CONTROLE DE CONSENSO PARA FORMAÇÃO DE ROBÔS MULTIAGENTES

NATALIA OLIVEIRA BORGES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONSENSUS CONTROL FOR MULTI-ROBOT FORMATION

CONTROLE DE CONSENSO PARA FORMAÇÃO DE ROBÔS MULTIAGENTES

NATALIA OLIVEIRA BORGES

ORIENTADOR: PROF. JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA, ENE/UNB

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

PUBLICAÇÃO: PPGEE 809/23

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE DE CONSENSO PARA FORMAÇÃO DE ROBÔS MULTIAGENTES

NATALIA OLIVEIRA BORGES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

_____

Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara – ENE/UnB
Orientador

_____

Prof. Dr. Henrique Cezar Ferreira - ENE/UnB
Examinador interno

_____

Prof. Dr. Marco Henrique Terra - USP
Examinador externo

BRASÍLIA, 1 DE DEZEMBRO DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

BORGES, NATALIA OLIVEIRA
Controle de Consenso para Formação de Robôs Multiagentes [Distrito Federal] 2023.
xiii, 104p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2023).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Elétrica
1. Controle de Consenso
2. Desigualdade de Matrizes Lineares
3. Formação
4. Incertezas de Comunicação
I. ENE/FT/UnB
II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BORGES, N. O. (2023). Controle de Consenso para Formação de Robôs Multiagentes . Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGEE 809/23, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 104p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Natalia Oliveira Borges
TÍTULO: Controle de Consenso para Formação de Robôs Multiagentes .
GRAU: Mestre ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Natalia Oliveira Borges

Departamento de Engenharia Elétrica (ENE) - FT
Universidade de Brasília (UnB)
Campus Darcy Ribeiro
CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais, cujo amor e apoio foram essenciais ao longo desta jornada. À minha família e amigos, pela paciência, encorajamento e compreensão. A todos os professores e mentores, cuja orientação e sabedoria me guiaram para o desenvolvimento deste projeto.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus mais profundos agradecimentos a Deus por guiar e iluminar meu caminho ao longo desta jornada. Aos meus pais, que sempre me apoiaram e encorajaram incondicionalmente. Aos meus amigos e familiares, pela paciência e ajuda nos momentos difíceis e por serem minha fonte de alegria e paz ao longo de todo o processo.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador Prof João Ishihara, cuja orientação, conhecimento e paciência foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Seu apoio e incentivo foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e profissional.

Por fim, estendo meus agradecimentos aos professores Eduardo Tognetti e Roberto Baptista e ao colega Bruno Calazans por toda ajuda e valiosas contribuições a este trabalho.

RESUMO ESTENDIDO

Título: Controle de Consenso para Formação de Robôs Multiagentes
Autor: Natalia Oliveira Borges
Orientador: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Brasília, 1 de dezembro de 2023

O desenvolvimento de técnicas de controle de consenso possui inúmeras aplicabilidades em sistemas multiagentes robóticos. Este trabalho visa estabelecer protocolos para projeto de controladores de consenso robusto de sistemas multiagentes lineares a partir do compartilhamento de saídas entre os agentes. Considera-se, nesse contexto, as possíveis incertezas relacionadas à topologia de comunicação entre os agentes e a presença de entradas de distúrbios que podem afetar tanto a dinâmica dos agentes quanto a medição de suas saídas.

O projeto de controladores de consenso robusto é posteriormente utilizado para desenvolver leis de controle que solucionam o problema de formação entre os agentes em duas propostas distintas: no caso em que a formação é relativa entre os agentes e invariante no tempo e no caso em que se pretende rastrear uma formação variante no tempo. Para o controle de formação também são consideradas as possibilidades de incertezas na topologia de comunicação e atuação de distúrbios.

Por fim, o projeto de controlador linear desenvolvido é aplicado em simulação robótica com um grupo de robôs móveis diferenciais do tipo *Pioneer P3-DX*. Neste caso é necessário linearizar a dinâmica do robô a partir da técnica de linearização por realimentação de entrada-saída. Os resultados obtidos na aplicação do controle de formação multi-robôs são discutidos, destacando as principais vantagens e limitações.

Palavras-chave: Controle de Consenso, Desigualdade de Matrizes Lineares, Formação, Incertezas de Comunicação.

ABSTRACT

Title: Consensus Control for Multi-robot Formation
Author: Natalia Oliveira Borges
Supervisor: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB
Graduate Program in Electrical Engineering
Brasília, December 1st, 2023

The development of consensus control techniques has numerous applications in robotic multi-agent systems. This work aims to establish protocols for the design of robust consensus controller for linear multi-agent systems, based on output sharing among the agents. In this context, considerations are made regarding possible uncertainties related to the communication topology and the presence of disturbance inputs that can affect both the agents' dynamics and the measurement of their outputs.

The design of the robust consensus controller is subsequently used to develop control laws that solve the formation problem in two distinct proposals: in the case where the formation is relative among the agents and time-invariant, and in the case where it is desired to track a time-variant formation, while maintaining the same conditions of uncertainties and disturbance effects.

Finally, the developed linear controller design is applied in a robotic simulation with a group of *Pioneer P3-DX* mobile robots. In this scenario, it is necessary to linearize the robot's dynamics using the input-output feedback linearization technique. The results obtained from the application of multi-robot formation control are discussed, highlighting the main advantages and limitations.

Keywords: Consensus Control, Linear Matrix Inequality, Formation, Communication Uncertainties.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Revisão da Literatura 3

1.1.1 Controle de Consenso 3

1.1.2 Controle de Formação de Multiagentes Robóticos 4

1.2 Objetivos 6

1.3 Organização do Documento 6

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 8

2.1 Conceitos Básicos 8

2.1.1 Desigualdades Matriciais 8

2.1.2 Espaços Convexos 9

2.2 Sistemas Dinâmicos Lineares 11

2.2.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares 12

2.3 Teoria de Estabilidade de Lyapunov 13

2.4 Desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas Lineares 14

2.5 Teoria de Grafos 15

3 CONSENSO ROBUSTO DE SISTEMAS MULTIAGENTES 19

3.1 Definição do Problema 19

3.2 Sistema Completo em Malha Fechada 21

3.3 Protocolo de Consenso $\mathcal{H}_\infty$ 24

3.4 Exemplo Numérico 32

4 CONTROLE DE FORMAÇÃO DE SISTEMAS MULTIAGENTES 38

4.1 Controle de Formação Relativa Invariante no Tempo 38

4.1.1 Definição do Problema 39

4.1.2 Projeto de Protocolo de Controle de Consenso de Formação 41

4.1.3 Exemplo Numérico 43

4.2 Rastreamento de Formação Variante no Tempo 49

4.2.1 Definição do Problema 49

4.2.2 Projeto de Controle 51

4.2.3 Exemplo Numérico 55

5 APLICAÇÃO EM SISTEMA MULTIAGENTE ROBÓTICO 61

5.1 Robô Diferencial 61

5.1.1 MODELAGEM DINÂMICA 62
5.1.1.1 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DINÂMICOS 64
5.1.2 LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ENTRADA-SAÍDA 64
5.2 IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE DE FORMAÇÃO EM UM SISTEMA MULTI-ROBÔS 66
5.2.1 MÓDULO CONTROLADOR 67
5.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS 69
5.3.1 FORMAÇÃO RELATIVA E INVARIANTE NO TEMPO 70
5.3.2 RASTREAMENTO DE FORMAÇÃO VARIANTE DO TEMPO 78

6 CONCLUSÃO 87

REFERÊNCIAS 88

A DETALHAMENTO 97
A.1 SISTEMA COMPLETO EM MALHA FECHADA 97
A.2 TRANSFORMAÇÃO DE PROBLEMA DE CONSENSO ROBUSTO PARA ESTABILIZAÇÃO ROBUSTA 100

LISTA DE FIGURAS

1.1 Exemplo de robôs cooperativos 2

2.1 Conjunto convexo e não convexo 10
2.2 Invólucro convexo 10
2.3 Politopo 11
2.4 Estabilidade de sistemas dinâmicos 12
2.5 Representação de Grafo Não Direcional 16
2.6 Representação de Grafo Direcional 16

3.1 Topologia de comunicação incerta 32
3.2 Evolução dos estados do sistema (3.28) com condições iniciais aleatórias 34
3.3 Evolução dos sinais α_1 e α_2 34
3.4 Evolução dos estados do sistema (3.28) com distúrbios 35
3.5 Evolução dos estados do sistema (3.28) com distúrbios e condições iniciais aleatórias 36
3.6 Evolução dos estados do sistema (3.28) com controlador de ordem reduzida ... 37

4.1 Exemplo de formação relativa e invariante no tempo 38
4.2 Topologia de comunicação incerta 43
4.3 Evolução da saída do sistema (4.12) sem distúrbios 45
4.4 Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema (4.12) sem distúrbios 46
4.5 Evolução da saída do sistema 4.12 com distúrbios 47
4.6 Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema 4.12 com distúrbios 48
4.7 Exemplo de rastreamento de formação variante no tempo 49
4.8 Topologia de comunicação incerta 55
4.9 Evolução da saída do sistema (4.28) 58
4.10 Evolução do erro de formação do sistema (4.28) 59
4.11 Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema (4.28) 60

5.1 Robôs do tipo *Pioneer* disponíveis no LARA 62
5.2 Parâmetros do robô móvel diferencial 62
5.3 Diagrama da malha de controle de formação e linearização por entrada e saída 66
5.4 Diagrama do módulo controlador 67
5.5 Topologia de Comunicação 70
5.6 Evolução da formação em V 72
5.7 Evolução da posição dos robôs para formação em V 73
5.8 Evolução do erro de formação de saída para formação em V 73

5.9 Formação retângulo 74
5.10 Evolução da posição dos robôs para formação retângulo 75
5.11 Evolução do erro de formação de saída para formação retângulo 75
5.12 Evolução da formação em diagonal 76
5.13 Evolução da posição dos robôs para formação diagonal 77
5.14 Evolução do erro de formação de saída para formação diagonal 77
5.15 Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação ciranda 80
5.16 Evolução da posição para a formação ciranda 80
5.17 Evolução do erro de formação de posição para a formação ciranda 81
5.18 Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação ciranda com distúrbios . 82
5.19 Evolução da posição para a formação ciranda com distúrbios 83
5.20 Evolução do erro de formação de posição para a formação ciranda com distúrbios 83
5.21 Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação com controlador estático 84
5.22 Evolução da posição para a formação com controlador estático 85
5.23 Evolução do erro de formação de posição para a formação com controlador estático 85

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação Matricial

X^T	Simboliza a matriz transposta de X
X^{-1}	Simboliza a matriz inversa de X
$X_\perp$	Matriz perpendicular a direita tal que $XX_\perp$=0
$X_{\underline{\perp}}$	Matriz perpendicular a esquerda tal que $X_{\underline{\perp}}X = 0$
$X_\parallel$	Simboliza a matriz pseudo-inversa a direita de forma que $XX_\parallel = I$
$X_{\underline{\parallel}}$	Simboliza a matriz pseudo-inversa a esquerda de forma que $X_{\underline{\parallel}}X = I$
$He\{X\}$	Notação para hermitiano que simboliza $X + X^T$
x_{ij}	Simboloza o elemento na linho i e coluna j de uma matriz
I_n	Matriz identidade de ordem n
$0_{m\times n}$	Matriz nula de dimensão $m \times n$
$\mathbf{1}_m$	Vetor coluna de com elementos iguais a 1 de dimensão m
$\star$	Simboliza o elemento simétrico

Espaços Vetoriais

$\mathbb{R}^{n\times m}$	Espaço de matrizes de elementos reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{R}^n_+$	Espaço de vetor com dimensão n de elementos reais
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complexos

Operações

$co(\mathcal{C})$	Notação para o invólucro convexo sobre o conjunto $\mathcal{C}$
$\otimes$	Produto de Kronecker

LISTA DE ACRÔNIMOS E ABREVIA CÕES

LARA Laboratório de Automação e Robótica. 1

LMI Desigualdades de Matrizes Lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities*. 1

MAS Sistemas Multiagentes, do inglês *Multi-Agent System*. 1

ROS Robot Operating System. 1

SOS Soma de Quadrados, do inglês *Sum of Squares*. 1

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas multiagentes (ou *MAS* do inglês *Multi Agent Systems*) emergiram como uma área de pesquisa de grande relevância nos últimos anos. Estes sistemas são concebidos com base na ideia de entidades autônomas e inteligentes, denominadas agentes, que podem colaborar e interagir entre si e com o ambiente para atingir objetivos comuns ou individuais, resultando em um paradigma poderoso para modelar e resolver problemas complexos e dinâmicos.

As aplicações dos sistemas multiagentes são vastas e variadas abrangendo áreas como a robótica [1], sistemas de energia [2], redes de telecomunicações [3], agricultura [4], indústria de jogos [5], entre outros.

A complexidade inerente à gestão de múltiplos agentes representa um desafio significativo quando se trata de coordenar e supervisionar suas ações. Nesse cenário, a concepção de estratégias de controle e protocolos assume uma importância crucial, pois deve ser capaz de atender às demandas de comportamento desses sistemas, ao mesmo tempo em que lida efetivamente com as adversidades que podem surgir.

Na robótica, os sistemas multiagentes desempenham um papel fundamental no contexto do trabalho cooperativo, especialmente quando se trata da execução de tarefas complexas que um único robô não pode resolver sozinho. As estratégias de controle em um sistema cooperativo com múltiplos robôs podem ser essencialmente divididas em duas abordagens principais [6]: o controle centralizado, no qual uma entidade central acumula informações dos robôs e emite comandos de controle, e o controle descentralizado ou distribuído, em que cada robô é equipado com seu próprio controlador e pode tomar decisões de forma autônoma.

No controle centralizado, o objetivo primordial é atingir um elevado nível de coordenação e otimização [6]. Isso se deve ao fato de que o controlador central possui uma visão abrangente do sistema, capacitando-o a tomar decisões embasadas em informações completas. Nesse contexto, uma comunicação direta e eficaz entre o controlador central e os agentes é essencial. Essa abordagem é amplamente empregada em sistemas que demandam um alto padrão de segurança, no entanto, ela não é escalável em situações envolvendo um grande número de agentes, ou quando o sistema está sujeito a possíveis falhas de comunicação [7].

Por outro lado, o controle descentralizado capacita os agentes a tomar decisões de forma autônoma, com base em suas informações locais, enquanto interagem entre si para coordenar suas ações [6], com o principal objetivo de estabelecer uma coordenação distribuída adaptativa e resiliente. A comunicação ocorre predominantemente entre agentes vizinhos,

permitindo a troca de informações pertinentes, tais como posições e velocidades. Esse tipo de controle demonstra sua eficácia na coordenação de sistemas que precisam ser altamente escaláveis ou possuírem um grande número de agentes. Além disso, esse sistema é mais robusto em relação a falhas individuais nos agentes, e sua capacidade de adaptação se destaca em ambientes dinâmicos e incertos [6].

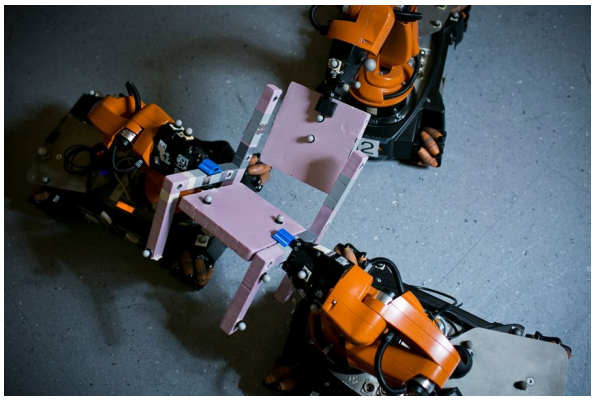
A colaboração eficaz de um sistema multiagente autônomo pode ser alcançada por meio do conceito de consenso, que se refere à busca por um acordo unificado em relação a variáveis críticas para o desempenho do sistema. Resolver esse desafio requer o desenvolvimento de protocolos de comunicação distribuída, nos quais os agentes trocam informações entre si para tomar decisões de forma autônoma sobre suas ações. Esse processo não apenas permite a coordenação eficiente dos agentes, mas também capacita o sistema a operar em uma ampla gama de cenários e aplicações.

Algumas aplicações de controle de consenso em robótica são: o controle de formação, como em missões de vigilância ou inspeção (Figura 1.1a), em que é necessário garantir que os robôs mantenham uma formação desejada enquanto se movem pelo ambiente, o transporte de cargas em equipe, em cenários de logística ou manufatura, em que vários robôs podem colaborar para transportar cargas pesadas ou volumosas, ou até mesmo na manufatura colaborativa (Figura 1.1b), em que robôs cooperativos podem usar o controle de consenso para coordenar suas ações, como montagem conjunta de peças, garantindo qualidade e eficiência.

Figura 1.1 – Exemplo de robôs cooperativos

(a) Missão de Vigilância

(b) Manufatura colaborativa



Fonte: (a) Feddema 2023 [8] (b) Hardesty (2015) [9]

1.1 REVISÃO DA LITERATURA

1.1.1 Controle de Consenso

O controle de consenso se baseia em projetar uma estratégia de entrada de controle que seja capaz de levar os estados dos agentes a um comum acordo. Inúmeros estudos sobre consenso multiagente concentram-se na elaboração de controladores com realimentação de estados, como evidenciado em pesquisas recentes, tais como [10, 11, 12, 13]. No entanto, é importante reconhecer que a implementação de sistemas dessa natureza em cenários do mundo real nem sempre é viável, uma vez que nem todos os estados do sistema podem estar prontamente disponíveis para medição. Por conta disso, muita atenção tem sido dada a pesquisas que projetam soluções para o problema de consenso por meio da realimentação dinâmica de saída. Alguns destes trabalhos apresentam protocolos de controle estático como [14, 15], já outros apresentam protocolos de controle dinâmicos, que podem ser de ordem reduzida, como em [16, 17], ou ordem completa, como em [18].

Além disso, um aspecto crucial no estudo de sistemas multiagentes é a topologia de comunicação, que pode ser direcionada [19, 16, 20, 21] ou não direcionada [22, 23, 15, 24, 25]. No contexto de implementação prática, sistemas multiagentes com redes de comunicação não direcionadas frequentemente apresentam um custo de implementação maior, visto que cada agente que possui um canal de comunicação para enviar informações aos seus vizinhos também deve obrigatoriamente ter um canal de comunicação para receber informações desses mesmos vizinhos. Apesar das restrições na arquitetura de comunicação, do ponto de vista teórico, lidar com problemas envolvendo agentes conectados em redes não direcionadas apresenta menos desafios já que a matriz Laplaciana do grafo associado ao sistema será simétrica [25], o que simplifica sua decomposição e a formulação de condições de convergência.

Ao se permitir trabalhar com redes direcionadas, expandem-se consideravelmente as opções disponíveis para a escolha de topologias, pois os agentes podem simplesmente enviar ou receber informações de seus vizinhos, sem a necessidade de suportar comunicação bidirecional. No entanto, do ponto de vista teórico, as redes direcionadas introduzem desafios adicionais na obtenção de condições de consenso. Nesse cenário, a matriz Laplaciana carece da estrutura que é observada nas redes não direcionadas, como a ausência de padrões de simetria, por exemplo, e pode resultar em autovalores complexos [16, 20].

Em muitos cenários práticos, os agentes estão sujeitos a distúrbios externos que afetam tanto suas dinâmicas internas quanto suas saídas observadas. Para lidar com tais sistemas conectados por redes não direcionadas, foram desenvolvidos diversos estudos, como [22], [15], [23], [26] e [27], que oferecem soluções e abordagens para a obtenção de consenso robusto. Já em sistemas com redes direcionadas é possível citar trabalhos como [28, 29], que

abordam o desenvolvimento de protocolos de controle estáticos; [30], que projeta protocolos de ordem completa; e [21], que desenvolve protocolos de realimentação de saída de ordem arbitrária, incluindo estáticos, de ordem reduzida e completos.

A maioria dos trabalhos da literatura de sistemas multiagentes assume uma topologia estática e conhecida [31, 21]. Contudo, essa hipótese nem sempre é válida em prática. Em algumas situações, a topologia de comunicação entre os agentes pode ser sofrer interferências devido a limitações na comunicação ou interferência de distúrbios, e assim, o desempenho do canal pode se deteriorar e até mesmo ser perdido. Alguns trabalhos mais recentes abordam o problema de incerteza na topologia de forma determinística [32, 33, 34] ou estocástica [35], o último por meio de cadeias de Markov chaveadas. Na abordagem determinística, os trabalhos [32] e [34] se restringem a sistemas multiagentes de segunda ordem. Em [33] e [34], as incertezas que afetam a rede são descritas na forma politópica resultando em condições de projeto na forma de soma de quadrados (SOS, do inglês *sum of squares*) e assumindo que os estados estão disponíveis para comunicação em rede.

Neste estudo, expandimos as condições previamente estabelecidas por Silva et al. [21] para considerar o desafio do projeto de protocolo de consenso robusto em sistemas multiagentes lineares sujeitos a distúrbios, que podem afetar tanto a dinâmica dos agentes quanto as suas saídas, e com agentes que se comunicam através de uma rede direcionada com topologia incerta. Incorporamos a incerteza na comunicação por meio da modelagem dos ganhos dos canais de comunicação dentro de um intervalo conhecido de valores. Dessa forma, a incerteza pode ser descrita por matrizes Laplacianas incertas, que pertencem a um politopo. Como resultado, o problema de consenso pode ser reformulado como um problema convexo, permitindo a obtenção de soluções baseadas em desigualdades matriciais lineares.

O consenso por realimentação de saída é abordado utilizando o método de dois estágios, inspirado em [36]. Inicialmente, calculamos um ganho de realimentação de estados que depende dos parâmetros dos agentes. Em seguida, determinamos as condições *LMI* que garantem o consenso por meio da realimentação de saída.

1.1.2 Controle de Formação de Multiagentes Robóticos

Dentro do campo do controle de consenso, há um crescente interesse no desenvolvimento de técnicas para o controle de formação em sistemas multiagentes. Essa área engloba estratégias tanto para o controle de formação invariante no tempo (TIF, do inglês time-invariant formation) [37, 38, 31, 39], onde os agentes devem alcançar e manter uma formação fixa, quanto para o controle de formação variante no tempo (TVF, do inglês time-varying formation), que leva em consideração as mudanças na formação desejada ao longo do tempo, incluindo sua derivada [19, 40, 41, 42].

Entre os trabalhos que abordam o controle de formação invariante no tempo, podemos

destacar algumas contribuições significativas. Por exemplo, em [37], foram desenvolvidos protocolos de consenso para sistemas com dinâmica de segunda ordem, aplicando os resultados a um sistema de robôs móveis. Em [38], foi projetada uma estratégia de controle de formação para veículos subaquáticos, levando em consideração a tolerância a falhas e incertezas. Já em [31], foi desenvolvido um protocolo de consenso para problemas de líder-seguidor com base em observadores distribuídos, com aplicação em um sistema robótico real que utiliza informações visuais de câmeras para sensoriamento de localização. Além disso, em [39], foram propostos protocolos de consenso para problemas de formação, tanto invariante quanto variante no tempo, considerando sistemas com agentes heterogêneos e múltiplos líderes.

No âmbito das pesquisas sobre controle de formação variante no tempo em sistemas multiagentes, é pertinente destacar algumas contribuições relevantes. Por exemplo, em [19], foi abordado um controle baseado em realimentação de estados aplicado a sistemas subdivididos em grupos, considerando a presença de múltiplos líderes. Já [40] propôs protocolos de controle por realimentação de saída que contemplam tanto sistemas sem líder quanto sistemas com múltiplos líderes. Trabalhos como [41] e [42] também ofereceram soluções para o rastreamento de formação variante no tempo, abordando a questão da heterogeneidade dos agentes em cenários de sistemas contínuos e discretos, respectivamente.

A questão da comunicação entre os agentes também é um ponto de pesquisa importante, visto que em cenários da vida real, é comum a ocorrência de perdas de comunicação devido a falhas, interferências e até mesmo ataques maliciosos. Além disso, atrasos podem surgir devido a problemas em redes de comunicação. Vários estudos têm se dedicado a enfrentar esses desafios no contexto do controle de formação. Por exemplo, [43], [18] e [44] exploram topologias de comunicação com links variantes, que podem modelar perdas de comunicação. Enquanto isso, [45] lida com a variação de pesos na matriz Laplaciana, considerando seu impacto na comunicação entre agentes. Além disso, [42] e [44] introduzem atrasos na comunicação entre agentes vizinhos.

Outro aspecto de extrema importância nos estudos de controle de formação em sistemas multiagentes robóticos é a prevenção de colisões. Isso se aplica tanto à obstáculos no ambiente quanto à garantia de distâncias seguras entre os próprios agentes do sistema. Nesse contexto, são relevantes trabalhos como [46] e [47], que se dedicam a desenvolver estratégias para garantir que os agentes evitem colisões, contribuindo assim para a segurança e eficácia das operações.

1.2 OBJETIVOS

Considerando a ampla aplicabilidade de sistemas multiagentes robóticos no contexto da robótica cooperativa, o objetivo deste trabalho é desenvolver protocolos de projeto de controladores distribuídos capazes de solucionar o problema de formação em um sistema multiagente homogêneo em duas situações distintas. A primeira situação aborda a realização de uma formação relativa e invariante no tempo entre os agentes, enquanto a segunda visa rastrear uma formação variável ao longo do tempo.

O projeto de controle de formação será fundamentado na teoria de consenso robusto de sistemas multiagentes, com o propósito de estabelecer condições suficientes para o desenvolvimento de controladores distribuídos estáticos, de ordem completa ou reduzida, a partir do compartilhamento das saídas dos agentes. Esses controladores devem assegurar o consenso robusto do sistema, levando em consideração potenciais perturbações nos estados dos agentes e/ou em suas saídas. Além disso, serão consideradas as incertezas de comunicação entre os agentes em uma rede de comunicação direcional.

Para concluir, o objetivo final deste projeto é desenvolver dois módulos de controle distribuído em linguagem *Python*, utilizando a comunicação por meio do *framework ROS* (Robot Operating System). O primeiro módulo visa resolver o problema de formação relativa e invariante entre os agentes, enquanto o segundo módulo se destina a solucionar o desafio do rastreamento de formação variável ao longo do tempo. Esses módulos serão implementados em um sistema de simulação robótica, utilizando o simulador *CoppeliaSim*, para aplicação em robôs do tipo *Pioneer P3-DX*.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 2 oferece uma base teórica fundamental para o desenvolvimento das técnicas de controle abordadas nos capítulos subsequentes. Ele estabelece os conceitos essenciais de sistemas dinâmicos, juntamente com a teoria de estabilidade e controle de Lyapunov. Além disso, este capítulo apresenta teoremas e resultados relevantes da literatura que são essenciais para o entendimento do trabalho. Também são discutidos os princípios da teoria de grafos, destacando sua aplicação na representação da comunicação entre os agentes do sistema.

O Capítulo 3 se concentra na definição do problema e no projeto de controle de consenso robusto de sistemas multiagentes, abordando os conceitos básicos de sistemas multiagentes, incluindo definições de agentes, controladores e redes de comunicação, e propondo uma solução baseada em estabilização robusta de sistema por desigualdades de matrizes lineares

para solucionar o problema de consenso de sistemas multiagentes sujeitos a distúrbios e incertezas na comunicação.

O Capítulo 4 demonstra como utilizar a teoria de controle de consenso para abordar o problema de formação de robôs. Inicialmente, explora o conceito de formação invariante no tempo e relativa entre os agentes. Em seguida, aborda o desafio do rastreamento de formação variante no tempo.

O Capítulo 5 apresenta uma implementação prática do controle de formação para agentes robóticos, aplicando os conceitos de controle de consenso robusto para formação multiagente. O capítulo se inicia apresentando o modelo dinâmico de um robô diferencial e discute as condições essenciais para a implementação do sistema utilizando linearização por entrada-saída e teoria de controle de formação linear, por fim são realizados experimentos que ilustram o funcionamento das técnicas de formação desenvolvidas.

O Capítulo 6 conclui o trabalho apresentando os principais contribuições, resultados e os desafios futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo oferece a base teórica essencial para o desenvolvimento das técnicas de controle que serão exploradas nos capítulos subsequentes. Inicialmente, serão estabelecidos os conceitos fundamentais de um sistema dinâmico, juntamente com a teoria de estabilidade e controle de Lyapunov para estes sistemas. Serão detalhados alguns teoremas e resultados relevantes da literatura que se mostram cruciais para os próximos desenvolvimentos. Além disso, o capítulo aborda a teoria de grafos, que desempenha um papel fundamental na representação da comunicação entre os agentes do sistema.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

A seguir serão definidos alguns conceitos matemáticos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho.

2.1.1 Desigualdades Matriciais

Em relação a desigualdade de matrizes é muito importante a definição conceitual de matriz positiva (negativa) definida (semi-definida).

DEFINIÇÃO 2.1 Positividade de matrizes

1. Uma matriz M é definida positiva se e somente se $x^T Mx > 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$.
2. Uma matriz M é semi-definida positiva se e somente se $x^T Mx \geq 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$.
3. Uma matriz M é definida negativa se e somente se $x^T Mx < 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$.
4. Uma matriz M é semi-definida negativa se e somente se $x^T Mx \leq 0, \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$.

LMI é uma desigualdade de matrizes lineares na forma de

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + ... + x_m F_m = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0, \tag{2.1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis de decisão e $F_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, ..., n$ são matrizes constantes simétricas.

Algumas definições importantes de manipulação de LMIs podem ajudar a reescrever problemas e encontrar soluções.

LEMA 2.1 (Lema de Finsler [48]) Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto de $\mathcal{B} < n$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. $w^T \mathcal{D} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0$
2. ${\mathcal{B}^\perp}^T \mathcal{D} \mathcal{B}^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{D} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$

LEMA 2.2 (Lema da Eliminação [48]) Seja $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, então existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, tal que

$$\mathcal{Q} + \mathbf{U}^T \mathcal{X} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathcal{X}^T \mathbf{U} \prec 0, \tag{2.2}$$

se, e somente se, as condições

$$(\mathbf{U}_\perp^T \mathcal{Q} \mathbf{U}_\perp \prec 0 \text{ ou } \mathbf{U}^T \mathbf{U} \succ 0) \text{ e}$$
$$(\mathbf{V}_\perp^T \mathcal{Q} \mathbf{V}_\perp \prec 0 \text{ ou } \mathbf{V}^T \mathbf{V} \succ 0)$$

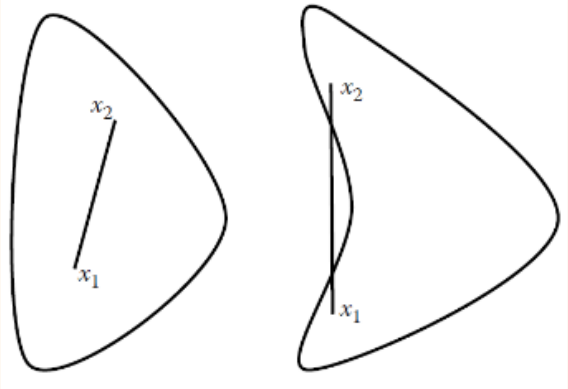
são satisfeitas.

2.1.2 Espaços Convexos

DEFINIÇÃO 2.2 (Conjunto Convexo) Um conjunto $\mathcal{C}$ é convexo se o segmento de reta entre quaisquer dois pontos em $\mathcal{C}$ está contido em $\mathcal{C}$, isto é, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, verifica-se que

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathcal{C}.$$

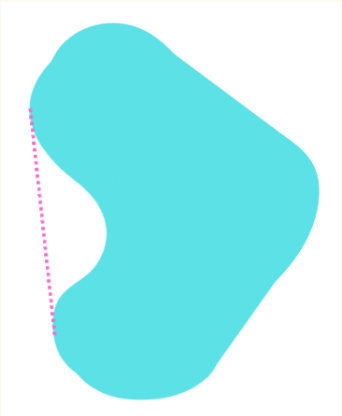
Figura 2.1 – Conjunto convexo e não convexo



Fonte: [49].

