazars (1984), no qual se destaca por ser largamente usado na literatura técnica (Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Proença e Torres, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011; Jirásek e Bauer, 2012; Pereira *et al.*, 2016; Moreira, 2016; Moreira e Evangelista Jr., 2016; Paiva *et al.*, 2016; Paiva, 2017; Evangelista Jr. e Moreira, 2019; Evangelista Jr. *et al.*, 2019).

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (2.40)$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2} \quad (2.41)$$

Em que  $\varepsilon_i$  é a deformação principal na direção  $i$  e o operador  $\langle \cdot \rangle_+$  considera somente os valores positivos das deformações principais.

Para a estrutura que estiver sujeita a carregamentos que resultam num comportamento de modo misto, isto é, as tensões de cisalhamento são relevantes na determinação do estado de deformação, utiliza-se a deformação equivalente de Von Mises modificado, amplamente utilizado na literatura técnica (Vree *et al.*, 1995; Geers, 1997; Simone *et al.*, 2003; Jirásek e Grassl, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011; Moreira, 2016; Moreira e

Evangelista Jr., 2016; Paiva *et al.*, 2016; Paiva, 2017; Evangelista Jr. e Moreira, 2019; Evangelista Jr. *et al.*, 2019).

$$\varepsilon_{eq}^{VM} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma(1 - 2\nu)} I_{\varepsilon_1} + \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{1 - 2\nu}\right)^2 I_{\varepsilon_1}^2 + \frac{6\gamma}{(1 + \nu)^2} J_{\varepsilon_2}} \quad (2.42)$$

em que  $\gamma$  é a relação entre a resistência à compressão e à tração,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $I_{\varepsilon_1}$  é o primeiro invariante do tensor de deformações e  $J_{\varepsilon_2}$  é o segundo invariante do tensor de deformações.

O início do dano ocorre quando  $\varepsilon_{eq}$  alcançar valor superior a uma deformação limite ( $\varepsilon_{d0}$ ) que corresponde a máxima tensão obtida em um ensaio experimental de tração uniaxial para o material. Evangelista Jr. e Moreira (2019) propuseram que a lei de evolução do dano  $D(\varepsilon_{eq})$  seja descrita por meio de uma lei de fratura bilinear que relaciona tração-deslocamento obtidos experimentalmente em ensaios de fratura com a relação tensão-deformação de amolecimento por meio de um tamanho característico ( $l_c$ ). A Figura 2.6 visualiza as curvas com comportamento de amolecimento bilinear para a evolução do dano  $D(\varepsilon_{eq})$ , onde a lei é descrita com detalhes em Moreira (2016) e Evangelista Jr. e Moreira (2019).

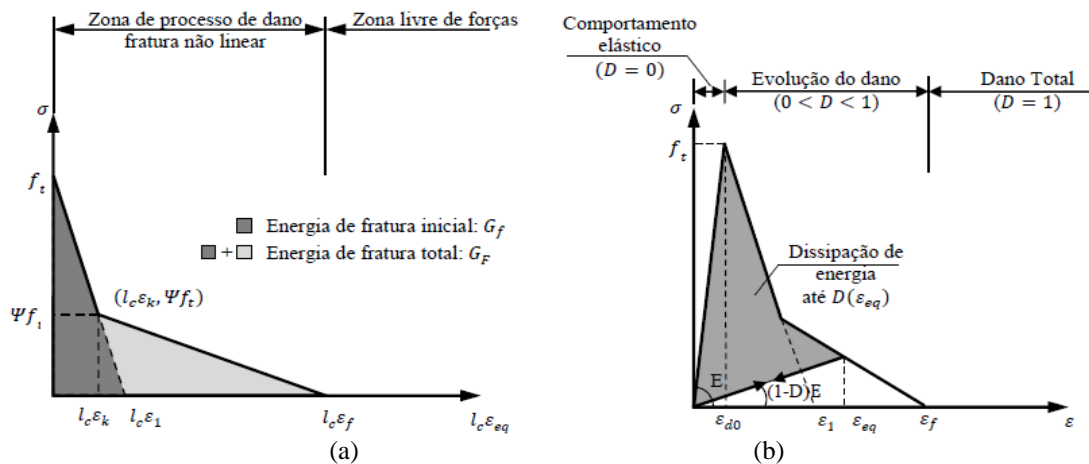


Figura 2.6 – Curva de amolecimento e modelo de dano; (a) Lei de amolecimento bilinear com equivalência de deformação através do  $l_c$ ; (b) Comportamento constitutivo do modelo de dano escalar (Adaptada de Evangelista Jr. *et al.*, 2013a).

Na Figura 2.6 estabelece-se os parâmetros geométricos, sendo  $(\varepsilon_1, \varepsilon_k, \varepsilon_f, \psi)$ , em que  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_k$  e  $\varepsilon_f$  são as deformações relacionado a largura de abertura de trinca e  $\psi$  é o

ponto da mudança de direção da curva denominado *kink point* ( $\psi$ ) que definem a lei bilinear do dano. Elas são funcionalmente relacionadas às propriedades da fratura obtidas nos testes laboratoriais. Essas propriedades incluem energia de fratura inicial  $G_f$ , energia de fratura total  $G_F$ , deslocamento de abertura de ponta de trinca crítico denominado na literatura técnica como *critical Crack Tip Opening Displacement* ( $CTOD_C$ ) e resistência à tração  $f_t$ . Mais detalhes sobre a lei bilinear da fratura podem ser encontrados em Roesler *et al.* (2007a), Gaedicke *et al.* (2012) e Evangelista Jr *et al.* (2013a) e em relação a lei de amolecimento bilinear para o modelo de dano contínuo pode ser encontrado em Evangelista Jr. e Moreira (2019).

#### **2.4.2 Programa LACHESIS**

Os ensaios numéricos das soluções de referência nesta pesquisa são obtidos por meio de simulações no programa denominado LACHESIS. Ele foi desenvolvido na linguagem C++ no grupo de pesquisa NEXUM da Universidade de Brasília (Moreira, 2016; Moreira e Evangelista Jr. 2016; Paiva *et al.*, 2016; Paiva, 2017; Evangelista Jr. e Moreira, 2019). Na sua estrutura se aplica a metodologia do MEF ou MEFG convencional para simulação de estruturas não lineares sob danificação.

No programa LACHESIS foi validado o modelo de dano com curva de amolecimento bilinear descrito na seção 2.4.1, no qual a lei de evolução é descrita por uma lei de fratura em função da relação tensão-deformação de amolecimento por meio do  $l_c$ . Esse parâmetro é a base para uma técnica regularizadora implementada em função da raiz quadrada da área do elemento finito triangular plano (Moreira, 2016; Moreira e Evangelista Jr. 2016; Paiva *et al.*, 2016; Paiva, 2017; Evangelista Jr. e Moreira, 2019). A regularização foi incorporada para resolver os problemas de “não-objetividade” da malha, na qual a solução depende da malha utilizada e não converge com maiores refinamentos. Esse é um aspecto inconveniente em modelos da mecânica do dano contínuo, de modo que necessite prevenir a concentração da dissipação da energia em regiões localizadas. Na Figura 2.7 são visualizadas três malhas regulares com as distribuições de dano no final da simulação realizada por Moreira (2016), em que verificou a objetividade da malha em relação aos resultados obtidos de ensaios experimentais em uma viga sob flexão em três pontos.

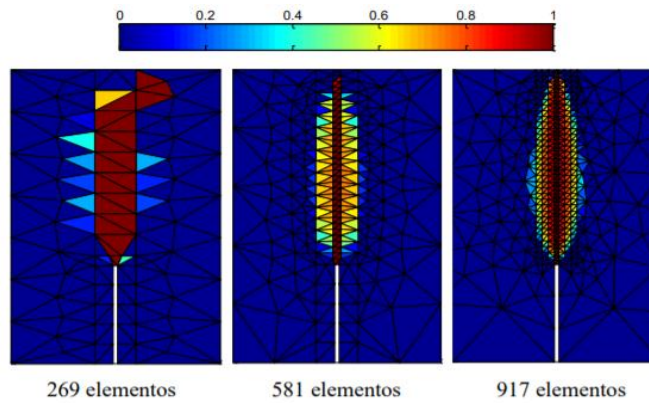


Figura 2.7 – Malha de elementos finitos regular com diferentes refinamentos e o dano ao final da simulação para a viga sob flexão em três pontos (Moreira, 2016).

Moreira (2016) concluiu que as malhas mais refinadas tendem a localizar mais o dano na zona de processo como se visualiza na cor vermelha dos elementos. Na Figura 2.8 se visualizam as curvas  $P$  vs.  $CMOD$  das simulações do LACHESIS para as três malhas apresentadas e os ensaios experimentais.

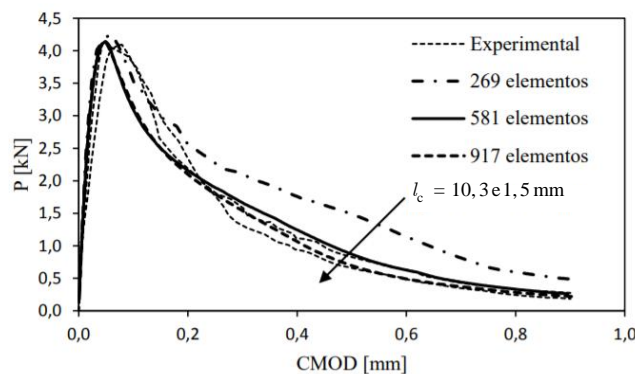


Figura 2.8 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  para simulações com diferentes malhas com  $l_c$  sendo o tamanho típico do elemento na seção central da viga (Moreira, 2016).

Moreira (2018) concluiu que as soluções obtidas pelo modelo de dano corroboraram com os ensaios experimentais, tanto no entorno da carga máxima como na região de amolecimento. O modelo de dano contínuo com a regularização proposta estabeleceu a dissipação da energia de fratura proporcional ao tamanho característico do elemento finito, o que resultou na objetividade de malha. Isso pode ser observado nas malhas com 581 e 917 elementos na convergência da carga máxima e na curva de amolecimento. A malha de 269 elementos mesmo grosseria possui solução razoável com comportamento similar aos das outras malhas refinadas. O resultado da malha regular com 917 elementos foi comparado com uma malha irregular de 1325 elementos, no qual a Figura 2.9 mostram as malhas e as distribuições de dano na configuração final da simulação.



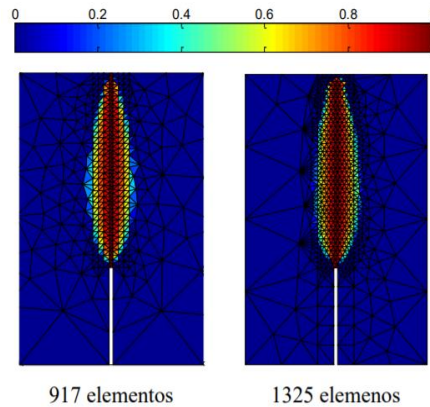


Figura 2.9 – Malha regular com 917 elementos e irregular com 1325 elementos e o dano ao final da simulação (Moreira, 2016).

Moreira (2016) observou que a distribuição de dano em ambas as malhas foi semelhante, o que leva a comprovar a objetividade da malha proposta pelo modelo de dano. Na Figura 2.10 visualizam-se as curvas  $P$  em função do  $CMOD$  das malhas abordadas e do resultado retirado de Park *et al.* (2008).

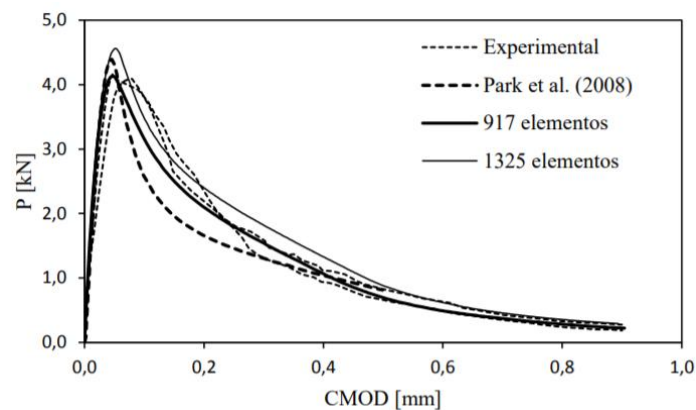


Figura 2.10 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  para simulações com diferentes malhas com  $l_c$  sendo o tamanho típico do elemento na seção central da viga (Moreira, 2016).

Observou-se que independentemente do tipo de malha empregada, as soluções não tiveram grandes diferenças, o que garantiu a objetividade da malha no modelo com curva de amolecimento bilinear proposto por Moreira (2016).

### 3 PROGRAMA COMPUTACIONAL

#### 3.1 FLUXOGRAMA E PRINCIPAIS FUNÇÕES

O programa computacional desenvolvido nesta pesquisa para simular o MEF<sup>g-1</sup> é denominado CLOTHO<sup>g-1</sup> e foi desenvolvido na linguagem de programação *Matlab* da companhia *Mathworks*. O CLOTHO<sup>g-1</sup> é o responsável pelas simulações do PGIL e do PGEL e define-se a seguir as principais funções para a performance do programa conforme se visualiza no fluxograma da Figura 3.1.

O funcionamento do CLOTHO<sup>g-1</sup> se inicia pela função principal do programa denominada *Main*, onde todas as outras funções são executadas a partir da mesma. A função *Main* chamará a leitura de dados iniciais pela função *preProcessor* onde se define o número de nós, coordenadas, elementos, propriedades de rigidez e fratura, nós enriquecidos por funções polinomiais (domínios global e local), nós enriquecidos por funções globais locais, os elementos locais que são aninhados nos globais e as condições de contorno nos problemas globais e locais dados em um arquivo de texto. Após a leitura dos dados, segue para a montagem do vetor de forças global, de acordo com o tipo de carregamento externo, por meio das funções *PointLoads*, *ConstLoads*, *LineLoads* ou *BodyLoads* e montagem do vetor de deslocamentos global pela função *DisplacementLoads*. Como a estrutura é não linear, a força ou deslocamento são divididos em pequenos passos de carga.

No primeiro passo de carga ( $k = 1$ ) é resolvido o PGIL, onde será montado a matriz de rigidez para cada elemento pela função *elemStiffMat* com as informações das funções de enriquecimentos polinomiais, caso solicitadas, e logo se monta a matriz de rigidez global por meio da função *globalStiffMat*, essas matrizes de rigidez são chamadas pela função *solverglGFEM*. A partir da montagem do vetor de forças e deslocamentos e da matriz de rigidez global se resolve o sistema de equações por meio da função *SolveSystemEq* para a obtenção dos deslocamentos.

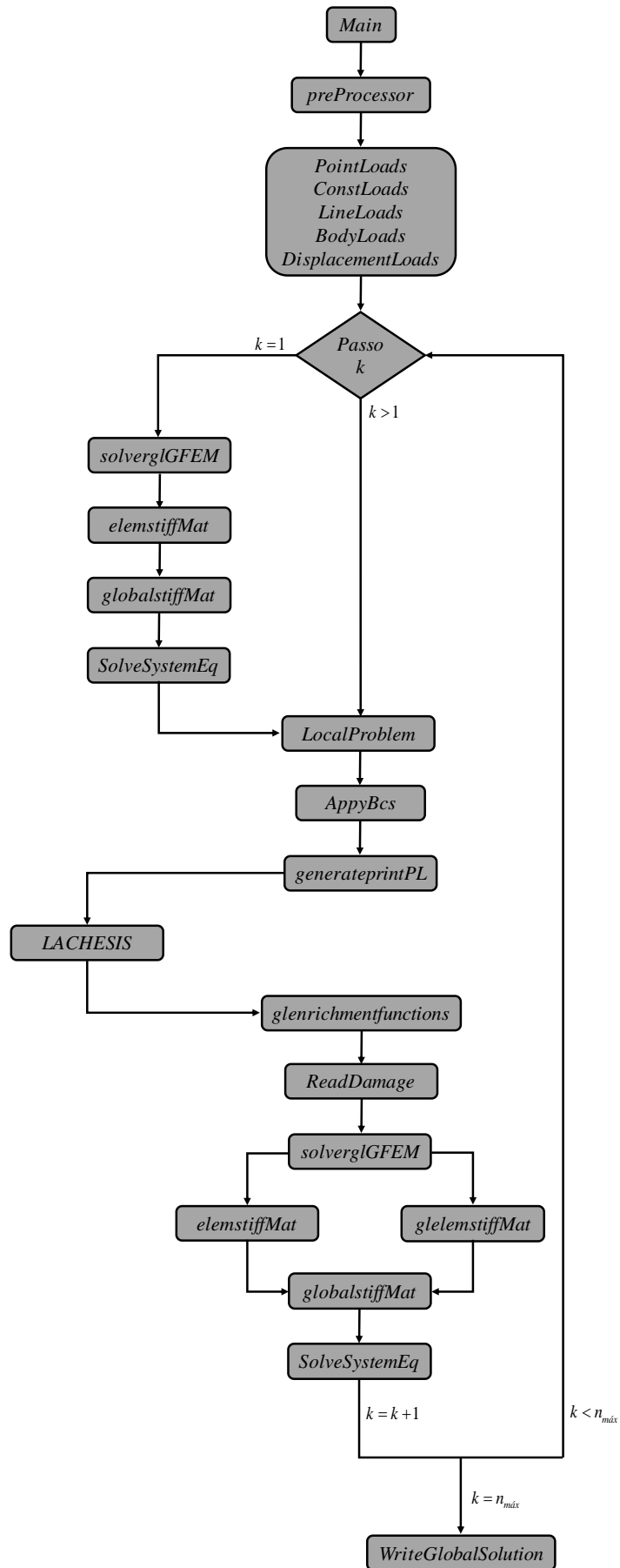


Figura 3.1 – Fluxograma com as principais funções.

Após a obtenção da solução do PGIL será acionada a função *LocalProblem*, no qual executará a função *ApplyBCs* para aplicar as CC no PLNL obtidas das respostas dos deslocamentos no problema global. Após esse processo é construído por intermédio da função *generatePrintPL* um arquivo que define o número de nós, coordenadas, elementos, propriedades de rigidez e fratura, condições de contorno e nós enriquecidos por funções polinomiais do domínio local. Definido esse arquivo, o CLOTHO<sup>g-1</sup> ainda por meio da função *LocalProblem* executa o programa LACHESIS para simulação do PLNL. Os deslocamentos obtidos da solução do PLNL são armazenados para construção das funções de enriquecimento global local pela função *glenrichmentfunctions* e as variáveis de dano são armazenadas pela função *ReadDamage* para ser transferida para o PGEL por meio dos pontos de integração.

Após a etapa de simulação do PLNL será simulado o PGEL, no qual se constrói as matrizes de rigidez dos elementos, onde, se o elemento é enriquecido pelas funções global local executa a função *glelemStiffMat* e caso não, aciona-se a função *elemStiffMat*. As matrizes de rigidez dos elementos acompanham informações das funções de forma enriquecidas por funções global local e funções polinomiais caso solicitadas. Além disso, são inseridos na matriz de rigidez dos elementos as informações das variáveis de dano nas respectivas coordenadas dos pontos de integração dos elementos locais aninhados. Segue para a montagem da matriz de rigidez global pela função *globalStiffMat* e resolução do sistema de equações lineares pela função *SolveSystemEq* para a obtenção dos deslocamentos.

Após a resolução do PGEL o primeiro passo de carga se encerra e o segundo inicia ( $k = k + 1$ ) para um novo incremento de carga na montagem do vetor de forças e deslocamentos. Depois o programa caminhará diretamente para o PLNL ( $k > 1$ ) onde é resolvido com as CC do PGEL do passo anterior, por meio da Equação (2.24) e acionado pela função *ApplyBCs*. O arquivo para o PLNL é novamente construído pela função *generatePrintPL*, logo o CLOTHO<sup>g-1</sup> chama o programa LACHESIS por meio da função *LocalProblem* e novos deslocamentos e variáveis de dano são armazenados. Este ciclo se repetirá ( $k < n_{máx}$ ) até que a quantidade total de passos de carga definidos se conclua ( $k = n_{máx}$ ) e a função *WriteGlobalSolution* é acionada para armazenar os dados de saída do problema global.

Na Tabela 3.1 são mostradas as funções apresentadas no fluxograma da Figura 3.1 com suas descrições e a relação de quem a função especifica chama ou por qual função a mesma é chamada.

Tabela 3.1 – Descrição das funções principais do CLOTHO<sup>g-1</sup>.

<b>Função</b>	<b>Descrição</b>	<b>Chama a função:</b>	<b>É chamada pela função:</b>
<i>Main</i>	Inicia o programa	<i>preProcessor</i> <i>PointLoads</i> <i>ConstLoads</i> <i>LineLoads</i> <i>BodyLoads</i> <i>DisplacementLoads</i> <i>solverglGFEM</i>	-
<i>preProcessor</i>	Ler dados de entrada	-	<i>Main</i>
<i>PointLoads</i> <i>ConstLoads</i> <i>LineLoads</i> <i>BodyLoads</i>	Monta o vetor global de forças externas	-	<i>Main</i>
<i>DisplacementLoads</i>	Monta o vetor global de deslocamentos	-	<i>Main</i>
<i>solverglGFEM</i>	Monta a matriz de rigidez global e resolve o sistema de equações	<i>elemStiffMat</i> <i>globalStiffMat</i> <i>SolveSystemEq</i>	<i>Main</i>
<i>elemStiffMat</i>	Monta matriz de rigidez do elemento sem enriquecimento global local.	-	<i>solverglGFEM</i>
<i>glelemStiffMat</i>	Monta matriz de rigidez do elemento enriquecido por funções global local	-	<i>solverglGFEM</i>
<i>globalStiffMat</i>	Monta matriz de rigidez global.	-	<i>solverglGFEM</i>
<i>SolveSystemEq</i>	Resolve sistema de equações	-	<i>solverglGFEM</i>
<i>LocalProblem</i>	Soluciona o problema local	<i>ApplyBCs</i> <i>generatePrintPL</i> <i>LACHESIS</i> <i>glenrichmentfunctions</i> <i>ReadDamagedInitial</i>	<i>Main</i>
<i>ApplyBCs</i>	Aplicar CC no problema local	-	<i>LocalProblem</i>
<i>generatePrintPL</i>	Escrever arquivo do problema local	-	<i>LocalProblem</i>
<i>LACHESIS</i>	Programa computacional para simulação do problema local	-	<i>LocalProblem</i>
<i>glenrichmentfunctions</i>	Construção das funções de enriquecimento global local	-	<i>LocalProblem</i>
<i>ReadDamage</i>	Armazena as variáveis de dano	-	<i>LocalProblem</i>
<i>WriteGlobalSolution</i>	Armazena dados do problema global	-	<i>Main</i>

Na Figura 3.2 é visualizado o funcionamento entre o programa CLOTHO<sup>g-1</sup> e o LACHESIS para a simulação do MEFG<sup>g-1</sup> para estruturas em processo de danificação proposto no capítulo 2.

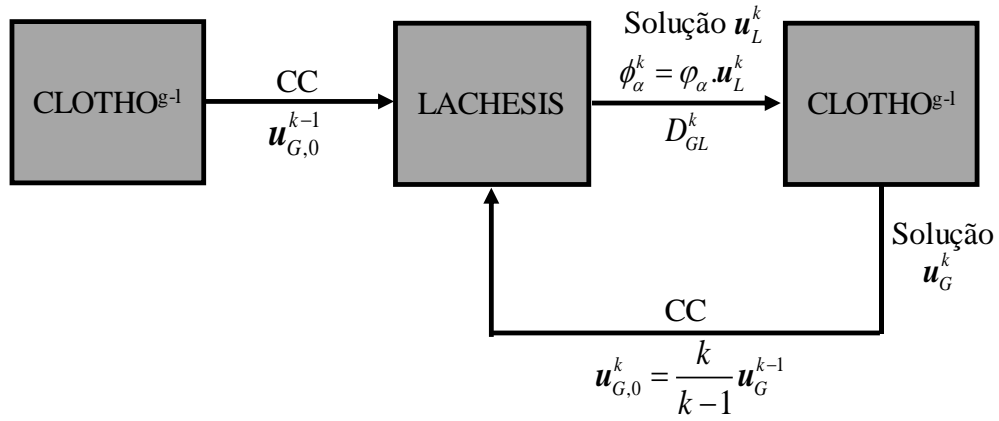


Figura 3.2 – Funcionamento do programa computacional.

## 4 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas que empregam o estudo apresentado no capítulo 2 em relação ao MEEFG<sup>s-1</sup>. O objetivo deste capítulo consiste em verificar e validar o método para estruturas que possuem comportamento não linear. Como modelos de referência neste capítulo, tem-se um bloco submetido a passos de deslocamentos prescritos e uma viga simplesmente apoiada sob flexão em três pontos. Em todas as simulações são utilizados a deformação equivalente de Mazars como variável de controle. Comparam-se todos os resultados obtidos com ensaios numéricos simulados pelo programa LACHESIS. Além disso, a viga é comparada com resultados de ensaios experimentais do trabalho de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke *et al.* (2012).

### 4.1 VERIFICAÇÃO PRELIMINAR

#### 4.1.1 Bloco submetido a deslocamento prescrito

Neste modelo, retirado de Kim e Duarte (2015), cuja apresentação se faz pela Figura 4.1 simula um bloco apoiado em uma das extremidades e submetida a um deslocamento imposto uniaxial na extremidade oposta. As propriedades do material e de fratura utilizadas na simulação encontram-se na Tabela 4.1.

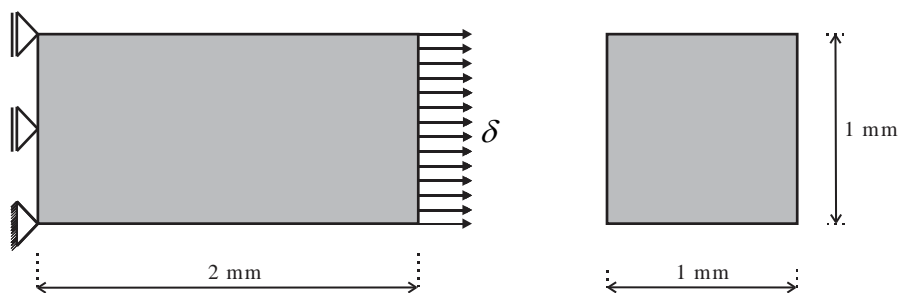


Figura 4.1 – Geometria e carregamento do bloco uniaxial submetido a deslocamento imposto.

Tabela 4.1 – Propriedades do material e de fratura do bloco uniaxial.

$E$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm)	$\psi$
33000	0,20	3	0,1	0,04	0,25

Para esse bloco, o objetivo é analisar as curvas que relacionam a tensão normal calculada ( $\sigma$ ) e o deslocamento imposto ( $\delta$ ) na extremidade tracionada para o modelo

de dano com curva de amolecimento bilinear. O bloco é modelada por elementos triangulares isoparamétricos (Figura 4.2) em condição de tensão plana.

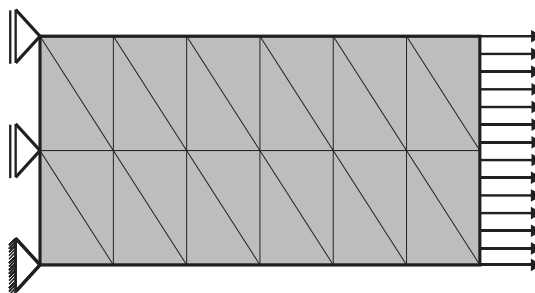


Figura 4.2 – Malha utilizada para solução de referência.

Aplica-se 4000 passos de carga na extremidade livre. A solução de referência simulada pelo MEF por meio do programa LACHESIS é mostrada na Figura 4.3, no qual se visualiza a curva constituída pela relação  $\sigma$  vs.  $\delta$  retirada da extremidade livre.

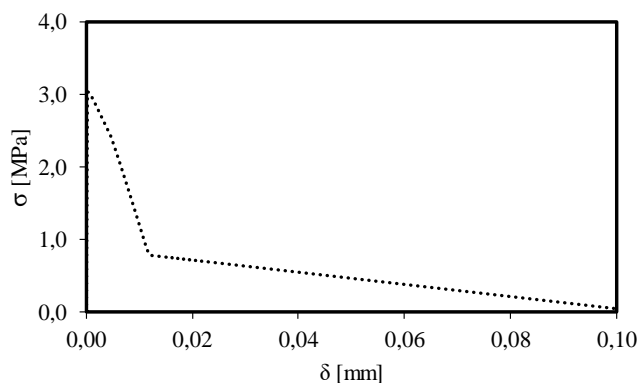


Figura 4.3 – Curva  $\sigma$  vs.  $\delta$  para o bloco.

O grande número de passos de carga é devido um problema de bifurcação, o que resulta numa instabilidade numérica, devido as tensões possuírem valores constantes em todo o seu domínio inicial. No propósito de reduzir essa instabilidade foi induzido o dano apenas nos elementos da região central.

#### 4.1.2 Estratégia global local pelo MEFG

Para a análise global local foram elaboradas duas abordagens para simulação, na primeira o problema global tem a mesma geometria e malha do PLNL. Na segunda o problema global e o PLNL possuem a mesma geometria e diferentes malhas. Nos dois casos as CC transferidas do problema global para o PLNL são exatas. Essa concepção leva o PLNL a representar o mesmo domínio do problema global linear, no entanto, as iterações não lineares são calculadas apenas no PLNL.



### Problema global e PLNL com a mesma malha

As malhas utilizadas para o PGIL, PLNL e PGEL possuem 24 elementos e são idênticas a malha simulada pelo MEF (Figura 4.2). As correspondentes malhas e os nós que são enriquecidos com as funções global local são ilustrados na Figura 4.4. No PGEL a nuvem de influência das funções de enriquecimento global local engloba todo o domínio, ou seja, o PLNL é definido no mesmo problema global. Os nós onde situam as CC não foram enriquecidos (nós brancos da Figura 4.4(c)) de modo a respeitar as mesmas. Aplica-se 4000 passos de carga na extremidade livre do bloco.

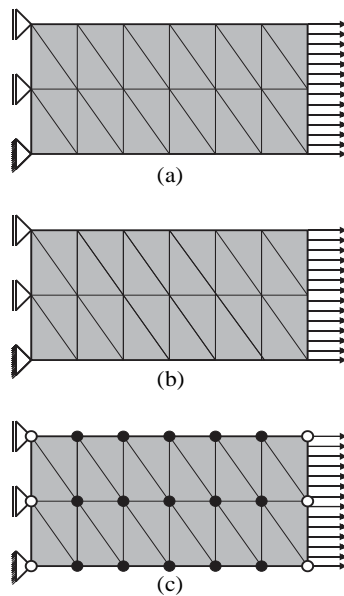


Figura 4.4 – Malhas utilizadas e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

No gráfico da Figura 4.5 são visualizadas as curvas  $\sigma$  vs.  $\delta$  obtidas pela simulação global local proposta na extremidade livre do bloco, juntamente com a solução obtida pelo MEF (Figura 4.3).

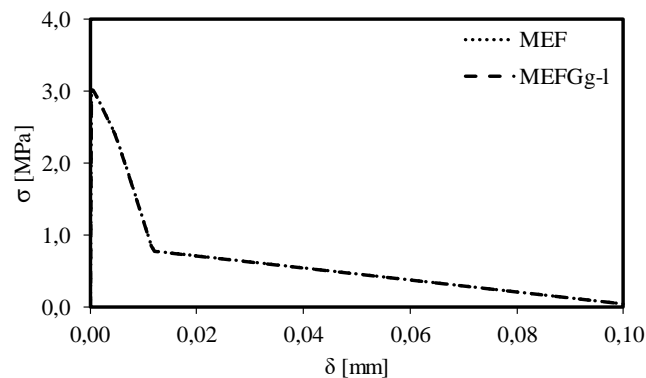


Figura 4.5 – Curvas  $\sigma$  vs.  $\delta$  da solução de referência e do MEFG<sup>g-l</sup> para primeira abordagem.

Na Figura 4.5 pode-se concluir que a metodologia de simulação global local proposta consegue reproduzir a solução do MEF de maneira satisfatória, do início até a região da carga máxima, assim como a região de *softening* (amolecimento) existente após o pico. Essa solução era esperada, uma vez que as CC são exatas e coincidentes com a simulada pelo MEF. O propósito de ilustrar essa abordagem está em mostrar que a metodologia empregada nesta pesquisa quanto a abordagem da formulação, implementação e aplicação do MEF<sup>g-l</sup> está funcionando de forma consistente na passagem da variável escalar de dano entre o problema global e o PLNL.

**Problema global e PLNL com malhas diferentes**

As malhas para o PGIL e PGEL possuem seis elementos, diferente do PLNL, no qual se manteve a mesma malha de referência com 24 elementos. As malhas utilizadas para o PGIL, PLNL e PGEL e os nós enriquecidos com as funções de enriquecimento global local são visualizadas na Figura 4.6.

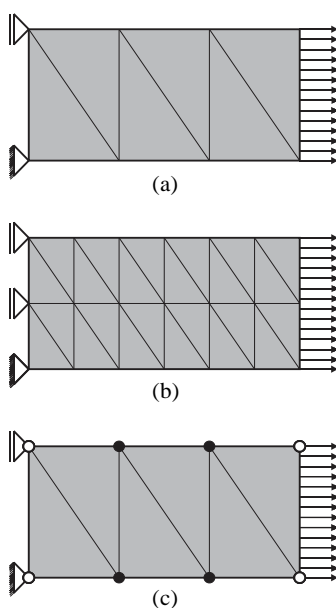


Figura 4.6 – Malhas utilizadas e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

Foi realizado o mesmo procedimento da abordagem anterior, onde se aplica 4000 passos de carga na extremidade livre e os nós situados nas CC não foram enriquecidos. No gráfico da Figura 4.7 são visualizados as curvas  $\sigma$  vs.  $\delta$  da simulação global local juntamente com a solução obtida pelo MEF.

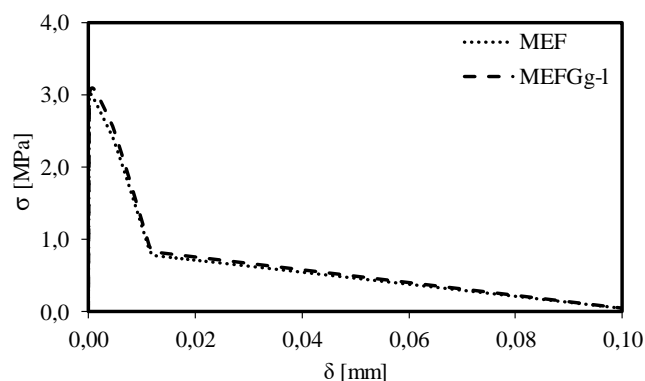


Figura 4.7 – Curvas  $\sigma$  vs.  $\delta$  da solução de referência e do MEFG<sup>g-1</sup> para segunda abordagem.

Nas curvas da Figura 4.7 os resultados são pertinentes, pois a curva simulada pelo MEF juntamente com a curva produzida pelo MEFG<sup>g-1</sup> reproduz o mesmo comportamento em toda sua região. Esse resultado valida o MEFG<sup>g-1</sup> quanto a passagem da variável escalar de dano e a construção das funções de enriquecimento global local, o que era de se esperar, visto que a passagem das CC entre o problema global e o PLNL são exatas. A diferença a favor nesta abordagem está na malha do problema global não coincidir com a malha do PLNL, o que levam as características locais de interesse em uma estrutura serem discretizadas de maneira refinada no PLNL mantendo o problema global com poucos elementos.

## 4.2 VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DE PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA

### 4.2.1 Viga sob flexão em três pontos

Neste modelo, cuja apresentação se faz pela Figura 4.8, simula-se uma viga sob flexão em três pontos com um entalhe geométrico na parte inferior conhecido na literatura como *Three Point Bending (TPB)*.

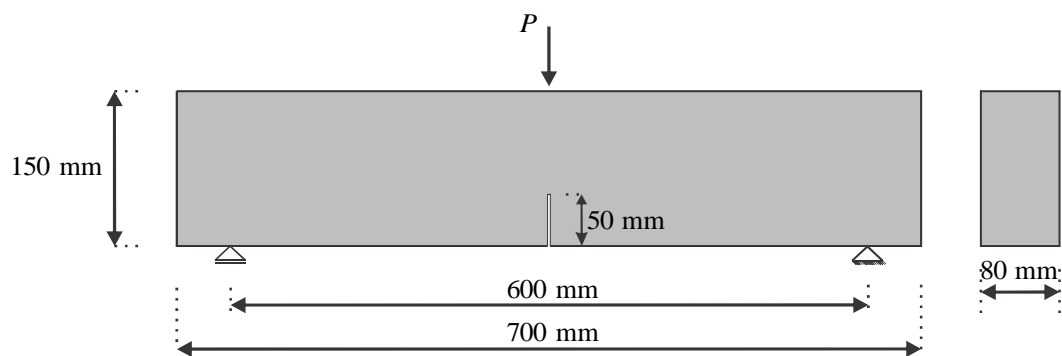


Figura 4.8 – Geometria, carregamento e CC da viga sob flexão em três pontos.

As propriedades relacionadas a rigidez, fratura e resistência obtido do ensaio experimental para a realização do ensaio numérico são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Propriedades de rigidez, resistência e de fratura da *TPB*.

$E$ (GPa)	$\nu$	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	CTOD <sub>C</sub> (mm)
32	0,20	58,30	4,15	164,0	56,7	0,0205

Nesta viga, o objetivo será analisar as curvas relacionadas entre à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca mais conhecido na literatura como *Crack Mouth Opening Displacement (CMOD)*. Foi aplicado um controle de deslocamento no ponto de aplicação da força  $P$  denominado como passo de carga.

#### 4.2.2 Verificação e validação (PLNL como 100% do problema global)

Nesta seção é verificado a estratégia global local implementada, no modelo inicial a nuvem de influência das funções de enriquecimento global local abrange todo o domínio. Isso resulta devido ao PLNL ter o mesmo tamanho e malha do problema global (PGIL e PGEL). Dessa forma, os resultados do MEF<sup>g-1</sup> precisam recuperar a mesma solução do MEFG convencional. A discretização consiste em uma malha com triângulos lineares de três nós com dois cenários considerados para discretização. O primeiro cenário, discretiza-se a *TPB* por 39 elementos nos problemas globais e locais e a mesma é visualizada na Figura 4.9. A Figura 4.10 mostra o outro cenário no qual o *TPB* é discretizado por 107 elementos nos problemas globais e locais. Nos dois cenários, modela-se o entalhe implicitamente no problema local por meio das funções de enriquecimento descontínua Heaviside aplicadas na região e no problema global o entalhe não é modelado. Essa região no entorno do entalhe real pode-se visualizar com detalhes na Figura 4.9(a) e (b) e na Figura 4.10(a) e (b).

Para o cenário com malha de 39 elementos se adicionam funções de enriquecimento polinomiais de primeiro e segundo grau (P1 e P2) aos nós e para o cenário com 107 elementos se adicionam enriquecimentos polinomiais de primeiro grau P1. Os nós situados nas CC não são enriquecidos (nós brancos) e os nós enriquecidos pelas funções polinomiais coincidem com aqueles enriquecidos pelas funções globais locais (nós negros), conforme visualizado na Figura 4.9(c) e na Figura 4.10(c).

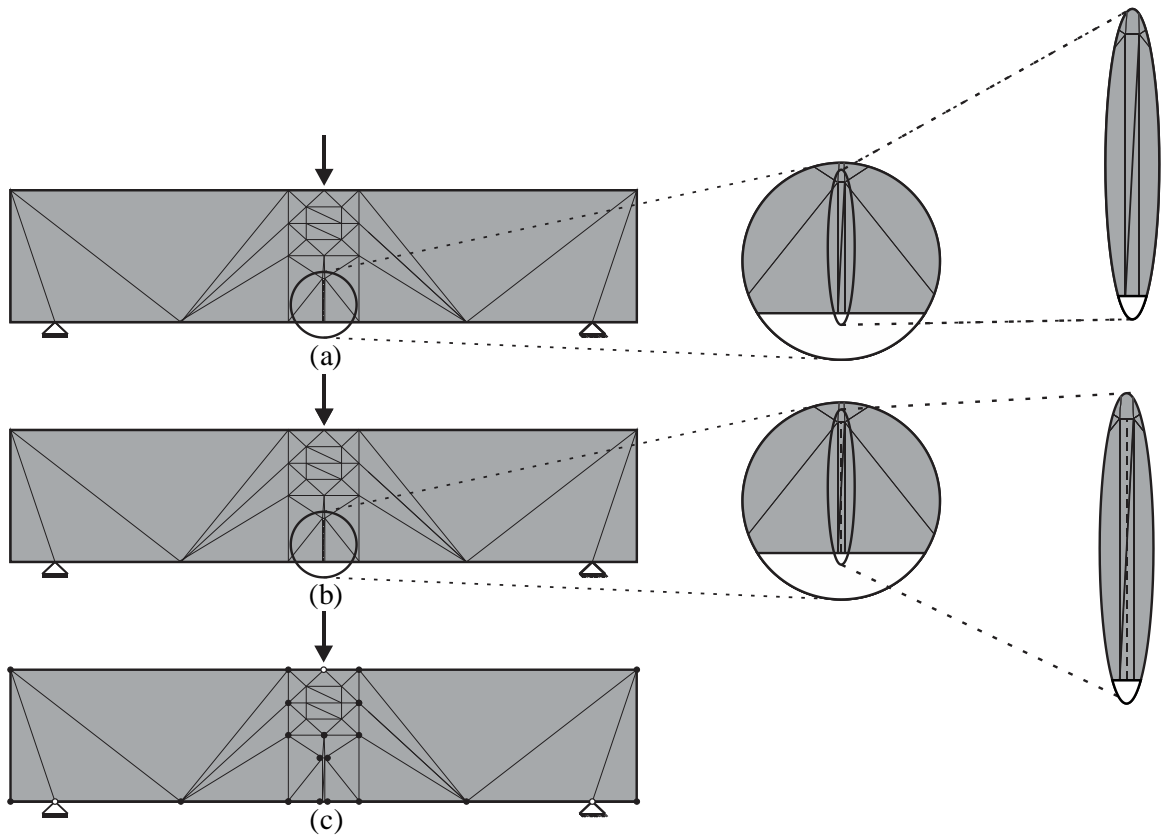


Figura 4.9 – Malhas da simulação do MEFG<sup>g-l</sup> com 39 elementos utilizadas no problema global e local; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

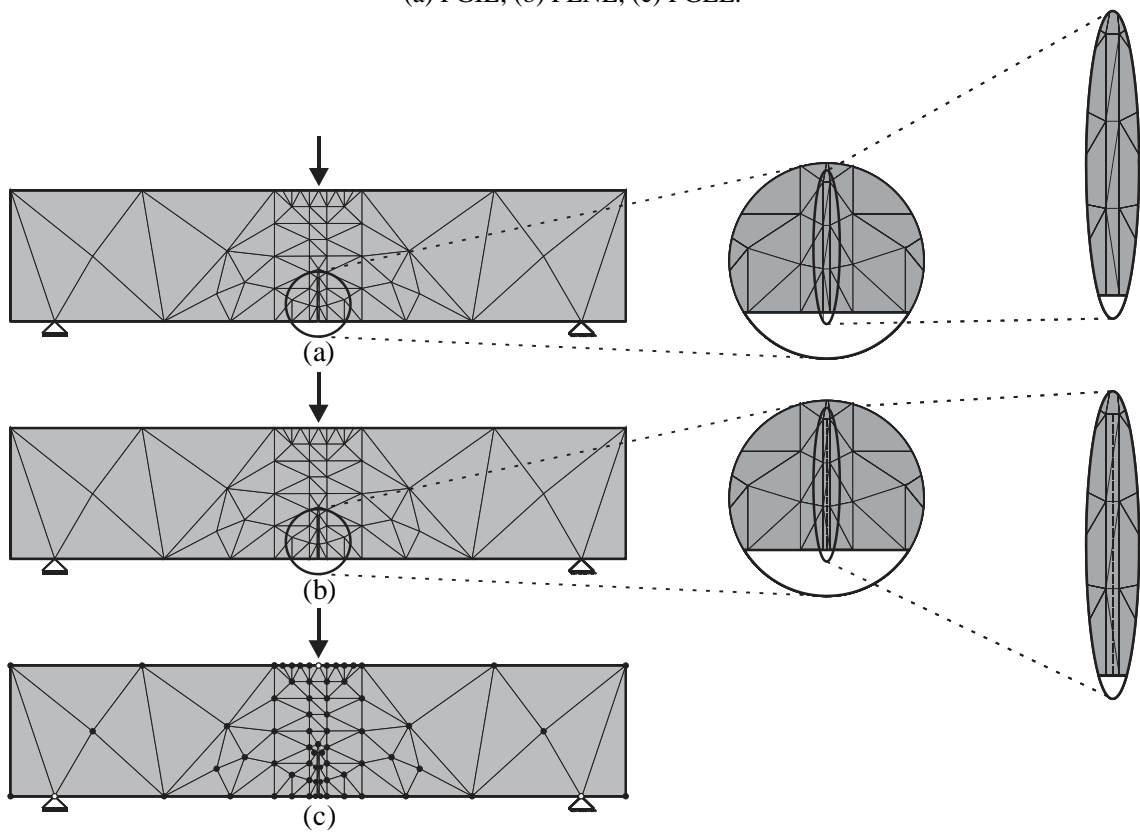


Figura 4.10 – Malhas da simulação do MEFG<sup>g-l</sup> com 107 elementos utilizadas no problema global e local; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

As CC do problema global e do PLNL coincidem, de modo que o intuito é observar o efeito e a qualidade das funções de enriquecimento global local construídas após a resolução do PLNL. A qualidade das CC influencia no problema global, uma vez que o entalhe é modelado de maneira implícita apenas no PLNL e a cinemática é transferida para o PGEL por meio das funções de enriquecimento, onde não possui entalhe. Outra situação é o comportamento no PLNL na passagem da variável escalar do dano para o PGEL.

Realizam-se simulações com 50 e 200 passos de carga no ponto de aplicação da força  $P$ , onde é medido a variação da força  $P$  em função do  $CMOD$  que é obtido por meio dos deslocamento do elemento ao qual contem a função Heaviside na parte inferior. Nas curvas da Figura 4.11 são ilustradas a variação da força  $P$  vs.  $CMOD$  de soluções experimentais retiradas de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke *et al.* (2012), da solução do MEFG<sup>g-1</sup> com malha de 39 elementos com nós enriquecidos por funções polinomiais P1 e P2 e malha de 107 elementos enriquecido por funções P1 todos submetidos a estado plano de tensão. Além disso são visualizados na Figura 4.11 uma solução de referência do MEFG convencional com malha de 107 elementos enriquecida por funções P1.

