



**MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB
ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT
PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES**

MATHEUS CANEDO RIBEIRO BORGES

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB
ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT
PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES**

MATHEUS CANEDO RIBEIRO BORGES

Orientador: PROFA. DRA. MARCELA RODRIGUES MACHADO, ENM/UNB

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO PCMEC - XXX/AAAA
BRASÍLIA-DF, 24 DE ABRIL DE 2023.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB
ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT
PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES**

MATHEUS CANEDO RIBEIRO BORGES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

APROVADA POR:

Profa. Dra. Marcela Rodrigues Machado, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Adriano Todorovich Fabro, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Edilson Dantas Nobrega, CCEM/UFMA
Examinador externo

BRASÍLIA, 24 DE ABRIL DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

MATHEUS CANEDO RIBEIRO BORGES

MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES

2023xv, 90p., 201x297 mm

(ENM/PCMEC/FT/UnB, Mestre, Engenharia Mecânica, 2023)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MATHEUS CANEDO RIBEIRO BORGES (2023) MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 90p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Matheus Canedo Ribeiro Borges

TÍTULO: MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES.

GRAU: Mestre ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de Mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Matheus Canedo Ribeiro Borges
SEU ENDEREÇO COMPLETO AQUI.

Agradecimentos

É com grande satisfação que apresento minha dissertação de mestrado e gostaria de aproveitar este momento para expressar minha gratidão a todos que contribuíram para o sucesso deste trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a minha família por todo o amor, apoio e encorajamento que me deram ao longo dessa jornada. Sem a presença deles em minha vida, eu não seria a pessoa que sou hoje e não teria conseguido superar os obstáculos que surgiram no caminho.

Aos meus amigos, especialmente à Braion, quero expressar minha sincera gratidão por todo o apoio, ajuda nos momentos difíceis e parceria durante todo o processo de pesquisa. Sua amizade e suporte foram fundamentais para que eu pudesse continuar firme em meu objetivo.

À minha namorada Mariana, não poderia deixar de agradecer por estar sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis, me apoiando e encorajando a não desistir. Sua presença em minha vida é uma das maiores bênçãos que recebi.

Por fim, gostaria de agradecer à minha orientadora Marcela Machado, por toda a paciência, apoio e orientação que me ofereceu durante todo o processo de pesquisa. Seu conhecimento, experiência e dedicação foram fundamentais para que eu pudesse superar este desafio que foi um dos mais difíceis da minha vida.

Mais uma vez, agradeço a todos que me apoiaram ao longo dessa jornada e espero que este trabalho possa contribuir de alguma forma para o avanço da ciência em nossa área de estudo.

Muito Obrigado.

Resumo

MODELOS ESPECTRAIS DE ESTRUTURAS HONEYCOMB ACOPLADAS A PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT PARA CONTROLE E ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES

Autor: Matheus Canedo Ribeiro Borges

Orientadora: Marcela Rodrigues Machado, Dra. Univ (ENM/UnB)

Programa de Pós Graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 24 de abril de 2023

A utilização de metaestruturas combinadas com funcionalidades de materiais inteligentes possibilita a inovação de materiais funcionais, da classe de metamateriais inteligentes e metaestruturas inteligentes. Algumas dessas metaestruturas utilizam materiais piezoelétricos (PZT) que, por meio da adição de circuitos com configurações distintas, conseguem modificar as propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura. Em geral, os controles passivos de PZT com circuitos *shunt* são realizados utilizando topografias de circuitos passivos compostos por elementos capacitivos, indutivos e resistivos. Diversas configurações estão disponíveis, e cada tipo de circuito *shunt* pode influenciar o comportamento das vibrações e propagações de onda de uma estrutura de forma específica. Baseado nesses conceitos, este trabalho explora a aplicação de tal controle em três metaestruturas, um viga, uma célula hexagonal e uma placa *honeycomb*. Essas estruturas estão equipadas com camadas de PZTs contendo circuitos *shunt* em configurações resistivas (R), indutivas (L), capacitivas (C), indutivo-capacitivas (LC), resistivo-indutivas (RL), resistivo-indutivo-capacitivas (RLC), multi-impedâncias (*multishunt*) e arco-íris (*Rainbow* ou *graded*). Para a modelagem matemática e analítica dessas metaestruturas foi utilizado o Método do Elemento Espectral (MEE). Com esses modelos espectrais, foram extraídas as Funções de Respostas em Frequência (FRF) das metaestruturas para apresentação de uma análise dinâmica dos sistemas estudados. Os resultados mostram que a formulação espectral adotada e a implementação de controle passivo utilizando circuitos *shunt* são adequadas para viabilizar projetos de controle de vibrações em metaestruturas. O controle das estruturas se mostraram eficazes para atenuação e mitigação de vibrações nas faixas de frequências de projeto.

Palavras-chave: Metaestrutura e Metamaterial; Controle Passivo de Vibrações; Circuitos shunt Rainbow; Método do Elemento Espectral; Placas Honeycomb.

Abstract

SPECTRAL MODELS OF HONEYCOMB STRUCTURES COUPLED TO PIEZOELECTRICS WITH SHUNT CIRCUIT FOR VIBRATION CONTROL AND ATTENUATION

Author: Matheus Canedo Ribeiro Borges

Supervisor: Marcela Rodrigues Machado, PhD. Univ (ENM/UnB)

Master Program in Mechanical Sciences

Brasília, April 24, 2023

The use of metastructures combined with the functionalities of smart materials enables the innovation of functional materials from the class of smart metamaterials and smart metastructures. Some of these metastructures use piezoelectric materials (PZT) that modify the structure's stiffness and damping properties by adding circuits with different configurations. Passive PZT controls with *shunt* circuits are generally realized using capacitive, inductive, and resistive circuit topographies. Several configurations are available, and each type of *shunt* circuit can influence the behaviour of vibrations and wave propagation of a structure in a specific way. Based on these concepts, this work explores the application of such control in three metastructures, a beam, a hexagonal cell and a honeycomb plate. These structures are equipped with layers of PZTs containing *shunt* circuits in resistive (R), inductive (L), capacitive (C), inductive-capacitive (LC), resistive-inductive (RL), resistive-inductive-capacitive (RLC) configurations), multi-impedance (multishunt) and rainbow (rainbow or graded). For the mathematical and analytical modelling of these metastructures, the Spectral Element Method (SEM) was used. These spectral models extracted the Frequency Response Functions (FRF) of the metastructures to present a dynamic analysis of the studied systems. The results show that the adopted spectral formulation and the implementation of passive control using *shunt* circuits are adequate to enable vibration control projects in metastructures. The control of the structures proved effective for attenuating and mitigating vibrations in the design frequency ranges.

Keywords: Metastructure; Metamaterial; Passive Vibration Control; Piezoelectrics; Shunt Circuits; Spectral Element Method; Honeycomb; Rainbow.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO.....	II
ABSTRACT	III
LISTA DE TERMOS E SIGLAS.....	XII
LISTA DE SIMBOLOS.....	XIII
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS DESTA DISSERTAÇÃO	5
1.2 METODOLOGIA.....	6
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	6
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
2.1 REVISÃO DAS PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS	9
2.1.1 UTILIZAÇÃO DE PIEZOELÉTRICOS COM CIRCUITO SHUNT	10
2.1.2 UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS	14
3 MÉTODO DE ELEMENTO ESPECTRAL	17
3.1 FORMULAÇÃO GERAL	17
3.2 ELEMENTO ESPECTRAL DE VIGA DE EULER BERNOULLI	20
3.2.1 ELEMENTO ESPECTRAL PÓRTICO	24
3.3 VIGA ACOPLADA COM UMA CAMADA PIEZOELÉTRICA	26
3.4 CIRCUITO <i>shunt</i>	33
3.4.1 ACOPLAMENTO DO CIRCUITO <i>shunt</i>	33
3.4.2 MODELAGEM PIEZOELÉTRICA	35
3.4.3 IMPEDÂNCIAS GERAIS DO CIRCUITOS <i>shunt</i>	36
4 RESULTADOS.....	40
4.1 METAESTRUTURA INTELIGENTE.....	40
4.2 EFEITO DE CIRCUITOS SHUNT NO CONTROLE DA METAESTRUTURA.....	42
4.2.1 CIRCUITO <i>shunt</i> RESISTIVO	42
4.3 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA PLACA <i>honeycomb</i>	51

4.3.1	CÉLULA HEXAGONAL	52
4.3.2	PLACA <i>Honeycomb</i>	54
4.4	CONTROLE DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA <i>honeycomb</i>	56
4.4.1	CÉLULA HEXAGONAL	57
4.4.2	PLACA <i>Honeycomb-PZT</i>	67
CONCLUSÃO		85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		87

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação visual da noção de domínios físicos e o acoplamento entre eles (Adaptado de [Leo 2007]).	2
1.2	Receita do mercado de metamateriais por uso final em 2014-2025 (USD Milhões)([Grand View Research Metamaterial Market Analysis, By Product (Electromagnetic, Terah	
1.3	Metamateriais elásticos em uma aplicação de carenagem aeroespacial[Bergamin 2016].	3
1.4	Resumo de metamateriais localmente ressonantes: a) metamaterial periódico impresso em 3D, adaptado de [Beli et al. 2019]; b) Metamaterial inteligente, adaptado de [Wang et al. 2017]; c) metamaterial <i>rainbow</i> , adaptado de [Gonella et al. 2019]; e d) metamaterial inteligente <i>rainbow</i> , adaptado de [Cardella, Celli e Gonella 2016].	5
3.1	Ilustração de um elemento viga. a) Viga em flexão; b) Diagrama de corpo livre de uma seção da viga (Adaptado de [Conceição 2016] e [Moura 2020]).	20
3.2	Modelagem do elemento pórtico. (Adaptado de [Sousa 2021]).	24
3.3	Representação de um elemento viga acoplado a uma pastilha piezoelétrica.	26
3.4	Representação de circuito topográfico de piezoelétricos conectados com um resistor na configuração Viga-PZT [Moura 2020].	36
3.5	Circuitos <i>shunt</i> : a) puro resistivo; b) puro indutivo; c) puro capacitivo; d) LC série; e) LC paralelo; f) RL série; g) RL paralelo; h) RLC série; i) RLC paralelo; j) Circuito multi-impedâncias. (Adaptado de [Moura 2020]).	37
4.1	Viga-PZT com arranjo de sensores em periodicidade.	40
4.2	Viga acoplada com piezoelétrico e viga-PZT-Shunt.	41
4.3	Função de resposta em frequência em receptância da viga, mestastutura com circuito aberto e circuito em curto.	42
4.4	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo puro. a) Resistor no valor de $R = 53\Omega$; b) Resistor no valor de $R = 5300\Omega$	43
4.5	FRF da Viga-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> resistivo. a) Circuito <i>shunt</i> resistivo com $R = 53\Omega$; b) Circuito <i>shunt</i> resistivo com $R = 5300\Omega$	43
4.6	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo puro. a) Indutor no valor de $L=1.3095H$; b) Indutor no valor de $L=0.1303H$.	44
4.7	FRF da Viga-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> indutivo. a) Circuito <i>shunt</i> indutivo com $L = 1.3095H$; b) Circuito <i>shunt</i> indutivo com $L = 0.1303H$.	44

4.8	Impedância capacitiva do circuito <i>shunt</i> capacitivo. a) Capacitor no valor de $C = -720nF$; b) Capacitor no valor de $C = 2KnF$	45
4.9	VigaPZT conectada com circuito <i>shunt</i> capacitivo. a) FRF com <i>shunt</i> capacitivo negativo de $C = -720nF$; b)FRF com <i>shunt</i> Capacitivo de $C = 2000nF$.	45
4.10	Impedância induto-capacitiva gerada pelo circuito <i>shunt</i> LC. a) Circuito <i>shunt</i> LC em série ; b) Circuito <i>shunt</i> LC em paralelo.	46
4.11	Viga-PZT conectada com um circuito <i>shunt</i> indutor-capacitor (LC). a) FRF com circuito <i>shunt</i> LC em série; b) FRF com circuito <i>shunt</i> LC em paralelo. ..	46
4.12	Impedância Resistiva-Indutiva do circuito <i>shunt</i> RL. a) Circuito <i>shunt</i> RL em série; b) Circuito <i>shunt</i> RL em paralelo.	47
4.13	Viga-PZT acoplada com uma e duas camadas de circuito <i>shunt</i> resistor-indutor (RL). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> RL em série; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> RL em paralelo.	47
4.14	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo-indutivo-capacitivo (RLC). a) Circuito <i>shunt</i> RLC em série; b) Circuito <i>shunt</i> RLC em paralelo.	48
4.15	Célula hexagonal-PZT acoplada com uma e duas camadas de circuito <i>shunt</i> resistor-indutor-capacitor (RLC). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> RLC; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> RLC.	49
4.16	Faixa de atuação das impedâncias do <i>rainbow</i> no modo de vibrar da Viga-PZT.	49
4.17	Aplicação da configuração <i>rainbow</i> na viga-PZT. a) Atuação do primeiro piezoelétrico (Vermelho); b) Atuação do segundo piezoelétrico (Laranja); c) Atuação do terceiro piezoelétrico (Amarelo); d) Atuação do quarto piezoelétrico (Verde); e) Atuação do quinto piezoelétrico (Azul); f) Atuação do sexto piezoelétrico (Roxo); g) Atuação do sétimo piezoelétrico (Rosa).	50
4.18	Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da Viga-PZT.....	51
4.19	Dimensões da Placa <i>honeycomb</i> composta por elementos viga.	52
4.20	Célula hexagonal composta por vigas.	53
4.21	Comparação das FRFs obtidas pelo MEE e MEF do ponto amarelo na célula hexagonal.....	54
4.22	Placa <i>honeycomb</i>	55
4.23	Comparação das FRFs obtidas pelo MEE e MEF do ponto amarelo na placa <i>honeycomb</i>	55
4.24	Célula hexagonal acoplada com pastilhas piezoelétricas.	57
4.25	Comparação das FRFs da célula hexagonal-PZT sem PZTs, em Curto-Circuito e Aberto. a) Célula hexagonal-PZT com duas camada de PZT; b) Célula hexagonal-PZT com duas camadas de PZT	57
4.26	FRF da Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> resistivo. a) Circuito <i>shunt</i> resistivo com uma camada e $R = 53\Omega$; b) Circuito <i>shunt</i> resistivo com duas camadas e $R = 53\Omega$; c) Circuito <i>shunt</i> resistivo com uma camada e $R = 5300\Omega$; d) Circuito <i>shunt</i> resistivo com duas camadas e $R = 5300\Omega$	58

4.27	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo aplicado na célula hexagonal-PZT. a) Indutor no valor de $L = 0.5234H$; b) Indutor no valor de $L = 0.02271H$	59
4.28	FRF da célula hexagonal-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> indutivo. a) Circuito <i>shunt</i> indutivo com $L = 0.5234H$; b) Circuito <i>shunt</i> indutivo com $L = 0.02271H$	60
4.29	Célula hexagonal-PZT conectada com circuito <i>shunt</i> capacitivo puro. a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> capacitivo negativo de $C = -720nF$; b)FRF com duas camadas de <i>shunt</i> Capacitivo negativo de $C = -720nF$; c) FRF com uma camada de <i>shunt</i> Capacitivo no valor de $C = 2KnF$; d) FRF com duas camadas de <i>Shunt</i> Capacitivo no valor de $C = 2KnF$	61
4.30	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo-capacitivo (LC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) Circuito <i>shunt</i> LC em série ; b) Circuito <i>shunt</i> LC em paralelo.....	61
4.31	Célula hexagonal-PZT conectada com uma e duas camadas de circuito <i>shunt</i> indutor-capacitor (LC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> LC em série; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> LC em paralelo.....	62
4.32	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo indutivo (RL). a) Circuito <i>shunt</i> RL em série; b) Circuito <i>shunt</i> RL em paralelo.....	63
4.33	Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> resistor-indutor (RL). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> RL; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> RL. .	63
4.34	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo indutivo capacitivo (RLC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) Circuito <i>shunt</i> RLC em série; b) Circuito <i>shunt</i> RLC em paralelo.....	64
4.35	Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> resistivo-indutivo-capacitivo (RLC). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> RLC; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> RLC.....	64
4.36	Formas de aplicação da configuração <i>rainbow</i> na célula hexagonal. a) <i>Rainbow</i> em sua configuração vertical; b) <i>Rainbow</i> em sua configuração horizontal.	65
4.37	Célula hexagonal-PZT com atuação da configuração <i>rainbow</i> . a) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (Vermelho) em horizontal; b) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (laranja) em horizontal; c) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (vermelho) em vertical; d) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (laranja) em vertical.....	66
4.38	Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da célula hexagonal-PZT...	66
4.39	Placa <i>honeycomb</i> com suas vigas acoplada com PZTs.....	67
4.40	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> puramente resistivo.....	68

4.41	Placa <i>honeycomb</i> -PZT acoplada ao circuito <i>shunt</i> resistivo (R). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> Resistivo $R = 53\Omega$; b) FRF com uma camada de <i>shunt</i> Resistivo $R = 5300\Omega$; c) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 53\Omega$; d) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 5300\Omega$; e) FRF com três camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 53\Omega$; f) FRF com três camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 5300\Omega$; g) FRF com quatro camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 53\Omega$; h) FRF com quatro camadas de <i>shunt</i> Resistivo $R = 5300\Omega$	69
4.42	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo puro aplicado na placa <i>honeycomb</i> -PZT. a) Indutor no valor de $L = 0.2284H$; b) Indutor no valor de $L = 0.1691H$; c) Indutor no valor de $L = 0.1276H$; d) Indutor no valor de $L = 0.1081H$	70
4.43	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> puramente indutivo.	71
4.44	FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> indutivo. a) Indutor no valor de $L = 0.2284H$; b) Indutor no valor de $L = 0.1691H$; c) Indutor no valor de $L = 0.1276H$; d) Indutor no valor de $L = 0.1081H$	71
4.45	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> puramente capacitivo.....	72
4.46	Célula hexagonal-PZT conectada com circuito <i>shunt</i> capacitivo puro. a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> capacitivo negativo de $C = -720nF$; b)FRF com duas camadas de <i>shunt</i> Capacitivo negativo de $C = -720nF$; c) FRF com três camadas de <i>shunt</i> Capacitivo negativo no valor de $C = -720nF$; d) FRF quatro camadas de <i>Shunt</i> Capacitivo no valor de $C = -720nF$	73
4.47	Placa <i>honeycomb</i> -PZT conectada com circuito <i>shunt</i> capacitivo puro. a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> capacitivo negativo de $C = 2\mu F$; b)FRF com duas camadas de <i>shunt</i> Capacitivo negativo de $C = 2\mu F$; c) FRF com três camadas de <i>shunt</i> Capacitivo no valor de $C = 2\mu F$; d) FRF com quatro camadas de <i>Shunt</i> Capacitivo no valor de $C = 2\mu F$	74
4.48	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> indutivo-capacitivo (LC) aplicado na placa- <i>honeycomb</i> -PZT. a) Impedância do circuito <i>shunt</i> LC em série; b) Impedância do circuito <i>shunt</i> LC em paralelo.....	74
4.49	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> indutivo-capacitivo (LC).	75
4.50	Placa <i>honeycomb</i> -PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> indutor-capacitor (LC). a) FRF com uma camada de <i>shunt</i> LC; b) FRF com duas camadas de <i>shunt</i> LC; c) FRF com três camadas de <i>shunt</i> LC; d) FRF com quatro camadas de <i>shunt</i> LC.....	75
4.51	Impedância geral do circuito <i>shunt</i> resistivo-indutivo (RL) aplicado na placa- <i>honeycomb</i> -PZT. a) Impedância do circuito <i>shunt</i> RL em série; b) Impedância do circuito <i>shunt</i> RL em paralelo.	76
4.52	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> Resistivo-indutivo (RL).....	76

4.53	Placa <i>honeycomb</i> -PZT acoplada com circuito <i>shunt</i> resistivo-indutivo (RL). a) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com uma camada de <i>shunt</i> RL; b) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com duas camadas de <i>shunt</i> RL; c) FRF com três camadas de <i>shunt</i> RL; d) FRF com quatro camadas de <i>shunt</i> RL.	77
4.54	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> Resistivo-indutivo-Capacitivo (RLC).	78
4.55	Placa <i>honeycomb</i> -PZT aplicada com circuito <i>shunt</i> resistor-indutor-capacitor (RLC). a) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com uma camada de <i>shunt</i> RLC; b) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com duas camadas de <i>shunt</i> RLC; c) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com três camadas de <i>shunt</i> RLC; d) FRF da placa <i>honeycomb</i> -PZT com quatro camadas de <i>shunt</i> RLC.	79
4.56	Formas de aplicação da configuração <i>rainbow</i> na placa <i>honeycomb</i> -PZT. a) <i>rainbow</i> em configuração horizontal; b) <i>rainbow</i> em configuração vertical.	79
4.57	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> na configuração <i>rainbow</i>	80
4.58	Placa <i>honeycomb</i> -PZT com atuação da configuração <i>rainbow</i> . a) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (Vermelho) em horizontal; b) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (Laranja) em horizontal; c) Atuação da terceira camada de piezoelétricos (Amarelo) em horizontal; d) Atuação da quarta camada de piezoelétricos (Verde) em horizontal.	80
4.59	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> com a configuração <i>rainbow</i>	81
4.60	Aplicação da <i>rainbow</i> na placa <i>honeycomb</i> -PZT. a) Atuação da primeira camada piezoelétrica (Vermelho); b) Atuação da segunda camada piezoelétrica (Laranja); c) Atuação da terceira camada piezoelétrica (Amarelo); d) Atuação da quarta camada piezoelétrica (Verde); e) Atuação da quinta camada piezoelétrica (Azul); f) Atuação da sexta camada piezoelétrica; g) Atuação da sétima camada piezoelétrica (Rosa).	82
4.61	Faixa de atuação do circuito <i>shunt</i> com multi-impedâncias (ou <i>multishunt</i>).	83
4.62	Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da célula hexagonal-PZT. a) FRF da aplicação das multi-impedâncias na placa <i>honeycomb</i> -PZT em formação horizontal; b) FRF da aplicação das multi-impedâncias na placa <i>honeycomb</i> -PZT em formação vertical.	83

LISTA DE TABELAS

4.1	Propriedades e características geométricas da viga.....	41
4.2	Propriedades e características geométricas das vigas.	52
4.3	Comparação das frequências de ressonância da célula hexagonal obtidas pelo MEF e pelo MEE.	53
4.4	Comparação entre modos de vibrar obtidos pelo MEF e pelos modos obtidos pelo MEE da Placa <i>Honeycomb</i>	56
4.5	Propriedades e características geométricas dos piezoelétricos.....	56

Lista de Termos e Siglas

<i>FRF</i>	<i>Função Resposta em Frequência</i>
<i>FFT</i>	<i>Fast Fourier Transform</i>
<i>FEM</i>	<i>Finite Element Method</i>
<i>GDL</i>	<i>Grau de Liberdade</i>
<i>LC</i>	<i>Indutivo-Capacitivo</i>
<i>MDF</i>	<i>Método das Diferenças Finitas</i>
<i>MEF</i>	<i>Método dos Elementos Finitos</i>
<i>MEFO</i>	<i>Método dos Elementos Finitos de Onda</i>
<i>MEE</i>	<i>Método dos Elementos Espectrais</i>
<i>MMT</i>	<i>Método da Matriz de Transferência</i>
<i>MEOP</i>	<i>Método de Expansão de Onda Plana</i>
<i>PVDF</i>	<i>Polivinil Fluoreto</i>
<i>PZT</i>	<i>Lead Zirconate Tyrannate</i>
<i>PZT</i>	<i>Piezoelétrico</i>
<i>RL</i>	<i>Resistor-indutor</i>
<i>RLC</i>	<i>Resistor-indutor-capacitor</i>
<i>SEM</i>	<i>Spectral Element Method</i>
<i>TCF</i>	<i>Transformada Contínua de Fourier</i>
<i>TDF</i>	<i>Transformada Discreta de Fourier</i>

Lista de Símbolos

Letras Latinas

A	Área da seção transversal [m^2]
a_i	Constante
b_i	Constante
c	Coefficiente de amortecimento
c_i	Autovetor normalizado
C	Capacitor
C_{11}^D	Rigidez elástica
C_p^T	Capacitância piezoelétrica
\mathbf{d}	Vetor de deslocamento
d_{31}	Constante piezoelétrica
D	Deslocamento elétrico
\mathbf{e}	Vetor de propagação de ondas
E	Módulo de Young [GPa]
E_c	Campo elétrico
F	Força de tração axial
\mathbf{f}_c	Vetor de forças nodais
\mathbf{G}	Módulo de cisalhamento
\mathbf{G}	Matriz de forças
h	Espessura
h_{31}	Constante piezoelétrica
\mathbf{H}	Matriz de deslocamento
I	Momento de inercia
k	Número de ondas

k_{ij}	Coefficiente de acoplamento piezoelétrico
L_e	Comprimento da Estrutura
L	Indutor
\mathbf{L}^{-1}	Matriz diagonal de comprimento piezoelétricos
L_{GB}	Operador diferencial
M	Momento fletor
\mathbf{n}	Vetor unitário
N	Função de forma
\mathbf{p}	Vetor de forças externas
\mathbf{P}_k	Vetor de estado
\mathbf{P}	Componente espectral de forças externas
Q	Força cortante
R	Resistor
\mathbf{R}	Vetor diagonal de deslocamento
s	Parâmetro de Laplace
\mathbf{S}	Matriz de rigidez espectral
S_{11}^E	Conformidade elástica
S_{55}^E	Conformidade elástica
t	Tempo
\mathbf{t}_k	Matriz de transferência
T	Energia cinética
\mathbf{T}	Matriz de transferência global
u	Deslocamento axial
U	Energia potencial
\mathbf{U}	Componente espectral de deslocamento axial
V	Voltagem
\mathbf{V}	Componente espectral de voltagem
w	Deslocamento transversal
\mathbf{W}	Componente espectral de deslocamento translacional
Y	Admitância
Z	Impedância

Letras Gregas

β_{33}^S	Constante dielétrica
ω	Frequência discreta
σ	Tensão mecânica
ϵ	Tensão normal
ϵ	Constante de permissividade
γ_p	Tensão de cisalhamento
τ	Força externa
τ_p	Deformação de cisalhamento
\mathcal{L}	Operador estrutural
κ	Fator de cisalhamento
η	Fator de amortecimento
ρ	Densidade [kg/m^3]
θ	Ângulo de rotação
∂W	Trabalho virtual
\mathcal{M}	Operador inercial
Θ	Componente espectral do ângulo de rotação
ϕ_i	Vetor unitário

Capítulo 1

Introdução

Vibrações podem causar diversos problemas em sistemas e estruturas mecânicas, como: falha por fadiga, desgaste excessivo, desalinhamento, ruído e desconforto e desempenho reduzido. Sendo assim é justificável e importante usar métodos de controle de vibração para prevenir ou mitigar esses problemas ([Christensen et al. 2015, Moura, Borges e Machado 2020]). O amortecimento piezoelétrico em *shunt*, que consiste em conectar transdutores piezoelétricos integrados em uma estrutura a circuitos elétricos ou eletrônicos, é uma técnica atraente que oferece uma solução simples e potencialmente econômica para a atenuação de ondas e vibrações em estruturas. O elemento chave para essa técnica de controle é uma rede elétrica passiva conectada diretamente aos eletrodos do dispositivo piezoelétrico montado na estrutura vibratória [Gripp e Rade 2018, Ruzzene e Airolti 2011, Flemming, Behrens e Moheimani 2003].

O amortecimento piezoelétrico tipo *shunt* é um conceito atribuído principalmente a [Hagood e Von Flotow 1991]. Essa técnica envolve o uso de um circuito indutor-resistor (RL) em série para reduzir significativamente a vibração estrutural de um modo específico. O circuito, juntamente com a capacitância do transdutor piezoelétrico, é ajustado para a frequência de ressonância do modo que se deseja amortecer [Wu 1996]. Essa abordagem é análoga a um absorvedor de vibrações mecânicas sintonizado, pois introduz uma dinâmica no sistema que aumenta o amortecimento estrutural efetivo [Silva 2016, Viana e Valder Steffen 2006]. A maioria dos circuitos *shunts* é caracterizada por sua natureza passiva, o que significa que podem ser implementados usando componentes passivos, como resistores, indutores e capacitores [Wang et al. 2011]. Uma impedância elétrica em formato de shunt é considerada passiva quando não fornece energia ao sistema [Silva 2016, Park e Inman 2003].

Os avanços recentes na produção de estruturas complexas têm gerado crescente interesse no desenvolvimento de metamateriais e metaestruturas, com o objetivo de aprimorar características estruturais específicas. A combinação intuitiva de metaestruturas com as funcionalidades de materiais inteligentes abre um leque de possibilidades sem precedentes, resultando em uma nova categoria de materiais funcionais, conhecidos como metamateriais inteligentes

e metaestruturas inteligentes [Christensen et al. 2015].

De acordo com [Leo 2007], materiais inteligentes, ou *smart materials*, são aqueles que apresentam um acoplamento entre diversos domínios físicos, que são: mecânico, elétrico e térmico. O acoplamento entre os domínios está ilustrado na Figura 1.1, onde cada retângulo simboliza um domínio físico, com suas variáveis de estado listadas.

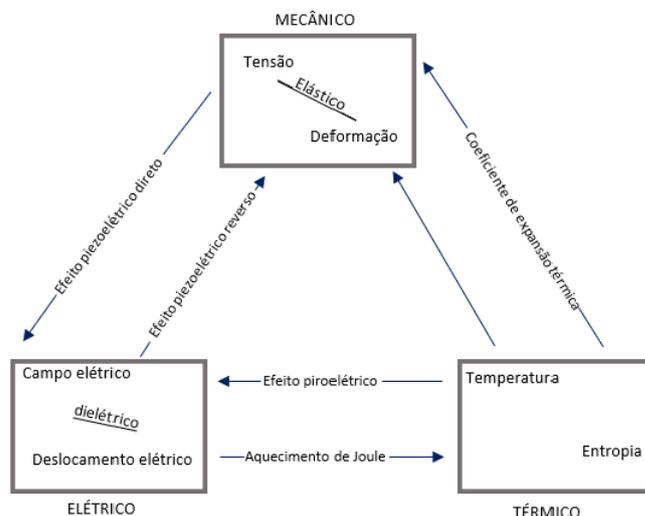


Figura 1.1: Representação visual da noção de domínios físicos e o acoplamento entre eles (Adaptado de [Leo 2007]).

A maioria dessas metaestruturas utiliza materiais piezoelétricos que são capazes de alterar as propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura por meio da adição de circuitos com diferentes configurações [Yan et al. 2017]. Esses sistemas inteligentes produzem alterações nas variáveis de estado dos domínios físico, mecânico e elétrico o que possibilita a modulação das vibrações e das propriedades das ondas [Leo 2007, Gripp e Rade 2018].

Os metamateriais são estruturas projetadas com células unitárias periódicas que possuem propriedades dinâmicas novas e aprimoradas, como: *bandgaps*, que é uma faixa de frequência na qual os distúrbios de vibração não se propagarão pela estrutura, refração negativa e camuflagem acústica [Wen et al. 2016, Sugino et al. 2017]. Ao longo das últimas décadas, metamateriais tem atraído a atenção de pesquisadores em diversas áreas, graças às suas excelentes propriedades para a manipulação de ondas. Embora o conceito de metamaterial tenha sido originado nas ondas eletromagnéticas e ópticas, ele também tem sido ampliado para incluir o controle de vibração e ruído, camuflagem acústica, escudos sísmicos, lentes de ondas acústicas e captura de ondas, entre outras aplicações [Wang et al. 2017].

O uso de metamateriais elásticos em aplicações de engenharia é uma prática relativamente recente que vem ganhando destaque com os avanços na tecnologia de impressão 3D. Com a precisão adequada para fabricar as metaestruturas projetadas, as impressoras 3D têm permitido a produção em escala desses materiais, como relatado por [Christensen et al. 2015, Zhang et al. 2017]. De acordo com um estudo recente da Grand View Research, a aplicação de metamateriais em setores como eletromagné-

óticos, ópticos e acústicos está em crescimento em diversos setores da economia (fig. 1.2). Espera-se que o mercado de metamateriais atinja cerca de \$4.634,8 milhões até 2025 [Grand View Research Metamaterial Market Analysis, By Product (Electromagnetic, Terahertz, Photonic, Tunable)]

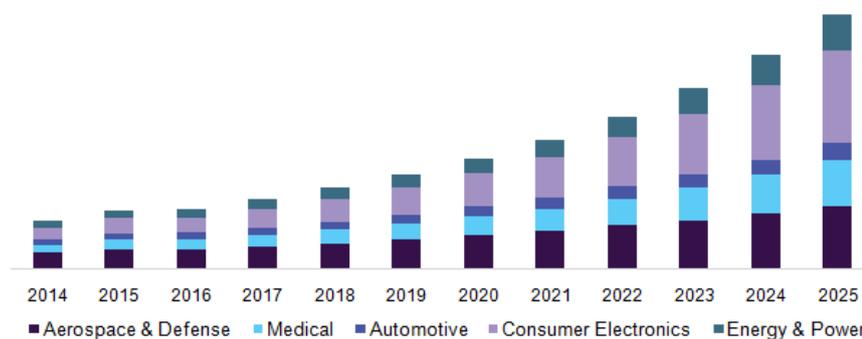


Figura 1.2: Receita do mercado de metamateriais por uso final em 2014-2025 (USD Milhões)([Grand View Research Metamaterial Market Analysis, By Product (Electromagnetic, Terahertz, Photonic, Tunable)])

A utilização de metamateriais no setor aeroespacial está em ascensão devido ao contínuo avanço da pesquisa nessa área. Embora materiais inteligentes já venham sendo aplicados na indústria aeroespacial há algumas décadas, os metamateriais representam um potencial ainda maior para uma variedade de aplicações industriais.



Figura 1.3: Metamateriais elásticos em uma aplicação de carenagem aeroespacial[Bergamin 2016]

A indústria aeroespacial está ampliando o uso da fabricação aditiva para aproveitar as possibilidades oferecidas na obtenção de componentes mais leves, duráveis e de alto desempenho, com menos restrições geométricas, conforme apontado por [Palma, Mao e Burghignoli L.and Goransson 2018]. O uso de metamateriais em aeronaves e seus dispositivos pode resultar em benefícios significativos, como a redução de ruídos e vibrações sem o aumento do peso ou tamanho, bem como a melhoria da eficiência aeroacústica. No entanto, devido às propriedades derivadas principalmente de suas estruturas, os metamateriais acústicos frequentemente exigem projetos complexos que envolvem perdas visco-térmicas e interações acústico-elásticas na geração do comportamento meta.

A maioria dos metamateriais propostos é composta de estruturas periódicas que apresentam a distribuição periódica de um ou mais ressonadores [Airoidi e Ruzzene 2011]. Embora os metamateriais periódicos possam oferecer uma boa atenuação de vibração nas regiões de

bandgap em comparação com os projetos tradicionais de ressonador único, ainda é necessário um estudo mais aprofundado para avaliar o seu desempenho em diferentes condições de operação [Brennan 2006]. Embora os metamateriais apresentem uma boa atenuação de vibração em algumas aplicações, a largura do *bandgap* ainda é estreita em outras situações práticas. Além disso, a obtenção de uma ampla atenuação de vibração de baixa frequência ainda é um desafio para o projeto de metamateriais [Sugino et al. 2017].

O uso de ressonadores com sintonia variável em metamateriais acústicos/elásticos é um desafio atual na pesquisa nessa área. Nesse contexto, os metamateriais inteligentes oferecem a possibilidade de modificar ativamente a faixa de frequência do *bandgap* sem a necessidade de alterar a estrutura geral, além de poderem ser facilmente reconfigurados para diferentes requisitos. Esses metamateriais podem ser localmente ressonantes (mecânicos) e apresentar uma variedade de configurações em tempo real [Airoidi e Ruzzene 2011, Sousa et al. 2018].

Os metamateriais inteligentes podem ser vistos como uma extensão dos materiais inteligentes, que têm sido extensivamente pesquisados desde o final da década de 1990 e encontram aplicações em atuação, controle de ruído e vibração, e sistemas inteligentes. A introdução de materiais piezoelétricos em metaestruturas permite a criação de propriedades adaptativas por meio do ajuste de diferentes parâmetros do circuito elétrico. Portanto, é possível criar metamateriais acústicos inteligentes usando uma matriz periódica de seções com pastilhas piezoelétricos conectadas a circuitos RL *shunt*, resultando em forte atenuação e velocidades de grupo negativas em frequências-alvo.

O uso de metaestruturas *rainbow* é um conceito interessante para obter atenuação de onda de banda larga, que foi originalmente proposto no contexto de ondas ópticas [Tsakmakidis, Boardman e Hess 2007]. Desde então, este conceito tem sido desenvolvido para ondas acústicas [Zhu et al. 2013], ultrassônicas [Tian e Yu 2017] e elásticas [Sanchez-Dehesa et al. 2017]. Além disso, pesquisadores [Meng et al. 2019] mostraram que a distribuição espacial ideal da frequência de sintonia de cada ressonador pode ser mais explorada para diferentes critérios de desempenho em metamateriais multifrequenciais, abrindo novas e inovadoras possibilidades para o design de metamateriais. Para ampliar o *bandgap* de metamateriais localmente ressonantes, um desvio do projeto periódico típico, usando abordagens quase periódicas, quase periódicas ou aperiódicas, é capaz de melhorar significativamente o desempenho dinâmico de metaestruturas. Recentemente, pesquisadores [Celli et al. 2019] mostraram que a desordem aleatória no metamaterial *rainbow* pode fornecer atenuação de onda melhorada quando comparada a configurações posteriormente estudadas. No entanto, os efeitos da desordem aleatória correlacionada nas propriedades do ressonador, no desempenho do alargamento do *bandgap*, permanecem inexplorados.

A Figura 1.4 apresenta alguns designs propostos recentemente envolvendo metamateriais periódicos [Beli et al. 2019], smart [Wang et al. 2017], *rainbow* [Gonella et al. 2019] e metamaterial inteligente *rainbow* [Cardella, Celli e Gonella 2016]. Nesse contexto, o projeto de metaestrutura *rainbow* inteligente pode preencher ainda mais a lacuna na pesquisa combinando as vantagens "fáceis de ajustar" dos materiais inteligentes com as vantagens do

design de metaestrutura *rainbow*.