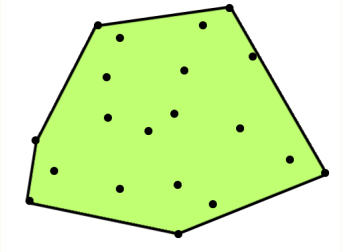
DEFINIÇÃO 2.3 (Invólucro Convexo) Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, a interseção de todos os conjuntos convexos contendo $\mathcal{C}$ é chamado de invólucro convexo e é representado pela notação $co(\mathcal{C})$. O invólucro convexo é o menor conjunto convexo de contém o conjunto $\mathcal{C}$.

Figura 2.2 – Invólucro convexo



DEFINIÇÃO 2.4 (Politopo Convexo) Um politopo convexo é o invólucro convexo de um número finito de pontos de um espaço euclidiano.

Figura 2.3 – Politopo



2.2 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

O comportamento de sistemas físicos reais normalmente pode ser modelado matematicamente por meio de um sistema que possui entradas e saídas. Dizemos que um sistema é linear quando o seu comportamento pode ser modelado por meio de equações diferenciais lineares, na notação de espaço de estados, um sistema linear pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é conjunto de variáveis de estado do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ é o conjunto de sinais de entrada e $y(t) \in \mathbb{R}^t$ são as saídas do sistema. Neste tipo de sistema, a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada de matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{n\times s}$ é a matriz de entradas, $C \in \mathbb{R}^{t\times n}$ é a matriz de saídas e $D \in \mathbb{R}^{t\times s}$ é a matriz de alimentação direta.

Na análise de sistemas lineares no espaço de estados, é importante ressaltar dois conceitos:

DEFINIÇÃO 2.5 (Controlabilidade) Um sistema (ou o par (A, B)) é dito controlável se existe um vetor de entrada de controle $u(t)$ tal que partindo de uma condição inicial $x(0) = x_0$ é possível alcançar uma condição final x_1 em tempo finito.

DEFINIÇÃO 2.6 (Observabilidade) Um sistema (ou o par (A, C)) é dito observável se qualquer estado $x(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $y(t)$, durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$.

2.2.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares

Considere o sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2.4}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, a condição inicial $x(0) = x_0$ é conhecida e x_e é ponto de de equilíbrio do sistema, isto é $Ax_e = 0$.

O sistema é dito estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

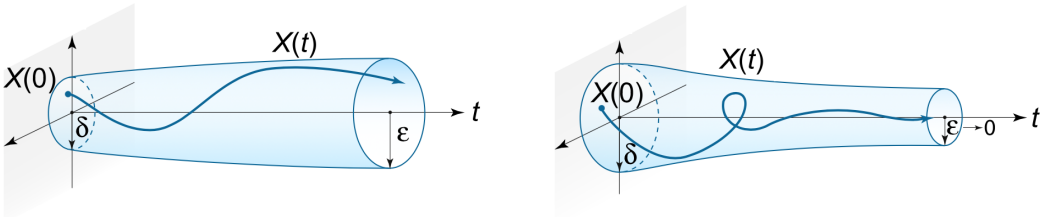
O sistema é dito assintoticamente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \text{ e } \lim_{t\to\infty} x(t) = x_e. \tag{2.6}$$

A Figura 2.4 exemplifica o comportamento de um sistema estável e de um sistema assintoticamente estável.

Figura 2.4 – Estabilidade de sistemas dinâmicos

(a) Sistema estável (b) Sistema assintoticamente estável



Fonte: [50]

Para sistemas do tipo (2.4), é válido o seguinte teorema.

Teorema 2.1 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é estável se, e somente se, todos os autovalores de A têm parte real não positiva e é assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de A tem parte real estritamente negativa.

2.3 TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

Aleksandr Lyapunov foi um matemático russo que desenvolveu uma contribuição muito significativa no campo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Em seu trabalho [51], ele demonstrou que certas funções poderiam estabelecer condições suficientes para assegurar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Essas funções, conhecidas como funções de Lyapunov, devem obedecer às condições estabelecidas pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2 Estabilidade de Lyapunov [48]

Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, em que $f : D \to \mathbb{R}^n$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$. Seja $V : D \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que

$$\begin{aligned} &V(0) = 0, \\ &V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}, \\ &\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D, \end{aligned}$$

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}, \tag{2.7}$$

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável

O objetivo principal da teoria de estabilidade de Lyapunov se resume a encontrar uma função $V(x)$ que seja nula na origem, positiva fora da origem e que possua uma derivada estritamente negativa, para garantir a estabilidade assintótica. Quando essas condições são satisfeitas, pode-se concluir que as trajetórias convergem para a origem. Uma das dificuldades dessa teoria reside na ausência de um método sistemático para identificar uma função de Lyapunov que seja apropriada para comprovar a estabilidade de um sistema. Em certos casos, no entanto, existem candidatas naturais para a função de Lyapunov, como funções de energia em sistemas elétricos ou mecânicos [52].

Desenvolvendo a teoria de Lyapunov para sistemas do tipo (2.4) e utilizando como candidata a função de Lyapunov uma função quadrática $V(x) = x'Px$, com $P = P'$ tem-se

$$V(x) = x'Px > 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow P > 0$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x < 0 \Leftrightarrow A'P + PA < 0.$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.3

Os autovalores de A têm parte real negativa se, e somente se, para qualquer matriz simétrica definida positiva Q a equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

tiver uma única solução $P = P' > 0$.

2.4 DESEMPENHO $\mathcal{H}_\infty$ DE SISTEMAS LINEARES

A norma $\mathcal{H}_\infty$ é uma medida utilizada na teoria de controle para avaliar a estabilidade e o desempenho de sistemas lineares. Ela é usada para caracterizar a sensibilidade de um sistema a perturbações.

Formalmente, dada uma função de transferência de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como a norma $\mathcal{L}_\infty$ da função de transferência no domínio da frequência. Ela representa o ganho máximo de amplitude entre uma entrada e uma saída do sistema em uma faixa de frequência específica. Em termos mais simples, a norma $\mathcal{H}_\infty$ mede a maior amplificação possível de um sinal de entrada para um sinal de saída. Portanto, quanto menor esta norma, mais robusto e estável é o sistema em relação a perturbações externas.

Considerando um sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t), \\ y(t) &= Cx(t) + D\omega(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

tal que $\omega(t)$ é um sinal de energia, ou seja

$$\int_0^\infty \omega(\tau)'\omega(\tau)d\tau < +\infty \Leftrightarrow \omega(t) \in \mathcal{L}_2,$$

a norma $\mathcal{H}_\infty$ é dada pelo menor valor de γ tal que

$$\|y(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2 , \tag{2.9}$$

ou, de forma equivalente,

$$\|H(s)\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow = y(t)'y(t) \leq \gamma^2 \omega(t)'\omega(t). \tag{2.10}$$

Estabelecendo uma função candidata a Lyapunov do sistema (2.8) como $V(x) = x'Px$, tal que $P = P' > 0$, tem se

$$\dot{V} + y'y - \omega'\omega < 0. \tag{2.11}$$

Considerando as equações do sistema, é possível reescreve 2.11 como

$$\begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} < 0. \tag{2.12}$$

A partir deste desenvolvimento é possível estabelecer o seguinte Lema.

LEMA 2.3 (*Bounded Real Lemma* [48]) A matriz A é assintóticamente estável e a norma $\|H\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, exixtir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix}' < 0 \tag{2.13}$$

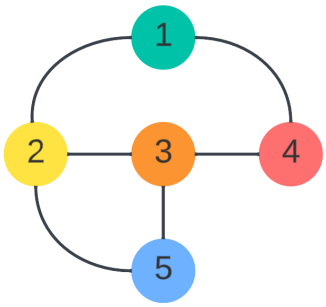
2.5 TEORIA DE GRAFOS

Um sistema multiagente pode ser representado pela notação de matemática de grafos de comunicação $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$, em que $\mathcal{V} = \{v_i, ..., v_m\}$ são os nós do grafo e representam os agentes do sistema, $\mathcal{E} \subseteq \{(v_j, v_i) : i, j = 1, ..., m\}$ são os arcos do grafo e representam o canal de comunicação entre dois agentes e $\mathsf{A} = [a_{ij}]$ é a matriz de adjacência em que $a_{ij} > 0$ se $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ e $a_{ij} = 0$ se $(v_i, v_j) \notin \mathcal{E}$.

A natureza da rede de comunicação em um sistema multiagente pode variar, podendo ser classificada como direcional ou não direcional, dependendo das características das conexões entre os agentes. Em uma rede de comunicação não direcional, a informação pode circular em ambas as direções entre dois agentes interconectados. Nesse contexto, na notação de

grafos, os arcos (ou arestas) que conectam os nós não possuem uma orientação específica, e a matriz de adjacência associada é simétrica. A Figura 2.5 representa um exemplo de grafo não direcional.

Figura 2.5 – Representação de Grafo Não Direcional

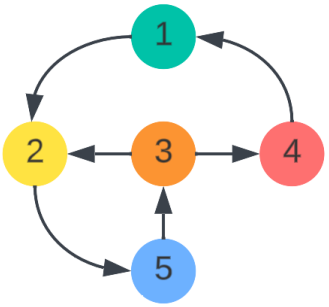


Para o grafo da Figura 2.5 a matriz de adjacência associada é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Em contraste, uma rede de comunicação direcional implica que as conexões entre os agentes têm uma orientação específica. Isso significa que a comunicação flui de um agente para outro, embora não necessariamente ocorra na direção oposta. A Figura 2.6 representa um grafo direcional.

Figura 2.6 – Representação de Grafo Direcional



A matriz de adjacência associada ao grafo da Figura 2.6 é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

A vizinhança de um nó v_i é dada por todos os nós v_j em que $a_{ij} > 0$ e pode ser descrita como o conjunto $\mathcal{N}_i := \{v_j \in \mathcal{V} : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$.

Além da matriz de adjacência, que foca em representar as conexões diretas entre nós de um grafo, outra representação importante é obtida através da matriz Laplaciana, que descreve as propriedades locais dos nós e como eles estão conectados. A matriz Laplaciana associada ao grafo direcionado $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$ é definida como

$$L = [l_{ij}] = \begin{cases} l_{ii} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}, & \forall i = 1, \ldots, N \\ l_{ij} = -a_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.16}$$

EXEMPLO 2.1 Caso os pesos a_{ij} não nulos da matriz de adjacência A da Figura 2.6 fossem unitários, a matriz Laplaciana seria dada por

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

A seguir serão descritos alguns conceitos importantes na teoria de grafos.

- **Caminho**

  Um caminho é definido por uma sequência de vértices em um grafo, onde cada vértice no caminho está conectado ao próximo por uma aresta.

- **Ciclo**

  Um ciclo em um grafo é definido por um caminho fechado, sem arcos repetidos, em que o primeiro vértice é igual ao último vértice.

- **Subgrafo**

  Um grafo $\mathbb{G}(\mathcal{V}_s, \mathcal{E}_s, \mathsf{A}_s)$ é dito subgrafo de $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$ se $\mathcal{V}_s \subseteq \mathcal{V}$ e $\xi_s \subseteq \xi$.

- **Grafo conexo**

  Um grafo é dito conexo se existe um caminho entre quaisquer dois vértices do grafo.

- **Árvore geradora**

  Uma árvore geradora (*spanning tree*) é um subgrafo conexo e acíclico (que não possui ciclos) que contém todos os vértices do grafo original.

Com base nos conceitos apresentados, é possível definir o seguinte lema.

LEMA 2.4 ([53]) Se existe uma árvore geradora em $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$, então temos que zero é um autovalor simples da matriz Laplaciana L associada a $\mathbb{G}$ e todos os outros autovalores têm partes reais positivas.

As noções abordadas neste capítulo serão fundamentais para compreender o desenvolvimento dos protocolos de controle que serão discutidos nos capítulos subsequentes.

3 CONSENSO ROBUSTO DE SISTEMAS MULTIAGENTES

Este capítulo se concentra na definição do problema e no projeto de controle de consenso robusto de sistemas multiagentes. Iniciamos abordando os conceitos básicos de sistemas multiagentes, incluindo definições de agentes, controladores e redes de comunicação. Em seguida, uma solução baseada em estabilização robusta de sistema por desigualdades de matrizes lineares é proposta para solucionar o problema.

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O consenso de sistemas multiagentes é um conceito muito importante na teoria de controle devido a sua ampla aplicabilidade em diversos cenários práticos, como já discutido no Capítulo 1. Ele se refere ao processo pelo qual um grupo de agentes autônomos trabalha em conjunto para alcançar um acordo ou consenso em relação a um estado ou objetivo em comum. Neste trabalho, consideramos um sistema contendo m agentes homogêneos, ou seja, com dinâmicas lineares idênticas, que pode ser representado pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + B_u u_i(t) + B_w w_i(t), \\ y_i(t) &= C_y x_i(t) + D_y w_i(t), \quad i = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado local do agente i, $u_i(t) \in \mathbb{R}^s$ é a entrada de controle fornecida por um controlador distribuído (3.3), $w_i(t) \in \mathcal{L}_2^{n_w}[0, \infty)$ é um sinal de distúrbio exógeno ao sistema e $y_i(t) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida do agente. Neste sistema a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada matriz de estados, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times s}$ é a matriz de entrada de controle, $B_\omega \in \mathbb{R}^{n \times n_\omega}$ é a matriz de entrada de distúrbios, $C_y \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saída e $D_y \in \mathbb{R}^{q \times n_\omega}$ é a matriz de alimentação direta dos distúrbios.

HIPÓTESE 3.1 Em relação a dinâmica dos agentes, assume-se que o par (A, B_u) é controlável e o par (A, C_y) é observável.

Os agentes constituem um sistema multiagente distribuído, ou seja, não existe uma entidade central que reúne as informações dos agentes e envia os sinais de controle. Cada agente opera de forma autônoma a partir de informações limitadas sobre as saídas dos outros

agentes, de forma que a comunicação ocorre exclusivamente com os agentes vizinhos. A estrutura de comunicação da rede pode ser representada usando a notação de grafo $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$ e essa comunicação também está sujeita a incertezas.

Neste trabalho, levamos em conta a possibilidade de que a topologia da rede de comunicação entre os agentes pode variar ao longo do tempo. Em outras palavras, a forma como os agentes estão conectados entre si pode mudar. Para modelar essa variação, consideramos que a matriz de adjacência (que descreve as conexões entre os agentes) e, consequentemente, a matriz Laplaciana são sujeitas a incertezas e variações temporais.

A incerteza da rede recai sobre os pesos $a_{ij}(t)$ que podem variar dentro do intervalo limitado $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ conhecido, em que $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$. Dessa forma, é possível obter uma família de matrizes de adjacência possíveis que compõem um conjunto de vértices da representação politópica da matriz de adjacências como o conjunto

$$\Omega_{\mathsf{A}} = \{\mathsf{A} = [a_{ij}] : a_{ij} \in \text{co}(\{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\}),\ i = 1, ..., m\},$$

em que $co(\{\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\})$ designa o politopo que envolve os valores possíveis para a_{ij}. Cada vértice do conjunto Ω_{A} possui uma matriz Laplaciana L_k associada. Neste trabalho, as incertezas na rede de comunicação serão modeladas pela representação politópica

$$\mathcal{L} = \left\{ L(\alpha) = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i L_i : \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0 \right\}, \tag{3.2}$$

em que $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_\kappa(t))$ é o vetor de parâmetros que representam as incertezas na topologia.

HIPÓTESE 3.2 O grafo direto $\mathbb{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathsf{A})$ possui uma árvore geradora para toda incerteza admissível na topologia da rede.

Cada agente do sistema possui um controlador que é modelado como um sistema dinâmico determinado pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c \nu_i(t), \\ u_i(t) &= C_c x_{c,i}(t) + D_c \nu_i(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neste sistema $x_{c,i}(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ representa o vetor de estados do controlador e $\nu_i(t)$ é chamado de erro de consenso, dado por

$$\nu_i(t) = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)), \tag{3.4}$$

em que $a_{ij}(t)$ são os pesos da matriz de adjacência que representa a comunicação entre o agente i e os agentes j de sua vizinhança.

Para o sistema multiagente (3.1) define-se a saída balanceada de consenso entre os estados dos agentes como

$$z_i(t) = C_z(x_i(t) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j(t)), \tag{3.5}$$

tal que o consenso é alcançado quando $z_i(t) = 0$ para $i = 1, ..., m$, e a matriz C_z pondera a importância relativa de cada componente dos estados dos agentes na análise de desempenho.

Como neste trabalho consideramos a presença de distúrbios, o consenso exato das saídas ponderadas não é possível. Logo, para a análise da qualidade de desempenho, o consenso é avaliado em relação à norma $\mathcal{H}_\infty$, que compara a energia dos sinais de distúrbios exógenos $w(t)$ com a saída de consenso $z(t)$, de acordo com a seguinte relação

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 \, dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|w(t)\|^2 \, dt, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty], \tag{3.6}$$

em que o escalar $\gamma > 0$ é o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (3.1)-(3.3).

Desta forma, este capítulo pretende encontrar soluções para os seguintes problemas.

Problema 1. *Projetar um protocolo de controle no formato de (3.1), tal que:*

1. *o sistema multiagente alcance o estado de consenso assintótico robusto na situação em que não há distúrbios $w_i(t)$, para qualquer condição inicial.*

$$\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} \|x_{c,i}(t) - x_{c,j}(t)\| = 0, \quad i, j = 1, ..., m.$$

2. *o sistema multiagente satisfaça o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ dado em* (3.6) *com custo garantido $\gamma > 0$ na presença de distúrbios $\omega_i \in \mathcal{L}_2^{n_w}[0, \infty)$ e condições iniciais nulas.*

3.2 SISTEMA COMPLETO EM MALHA FECHADA

O sistema multiagente descrito pelas dinâmicas (3.1) e (3.3) pode ser reescrito de forma acoplada concatenando os estados dos agentes $x(t) = [x_1^T(t) \quad x_2^T(t) \quad ... \quad x_m^T(t)]^T$ e os estados do controlador $x_c(t) = [x_{c,1}^T(t) \quad x_{c,2}^T(t) \quad ... \quad x_{c,m}^T(t)]^T$ definindo uma nova variável de estado aumentada $\phi(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x_c^T(t) \end{bmatrix}^T$.

Utilizando a notação do produto de Kronecker, a representação do sistema em malha

fechada é dada por[1]

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha)\phi(t) + \mathbb{B}(\alpha)w(t),\\ z(t) &= \mathbb{C}\phi(t),\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix},\\ \mathbb{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c Dy) \end{bmatrix},\\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} C_g \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \quad C_g = I_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T.\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 3.1 Os detalhes desta transformação estão descritos no Apêndice A.1.

OBSERVAÇÃO 3.2 Note que por conta das incertezas na matriz Laplaciana, as matrizes $\mathbb{A}(\alpha)$ e $\mathbb{B}(\alpha)$ também são incertas.

O Problema 1 se resume, então, ao projeto dos ganhos A_c, B_c, C_c e D_c que garantam o consenso robusto do sistema (3.7). Este problema pode ser transformado em um problema de estabilização robusta introduzindo as variáveis $\delta_{1,i} = x_1(t) - x_{i+1}(t)$ e $\delta_{2,i} = x_{c,1}(t) - x_{c,i+1}(t)$, $i = 1, ..., m-1$, que representam a diferença entre o primeiro estado e os demais estados dos agentes e controladores, respectivamente, e $\eta_i = w_1(t) - w_{i+1}(t)$, $i = 1, ..., m-1$, que representa a diferença entre o sinal de distúrbios do primeiro agente e dos demais agentes. Se inspirando em [54], podemos estabelecer as seguintes transformações

$$\delta(t) = \begin{bmatrix}\delta_1(t)\\ \delta_2(t)\end{bmatrix} = \bar{U}\phi(t) \tag{3.8}$$

$$\eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t) \tag{3.9}$$

[1]Daqui para frente, o argumento t é omitido de $\alpha(t)$ por questão de simplicidade na notação.

e

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes x_1(t) \\ \mathbf{1}_m \otimes x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \bar{W}\delta(t), \tag{3.10}$$

$$w(t) = \mathbf{1}_m \otimes w_1(t) + (W \otimes I_{n_w})\eta(t), \tag{3.11}$$

em que

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \otimes I_n & 0 \\ 0 & U \otimes I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} W \otimes I_n & 0 \\ 0 & W \otimes I_n \end{bmatrix},$$
$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m-1} & -I_{m-1} \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^T \\ -I_{m-1} \end{bmatrix}.$$

A partir destas transformações, o sistema (3.7) pode ser reescrito como

$$\dot{\delta}(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{C}(\alpha))\delta(t) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{D}(\alpha))\eta(t), \tag{3.12}$$
$$z(t) = \mathcal{C}_z\delta(t),$$

em que

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} = \bar{U}\phi(t), \quad \eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t)$$
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m-1} \otimes B_u \\ I_{(m-1)n} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_y = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A_c & I_{m-1} \otimes B_c \\ I_{m-1} \otimes C_c & I_{m-1} \otimes D_c \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & I_{(m-1)n} \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes C_y & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes D_y \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} C_g W \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}.$$

OBSERVAÇÃO 3.3 Os detalhes desta transformação estão descritos no Apêndice A.2.

O problema de controle de consenso robusto do sistema (3.7) pode, então, ser resolvido como o problema de estabilização robusta do sistema (3.12) e o desafio a ser resolvido é projetar a matriz $\mathcal{K}_y$. Porém, pela dificuldade de recuperar os valores dos ganhos do controlador

(A_c, B_c, C_c e D_c) diretamente a partir de $\mathcal{K}_y$, é interessante reescrever este ganho utilizando algumas propriedades do produto de Kronecker.

Dessa forma, definindo as matrizes $\mathfrak{J}_{11} = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times s} \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0_{s \times n_c} & I_s \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{21} = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times q} \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{22} = \begin{bmatrix} 0_{q \times s} & I_q \end{bmatrix}$ e $K_y = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$, o a matriz $\mathcal{K}_y$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_y &= \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{11} K_y \mathfrak{J}_{21}^T) & I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{11} K_y \mathfrak{J}_{22}^T) \\ I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{12} K_y \mathfrak{J}_{21}^T) & I_{m-1} \otimes (\mathfrak{J}_{12} K_y \mathfrak{J}_{22}^T) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{11} \\ I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_1} (I_{m-1} \otimes K_y) \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{21}^T & I_{m-1} \otimes \mathfrak{J}_{22}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Assim, o sistema (3.12) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= A_{cl}(\alpha)\delta(t) + B_{cl}(\alpha)\eta(t), \\ z(t) &= C_z \delta(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

em que

$$\begin{aligned} &A_{cl}(\alpha) = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}}(I_{m-1} \otimes K_y)\bar{\mathcal{C}}(\alpha), \\ &B_{cl}(\alpha) = \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}}(I_{m-1} \otimes K_y)\bar{\mathcal{D}}(\alpha), \\ &\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\mathcal{T}_1, \quad \bar{\mathcal{C}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{C}(\alpha), \quad \bar{\mathcal{D}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{D}(\alpha). \end{aligned}$$

Nesta configuração serão estabelecidas condições LMI para o projeto de K_y.

3.3 PROTOCOLO DE CONSENSO $\mathcal{H}_\infty$

O problema de consenso robusto do sistema multiagente definido em (3.1) foi reescrito de forma equivalente a estabilização robusta do sistema (3.14). Neste sistema, temos como variável de projeto a matriz K_y e as matrizes $\bar{\mathcal{C}}(\alpha)$ e $\bar{\mathcal{D}}(\alpha)$ são dependentes das incertezas da matriz Laplaciana. A partir dessas premissas, propomos o seguinte teorema, que estabelece condições LMI suficientes para o projeto de controle de consenso multiagente com desempenho $\mathcal{H}_\infty$.

Teorema 3.1

Dada uma matriz K_x tal que $\mathcal{A}_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}}K_x$ é uma matriz *Hurwitz*, se existirem um escalar μ e matrizes $P = P^T \succ 0$, Z, G, X_{1i}, X_{2i}, H_i, F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, $i = 1, \ldots, m$, que satisfazem (3.15), então os m agentes do sistema (3.1) alcançam o estado de consenso com custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma = \sqrt{\mu m} > 0$ a partir de um controlador de ordem n_c dado por (3.3) com ganho recuperado por $K_y = G^{-1}Z$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \text{He}\{X_{1i}\mathcal{A}_{clx}\} & P - F_{1i} + \mathcal{A}_{clx}^T X_{2i}^T & F_{1i}\mathcal{B}_1 & X_{1i} - F_{1i} \\ \star & -F_{2i}^T - F_{2i} & F_{2i}\mathcal{B}_1 & X_{2i} - F_{2i} - F_{3i}^T \\ \star & \star & -\mu I & \mathcal{B}_1^T F_{3i}^T \\ \star & \star & \star & -F_{3i}^T - F_{3i} \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T H_i & F_{1i}\bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{C}}i^T (I \otimes Z)^T - K_x^T (I \otimes G)^T \\ 0 & F_{2i}\bar{\mathcal{B}} \\ 0 & \bar{\mathcal{D}}i(I \otimes Z)^T \\ 0 & F_{3i}\bar{\mathcal{B}} \\ I - H_i^T - H_i & 0 \\ \star & -\text{He}\{I \otimes G\} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.15)$$

$i = 1, \ldots, \kappa$ pertencentes aos vértices na notação politópica da matriz Laplaciana.

Prova.

Observe que

$$\Psi(\alpha) = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \Psi_i =$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\left\{X_1(\alpha)\mathcal{A}_{clx}\right\} & P - F_1(\alpha) + \mathcal{A}_{clx}^T X_2(\alpha)^T & F_1(\alpha)\mathcal{B}_1 & X_1(\alpha) - F_1(\alpha) \\ \star & -F_2(\alpha)^T - F_2(\alpha) & F_2(\alpha)\mathcal{B}_1 & X_2(\alpha) - F_2(\alpha) - F_3(\alpha)^T \\ \star & \star & -\mu I & \mathcal{B}_1^T F_3(\alpha)^T \\ \star & \star & \star & -F_3(\alpha)^T - F_3(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T H(\alpha) & F_1(\alpha)\bar{\mathcal{B}} + \mathcal{C}(\alpha)^T (I \otimes Z)^T & -K_x^T (I \otimes G)^T \\ 0 & F_2(\alpha)\bar{\mathcal{B}} & \\ 0 & \mathcal{D}(\alpha)(I \otimes Z)^T & \\ 0 & F_3(\alpha)\mathcal{B} & \\ I - H(\alpha)^T - H(\alpha) & 0 & \\ \star & -\text{He}\left\{I \otimes G\right\} & \end{bmatrix} \prec 0.$$

Multiplicando $\Psi(\alpha)$ à esquerda por

$$\mathcal{T}^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_z^T H(\alpha)^{-T} & \bar{\mathcal{C}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T - K_x^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T \mathbb{K}_y^T \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\mathbb{K}_y := I \otimes (G^{-1}Z)$, e à direita por $\mathcal{T}$ e substituindo o termo $I - H^T - H$ por $-H^T H$, visto que $-H^T H \preceq I - H^T - H$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \Omega_1(\alpha) & \star & \star & \star \\ \Omega_2(\alpha) & -F_2(\alpha) - F_2(\alpha)^T & \star & \star \\ \Omega_3(\alpha) & \Omega_5(\alpha) & -\mu I & \star \\ \Omega_4(\alpha) & \Omega_6(\alpha) & \Omega_7(\alpha) & -F_3(\alpha) - F_3(\alpha)^T \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3.16}$$

em que

$$
\begin{aligned}
&\mu = \frac{\gamma^2}{m},\\
&\Omega_1(\alpha) = \text{He}\left\{X_1(\alpha)\mathcal{A}_{clx} + F_1(\alpha)\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x)\right\} + \mathcal{C}_z^T\mathcal{C}_z,\\
&\Omega_2(\alpha) = P - F_1(\alpha)^T + X_2(\alpha)\mathcal{A}_{clx} + F_2(\alpha)\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{K}_y\mathcal{C}(\alpha) - K_x),\\
&\Omega_3(\alpha) = \bar{\mathcal{B}}^T F_1(\alpha)^T + \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T\mathbb{K}_y^T\bar{\mathcal{B}}^T F_1(\alpha)^T,\\
&\Omega_4(\alpha) = X_1(\alpha)^T - F_1(\alpha)^T + F_3(\alpha)\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x,)\\
&\Omega_5(\alpha) = \mathcal{B}_1^T F_2(\alpha)^T + \bar{\mathcal{D}}(\alpha)^T\mathbb{K}_y^T\bar{\mathcal{B}}^T F_2(\alpha)^T,\\
&\Omega_6(\alpha) = X_2(\alpha)^T - F_2(\alpha)^T - F_3(\alpha),\\
&\Omega_7(\alpha) = F_3(\alpha)\mathcal{B}_1 + F_3(\alpha)\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha).
\end{aligned}
$$

A inequação (3.16) pode ser reescrita como,

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\text{He}\left\{X_1(\alpha)\mathcal{A}_{clx}\right\} + \mathcal{C}_z^T\mathcal{C}_z & P - \mathcal{A}_{clx}^T X_2(\alpha)^T & 0 & X_1(\alpha)\\
P - X_2(\alpha)\mathcal{A}_{clx} & 0 & 0 & X_2(\alpha)\\
0 & 0 & -\frac{\gamma^2}{m}I & 0\\
X_1(\alpha)^T & X_2(\alpha)^T & 0 & 0
\end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_1} +
$$

$$
\text{He}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}
\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x)\\
-I\\
\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha)\\
I
\end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1^T}
\underbrace{\begin{bmatrix}F_1(\alpha)^T & F_2(\alpha)^T & 0 & F_3(\alpha)^T\end{bmatrix}}_{\mathcal{X}_1^T}\right\} \prec 0, \tag{3.17}
$$

que está no formato das condições do lema (2.2).

Logo, definindo $\mathbf{U} := I$ e o complemento ortogonal de $\mathbf{V}_1$ como

$$
\mathbf{V}_{1\perp} = \begin{bmatrix}
I & 0 & 0\\
0 & I & 0\\
0 & 0 & I\\
\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha) - K_x) & -I & \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha)
\end{bmatrix},
$$

a expressão (3.17) é equivalente a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T\mathcal{C}_z & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma^2}{m}I \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_2} + \tag{3.18}$$

$$\text{He}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathcal{A}+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha))^T \\ -I \\ \mathcal{B}_1+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha))^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{V_2^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1(\alpha)^T & X_2(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}_2^T} \right\} \prec 0$$

Usando novamente o lema (2.2) com o complemento ortogonal de $\mathbf{V}_2$ como

$$\mathbf{V}_{2\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha) & \mathcal{B}_1+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha) \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

e definindo as matrizes $A_{cl}(\alpha) := \mathcal{A}+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{C}}(\alpha)$, $B_{cl}(\alpha) := \mathcal{B}_1+\bar{\mathcal{B}}\mathbb{K}_y\bar{\mathcal{D}}(\alpha)$ e $\mathbf{U} := I$, a expressão (3.18) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)^TP + PA_{cl}(\alpha) + \mathcal{C}_z^T\mathcal{C}_z & PB_{cl}(\alpha) \\ B_{cl}(\alpha)^TP & -\frac{\gamma^2}{m}I \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.19}$$

Dessa forma, é possível concluir pelo *Bounded Real Lemma* [48], que

$$\|z(t)\|^2 < \frac{\gamma^2}{m}\|\eta(t)\|$$

para o sistema (3.14).

Esta relação garante o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de $z(t)$ em relação a $\eta(t)$, porém, originalmente o Problema 1.2 define a estabilidade robusta em relação a $\omega(t)$. Logo, para garantir este resultado, deve-se aplicar a transformação de variáveis (3.10) e verificar que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2}{m}\|\eta(t)\| =& \frac{\gamma^2}{m}\eta(t)^T\eta(t) = \frac{\gamma^2}{m}w(t)^T(U\otimes I_{n_w})^T(U\otimes I_{n_w})w(t) \\ =& \frac{\gamma^2}{m}w(t)^T(U^TU\otimes I_{n_w}))w(t). \end{aligned}$$

Sabendo que $\lambda_{max}(U^T U \otimes I_{n_w}) = m$, podemos concluir que

$$\|z(t)\|^2 < \frac{\gamma^2}{m} w(t)^T (U^T U \otimes I_{n_w}) w(t) \leq \gamma^2 \|w(t)\|^2 , \tag{3.20}$$

sendo γ o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ da saída $z(t)$ em relação ao sinal de distúrbio $\omega(t)$.