Em todas as legendas relacionadas, às soluções do MEFG<sup>g-1</sup> são definidas com a seguinte sequência: número de elementos no respectivo problema (global ou local), seguido pelo grau das funções de enriquecimento polinomial existentes no problema (Pn). A legenda P0 significa não possuir funções enriquecimento polinomial e a notação PG refere-se à adição de enriquecimento no PGIL e no PGEL.

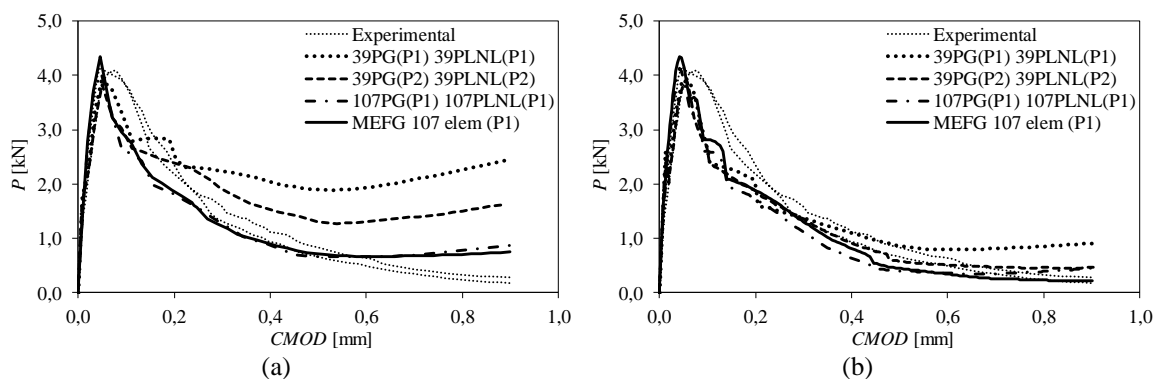


Figura 4.11 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  experimentais, simuladas pelo MEFG<sup>g-1</sup> para malha com 39 e 107 elementos e simuladas pelo MEFG com 107 elementos para; (a) 50 e; (b) 200 passos de carga.

Observa-se uma melhora nas soluções do MEF<sup>g-1</sup> quando se aumenta o número de passos de carga, no qual reproduz melhor tanto a região da carga máxima quanto a região de amolecimento. Esses resultados aproximam das soluções experimentais e do MEFG convencional devido a maior quantidade de passos de carga, o que leva às simulações com 200 passos ser escolhida como melhor opção nesta seção.

As curvas da Figura 4.11(b) mostram que para o MEF<sup>g-1</sup>, a malha com 39 elementos reproduz a região de  $P_{máx}$  e parte do amolecimento da curva  $P$  vs.  $CMOD$  com precisão quando enriquecida pela função P1. A diferença na região de amolecimento deve-se ao fato de ter poucos elementos ao redor do entalhe implícito para construir com precisão o seu efeito cinemático no PGEL pelas funções de enriquecimento global local. Para essa mesma malha, os enriquecimentos P2 melhoraram a parte final do amolecimento. No entanto, na perspectiva de engenharia, onde o mais importante é prever a capacidade de carregamento máxima da viga, o MEF<sup>g-1</sup> foi capaz de aproximar com a malha de apenas 39 elementos. O problema enriquecido com funções polinomiais P1 atinge a mesma ordem da equação analítica da viga com as mesmas condições de contorno. Isto é devido ao grau das funções de forma do MEF<sup>g-1</sup> ser aproximadamente do terceiro grau, similar ao grau da equação analítica para uma viga sem entalhe. Assim, os resultados são precisos sem a necessidade de uma grande quantidade de elementos.

À medida que se aumenta o número de elementos (refinamento  $h$ ) na região da descontinuidade, quando se considera a malha com 107 elementos e enriquecimentos P1, a solução consegue prever os resultados experimentais, desde  $P_{máx}$  até o amolecimento da curva. Funções de enriquecimento polinomiais P1 no problema global e no PLNL são adicionados para melhorar na construção das funções de enriquecimento global local, o que ocasiona em uma melhora no efeito cinemático do entalhe no PGEL. Note-se que a objetividade em relação a malha do modelo de dano empregado também é demonstrada pelo fato de que a previsão das curvas se melhora com malhas mais finas ou enriquecimentos de ordem superior. É bem sabido que os modelos de dano não têm objetividade quanto aos resultados de suavização à medida que a malha é refinada. Alguma ligeira diferença entre as simulações e os resultados experimentais pode ser atribuída à dispersão natural entre as amostras e a variação estatística das propriedades de fratura e resistência da literatura (Roesler *et al.*, 2007a).

A estratégia proposta do  $MEFG^{g-1}$  pode ser verificada quando se compara com a solução de referência simulada pelo MEF $G$  convencional com a mesma malha de 107 elementos mostrada na Figura 4.11(b). Nota-se que as duas soluções são similares com pequenas diferenças explicadas pela característica aproximada do  $MEFG^{g-1}$  na transferência dos deslocamentos e das variáveis de dano do problema local para o global, uma vez que a trinca e o processo iterativo ocorrem apenas no PLNL.

Nas curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da Figura 4.12 são visualizadas as soluções experimentais, a solução do  $MEFG^{g-1}$  sob condições de tensão plana (pl- $\sigma$ ) apresentadas na Figura 4.11(b) e sob condições de deformação plana (pl- $\epsilon$ ) com malha de 39 elementos e nós enriquecidos por funções polinomiais P1 e P2 (Figura 4.12(a)) e malha de 107 elementos enriquecido por funções P1 (Figura 4.12(b)) para 200 passos de carga.

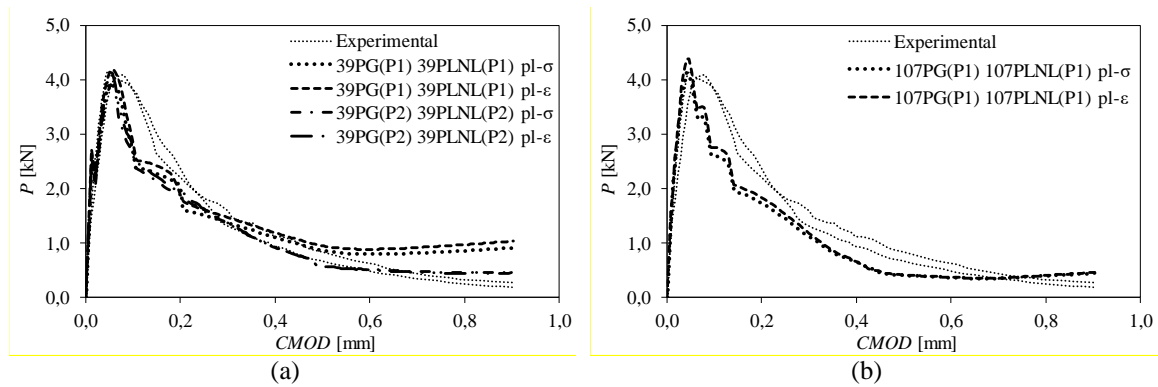


Figura 4.12 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  experimentais, simuladas pelo  $MEFG^{g-1}$  sob condições de tensão e deformação plana com 200 passos de carga para malha com; (a) 39 e; (b) 107 elementos.

Observa-se nas curvas da Figura 4.12 o comportamento similar desde a carga máxima até a região de amolecimento em todas as simulações sob condições de tensão e deformação plana nas mesmas malhas e enriquecimentos. A  $TPB$  continuará a ser simulada sob condição de tensão plana, uma vez que nos trabalhos de Evangelista Jr *et al.* (2013a) e Park *et al.* (2008) simularam a  $TPB$  sob estado plano de tensão.

Os resultados apresentados da estratégia proposta nesta seção foram verificados com a solução do MEF $G$  convencional e validados com resultados experimentais. A metodologia do  $MEFG^{g-1}$  trabalha de forma consistente na formulação, implementação e abordagem de aplicação com relação à passagem da variável escalar de dano e construção numérica das funções de enriquecimento global local entre o PLNL e o problema global.



### 4.2.3 Análise do tipo de entalhe no problema global, refinamento- $p$ , número de iterações e graus de liberdade total

As simulações propostas nesta seção consideram o PLNL uma porção da *TPB* (14% da área total do problema global) em dois cenários. O primeiro com a presença do entalhe de maneira explícita nos problemas global e local. Considera-se para essa simulação a malha com 101 elementos para o problema global e na região central é definido o PLNL discretizado por 67 elementos como pode ser visualizado na Figura 4.13. O PGEL é simulado na mesma malha do PGIL conforme Figura 4.13(a) e (c), entretanto os nós enriquecidos com as funções global local no PGEL são os nós pretos adicionados na região central da Figura 4.13(c).

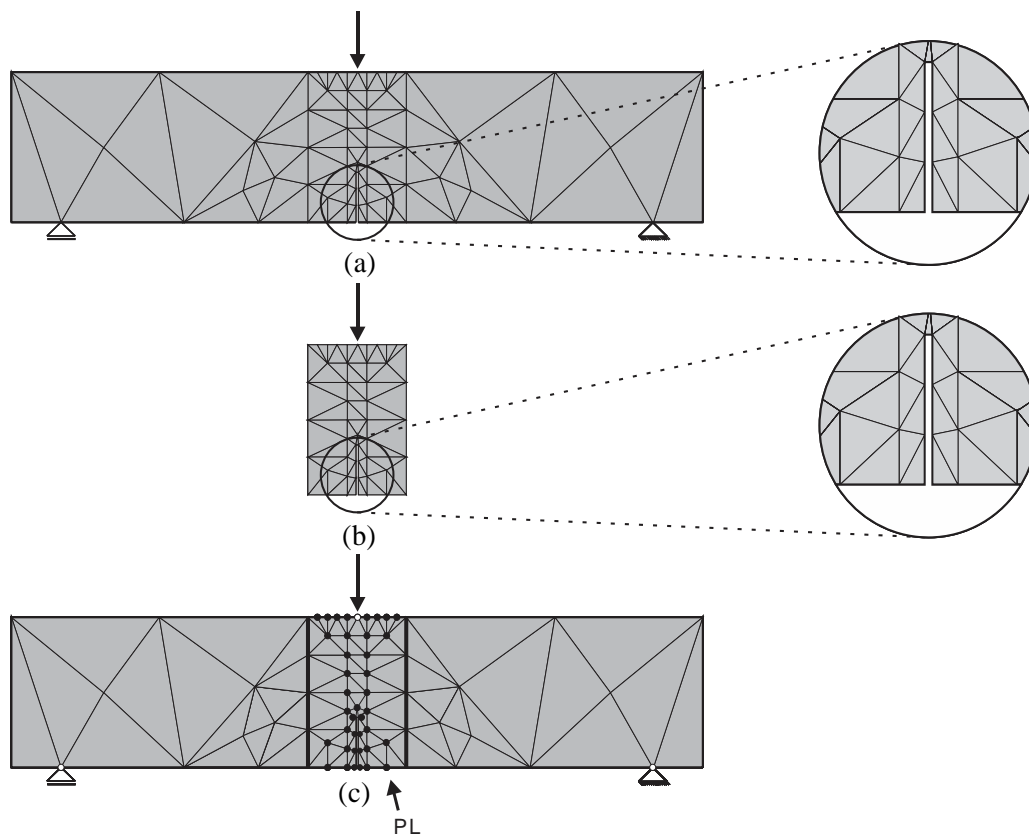


Figura 4.13 – Malhas utilizadas na simulação do  $MEFG^{g-l}$  com entalhe explícito; (a) PGIL com 101 elementos; (b) PLNL com 67 elementos; (c) PGEL com 101 elementos.

No segundo cenário o entalhe é modelado de maneira implícita no problema local, por meio da função de enriquecimento descontínua Heaviside e o problema global não apresenta entalhe. Considera-se uma malha com 107 elementos para o problema global e 73 elementos para o PLNL como pode ser visualizado na Figura 4.14. A Figura 4.14(c) mostram os nós enriquecidos com as funções global local (nós pretos).

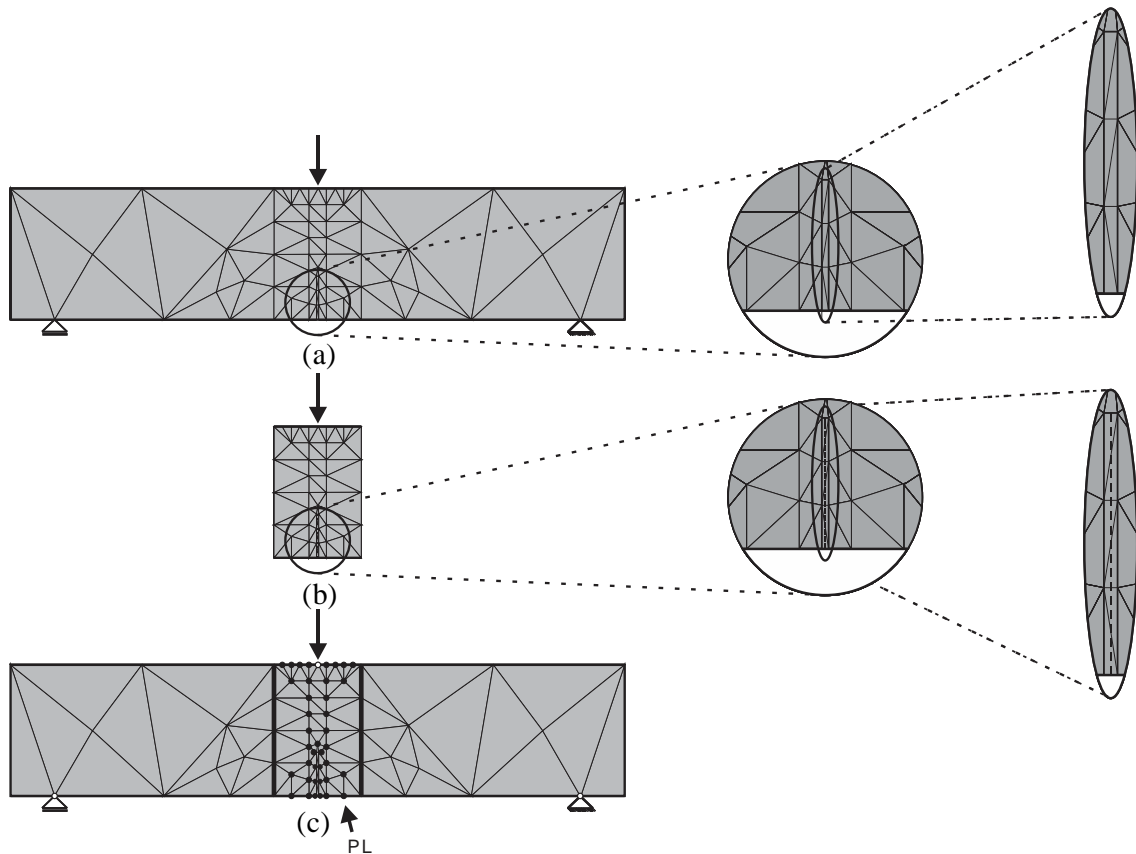


Figura 4.14 – Malhas utilizadas na simulação do MEFG<sup>g-1</sup>; (a) PGIL com 107 elementos; (b) PLNL com 73 elementos com entalhe implícito; (c) PGEL com 107 elementos.

Nas curvas da Figura 4.15 é mostrada a variação da força  $P$  em função do  $CMOD$  das soluções experimentais e do MEFG<sup>g-1</sup> com adição das funções de enriquecimento polinomiais P0, P1 e P2 para a primeiro cenário. Neste cenário simula-se com 50 (Figura 4.15(a)) e 200 (Figura 4.15(b)) passos de carga. Além do mais é mostrado uma solução do MEFG convencional com enriquecimento polinomial P2 discretizado pela mesma malha do PGIL/PGEL, no qual será tratado como parâmetro de referência.

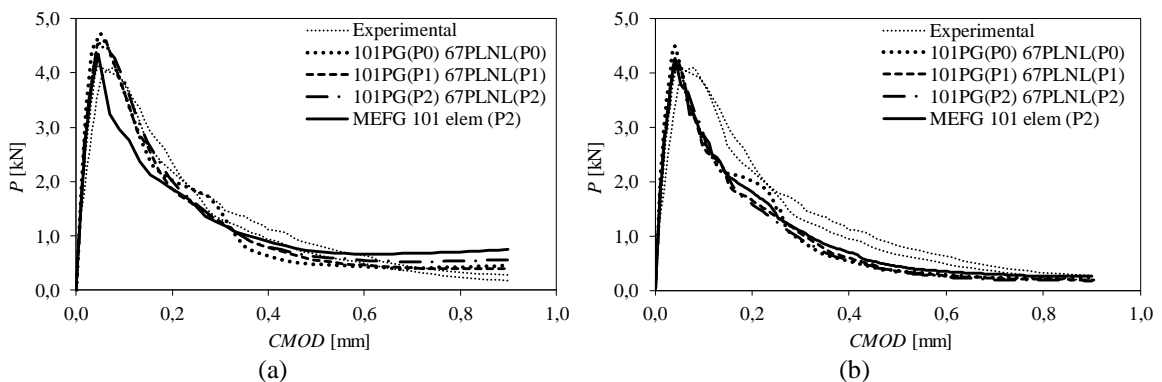


Figura 4.15 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução experimental, MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> com 101 elementos no problema global e 67 elementos no PLNL; (a) 50 passos de carga; (b) 200 passos de carga.

Nas Figura 4.16 são visualizados para o segundo cenário as curvas simuladas pelo  $MEFG^{g-1}$  com adição das funções de enriquecimento polinomiais P1 e P2 com 50 (Figura 4.16(a)) e 200 passos de carga (Figura 4.16(b)). A solução do MEFG convencional com enriquecimento polinomial P2 é adicionada como parâmetro de referência.

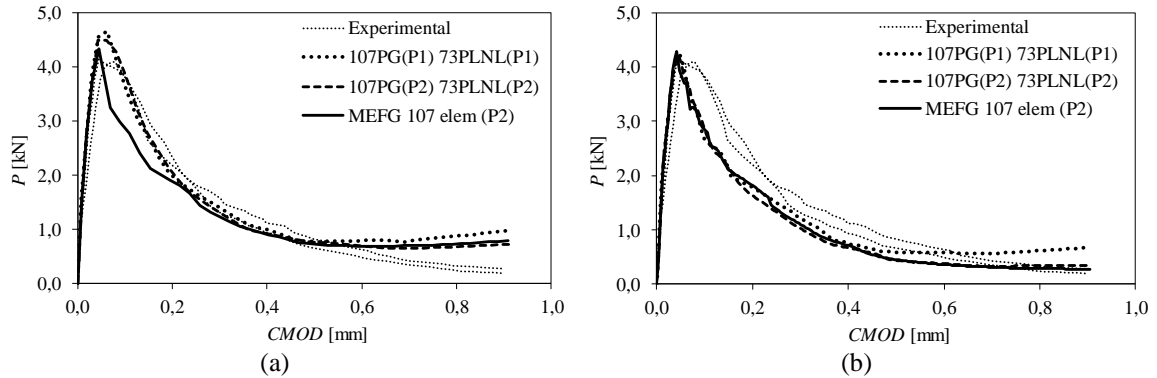


Figura 4.16 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução experimental, MEFG e  $MEFG^{g-1}$  com 107 elementos no problema global e 73 elementos no PLNL; (a) 50 passos de carga; (b) 200 passos de carga.

Em ambos os cenários se observa uma melhora nas soluções do  $MEFG^{g-1}$  quando aumenta o número de passos de carga, no qual consegue representar de maneira precisa e consistente o comportamento da solução experimental e a solução de referência, o que leva as simulações com 200 passos a escolhida para as simulações desta seção.

Nas curvas da Figura 4.15(b) e Figura 4.16(b) observam-se uma melhora de  $P_{máx}$  à medida que se adicionam funções de enriquecimento polinomiais aos nós. Os resultados também mostram que o método proposto fornece soluções similares com as duas estratégias adotadas para modelar o entalhe. Novamente, a pequena diferença entre as simulações e os resultados experimentais pode ser atribuída à dispersão natural entre as amostras e à variação estatística das propriedades de fratura e resistência da literatura (Roesler *et al.*, 2007a).

Um dos principais pressupostos do  $MEFG^{g-1}$  aqui proposto é que o trabalho relativo do resíduo calculado por meio da Equação (2.30) em cada passo de carga ( $Np$ ) esteja dentro dos limites de tolerância usuais na prática. A Figura 4.17 mostra o trabalho relativo do resíduo com enriquecimentos P2 nos dois cenários.

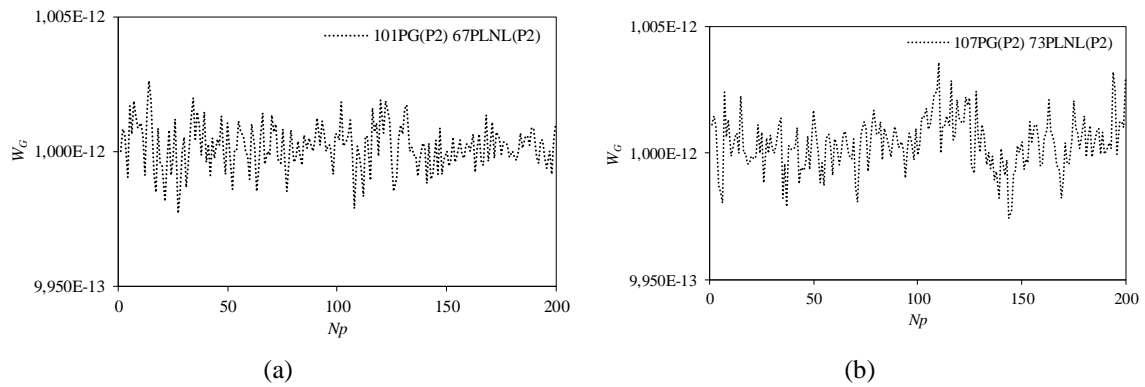


Figura 4.17 – Trabalho relativo do resíduo dos modelos com; (a) entalhe explícito; (b) entalhe implícito.

Pode-se notar que  $W_G$  flutua em torno da ordem de  $10^{-12}$ , o que leva a estar dentro de tolerâncias usadas na prática como descrito em Kim e Duarte (2015). Esses resultados demonstraram a ideia proposta de que os problemas globais não requerem iterações não-lineares como o problema local.

A Tabela 4.3 mostra o NGL para simular o primeiro passo de carga nas simulações do MEFG, do  $\text{MEFG}^{g-1}$  para enriquecimentos polinomiais P2 visualizados na Figura 4.15(b) e Figura 4.16(b). Observa-se que o MEFG convencional tem apenas NGL relacionado a um problema global, que é a única escala que essa abordagem resolve. Por outro lado, o  $\text{MEFG}^{g-1}$  têm NGL adicionais devido o PLNL e o PGEL. O PGEL possui um número ligeiramente superior nos graus de liberdade do que o PGIL devido as funções global local aplicadas aos nós enriquecidos. Embora o  $\text{MEFG}^{g-1}$  tenha mais graus de liberdade do que o MEFG é importante observar que o processo iterativo não linear ocorre apenas no PLNL (412 ou 428 graus de liberdade) para o  $\text{MEFG}^{g-1}$ , enquanto o solucionador não-linear para o MEFG convencional responde por (676 ou 692 graus de liberdade).

Tabela 4.3 – Graus de liberdade usados no primeiro passo de carga para MEFG e  $\text{MEFG}^{g-1}$ .

Problema	PGIL	PLNL	PGEL
MEFG 101 elem (P2)	676	-	-
101PG(P2) 67PLNL(P2)	676	412	754
MEFG 107 elem (P2)	692	-	-
107PG(P2) 73PLNL(P2)	676	428	754

Na Figura 4.18 mostra-se o número de iterações não lineares ( $N_{it}$ ) em função do número do passo ( $N_p$ ) ao longo de toda a simulação não linear para o domínio global no MEFG e o PLNL no  $\text{MEFG}^{g-1}$ , ambos enriquecidos com funções P2.

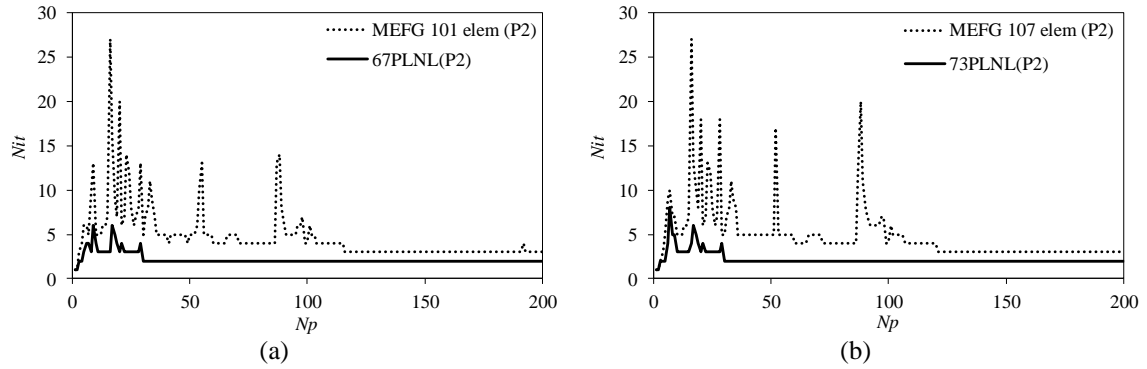


Figura 4.18 – Número de iterações em função do número do passo para; (a) MEFG 101 ele (P2) e 67PLNL(P2) com entalhe explícito; (b) MEFG 107 ele (P2) e 73PLNL(P2) com entalhe implícito.

Da Figura 4.18 nota-se uma convergência mais rápida na simulação do PLNL ao longo dos passos de carga do que no MEFG nos dois cenários. Isso se deve ao PLNL ter um domínio em torno de 14% do problema global onde o processo iterativo ocorre. O *Nit* na simulação do MEFG é elevado, pois o processo iterativo ocorre no domínio completo mesmo que a região de interesse em que ocorre o dano seja uma pequena parcela o que dificulta a convergência do MEFG.

Na Figura 4.19 são mostrados os NGL totais considerando todas iterações e passos de carga da simulação pelo MEFG e  $MEFG^{s-1}$ , por meio do PGIL, PLNL e PGEL, mostrado na Tabela 4.3 e Figura 4.18. No  $MEFG^{s-1}$  o NGL total é determinado pela soma entre os graus de liberdade do PGIL no primeiro passo, com os graus de liberdade do PLNL em todas as iterações, juntamente com os graus de liberdade do PGEL em todos os passos. Os NGL são empregados durante cada iteração para tarefas como montagem e resolução do sistema de equações. Portanto, o total de NGL representado por todas as iterações e de todas as etapas de carga é crucial para determinar o tempo de simulação e a eficiência de cada método.

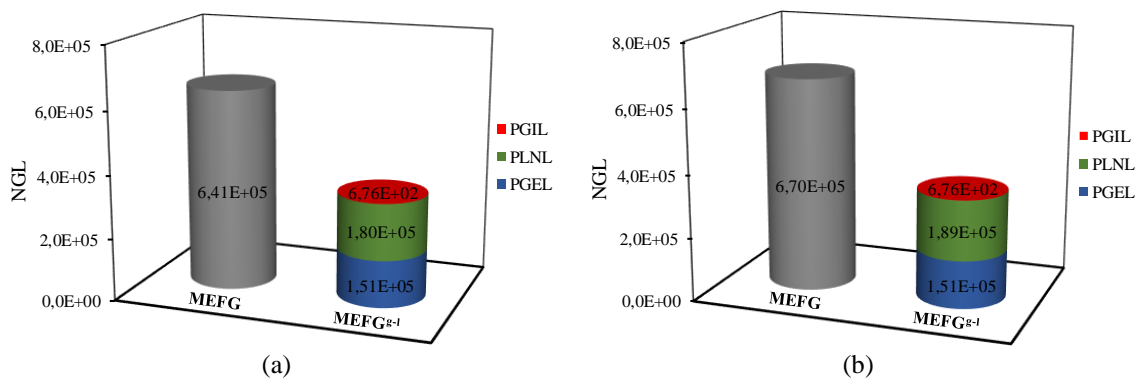


Figura 4.19 – Graus de liberdade totais para; (a) MEFG 101 elem (P2) e  $MEFG^{s-1}$  com 101PG(P2) 67PLNL(P2); (b) MEFG 107 ele (P2) e  $MEFG^{s-1}$  com 107PG(P2) 73PLNL(P2).

Observa-se que ao longo de todos os passos de carga o NGL no MEFG<sup>g-1</sup> foi bem menor que no MEFG, pois o PGIL emprega apenas uma iteração no passo de carga inicial e o PGEL emprega uma iteração para cada passo de carga e o processo iterativo ocorre no PLNL em cada passo de carga. Isso ocasiona ao longo de todos os passos essa grande diferença final no NGL total a favor do MEFG<sup>g-1</sup>, o que ocasiona a melhor escolha. A Figura 4.20 mostra a distribuição de dano na profundidade do ligamento da *TPB* do problema global na  $P_{máx}$  (passo 16) e no final da curva de amolecimento (passo 200). Pode-se observar na Figura 4.20(a) e (b) o entalhe explicitamente modelado no problema global, enquanto a Figura 4.20(c) e (d) não possui o entalhe modelado no problema global, uma vez que foi modelado implicitamente apenas no problema local.

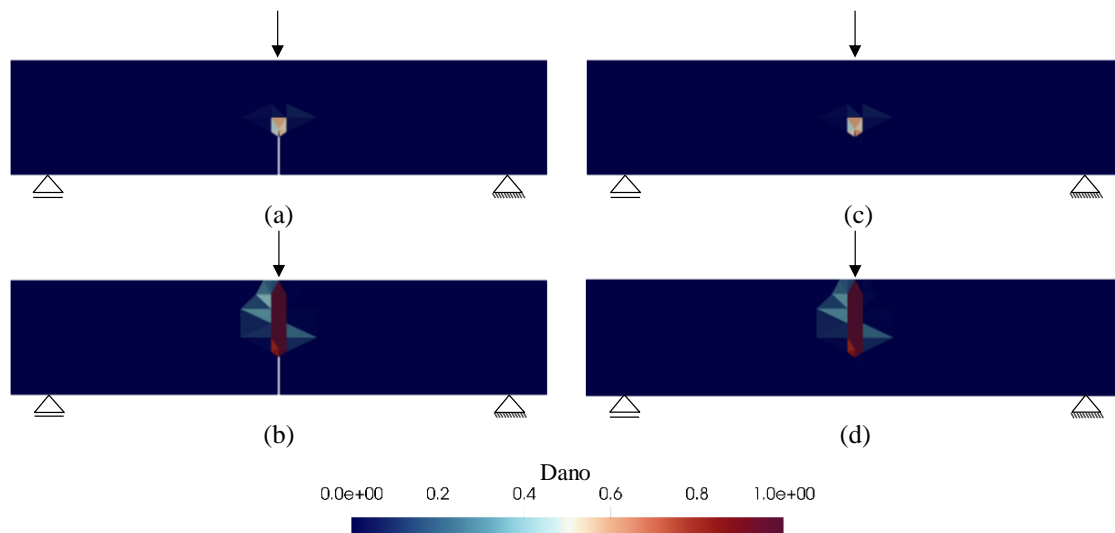


Figura 4.20 – Distribuição de dano na viga para os dois cenários do MEFG<sup>g-1</sup>: 101PG(P2) 67PLNL(P2) com entalhe explícito; (a) passo 16 e (b) passo 200; e 107PG(P2) 73PLNL(P2) com entalhe implícito (c) passo 16 e (d) passo 200.

Observa-se que a distribuição de dano é similar para os dois cenários de entalhe, assim conclui-se que o MEFG<sup>g-1</sup> tem habilidade para transferir precisamente os efeitos cinemáticos do entalhe modelado com enriquecimento Heaviside apenas no PLNL.

#### 4.2.4 Análise do tamanho do problema local e refinamento- $h$

Nas seções 4.2.2 e 4.2.3, a malha utilizada no PLNL para modelagem da característica de interesse (entalhe) possui apenas refinamento na ordem polinomial para melhora da qualidade da solução, ou seja, refinamento  $p$ . Nesta seção três PLNL de tamanhos diferentes são selecionadas com malhas escolhidas de maneira que se aumente apenas o número de elementos, ou seja, um refinamento  $h$ . O problema global é enriquecido por funções polinomiais P2 em todo o domínio, pois são funções que apresentaram

aproximações precisas nas seções anteriores. A trinca é modelada apenas nos PLNL de maneira implícita e no problema global não é modelada.

Na Figura 4.21 são mostradas as malhas utilizadas no PGIL e PGEL com 205 elementos, assim como as malhas utilizadas para os três PLNL, no qual possui respectivamente, 209, 425 e 641 elementos. Além disso os nós enriquecidos por funções global local (nós pretos) e os nós sem nenhum tipo de enriquecimento (nós brancos) são visualizados.

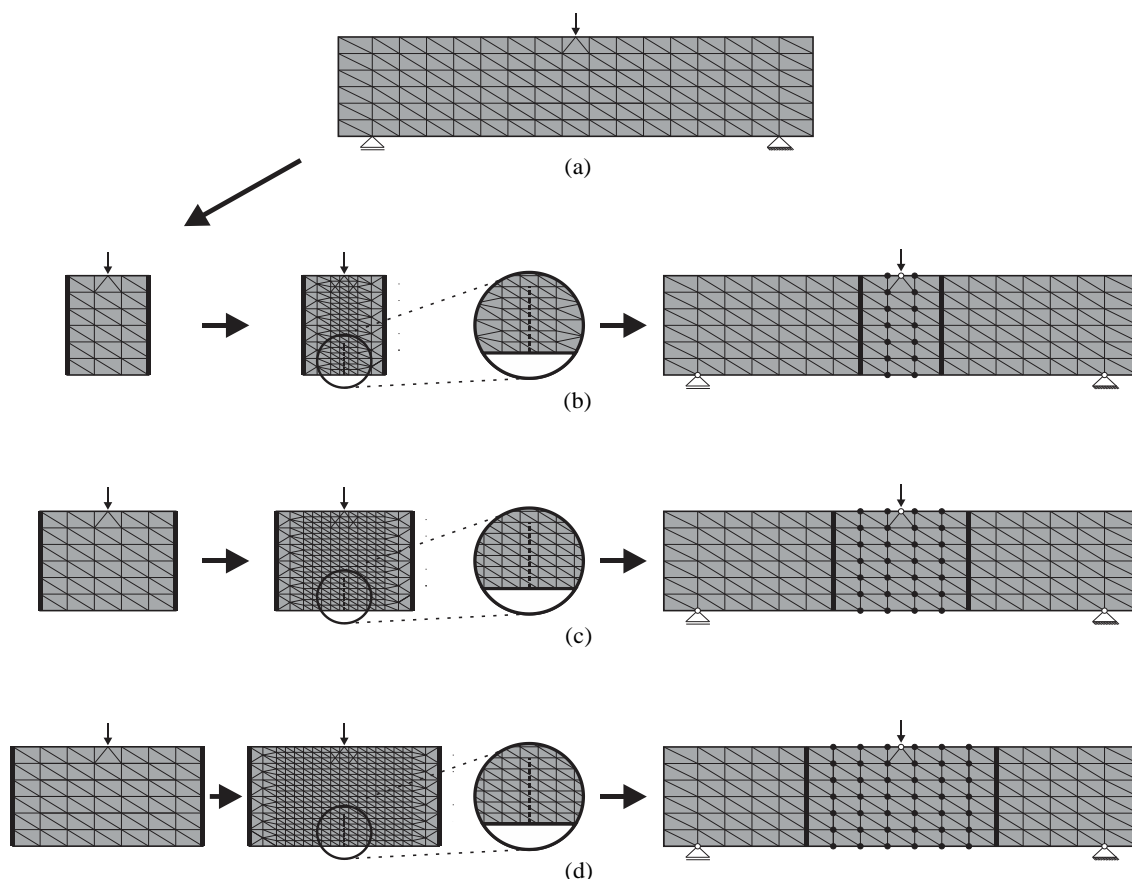


Figura 4.21 – Malhas utilizadas no PGIL, PLNL e PGEL; (a) 205 elementos no PGIL; (b) 209 elementos no PLNL e 14 nós com funções global local; (c) 425 elementos no PLNL e 28 nós com funções global local; (d) 641 elementos no PLNL e 42 nós com funções global local.

As malhas dos PLNL estão dispostas de tal forma que fiquem aninhadas no problema global, de maneira a facilitar na integração numérica nos elementos do PGEL. Uma vez que o processo de danificação ocorre apenas no PLNL, os elementos locais aninhados em um elemento global selecionado não atingem danificação em todos esses elementos. Isso resulta em diferenças elevadas na rigidez no mesmo elemento global em pontos próximos, nos quais alguns elementos locais são totalmente danificados e outros sem qualquer danificação.

Para solucionar esse inconveniente adota-se uma técnica que consiste em danificar o elemento global completo. A técnica está em função do número mínimo de elementos locais que inicia o dano ( $nelid$ ) e atravessa o elemento global e do número de elementos locais com danificação superior a 0,99, ou seja, totalmente danificado ( $neltd$ ) no elemento global. Nesse modelo, o dano se propagará no mínimo em três elementos locais ( $nelid \geq 3$ ) para que se danifique o elemento global completo, caso contrário o elemento global terá uma perda de rigidez localizada. O valor três diz respeito a quantidade de elementos locais necessários para atravessar de um elemento global para outro. Esse número escolhido deve-se ao fato da viga ser submetida a modo I de fratura, de modo que o dano se propagará na direção do ligamento da viga, no qual se inicia na ponta da trinca até o ponto de aplicação do deslocamento controlado. Nessa direção resulta em ter pelo menos três elementos locais danificados para o elemento global danificar em todo domínio.

A variável  $neltd$  é determinada, de forma que será realizado um estudo para cada uma das malhas do PLNL propostas, em que se analisará,  $neltd \geq 0, 1, nelid$ , sendo válido desde que  $nelid \geq 3$ . Para  $neltd \geq 0$ , implica que o elemento global danificará sem que nenhum elemento local esteja totalmente danificado e o maior valor encontrado será transferido para o elemento global. Para  $neltd \geq 1$ , apenas um elemento local estará totalmente danificado e essa variável escalar de dano será transferida para danificar o elemento global completo. Na última situação,  $neltd \geq nelid$ , pelo menos três elementos locais estarão totalmente danificados e o maior valor encontrado será transferido para o elemento global.

Nas curvas da Figura 4.22 são apresentadas as soluções experimentais, da simulação do MEFG e da estratégia do MEFG<sup>g-1</sup> que relacionam a força  $P$  em função do  $CMOD$  para as malhas locais com 209, 425 e 641 elementos, respectivamente, para  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq 0, 1$  e  $nelid$ . O  $CMOD$  é retirado dos deslocamentos inferiores do elemento global no qual a trinca implícita atravessa e pelo fato do dano atingir a faixa completa do elemento global.



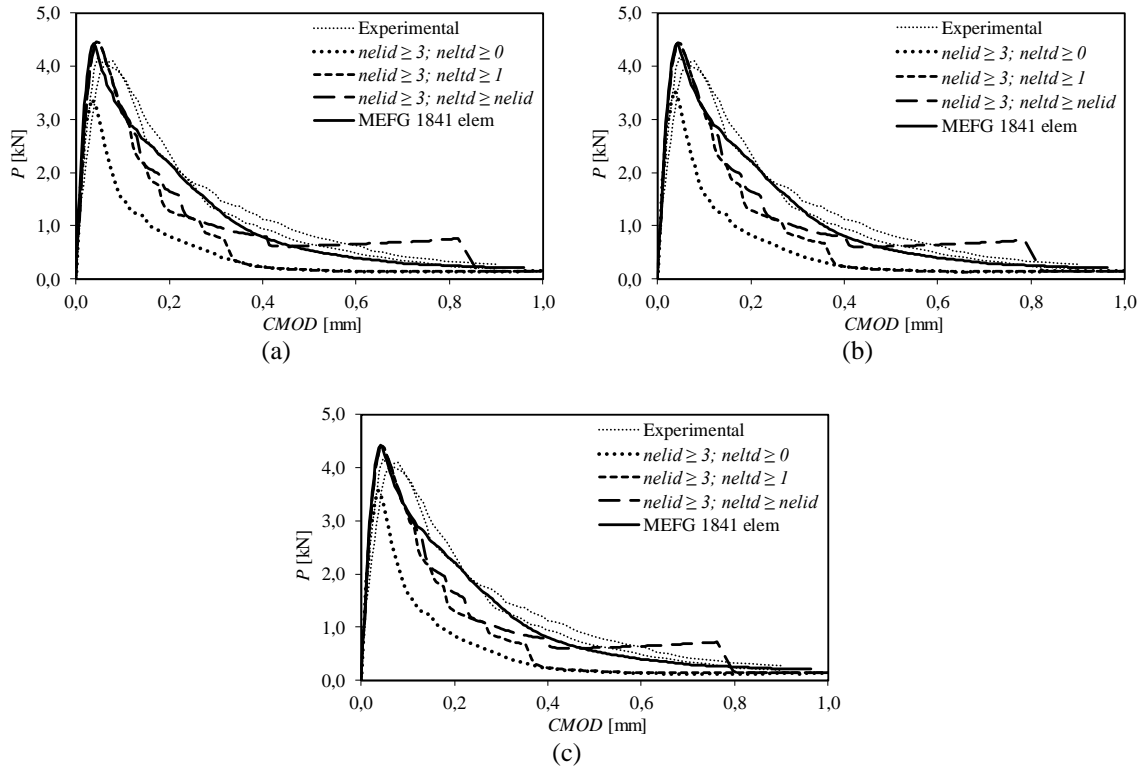


Figura 4.22 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução experimental, do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> com 205 elementos no problema global e; (a) 209 elementos no PLNL; (b) 425 elementos no PLNL e (c) 641 elementos no PLNL para  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq 0, 1$  e  $nelid$ .

Das curvas da Figura 4.22 conclui-se que independente da malha simulada observa-se que a partir de  $neltd \geq 1$ , o entorno de  $P_{m\acute{a}x}$  aproxima-se do obtido experimentalmente e do simulado pelo MEFG. Essa solução pelo MEFG possui em todo o seu domínio a mesma concentração de elementos da malha do PLNL (Figura 4.21), de modo a possuir 1841 elementos. Observa-se que a região de *softening* das curvas possui um comportamento não suave, porém já esperado, pois na região do ligamento da viga acima da trinca possuem poucos elementos globais e chegam a perdas bruscas de rigidez. A partir das  $P_{m\acute{a}x}$  obtidas, o valor do erro relativo varia entre 5,79% e 7,12% em relação ao maior resultado experimental, porém possui uma diferença relativa entre 0,41% e 0,92% em comparação com a simulação pelo MEFG o que traduz numa consistente estratégia o MEFG<sup>g-1</sup>.

Observa-se da Figura 4.22 que as curvas representadas por  $neltd \geq nelid$  apresentam uma menor perda de rigidez brusca e melhor aproximação de  $P_{m\acute{a}x}$ , o que traduz a melhor opção a ser considerada nas análises adiante para cada malha local estudada. O trabalho relativo do resíduo ao longo dos passos de carga para  $neltd \geq nelid$  nas três malhas simuladas são mostrados na Figura 4.23.

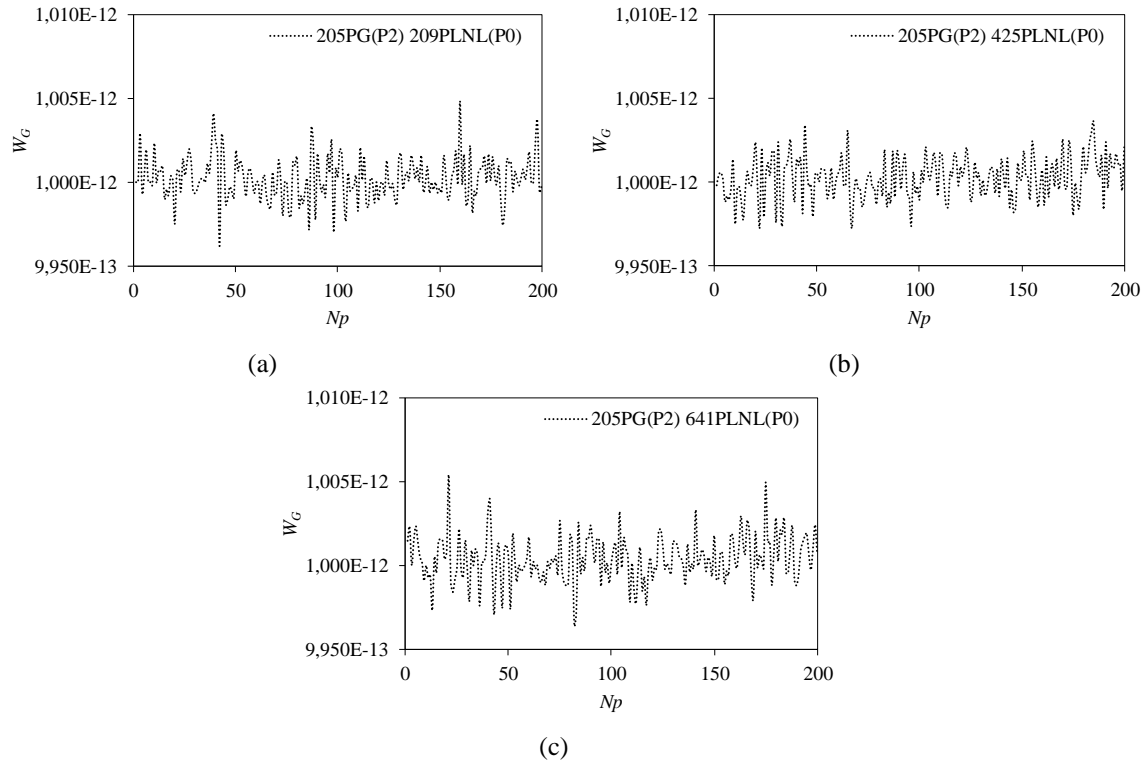


Figura 4.23 – Trabalho relativo do resíduo para; (a) 205PG(P2) 209PLNL(P0); (b) 205PG(P2) 425PLNL(P0); (c) 205PG(P2) 641PLNL(P0).

O valor de  $W_G$  para todas as malhas variam na ordem de  $10^{-12}$ , o que leva a não obrigatoriedade de iterações não lineares no problema global. Na Tabela 4.4 são mostrados o NGL utilizados para simulação do primeiro passo de carga para a simulação do MEF $G$  e MEF $G^{s-1}$  para  $neltd \geq nelid$  nos PLNL visualizados na Figura 4.22. O problema global é o mesmo para os três PLNL e são adicionadas funções de enriquecimento polinomiais P2 em todo o domínio.

Tabela 4.4 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF $G$  1841 elem e MEF $G^{s-1}$ .