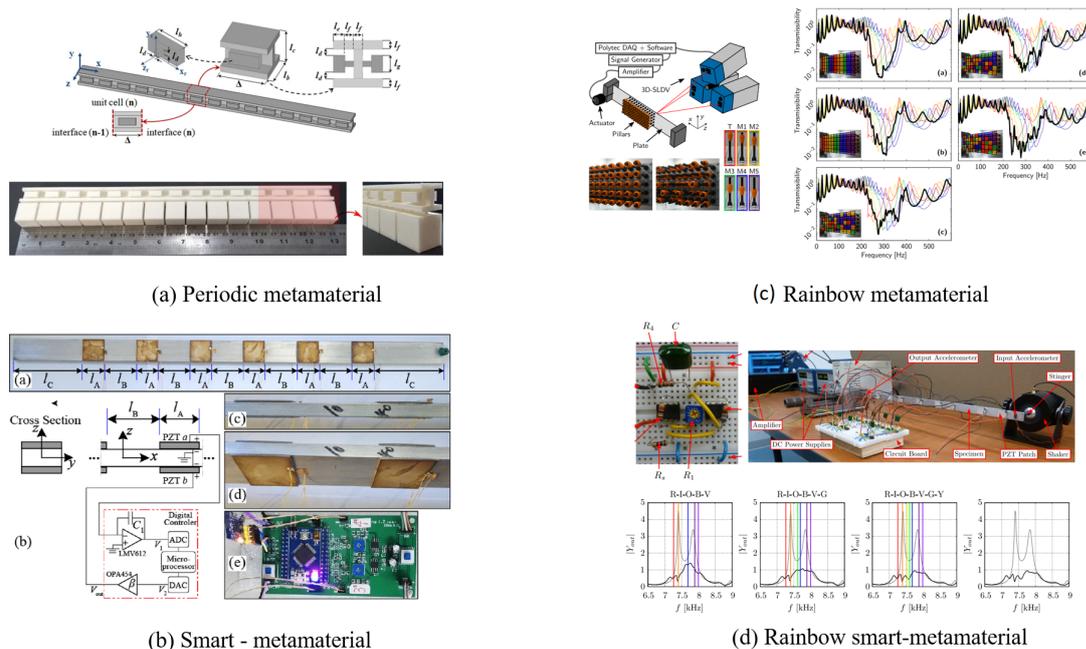


Figura 1.4: Resumo de metamateriais localmente ressonantes: a) metamaterial periódico impresso em 3D, adaptado de [Beli et al. 2019]; b) Metamaterial inteligente, adaptado de [Wang et al. 2017]; c) metamaterial *rainbow*, adaptado de [Gonella et al. 2019]; e d) metamaterial inteligente *rainbow*, adaptado de [Cardella, Celli e Gonella 2016].

1.1 Objetivos desta dissertação

O propósito geral deste estudo é examinar o comportamento dinâmico de três estruturas: uma viga, uma célula hexagonal e uma placa *honeycomb*. Essas estruturas serão sujeitas a diferentes acoplamentos piezoelétricos que serão conectados a circuitos *shunt* resistivos, indutivos, LC em série e paralelo, RL em série e paralelo, e RLC em série e paralelo e também são analisadas as configurações multi-impedâncias e *rainbow*. Os objetivos específicos que se destacam dentro do escopo geral deste estudo são os seguintes:

- Empregar as formulações em MEE adequadas para representar as seguintes metaestruturas: viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*, viga acoplada com uma camada piezoelétrica, célula hexagonal acoplada com uma camada piezoelétrica e placa *honeycomb* acoplada com uma camada piezoelétrica.
- Analisar e cotejar as respostas dinâmicas e de propagação de ondas nas seguintes estruturas: viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*, viga acoplada com uma camada piezoelétrica, célula hexagonal acoplada com uma camada piezoelétrica e placa *honeycomb* acoplada com uma camada piezoelétrica.

- Investigar e cotejar os efeitos que as distintas configurações de circuitos *shunt* provocam nas respostas dinâmicas e de propagação de ondas das seguintes estruturas: viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*, viga acoplada com uma camada piezoelétrica, célula hexagonal acoplada com uma camada piezoelétrica e placa *honeycomb* acoplada com uma camada piezoelétrica.

1.2 Metodologia

A abordagem metodológica deste estudo baseia-se em uma revisão bibliográfica e análise do estado da arte relacionados ao tema. Em seguida, são desenvolvidas modelagens numéricas das estruturas viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*, bem como das estruturas acopladas com uma ou duas camadas piezoelétricas, utilizando a metodologia de elementos finitos (MEE). Além disso, as modelagens numéricas dos circuitos elétricos *shunt* são realizadas para conectá-los aos materiais piezoelétricos. As interações entre as estruturas e os circuitos *shunt* são obtidas através das relações matemáticas de impedância adimensional. Para a modelagem de estruturas com múltiplos piezoelétricos, é utilizada a matriz de transferência para alocar as matrizes de rigidez dinâmica espectral e unir as estruturas e estimar os números de ondas. O software MATLAB é empregado para implementar todas as modelagens, e os resultados obtidos são comparados e validados com a literatura científica.

1.3 Organização do trabalho

A organização deste trabalho é feita através de seis capítulos. No Capítulo 1 é feita a Introdução do trabalho, onde é apresentado o tema principal do trabalho e uma visão geral dos principais pontos abordados ao longo da pesquisa. No Capítulo 2 se encontra a Revisão bibliográfica, onde é feita uma análise detalhada das teorias e literaturas que são utilizadas como base para o tema e para o atual trabalho. No Capítulo 3 é realizada a formulação de forças e deslocamentos em MEE (Método dos Elementos Espectrais) para os elementos viga, célula hexagonal singular e placa *honeycomb*. Nesta seção, é descrito em detalhes a metodologia utilizada para formular o modelo matemático dos elementos eletromecânicos, descrevendo as equações fundamentais que ditam a interação entre a mecânica e a eletrônica dos elementos. No Capítulo 4, são apresentados os resultados das análises do comportamento dinâmico dos elementos viga, célula hexagonal singular e placa *honeycomb* associados às diferentes configurações de acoplamento piezoelétrica conectados aos diferentes tipos de circuitos *shunt*. Aqui estão apresentados os resultados obtidos a partir das simulações numéricas realizadas e discute as implicações dos resultados obtidos para o campo de estudo. Por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho e as sugestões de continuidade para o tema.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Os físicos irmãos Pierre e Jacques Curie demonstraram em torno de 1883 que um material piezoelétrico gera uma tensão elétrica em uma determinada direção quando sofre uma deformação no tamanho ou forma do material (efeito piezoelétrico direto). Posteriormente, o efeito piezoelétrico inverso foi demonstrado matematicamente por Gabriel Lippmann e experimentalmente pelos irmãos Curie [Moura 2020, Conceição 2016].

O primeiro registro de utilização dos materiais piezoelétricos para o controle e atenuação de vibrações foi feito por [Forward 1979], desde então os materiais piezoelétricos têm sido amplamente utilizados como uma solução eficaz para enfrentar diversos desafios de vibração, de acordo com [Gripp e Rade 2018]. Esses materiais são compostos principalmente por elementos como titânio, turmalina, óxido de chumbo, zircônio e quartzo. Dependendo do tipo de material, os piezoelétricos são classificados principalmente em dois tipos, o piezoelectric zirconium titanate (PZT) e o PVDF (Polivinil Fluoreto) [Zabihollah, Sedaghti e Ganesan 2007, Moura 2020]. Conforme indicado por [Chen, Huang e Sun 2014], o tipo PZT é amplamente utilizado para atenuar vibrações devido à sua grande rigidez combinada com certa flexibilidade e resistência.

No caso dos PZTs acoplados em estruturas há também uma classificação baseada na geometria, entre as quais se destacam os atuadores unimorfos, bimorfos e de tubos [Erturk e Inman 2009, Santana 2007, Moura 2020]. O atuador unimorfo é caracterizado pela acoplagem do PZT em apenas uma superfície da estrutura, enquanto que o atuador bimorfo acopla o PZT em duas superfícies [Leo 2007, Moura 2020]. A definição do funcionamento do PZT é baseada na conversão de energia entre o domínio mecânico e elétrico [Fleming, Behrens e Moheimani 2000]. Assim quando o piezoelétrico é submetido a uma tensão mecânica, é gerado um campo elétrico (efeito direto), enquanto que quando o piezoelétrico é submetido a um campo elétrico, é gerada uma tensão mecânica (efeito inverso). [Moura 2020].

Materiais piezoelétricos têm diversas aplicações, especialmente no campo da dinâmica, em que suas propriedades de acoplamento entre tensões e deformações mecâni-

cas e um circuito elétrico são utilizadas para detecção, medição ou controle de vibrações. Alguns dos campos de pesquisa ativos hoje que fazem uso de materiais piezoelétricos para controle vibracional podem ser classificados em: controle passivo, ativo e híbrido [Gripp e Rade 2018, Santana 2007, Thomas, Ducarne e Deü 2012]. As técnicas de controle ativo de vibração utilizam o efeito piezoelétrico reverso, empregando uma fonte de energia elétrica para aumentar a energia mecânica do sistema, esta técnica apresenta alguns desafios, como consumo de energia elevado, problemas de estabilidade, bem como custos associados ao equipamento necessário, tais como amplificadores de potência que são massivos e dispendiosos [Gripp e Rade 2018]. Já as técnicas de controle de vibração passiva conseguem evitar alguns dos problemas vistos na técnica de controle de vibração ativa, pois ao contrário da técnica ativa, usam o efeito piezoelétrico direto, alterando a energia elétrica gerada pelo piezo para promover uma propriedade dinâmica específica na estrutura, sem depender de fonte externa de energia elétrica. Os controles de vibração híbridos combinam técnicas de controle ativo e passivo [Moura 2020, Wu 1996, Viana e Valder Steffen 2006, Conceição 2016]. Os trabalhos de [Silva 2016, Santana 2007, Santos 2008] descrevem, de maneira detalhada, sistemas passivos, ativos e híbridos.

O controle vibracional passivo pode ser alcançado por meio da conexão de PZTs a circuitos elétricos externos compostos por componentes passivos, os quais são também referidos como circuitos *shunt* [Gripp e Rade 2018, Viana e Valder Steffen 2006, Dell'Isola, Maurini e Porfiri 2004, Airoidi e Ruzzene 2011]. As estruturas que possuem esse tipo de controle passivo podem ser denominadas de estruturas inteligentes (em inglês - *smart materials*).

Em certas estruturas, nas quais os piezoelétricos estão acoplados de maneira periódica ao longo da estrutura, pode-se fazer referência a elas como metamateriais inteligentes (em inglês - *smart metamaterials*) [Gripp e Rade 2018, Machado, Fabro e Moura 2020, Wang e Chen 2015, Moura 2020]. A utilização de metamateriais em aplicações de engenharia tem aumentado nos últimos anos [Airoidi e Ruzzene 2011, Zhou, Wu e Zuo 2015]. Cada vez mais o desenvolvimento de materiais com padrões periódicos é realizado levando em conta as necessidades prévias para uma estrutura com potenciais de aplicações que possuem propriedades dinâmicas novas e aprimoradas, como: *bandgaps*, refração negativa e camuflagem acústica [Wen et al. 2016, Ruzzene e Airoidi 2011, Erturk et al. 2016, Casadei et al. 2010]. De modo geral, os metamateriais que são associados a circuitos *shunt* podem apresentar uma gama de efeitos, que vão desde atenuações até possíveis supressões de vibrações em uma banda de frequência, este fenômeno na literatura é definido como *bandgap*. No entanto, quando se trata de metamateriais aplicados ao controle vibracional, estes são definidos como uma distribuição periódica de constante elástica e densidade de massa ao longo de uma estrutura. [Gonella et al. 2019, Zhou, Wu e Zuo 2015, Sugino, Ruzzene e Erturk 2018, Erturk et al. 2016, Wang et al. 2017].

A análise numérica das estruturas inteligentes em estudos de controle, utilizando piezoelétricos com circuitos *shunt*, é predominantemente realizada por meio de análise modal e

métodos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos Espectrais (MEE), o Método de Elemento Finito de Onda (MEFO), o Método de Diferença Finita (MDF), o Método de Matriz de Transferência (MMT) e o Método de Expansão de Onda Plana (MEOP). [Leo 2007, Santana 2007, Moura 2020].

O Método dos Elementos Finitos (MEF) (em inglês *Finite Element Method* - FEM), consiste na discretização do sistema em diversos elementos menores, e a quantidade dessas discretizações tem grande influência na precisão da resposta vibracional do sistema. O MEF é amplamente utilizado para representar simulações de controle vibracional em estruturas inteligentes. [Gripp e Rade 2018, Yan et al. 2017, Moura, Borges e Machado 2020]. Embora o MEF seja um método amplamente utilizado e versátil, apresenta algumas limitações em casos de análises estruturais com alta densidade nodal. Nessas situações, é possível que ocorram erros de discretização devido à necessidade de um elevado número de elementos e elevada demanda de recursos computacionais para solução do sistema de equações envolvido no método [Lee, Kim e Park 2013].

Considerando esses aspectos desfavoráveis em relação ao MEF, a utilização do Método dos Elementos Espectrais (MEE) (em inglês *Spectral Element Method* - SEM) apresenta-se como uma alternativa promissora em relação ao MEF. Isso ocorre porque o MEE emprega um modelo que relaciona as forças e deslocamentos nodais espectrais, os quais são baseados na solução analítica da onda. Dessa forma, o MEE não requer uma discretização com um grande número de elementos, e em casos sem descontinuidades, apenas um elemento é suficiente, evitando, assim, os problemas de discretização e de alta demanda computacional.[Doyle 1989, Lee 2009, Lee, Song e Kim 2016, Choi e Inman 2014, Gripp e Rade 2018, Moura 2020].

O MEE é um método altamente eficaz na representação de diversas geometrias, condições de contorno e materiais, devido em parte às funções de forma dos elementos serem derivadas da solução analítica das equações diferenciais governantes e da solução do sistema dinâmico no domínio da frequência [Lee, Kim e Park 2013]. Isso permite uma redução significativa no número de elementos necessários para modelar a estrutura, aumentando a precisão da solução do sistema dinâmico. Portanto, apenas um elemento é necessário para modelar qualquer parte contínua e uniforme de uma estrutura com o MEE. Além disso, o MEE fornece uma interpretação em forma de onda da dinâmica estrutural, permitindo um controle inovador baseado em estratégias de ondas. [Doyle 1989, Lee 2009, Lee, Kim e Park 2013, Lee, Song e Kim 2016].

2.1 Revisão das publicações científicas

Neste tópico é feita uma revisão bibliográfica, em ordem cronológica, de alguns dos mais importantes trabalhos que utilizam de piezoelétricos com circuito *shunt* e suas derivações para controle de vibrações. Em seguida é feita uma revisão bibliográfica de trabalhos que

utilizam o MEE como método de análise dinâmica.

2.1.1 Utilização de piezoelétricos com circuito shunt

O trabalho de [Forward 1979] é considerado importante na área de controle de vibrações, pois foi um dos primeiros a utilizar transdutores piezoelétricos e circuitos eletrônicos para esse fim. Forward realizou experimentos com vários transdutores e barras de metal para verificar seus modelos usando circuitos elétricos passivos e ativos para amortecer as vibrações. Forward demonstrou a viabilidade de remover vibrações de grandes estruturas complexas, como elementos ópticos, usando transdutores piezoelétricos e um circuito de *feedback* ativo. O estudo de [Hagood e Von Flotow 1991] descreve uma investigação sobre a possibilidade de dissipar a energia mecânica com material piezoelétrico com circuitos elétricos passivos. O material piezoelétrico com circuitos apresenta dependência de frequência na rigidez e fator de perda, dependendo também do circuito elétrico e o modelo utilizado pelos autores é especializado para dois tipos de circuitos: resistor (R) e resistor-indutor (RL). Com o circuito resistivo, as propriedades do material apresentam dependência de frequência semelhante a materiais viscoelásticos, mas são mais rígidos e independentes da temperatura. Com o circuito resistor-indutor, há uma ressonância elétrica que pode ser sintonizada com ressonâncias estruturais, semelhante a um amortecedor de vibrações mecânicas.

Os estudos de [Hollkamp 1994] possuem destaque por ser um dos primeiros a investigar e estudar a utilização de multi-impedâncias utilizando circuito *shunt* resistor-indutor-capacitor (RLC) acoplado às pastilhas piezoelétricas. Estes dispositivos, compostos por um elemento piezoelétrico e um *shunt* ressonante, são semelhantes a absorvedores de vibração mecanicamente amortecidos. Com o uso de circuitos RLC adicionais implementados ao *shunt* ressonante, os amortecedores multimodo são capazes de suprimir múltiplos modos estruturais com apenas um dispositivo piezoelétrico.

[Wu 1996] estuda um sistema de amortecimento passivo piezoelétrico usando um circuito *shunt* RL conectado a um elemento piezoelétrico. Sob condições ideais de sintonia, a amplitude da curva de deslocamento vs frequência diminui com aumento da resistência de *shunt*, chegando a um ponto plano na resistência ideal. A partir daí, a amplitude continua a cair e dois picos aparecem ao seu redor, que aumentam com mais resistência adicionada ao circuito. Neste trabalho [Wu 1996] também questiona a formulação proposta por [Hagood e Von Flotow 1991] para o circuito *shunt* RL em série e argumenta-se que a conexão RL em série não é apropriada quando a resistência tem um valor elevado, pois isso exigiria ajustes iterativos entre a indutância e a resistência até que a sintonização ideal fosse alcançada. Em um próximo trabalho [Wu e Bicos 1997], Wu analisa uma técnica de amortecimento estrutural e controle de vibração passivo usando um elemento piezoelétrico com um circuito *shunt* RL. Experimentos foram realizados em várias estruturas, incluindo placas compostas de fibra de vidro/epóxi com seções de PZT incorporados e vigas cantiléver com manchas de superfície piezoelétricas aderidas e os resultados mostraram uma grande redução

de vibração em resposta ressonante, principalmente em uma placa composta com oito PZT incorporados. Em 1998 [Wu 1998] apresenta um método para controlar a vibração estrutural usando um único transdutor piezoelétrico (PZT). O método consiste em usar um circuito de bloqueio em série com circuitos de derivação resistor-indutor paralelo, projetados para controlar cada modo estrutural. O circuito de bloqueio é composto por um ou mais circuitos anti-ressonantes capacitor-indutor, que são projetados para produzir impedância elétrica infinita nas frequências naturais de todos os outros circuitos de derivação. Quando conectados aos terminais do PZT, os circuitos de derivação formam um circuito de derivação composto para a derivação de modo múltiplo, que não interferem entre si.

[Behrens, Fleming e Moheimani 2001] É um dos primeiros pesquisadores a propor uma técnica que usa um controlador de capacitor negativo para amortecer vários modos de vibração, tendo desempenho comparável ao amortecimento passivo, porém mais fácil de implementar, menos sensível a variações ambientais e atua como controlador de vibração de banda larga e para múltiplos modos.

Nos estudos de [Caruso 2001] vários tipos de circuitos são comparados quanto ao seu desempenho de amortecimento, incluindo RL, RL paralelo e RLC paralelo. O circuito *shunt* paralelo RL apresenta uma taxa de decaimento ligeiramente menor que o circuito série RL, mas o circuito RLC é menos eficiente que o RL no amortecimento passivo.

[Thorp, Ruzzene e Baz 2001] utiliza camadas de piezoelétricos com *shunt* para controlar a propagação de ondas longitudinais em uma haste. Isso é feito por meio de uma estrutura periódica que filtra as ondas em bandas de frequência específicas, chamadas bandas de parada - ou *stop-bands*, que podem ser ajustadas. O modelo considera a aperiodicidade devido ao ajuste na distribuição da impedância elétrica. A desordem na periodicidade amplia as bandas de parada e produz energia de vibração perto da fonte de excitação. As simulações do autor mostram a eficácia do tratamento proposto, que combina características de amortecimento, atenuação e localização, sem necessidade de energia de controle.

Um dos principais desafios na implementação de *shunt* ressonantes é a necessidade de indutâncias elevadas para controlar modos de baixa frequência, o que pode resultar em indutores volumosos e pesados. Para superar essa dificuldade, [Park e Inman 2003] discutem as desvantagens de usar piezoelétricos com circuitos *shunt*. Para resolver esses problemas, um circuito *shunt* piezoelétrico melhorado é projetado utilizando capacitores externos. O circuito aperfeiçoado mostrou-se eficaz na redução significativamente da vibração direcionada de uma viga balançando, com base tanto em evidências teóricas quanto experimentais. Essa mesma estratégia de utilizar capacitores adicionais externos associados ao circuito *shunt* foi proposta por [Flemming, Behrens e Moheimani 2003]. [Dell'Isola, Maurini e Porfiri 2004] projeta e valida duas configurações de circuitos, uma puramente resistiva e outra resistivo-indutiva. A técnica apresentada mostrou redução significativa na indutância quando comparada ao circuito ressonante com um único transdutor. Além disso, a indutância necessária foi mostrada diminuir ao aumentar o número de elementos piezoelétricos.

[Peng, Ng e Hu 2005] propõe um critério de desempenho para otimizar a posição de atuadores piezoelétricos em placas flexíveis baseado na maximização da controlabilidade. De forma similar [Simões Moita et al. 2006] busca-se também a otimização da estrutura laminada para minimizar a vibração e maximizar a primeira frequência natural. Também há uma otimização da posição dos piezoelétricos para maximizar sua eficiência. Em [Viana e Valder Steffen 2006] examinam indutores sintéticos aplicados a circuitos *shunt* ressonantes foram analisados experimentalmente. [Faria, Rade e Rade 2006] Sugere uma otimização dos circuitos *shunt* resistivo e ressonante em série e paralelo. A aplicação envolve uma viga com uma pastilha piezoelétrica acoplada a um circuito *shunt* em diferentes topologias. Em [Zhang e Kang 2014] é realizada uma investigação sobre a otimização da topologia do atuador piezoelétrico e das camadas de sensores em uma placa, visando alcançar o melhor desempenho no controle de vibração.

Alguns trabalhos vão além da utilização em vigas, hastes, barras e placas. No artigo de [Min, Duffy e Provenza 2010] é investigado a efetividade do uso de um piezoelétrico com circuito *shunt* no controle de vibrações de pás de rotores de turbomáquinas, especialmente em condições com rotação centrífuga. O trabalho se concentra em uma estratégia de amortecimento ressonante utilizando piezoelétricos com circuito *shunt* colados em placas. Já no estudo de [Seba, Ni e Lohmann 2006] sugere uma nova proposta de sintonização dos parâmetros de um circuito *shunt* através da otimização da análise MEF, para isso foram construídas duas configurações experimentais. Na primeira, o novo método foi validado em uma viga engastada. Já na segunda parte, essa abordagem foi utilizada na tentativa de atenuar ruído, vibração e aspereza de um chassi.

No artigo de [Erturk e Inman 2009], é proposta a aplicação de uma solução analítica a configurações de barra bimorfo equipados com camadas piezocerâmicas conectadas tanto em série quanto em paralelo. Os autores apresentam uma validação experimental das expressões de saída de tensão e resposta vibracional simplificadas de uma barra bimorfo com massa na ponta, também analisam o desempenho do dispositivo bimorfo para excitações de frequência de ressonância de curto-circuito e circuito aberto, comprovando a precisão do modelo proposto.

[Spadoni, Ruzzene e Cunefare 2009] utiliza piezoelétricos com circuito *shunt* postos de maneira periódica para controlar as ondas que se propagam na superfície placas e suas vibrações correspondentes. Essas seções de piezo 'shuntados' funcionam como fontes de incompatibilidade de impedância, resultando em fenômenos de interferência causados pela interação entre ondas incidentes, refletidas e transmitidas. Essa configuração facilita a criação de *bandgaps* ou bandas de parada. O artigo de [Casadei et al. 2010] também utiliza a implementação em configuração periódica de elementos piezoelétricos com circuitos *shunt* resistivo-indutivos (RL) individuais em uma disposição de 4x4 para a supressão de ruído de larga faixa de uma placa flexível.

[Goldstein 2011] discute um novo método para projetar e adaptar *shunt* piezoelétricos ressonantes multimodais, este método difere dos métodos anteriores de derivação multimo-

dal, "bloqueio de corrente" e "fluxo de corrente", e implementa a rede de derivação com um número menor de componentes elétricos discretos, permitindo o ajuste em tempo real dos parâmetros de derivação. [Ruzzene e Airoidi 2011] também utiliza *shunt* ressonante e apresenta uma técnica para projetar um metamaterial unidimensional ajustável, utilizando piezoelétricos com *shunt* ressonante e postos de forma periódica, que sintoniza o sistema na frequência de ressonância desejada. O que permite a análise de *bandgaps* e atenuação das ondas. Em outro trabalho [Airoidi e Ruzzene 2011] também utiliza um arranjo periódico de PZTs com *shunt* ressonante, porém utiliza-se aqui de multi-impedâncias que podem ser ajustadas para atingir diferentes modos estruturais da viga. A utilização de piezoelétricos com circuito *shunt* ressonante também é feita por [Wang et al. 2011, Wang, Chen e Wen 2011] com o objetivo de obter atenuação de vibração e *bandgaps*. [Casadei et al. 2012] realiza um estudo da combinação de piezoelétricos com *shunt* ressonantes periódicos e redes conversoras de impedância negativa em um painel de alumínio, com o objetivo de avaliar a possibilidade de aproveitar as vantagens de ambos os conceitos. No trabalho de [Zhou, Wu e Zuo 2015] é proposto arranjos piezoelétricos periódicos com *shunt* de circuito ressonante de alta ordem e compara-se o desempenho de atenuação de vibrações entre o *R-shunt*, *RL-shunt* e o *shunt* de alta ordem proposto.

Nos trabalhos de [Chen, Huang e Sun 2014, Wang e Chen 2015] investiga-se o controle de *bandgaps*. Em [Chen, Huang e Sun 2014] é apresentada uma nova classe de metamateriais elásticos ativos que utilizam um *shunt* piezoelétrico de capacitância negativa. A fim de investigar o controle do *bandgap* em um sistema ativo. [Wang e Chen 2015] descreve um método para atenuar a propagação de vibrações de baixa frequência em uma viga de flexão usando arranjos periódicos de piezoelétricos *shunt* com circuitos amplificadores-ressonadores buscando prever os *bandgaps* e fatores de atenuação.

Na utilização de circuitos *shunt* conectados com metamateriais, [Nouh, Aldraihem e Baz 2016, Erturk et al. 2016, Lallart, Bao e Guyomar 2017] discutem a utilização de metamateriais compostos por arranjos ressonantes periódicos visando a criação e controle de *bandgaps*. De maneira similar [Sugino et al. 2017] trata do desenvolvimento de metaestruturas eletromecânicas flexíveis com camadas piezoelétricas conectadas a circuitos de derivação ressonantes que exibem propriedades de atenuação de vibração e *bandgaps*. Em outro artigo [Erturk et al. 2017] demonstra que o número de ressonadores necessários para que o *bandgap* apareça aumenta com o aumento da frequência alvo, e há um número ótimo e finito de ressonadores que dá um *bandgap* maior do que o *bandgap* do ressonador infinito em metamateriais localmente ressonantes usando análise modal.

[Cardella, Celli e Gonella 2016, Gonella et al. 2019] propõe e testa uma estratégia para atenuar ondas de banda larga em guias de onda eletromecânicos com inclusões piezoelétricas desviadas, criando uma "*rainbow trap*", que funciona de forma semelhante à multi-impedâncias.

[Wang et al. 2017] apresenta o uso de controladores digitais para *shunt* piezoelétrico multi-ressonante ativo em metamateriais elásticos com *patches* piezoelétricos e foi desenvol-

vido o método para projetar *bandgaps* de ressonância única ou multi-ressonante, com grande atenuação em até três bandas de frequência. [Sugino, Ruzzene e Erturk 2018] projeta e analisa vigas de metamateriais piezoelétricos com circuitos de impedância sintética desviados de células unitárias segmentadas com pares de eletrodos. Essa estrutura visa superar as limitações de *bandgap* do projeto localmente ressonante, unindo metamateriais piezoelétricos e *shunt* de impedância sintética. [Erturk, Sugino e Ruzzene 2020] descreve uma estrutura analítica para modelar placas piezoelétricas finas em metamateriais para prever a formação de *bandgap* de baixa frequência em configurações estruturais finitas.

[Santana 2007, Hussein, Leamy e Ruzzene 2014, Gripp e Rade 2018, Yan et al. 2017] fornecem uma revisão bibliográfica completa com visão geral dos desenvolvimentos históricos, revisão técnica do progresso recente e projeta um olhar para o futuro do campo de materiais e estruturas fonônicas, que se concentra na vibração e na engenharia acústica e física da matéria condensada.

[Mukhopadhyay et al. 2021] é estudada a análise do acoplamento de PZTs com circuitos *shunt* em estruturas *honeycomb*, para isso eles consideram cada haste do *honeycomb* como uma viga, utilizam a matriz de rigidez de uma única viga para caracterizar o comportamento de deformação da estrutura *honeycomb*. Como toda a rede em consideração é perfeitamente periódica, podemos obter o comportamento global de toda a rede (como propriedades elásticas efetivas) com base na análise da deformação de uma única célula unitária.

2.1.2 Utilização do método dos elementos espectrais

A elaboração de um modelo de estrutura com o MEE é similar ao MEF, porém com uma distinção significativa: O MEF é um método de solução no domínio do tempo no qual a equação de elementos finitos é formulada no domínio do tempo e resolvida usando um método de integração numérica. Por outro lado, o MEE é um método de solução no domínio da frequência no qual a equação do elemento espectral é formulada no domínio da frequência e resolvida usando o método de análise espectral baseada na transformada rápida de Fourier (do inglês Fast Fourier Transform - FFT) [Lee e Kim 2000, Lee 2009]. Em situações unidimensionais, a Transformada Discreta de Fourier elimina a variável temporal e a frequência se converte em uma variável independente, transformando a equação diferencial parcial original no domínio do tempo em uma equação diferencial ordinária no domínio da frequência, cuja resolução pode ser alcançada de forma precisa [Conceição 2016]. No MEE, a matriz de rigidez dinâmica exata, conhecida como matriz de elemento espectral, é formulada no domínio da frequência por meio de soluções precisas de onda para as equações diferenciais governantes. Consequentemente, em teoria, o MEE oferece soluções exatas no domínio da frequência com o mínimo de graus de liberdade necessário [Lee 2009].

Foi em [Trainiti et al. 1978] que o Método do Elemento Espectral foi proposto pela primeira vez, com a formulação da matriz de rigidez dinâmica para elementos de viga de Euler-Bernoulli uniformes de dois nós no domínio da frequência. [Lee e Kim 2000] também foram

pioneiros na introdução do MEE, apresentam o MEE e o Método de Análise Modal Baseado em Elementos Espectrais (MAM) para vigas de duas camadas elástico-piezoelétricas. Em outro artigo [Lee e Kim 2001] apresentam uma abordagem baseada em elementos espectrais para analisar vigas com amortecimento de camada restrita ativa (ACLD, do inglês *Active Constrained Layer Damping*). Estes estudos demonstraram que o modelo de elemento espectral oferece resultados precisos e confiáveis em comparação com o modelo convencional de elemento finito.

Em seu livro *Wave Propagation in Structures* [Doyle 1989] empregou o elemento espectral, uma formulação espectral do elemento finito, para investigar a propagação de ondas em estruturas. Já no livro *Spectral Elements Method In Structural Dynamics* [Lee 2009] apresenta análises espectrais de estruturas simples e também de novas variedades de aplicações como compósitos laminados e detecção de danos.

[Sohn et al. 2010] propõe um modelo espectral de elementos para representar a resposta dinâmica de um sistema no qual um wafer piezoelétrico único é conectado a uma viga de base. No artigo de [Lee, Kim e Park 2013] descreve o desenvolvimento de um modelo de elemento espectral para vigas compostas inteligentes, as quais são compostas por uma viga de base composta laminada e uma camada de PZT conectada à sua superfície. Em [Lonkar e Chang 2014] é descrito o desenvolvimento de um código de análise de elementos espectrais para simular a propagação de ondas ultrassônicas em estruturas compostas induzidas por piezoelétricos. Em seu trabalho [Choi e Inman 2014] apresenta a modelagem de uma estrutura de cabos utilizando o MEE com o objetivo de obter uma modelagem preditiva de espaçonaves. O modelo utilizado é uma viga dupla que emula a estrutura de cabos, e a modelagem MEE permite definir facilmente a localização e o número de conexões entre as vigas.

Muitos pesquisadores empregam o MEE para modelar suas estruturas de pesquisa e, para validação dos resultados obtidos, utilizam o MEF. [Wu e Li 2015] faz um estudo sobre as grades piezoelétricas 'Kagome' (estrutura trihexagonal). São investigadas as propriedades dinâmicas de malhas Kagome piezoelétricas tridimensionais (3D), tanto sem quanto com defeitos de material. É adotado o MEE e os resultados obtidos são comparados com os do MEF e com os da literatura existente, demonstrando que o MEE pode ser efetivamente usado para estudar as grades piezoelétricas Kagome 3D. [Fernandes, Machado e Dantas Nóbrega 2019] apresenta um estudo sobre torres autoportantes de transmissão de potência utilizando o MEE e faz a validação do modelo utilizando o MEF. E [C. M. Austin et al. 2021] discute uma técnica para suprimir vibrações usando uma viga de metamaterial. A viga consiste em uma série de ressonadores locais com massas iguais, mas frequências naturais diferentes, ligados em série. O MEE é utilizado para modelar a viga de metamaterial, e os resultados são verificados por meio do MEF. Em seu artigo [Liu et al. 2020] projeta uma nova estratégia para investigar o *bandgap* de vibração e as características de sintonia ativa das vigas de metamateriais, usando pares de atuador/sensor piezoelétrico periodicamente colocados ao longo do eixo da viga. É utilizada a estratégia de controle de *feedback* proporcional negativo para

fornecer rigidez de controle ativo positivo para as seções com piezoelétricos. O MEE é usado para calcular as respostas dinâmicas, e a precisão é validada pelo MEF. Já no caso de [Silva et al. 2020] em seu trabalho são comparados diferentes métodos numéricos para modelar e analisar a vibração do condutor de linha de transmissão aérea. O cabo é modelado usando quatro técnicas numéricas: MEF, MEE, método da matriz de transferência espectral (MMTE) e método dos elementos finitos de onda (WFE).

[Fabro et al. 2016] sugere um método para analisar a incerteza de vigas com ressonadores acoplados periodicamente. A abordagem combina a aproximação WKB com o Método dos Elementos Espectrais. Esse método proporciona uma estrutura para representar a aleatoriedade com correlação espacial da célula unitária periódica e, em seguida, quantificar os efeitos dessa incerteza nos intervalos de banda.

[Lee, Song e Kim 2016] propõe um Método de Elementos Espectrais para analisar a vibração de uma viga sujeita a uma força de ponto móvel. O método usa a teoria de vigas de Timoshenko para modelar a viga, dividindo o comprimento da viga em um modelo de dois elementos.

[Machado, Fabro e Moura 2020] apresenta uma viga piezoelétrica de que tem como objetivo controlar as ondas de flexão em vigas utilizando abordagens de *shunt* simples e multi-ressonantes. A estrutura inteligente é modelada usando o método do elemento espectral, e é mostrado que o número de onda efetivo apresenta comportamento localmente ressonante nas mesmas frequências de atenuação da vibração para ambas as abordagens, indicando que cada circuito *shunt* está associado independentemente a uma frequência de atenuação. A abordagem de elementos espectrais apresentada neste artigo é considerada precisa e simples para o projeto de vigas de metamateriais inteligentes.

Capítulo 3

Método de Elemento Espectral

Neste capítulo, é empregado o Método do Elemento Espectral para modelar o comportamento dinâmico de elementos como a viga Euler-Bernoulli e a viga Euler-Bernoulli com uma camada piezoelétrica. As formulações matemáticas apresentadas neste capítulo são embasadas no trabalho de [Moura 2020].

3.1 Formulação geral

Partindo da equação de movimento de um elemento estrutural, [Doyle 1989] e [Lee 2009] formularam o elemento espectral. A equação de movimento de um componente estrutural é descrita por:

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(x, t) + \mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{p}(x, t) \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é o operador estrutural e \mathcal{M} é o operador inercial. O domínio do tempo é representado por t e as coordenadas espaciais são representadas por x . Os termos $\mathbf{u}(x, t)$ e $\mathbf{p}(x, t)$ são os vetores dos campos de deslocamento e de forças externas, respectivamente. As forças externas e os deslocamentos podem ser representados na forma espectral por:

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{U}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.3)$$

Ao substituir os componentes espectrais de forças e deslocamentos, $\mathbf{P}(x, \omega_n)$ e $\mathbf{U}(x, \omega_n)$, respectivamente, nas equações 3.2 e 3.3, na equação 3.1 e considerando que esses componentes satisfaçam a equação 3.1 em cada frequência discreta ω_n , tem-se:

$$\mathcal{L}\mathbf{U}(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}(x, \omega_n) = \mathbf{P}(x, \omega_n) \quad (3.4)$$

As funções de forma dinâmicas referem-se às funções de forma que são dependentes da frequência. Tais funções são empregadas para a formulação da matriz de rigidez espectral, a qual é obtida a partir da seguinte equação homogênea:

$$\mathcal{L}\mathbf{U}(x) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}(x) = 0 \quad (3.5)$$

Pode-se empregar uma solução geral do seguinte tipo, uma vez que a equação 3.5 é válida para todas as frequências discretas:

$$\mathbf{U}(x) = ce^{-ikx} \quad (3.6)$$

Aplicando a solução geral da equação 3.6 na equação 3.5, obtém-se um problema de autovalor, no qual k representa o número de ondas e c é um vetor de constantes:

$$\mathbf{A}(k, \omega)c = 0 \quad (3.7)$$

Para que haja uma solução não trivial, é necessário que o determinante de $\mathbf{A}(k, \omega)$ tenda a zero. Portanto, forma-se uma equação característica que depende do número de ondas:

$$k^p + \alpha_{p-1}(\omega)k^{p-1} + \alpha_{p-2}(\omega)k^{p-2} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (3.8)$$

A relação de dispersão, representada pela equação 3.8, apresenta raízes distintas (k_1, k_2, \dots, k_p) em uma frequência discreta ω . A associação do autovetor c pode ser calculada com base na equação 3.7, utilizando:

$$\mathbf{c}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = a_i \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.9)$$

Para tornar um componente do vetor ϕ_i unitário e coletar os outros por φ_i , normaliza-se o autovetor \mathbf{c}_i . As constantes a_i são determinadas a fim de satisfazer as condições de contorno. Assim, após definir k_i e c_i para satisfazer o problema de autovalor apresentado na equação 3.7, a solução geral para a equação 3.5 pode ser representada por:

$$\mathbf{U}(x) = \sum_{i=1}^P \phi_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(x, \omega) &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_p] \Lambda(x, \omega) \\
\Lambda(x, \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}] \\
\mathbf{a} &= \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}^T
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A equação 3.10 deve satisfazer as condições de contorno nos nós para $x = 0$ e $x = L$, considerando-se uma estrutura de comprimento L . Os deslocamentos e as inclinações são comumente referidos como variáveis primárias, e suas especificações no contorno constituem as condições geométricas de contorno. É possível relacionar as variáveis primárias ao campo de deslocamento por meio da seguinte forma:

$$\mathbf{D}(x) = L_{GB} \mathbf{U}(x) \tag{3.12}$$

A equação acima utiliza o operador diferencial linear L_{GB} para as condições de contorno geométricas. Portanto, ao aplicar a solução geral da equação 3.10 na equação 3.12, que corresponde a um elemento finito com dois nós, obtém-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}(0) \\ \mathbf{D}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{GB} \mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ L_{GB} \mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \tag{3.13}$$

assim,

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \mathbf{d} \tag{3.14}$$

Ao substituir a equação 3.14 na equação 3.10, é possível obter:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{N}(x, \omega) \mathbf{d} \tag{3.15}$$

A função de forma dinâmica definida por " $\mathbf{N}(x, \omega)$ " é expressa como:

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \tag{3.16}$$

As variáveis secundárias, como as forças inerciais e os momentos, são comumente referidas como tais, enquanto as especificações de seus contornos são consideradas as condições de contorno naturais. A teoria de resistência dos materiais estabelece a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento por meio da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x) = L_{NB} \mathbf{U}(x) \tag{3.17}$$

O operador diferencial linear L_{NB} é utilizado para as condições de contorno naturais. Dessa forma, substituindo a equação 3.15 na equação 3.17 e levando em conta que as forças

nodais \mathbf{f}_c são concentradas nos dois nós do elemento, é possível obter:

$$\mathbf{f}_c = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}(0) \\ +\mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} \quad (3.18)$$

com

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}\mathbf{N}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.19)$$

onde,

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}\mathbf{e}(x, \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral é representada pela matriz $\mathbf{S}(\omega)$. Esta matriz, que pertence ao domínio da frequência, contém informações sobre o comportamento da estrutura.