■

O teorema (3.15) parte da necessidade de que $A_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} K_x$ seja uma matriz *Hurwitz*. Logo, antes de implementar as condições do teorema (3.15) é necessário projetar K_x que garanta esta propriedade.

É possível projetar este ganho a partir do seguinte teorema desenvolvido em [55].

Teorema 3.2 [55]

Se existem matrizes $X \in \mathbb{R}^{(m-1)(n+n_c)\times(m-1)(n+n_c)}$, $J_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $J_3 \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $J_4 \in \mathbb{R}^{s \times n_c}$ e $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(m-1)(n+n_c)\times(m-1)(n+n_c)}$ e os parâmetros conhecidos $\xi > 0$ e $\beta > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}X + X^T \mathcal{A}^T + \bar{\mathcal{B}} R + R^T \bar{\mathcal{B}}^T & \star \\ P - X - \xi(AX + \bar{\mathcal{B}} R)^T & -\xi(X + X^T) \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.21}$$

em que

$$R = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes \begin{bmatrix} J_1 \\ Y J_1 + J_2 \end{bmatrix} & I_{m-1} \otimes \begin{bmatrix} J_3 \\ Y J_3 + J_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

$$Y = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0_{n_c \times (s-n_c)} & \beta I_{n_c} \end{bmatrix}^T , \text{ se } n_c < s \\ \begin{bmatrix} 0_{s \times (n_c - s)} & \beta I_s \end{bmatrix} , \text{ se } n_c >= s \end{cases} \tag{3.23}$$

então $K_x = R X^{-1}$ é um ganho de realimentação de estados que assegura que $A_{clx} = \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}} K_x$ é uma matriz *Hurwitz*.

Prova.

A prova deste teorema pode ser verificada em [55]. ■

OBSERVAÇÃO 3.4 Devido à estrutura $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, a aplicação do Teorema 3.2 com a matriz R sendo uma variável livre resulta em um ganho K_x com um grande número de entradas nulas. Como consequência ao aplicar o Teorema 3.1, é comum obter matrizes nulas para B_c ou C_c. Para superar esse desafio, foi proposta uma estrutura mais restrita para a matriz

R (3.22), com o objetivo de gerar ganhos K_x que evitem esse comportamento.

OBSERVAÇÃO 3.5 Neste capítulo, foram apresentadas as etapas do projeto de controle para resolver o problema de consenso robusto em sistemas multiagentes, conforme definido em (3.1). O processo é realizado em duas fases distintas:

1. Inicialmente, aplicamos o Teorema 3.2 para determinar o ganho K_x necessário para assegurar que a matriz $\mathcal{A}_{clx}$ seja estável (*Hurwitz*). Essa etapa é fundamental para a estabilidade do sistema.

2. Em seguida, aplicamos o Teorema 3.1 para todos os vértices possíveis da matriz Laplaciana, com o objetivo de encontrar os ganhos A_c, B_c, C_c, e D_c do controlador. Essa segunda etapa considera diversas configurações possíveis da rede de comunicação entre os agentes.

OBSERVAÇÃO 3.6 O Teorema 3.2 utiliza parâmetros de entrada $\xi > 0$ e $\beta > 0$. É viável realizar uma busca iterativa para determinar valores desses parâmetros que garantam a factibilidade do sistema e/ou otimizem a norma H_∞ do sistema.

OBSERVAÇÃO 3.7 No caso em que o controlador é estático, é possível simplificar os Teoremas 3.1 e 3.2, já que o sistema em malha fechada não terá estados do controlador. Dessa forma, o único ganho a ser projetado é o ganho D_c.
Reescrevendo o sistema (3.12), vemos que

$$\dot{\delta}(t) = \underbrace{(\tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{B}}\left[I_{m-1} \otimes D_c\right]\tilde{\mathcal{C}}(\alpha))}_{A_{cl}(\alpha)}\delta(t) + \underbrace{(\tilde{\mathcal{B}}_1 + \tilde{\mathcal{B}}\left[I_{m-1} \otimes D_c\right]\tilde{\mathcal{D}}(\alpha))}_{B_{cl}(\alpha)}\eta(t), \quad (3.24)$$

$$z(t) = \tilde{\mathcal{C}}_z\delta(t),$$

em que

$$\delta(t) = \left[\delta_1(t)\right], \quad \eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t)$$
$$\tilde{\mathcal{A}} = \left[I_{m-1} \otimes A\right], \tilde{\mathcal{B}} = \left[I_{m-1} \otimes B_u\right], \tilde{\mathcal{B}}_1 = \left[I_{m-1} \otimes B_w\right],$$
$$\tilde{\mathcal{C}(\alpha)} = \left[-\bar{L}(\alpha) \otimes C_y\right], \tilde{\mathcal{D}}(\alpha) = \left[-\bar{L}(\alpha) \otimes D_y\right],$$
$$\tilde{\mathcal{C}}_z = \left[C_g W \otimes C_z\right], \bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}.$$

Assim o Teorema 3.1 pode se reescrito, mantendo o requisito de uma matriz K_x tal que $\tilde{\mathcal{A}}_{clx} = \tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{B}}K_x$ é *Hurwitz*, o escalar μ e matrizes $P = P^T \succ 0$, Z, G, X_{1i}, X_{2i}, H_i, F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, $i = 1, \ldots, m$, que satisfazem (3.25), então os m agentes do sistema (3.1), controlados por um controlador estático, alcançam o estado de consenso com custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma = \sqrt{\mu m} > 0$ e ganho $D_c = G^{-1}Z$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \text{He}\left\{X_{1i}\tilde{\mathcal{A}}_{clx}\right\} & P - F_{1i} + \tilde{\mathcal{A}}_{clx}^T X_{2i}^T & F_{1i}\tilde{\mathcal{B}}_1 & X_{1i} - F_{1i} \\ \star & -F_{2i}^T - F_{2i} & F_{2i}\tilde{\mathcal{B}}_1 & X_{2i} - F_{2i} - F_{3i}^T \\ \star & \star & -\mu I & \tilde{\mathcal{B}}_1^T F_{3i}^T \\ \star & \star & \star & -F_{3i}^T - F_{3i} \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_z^T H_i & F_{1i}\tilde{\mathcal{B}} + \tilde{\mathcal{C}i}^T (I \otimes Z)^T - K_x^T (I \otimes G)^T \\ 0 & F_{2i}\tilde{\mathcal{B}} \\ 0 & \tilde{\mathcal{D}}i(I \otimes Z)^T \\ 0 & F_{3i}\tilde{\mathcal{B}} \\ I - H_i^T - H_i & 0 \\ \star & -\text{He}\left\{I \otimes G\right\} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.25)$$

$i = 1, \ldots, \kappa$ pertencentes aos vértices na notação politópica da matriz Laplaciana.

Já o Teorema 3.2 pode ser simplificado com o projeto de matrizes $X \in \mathbb{R}^{(m-1)n\times(m-1)n}$, $J \in \mathbb{R}^{s\times n}$ e $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(m-1)n\times(m-1)n}$ e do parâmetro conhecido $\xi > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}X + X^T\mathcal{A}^T + \bar{\mathcal{B}}R + R^T\bar{\mathcal{B}}^T & \star \\ P - X - \xi(AX + \bar{\mathcal{B}}R)^T & -\xi(X + X^T) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.26)$$

em que

$$R = \left[I_{m-1} \otimes J\right] \quad (3.27)$$

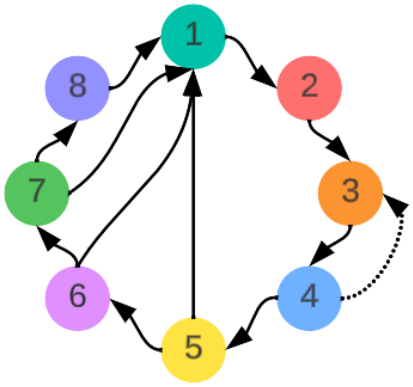
3.4 EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o sistema multiagente (3.28) com a rede de comunicação exemplificada na Figura 3.1, em que existe uma conexão incerta entre o agente 4 e o agente 3.

Os agentes representam o modelo dinâmico translacional de um quadricóptero adaptado de [56] e possuem o seguinte sistema no espaço de estados.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_i(t), \\ y_i(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} w_i(t), \quad i = 1, 2, ..., 8. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Figura 3.1 – Topologia de comunicação incerta



A matriz de adjacência associada a rede de comunicação é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

em que $a_{4,3} \in [0, 1]$.

Neste caso, os vértices possíveis na notação politópica de matriz Laplaciana são

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $L(\alpha) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$, tal que, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Para resolver este problema, primeiramente foram implementadas as condições LMI dos Teoremas 3.2 e 3.1 na busca por um controlador de ordem $n_c = 2$, em um código *Matlab* [57] utilizando o *solver Mosek* [58]. O método resultou nos seguintes ganhos de controlador:

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.3637 & -0.4286 \\ -0.4309 & -2.2695 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} -0.0218 \\ 0.0087 \end{bmatrix},$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 31.4559 & -12.4125 \\ -2.4440 & 0.8696 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} -0.3786 \\ 0.6772 \end{bmatrix}.$$

Com custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma = 252.34$.

Os ganhos de controlador encontrados foram utilizados para simular o sistema em um código *Python* em quatro experimentos, em todos os experimentos foi utilizado o método de integração de Euler Avançado.

- **Experimento 1**

  Os agentes partiram de condições iniciais aleatórias e não foram considerados distúrbios. Durante todo o período de simulação α_1 e α_2 também variaram de forma aleatória, como mostrado na Figura 3.3.

  O gráfico da Figura 3.2 mostra a evolução dos estados do sistema ao longo do tempo.

Figura 3.2 – Evolução dos estados do sistema (3.28) com condições iniciais aleatórias

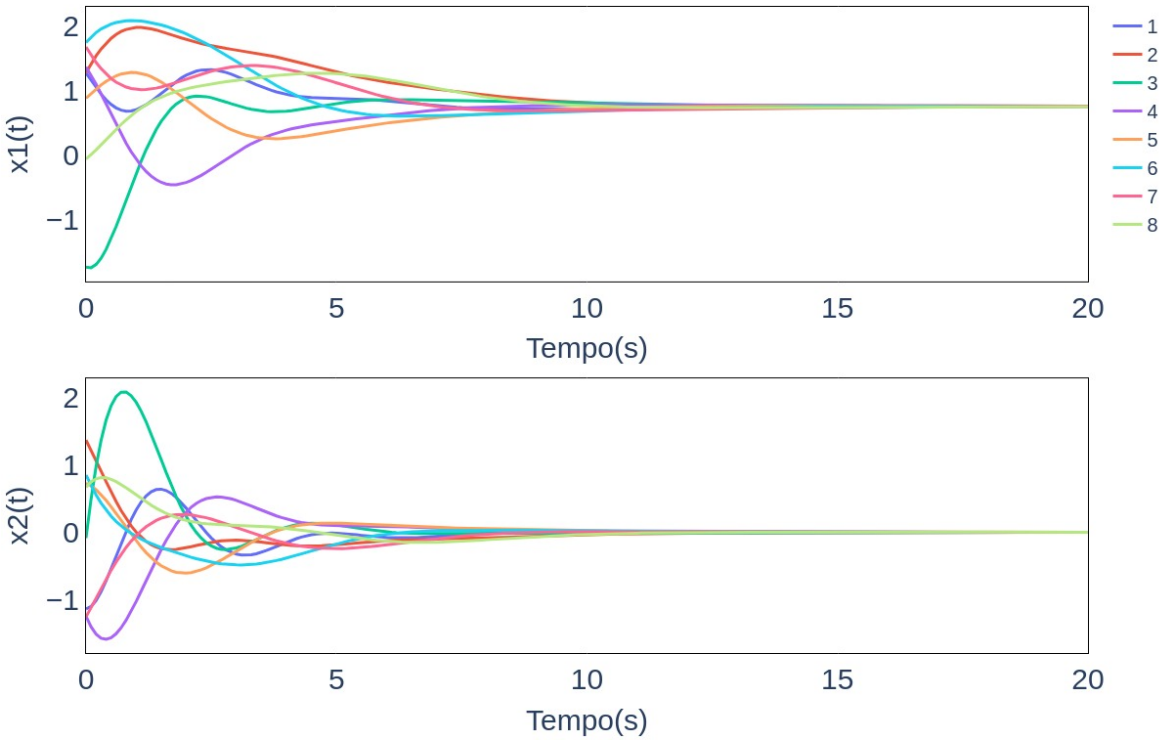
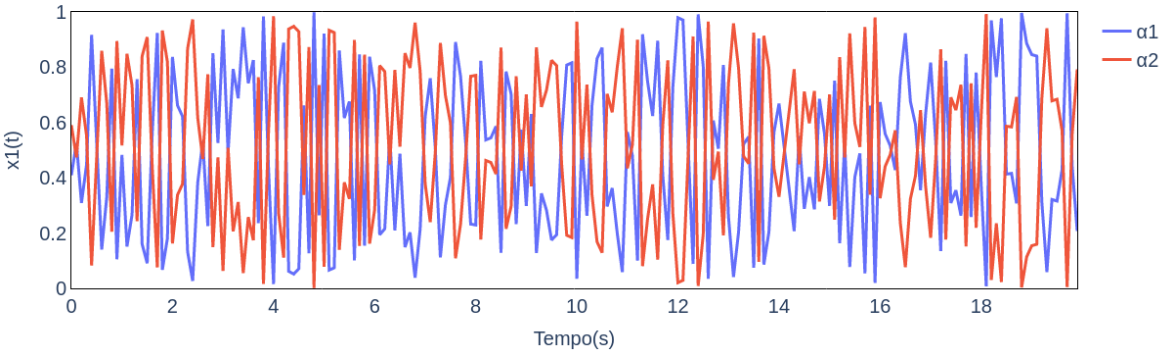


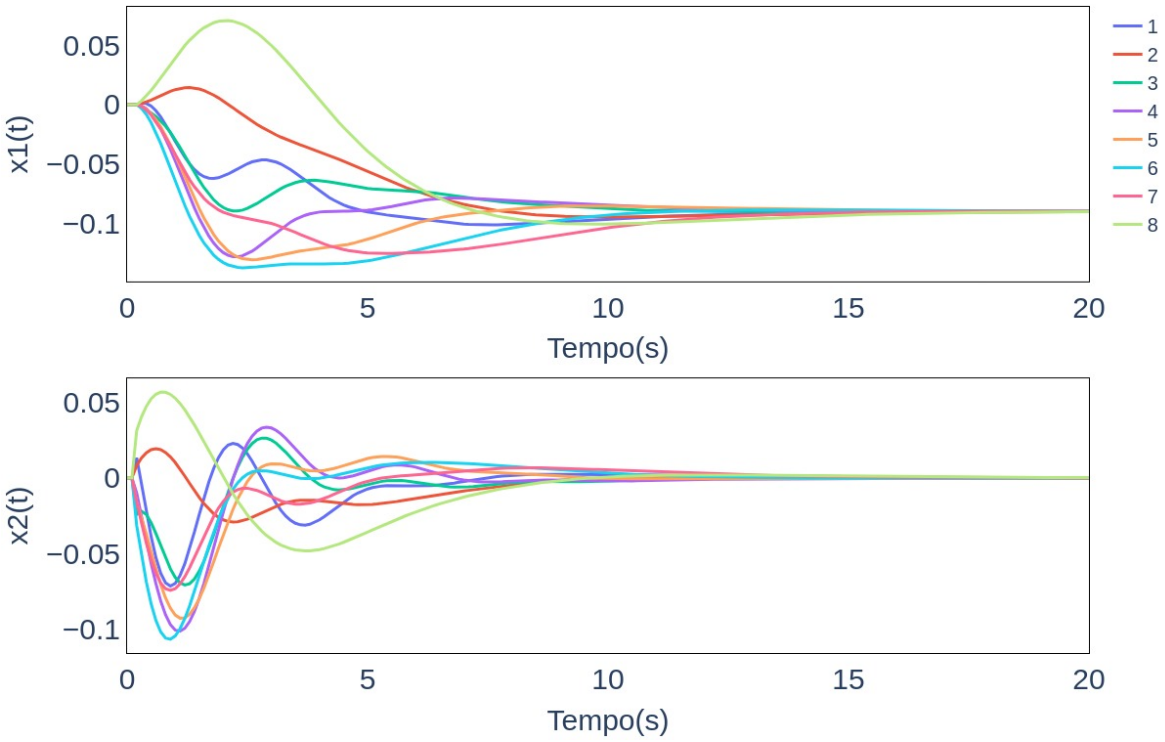
Figura 3.3 – Evolução dos sinais α_1 e α_2



- **Experimento 2**

  Uma segunda simulação foi executada, agora considerando que o sistema partiu de condições iniciais nulas e uma entrada de distúrbio $\omega_i(t) = A_i \sin(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i) e^{-\tau_i t} \in \mathcal{L}_2^{n_\omega}$ foi aplicada ao sistema em $t \geq 0$, em que $A_i \in [0; 0,5]$, $\tilde{\omega}_i \in [0; 4]$, $\tilde{\phi}_i \in [0; 2\pi]$ e $\tau_i \in [0,5; 1,5]$. A evolução dos estados do sistema neste caso é apresentada na Figura 3.4. Nesta simulação os valores de α_1 e α_2 também variaram de forma aleatória.

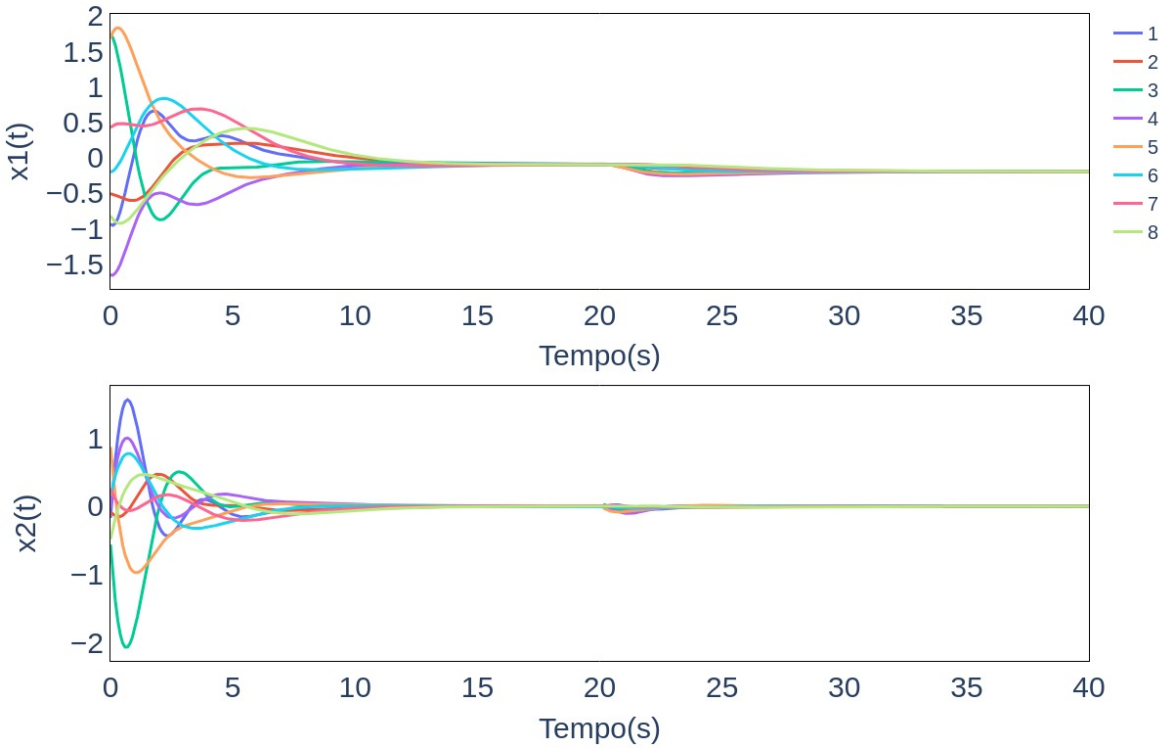
Figura 3.4 – Evolução dos estados do sistema (3.28) com distúrbios



- **Experimento 3**

  Um terceiro experimento foi realizado para testar o comportamento do sistema no caso em que existem distúrbios e condições iniciais diferentes de zero, neste caso, assim como no primeiro experimento as condições iniciais são geradas de forma aleatória e o distúrbio aplicado foi $\omega_i(t) = A_i \sin(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i\}e^{-\tau_i(t-20)} \in \mathcal{L}_2^{n_\omega}$ em $t \geq 20s$, $\omega_i(t) = 0$ em $t < 20s$, com $A_i \in [0; 0,5]$, $\tilde{\omega}_i \in [0; 4]$, $\tilde{\phi}_i \in [0; 2\pi]$ e $\tau_i \in [0,5; 1,5]$. A Figura 3.5 mostra como foi a evolução dos estados do sistema neste cenário

Figura 3.5 – Evolução dos estados do sistema (3.28) com distúrbios e condições iniciais aleatórias



Em seguida, as condições LMI foram implementadas na busca por um controlador de ordem reduzida $n_c = 1$. O método resultou nos seguintes ganhos de controlador:

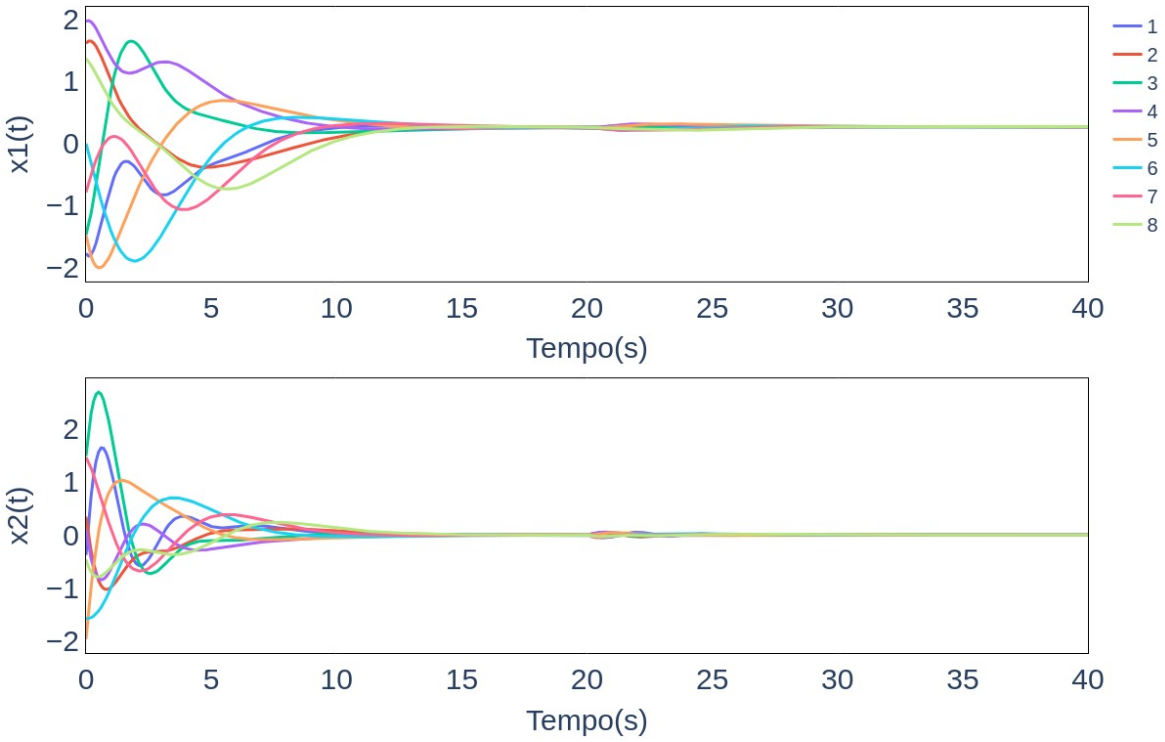
$$A_c = \begin{bmatrix} -1.2339 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} -0.0055 \end{bmatrix},$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 166.7359 \\ -20.3735 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} -0.1285 \\ 0.5577 \end{bmatrix},$$

com custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma = 250.77$. Para este controlador, um quarto experimento foi realizado.

- **Experimento 4**

  O quarto experimento foi concebido para avaliar o comportamento do sistema com um controlador de ordem reduzida, isto é, quando a ordem do controlador é menor que a ordem do sistema ($n_c < n$). Para este fim, foi proposto um experimento semelhante ao Experimento 3. A Figura 3.6 ilustra a evolução dos estados do sistema nesse cenário.

Figura 3.6 – Evolução dos estados do sistema (3.28) com controlador de ordem reduzida



A partir dos quatro experimentos realizados, podemos concluir que o sistema proposto demonstrou resiliência e eficácia sob diversas condições, validando a robustez do controlador desenvolvido e sua capacidade de lidar com cenários variados.

No primeiro experimento, conforme ilustrado na Figura 3.2, o sistema conseguiu atingir o consenso, mesmo quando sujeito a condições iniciais aleatórias e incertezas na comunicação ao longo do tempo. Isso nos levou a confirmar que o controlador projetado atende satisfatoriamente ao Problema 1.1.

O segundo experimento, apresentado na Figura 3.4, revelou que, mesmo partindo de condições iniciais nulas, o sistema, afetado por um distúrbio $\omega_i(t) \in \mathcal{L}_2^{n_\omega}$, foi capaz de alcançar o consenso robusto e atender ao critério $\mathcal{H}_\infty$, resolvendo o Problema 1.2.

O terceiro e o quarto experimentos, expostos nas Figuras 3.5 e 3.6, evidenciaram a capacidade do sistema de chegar ao consenso robusto mesmo em situações com condições iniciais não nulas e distúrbios, para controladores de ordem completa ou reduzida, ressaltando a versatilidade do método proposto.

É importante notar que, em todos os casos, o consenso dos sinais $x_{1i}(t)$ foi alcançado em valores distintos. Isso ocorre porque os agentes devem chegar a um acordo em relação às saídas, logo este valor se torna altamente dependente dos valores iniciais dos estados, da comunicação entre os agentes, que é incerta, e também da influência dos sinais de distúrbios.

4 CONTROLE DE FORMAÇÃO DE SISTEMAS MULTIAGENTES

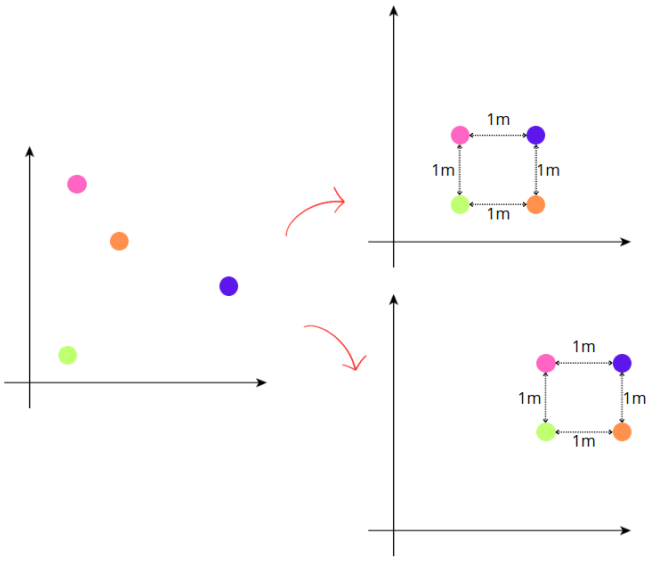
Neste capítulo, iremos demonstrar como utilizar a teoria de controle de consenso desenvolvida no capítulo anterior para abordar o problema de formação de robôs em dois tipos de aplicação. Primeiramente, discutiremos o problema de formação invariante no tempo e relativa entre os agentes. Em seguida, trataremos do problema de rastreamento de formação variante no tempo.

4.1 CONTROLE DE FORMAÇÃO RELATIVA INVARIANTE NO TEMPO

Diversas aplicações de sistemas multiagentes exigem que os agentes assumam uma devida formação relativa entre si.

Exemplo 1. *Considere um sistema composto por quatro agentes em movimento em um plano. O controle de formação relativa invariante no tempo enviará comandos para que os agentes se organizem em um quadrado de lado 1m. Esse controle buscará alcançar um consenso entre os agentes, permitindo que, a partir de suas condições iniciais, eles autonomamente decidam como se posicionar de maneira a respeitar a formação, independentemente do local onde o centro da formação esteja localizado.*

Figura 4.1 – Exemplo de formação relativa e invariante no tempo



Nestes casos, é possível escrever o problema de formação como um problema de consenso multiagente e projetar controladores utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3.

4.1.1 Definição do Problema

Considere um sistema multiagente com *m* agentes de dinâmicas lineares idênticas dadas pelo sistema (3.1). Os agentes estão sujeitos a incertezas na topologia de comunicação que serão modeladas pela representação politópica da matriz Laplaciana com as mesmas considerações apresentadas em (3.2). Além da comunicação com os agentes vizinhos cada agente recebe como entrada de referência o sinal de formação $h_i \in \mathbb{R}^q$ fixo e é capaz de calcular o seu erro de formação de saída definido por

$$e_{y_i}(t) = y_i(t) - h_i. \tag{4.1}$$

Cada agente do sistema possui um controlador autônomo na forma de

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c \nu_i, \\ u_i(t) &= C_c x_{c,i}(t) + D_c \nu_i(t) + \lambda_i, \end{aligned} \tag{4.2}$$

em que λ_i é o sinal de compensação de formação e $\nu_i(t)$ é o erro de consenso de formação de saída, dado por

$$\begin{aligned} \nu_i(t) &= -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(y_i(t) - h_i - (y_j(t) - h_j)) \\ &= -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(e_{y_i}(t) - e_{y_j}(t)), \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que $a_{ij}(t)$ são os pesos da comunicação entre o agente i e os agentes em sua vizinhança.

HIPÓTESE 4.1 A matriz C_y possui posto linha completo, logo existe uma matriz $C_{y\|}$ tal que $C_y C_{y\|} = I$, e a matriz B_u possui posto coluna completo, logo existe uma matriz $B_{u\underline{\|}}$ tal que $B_{u\underline{\|}} B_u = I$.

HIPÓTESE 4.2 O sinal de formação h_i satisfaz a condição

$$B_{u\underline{\perp}} A C_{y\|} h_i = 0. \tag{4.4}$$

DEFINIÇÃO 4.1 Considerando o erro $e_{y_i}(t)$ como o erro de formação de saída dos agentes, o erro $e_{xi}(t)$ de formação de estados é dado por

$$e_{xi}(t) = x_i(t) - C_{y\|}h_i. \tag{4.5}$$

Os agentes desse sistema devem ser capazes de estabelecer uma formação h_i, invariante no tempo, de forma que a saída balanceada de consenso de formação, dada por

$$z_i(t) = C_z \left(e_{xi}(t) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} e_{xj}(t) \right), \tag{4.6}$$

alcance $z_i(t) = 0$ para $i = 1, ..., m$. A matriz C_z, neste caso, pondera a importância relativa de cada componente de erro dos estados no erro da saída na análise de desempenho.

Como novamente foi considerada a presença de distúrbios, o consenso exato das saídas ponderadas não é possível. Para garantir a análise da qualidade de desempenho, o consenso é avaliado em relação à norma $\mathcal{H}_\infty$ a partir da relação (3.6).

Portanto, nesta seção será abordado o seguinte problema:

Problema 2. *Projetar um controlador no formato de* (4.2) *tal que:*

1. *o sistema multiagente alcance o consenso de formação no caso em que não há distúrbios*
$$\lim_{t\to\infty} [(y_i(t) - h_i) - (y_j(t) - h_j)] = 0. \tag{4.7}$$
2. *O sistema multiagente satisfaça o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ dado em* (3.6) *com custo garantido $\gamma > 0$ na presença de distúrbios $\omega_i \in \mathcal{L}_2^{n_w}[0, \infty)$ e condições iniciais nulas.*

OBSERVAÇÃO 4.1 Note que para alcançar o consenso de formação não é necessário que os agentes convirjam para os posicionamentos h_i, i.e., $\lim_{t\to\infty}(y_i(t) - h_i) = 0$. Se no consenso de formação tivermos, por exemplo, $\lim_{t\to\infty}(y_i(t) - h_i) = d$, então o sistema multiagente atinge a configuração deslocada $\{h_i + d\}$. Dessa forma, o conceito de formação h_i é relativo a uma origem d que pode assumir valores arbitrários.