<b>Problema</b>	<b>PGIL</b>	<b>PLNL</b>	<b>PGEL</b>
MEFG 1841 elem	2010	-	-
205PG(P2) 209PLNL(P0)	1246	266	1274
205PG(P2) 425PLNL(P0)	1246	494	1302
205PG(P2) 641PLNL(P0)	1246	722	1330

Na Tabela 4.4 observa o NGL da estratégia do MEF $G^{s-1}$  superior a simulação pelo MEF $G$  para o primeiro passo de carga. Isso se deve a estratégia global local ser necessário a resolução do PGIL, PLNL e PGEL e a simulação pelo MEF $G$  possuir graus de liberdade apenas na escala global. Mesmo com o maior NGL no MEF $G^{s-1}$ , o processo iterativo não linear ocorre apenas nos PLNL (266, 494 e 722 graus de liberdade) enquanto no MEF $G$  esse processo ocorre no seu domínio completo (2010 graus de

liberdade). Na Figura 4.24 são mostrados os  $Nit$  em relação ao  $Np$  ao longo de toda a simulação não linear para o domínio global no MEFG e os três PLNL apresentados no MEFG<sup>g-1</sup>.

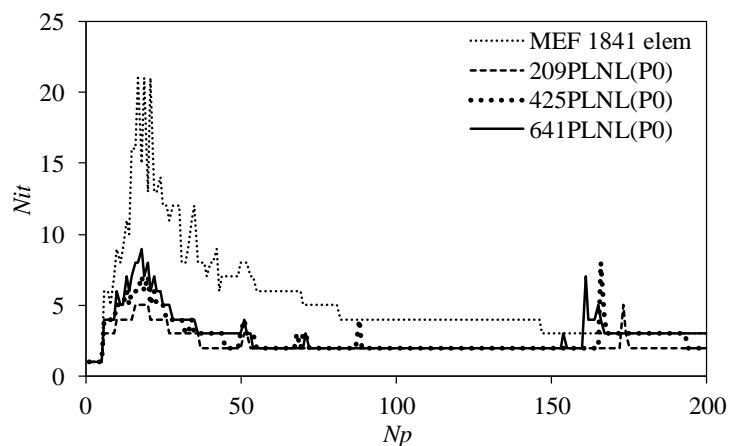


Figura 4.24 – Relação entre o  $Nit$  e  $Np$  para MEFG 1841 elem e MEFG<sup>g-1</sup> para 209PLNL(P0), 425PLNL(P0) e 641PLNL(P0).

Da Figura 4.24 observa-se uma convergência lenta ao longo de todos os passos de carga no MEFG em relação aos três PLNL. Isso se deve ao processo iterativo na simulação do MEFG ser aplicada a todo o domínio global, o que resulta num grande sistema não linear. Os três PLNL tem domínios menores com dimensões de 17%, 29% e 40% do problema global onde o processo iterativo ocorre e faz do entalhe implícito uma parcela relevante desse domínio, de modo a capturar sua solução com número reduzido de iterações. Além disso, observa-se que a malha com 209 elementos obteve o menor  $Nit$  e mesmo assim, a solução não linear da simulação foi precisa. Na Figura 4.25 são mostrados os NGL totais considerando todas iterações e passos de carga pelas simulações do MEFG e no PGIL, PLNL e PGEL da estratégia do MEFG<sup>g-1</sup> mostrado na Tabela 4.4 e Figura 4.24.

Observa-se na Figura 4.25 um aumento oneroso no NGL da simulação pelo MEFG ao longo de todos os passos de carga, pois o processo iterativo ocorre no domínio global da estrutura e o  $Nit$  é elevado. Na solução do MEFG<sup>g-1</sup> o processo iterativo acontece apenas no PLNL com poucas iterações e o PGIL emprega apenas uma iteração no passo de carga inicial e o PGEL também uma iteração, porém para cada passo, o que leva ao NGL menor. Outra razão para o NGL ser menor nas soluções pelo MEFG<sup>g-1</sup> está no enriquecimento polinomial ocorrer apenas no problema global, o que resulta em CC precisas para o PLNL.

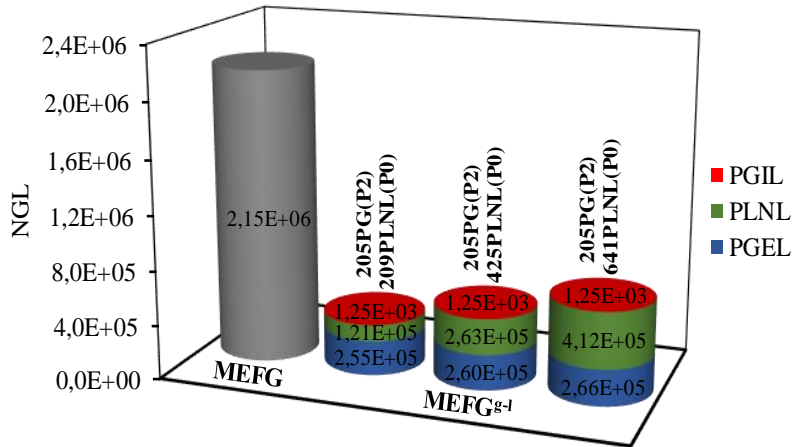


Figura 4.25 – Graus de liberdade totais para MEFG 1841 elem e MEFG<sup>g-1</sup> com 205PG(P2) 209PLNL(P0), 205PG(P2) 425PLNL(P0) e 205PG(P2) 641PLNL(P0).

Além disso, conclui-se que a solução com 209 elementos no PLNL é a melhor escolha, pois obteve soluções com a mesma precisão das outras duas malhas e utiliza apenas 17% do domínio global. Na Figura 4.26 visualiza-se a distribuição de dano do problema global e dos três PLNL da viga no passo de carga 30 onde o CMOD foi aproximadamente 0,12 mm.

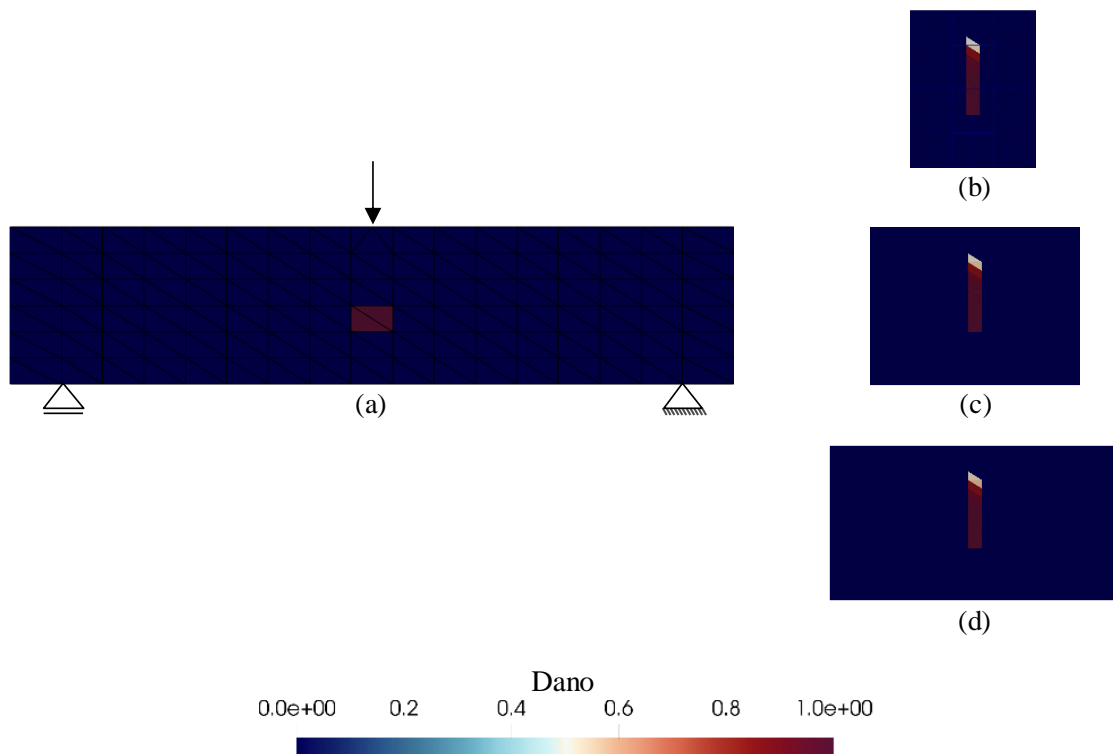


Figura 4.26 – Distribuição de dano na viga; (a) 205PG(P2); (b) 209PLNL(P0); (c) 425PLNL(P0) e; (d) 641PLNL(P0).

O dano se concentra na parte central da viga e propaga na direção do ligamento, que se inicia na ponta da trinca até o ponto de aplicação da força, pois a viga está submetida a modo I de fratura. O entalhe não foi considerado, pois é modelado implicitamente apenas no PLNL. Isso mostra a capacidade da simulação de modelos pelo  $MEFG^{g-1}$  mesmo sem a presença do entalhe no problema global e refinamento  $h$  no PLNL. O  $MEFG^{g-1}$  é satisfatório em problemas onde o PLNL representa uma pequena parcela dentro de um problema global, pois o NGL não aumenta de forma demasiada com as funções de enriquecimento global local.

## 5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO I DE FRATURA COM COMPÓSITO DE MATRIZ E INCLUSÕES

Neste capítulo são apresentados simulações que envolvem a *TPB* da seção 4.2, porém será introduzido na parte central da viga, materiais com diferentes propriedades mecânicas. Um controle de deslocamento na região central superior é empregado com um entalhe na parte inferior. No PLNL da *TPB* serão realizados dois refinamentos, no primeiro será empregado as funções de enriquecimento polinomiais P2, assim como no problema global. No segundo, o refinamento dar-se-á pelo aumento no número de elementos com o problema global enriquecido por funções P2 em todas as simulações. O modelo de dano com curva de amolecimento bilinear é empregado para simular o comportamento não linear dos materiais. Todas as soluções adquiridas das simulações propostas são comparadas com resultados do programa LACHESIS.

### 5.1 VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS HETEROGÊNEA (INCLUSÕES NA REGIÃO CENTRAL)

Neste modelo, cuja apresentação se faz pela Figura 5.1, simula-se a *TPB* com um entalhe geométrico na parte inferior. As inclusões com módulo de elasticidade  $E_1$  e a matriz com módulo de elasticidade  $E_2$  constituem essa viga como um material compósito heterogêneo.

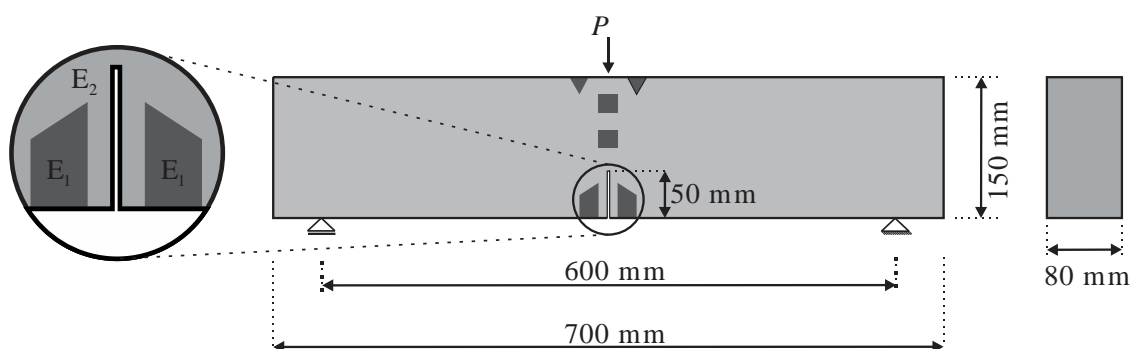


Figura 5.1 – Geometria, carregamento e CC da viga sob flexão em três pontos.

As propriedades relacionadas ao material e de fratura para a realização do ensaio numérico são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades de rigidez, resistência e de fratura da *TPB* heterogênea.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\nu$	$f_{t_1}$ (MPa)	$f_{t_2}$ (MPa)	$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\psi$
32			2,075				
160	32	0,20	4,15	4,15	164,0	56,7	0,25
3200			8,30				
			$\infty$				

Os valores para rigidez e resistência das inclusões variam de modo a se relacionarem entre si, nas relações,  $E_1 / E_2 = 1; 5; 100$  e  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . Nesta *TPB*, o objetivo será analisar as curvas relacionadas entre a força  $P$  em função do *CMOD*. Um controle de deslocamento foi aplicado no ponto de aplicação da força  $P$  também denominado como passo de carga. Em todas as simulações são aplicados 200 passos de carga, sob condições de tensão plana e a variável de controle é a deformação equivalente de Mazars.

## 5.2 ANÁLISE DO TIPO DE ENTALHE NO PROBLEMA GLOBAL, REFINAMENTO $p$ , NÚMERO DE ITERAÇÕES E GRAUS DE LIBERDADE TOTAL

O processo de simulação do MEF $g^{-1}$  para materiais com heterogeneidade na região de interesse se inicia com a resolução do PGIL homogêneo, com a consideração apenas das propriedades mecânicas da matriz. Na região central foi definido o PLNL com o entalhe, matriz e inclusões. O PGEL é resolvido com as informações das variáveis escalares de dano, da rigidez das inclusões  $E_1$  e da matriz  $E_2$ , de modo que a *TPB* seja uma viga compósita heterogênea, com o PGEL simulado na mesma malha do PGIL.

Nesta seção, o MEF $g^{-1}$  é relacionado para dois cenários, no primeiro cenário utilizam-se malhas com 101 elementos triangulares no PGIL e PGEL (Figura 5.2(a) e (c)) e malha com 67 elementos no PLNL (Figura 5.2(b)) e o entalhe é modelado de forma explícita em ambos. Os nós pretos são enriquecidos com funções global local no PGEL e os nós brancos não são enriquecidos (Figura 5.2(c)).

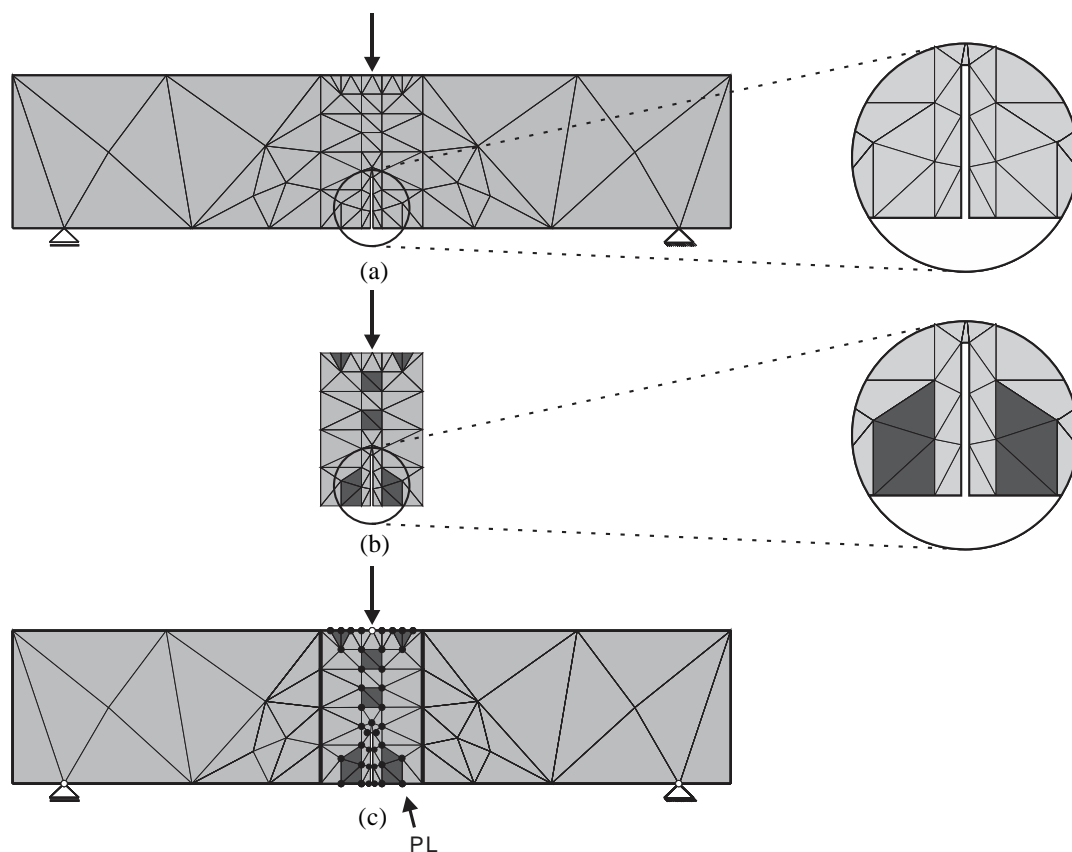


Figura 5.2 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL para viga compósita heterogênea com 101 elementos no problema global e 67 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

O segundo cenário utilizam-se malhas com 107 elementos triangulares no PGIL e PGEL (Figura 5.3(a) e (c)) e malha com 73 elementos no PLNL (Figura 5.3(b)). O entalhe é modelado apenas no PLNL de forma implícita como se visualiza na Figura 5.3(a) e (b).

Em ambos os cenários o problema global e o PLNL são refinados em todo domínio pela adição das funções de enriquecimento polinomial P2, pois obtiveram as melhores aproximações para a *TPB* na seção 4.2.3. As relações de rigidez  $E_1 / E_2 = 1; 5; 100$  e resistências  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$  são simuladas entre si combinando uma a uma dentro do PLNL, no qual transfere para o PGEL.



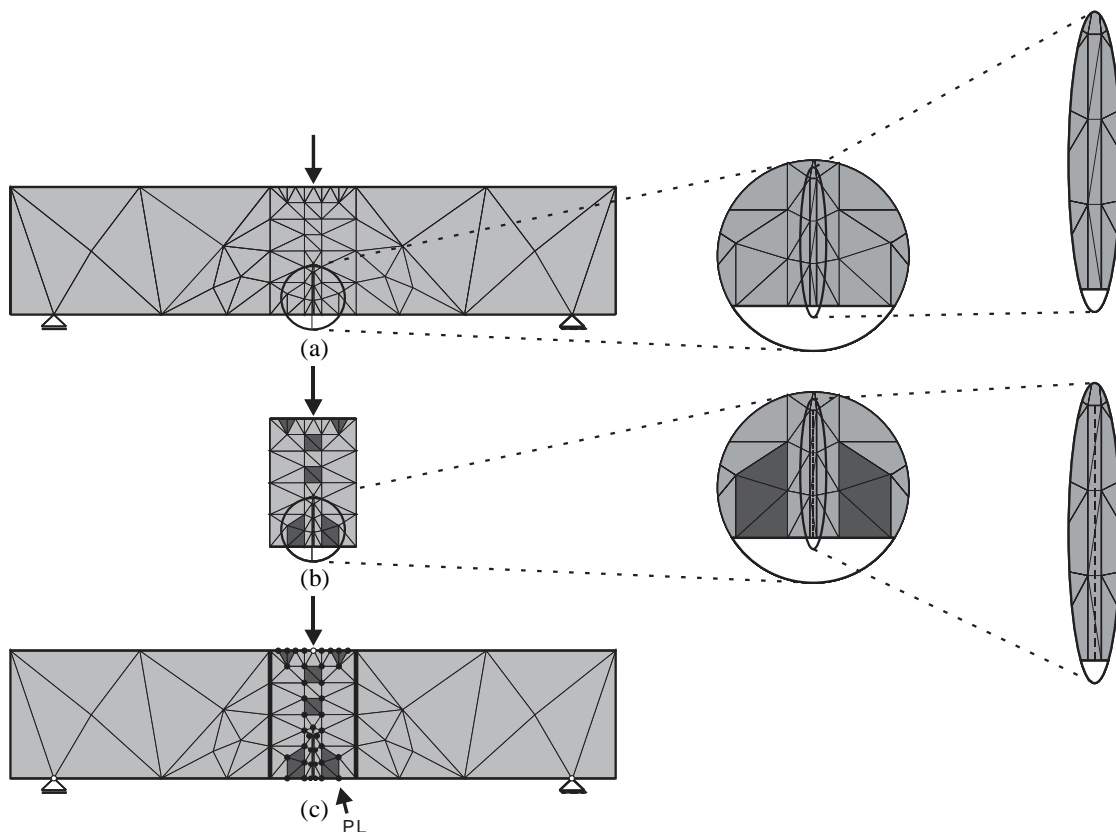


Figura 5.3 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL para viga compósita heterogênea com 107 elementos no problema global e 73 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL; (c) PGEL.

Na Figura 5.4 e Figura 5.5 observa-se a variação da força  $P$  em função do  $CMOD$  das soluções do  $MEFG^{g-1}$  dos dois cenários, respectivamente para  $E_1 / E_2 = 1$  e resistências com variação  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . Nas curvas da Figura 5.6 e Figura 5.7 são apresentadas as soluções do  $MEFG^{g-1}$  para as relações,  $E_1 / E_2 = 5$  e  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$  e nas curvas da Figura 5.8 e Figura 5.9 são simulados para as relações  $E_1 / E_2 = 100$  e  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . Além disso, mostra-se uma solução do  $MEFG$  com enriquecimento polinomial P2, com a mesma malha do PGIL dos respectivos cenários e relações heterogêneas de rigidez e resistências do PLNL, no qual são utilizados como soluções de referência.

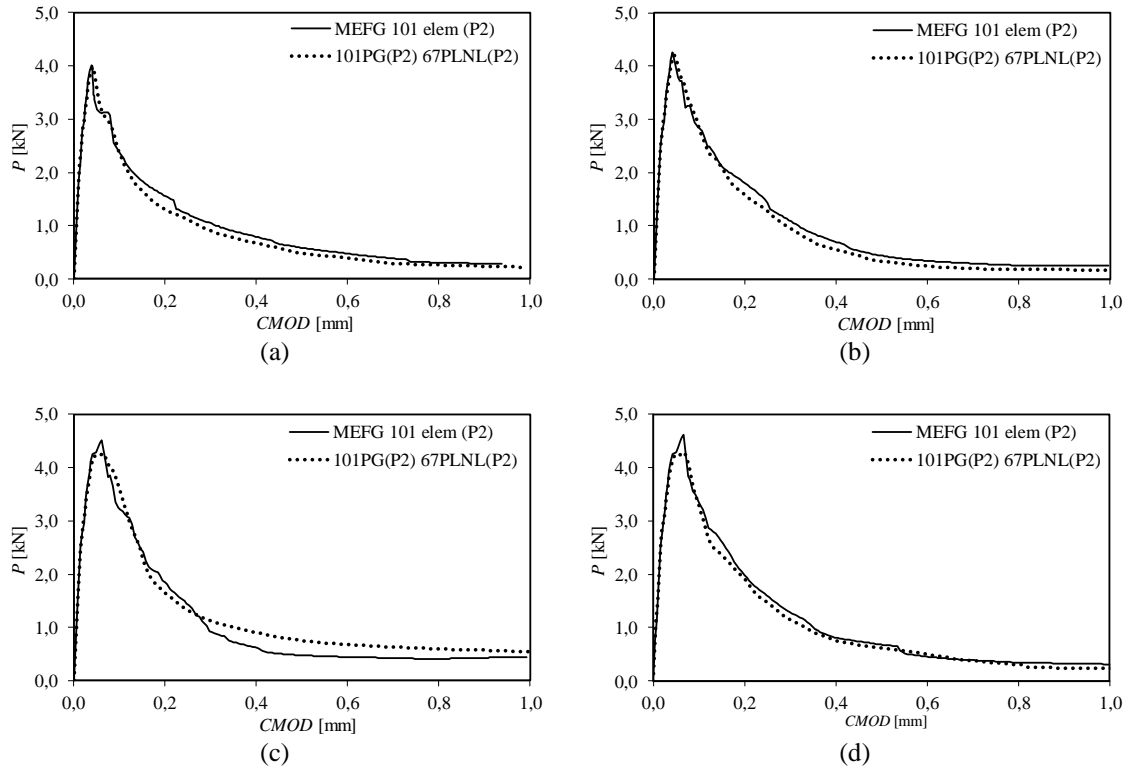


Figura 5.4 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1/E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

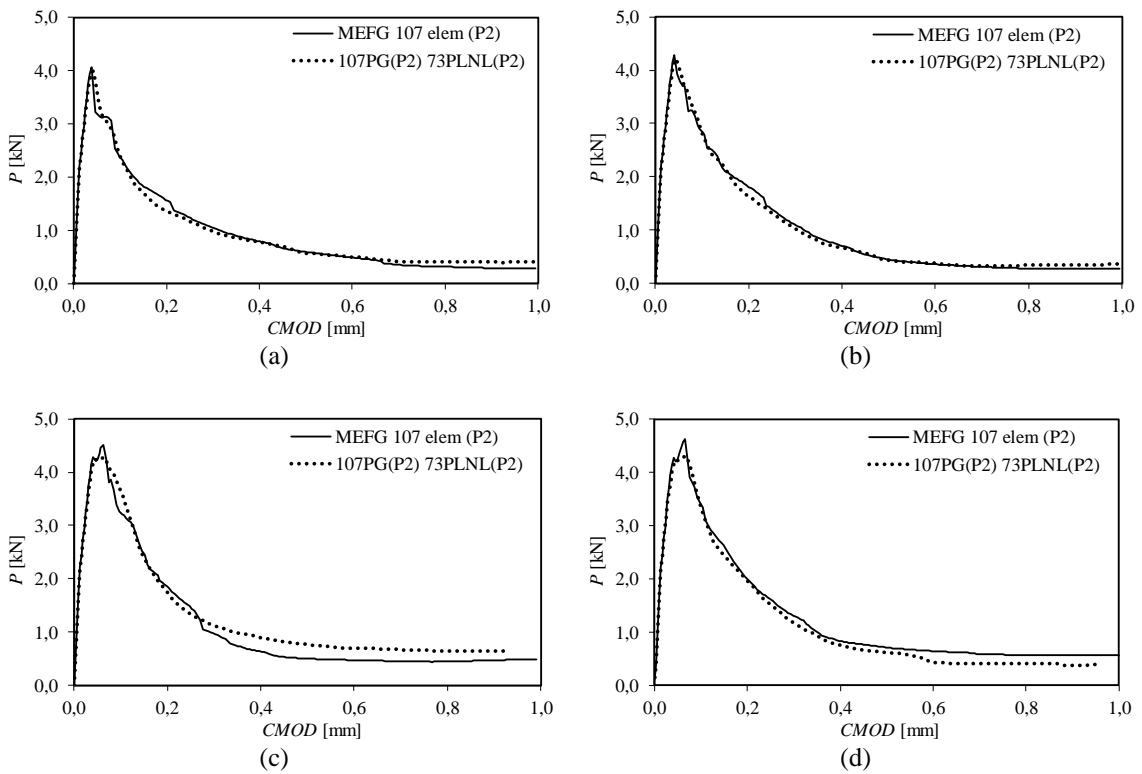


Figura 5.5 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1/E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

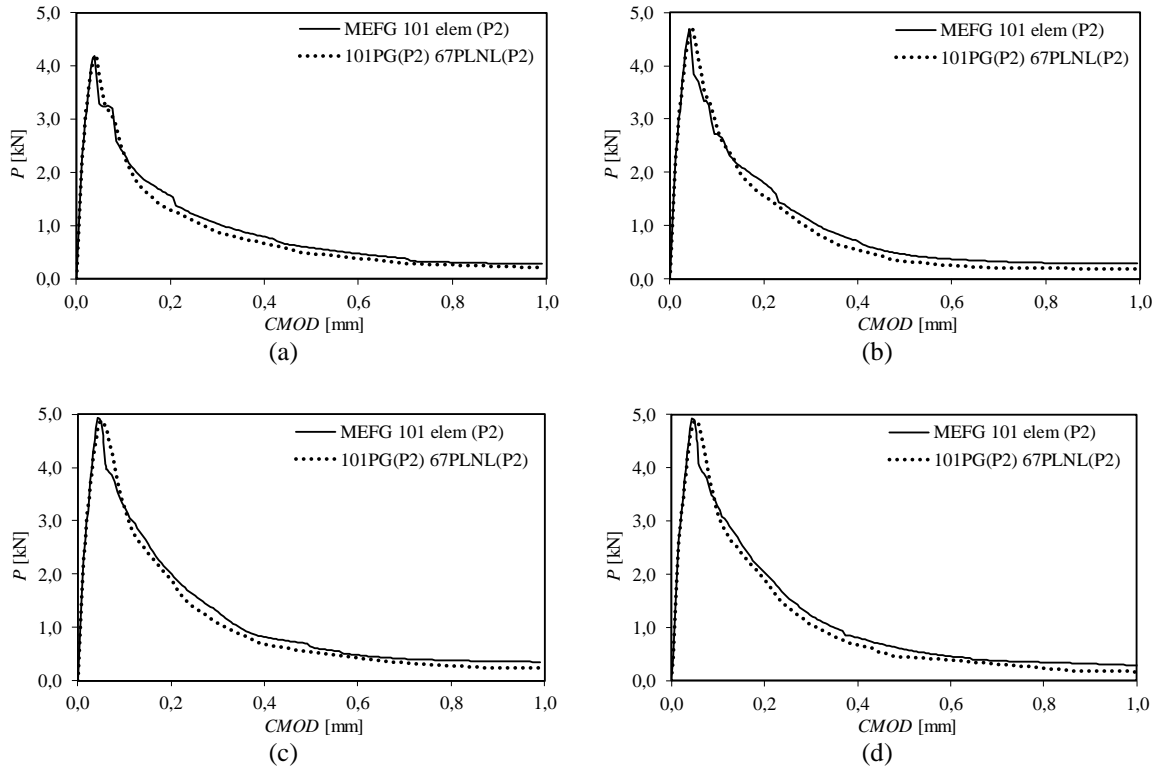


Figura 5.6 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1/E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

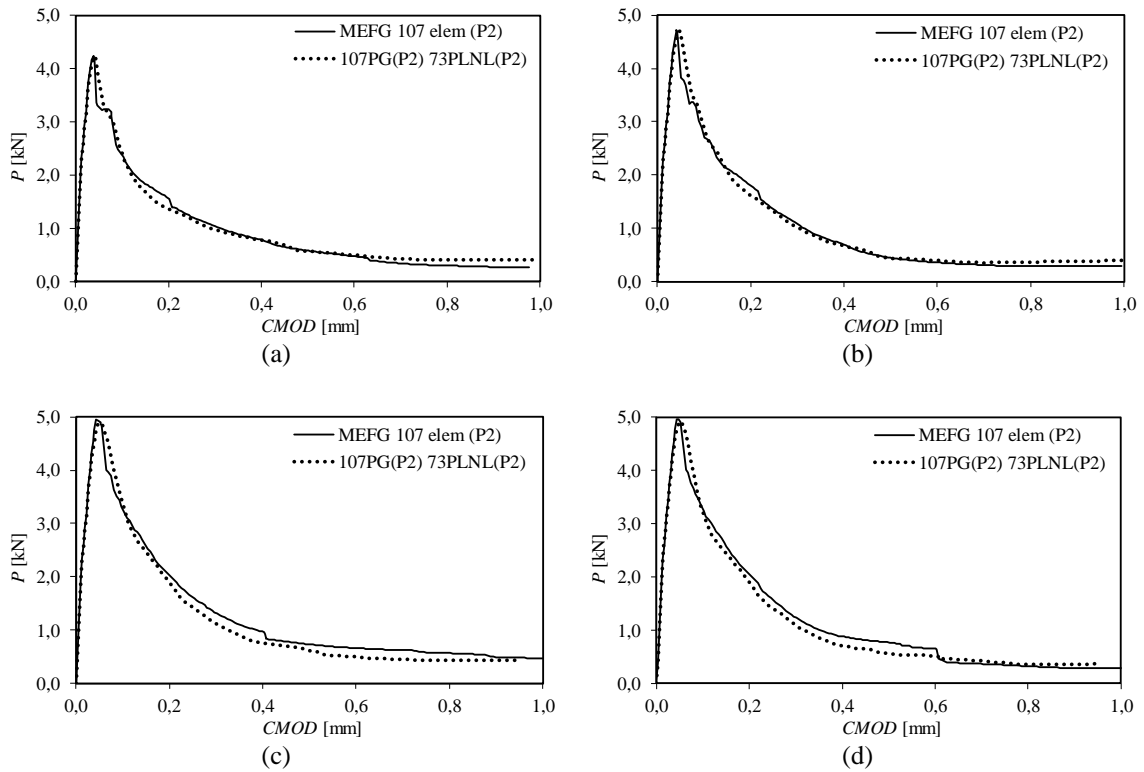


Figura 5.7 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1/E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

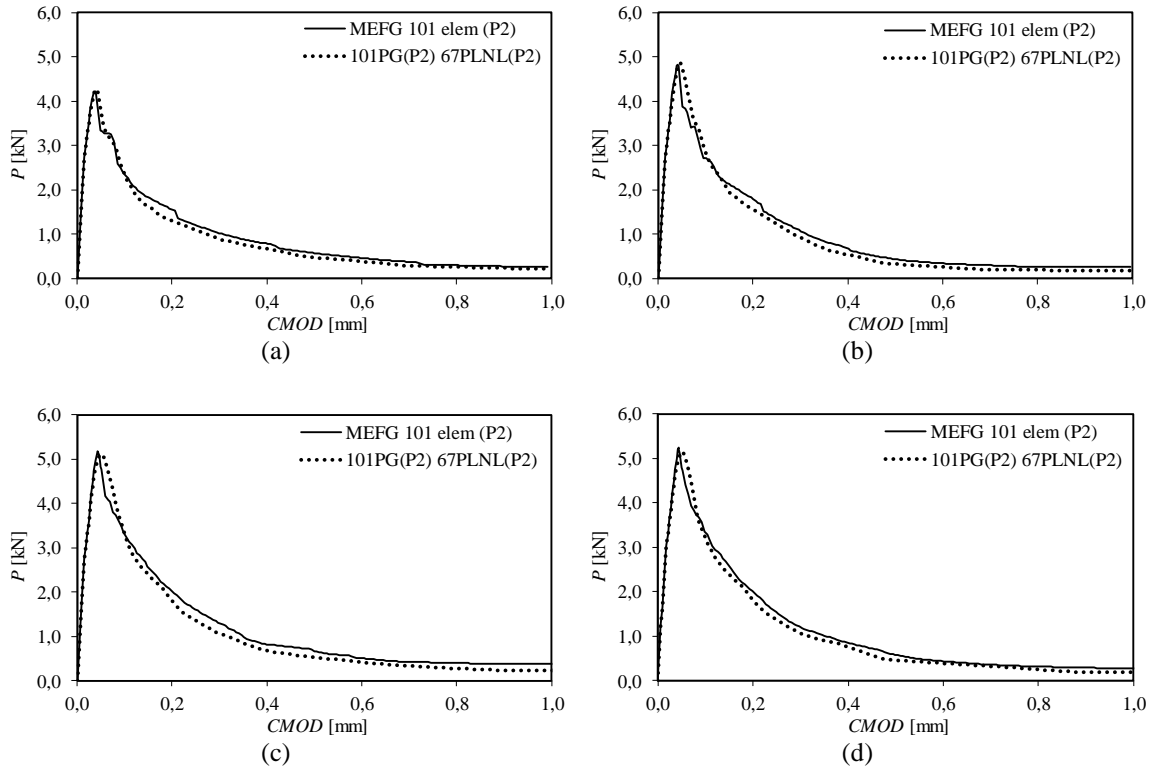


Figura 5.8 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do primeiro cenário simulado para  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

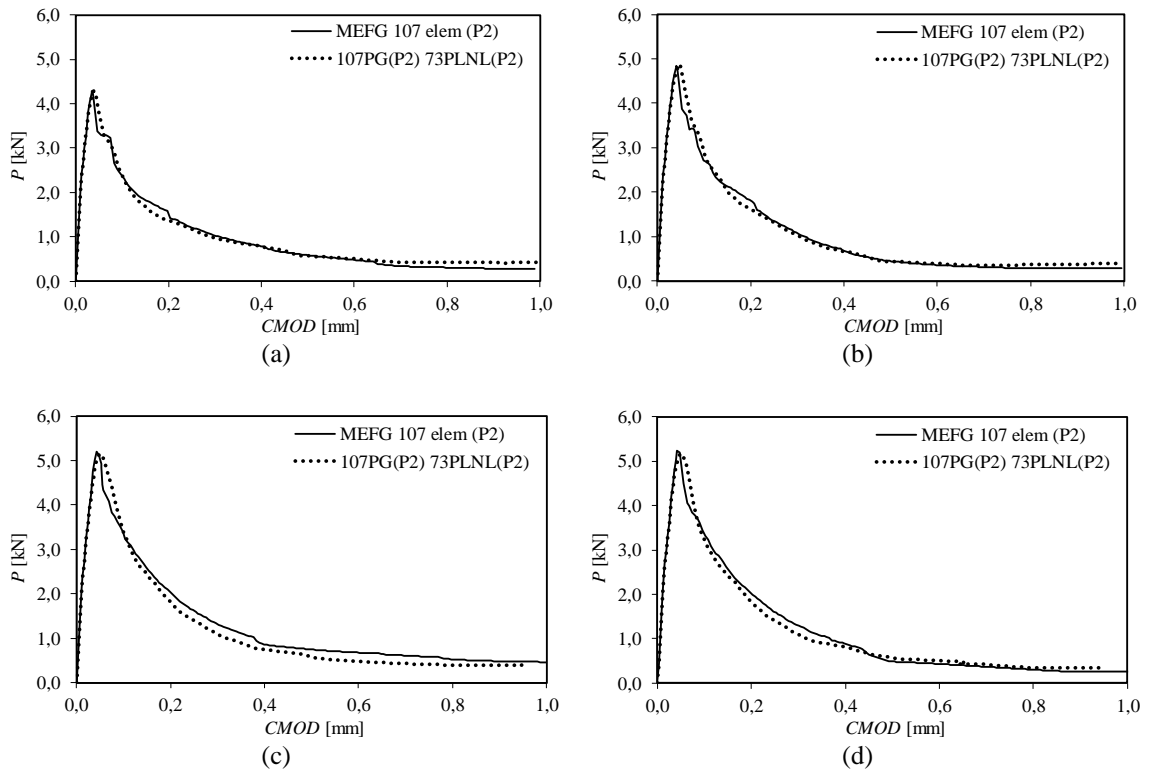


Figura 5.9 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> do segundo cenário simulado para  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

Das curvas da Figura 5.4 à Figura 5.9 pode-se concluir que as soluções do MEFG<sup>g-1</sup> em ambos os cenários corroboram com o comportamento das curvas das simulações do MEFG convencional. Isso acontece mesmo com problema global diferente do PLNL e o domínio local possuir um entalhe modelado por uma trinca implícita e o problema global não possuir trinca como no segundo cenário. Em todas as curvas observa-se que à medida que  $f_{t_1} / f_{t_2}$  aumenta de 0,5 para  $\infty$ , o valor de  $P_{máx}$  aumenta, tornando a estrutura mais resistente, pois as inclusões alcançam uma resistência à tração maior em relação a matriz. Isso leva a necessidade de ter um esforço maior na estrutura, pois a região onde a resistência à tração será superada se reduz apenas para a matriz, no qual se propagará a danificação. Outra observação está na relação  $E_1 / E_2$ , que aumenta o valor de  $P_{máx}$  à medida que a relação aumenta de 1 até 100, uma vez que as inclusões se tornam mais rígidas. Isso leva a necessidade de valores de carga maiores para que as tensões solicitantes superem a resistência à tração dos materiais e se inicie a danificação.

A Tabela 5.2 retrata os valores da  $P_{máx}$  das simulações realizadas pelo MEFG<sup>g-1</sup> para o primeiro cenário e as respectivas diferenças relativas ( $d_r$ ) em função da carga máxima retirada dos respectivos ensaios numéricos.

Tabela 5.2 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> juntamente com os respectivos  $d_r$  com 101 elementos no problema global e 67 no PLNL.

$f_{t_1} / f_{t_2}$	$E_1 / E_2 = 1$			$E_1 / E_2 = 5$			$E_1 / E_2 = 100$		
	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$
0,5	4,02	3,97	1,14	4,19	4,21	0,44	4,22	4,26	1,04
1	4,26	4,21	1,20	4,69	4,70	0,22	4,82	4,86	0,81
2	4,52	4,26	5,63	4,93	4,88	0,99	5,17	5,11	1,10
$\infty$	4,62	4,28	7,34	4,94	4,90	0,67	5,24	5,16	1,46

Na Tabela 5.3 também são mostrados os valores da  $P_{máx}$  das simulações realizadas pelo MEFG<sup>g-1</sup>, porém para o segundo cenário.

Tabela 5.3 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> juntamente com os respectivos  $d_r$  com 107 elementos no problema global e 73 no PLNL.

$f_{t_1} / f_{t_2}$	$E_1 / E_2 = 1$			$E_1 / E_2 = 5$			$E_1 / E_2 = 100$		
	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$
0,5	4,06	4,00	1,45	4,24	4,23	0,21	4,29	4,28	0,19
1	4,28	4,21	1,68	4,71	4,70	0,38	4,85	4,88	0,54
2	4,51	4,28	5,16	4,95	4,91	0,98	5,21	5,15	1,10
$\infty$	4,63	4,31	6,98	4,96	4,93	0,63	5,24	5,19	1,00

A partir das  $P_{m\acute{a}x}$  mostradas nas tabelas, constata-se uma precis\~ao na solu\~ao do MEF $G^{g-1}$  em rela\~ao as solu\~oes num\~ericas do MEF $G$  convencional correspondente. As diferen\~as encontradas nos dois cen\~arios s\~ao em torno de 1%, com exce\~ao para  $E_1 / E_2$  igual a 1 e  $f_{t_1} / f_{t_2}$  acima de 2. Esta diferen\~a est\~a dentro da faixa toler\~avel, visto que o comportamento das curvas s\~ao reproduzidos de forma suave no MEF $G^{g-1}$ , o que nas mesmas condi\~oes no MEF $G$  n\~ao se consegue em volta da  $P_{m\acute{a}x}$ . Isso acontece, pois, o processo iterativo abrange a escala global na simula\~ao pelo MEF $G$ , o que dificulta na converg\~encia. O trabalho relativo do res\~duo de todas as simula\~oes apresentadas com diferentes rela\~oes de rigidez e resist\~encia ao longo dos passos de carga encontram-se no ap\~endice, em que se conclui que o problema global pode ser resolvido de maneira linear. Na Tabela 5.4 s\~ao mostrados o NGL utilizados para simula\~ao do primeiro passo de carga no MEF $G$  e no MEF $G^{g-1}$  nos dois cen\~arios.

Tabela 5.4 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF $G$  e MEF $G^{g-1}$ .

<b>Problema</b>	<b>PGIL</b>	<b>PLNL</b>	<b>PGEL</b>
MEFG 101 elem (P2)	676	-	-
101PG(P2) 67PLNL(P2)	676	412	754
MEFG 107 elem (P2)	692	-	-
107PG(P2) 73PLNL(P2)	676	428	754

Apesar do MEF $G^{g-1}$  possuir mais graus de liberdade do que o MEF $G$  \~e importante observar que o processo iterativo n\~ao linear ocorre apenas no PLNL (412 ou 428 graus de liberdade) para o MEF $G^{g-1}$ , enquanto o solucionador n\~ao-linear para o MEF $G$  convencional responde por (676 ou 692 graus de liberdade). Na Figura 5.10 at\~e a Figura 5.15 s\~ao mostrados o  $Nit$  n\~ao lineares em fun\~ao do  $Np$  para o dom\~nio global n\~ao linear no MEF $G$  e o dom\~nio local no MEF $G^{g-1}$  para todas as rela\~oes de rigidez e resist\~encias exibidas.