3.2 Elemento espectral de viga de Euler Bernoulli

As vigas são elementos estruturais caracterizados por apresentarem uma seção transversal com dimensões menores que seu comprimento total. Uma medida comum para estabelecer suas proporções é a razão entre o comprimento e a largura, sendo desejável um valor igual ou inferior a dez. A modelagem matemática clássica de um elemento de viga é a de Euler-Bernoulli, o qual pressupõe dimensões uniformes e prismáticas [Conceição 2016, Moura 2020]. Esta possui as relações de equilíbrio conforme mostra a Figura 3.1.

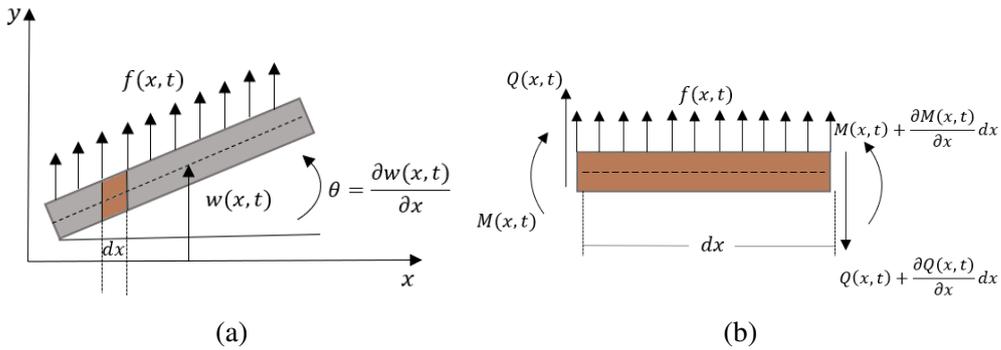


Figura 3.1: Ilustração de um elemento viga. a) Viga em flexão; b) Diagrama de corpo livre de uma seção da viga (Adaptado de [Conceição 2016] e [Moura 2020]).

As variáveis de deslocamento transversal $w(x, t)$, rotação $\theta(x, t)$, força cortante $Q(x, t)$ e momento fletor $M(x, t)$ podem ser utilizadas para representar os esforços que ocorrem em um elemento de viga com sua seção transversal sujeita a uma força externa $f(x, t)$. Dessa

forma, realizando a soma das forças e momentos de acordo com as relações de equilíbrio de Newton, obtém-se a seguinte relação, conforme descrito em [Hibbeler 2010]:

$$-(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}) + f(x, t)dx + Q = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3.21)$$

$$(M + \frac{\partial M}{\partial x}) - (Q + \frac{\partial Q}{\partial x})dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.22)$$

A densidade de massa é representada por ρ , e A é a área da seção transversal. Dividindo as equações 3.21 e 3.22 por dx para simplificação, e substituindo a deflexão pelo momento fletor, é possível expressar a equação do movimento para uma viga de Euler-Bernoulli na seguinte forma, conforme descrito em [Inman 2014, Meirovitch 2010, Rao 2008]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} + f(x, t) \quad (3.23)$$

Assumindo que as constantes do módulo de Young E , momento de inércia I , densidade ρ e área transversal A são fixas, a equação 3.23 pode ser simplificada para representar um movimento livre, conforme a seguir, quando nenhuma força externa é aplicada, ou seja, $f(x, t) = 0$:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.24)$$

Considerando que o deslocamento transversal e a rotação são representados na forma espectral por:

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.25)$$

$$\theta(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.26)$$

Na equação de movimento livre, os elementos espectrais de deslocamento transversal e rotação são representados por $W(x, \omega_n)$ e $\Theta(x, \omega_n)$, respectivamente. Quando os componentes espectrais das equações 3.25 e 3.26 são substituídos na equação 3.24, e supondo que os componentes $W(x, \omega_n)$ e $\Theta(x, \omega_n)$ satisfaçam a equação 3.24 em cada frequência discreta ω , a equação homogênea resultante é a seguinte:

$$EI \frac{\partial^4 W(x, \omega)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A W(x, \omega) = 0 \quad (3.27)$$

Podemos adotar uma solução geral do tipo apresentado na resolução da equação 3.6, de forma similar a esta situação.

$$W = ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.28)$$

Ao utilizar a solução geral da equação 3.28 na equação 3.27, podemos obter um problema de autovalor similar ao apresentado na equação 3.7. Dessa forma, podemos utilizar o método descrito em [Lee 2009] para obter a relação de dispersão a seguir:

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (3.29)$$

onde k_F é o número de onda definido pela seguinte relação

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (3.30)$$

A conformidade dos demais números de onda é determinada pela sua relação com k_F , da seguinte maneira:

$$k_1 = -k_2 = k_F \quad k_3 = -k_4 = ik_F$$

Ao aplicar os números de onda e autovetores normalizados, obtemos a seguinte solução geral:

$$W = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{ik_F x} + a_4 e^{k_F x} = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{a} \quad (3.31)$$

onde:

$$\mathbf{e}(x; \omega) = [e^{-ik_F x}, e^{-k_F x}, e^{ik_F x}, e^{k_F x}], \quad \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T$$

É possível estabelecer uma relação entre os deslocamentos e rotações nodais de uma viga finita de comprimento L , cujos nós estão localizados nos contornos $x = 0$ e $x = L$, e o campo de deslocamento através do seguinte método:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}'(0, \omega) \\ \mathbf{e}(L, \omega) \\ \mathbf{e}'(L, \omega) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (3.32)$$

onde

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{ik_F L} & e^{k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Ao se considerar $\mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega)^{-1} \mathbf{d}$, é possível representar o campo de deslocamentos nodais de um elemento de viga em termos de seus graus de liberdade (GDL). Portanto,

eliminando o vetor de constantes \mathbf{a} da equação 3.31 e considerando os GDLs com o vetor \mathbf{d} , a solução geral pode ser expressa da seguinte forma:

$$W(x) = \mathbf{N}_B(x, \omega) \mathbf{d} \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{N}_B(x, \omega)$ é definido por:

$$\mathbf{N}_B(x, \omega) = \mathbf{e}(x; \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (3.35)$$

Existe uma relação entre os componentes de força cortante e momento fletor e o componente espectral $\hat{W}(x)$, dada por:

$$\mathbf{f}_c = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.36)$$

onde

$$Q(x) = -EIW'''(x), \quad M(x) = EIW''(x) \quad (3.37)$$

Ao se substituir a equação 3.34 nas relações espectrais apresentadas na equação 3.36, é possível obter a seguinte relação:

$$\mathbf{S}_B(\omega) \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}_c(\omega) \quad (3.38)$$

A equação resultante é expressa como $\mathbf{S}_B(\omega)$, que é a matriz de rigidez espectral para uma viga de Euler-Bernoulli. A partir da relação $\mathbf{f}_c = \mathbf{G}_B(\omega) \mathbf{a}$, pode-se obter:

$$\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{G}_B(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \quad (3.39)$$

onde

$$\mathbf{G}_B(\omega) = -EI \begin{bmatrix} -ik_1^3 & -ik_2^3 & -ik_3^3 & -ik_4^3 \\ -ik_1^2 & -ik_2^2 & -ik_3^2 & -ik_4^2 \\ ik_1^3 e^{-ik_1 L} & ik_2^3 e^{-ik_2 L} & ik_3^3 e^{-ik_3 L} & ik_4^3 e^{-ik_4 L} \\ k_1^2 e^{-ik_1 L} & k_2^2 e^{-ik_2 L} & k_3^2 e^{-ik_3 L} & k_4^2 e^{-ik_4 L} \end{bmatrix}$$

Os termos da matriz de rigidez dinâmica para uma viga, conforme descrito em [Lee 2009], são extensos e sua obtenção analítica é computacionalmente custosa. Por essa razão, é recomendável utilizar as matrizes $\mathbf{G}_B(\omega)$ e $\mathbf{H}_B(\omega)$ no cálculo [Moura 2020].

3.2.1 Elemento espectral pórtico

A Figura 3.2 apresenta a representação do modelo elementar de pórtico, que leva em consideração os graus de liberdade longitudinal, vertical e rotacional em sua formulação. Ao utilizar o elemento de viga e considerar uma deformação pequena, a interação entre as duas deformações pode ser negligenciada. Sendo assim, a matriz de rigidez do pórtico será composta pelas rigidezes longitudinal e de flexão [Sousa 2021].

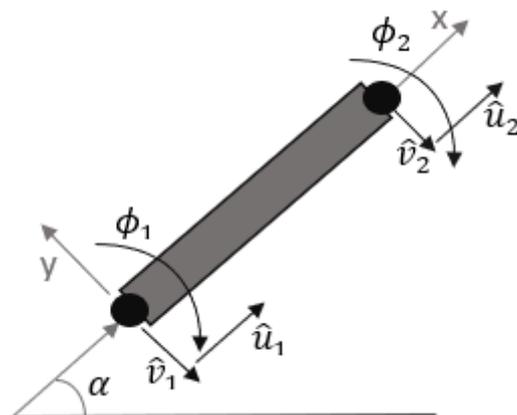


Figura 3.2: Modelagem do elemento pórtico. (Adaptado de [Sousa 2021])

A partir das soluções espectrais referentes aos deslocamentos longitudinais e verticais, podemos observar:

$$\hat{u}(x, w) = A_1 e^{-ik_r x} + A_2 e^{ik_r(L-x)} \quad (3.40)$$

$$\hat{v}(x, w) = A_3 e^{ikx} + A_4 e^{-kx} + A_5 e^{ik(L-x)} + A_6 e^{k(L-x)} \quad (3.41)$$

onde:

$$\mathbf{e}(x, w) = [e^{ik_r x}, e^{-ik_r x}, e^{-kx}, e^{-ik_r(L-x)}, e^{-ik(L-x)}, e^{-k(L-x)}] \quad (3.42)$$

$$\mathbf{a} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6]^T \quad (3.43)$$

A relação entre os deslocamentos nodais espectrais e as flexões de um elemento de pórtico está diretamente ligada às condições de contorno nos nós, que são definidas no nó 1 ($x = 0$) e no nó 2 ($x = L$). Mais precisamente, temos:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{v}(0) \\ \hat{v}'(0) \\ \hat{u}(L) \\ \hat{v}(L) \\ \hat{v}'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(0, \omega) \\ e(0, \omega) \\ e'(0, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e'(L, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.44)$$

Aplicando as condições de contorno em \mathbf{H} e utilizando a equação $\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \mathbf{d}$, podemos obter a matriz espectral nodal na forma:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-ik_r L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ 0 & -ik & -k & 0 & ik e^{-ikL} & k e^{-kL} \\ e^{-ik_r L} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ikL} & e^{-kL} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -ik e^{-ikL} & -k e^{-kL} & 0 & ik & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.45)$$

Para obter o vetor de forças nodais, é necessário aplicar as condições de contorno e resolver as equações diferenciais, utilizando as formulações a seguir: k , que é o número de onda da viga obtido pela equação apresentada, e $k_r = \omega \sqrt{E/A}$, que é o número de onda de um elemento de barra conforme [Doyle 1989]. A força nodal de cisalhamento é dada por $\hat{P} = -EA \frac{\delta \hat{v}}{\delta x} = EA \hat{v}(x)$, e as forças nodais de momento e cisalhamento são expressas na Equação 3.27. Portanto, a matriz com o vetor de forças nodais pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EAik_r & 0 & 0 & -EAik_r e^{-ik_r L} & 0 & 0 \\ 0 & -EI(ik_b)^3 & -EI(k_b)^3 & 0 & EI(ik_b)^3 e^{-ik_b L} & EI(k_b)^3 e^{-k_b L} \\ 0 & -EI(ik_b)^2 & -EI(k_b)^2 & 0 & -EI(ik_b)^2 e^{-ik_b L} & -EI(k_b)^2 e^{-k_b L} \\ -EAik_r e^{-ik_r L} & 0 & 0 & EAik_r & 0 & 0 \\ 0 & EI(ik_b)^3 e^{-ik_b L} & EI(ik_b)^3 e^{-k_b L} & 0 & -EI(ik_b)^3 & -EI(k_b)^3 \\ 0 & EI(ik_b)^2 e^{-ik_b L} & EI(ik_b)^2 e^{-k_b L} & 0 & EI(ik_b)^2 & EI(k_b)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.46)$$

Para obter a matriz de rigidez dinâmica do elemento de pórtico, é necessário relacionar as forças nodais com os deslocamentos, utilizando a equação $\mathbf{f} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \mathbf{d}$. Assim, podemos expressar a matriz de rigidez dinâmica como:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.47)$$

A matriz do elemento é formulada no sistema de coordenadas local, seguindo o eixo do elemento. Quando se trata de simulações que requerem um maior número de elementos em diferentes ângulos e posições, é necessário transformar cada elemento do sistema local para o sistema global de coordenadas. Essa transformação é realizada por meio da matriz de cossenos diretores \mathbf{R} , que pode ser expressa como:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Aplicando a ortogonalidade da matriz de rotação ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$) e multiplicando pela matriz do elemento, é possível formar a matriz de rigidez do pórtico plano em coordenadas globais. Essa matriz pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}_g(\omega) = \mathbf{R}^T \mathbf{S}(\omega) \mathbf{R} \quad (3.49)$$

A equação apresentada tem como resultado a matriz de rigidez do elemento espectral do pórtico nas coordenadas globais, representada por $\mathbf{S}_g(\omega)$.

3.3 Viga acoplada com uma camada piezoelétrica

Nesta seção, será exposto o modelo espectral para uma viga com camada piezoelétrica acoplada, fundamentado na metodologia proposta por [Lee e Kim 2000] e [Moura 2020]. Esse modelo é aplicado quando há um acoplamento não uniforme entre a viga e o material piezoelétrico. Em situações em que a estrutura emprega múltiplos materiais piezoelétricos, [Lee 2009] introduz uma segunda formulação que se utiliza das relações entre as energias cinética (T) e potencial (U) para obter a solução.

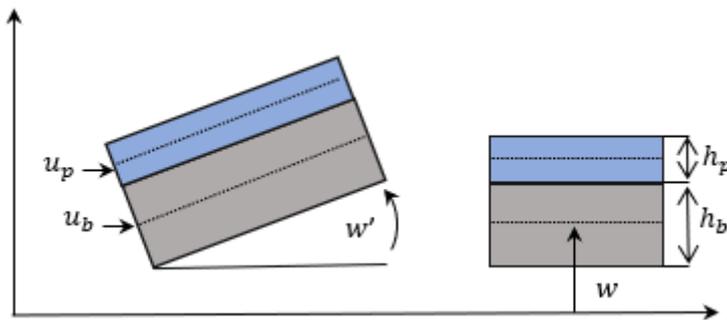


Figura 3.3: Representação de um elemento viga acoplado a uma pastilha piezoelétrica.

Conforme [Lee e Kim 2000], considerando a hipótese de acoplamento ideal, constata-se que as duas estruturas em questão, a viga e a pastilha piezoelétrica, manifestaram um deslocamento transversal $w(x, t)$ homogêneo. Com base nisso, é possível estabelecer as relações cinemáticas entre as espessuras das camadas e os deslocamentos mencionados:

$$u_p = u_b - \frac{h}{2}w' \quad (3.50)$$

Onde u_p representa os deslocamentos axiais da pastilha piezoelétrica, u_b representa os deslocamentos axiais da viga e a altura (h) é calculada pela soma das espessuras da camada piezoelétrica (h_p) e da camada da viga (h_b). As expressões utilizadas para representar o comportamento eletromecânico unidimensional do material piezoelétrico são relações constitutivas lineares expressas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ E_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ D \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

A tensão mecânica é denotada por σ , enquanto a deformação mecânica é denotada por ϵ . O deslocamento elétrico é representado por D , enquanto o campo elétrico é representado por E_c . A rigidez elástica é denotada por C_{11}^D , enquanto a constante dielétrica é representada por β_{33}^S . Além disso, a constante piezoelétrica é dada por $h_{31} = d_{31}E_p\beta_{33}^S$. Para derivar a equação do movimento de uma estrutura composta por múltiplas camadas, é possível utilizar o princípio variacional de Hamilton, o qual pode ser expresso da seguinte forma [Meirovitch 2000, Moura 2020]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W) dt = 0 \quad (3.52)$$

Onde T representa a energia cinética, U representa a energia potencial e δW representa o trabalho virtual. Esses termos pode ser expressados da seguinte maneira:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_b A_b (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) + \rho_p A_p (\dot{u}_p^2 + \dot{w}^2)] dx \quad (3.53)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [E_b A_b u_b'^2 + E_b I_b w''^2 + E_p I_p w''^2 + E_p A_p u_p'^2 + F w'^2] dx \quad (3.54)$$

Pode-se expressar o trabalho virtual δW realizado pelas forças externas, forças de restrição e forças de amortecimento viscoso como:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L p(x, t) \delta w dx + \int_0^L \tau(x, t) \delta u_b dx \\ & - \int_0^L \int_{A_b} c_b \dot{\mathbf{r}}_b \delta \mathbf{r}_b A_b dx - \int_0^L \int_{A_p} c_p \dot{\mathbf{r}}_p \delta \mathbf{r}_p A_p dx + N_1(t) \delta u_b(0, t) \\ & + N_2(t) \delta u_b(L, t) + M_1(t) \delta w'(0, t) + M_2(t) \delta w'(L, t) \\ & + Q_1(t) \delta w(0, t) + Q_2(t) \delta w(L, t) + \int_0^L bV(t) \delta D_3 dx \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\mathbf{r}_b = u_b \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{r}_p = u_p \mathbf{n}_x + w \mathbf{n}_z \quad (3.56)$$

Ao substituir as equações 3.53, 3.54 e 3.55 na equação do princípio de Hamilton (3.52), é possível obter a equação do movimento no domínio do tempo. Nessa equação, \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_z correspondem a vetores unitários, c_b e c_p são os coeficientes de amortecimento viscoso, F representa a força de tração axial constante, e $p(x, t)$ e $\tau(x, t)$ indicam as forças externas aplicadas ao longo da viga.

$$\begin{aligned} EI w'''' + \rho A \ddot{w} + c A \dot{w} &= -\alpha \ddot{u}_b' + \beta u'' + \lambda \ddot{w}' + c_1 \ddot{w}' - c_4 \ddot{u}_b' + F w'' + p(x, t) \\ EA u_b'' - \rho A \ddot{u}_b - c A \dot{u}_b &= -\alpha \dot{w}' + \beta w'' - c_4 \dot{w}' - \tau(x, t) \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde

$$\begin{aligned} EA &= E_b A_b + E_p A_p, & EI &= E_b I_b + E_p I_p + (1/4) E_p A_p h^2, & c_4 &= (1/2) c_p A_p h, \\ \gamma &= (1/4) \rho_p A_p h^2, & \alpha &= (1/2) \rho_p A_p h, & \beta &= (1/2) E_p A_p h, & c_1 &= (1/4) c_p A_p h^2 \\ \rho A &= \rho_b A_b + \rho_p A_p, & E_p &= C_{11}^D - h_{31}^2 \beta_{33}^{S-1}, & c A &= c_b A_b + c_p A_p, \end{aligned}$$

Assumindo um elemento de comprimento L , as condições de contorno para $x = 0$ e $x = L$ são estabelecidas como:

$$\begin{aligned} Q(0, t) &= -Q_1(t) - F w'(0, t) & \text{ou} & & w(0, t) &= w_1(t) \\ M(0, t) &= -M_1(t) & \text{ou} & & w'(0, t) &= \theta_1(t) \\ N(0, t) &= -N_1(t) & \text{ou} & & u_b(0, t) &= u_1(t) \\ Q(L, t) &= +Q_2(t) - F w'(L, t) & \text{ou} & & w(L, t) &= w_2(t) \\ M(L, t) &= -M_2(t) & \text{ou} & & w'(L, t) &= \theta_2(t) \\ N(L, t) &= -N_2(t) & \text{ou} & & u_b(L, t) &= u_2(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

De acordo com a relação entre os deslocamentos $u(x, t)$ e as forças resultantes, pode-se afirmar que os primeiros estão relacionados com a força axial resultante $N(x, t)$, o momento fletor $M(x, t)$ e a força cortante transversal $Q(x, t)$, conforme segue:

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= -EI w'' - \alpha \ddot{u}_b + \beta u_b'' + \gamma \dot{w}' - c_4 \dot{u}_b \\ M(x, t) &= EI w' - \beta u_b' \\ N(x, t) &= EA u_b' - \beta w'' \end{aligned} \quad (3.59)$$

É possível incluir o efeito do amortecimento estrutural de cada camada considerando o módulo de elasticidade complexo, que pode ser expresso como:

$$E_b^* = E_b(1 + i\eta_b) \quad E_p^* = E_p(1 + i\eta_p)$$

Para obter as equações governantes no domínio da frequência, utiliza-se as seguintes formas espectrais dos deslocamentos transversal e axial, das forças e dos momentos:

$$\begin{pmatrix} w(x, t) \\ u_b(x, t) \\ p(x, t) \\ \tau(x, t) \\ Q(x, t) \\ M(x, t) \\ N(x, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{pmatrix} W_n(x, \omega_n) \\ U_n(x, \omega_n) \\ P_n(x, \omega_n) \\ T_n(x, \omega_n) \\ Q_n(x, \omega_n) \\ M_n(x, \omega_n) \\ N_n(x, \omega_n) \end{pmatrix} e^{i\omega_n t} \quad (3.60)$$

Ao utilizar os termos espectrais da equação 3.60 na equação 3.57, obtém-se a equação do movimento no domínio da frequência, que é expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} EIW'''' - \omega^2 \rho AW + i\omega c AW &= \omega^2 \alpha U' + \beta U'''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' \\ &\quad + FW'' + P(x) \quad (3.61) \\ EAU'' + \omega^2 \rho AU - i\omega^2 c AU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W'''' - i\omega c_4 W' - T(x) \end{aligned}$$

No domínio da frequência, as condições de contorno são definidas por:

$$\begin{aligned} Q(0, \omega) &= -Q_1(\omega) - FW'(0, \omega) \quad \text{ou} \quad W(0, \omega) = W_1(\omega) \\ M(0, \omega) &= -M_1(\omega) \quad \text{ou} \quad W'(0, \omega) = \theta_1(\omega) \\ N(0, \omega) &= -N_1(\omega) \quad \text{ou} \quad U_b(0, \omega) = U_1(\omega) \\ Q(L, \omega) &= +Q_2(\omega) - FW'(L, \omega) \quad \text{ou} \quad W(L, \omega) = W_2(\omega) \\ M(L, \omega) &= -M_2(\omega) \quad \text{ou} \quad W'(L, \omega) = \Theta_2(\omega) \\ N(L, \omega) &= -N_2(\omega) \quad \text{ou} \quad U_b(L, \omega) = U_2(\omega) \end{aligned} \quad (3.62)$$

As grandezas físicas da força axial resultante $N(x, t)$, do momento fletor $M(x, t)$ e da força cortante transversal $Q(x, t)$ estão relacionadas com o deslocamento no domínio da frequência por meio de:

$$\begin{aligned}
Q(x, \omega) &= -EIW'''' + \omega^2 \alpha U + \beta U'' - \omega^2 \gamma W' - i\omega c_4 U \\
M(x, t) &= EIW'' - \beta U' \\
N(x, t) &= EAU' - \beta W''
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Se considerarmos uma estrutura finita de comprimento L , os deslocamentos nodais espectrais que atendem às condições de contorno do sistema em $x = 0$ e $x = L$ podem ser descritos pelo vetor \mathbf{d} definido como:

$$\mathbf{d} = [U_1(0), W_1(0), \theta_1(0), U_2(L), W_2(L), \theta_2(L)]^T \tag{3.64}$$

De forma semelhante, o vetor que representa as forças e momentos nodais espectrais mecânicos pode ser expresso como:

$$\mathbf{f}_c = [N_1(0), Q_1(0), M_1(0), N_2(L), Q_2(L), M_2(L)]^T \tag{3.65}$$

Para obter as funções de forma no domínio da frequência, faz-se a suposição de que $P(x)$ e $T(x)$ são nulos, o que leva à seguinte equação do movimento homogênea:

$$\begin{aligned}
EIW'''' - \omega^2 \rho AW + i\omega c AW &= \omega^2 \alpha U' + \beta U'''' - \omega^2 \gamma W'' + i\omega c_1 W'' - i\omega c_4 U' \\
EAU'' + \omega^2 \rho AU - i\omega^2 c AU &= \omega^2 \alpha W' + \beta W'''' - i\omega c_4 W'
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Uma solução geral para os componentes dos deslocamentos espectrais pode ser encontrada resolvendo as equações do movimento no domínio da frequência, com a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \sum_{i=1}^6 a_i e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \\
U(x) &= \sum_{i=1}^6 r_j a_j e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{R} \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(x, \omega) &= [e^{-ik_1 x}, e^{-ik_2 x}, e^{-ik_3 x}, e^{-ik_4 x}, e^{-ik_5 x}, e^{-ik_6 x}] \\
\mathbf{a} &= [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T \\
\mathbf{R} &= \text{diag} \left[\frac{-\omega k_j c_4 - i\omega^2 k_j \alpha + ik_j^3 \beta}{-k_j^2 EA + \omega^2 \rho A - i\omega c A} \right]
\end{aligned}$$

A solução geral aplicada na equação de movimento leva a uma equação característica

que apresenta um problema de autovalor. Os valores dos números de onda k_i (onde $i = 1, 2, 3, \dots, 6$) são determinados pelas raízes da seguinte expressão:

$$x_1 k^6 + x_2 k^4 + x_3 k^2 + x_4 = 0 \quad (3.68)$$

onde

$$x_1 = \beta^2 - EA EI$$

$$x_2 = \omega^2 (EA \gamma + EI \rho A - 2\alpha \beta) - i\omega (EI c A + EA c_1 - 2\beta c_4) - EAF$$

$$x_3 = \omega^4 (\alpha^2 - \gamma \rho A) + i\omega^3 (\rho A c_1 + \gamma c A - 2\alpha c_4) + \omega^2 (EA \rho A + c A c_1 + F \rho A - c_4^2) - i\omega c A (EA + F)$$

$$x_4 = -\rho A^2 \omega^4 + 2i\omega^3 \rho A c A + \omega^2 c A^2 = 0$$

Dessa forma, por meio da manipulação matemática realizada por Moura em sua dissertação [Moura 2020], pode-se representar os números de onda como:

$$\begin{aligned} \pm k_1 = & (-x_2 / (3x_1) + (2^{1/3} x_2^2) / (3x_1 (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 \\ & + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (2^{1/3} * x_3) / (-2x_2^3 \\ & + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 * x_3 \\ & - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3} + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 \\ & + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3} / (32^{1/3} x_1))^{1/2}; \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \pm k_2 = & (-x_2 / (3x_1) - x_2^2 / (3(2^{2/3}) x_1 (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 \\ & + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) + (ix_2^2) / (2^{2/3} 3^{1/2} x_1 (-2x_2^3 \\ & + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) \\ & + x_3 / (2^{2/3} (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 \\ & - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (i3^{1/3} x_3) / (2^{2/3} (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 \\ & + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 \\ & - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3} / (6(2^{1/3}) x_1) \\ & - ((i/2) (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 - 27x_1^2 x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1 x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1 x_2 x_3 \\ & - 27x_1^2 x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) / (2^{1/3} 3^{1/2} x_1))^{1/2}; \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
\pm k_3 = & (-x_2/(3x_1) - x_2^2/(3(2^{2/3})x_1(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (ix_2^2)/(2^{2/3}3^{1/2}x_1(-2x_2^3 \\
& + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) \\
& + x_3/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) + (i3^{1/3}x_3)/(2^{2/3}(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 \\
& + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}) - (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3}/(6(2^{1/3})x_1) \\
& + ((i/2)(-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 - 27x_1^2x_4 + (4(-x_2^2 + 3x_1x_3)^3 + (-2x_2^3 + 9x_1x_2x_3 \\
& - 27x_1^2x_4)^2)^{1/2})^{1/3})/(2^{1/3}3^{1/2}x_1))^{1/2};
\end{aligned} \tag{3.71}$$

A partir da relação entre os deslocamentos nodais espectrais e o vetor \mathbf{a} e \mathbf{d} , pode-se obter:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}_{vp2}(\omega) \tag{3.72}$$

onde

$$\mathbf{H}_{vp2}(\omega) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_1 & -ik_2 & -ik_3 & -ik_4 & -ik_5 & -ik_6 \\ e^{-ik_1L}r_1 & e^{-ik_2L}r_2 & e^{-ik_3L}r_3 & e^{-ik_4L}r_4 & e^{-ik_5L}r_5 & e^{-ik_6L}r_6 \\ e^{-ik_1L}r_1 & e^{-ik_2L} & e^{-ik_3L} & e^{-ik_4L} & e^{-ik_5L} & e^{-ik_6L} \\ -ik_1e^{-ik_1L} & -ik_2e^{-ik_2L} & -ik_3e^{-ik_3L} & -ik_4e^{-ik_4L} & -ik_5e^{-ik_5L} & -ik_6e^{-ik_6L} \end{bmatrix}$$

A partir do entendimento da interação dinâmica de cada nó do elemento, é viável construir a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral da seguinte forma [Lee e Kim 2000, Lee 2009, Moura 2020]:

$$\mathbf{S}_{vp2}(\omega) = \mathbf{H}_{vp2}^{-T}(\omega)\mathbf{D}(\omega)\mathbf{H}_{vp2}^{-1}(\omega) \tag{3.73}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\omega) = & -EARKE_g\mathbf{K}\mathbf{R} + EIK^2\mathbf{E}_g\mathbf{K}^2 - i\beta(\mathbf{K}^2\mathbf{E}_g\mathbf{K}\mathbf{R} \\
& + \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K}^2) - \omega^2[\rho A(\mathbf{E}_g + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R}) + i\alpha(\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{K}) \\
& - \lambda\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K}] + i\omega[cA(\mathbf{E}_g + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R}) - c_1\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{K} \\
& + ic_4(\mathbf{K}\mathbf{E}_g\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{K})] - F\mathbf{R}\mathbf{E}_g\mathbf{R} \\
\mathbf{K}^2 = & [\mathbf{K} = \text{diag}(k_i)]^2 \\
\mathbf{E}_g(\omega) = & \int_0^L \mathbf{e}^T(x, \omega)\mathbf{e}(x, \omega)dx
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Depois de definir a matriz de um elemento espectral $\mathbf{S}_{vp2}(\omega)$, é viável obter a matriz global que representa uma viga discretizada com um número de elementos específico, utilizando um procedimento de montagem semelhante ao utilizado no MEF [Moura 2020]. Assim, é possível escrever a equação global como:

$$\mathbf{S}_{vp2}(\omega)\mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}_c(\omega) \tag{3.75}$$

sendo

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \mathbf{G}_{vp2}(\omega)\mathbf{a} \tag{3.76}$$

A matriz global $\mathbf{G}_{vp2}(\omega)$ contém as forças espectrais em todos os nós, permitindo a obtenção das relações entre os deslocamentos e as forças nodais de maneira semelhante à equação 3.39.

3.4 Circuito *shunt*

Baseando-se na teoria de acoplamento do circuito *shunt* apresentada por [Moura 2020], nesta seção são discutidos os circuitos *shunt* utilizados para controlar as vibrações e a propagação de ondas. Além disso, são exploradas as convergências entre a energia mecânica e elétrica relacionadas às formulações piezoelétricas e as impedâncias dos circuitos *shunt*. Também são analisadas as relações dinâmicas nodais entre a estrutura e a conexão do circuito *shunt*.

3.4.1 Acoplamento do circuito *shunt*

A modelagem matemática da conexão de um circuito *shunt* a um piezoelétrico é baseada na ligação entre a energia elétrica e a deformação mecânica. A equação de movimento da

viga-PZT com o circuito *shunt* pode ser descrita da seguinte forma [Moura 2020]:

$$\begin{aligned} EIw''''(t) + \rho A\ddot{w}(t) + \Gamma V(t) &= -\alpha\ddot{u}_b'(t) + \gamma\ddot{w}''(t) \\ EAu_b''(t) - \rho A\ddot{u}_b(t) + \Gamma V(t) &= -\alpha\ddot{w}'(t) + \beta w'''(t) \\ +\Gamma\dot{x}(t) + C_p^T V(t) &= I(t) \end{aligned} \quad (3.77)$$

para $\Gamma = A(h_{31}/\beta_{33}^S)/LeC_p^T = A(C_{11}^D - h_{31}^2\beta_{33}^S)$. A equação do movimento da viga-PZT com o circuito *shunt* (3.77) pode ser adaptada para um movimento harmônico e transformada para o domínio de frequência. Desta forma, o movimento harmônico aplicável às forças e correntes generalizadas pode ser descrito por:

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} - \mathbf{S}_{SH}(\omega)V(\omega) = f(\omega)i\omega\mathbf{S}_{SH}(d)\mathbf{d} + i\omega C_p^T V(\omega) = I(\omega) \quad (3.78)$$

onde $V(\omega)$ representa a voltagem, $f(\omega)$ representa a força, $I(\omega)$ representa a corrente enquanto no domínio espectral e x é o deslocamento nodal. Por não haver energia elétrica alimentando o sistema e nem operadores derivativos, o circuito *shunt* parte da relação entre corrente e impedâncias gerais dada por: $Z^{EL}(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ [Moura, Borges e Machado 2020]. Desta forma a equação 3.78 pode ser representada pela expressão

$$[\mathbf{S}(\omega) + \mathbf{S}_{SH}]\mathbf{d} = f(\omega) \quad (3.79)$$

A matriz de rigidez dinâmica do circuito *shunt* é representada por \mathbf{S}_{SH} e é definida por:

$$\mathbf{S}_{SH} = \begin{bmatrix} \chi_N N_w(x_0; \omega) \\ 0 \\ -\mathcal{X} M N_w(x_0; \omega) \\ -\mathcal{X} N N_w(x_0; \omega) \\ 0 \\ \chi_M N_w(x_0; \omega) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

De acordo com a relação nodal da equação 3.34, o componente espectral W pode ser substituído pela função de forma e pelo vetor de deslocamento ([Moura 2020]). Portanto, as relações de forças e momentos nodais do piezoelétrico são expressas por:

$$N_p = \frac{k_{ij}^2 i\omega Z^{EL} b_p d_{31} E_p}{1 + i\omega C_p^t Z^{EL}} = \chi_N N_w(x_0; \omega)\mathbf{d} \quad (3.81)$$

$$M_p = \frac{k_{ij}^2 i\omega Z^{EL} h b_p d_{31} E_p}{2 + 2i\omega C_p^t Z^{EL}} = \chi_M N_w(x_0; \omega)\mathbf{d} \quad (3.82)$$

3.4.2 Modelagem piezoelétrica

A descrição da capacidade dos materiais piezoelétricos de converter energia mecânica em energia elétrica e vice-versa pode ser realizada de maneira matricial, utilizando vetores que representam as variáveis associadas [Jaffe, jr e Jaffe 1971, Hagood e Von Flotow 1991, Moura 2020]. Para um piezoelétrico linear, a expressão geral que relaciona esses vetores em sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} D \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^T & d \\ d_t & s^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c \\ T \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

A equação geral para um material piezoelétrico pode ser deduzida ao empregar a transformada de Laplace na equação 3.84 e aplicar as correlações de corrente elétrica (I) e tensão elétrica (V), onde os termos possuem as seguintes representações: T representa o vetor de tensão (N/m^2), S o vetor de deformações materiais, ϵ^T a matriz com as constantes dielétricas, D o deslocamento elétrico (C/m^2), E_c o vetor do campo elétrico (V/m), d a matriz de constantes piezoelétricas, s^E a matriz de conformidade da piezocerâmica, o subscrito $()^T$ representa o valor da constante de tensão mecânica e o subscrito $()^E$ o valor da constante de campo elétrico.

$$\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{EL} & sAd \\ d_t L^{-1} & s^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

A correlação geral de admitância elétrica pode ser obtida a partir da soma de admitâncias, onde o termo Y^{EL} representa a admitância elétrica geral. A matriz A é uma matriz diagonal das áreas das superfícies, a matriz L^{-1} é uma matriz diagonal de comprimentos piezoelétricos e s é o parâmetro de Laplace.

$$Y^{EL} = Y^P + Y^{SH} \quad (3.85)$$

A relação entre tensões mecânicas e deformações é governada pela conformidade piezoelétrica com o circuito *shunt*, onde o termo Y^{SH} corresponde à admitância do circuito externo conectado ao piezoelétrico, e o termo Y^P corresponde à admitância associada ao piezoelétrico. Embora as admitâncias sejam inversamente proporcionais às impedâncias ($Y^{EL} = 1/Z^{EL}$), elas são dependentes da relação de corrente do sistema [Moura 2020].

$$s_{jj}^{SH} = s_{jj}^E \left[1 - k_{ij}^2 \bar{Z}_i^{EL} \right] \quad (3.86)$$

As relações de acoplamento e de impedância envolvem o termo s^{SH}_{jj} , que corresponde à conformidade do circuito *shunt* acoplado à pastilha piezoelétrica, o termo \bar{Z}_i^{EL} , que representa a matriz de impedância não dimensional obtida pela razão da impedância geral com a impedância do piezoelétrico, e o termo $k^2_{ij} = d_{ij} \sqrt{s_{jj}^E} \epsilon_i^T$, que representa o coeficiente de acoplamento eletromecânico. O valor do módulo de Young da estrutura carregada na direção j e desviada na direção i é diretamente influenciado pelas relações de acoplamento e de impedância, como demonstra a equação a seguir:

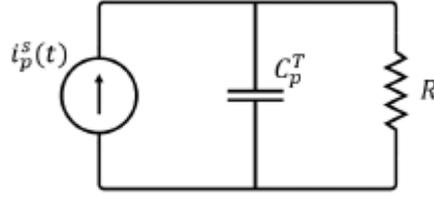


Figura 3.4: Representação de circuito topográfico de piezoelétricos conectados com um resistor na configuração Viga-PZT [Moura 2020].

$$E_{jj}^{SH} = E_{jj}^D \frac{1 - k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2 Z_i^{EL}} \quad (3.87)$$

A modificação dos coeficientes de módulo de Young pode influenciar as propriedades dinâmicas da estrutura. O termo E_{jj}^{SH} representa o módulo de Young do circuito *shunt*, enquanto o termo E_{jj}^D representa o módulo de Young do material piezoelétrico. A integração do PZT à estrutura tem um efeito significativo em seu comportamento dinâmico, como apontado por Forward [Forward 1979]. A Figura 3.4 mostra o circuito de uma viga acoplada com um PZT, conhecida como Viga-PZT.