4.1.2 Projeto de Protocolo de Controle de Consenso de Formação

Seguindo uma metodologia baseada no controle de consenso apresentado no Capítulo 3, será apresentado um protocolo de controle capaz resolver o problema 2.

COROLÁRIO 4.1 Considere o sistema multiagente (3.1) com controladores na forma (4.2). Se o sistema atende as Hipóteses (4.1) e (4.2) e cumpre as seguintes condições:

1. possui sinal de compensação de formação dado por

$$\lambda_i = -B_{u\|} A C_{y\|} h_i; \tag{4.8}$$

2. o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{C}(\alpha))\delta(t) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{D}(\alpha))\eta(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}_z\delta(t), \end{aligned} \tag{4.9}$$

em que

$$\begin{aligned}
&\delta(t) = \begin{bmatrix}\delta_1(t)\\ \delta_2(t)\end{bmatrix} = \bar{U}\begin{bmatrix}e_x^T(t)\\ x_c^T(t)\end{bmatrix}, \quad \eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t), \\
&\mathcal{A} = \begin{bmatrix}I_{m-1}\otimes A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix}0 & I_{m-1}\otimes B_u\\ I_{(m-1)n} & 0\end{bmatrix}, \\
&\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix}I_{m-1}\otimes B_w\\ 0\end{bmatrix}, \mathcal{K}_y = \begin{bmatrix}I_{m-1}\otimes A_c & I_{m-1}\otimes B_c\\ I_{m-1}\otimes C_c & I_{m-1}\otimes D_c\end{bmatrix}, \\
&\mathcal{C}(\alpha) = \begin{bmatrix}0 & I_{(m-1)n}\\ -\bar{L}(\alpha)\otimes C_y & 0\end{bmatrix}, \mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix}0\\ -\bar{L}(\alpha)\otimes D_y\end{bmatrix}, \\
&\mathcal{C}_z = \begin{bmatrix}C_g W \otimes C_z & 0\end{bmatrix}, \bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}, \\
&\bar{U} = \begin{bmatrix}U\otimes I_n & 0\\ 0 & U\otimes I_{n_c}\end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{m-1} & -I_{m-1}\end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{m-1}^T\\ -I_{m-1}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

é assintoticamente estável quando $\omega(t) = 0$ e, para condições iniciais nulas, satisfaz um custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma > 0$, ou seja, atende os Teoremas 3.1 e 3.2;

então o sistema multiagente será capaz de estabelecer o consenso robusto de formação e resolver o Problema 2.

Prova.

A partir da definição de $e_{xi}(t) = x_i(t) - C_{y\|}h_i$, podemos estabelecer $e_{xi}(t)$ como um novo estado do sistema. Substituindo (3.1) e (4.2), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{e}_{xi}(t) &= \dot{x}_i(t)\\ \dot{e}_{xi}(t) &= Ax_i(t) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_u\lambda_i + B_\omega\omega_i(t).\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo o termo $AC_{y\|}h_i$, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{e}_{xi}(t) &= Ax_i(t) - AC_{y\|}h_i + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_u\lambda_i + AC_{y\|}h_i + B_\omega\omega_i(t)\\ \dot{e}_{xi}(t) &= A(x_i(t) - C_{y\|}h_i) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_\omega\omega_i(t)B_u\lambda_i + AC_{y\|}h_i\\ \dot{e}_{xi}(t) &= Ae_{xi}(t) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_\omega\omega_i(t) + \underbrace{B_u\lambda_i + AC_{y\|}h_i}_{\upsilon_i}.\end{aligned}$$

Definindo a matriz não singular

$$T_{B_u} = \begin{bmatrix} B_{u\underline{\|}} \\ B_{u\underline{\perp}} \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

podemos afirmar que

$$T_{B_u}\upsilon_i = 0 \Leftrightarrow \upsilon_i = 0.$$

Considerando o sinal de compensação dado em (4.8) e as Hipóteses 4.1 e 4.2, provamos que

$$T_{B_u}\upsilon_i = \begin{bmatrix} B_{u\underline{\|}} \\ B_{u\underline{\perp}}, \end{bmatrix}\left[B_u\lambda_i + AC_{y\|}h_i,\right] = \begin{bmatrix} B_{u\underline{\|}}B_u(-B_{u\underline{\|}}AC_{y\|}h_i) + B_{u\underline{\|}}AC_{y\|}h_i \\ B_{u\underline{\perp}}B_u(-B_{u\underline{\|}}AC_{y\|}h_i) + B_{u\underline{\perp}}AC_{y\|}h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\upsilon_i = 0$ e a equação de estados de $e_{x_i}(t)$ pode ser reescrita como

$$\dot{e}_{xi}(t) = Ae_{xi}(t) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_\omega\omega_i(t).$$

Desta forma, o sistema multiagente do par (3.1) e (4.2) pode ser reescrito de maneira acoplada definindo a variável de estado aumentada $\phi = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & x_c^T(t) \end{bmatrix}^T$, em que $e_x(t) = [e_{x1}^T(t) \quad e_{x2}^T(t) \quad ... \quad e_{xm}^T(t)]^T$ é formado pela concatenação dos erros $e_{xi}(t)$ e $x_c(t) = [x_{c,1}^T(t) \quad x_{c,2}^T(t) \quad ... \quad x_{c,m}^T(t)]^T$ é formado pela concatenação dos estados dos controladores.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha)\phi(t) + \mathbb{B}(\alpha)w(t),\\ z(t) &= \mathbb{C}\phi(t),\end{aligned} \tag{4.11}$$

em que

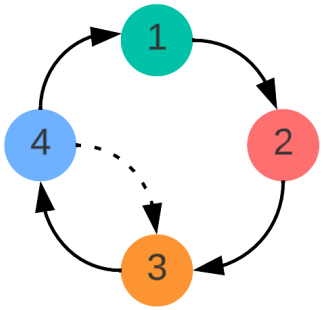
$$\mathbb{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D y) \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_g \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \quad C_g = I_m - \frac{1}{m} \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T.$$

O sistema (4.11) é idêntico ao (3.7), logo o consenso robusto (4.11) é equivalente à estabilidade robusta de (4.9), como já provado no Capítulo 3. Desta forma, é possível projetar as matrizes A_c, B_c, C_c e D_c utilizando os Teoremas (3.1) e (3.2) diretamente. ■

4.1.3 Exemplo Numérico

Como exemplo de aplicação do teorema de consenso robusto para controle de formação relativa e invariante no tempo, vamos resolver o problema do Exemplo 1. Considere um sistema com quatro agentes sujeitos a uma comunicação incerta com topologia dada pela Figura 4.2.

Figura 4.2 – Topologia de comunicação incerta



As dinâmicas dos agentes são dadas pelo seguinte modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{x_i}(t) \\ \dot{p}_{y_i}(t) \\ \dot{v}_{x_i}(t) \\ \dot{v}_{y_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_i}(t) \\ p_{y_i}(t) \\ v_{x_i}(t) \\ v_{y_i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \omega_i(t) \qquad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} y_{1_i}(t) \\ y_{2_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_i}(t) \\ p_{y_i}(t) \\ v_{x_i}(t) \\ v_{y_i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \omega_i(t),$$

em que p_{x_i} e p_{y_i} significam a posição em x e y no espaço do agente i e v_{x_i} e v_{y_i} são as velocidades deste agente nas direções x e y, respectivamente. Neste caso o agente possui quatro estados, porém só duas entradas de controle.

A comunicação desses agentes é incerta e pode ser representada pela matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix},$$

em que $a_{4,3} \in [0, 1]$.

Dessa forma, os vértices da notação politópica da matriz Laplaciana são

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e $L(\alpha) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$, tal que, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Deseja-se que os agentes formem um quadrado de lado 1m no espaço $x \times y$, logo, foram passados os sinais de formação dos agentes como

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad h_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este problema foram implementadas as condições LMI dos Teoremas 3.2 e 3.1, em um código *Matlab* [57] utilizando o *solver Mosek* [58]. O método resultou nos

seguintes ganhos de controlador:

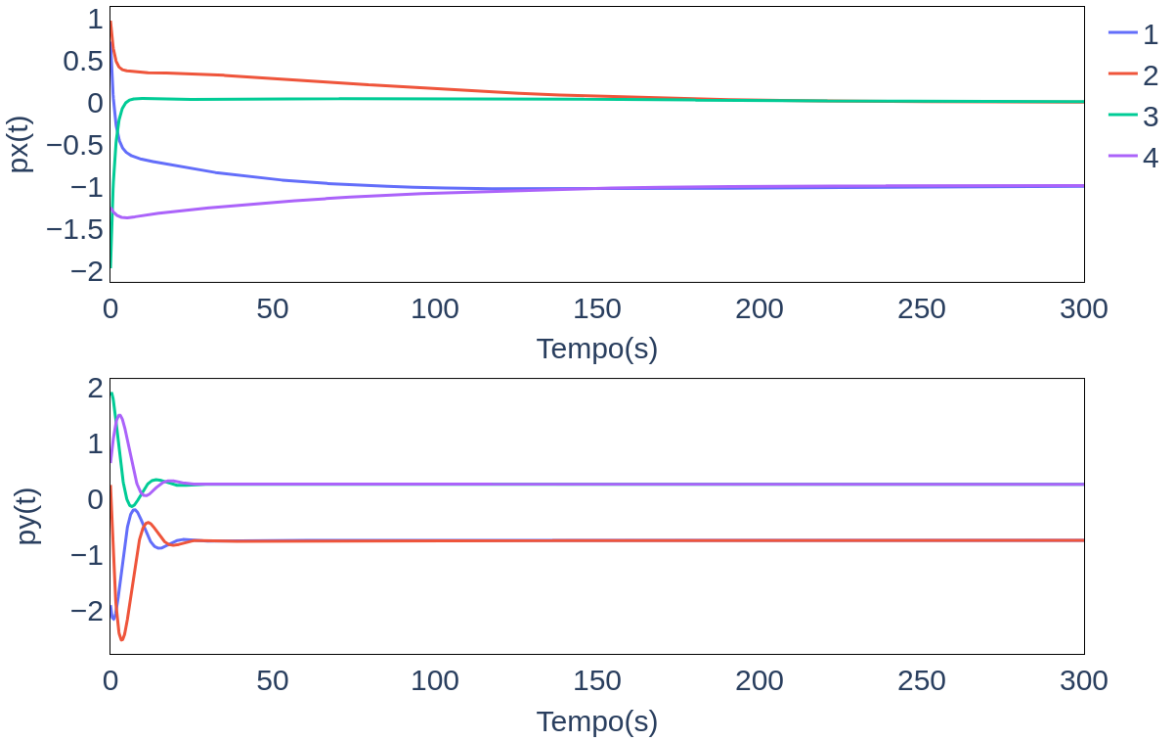
$$A_c = \begin{bmatrix} -14.5911 & 0.3988 \\ -0.3016 & -5.8472 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0.0045 & -0.0031 \\ 0.0004 & 0.0414 \end{bmatrix},$$
$$C_c = \begin{bmatrix} -291.2101 & 8.6665 \\ -19.3564 & -298.3866 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} 0.1000 & -0.0675 \\ 0.0316 & 2.2902 \end{bmatrix}.$$

Para simular o sistema, foi implementado um código em *Python* que reproduz o sistema (3.1) e a lei de controle (4.2) e foram realizados dois experimentos, em todos os experimentos foi utilizado o método de integração de Euler Avançado.

1. **Experimento 1**

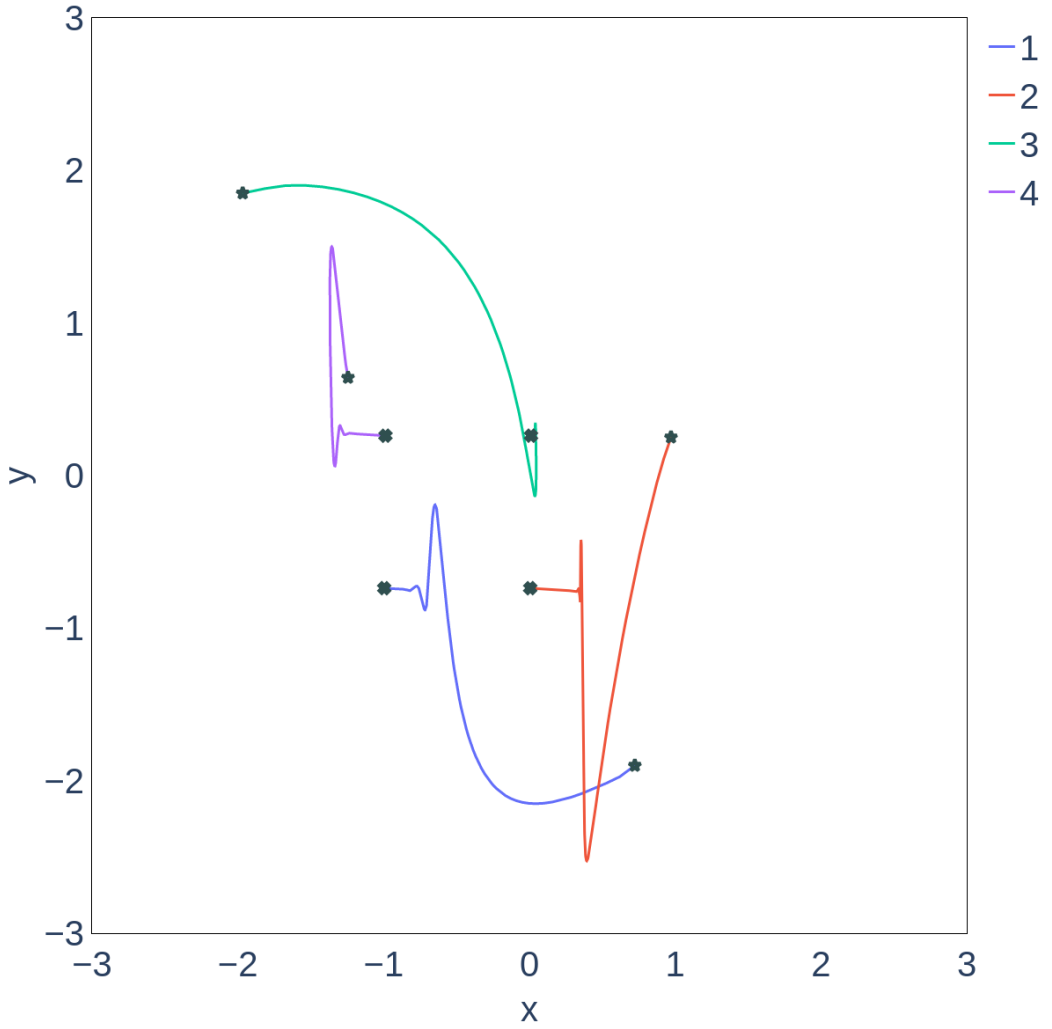
   Primeiramente, executou-se o sistema sem sinais de distúrbios. A Figura 4.3 mostra como foi a evolução da saída do sistema.

Figura 4.3 – Evolução da saída do sistema (4.12) sem distúrbios



A Figura 4.4 mostra como foi a evolução das trajetórias percorridas no plano $x \times y$ pelos agentes do sistema. No gráfico a posição inicial foi marcada com uma estrela e a posição final com a letra "x".

Figura 4.4 – Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema (4.12) sem distúrbios



OBSERVAÇÃO 4.2 Note na Figura 4.3 que a posição no eixo y rapidamente alcança o consenso entre $20s \leq t \leq 30s$, já a posição em x só alcança o consenso em $t > 100s$. Isso se deve ao ganho D_c do controlador, que é muito maior para a componente y, logo atribui uma maior contribuição para o erro de formação neste eixo.

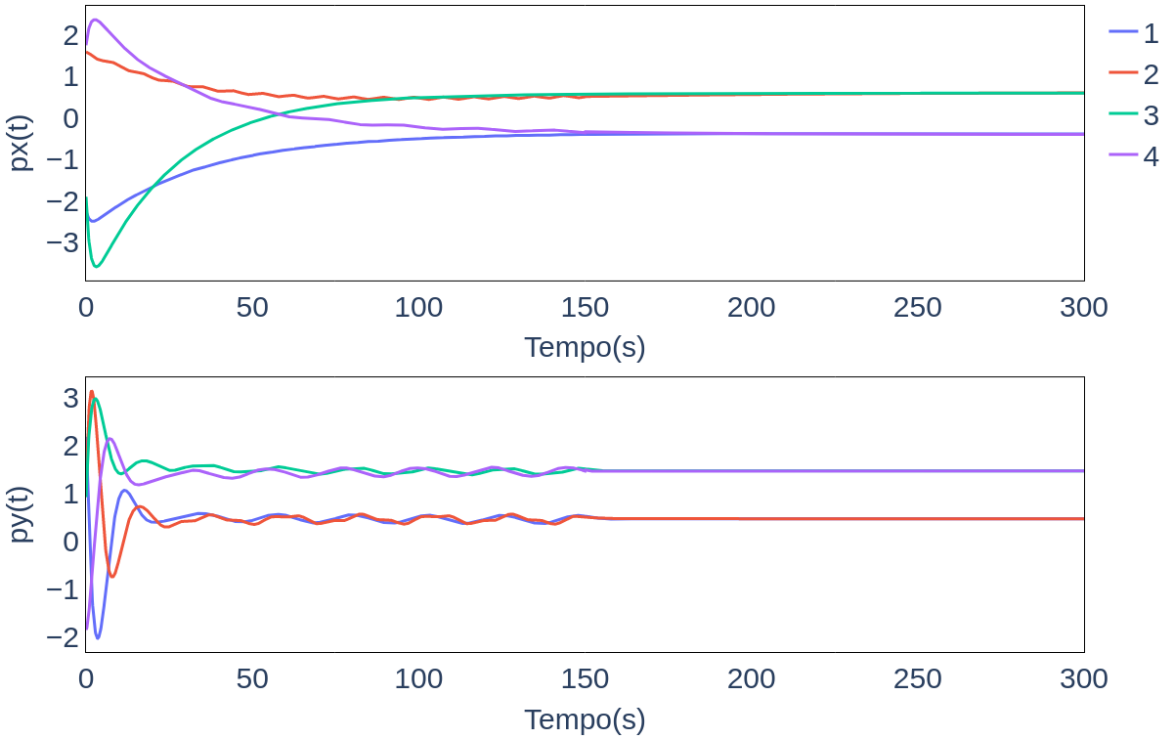
Já na Figura 4.4 é importante notar que as posições finais dos agentes $y_i(t)$ não convergem para h_i e estão deslocadas como explicado na Observação 4.1.

2. **Experimento 2**

No segundo experimento, foi introduzido um distúrbio modelado como um sinal senoidal $\omega_i(t) = \tilde{A}sen(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i)$ com $\tilde{A} = [0, 0.5]$, $\tilde{\omega}_i \in [0, 4]$, $\tilde{\phi}_i \in [0, 2\pi]$ aleatórios atuando em $t < 150s$.

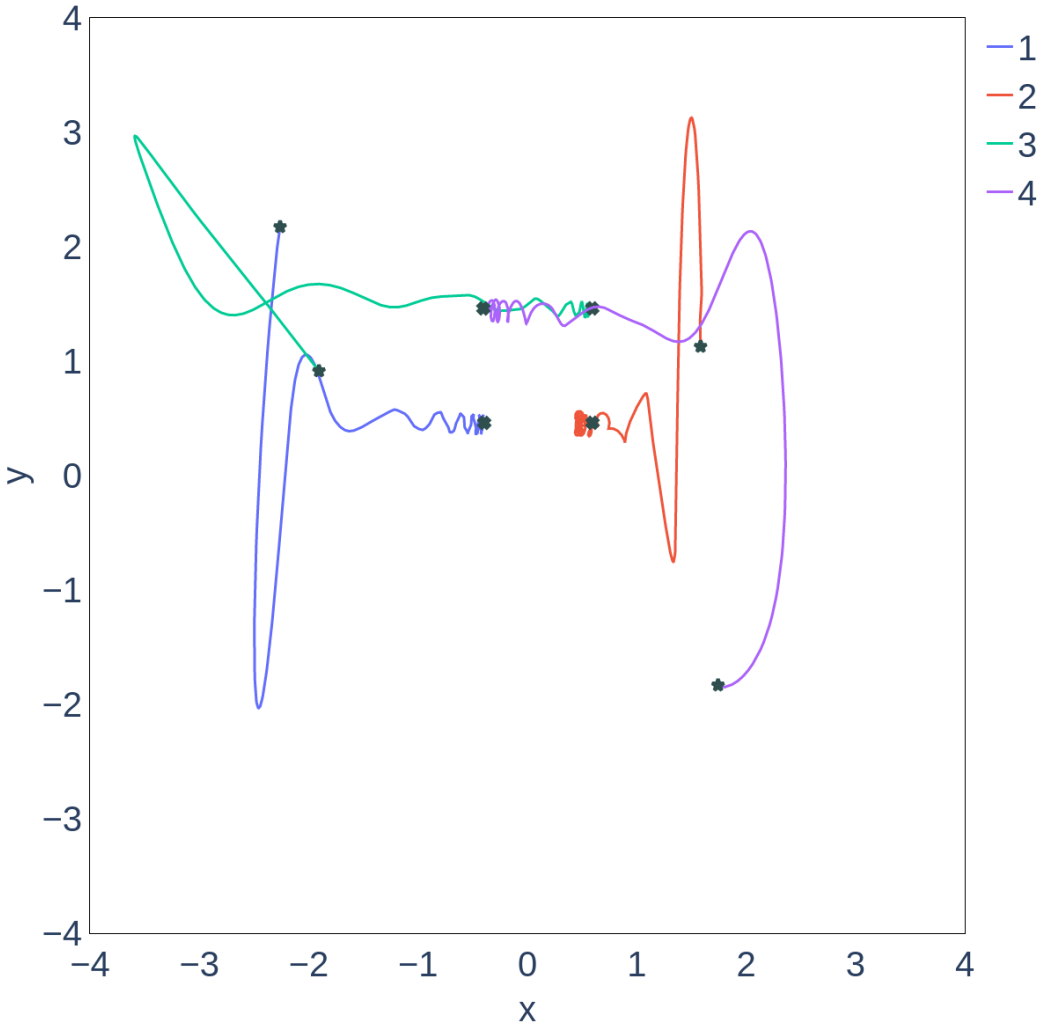
O gráfico da Figura 4.5 mostra a evolução da saída do sistema ao longo do tempo e a Figura 4.6 mostra como foi a evolução das trajetórias percorridas no plano $x \times y$ pelos agentes do sistema. .

Figura 4.5 – Evolução da saída do sistema 4.12 com distúrbios



OBSERVAÇÃO 4.3 Note na Figura 4.5 que após a interrupção do sinal de distúrbio em $t > 150s$ o sistema alcança o estado de consenso.
Na Figura 4.4 é importante notar que as posições finais dos agentes também estão deslocadas em relação a formação de referência.

Figura 4.6 – Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema 4.12 com distúrbios



Pelos resultados apresentados nas Figuras 4.3 e 4.4, observamos que o sistema foi capaz de alcançar uma formação relativa e invariante no tempo, estabelecendo um consenso entre os agentes, mesmo diante de incertezas na comunicação. Nota-se também que as saídas $y_i(t)$ não convergem para os valores h_i, conforme discutido na Observação 4.1.

No segundo experimento, representado nas Figuras 4.5 e 4.6, o sistema foi submetido a um cenário de entrada de distúrbios e incertezas na comunicação, porém demonstrou robustez em buscar e manter a formação.

É essencial observar que, nesse segundo experimento, a formação foi estabelecida em um local diferente do experimento anterior, uma vez que o problema em questão busca alcançar o consenso de formação relativa entre os agentes, que é fortemente influenciado pelas posições iniciais, pela comunicação incerta entre os agentes e pelos sinais de distúrbios. Estes resultados confirmam a lei de controle proposta no Corolário 4.1 e a utilização da teoria de consenso robusto para projeto de controladores de formação.

4.2 RASTREAMENTO DE FORMAÇÃO VARIANTE NO TEMPO

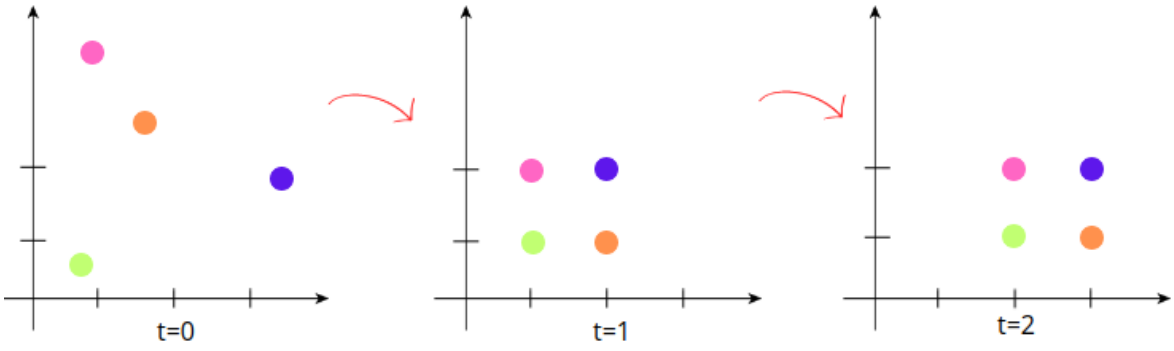
O rastreamento de formação variante no tempo também é um tópico de interesse em sistemas multiagentes [19, 40]. Ele aborda a situação em que um conjunto de agentes móveis procura manter uma configuração específica, porém essa configuração de referência varia ao longo do tempo e é definida em relação a um sistema de referência absoluto. Diferentemente do problema de formação anterior, onde a formação é relativa entre os robôs, neste caso, é fundamental que o erro na formação de saída final se aproxime de zero à medida que o tempo avança.

Exemplo 2. *Considere um sistema composto por quatro agentes em movimento em um plano, porém, diferente do Exemplo 1, agora é necessário que os agentes estabeleçam a formação de um quadrado que siga a referência*

$$h_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix} \qquad h_2(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad h_3(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad h_4(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso o protocolo de controle deve direcionar as saídas dos agentes necessariamente para a formação especificada como ilustrado pela Figura 4.7.

Figura 4.7 – Exemplo de rastreamento de formação variante no tempo



Este problema também pode ser escrito como um problema de consenso e, com algumas adaptações, é possível projetar controladores utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 3.

4.2.1 Definição do Problema

Considere um sistema multiagente com m agentes de dinâmicas lineares idênticas dadas pelo sistema (3.1). Os agentes estão sujeitos a incertezas na topologia de comunicação que serão modeladas pela representação politópica da matriz Laplaciana com as mesmas

considerações apresentadas em (3.2). Além da comunicação com os agentes vizinhos cada agente recebe como entrada de referência o sinal de formação $h_i(t) \in \mathbb{R}^q$ variante no tempo e conhecido, sendo possível calcular o seu erro de formação de saída definido por

$$e_{y_i}(t) = y_i(t) - h_i(t). \tag{4.13}$$

HIPÓTESE 4.3 O sinal $h_i(t)$ deve ser continuamente diferenciável por partes.

Cada agente do sistema possui um controlador na forma de

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c \nu_i(t), \\ u_i(t) &= C_c x_{c,i}(t) + D_c \nu_i(t) + \lambda_i(t), \end{aligned} \tag{4.14}$$

em que $\lambda_i(t)$ é o sinal de compensação de formação e $\nu_i(t)$ é o erro de consenso de formação de saída, dado por

$$\begin{aligned} \nu_i(t) &= -(y_i(t) - h_i(t)) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(y_i(t) - h_i(t) - (y_j(t) - h_j(t))) \\ &= -e_{y_i} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(e_{y_i} - e_{y_j}), \end{aligned} \tag{4.15}$$

em que $a_{ij}(t)$ são os pesos da comunicação entre o agente i e os agentes em sua vizinhança que estão sujeitos a incertezas e modeladas a partir da representação politópica da matriz Laplaciana dada em (3.2).

HIPÓTESE 4.4 A matriz C_y possui posto linha completo, logo existe uma matriz $C_{y\|}$ tal que $C_y C_{y\|} = I$, e a matriz B_u possui posto coluna completo, logo existe uma matriz $B_{u\underline{\|}}$ tal que $B_{u\underline{\|}} B_u = I$.

Definindo o erro $e_{xi}(t)$ como

$$e_{xi}(t) = x_i(t) - C_{y\|} h_i(t), \tag{4.16}$$

os agentes desse sistema devem ser capazes de estabelecer uma formação $h_i(t)$, invariante no tempo, de forma a saída balanceada de consenso

$$z_i(t) = C_z e_{xi}(t) \tag{4.17}$$

alcance $z_i(t) = 0$ para $i = 1, ..., m$. A matriz C_z neste caso pondera a importância relativa de cada componente do erro na análise de desempenho.

Como novamente foi considerado a presença de distúrbios, o consenso exato das saídas ponderadas não é possível e para garantir a análise da qualidade de desempenho, o consenso é avaliado em relação à norma $\mathcal{H}_\infty$ a partir da relação (3.6).

Portanto, nesta seção serão abordados os seguintes problemas:

Problema 3. *Projetar um controlador no formato de* (4.2) *tal que*

1. *O sistema multiagente seja capaz de seguir a formação de entrada no caso em que não há distúrbios*
$$\lim_{t\to\infty}[y_i(t) - h_i(t)] = 0. \tag{4.18}$$
2. *O sistema multiagente satisfaz o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ dado em* (3.6) *com custo garantido $\lambda > 0$ na presença de distúrbios $\omega_i(t)$ e condições iniciais nulas.*

4.2.2 Projeto de Controle

O projeto de controle para o rastreamento de formação variante no tempo será fundamentado no controle de consenso abordado no Capítulo 3. Consequentemente, o problema deverá ser reformulado para que seja possível aplicar o projeto de controlador dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Primeiramente, partindo da definição de $e_{xi}(t) = x_i(t) - C_{y\|}h_i$ e transformando $e_{xi}(t)$ em um novo estado do sistema, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{xi}(t) &= \dot{x}_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t) \\
\dot{e}_{xi}(t) &= Ax_i(t) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_u\lambda_i(t) + B_\omega\omega_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t).
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $AC_{y\|}h_i(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{xi}(t) &= Ax_i(t) - AC_{y\|}h_i(i) + AC_{y\|}h_i(i) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_u\lambda_i(t) \\
&\quad + B_\omega\omega_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t) \\
\dot{e}_{xi}(t) &= A(x_i(t) - C_{y\|}h_i(t)) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_\omega\omega_i(t)B_u\lambda_i(t) \\
&\quad + AC_{y\|}h_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t) \\
\dot{e}_{xi}(t) &= Ae_{xi}(t) + B_uC_cx_{c,i}(t) + B_uD_c\nu_i(t) + B_\omega\omega_i(t) + \underbrace{B_u\lambda_i(t) + AC_{y\|}h_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t)}_{\upsilon_i(t)}.
\end{aligned}$$

HIPÓTESE 4.5 O sinal de formação $h_i(t)$ deve cumprir a condição

$$B_{u\underline{\perp}} A C_{y\|} h_i(t) - B_{u\underline{\perp}} C_{y\|} \dot{h}_i(t) = 0. \tag{4.19}$$

OBSERVAÇÃO 4.4 A hipótese 4.5 garante que as trajetórias de formação fornecidas para as saídas e, consequentemente, para os estados, sejam viáveis. Por exemplo, ao fornecer trajetórias para a velocidade e posição de um agente, é crucial garantir a compatibilidade destes sinais.