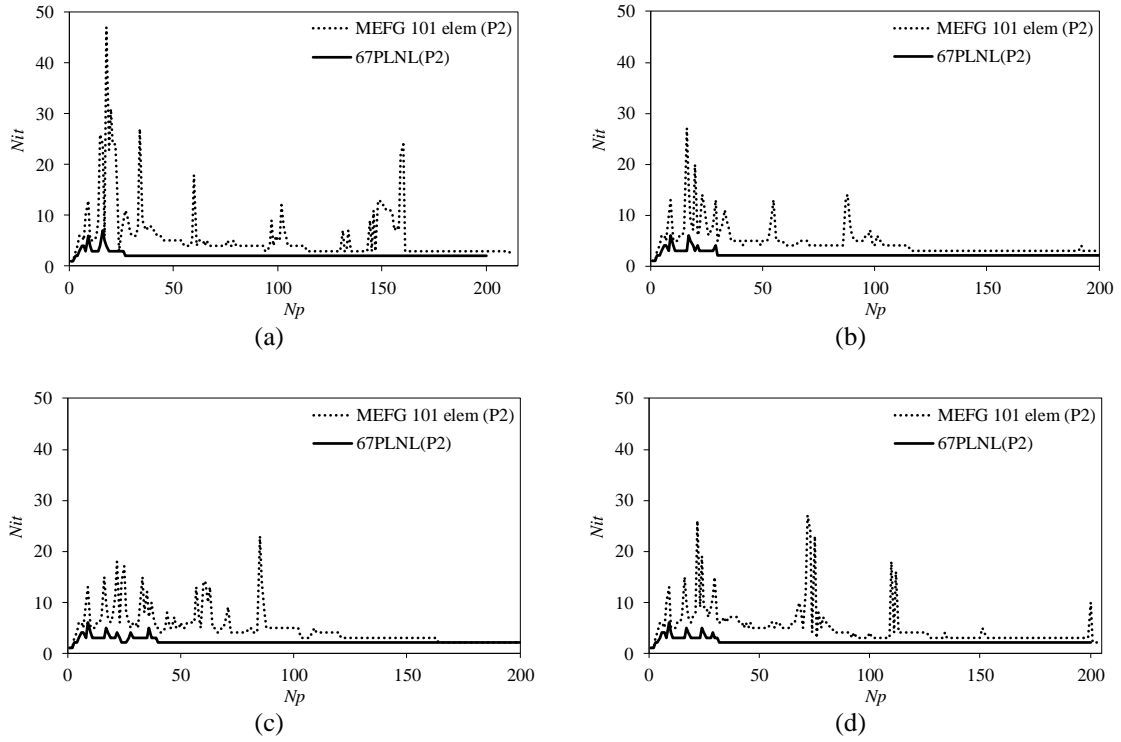


Figura 5.10 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1/E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

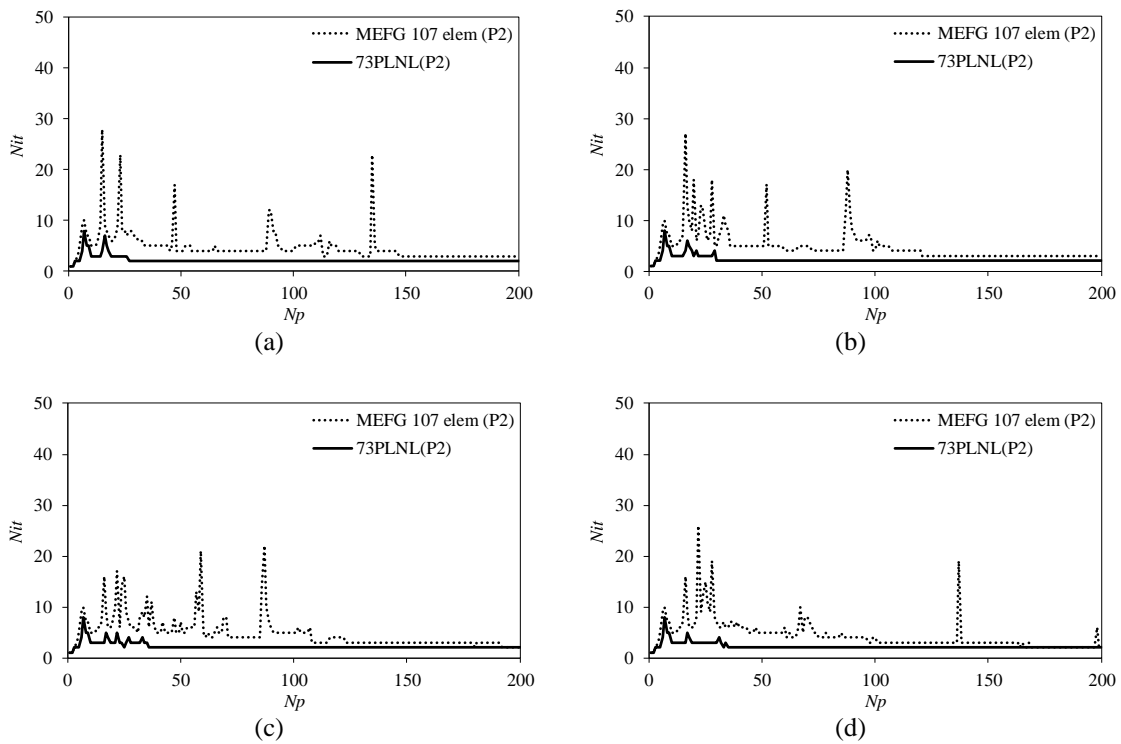


Figura 5.11 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com  $E_1/E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

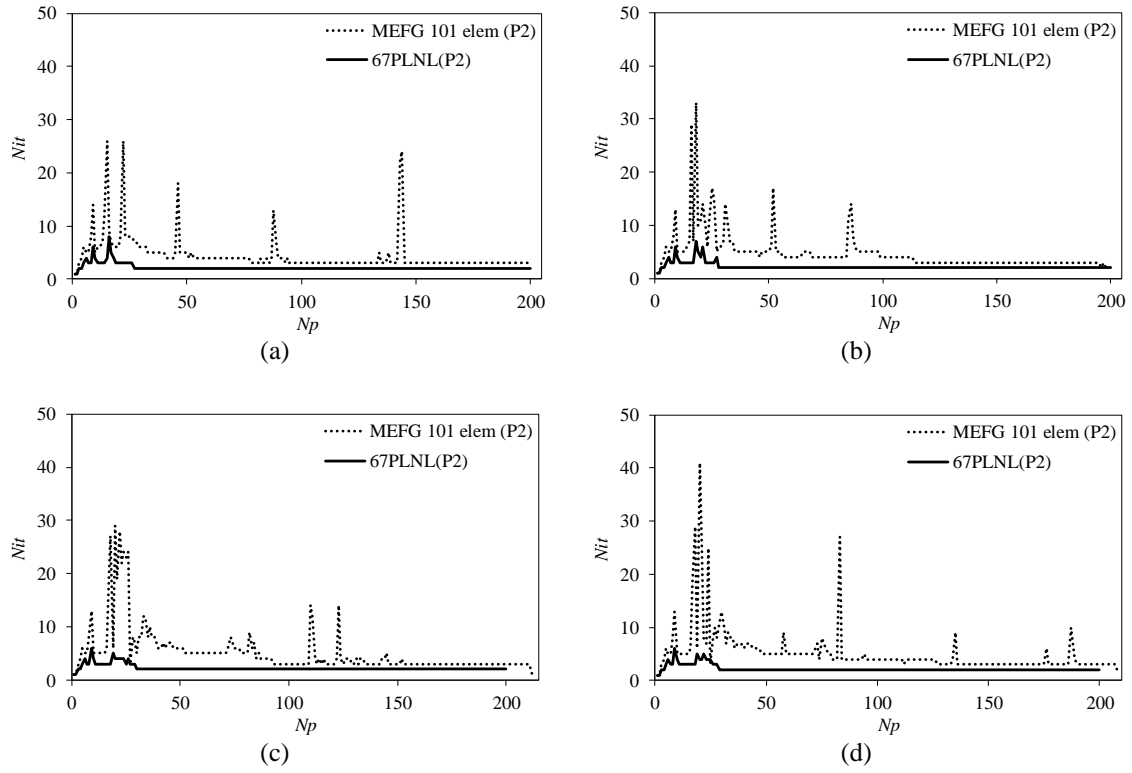


Figura 5.12 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1/E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

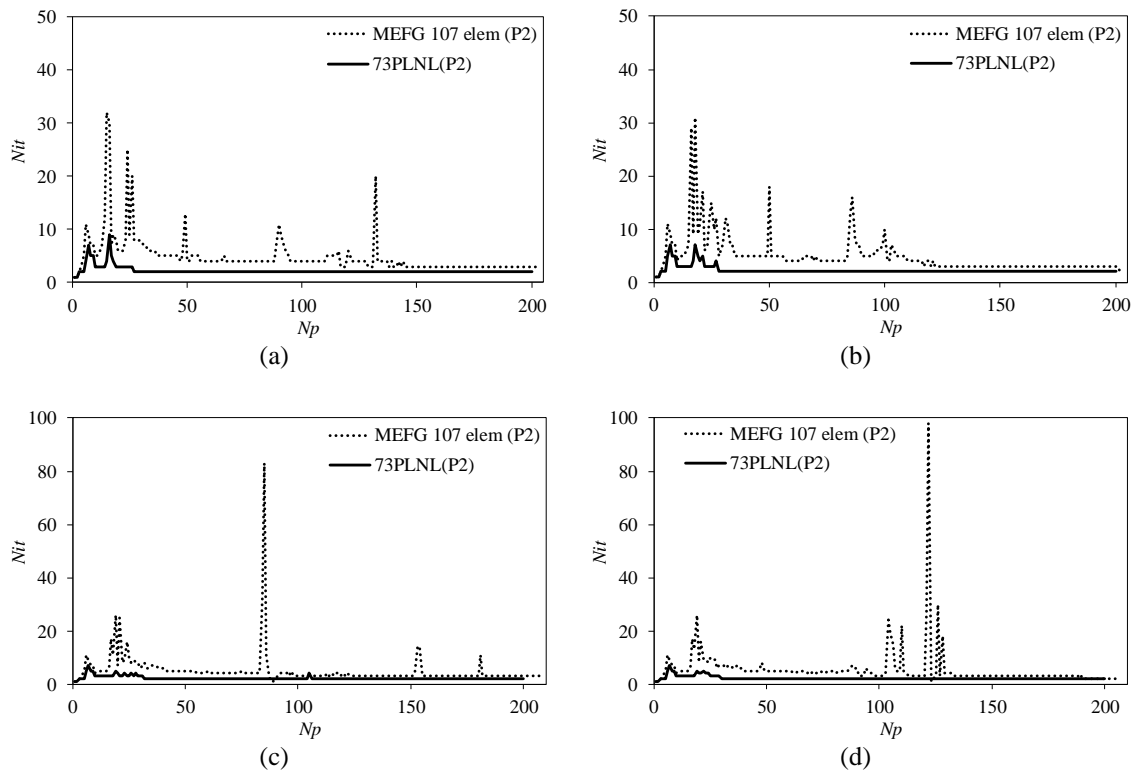


Figura 5.13 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com  $E_1/E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .



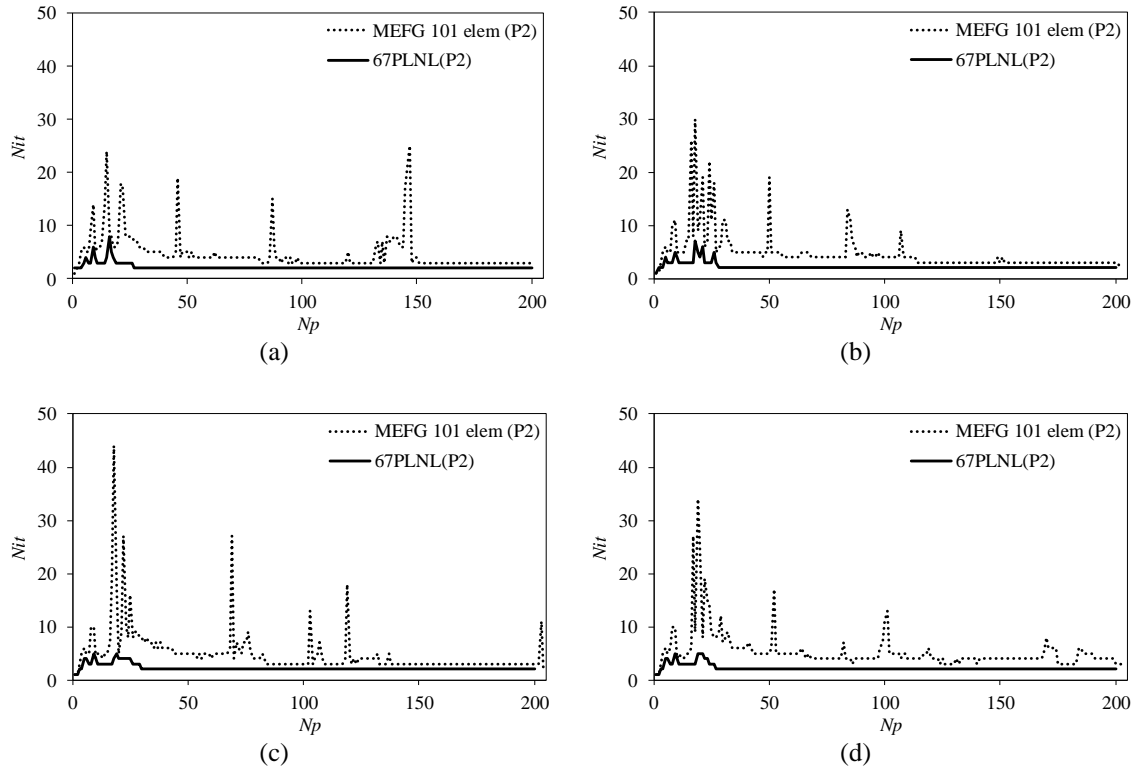


Figura 5.14 – Número de iterações em função do número do passo para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

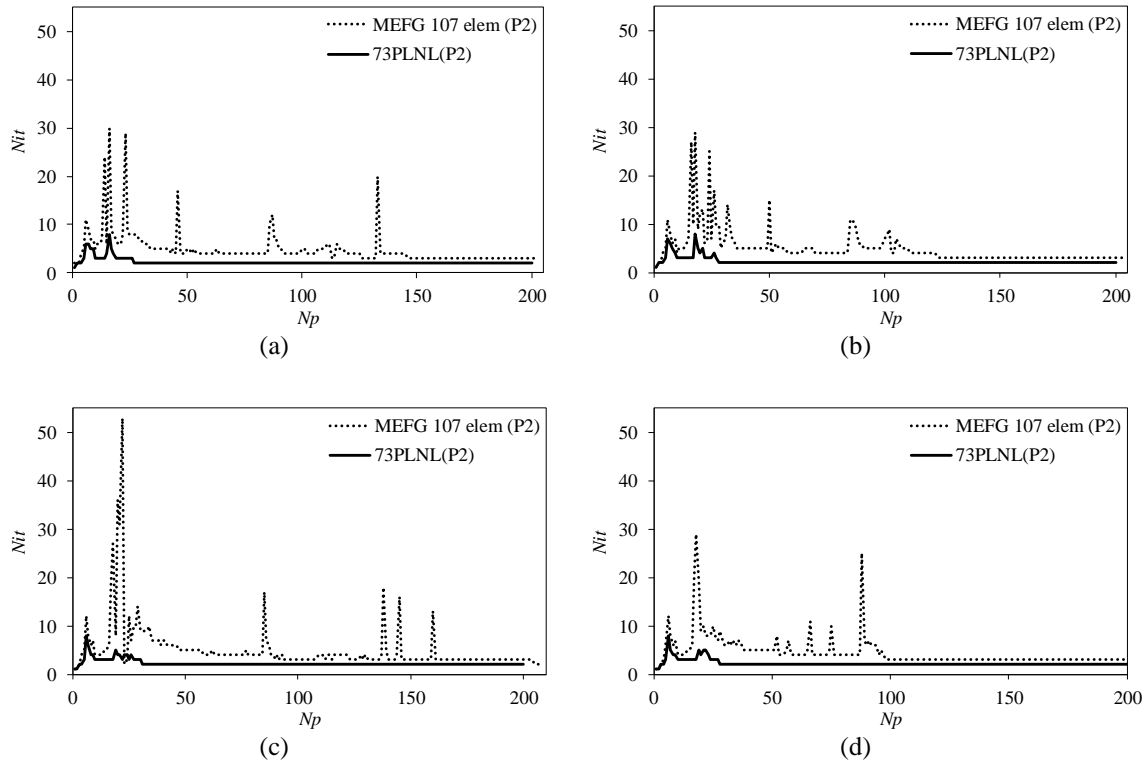


Figura 5.15 – Número de iterações em função do número do passo para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

Nas figuras apresentadas anteriormente se observam no PLNL uma convergência mais rápida da simulação nos dois cenários ao longo dos passos de carga em relação a simulação do MEFG convencional. Isso se deve ao PLNL ter um domínio em torno de 14% do problema local onde o processo iterativo ocorre. O *Nit* na simulação pelo MEFG é elevado, pois o processo iterativo ocorre no domínio completo, mesmo o dano se concentrando em uma pequena parcela, o que dificulta a convergência do modelo. Na Figura 5.16 até a Figura 5.21 são mostrados os NGL totais, no qual consideram todas iterações e passos de carga da simulação pelo MEFG e  $MEFG^{g-1}$  que é composto pela união do PGIL, PLNL e PGEL apresentado nas soluções comentadas. O NGL total no  $MEFG^{g-1}$  é determinado pela soma entre os graus de liberdade do PGIL no primeiro passo, com os graus de liberdade do PLNL em todas as iterações, juntamente com os graus de liberdade do PGEL em todos os passos.

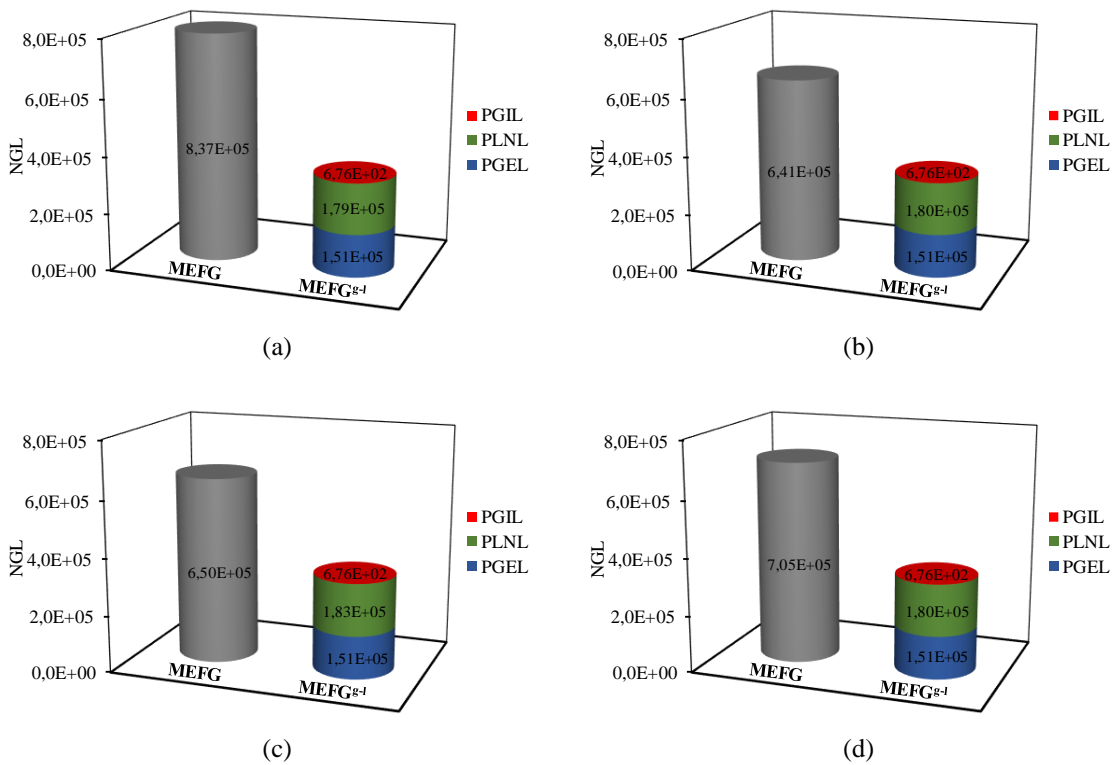


Figura 5.16 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$  ;  
 (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$  ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$  ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$  .

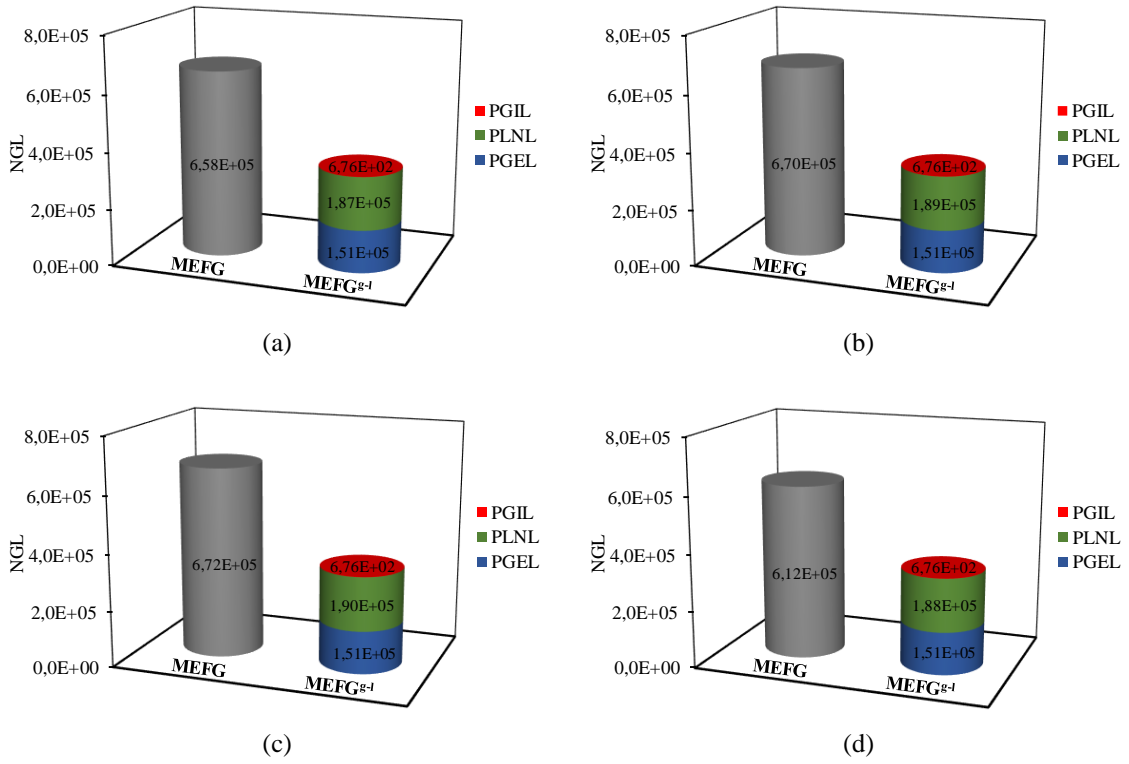


Figura 5.17 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_1 / f_2 = 0,5$ ; (b)  $f_1 / f_2 = 1$ ; (c)  $f_1 / f_2 = 2$ ; (d)  $f_1 / f_2 = \infty$ .

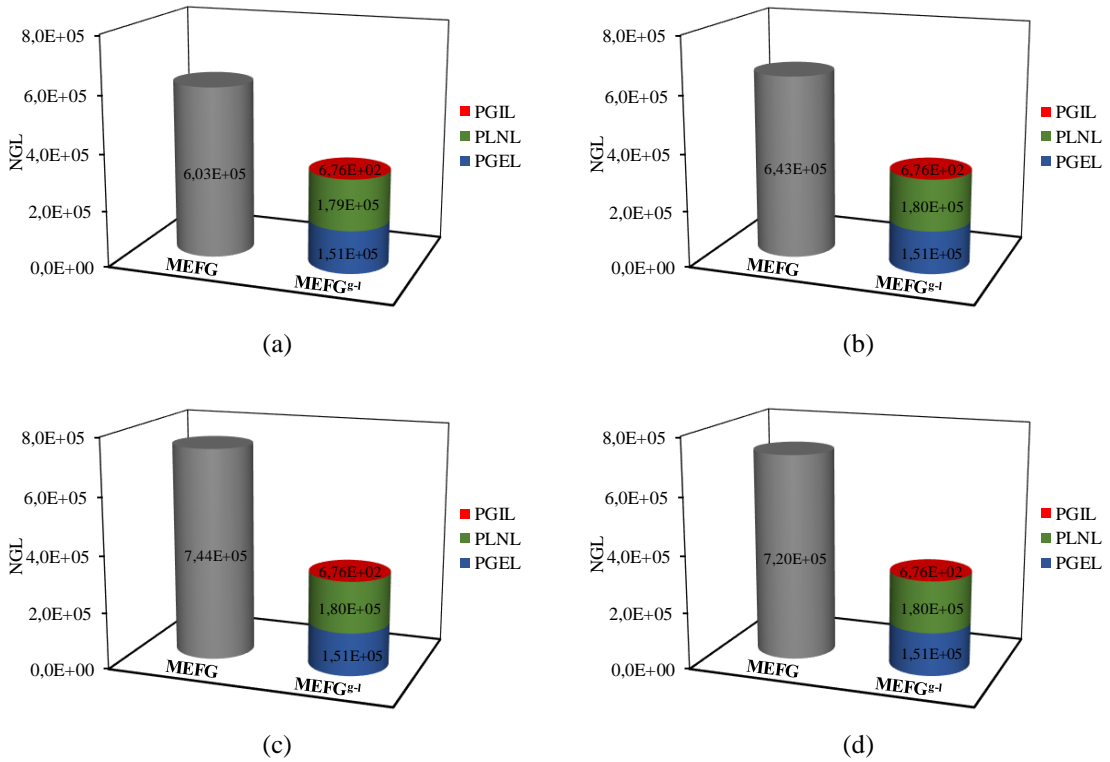


Figura 5.18 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_1 / f_2 = 0,5$ ; (b)  $f_1 / f_2 = 1$ ; (c)  $f_1 / f_2 = 2$ ; (d)  $f_1 / f_2 = \infty$ .

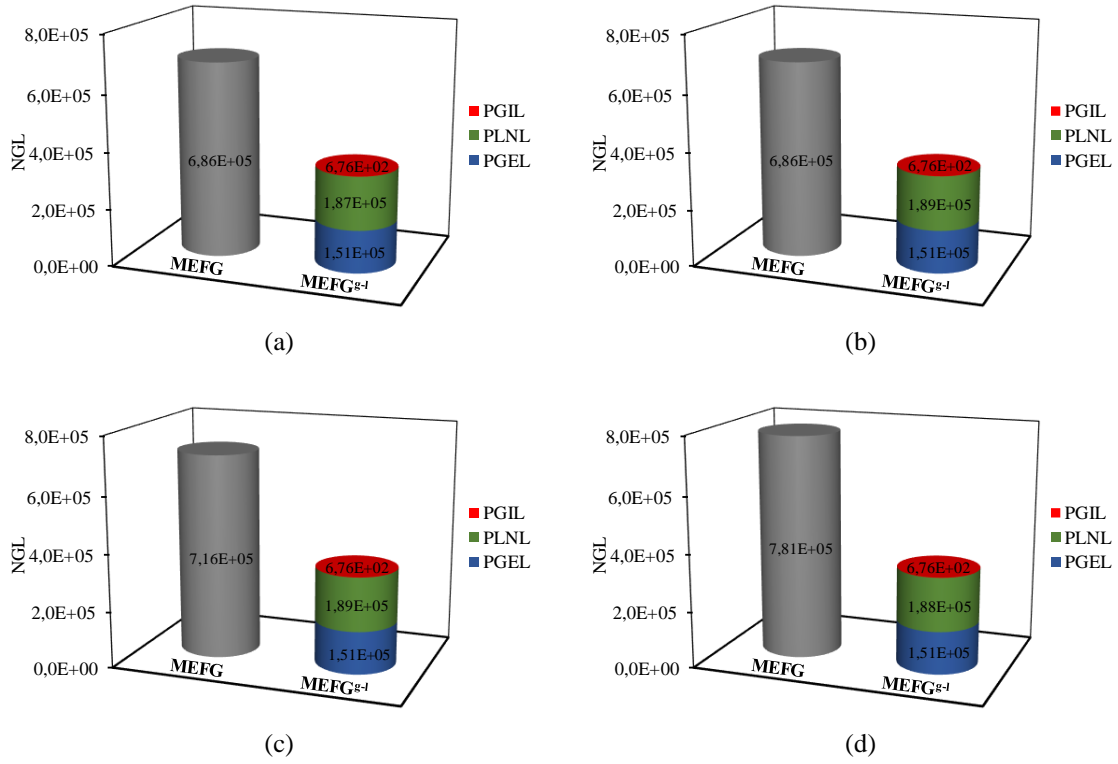


Figura 5.19 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com  $E_1/E_2 = 5$  e; (a)  $f_1/f_2 = 0,5$ ; (b)  $f_1/f_2 = 1$ ; (c)  $f_1/f_2 = 2$ ; (d)  $f_1/f_2 = \infty$ .

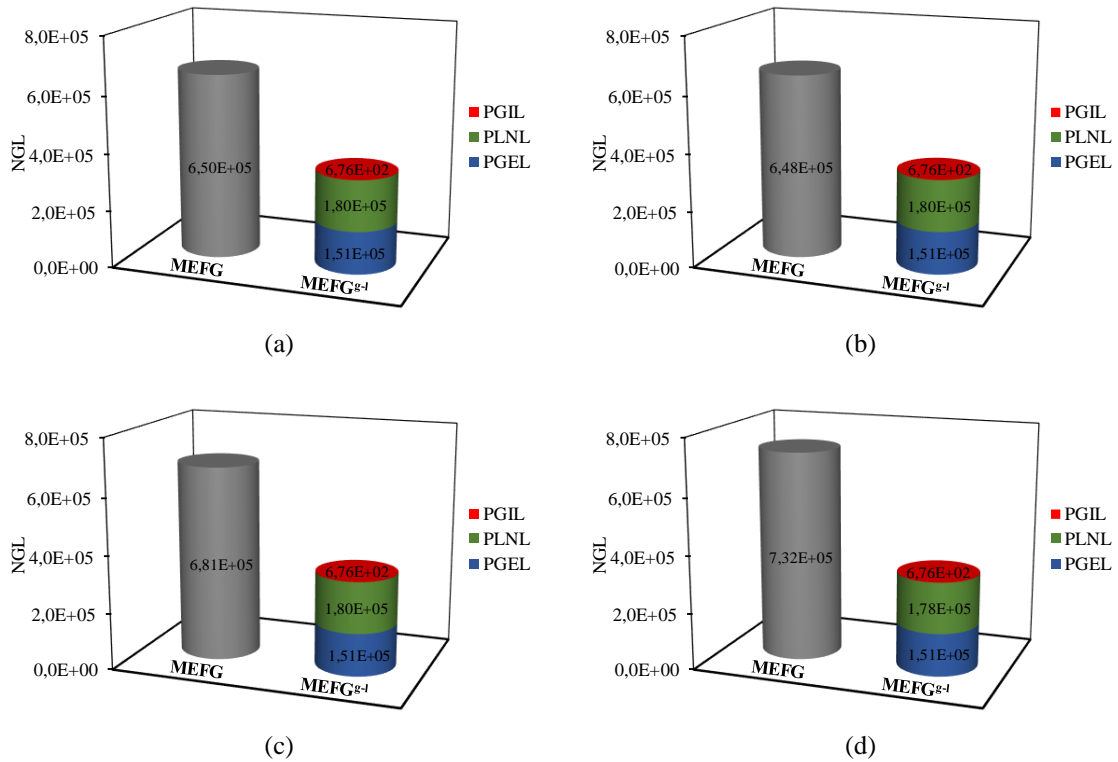


Figura 5.20 – Graus de liberdade totais para o primeiro cenário com  $E_1/E_2 = 100$  e; (a)  $f_1/f_2 = 0,5$ ; (b)  $f_1/f_2 = 1$ ; (c)  $f_1/f_2 = 2$ ; (d)  $f_1/f_2 = \infty$ .

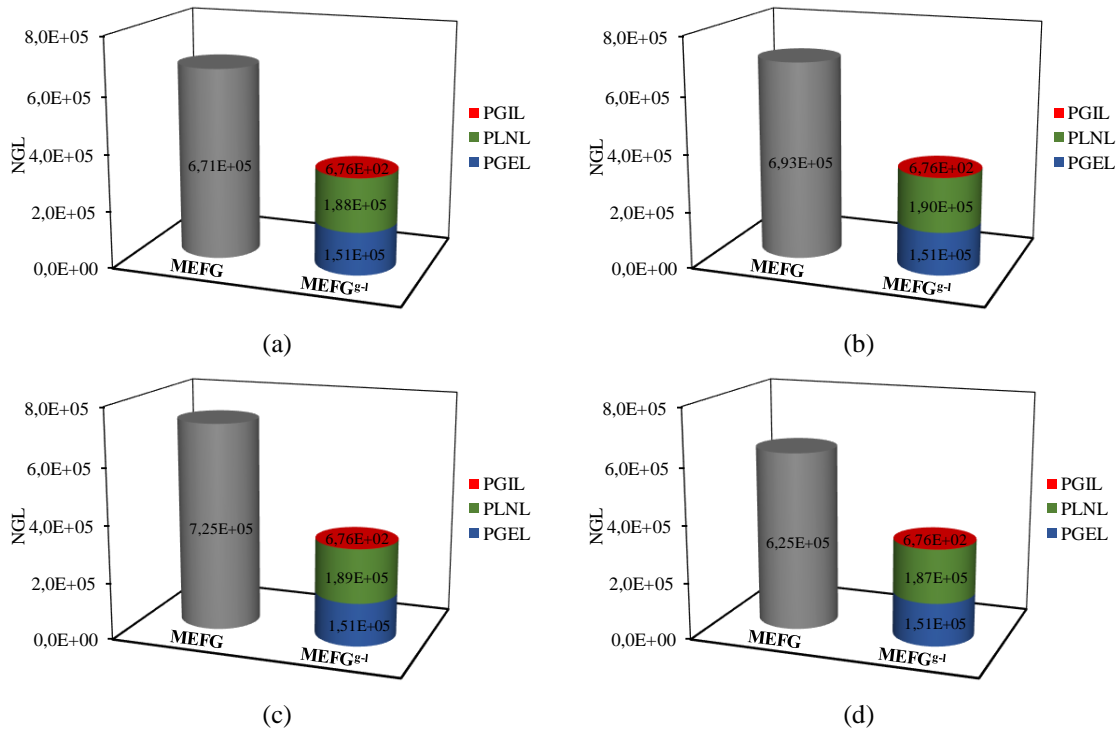


Figura 5.21 – Graus de liberdade totais para o segundo cenário com  $E_1/E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

Observa-se nas figuras apresentadas que em ambos os cenários para as diferentes relações de rigidez e resistência propostos no final dos passos de carga, o MCFG<sup>g-1</sup> torna-se mais eficiente que o MCFG com relação ao NGL. Apesar do primeiro passo de carga possuir um NGL maior, o *Nit* do PLNL ao longo dos passos é bem menor em relação ao MCFG, o que contribui para o *Nit* total. Além disso, o PGIL emprega apenas uma iteração no passo de carga inicial e o PGEL emprega uma iteração para cada passo de carga simulado, pois assume-se que o resíduo calculado é pequeno. Isso ocasiona ao longo de todos os passos de carga essa grande diferença final no NGL total a favor do MCFG<sup>g-1</sup>. Na Figura 5.22 até a Figura 5.27 são visualizados as distribuições de dano na *TPB* nos dois cenários para todas as relações de rigidez e resistências exibidos enriquecidos por funções P2 para o passo de carga 200.

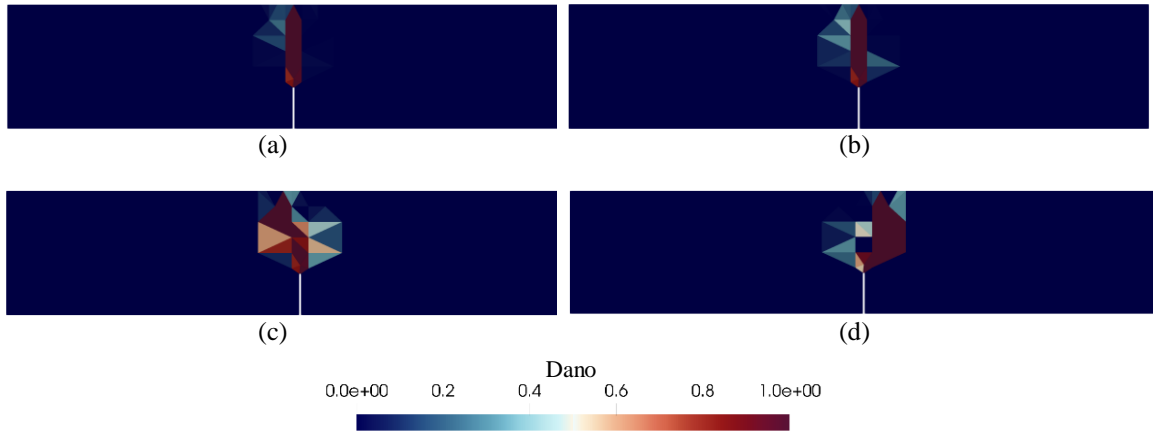


Figura 5.22 – Distribuição de dano na *TPB* para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

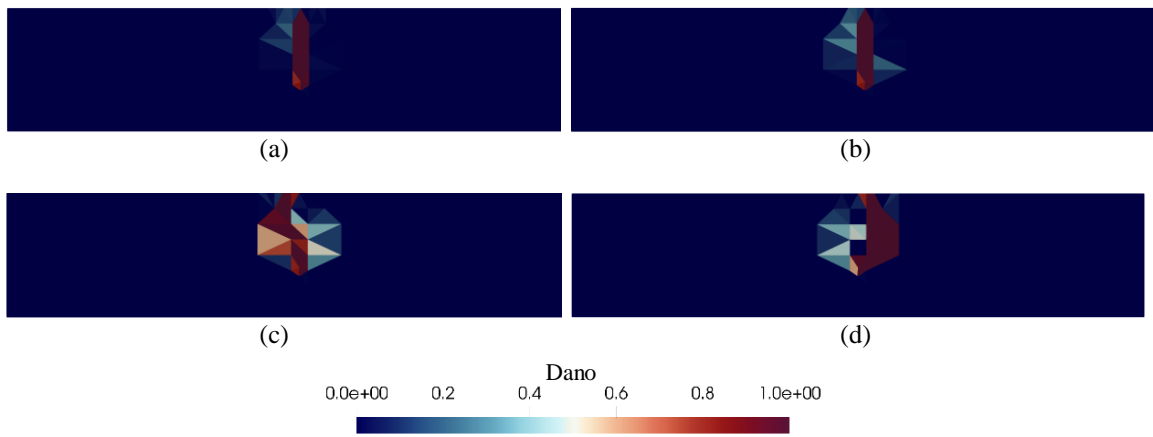


Figura 5.23 – Distribuição de dano na *TPB* para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

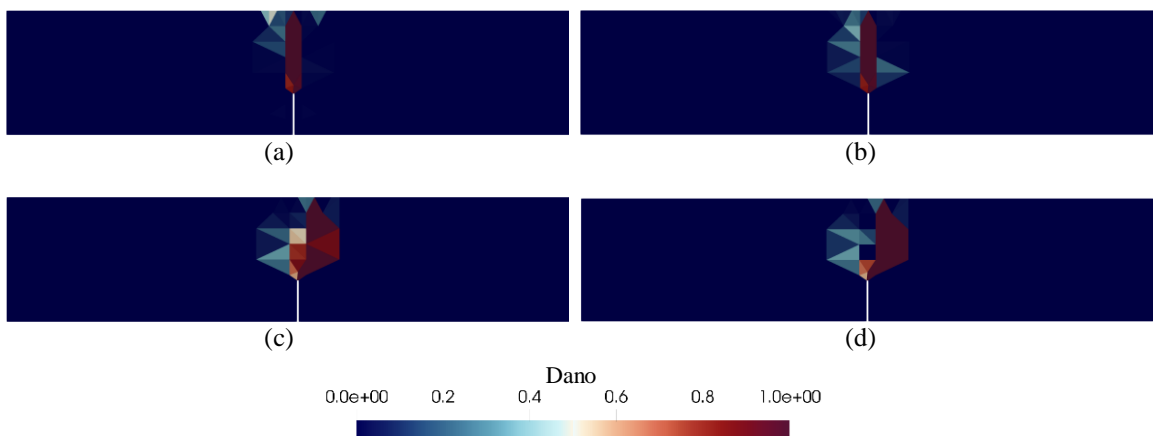


Figura 5.24 – Distribuição de dano na *TPB* para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

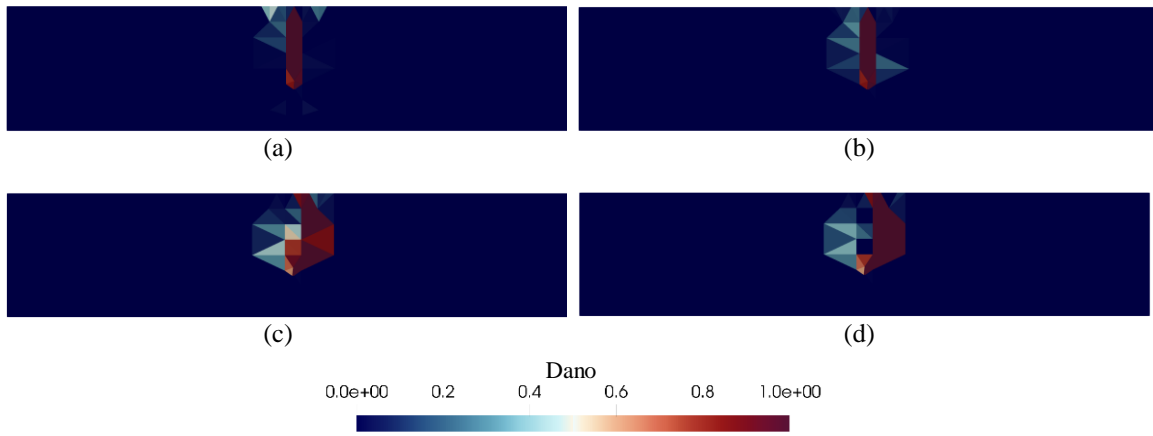


Figura 5.25 – Distribuição de dano na *TPB* para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

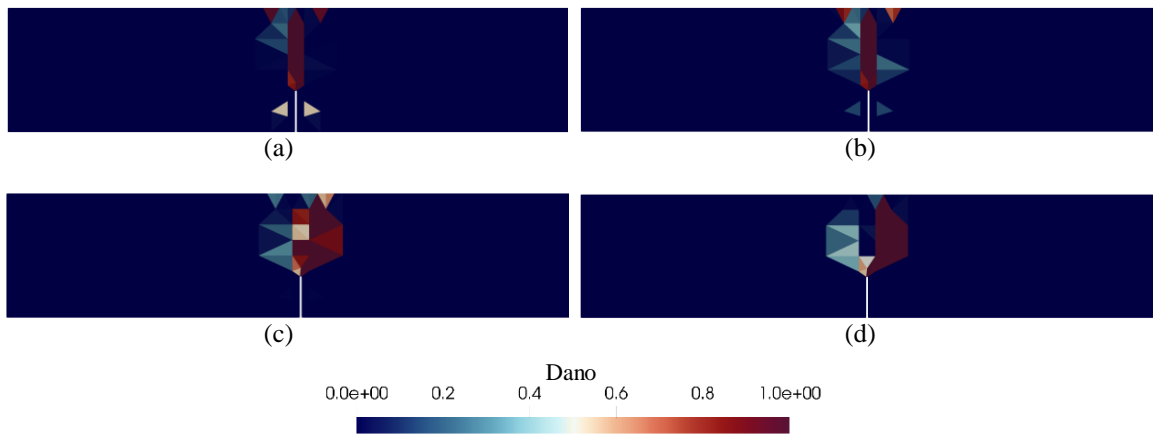


Figura 5.26 – Distribuição de dano na *TPB* para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

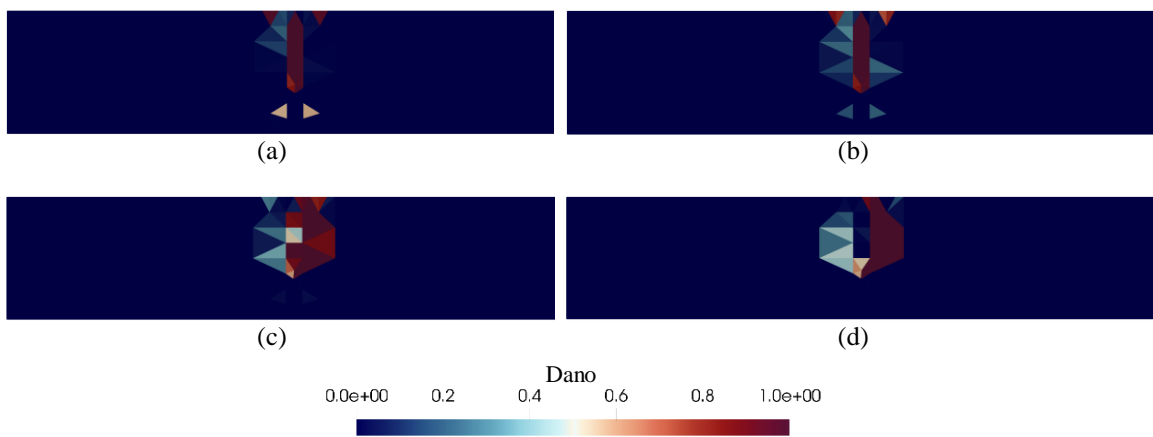


Figura 5.27 – Distribuição de dano na *TPB* para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

Observa-se nas figuras apresentadas anteriormente que a distribuição do dano se concentra na parte central da viga, o que já era esperado, visto que o entalhe é localizado na parte central. Na maior parte das simulações o dano se inicia e propaga na matriz e desvia das inclusões com o aumento nas relações de  $E_1 / E_2$  e  $f_{t1} / f_{t2}$ , uma vez que as inclusões não atingem a tensão crítica. Isso mostra a capacidade do MEEFG<sup>g-1</sup> para modelagem, simulação e análise de estruturas não lineares com heterogeneidade de materiais em situações que o problema global é resolvido de maneira linear, com a parte mais custosa computacionalmente realizada no PLNL portando um domínio menor.

### 5.3 ANÁLISE DO TAMANHO DO PROBLEMA LOCAL E REFINAMENTO- $h$

Neste modelo, cuja apresentação se faz pela Figura 5.28, simula-se a *TPB* com heterogeneidade, assim como apresentado na seção 5.2, no entanto com outra conformação geométrica para as inclusões. As dimensões e propriedades relacionadas ao material e de fratura são as mesmas da seção 5.2 e na Tabela 5.1.

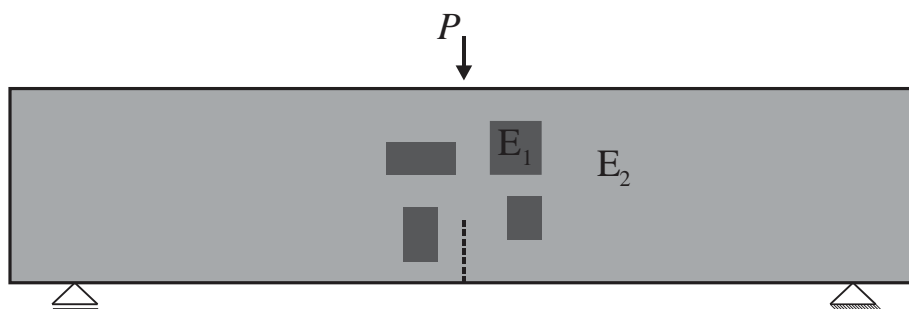


Figura 5.28 – Geometria, carregamento e CC da *TPB* com matriz e inclusões.

Nesta *TPB*, o objetivo será analisar as curvas relacionadas entre  $P$  vs.  $CMOD$  para relações de rigidez e resistência variáveis, de modo a se relacionarem entre si, nas relações,  $E_1 / E_2 = 1; 5; 100$  e  $f_{t1} / f_{t2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . Neste modelo, o PLNL é refinado pelo aumento de elementos (refinamento  $h$ ) com a trinca modelada implicitamente e com a consideração das inclusões. No problema global não foi modelado a trinca e se adicionou funções polinomiais P2 em todo o domínio, excetuando as condições de contorno.

Na Figura 5.29 são mostradas as malhas utilizadas no PGIL e PGEL com 205 elementos, assim como a malha com 425 elementos utilizada para o PLNL. Os nós pretos são enriquecidos com funções global local no PGEL e os nós brancos não são



enriquecidos. As relações de rigidez  $E_1 / E_2 = 1; 5; 100$  e resistências  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ , são simuladas combinando entre si dentro do PLNL.