3.4.3 Impedâncias gerais do circuitos *shunt*

As capacitâncias piezoelétricas têm influência nas admitâncias totais, que podem ser alteradas por diferentes configurações de circuito, como circuito aberto, curto-circuito ou circuito *shunt* [Moura 2020]. Portanto, quando a força mecânica é constante, as impedâncias associadas aos circuitos de circuito aberto e curto-circuito são determinadas.

$$Z_{Curto}^{EL} = 0, \quad Z_{Aberto}^{EL} = i\omega C_p^T \quad (3.88)$$

As impedâncias dos circuitos *shunt* estão sujeitas a dependências em relação à disposição dos componentes utilizados. De modo geral, a classificação do circuito *shunt* pode ser feita com base na predominância dos elementos resistivos, indutivos, capacitivos e de chaveamento [Moura 2020]. As impedâncias dos circuitos *shunt* estão associadas a uma frequência de ressonância específica [Forward 1979]. Para circuitos em que predominam os componentes resistivos, o fator de acoplamento e o valor da resistência são fatores que influenciam a frequência sintonizada, conforme demonstra a seguinte relação:

$$\omega_R = \frac{\sqrt{1 - k_{ij}^2}}{RC_p^T} \quad (3.89)$$

Para circuitos *shunt* em que os componentes indutivos predominam, a seguinte relação é

utilizada para determinar a frequência sintonizada:

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC_p^T}} \quad (3.90)$$

Algumas das principais topologias de circuitos *shunt* utilizados na literatura para promover os efeitos relacionados ao controle de vibração, ruído e propagação de onda são apresentadas na Figura 3.5.

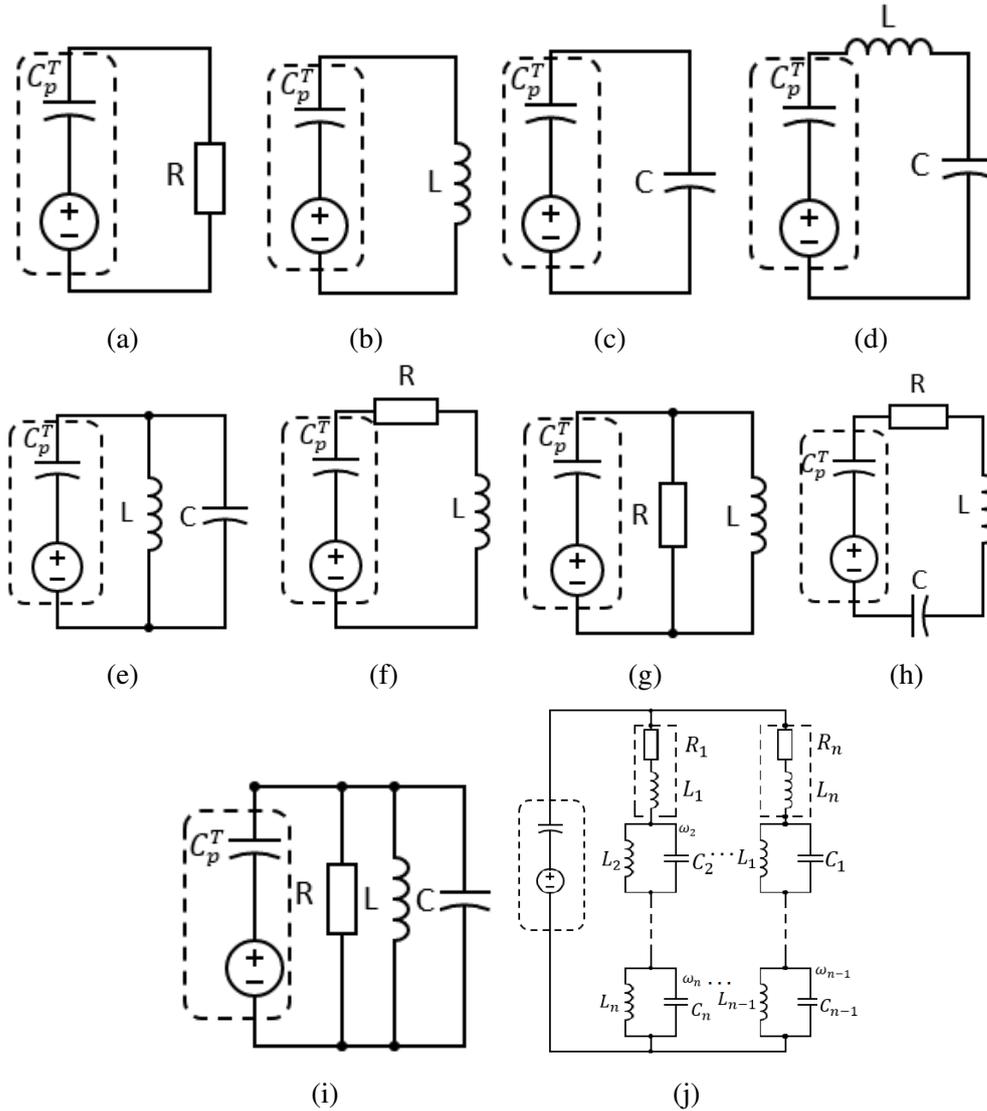


Figura 3.5: Circuitos *shunt*: a) puro resistivo; b) puro indutivo; c) puro capacitivo; d) LC série; e) LC paralelo; f) RL série; g) RL paralelo; h) RLC série; i) RLC paralelo; j) Circuito multi-impedâncias. (Adaptado de [Moura 2020]).

Os retângulos tracejados presentes nos circuitos da Figura 3.5 representam os componentes piezoelétricos, enquanto que os demais componentes R , L e C correspondem aos elementos externos de resistência, indutância e capacitância pertencentes ao circuito *shunt*. Por sua vez, a Figura 3.5a ilustra um circuito *shunt* puramente resistivo, no qual a admitância piezoelétrica $Y^P = i\omega C_p^T$ é somada à admitância do *shunt* resistivo, resultando na seguinte

relação geral de impedância resistiva:

$$Z^{EL} = \frac{1}{i\omega C_p^T + 1/R} \quad (3.91)$$

Ao contrário do circuito puramente resistivo, o circuito puramente indutivo, apresentado na Figura 3.5b, possui uma admitância *shunt* exclusivamente imaginária $Y^{SH} = 1/i\omega L$. Desconsiderando a resistência interna do componente piezoelétrico, tem-se uma impedância geral indutiva exclusivamente imaginária, dada pela seguinte equação:

$$Z^{EL} = \frac{i\omega L}{-\omega^2 LC_p^T + 1} \quad (3.92)$$

O circuito puramente capacitivo ilustrado na Figura 3.5c se assemelha muito ao circuito puramente indutivo, uma vez que ambos possuem parte real nula. No entanto, a admitância desse circuito apresenta a mesma forma da admitância do componente piezoelétrico considerado, o que sugere a seguinte relação de impedância geral capacitiva:

$$Z^{EL} = \frac{1}{i\omega C_p^T + i\omega C} \quad (3.93)$$

Para os circuitos *shunt* que possuem elementos indutivos e capacitivos (LC), é estabelecido um predominância de números complexos imaginários. Os circuitos mostrados nas Figuras 3.5d e 3.5e apresentam faixas de controle associadas à frequência para a admitância em série $Y^{SH} = 1/(i\omega L + 1/i\omega C)$ e em paralelo $Y^{SH} = 1/i\omega L + i\omega C$. Com base nessas admitâncias, as impedâncias gerais dos circuitos LC em série e paralelo podem ser expressas da seguinte maneira:

$$Serie Z^{EL} = \frac{i\omega L + (1/i\omega C)}{-\omega^2 LC_p^T + (i\omega C_p^T/i\omega C) + 1} \quad (3.94)$$

$$Paralelo Z^{EL} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC - \omega^2 LC_p^T} \quad (3.95)$$

Os circuitos *shunt* com componentes resistivos-indutivos (RL) são apresentados nas Figuras 3.5f e 3.5g. Para a configuração em série, a admitância do circuito é dada por $Y^{SH} = 1/(R+i\omega L)$ e para a configuração em paralelo, a admitância é $Y^{SH} = 1/i\omega L + 1/R$. A partir dessas admitâncias, as impedâncias gerais para os circuitos RL em série e paralelo podem ser expressas da seguinte forma:

$$Serie Z^{EL} = \frac{(R + i\omega L)}{1 - \omega^2 LC_p^T - i\omega RC_p^T} \quad (3.96)$$

$$Paralelo Z^{EL} = \frac{i\omega RL}{i\omega L + R - \omega^2 RLC_p^T} \quad (3.97)$$

Algumas configurações de circuitos *shunt* ressonantes podem ser combinadas para duplicar as impedâncias. No estudo de Airoidi e Ruzzene [Airoidi e Ruzzene 2011, Ruzzene e Airoidi 2011], é proposta uma relação de impedância geral para dois circuitos *shunt* ressonantes com base na seguinte configuração.

$$Multi Z^{EL} = R_j + i\omega L_j + \sum_{k=1}^n Z^{SH} \quad (3.98)$$

As topologias de circuitos *shunt* ilustradas nas Figuras 3.5h e 3.5i possuem semelhanças com os circuitos RL e LC, no entanto, todos os componentes presentes são passivos. As admitâncias para a configuração em série $Y^{SH} = 1/(R + i\omega L + 1/C)$ e em paralelo $Y^{SH} = 1/R + 1/i\omega L + i\omega C$ geram as respectivas relações de impedância.

$$Serie Z^{EL} = \frac{R + i\omega L + (1/i\omega C)}{1 + \omega C_p^T (R + i\omega L + (1/i\omega C))} \quad (3.99)$$

$$Paralelo Z^{EL} = \frac{i\omega L}{i\omega L (i\omega C_p^T + i\omega C) + (i\omega L/R) + 1} \quad (3.100)$$

Por sua vez, a admitâncias do circuito multi-impedâncias (multishunt), ilustrado na figura 3.5j, geram uma impedância que pode ser representada por um somatório das impedâncias de um circuito RL em série.

$$Z^{EL} = \sum_{k=1}^n \frac{(R + i\omega L)}{1 - \omega^2 LC_p^T - i\omega RC_p^T} \quad (3.101)$$

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos que ilustram o comportamento dinâmico de uma viga acoplada com piezoelétricos de maneira periódica, de uma célula hexagonal composta por vigas acopladas com piezoelétricos e de uma placa *honeycomb* composta por vigas acopladas com uma camada piezoelétrica visando controle e atenuação das frequências da estrutura. O objetivo é analisar a eficácia do uso de controle passivo na vibração de sistemas, além de investigar os efeitos que os diferentes tipos de circuitos shunt geram no controle das estruturas analisadas e verificar a atenuação da vibração gerada por esse tipo de metodologia em determinadas frequências de projeto.

4.1 Metaestrutura inteligente

A metaestrutura é composta por uma viga de alumínio acoplada com 7 piezoelétricos de forma periódica, conforme ilustrado na Figura 4.1. As propriedades e geometrias adotadas para os elementos viga e viga-PZT, a qual consiste de viga acoplada com uma camada piezoelétrica, são apresentadas na Tabela 4.1. As dimensões da estrutura foram extraídas do trabalho de [Lee e Kim 2000,] e [Moura, Borges e Machado 2020], e os resultados foram validados através de associações entre as respostas obtidas neste trabalho e as apresentadas na literatura.

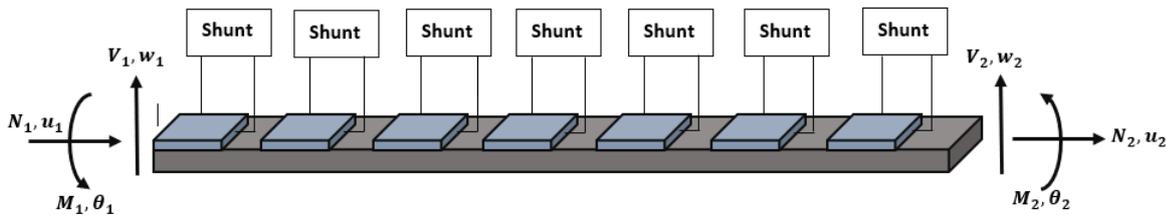


Figura 4.1: Viga-PZT com arranjo de sensores em periodicidade.

Para a realização das simulações foi utilizado o *software MATLAB*, essas simulações

	Propriedades das vigas	Propriedades dos piezoelétricos
Comprimento (mm)	754.38	754.38
Largura (mm)	12.7	12.7
Espessura (mm)	2.286	0.1
Módulo de Young (GPa)	71	14.5
Módulo de cisalhamento (GPa)	23	40
Densidade (Kg/m ³)	2700	8060

Tabela 4.1: Propriedades e características geométricas da viga.

resultam em Funções de Respostas em Frequências(FRF). A faixa de frequência utilizada nas simulações é de 1 à 2000 Hz, com passo de 1 Hz, e a estrutura analisada está em condição de contorno tipo Livre-Livre na condição unimorfo.

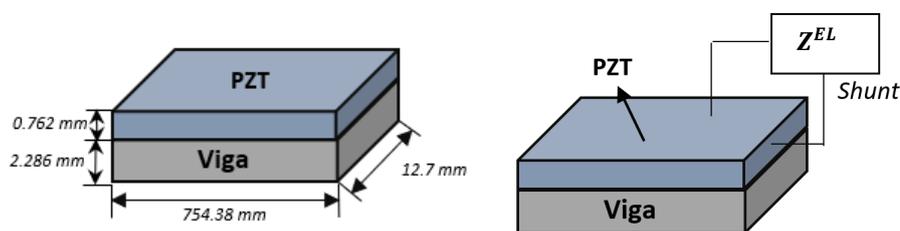


Figura 4.2: Viga acoplada com piezoelétrico e viga-PZT-Shunt.

A metaestrutura apresentada na fig. 4.1 é modelada com elementos de viga e viga-Pzt em um arranjo periódico, totalizando 14 elementos espectrais 15 nós com 3 graus de liberdade (GDL) por nó, sendo 7 elementos do tipo viga e 7 viga-pzt. A fig. 4.2(esquerda) representa a viga acoplada a uma camada de material piezoelétrico e na fig. 4.2(direita) é a viga-PZT acoplada a um circuito do tipo shunt. Para validação do modelo comparou-se um a resposta em receptância da uma viga simples, da metaestrutura com circuito aberto e em curto circuito. A FRF em receptância é estimada na extremidade direita da metaestrutura dada um aplicação de uma força unitária na na extremidade oposta.

As FRFs da estrutura viga-PZT conectada ao circuito shunt são calculadas nas configurações de curto-circuito ($Z=0$) e circuito aberto ($Z = \text{impedância natural do piezoelétrico}$). Na comparação das FRFs mostrada na Figura 4.3 percebe-se a existência de uma alteração na posição das frequências de ressonância e antirressonância da metaestutura para a viga simples, o que remete ao efeito de aumento de rigidez e de massa na estrutura por causa da adição da camada piezoelétrica. Observa-se um pequena diferença nas ressonância da mestaestutura para os diferentes circuitos devido ao tipo do mesmo.É possível observar também o efeito produzido pela periodicidade trazida pelo adição dos piezoelétricos, que gera o aparecimento do efeito de Bragg na faixa de frequência de 1300 a 1800 Hz, algo que não ocorre na estrutura simples. O efeito de Bragg está relacionado com o espalhamento de ondas planas que incidem em um cristal fonônico exercendo assim efeitos difrativos da onda, gerando assim uma obstrução para incidência da onda. Na faixa de frequência de Bragg não há incidência de ondas elásticas e conseqüentemente há um isolamento da banda de vibração.

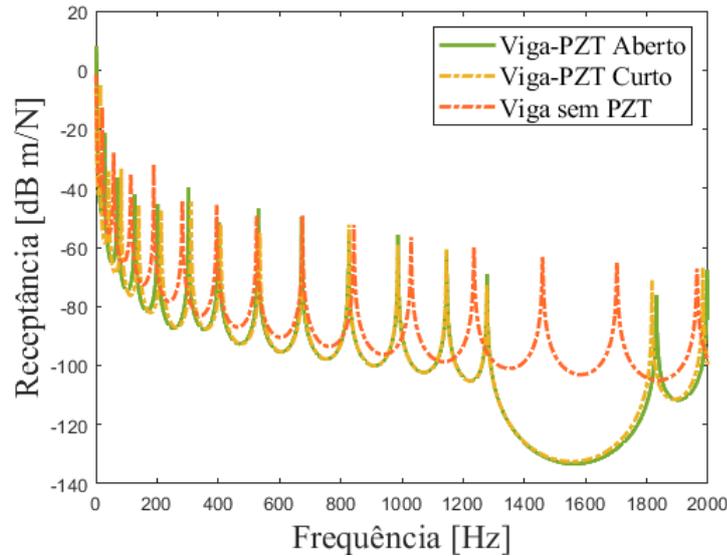


Figura 4.3: Função de resposta em frequência em receptância da viga, mestaestutura com circuito aberto e circuito em curto.

4.2 Efeito de circuitos shunt no controle da metaestrutura

Nesta seção serão analisados os efeitos de diferentes configurações de circuitos *shunt* acoplados às pastilhas piezoelétricas da metaestrutura.

4.2.1 Circuito *shunt* resistivo

Com as impedâncias nas configurações *shunt* designadas em função da frequência, pode-se estabelecer as relações nodais espectrais para se conectar cada impedância de circuito *shunt* com um piezoelétrico da metaestrutura. A relação de amortecimento do circuito *shunt* resistivo pode ser definida de acordo com o coeficiente de acoplamento k_{ij} , a capacitância piezoelétrica C_p^T , e a resistência R . Para realização da simulação do efeito do *shunt* resistivo foram escolhidas a capacitância piezoelétrica $C_p^T = 250nF$ e duas resistências gerais com os valores de 53Ω e 5300Ω .

As impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* por esses valores de resistor estão ilustradas na Figura 4.4, onde a conexão e influência das impedâncias geradas pelo circuito *shunt* resistivo apresentam um decaimento em amplitude com o aumento da banda de frequência analisada. Na figura 4.5 são apresentadas as FRFs da estrutura Viga-PZT acoplada ao circuito *shunt* em condição resistiva. Na Figura 4.5a é ilustrado a FRF da Viga-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo configurado com $R = 53\Omega$, a FRF registra um amortecimento tênue nos frequências naturais da estrutura. A FRF da viga-PZT com o circuito *shunt* resistivo configurado com $R = 5300\Omega$ está ilustrado na Figura 4.5b, observa-se uma atenuação das amplitudes das frequências de ressonância localizadas nas faixas de frequência iniciais. A atenuação demonstrada pelas FRFs corroboram as curvas de impedância ilustradas no grá-

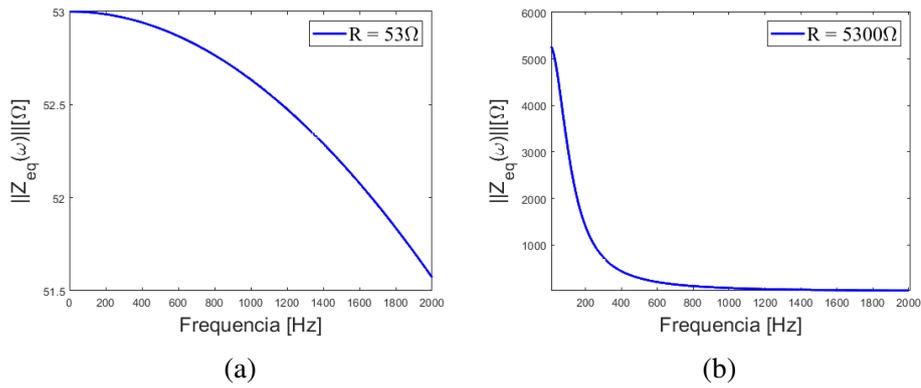


Figura 4.4: Impedância geral do circuito *shunt* resistivo puro. a) Resistor no valor de $R = 53\Omega$; b) Resistor no valor de $R = 5300\Omega$

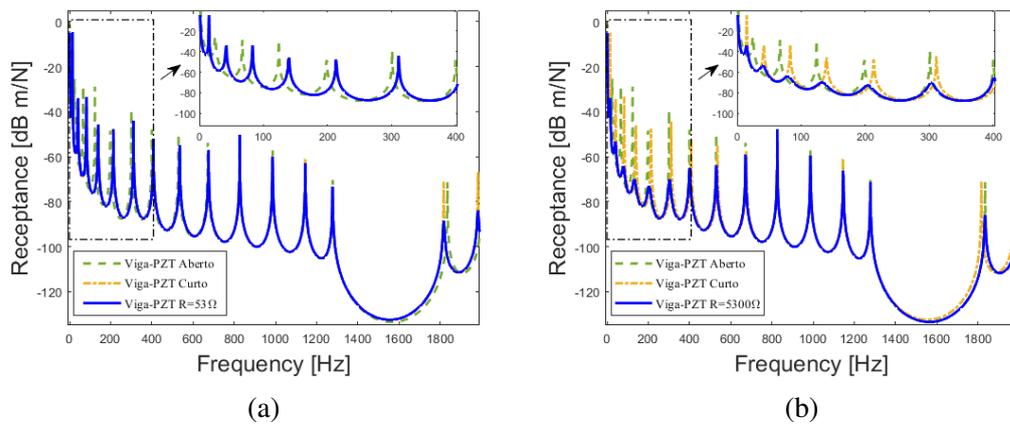


Figura 4.5: FRF da Viga-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo. a) Circuito *shunt* resistivo com $R = 53\Omega$; b) Circuito *shunt* resistivo com $R = 5300\Omega$

fico de impedância resistiva (Figura 4.4), mostrando que a impedância gerada pelo circuito resistivo influencia no amortecimento e decaimento da frequências de ressonância em baixas frequências.

4.2.1.1 Circuito *shunt* indutivo

A análise da metaestrutura com circuito *shunt* puramente indutivo é feita utilizando dois valores de indutor (L), $L = 1.3095H$ e $L = 0.1303H$. As impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* por esses valores de indutor estão ilustrados na Figura 4.6. Sendo a impedância da Figura 4.6a utilizada para controle de frequências baixas e a impedância da Figura 4.6b utilizada para a controle me frequências mais altas. Para a análise da influência das impedâncias geradas pelo circuito *shunt* indutivo é gerada as FRFs da estrutura, conforme mostrado na Figura 4.7.

A FRF obtida com o valor de indutor $L = 1.3095 H$ está ilustrada na Figura 4.7a, onde verifica-se que com a adição da impedância indutiva no circuito *shunt* causa deslocamento das frequências de ressonâncias iniciais, também se observa uma diminuição da amplitude

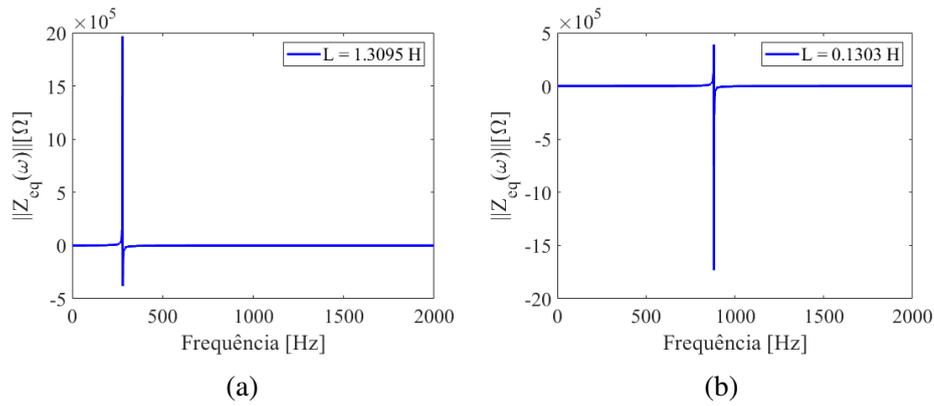


Figura 4.6: Impedância geral do circuito shunt indutivo puro. a) Indutor no valor de $L=1.3095H$; b) Indutor no valor de $L=0.1303H$.

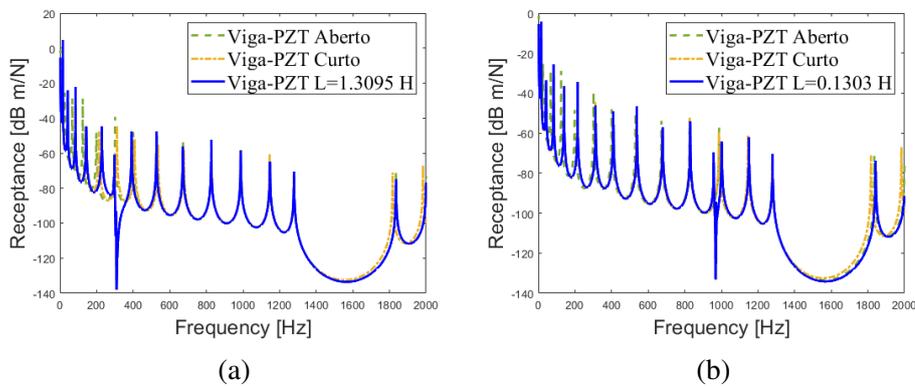


Figura 4.7: FRF da Viga-PZT acoplada com circuito *shunt* indutivo. a) Circuito *shunt* indutivo com $L = 1.3095H$; b) Circuito *shunt* indutivo com $L = 0.1303H$.

do pico de ressonância e o aparecimento de uma antirressonância na frequência em que o circuito *shunt* indutivo está configurado para atuar. A FRF obtida utilizando o valor de indutor $L = 0.1303$ H é representada pela Figura 4.7b, nela é possível observar que impedância indutiva gerada pelo circuito faz com que o pico de ressonância na frequência sintonizada se divida em duas frequências adjacentes, tornando a em duas frequências de ressonância de menor amplitude. Também um deslocamento dos modos de vibrar da estrutura, porém, nesta configuração os picos afetados são os de maior frequência.

4.2.1.2 Circuito *Shunt* capacitivo

Para o ensaio utilizando circuito puramente capacitivo foram utilizados os seguintes valores de capacitor: $C = -720nF$ e $C = 2KnF$. As impedâncias capacitivas geradas no circuito *shunt* por esses valores de capacitor estão apresentadas na Figura 4.8, onde observa-se um comportamento similar ao delta de Dirac, com uma amplitude máxima na frequência inicial e zero nas restantes. Operando as impedâncias geradas pelo circuito *shunt* capacitivo apresentadas na Figura 4.9 temos as FRFs do sistema.

A Figura 4.9a mostra a FRF da metaestrutura acoplada a um circuito *shunt* capacitivo

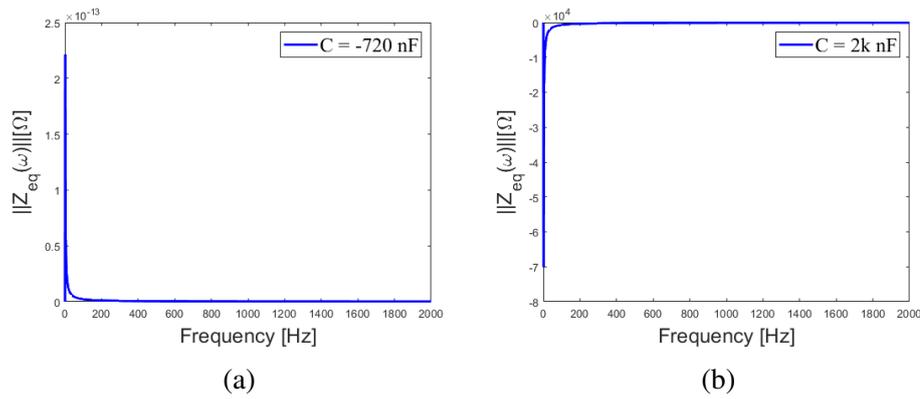


Figura 4.8: Impedância capacitiva do circuito *shunt* capacitivo. a) Capacitor no valor de $C = -720 \text{ nF}$; b) Capacitor no valor de $C = 2 \text{ K nF}$.

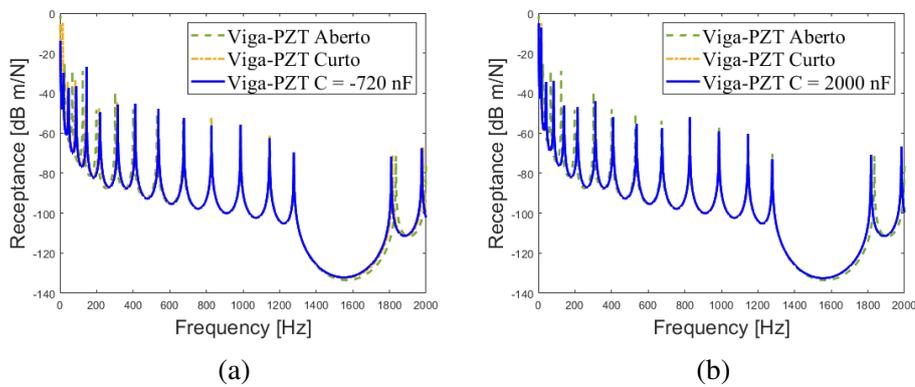


Figura 4.9: VigaPZT conectada com circuito *shunt* capacitivo. a) FRF com *shunt* capacitivo negativo de $C = -720 \text{ nF}$; b) FRF com *shunt* Capacitivo de $C = 2000 \text{ nF}$.

negativo, a qual apresenta um pequeno deslocamento dos modos de vibrar da estrutura em relação a FRF do circuito aberto e em curto. A Figura 4.9b ilustra a FRF da metaestrutura acoplada com circuito *shunt* capacitivo positivo, observa-se também um deslocamento de algumas frequências naturais do sistema, com a capacitância positiva nota-se que seu modo de vibrar é o mesmo que o circuito em sua configuração em curto. O fato de não haver alterações significativas nas FRFs quando apenas a impedância capacitiva está atuando no circuito *shunt* demonstra que sua influência nos modos de vibrar da estrutura é mínima.

4.2.1.3 Circuito *Shunt* LC

Um circuito LC é um modelo idealizado, pois assume que não há dissipação de energia devido à resistência natural dos componentes do circuito, qualquer implementação prática de um circuito LC sempre incluirá pequena perda resultante da resistência dos componentes e fios de conexão. Para o estudo da influência do circuito *shunt* indutor-capacitor (LC) na metaestrutura, foram escolhidos os valores de indutor $L=0.1303 \text{ H}$ e de capacitor $C = 2 \text{ K nF}$, as impedâncias indutivas-capacitivas geradas pelo circuito *shunt* LC são demonstradas na Figura 4.10. Mesmo os valores de indutância e capacitância serem iguais para o circuito

em série (4.10a) e em paralelo (4.10b). Os efeitos de cada configuração geram impedâncias gerais com picos de diferentes amplitudes associadas com diferentes frequências, esse fenômeno acontece devido a influência que o indutor desempenha na capacitância do circuito *shunt*.

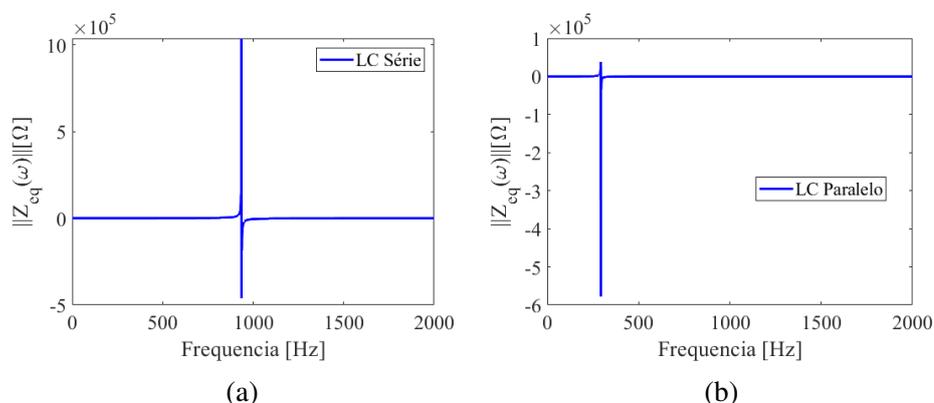


Figura 4.10: Impedância induto-capacitiva gerada pelo circuito *shunt* LC. a) Circuito *shunt* LC em série ; b) Circuito *shunt* LC em paralelo.

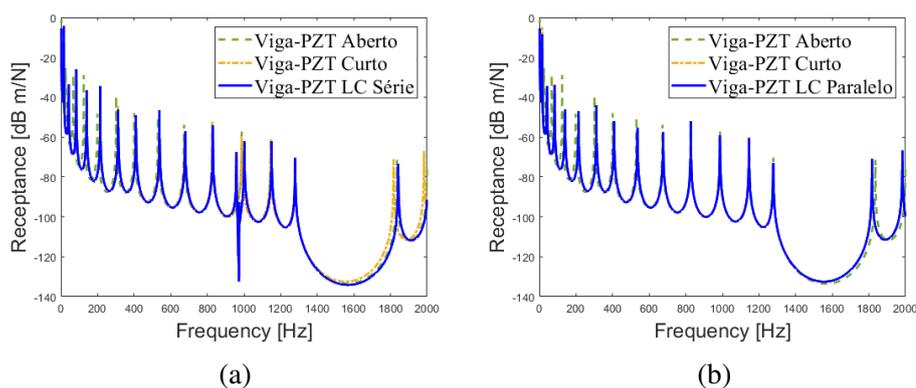


Figura 4.11: Viga-PZT conectada com um circuito *shunt* indutor-capacitor (LC). a) FRF com circuito *shunt* LC em série; b) FRF com circuito *shunt* LC em paralelo.

Operando as impedâncias indutivas-capacitivas geradas no circuito *shunt* LC (4.10) na metaestrutura, obtemos as FRFs ilustradas na Figura 4.11. A metaestrutura acoplada com circuito *shunt* LC em série está ilustrada na Figura 4.11a, nota-se a supressão das frequências de ressonância e um comportamento praticamente idêntico ao observado na configuração de circuito puramente indutivo, onde há sutil deslocamento dos modos de vibrar e a duplicação do pico de ressonância no qual o circuito está sintonizado. Esse comportamento similar é explicado devido influência quase nula que o capacitor acrescenta ao sistema. Em sua configuração em paralelo, ilustrado na Figura 4.11b não é induzida mudanças na FRF da estrutura, isso indica que na configuração em paralelo pode adicionar um efeito de circuito em curto-circuito.

4.2.1.4 Circuito *Shunt* RL

Os circuitos *shunt* Resistor-Indutor (RL) possuem características que viabilizam seu uso para atenuação de vibrações em uma frequência desejada. A impedância geral do circuito *shunt* RL pode ser calculada através da soma do circuito *shunt* resistor puro (4.4) e indutor puro (4.6). Para o cálculo da impedância foram utilizados valores de indutor $L=0.1303\text{H}$ e valores de resistor $R = 53\Omega$, as impedâncias gerais do circuito *shunt* RL estão ilustradas na Figura 4.12.

O circuito *shunt* RL configurado em série, ilustrado na Figura 4.12a, apresenta uma impedância análoga à observada em circuitos *shunt* indutivos (4.27), porém no circuito *shunt* RL a amplitude da impedância está atrelada ao valor do resistor (R). Em sua configuração em paralelo, ilustrado na Figura (4.12b) o circuito *shunt* RL apresenta uma impedância parecida à observada em circuitos *shunt* resistivos (4.4), porém sem apresentar a queda da impedância conforme o aumento da frequência.

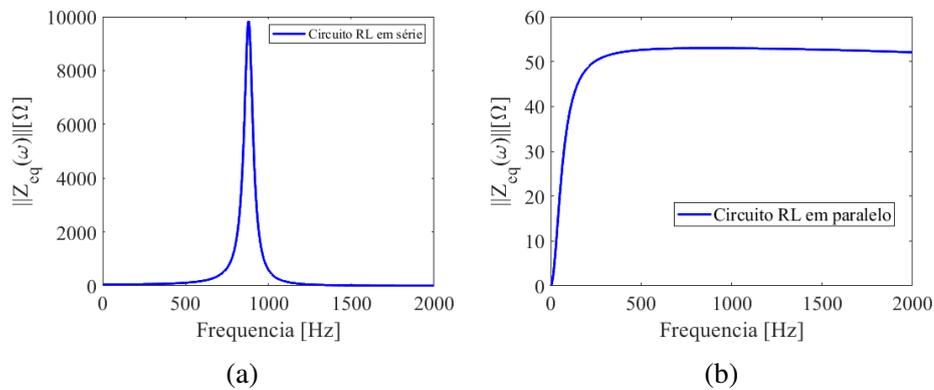


Figura 4.12: Impedância Resistiva-Indutiva do circuito *shunt* RL. a) Circuito *shunt* RL em série; b) Circuito *shunt* RL em paralelo.

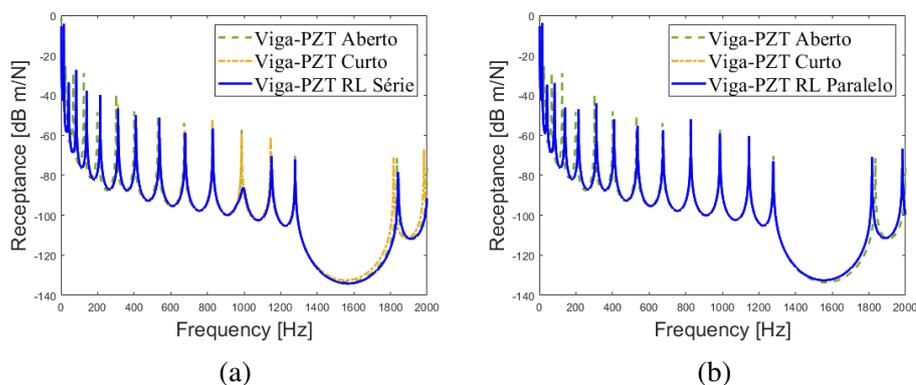


Figura 4.13: Viga-PZT acoplada com uma e duas camadas de circuito *shunt* resistor-indutor (RL). a) FRF com uma camada de *shunt* RL em série; b) FRF com duas camadas de *shunt* RL em paralelo.

Operando as impedâncias do circuito *shunt* RL na metaestrutura, obtemos as FRFs da mesma, onde para circuito RL em sua configuração em série a FRF está ilustrada na Fi-

gura 4.13a. Observa-se que o pico de ressonância no qual o circuito está configurado para atuar apresenta visível atenuação de sua amplitude; Já em paralelo (4.13b), nota-se que não houve mudanças significativas, indicando que o circuito apresenta reflete a condição de curto-circuito.

