Universidade de Brasília

Grupos de Dëmushkin

Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza

Orientador: Dr. Theo Allan Darn Zapata

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 26 de janeiro de 2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos de Dëmushkin

por

Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de janeiro de 2021.

Comissão Examinadora:

Theo Allan Darn Zapata

Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata – MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova – IME/Unicamp (Membro)

Prof. Dr. Ilir Snopche – IM/UFRJ (Membro)

Igor dos Santos Lima

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima – MAT/UnB (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SSO729g

Souza, Henrique Augusto Mendes da Silva e
Grupos de Dёmushkin / Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza; orientador Theo Allan Darn Zapata. -- Brasília, 2021.
159 p.

Tese (Mestrado em Matemática) --Universidade de Brasília, 2021.

1. Grupos de Dёmushkin. 2. Propriedade de Howson. 3. Retração Virtual. 4. Grupos de M. Hall. 5. Conjectura de Hanna Neumann. I. Zapata, Theo Allan Darn, orient. II. Título.

Dedico este trabalho a todes us colegas que me acompanharam como aluno da Universidade de Brasília, tanto dentro e como fora do curso de matemática. Toda a nossa ciência vive apenas enquanto for diálogo, comunicação, troca. Serei eternamente grato por todas as oportunidades que vocês me ofereceram de vivenciá-la.

Agradecimentos

À minha família, e, em especial, aos meus pais[1] Moacyr e Maria, pelo constante apoio e suporte que me proveram ao longo da vida. Mesmo em face das incertezas, vocês nunca hesitaram em me incentivar a correr atrás dos meus sonhos e objetivos. Mesmo nas quedas e tropeços, vocês sempre me acolheram e me estimularam a continuar mirando alto. Sei que, em vocês, sempre encontrarei um porto seguro.

Ao meu orientador, o professor Theo Zapata, que desde meus primeiros passos na matemática me acompanhou, orientou e estimulou, e que não media esforços em garantir aos seus alunos a oportunidade de receber a melhor formação matemática que o departamento podia oferecer. Não obstante, a seriedade com trabalho que desenvolvemos nunca impediu que nossos encontros, reuniões e mensagens fossem repletos de leveza, brincadeira e diversão. O senhor é, e sei que continuará sendo, uma grande inspiração para mim e para todos os seus orientandos e futuros colaboradores (como espero, um dia, me tornar).

À minha namorada, companheira, parceira de toda hora, paixão, confidente e amiga: Carols[1], 私の愛する人。 Ela quem esteve presente desde o dia 1 do meu curso de mestrado, quem acompanhou de perto as alegrias e as dificuldades, quem comemorou comigo os sucessos e me consolou nos reveses, quem me inspira o com zelo, dedicação e carinho à tudo que se propõe a fazer e quem me ouviu falar incessantemente e incansavelmente sobre as diversas generalidades da vida matemática com ouvidos atentos e comentários alegres (além de uma paciência estoica) pelos últimos dois anos. Que venham muitos mais momentos compartilhados pela frente ♥.

Ao Nowras[1], que se mostrou mais do que um colega e parceiro de estudos: um bom amigo. Pelos conselhos matemáticos e pessoais, pelas noites (e, as vezes, também tardes) no bar, por me apresentado desde ao Go até às álgebras simples centrais. No momento de submissão deste trabalho, ainda esperamos pela próxima oportunidade para uma bebida e uma boa partida em um tabuleiro 19x19.

À Bela e à Vivi, preciosas amizades com as quais não só cresci e amadureci como pessoa (e fiz tudo isso me divertindo horrores) como também experimentei a matemática que não

[1] que também leram, corajosamente, este trabalho e estiveram presentes em todas as suas exposições e na sua defesa.

se aprende na faculdade: a matemática conversada, cantada, discutida, dançada, desenhada, interpretada, filmada, transmitida, compartilhada. Na dedicatória, repito a frase que aprendi convivendo com vocês: "Toda a nossa ciência vive apenas enquanto for diálogo, comunicação, troca". Aguardo, ansiosamente, nossas empreitadas futuras.

Às amigas que me tornaram toda a jornada matemática melhor de uma forma especial: à Luarinha (um beijo na Luna!), minha primeira amizade no curso, minha chefe no meu primeiro emprego, uma grande colega nos estudos e nas disciplinas e, hoje, uma grande professora e carinhosa mãe; à Mel, vida e alma daquele departamento, companheira de festas, fofocas, estudos e intermináveis risadas; à Pat e à Bárbara, companheiras para toda situação, pessoas queridíssimas que rapidamente passaram de desconhecidas no corredor à grandes amigas que carregarei sempre no peito.