Analisando $v_i(t)$, podemos definir a matriz não singular

$$T_{B_u} = \begin{bmatrix} B_{u\|} \\ B_{u\underline{\perp}} \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

de forma que

$$T_{B_u} v_i(t) = 0 \Leftrightarrow v_i(t) = 0.$$

Realizando a operação, tem-se

$$\begin{aligned} T_{B_u} v_i(t) &= \begin{bmatrix} B_{u\|} \\ B_{u\underline{\perp}}, \end{bmatrix} \left[B_u \lambda_i(t) + A C_{y\|} h_i(t) - C_{y\|} \dot{h}_i(t) \right] \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_i(t) + B_{u\|} A C_{y\|} h_i(t) - B_{u\|} C_{y\|} \dot{h}_i(t) \\ B_{u\underline{\perp}} A C_{y\|} h_i(t) - B_{u\underline{\perp}} C_{y\|} \dot{h}_i(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando a Hipótese 4.5, concluímos que

$$v_i(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i(t) = -B_{u\|} A C_{y\|} h_i(t) + B_{u\|} C_{y\|} \dot{h}_i(t)$$

Com isso, é possível definir o seguinte corolário:

COROLÁRIO 4.2 Considere o sistema multiagente (3.1) com controladores na forma (4.14). Se o sistema atende as Hipóteses 4.4 e 4.5 e cumpre as seguintes condições:

1. o sinal de compensação de formação é dado por

$$\lambda_i(t) = -B_{u\|} A C_{y\|} h_i(t) + B_{u\|} C_{y\|} \dot{h}_i(t); \tag{4.21}$$

2. o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha)\phi(t) + \mathbb{B}(\alpha)w(t),\\ z(t) &= \mathbb{C}\phi(t),\end{aligned} \tag{4.22}$$

em que

$$\begin{aligned}\phi &= \begin{bmatrix} e_x^T(t) & x_c^T(t)\end{bmatrix}^T\\ \mathbb{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes A - \tilde{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c)\\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c\end{bmatrix},\\ \mathbb{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - \tilde{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y)\\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes (B_c Dy)\end{bmatrix},\\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} I_m \otimes C_z & 0\end{bmatrix}, \tilde{L}(\alpha) = L(\alpha) + I_m.\end{aligned}$$

é assintoticamente estável quando $\omega(t) = 0$ e, para condições iniciais nulas, satisfaz um custo $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma > 0$;

então o sistema multiagente será capaz de estabelecer o rastreamento de formação variante no tempo e resolver o Problema 3.

Prova.

Sendo

$$\dot{e}_{xi}(t) = Ae_{xi}(t) + B_u C_c x_{c,i}(t) + B_u D_c \nu_i(t) + B_\omega \omega_i(t) + \underbrace{B_u \lambda_i(t) + AC_{y\|} h_i(t) - C_{y\|}\dot{h}_i(t)}_{\upsilon_i(t)}.$$

e considerando a Hipótese 4.5 e a condição (4.21), temos que $\upsilon_i(t) = 0$. Logo

$$\dot{e}_{xi}(t) = Ae_{xi}(t) + B_u C_c x_{c,i}(t) + B_u D_c \nu_i(t) + B_\omega \omega_i(t). \tag{4.23}$$

Considerando o desenvolvimento apresentado em (A.1), vemos que (4.23) é equivalente a (A.5).

O sistema multiagente pode, então, ser reescrito de forma acoplada definindo a variável de estado aumentada $\phi = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & x_c^T(t)\end{bmatrix}^T$, em que $e_x(t) = [e_{x1}^T(t) \quad e_{x2}^T(t) \quad ... \quad e_{xm}^T(t)]^T$ é formado pela concatenação dos erros $e_{xi}(t)$ e $x_c(t) = [x_{c,1}^T(t) \quad x_{c,2}^T(t) \quad ... \quad x_{c,m}^T(t)]^T$

é formado pela concatenação dos estados do controlador.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha)\phi(t) + \mathbb{B}(\alpha)w(t),\\ z(t) &= \mathbb{C}\phi(t),\end{aligned} \tag{4.24}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes A - \tilde{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix},\\ \mathbb{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - \tilde{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes (B_c Dy) \end{bmatrix},\\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} I_m \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \tilde{L}(\alpha) = L(\alpha) + I_m.\end{aligned}$$

Este sistema é semelhante ao sistema (3.7), porém, neste caso, a solução do problema de rastreamento de formação não necessita da transformação (3.8), já que deve-se estabilizar diretamente o sistema (4.22).

Considerando o desenvolvimento detalhado apresentado em (A.2), é possível reescrever o sistema (4.22) como

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{C}(\alpha))\phi(t) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{D}(\alpha))\eta(t),\\ z(t) &= \mathcal{C}_z\phi(t),\end{aligned} \tag{4.25}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} I_m \otimes A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \otimes B_u \\ I_{mn_c} & 0 \end{bmatrix},\\ \mathcal{B}_1 &= \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_y = \begin{bmatrix} I_m \otimes A_c & I_m \otimes B_c \\ I_m \otimes C_c & I_m \otimes D_c \end{bmatrix},\\ \mathcal{C}(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & I_{mn_c} \\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes C_y & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{L}(\alpha) \otimes D_y \end{bmatrix},\\ \mathcal{C}_z &= \begin{bmatrix} I_m \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \tilde{L}(\alpha) = L(\alpha) + I_m.\end{aligned}$$

Definindo as matrizes $\mathfrak{J}_{11} = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times s} \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0_{s \times n_c} & I_s \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{21} = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times q} \end{bmatrix}$, $\mathfrak{J}_{22} = \begin{bmatrix} 0_{q \times s} & I_q \end{bmatrix}$ e $K_y = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$, a matriz $\mathcal{K}_y$ pode ser reescrita como

$$\mathcal{K}_y = \begin{bmatrix} I_m \otimes (\mathfrak{J}_{11} K_y \mathfrak{J}_{21}^T) & I_m \otimes (\mathfrak{J}_{11} K_y \mathfrak{J}_{22}^T) \\ I_m \otimes (\mathfrak{J}_{12} K_y \mathfrak{J}_{21}^T) & I_m \otimes (\mathfrak{J}_{12} K_y \mathfrak{J}_{22}^T) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I_m \otimes \mathfrak{J}_{11} \\ I_m \otimes \mathfrak{J}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_1} (I_m \otimes K_y) \underbrace{\begin{bmatrix} I_m \otimes \mathfrak{J}_{21}^T & I_m \otimes \mathfrak{J}_{22}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_2}.$$

E o sistema (4.25) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= A_{cl}(\alpha)\delta(t) + B_{cl}(\alpha)\eta(t), \\ z(t) &= C_z \delta(t) \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que

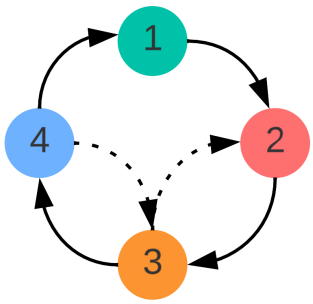
$$\begin{aligned} A_{cl}(\alpha) &= \mathcal{A} + \bar{\mathcal{B}}(I_m \otimes K_y)\bar{\mathcal{C}}(\alpha), \\ B_{cl}(\alpha) &= \mathcal{B}_1 + \bar{\mathcal{B}}(I_m \otimes K_y)\bar{\mathcal{D}}(\alpha), \\ \bar{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}\mathcal{T}_1, \quad \bar{\mathcal{C}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{C}(\alpha), \quad \bar{\mathcal{D}}(\alpha) = \mathcal{T}_2\mathcal{D}(\alpha). \end{aligned}$$

Neste formato, o sistema (4.27) é similar ao (3.14), logo, é possível aplicar os Teoremas 3.1 e 3.2 para encontrar os ganhos de controle. ■

4.2.3 Exemplo Numérico

Como exemplo de aplicação do teorema de consenso robusto para rastreamento de formação variante no tempo, vamos resolver o problema do Exemplo 2. Considere um sistema com quatro agentes sujeitos a uma comunicação incerta com topologia dada pela Figura 4.8.

Figura 4.8 – Topologia de comunicação incerta



As dinâmicas dos agentes são dadas pelo seguinte modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{x_i}(t) \\ \dot{p}_{y_i}(t) \\ \dot{v}_{x_i}(t) \\ \dot{v}_{y_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_i}(t) \\ p_{y_i}(t) \\ v_{x_i}(t) \\ v_{y_i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_i(t) \qquad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} y_{1_i}(t) \\ y_{2_i}(t) \\ y_{3_i}(t) \\ y_{4_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_i}(t) \\ p_{y_i}(t) \\ v_{x_i}(t) \\ v_{y_i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_i(t),$$

em que p_{x_i} e p_{y_i} significam a posição em x e y no espaço do agente i e v_{x_i} e v_{y_i} são as velocidades deste agente nas direções x e y, respectivamente.

A comunicação desses agentes é incerta e pode ser representada pela matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix},$$

em que $a_{4,3} \in [0, 1]$ e $a_{3,2} \in [0, 1]$.

Dessa forma, os vértices da notação politópica da matriz Laplaciana são

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e $L(\alpha) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4$, tal que, $\alpha_i > 0$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$.

Deseja-se que os agentes sigam a formação

$$h_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad h_2(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad h_3(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h_4(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este problema foram implementadas as condições LMI dos Teoremas 3.2 e 3.1, em um código *Matlab* [57] utilizando o *solver Mosek* [58]. O método foi configurado para buscar um controlador de ordem $n_c = 4$ e resultou nos seguintes ganhos de controlador:

$$A_c = \begin{bmatrix} -2.4052 & -0.0007 & 1.3360 & 0.0001 \\ 0.0000 & -2.2777 & -0.0000 & -0.0493 \\ -1.3731 & -0.0005 & 0.4562 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0004 & -0.0000 & -2.2365 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} -0.0003 & -0.0001 & -0.0111 & -0.0114 \\ -0.0000 & 0.0376 & 0.1155 & -0.1155 \\ -0.0002 & -0.0001 & -0.0092 & -0.0094 \\ 0.0000 & 0.0233 & 0.0570 & -0.0570 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 45.9900 & 0.0001 & -63.4751 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.3004 & -0.0000 & 0.2057 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} 0.0029 & 0.0001 & 0.0968 & 0.0968 \\ 0.0000 & -0.1044 & 0.4256 & -0.4256 \end{bmatrix}.$$

Para simular este sistema, foi implementado um código em *Python* que reproduz o sistema (3.1) a lei de controle (4.14), em todos os experimentos foi utilizado o método de integração de Euler Avançado. O experimento foi executado com um sinal de distúrbio modelado como um sinal senoidal $\omega_i(t) = \tilde{A}sen(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i)$, com $\tilde{A} = [0, 1]$, $\tilde{\omega}_i \in [0, 4]$, $\tilde{\phi}_i \in [0, 2\pi]$ aleatórios, atuando durante $5s \leq t \leq 15s$. Durante todo o período de simulação os valores de α_i variaram aleatoriamente. A Figura 4.9 mostra como foi a evolução das saídas do sistema e a Figura 4.10 mostra como evoluiu os erros de formação do sistema.

Figura 4.9 – Evolução da saída do sistema (4.28)

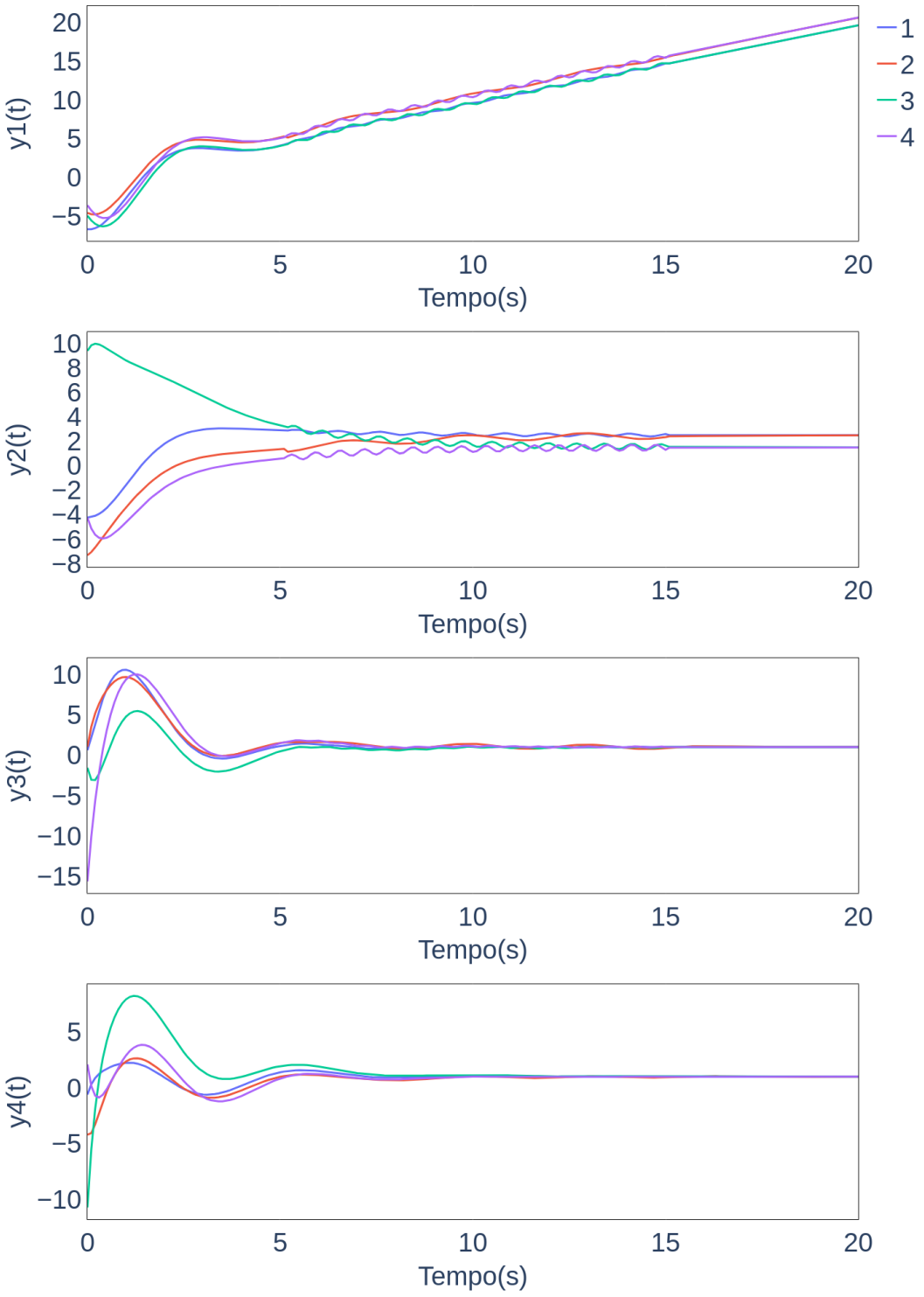
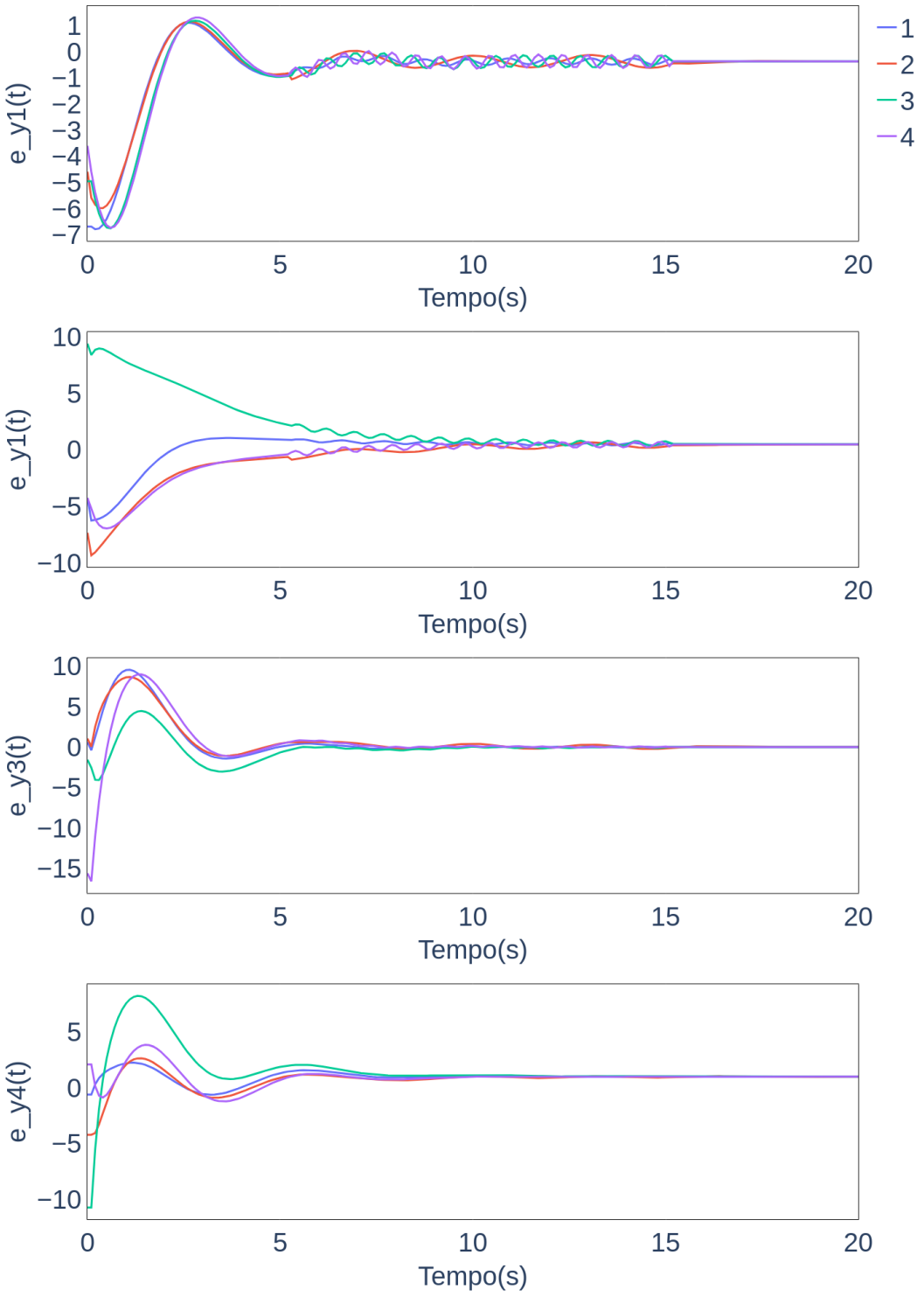
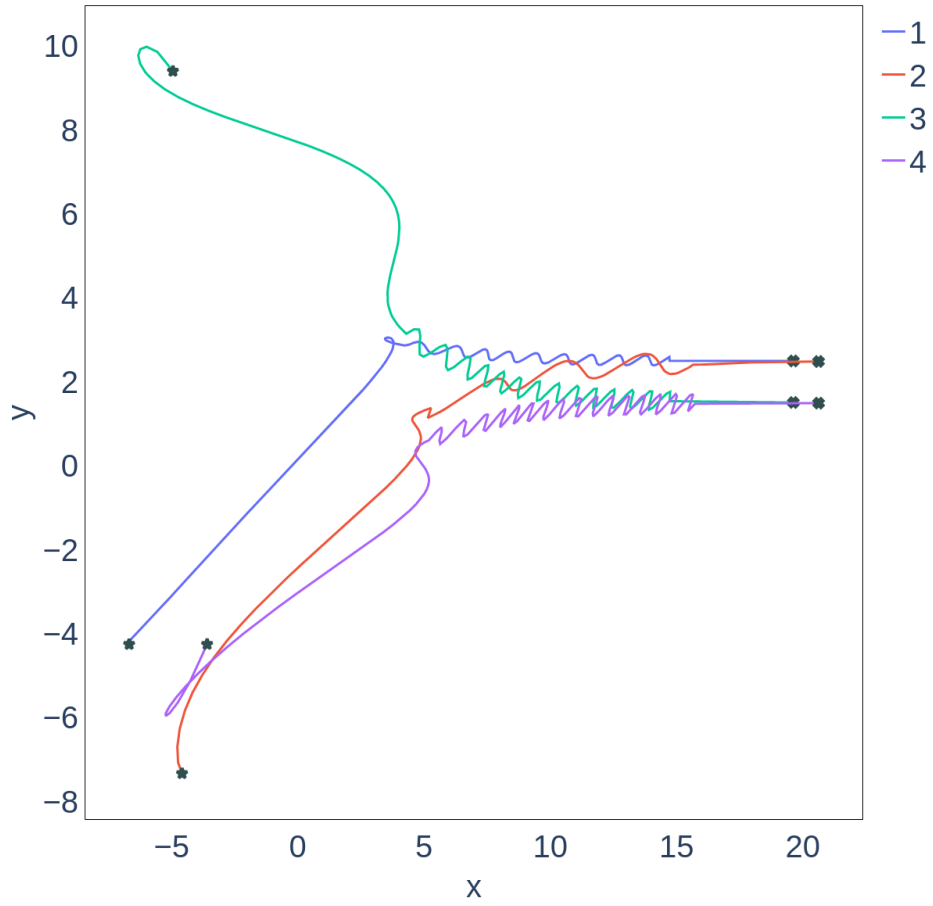


Figura 4.10 – Evolução do erro de formação do sistema (4.28)



A Figura 4.11 mostra como foi a evolução das trajetórias percorridas no plano $x \times y$ pelos agentes do sistema. No gráfico a posição inicial foi marcada com uma estrela e a posição final com a letra "x".

Figura 4.11 – Trajetórias percorridas pelos agentes do sistema (4.28)



A análise dos gráficos das Figuras 4.9 e 4.10 revela que os agentes, partindo de condições iniciais aleatórias, conseguem alcançar o consenso robusto e, após a interrupção do sinal de distúrbio, os erros de formação $e_{y_i}(t)$ tendem a zero, satisfazendo o Problema 3.

A Figura 4.11 mostra como foi a evolução da posição no plano $x \times y$ dos agentes, e é possível verificar que a atuação do controlador em 3 fases distintas, na partida quando as condições iniciais são aleatórias porém não há distúrbios, durante a atuação dos distúrbios, em que há oscilações nas trajetórias, e após a interrupção dos distúrbios, em que o sistema alcança o estado de consenso e o erro de formação vai para zero.

Este experimento demonstrou a aplicabilidade da lei de controle proposta no Corolário 4.2 e do projeto de controlador para rastreamento de formação variante no tempo por meio da teoria de consenso e aplicação dos Teoremas 3.1 e 3.2.

5 APLICAÇÃO EM SISTEMA MULTIAGENTE ROBÓTICO

Neste capítulo, apresentaremos uma implementação prática do controle de formação para agentes robóticos, aplicando os conceitos previamente abordados no capítulo anterior. Iniciaremos apresentando o modelo dinâmico de um robô diferencial, em seguida, discutiremos as condições essenciais para a implementação do sistema utilizando linearização por realimentação de entrada-saída e teoria de controle de formação linear, por fim descreveremos experimentos utilizando um grupo de robôs móveis simulado.

5.1 ROBÔ DIFERENCIAL

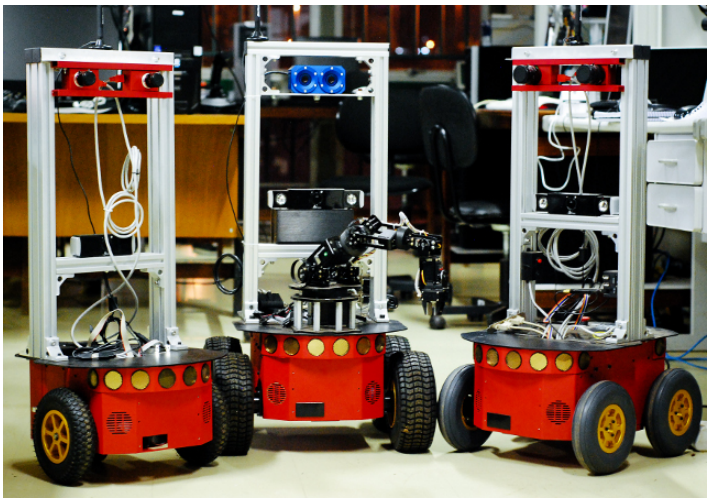
O robô diferencial é um tipo de robô móvel que utiliza um sistema de tração diferencial para se locomover, isto é, ele possui duas rodas que podem ser acionadas independentemente [59]. Isso permite que o robô se mova de maneira muito versátil e realize uma ampla gama de manobras, como girar no lugar, mover-se em linha reta e seguir curvas, o que lhes confere um vantagem para atuar em ambientes com espaço limitado ou com obstáculos [60].

Existem diversos modelos de robôs diferenciais no mercado para diferentes aplicações, como exemplo podemos citar o robô *Pioneer P3-DX* da *MobileRobots* [61], que é utilizado principalmente para pesquisas e aplicações em ambientes internos [62], o robô *Turtlebot* da *Open Robotics*, muito utilizado em aplicações educacionais [63], o robô *Roomba* da *iRobot* que é utilizado domesticamente para limpeza [64], ou também os robôs *Kiva Systems* da *Amazon* [65], que são usados para automação de transportes em armazéns.

O Laboratório de Automação e Robótica (LARA) da Universidade de Brasília (UnB) se destaca no desenvolvimento de pesquisas no campo da robótica e automação. Entre os robôs móveis presentes no LARA podemos destacar os *Pioneer* de modelo *P3-DX* e *3-AT*, como pode ser verificado na Figura 5.1. Neste trabalho, desenvolveremos uma aplicação de controle de formação de multi-robôs focados no robô *Pioneer P3-DX*

A seguir iremos apresentar a modelagem dinâmica deste tipo de robô e como transformar este modelo para realizar aplicações de formação.

Figura 5.1 – Robôs do tipo *Pioneer* disponíveis no LARA

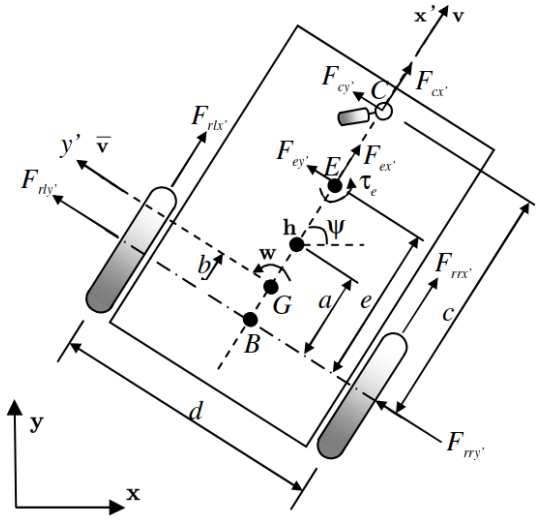


Fonte: [66]

5.1.1 Modelagem Dinâmica

O modelo dinâmico do robô diferencial foi proposto por De La Cruz e Carelli (2006) [67]. A Figura 5.2 descreve a estrutura de um robô móvel diferencial com duas rodas fixas de tração e uma roda castor, nesta formulação $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ representam a velocidade linear e angular do robô, respectivamente, G é o centro de massa, B é o centro do eixo das rodas, C é a posição da roda castor, $\mathbf{h}$ é o ponto de interesse com coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no plano XY, no qual as condições dinâmicas serão propostas, ψ é a orientação do robô, d, b, a, e e c são distâncias.

Figura 5.2 – Parâmetros do robô móvel diferencial



Fonte: De La Cruz e Carelli (2006) [67]

O desenvolvimento das equações de força e momento produzido pelas rodas do robô, sem considerar o deslizamento entre as rodas e a superfície e as forças produzidas pela roda castor, resulta no modelo dinâmico

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cos\psi - a\mathbf{w}\sin\psi \\ \mathbf{v}\sin\psi + a\mathbf{w}\sin\psi \\ \mathbf{w} \\ \frac{\theta_3}{\theta_1}\mathbf{w}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}u \\ \frac{\theta_5}{\theta_1}\mathbf{v}\mathbf{w} - \frac{\theta_6}{\theta_1}\mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ref} \\ \mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

em que os estados são dados por $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, que representam a posição do ponto $\mathbf{h}$ no sistema de referência global, ψ, que representa a orientação do robô, $\mathbf{v}$, que representa a velocidade linear, e $\mathbf{w}$, que representa a velocidade angular.

Os parâmetros do modelo dinâmico são dados por

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\left(\frac{R_a}{k_a}(mR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT}\right)}{2rk_{PT}}, \\
\theta_2 &= \frac{\left(\frac{R_a}{k_a}(I_e d^2 + 2R_t r(I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR}\right)}{2rdk_{PR}}, \\
\theta_3 &= \frac{\frac{R_a}{k_a}mbR_t}{2k_{PT}}, \\
\theta_4 &= \frac{\frac{R_a}{k_a}\left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e\right)}{rk_{PT} + 1}, \\
\theta_5 &= \frac{\frac{R_a}{k_a}mbR_t}{dk_{PR}}, \\
\theta_6 &= \frac{\frac{R_a}{k_a}\left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e\right)d}{(2rk_{PR}) + 1},
\end{aligned}$$

em que m é a massa do robô, r é o raio das rodas de tração, k_b é a constante de tensão multiplicada pela razão de transmissão das engrenagens, R_a é a contante de resistência elétrica, k_a é a contante de torque multiplicada pela razão de transmissão das engrenagens, k_{PR}, k_{PT}, k_{DT} são constantes positivas, I_e é o momento de inercia e B_e é o coeficiente de viscosidade da combinação motor, rotor, caixa de engrenagens e rodas, R_t é o raio nominal do pneu.

O controle do robô é feito por meio de atuação na velocidade angular de cada roda através da relação

$$\mathbf{w_D} = \frac{\mathbf{v}}{r} + d\frac{\mathbf{w}}{2r} \qquad (5.2)$$
$$\mathbf{w_E} = \frac{\mathbf{v}}{r} - d\frac{\mathbf{w}}{2r},$$

em que $\mathbf{w_D}$ representa a velocidade angular da roda direita e $\mathbf{w_E}$ representa a velocidade angular da roda esquerda.

5.1.1.1 Identificação de Parâmetros Dinâmicos

Nem sempre os fabricantes disponibilizam todos os parâmetros necessários para se calcular os valores de θ_i, $i \in [1, ..., 6]$. Para se obter estes parâmetros é possível realizar um processo de identificação.

A partir do modelo dinâmico do robô (5.1), percebemos que as acelerações linear $\dot{\mathbf{v}}$ e angular $\dot{\mathbf{w}}$, são independentes de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e ψ. Isolando estes dois estados, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1}\mathbf{w}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}\mathbf{v} + \frac{1}{\theta_1}\mathbf{v}_{ref} \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}\mathbf{vw} - \frac{\theta_6}{\theta_2}\mathbf{w} + \frac{1}{\theta_2}\mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix}. \qquad (5.3)$$

Rearranjando os termos, é possível escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} & 0 & -\mathbf{w}^2 & \mathbf{v} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{w}} & 0 & 0 & \mathbf{vw} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ref} \\ \mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

em que $\bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6, \end{bmatrix}^T$. Dessa forma, os parâmetros θ_1, θ_3 e θ_4 dependem apenas apenas da entrada de referência para velocidade linear e medições de aceleração e velocidade linear e velocidade angular e os parâmetros θ_2, θ_5 e θ_6 dependem apenas da entrada de referência velocidade angular e medições de aceleração e velocidade angular e velocidade linear.

Por meio de um experimento é possível medir esses valores e identificar o vetor $\bar{\theta}$ utilizando uma técnica de mínimos quadrados [68].

5.1.2 Linearização por Realimentação de Entrada-Saída

O modelo que descreve a dinâmica do robô (5.1) possui um comportamento não linear e, por conta disso, não pode ser escrito no formado de (3.1) para aplicação dos Teoremas 3.1 e 3.2 e consequentemente aplicação das leis de controle propostas nos Corolários 4.1 e 4.2. Para contornar este problema é possível aplicar a técnica conhecida como linearização por realimentação de entrada-saída (do inglês *input-output feedback linearization*). Esta técnica

permite transformar um sistema dinâmico não linear em um sistema linear e possibilita a aplicação de protocolos de controle linear em sistemas originalmente não são lineares.

A ideia principal por trás da linearização por realimentação de entrada-saída é encontrar uma mudança adequada nas entradas do sistema não linear de modo que ele se comporte como um sistema linear. Para isso, é projetado um controlador de realimentação que aplica um sinal de controle adequado às entradas do sistema.

A linearização do robô diferencial pode ser feita para controlar a posição

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

do robô no sistema de coordenadas global.