4.2.1.5 Circuito *Shunt* RLC

Os circuitos *shunt* resistivo-indutivo-capacitivo (RLC) são também conhecidos como circuitos *shunt* ressonantes, a diferença entre um circuito RL e um RLC está na capacidade que o circuito RLC possui de ajustar a rigidez, onde circuito RL é limitado a capacitância piezoelétrica C_p^t o circuito RLC é limitado a seu próprio capacitor C_{sh} . Para esta análise, as impedâncias gerais do circuito RLC em série e paralelo utilizam os valores de indutor $L = 0.1303H$, resistor $R = 53\Omega$ e capacitor $C = 2KnF$. Na Figura 4.14 estão representadas as impedâncias do circuito *shunt* RLC.

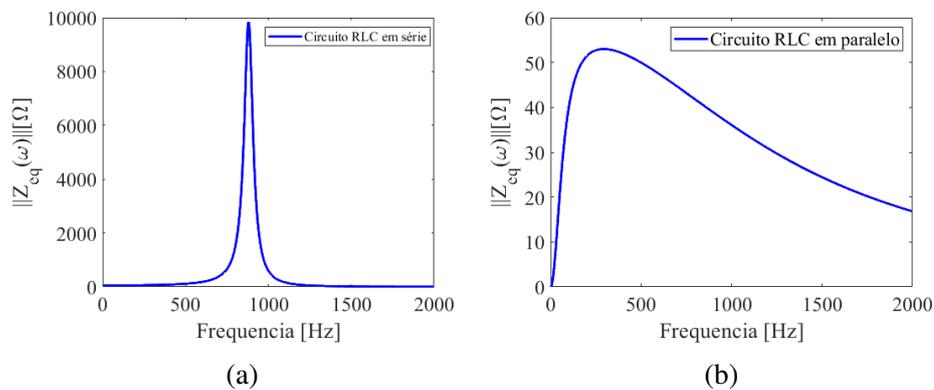


Figura 4.14: Impedância geral do circuito *shunt* resistivo-indutivo-capacitivo (RLC). a) Circuito *shunt* RLC em série; b) Circuito *shunt* RLC em paralelo.

O circuito *shunt* RLC configurado em série, ilustrado na Figura 4.14a, e em paralelo, ilustrado na Figura 4.14b apresenta uma impedância similar à observada em circuitos *shunt* RL(4.12). Operando as impedâncias do circuito *shunt* RLC na metaestrutura, obtemos as FRFs do sistema.

O efeito de atenuação causado pela atuação do circuito *shunt* RLC configurado série é demonstrado na figura 4.15a, nota-se que a atenuação proveniente do circuito *shunt* RLC acontece de maneira muito similar à atenuação registrada na análise com circuito *shunt* RL. Da mesma maneira, os efeitos do circuito RLC demonstrados na Figura 4.15b seguem o mesmo padrão de semelhança. Significando que na condição especificada nos testes, o capacitor $C = 2KnF$ não possui influência significativa na forma de vibrar da estrutura.

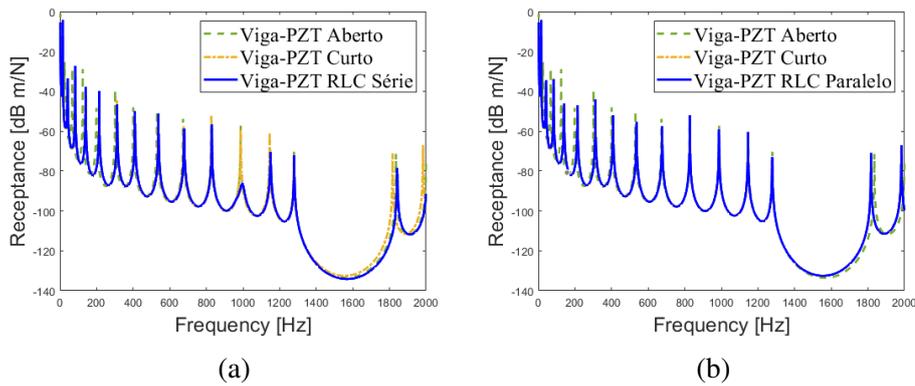


Figura 4.15: Célula hexagonal-PZT acoplada com uma e duas camadas de circuito *shunt* resistor-indutor-capacitor (RLC). a) FRF com uma camada de *shunt* RLC; b) FRF com duas camadas de *shunt* RLC.

4.2.1.6 Configuração *Rainbow*

A metaestrutura configurada no arranjo gradiente ou *rainbow* considera que frequência de sintonia de cada circuito *shunt* acoplado aos sensores piezoelétricos da disposta seguindo uma função do espaço suave e gradualmente variável. A vantagem no uso deste arranjo é o alargamento da banda de isolamento. Os circuitos utilizados neste estudo são do tipo *shunt* RL (4.2.1.4). Nesta análise a faixa de frequência determinada para a configuração dos piezoelétricos é de 800 à 860 Hz, conforme ilustrado na figura 4.16, onde cada PZT-*shunt* em atuação é identificado por uma cor para melhor identificação de cada frequência atuante conforme proposto por [Cardella, Celli e Gonella 2016].

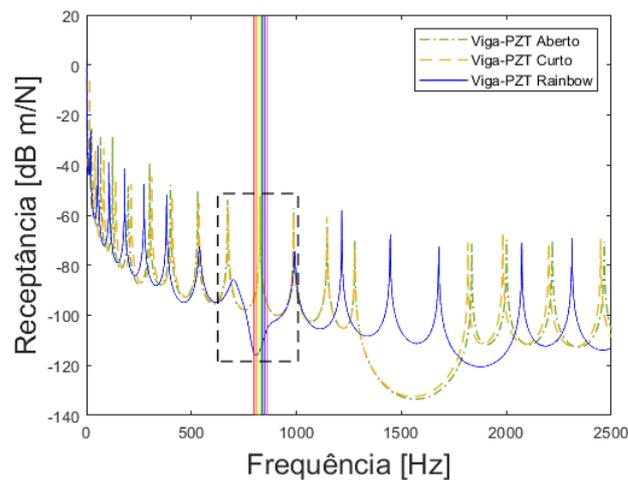


Figura 4.16: Faixa de atuação das impedâncias do *rainbow* no modo de vibrar da Viga-PZT.

A figura 4.17a ilustra a atuação do primeiro piezoelétrico conectado com circuito *shunt*, identificado pela cor vermelha e sintonizado para atuar na frequência 800 Hz. Por estar atuando sozinho seu efeito de atenuação na resposta do sistema é baixo, gerando apenas uma leve atenuação no modo de vibrar da estrutura. A figura 4.17b ilustra a FRF com a atuação de dois piezoelétricos conectado com circuito *shunt*, sendo este segundo sintonizado em 810 Hz

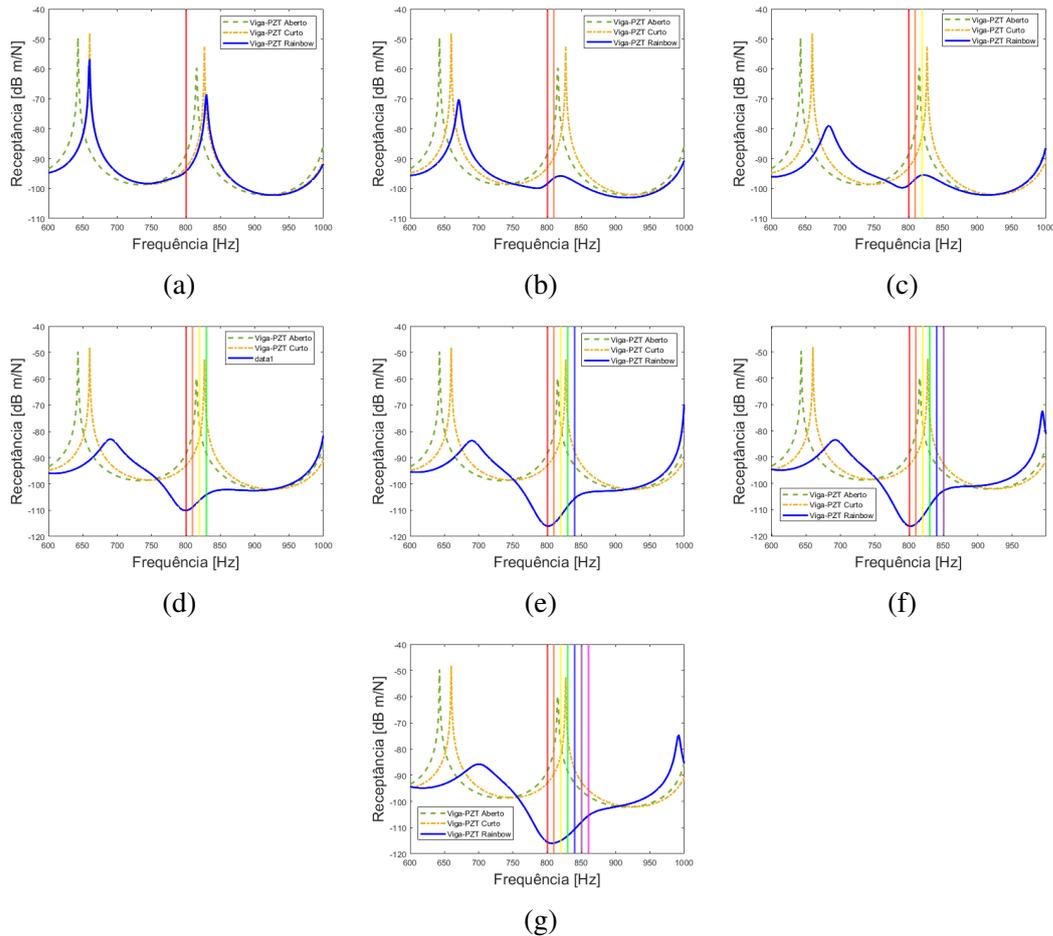


Figura 4.17: Aplicação da configuração *rainbow* na viga-PZT. a) Atuação do primeiro piezoelétrico (Vermelho); b) Atuação do segundo piezoelétrico (Laranja); c) Atuação do terceiro piezoelétrico (Amarelo); d) Atuação do quarto piezoelétrico (Verde); e) Atuação do quinto piezoelétrico (Azul); f) Atuação do sexto piezoelétrico (Roxo); g) Atuação do sétimo piezoelétrico (Rosa).

e identificado pela cor laranja. Com dois piezos atuando nota-se uma atenuação intensa do pico de ressonância, praticamente anulando-o. A figura 4.17c demonstra a FRF da estrutura com três piezoelétricos conectados com circuito *shunt* atuando, o terceiro circuito é identificado pela cor amarela e atua na frequência 820 Hz, com os 3 circuitos ativos percebe-se que o pico de ressonância anterior também começa a sofrer atenuação de sua amplitude. As figuras 4.17d, 4.17e, 4.17f, ilustram a FRF com a atuação do quarto, quinto e sexto piezoelétrico conectados com circuito *shunt*, sendo eles configurados para atuar nas frequências 830 Hz, 840 Hz e 850 Hz e representados pelas cores verde, azul e roxo, respectivamente. A atuação desses piezoelétricos faz com que haja a formação de uma anti-ressonância. A figura 4.17g demonstra a FRF da estrutura com todos os piezoelétricos conectados com circuito *shunt* atuando, sendo o último sintonizado para atuar na frequência 860 Hz e representado pela cor rosa. A atuação de cada elemento piezoelétrico com circuito *shunt* configurado de forma individual para atuar em frequências específicas faz com que um ocorra excelente grau de atenuação de vibrações na faixa e frequência escolhida.

4.2.1.7 Atenuação em múltiplos modos

A aplicação da configuração das multi-impedâncias, também chamada de *multishunt*, é abordada de forma similar à configuração *rainbow* (4.2.1.6), pois também há a configuração individual de cada piezoelétrico conectado com circuito *shunt* RL. A diferença se dá no valor da impedância geral do circuito *shunt* de cada piezoelétrico, na configuração de multi-impedâncias cada circuito *shunt* individual é configurado para atuar em múltiplos picos de frequências da estrutura, sendo assim possível obter sua FRF, como ilustrada na Figura 4.18.

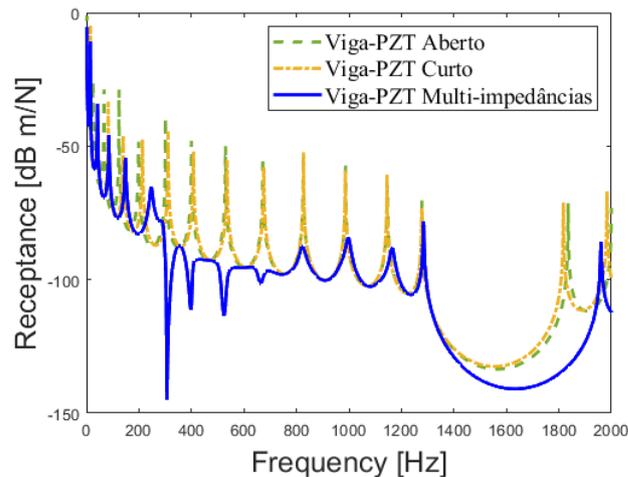


Figura 4.18: Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da Viga-PZT.

Na Figura 4.18 demonstra os efeitos da configuração de multi-impedâncias no modo de vibrar da metaestrutura. Nota-se que as frequências de ressonâncias sintonizados sofreram forte atenuação, junto da formação de anti-ressonâncias nas frequências presentes na faixa de 300 Hz a 750 Hz. A utilização de multi-impedâncias gera atenuação acentuada e abrangente na vibração da estrutura.

4.3 Análise dinâmica de uma placa *honeycomb*

A placa *honeycomb* é composta por um conjunto de nove células hexagonais com dimensões ilustradas na Figura 4.19, onde cada célula é composta por seis elementos viga. A Tabela 4.2 expõe as características geométricas e propriedades estruturais adotadas para os elementos viga que constituem a placa *honeycomb*.

Para a aplicação do modelo numérico utilizando o Método dos Elementos Espectrais (MEE) é necessário ser feita a sua validação de sua precisão e acurácia. Esta validação foi feita através de um estudo comparativo entre os resultados gerados pelo MEE com resultados gerados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os resultados utilizando MEF foram obtidos através do software ANSYS Mechanical APDL e os resultados utilizando o

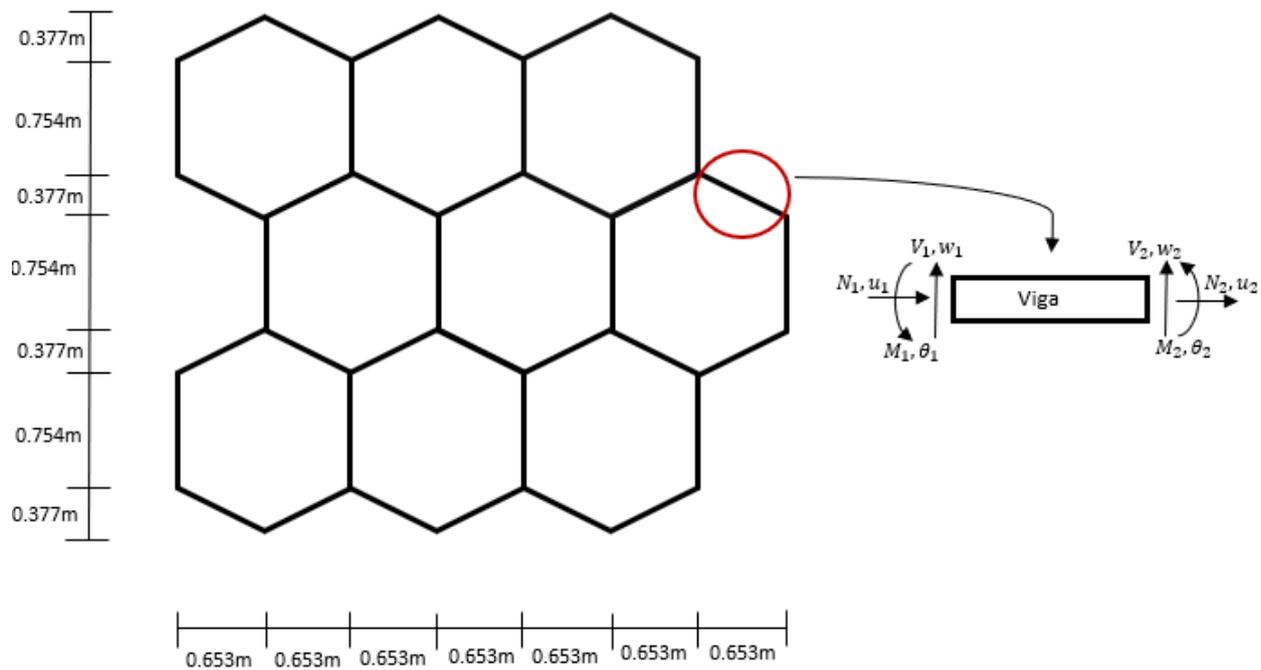


Figura 4.19: Dimensões da Placa *honeycomb* composta por elementos viga.

Propriedades	Viga
Comprimento (mm)	754,38
Largura (mm)	12,7
Espessura (mm)	2,286
Módulo de Young (GPa)	71
Módulo de cisalhamento (GPa)	23
Densidade (Kg/m ³)	2700

Tabela 4.2: Propriedades e características geométricas das vigas.

MEE foram obtidos através da implementação do código no software *MatLab*. A análise da metaestrutura utilizando esses métodos resultam nas FRFs do sistema. A discretização da frequência adotada para a célula hexagonal singular compreende uma faixa de 1 a 400 Hz, com passo de 0.1 Hz, e a discretização da frequência adotada para a placa *honeycomb* compreende uma faixa de 1 a 10 Hz, com passo de 0.1 Hz. As estruturas analisadas estão em condições de contorno do tipo livre-livre e consistem em variações envolvendo vigas de alumínio.

4.3.1 Célula Hexagonal

A Figure 4.20 ilustra uma célula hexagonal unitária, o ponto amarelo, de coordenadas x,y (0, 1.13), representa o ponto de medição onde uma excitação unitária na vertical (y) é imposta.

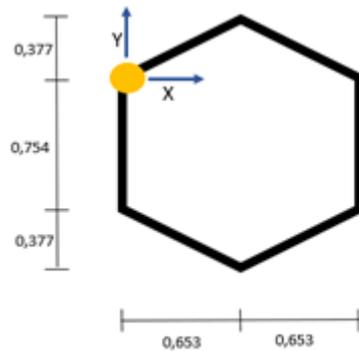


Figura 4.20: Célula hexagonal composta por vigas.

Modos	Frequências de ressonância (Hz)	
	MEF	MEE
1°	3,2	3,5
2°	7,6	7,1
3°	9,6	9,3
4°	16	-
5°	21,2	21,2
6°	22,8	25
7°	-	32,5
8°	-	37,4
9°	40,1	-
10°	42,9	-
11°	58,7	58,4
12°	-	64,8
13°	72,9	-
14°	-	76,7
15°	85,9	84,1

Tabela 4.3: Comparação das frequências de ressonância da célula hexagonal obtidas pelo MEF e pelo MEE.

Para a validação da metodologia utilizando MEE, foi realizado um estudo comparativo entre o MEE e MEF, ambos utilizados para determinar as frequências de ressonância de uma estrutura. As vinte primeiras frequências de ressonância foram selecionadas e comparadas para avaliar a concordância entre os resultados gerados pelos dois métodos. A Tabela 4.3 exibe as vinte primeiras frequências de ressonância obtidas pelos métodos.

Os resultados obtidos a partir da comparação entre o MEF e o MEE indicam que ambos os métodos foram capazes de identificar um número igual de frequências de ressonância. Além disso, foi observado que as frequências identificadas pelos dois métodos possuem valores próximos entre si, sugerindo que ambos são eficazes na determinação desses parâmetros estruturais. Também foi constatado que cada método foi capaz de identificar frequências únicas, o que pode ser atribuído às diferenças nos algoritmos e abordagens utilizados em cada técnica. É importante notar que a identificação de frequências de ressonância exclusivas por

cada método pode fornecer informações adicionais sobre as características da estrutura, permitindo uma avaliação mais completa e precisa de seu comportamento dinâmico. A figura 4.21 permite visualizar uma comparação entre as FRFs obtidas a partir dos métodos MEE e MEF. Nela é possível observar a similaridade nas frequências de ressonância identificadas pelos dois métodos, bem como as frequências únicas identificadas por cada técnica.

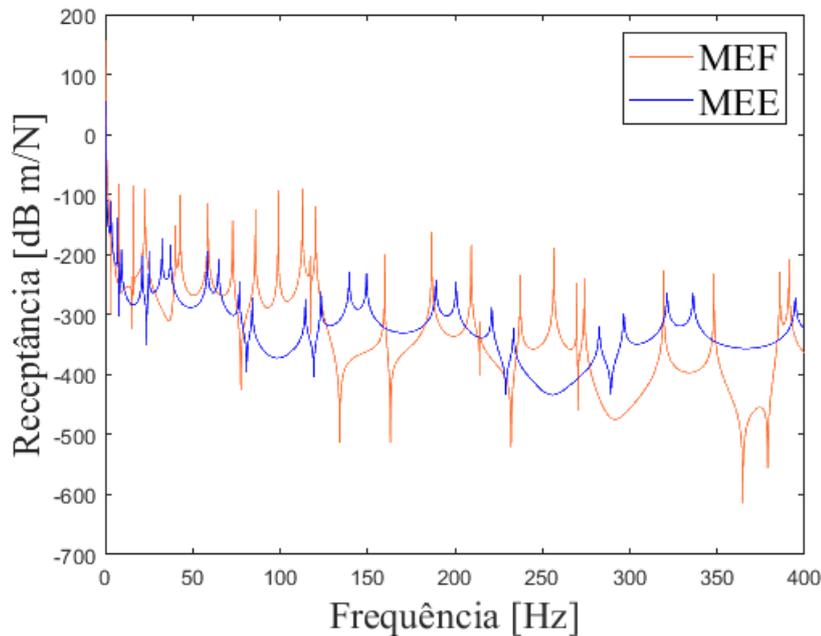


Figura 4.21: Comparação das FRFs obtidas pelo MEE e MEF do ponto amarelo na célula hexagonal

4.3.2 Placa *Honeycomb*

A Figura 4.22 ilustra a placa *honeycomb* composta por 36 vigas, o ponto amarelo (3.919, 3.394) representa o ponto de medição onde uma excitação unitária na vertical é imposta. De forma similar à célula hexagonal, um estudo comparativo entre o método dos elementos espectrais e a método dos elementos finitos é apresentado. Para a análise comparativa, foram extraídas as quinze primeiras frequências de ressonância utilizando tanto o método MEE quanto o MEF, e apresentadas na Tabela 4.4. Essa abordagem é comumente utilizada para avaliar a precisão e a acurácia dos resultados obtidos pelos diferentes métodos de análise estrutural, além de ser usado para a validação do modelo em MEE.

Os resultados obtidos a partir da análise comparativa das quinze primeiras frequências de ressonância obtidas pelo MEF e MEE indicam que ambos os métodos apresentam precisão na identificação desses parâmetros modais, com frequências bem próximas entre si. No entanto, foi observado que o MEE foi capaz de identificar um número maior de frequências de ressonância em relação ao MEF. A falta da identificação de frequências de ressonância

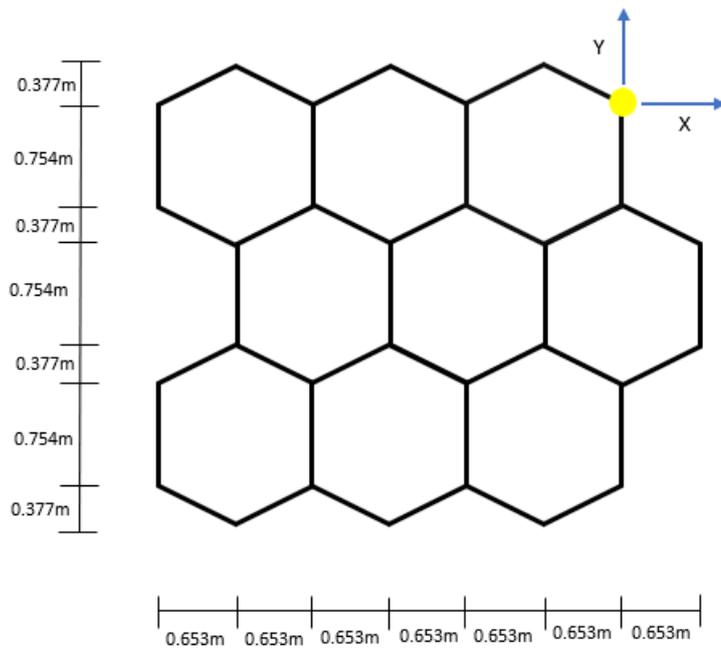


Figura 4.22: Placa *honeycomb*.

pode ser atribuída ao ponto de excitação e medição escolhidos para a análise, o que pode causar a não excitação de alguns modos. Apesar disso, a análise permitiu confirmar que o MEE obteve um desempenho superior na estimação das frequências de ressonância, tendo em vista que falhou em estimar apenas três frequências de ressonância. Esse estudo comparativo realizado é importante para orientar a escolha do método de análise estrutural mais adequado para a avaliação de determinadas estruturas, bem como para auxiliar na identificação de possíveis limitações e fontes de erro associadas aos métodos utilizados.

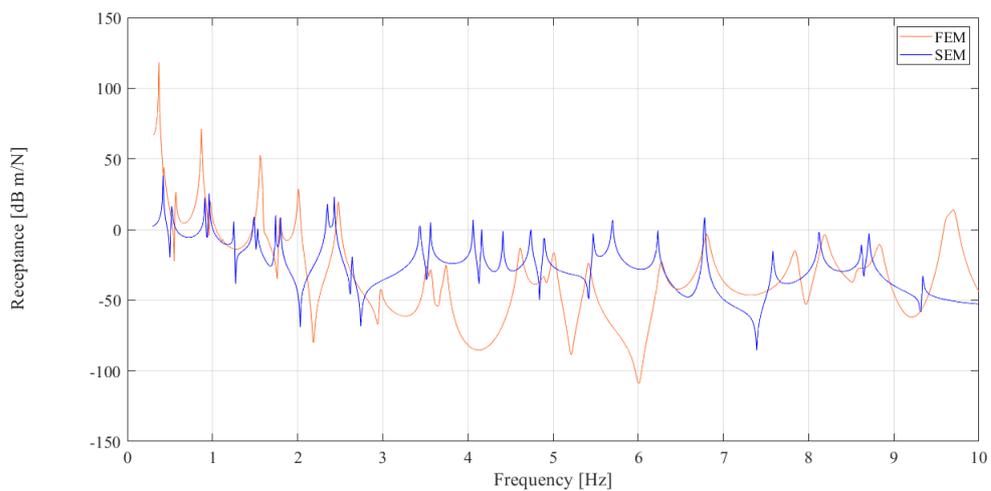


Figura 4.23: Comparação das FRFs obtidas pelo MEE e MEF do ponto amarelo na placa *honeycomb*

As FRFs da placa *honeycomb* mostradas na Figura 4.23 foram calculadas usando o MEE

Modo	Frequência de Ressonância (Hz)	
	FEM	SEM
1°	0.37	-
2°	0.43	0.42
3°	0.57	0.52
4°	0.87	0.91
5°	0.97	0.97
6°	-	1.25
7°	-	1.48
8°	-	1.53
9°	1.62	1.74
10°	1.79	1.80
11°	2.01	-
12°	-	2.35
13°	2.48	2.43
14°	-	2.64
15°	2.97	-

Tabela 4.4: Comparação entre modos de vibrar obtidos pelo MEF e pelos modos obtidos pelo MEE da Placa *Honeycomb*.

e o MEF no ponto amarelo (3.919, 3.394). A Figura 4.23 compara as FRFs obtidas utilizando MEE e MEF, é possível observar a proximidade dos resultados obtidos por ambos os métodos. Essa análise permite concluir que o MEE tem uma maior sensibilidade e precisão em sistemas que apresentam alta densidade modal, como é o caso da placa *honeycomb*. Essa conclusão é respaldada pelo fato de que o MEE foi capaz de identificar um maior número de frequências de ressonância da estrutura, evidenciando sua capacidade de análise detalhada e identificação precisa dos parâmetros dinâmicos da estrutura.

4.4 Controle de vibração da estrutura *honeycomb*

Nesta seção, são apresentadas as variações dos elementos de viga da placa *honeycomb* acoplada com piezoelétricos conectados em circuitos *shunt*, a forma de acoplamento do circuito *shunt* está representada na Figura 4.24. As propriedades dos materiais piezoelétricos estão apresentadas na tabela 4.5.

Propriedades dos piezoelétricos	
Comprimento (mm)	754.38
Largura (mm)	12.7
Espessura (mm)	2.286
Módulo de Young (GPa)	14.5
Módulo de cisalhamento (GPa)	40
Densidade (Kg/m ³)	8060

Tabela 4.5: Propriedades e características geométricas dos piezoelétricos.

4.4.1 Célula hexagonal

A célula hexagonal acoplada com piezoelétricos está representada na Figura 4.24. A análise do controle na estrutura hexagonal será feita a partir de camadas, sendo cada camada de piezoelétricos adicionada nas vigas horizontais. O acoplamento de PZTs nas vigas na posição horizontal não se faz necessário pois não afeta significativamente a estrutura. As FRFs da célula hexagonal-PZT sem PZT e conectada ao circuito *shunt* nas configurações de curto-circuito e circuito aberto estão representadas na Figura 4.25.

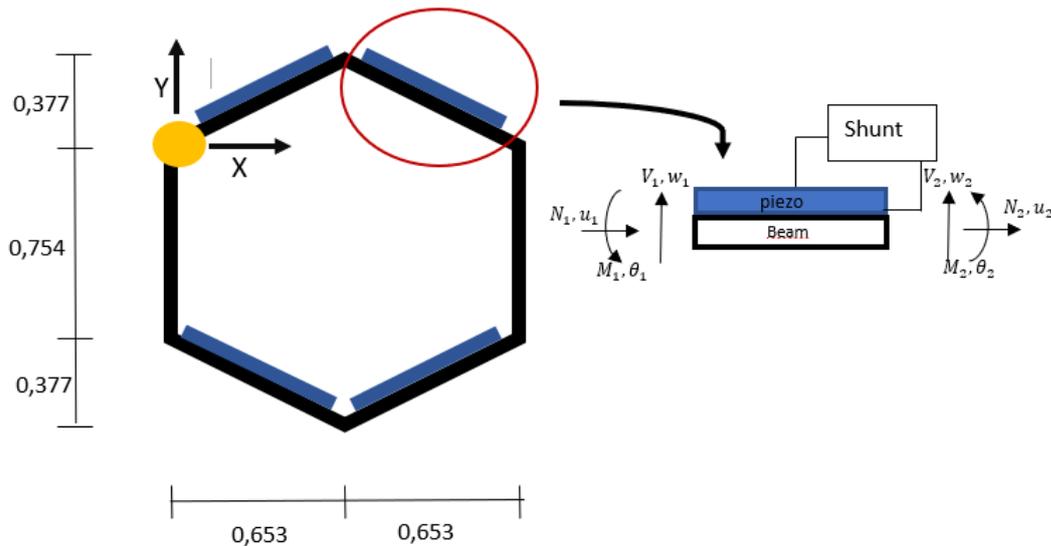


Figura 4.24: Célula hexagonal acoplada com pastilhas piezoelétricas.

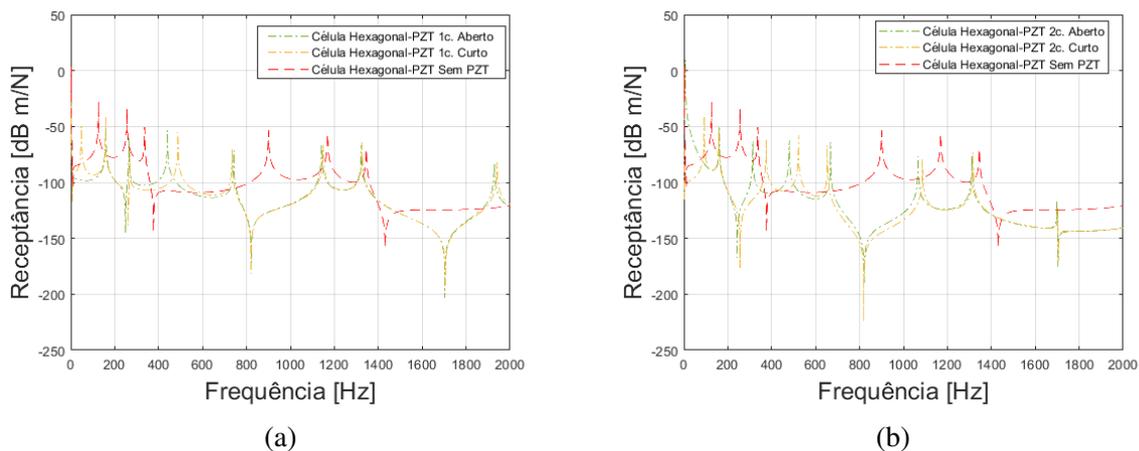


Figura 4.25: Comparação das FRFs da célula hexagonal-PZT sem PZTs, em Curto-Circuito e Aberto. a) Célula hexagonal-PZT com duas camadas de PZT; b) Célula hexagonal-PZT com duas camadas de PZT

Observando a Figura 4.25, é possível notar alteração no modo de vibrar da estrutura conforme se adicionam as camadas de piezoelétricos conectados à um circuito *shunt*. Essa

alteração no modo de vibrar da estrutura é devido à adição de massa e rigidez proveniente dos piezoelétricos.

Controle de vibração por circuito *shunt* resistivo

A aplicação do circuito *shunt* resistivo segue a mesma metodologia da implementada na Viga-PZT (4.2.1), onde utiliza-se duas resistências gerais, sendo a primeira de 53Ω e a segunda de 5300Ω . A impedância geral do circuito *shunt* resistivo está representado na Figura 4.4. Com a aplicação desta impedância no circuito, foi-se obtida a FRF da estrutura, conforme ilustrado na Figura 4.26.

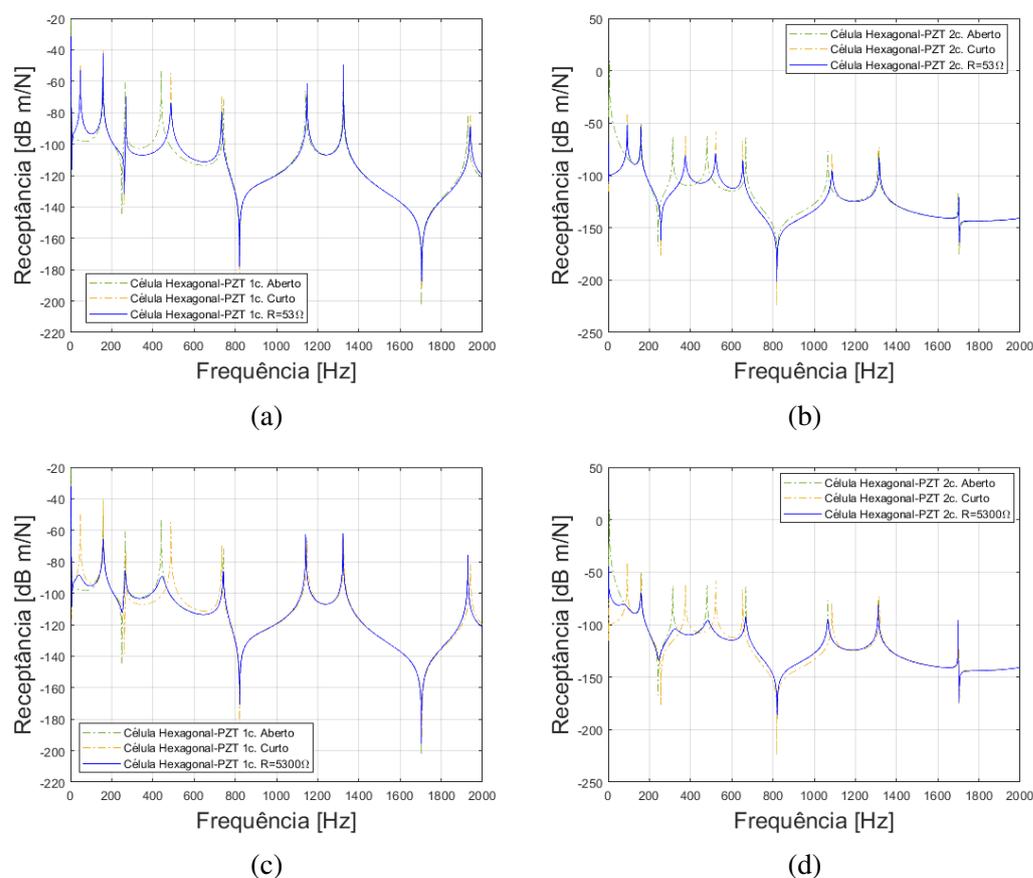


Figura 4.26: FRF da Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo. a) Circuito *shunt* resistivo com uma camada e $R = 53\Omega$; b) Circuito *shunt* resistivo com duas camadas e $R = 53\Omega$; c) Circuito *shunt* resistivo com uma camada e $R = 5300\Omega$; d) Circuito *shunt* resistivo com duas camadas e $R = 5300\Omega$

Na Figura 4.26 são apresentadas as FRFs da estrutura hexagonal-pzt acoplada ao circuito *shunt* em condição puramente resistiva. Na Figura 4.26a onde uma camada de circuito *shunt* resistivo $R = 53\Omega$ é acoplado nas vigas da estrutura hexagonal, a FRF registra um amortecimento sutil nas frequências 439 Hz, 733 Hz e 1940 Hz. Nota-se também o aumento de algumas frequências de ressonância, como por exemplo as frequências: 1148 Hz e 1326 Hz. A FRF da célula hexagonal-pzt com duas camadas de piezoelétricos está apresentada

na Figura 4.26b, pode-se observar um amortecimento geral no modo de vibrar da estrutura, nota-se também um aumento da quantidade de frequências de ressonância, isso ocorre devido ao acréscimo de rigidez oriundo das camadas piezoelétricas. Nas Figuras 4.26c e 4.26d é apresentado as FRFs da célula hexagonal com uma e duas camadas, respectivamente, de piezoelétricos com circuito *shunt* resistivo configurado para $R = 5300\Omega$. Nesta configuração fica evidente a presença do efeito de atenuação gerado pelo circuito *shunt* resistivo, principalmente nas frequências mais baixas da estrutura, que corrobora os gráficos de impedância geral (4.4). A aplicação do circuito *shunt* resistivo é correspondente a um efeito de amortecimento estrutural, e a sua taxa de amortecimento é proporcional ao valor do resistor.

Controle de vibração por circuito *shunt* indutivo

Para a análise da célula hexagonal-PZT com circuito *shunt* puramente indutivo é utilizado dois valores de indutor (L), sendo o primeiro valor de indutor $L = 0.2271H$ configurado para um pico de ressonância na configuração de 1 camada de piezoelétricos acoplados e o segundo valor, $L = 0.0858H$ configurado para um pico de ressonância na configuração com 2 camadas de piezoelétricos. As impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* por esses valores de indutor estão ilustrados na Figura 4.27.