Às amizades de longa data que me seguiram nos anos de universidade: Brunão, Jobim, Keka, Lilice, Marie, Ninna, Pablo, Ruan, Titi, Tomé, Tutu, Viny, Vitor, Zepp; mesmo os que estão distantes, o carinho estará sempre próximo.

Às amizades e parcerias que fiz na matemática: Adler, Amadeus, Gabriela, Gérman, João, Joana, Fleury, Mari, Miranda, Mirelly, Pedro, Roberto, Rodriguinho, Zaban.

Às amizades que fiz durante os anos de universidade: Bah, Clarinha, Estevan, Flavinha, Hirata, Luana, Lucas Riecken, Manu, Marina, Marvin, Nathinha, Paulinha, Raul, Thalito, Xiups.

À Profa. Sheila Campos, que não só esteve presente me recebeu de portas abertas em todas as etapas do mestrado, como também sempre me incentivou a continuamente aprender e dar o meu melhor. Como coordenadora dos seminários durante o estágio final do curso, também exibiu atenção e dedicação ímpares em fornecer a melhor experiência académica possível durante o período excepcional de pandemia.

Aos mestres que inspiraram na universidade: Prof. André Caldas, Profa. Aline Pinto, Prof. Daniel Cajueiro, Prof. Elves Barros, Prof. Guram Donadze, Prof. João Paulo dos Santos, Prof. Martino Garonzi, Prof. Noraí Rocco.

Aos servidores e técnicos da Universidade de Brasília, do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação, que trabalham arduamente para manter o programa funcionando com excelência. Em especial, ao professor coordenador Carlos Alberto e às servidoras Ingrid de Sousa e Marta Chagas, que estiveram sempre presentes para auxiliar os alunos do curso.

À Bruna Scafuto, cujos questionamentos e conselhos não só vêm me ensinando a viver uma vida mais plena, como também foram valor para superar os desafios pessoais e interpessoais que surgiram na carreira acadêmica.

À todas as amizades que não foram mencionadas, mas que estão registradas na memória deste que escreve.

À CAPES e ao CNPq pelas bolsas de fomento à pesquisa concedidas.

"Le savant doit ordonner; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison."

(Jules Henri Poincaré)

Figura 1 Сергей Петрович Дёмушкин (Sergey Petrovich Dëmushkin), nascido em Moscou em 1932. Fonte da imagem: [Sol96, p. xliv].

Resumo

Os grupos de Dëmushkin compõem uma classe de destaque entre os grupos profinitos: são aqueles grupos pro-p que satisfazem uma condição cohomológica análoga à clássica dualidade de Poincaré em dimensão 2. Eles ocorrem naturalmente como quocientes pro-p maximais de grupos de Galois de corpos locais e completamentos pro-p de grupos de superfície. Esta dissertação apresenta a demonstração do Teorema de Classificação dos Grupos de Dëmushkin como obtido através dos trabalhos de S. Dëmushkin, J.P. Serre e J. Labute entre 1961 e 1967. Esta dissertação também coleta, em uma única fonte, as recentes demonstrações de 2019 e 2020 da validade entre os grupos de Dëmushkin da propriedade de Howson, da existência de retrações virtuais para subgrupos topologicamente finitamente gerados e da conjectura de Hanna Neumann, seguindo os artigos publicados por P. Zalesskii, M. Shusterman e A. Jaikin-Zapirain, bem como a caracterização dos grupos pro-p que satisfazem a propriedade de M. Hall. Para estes fins, a teoria (co-)homológica dos grupos profinitos e pro-p e algumas de suas aplicações são desenvolvidas a partir da álgebra elementar dos grupos, além de também realizarmos um estudo da teoria de Bass-Serre profinita de grupos agindo em árvores.

Palavras-chave: Grupos de Dëmushkin; Propriedade de Howson; Retração Virtual; Grupos de M. Hall; Conjectura de Hanna Neumann.