Considerando o modelo dinâmico dado em (5.1), tem-se que

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cos\psi - a\mathbf{w}\sin\psi \\ \mathbf{v}\sin\psi + a\mathbf{w}\sin\psi \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Derivando $\dot{\mathbf{h}}$, tem-se

$$\ddot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}\mathbf{w}\sin\psi - a\mathbf{w}^2\cos\psi \\ \mathbf{v}\mathbf{w}\cos\psi - a\mathbf{w}^2\sin\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & -a\sin\psi \\ \sin\psi & a\cos\psi \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1}\mathbf{w}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}\mathbf{v} \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}\mathbf{v}\mathbf{w} - \frac{\theta_6}{\theta_2}\mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ref} \\ \mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix} \right). \tag{5.7}$$

O projeto de linearização então se reduz em projetar as entradas $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ref} \\ \mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix}$, tal que $\ddot{\mathbf{h}}$ seja linear. Assim, a seguinte lei de controle é proposta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ref} \\ \mathbf{w}_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\frac{1}{a}\sin\psi & \frac{1}{a}\cos\psi \end{bmatrix} \times \left(\tilde{v} - \begin{bmatrix} -\mathbf{v}\mathbf{w}\sin\psi - a\mathbf{w}^2\cos\psi \\ \mathbf{v}\mathbf{w}\cos\psi - a\mathbf{w}^2\sin\psi \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \frac{\theta_3}{\theta_1}\mathbf{w}^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1}\mathbf{v} \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2}\mathbf{v}\mathbf{w} - \frac{\theta_6}{\theta_2}\mathbf{w} \end{bmatrix} \right), \tag{5.8}$$

em que $\tilde{v}$ será a nova entrada de controle, de forma que substituindo (5.8) em (5.7), tem-se

$$\ddot{\mathbf{h}} = \tilde{v}, \tag{5.9}$$

sendo possível determinar $\tilde{v}$ de forma a tornar o sistema linear.

Neste trabalho, diferente das formulações propostas em [37] e [69], a formulação da entrada linearizada incluirá uma componente constante de amortecimento ρ que será escolhida como um parâmetro de projeto. Desta forma a entrada linearizada pode ser descrita como

$$\tilde{v} = u - \rho\dot{\mathbf{h}}, \tag{5.10}$$

em que u será é a lei de controle, de forma que

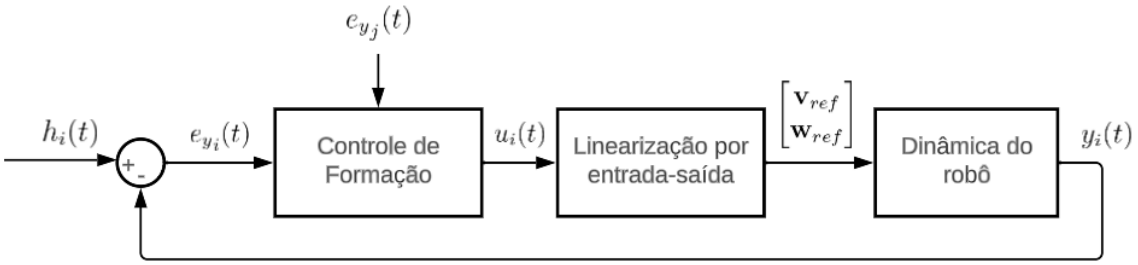
$$\ddot{\mathbf{h}} = u - \rho\dot{\mathbf{h}}. \tag{5.11}$$

Renomeando $\dot{\mathbf{x}}$ como $\mathbf{v_x}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ como $\mathbf{v_y}$ podemos modelar um robô diferencial i pertencente a um sistema multi robôs como o sistema no espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_i(t). \tag{5.12}$$

Para realizar o controle de formação, será necessário implementar uma malha em cascata do sinal de controle proveniente das leis propostas pelos Corolários 4.1 e 4.2 e a linearização por entrada e saída que considera os parâmetros dinâmicos do robô, como exemplificado no diagrama da Figura 5.3.

Figura 5.3 – Diagrama da malha de controle de formação e linearização por entrada e saída



5.2 IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE DE FORMAÇÃO EM UM SISTEMA MULTI-ROBÔS

A contribuição final deste trabalho é a concepção de um controlador capaz de coordenar um grupo de robôs para se organizar em uma formação relativa e invariante no tempo ou realizar o rastreamento de uma formação variante no tempo, como desenvolvido no Capítulo 4.

Devido à limitação de existir apenas um robô do tipo *Pioneer P3-DX* no LARA, juntamente com desafios de implementação que não estão dentro do escopo deste trabalho, como a questão da localização, a aplicação prática será realizada em um ambiente de simulação

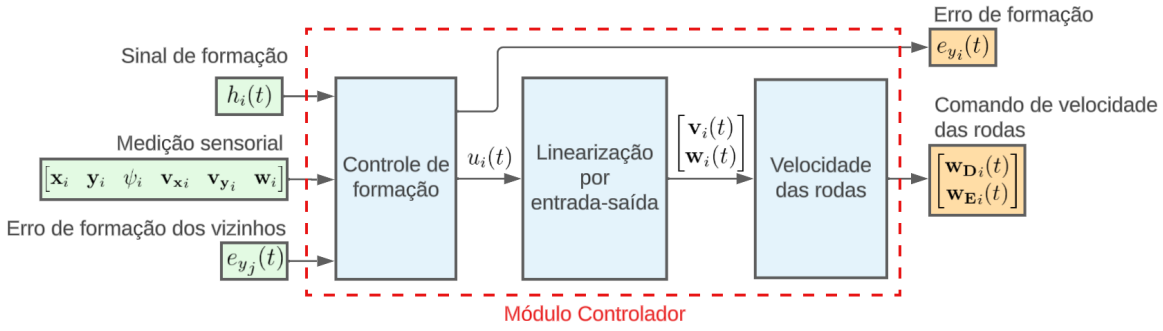
usando o simulador *CoppeliaSim* [70], que simula um cenário que se assemelha à realidade.

O controlador será implementado como um módulo em linguagem *Python*, utilizando o *Framework* de comunicação *ROS* [71], que fornece serviços e ferramentas para integração entre hardware e software de um sistema robótico. O *ROS* é amplamente utilizado na pesquisa e na indústria de robótica devido à sua flexibilidade e suporte para uma variedade de plataformas de hardware [72]. Portanto, em um cenário com robôs reais, é possível empregar o módulo controlador de forma completa, substituindo apenas as entidades que oferecem o sensoriamento e a capacidade de atuação.

5.2.1 Módulo Controlador

O módulo controlador para um agente robótico do tipo *Pioneer P3-DX*, irá implementar as leis de controle (4.2) ou (4.14), a linearização por entrada-saída (5.8) e a transformação para comando de velocidade das rodas (5.2). A Figura 5.4 apresenta o esquema de funcionamento do módulo controlador.

Figura 5.4 – Diagrama do módulo controlador



Este módulo controlador foi implementado como uma classe em linguagem *Python* de forma que as entradas e saídas são sinais passados por meio de tópicos de comunicação no *ROS*. Desta forma o controlador se inscreve e escuta[1] os sinais de entrada e publica os sinais de saída. Além da implementação em forma de classe, o módulo também recebe um arquivo de configuração que descreve os seus parâmetros de entrada, desta forma o código adquire uma característica modular e reaproveitável.

[1] O termo *escutar* refere-se ao ato de o controlador se inscrever em um tópico e responder executando uma função *callback* sempre que uma nova mensagem é publicada nesse tópico.

Os sinais de entrada do sistema são[2]:

- **Sinal de Formação**

  Tópico: $p\{i\}$*_formation_signal*.

  Este tópico é responsável por passar o sinal de formação h_i ou $h_i(t)$ para o agente. Cada agente só precisa receber o próprio sinal de formação.

- **Medição sensorial**

  Tópico: $p\{i\}$*_pose_vel_measure*.

  Este tópico é responsável por passar os sinais de sensoriamento do robô. São medidas as posições $\mathbf{x}_i(t)$ e $\mathbf{y}_i(t)$, a orientação ψ_i, as velocidades lineares $\mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t)$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t)$ e a velocidade angular $\mathbf{w}(t)$. Neste trabalho esta informação será passada diretamente pelo simulador, porém em uma aplicação robótica real a localização poderia ser inferida por meio de outros sensores, como GPS, processamento de imagens provenientes de câmeras ou sensores inerciais.

- **Erro de Formação dos Agentes Vizinhos**

  Tópico: $p\{j\}$*_formation_error*.

  O agente i recebe os sinal de erro de formação dos agentes j que são seus vizinhos ($e_{y_j}(t)$).

Os sinais de saída gerados pelo controlador são:

- **Entrada de controle das rodas**

  Tópico: $p\{i\}$*_wheels_reference*.

  O módulo controlador gera os sinais de velocidade angular das rodas do robô $\mathbf{w}_{\mathbf{D}i}(t)$ e $\mathbf{w}_{\mathbf{E}i}(t)$.

- **Erro de Formação para os Agentes Vizinhos**

  Tópico: $p\{i\}$*_formation_error*.

  O agente i manda o sinal do seu erro de formação para os seus agentes vizinhos j ($e_{y_i}(t)$).

Além das entradas e saídas implementadas em tópicos *ROS*, o módulo controlador também recebe parâmetros de inicialização por meio de um arquivo de configuração, são eles:

[2] A notação $\{i\}$ e $\{j\}$ deve ser substituída pela identificação dos agentes, isto é, $\{i\} = 1, 2, ...$ e $\{j\} = 1, 2, ...$

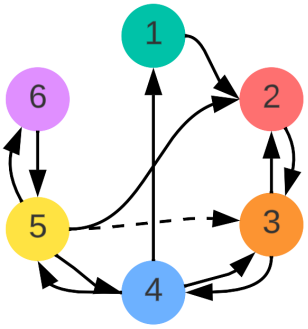
- *Id* do agente (número de identificação);
- Nome do tópico de sensoriamento;
- Nome do tópico de sinal de formação;
- Lista de vizinhos com nome de seus tópicos de erro de formação e indicador de incerteza;
- Nome do tópico de envio de atuação das rodas;
- Nome do tópico de envio de sinal de erro de formação;
- Parâmetros do modelo dinâmico do robô;
- Ganhos do controlador (A_c, B_c, C_c, D_c);
- Modelo dinâmico do agente (A, B_u, B_w, C_y, D_y).

OBSERVAÇÃO 5.1 Para modelar a incerteza de comunicação, o parâmetro de inicialização que descreve os vizinhos dos agentes e quais tópicos ele deve se inscrever possui um indicador de incerteza. Este indicador irá habilitar uma funcionalidade em código que, de forma aleatória com uma probabilidade determinada, irá desconsiderar o sinal de erro deste vizinho, simulando uma perda de comunicação.

5.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para comprovar o desempenho dos controladores projetados, foi implementada uma cena de simulação no simulador CoppeliaSim [70], com seis robôs do tipo *Pionner P3-DX*, já disponibilizado nativamente pela plataforma. Os controladores são executados em *scripts Python* de forma paralela e a comunicação é feita por meio de tópicos ROS. A topologia de comunicação considerada é dada pela Figura 5.5.

Figura 5.5 – Topologia de Comunicação



A incerteza de comunicação foi implementada com uma probabilidade 20% de falha na leitura do sinal de erro do robô 5 pelo robô 3. A topologia incerta 5.5, pode ser representada pela a matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{5,3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $a_{5,3} \in [0, 1]$.

Dessa forma, os vértices da notação politópica da matriz Laplaciana são

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.1 Formação Relativa e Invariante no Tempo

Para simular o comportamento de um sintema multi robôs em formação relativa e invariante no tempo, consideramos como dinâmica dos agentes o modelo linearizado do robô (5.12), configurando $\rho = 1$, com leitura de medição apenas da posição e admitindo a possi-

bilidade de distúrbios na medição de saída, logo

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_i(t). \tag{5.13}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1_i}(t) \\ y_{2_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \omega_i(t)$$

O controlador foi projetado a partir da implementação dos Teoremas 3.2 e 3.1 em um código *matlab* [57], utilizando o solver *mosek* [58], com o propósito de encontrar um controlador de ordem $n_c = 2$. As condições LMI foram factíveis e resultaram nos ganhos de controle

$$A_c = \begin{bmatrix} -5.6315 & 0.0000 \\ 0.0000 & -1.9560 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0.0033 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0019 \end{bmatrix},$$
$$C_c = \begin{bmatrix} -442.5550 & 0.0000 \\ 0.0000 & -496.6883 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} 0.6632 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.6458 \end{bmatrix}.$$

O módulo controlador foi configurado para implementar a lei de controle dada pelo Corolário 4.1 e no simulador foram realizados três experimentos.

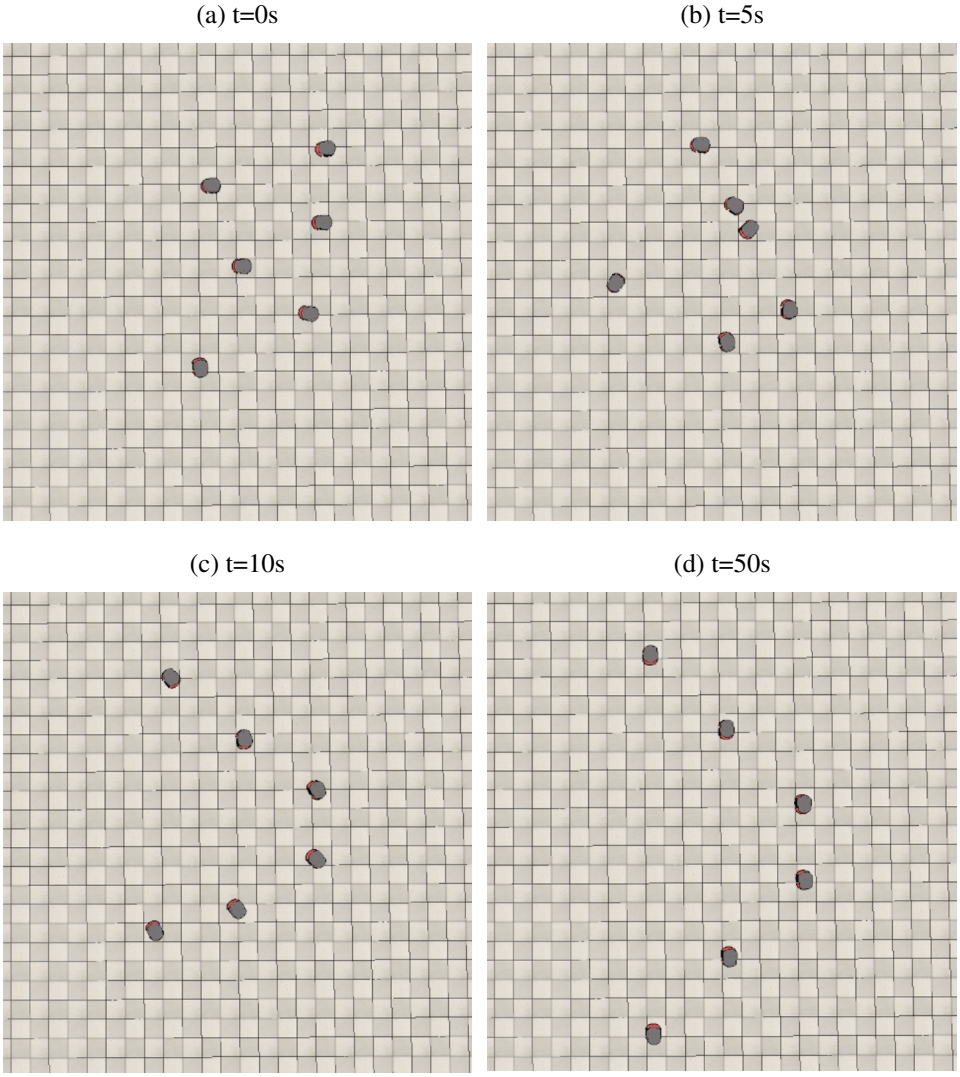
- **Experimento 1 - Formação em V**

  O primeiro experimento testou a capacidade dos robôs de chegarem a uma formação relativa em V, como é comum no comportamento de pássaros, com

  $$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad h_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad h_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

  Os agentes partiram de posições e orientações aleatórias e a evolução da simulação pode ser verificada na sequencia de imagens da Figura 5.6

Figura 5.6 – Evolução da formação em V



As Figuras 5.7 e 5.8 mostram como foi a evolução da posição e do erro de formação de saída dos robôs, respectivamente.

Figura 5.7 – Evolução da posição dos robôs para formação em V

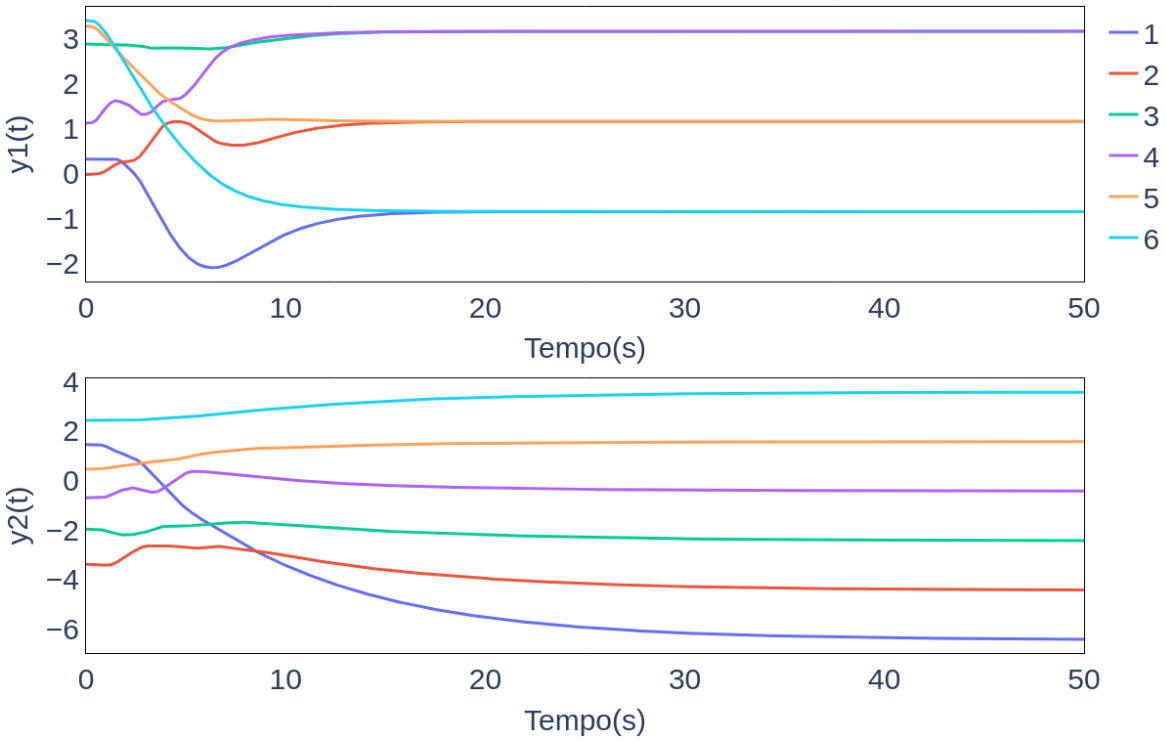
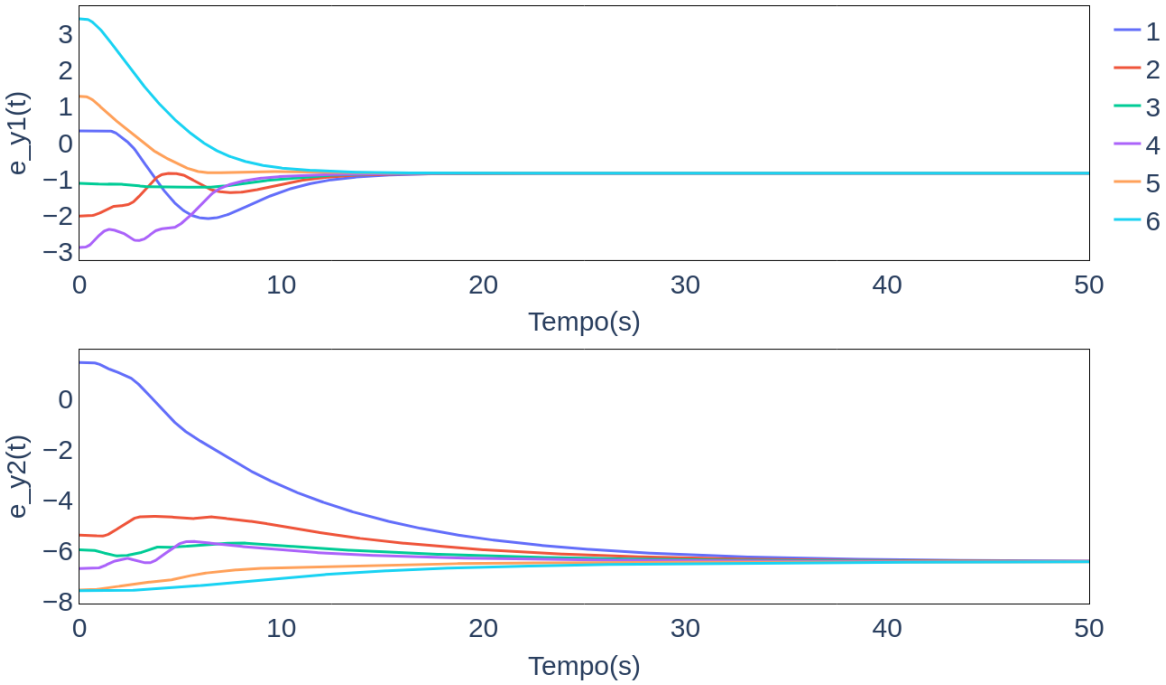


Figura 5.8 – Evolução do erro de formação de saída para formação em V



- **Experimento 2 - Formação Retângulo**

  O segundo experimento testou a capacidade dos robôs chegarem a uma formação relativa em forma de retângulo, com sinais

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad h_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad h_6 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

  A Figura 5.9 mostra as configurações iniciais e finais dos agentes, já as Figuras 5.10 e 5.11 mostram a evolução da posição e do sinal de erro de formação ao longo do tempo, respectivamente.

Figura 5.9 – Formação retângulo

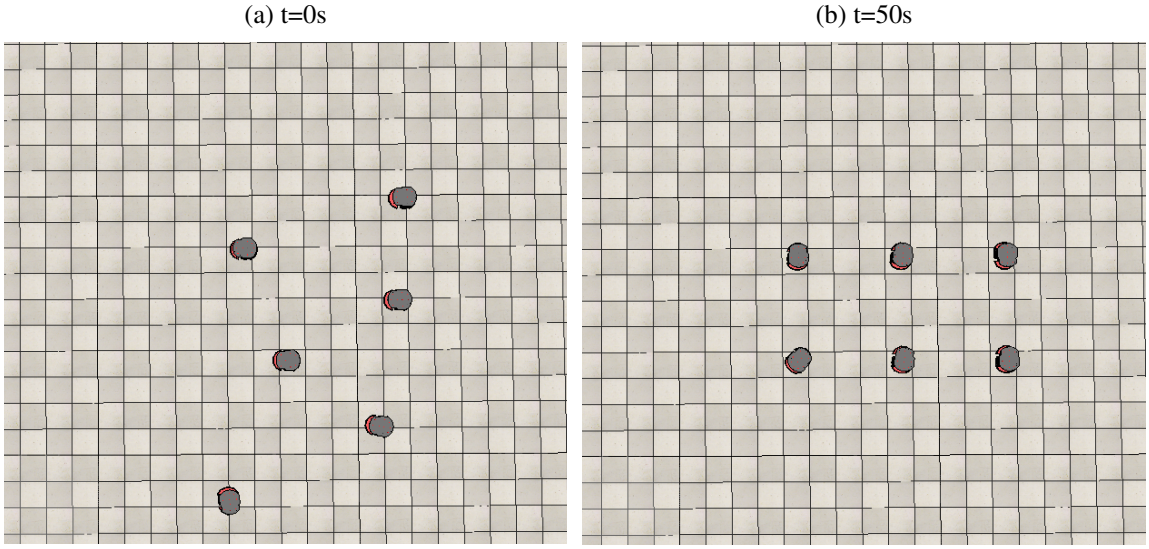


Figura 5.10 – Evolução da posição dos robôs para formação retângulo

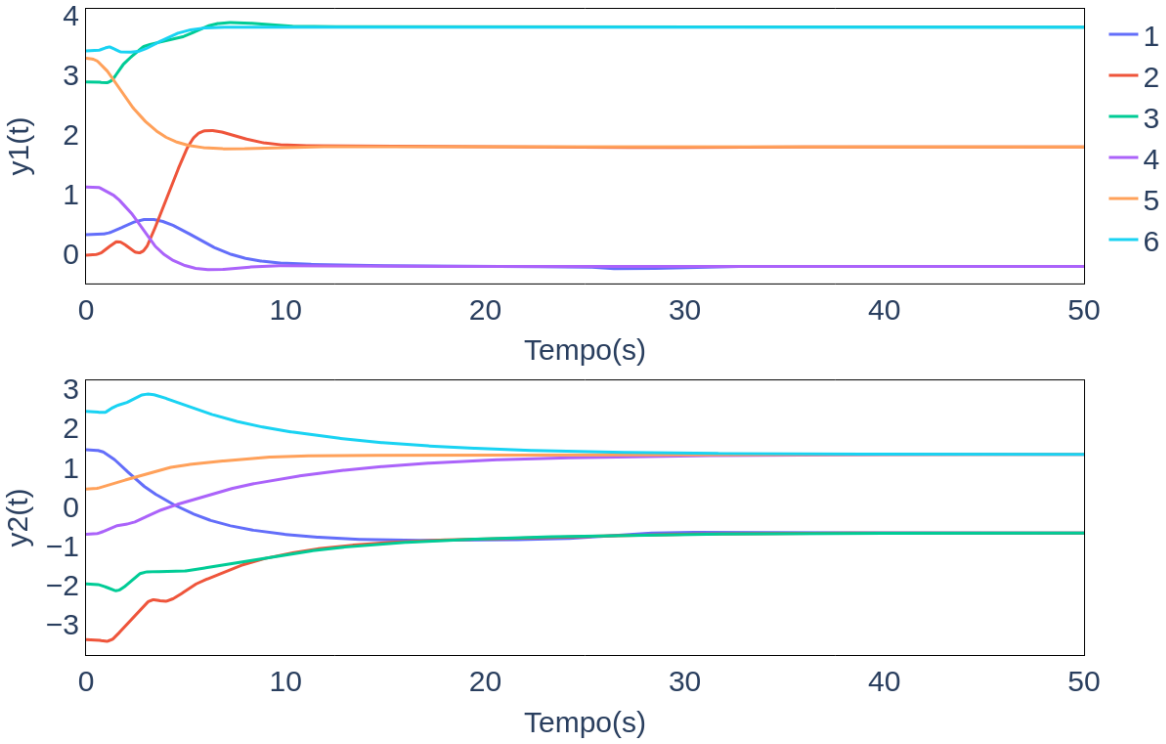
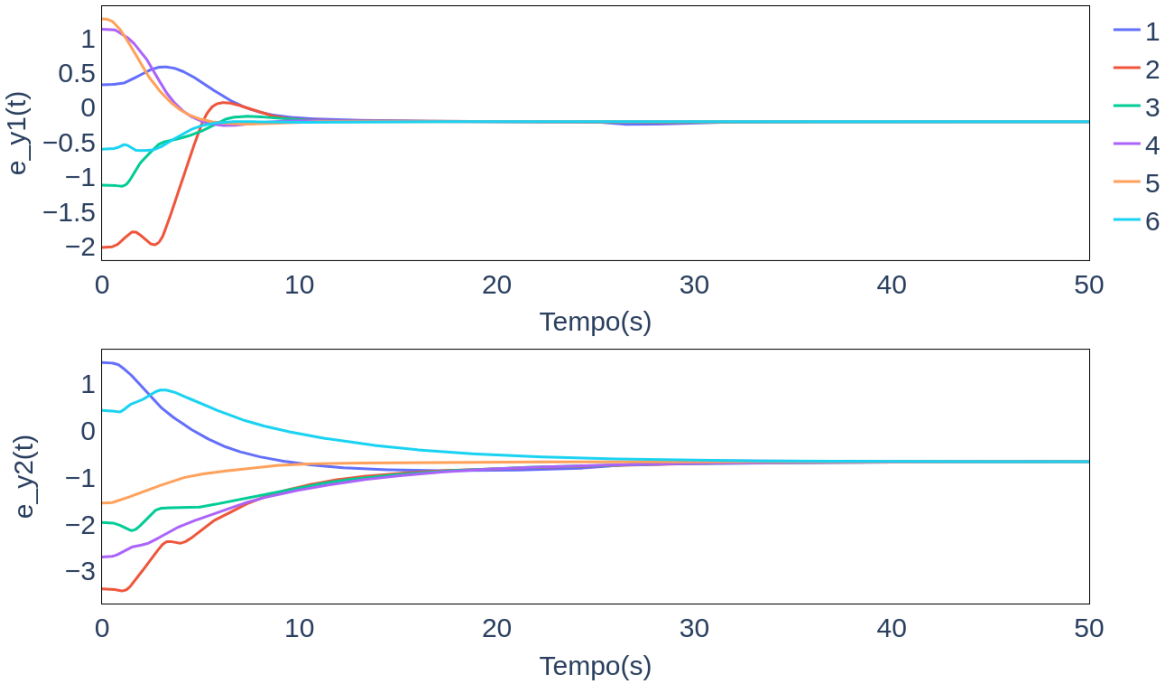


Figura 5.11 – Evolução do erro de formação de saída para formação retângulo



- **Experimento 3 - Formação Diagonal**

  O terceiro experimento testou a capacidade dos robôs chegarem a uma formação em forma de diagonal, com sinais

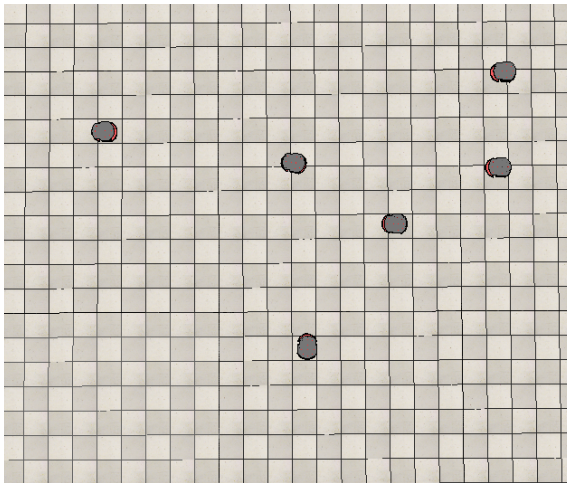
$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad h_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad h_6 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

  porém, nesta simulação, foi introduzido um erro de medição dado pelo sinal $\omega_i(t) = \tilde{A}sen(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i)$ com $A_i \in [0; 0, 1]$, $\tilde{\omega}_i \in [0; 1]$, $\tilde{\phi}_i \in [0; 2\pi]$.

  A Figura 5.12 mostra as configurações iniciais e finais dos agentes, já as Figuras 5.13 e 5.14 mostram a evolução da posição e do sinal de erro de formação ao longo do tempo, respectivamente.