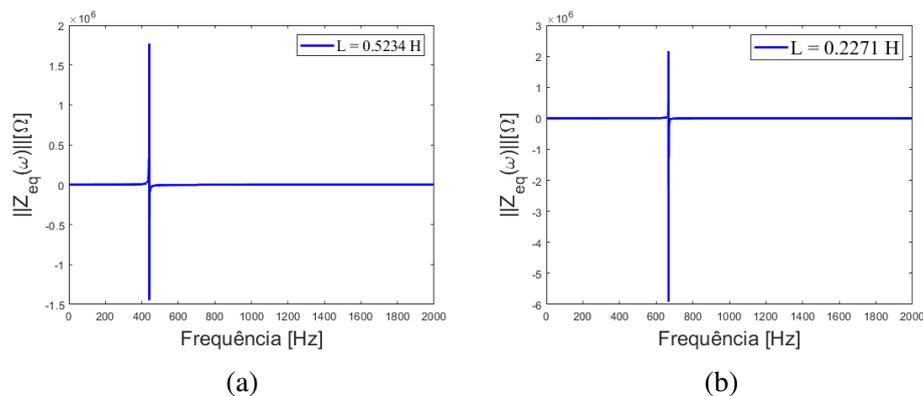


Figura 4.27: Impedância geral do circuito *shunt* indutivo aplicado na célula hexagonal-PZT. a) Indutor no valor de $L = 0.5234H$; b) Indutor no valor de $L = 0.02271H$

Operando as impedâncias apresentadas na Figura 4.27 na célula hexagonal-PZT, sendo a impedância da Figura 4.27a utilizada para a configuração de 1 camada e a impedância da Figura 4.27b utilizada para a configuração de 2 camadas, obtém-se as FRFs da estrutura, conforme mostrado na Figura 4.28.

A configuração com uma camada de piezoelétricos está representada na Figura 4.28a, onde podemos observar que com a adição da impedância indutiva no circuito *shunt*, na frequência em que as impedância do circuito indutivo correspondente foi sintonizado houve a supressão do pico de ressonância e o aparecimento de uma anti-ressonância em seu lugar, há também o decremento da amplitude do pico de ressonância presente em 264 Hz. A configuração com duas camadas de piezoelétricos é representada na Figura 4.28b, é possível

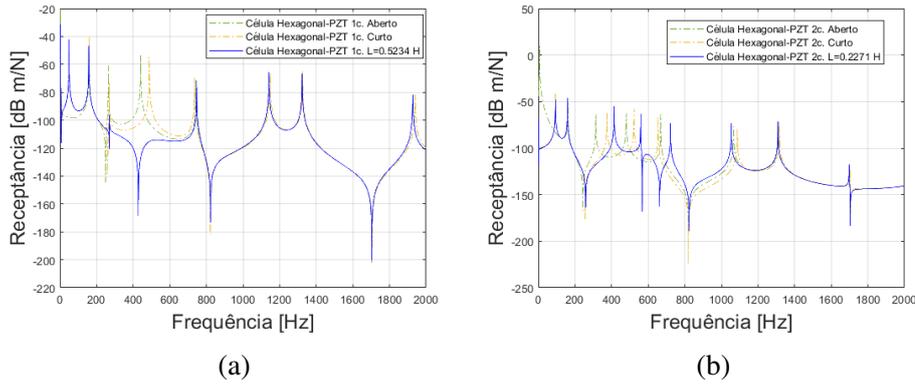


Figura 4.28: FRF da célula hexagonal-PZT acoplada com circuito *shunt* indutivo. a) Circuito *shunt* indutivo com $L = 0.5234H$; b) Circuito *shunt* indutivo com $L = 0.2271H$.

observar alterações no modo de vibrar da estrutura, como o deslocamento das frequências de ressonância e o aparecimento de uma anti-ressonância na frequência de atuação do indutor (L). Nota-se ainda que diferentemente da configuração com uma camada de PZT, aqui não houve amortecimento de nenhuma frequência de ressonância. É interessante notar as alterações no modo de vibrar da estrutura devido à adição de rigidez, resultante da adição de mais uma camada de piezoelétricos acoplados com circuito *shunt* indutivo.

Controle de vibração por circuito *shunt* capacitivo

A análise utilizando circuito puramente capacitivo aplicado à célula hexagonal-PZT foi feita de maneira similar à análise do circuito *shunt* capacitivo aplicado à viga-PZT (4.2.1.2), utilizando valores de capacitor (C) no valor de $C = -720nF$ e $C = 2KnF$. As impedâncias no circuito *shunt* produzida por esses valores de capacitor estão apresentadas na Figura 4.8.

Operando as impedâncias apresentadas na Figura 4.8 na célula hexagonal-PZT, obtemos as FRFs do sistema. A Figura 4.29a mostra a FRF da célula hexagonal-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* capacitivo negativo, observa-se um sutil deslocamento dos modos de vibrar da estrutura e a uma pequena diminuição no pico de ressonância localizado em 264 Hz. A Figura 4.29b mostra a FRF da célula hexagonal-PZT acoplada com duas camadas de circuito *shunt* capacitivo negativo, há também o deslocamento dos modos de vibrar da estrutura e o surgimento de uma anti-ressonância próxima à faixa de frequência de 100 Hz. A Figura 4.29c e a Figura 4.29d ilustram as FRFs da célula hexagonal-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* capacitivo positivo e duas camadas de circuito *shunt* capacitivo positivo, respectivamente. Observa-se que não há alterações significativas no modo de vibrar da estrutura quando submetida à atuação de um circuito *shunt* capacitivo positivo.

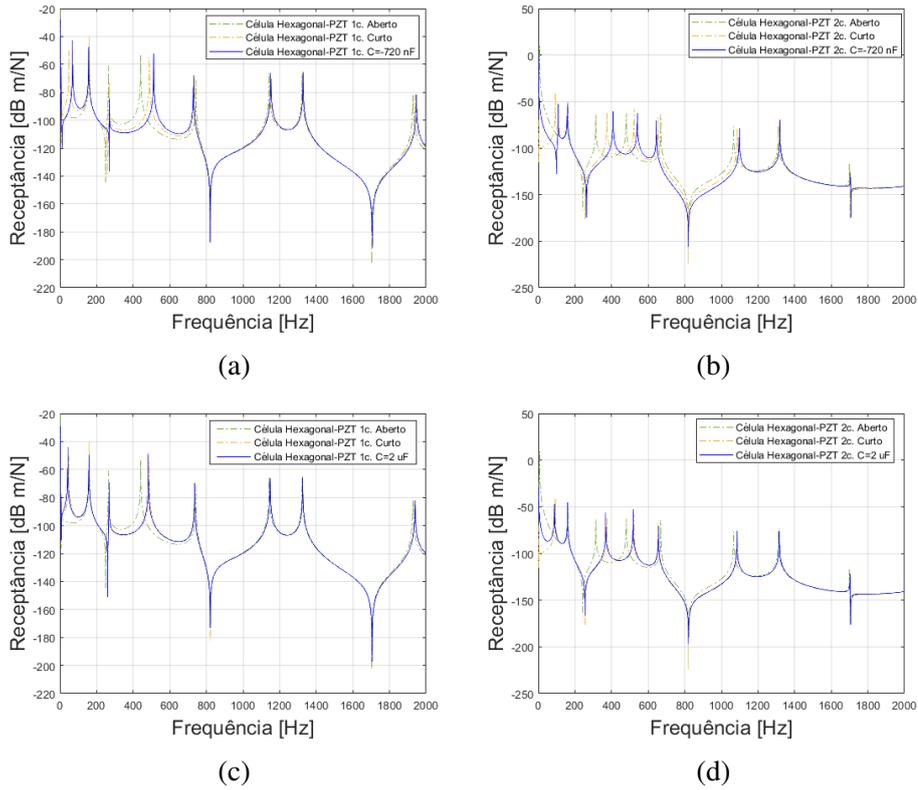


Figura 4.29: Célula hexagonal-PZT conectada com circuito *shunt* capacitivo puro. a) FRF com uma camada de *shunt* capacitivo negativo de $C = -720nF$; b)FRF com duas camadas de *shunt* Capacitivo negativo de $C = -720nF$; c) FRF com uma camada de *shunt* Capacitivo no valor de $C = 2KnF$; d) FRF com duas camadas de *Shunt* Capacitivo no valor de $C = 2KnF$

Controle de vibração por circuito *shunt* LC

Para análise dos efeitos do circuito *shunt* indutor-capacitor (LC) na célula hexagonal-PZT foram escolhidos os valores de $L = 0.2271H$ e $C = 2KuF$, as impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* LC por esses valores são demonstradas na Figura 4.30.

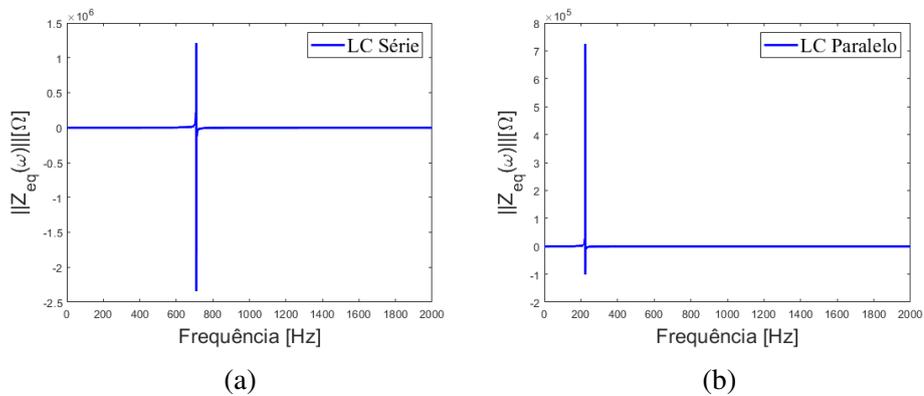


Figura 4.30: Impedância geral do circuito *shunt* indutivo-capacitivo (LC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) Circuito *shunt* LC em série ; b) Circuito *shunt* LC em paralelo.

Apesar de valores dos componentes de indutância (L) e capacitância (C) serem iguais para o circuito em série (4.30a) e em paralelo (4.30b), os efeitos de cada configuração geram impedâncias gerais com frequências de diferentes amplitudes associadas com diferentes frequências, isso ocorre devido a influência que a capacitância piezoelétrica (C_p^t) desempenha na capacitância do circuito *shunt*. Operando as impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* LC (4.30) na célula hexagonal-PZT acoplada com uma e duas camadas piezoelétricas, obtemos as FRFs ilustradas na Figura 4.31.

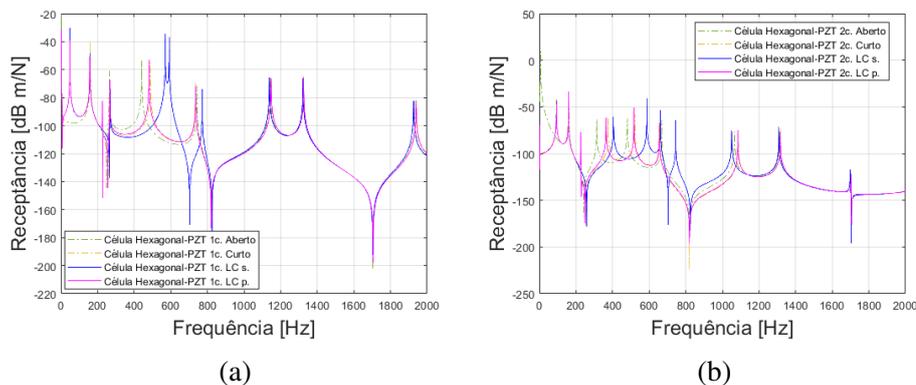


Figura 4.31: Célula hexagonal-PZT conectada com uma e duas camadas de circuito *shunt* indutor-capacitor (LC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) FRF com uma camada de *shunt* LC em série; b) FRF com duas camadas de *shunt* LC em paralelo.

A célula hexagonal-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* LC em série e em paralelo está representada na Figura 4.31a, quando configurado em série (Linha Azul) observamos que ele afeta principalmente a frequência de ressonância presente em 487 Hz, fazendo com que essa frequência se desloque e duplique; Quando configurado em paralelo (Linha Rosa) podemos observar o surgimento de um novo pico de frequência, localizado em 226 Hz, acompanhada do surgimento de duas anti-ressonâncias entre a faixa 220 Hz e 270 Hz. A figura 4.31b demonstra a resposta da estrutura com duas camadas de circuito *shunt* LC em série e em paralelo, em sua configuração em série (Linha Azul) observamos um comportamento similar ao de uma camada, porém, neste caso houve o surgimento de apenas um novo pico de frequência e o surgimento de uma anti-ressonância. Quando configurado em paralelo (Linha rosa), também nota-se um comportamento similar à aplicação com uma camada, onde temos na faixa entre 200 Hz e 280 Hz o surgimento de um pico de frequência e de duas anti-ressonâncias. Em ambas configurações os efeitos de supressão de vibração atuarem exatamente nas frequências configuradas, conforme indicadas na Figura 4.30.

Controle de vibração por circuito *shunt* RL

Para o cálculo da impedância foram utilizados valores de indutor $L = 0.2271H$ e valores de resistor $R = 53\Omega$, as impedâncias gerais do circuito *shunt* RL estão ilustradas na Figura 4.32.

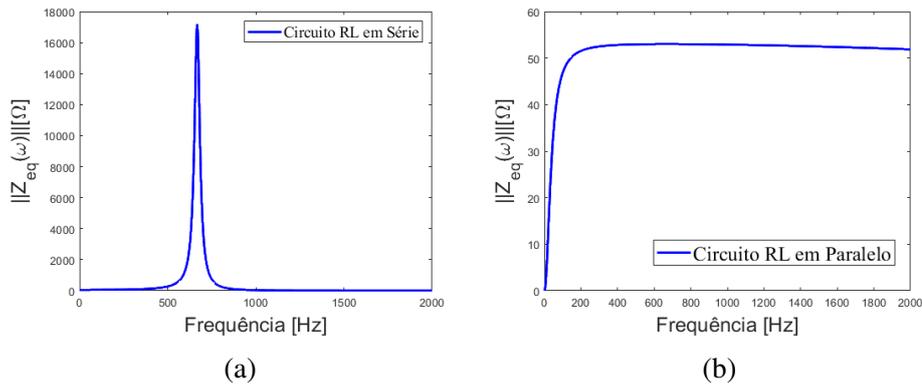


Figura 4.32: Impedância geral do circuito *shunt* resistivo indutivo (RL). a) Circuito *shunt* RL em série; b) Circuito *shunt* RL em paralelo.

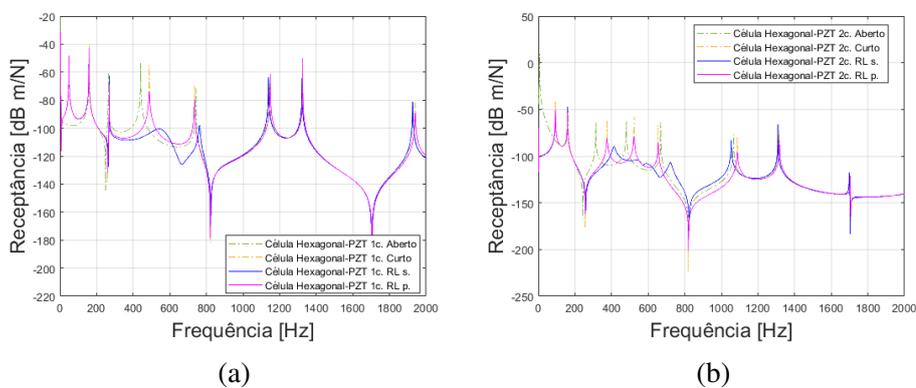


Figura 4.33: Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito *shunt* resistor-indutor (RL). a) FRF com uma camada de *shunt* RL; b) FRF com duas camadas de *shunt* RL.

Operando as impedâncias do circuito *shunt* RL na célula hexagonal-PZT, obtemos as FRFs do sistema. A FRF da célula hexagonal-PZT acoplada com uma camada piezoelétrica está representada pela Figura 4.33a, em sua configuração em série (linha azul) observa-se que as picos de frequência presentes na faixa entre 380 Hz e 750 Hz sofreram considerável atenuação, demonstrando que a eficiência da atenuação resultante do circuito *shunt* RL. Já em paralelo (linha rosa), não houve mudanças significantes. A figura 4.33b demonstra a resposta da estrutura acoplada com duas camadas de circuito *shunt* RL em série e em paralelo, enquanto configurada em série (Linha azul) observa-se novamente forte atenuação das vibrações entre as frequências 380 Hz e 750 Hz, reforçando a eficiência do circuito *shunt* RL. Já em sua configuração em paralelo, novamente não é observado mudanças significantes, apenas uma leve diminuição da amplitude de alguns picos de frequência.

Controle de vibração por circuito *shunt* RLC

Para calcular as impedâncias gerais do circuito RLC em série e paralelo utilizam os valores de indutor $L = 0.02271$ H, resistor $R = 53\Omega$ e capacitor $C = 2\mu F$. Na Figura 4.34 estão representadas as impedâncias do circuito *shunt* RLC.

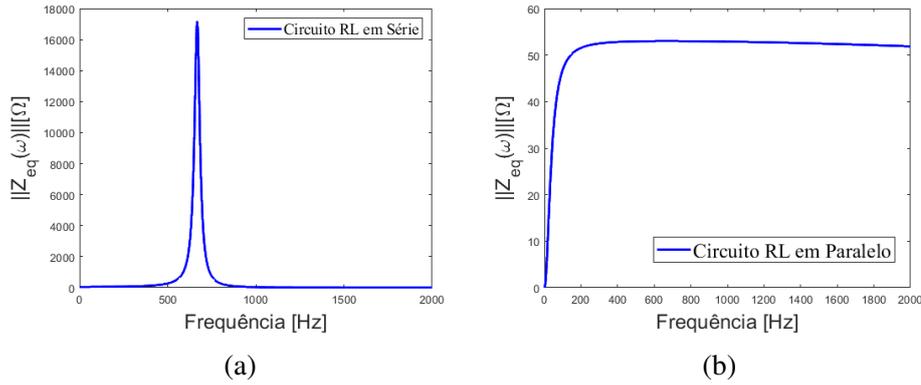


Figura 4.34: Impedância geral do circuito *shunt* resistivo indutivo capacitivo (RLC) aplicado à célula hexagonal-PZT. a) Circuito *shunt* RLC em série; b) Circuito *shunt* RLC em paralelo.

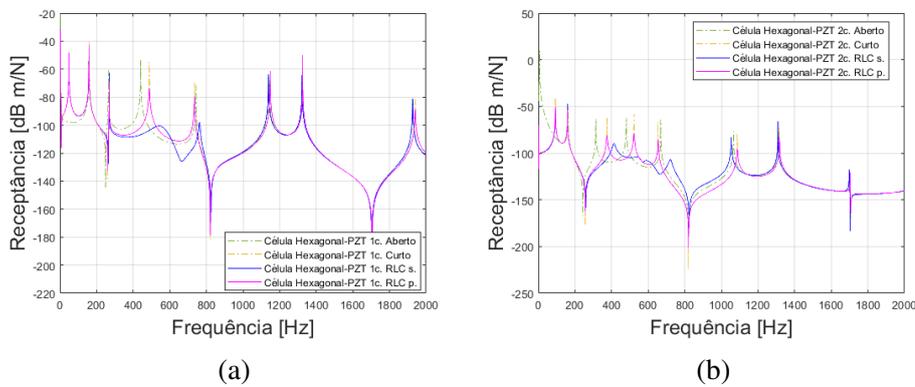


Figura 4.35: Célula hexagonal-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo-indutivo-capacitivo (RLC). a) FRF com uma camada de *shunt* RLC; b) FRF com duas camadas de *shunt* RLC.

Conforme observado na análise da Viga-PZT, o circuito *shunt* RLC apresenta uma impedância igual à observada em circuitos *shunt* RL(4.32). Operando as impedâncias do circuito *shunt* RL na célula hexagonal-PZT, obtemos as FRFs do sistema ilustradas na Figura 4.35. O efeito de atenuação causado pelo circuito *shunt* RLC configurado série e em paralelo é demonstrado na Figura 4.35a, que ilustra a resposta da estrutura acoplada com uma camada de circuito *shunt* RLC em série e em paralelo. A figura 4.35b representa a resposta da estrutura acoplada com duas camadas de circuito *shunt* RLC em série e em paralelo. O controle e atenuação do modo de vibrar da estrutura, proveniente do circuito *shunt* RLC, acontece de maneira quase idêntica à atenuação registrada na análise com circuito *shunt* RL. Isso indica que na condição especificada nos testes, o capacitor $C = 2\mu F$ não possui influência significativa na atuação do circuito.

Controle de vibração por circuito *shunt* na configuração *rainbow*

A configuração *rainbow* na célula hexagonal-PZT será aplicada de maneira similar à aplicada na metaestrutura, porém neste caso da célula hexagonal-PZT, por termos apenas

duas camadas de piezoelétricos na estrutura, serão utilizadas apenas duas frequências para serem sintonizadas no circuito. A figura 4.36 ilustra as duas formas, vertical e horizontal, que podem ser utilizadas para aplicar a configuração *rainbow* na célula hexagonal-PZT, Nesta análise a faixa de frequência determinada para a configuração dos piezoelétricos é de 480 Hz a 500 Hz, cada PZT em atuação é identificado por uma cor, para melhor identificação de cada frequência atuante.

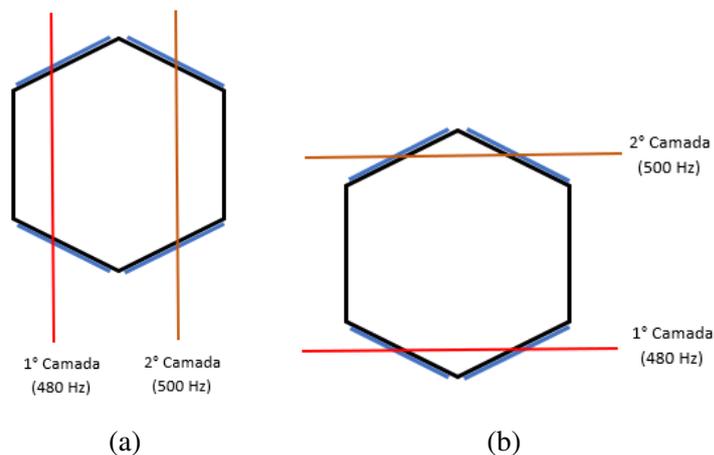


Figura 4.36: Formas de aplicação da configuração *rainbow* na célula hexagonal. a) *Rainbow* em sua configuração vertical; b) *Rainbow* em sua configuração horizontal.

A figura 4.37 ilustra a aplicação da configuração *rainbow*. A Figura 4.37a demonstra a atuação da primeira camada de piezoelétricos conectados com circuito *shunt* em sua formação horizontal, estes estão representados pela cor vermelha e sintonizados para atuar na frequência 480 Hz, é possível observar que a atuação deste piezoelétrico gera visível atenuação das vibrações na faixa de frequência entre 230 e 600 Hz. A Figura 4.37b ilustra a atuação da primeira e segunda camadas de piezoelétricos com circuito *shunt* na horizontal, identificado pela cor laranja e sintonizado para atuar em 500 Hz, nota-se que a atenuação de vibrações se mantém similar à com uma camada, porém, com o surgimento de anti-ressonâncias. A figura 4.37c ilustra a atuação de uma camada de piezoelétricos com circuito *shunt* em sua formação vertical, representado pela cor vermelho e sintonizado para atuar em 480 Hz. A Figura 4.37d demonstra a atuação das duas camadas de piezoelétricos conectados com circuito *shunt* em vertical, simbolizados pela cor laranja e sintonizados em 500 Hz. Observando a atuação de ambas camadas verticais nota-se que seu comportamento de controle e atenuação de vibrações da estrutura é muito semelhante ao da configuração horizontal, indicando que para a célula hexagonal-PZT a escolha da formação das camadas *rainbow* não possui influencia significativa.

Controle de vibração em múltiplas frequências por circuito *shunt* RL

Controle de vibração por circuito *shunt* A aplicação da configuração de multi-impedâncias é descrita no capítulo 4.2.1.7. Executando a configuração das multi-

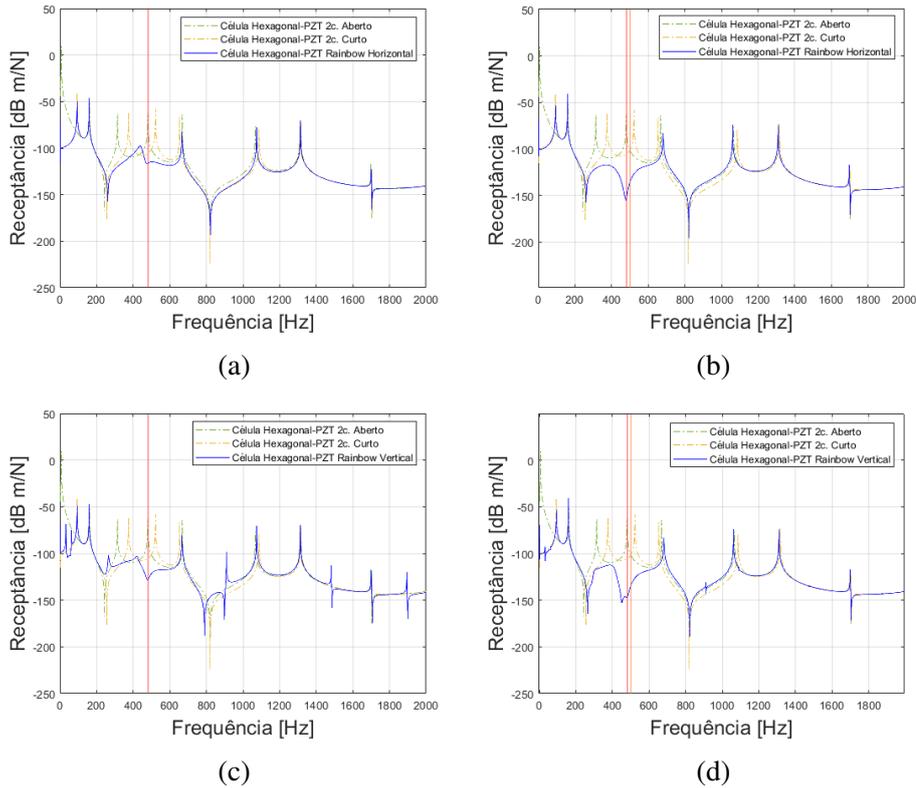


Figura 4.37: Célula hexagonal-PZT com atuação da configuração *rainbow*. a) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (Vermelho) em horizontal; b) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (laranja) em horizontal; c) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (vermelho) em vertical; d) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (laranja) em vertical.

impedâncias nos circuitos aplicados à célula hexagonal-PZT obtemos as FRFs do sistema, ilustradas na Figura 4.38.

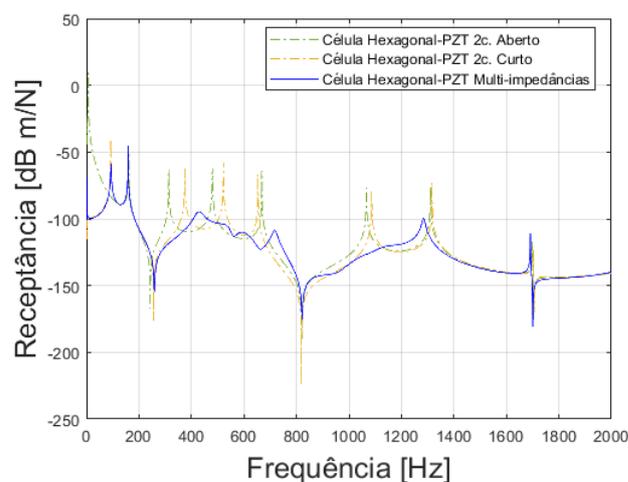


Figura 4.38: Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da célula hexagonal-PZT.

A Figura 4.38 demonstra a influencia causada pela configuração das multi-impedâncias no modo de vibrar da célula hexagonal-PZT, é possível observar que a atenuação das vibra-

ções geradas por esse procedimento se estende pela faixa de frequência entre 250 Hz e 1400 Hz.

4.4.2 Placa *Honeycomb*-PZT

A placa *honeycomb* com suas vigas acopladas com piezoelétricos está ilustrada na Figura 4.39. Seguindo a mesma metodologia utilizada com a célula hexagonal, o acoplamento dos piezoelétricos com circuito *shunt* também será feito por camadas, onde apenas os elementos viga na horizontal serão acoplados à pastilhas piezoelétricas. Assim, as análises com a placa *honeycomb*-PZT serão realizadas de maneira análoga às análises feitas com a célula hexagonal-PZT.

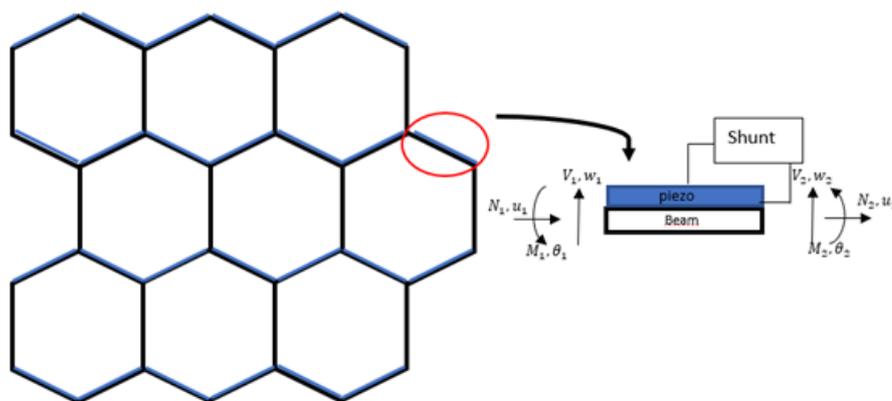


Figura 4.39: Placa *honeycomb* com suas vigas acoplada com PZTs

Controle de vibração por circuito *shunt* resistivo

A realização da simulação do efeito do circuito *shunt* resistivo aplicado à placa *honeycomb*-PZT será feita seguindo o mesmo padrão utilizado na análise da célula hexagonal-PZT (capítulo 4.4.1, assim foram escolhidas a capacitância piezoelétrica $C_p^T = 250nF$ e duas resistências gerais com os valores de 53Ω e 5300Ω . As impedâncias do circuito *shunt* R estão demonstradas na Figura 4.4. Operando as impedâncias do circuito *shunt* R na placa *honeycomb*-PZT, obtemos as FRFs do sistema. Devido a alta densidade modal da placa *honeycomb*-PZT foi utilizada a faixa de frequência de 0 Hz a 600 Hz, para uma melhor visualização das FRFs, conforme a figura 4.40 destaca.

As FRFs da placa *honeycomb*-PZT com circuito *shunt* resistivo estão demonstradas na Figura 4.41. Nas Figuras 4.41a e 4.41b é apresentada a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* R com 53Ω e 5300Ω , respectivamente. Nota-se que seu comportamento é semelhante ao comportamento da célula hexagonal-PZT com circuito *shunt* R (4.4.1), onde temos um amortecimento na estrutura que só ocorre nas frequências iniciais e é proporcional ao valor do resistor (R). Nas Figuras 4.41c e 4.41d é apresentada a

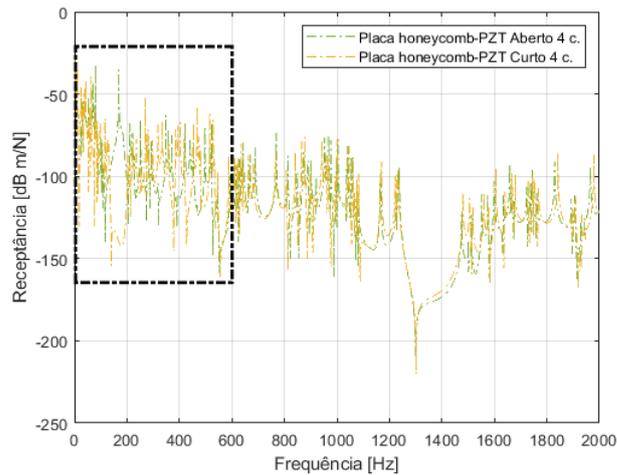


Figura 4.40: Faixa de atuação do circuito *shunt* puramente resistivo.

FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com duas camadas de circuito *shunt* R com 53Ω e 5300Ω , por termos adicionado massa e rigidez na estrutura, podemos notar uma alteração nos modos de vibrar da estrutura, e por termos um número de circuitos atuantes maior temos um efeito mais acentuado do amortecimento proveniente do circuito *shunt* Resistivo. Nas Figuras 4.41e e 4.41f é apresentada a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com três camadas de circuito *shunt* R com 53Ω e 5300Ω , seguindo o mesmo efeito observado na FRF com duas camadas, aqui observamos um efeito de amortecimento mais acentuado devido à adição de elementos presentes no circuito *shunt* Resistivo. Na Figura 4.41g e 4.41h é apresentada a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com quatro camadas de circuito *shunt* R com 53Ω e 5300Ω , novamente é registrado um efeito de amortecimento mais acentuado, devido à adição de elementos que compõe o circuito resistivo.

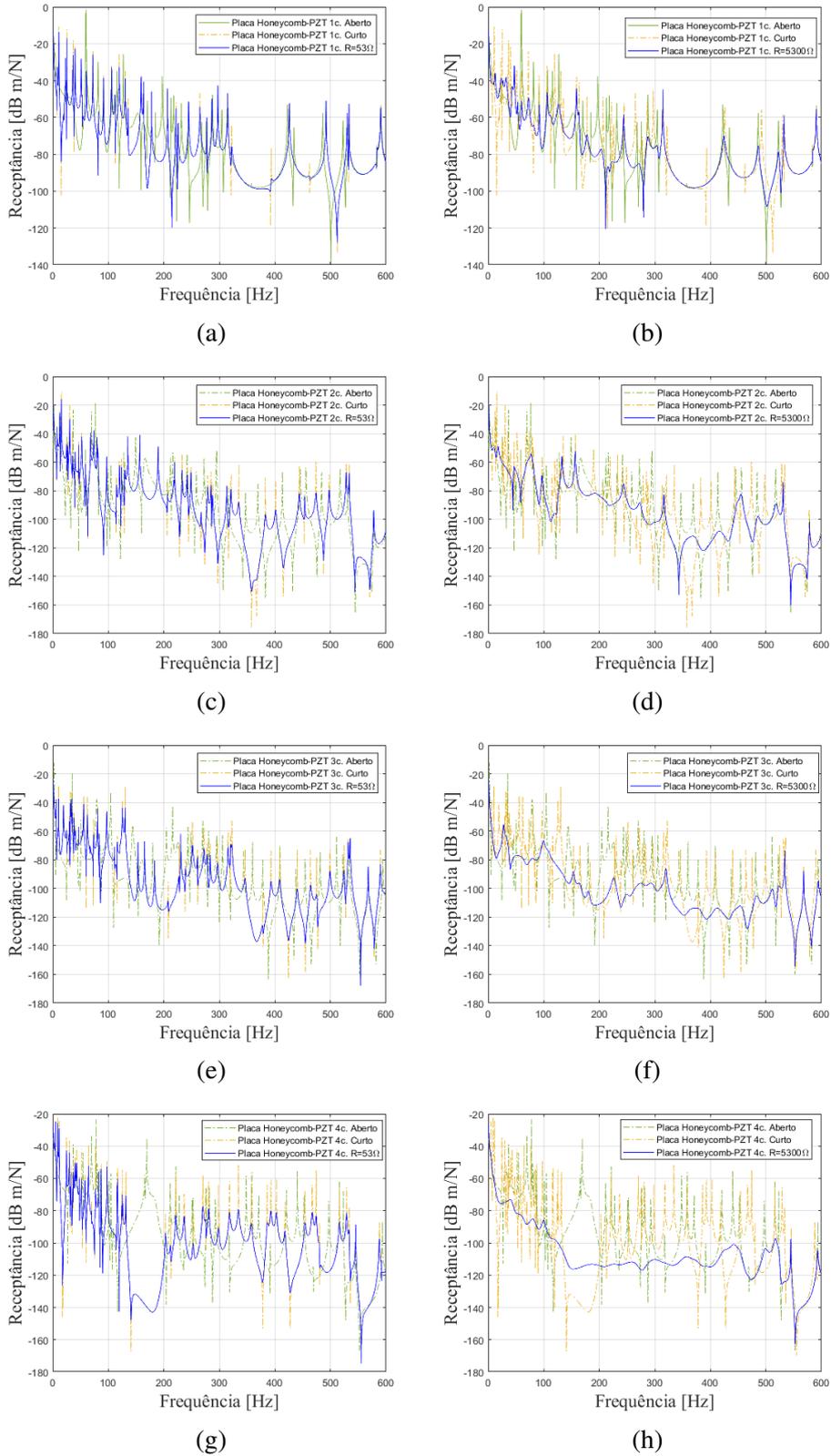


Figura 4.41: Placa *honeycomb*-PZT acoplada ao circuito *shunt* resistivo (R). a) FRF com uma camada de *shunt* Resistivo $R = 53\Omega$; b) FRF com uma camada de *shunt* Resistivo $R = 5300\Omega$; c) FRF com duas camadas de *shunt* Resistivo $R = 53\Omega$; d) FRF com duas camadas de *shunt* Resistivo $R = 5300\Omega$; e) FRF com três camadas de *shunt* Resistivo $R = 53\Omega$; f) FRF com três camadas de *shunt* Resistivo $R = 5300\Omega$; g) FRF com quatro camadas de *shunt* Resistivo $R = 53\Omega$; h) FRF com quatro camadas de *shunt* Resistivo $R = 5300\Omega$

Controle de vibração por circuito *shunt* indutivo

A análise da placa *honeycomb*-PZT com circuito *shunt* puramente indutivo (L) é utilizado quatro valores de indutor (L) de valor $L = 0.2284$ H, $L = 0.1691$ H, $L = 0.1276$ H e $L = 0.10811$ H, sendo o primeiro valor de indutor configurado para um pico de ressonância na configuração de uma camada de pastilhas piezoelétricas acopladas, o segundo valor configurado para um pico de ressonância na configuração de duas camadas de piezoelétricos e assim por diante. As impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* por esses valores de indutor estão ilustrados na Figura 4.42

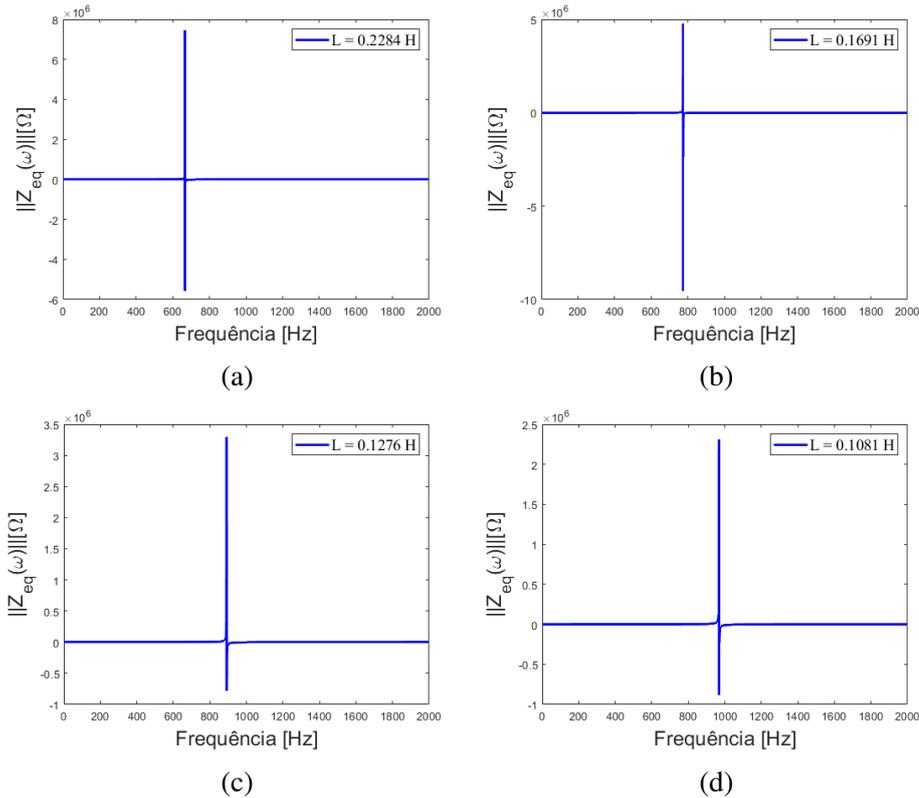


Figura 4.42: Impedância geral do circuito *shunt* indutivo puro aplicado na placa *honeycomb*-PZT. a) Indutor no valor de $L = 0.2284H$; b) Indutor no valor de $L = 0.1691H$; c) Indutor no valor de $L = 0.1276H$; d) Indutor no valor de $L = 0.1081H$.