Abstract

Dëmushkin groups comprise an important class of profinite groups: they are pro-p groups which satisfy a cohomological condition analogous to the classical Poincaré duality in dimension 2. They occur naturally as maximal pro-p quotients of Galois groups of local fields and p-completions of surface groups. This dissertation presents the proof of the Classification Theorem of Dëmushkin Groups as obtained through the works of S. Dëmushkin, J.P. Serre and J. Labute between 1961 and 1967. This dissertation also gathers, in a single source, the recent 2019 and 2020 proofs of the validity among Dëmushkin groups of Howson's property, of the existence of local retractions for topologically finitely generated subgroups and of the Hanna Neumann conjecture, following the papers published by P. Zalesskii, M. Shusterman and A. Jaikin-Zapirain, as well as the characterization of the pro-p groups which satisfy M. Hall's property. In the process, the homological and cohomological theories of profinite and pro-p groups and some of their applications are developed from the elementary algebra of groups, and we also include a study of the profinite Bass-Serre of groups acting on trees.

Keywords: Dëmushkin groups; Howson's property; virtual retraction; M. Hall groups; Hanna Neumann conjecture.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Os grupos profinitos e pro-p compõem uma importante classe de grupos topológicos, sejam por suas conexões históricas com a Teoria de Galois ([NSW08, pp. vii-xii]), sejam por suas recentes aplicações na Mecânica Quântica ([VVZ94, pp. ix-xviii]) ou seja pelo interesse em suas próprias estruturas algébricas ([RZ10, pp. ix-xi]). Dentre esta classe de grupos, os grupos de Dëmushkin que dão nome à este trabalho ocupam um lugar de destaque: são grupos que satisfazem uma condição cohomológica análoga a clássica dualidade de Poincaré para variedades reais em dimensão 2.

De forma mais precisa, um grupo pro-p G é dito um grupo de Dëmushkin se os grupos de cohomologia contínua $H^i(G, \mathbb{F}_p) = H^i(G)$ de G com coeficientes no corpo finito de p-elementos $\mathbb{F}_p$ satisfazem três condições:

D1 $H^1(G)$ é finito;

D2 $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$;

D3 O produto cup

$$\cup\colon H^1(G) \times H^1(G) \to H^2(G)$$

é uma forma bilinear não degenerada.

Como os grupos $H^1(G)$ e $H^2(G)$ determinam propriedades das apresentações pro-p minimais de G, temos que **D1** e **D2** são equivalentes com G possuindo uma apresentação minimal sobre $d \in \mathbb{N}$ geradores $x_1, \cdots, x_d$ com apenas um relator r. Além disto, a condição **D3** irá controlar as possíveis expressões para r em função de cada conjunto gerador de G.

O interesse original na álgebra dos grupos de Dëmushkin se deu pelo trabalho de S. Dëmushkin, que em seu artigo de 1961 [Dë61] descreveu os invariantes numéricos d e q, bem como forneceu uma fórmula para a apresentação pro-p de alguns casos particulares destes em termos de d e q. Os trabalhos posteriores por J.P. Serre [Ser64] e J. Labute [Lab67] obtiveram ao longo dos anos 60 do século XX uma classificação completa destes grupos em termos de seus invariantes numéricos d e de seus invariantes ciclotômicos (algébricos) χ. Os grupos de Dëmushkin também ocorrem naturalmente como completamentos pro-p de grupos fundamentais de superfícies compactadas [Ser64, p. 147] e como quocientes pro-p maximais de grupos fundamentais étale geométricos [Win84, p. 557]. Assim, a estrutura algébrica dos grupos de Dëmushkin, além de ser rica por si só e exibir fenômenos reminiscentes do comportamento de grupos abstratos de superfícies, também possui importantes aplicações aritméticas.

Os dois objetivos desta dissertação são:

1. Fornecer uma demonstração detalhada do Teorema de Classificação dos Grupos de Dëmushkin e uma fórmula para seu invariante ciclotômico χ em função desta classificação, como realizado em [Lab67, Teo. 3 e 4].

2. Explorar e demonstrar desenvolvimentos recentes acerca de propriedades combinatórias dos grupos de Dëmushkin: as propriedades de Howson, retrações virtuais para subgrupos finitamente gerados e a propriedade de M. Hall, seguindo [SZ19], e a desigualdade de Hanna Neumann seguindo [JZS19].

Cada uma destas compõem as duas partes deste trabalho. A parte I resume as propriedades elementares de grupos profinitos e pro-p, da homologia e da cohomologia destes, além de outras construções necessárias para o desenvolvimento do texto, e conclui com a exposição do Teorema de Classificação e seus corolários. A parte II é dedicada ao estudo e à demonstração das propriedades mencionadas no seguindo objetivo.

A principal contribuição deste trabalho está no ato de colecionar os resultados supracitados em uma única fonte, utilizando convenções e notações modernas e unificadas. A exposição em português é original e, na visão do autor, poderá contribuir com a difusão do tema no Brasil e em outros países falantes da língua.