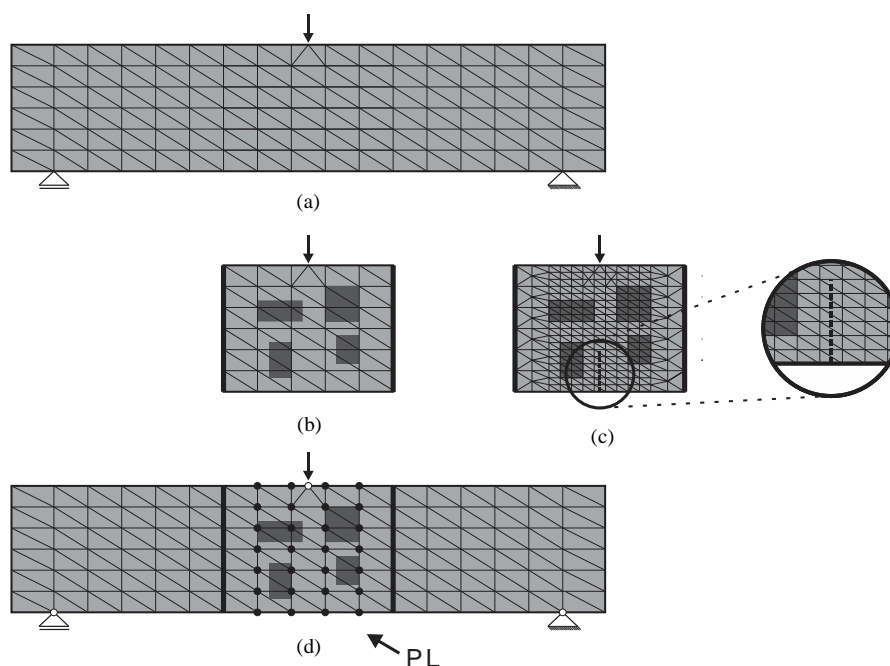


Figura 5.29 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL com 205 elementos no problema global e 425 elementos no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL com trinca e inclusões; (c) Refinamento do PLNL; (d) PGEL.

Pode-se visualizar que a malha do PLNL contorna as inclusões (Figura 5.29(c)) e alguns elementos do PGEL possuem inclusão e matriz. Aplica-se a técnica para danificar o elemento global completo da seção 4.2.4, com  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq nelid$ , ou seja, pelo menos três elementos locais são totalmente danificados e passarão a danificação para o respectivo elemento global completo.

Nas curvas da Figura 5.30 são apresentadas as soluções do MEF<sub>G</sub> e do MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> que relacionam a força  $P$  em função do  $CMOD$  para  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq nelid$  para  $E_1 / E_2 = 1$  e resistências com variação  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . Na Figura 5.31 e Figura 5.32 são apresentadas as soluções para as relações,  $E_1 / E_2 = 5$  e  $E_1 / E_2 = 100$ , respectivamente, com relações  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5; 1; 2; \infty$ . A malha da solução do MEF<sub>G</sub> possui 1841 elementos e constitui o mesmo nível de refino do PLNL e não possui funções de enriquecimento polinomial (P0), somente funções descontínuas para modelar a trinca implicitamente. O  $CMOD$  é calculado em função dos deslocamentos da parte inferior do elemento onde a trinca atravessa.

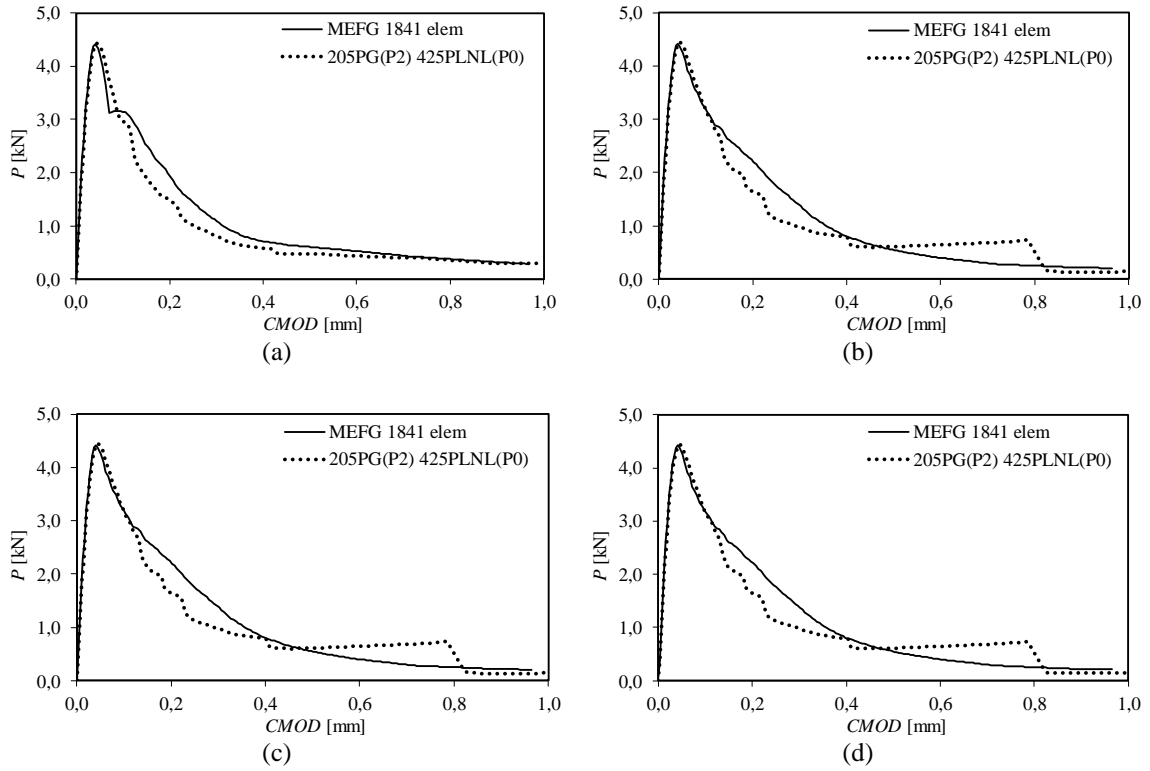


Figura 5.30 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> para  $E_1 / E_2 = 1$  e;

(a)  $f_{t1} / f_{t2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t1} / f_{t2} = 1$ ; (c)  $f_{t1} / f_{t2} = 2$ ; (d)  $f_{t1} / f_{t2} = \infty$ .

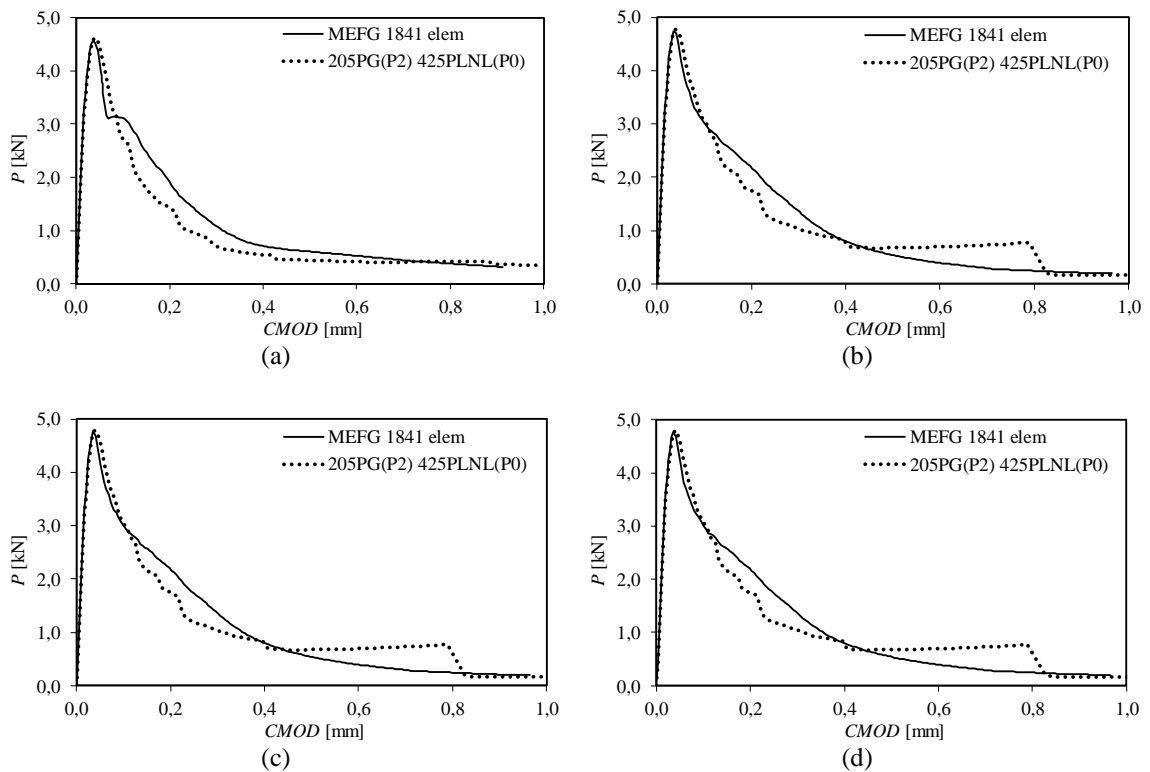


Figura 5.31 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> para  $E_1 / E_2 = 5$  e;

(a)  $f_{t1} / f_{t2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t1} / f_{t2} = 1$ ; (c)  $f_{t1} / f_{t2} = 2$ ; (d)  $f_{t1} / f_{t2} = \infty$ .

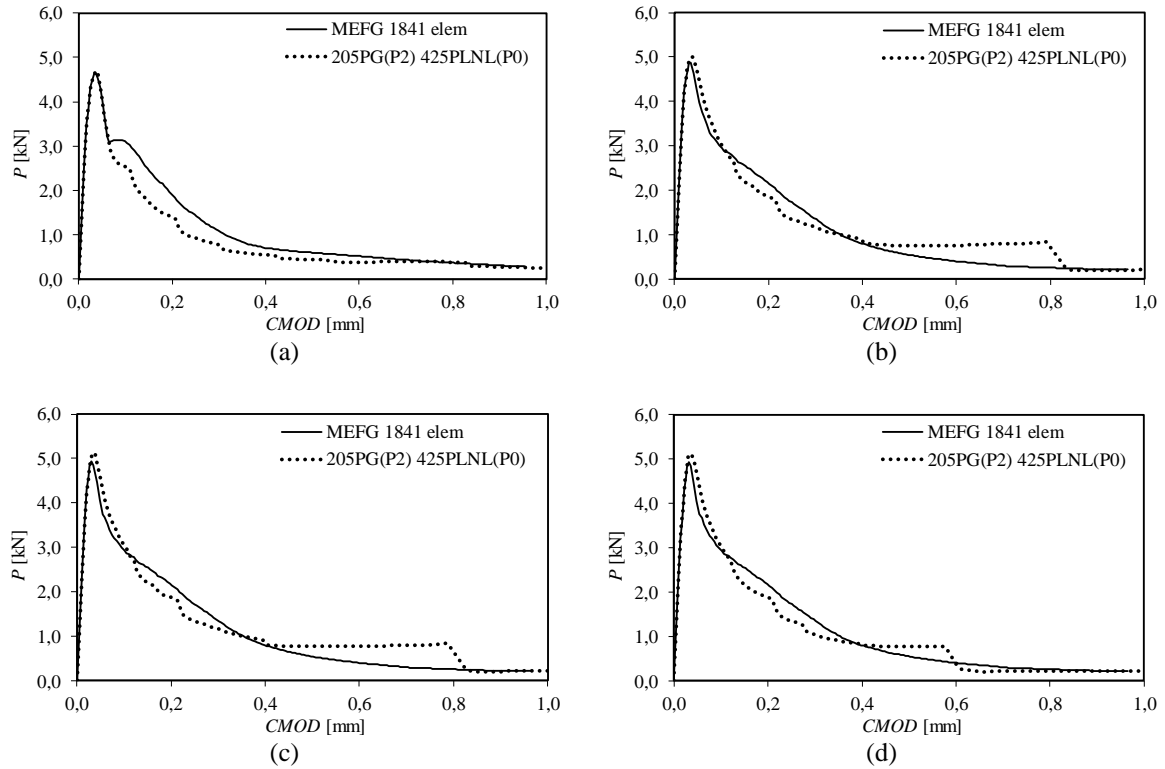


Figura 5.32 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  da solução do MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> para  $E_1 / E_2 = 100$  e;  
 (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

Na Figura 5.30 até a Figura 5.32 conclui-se que todas as soluções do MEFG<sup>g-1</sup> corroboram com todo comportamento das curvas simuladas pelo MEFG de maneira precisa e consistente que varia do  $P_{m\acute{a}x}$  ao amolecimento para  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq nelid$ . Um comportamento não suave é encontrado no final da região de amolecimento, pois na região do ligamento acima da trinca possuem poucos elementos globais, onde se chegam a rupturas bruscas consequentemente ocorre perdas bruscas de rigidez. Uma compressão próxima ao ponto de aplicação da força não consegue danificar o elemento global completo, o que resulta na utilização da técnica para alcançar tal êxito.

A estrutura fica mais resistente à medida que  $f_{t_1} / f_{t_2}$  aumenta de 0,5 até  $\infty$  com o mesmo  $E_1 / E_2$ , ou seja, o valor de  $P_{m\acute{a}x}$  aumenta, pois as inclusões alcançam uma resistência à tração que não é alcançada antes da resistência da matriz. O valor de  $P_{m\acute{a}x}$  aumenta à medida que  $E_1 / E_2$  varia de 1 até 100, uma vez que as inclusões se tornam mais rígidas. Na Tabela 5.5 mostram os valores da  $P_{m\acute{a}x}$  com as respectivas diferenças relativas ( $d_r$ ) das simulações realizadas pelo MEFG<sup>g-1</sup> em relação ao MEFG obtido nas curvas da Figura 5.30 até a Figura 5.32.

Tabela 5.5 – Valores da carga máxima pelo MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> juntamente com as respectivas  $d_r$  para 205 elementos no problema global e 425 no PLNL.

$f_{t_1} / f_{t_2}$	$E_1 / E_2 = 1$			$E_1 / E_2 = 5$			$E_1 / E_2 = 100$		
	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$	MEFG	MEFG <sup>g-1</sup>	$d_r$
0,5	4,42	4,43	0,35	4,57	4,62	1,10	4,63	4,69	1,34
1	4,42	4,44	0,50	4,74	4,78	0,72	4,87	5,01	2,77
2	4,42	4,44	0,50	4,77	4,79	0,49	4,93	5,12	3,77
$\infty$	4,42	4,44	0,50	4,77	4,79	0,49	4,93	5,12	3,82

A partir das  $P_{m\acute{a}x}$  mostradas na Tabela 5.5 percebe-se uma precisão na solução do MEFG<sup>g-1</sup> em relação as soluções numéricas do MEFG correspondentes. As diferenças encontradas quase a totalidade esteve ao redor de 1%, com exceção para  $E_1 / E_2$  igual a 100 e  $f_{t_1} / f_{t_2}$  acima de 1. Isso aconteceu em razão da relação  $E_1 / E_2$  ser alta dentro do mesmo elemento global, no entanto mesmo com a relação igual a 100, as diferenças ficaram abaixo de 4%. Essa diferença é aceitável, pois o comportamento da curva foi reproduzido de forma suave nas soluções do MEFG<sup>g-1</sup> e as malhas são menores que a de referência. O trabalho relativo do resíduo de todas as simulações apresentadas com diferentes relações de rigidez e resistência ao longo dos passos de carga encontram-se no apêndice, no qual como já apresentado o problema global não tem a obrigatoriedade de iterações não lineares. Na Tabela 5.6 são mostrados o NGL utilizados para simulação do primeiro passo de carga para o MEFG e MEFG<sup>g-1</sup> para  $nelid \geq 3$  e  $neltd \geq nelid$ .

Tabela 5.6 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG 1841 ele e MEFG<sup>g-1</sup>.

Problema	PGIL	PLNL	PGEL
MEFG 1841 elem	2010	-	-
205PG(P2) 425PLNL(P0)	1246	494	1302

O NGL no MEFG é inferior ao do MEFG<sup>g-1</sup> devido a estratégia global local resolver três problemas, no entanto o processo iterativo não linear ocorre apenas no PLNL com 494 graus de liberdade e no MEFG responde por 2010 graus de liberdade. Na Figura 5.33 até a Figura 5.35 são mostrados os  $Nit$  não lineares em função do  $Np$  ao longo de toda a simulação não linear para o domínio global no MEFG e o PLNL no MEFG<sup>g-1</sup> para todas as relações de rigidez e resistências simuladas.

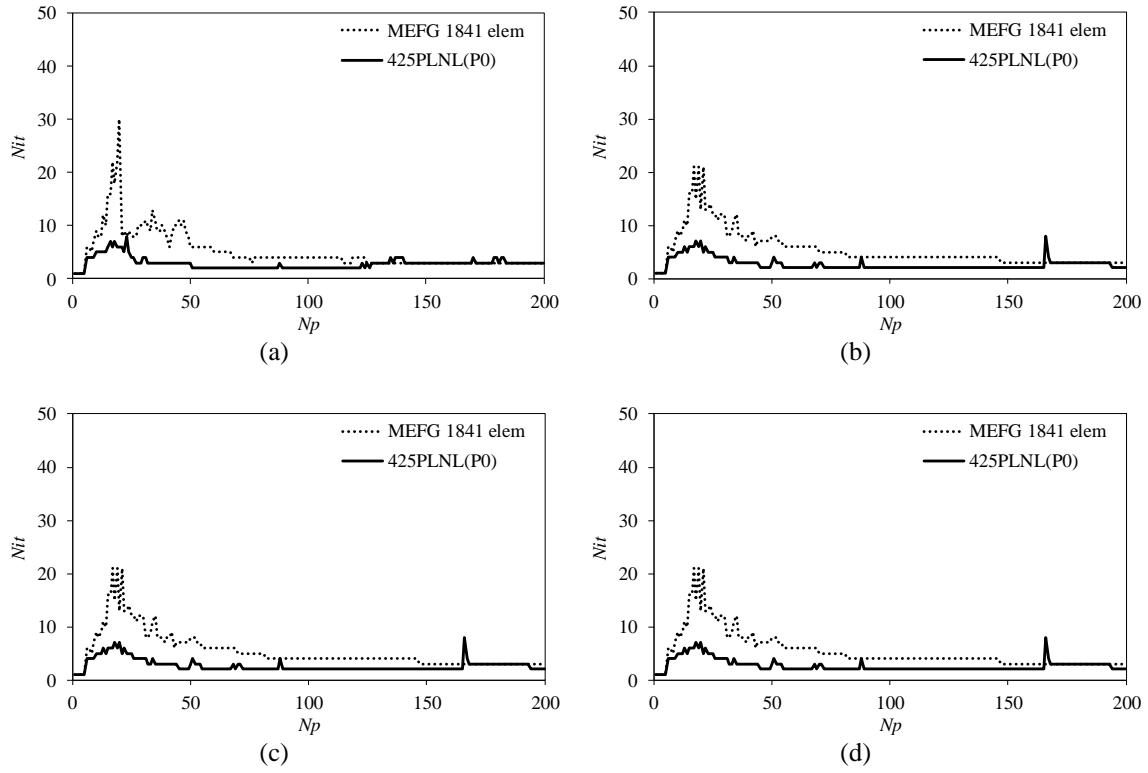


Figura 5.33 – Número de iterações em função do número do passo para  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_1 / f_2 = 0,5$  ;  
 (b)  $f_1 / f_2 = 1$  ; (c)  $f_1 / f_2 = 2$  ; (d)  $f_1 / f_2 = \infty$  .

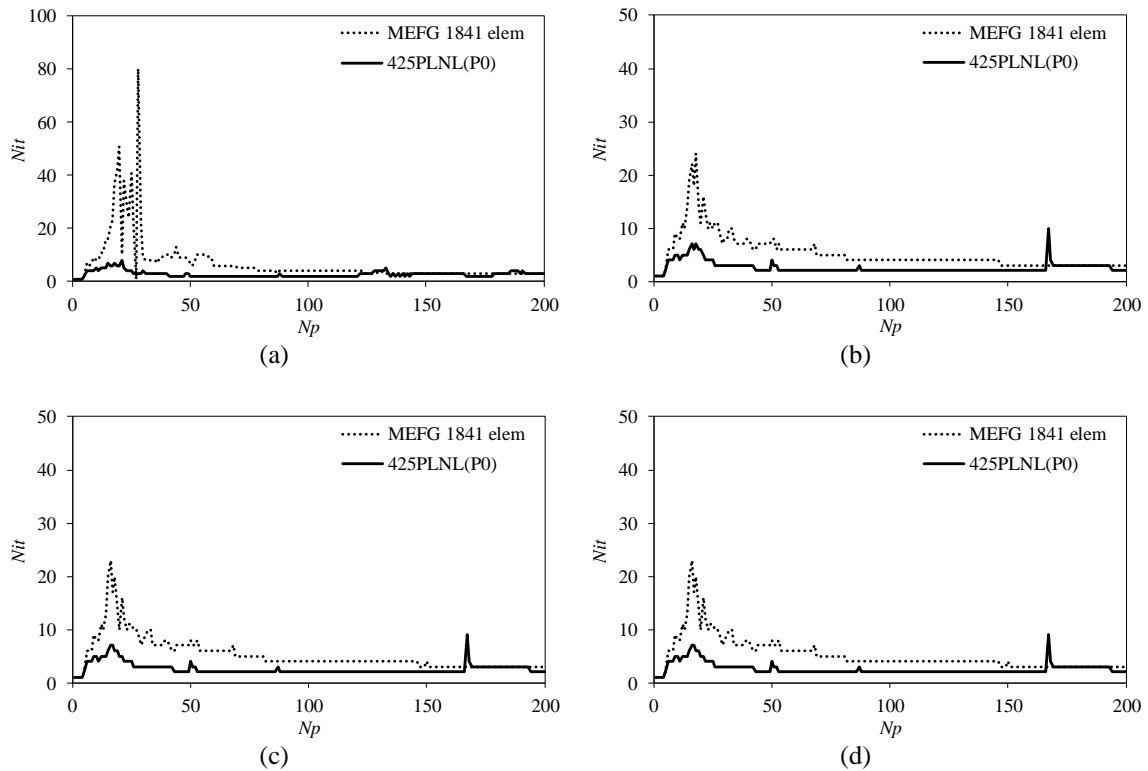


Figura 5.34 – Número de iterações em função do número do passo para  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_1 / f_2 = 0,5$  ;  
 (b)  $f_1 / f_2 = 1$  ; (c)  $f_1 / f_2 = 2$  ; (d)  $f_1 / f_2 = \infty$  .

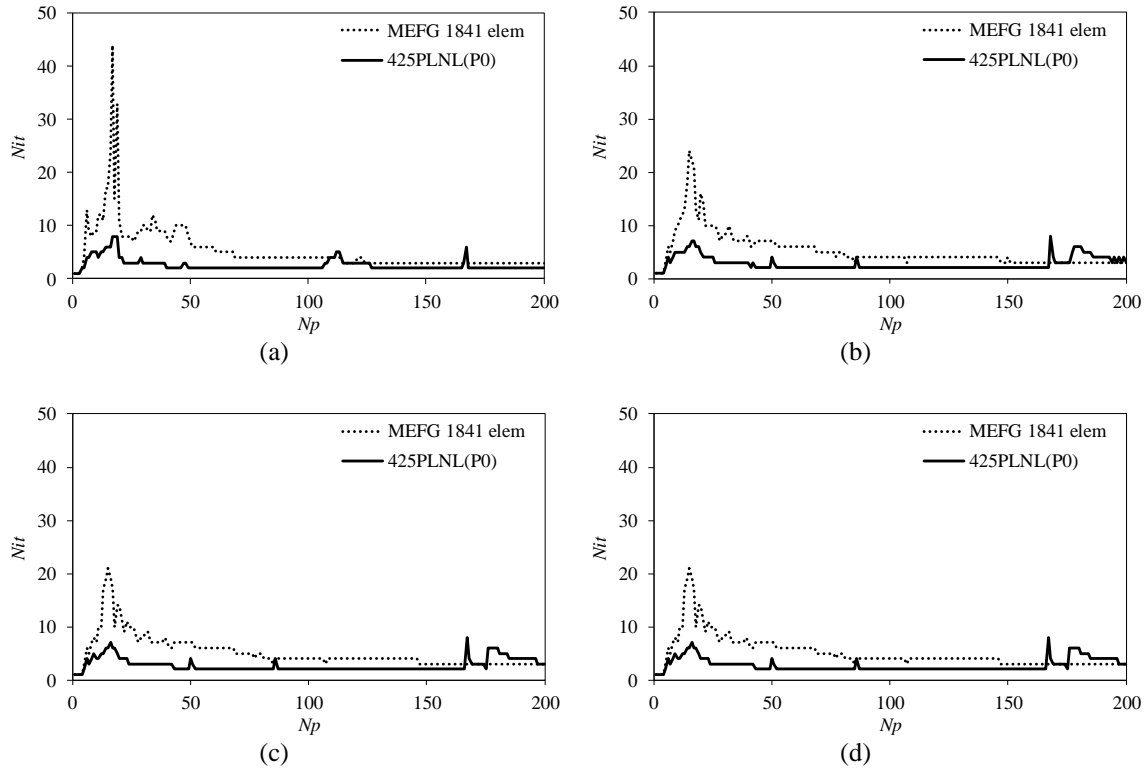


Figura 5.35 – Número de iterações em função do número do passo para  $E_1 / E_2 = 100$  e;  
 (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

Nas figuras anteriores se nota que o PLNL obteve uma convergência mais rápida da simulação ao longo dos passos de carga. Isso se deve ao PLNL nessas simulações possuírem um domínio em torno de 29% do problema global. O *Nit* na simulação pelo MEFG é elevado, pois a estrutura é resolvida de maneira não linear em todo o domínio, com a trinca com pequena porcentagem no sistema global da estrutura. Pode-se concluir pela visualização das figuras que ao longo dos passos de carga a solução pelo  $\text{MEFG}^{g-1}$  para resolução de estruturas com heterogeneidades é vantajosa, uma vez que em cada iteração, o NGL no processo iterativo não linear do PLNL é menor. Na Figura 5.36 até a Figura 5.38 são mostrados os NGL totais pelo MEFG e  $\text{MEFG}^{g-1}$ , por meio da soma dos PGIL, PLNL e PGEL.

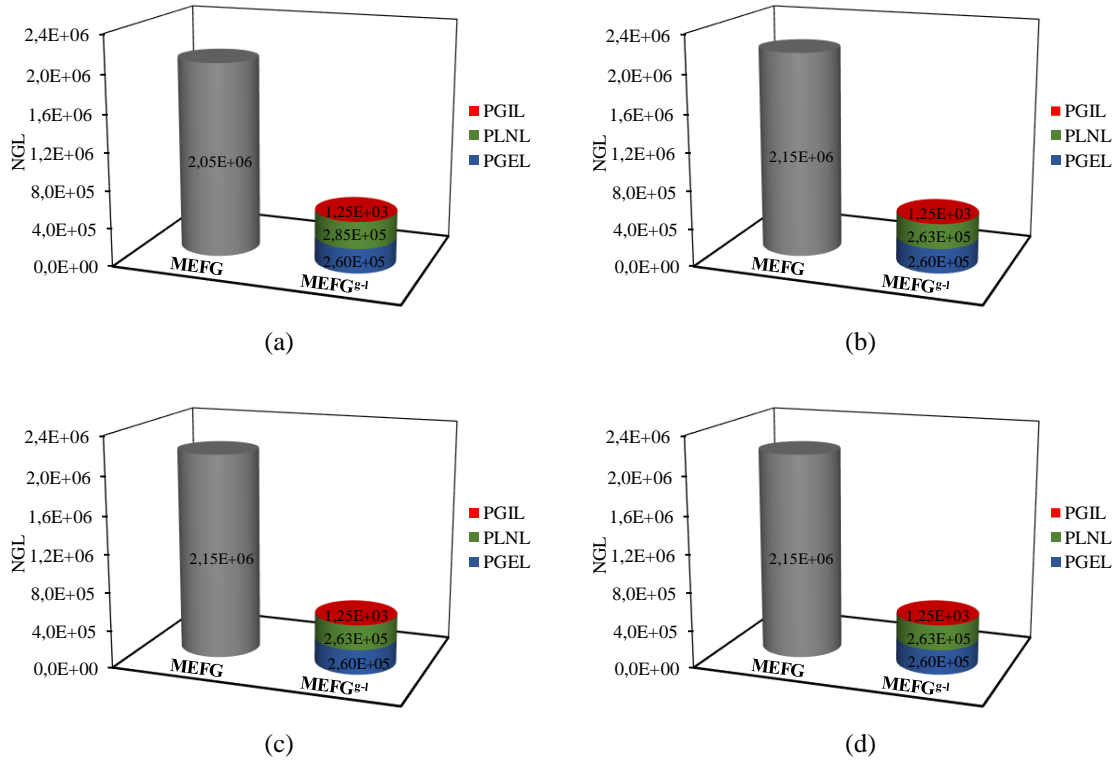


Figura 5.36 – Graus de liberdade totais para  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

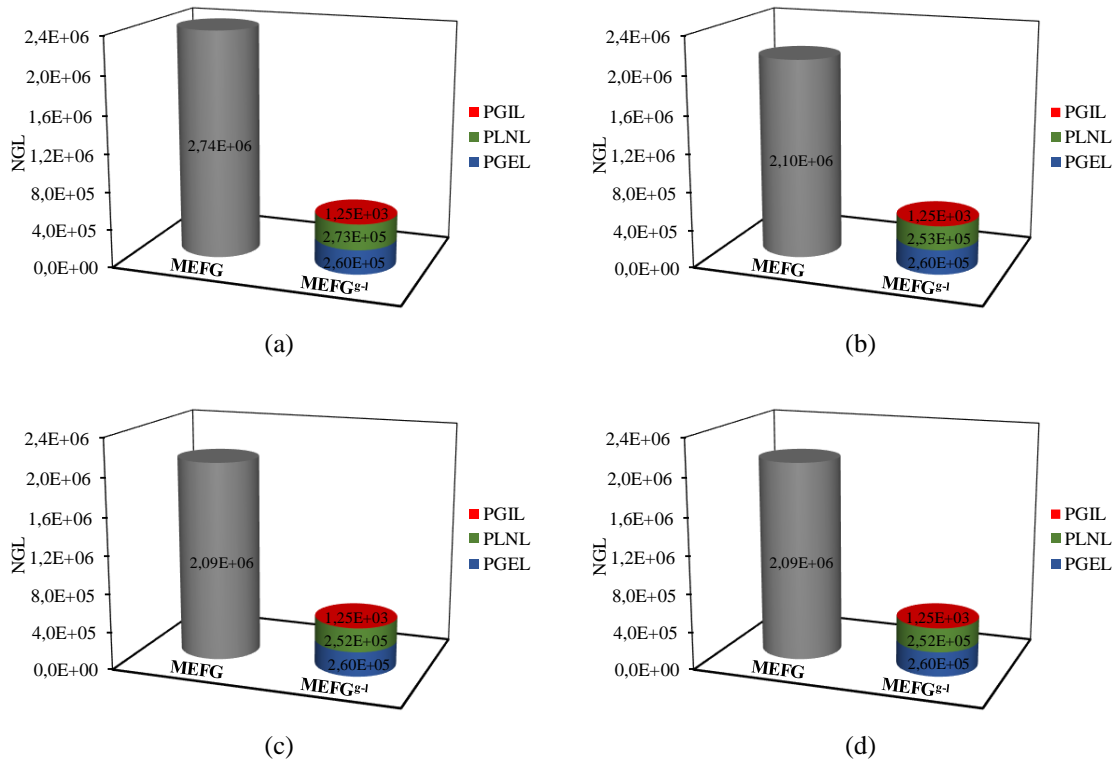


Figura 5.37 – Graus de liberdade totais para  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

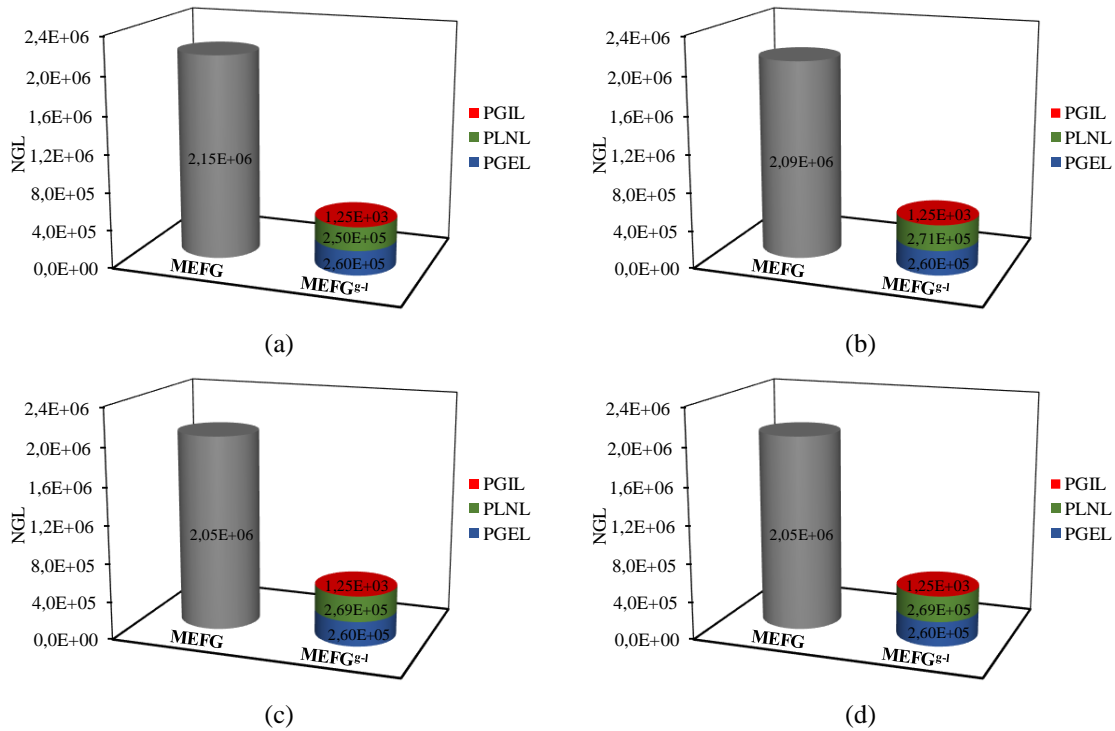


Figura 5.38 – Graus de liberdade totais para  $E_1/E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

Como já esperado de todas outras simulações da *TPB* se visualiza na Figura 5.36 até a Figura 5.38 um aumento oneroso no NGL das simulações pelo MEFG ao longo de todos os passos de carga para todas as relações de rigidez e resistências consideradas, devido o processo iterativo não linear ocorrer no domínio global da estrutura com *Nit* elevados. Na simulação do MEFG<sup>g-1</sup>, a solução não linear com as inclusões e a trinca ocorrem apenas em uma parcela do domínio com baixas iterações e o problema global se resolve linearmente em função apenas dos passos de carga, pois o trabalho relativo do resíduo foi pequeno. Outra razão do NGL ser menor nas soluções pelo MEFG<sup>g-1</sup> está nos enriquecimentos polinomiais serem adicionados apenas no problema global, onde ocorrem iterações lineares e proporcionam uma acurácia nas CC para o PLNL.

O MEFG<sup>g-1</sup> é satisfatório em problemas onde o PLNL representa uma pequena parcela dentro do problema global, pois o NGL não aumenta tanto com adição das funções de enriquecimento global local. Todo o estudo aplicado para a *TPB* heterogênea, mostra a capacidade e consistência para modelagem, simulação e aproximação da metodologia proposta nesta pesquisa do MEFG<sup>g-1</sup> para análise de estruturas em processo de danificação com a consideração de descontinuidades e inclusões.



## 6 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA PROBLEMAS EM MODO MISTO DE FRATURA

São apresentados, neste capítulo, simulações numéricas do MEF<sup>g-1</sup> para estruturas com comportamento não linear sob modo misto de fratura. Como modelos de referência, tem-se um bloco de concreto com dois entalhes, uma barragem de concreto em escala real e um modelo de fêmur humano. Comparam-se todos os resultados obtidos com ensaios numéricos simulados pelo programa LACHESIS (Moreira, 2016; Moreira e Evangelista Jr. 2016; Paiva *et al.*, 2016; Paiva, 2017; Evangelista Jr. e Moreira, 2019). Além disso, os resultados do bloco de concreto são comparados com ensaios experimentais e os resultados da barragem são comparados com outras metodologias numéricas da literatura técnica.

### 6.1 ESTRUTURA COM DUPLO ENTALHE

Neste modelo, cuja apresentação se faz pela Figura 6.1, simula-se um bloco de concreto com dois entalhes em faces opostas conhecido na literatura como *Double Edge Notch Tension (DENT)*. Esse ensaio experimental foi realizado por Nooru-Mohamed (1992), no qual o bloco é carregado nas faces esquerda e superior, por meio de controle de deslocamentos nas direções horizontal ( $\delta_h$ ) e vertical ( $\delta_v$ ), respectivamente. Esses deslocamentos impostos são aplicados numa relação unitária, ou seja ( $\delta_h / \delta_v = 1$ ).

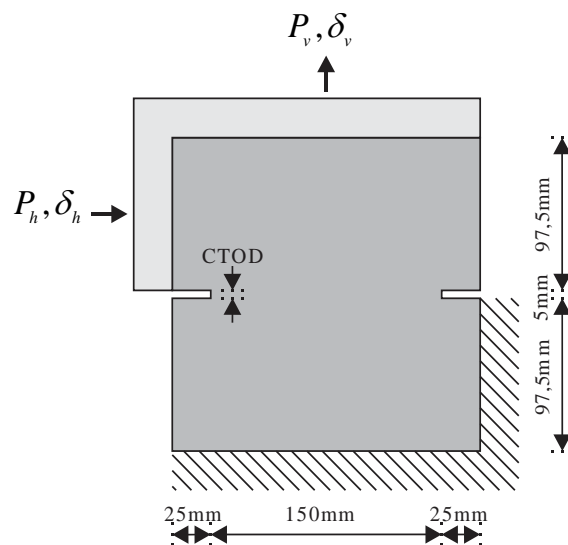


Figura 6.1 – Geometria, carregamento e CC na estrutura com duplo entalhe.

As propriedades do material e de fratura para a realização do ensaio numérico encontram-se na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Propriedades do material e de fratura do *DENT*.

$E$ (GPa)	$\nu$	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_F$ (N/m)	$\psi$	Espessura (mm)
30	0,20	33,0	3,3	40	100	0,25	50

Nesta peça, o objetivo será analisar as curvas que relacionam a força vertical ( $P_v$ ) em função do deslocamento de abertura de ponta de trinca denominado na literatura como *Crack Tip Opening Displacement (CTOD)* no entalhe localizado na face esquerda. Além disso, serão analisadas as curvas que relacionam a força horizontal ( $P_h$ ) em função do deslocamento  $\delta_h$ . Esse modelo é submetido a modo misto de abertura de fratura, em que a variável de controle utilizada é a deformação equivalente de von Mises modificado, sob condição de estado plano de tensão. Os resultados obtidos pela estratégia do MEF<sup>g-1</sup> são comparados com ensaios experimentais e numéricos simulados pelo MEF ou MEF<sup>g</sup> convencional.

### 6.1.1 Análise do refinamento do problema local, número de iterações e graus de liberdade totais

Nesta seção, o MEF<sup>g-1</sup> é simulado para um PLNL contendo os dois entalhes a partir do problema global, em que dois cenários de refinamento do PLNL são estudados. No primeiro cenário o refinamento ocorre pelo aumento da ordem polinomial das funções de enriquecimento e no segundo o refinamento sucede pelo aumento do número de elementos. O entalhe é modelado de maneira explícita, ou seja, a malha de elementos contorna o mesmo. Na primeira situação se utiliza uma malha com 130 elementos triangulares para o PGIL e PGEL (Figura 6.2(a) e (d)), onde na região central se encontra o problema de interesse definido por 66 elementos (Figura 6.2 (b)). Na segunda situação se utiliza a mesma malha para o PGIL e PGEL, no entanto uma malha com 246 elementos (Figura 6.2(c)) no PLNL é definida pelo aumento no número de elementos. A região local é selecionada para construção das funções de enriquecimento global local e o processo de danificação da estrutura. As malhas do PGIL, PLNL e PGEL para os dois cenários são apresentadas na Figura 6.2, onde os nós pretos são enriquecidos por funções global local no PGEL (Figura 6.2(d)).

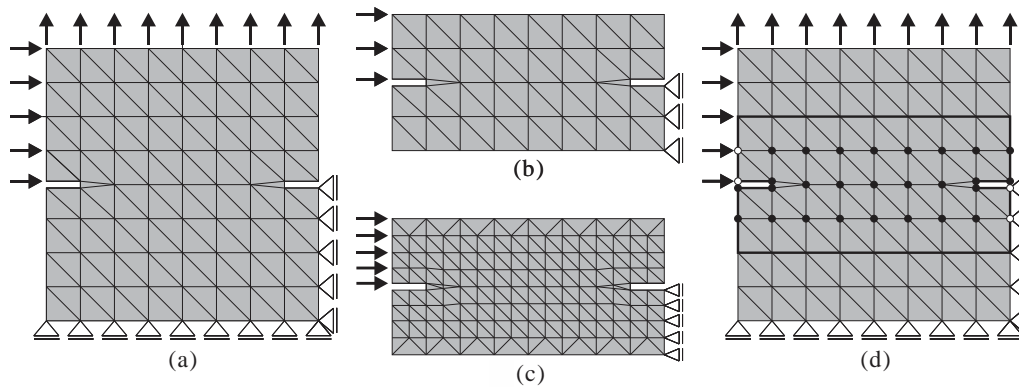


Figura 6.2 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL e nós enriquecidos com funções de enriquecimento global local no PGEL para malha com; (a) 130 elementos no PGIL; (b) 66 elementos no PLNL; (c) 246 elementos no PLNL; (d) 130 elementos no PGEL.

As CC são inexatas no contorno interno da intersecção do problema global com o PLNL (Figura 6.2(d)). Os nós relacionados as condições de contorno não são enriquecidos, de modo a respeitarem as mesmas. Nos dois cenários são aplicados 50 e 250 passos de carga na estrutura. Na Figura 6.3 são visualizadas a variação da força  $P_v$  em função do  $CTOD$  pela estratégia do  $MEFG^{g-1}$  com 130 elementos no problema global e 66 elementos no PLNL, em que foram adicionados aos nós do PLNL funções de enriquecimento polinomiais P0 e P1 para 50 (Figura 6.3(a)) e 250 passos de carga (Figura 6.3(b)). Além disso são apresentadas soluções experimentais e uma solução pelo MEF, no qual é discretizado pela mesma malha do PGIL com 130 elementos.

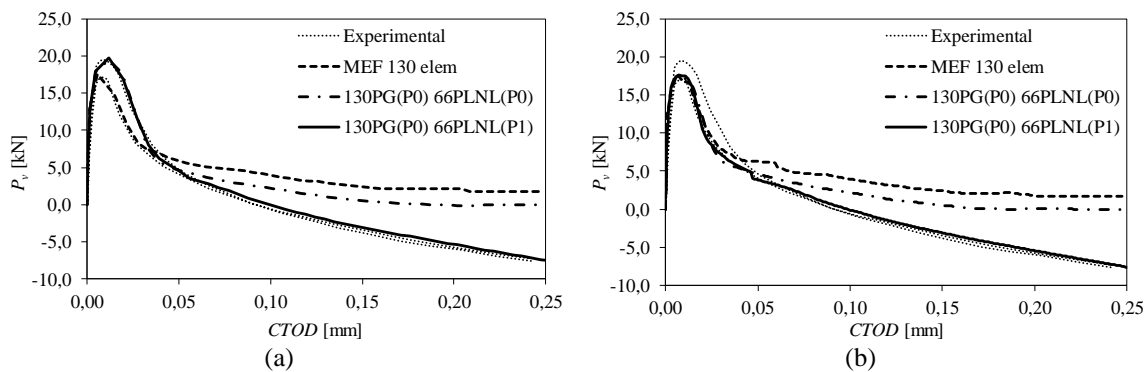


Figura 6.3 – Curvas  $P_v$  vs.  $CTOD$  da solução experimental e a metodologia do  $MEFG^{g-1}$  para malha com 130 elementos no problema global e 66 elementos no PLNL para; (a) 50 e; (b) 250 passos de carga.

Na Figura 6.4 são visualizados a solução do  $MEFG^{g-1}$  com 130 elementos no problema global e 246 elementos no PLNL sem adição de funções de enriquecimento polinomiais para 50 e 250 passos de carga.

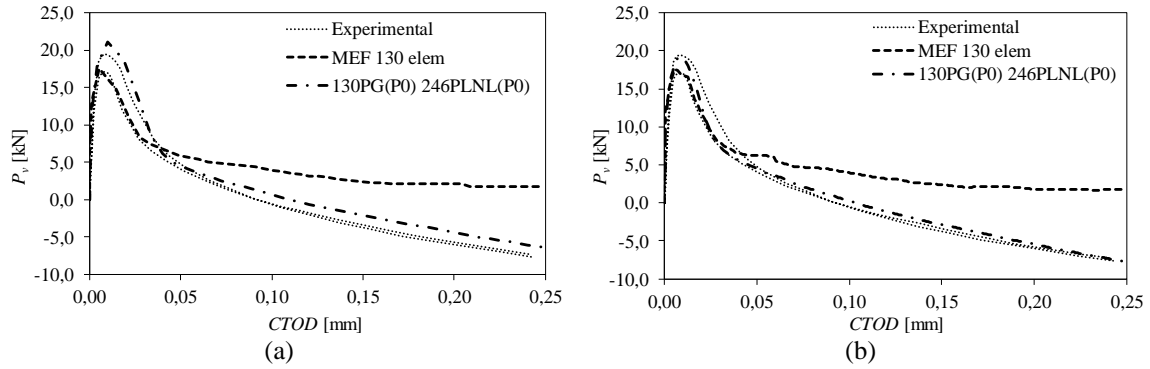


Figura 6.4 – Curvas  $P_v$  vs.  $CTOD$  da solução experimental e a metodologia do MEF $^{g-1}$  para malha com 130 elementos no problema global e 246 elementos no PLNL para; (a) 50 e; (b) 250 passos de carga..

Em ambos os cenários se observa uma melhora nas soluções do MEF $^{g-1}$  quando aumenta o número de passos de carga, o que resulta em uma suavização em torno de  $P_{máx}$ , além de estar dentro da faixa experimental. Isso levou a escolha de 250 passos de carga para todas as simulações deste capítulo.

Nas curvas da Figura 6.3(b) e Figura 6.4(b) observa-se que a solução pelo MEF consegue capturar de forma eficiente até a região no entorno de  $P_{máx}$ , porém a região de amolecimento não consegue reproduzir o comportamento experimental. As soluções pelo MEF $^{g-1}$  conseguem reproduzir tanto a região de  $P_{máx}$  quanto a região de amolecimento à medida que se aumenta o grau da função de enriquecimento polinomial (Figura 6.3(b)) e o número de elementos (Figura 6.4(b)) no PLNL. Isso evidencia a potencialidade do método, uma vez que foi utilizado a mesma malha do MEF para simular o problema global no MEF $^{g-1}$ .