Figura 5.12 – Evolução da formação em diagonal

(a) t=0s



(b) t=50s

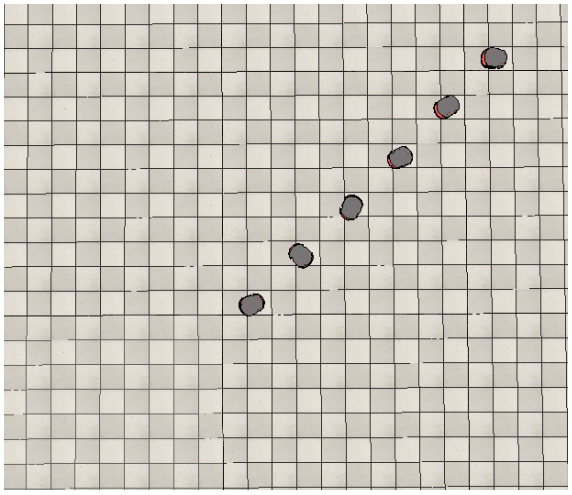


Figura 5.13 – Evolução da posição dos robôs para formação diagonal

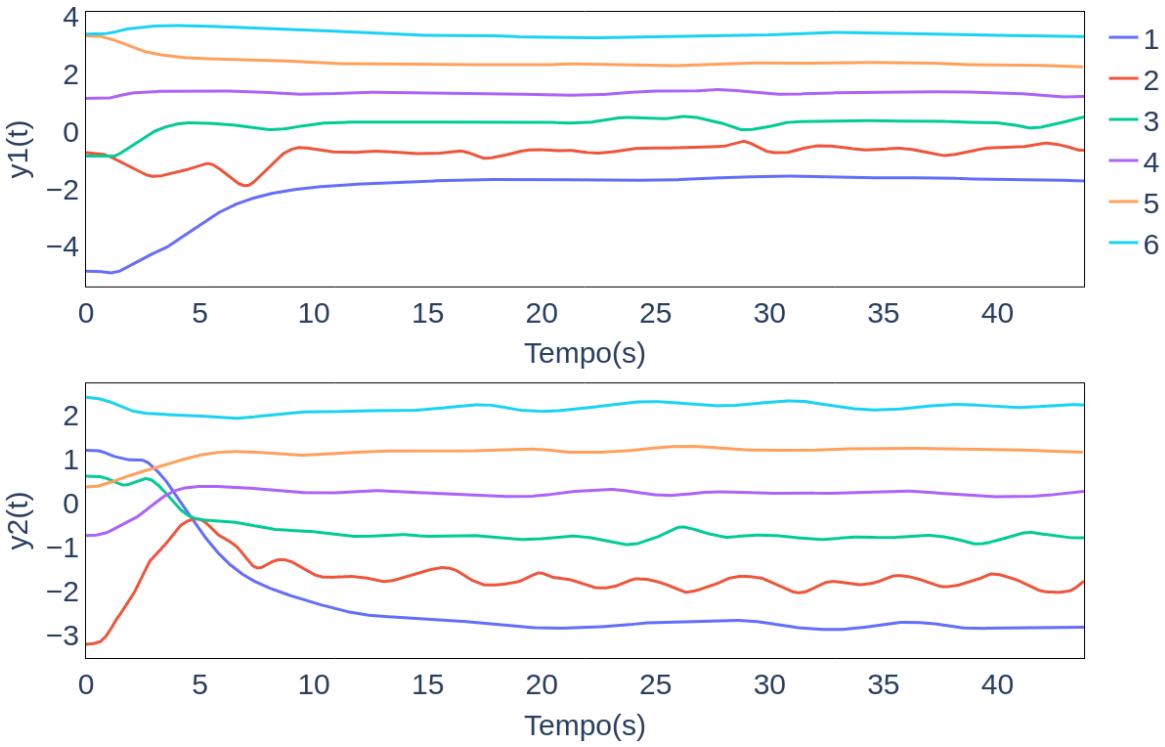
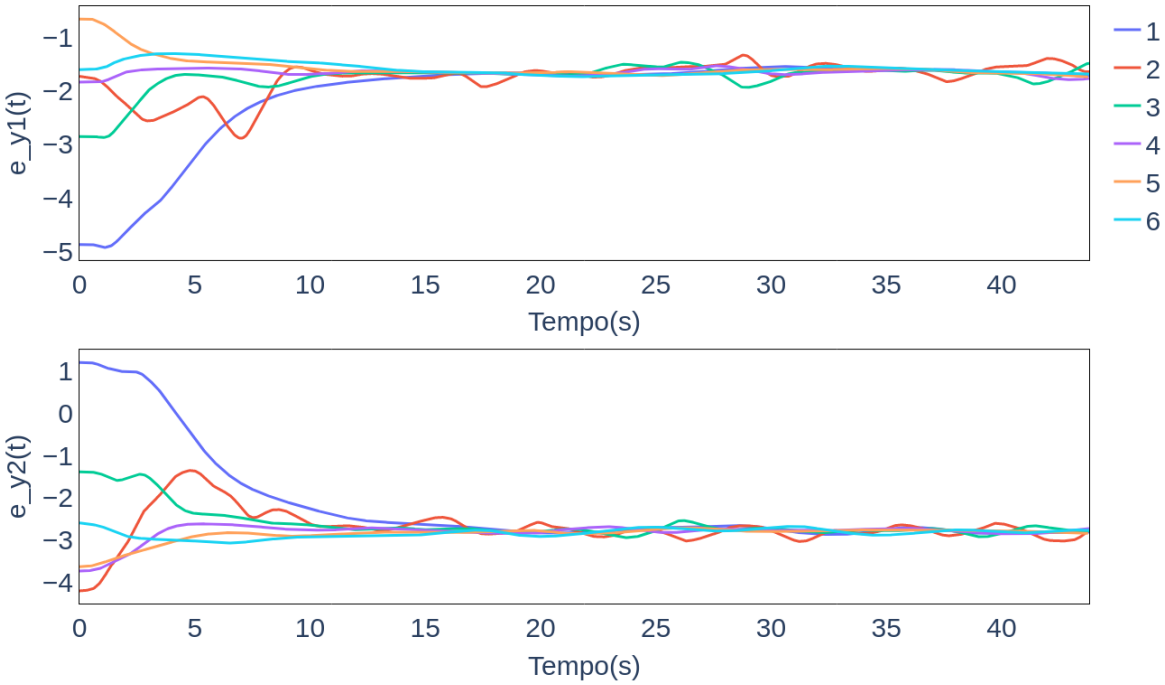


Figura 5.14 – Evolução do erro de formação de saída para formação diagonal



Analisando as Figuras 5.6, 5.9 e 5.12, observamos que o controlador desenvolvido com base nos Teoremas 3.1 e 3.2, juntamente com a implementação da lei de controle proposta no Corolário 4.1, provou ser eficaz no controle de várias configurações de formação em um conjunto de robôs móveis do tipo *Pioneer P3-DX*, mesmo diante de incertezas na comunicação.

As Figuras 5.8 e 5.10 mostram que os agentes alcançaram consenso em relação ao erro de saída. No entanto, é importante observar que esse erro não tende a zero, conforme explicado na Observação 4.1, caracterizando a formação como relativa entre os robôs.

No Experimento 3, pode-se observar, por meio do gráfico da Figura 5.14, que mesmo sob a influência de distúrbios na medição das posições, o controlador foi capaz de manter um consenso robusto, garantindo um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ limitado.

Portanto, é possível concluir que o método proposto para a realização de formação relativa e invariante no tempo foi efetivo.

5.3.2 Rastreamento de Formação Variante do Tempo

Para realizar o rastreamento de formação variante no tempo, a dinâmica dos agentes robóticos foi modelada a partir do modelo linearizado (5.12), configurando $\rho = 1$ e admitindo a possível influência de um distúrbio na medição das saídas. Neste exemplo será necessário realizar a medição de posição e velocidade para atender o critério da Hipótese 4.5, logo

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_i(t). \tag{5.14}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1_i}(t) \\ y_{2_i}(t) \\ y_{3_i}(t) \\ y_{4_i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}i}(t) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{y}i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \omega_i(t) \tag{5.15}$$

O controlador foi projetado a partir da implementação dos Teoremas 3.2 e 3.1 em um código *Matlab* [57], utilizando o *solver Mosek* [58], com o propósito de encontrar um controlador de ordem $n_c = 1$. As condições LMI foram factíveis e resultaram nos ganhos de controle

$$A_c = \begin{bmatrix} -1.5589 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0082 & -0.0000 & -0.2421 \end{bmatrix},$$
$$C_c = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 0.2422 \end{bmatrix}, \qquad D_c = \begin{bmatrix} 0.2195 & -0.0000 & 0.4470 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.2269 & 0.0000 & 0.6424 \end{bmatrix}.$$

O módulo controlador foi configurado para implementar a lei de controle dada pelo Corolário 4.2. Para este controlador foram simulados dois experimentos

- **Experimento 1**

  Para testar o funcionamento do controlador, os robôs foram configurados para executar uma formação de ciranda dada por

  $$h_i(t) = \begin{bmatrix} r\cos(\bar{\omega}t + i\frac{\pi}{3}) \\ r\sin(\bar{\omega}t + i\frac{\pi}{3}) \\ -r\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t + i\frac{\pi}{3}) \\ r\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t + i\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

  com $r = 3m$ e $\tilde{\omega} = 0.2rad/s$ para o caso em que não há distúrbios atuando na medição.

  A Figura 5.15 mostra a trajetória percorrida pelos agentes no plano $x \times y$ ao longo do tempo, já as Figuras 5.16 e 5.17 mostram a evolução da posição e do sinal de erro de formação para posição, respectivamente.

Figura 5.15 – Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação ciranda

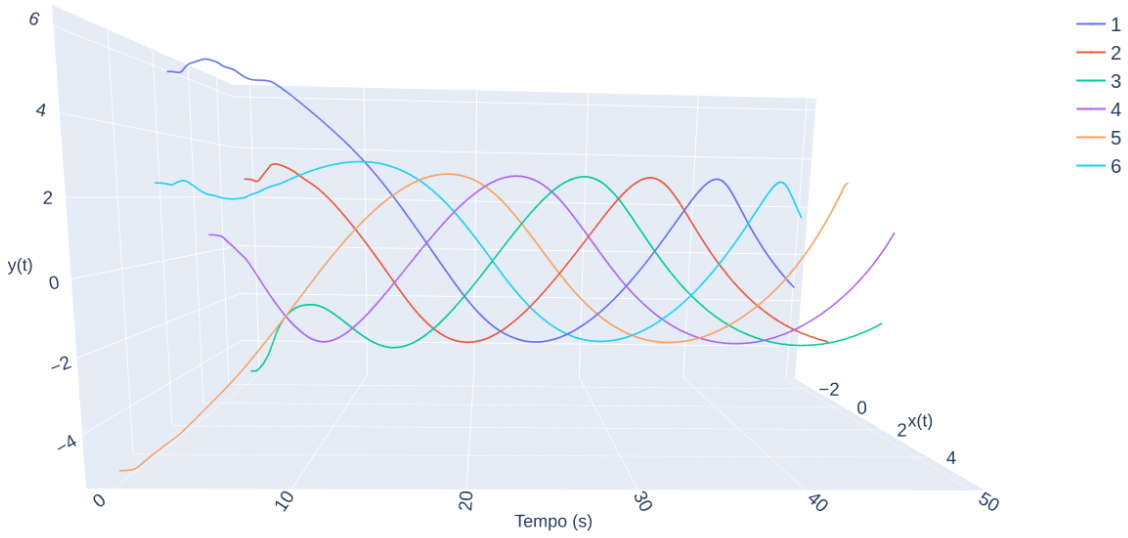


Figura 5.16 – Evolução da posição para a formação ciranda

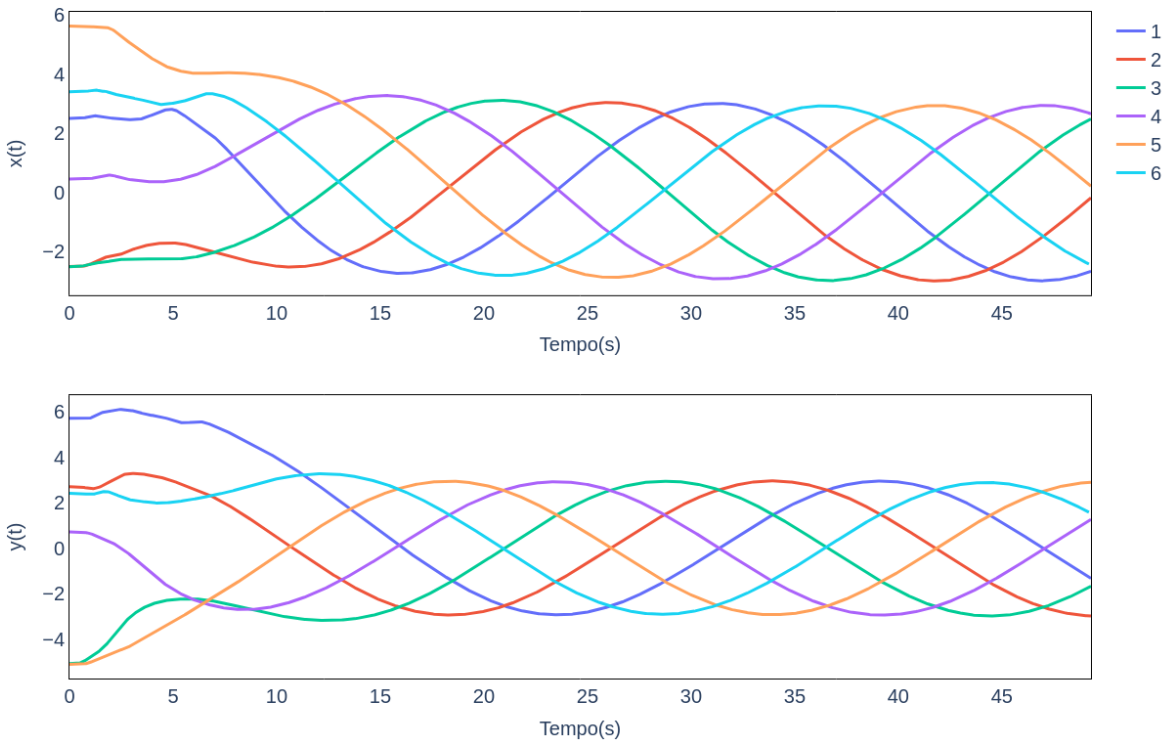
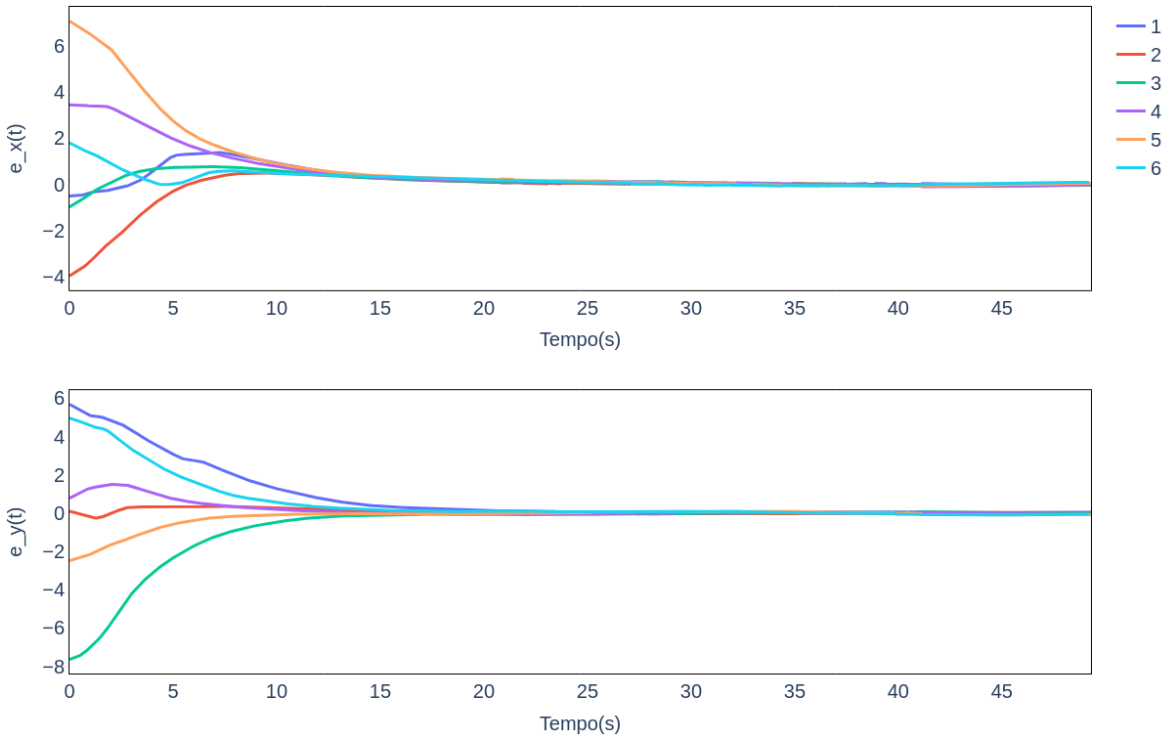


Figura 5.17 – Evolução do erro de formação de posição para a formação ciranda



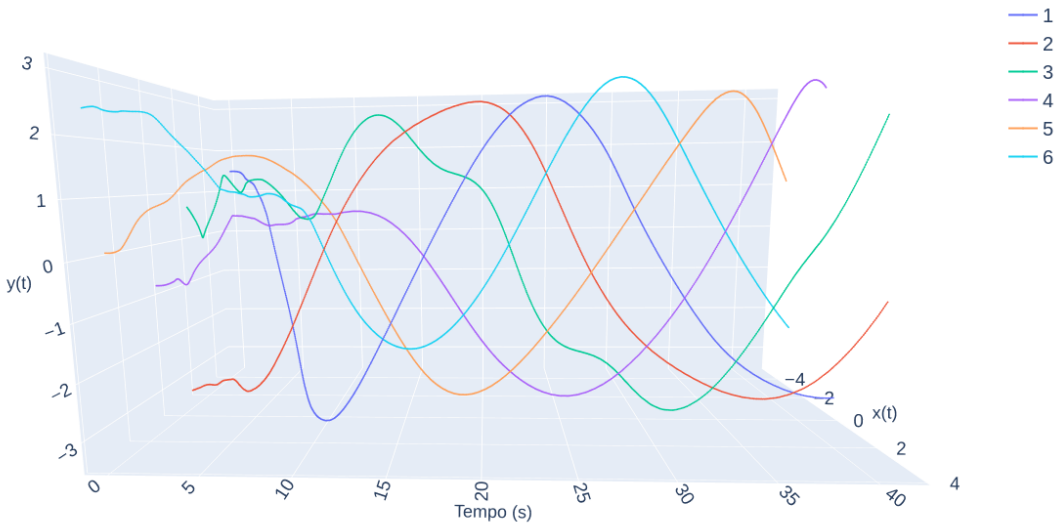
OBSERVAÇÃO 5.2 Verifica-se na Figura 5.17 que os robôs conseguiram executar a formação ciranda e que o erro de formação $e_y(t)$ é zerado ao longo do tempo.

- **Experimento 2**

  O segundo experimento repete a formação de ciranda (5.16) porém agora foram implementados distúrbios na medição de posição dos robôs, modelados pelo sinal $\omega_i(t) = \tilde{A}sen(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i)$ com $A_i \in [0; 0, 1]$, $\tilde{\omega}_i \in [0; 1]$, $\tilde{\phi}_i \in [0; 2\pi]$.

  A Figura 5.18 mostra a trajetória percorrida pelos agentes no plano $x \times y$ ao longo do tempo, já as Figuras 5.19 e 5.20 mostram a evolução da posição e do sinal de erro de formação para posição, respectivamente.

Figura 5.18 – Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação ciranda com distúrbios



OBSERVAÇÃO 5.3 Note na Figura 5.18 que, entre $5s \leq t \leq 10s$, houve uma colisão entre os agentes 3 e 6.

A análise da Figura 5.20 mostra que apesar do distúrbio associado a medição das posições x e y, o sistema é capaz de perseguir o consenso, mantendo um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ limitado.

Os resultados destes experimentos validam a lei de controle proposta no Corolário 4.2 e o projeto de controlador para rastreamento de posição a partir do protocolo de projeto de controle de consenso dados nos Teoremas 3.1 e 3.2.

A limitação deste controlador para a aplicação em sistemas de múltiplos robôs móveis é a ausência de prevenção de colisão que pode ou não ocorrer, dependendo das condições iniciais, das incertezas na comunicação e dos sinais de distúrbios que atual na dinâmica dos agentes.

Figura 5.19 – Evolução da posição para a formação ciranda com distúrbios

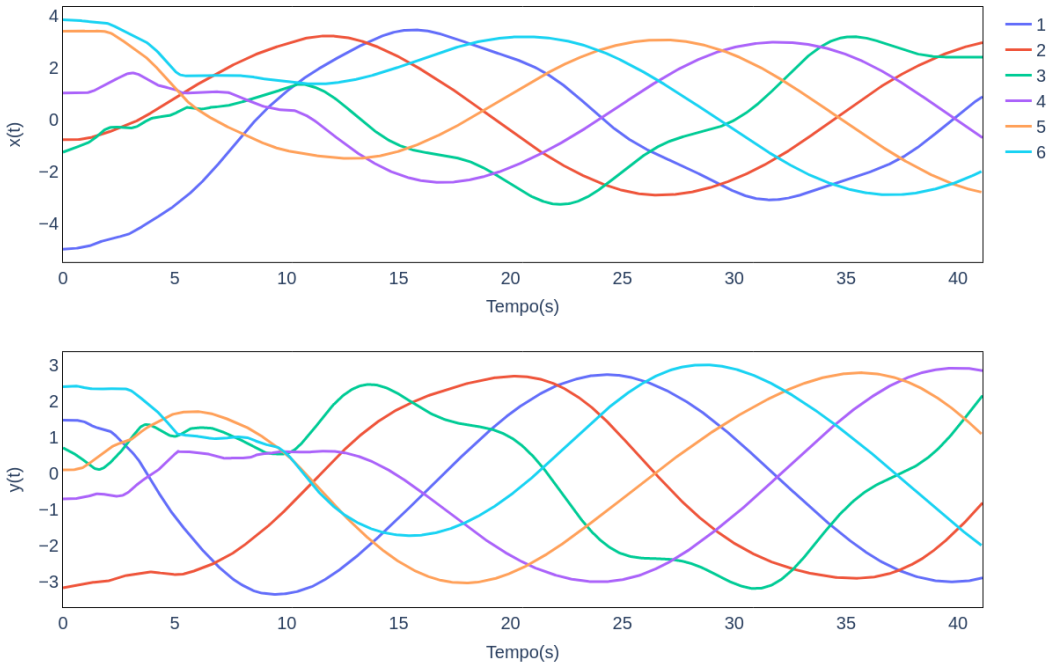
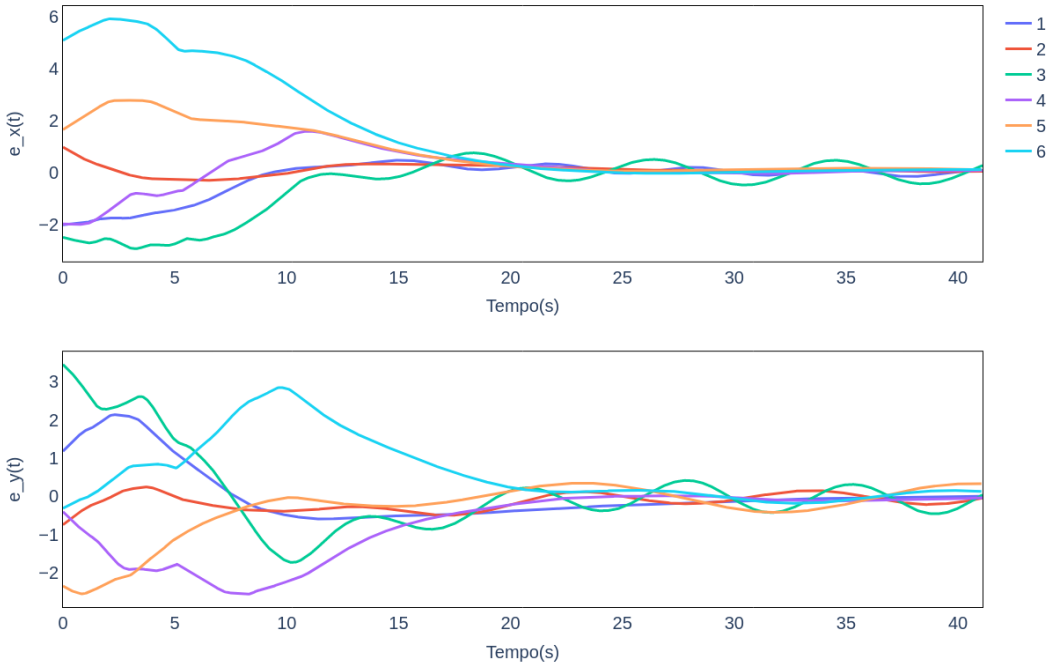


Figura 5.20 – Evolução do erro de formação de posição para a formação ciranda com distúrbios



Por fim, foi realizado um último experimento, onde foi proposto um controlador estático, ou seja, com $n_c = 0$, para solucionar o problema de rastreamento da formação. Para projetá-lo,

foram implementadas as condições *LMI* simplificadas (3.25) e (3.26) em um código *Matlab* utilizando o *solver Mosek*, com a mesma topologia de comunicação incerta dada pela Figura 4.8. O ganho de controlador estático encontrado foi

$$D_c = \begin{bmatrix} 0.2109 & -0.0000 & 0.3936 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.2109 & -0.0000 & 0.3936 \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

- **Experimento 3**

  O terceiro experimento repete a formação de ciranda (5.16) com distúrbios na medição de posição dos robôs, modelados pelo sinal $\omega_i(t) = \tilde{A}sen(\tilde{\omega}_i t + \tilde{\phi}_i)$ com $A_i \in [0; 0,1]$, $\tilde{\omega}_i \in [0; 1]$, $\tilde{\phi}_i \in [0; 2\pi]$.

  A Figura 5.21 mostra a trajetória percorrida pelos agentes no plano $x \times y$ ao longo do tempo, já as Figuras 5.22 e 5.23 mostram a evolução da posição e do sinal de erro de formação para posição, respectivamente.

Figura 5.21 – Trajetória dos robôs para o rastreamento da formação com controlador estático

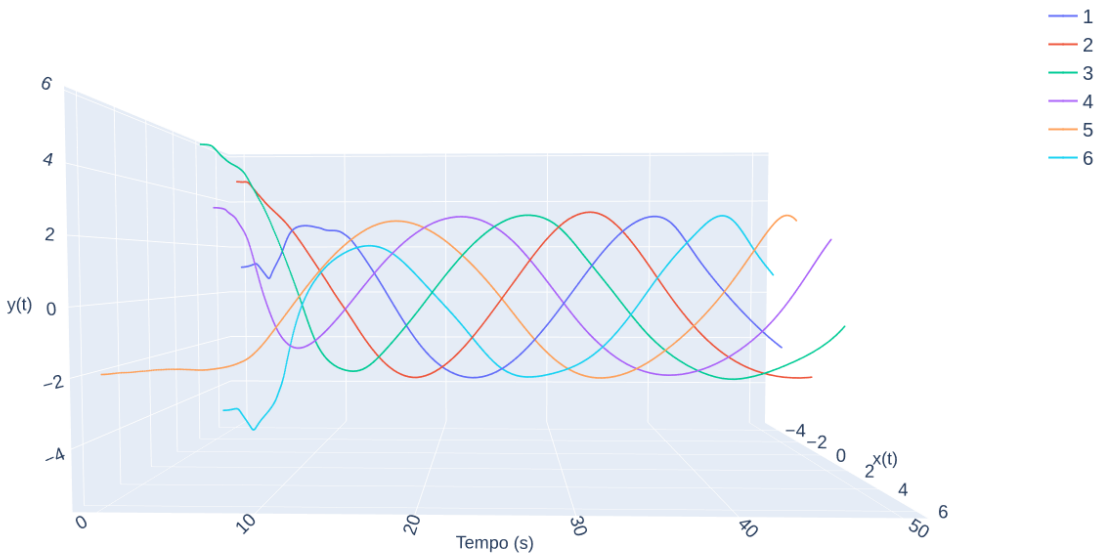


Figura 5.22 – Evolução da posição para a formação com controlador estático

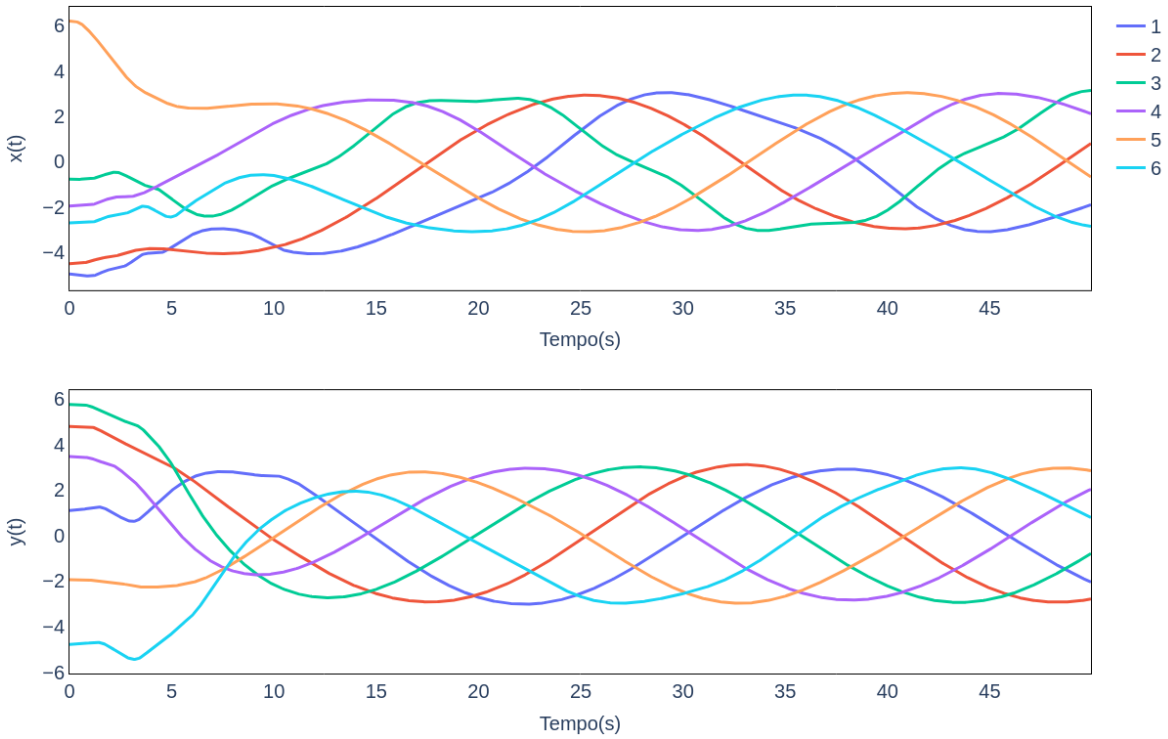
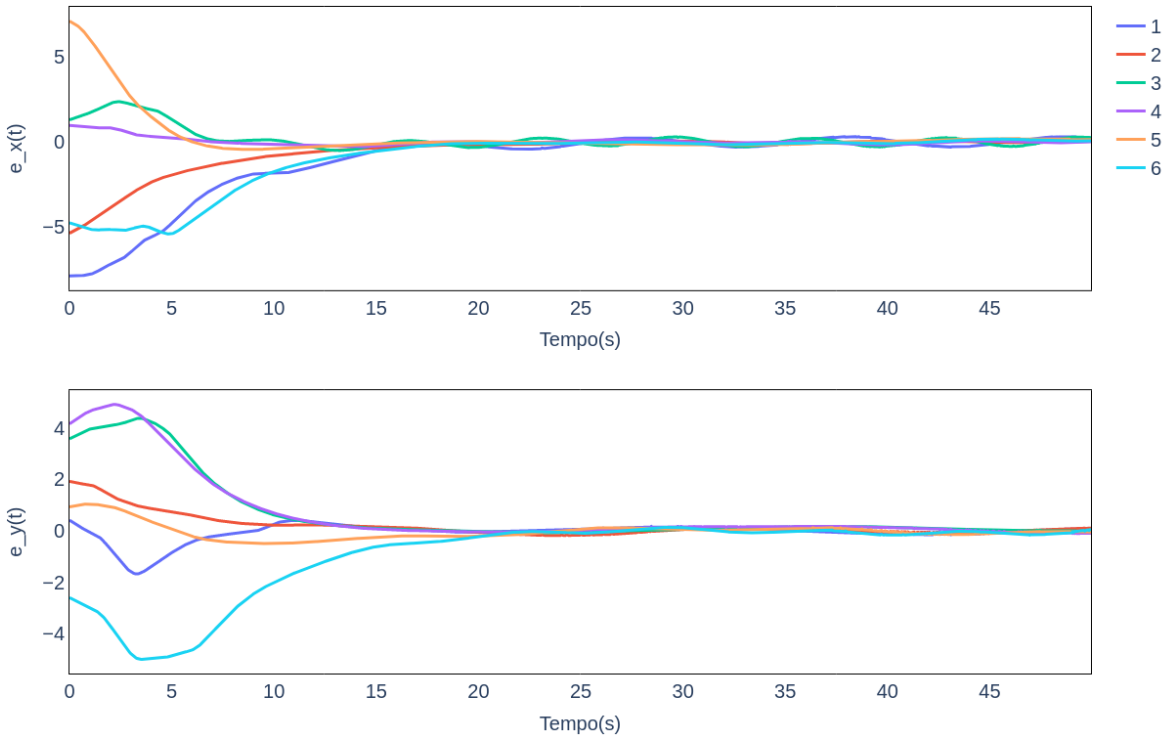


Figura 5.23 – Evolução do erro de formação de posição para a formação com controlador estático



A análise das Figuras 5.21, 5.22 e 5.23 mostra que, assim como o controlador dinâmico, o controlador estático também foi capaz de realizar o controle de formação robusto dos agentes, mesmo com a atuação de distúrbios associados a medição das posições x e y e incertezas na comunicação.