Esta dissertação busca, por um lado, refletir e formalizar a trajetória e o trabalho do autor como aluno do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Entretanto, este estudo começou alguns anos antes, ainda como aluno de iniciação científica sob o mesmo orientador, investigando a cohomologia dos grupos finitos e profinitos. Desta forma, é esperado do autor que este cumpra os objetivos da dissertação resumindo a parte da exposição que contenha os fatos mais elementares acerca de grupos profinitos, e dê preferência às demonstrações dos resultados principais. Este foi o princípio que guiou a estrutura e a organização dos tópicos do presente trabalho, descrita a seguir.

O Capítulo 1 resume, com o mínimo de demonstrações, os conceitos, proposições e teoremas sobre grupos profinitos, a (co)homologia destes, as construções pro-p livres e outras miscelâneas que serão aplicadas ao estudo dos grupos de Dëmushkin nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 é dedicado a um estudo detalhado das propriedades elementares dos grupos de Dëmushkin, de seus invariantes d, q e χ, do Teorema de Classificação e de seus corolários.

Inicialmente, o foco é dado ao estudo de exemplos concretos destes grupos como $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, grupos de Dëmushkin "pequenos" como grupos pro-p analíticos p-ádicos e completamentos pro-p de grupos de superfícies compactas. Utilizando a teoria cohomológica desenvolvida no Capítulo 1, este capítulo também fornece a demonstração do Teorema de Classificação e sua aplicação ao estudo do invariante ciclotômico χ, obtendo como corolário uma fórmula para este em termos dos geradores de uma base "canônica". A principal referência desta exposição é [Lab67].

No Capítulo 3, é feita a demonstração de que grupos de Dëmushkin satisfazem a versão pro-p da propriedade de Howson. A propriedade de Howson, também conhecida como FGIP (*Finitely Generated Intersection Property*, ou propriedade da interseção finitamente gerada), descreve os grupos G cujas interseções $H \cap K$ de quaisquer pares H e K de subgrupos finitamente gerados é também finitamente gerada. Em seu artigo de 1954 [How54], A. Howson demonstrou que todos os grupos abstratos livres satisfazem esta propriedade. Utilizando a noção de um *subgrupo topologicamente finitamente gerado*, a propriedade de Howson possui um análogo profinito evidente [Lub82, Prop. 3.6]. Desde o trabalho de Howson, a validade desta propriedade foi estudada para diversas classes de grupos abstratos e profinitos. Neste capítulo, também é feita a demonstração de que esta propriedade é fechada para produtos pro-p livres, seguindo [SZ19].

O Capítulo 4 se dedica a explorar as propriedades de existência de retrações virtuais para subgrupos finitamente gerados em grupos de Dëmushkin e sua conexão com a versão pro-p da propriedade de M. Hall: a existência de subgrupos abertos contendo um dado subgrupo finitamente gerado como fator livre. Enquanto nenhum grupo de Dëmushkin infinito satisfaz a propriedade de M. Hall, muitos grupos de Dëmushkin satisfazem a propriedade de retrações virtuais. O objetivo deste capítulo é demonstrar a caracterização dos grupos de Dëmushkin com a propriedade de retrações virtuais e a caracterização dos grupos pro-p com a propriedade de M. Hall seguindo também [SZ19].

O último capítulo busca fornecer uma demonstração da validade de uma versão pro-p da Conjectura Forte de Hanna Neumann em grupos de Dëmushkin, seguindo [JZS19]. Além de demonstrar sua homônima propriedade para grupos livres abstratos, A. Howson obteve uma cota superior para o número minimal de geradores $d(H \cap K)$ da interseção $H \cap K$ em termos dos números minimais de geradores $d(H)$ e $d(K)$. Esta cota foi melhorada por H. Neumann em [Neu57], que também conjecturou a desigualdade:

$$d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.$$

A versão mais forte

$$\sum_{x\in H\backslash G/K}\big(d(H\cap xKx^{-1})-1\big)\leq (d(H)-1)(d(K)-1)$$

ficou conhecida como a Conjectura Forte de Hanna Neumann, onde H e K representam subgrupos finitamente geradores de um grupo livre abstrato. Adicionamente, neste capítulo os gradientes homológicos são combinados com as técnicas homológicas da pré-publicação [AJZ20] para obter uma demonstração de que todas as retrações de um grupo de Dëmushkin são inertes.