Foi utilizada a faixa de frequência de 500 Hz a 1300 Hz, para uma melhor visualização das FRFs, conforme a figura 4.43 demonstra.

Operando as impedâncias do circuito *shunt* puramente indutivo (L), apresentadas na Figura 4.42, na placa *honeycomb*-PZT, obtemos as FRFs do sistema. As FRFs da placa *honeycomb*-PZT com circuito *shunt* indutivo puro (L) estão apresentadas na Figura 4.44. A Figura 4.44a apresenta a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* indutivo, o circuito puramente indutivo produz alterações como o leve deslocamento do modo de vibrar da estrutura e leve mitigação de alguns picos de frequência, um exemplo pode ser observado nas frequências 594 Hz e 971 Hz. Observa-se o surgimento de novos picos de frequências em 569 Hz e 608 Hz, e também o surgimento de anti-ressonâncias próximas a

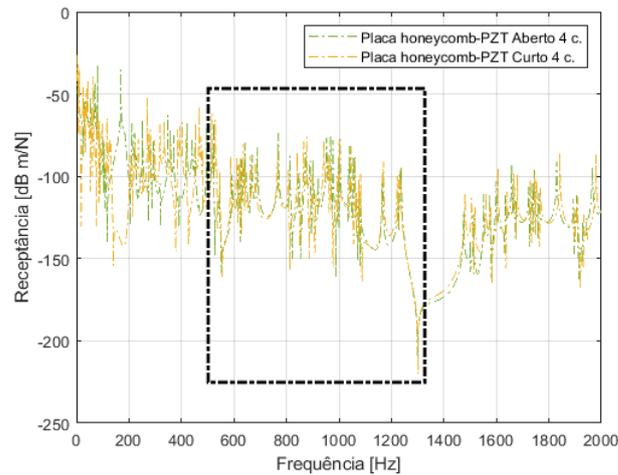


Figura 4.43: Faixa de atuação do circuito *shunt* puramente indutivo.

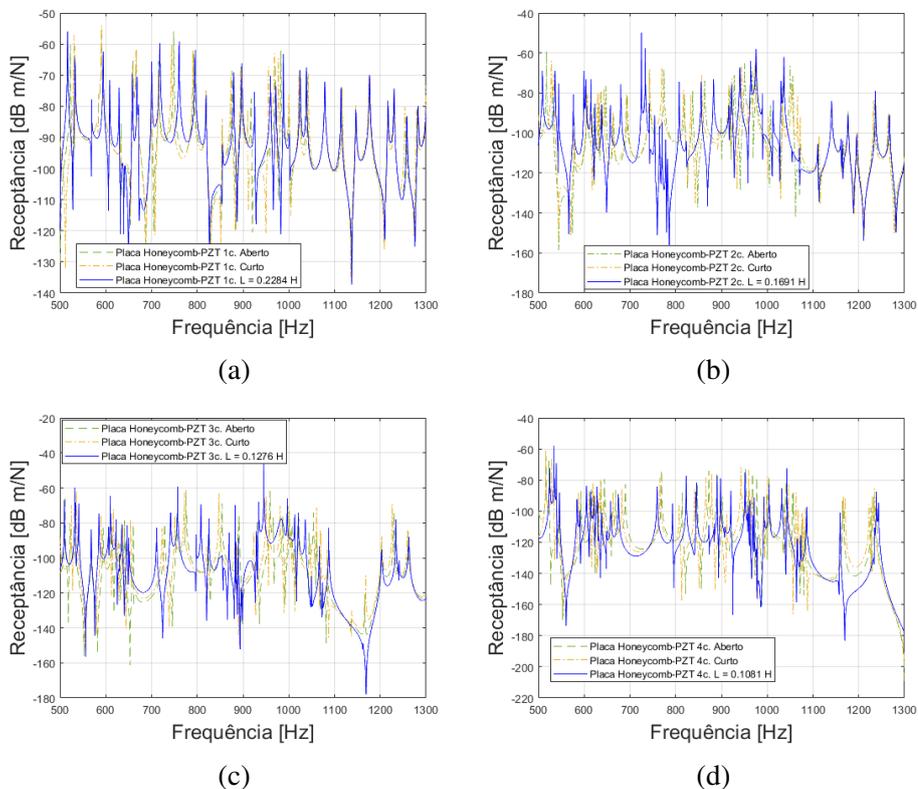


Figura 4.44: FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com circuito *shunt* indutivo. a) Indutor no valor de $L = 0.2284H$; b) Indutor no valor de $L = 0.1691H$; c) Indutor no valor de $L = 0.1276H$; d) Indutor no valor de $L = 0.1081H$.

estas frequências. A Figura 4.44b apresenta a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com duas camadas de circuito *shunt* indutivo, a utilização de duas camadas de pastilhas piezoelétricas acopladas na estrutura nota-se com clareza o surgimento de novos picos de ressonância e anti-ressonâncias na frequência configurada para o indutor. Ainda observa-se a diminuição do total de picos de ressonância por todo o modo de vibrar da estrutura, como visto na faixa de frequência entre 800 Hz e 1100 Hz. A Figura 4.44c representa a estrutura acoplada com

três camadas de circuito *shunt* indutivo, seguindo o mesmo padrão observado na abordagem anterior, é possível observar a supressão de alguns picos de ressonância, alteração no modo de vibrar e o surgimento de anti-ressonâncias. A Figura 4.44d ilustra a FRF da estrutura acoplada com quatro camadas de circuito *shunt* indutivo, com quatro camadas os efeitos do circuito *shunt* indutivo mantém o mesmo padrão das abordagens anteriores, com supressão de picos de ressonância e aparecimento de anti-ressonância, principalmente na frequência na qual o indutor foi configurado para agir.

Controle de vibração por circuito *shunt* capacitivo

A análise utilizando um circuito puramente capacitivo foi feita de forma equivalente à da célula hexagonal-PZT, portanto é utilizado os mesmos valores de capacitor (C), sendo eles: $C = -720nF$ e $C = 2KnF$. As impedâncias gerais geradas no circuito *shunt* por esses valores de capacitor estão apresentadas na Figura 4.8. Aplicando estas impedâncias na placa *honeycomb*-PZT, temos as FRFs do sistema. Com a aplicação de um circuito *shunt* puramente capacitivo (C) na estrutura juntamente de um valor de capacitor negativo, é possível observar alterações em anti-ressonâncias e reduções em alguns picos de ressonância, essas alterações são sutis, o que demonstra que apenas um circuito *shunt* capacitivo não possui grande influência nos modos de vibrar da estrutura, seja com uma ou quatro camadas piezoelétricas acopladas. Para uma melhor visualização das FRFs a faixa de frequência selecionada foi de 500 Hz a 1300 Hz, conforme a figura 4.45 ilustra.

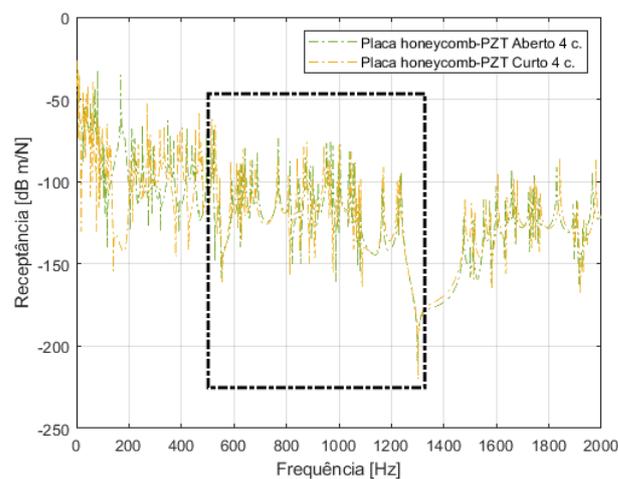


Figura 4.45: Faixa de atuação do circuito *shunt* puramente capacitivo.

A aplicação de circuitos *shunt* com capacitores configurados com valor positivo é apresentada na Figura 4.47, é possível notar praticamente nenhuma mudança nos modos de vibrar da estrutura, reforçando que apenas o circuito *shunt* capacitivo não possui capacidade de influenciar na forma de vibrar da estrutura.

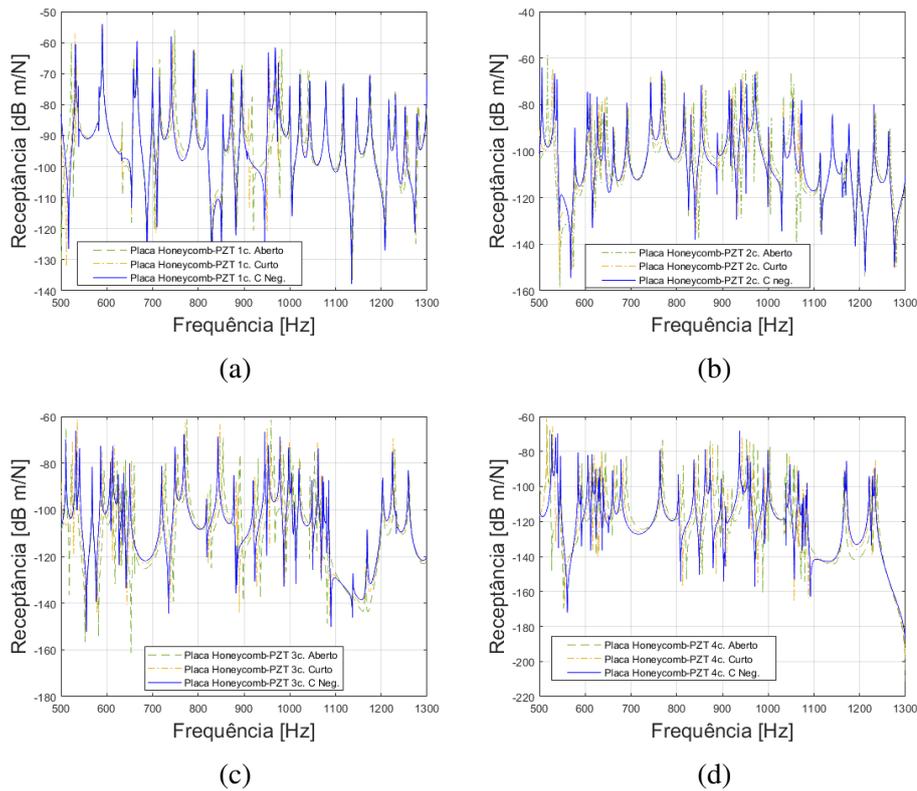


Figura 4.46: Célula hexagonal-PZT conectada com circuito *shunt* capacitivo puro. a) FRF com uma camada de *shunt* capacitivo negativo de $C = -720nF$; b) FRF com duas camadas de *shunt* Capacitivo negativo de $C = -720nF$; c) FRF com três camadas de *shunt* Capacitivo negativo no valor de $C = -720nF$; d) FRF quatro camadas de *Shunt* Capacitivo no valor de $C = -720nF$

Controle de vibração por circuito *shunt* LC

Para a efetuação da análise do circuito *shunt* indutor-capacitor (LC) aplicado na placa *honeycomb*-PZT foram escolhidos os valores de indutor $L = 0.1081H$ e capacitor $C = 2\mu F$, as impedâncias gerais geradas por esses valores no circuito *shunt* LC estão demonstradas na Figura 4.48.

Novamente foi utilizado a faixa de frequência de 500 Hz a 1300 Hz, para uma melhor visualização das FRFs, conforme a figura 4.49 demonstra.

Operando as impedâncias apresentadas na Figura 4.48 na placa *honeycomb*-PZT, obtemos as FRFs do sistema. A Figura 4.50a ilustra a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com uma camada de circuito *shunt* LC, observamos que os efeitos do circuito LC tanto em série (linha azul) quanto em paralelo (linha rosa) são mínimos, devido à pouca quantidade de piezoelétricos atuando na estrutura. Na Figura 4.50b vemos a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com duas camadas de circuito *shunt* LC, com duas camadas já é possível observar mais efetividade do circuito *shunt* LC em série (linha azul) na forma de vibrar da estrutura, havendo o surgimento de anti-ressonâncias e a atenuação das frequências próximas à frequência que é de 968 Hz, já em sua configuração em paralelo (linha rosa) continua-se

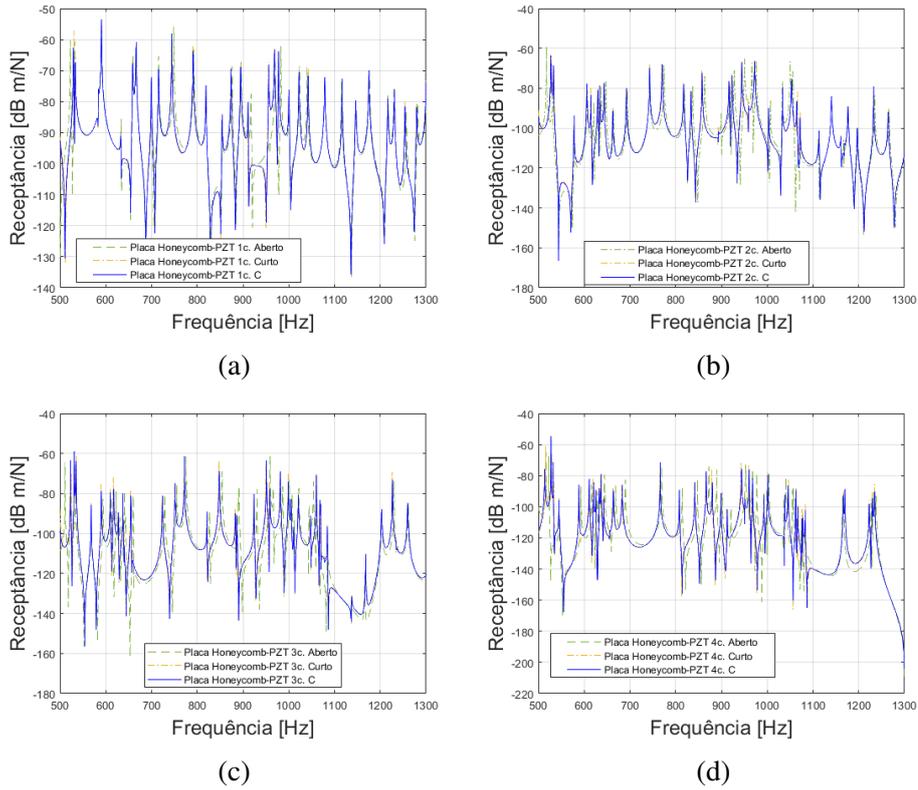


Figura 4.47: Placa *honeycomb*-PZT conectada com circuito *shunt* capacitivo puro. a) FRF com uma camada de *shunt* capacitivo negativo de $C = 2\mu F$; b) FRF com duas camadas de *shunt* Capacitivo negativo de $C = 2\mu F$; c) FRF com três camadas de *shunt* Capacitivo no valor de $C = 2\mu F$; d) FRF com quatro camadas de *Shunt* Capacitivo no valor de $C = 2\mu F$

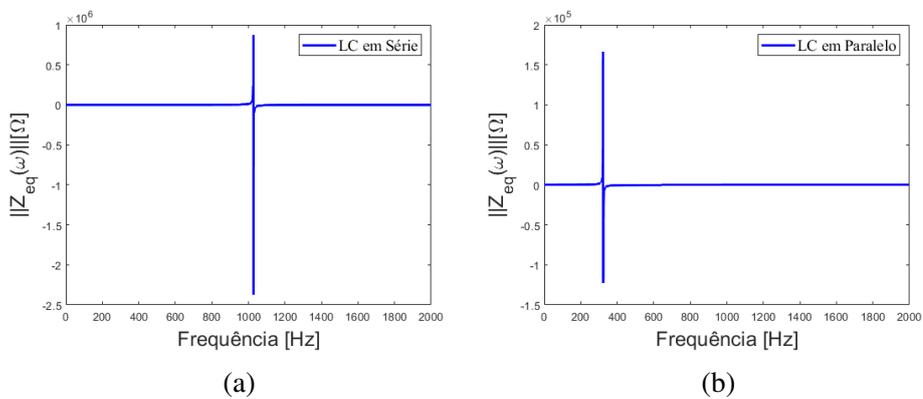


Figura 4.48: Impedância geral do circuito *shunt* indutivo-capacitivo (LC) aplicado na placa-*honeycomb*-PZT. a) Impedância do circuito *shunt* LC em série; b) Impedância do circuito *shunt* LC em paralelo.

a observar que ele não afeta o modo de vibrar da estrutura. A Figura 4.50c ilustra a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada com três camadas de circuito *shunt* LC, com a adição de elementos piezoelétricos na estrutura, em série (linha azul) observa-se um aumento de anti-ressonâncias, principalmente nas frequências entre 1000 Hz e 1080 Hz, novamente a configuração em paralelo (linha rosa) não apresenta mudanças relevantes. E por fim, a Figura 4.50d ilustra a FRF da placa *honeycomb*-PZT acoplada à quatro camadas de circuito

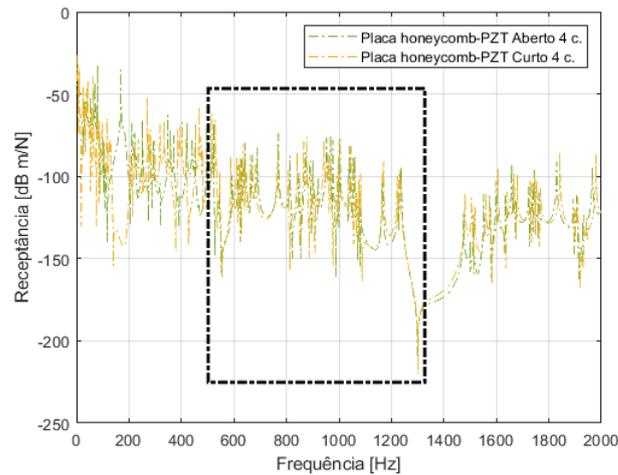


Figura 4.49: Faixa de atuação do circuito *shunt* indutivo-capacitivo (LC).

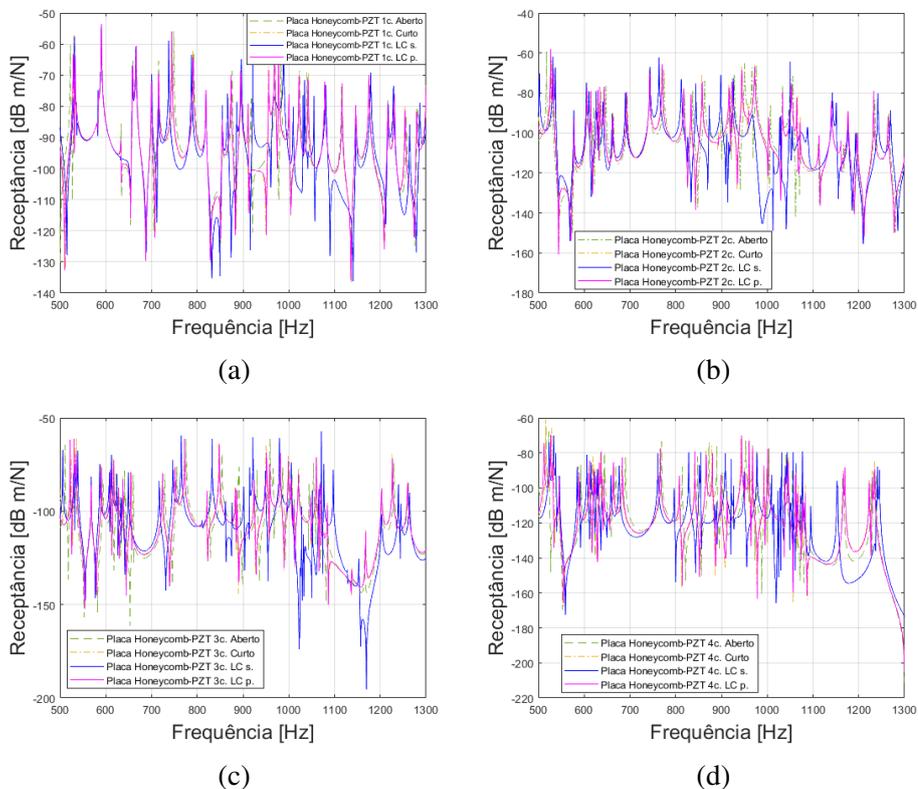


Figura 4.50: Placa *honeycomb*-PZT acoplada com circuito *shunt* indutor-capacitor (LC). a) FRF com uma camada de *shunt* LC; b) FRF com duas camadas de *shunt* LC; c) FRF com três camadas de *shunt* LC; d) FRF com quatro camadas de *shunt* LC

shunt LC, com o maior número de pastilhas piezoelétricas acopladas na estrutura vemos um comportamento semelhante à abordagem anterior, porém, nota-se que na frequência sintonizada (968 Hz) o efeito do circuito *shunt* LC faz com que diversos picos de ressonância se tornem apenas um pico. A configuração em paralelo (linha rosa) continuou demonstrando não possuir influencia no modo de vibrar da estrutura.

Controle de vibração por circuito *shunt* Resistivo-Indutivo (RL)

Para o cálculo da impedância foram utilizados valores de indutor $L = 0.1081H$ e valor de resistor $R = 53\Omega$, as impedâncias gerais do circuito *shunt* RL estão ilustradas na Figura 4.51.

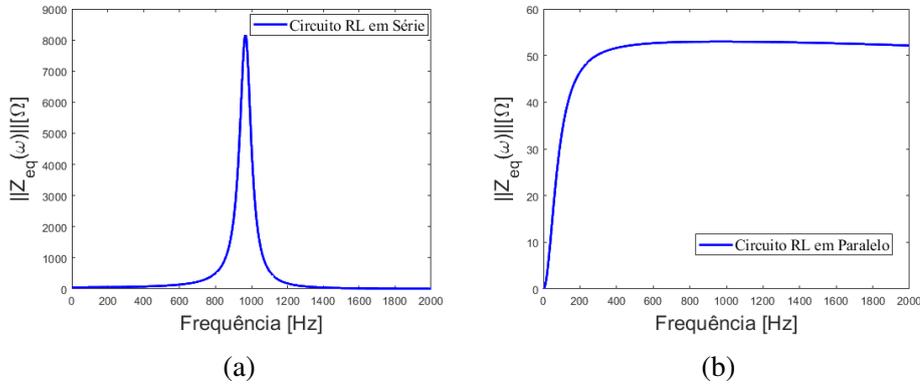


Figura 4.51: Impedância geral do circuito *shunt* resistivo-indutivo (RL) aplicado na placa *honeycomb*-PZT. a) Impedância do circuito *shunt* RL em série; b) Impedância do circuito *shunt* RL em paralelo.

De maneira similar às análises dos circuitos *shunt* puramente indutivo (L), puramente capacitivo (C) e LC, foi utilizado a faixa de frequência de 500 Hz a 1300 Hz, para uma melhor visualização das FRFs, conforme a figura 4.52 demonstra.

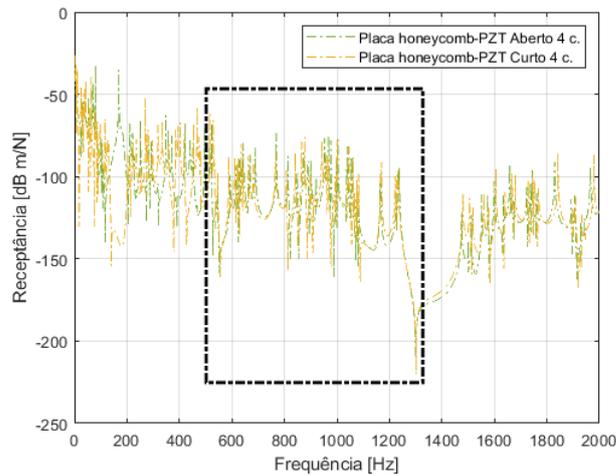


Figura 4.52: Faixa de atuação do circuito *shunt* Resistivo-indutivo (RL).

Empregando as impedâncias gerais do circuito *shunt* RL apresentadas na Figura 4.51 na placa *honeycomb*-PZT, obtemos as FRFs do sistema. A Figura 4.53 apresenta as FRFs da placa *honeycomb*-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo-indutivo (RL), na Figura (4.53a) demonstra a FRF da placa *honeycomb*-PZT com circuito *shunt* RL em uma camada, enquanto em série (linha azul) há atenuação dos picos de ressonância entre 735 Hz e 855 Hz e também entre 910 Hz e 1040 Hz, já o circuito *shunt* RL em paralelo (linha rosa) não gera

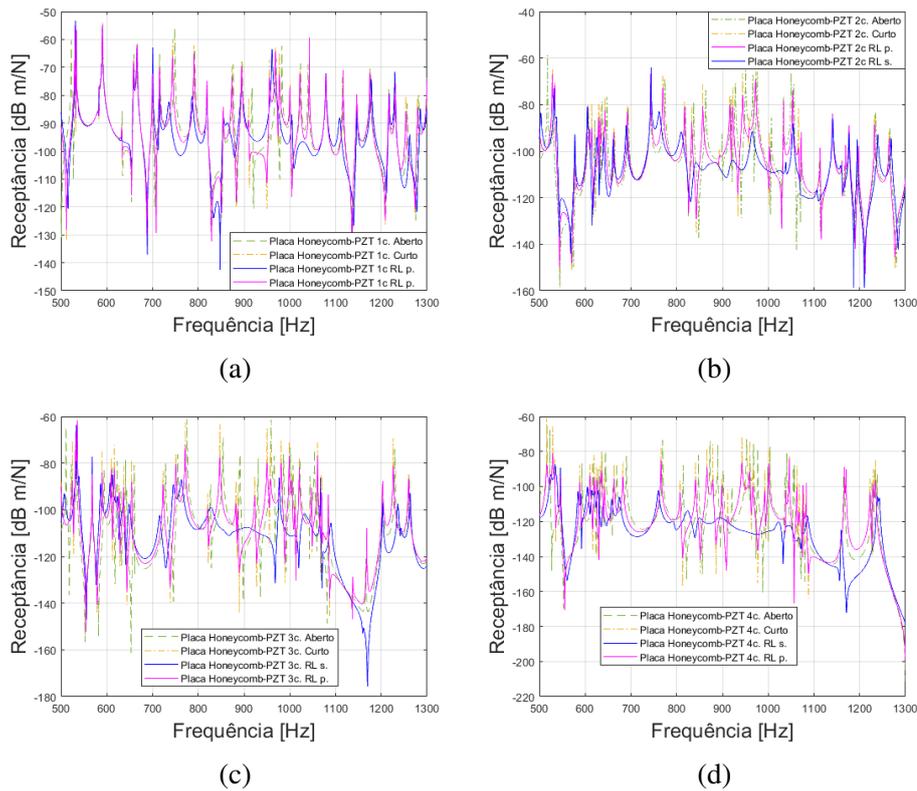


Figura 4.53: Placa *honeycomb*-PZT acoplada com circuito *shunt* resistivo-indutivo (RL). a) FRF da placa *honeycomb*-PZT com uma camada de *shunt* RL; b) FRF da placa *honeycomb*-PZT com duas camadas de *shunt* RL; c) FRF com três camadas de *shunt* RL; d) FRF com quatro camadas de *shunt* RL.

mudanças relevantes no modo de vibrar da estrutura. A Figura (4.53b) demonstra a atuação do circuito *shunt* RL com duas camadas acopladas na placa *honeycomb*-PZT, com o circuito em série (linha azul) é possível observar a elevação do grau de atenuação no modo de vibrar da estrutura, com foco na faixa de frequência entre 750 Hz e 1100 Hz, registra-se que na configuração em paralelo (linha rosa) há uma sutil atenuação dos picos de ressonância, mas sem gerar mudanças relevantes no modo de vibrar da estrutura. A simulação com três camadas acopladas está demonstrada na Figura (4.53c), em sua configuração em série (linha azul) há uma atenuação mais intensa nas vibrações na região em que o circuito foi sintonizado e o surgimento de uma grande anti-ressonância próximo a 1150 Hz, já em paralelo (linha rosa) nota-se um leve grau de atenuação dos picos de ressonância, porém sem mudanças significativas. A Figura (4.53d) ilustra a placa *honeycomb*-PZT com quatro camadas de circuito *shunt* RL, por ser a configuração com o maior número de pastilhas piezoelétricas com circuito *shunt* acoplados vemos, na frequência em que o circuito foi sintonizado, uma acentuada atenuação do modo de vibrar da estrutura. Observa-se o aumento da atenuação da vibração na estrutura proporcional ao aumento de elementos piezoelétricos acoplados à placa.

Controle de vibração por circuito *shunt* Resistivo-Indutivo-Capacitivo

Para a análise dos efeitos causados pelos piezoelétricos com circuito *shunt* RLC aplicados à placa *honeycomb*-PZT, foram utilizados os valores: Indutor $L = 0.1081H$, resistor $R = 53\Omega$ e capacitor $C = 2\mu F$, também foi selecionado a faixa de frequência entre 500 Hz e 1300 Hz para melhor visualização do modo de vibrar da estrutura, conforme ilustrado na Figura 4.54. Na análise da célula hexagonal-PZT utilizando o circuito RLC (4.4.1), foi observado que a impedância geral do circuito RLC é igual à impedância do circuito RL, portanto a impedância geral do circuito RLC está ilustrada na Figura 4.32. Aplicando as impedâncias zeradas pelo circuito *shunt* RLC na placa *honeycomb*-PZT obtemos as FRFs ilustradas na Figura 4.55. Assim como observado nas análises da célula hexagonal-PZT, aqui os circuitos *shunt* RL e RLC demonstram que os efeitos gerados pela aplicação das camadas piezoelétricas acopladas com circuito *shunt* RLC são praticamente idênticos aos efeitos causados pelo circuito *shunt* RL, reforçando a conclusão de que o Capacitor não possui influência significativa na capacidade de atenuação do circuito *shunt*.

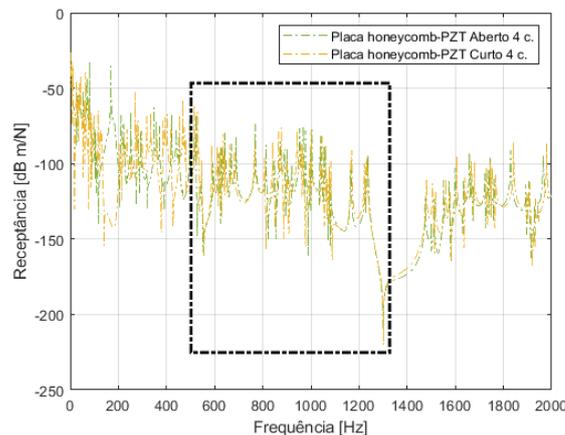


Figura 4.54: Faixa de atuação do circuito *shunt* Resistivo-indutivo-Capacitivo (RLC).

Configuração *rainbow* aplicada a controle de vibração da placa *honeycomb*-PZT

A utilização da configuração *rainbow* na placa *honeycomb*-PZT pode também ser feita nas formações vertical ou horizontal, de maneira similar à utilizada na célula hexagonal-PZT, como ilustrado na Figura 4.56.

A placa *honeycomb*-PZT em sua formação horizontal possui quatro camadas de piezoelétricos atuantes e está ilustrada na figura 4.56a. Para a aplicação da configuração *rainbow* na placa *honeycomb*-PZT em sua formação horizontal, as camadas piezoelétricas são representadas por cores e sintonizadas às seguintes frequências: 800 Hz (Vermelho), 810 Hz (Laranja), 820 Hz (Amarelo) e 830 Hz (Verde). As FRFs do sistema obtidas com essa aplicação estão ilustradas na Figura 4.58. A figura 4.57 destaca a faixa de frequência selecionada para a análise do impacto da configuração *rainbow* horizontal no modo de vibrar da placa *honeycomb*-PZT.

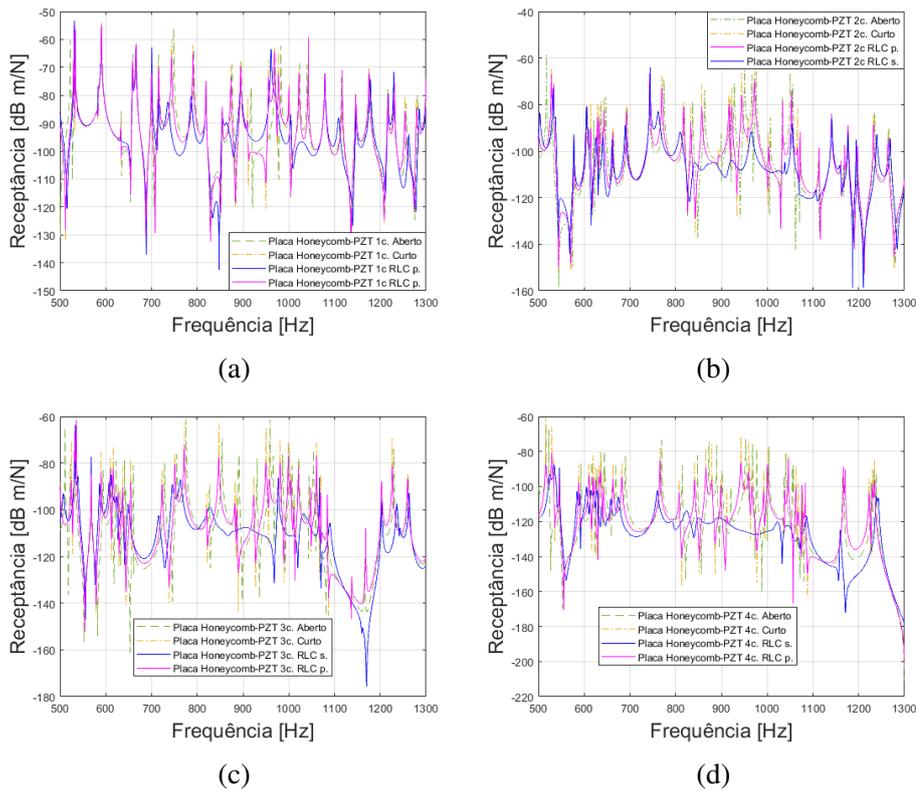


Figura 4.55: Placa *honeycomb*-PZT aplicada com circuito *shunt* resistor-indutor-capacitor (RLC). a) FRF da placa *honeycomb*-PZT com uma camada de *shunt* RLC; b) FRF da placa *honeycomb*-PZT com duas camadas de *shunt* RLC; c) FRF da placa *honeycomb*-PZT com três camadas de *shunt* RLC; d) FRF da placa *honeycomb*-PZT com quatro camadas de *shunt* RLC.

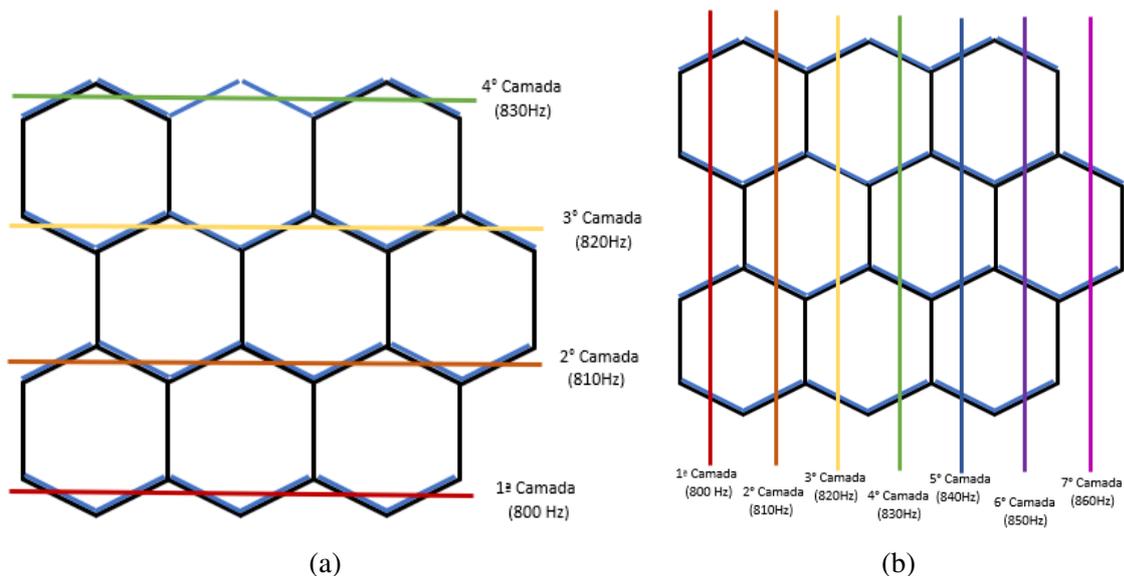


Figura 4.56: Formas de aplicação da configuração *rainbow* na placa *honeycomb*-PZT. a) *rainbow* em configuração horizontal; b) *rainbow* em configuração vertical.