Além disso, constata-se que as cargas máximas obtidas pelo MEF e pelo MEF $^{g-1}$  estão dentro da faixa experimental. Isso leva a concluir que as soluções pelo MEF $^{g-1}$  com 66 elementos enriquecidos por funções P1 e 246 elementos sem enriquecimento são precisas, uma vez que ambas conseguem reproduzir toda a solução experimental, mesmo com as análises não lineares apenas no PLNL, mantendo-se linear no problema global. Na Figura 6.5 é visualizado a variação da força  $P_h$  em função do deslocamento horizontal imposto  $\delta_h$  das soluções experimentais, do MEF e do MEF $^{g-1}$  para 250 passos de carga.

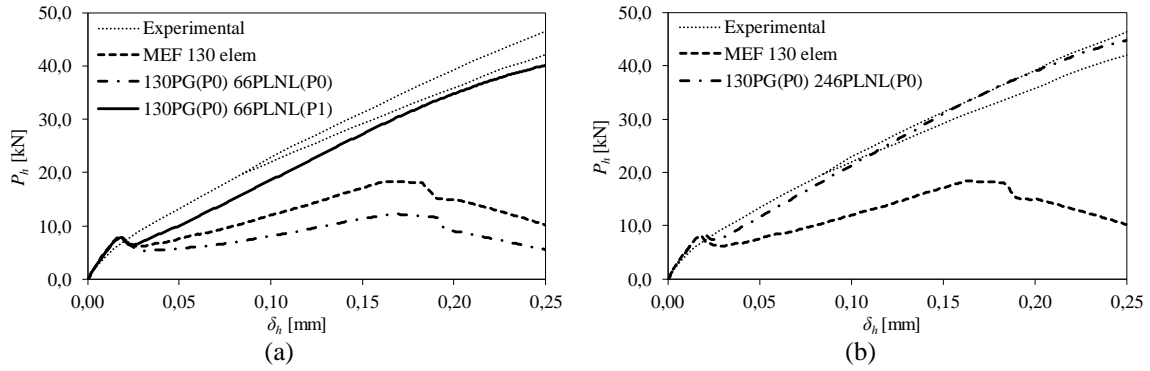


Figura 6.5 – Curvas  $P_h$  vs.  $\delta_h$  da solução experimental e a metodologia do MEF $^{g-1}$  para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 66 elementos no PLNL; (b) 246 elementos no PLNL.

Observa-se que a solução pelo MEF não consegue reproduzir o aumento contínuo da força à medida que  $\delta_h$  é aplicado conforme apresentado nas soluções experimentais. No entanto, a solução pelo MEF $^{g-1}$  captura de forma eficiente esse aumento da força, quando a malha do PLNL é submetida ao refinamento na ordem polinomial das funções de enriquecimento (Figura 6.5(a)) e ao aumento do número de elementos (Figura 6.5(b)). Na Figura 6.6 é visualizado o trabalho relativo do resíduo em todos os passos de carga onde o PLNL possui 66 elementos enriquecido por funções P1 (Figura 6.6 (a)) e 246 elementos sem enriquecimento (Figura 6.6 (b)).

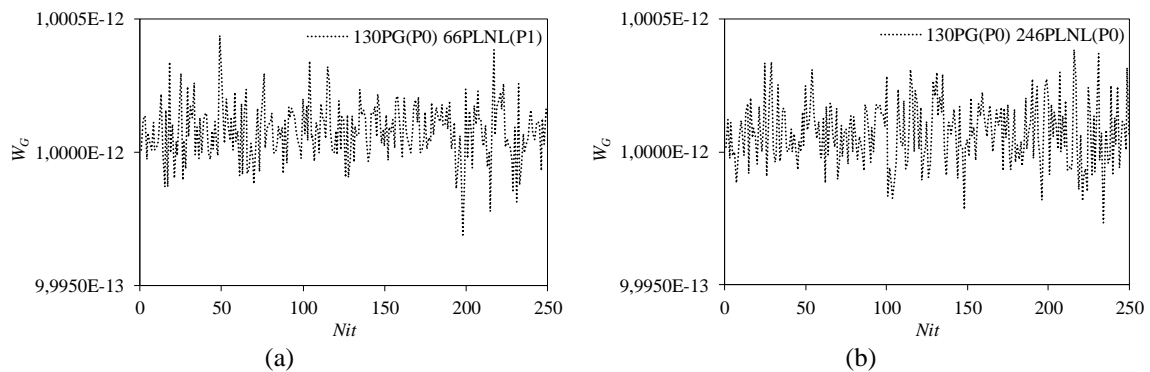


Figura 6.6 – Trabalho relativo do resíduo para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 66 elementos no PLNL; (b) 246 elementos no PLNL.

Em todos os passos de carga o  $W_G$  flutua em torno de  $10^{-12}$ , o que acarreta na não necessidade de iterações não lineares no problema global. Na Tabela 6.2 são mostrados o NGL utilizados para simulação do primeiro passo de carga para o MEF e MEF $^{g-1}$  com 66 elementos enriquecidos por funções P1 e 246 elementos sem enriquecimento no PLNL.

Tabela 6.2 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 130 elem e MEF<sup>g-1</sup> com 130PG(P0) 66PLNL(P1) e 130PG(P0) 246PLNL(P0).

Problema	PGIL	PLNL	PGEL
MEF 130 elem	170	-	-
130PG(P0) 66PLNL(P1)	170	206	224
130PG(P0) 246PLNL(P0)	170	290	224

A Tabela 6.2 mostra no primeiro passo de carga um maior NGL no MEF<sup>g-1</sup> do que no MEF, isso se deve a simulação do MEF relacionar ao problema global que é a única escala que o mesmo resolve. A estratégia global local além da resolução do PGIL com a mesma malha utilizada na simulação do MEF é necessário a resolução adicional do PLNL e do PGEL. O PGEL possui graus de liberdade superior ao PGIL devido os nós centrais enriquecidos por funções globais locais. Na Figura 6.7 são mostrados o *Nit* em relação ao *Np* ao longo de toda a simulação não linear para o domínio global no MEF e para o PLNL do MEF<sup>g-1</sup> para os cenários apresentados na Tabela 6.2.

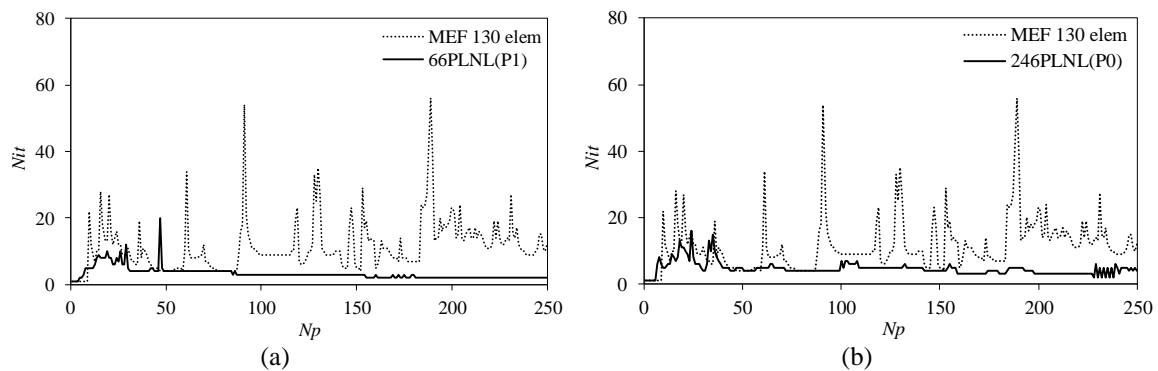


Figura 6.7 – Número de iterações em função do número do passo para MEF 130 elem e; (a) 66PLNL(P1); (b) 246PLNL(P0).

Da Figura 6.7 conclui-se que a simulação dos PLNL ao longo dos passos de carga obteve uma convergência mais rápida em relação a simulação do MEF. Isso se deve ao processo iterativo da simulação pelo MEF ser aplicada a todo o domínio global resultando num grande sistema não linear, o que dificulta na sua convergência. Já no PLNL o processo iterativo ocorre num domínio em torno de 50 % conseguindo capturar de forma mais eficaz sua solução. Na Figura 6.8 são mostrados os NGL totais considerando todas as iterações e passos de carga da simulação pelo MEF e MEF<sup>g-1</sup> mostrados na Tabela 6.2 e Figura 6.7.

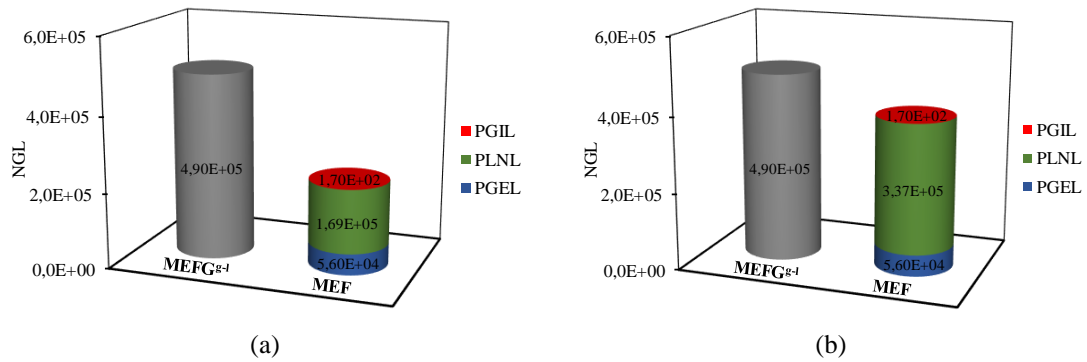


Figura 6.8 – Graus de liberdade totais para MEF 130 elem e MEFG<sup>g-1</sup>; (a) 130PG(P0) 66PLNL(P1); (b) 130PG(P0) 246PLNL(P0).

Ao longo de todos os passos de carga o MEFG<sup>g-1</sup> torna-se mais eficiente que o MEF com relação ao NGL conforme a Figura 6.8, pois apesar do primeiro passo de carga possuir um NGL maior, o mesmo ao longo dos passos é ultrapassado pelo NGL da simulação do MEF. Isso acontece devido o *Nit* ser menor no PLNL (Figura 6.7), o PGIL emprega apenas uma iteração no passo de carga inicial e o PGEL emprega uma iteração em cada passo de carga, o que ocasiona essa diferença final a favor do MEFG<sup>g-1</sup>, o que o torna a melhor escolha. A comparação entre o mapa de fissuras do ensaio experimental e a distribuição de dano obtida ao final da simulação (passo 250) para o modelo do MEFG<sup>g-1</sup> são visualizados na Figura 6.9.

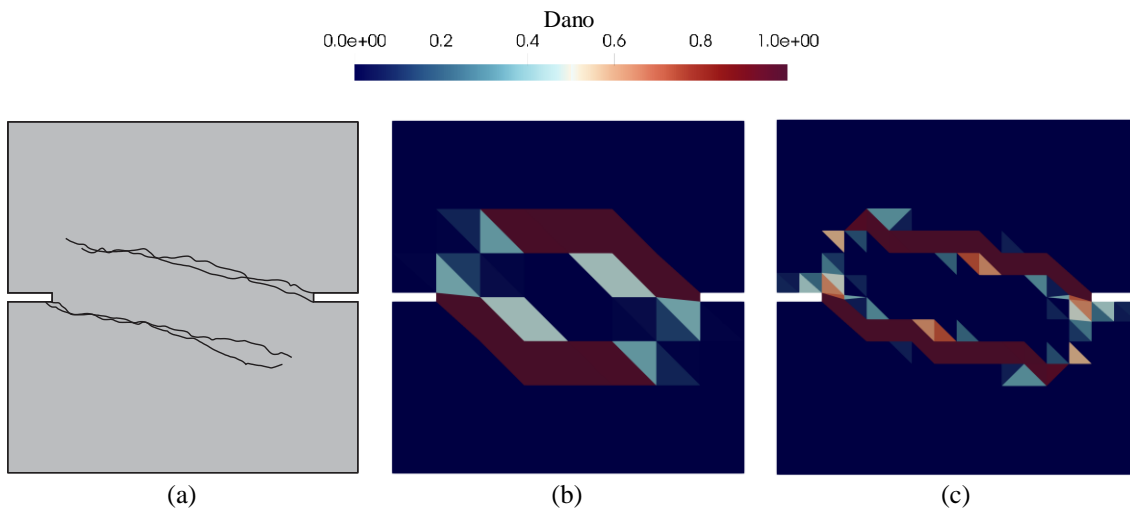


Figura 6.9 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras experimental; Distribuição de dano para o modelo do MEFG<sup>g-1</sup> com (b) 130PG(P0) 66PLNL(P1); (c) 130PG(P0) 246PLNL(P0).

Como pode ser observado a distribuição de dano nos dois cenários reproduz a fissura experimental mesmo estando sob modo misto de fratura, assim se conclui que o MEFG<sup>g-1</sup> tem habilidade para transferir precisamente a variável escalar de dano entre os domínios.

### 6.1.2 Análise dos problemas locais, número de iterações e graus de liberdade totais

Nesta seção o MEF<sup>g-1</sup> é simulado para dois domínios locais definidos a partir do problema global, no qual cada entalhe pertence a um respectivo PLNL e ambos são refinados pelo aumento da ordem polinomial das funções de enriquecimento e pelo aumento do número de elementos. Tratam-se dois cenários, onde no primeiro, o refinamento nos dois PLNL ocorre unicamente pelo aumento da ordem polinomial das funções de enriquecimento e cada PLNL é definido por uma malha de 29 elementos (Figura 6.10(b)). No segundo cenário o refinamento nos dois PLNL acontece pelo aumento do número de elementos e cada PLNL é constituído por malha com 106 elementos (Figura 6.10(c)). Devido os dois PLNL possuírem o mesmo número de elementos será denominado PLNL1,2. Na Figura 6.10 são apresentadas as malhas dos PGIL, PLNL1,2 e PGEL para os dois cenários apresentados. Os nós são enriquecidos com funções global local no PGEL (nós pretos na Figura 6.10(d)).

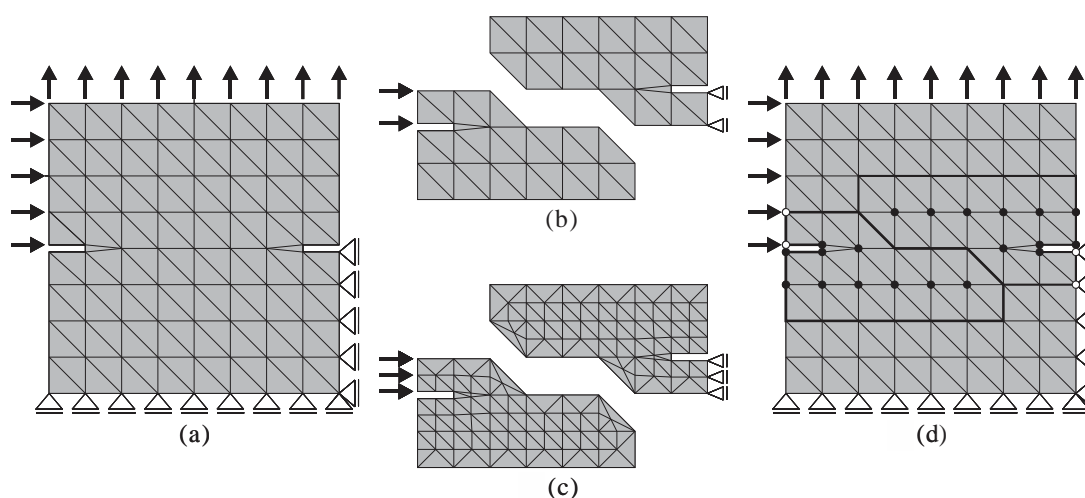


Figura 6.10 – Malhas utilizadas; (a) 130 elementos no PGIL; (b) 29 elementos no PLNL1,2; (c) 106 elementos no PLNL1,2; (d) 130 elementos no PGEL.

Nas curvas da Figura 6.11 são visualizados a variação da força  $P_v$  em função do  $CTOD$  das soluções experimentais, do MEF<sup>g-1</sup> com funções de enriquecimento polinomial P1. A solução pelo MEF<sup>g-1</sup> na Figura 6.11(a) é simulada com 130 elementos no PGIL e PGEL enriquecidos por funções P0 e P1 e 29 elementos no PLNL1,2 enriquecidos por funções P1. Na Figura 6.11(b) é visualizado a solução do MEF<sup>g-1</sup> com 130 elementos no PGIL e PGEL enriquecidos por funções P1 e 106 elementos no PLNL1,2 sem adição de enriquecimento polinomiais. A solução do MEF<sup>g-1</sup> com funções P1 foi utilizada, pois a solução pelo MEF não foi precisa na reprodução dos experimentos na seção 6.1.1.



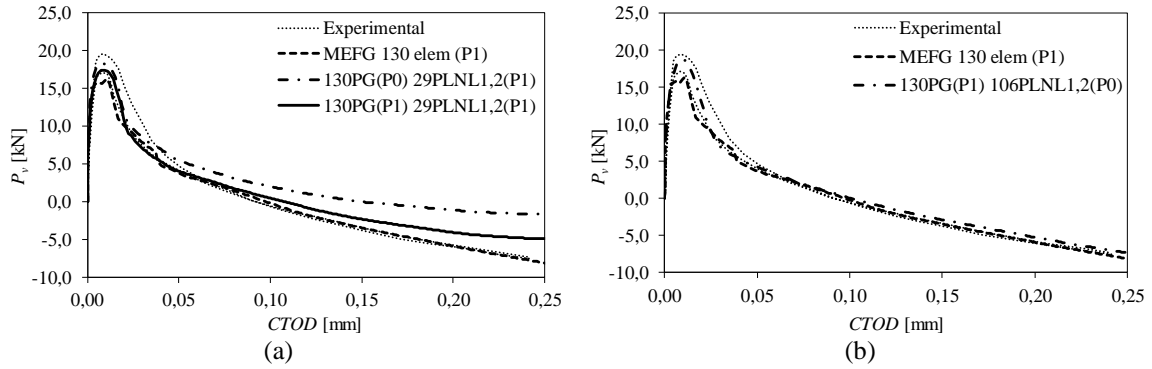


Figura 6.11 – Curvas  $P_v$  vs.  $CTOD$  da solução experimental e a metodologia do MEFG<sup>g-1</sup> para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.

Na Figura 6.11 constata-se que a solução do MEFG consegue reproduzir a região de amolecimento, porém no entorno de  $P_{máx}$  não possui suavidade e o valor está um pouco abaixo. A solução pelo MEFG<sup>g-1</sup> consegue reproduzir toda a solução experimental à medida que se adicionam funções de enriquecimento polinomiais P1 no problema global e PLNL1,2 na Figura 6.11(a). Apesar da solução pelo MEFG<sup>g-1</sup> não reproduzir a região do amolecimento melhor que a simulação pelo MEFG convencional, a mesma é eficiente, visto que possui apenas 29 elementos em cada PLNL onde ocorre o processo iterativo. Na Figura 6.11(b) visualiza-se a reprodução completa da solução experimental com adição das funções P1 no problema global e o aumento do número de elementos no PLNL1,2. O enriquecimento P1 no problema global fornece para o PLNL1,2 nas CC inexatas valores com acurácia. O mesmo é necessário, pois o PLNL1,2 não evidencia as características reais do ensaio do *DENT*, uma vez que cada PLNL possui apenas uma trinca. Na Figura 6.12 é visualizado a variação da força  $P_h$  em função do deslocamento horizontal imposto  $\delta_h$  das soluções experimentais, do MEFG e do MEFG<sup>g-1</sup> com as malhas e enriquecimentos propostos.

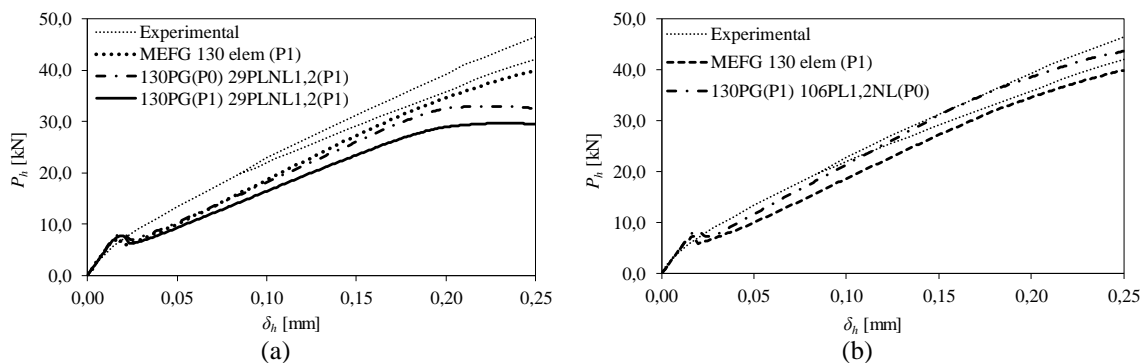


Figura 6.12 – Curvas  $P_h$  vs.  $\delta_h$  da solução experimental e a metodologia do MEFG<sup>g-1</sup> para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.

Na Figura 6.12(a) observa-se que a solução pelo  $\text{MEFG}^{g-1}$  consegue capturar o aumento de  $P_h$  à medida que  $\delta_h$  é imposto. Mesmo que a solução do  $\text{MEFG}^{g-1}$  não esteja próxima da solução experimental comparado com o MEFG, a mesma está dentro do previsto, visto que cada PLNL possui apenas 29 elementos. Na Figura 6.12(b) a solução pelo  $\text{MEFG}^{g-1}$  consegue capturar de maneira precisa todo o aumento de  $P_h$  à medida que  $\delta_h$  é imposto, de forma que a solução situa-se dentro da faixa das soluções experimentais. O trabalho relativo do resíduo para as situações em que o PLNL1,2 possui 29 elementos enriquecidos por funções P1 e 106 elementos sem enriquecimentos com o problema global em ambas, enriquecido por funções P1 encontram-se no apêndice. Na Tabela 6.3 são mostrados o NGL utilizados para simulação do primeiro passo de carga dos modelos apresentados na Figura 6.12 para o MEFG e  $\text{MEFG}^{g-1}$ .

Tabela 6.3 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEFG 130 elem (P1) e  $\text{MEFG}^{g-1}$  com 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1) e 130PG(P1) 106PLNL1,2(P0).

Problema	PGIL	PLNL	PGEL
MEF 130 elem (P1)	406	-	-
130PG(P1) 29PLNL1,2(P1)	406	180	446
130PG(P1) 106PLNL1,2(P0)	406	264	446

Observa-se no primeiro passo de carga um maior NGL no  $\text{MEFG}^{g-1}$  devido a consideração de três problemas comparado com o MEFG que é simulado pela mesma malha do PGIL. Na Figura 6.13 são mostrados o  $N_{it}$  em relação ao  $N_p$  ao longo de toda a simulação não linear para o domínio global no MEFG e as iterações não lineares apresentadas no PLNL1,2 no  $\text{MEFG}^{g-1}$  das simulações mostradas na Tabela 6.3.

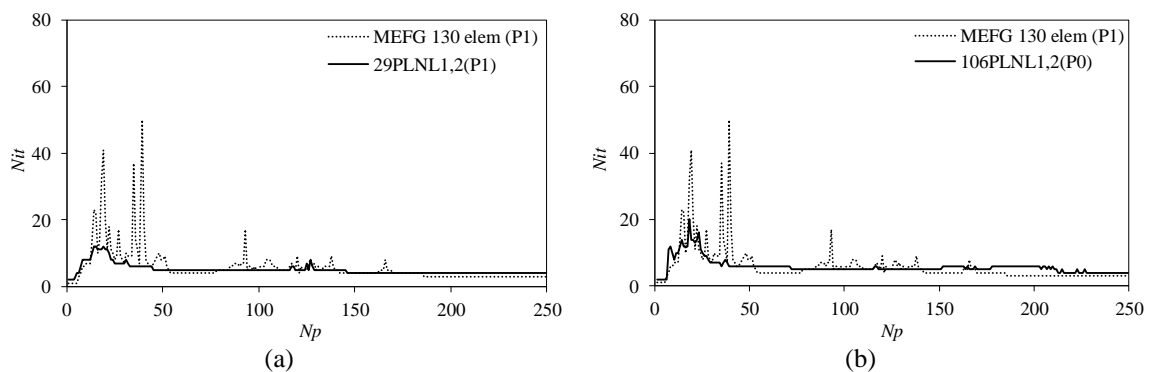


Figura 6.13 – Número de iterações em função do número do passo para MEFG 130 elem (P1) e; (a) 29PLNL1,2(P1); (b) 106PLNL1,2(P0).

Da Figura 6.13 a solução do MEFG obteve uma convergência melhor que a do MEF apresentada na seção 6.1.1, devido a adição das funções de enriquecimento P1, o que ocasiona menores iterações. No entanto, a convergência no PLNL1,2 nos dois cenários

é melhor que a simulada pelo MEF<sub>G</sub>, pois o processo iterativo em cada domínio local ocorre em torno de 22 % do problema global, o que faz do entalhe uma maior parcela nesse domínio.

Na Figura 6.14 são mostrados os NGL totais considerando todas iterações e passos de carga da simulação pelo MEF<sub>G</sub> e MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> mostrado na Tabela 6.3 e Figura 6.13. Como esperado ao longo dos passos de carga o MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> é mais eficiente que o MEF<sub>G</sub> com relação ao NGL, pois o *Nit* é inferior no MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup>, uma vez que as iterações não lineares ocorrem somente no PLNL1,2 e no PGIL e PGEL realizam apenas uma iteração em cada passo de carga. A quantidade de graus de liberdade no MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> são maiores que os apresentados na seção 6.1.1, pois simulam-se dois PLNL separadamente. No entanto, os PLNL são solucionados com uma quantidade de graus de liberdade menor individualmente, o que o torna mais rápido na resolução do problema iterativo.

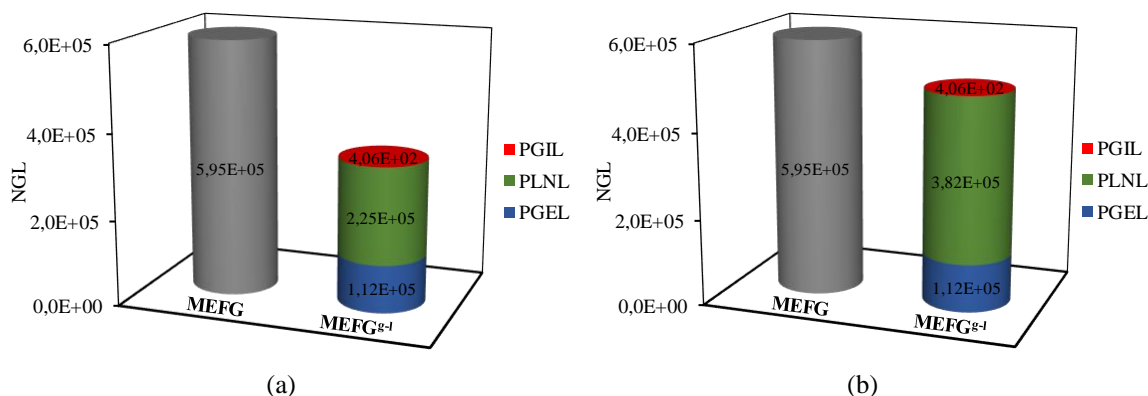


Figura 6.14 – Graus de liberdade totais para MEF<sub>G</sub> 130 elem (P1) e MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup>; (a) 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1); (b) 130PG(P1) 106PLNL1,2(P0).

A comparação entre o mapa de fissuras do ensaio experimental e a distribuição de dano obtida ao final da simulação (passo 250) para o modelo do MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> são visualizados na Figura 6.15. A distribuição do dano obtido pelas simulações MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> reproduz as fissuras do ensaio experimental, como mostra a Figura 6.15. O MEF<sub>G</sub><sup>g-1</sup> tem habilidade para vincular precisamente a variável escalar de dano mesmo com dois domínios locais separados para o mesmo domínio global em uma estrutura sob modo misto de abertura de fissuras.

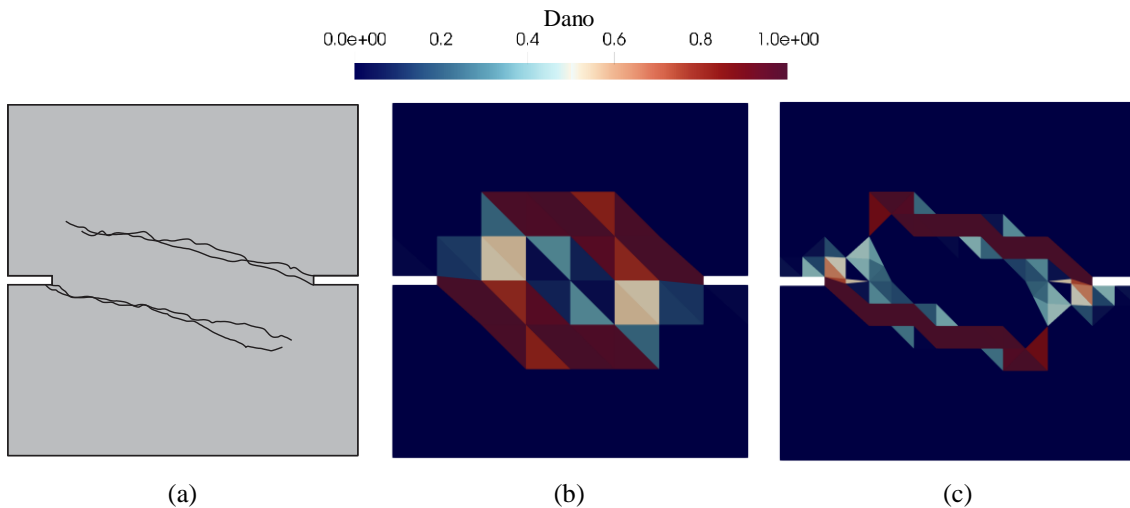


Figura 6.15 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras experimental; Distribuição de dano para o modelo do MEF<sup>g-1</sup> com (b) 130PG(P1) 29PLNL1,2(P1); (c) 130PG(P1) 106PLNL1,2 (P0).

## 6.2 PROBLEMA ESCALA REAL: BARRAGEM DE CONCRETO

A barragem de concreto em escala real simulada neste capítulo é a barragem de Koyna, que se localiza na Índia cuja apresentação se faz pela Figura 6.16. Esta barragem é referência para simulação de sismos (Lee e Fenves, 1998; Guanglun *et al.*, 2000; Wu e Li, 2007) e propagação de fratura estática, por meio da altura do transbordamento da água na barragem, conhecido na literatura técnica por *overflow*.

A análise estática foi estudada por diversas pesquisas com aplicação de diferentes métodos para propagação do defeito por meio do *overflow*. Gioia *et al.* (1992) foi quem primeiro estudou com a aplicação da mecânica da fratura linear e modelo de plasticidade. O modelo de fissuração distribuída foi estudado por Bhattacharjee e Léger (1994) e Cai *et al.* (2008), um modelo de dano contínuo foi proposto por Ghrib e Tinawi (1995). Jirásek e Zimmermann (2001) e Oliver *et al.* (2002) simularam elementos finitos com descontinuidade embutida. Um modelo de trinca coesiva foi desenvolvido por Shi *et al.* (2013), Roth *et al.* (2015) combinaram um modelo de dano contínuo anisotrópico com o *XFEM*. Duas técnicas numéricas baseadas no campo do caminho da trinca e injeção de deformação foram desenvolvidas por Dias *et al.* (2016). O modelo campo de fase para fraturas frágeis foi implementado por Santillán *et al.* (2017) e o modelo de zona coesiva regularizado pelo campo de fase para modelagem de falhas localizadas foi desenvolvido por Wu *et al.* (2019). A simulação da barragem pelo modelo de dano com lei de amolecimento bilinear com a utilização do MEF e com a metodologia proposta do MEF<sup>g-1</sup> não se encontra na literatura técnica.

## 6.2.1 Geometria, propriedades material e de fratura

A barragem constitui de uma trinca inicial com 1,93 m de comprimento localizado na face montante, que equivale a 10 % da largura da barragem na direção da mudança de inclinação na face jusante, conforme as pesquisas para análise estática apresentadas na seção 6.2. A fratura é localizada nesse ponto, pois Gioia *et al.* (1992) simularam diferentes pontos para a fratura inicial e concluíram que nesse ponto foi o mais crítico em termos de resistência estrutural última. As cargas devido ao peso próprio e a pressão hidrostática do reservatório cheio são inicialmente colocadas, depois a carga relacionada à altura de transbordamento acima da crista denominada de *overflow* é aplicada de forma incremental, por meio de uma pressão constante, com a pressão da água dentro da trinca desprezada.

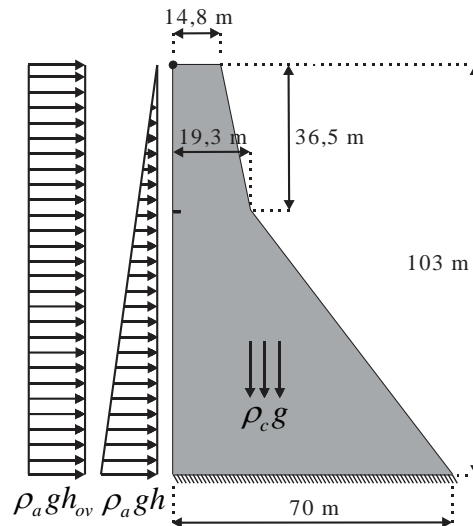


Figura 6.16 – Geometria, carregamento e CC na barragem (Adaptada de Wu *et al.*, 2019).

As propriedades do material e de fratura para a realização do ensaio numérico encontram-se na Tabela 6.4 que foi retirado de Roth *et al.* (2015) e Wu *et al.* (2019).

Tabela 6.4 – Propriedades do material e de fratura da barragem.

$E$ (GPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_F$ (N/m)	$\psi$	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_a$ (kg/m <sup>3</sup> )	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$h$ (m)
25	0,20	1,0	10,0	35	100	0,25	2450	1000	9,81	103

Nesta barragem, o objetivo será analisar as curvas que relacionam a altura do *overflow* ( $h_{ov}$ ) em função do deslocamento horizontal da crista ( $\delta_{hc}$ ). Esse modelo é submetido a modo misto de abertura de fratura, em que a variável de controle utilizada é a deformação equivalente de von Mises modificado. Todos os resultados obtidos pela solução da metodologia proposta do MEF<sup>g-1</sup> são comparados com resultados obtidos

de ensaios de natureza numérica retirados da literatura técnica e simulado pelo MEF, por meio do programa LACHESIS.

### 6.2.2 Análise pelo MEF<sup>g-1</sup>

Nesta seção, o MEF<sup>g-1</sup> é modelado, de modo que o PLNL com entalhe inicial é uma parcela do problema global sem entalhe e não há refinamento da malha no PLNL a partir do problema global. A barragem é discretizada por elementos triangulares lineares, de modo a formar uma malha com 2720 elementos para o PGIL e PGEL, onde o entalhe foi preenchido por elementos. Na região central se encontra o PLNL definido por 2375 elementos e o entalhe é explícito, no qual transfere-se a rigidez nula para o PGEL. O refinamento é desconsiderado, visto que a malha do problema global constitui uma maior quantidade de elementos, pois o modelo necessita por sua complexidade, devido a condição de modo misto causado pelos diversos carregamentos atuantes. Isso leva a não carecer um refinamento no PLNL a partir do problema global, pois possui elementos suficientes e causaria custo computacional desnecessário. Na Figura 6.17 são visualizadas as malhas do PGIL, PLNL e PGEL necessárias para a estratégia global local.

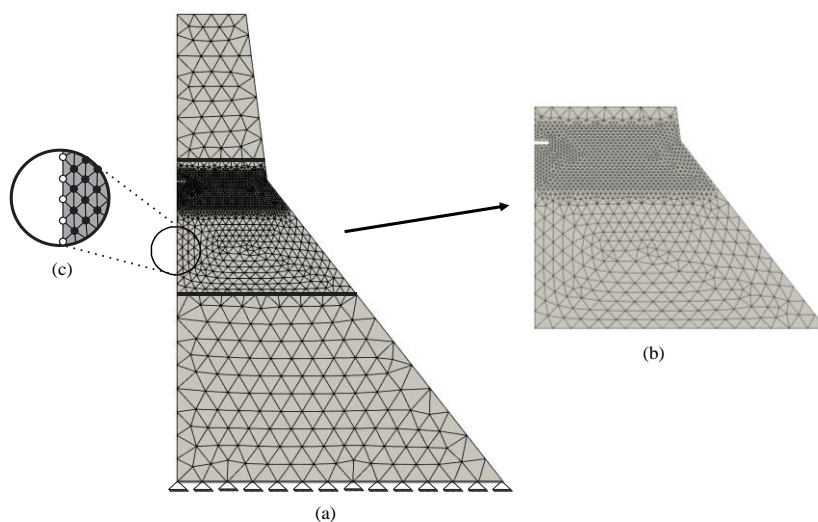


Figura 6.17 – Malhas utilizadas na estratégia global local; (a) PGIL e PGEL; (b) PLNL; (c) nós enriquecidos por funções global local.

Os nós situados na face montante da barragem e nas CC inexatas não são enriquecidos. Nesse modelo as CC inexatas no PLNL são fornecidas diretamente pela solução dos deslocamentos do PGIL e PGEL do passo anterior, diferente dos modelos anteriores analisados. São aplicados passos de pressão constante de  $h_{ov}$ , neste caso, adota-se altura de 12m como um valor fixo para aplicar de forma incremental. Em algumas análises do

MEF e MEFG<sup>g-1</sup> simulados, a altura escolhida não será alcançada devido a ruptura da barragem ocorrer com  $h_{ov}$  menor, o que acarreta em diferentes passos de carga total ao final da simulação.

Nas curvas da Figura 6.18 são visualizadas a variação  $h_{ov}$  em função do  $\delta_{hc}$  das simulações pelo MEF com malha refinada constituída por 9835 elementos, simulações do MEFG<sup>g-1</sup> submetidas a estado plano de tensão (PL- $\sigma$ ) e deformação (PL- $\epsilon$ ). Além disso são visualizadas as curvas simuladas nos trabalhos baseados em um modelo de plasticidade (Gioia e Bazant, 1992) submetido a um estado plano de deformação, um modelo de dano contínuo anisotrópico com o XFEM (Roth *et al.*, 2015) e um modelo campo de fase denominado *phase-field* para fraturas frágeis (Santillan *et al.*, 2017) submetidos a um estado plano de tensões.

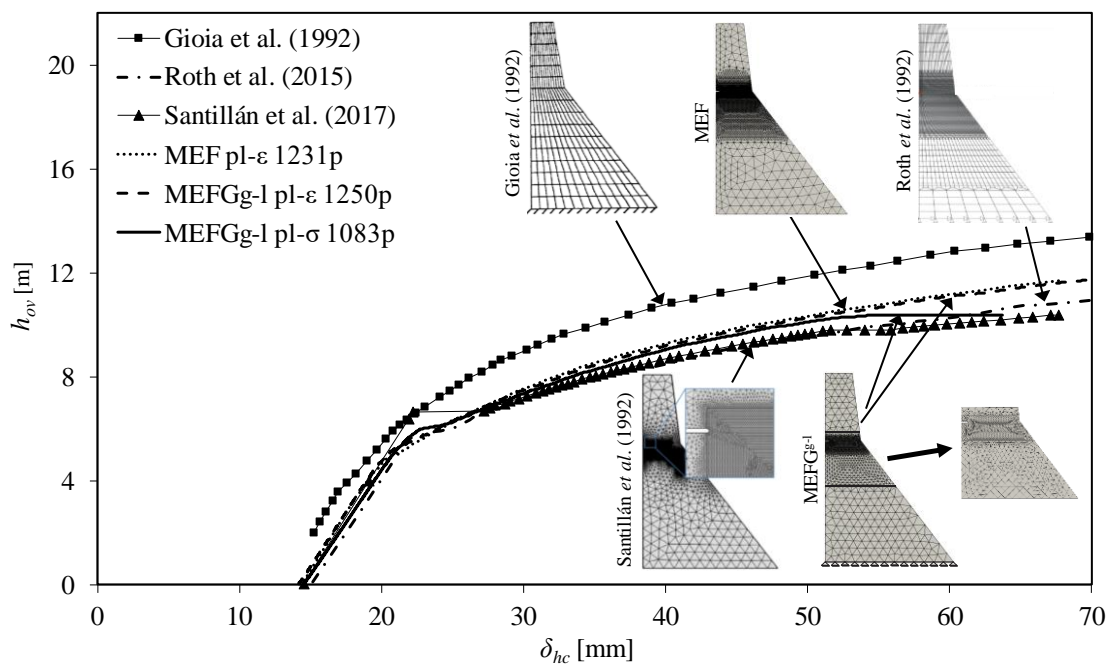


Figura 6.18 – Curvas  $h_{ov}$  vs.  $\delta_{hc}$  das simulações pelo MEF, MEFG<sup>g-1</sup> e outros autores com diferentes metodologias.

Das curvas da Figura 6.18 observa-se que a solução pelo MEF e MEFG<sup>g-1</sup> conseguem capturar de forma eficiente o *overflow*, acompanhando as soluções da literatura técnica, com exceção ao modelo de plasticidade que está em desacordo com todas soluções. As soluções sob condições de deformação plana possuem resultados razoáveis em relação ao da literatura para  $\delta_{hc}$  superior a 50mm. Isso se deve ao fato da condição de deformação plana atuar de maneira eficiente na simulação de barragens, por meio de

uma deformação nula na direção do comprimento, o que não ocorre nas curvas com simulações considerando estado plano de tensões. Na Tabela 6.5 são apresentados o número e o tipo de elementos, bem como o número de nós em cada elemento para simulação das curvas da Figura 6.18.

Tabela 6.5 – Número e tipo de elemento nos diferentes métodos.

Problema	Nº elementos	Tipo	Nº nós p/ elemento
Gioia <i>et al.</i> (1992)	224	Quadrilateral	8
Roth <i>et al.</i> (2015)	4320	Quadrilateral	4
Santillan <i>et al.</i> (2017)	84559	Triangular	3
MEF	9835	Triangular	3
MEFG <sup>g-1</sup>	2720/2375/2720*	Triangular	3

\*(PGIL/PLNL/PGEL)

A solução do MEFG<sup>g-1</sup> destaca-se em relação as outras soluções, pois necessita de uma quantidade de elementos no problema global menor que a malha de Roth *et al.* (2015), mesmo com elementos quadrilaterais e a malha com elementos triangulares de Santillan *et al.* (2017). Além disso, a solução do MEFG<sup>g-1</sup> alcança resultados similares ao simulado pelo MEF com uma menor quantidade de elementos, mesmo se considerar a soma dos três problemas. Na Figura 6.19 é visualizado o trabalho relativo do resíduo para as soluções do MEFG<sup>g-1</sup> apresentada anteriormente para todos os passos de carga.

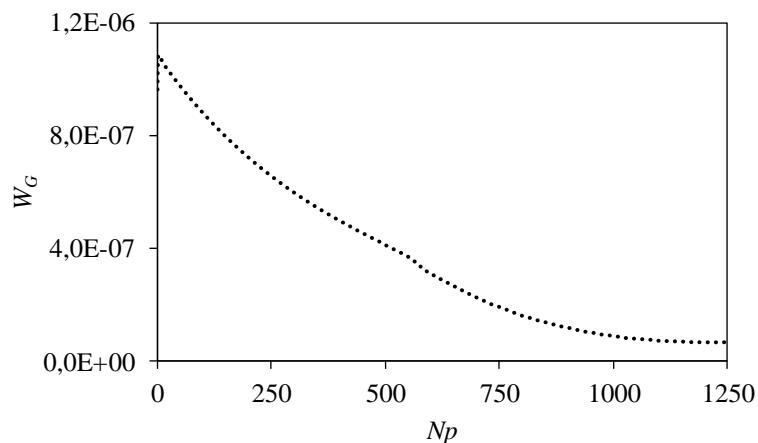


Figura 6.19 – Trabalho relativo do resíduo para solução do MEFG<sup>g-1</sup> ao longo dos passos de carga.

O trabalho  $W_G$  possui como maior valor a ordem de  $10^{-6}$ , o que acarreta na não necessidade de iterações não lineares no problema global. Esses valores são diferentes em relação aos modelos já apresentados, que são da ordem  $10^{-12}$ , isso ocorre devido a barragem trabalhar com forças como parâmetro de controle e nos demais modelos foram os deslocamentos. Na Figura 6.20 ilustram-se soluções do MEF juntamente com soluções do MEFG<sup>g-1</sup> para passos de carga distintos.



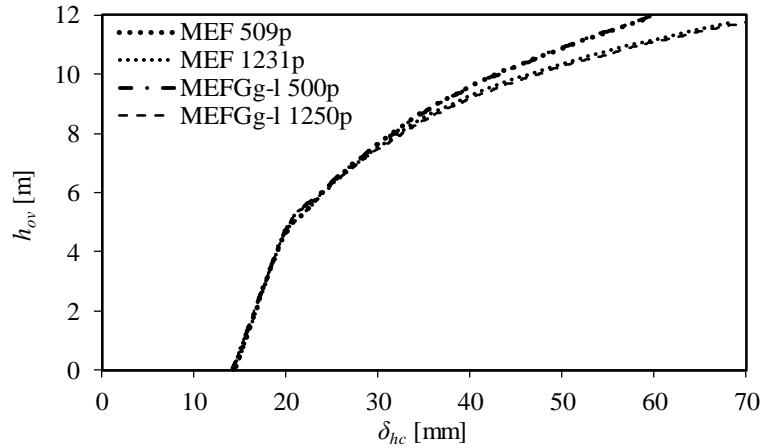


Figura 6.20 – Curvas  $h_{ov}$  vs.  $\delta_{hc}$  da solução do MEF e MEFG<sup>g-1</sup> para dois passos de carga.

Observa-se que as soluções do MEFG<sup>g-1</sup> corroboram com os resultados de referência quando se compara o total de passos de carga de mesma magnitude. Ambas soluções do MEF e MEFG<sup>g-1</sup> apresentam aumento no  $\delta_{hc}$  à medida que se aumenta a quantidade de passos de carga. Na Tabela 6.6 são mostrados o NGL utilizados para simulação do primeiro passo de carga dos modelos simulados pelo MEF e MEFG<sup>g-1</sup>.

Tabela 6.6 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 9835 elem e MEFG<sup>g-1</sup> com 2720PG(P0) 2375PLNL(P0).