O Apêndice A contém as definições e demonstrações de algumas propriedades de bases simpléticas e subespaços isotrópicos para formas simpléticas definidas em anéis locais com corpo de resíduos possuindo característica $p > 0$. A principal referência é [SZ19], e estes resultados são referenciados nos Capítulos 2 e 4.

O Apêndice B reúne as demonstrações de diversas afirmações relacionado as apresentações de um G-módulo profinito p-aniquilado M sobre um grupo pro-p G e os grupos de homologia $H_i(G, M)$. A principal referência seguida é [JZS19], e estes resultados são utilizados no Capítulo 5.

Notação

Utilizamos os símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ para denotar os respectivos conjuntos numéricos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Adotamos a convenção de que $\mathbb{N}$ contém 0. O grupo aditivo cíclico de m elementos é denotado por $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, e o corpo finito de p elementos é denotado por $\mathbb{F}_p$ para diferenciá-lo de sua estrutura aditiva $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. O corpo dos números p-ádicos é denotado por $\mathbb{Q}_p$, e o anel dos inteiros p-ádicos é denotado por $\mathbb{Z}_p$.

Escrevemos $H \leq_c G$ para denotar um subgrupo fechado H de um grupo profinito G, e $U \leq_o G$ para denotar um subgrupo aberto U, do inglês *closed* e *open* respectivamente. A notação $H \trianglelefteq_c G$ e $U \trianglelefteq_o G$ é utilizada para denotarmos subgrupos normais fechados e subgrupos normais abertos, respectivamente. Utilizamos $d(G)$ para denotar a cardinalidade de um conjunto minimal de geradores topológicos de um grupo profinito G, ou seu posto. Utilizamos $\operatorname{rk}(G)$, do inglês *rank*, para denotar seu posto-de-subgrupos, isto é, o supremo dos postos $d(H)$ onde $H \leq_c G$. Os grupos $\operatorname{Hom}(G, H)$ entre grupos topológicos G e H são sempre dados pelos homomorfismos contínuos de G em H.

Se Λ é um anel profinito e X é um conjunto qualquer, $[\Lambda X]$ denota o Λ-módulo livre abstrato sobre o conjunto X. Se X é um espaço profinito, $[[\Lambda X]]$ denota o Λ-módulo livre profinito sobre o espaço profinito X. Em particular, $[[\Lambda G]]$ denota a álgebra de grupo completa de um grupo profinito G sobre um anel profinito Λ.

Dados elementos x, y de um grupo abstrato ou profinito G, o comutador de x e y é denotado por

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} .$$

Segundo [Ser17, p. 29], esta é uma convenção "mais usual". Contudo, ela altera o enunciado da fórmula para o invariante χ de um grupo de Dëmushkin (compare o Teorema 2.3.13 e [Lab67, Teo. 4]). Optamos, então, por seguir esta que coincide com a adotada no trabalho original de S. Dëmushkin [Dë61]. O subgrupo derivado $[G, G]$ (ou subgrupo comutador) de um grupo topológico G é o fecho do subgrupo abstrato gerado por todos os comutadores $[x, y]$ com $x, y \in G$. Este é o núcleo da abelianização $G \to G^{\mathrm{ab}}$, e independe da escolha de convenção para a definição dos comutadores individuais $[x, y]$.

O completamento pro-$\mathcal{C}$ de um grupo abstrato G, onde $\mathcal{C}$ é uma classe de grupos finitos, é denotado por $\widehat{G}_{\mathcal{C}}$. O completamento profinito é denotado apenas por $\widehat{G}$, e o completamento pro-p é denotado apenas por $\widehat{G}_p$.

O produto cartesiano de dois grupos topológicos G e H é denotado por $G \times H$. Se $\{G_i\}_{i \in I}$ denota uma família de grupos topológicos, seu produto é denotado por

$$\prod_{i \in I} G_i .$$

O produto pro-p livre é denotado por $G \coprod H$ ou

$$\coprod_{i \in I} G_i .$$

O grupo fundamental de um grafo de grupos $\mathcal{G}$ sobre um grafo profinito Γ é denotado por $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$. A soma direta de G-módulos grupos discretos M_i é denotada por

$$\bigoplus_{i \in I} M_i ,$$

e coincide com o produto direto no caso em que I é finito. A soma direta de G-módulos profinitos M_i é denotada por

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i .$$

Se G é um grupo pro-p, denotamos os grupos de cohomologia $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ e os grupos de homologia $H_i(G, \mathbb{F}_p)$ com coeficientes no G-módulo discreto $\mathbb{F}_p$ simplesmente por $H^i(G)$ e $H_i(G)$, respectivamente. Para todo subgrupo fechado H de G e H-módulo discreto M,

$\mathrm{Coind}_H^G(M)$ denota o G-módulo coinduzido $\mathrm{Hom}_H(G, M)$. Se M é um $[[\Lambda H]]$-módulo profinito, $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ denota o $[[\Lambda G]]$-módulo induzido $[[\Lambda G]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{[[\Lambda H]]} M$.