A Figura 4.58a demonstra a atuação da primeira camada de piezoelétricos conectados com circuito *shunt* em sua formação horizontal, sintonizados para atuar na frequência 800

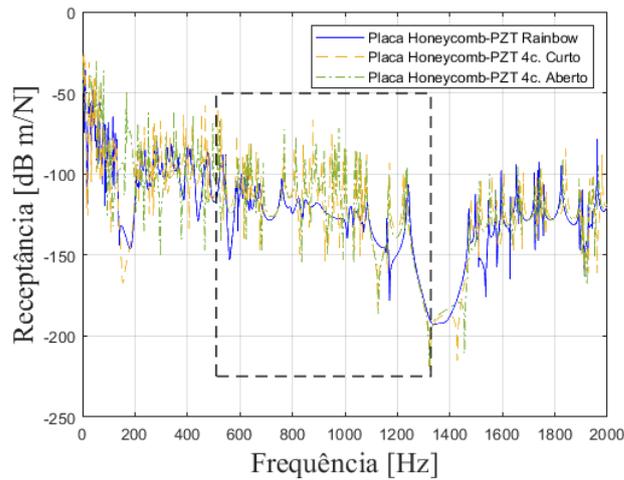


Figura 4.57: Faixa de atuação do circuito *shunt* na configuração *rainbow*.

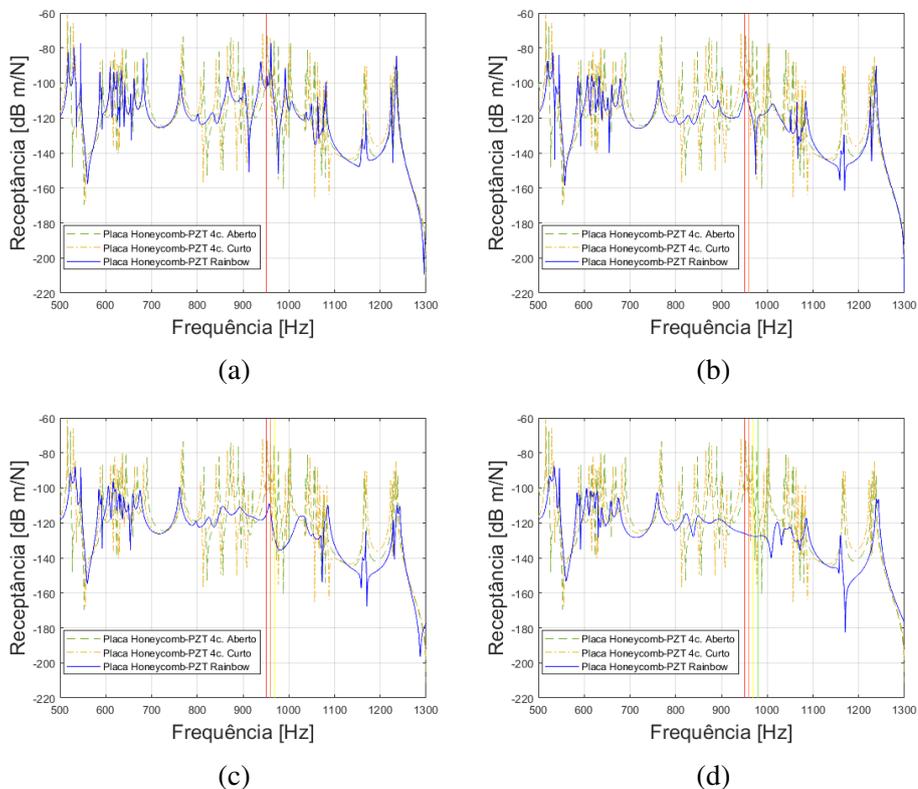


Figura 4.58: Placa *honeycomb*-PZT com atuação da configuração *rainbow*. a) Atuação da primeira camada de piezoelétricos (Vermelho) em horizontal; b) Atuação da segunda camada de piezoelétricos (Laranja) em horizontal; c) Atuação da terceira camada de piezoelétricos (Amarelo) em horizontal; d) Atuação da quarta camada de piezoelétricos (Verde) em horizontal.

Hz e representados pela cor vermelha, é possível observar que a atuação deste piezoelétrico gera efeitos de atenuação entre 760 Hz e 1080 Hz. A atuação da primeira e segunda camada de piezoelétricos, demonstrada na Figura 4.58b, a segunda camada de piezoelétricos está sintonizada para atuar em 810 Hz e é representada pela cor laranja, observa-se a intensificação do fenômeno de atenuação presente entre 760 Hz e 1080 Hz. A Figura 4.58c demonstra a

atuação da primeira, segunda e terceira camada de piezoelétricos, sendo a terceira camada representada pela cor amarela e sintonizada para atuar em 820 Hz, novamente observa-se a intensificação da atenuação dos picos de ressonância presente entre 760 Hz e 1080 Hz. A atuação das quatro camadas de piezoelétricos está demonstrada na Figura 4.58d, a quarta camada é representada pela cor verde e sintonizada para atuar em 830 Hz, com todas as camadas ativas e atuando observamos uma forte atenuação na faixa de frequência selecionada para atuação da configuração *rainbow*.

A placa *honeycomb*-PZT em sua formação vertical possui sete camadas de piezoelétricos atuantes e está ilustrada na figura 4.56b. Para a implementação do *rainbow* na placa *honeycomb*-PZT em sua formação vertical, as camadas piezoelétricas são representadas por cores e sintonizadas às seguintes frequências: 800 Hz (Vermelho), 810 Hz (Laranja), 820 Hz (Amarelo), 830 Hz (Verde), 840 Hz (Azul), 850 Hz (Roxo), 860 Hz (Rosa). A figura 4.59 destaca a faixa de frequência selecionada para a análise do impacto da configuração *rainbow* horizontal no modo de vibrar da placa *honeycomb*-PZT. As FRFs do sistema obtidas com essa formação estão ilustradas na Figura 4.60.

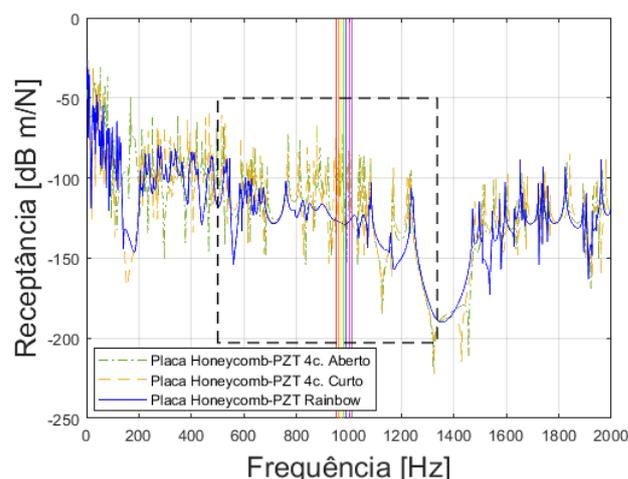


Figura 4.59: Faixa de atuação do circuito *shunt* com a configuração *rainbow*.

A figura 4.60a ilustra a atuação da primeira camada piezoelétrica conectada com circuito *shunt*, identificado pela cor vermelha e sintonizado para atuar na frequência 800 Hz, por ser a única camada ativa seu efeito é pequeno, gerando apenas uma leve atenuação no modo de vibrar da estrutura, em especial entre 760 Hz e 1080 Hz. A figura 4.60b ilustra a FRF com a atuação da primeira e segunda camada piezoelétrica, sendo a segunda camada sintonizada em 810 Hz e identificada pela cor laranja, com duas camadas atuando nota-se a acentuação da atenuação de vibrações nas frequências próximas à sintonizada. A figura 4.60c ilustra a FRF da placa *honeycomb*-PZT com a primeira, segunda e terceira camada de piezoelétricos atuando, a terceira camada é identificada pela cor amarela e atua na frequência 820 Hz, com as três camadas ativas verifica-se apenas um pequeno aumento na atenuação observada entre as frequências 760 Hz e 1080 Hz, que são próximas às frequências sintonizadas para as camadas. A figura 4.60d demonstra os efeitos de quatro camadas de piezoelétricos na

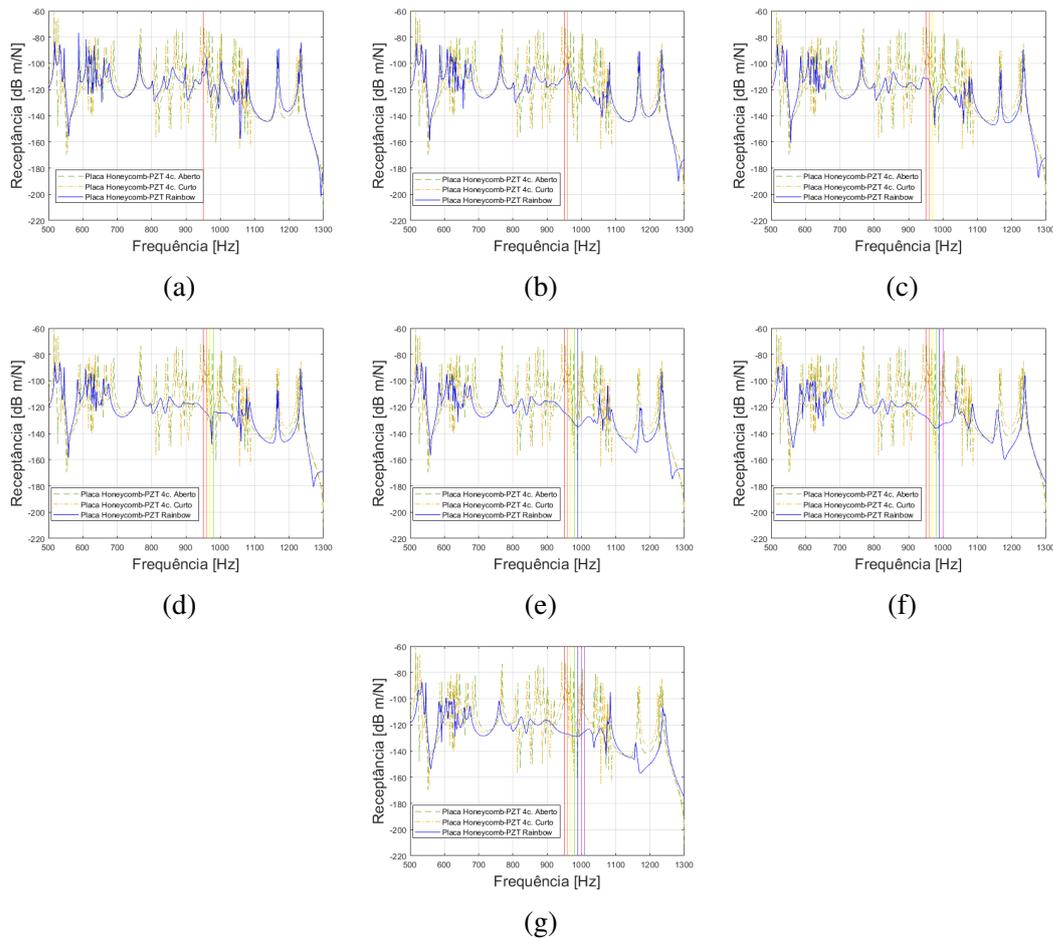


Figura 4.60: Aplicação da *rainbow* na placa *honeycomb-PZT*. a) Atuação da primeira camada piezoelétrica (Vermelho); b) Atuação da segunda camada piezoelétrica (Laranja); c) Atuação da terceira camada piezoelétrica (Amarelo); d) Atuação da quarta camada piezoelétrica (Verde); e) Atuação da quinta camada piezoelétrica (Azul); f) Atuação da sexta camada piezoelétrica; g) Atuação da sétima camada piezoelétrica (Rosa).

estrutura, sendo a quarta camada configurada para atuar em 830 Hz e identificada pela cor verde, seguindo o padrão observado vemos que o acréscimo da quarta camada aumentasse, de maneira leve, a intensidade da atenuação entre 760 Hz e 1080 Hz. A Figura 4.60e ilustra a FRF com atuação de cinco camadas ativas, sendo a quinta camada configurada para atuar em 840 Hz e identificada pela cor azul, novamente verifica-se um sutil aumento na intensidade da atenuação presente nas frequências entre 760 Hz e 1080 Hz, próximas às sintonizadas para atuação. O comportamento da estrutura com seis camadas de piezoelétricos ativas está demonstrada na Figura 4.60f, a sexta camada está configurada para atuar na frequência 850 Hz e é representada pela cor roxo, a sexta camada pouco altera no modo de vibrar da estrutura, agregando apenas um sutil incremento na atenuação presente nas frequências próximas às de sintonização. A figura 4.17g demonstra a FRF da estrutura com todas as camadas piezoelétricas conectadas com circuito *shunt* atuando, sendo a última camada sintonizada para atuar em 860 Hz e representado pela cor rosa, a atuação de cada camada piezoelétrica com circuito *shunt* configurada de forma individual para atuar em frequências específicas atenua com eficiência as vibrações na faixa e frequência selecionada. É interessante observar que

na aplicação da configuração *rainbow* em vertical obteve-se melhor atenuação das vibrações da estrutura, decorrente do maior número de camadas de piezoelétricos ativas.

Controle em múltiplas frequências aplicadas à Placa *honeycomb*-PZT

A implementação da configuração das multi-impedâncias na placa *honeycomb*-PZT é feita da mesma forma descrita na seção 4.2.1.7. Porém, no caso da placa *honeycomb*-PZT é possível aplicar a configuração de formação em camadas verticais ou horizontais utilizada na aplicação da configuração *rainbow*. A formação em horizontal ilustrada na Figura 4.56a e possuindo quatro camadas de piezoelétricos, e a formação em vertical está representada na Figura 4.56b e possui sete camadas de piezoelétricos. Foi utilizada a faixa de frequência de 500 Hz a 1300 Hz, para uma melhor visualização das FRFs, conforme a figura 4.61 demonstra. Com a aplicação da configuração das multi-impedâncias na placa *honeycomb*-PZT obtemos as FRFs da estrutura, ilustradas na Figura 4.62

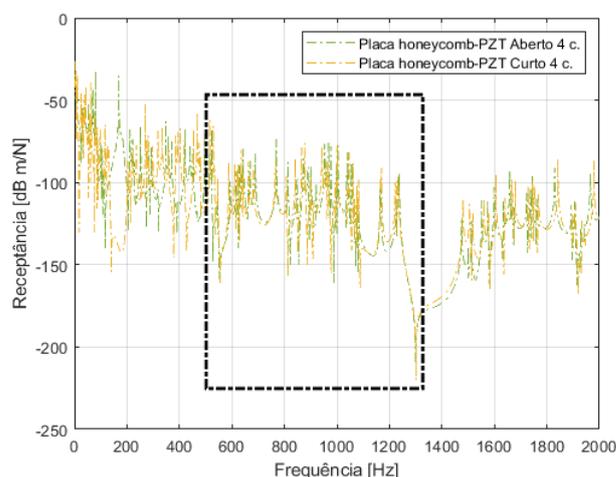


Figura 4.61: Faixa de atuação do circuito *shunt* com multi-impedâncias (ou *multishunt*).

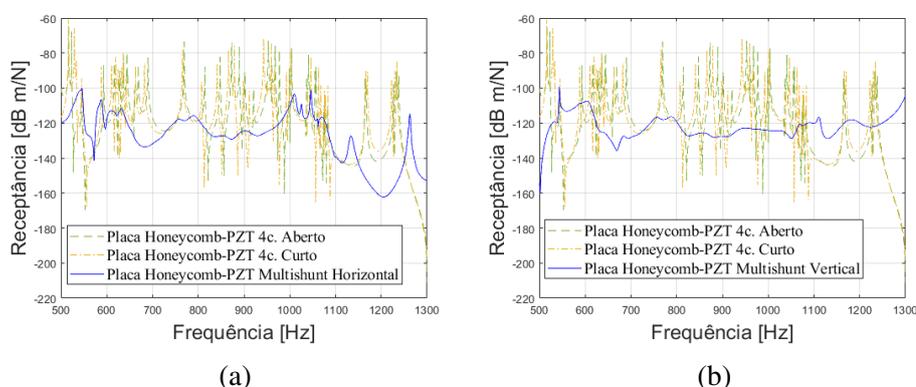


Figura 4.62: Atuação das multi-impedâncias no modo de vibrar da célula hexagonal-PZT. a) FRF da aplicação das multi-impedâncias na placa *honeycomb*-PZT em formação horizontal; b) FRF da aplicação das multi-impedâncias na placa *honeycomb*-PZT em formação vertical.

A Figura 4.62a demonstra a atuação da configuração das multi-impedâncias em formação horizontal no modo de vibrar da placa *honeycomb*-PZT, observa-se uma forte atenuação nas vibrações da estrutura, em especial entre 500 Hz e 1000 Hz. A Figura 4.62b demonstra a atuação da configuração das multi-impedâncias em formação vertical, verifica-se também uma grande eficiência de atenuação das vibrações, porém na formação vertical esta atenuação está ainda mais acentuada, devido ao maior número de camadas que esta formação possui, possibilitando que mais picos de ressonâncias sejam sintonizados para atuação dos piezoelétricos com circuito *shunt*.

Conclusão

O amortecimento piezoelétrico em *shunt*, que consiste em conectar transdutores piezoelétricos integrados em uma estrutura a circuitos elétricos ou eletrônicos, é uma técnica atraente que oferece uma solução simples e potencialmente econômica para a atenuação de ondas e vibrações em estruturas. Os avanços recentes na produção de estruturas complexas tem gerado crescente interesse no desenvolvimento de metamateriais e metaestruturas, com o objetivo de aprimorar características estruturais específicas. A combinação intuitiva de metaestruturas com as funcionalidades de materiais inteligentes abre um leque de possibilidades sem precedentes, resultando em uma nova categoria de materiais funcionais, conhecidos como metamateriais inteligentes e metaestruturas inteligentes. A maioria dessas metaestruturas utiliza materiais piezoelétricos que são capazes de alterar as propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura por meio da adição de circuitos com diferentes configurações. Esses sistemas inteligentes produzem alterações nas variáveis de estado dos domínios físico, mecânico e elétrico, o que possibilita a modulação das vibrações e das propriedades das ondas.

Neste estudo, foram desenvolvidas modelagens numéricas das estruturas viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*, acopladas com uma camada piezoelétrica, utilizando o MEE. Além disso, as modelagens numéricas dos circuitos elétricos *shunt* foram realizadas para conectá-los aos materiais piezoelétricos. As interações entre as estruturas e os circuitos *shunt* foram obtidas através das relações matemáticas de impedância adimensional. Para a modelagem de estruturas com múltiplos piezoelétricos, foi utilizada a matriz de transferência para alocar as matrizes de rigidez dinâmica espectral e unir as estruturas e estimar os números de ondas. O propósito geral deste estudo é examinar o comportamento dinâmico de três estruturas: uma viga, uma célula hexagonal e uma placa *honeycomb*. Essas estruturas foram sujeitas a diferentes acoplamentos piezoelétricos que foram conectados a circuitos *shunt* resistivos, indutivos, LC em série e paralelo, RL em série e paralelo, e RLC em série e paralelo, e também foram analisadas as configurações multi-impedâncias e *rainbow*. As modelagens numéricas desenvolvidas neste estudo permitiram a análise do comportamento dinâmico das estruturas sob diferentes condições e configurações, contribuindo para a compreensão e aprimoramento do controle de vibração em sistemas e estruturas mecânicas.

Os resultados obtidos neste estudo demonstram a eficácia do amortecimento piezoelétrico em *shunt* na atenuação das vibrações em estruturas mecânicas. Especialmente análise

dos efeitos das configurações de circuitos *shunt* RL e RLC em série mostraram que essas configurações são capazes de gerar um bom amortecimento das vibrações em três estruturas diferentes (viga, célula hexagonal e placa *honeycomb*). Em particular, a configuração de multi-impedâncias (ou *multishunt* ressonante), que utiliza de circuitos *shunt* RLC sintonizados para atuar em frequências individuais, e a configuração *rainbow*, que também utiliza circuitos *shunt* RLC sintonizados para atuar em frequências individuais, porém em uma faixa de frequência menor, demonstraram uma grande eficácia na atenuação das vibrações das três estruturas analisadas. É importante ressaltar que, nas configurações *multishunt* ressonante e *rainbow*, o aumento no número de pastilhas piezoelétricas com *shunt* acoplados na estrutura resultou em um melhor desempenho no amortecimento das vibrações.

Este trabalho pode servir como base para futuras pesquisas na área de amortecimento piezoelétrico em estruturas *honeycomb*. Uma possível linha de pesquisa é a implementação de um maior número de piezoelétricos em cada viga da estrutura *honeycomb*, tornando assim cada haste da estrutura *honeycomb* em uma Viga-PZT periódica. Esta análise pode fornecer informações adicionais sobre o desempenho do amortecimento piezoelétrico em estruturas complexas e pode ajudar a desenvolver soluções mais eficazes para controlar as vibrações em sistemas mecânicos.

Referências Bibliográficas

AIROLDI, L.; RUZZENE, M. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, v. 13, n. 11, p. 113010, nov. 2011. ISSN 1367-2630.

AIROLDI, L.; RUZZENE, M. Wave propagation control in beams through periodic multi-branch shunts. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 22, n. 14, p. 1567–1579, 2011. ISSN 1045389X.

BEHRENS, S.; FLEMING, A. J.; MOHEIMANI, S. O. R. New method for multiple-mode shunt damping of structural vibration using a single piezoelectric transducer. *Smart Struct. Mater. 2001 Damping Isol.*, v. 4331, n. July 2001, p. 239–250, 2001. ISSN 0277786X.

BELI, D. et al. Wave attenuation and trapping in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials with spatially correlated variability. *Scientific Reports*, v. 9, p. Article number: 5617, 2019.

BERGAMIN, F. *Lattice structure absorbs vibrations*. 2016. Disponível em: <<https://ethz.ch/en/news-and-events/eth-news/news/2016/07/lattice-structure-absorbs-vibrations.html>>.

BRENNAN, M. J. Some Recent Developments in Adaptive Tuned Vibration Absorbers/Neutralisers. *Shock and Vibration*, v. 13, n. 4-5, p. 531–543, 2006.

C. M. Austin, A. et al. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. *Mech. Syst. Signal Process.*, Elsevier Ltd, v. 146, p. 106982, 2021. ISSN 10961216. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.106982>>.

CARDELLA, D.; CELLI, P.; GONELLA, S. Manipulating waves by distilling frequencies: a tunable shunt-enabled rainbow trap. *Smart Materials and Structures*, v. 25, n. 8, p. 085017, jul. 2016. ISSN 0964-1726.

CARUSO, G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Mater. Struct.*, v. 10, n. 5, p. 1059–1068, 2001. ISSN 09641726.

CASADEI, F. et al. Vibration control of plates through hybrid configurations of periodic piezoelectric shunts. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 23, n. 10, p. 1169–1177, 2012. ISSN 1045389X.

CASADEI, F. et al. Periodic shunted arrays for the control of noise radiation in an enclosure. *J. Sound Vib.*, Elsevier, v. 329, n. 18, p. 3632–3646, 2010. ISSN 10958568. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2010.04.003>>.

CELLI, P. et al. Bandgap widening by disorder in rainbow metamaterials. *Applied Physics Letters*, v. 114, n. 9, p. 091903, mar. 2019. ISSN 0003-6951.

CHEN, Y. Y.; HUANG, G. L.; SUN, C. T. Band Gap Control in an Active Elastic Metamaterial With Negative Capacitance Piezoelectric Shunting. *J. Vib. Acoust.*, v. 136, n. 6, p. 1–8, 2014. ISSN 1048-9002.

CHOI, J.; INMAN, D. J. Spectrally formulated modeling of a cable-harnessed structure. *J. Sound Vib.*, Elsevier, v. 333, p. 3286–3304, 2014. ISSN 10958568.

CHRISTENSEN, J. et al. Vibrant times for mechanical metamaterials. *MRS Communications*, v. 5, n. 3, p. 453–462, set. 2015. ISSN 2159-6859, 2159-6867. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/journals/mrs-communications/article/vibrant-times-for-mechanical-metamaterials/B5493991838BDE3161B03C42C2B2EA75>>.

CONCEIÇÃO, S. M. da. Estudos de Modelos Espectrais de Vigas para Controle Ativo de Vibrações e Monitoramento da Integridade Estrutural. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica. Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual de São Paulo. São Paulo. 2016.

DELL'ISOLA, F.; MAURINI, C.; PORFIRI, M. Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers: Prototype design and experimental validation. *Smart Mater. Struct.*, v. 13, n. 2, p. 299–308, 2004. ISSN 09641726.

DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures*. [S.l.: s.n.], 1989. 126–156 p. ISBN 9783030596781.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Mater. Struct.*, v. 18, n. 2, 2009. ISSN 1361665X.

ERTURK, A. et al. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *J. Appl. Phys.*, v. 120, n. 13, 2016. ISSN 10897550.

ERTURK, A.; SUGINO, C.; RUZZENE, M. An analytical framework for locally resonant piezoelectric metamaterial plates. *Int. J. Solids Struct.*, Elsevier Ltd, v. 182-183, p. 281–294, 2020. ISSN 00207683.

ERTURK, A. et al. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *J. Sound Vib.*, Elsevier Ltd, v. 406, p. 104–123, 2017. ISSN 10958568. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.004>>.

FABRO, A. T. et al. Uncertainty analysis of band gaps for beams with periodically distributed resonators produced by additive manufacturing. *Proc. ISMA 2016 - Int. Conf. Noise Vib. Eng. USD2016 - Int. Conf. Uncertain. Struct. Dyn.*, p. 2031–2042, 2016.

FARIA, A. W.; RADE, D. A.; RADE, R. S. L. Formulação Em Elementos Finitos De Estruturas Compostas Laminadas Amortecidas Passivamente Por Circuitos Shunt. *posmec*, v. 16, p. 11, 2006.

FERNANDES, Y. M. S.; MACHADO, M. R.; Dantas Nóbrega, E. Vibrational Analysis of Power Transmission Tower By Spectral Element Method: a Numerical Validation. n. 2007, 2019.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. *Synthetic impedance for implementation of piezoelectric shunt-damping circuits*. 2000. 1525–1526 p.

FLEMMING, A.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping. *Smart Materials and Structures*, v. 12, p. 57–64, 2003.

FORWARD, R. L. Electronic damping of vibrations in optical structures. *Appl. Opt.*, v. 18, n. 5, p. 690, 1979. ISSN 0003-6935.

GOLDSTEIN, A. L. Self-tuning multimodal piezoelectric shunt damping. *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 33, n. 4, p. 428–436, 2011. ISSN 18063691.

GONELLA, S. et al. Bandgap widening by disorder in rainbow metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, v. 114, n. 9, 2019. ISSN 00036951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.5081916>>.

GRAND View Research. *Metamaterial Market Analysis, By Product (Electromagnetic, Terahertz, Photonic, Tunable, Frequency Selective Surface, Non-linear), By Application, End-use, And Segment Forecasts, 2018 – 2025*, 2019. Disponível em: <<https://www.grandviewresearch.com/industry-analysis/metamaterials-market>>.

GRIPP, J. A.; RADE, D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mech. Syst. Signal Process.*, Elsevier Ltd, v. 112, p. 359–383, 2018. ISSN 10961216.

HAGOOD, N. W.; Von Flotow, A. Damping Of Structural Vibrations With Piezoelectric Materials And Passive Electrical Networks. *Eng. Manag. J.*, v. 1, n. 4, p. 146, 1991. ISSN 09607919.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 7ª edição. ed. São Paulo: Pearson Education, 2010. ISBN 9788576053736.

HOLLKAMP, J. J. Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunts. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 5, n. 1, p. 49–57, 1994. ISSN 15308138.

HUSSEIN, M. I.; LEAMY, M. J.; RUZZENE, M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Appl. Mech. Rev.*, v. 66, n. 4, p. 1–38, 2014. ISSN 00036900.

INMAN, D. J. *Engineering Vibrations*. [S.l.: s.n.], 2014. ISBN 9780132871693.

JAFFE, B.; JR, C. W. R.; JAFFE, H. *Piezoelectric Ceramics: Non-metallic solids 3*. [S.l.]: Academic Press, 1971.

LALLART, M.; BAO, B.; GUYOMAR, D. Vibration reduction for smart periodic structures via periodic piezoelectric arrays with nonlinear interleaved-switched electronic networks. *Mech. Syst. Signal Process.*, Elsevier, v. 82, p. 230–259, 2017. ISSN 10961216. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.05.021>>.

LEE, U. *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2009. 1–454 p. ISBN 9780470823743.

LEE, U.; KIM, D.; PARK, I. Dynamic modeling and analysis of the PZT-bonded composite Timoshenko beams: Spectral element method. *J. Sound Vib.*, Elsevier, v. 332, n. 6, p. 1585–1609, 2013. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.06.020>>.

LEE, U.; KIM, J. Dynamics of elastic-piezoelectric two-layer beams using spectral element method. *Int. J. Solids Struct.*, v. 37, n. 32, p. 4403–4417, 2000. ISSN 00207683.

LEE, U.; KIM, J. Spectral element modeling for the beams treated with active constrained layer damping. *Int. J. Solids Struct.*, v. 38, n. 32-33, p. 5679–5702, 2001. ISSN 00207683.

LEE, U.; SONG, Y.; KIM, T. Vibration of a beam subjected to a moving force: Frequency-domain spectral element modeling and analysis. *Int. J. Mech. Sci.*, Elsevier, v. 113, p. 162–174, 2016. ISSN 00207403. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.04.020>>.

LEO, D. J. *Engineering Analysis of Smart Material Systems*. [S.l.: s.n.], 2007. 1–556 p. ISBN 9780471684770.

LIU, C. et al. Active tuning of the vibration band gap characteristics of periodic laminated composite metamaterial beams. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 31, n. 6, p. 843–859, 2020. ISSN 15308138.

LONKAR, K.; CHANG, F. K. Modeling of piezo-induced ultrasonic wave propagation in composite structures using layered solid spectral element. *Struct. Heal. Monit.*, v. 13, n. 1, p. 50–67, 2014. ISSN 14759217.

MACHADO, M. R.; FABRO, A. T.; MOURA, B. B. de. Spectral element approach for flexural waves control in smart material beam with single and multiple resonant impedance shunt circuit. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, v. 15, n. 12, p. 1–28, 2020. ISSN 15551423.

MEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations/Meirovitch, L.* [S.l.]: McGraw Hill, 2000.

MEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations.* [S.l.]: Waveland Press, 2010.

MENG, H. et al. Optimal design of rainbow elastic metamaterials. *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 105185, set. 2019. ISSN 0020-7403.

MIN, J. B.; DUFFY, K. P.; PROVENZA, A. J. Shunted piezoelectric vibration damping analysis including centrifugal loading effects. *Collect. Tech. Pap. - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf.*, n. April 2010, p. 1–17, 2010. ISSN 02734508.

MOURA, B. B. D. *Modelos Espectrais De Vigas Acopladas à Piezoelétricos Shunt Para Atenuação De Vibração E De Ondas Elásticas.* Tese (Doutorado) — Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2020.

MOURA, B. B. D.; BORGES, M. C. R.; MACHADO, M. R. Vibration and wave propagation control in a smart metamaterial beam with periodic arrays of shunted piezoelectric patches. *Inter-noise*, 2020.

MUKHOPADHYAY, T. et al. Voltage-dependent modulation of elastic moduli in lattice metamaterials: Emergence of a programmable state-transition capability. *Int. J. Solids Struct.*, Elsevier Ltd, v. 208-209, p. 31–48, 2021. ISSN 00207683. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.009>>.

NOUH, M. A.; ALDRAIHEM, O. J.; BAZ, A. Periodic metamaterial plates with smart tunable local resonators. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 27, n. 13, p. 1829–1845, 2016. ISSN 15308138.

PALMA, G.; MAO, H.; BURGHIGNOLI L. AND GORANSSON, P. I. U. Acoustic metamaterials in aeronautics. *Applied Sciences*, v. 8(6), p. 1–18, 2018.

PARK, C. H.; INMAN, D. J. Enhanced piezoelectric shunt design. *Shock Vib.*, v. 10, n. 2, p. 127–133, 2003. ISSN 10709622.

PENG, F.; NG, A.; HU, Y. R. Actuator placement optimization and adaptive vibration control of plate smart structures. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 16, n. 3, p. 263–271, 2005. ISSN 1045389X.

RAO, S. S. *Mechanical Vibration.* [S.l.]: Person Prentice-Hall, 2008.

RUZZENE, M.; AIROLDI, L. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New J. Phys.*, v. 13, n. September, 2011. ISSN 13672630.

SANCHEZ-DEHESA, J. et al. Mechanical rainbow trapping and Bloch oscillations in chirped metallic beams. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 141, n. 5, p. 3810–3810, maio 2017. ISSN 0001-4966.

SANTANA, D. C. *Modelagem Numérica E Otimização De Shunts Piezelétricos Aplicados Ao Controle Passivo De Vibrações Universidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

SANTOS, H. F. L. D. Controle de vibrações estruturais usando cerâmicas piezoelétricas em extensão e cisalhamento conectadas a circuitos híbridos ativo-passivos. 2008.

SEBA, B.; NI, J.; LOHMANN, B. Vibration attenuation using a piezoelectric shunt circuit based on finite element method analysis. *Smart Mater. Struct.*, v. 15, n. 2, p. 509–517, 2006. ISSN 09641726.

SILVA, A. G. P. *Controle Ativo de Vibrações em uma Estrutura com 2 GDL Utilizando Transdutores Piezoelétricos Associados a Circuitos Shunt de Capacitância Negativa*. 6-11 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2016.

SILVA, G. et al. Numerical analysis of wave propagation and vibration of overhead transmission cable. *RIPE*, n. 6, p. 18–27, 2020.

Simões Moita, J. M. et al. Optimal design in vibration control of adaptive structures using a simulated annealing algorithm. *Compos. Struct.*, v. 75, n. 1-4, p. 79–87, 2006. ISSN 02638223.

SOHN, H. et al. Spectral element formulation for dynamic analysis of a coupled piezoelectric wafer and beam system. *Comput. Struct.*, Elsevier Ltd, v. 88, n. 9-10, p. 567–580, 2010. ISSN 00457949. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.01.010>>.

SOUSA, V. Candido de et al. Adaptive locally resonant metamaterials leveraging shape memory alloys. *Journal of Applied Physics*, v. 124, n. 6, p. 064505, ago. 2018. ISSN 0021-8979.

SOUSA, V. M. de. *Análise Dinâmica De Cabos De Pontes Estaiadas Considerando Aleatoriedade Na Condição De Contorno E Na Excitação*. 2021.

SPADONI, A.; RUZZENE, M.; CUNEFARE, K. Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 20, n. 8, p. 979–990, 2009. ISSN 1045389X.

SUGINO, C. et al. An investigation of electroelastic bandgap formation in locally resonant piezoelectric metastructures. *Smart Mater. Struct.*, IOP Publishing, v. 26, n. 5, p. 55029, 2017. ISSN 1361665X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1361-665X/aa6671>>.

SUGINO, C.; RUZZENE, M.; ERTURK, A. Design and Analysis of Piezoelectric Metamaterial Beams With Synthetic Impedance Shunt Circuits. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 23, n. 5, p. 2144–2155, out. 2018.

THOMAS, O.; DUCARNE, J.; DEÛ, J. F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Mater. Struct.*, v. 21, n. 1, 2012. ISSN 09641726.

THORP, O.; RUZZENE, M.; BAZ, A. Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches. *Smart Mater. Struct.*, v. 10, n. 5, p. 979–989, 2001. ISSN 09641726.

TIAN, Z.; YU, L. Rainbow trapping of ultrasonic guided waves in chirped phononic crystal plates. *Scientific Reports*, v. 7, p. 40004, jan. 2017. ISSN 2045-2322.

TRAINITI, G. et al. Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast fourier transform. p. 145 – 150, 1978.

TSAKMAKIDIS, K. L.; BOARDMAN, A. D.; HESS, O. Trapped rainbow storage of light in metamaterials. *Nature*, v. 450, n. 7168, p. 397–401, nov. 2007. ISSN 1476-4687.

VIANA, F. A. C.; Valder Steffen, J. Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits. *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 28, n. 3, p. 293–310, 2006. ISSN 18063691.

WANG, G.; CHEN, S. Large low-frequency vibration attenuation induced by arrays of piezoelectric patches shunted with amplifier-resonator feedback circuits. *Smart Mater. Struct.*, IOP Publishing, v. 25, n. 1, 2015. ISSN 1361665X.

WANG, G.; CHEN, S.; WEN, J. Low-frequency locally resonant band gaps induced by arrays of resonant shunts with Antoniou's circuit: Experimental investigation on beams. *Smart Mater. Struct.*, v. 20, n. 1, 2011. ISSN 09641726.

WANG, G. et al. Multi-resonant piezoelectric shunting induced by digital controllers for subwavelength elastic wave attenuation in smart metamaterial. *Smart Materials and Structures*, v. 26(2), p. 025031 (11pp), 2017.

WANG, G. et al. Vibration attenuations induced by periodic arrays of piezoelectric patches connected by enhanced resonant shunting circuits. *Smart Mater. Struct.*, v. 20, n. 12, 2011. ISSN 09641726.

WEN, J. et al. Directionality of wave propagation and attenuation in plates with resonant shunting arrays. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 27, n. 1, p. 28–38, 2016. ISSN 15308138.

WU, S.-y. Piezoelectric shunts with a parallel R-L circuit for structural damping and vibration control. *Smart Struct. Mater. 1996 Passiv. Damping Isol.*, v. 2720, n. May 1996, p. 259–269, 1996. ISSN 0277786X.

WU, S.-y. Method for multiple-mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer. *Smart Struct. Mater. 1998 Passiv. Damping Isol.*, v. 3327, n. June 1998, p. 159–168, 1998. ISSN 0277786X.

WU, S.-y.; BICOS, A. S. Structural vibration damping experiments using improved piezoelectric shunts. *Smart Struct. Mater. 1997 Passiv. Damping Isol.*, v. 3045, n. May 1997, p. 40–50, 1997.

WU, Z. J.; LI, F. M. Dynamic properties of three-dimensional piezoelectric Kagome grids. *Waves in Random and Complex Media*, Taylor Francis, v. 25, n. 3, p. 361–381, 2015. ISSN 17455049. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/17455030.2015.1042090>>.

YAN, B. et al. Shunt Damping Vibration Control Technology: A Review. *Appl. Sci.*, v. 7, n. 5, 2017. ISSN 20763417.

ZABIHOLLAH, A.; SEDAGAHTI, R.; GANESAN, R. Active vibration suppression of smart laminated beams using layerwise theory and an optimal control strategy. *Smart Mater. Struct.*, v. 16, n. 6, p. 2190–2201, 2007. ISSN 09641726.

ZHANG, X.; KANG, Z. Topology optimization of piezoelectric layers in plates with active vibration control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, v. 25, n. 6, p. 697–712, 2014. ISSN 1045389X.

ZHANG, Y. et al. Printing, folding and assembly methods for forming 3d mesostructures in advanced materials. *Nature Reviews Materials*, v. 2, n. 4, p. 1–17, mar. 2017. ISSN 2058-8437. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/natrevmats201719>>.

ZHOU, W.; WU, Y.; ZUO, L. Vibration and wave propagation attenuation for metamaterials by periodic piezoelectric arrays with high-order resonant circuit shunts. *Smart Mater. Struct.*, IOP Publishing, v. 24, n. 6, 2015. ISSN 1361665X.

ZHU, J. et al. Acoustic rainbow trapping. *Scientific Reports*, v. 3, p. 1728, abr. 2013. ISSN 2045-2322.