<b>Problema</b>	<b>PGIL</b>	<b>PLNL</b>	<b>PGEL</b>
MEF 9835 elem	10050	-	-
2720PG(P0) 2375PLNL(P0)	2826	2458	5178

No primeiro passo de carga para o MEFG<sup>g-1</sup> com a consideração dos três problemas, o NGL é ligeiramente superior ao MEF (10462 e 10050 graus de liberdade). O PGEL neste modelo possui um número elevado de graus de liberdade comparado ao PGIL devido ao não refinamento do PLNL em relação ao global. No entanto, o PGIL é simulado com uma iteração no passo de carga inicial e no PGEL tem-se uma iteração para cada passo de carga. O processo iterativo ocorre no PLNL com 2458 graus de liberdade, enquanto no MEF o solucionador não linear corresponde aos 10050 graus de liberdade em cada iteração, o que onera o custo computacional. Na Figura 6.21 visualiza-se o número de iterações que se acumula ao longo da simulação (*Nitacum*) em função do  $Np$  normalizado pela quantidade total de passos ( $Ntp$ ) de cada simulação.

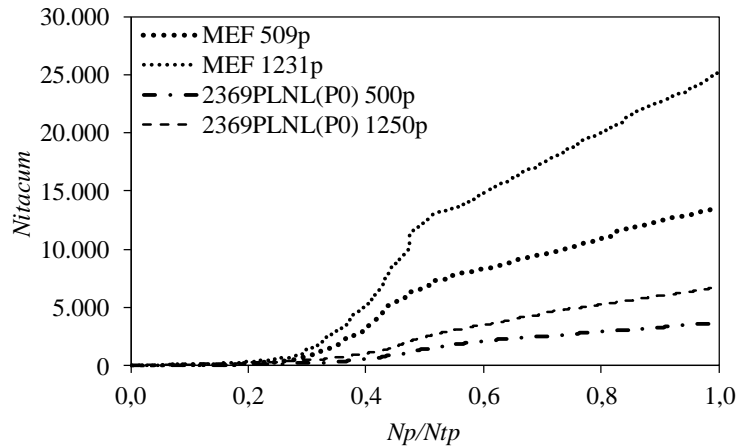


Figura 6.21 – Número de iterações acumuladas em função do número do passo normalizado pela quantidade total de passos para o MEF com 9835 elementos e 2369PLNL(P0).

Da Figura 6.21 conclui-se que as soluções do PLNL conseguiram uma convergência melhor que as soluções do MEF apresentada, pois a quantidade de iterações ao final da simulação foi consideravelmente menor, mesmo com uma quantidade maior de passos de carga. Conforme a Figura 6.20 e Figura 6.21, a solução com a estratégia global local com 1250 passos de carga possui mais iterações que a solução com 500 passos de carga, porém ela alcança melhores resultados, o que conclui ser a melhor opção. Na Figura 6.22 visualiza-se o NGL total necessário para a realização das simulações pelo MEF com 1231 passos de carga e a estratégia global local proposta para 1250 passos.

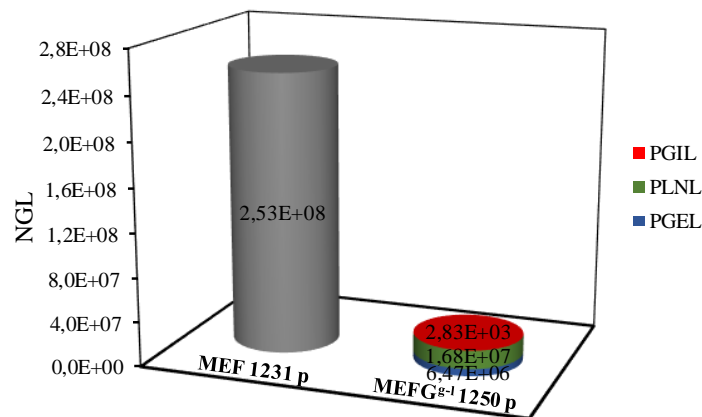


Figura 6.22 – Graus de liberdade totais para MEF com 9835 elementos e MEFG<sup>-1</sup> com 2720 elementos no problema global e 2375 elementos no PLNL.

Como esperado o MEFG<sup>-1</sup> é mais eficiente que o MEF com relação ao NGL, pois ao longo dos passos de carga, o número de iterações não linear é inferior no MEFG<sup>-1</sup> e ocorrem apenas no PLNL, com o problema global sem trinca permanecendo linear devido o pequeno trabalho relativo do resíduo. Isso se deve como já mencionado ao

PLNL ser uma parcela do problema global, o que facilita a convergência do modelo. Na Figura 6.23 visualiza-se o mapa de danificação da barragem pela solução do MEF<sup>g-1</sup>, juntamente com a solução encontrada em Wu *et al.* (2019).

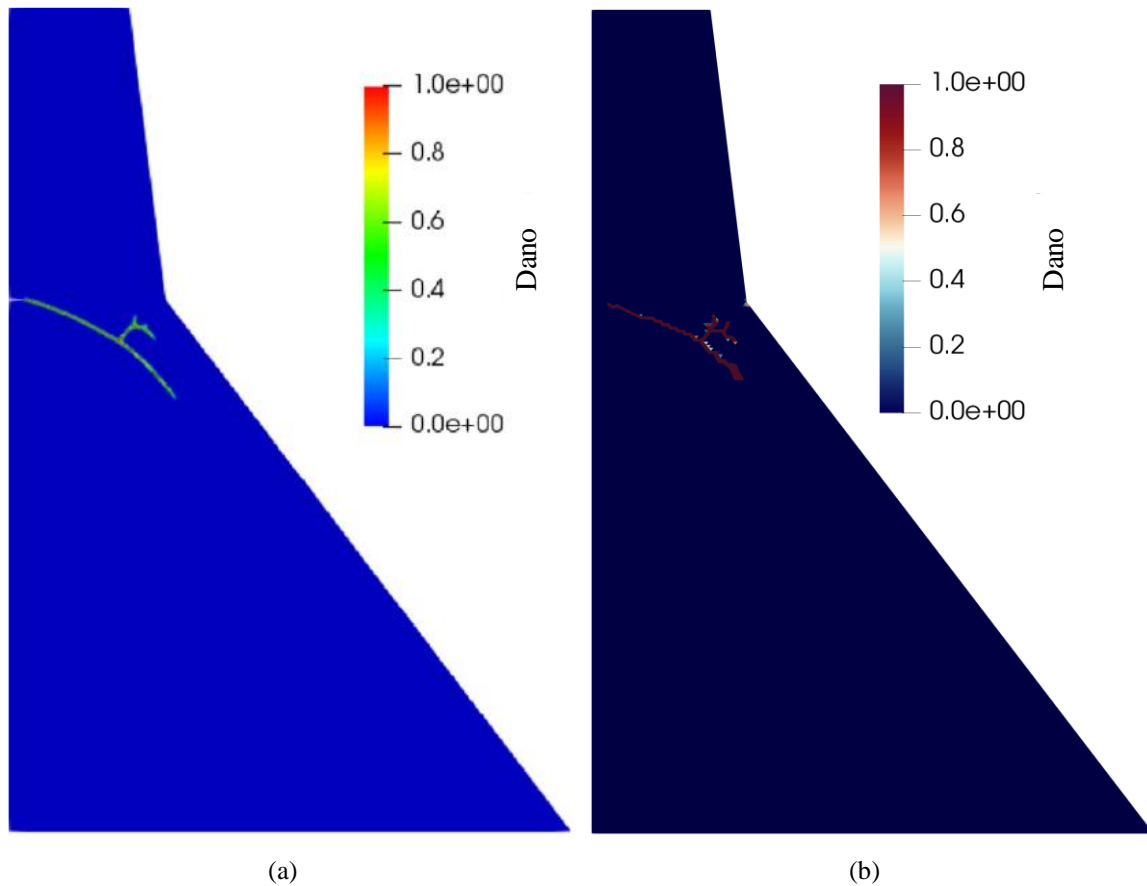


Figura 6.23 – Caminho da falha; (a) Mapa de fissuras de Wu *et al.* (2019) com tensão plana; (b) Dano para o modelo do MEF<sup>g-1</sup> com deformação plana.

A Figura 6.23 mostra que a solução do MEF<sup>g-1</sup> captura de forma eficiente a fissuração em todo o seu caminho, desde o início, percorre a mudança de direção em função das tensões de compressão que se desenvolvem na face jusante. Isso provoca o modo misto até a ramificação da trinca como encontrado em Wu *et al.* (2019). Esse modelo mostra a capacidade do MEF<sup>g-1</sup> na simulação de problemas encontrados na realidade da engenharia com diferentes tipos de cargas atuando simultaneamente. Além disso, todas as soluções envolvem a medida de  $\delta_{hc}$ , no qual se consegue quantificar uma variável de controle de forma satisfatória mesmo que ela não se encontre no PLNL, pois  $\delta_{hc}$  é retirado do problema global sem trinca e a análise não linear ocorre no domínio local de interesse.

### 6.3 MODELAGEM DE FÊMUR HUMANO

Neste modelo, cuja apresentação se faz pela Figura 6.24, simula-se um fêmur humano, no qual é submetido a um campo de deslocamentos prescritos verticais ( $\delta_v$ ) e apoiado na extremidade inferior.

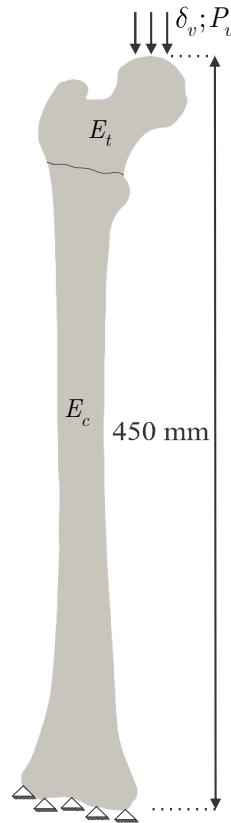


Figura 6.24 – Geometria, carregamento e CC na estrutura do fêmur.

O fêmur é composto pelo osso trabecular caracterizado por ser esponjoso ou poroso com módulo de elasticidade  $E_t$  e o osso cortical com módulo de elasticidade  $E_c$  no qual é mais compacto, resistente e se localiza externamente (Launey *et al.*, 2010). A espessura adotada para o fêmur foi de 20 mm e suas propriedades de fratura foram retiradas de Barth *et al.* (2010) e se encontram na Tabela 6.1.

Tabela 6.7 – Propriedades do material e de fratura do fêmur.

$E_c$ (GPa)	$\nu_t$	$E_t$ (GPa)*	$\nu_c$ *	$f_c$ (MPa)*	$f_t$ (MPa)*	$G_f$ (N/mm)	$G_F$ (N/mm)	$\psi$ *
20	0,30	10	0,12	50	50	0,1566	8,8445	0,25

\*Propriedades determinadas pelo presente autor

O objetivo será analisar a força vertical ( $P_v$ ) em função dos deslocamentos prescritos verticais ( $\delta_v$ ). O fêmur é discretizado por elementos triangulares lineares sob condições tensão plana e se aplica um total de 100 passos de carga. Esse modelo é submetido a

modo misto de abertura de fratura, em que a variável de controle utilizada é a deformação equivalente de von Mises modificada. O resultado obtido pela solução da metodologia proposta do  $MEFG^{g-1}$  é comparado com simulação realizada pelo MEF.

### 6.3.1 Estratégia global local do MEF $^{g-1}$

Nesta seção, o  $MEFG^{g-1}$  é modelado, de modo que um pequeno PLNL é retirado do problema global e refinado pelo aumento do número de elementos. Utiliza-se uma malha com 5952 elementos para o problema global e o PLNL é definido por 847 elementos. Na Figura 6.25 são visualizadas o fêmur real (Figura 6.25(a)), a classificação dos ossos apresentados anteriormente (Figura 6.25(b)), as malhas do PGIL, PLNL e os nós enriquecidos no PGEL na Figura 6.25(c), (e) e (d), respectivamente. Uma falha inicial é aplicada no material, de modo que o dano inicie nesse ponto e se propague a partir do mesmo ao longo da região do pescoço até o final da região refinada no PLNL.

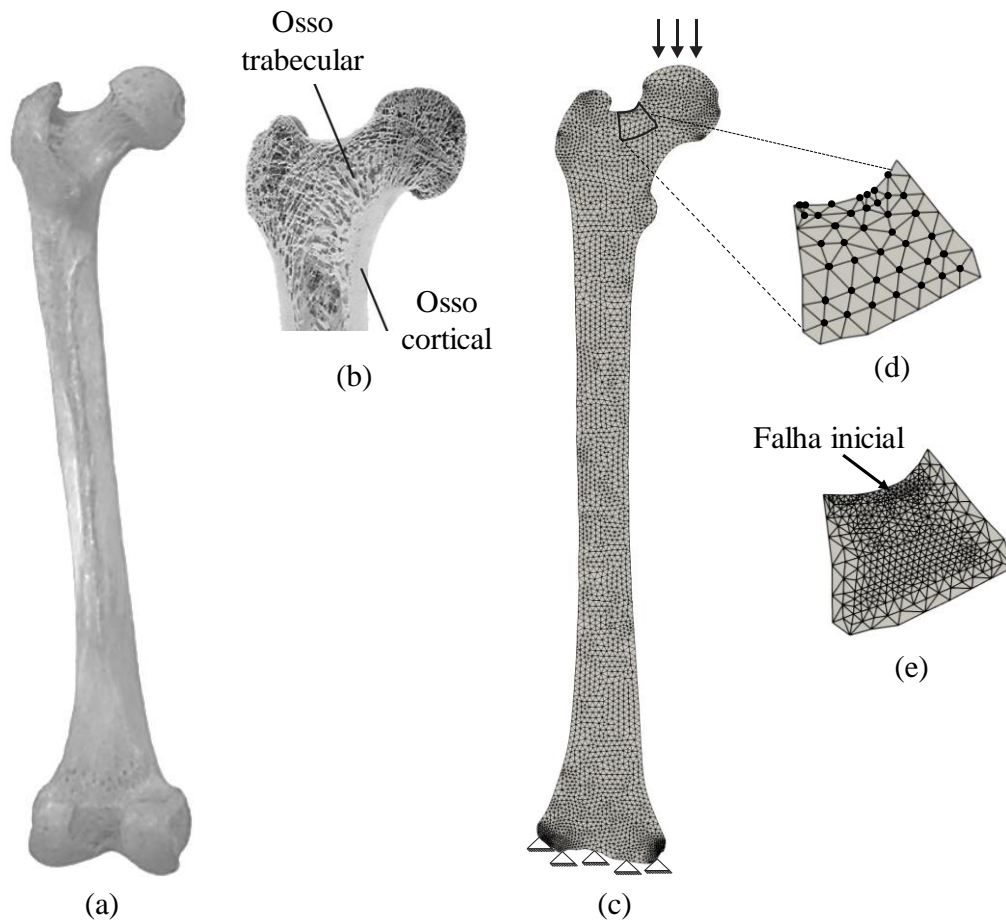


Figura 6.25 – Apresentação do fêmur; (a) Fêmur real (Polguy *et al.*, 2013); (b) Classificação dos ossos (Willems *et al.*, 2014); (c) Malha utilizada para simulação no PGIL; (d) Domínio local e nós enriquecidos por funções global local no PGEL; (e) PLNL refinado.

A solução de referência possui o nível de refinamento do PGIL e na região da falha tem o mesmo refinamento que o PLNL. Nesse modelo as CC no PLNL são fornecidas diretamente pela solução pelos deslocamentos do PGEL do passo anterior conforme a Equação (2.24). Emprega-se a técnica de danificar todo o elemento global quando o elemento local aninhado o atravessa. Uma vez que o número de elementos da malha local aninhada na malha global varia, danifica-se o elemento global completo quando pelo menos um elemento local obtiver dano e o maior valor será transferido. Na Figura 6.26 são visualizadas  $P_v$  em função de  $\delta_v$  das soluções do MEF discretizado por 6719 elementos juntamente com a solução da estratégia global local.

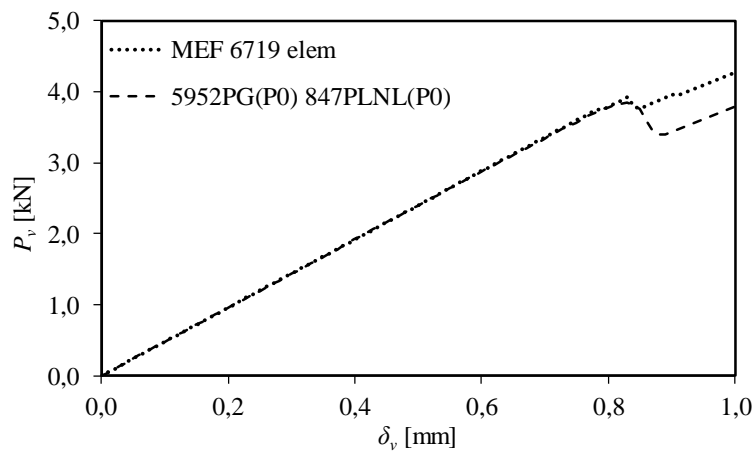


Figura 6.26 – Curvas  $P_v$  vs.  $\delta_v$  da solução do MEF e a estratégia global local do MEFG<sup>g-1</sup>.

Na Figura 6.26 observa-se que a solução pelo MEFG<sup>g-1</sup> consegue capturar  $P_v$  vs.  $\delta_v$  em todo trecho. Essa curva para  $\delta_v$  acima de 0,8 mm só foi possível na estratégia global local devido a danificação completa do elemento global, isso explica a queda mais brusca no valor da força em relação a simulação do MEF. Observa-se na curva, que a danificação da região escolhida danifica bruscamente no intervalo de poucos passos de carga, por causa de uma ruptura repentina da falha até o final do domínio escolhido. Isso leva ao elemento global não capturar a danificação caso o elemento global não danifique por completo. Na Figura 6.27 se observa o trabalho relativo do resíduo para a solução do MEFG<sup>g-1</sup> para todos os passos de carga. Os valores de  $W_G$  ao longo dos passos de carga flutuam ao redor de  $10^{-12}$ , o que comprova a resolução linear do PGEL.

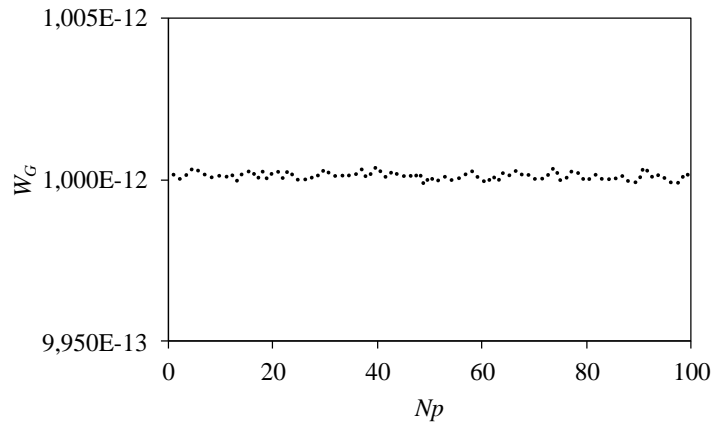


Figura 6.27 – Trabalho relativo do resíduo para fêmur.

A quantidade de graus de liberdade utilizados para simulação do primeiro passo de carga para as simulações do MEF e MEF<sup>g-1</sup> são descritos na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Graus de liberdade no primeiro passo de carga para MEF 6719 elem e MEF<sup>g-1</sup> com 5952PG(P0) 847PLNL(P0).

Problema	PGIL	PLNL	PGEL
MEF 6719 elem	7186	-	-
5952PG(P0) 847PLNL(P0)	6406	888	6484

No primeiro passo de carga como se ilustrou em todos os capítulos de simulações o MEF<sup>g-1</sup> necessita de três problemas para simulação, o que acarreta em um NGL elevado em comparado ao MEF. No entanto, o solver não linear ocorre apenas no PLNL e no MEF na escala global, o que já acarreta numa diferença significativa (888 e 7186 graus de liberdade). Apesar de constituir por três problemas, o PGIL e o PGEL são solucionados por uma iteração correspondente ao passo de carga. Na Figura 6.28 se visualiza o *Nitacum* da simulação na escala global pelo MEF e escala local pelo MEF<sup>g-1</sup> em função do  $N_p$ .

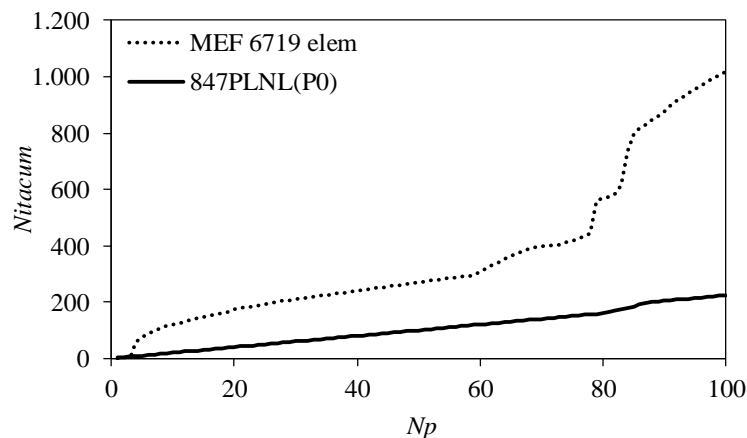


Figura 6.28 – Número de iterações acumuladas em função do número do passo para o MEF com 6719 elementos e 847PLNL(P0).

A convergência do PLNL é mais rápida que a solução do MEF ao final de todos os passos, pois a quantidade de iterações ao final da simulação foi consideravelmente menor. Ao longo desses passos de carga se leva em consideração essas iterações para processar o NGL total, como se visualiza na Figura 6.29.

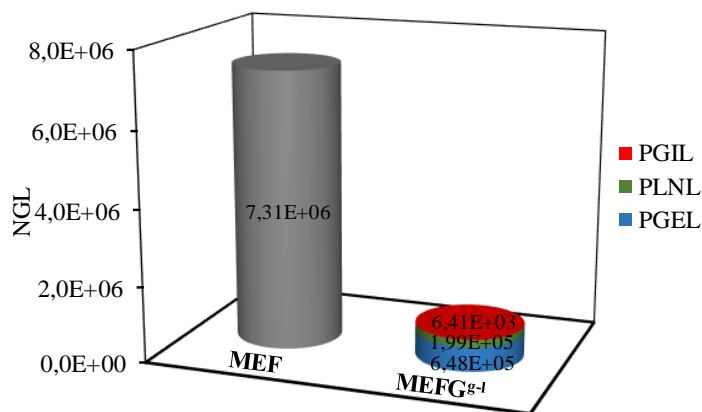


Figura 6.29 – Graus de liberdade totais para MEF e MEF<sup>g-1</sup> para modelo do fêmur.

A quantidade de graus de liberdade totais no MEF<sup>g-1</sup> é menor que no MEF, como já se espera nesse modelo pelo fato do PLNL corresponder um domínio reduzido do problema global, o que demanda poucos elementos e graus de liberdade. Isso facilita na convergência e manuseio do modelo com solução não linear. A distribuição de dano no elemento global se visualiza na Figura 6.30(a) e as curvas do ensaio de fratura experimental em um osso femoral sintético realizado por Freitas *et al.* (2014) são ilustrados na Figura 6.30(b).

Na Figura 6.30(a) a largura danificada foi maior que a do elemento local proposto, pois danifica-se o elemento global completo na direção do modo misto de fratura. Além disso, a solução envolve a medida de  $\delta_v$  e  $P_v$ , que não se encontram no PLNL, o que resulta quantificar satisfatoriamente essas variáveis mesmo quem não estejam no interior do PLNL. As curvas da Figura 6.30(b) foram apresentadas apenas para uma comparação qualitativa do comportamento das curvas com relação as soluções obtidas na Figura 6.26, em que se comportaram de maneira similar. A diferença encontrada deve-se pelas diferentes propriedades adotadas no ensaio numérico, a localização do domínio local e o ponto de inicialização da falha. Esse modelo mostra a capacidade do MEF<sup>g-1</sup> na simulação de estruturas biomecânicas que consistem em um tema relevante, com necessidade de desenvolvimento de novas metodologias e técnicas de simulação.



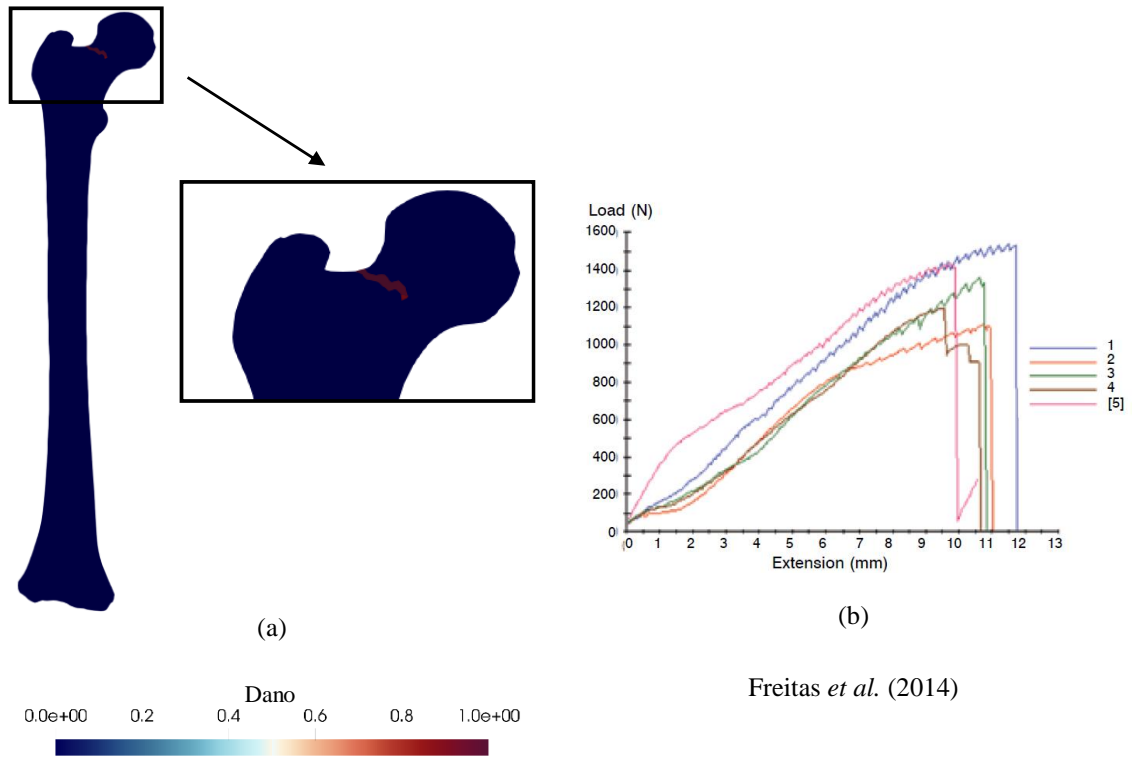


Figura 6.30 – Caminho da falha para modelo do fêmur; (a) estratégia global local; (b) Curvas de ensaio realizado por Freitas *et al.* (2014).

## 7 ABORDAGEM NÃO INTRUSIVA NA ESTRATÉGIA GLOBAL

Neste capítulo, é apresentado, a utilização de uma abordagem não intrusiva para simulação do MEF<sup>g-1</sup>, na qual se emprega uma plataforma de análise de elementos finitos comercial, no caso o *software Abaqus* para simulação do PLNL. A simulação numérica será empregada na *TPB* já exibida nos capítulos anteriores com um controle de deslocamento na região central superior e uma trinca na parte inferior. O refinamento se dará pelo aumento no número de elementos no PLNL com o problema global enriquecido por funções P2 em todas as simulações. Um modelo com elemento coesivo é utilizado e a trinca se propaga por meio do dano com curva de amolecimento linear para simular o comportamento não linear da *TPB*. Todas as soluções adquiridas das simulações propostas são comparadas com resultados obtidos por meio de ensaios numéricos realizados pelo *Abaqus* e ensaios experimentais já apresentados.

### 7.1 ESTRATÉGIA GLOBAL LOCAL NÃO INTRUSIVA PARA MODELO COESIVO

A abordagem não intrusiva está relacionada a utilização de um programa de elementos finitos comercial, no qual não há alteração nas suas características principais e faz papel auxiliar de um programa principal desenvolvido. O *software Abaqus/Standard* versão 6.14 da Simulia foi utilizado para simulação do PLNL de interesse. O PGIL e o PGEL para simulação do MEF<sup>g-1</sup> foram desenvolvidos na plataforma de programação *Matlab*. São descritos a seguir alguns trabalhos que descrevem a utilização não intrusiva em conjunto com técnicas global local.

No trabalho de Plews *et al.* (2011) problemas de gradiente térmico com a metodologia não intrusiva do MEF<sup>g-1</sup> foram simulados, no entanto utilizaram o software de MEF (*Abaqus*) para modelagem e simulação do problema global inicial. Já no problema local foi modelado e simulado as características locais no programa do MEF<sup>g-1</sup> adaptativo desenvolvido pelo *ISET (Illinois Scientific and Engineering Toolkit)*. O problema global enriquecido foi solucionado por meio de uma combinação entre o MEF e o MEF<sup>g-1</sup> por meio de uma condensação estática. Gupta *et al.* (2012) e Fillmore e Duarte (2018) abordaram a mesma metodologia descrita por Plews *et al.* (2011), porém aplicaram no campo da mecânica da fratura.



A sub-rotina de usuário *DISP* foi desenvolvida para prescrever as condições de contorno no PLNL, nesta pesquisa são aplicadas condições de contorno de *Dirichlet*. A mesma possui a característica de definir e redefinir qualquer magnitude das condições de contorno prescritas seja qual for o grau de liberdade (*Abaqus*, 2014). A sub-rotina *DISP* possui uma estrutura em um formato de obter variáveis (Deslocamentos) e fornecer informações de outras variáveis para auxiliar na implementação. A interface que contém a estrutura geral da sub-rotina *DISP* é apresentada na Figura 7.2 a seguir.

```

SUBROUTINE DISP(U,KSTEP,KINC,TIME,NODE,NOEL,JDOF,COORDS)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      DIMENSION U(3),TIME(2),COORDS(3)
C

      RETURN
      END

```

Figura 7.2 – Interface da sub-rotina de usuário *DISP* (*Abaqus*, 2014).

O valor *U* é o valor total da variável prescrita no ponto nodal definido, em particular os deslocamentos e as demais variáveis são repassadas como informação para auxiliar na definição de *U*. A variável *KSTEP* é relacionada ao número da análise corrente, *KINC* ao número do passo de carga atual, *TIME* ao valor corrente e total do passo de carga, *NODE* é o número do nó, *NOEL* é o número do elemento, *JDOF* é a direção do grau de liberdade e *COORDS* é uma matriz no qual as coordenadas dos nós são armazenadas.

O processo para simulação do MEF<sup>g-1</sup> não intrusivo se inicia com a geração da malha para o PGIL, seguido da definição da malha do PLNL, no qual a mesma requer um refinamento suficiente para capturar de forma eficiente as características de interesse. Define-se também as propriedades do material em ambos os problemas, assim como as propriedades do elemento coesivo que descreverá a fratura no PLNL e a quantidade de passos de carga. O arquivo de entrada do PGIL define os nós que serão enriquecidos com funções polinomiais. Já no PLNL o arquivo de entrada é um arquivo de extensão *inp*, no qual será transformado num arquivo de extensão *cae* de visualização do *Abaqus* para introduzir o arquivo com as sub-rotinas.

Uma vez definido os arquivos de entrada para os problemas, inicia-se a simulação pelo arquivo de extensão *cae* do *Abaqus* com a estrutura do PLNL. Antes do primeiro passo a ser aplicado no PLNL, a sub-rotina UEXTERNALDB é chamada e ativa o PGIL para que seus deslocamentos sejam calculados e escritos num arquivo de extensão *txt* e lidos em seguida pela sub-rotina DISP que prescrevem todas as CC nos respectivos nós do PLNL. O PLNL no qual um modelo coesivo é inserido para descrever o caminho da possível falha é solucionado no passo corrente e antes de se passar para o passo seguinte a sub-rotina UEXTERNALDB é novamente acessada e ativa o PGEL. A mesmo acessa o arquivo de saída do *Abaqus* com extensão *odb* para capturar as informações das variáveis de dano nos elementos coesivos e os deslocamentos obtidos no PLNL. Os parâmetros não lineares são transferidos para os respectivos elementos globais e os deslocamentos são necessários no sentido da construção das funções de enriquecimento global local para a solução do PGEL.

A partir do segundo passo de carga aplicado no PLNL, as CC são fornecidas pela solução de deslocamentos do PGEL do passo anterior com utilização da Equação (2.24). O PLNL é novamente solucionado e esse processo acontece sucessivamente até que todos os passos de carga inicialmente definidos sejam alcançados, o que leva a finalização da simulação. Na Figura 7.3 é apresentado um fluxograma que exhibe todo o processo metodológico descrito anteriormente.

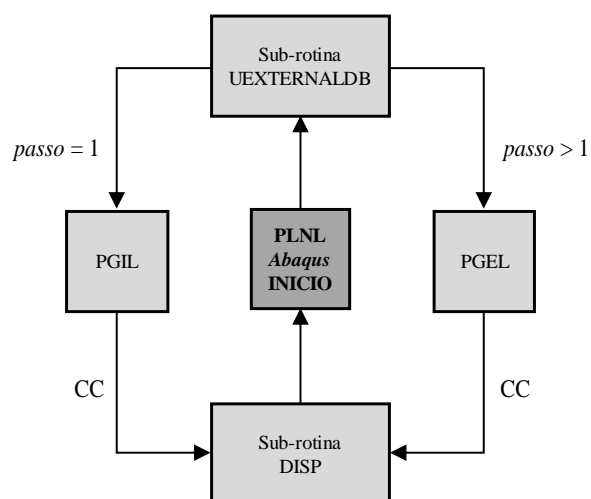


Figura 7.3 – Procedimento do MEFG<sup>g-1</sup> não intrusivo proposto.

### 7.1.1 Modelo coesivo linear

Entre os vários modelos não lineares contidos na biblioteca interna do *Abaqus* foi escolhido para simulação do PLNL o Modelo de fratura coesiva com lei de amolecimento linear para simulação de falha em estruturas em modo I de fratura. Esse modelo é adequado para reproduzir modos de falha que se baseiam nas fissuras ocasionadas por tração, no qual se colocam elementos para simular esse comportamento de falha, por meio de uma variável de danificação  $D$ . O modelo coesivo com curva de amolecimento linear apresenta uma lei em função da curva tensão ( $T$ ) versus separação de materiais ( $\Delta_n$ ) em modo I de fratura. Essa lei será inserida nos diversos elementos coesivos que serão postos do PLNL ao longo do possível trajeto da falha do material sendo visualizada na Figura 7.4 a seguir.

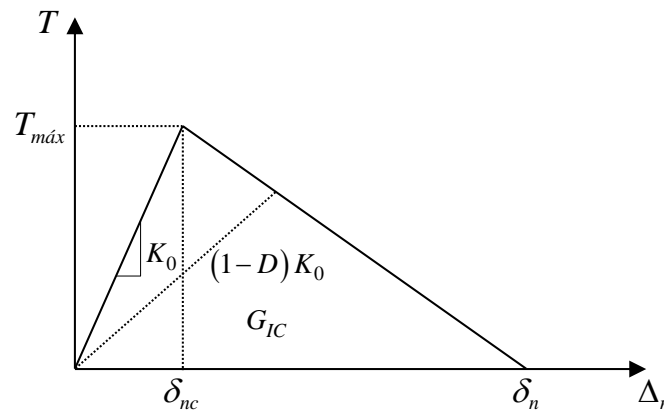


Figura 7.4 – Lei coesiva para curva de amolecimento linear.

A variável  $T_{máx}$  é a máxima tensão que a interface da trinca resistirá, no qual o dano se iniciará,  $\delta_{nc}$  é o deslocamento crítico correspondente ao início do dano,  $\delta_n$  é o deslocamento correspondente a abertura completa da trinca. O parâmetro  $K_0$  é a rigidez de penalidade, no qual apresenta um valor alto para que se obtenha valores de deslocamentos antes de alcançar o deslocamento crítico e  $G_{IC}$  é a energia de fratura total dissipada na curva de amolecimento linear, dado pela área compreendida entre  $\delta_{nc}$  e  $\delta_n$ . O primeiro trecho é linear e a estrutura está sem danificação até atingir a máxima tensão, que é o ponto onde se inicia o dano. O segundo trecho é um caminho onde o dano se inicia ( $D = 0$ ) e evolui até não haver mais coesão entre as interfaces da trinca ( $D = 1$ ) por meio da lei de amolecimento linear em função do deslocamento efetivo proposto por Camanho e Davila (2002).

## 7.2 MODELO DE VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

O modelo simulado será o da *TPB* já apresentado na Figura 4.8, onde possui um entalhe geométrico na parte inferior e um controle de deslocamentos na parte superior. As propriedades relacionadas ao material e de fratura obtido do ensaio experimental para a realização do ensaio numérico são mostrados na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Dimensões, propriedades do material e de fratura da *TPB*.

$E$ (GPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_{IC}$ (N/m)
32	0,20	4,15	56,7	164,0

Na Figura 7.5 são mostradas as malhas utilizadas no PGIL e PGEL com 205 elementos simuladas pelo software *Matlab*, assim como a malha com 2812 elementos utilizada para o PLNL simulado pelo programa *Abaqus*.

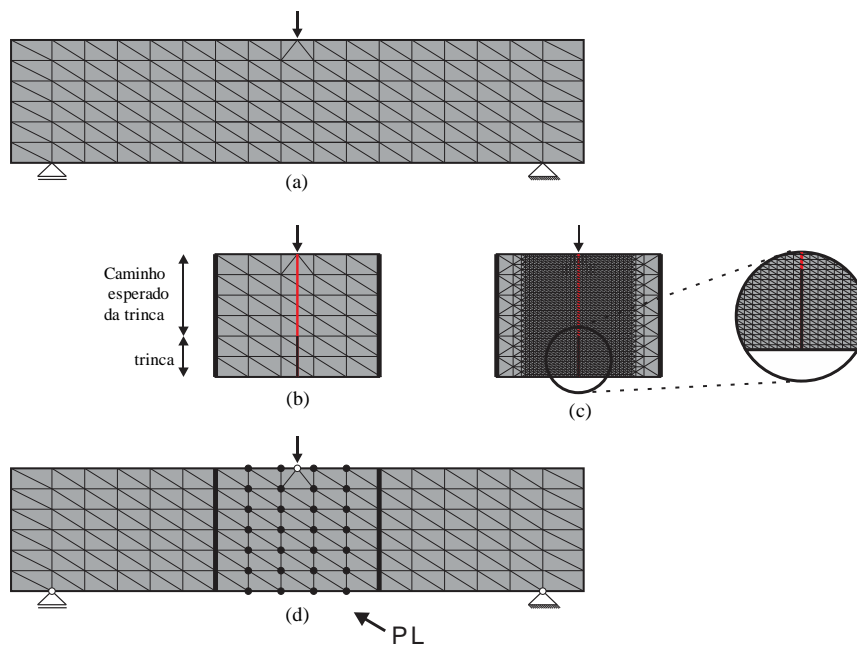


Figura 7.5 – Malhas utilizadas no problema global e no PLNL; (a) PGIL; (b) PLNL com trinca e elementos coesivos; (c) Refinamento do PLNL; (d) PGEL.

O PLNL é discretizado por elementos triangulares do tipo CPS3 da biblioteca do *Abaqus* sob condição de tensão plana e são inseridos elementos coesivos com quatro nós do tipo COH2D4 no caminho esperado da trinca (Figura 7.5(b)). Será realizado a técnica para danificar o elemento global completo, quando os quatro elementos locais coesivos ao qual pertencem o elemento atingirem o valor 0,99999, com o maior valor transferido para o elemento global. Essa técnica se aplica devido ao elemento abaixo do ponto de aplicação da força possuir tensões de compressão e tração, o que dificulta o rompimento desse elemento pelo seu tamanho, no qual resulta um ganho na rigidez.

Nas curvas da Figura 7.6 são apresentadas as soluções experimentais, do MEF com 6912 elementos triangulares e 32 elementos coesivos, no qual se simulam duas soluções, uma com a energia de fratura inicial e outra com a energia de fratura total. Além disso, simulam-se as soluções do MEF $^{g-1}$  que relacionam a força  $P$  em função do  $CMOD$  para a malha local com 2812 elementos modelada no *Abaqus*. Adicionam-se aos nós do problema global funções de enriquecimento polinomiais P1 e P2 em todo o domínio e no PLNL houve apenas refinamento tipo  $h$ .

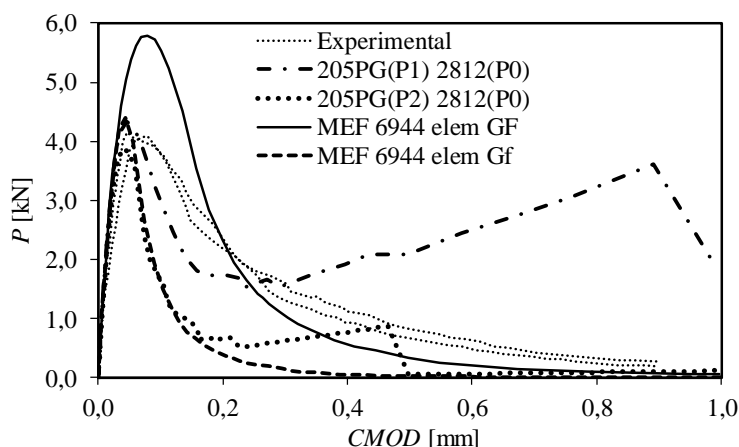


Figura 7.6 – Curvas  $P$  vs.  $CMOD$  das soluções experimentais, do MEF e MEF $^{g-1}$  no *Abaqus*.

Das curvas da Figura 7.6 observa-se com a adição das funções polinomiais P1 e P2, o entorno de  $P_{máx}$  apresentam resultados satisfatórios, o que corrobora nesse entorno com as soluções experimentais retirados de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke *et al.* (2012). No entanto, apenas nas funções de enriquecimento polinomial P2 é que ocorre uma melhora na região de amolecimento, como ilustrado na figura. Ainda assim é melhor que a solução do MEF simulado com a energia de fratura total, como se observa na Figura 7.6, que mesmo com o nível de refinamento igual ao da malha do PLNL (Figura 7.5(c)) não consegue predizer a curva experimental de forma precisa apesar da suavidade da curva. As soluções não obtiveram resultados melhores devido a lei linear utilizada não ser adequada para o comportamento quase-frágil do material, pois como se observa na Figura 7.6 a resposta de referência mais adequada é a simulada com a energia de fratura inicial ao invés da total. A técnica que se utiliza para romper o elemento global, consegue capturar de forma eficaz a  $P_{máx}$  e a perda de rigidez, mesmo que de forma brusca, por causa da malha global grosseira. Isso mostra a capacidade de aproximação do MEF $^{g-1}$  não intrusivo.



## 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção são apresentadas as conclusões obtidas na pesquisa e as sugestões de trabalhos futuros.

### 8.1 CONCLUSÕES

Essa pesquisa abordou a formulação e desenvolvimento de uma nova estratégia do MEF<sup>g-1</sup> que utilizou funções de enriquecimento construídas numericamente pela resolução de PVC locais considerando um modelo de dano contínuo não linear para simular falhas de materiais e estruturas quase-frágeis. Simulações numéricas de problemas no modo I (Bloco uniaxial, *TPB* e *TPB* heterogênea) e modo misto (*DENT*, barragem e fêmur) foram realizadas para validar o MEF<sup>g-1</sup> proposto.

Os resultados demonstraram a capacidade da abordagem em prever não apenas o caminho qualitativo da trinca até a falha, mas também as curvas quantitativas por meio das curvas que relacionaram a carga em função dos deslocamentos de testes experimentais. A qualidade dos resultados, a boa concordância com os testes experimentais e as tendências no refinamento foram consistentemente similares às simulações de modo I e modo misto.

A estratégia de simulação do MEF<sup>g-1</sup> de considerar o domínio local não linear e o global linear, mostrou-se eficiente ao longo dos passos de carga em relação as simulações pelo MEF e MEF<sup>g</sup> convencionais. O que faz do MEF<sup>g-1</sup> uma ferramenta poderosa na predição de possíveis defeitos.

Os resultados mostraram que o método proposto proporcionou flexibilidade para considerar características importantes à propagação de danos, como a heterogeneidade de materiais, por meio da matriz e inclusões, assim como a descontinuidade devido à presença de um entalhe implicitamente modelados no problema local não linear. A transferência do estado de dano e a construção da aproximação enriquecida do problema local provaram representar a cinemática do problema local no problema global com malhas relativamente grosseiras.

As simulações no modo I e no modo misto mostraram convergência consistente no refinamento  $h$  e  $p$  da escala local. Portanto, forneceram melhoria adicional da aproximação sem a necessidade de muitos elementos no domínio estrutural (problema global).

A estratégia para considerar a solução iterativa não-linear apenas no problema local enquanto o problema global permanece elástico linear levou o método a processar muito menos graus de liberdade com o número reduzido de iterações necessárias para convergir em cada etapa de carregamento. Portanto, o custo computacional é reduzido devido à menor quantidade de informações (graus de liberdade) na montagem, armazenamento e resolução do sistema de equações.

A utilização do software *MatLab* para simulação do problema global foi eficiente, pois obteve resultados consistentes sem onerar o processamento e a memória, necessários para simulação de um problema não linear na escala global. Além do mais, o mesmo foi viável pelo ambiente simples e intuitivo para desenvolvimento da programação e a facilidade da comunicação com diferentes softwares, convencionais e não convencionais do MEF, comercial ou não.

A abordagem não intrusiva se comportou de maneira eficiente na predição da carga máxima, uma vez que essa lei não é específica para simulação de materiais quase-frágeis. Essa abordagem é uma contribuição importante, uma vez que o usuário pode elaborar uma lei de dano e implementar no *Abaqus* ou outro *software* comercial.

Por fim, conclui-se que o MEF<sup>g-l</sup> proposto melhora a qualidade da solução com o uso racional de funções de enriquecimento global local, com maior eficiência e flexibilidade em relação às formulações convencionais. Embora o modelo de dano contínuo aqui considerado use uma variável de dano escalar para materiais quase-frágeis, o uso de outros modelos de danos contínuos, que inclui modelos de danos mais sofisticados (anisotrópicos, associados à plasticidade) é simples, mas necessitaria de pequenos ajustes dentro da estrutura desenvolvida.