Se V é um espaço vetorial sobre um corpo κ, então seu espaço dual $\mathrm{Hom}_\kappa(V, \kappa)$ é denotado por V^*. Se M é um grupo abeliano profinito ou discreto e de torção, seu dual de Pontryagin $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ é denotado por $M^\vee$.

As seguintes expressões em *Fraktur* se referem às respectivas categorias:

$\mathfrak{set}$	–	Conjuntos
$\mathfrak{Grp}$	–	Grupos abstratos
$\mathfrak{ab}$	–	Grupos abelianos abstratos
pro-$\mathfrak{ab}$	–	Grupos profinitos abelianos
$\mathfrak{mod}^{\text{esq}}(R)$	–	Módulos abstratos à esquerda sobre um anel abstrato R
$\mathfrak{mod}^{\text{dir}}(R)$	–	Módulos abstratos à direita sobre um anel abstrato R
$\mathfrak{Dmod}^{\text{esq}}(\Lambda)$	–	Módulos discretos à esquerda sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Dmod}^{\text{dir}}(\Lambda)$	–	Módulos discretos à direita sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Pmod}^{\text{esq}}(\Lambda)$	–	Módulos profinitos à esquerda sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Pmod}^{\text{dir}}(\Lambda)$	–	Módulos profinitos à direita sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Dgmod}(G)$	–	Módulos discretos à esquerda sobre um grupo profinito G
$\mathfrak{Pgmod}(G)$	–	Módulos profinitos à esquerda sobre um grupo profinito G

Referências

[AJZ20] ANTOLÍN, Y. e JAIKIN-ZAPIRAIN, A.: *The Hanna Neumann conjecture for surface groups*. Pré-publicação. Disponível em https://matematicas.uam.es/~andrei.jaikin/preprints/HNsurface.pdf. Acessado em 22 de outubro de 2020, 2020.

[And68] ANDOZHSKII, I.: On subgroups of Demushkin groups. **Matematicheskie Zametki**, v. 4:p. 349–354, 1968.

[And73] ANDOZHSKII, I.: Demushkin groups. **Matematicheskie Zametki**, v. 14:p. 121–126, 1973.

[And74] ANDERSON, M.: Exactness properties of profinite completion functors. **Topology**, v. 13(n. 3):p. 229–239, 1974.

[Bau62] BAUMSLAG, G.: On generalised free products. **Mathematische Zeitschrift**, v. 78(n. 1):p. 423–438, 1962.

[Bau65] BAUMSLAG, B.: Intersections of finitely generated subgroups in free groups. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 41(n. 1):p. 673–679, 1965.

[BEW11] BARNEA, Y., ERSHOV, M. e WEIGEL, T.: Abstract commensurators of profinite groups. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363(n. 10):p. 5381–5417, 2011.

[BLLS14] BERGERON, N., LINNELL, P., LÜCK, W. e SAUER, R.: On the growth of Betti numbers in p-adic analytic towers. **Groups, Geometry, and Dynamics**, v. 8(n. 2):p. 311–329, 2014.

[BNW71] BINZ, E., NEUKIRCH, J. e WENZEL, G.: A subgroup theorem for free products of pro-finite groups. **Journal of Algebra**, v. 19(n. 1):p. 104–109, 1971.

[Bre93] BRENDON, G.: ***Topology and geometry***. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, Nova Iorque, primeira edição, 1993.

[Bro82] BROWN, K.: ***Cohomology of Groups***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1982.

[Bru66] BRUMER, A.: Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations. **Journal of Algebra**, v. 4(n. 3):p. 442–470, 1966.

[Dav14] DAVIS, M.: Poincaré duality groups. Em *Surveys on surgery theory*, volume volume 1 de *Annals of Math. Studies*, páginas p. 167–193. Princeton University Press, 2014.

[DdSMS03] DIXON, J. D., SAUTOY, M. P. F. DU, MANN, A. e SEGAL, D.: ***Analytic Pro-p Groups***. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, segunda edição, 2003.