Desta forma, foi possível validar o projeto de controle para rastreamento de formação variante no tempo por meio de controladores distribuídos estáticos ou dinâmicos que garantem o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas multiagentes robóticos.

6 CONCLUSÃO

Sistemas multiagentes são compostos por entidades autônomas e inteligentes, extremamente versáteis com uma ampla aplicação em robótica cooperativa. Neste estudo, o foco principal foi desenvolver leis de controle capazes de resolver o problema de formação de um sistema multi-robôs. Entre as principais contribuições deste trabalho podemos citar:

- O desenvolvimento de uma nova técnica para projeto de controladores distribuídos a partir desigualdade de matrizes lineares que criam condições suficientes para garantir o consenso robusto de sistemas multiagentes, abrangendo casos de controladores estáticos, com ordem reduzida ou completa, levando em consideração a possível presença de entradas de distúrbios atuando na dinâmica dos agentes ou na medição de saídas e também possíveis incertezas na topologia de comunicação direcionada entre os agentes. Esta pesquisa resultou na publicação do artigo [73].

- Desenvolvimento de lei de controle para viabilizar o controle robusto de formação relativa e invariante no tempo em sistemas multiagentes, também sujeitos a sinais de distúrbios e comunicação incerta. A elaboração do controlador para este cenário surgiu a partir de uma interpretação do problema de formação como um problema de consenso, culminando na formulação do Corolário 4.1.

- Desenvolvimento de lei de controle para possibilitar o controle robusto de rastreamento de formação variante no tempo em sistemas multiagentes nos quais não há líderes, considerando agentes sujeitos a distúrbios e incertezas na topologia da rede direcional de comunicação. O projeto de controlador nesse cenário também se originou de uma interpretação do problema de consenso e estabeleceu as premissas que possibilitam a aplicação dessa teoria para o rastreamento de formação variável ao longo do tempo, resultando no Corolário 4.2.

- Desenvolvimento de dois módulos de controle em linguagem *Python* utilizando o *framework* de comunicação *ROS* aplicando dos protocolos de consenso para formação relativa e invariante, assim como para rastreamento de formação variante no tempo, com o propósito de controlar um sistema multiagente de robôs móveis diferenciais.

A validação prática desses controladores e leis de controle foi realizada por meio de simulações numéricas e testes na plataforma de simulação robótica *CoppeliaSim* com o modelo de robô diferencial *Pioneer P3-DX*.

Os resultados obtidos confirmaram a viabilidade e eficácia dos controladores de consenso robusto para a realização do controle de formação em sistemas multiagente. Foi evidenciado

que, no caso de formação relativa e invariante no tempo, os agentes conseguiram alcançar um consenso robusto em relação ao erro de saída. Além disso, no contexto do rastreamento de formação variante no tempo, o erro tende a zero na ausência de distúrbios ou mantém um desempenho $\mathcal{H}_\infty$ limitado quando confrontado com entradas de distúrbios.

É importante ressaltar que este estudo apresenta limitações, como a falta de consideração para prevenção de colisões entre os agentes e a restrição ao caso de agentes homogêneos, sem dinâmicas incertas. Como perspectivas futuras, visamos ampliar essas técnicas para abranger dinâmicas heterogêneas e incertas, bem como integrar estratégias para a prevenção de colisões, a fim de aprimorar ainda mais a aplicabilidade e a robustez do sistema proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Faccio, I. Granata, A. Menini, M. Milanese, C. Rossato, M. Bottin, R. Minto, P. Pluchino, L. Gamberini, G. Boschetti *et al.*, "Human factors in cobot era: A review of modern production systems features," *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 34, no. 1, pp. 85–106, 2023.

[2] O. P. Mahela, M. Khosravy, N. Gupta, B. Khan, H. H. Alhelou, R. Mahla, N. Patel, and P. Siano, "Comprehensive overview of multi-agent systems for controlling smart grids," *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 115–131, 2022.

[3] M. P. Hernández, D. McFarlane, M. Herrera, A. K. Jain, and A. K. Parlikad, "Comparing agent-based control architectures for next generation telecommunication network infrastructures," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 11 062–11 067, 2020, 21st IFAC World Congress. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320305127

[4] M. Davoodi, S. Faryadi, and J. M. Velni, "A graph theoretic-based approach for deploying heterogeneous multi-agent systems with application in precision agriculture," *Journal of intelligent & robotic systems*, vol. 101, pp. 1–15, 2021.

[5] J. Kruse, A. M. Connor, and S. Marks, "An interactive multi-agent system for game design," *The Computer Games Journal*, vol. 10, pp. 41–63, 2021.

[6] M. A. Kamel, X. Yu, and Y. Zhang, "Formation control and coordination of multiple unmanned ground vehicles in normal and faulty situations: A review," *Annual Reviews in Control*, vol. 49, pp. 128–144, 2020. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1367578820300031

[7] J. Qin, Q. Ma, Y. Shi, and L. Wang, "Recent advances in consensus of multi-agent systems: A brief survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 6, pp. 4972–4983, 2017.

[8] J. Feddema, R. Robinett, and R. Byrne, "An optimization approach to distributed controls of multiple robot vehicles," 09 2023.

[9] L. Hardesty, "Helping robots put it all together," May 2015. [Online]. Available: https://news.mit.edu/2015/assembly-algorithm-for-autonomous-robots-0527

[10] L. Ji, C. Wang, C. Zhang, H. Wang, and H. Li, "Optimal consensus model-free control for multi-agent systems subject to input delays and switching topologies," *Information Sciences*, vol. 589, pp. 497–515, Apr. 2022. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025521013463

[11] Y. Wang, Z. Cheng, and M. Xiao, "UAVs' formation keeping control based on multi–agent system consensus," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 49 000–49 012, 2020.

[12] A. Sujil, J. Verma, and R. Kumar, "Multi agent system: concepts, platforms and applications in power systems," *Artificial Intelligence Review*, vol. 49, no. 2, pp. 153–182, 2018.

[13] D. Li, S. S. Ge, W. He, G. Ma, and L. Xie, "Multilayer formation control of multi-agent systems," *Automatica*, vol. 109, p. 108558, 2019.

[14] A. Parivallal, R. Sakthivel, and C. Wang, "Output feedback control for bipartite consensus of nonlinear multi-agent systems with disturbances and switching topologies," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 589, p. 126589, 2022. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437121008608

[15] Y. Liu and X. Hou, "Event-triggered consensus control of disturbed multi-agent systems using output feedback," *ISA transactions*, vol. 91, pp. 166–173, 2019.

[16] X. Li, Y. C. Soh, and L. Xie, "A novel reduced-order protocol for consensus control of linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, no. 7, pp. 3005–3012, July 2019.

[17] Z. Chen and X. Li, "Time-varying output formation control based on a reduced-order output-feedback protocol," in *2022 41st Chinese Control Conference (CCC)*, 2022, pp. 5002–5007.

[18] Y. Liu and Y. Jia, "H_∞ consensus control of multi-agent systems with switching topology: a dynamic output feedback protocol," *International Journal of Control*, vol. 83, no. 3, pp. 527–537, Mar. 2010. [Online]. Available: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207170903267039

[19] J. Hu, P. Bhowmick, and A. Lanzon, "Distributed Adaptive Time-Varying Group Formation Tracking for Multiagent Systems With Multiple Leaders on Directed Graphs," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 140–150, Mar. 2020. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/8700227/

[20] X. Li, Y. C. Soh, and L. Xie, "Robust consensus of uncertain linear multi-agent systems via dynamic output feedback," *Automatica*, vol. 98, pp. 114–123, 2018.

[21] B. M. Silva, J. Y. Ishihara, and E. S. Tognetti, "LMI-based consensus of linear multi-agent systems by reduced-order dynamic output feedback," *ISA transactions*, 2022.

[22] Y. Liu and Y. Jia, "H_∞ Consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol," *International Journal of Control*, vol. 83, no. 3, pp. 527–537, 2010.

[23] X. Xue, C. Yuan, and F. Wu, "Convexified H_∞ output-feedback consensus synthesis for linear multi-agent systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 13, no. 11, pp. 1619–1628, 2019.

[24] C.-E. Ren, T. Du, G. Li, and Z. Shi, "Disturbance observer-based consensus control for multiple robotic manipulators," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 51 348–51 354, 2018.

[25] J. G. Romero, E. Nuño, E. Restrepo, and I. Sarras, "Global Consensus-based Formation Control of Nonholonomic Mobile Robots with Time-Varying Delays and without Velocity Measurements," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1–8, 2023. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/10093968/

[26] X. Xue, F. Wu, and C. Yuan, "Robust consensus for linear multi-agent systems with structured uncertainties," *International Journal of Control*, pp. 1–12, 2019.

[27] X. Liu, Y. Xie, F. Li, T. Huang, W. Gui, and W. Li, "Admissible H_∞ control of linear descriptor multi-agent systems with external disturbances," *Neurocomputing*, vol. 359, pp. 241–248, 2019.

[28] J. Chen, Z. Shi, and Y. Zhong, "Robust output formation control for uncertain multi-agent systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 51, no. 13, pp. 2456–2470, 2020.

[29] R. R. Nair, L. Behera, and S. Kumar, "Event-triggered finite-time integral sliding mode controller for consensus-based formation of multirobot systems with disturbances," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 27, no. 1, pp. 39–47, 2019.

[30] X. Li, Y. C. Soh, and L. Xie, "Output-feedback H_∞ consensus of linear multi-agent systems over general directed graphs," in *2017 13th IEEE International Conference on Control Automation (ICCA)*, 2017, pp. 689–694.

[31] B. Ning, Q.-L. Han, and Q. Lu, "Fixed-Time Leader-Following Consensus for Multiple Wheeled Mobile Robots," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 10, pp. 4381–4392, Oct. 2020. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/8933049/

[32] D. Han, G. Chesi, and Y. S. Hung, "Robust consensus for a class of uncertain multi-agent dynamical systems," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 306–312, 2013.

[33] W. Huang, J. Zeng, and H. Sun, "Robust consensus for linear multi-agent systems with mixed uncertainties," *Systems & Control Letters*, vol. 76, pp. 56–65, 2015.

[34] W. Huang, Y. Huang, and S. Chen, "Robust consensus control for a class of second-order multi-agent systems with uncertain topology and disturbances," *Neurocomputing*, vol. 313, pp. 426–435, 2018.

[35] X. Wang, H. Wang, C. Li, T. Huang, and J. Kurths, "Improved consensus conditions for multi-agent systems with uncertain topology: The generalized transition rates case," *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 7, no. 3, pp. 1158–1169, 2020.

[36] C. M. Agulhari, R. C. Oliveira, and P. L. Peres, "LMI relaxations for reduced-order robust H_∞ control of continuous-time uncertain linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 6, pp. 1532–1537, 2011.

[37] W. Ren and E. Atkins, "Distributed multi-vehicle coordinated controlvia local information exchange," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, no. 10-11, pp. 1002–1033, Jul. 2007. [Online]. Available: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/rnc.1147

[38] T. Yang, S. Yu, and Y. Yan, "Formation control of multiple underwater vehicles subject to communication faults and uncertainties," *Applied Ocean Research*, vol. 82, pp. 109–116, Jan. 2019. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S014111871830484X

[39] J. Duan, G. Duan, S. Cheng, S. Cao, and G. Wang, "Fixed-time time-varying output formation–containment control of heterogeneous general multi-agent systems," *ISA Transactions*, vol. 137, pp. 210–221, Jun. 2023. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0019057823000083

[40] R. Wang, "Distributed Time-Varying Output Formation Tracking Control for General Linear Multi-Agent Systems With Multiple Leaders and Relative Output-Feedback," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 59 586–59 596, 2021. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/9405623/

[41] S. Zuo, Y. Song, F. L. Lewis, and A. Davoudi, "Time-Varying Output Formation Containment of General Linear Homogeneous and Heterogeneous Multiagent Systems," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 537–548, Jun. 2019. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/8384027/

[42] Y. Zhao, R. Liu, X. Chen, and Y. Fan, "Time-varying formation of discrete-time heterogeneous multi-agent systems with non-uniform communication delay and switching topology," in *2022 34th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Hefei, China: IEEE, Aug. 2022, pp. 4737–4744. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/10034410/

[43] R. Wang, “Adaptive output-feedback time-varying formation tracking control for multi-agent systems with switching directed networks,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 1, pp. 551–568, Jan. 2020. [Online]. Available: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0016003219308816

[44] X. Liu, F. Deng, W. Wei, and F. Wan, “Formation Tracking Control of Networked Systems With Time-Varying Delays and Sampling Under Fixed and Markovian Switching Topology,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 601–612, Jun. 2022. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/9735400/

[45] M. Babahaji, E. Firouzmand, A. Aghdam, and H. A. Talebi, “Consensus Control of Multi-Agent Systems With Uncertain Communication Links,” in *2022 IEEE International Conference on Wireless for Space and Extreme Environments (WiSEE)*. Winnipeg, MB, Canada: IEEE, Oct. 2022, pp. 93–98. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/9926901/

[46] R. Afdila, F. Fahmi, and A. Sani, “Distributed formation control for groups of mobile robots using consensus algorithm,” *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, vol. 12, no. 4, pp. 2095–2104, Aug. 2023. [Online]. Available: https://beei.org/index.php/EEI/article/view/3869

[47] D. Koung, I. Fantoni, O. Kermorgant, and L. Belouaer, “Consensus-based formation control and obstacle avoidance for nonholonomic multi-robot system,” in *2020 16th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*. Shenzhen, China: IEEE, Dec. 2020, pp. 92–97. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/9305426/

[48] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Siam, 1994, vol. 15.

[49] G.-R. Duan and H.-H. Yu, *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. CRC press, 2013.

[50] A. Svirin, “Differential equations.” [Online]. Available: https://math24.net/stability-theory-basic-concepts.html

[51] A. M. LYAPUNOV, “The general problem of the stability of motion,” *International Journal of Control*, vol. 55, no. 3, pp. 531–534, 1992. [Online]. Available: https://doi.org/10.1080/00207179208934253

[52] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, and J. A. Gallegos, “Lyapunov functions for fractional order systems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 2951–2957, 2014.

[53] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2001, vol. 207. [Online]. Available: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4613-0163-9

[54] Y. G. Sun and L. Wang, "Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1607–1613, 2009.

[55] E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, "Reduced-order dynamic output feedback control of continuous-time T–S fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 207, pp. 27–44, 2012. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011412001844

[56] M. Schwager, N. Michael, V. Kumar, and D. Rus, "Time scales and stability in networked multi-robot systems," in *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2011, pp. 3855–3862.

[57] T. M. Inc., "Optimization toolbox version: (r2018b)," Natick, Massachusetts, United States, 2018. [Online]. Available: https://www.mathworks.com

[58] E. D. Andersen and K. D. Andersen, "The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm," in *High performance optimization*, 2000, pp. 197–232.

[59] R. D. A. Oliveira, M. A. D. S. L. Cuadros, C. S. Xavier, and C. T. Valadão, "PI controller implementation for the two wheels of a differential robot using NI MyRio," *Research, Society and Development*, vol. 11, no. 2, p. e38211225857, Jan. 2022. [Online]. Available: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/25857

[60] M. Ben-Ari and F. Mondada, "Robots and Their Applications," in *Elements of Robotics*. Cham: Springer International Publishing, 2018, pp. 1–20. [Online]. Available: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-62533-1_1

[61] *Pioneer3-DX*, Adept Mobile Robots, 2011, 09366-P3DX Rev. A.

[62] D. Bodhale, N. Afzulpurkar, and N. T. Thanh, "Path planning for a mobile robot in a dynamic environment," in *2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009, pp. 2115–2120.

[63] R. Amsters and P. Slaets, *Turtlebot 3 as a Robotics Education Platform*, 01 2020.

[64] J.-Y. Sung, L. Guo, R. E. Grinter, and H. I. Christensen, ""my roomba is rambo": Intimate home appliances," in *UbiComp 2007: Ubiquitous Computing*, J. Krumm, G. D. Abowd, A. Seneviratne, and T. Strang, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 145–162.

[65] R. D'Andrea, "Guest editorial: A revolution in the warehouse: A retrospective on kiva systems and the grand challenges ahead," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 9, no. 4, pp. 638–639, 2012.

[66] G. Araujo, "Pioneer," 2019. [Online]. Available: https://cooprobo.readthedocs.io/en/latest/mobile/pioneer.html

[67] C. De La Cruz and R. Carelli, "Dynamic Modeling and Centralized Formation Control of Mobile Robots," in *IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*. Paris, France: IEEE, Nov. 2006, pp. 3880–3885, iSSN: 1553-572X. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/document/4153091/

[68] L. Ljung, *System identification: theory for the user*, 2nd ed., ser. Prentice Hall information and system sciences series. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999.

[69] L. Yang and J. Yingmin, "h_∞ consensus control for multi-agent systems with linear coupling dynamics and communication delays," *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 1, pp. 50–62, 2012.

[70] E. Rohmer, S. P. N. Singh, and M. Freese, "V-rep: A versatile and scalable robot simulation framework," in *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2013, pp. 1321–1326.

[71] Stanford Artificial Intelligence Laboratory et al., "Robotic operating system." [Online]. Available: https://www.ros.org

[72] A. Koubaa, Ed., *Robot Operating System (ROS)*, ser. Studies in Computational Intelligence. Cham: Springer International Publishing, 2016, vol. 625. [Online]. Available: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-26054-9

[73] N. O. Borges, B. M. Silva, E. S. Tognetti, and J. Y. Ishihara, "Consenso robusto de sistemas multiagentes lineares em redes de comunicaçao de topologia incerta," *XXIV Congresso Brasileiro de Automática – CBA 2022*, 2022.

APÊNDICE

A DETALHAMENTO

A.1 SISTEMA COMPLETO EM MALHA FECHADA

O sistema multiagente definido em (3.1), é descrito de forma desacoplada pelas dinâmicas dos agentes

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + B_u u_i(t) + B_w w_i(t), \\ y_i(t) &= C_y x_i(t) + D_y w_i(t), \quad i = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \tag{A.1}$$

dos controladores

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c \nu_i(t), \\ u_i(t) &= C_c x_{c,i}(t) + D_c \nu_i(t), \end{aligned} \tag{A.2}$$

pelo sinal de erro de consenso

$$\nu_i(t) = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(y_i(t) - y_j(t)) \tag{A.3}$$

e pela saída balanceada de consenso

$$z_i(t) = C_z(x_i(t) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j(t)). \tag{A.4}$$

Agrupando os sistemas (A.1) e (A.2), podemos definir um novo sistema composto pelas equações de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + B_u C_c x_{c,i}(t) + B_u D_c \nu_i(t) + B_\omega \omega_i(t), \\ \dot{x}_{c,i}(t) &= A_c x_{c,i}(t) + B_c \nu_i(t). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Este sistema pode ser reescrito de forma acoplada concatenando os estados dos agentes, os estados dos controladores, os erros de consenso e os sinais de distúrbio na forma

$$
\begin{aligned}
x(t) &= [x_1^T(t) \quad x_2^T(t) \quad ... \quad x_m^T(t)]^T, \\
x_c(t) &= [x_{c,1}^T(t) \quad x_{c,2}^T(t) \quad ... \quad x_{c,m}^T(t)]^T, \\
\nu(t) &= [\nu_1^T(t) \quad \nu_2^T(t) \quad ... \quad \nu_m^T(t)]^T, \\
\omega(t) &= [\omega_1^T(t) \quad \omega_2^T(t) \quad ... \quad \omega_m^T(t)]^T
\end{aligned}
$$

e estabelecendo um novo estado formado pela concatenação dos estados $x(t)$ e $x_c(t)$. Com isto, podemos reescrever (A.5) como

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_{c,1}(t)\dot{x}_{c,2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{c,m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & ... & 0 & B_uC_c & 0 & ... & 0 \\ 0 & A & ... & 0 & 0 & B_uC_c & ... & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & ... & A & 0 & 0 & & B_uC_c \\ 0 & 0 & ... & 0 & A_c & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & A_c & ... & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \\ x_{c,1}(t) \\ \vdots \\ x_{c,m}(t) \end{bmatrix} + \tag{A.6}
$$

$$
\begin{bmatrix} B_\omega & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_\omega & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & B_\omega \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_uD_c & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_uD_c & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & B_uD_c \\ B_c & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_c & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \vdots \\ \nu_m(t) \end{bmatrix}.
$$

Escrevendo em notação de produto de Kronecker, temos que

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \otimes A & I_m \otimes (B_uC_c) \\ 0 & I_m \otimes A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_m \otimes B_\omega \\ 0 \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} I_m \otimes (B_uD_c) \\ I_m \otimes B_c \end{bmatrix} \nu(t). \tag{A.7}
$$

Expandindo o sinal de erro de consenso $\nu_i(t)$, podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
\nu_i(t) &= -a_{i1}y_i(t) + a_{i1}y_1(t) - a_{i2}y_i(t) + a_{i2}y_2(t) + ... + -a_{im}y_i(t) + a_{im}y_m(t) \\
&= -(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im})y_i(t) + a_{i1}y_1(t) + a_{i2}y_2(t) + ... + a_{im}y_m(t).
\end{aligned}
$$

Logo, o vetor $\nu(t)$ pode ser escrito em notação matricial por

$$\begin{bmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\\ \vdots\\ \nu_m(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(a_{12}+a_{13}+...+a_{1m}) & a_{12} & ... & a_{1m}\\ a_{21} & -(a_{21}+a_{23}+...+a_{2m}) & ... & a_{2m}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & -(a_{m1}+a_{m2}+...+a_{m(m-1))})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{bmatrix}$$

$$= -L(\alpha)\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{bmatrix} = \left[-L(\alpha)\otimes C_y\right]x(t) + \left[-L(\alpha)\otimes D_y\right]\omega(t). \tag{A.8}$$

Substituindo (A.8) em (A.7) e utilizando a propriedade do produto misto de Kronecker $(X\otimes Y)(W\otimes Z) = (XW)\otimes(YZ)$, temos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}I_m\otimes A & I_m\otimes(B_uC_c)\\ 0 & I_m\otimes A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}I_m\otimes B_\omega\\ 0\end{bmatrix}\omega(t) + \\ &\quad \begin{bmatrix}I_m\otimes(B_uD_c)\\ I_m\otimes B_c\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-L(\alpha)\otimes C_y\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix} + \left[-L(\alpha)\otimes D_y\right]\omega(t)\right)\\ &= \begin{bmatrix}I_m\otimes A - L(\alpha)\otimes(B_uD_cC_y) & I_m\otimes(B_uC_c)\\ -L(\alpha)\otimes(B_cC_y) & I_m\otimes A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix}I_m\otimes B_\omega - L(\alpha)\otimes(B_uD_cD_y)\\ -L(\alpha)\otimes(B_cD_y)\end{bmatrix}\omega(t).\end{aligned} \tag{A.9}$$

Concatenando os sinais de saída balanceada de consenso $z_i(t)$, temos que

$$\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\\ \vdots\\ z_m(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_z-\frac{1}{m}C_z & -\frac{1}{m}C_z & ... & -\frac{1}{m}C_z & 0 & 0 & ... & 0\\ -\frac{1}{m}C_z & C_z-\frac{1}{m}C_z & ... & -\frac{1}{m}C_z & 0 & 0 & ... & 0\\ \vdots & & & & & & & \\ -\frac{1}{m}C_z & -\frac{1}{m}C_z & ... & C_z-\frac{1}{m}C_z & 0 & 0 & ... & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_m(t)\\ \dot{x}_{c,1}(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_{c,m}(t)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(I_m-\frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T)\otimes Cz & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

Logo, podemos concluir que o sistema multiagente acoplado de (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4) pode ser representado pelo sistema

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \mathbb{A}(\alpha)\phi(t) + \mathbb{B}(\alpha)w(t),\\ z(t) &= \mathbb{C}\phi(t),\end{aligned} \tag{A.11}$$

em que

$$\mathbb{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} I_m \otimes B_w - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_g \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \quad C_g = I_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T.$$

Esta seção demonstra como as equações do sistema foram acopladas para formar o sistema em malha fechada (A.11), o qual se presente estabelecer o consenso robusto.

A.2 TRANSFORMAÇÃO DE PROBLEMA DE CONSENSO ROBUSTO PARA ESTABILIZAÇÃO ROBUSTA

Esta seção tem o objetivo de demonstrar como transformar o problema de consenso robusto do sistema (A.11) em um problema de estabilização robusta.

Partindo do sistema (A.11) e estabelecendo os estados $\delta_{1,i} = x_1(t) - x_{i+1}(t)$ e $\delta_{2,i} = x_{c,1}(t) - x_{c,i+1}(t)$, $i = 1, ..., m-1$, que representam a diferença entre o primeiro estado e os demais estados dos agentes e controladores, respectivamente, e $\eta_i(t) = w_1(t) - w_{i+1}(t)$, $i = 1, ..., m-1$, que representa a diferença entre o sinal de distúrbios do primeiro agente e dos demais agentes, é possível estabelecer as transformações

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1}(t) \\ \delta_{1,2}(t) \\ \vdots \\ \delta_{1,m-1}(t) \\ \delta_{2,1}(t) \\ \delta_{2,2}(t) \\ \vdots \\ \delta_{2,m-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & ... & 0 & I_{n_c} & -I_{n_c} & 0 & ... & 0 \\ I_n & 0 & -I_n & ... & 0 & I_{n_c} & 0 & -I_{n_c} & ... & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ I_n & 0 & 0 & ... & -I_n & I_{n_c} & 0 & 0 & ... & -I_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \\ x_{c,1}(t) \\ x_{c,2}(t) \\ \vdots \\ x_{c,m}(t) \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

e

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_{m-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_\omega} & -I_{n_\omega} & 0 & ... & 0 \\ I_{n_\omega} & 0 & -I_{n_\omega} & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ I_{n_\omega} & 0 & 0 & ... & -I_{n_\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \vdots \\ \omega_{m-1}(t) \end{bmatrix}, \tag{A.13}$$

que em notação de produto de Kronecker podem ser resumidas a

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} = \bar{U}\phi(t), \tag{A.14}$$

$$\eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t), \tag{A.15}$$

em que

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \otimes I_n & 0 \\ 0 & U \otimes I_{n_c} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m-1} & -I_{m-1} \end{bmatrix}. \tag{A.16}$$

A transformação inversa é dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes x_1(t) \\ \mathbf{1}_m \otimes x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \bar{W}\delta(t), \\ w(t) &= \mathbf{1}_m \otimes w_1(t) + (W \otimes I_{n_w})\eta(t), \end{aligned} \tag{A.17}$$

em que

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} W \otimes I_n & 0 \\ 0 & W \otimes I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1}^T \\ -I_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Partindo de $\delta(t) = \bar{U}\phi(t)$, temos que $\dot{\delta}(t) = \bar{U}\dot{\phi}(t)$. Substituindo (A.11), temos

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) =& \bar{U}\dot{\phi}(t) \\ =& \bar{U} \begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix} \phi(t) + \\ & \bar{U} \begin{bmatrix} I_m \otimes B_\omega - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} \omega(t) \end{aligned}$$

Aplicando a transformação (A.17), temos que

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}(t) =& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes x_1(t) \\ \mathbf{1}_m \otimes x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \bar{W}\delta(t) \right) + \\
& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes B_\omega - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} (\mathbf{1}_m \otimes w_1(t) + (W \otimes I_{n_w})\eta(t)), \\
=& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes x_1(t) \\ \mathbf{1}_m \otimes x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \\
& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes A - L(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_m \otimes (B_u C_c) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_m \otimes A_c \end{bmatrix} \bar{W}\delta(t) + \\
& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes B_\omega - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} \mathbf{1}_m \otimes w_1(t) + \\
& \bar{U}\begin{bmatrix} I_m \otimes B_\omega - L(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -L(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} (W \otimes I_{n_w})\eta(t).
\end{aligned}
$$

Fazendo as multiplicações distributivas e aplicando propriedades do produto de Kronecker, temos que

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}(t) = & \begin{bmatrix} (U\mathbf{1}_m \otimes) A x_1(t) - (UL(\alpha)\mathbf{1}_m) \otimes (B_u D_c C_y) x_1(t) & (U\mathbf{1}_m \otimes)(B_u C_c) x_{c,1}(t) \\ -(UL(\alpha)\mathbf{1}_m) \otimes (B_c C_y) x_1(t) & (U\mathbf{1}_m) \otimes A_c x_{c,1}(t) \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} (UW) \otimes A - (UL(\alpha)W) \otimes (B_u D_c C_y) & (UW) \otimes (B_u C_c) \\ -(UL(\alpha)W) \otimes (B_c C_y) & (UW) \otimes A_c \end{bmatrix} \delta(t) + \\
& \begin{bmatrix} (U\mathbf{1}_m) \otimes B_\omega w_1(t) - (UL(\alpha)\mathbf{1}_m) \otimes (B_u D_c D_y) w_1(t) \\ -(UL(\alpha)\mathbf{1}_m) \otimes (B_c D_y) w_1(t) \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} (UW) \otimes B_\omega - (UL(\alpha)W) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -(UL(\alpha)W) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} \eta(t).
\end{aligned}
$$

Sabendo que $UW = I_{m-1}$, $U\mathbf{1}_m = 0$ e $L(\alpha)\mathbf{1}_m = 0$, é possível zerar o primeiro e o terceiro termo desta soma, resultando em

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}(t) = & \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A - \bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_{m-1} \otimes (B_u C_c) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_{m-1} \otimes A_c \end{bmatrix} \delta(t) + \\
& \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes B_\omega - \bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} \eta(t),
\end{aligned}
$$

em que $\bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W$.

Separando os termos que dependem dos ganhos do controlador, temos

$$\dot{\delta}(t) = \left(\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_{m-1} \otimes (B_u C_c) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_{m-1} \otimes A_c \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \right) \delta(t) + \left(\begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes B_\omega \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix}}_{\bar{N}} \right) \eta(t).$$

É possível desmembrar $\bar{M}$ em

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{bmatrix} \bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c C_y) & I_{m-1} \otimes (B_u C_c) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c C_y) & I_{m-1} \otimes A_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I_{m-1} \otimes B_u \\ I_{(m-1)n_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A_c & I_{m-1} \otimes B_c \\ I_{m-1} \otimes C_c & I_{m-1} \otimes D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{(m-1)n_c} \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes C_y & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e $\bar{N}$ em

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \begin{bmatrix} -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_u D_c D_y) \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes (B_c D_y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I_{m-1} \otimes B_u \\ I_{(m-1)n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A_c & I_{m-1} \otimes B_c \\ I_{m-1} \otimes C_c & I_{m-1} \otimes D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes D_y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, o sistema (A.11) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{C}(\alpha))\delta(t) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}\mathcal{K}_y\mathcal{D}(\alpha))\eta(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}_z\delta(t), \end{aligned} \tag{A.18}$$

em que

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} = \bar{U}\phi(t), \quad \eta(t) = (U \otimes I_{n_w})w(t)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m-1} \otimes B_u \\ I_{(m-1)n} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_y = \begin{bmatrix} I_{m-1} \otimes A_c & I_{m-1} \otimes B_c \\ I_{m-1} \otimes C_c & I_{m-1} \otimes D_c \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & I_{(m-1)n} \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes C_y & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{L}(\alpha) \otimes D_y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} C_g W \otimes C_z & 0 \end{bmatrix}, \bar{L}(\alpha) = UL(\alpha)W \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}.$$

Assim demonstramos como transformar o problema de consenso robusto do sistema (A.11) no problema de estabilidade robusta do sistema (A.18).