## 8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros e, especialmente, para desenvolvimentos de novas simulações pelo MEF $G^{g-1}$ , propõe-se:

- Implementar a estratégia de danificação do MEF $G^{g-1}$  em elementos tridimensionais considerando tamanho do domínio local adaptativo;
- Adicionar enriquecimentos de descontinuidade forte (no campo dos deslocamentos) para modelar presença de trincas no problema global;
- Fazer refinamento adaptativo  $p$  e  $h$  à medida que o dano se propaga no domínio local;
- Aplicar novos modelos de dano contínuo desenvolvidas na literatura no domínio local;
- Implementar modelos constitutivos para análises viscoelásticas e plásticas na abordagem não intrusiva no domínio local;
- Aprofundar a conexão com *softwares* comerciais (*Abaqus*, *Ansys*) para simulação no domínio global e um solver desenvolvido na literatura para simular a danificação no domínio local.

## APÊNDICE

Neste apêndice são visualizados os trabalhos relativos do resíduo da viga heterogênea com matriz e inclusões descritos no capítulo 5 tanto pelo aumento da ordem polinomial da função de enriquecimento quanto pelo aumento no número de elementos. Além disso são visualizados o trabalho do resíduo do modelo *DENT* apresentado na seção 6.1.2 quando o modelo local é descrito por dois problemas não lineares.

### A.1 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DA VIGA HETEROGÊNEA COM REFINAMENTO $p$

O trabalho relativo do resíduo,  $W_G$ , de todas as simulações da viga heterogênea com enriquecimento polinomial P2 no problema global e local com diferentes relações de rigidez e resistência para os dois cenários apresentados ao longo dos passos de carga são mostrados na Figura A.1 até a Figura A.6.

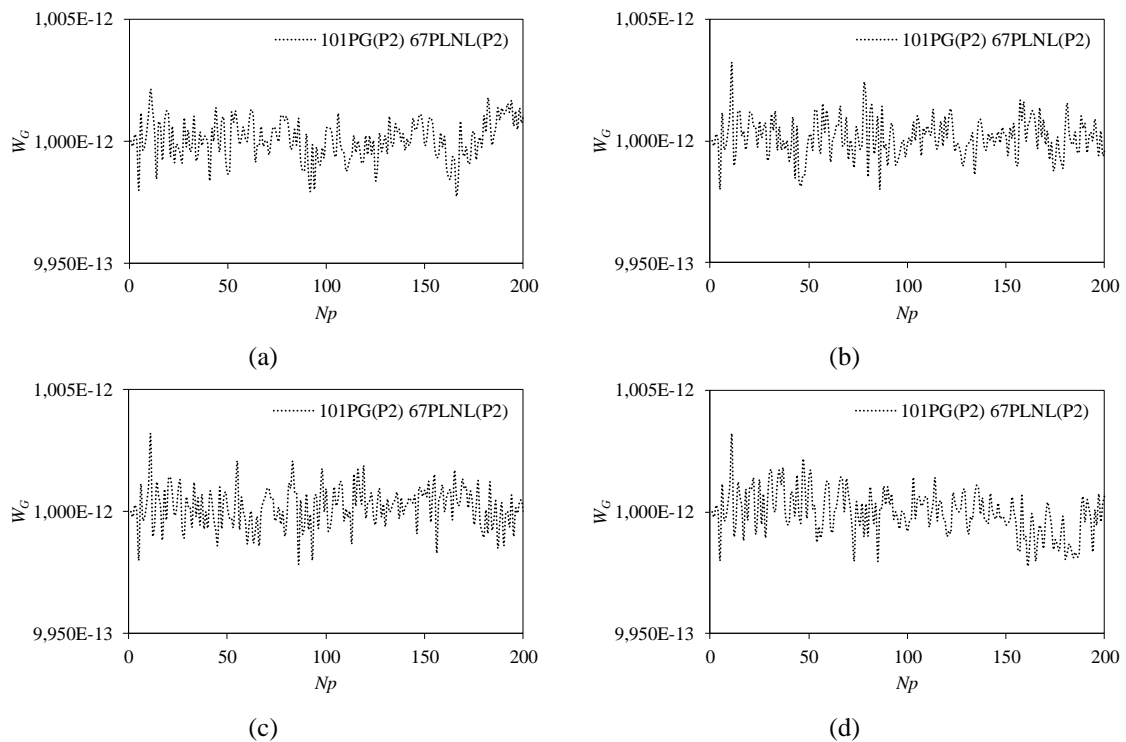


Figura A.1 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

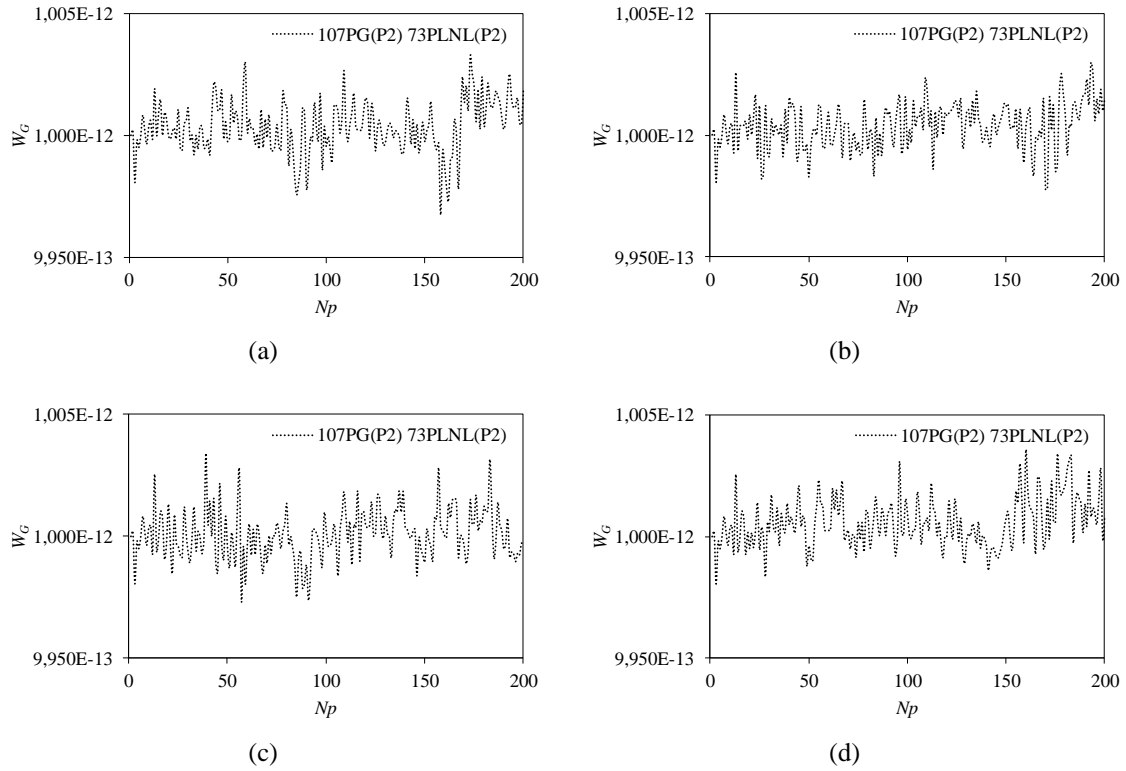


Figura A.2 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$  ;  
 (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$  ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$  ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$  .

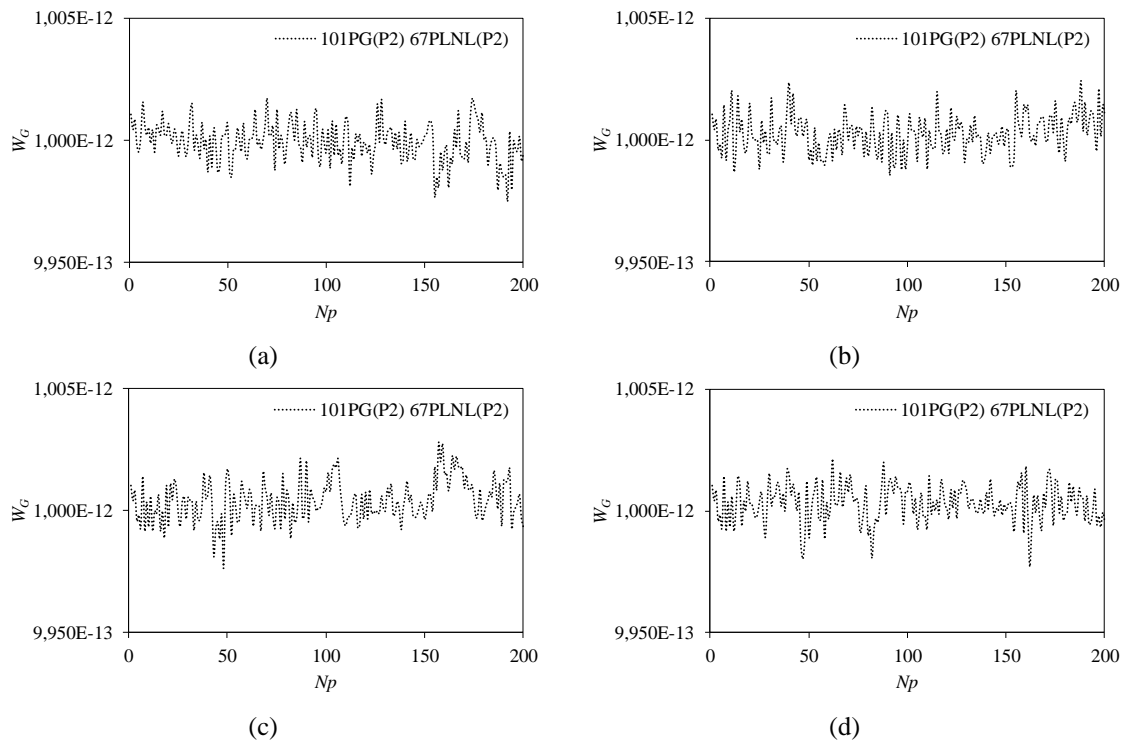


Figura A.3 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$  ;  
 (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$  ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$  ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$  .

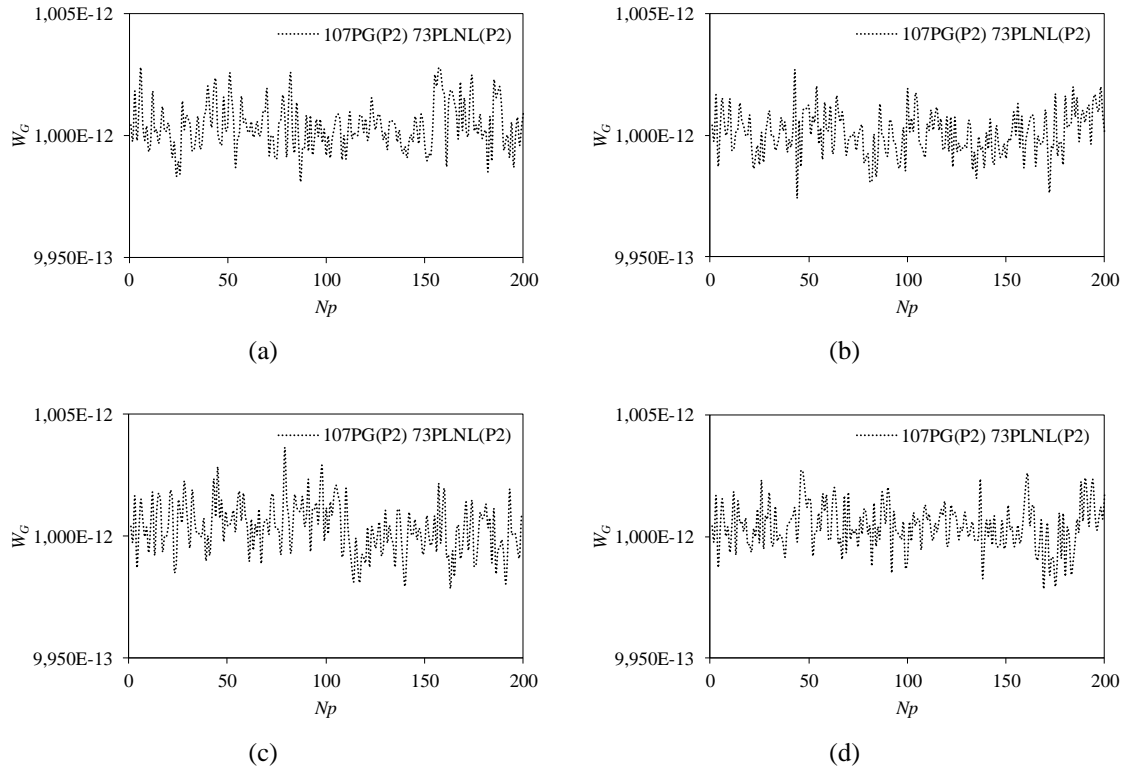


Figura A.4 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

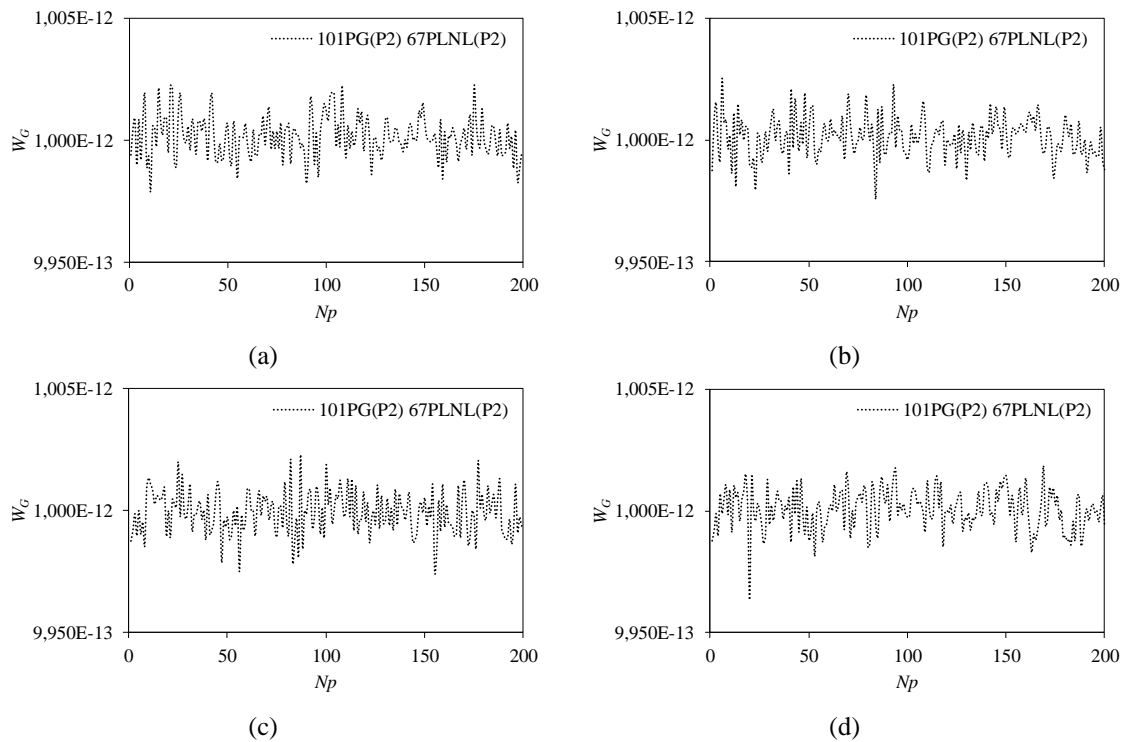


Figura A.5 – Trabalho relativo do resíduo para o primeiro cenário com  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

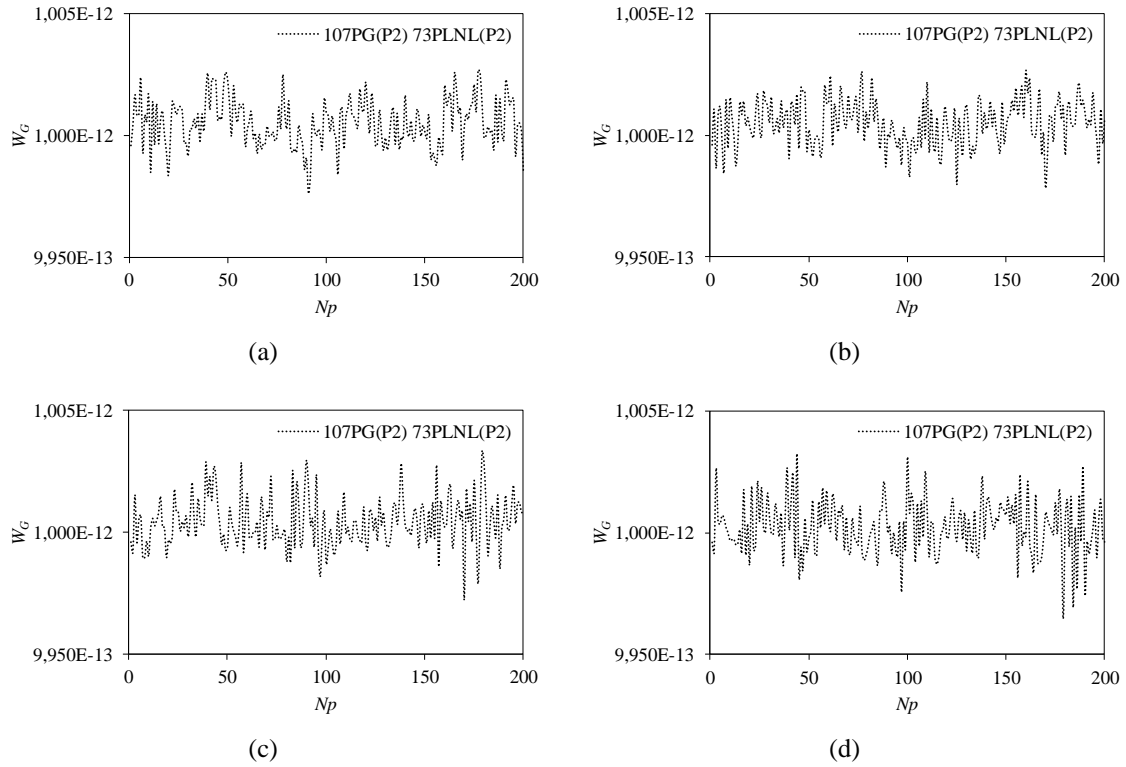


Figura A.6 – Trabalho relativo do resíduo para o segundo cenário com  $E_1/E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1}/f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1}/f_{t_2} = \infty$ .

Ao longo de todos os passos de carga em todas as relações de  $E_1/E_2$  e  $f_{t_1}/f_{t_2}$ , o  $W_G$  flutua em torno de  $10^{-12}$ , no qual resulta a simulação linear do problema global.

## A.2 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DA VIGA HETEROGÊNEA COM REFINAMENTO $h$

O trabalho relativo do resíduo,  $W_G$ , de todas as simulações da viga heterogênea com enriquecimento polinomial P2 no problema global e refinamento  $h$  no problema local com diferentes relações de rigidez e resistência ao longo dos passos de carga são mostrados na Figura A.7 até a Figura A.9. O valor de  $W_G$  em todas as simulações são da ordem de  $10^{-12}$ , o que leva a não obrigatoriedade de iterações não lineares no problema global.

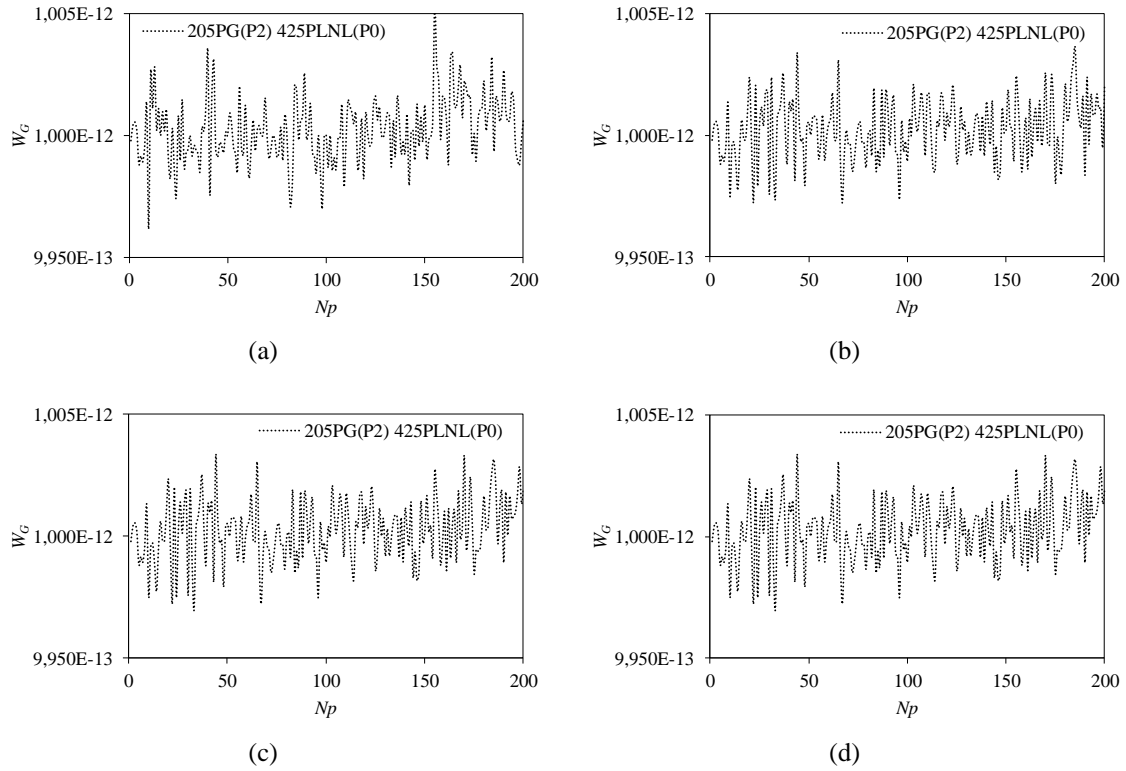


Figura A.7 – Trabalho relativo do resíduo para  $E_1 / E_2 = 1$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

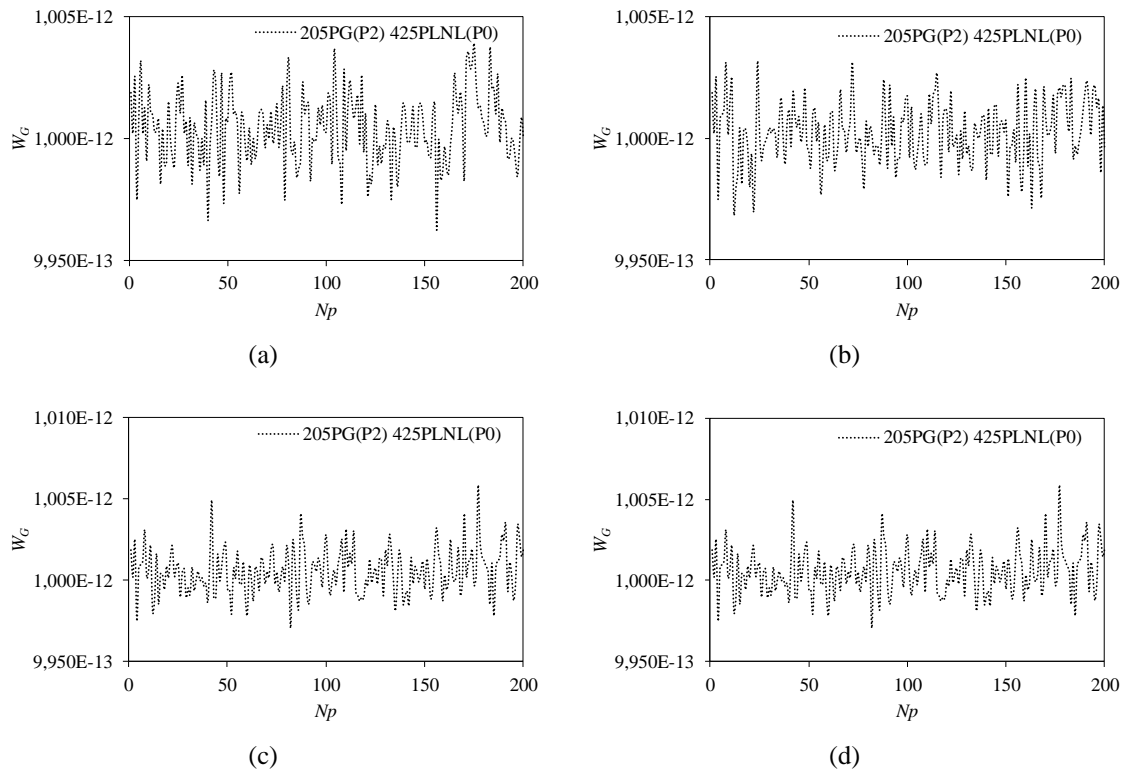


Figura A.8 – Trabalho relativo do resíduo para  $E_1 / E_2 = 5$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .



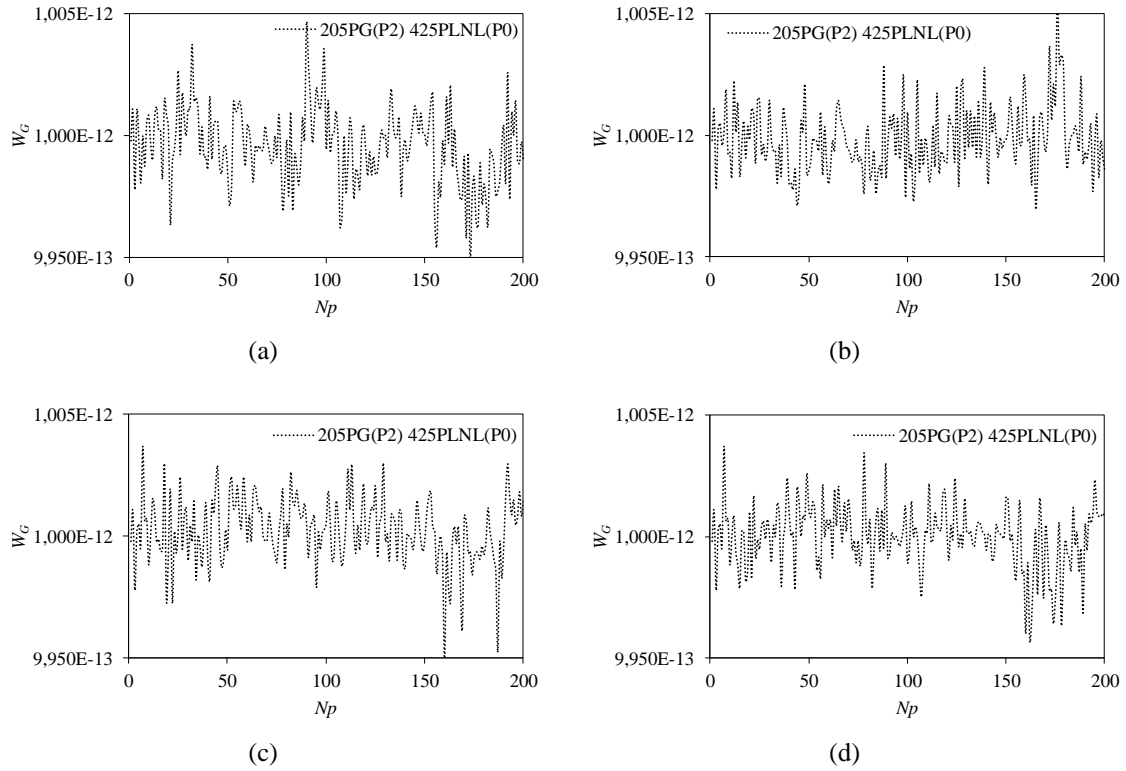


Figura A.9 – Trabalho relativo do resíduo para  $E_1 / E_2 = 100$  e; (a)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 0,5$ ; (b)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 1$ ; (c)  $f_{t_1} / f_{t_2} = 2$ ; (d)  $f_{t_1} / f_{t_2} = \infty$ .

### A.3 TRABALHO RELATIVO DO RESÍDUO DO *DENT* PARA DOIS PLNL

Na Figura A.10 é visualizado o trabalho relativo do resíduo para as situações em que o PLNL1,2 possui 29 elementos enriquecidos por funções P1 e 106 elementos sem enriquecimentos, com o problema global em ambas enriquecido por funções P1.

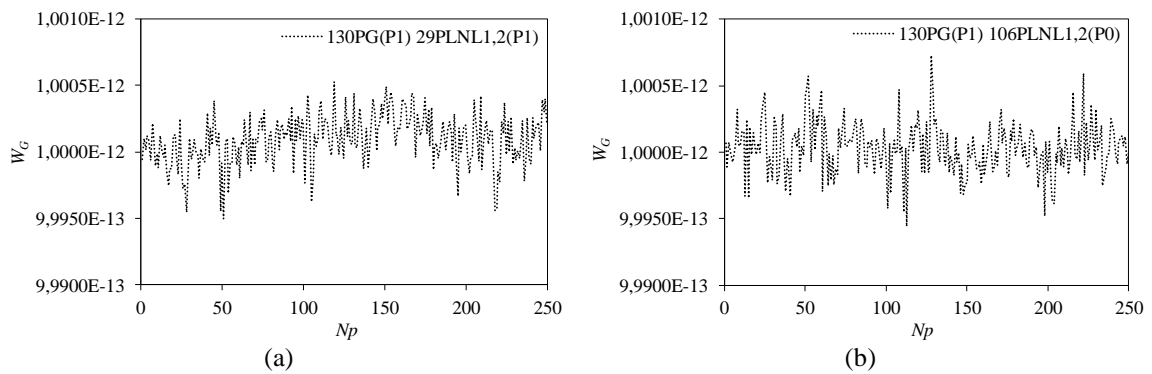


Figura A.10 – Trabalho relativo do resíduo para malha com 130 elementos no problema global e; (a) 29 elementos no PLNL1,2; (b) 106 elementos no PLNL1,2.

Observa-se que em todos os passos o  $W_G$  oscila em torno de  $10^{-12}$ , o que acarreta na não necessidade de iterações não lineares no problema global.

## REFERÊNCIAS

Abaqus, User's Manual, Version 6.14-1, Dassault Systèmes Simulia Corp, Providence, RI, USA; 2014.

Alves, P. D. *Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 239p. 2012.

Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, pp. 945 – 981, 1994.

Babuška, I.; Melenk, J. M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 727-758, 1997.

Babuška, I.; Strouboulis, T.; Copps, K.; Gangara, SK.; Upadhyay, CS. A-posteriori error estimation for finite element and generalized finite element method. Disponível em [http://yoyodyne.tamu.edu/research/error/gfem\\_france.pdf](http://yoyodyne.tamu.edu/research/error/gfem_france.pdf). Reportado na internet em 1997.

Barth, H. D.; Launey, M. E.; MacDowell, A. A.; Ager, J. W.; Ritchie, R. O. On the effect of X-ray irradiation on the deformation and fracture behavior of human cortical bone. *Bone*, v. 46, n. 6, pp. 1475-1485, 2010.

Bathe, K. J. *Finite element procedures*. [S.I.]: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-301458-4.

Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, n. 5, pp. 601-620. 1999.

Belytschko, T.; Loehnert, S.; Song, J. H. Multiscale aggregating discontinuities: a method for circumventing loss of material stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 73, pp. 869–894, 2008.

Bhattacharjee, S.S.; Léger, P. Application of NLFM models to predict cracking in concrete gravity dams. *J Struct Eng*, v. 120, pp. 1255-1271, 1994.

Cai, Q.; Robbets, J. M.; van Rensburg, B. W. J. Finite element fracture modelling of concrete gravity dams. *Journal of the South African Institution of Civil Engineering*, v. 50, n. 1, pp. 13-24, 2008.

Camanho, P. P.; Davila, C. G. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the 62132Simulation of Delamination in Composite Materials, *NASA/TM-2002–211737*, pp. 1–37, 2002.

Cresta, P.; Allix, O.; Rey, C.; Guinard, S. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods: application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, pp. 1436–1446, 2007.

Dias, I. F.; Oliver, J.; Lemos, J. V.; Lloberas-Valls, O. Modeling tensile crack propagation in concrete gravity dams via crack-path-field and strain injection techniques. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 154, pp. 288-310, 2016.

Duarte, C. A.; Babuška, I. A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to propagating three-dimensional cracks. In V.M.A. Leitão, C.J.S. Alves, and C.A. Duarte, editors, *ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, Lisbon, Portugal, 11–14 July, pp. 8, 2005.

Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2, pp. 215-232, 2000.

Duarte, C.A.; Hamzeh, O.N.; Liszka, T.J.; Tworzydło, W.W. A generalized finite element method for the simulation of three dimensional dynamic crack propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* v. 190, pp. 2227-2262, 2001.

Duarte, C. A.; Kim, D .J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global- local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, pp. 487-504, 2008.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin, May 1995.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, pp. 237-262, 1996.

Duval, M.; Passieux, J. C.; Salaün, M.; Guinard, S. Non-intrusive coupling: recent advances and scalable nonlinear domain decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 23, n. 1, pp. 17-38, 2014.

Evangelista Jr, F.; Alves, G. S.; Moreira, J. F. A.; Paiva, G. O. F. de. A global-local strategy with the generalized finite element framework for continuum damage models. Paper submitted to *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019.

Evangelista Jr F.; Moreira J. F. A. A continuous-discontinuous approach to model failure of quasi-brittle materials in mode I and mixed mode conditions. Paper submitted to *Engineering Fracture Mechanics*, 2019.

Evangelista Jr F.; Roesler J. R.; Duarte, C.A. Prediction of Potential Cracking Failure Modes in Three-Dimensional Airfield Rigid Pavements with Existing Cracks and Flaws. *Transportation Research Record*; v. 2266: pp. 11-19, 2012.

Evangelista Jr, F.; Roesler J. R.; Proença, S. P. B. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 97, pp. 261–280, 2013a.

- Evangelista Jr, F.; Roesler, J. R.; Duarte, C. A. Two scale approach predict multi-site cracking potential in 3-d structures using the generalized finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, pp. 1991-2002, 2013b.
- Fillmore, T. B.; Duarte, C. A. A hierarchical non-intrusive algorithm for the generalized finite element method. *Adv. Model. and Simul.in Eng. Sci.*, v. 5, n. 2, 2018.
- Freitas, A.; Azevedo, B. A. S.; Souza, R. R. de; Costa, H. I. da; Maciel, R. A.; Souto, D. R. de M. Mechanical analysis of femoral neck fracture fixation in synthetic bone. *Acta Ortopédica Brasileira*, v. 22, n. 3, pp. 155-158, 2014.
- Gaedicke, C.; Roesler, J.R.; Evangelista Jr F. Three-dimensional cohesive crack model prediction of the flexural capacity of concrete slabs on soil. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 94, pp. 1-12, 2012.
- Garzon, J.; Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Buttlar, W. Two-scale three-dimensional analysis of reflective cracks in airfield pavements, *International Journal of Computational Methods*, v. 10, n. 6, 2013.
- Geers, M. G. D. *Experimental analysis and computational modelling of damage and fracture*. Technische Universiteit Eindhoven - University of Technology.: Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 170p. ISBN: 90-386-0379-7, 1997.
- Gendre, L; Allix, O; Gosselet, P; Comte, F. Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Comput Mech*, v. 44, n. 2, pp. 233-245, 2009.
- Gendre, L; Allix, O.; Gosselet, P. A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling. *Int J Numer Meth Engng*, v. 87, n. 9, pp. 889-905, 2011.
- Ghrib, F.; Tinawi, R. Nonlinear behavior of concrete dams using damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, n. 4, 1995.
- Gioia, G.; Bazant, Z. P.; Pohl, B. P. Is no-tension dam design always safe? A numerical study. *Dam Eng*, v. 3, n. 1, pp. 23-34, 1992.
- Goyal, V. K. *Analytical Modeling of the Mechanics of Nucleation and Growth of Cracks*. Dissertation, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002.
- Guanglun, W.; Pekau, O. A.; Chuhan, Z.; Shaomin, W. Seismic fracture analysis of concrete gravity dams based on nonlinear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 65, n. 1, pp. 67-87, 2000.
- Guidault, P. A.; Allix, O.; Champaney, L.; Cornuault, C. A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, pp. 381-399, 2008.

- Gupta, P.; Pereira, J. P.; Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Eason, T. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 90, pp.41-64, 2012.
- Gupta, V.; Kim, D. J.; Duarte, C. A. Analysis of improvements of global-local enrichments for the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 245-246, pp. 47-62, 2012.
- Gupta, V.; Kim, D. J.; Duarte, C. A. Extensions of the two-scale generalized finite element method to nonlinear fracture problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 11, n. 6, pp. 581-596, 2013.
- Hofstetter, G.; Meschke, G. *Numerical modeling of concrete cracking*. International Centre for Mechanical Sciences, 532p. ISBN: 9873709108963, 2011.
- Holl, M.; Loehnert, S.; Wriggers, P. An adaptive multiscale method for crack propagation and crack coalescence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 93, pp. 23–51, 2013.
- Hou, T.; Wu, X. H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics* v. 134, pp. 169–189, 1997.
- Jirásek, M.; Bauer, M. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers and Structures*, v. 110–111, pp. 60–78, 2012.
- Jirásek, M.; Grassl, P. Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, pp. 1921–1943, 2008.
- Jirásek, M.; Zimmermann, T. Embedded crack model: I. Basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, n. 6, pp. 1269-1290, 2001.
- Kachanov, L.M. Time of the rupture process under creep conditions. Em: *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk*, v. 8, pp. 26–31, 1958.
- Kim, D. J. *The generalized finite element method with global-local enrichment functions*. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2009.
- Kim, D. J.; Duarte, C. A. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for numerical methods in engineering*, v. 104, n. 13, pp. 1139 – 1172, 2015.
- Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Pereira, J.P. Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global local enrichment functions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 75, pp. 763-813, 2008.

- Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Proença, S.P. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 75, pp. 763-813, 2012.
- Kim, D. J.; Duarte, C. A.; Sobh, N.A. Parallel simulations of three-dimensional cracks using the generalized finite element method. *Computational Mechanics*, v. 47, n. 3, pp. 265-282, 2011.
- Kim, D. J.; Pereira, J.P.; Duarte, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 81, pp. 335-365. 2010.
- Launey, M. E.; Buehler, M. J.; Ritchie, R. O. On the mechanistic origins of toughness in bone, *Annual Review of Materials Research*, v. 40, n. 1, pp. 25–53, 2010.
- Lee, J.; Fenves, G. L. A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 27, n. 9, 937-956, 1998.
- Li, H.; Duarte, C. A. A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 337, pp. 28–65, 2018.
- Li, H.; O’Hara, P; Duarte, C. A. A two-scale generalized FEM for the evaluation of stress intensity factors at spot welds subjected to thermomechanical loads. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 213, pp. 21–52, 2019.
- Loehnert, S.; Belytschko, T. A multiscale projection method for macro/microcrack simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 71, pp.1466–1482, 2007.
- Malekan, M.; Barros, F. B. Well-conditioning global–local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics, *Computational Mechanics*, v. 58, n. 5, pp. 819-831, 2016.
- Malekan, M.; Barros, F. B. Numerical Analysis of a main crack interactions with micro-defects/inhomogeneities using two-scale generalized/extended finite element method. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 4, pp. 783-801, 2018.
- Malekan, M.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S. Fracture analysis in plane structures with the two-scale G/XFEM method. *International Journal of Solids and Structures*. v. 155, pp. 65-80, 2018.
- Malekan, M.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S.; Alves, P. D. An object-oriented class organization for global-local generalized finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 13, pp. 2529-2551, 2016.
- Malekan, M.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S.; Alves, P.D.A.; Penna, S.S. A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method: Generic imposition of boundary conditions, *Engineering Computations*, v. 34 n. 3, pp. 988-1019, 2017.

Massart T. J.; Peerlings, R. H. J.; Geers, M. G. D. An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, pp. 1022–1059, 2007.

Mazars, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese de doutorado. Université de Paris VI, 1984.

Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G. Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n.2, pp. 345–365, 1989.

Melenk, J. M.; Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, pp. 289-314, 1996.

Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, pp. 131-150. 1999.

Moreira, J. F. A. *Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis em modo I e modo misto*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-05A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 92p., 2016.

Moreira, J. F. A.; Evangelista Jr, F. Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis. *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília-DF, 2016.

Noor, A. K. Global-local methodologies and their applications to nonlinear analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v. 2, pp. 333-346, 1986.

Nooru-Mohamed, M.B. *Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach*. Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1992.

Novelli, L. *Uma nova metodologia para solução de modelos não lineares utilizando estratégia global-local*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 105p. 2019.

Oden, J. T.; Duarte, C. A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 153, pp. 117-126, 1998.

O'Hara, P.; Duarte, C. A.; Eason, T. Transient analysis of sharp thermal gradients using coarse finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 5-8, pp. 812-829, 2011.

O'Hara, P.; Duarte, C. A.; Eason, T.; Garzon, J. Efficient analysis of transient heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients. *Computational Mechanics*, v. 51, n. 5, pp. 743-764, 2013.

- O'Hara, P.; Hollkamp, J.; Duarte, C. A.; Eason, T. A two-scale generalized finite element method for fatigue crack propagation simulations utilizing a fixed, coarse hexahedral mesh. *Computational Mechanics*, v. 57, n. 1, pp. 55-74, 2015.
- O'Hara, P.; Hollkamp, J.; Duarte, C. A.; Eason, T. A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 163, pp. 274-302, 2016.
- Oliver, J.; Huespe, A.E.; Pulido, M.D.G.; Chaves, E. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, n. 2, pp. 113-136, 2002.
- Paiva, G. O. F. de. *Aplicação e análise do MEEG com enriquecimento polinomial na simulação de estruturas em processo de danificação*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-02A/17, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p., 2017.
- Paiva, G. O. F. de; Moreira, J. F. A.; Alves, G. S.; Evangelista Jr, F. Estudo do enriquecimento polinomial para análise de estruturas em processo de danificação. *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília-DF, 2016.
- Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. Determination of the kink point in the bilinear softening model. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, n. 13, pp. 3806-3818, 2008.
- Passieux, J.; Gravouil, A.; Rethore, J.; Baietto, M. Direct estimation of generalized stress intensity factors using a threescale concurrent multigrid X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, n. 13, pp. 1648–1666, 2011.
- Passieux, J. C.; Rethore, J.; Gravouil, A.; Baietto, M. C. Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, v. 52, pp. 1381–1393, 2013.
- Pebrel, J.; Rey, C.; Gosselet, P. A nonlinear dual domain decomposition method: application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, pp. 251–262, 2008.
- Pereira, J.P.; Duarte C. A.; Guoy, D; Jiao, X. Hp generalized fem and crack surface representation for non-planar 3-d cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. v. 7, n. 5 pp. 601-633, 2008.
- Pereira, J.P.; Duarte C. A.; Jiao, X; Guoy, D. Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems. *Computational Mechanics*, v. 44, n. 1, pp.73-92, 2009.
- Pereira, J. P.; Kim, D. J.; Duarte, C. A. A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures. *Computational Mechanics*, v. 49, n. 1, pp. 99 – 121, 2012.



- Pereira, L. F.; Weerheijm, J.; Sluys, L. J. A new rate-dependent stress-based nonlocal damage model to simulate dynamic tensile failure of quasi-brittle materials. *International Journal of Impact Engineering*, v. 94, pp. 83–95, 2016.
- Pierres, E.; Baietto, M.; Gravouil, A. A two-scale extended finite element method for modelling 3D crack growth with interfacial contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, pp. 1165–1177, 2010.
- Plews, J.; Duarte, C. A.; Eason, T. An improved non-intrusive global-local approach for sharp thermal gradients in a standard fea platform, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 91, n. 4, pp. 426-449, 2011.
- Plews, J.; Duarte, C. A. Bridging multiple structural scales with a generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 102, n. 3-4, pp. 180-201, 2014.
- Plews, J.; Duarte, C. A. Generalized finite element approaches for analysis of localized thermo-structural effects, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 104, n. 6, pp. 408-438, 2015.
- Plews, J.; Duarte, C. A. A two-scale generalized finite element approach for modeling localized thermoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 108, n. 10, pp. 1123-1158, 2016.
- Polguy, M.; Bliźniewska, K.; Jędrzejewski, K.; Majos, A.; Topol, M. Morphological study of linea aspera variations – proposal of classification and sexual dimorphism. *Folia Morphologica*, v. 72, n.1, pp. 72-77, 2013.
- Proença, S.P.B.; Torres, I.F.R. Generalized finite element method for nonlinear three-dimensional analysis of solids. *International Journal of Computational Methods*, v. 5, n. 1, pp. 37-62, 2008.
- Rabotnov, Y. N. *Creep problems in structural members*. New York, Elsevier (North Holland series in applied mathematics and mechanics, v. 7), 1969.
- Rannou, J.; Gravouil, A.; Baietto-Dubourg, M. A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, pp. 581–600, 2009.
- Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method* 3rd ed: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering. Inc., 2006, ISBN 0-07-246685-5.
- Rodríguez-Ferran, A.; Morata, I.; Huerta, A. Efficient and reliable nonlocal damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, pp. 3431-3455, 2004.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Park, K.; Gaedicke, C. Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cement and Concrete Composites*, v. 29, pp. 300–312, 2007a.

- Roth, S. N.; Léger, P.; Soulaïmani, A. A combined XFEM–damage mechanics approach for concrete crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 923-955, 2015.
- Santillán, D.; Mosquera, J. C.; Cueto-Felgueroso, L. Phase-field model for brittle fracture. Validation with experimental results and extension to dam engineering problems. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 178, pp. 109-125, 2017.
- Shi, M.; Zhong, H.; Ooi, E. T.; Zhang, C.; Song, C. Modelling of crack propagation of gravity dams by scaled boundary polygons and cohesive crack model. *International Journal of Fracture*, v. 183, n.1, pp. 29-48, 2013.
- Simone, A.; Wells, G. N.; Sluys, L. J. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, pp. 4581–4607, 2003.
- Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1–3, pp. 43-69, 2000.
- Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuška, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, pp. 4081-4193, 2001.
- Travesa, A. T. *Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models*. Thesis, Universitat de Girona, 2006.
- Vree, J. H. P. de; Brekelmans, W. A. M.; Van Gils, M. A. J. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, v. 55, pp. 581–588, 1995.
- Willems, N. M. B. K.; Langenbach, G. E. J.; Everts, V.; Zentner, A. The microstructural and biomechanical development of the condylar bone: a review. *European Journal of Orthodontics*, v. 36, n. 4, pp. 479-485, 2014.
- Wu, J. Y.; Li, J. Unified plastic-damage model for concrete and its applications to dynamic nonlinear analysis of structures. *Structural Engineering and Mechanics*, v. 25, n. 5, 519-540, 2007.
- Wu, J. Y.; Qiu, J. F.; Nguyen, V. P.; Mandal, T. K.; Zhuang, L. J. Computational modeling of localized failure in solids: XFEM vs PF-CZM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 345, pp. 618-643, 2019.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z. *Finite Element Methods – Its Basic and Fundamentals* 6th ed. Elsevier, Inc., 2005. ISBN 0-7506-6320-0.