[DL83] DUMMIT, D. e LABUTE, J.: On a new characterization of Demuskin groups. **Inventiones mathematicae**, v. 73:p. 413–418, 1983.

[dSSS00] SAUTOY, M. DU, SEGAL, D. e SHALEV, A. (editores): ***New horizons in pro-p groups***, volume 184 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Basel, primeira edição, 2000.

[DV96] DICKS, W. e VENTURA, E.: ***The group fixed by a family of injective endomorphisms of a free group***. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, primeira edição, 1996.

[Dë61] DËMUSHKIN, S.: The group of a maximal p-extension of a local field. **Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.**, v. 25(n. 3):p. 329–346, 1961. Em russo.

[Dë63] DËMUSHKIN, S.: On 2-extensions of a local field. **Sib. Mat. Zh.**, v. 4:p. 951–955, 1963. Em russo.

[Dë65] DËMUSHKIN, S.: Topological 2-groups with an even number of generators and a complete defining relation. **Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.**, v. 29:p. 3–10, 1965. Em russo.

[Eck87] ECKMANN, B.: Poincaré duality groups of dimension two are surface groups. Em *Combinatorial Group Theory and Topology*, Annals of Mathematics Studies, páginas p. 35–52. Princeton University Press, 1987.

[Eil49] EILENBERG, S.: Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v; 55(n. 1):p. 3–37, 1949.

[Eis95] EISENBUD, D.: ***Commutative Algebra***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1995.

[Eve91] EVENS, L.: ***The Cohomology of Groups***. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, Londres, 1991.

[Fri15] FRIEDMAN, J.: Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture. **Memoirs of the American Mathematical Society**, v. 233(n. 1100), 2015.

[FS59] FADDEEV, D. e SKOPIN, A.: On the proof of a theorem of Kawada. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 127:p. 529–530, 1959. Em russo, Zbl 0099.02604.

[Gre60] GREENBERG, L.: Discrete groups of motions. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 12:p. 415–426, 1960.

[Har79] HARRIS, M.: p-adic representations arising from descent on abelian varieties. **Compositio Mathematica**, v. 39(n. 2):p. 177–245, 1979.

[Har00] HARRIS, M.: Correction to p-adic representations arising from descent on abelian varieties. **Compositio Mathematica**, v. 121:p. 105–108, 2000.

[Hat01] HATCHER, A.: ***Algebraic topology***. Cambridge University Press, 2001.

[Hem76] HEMPEL, J.: *3-manifolds*. AMS Chelsea Publishing, primeira edição, 1976.

[How54] HOWSON, A. G.: On the intersection of finitely generated free groups. **Journal of the London Mathematical Society**, v. s1-29(n. 4):p. 428–434, 1954.

[HR87] HERFORT, W. e RIBES, L.: *Subgroups of free pro-p-products*, volume v. 101. Cambridge University Press, 1987.

[Jac53] JACOBSON, N.: ***Lectures in Abstract Algebra***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1953.

[JZ17] JAIKIN-ZAPIRAIN, A.: Approximations by subgroups of finite index and the Hanna Neumann conjecture. **Duke Mathematical Journal**, v. 166(n. 10):p. 1955–1987, 2017.

[JZS19] JAIKIN-ZAPIRAIN, A. e SHUSTERMAN, M.: The Hanna Neumann conjecture for Demushkin groups. **Advances in Mathematics**, v. 349:p. 1–28, 2019.

[Kap58] KAPLANSKY, I.: Projective Modules. **The Annals of Mathematics**, v. 68(n. 2):p. 372–377, 1958.

[Kap70] KAPLANSKY, I.: "Problems in the theory of rings"revisited. **The American Mathematical Monthly**, v. 77(n. 5):p. 445–454, 1970.

[Kaw54] KAWADA, Y.: On the structure of the Galois group of some infinite extensions. **J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I**, v. 7:p. 1–18, 87–106, 1954. Zbl 0055.03002.

[KKS00] KATO, K., KUROKAWA, N. e SAITO, T.: *Number Theory 1: Fermat's Dream*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, primeira edição, 200.

[KZ10] KOCHLOUKOVA, D. e ZALESSKII, P.: Fully residually free pro-p groups. **Journal of Algebra**, v. 324:p. 782–792, 2010.

[KZ11] KOCHLOUKOVA, D. e ZALESSKII, P.: On pro-p analogues of limit groups via extensions of centralizers. **Mathematische Zeitschrift**, v. 267:p. 109–128, 2011.

[Lab66] LABUTE, J.: Demuškin groups of rank $\aleph_0$. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 94:p. 211–244, 1966.

[Lab67] LABUTE, J.: Classification of Demuhskin groups. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 19:p. 106–132, 1967.

[Laz65] LAZARD, M.: Groupes analytiques p-adiques. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 26:p. 5–219, 1965.

[Lim03] LIMA, E.: ***Fundamental groups and covering spaces***. A K Peters, Massachusetts, 2003.

[Lub82] LUBOTZKY, A.: Combinatorial group theory for pro-p groups. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 25(n. 3):p. 311–325, 1982.

[Mel90] MEL'NIKOV, O: Subgroups and the homology of free products of profinite groups. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, v. 34(n. 1):p. 97–119, 1990.

[Min12] MINEYEV, I.: Submultiplicativity and the Hanna Neumann Conjecture. **Annals of Mathematics**, 175(1):p. 393–414, 2012.

[Neu57] NEUMANN, H. N.: On the intersection of finitely generated free groups. Addendum. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, Volume 5, 1957.

[NSW08] NEUKIRCH, J., SCHMIDT, A. e WINGBERG, K.: ***Cohomology of Number Fields***. Springer Berlin Heidelberg, primeira edição, 2008.

[Per02] PERELMAN, G.: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. Pré-publicação. Disponível em https://arxiv.org/abs/math/0211159. Acessado em 29 de janeiro de 2020, 2002.

[Rib17] RIBES, L.: ***Profinite graphs and groups***, volume 66 de *A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer International Publishing, Suíça, primeira edição, 2017.

[RZ10] RIBES, L. e ZALESSKII, P.: ***Profinite groups***. Springer-Verlag, Berlim, segunda edição, 2010.

[Sco78] SCOTT, P.: Subgroups of surface groups are almost geometric. **Journal of the London Mathematical Society**, v. s2-17:p. 555–565, 1978.

[Ser64] SERRE, J.-P.: Structure de certains pro-p-groupes. Em *Séminaire Bourbaki : années 1962/63 - 1963/64, exposés 241-276*, número 8 em *Séminaire Bourbaki*, páginas 145–155. Société mathématique de France, 1964. talk:252.

[Ser65] SERRE, J.-P.: Sur la dimension cohomologique des groupes profinis. **Topology**, v. 3:p. 413–420, 1965.

[Ser70] SERRE, J.-P.: *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, quarta edição, 1970.

[Ser97] SERRE, J.-P.: ***Cohomologie galoisienne***. Springer, Berlim, quinta edição, 1997.

[Ser17] SERRE, J.-P.: ***Finite groups: an introduction***. International Press, 2017.

[Sha47] SHAFAREVITCH, I.: On p-extensions. **Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.**, v. 20(n. 62):p. 351–363, 1947.

[Sko55] SKOPIN, A.: p-extensions of a local field containing roots of unity of degree p^m. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat**, v. 19:p. 455–470, 1955. Em russo.

[Sol96] SOLZHENITSYN, A.: *The Oak and the Calf*. Consentimento, segunda edição, 1996. Em russo: СОЛЖЕНИЦЫН, А.: Бодался Телёнок с Дубом. Согласие, 1996.

[ST80] SEIFERT, H. e THRELFALL, W.: ***Seifert and Threlfall: a textbook of topology. Seifert: Topology of 3-dimensional fibered spaces.*** Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks. Academic Press, Nova Iorque, 1980.

[SZ19] SHUSTERMAN, M. e ZALESSKII, P.: Virtual retraction and Howson's theorem in pro-p groups. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 373(n. 3):p. 1501–1527, 2019.

[VVZ94] VLADIMIROV, V., VOLOVICH, I. e ZELENOV, E.: ***p-Adic Analysis and Mathematical Physics***. World Scientific, primeira edição, abril 1994.

[Win84] WINGBERG, K.: Ein Analogon zur Fundamentalgruppe einer Riemann'schen Fläche im Zahlkörperfall. **Inventiones Mathematicae**, v. 77(n. 3):p. 557–584, 1984.

[WZ17] WEIGEL, T. e ZALESSKII, P.: Virtually free pro-p products. **Israel Journal of Mathematics**, v. 221:p. 425–434, 2017.

[Yam93] YAMAGISHI, M.: On the center of Galois groups of maximal pro-p extensions of algebraic number fields. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 436:p. 197–208, 1993.

[ZZ20] ZALESSKII, P. e ZAPATA, T.: Profinite extensions of centralizers and the profinite completion of limit groups. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 36(n. 1):p. 61–78, 2020.