



**AUTOMATIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE PARIS EM PROJETOS DE PAINÉIS DE FUSELAGEM DE
AERONAVE**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**AUTOMATIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE PARIS EM PROJETOS DE PAINÉIS
DE FUSELAGEM DE AERONAVE**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: GILBERTO GOMES

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

BRASÍLIA/DF: NOVEMBRO/2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**AUTOMATIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE PARIS EM PROJETOS DE PAINÉIS
DE FUSELAGEM DE AERONAVE**

THIAGO ARNAUD ABREU DE OLIVEIRA

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Gilberto Gomes, DSc.

(Orientador)

Prof. José Manoel Morales Sánchez, DSc.

(Examinador Interno)

Prof. Luiz Carlos Wrobel, DSc.

(Examinador Externo)

Prof. Davidson de Oliveira França Júnior, DSc.

(Examinador Externo)

Brasília/DF, novembro de 2023

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, THIAGO ARNAUD ABREU DE

Automatização dos parâmetros de paris em projetos de painéis de fuselagem de aeronave.

[Brasília, Distrito Federal] 2023.

xxii, 147 p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2023).

Tese de doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Fuselagem de aeronave

2. Vida à fadiga

3. Análise multiescala

4. Método dos Elementos de Contorno

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, T. A. A. (2023). Automatização dos parâmetros de paris em projetos de painéis de fuselagem de aeronave. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM - 03A/23 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 147 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Thiago Arnaud Abreu de Oliveira.

TÍTULO: Automatização dos parâmetros de paris em projetos de painéis de fuselagem de aeronave.

GRAU: Doutor em Estruturas e Construção Civil. ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Thiago Arnaud Abreu de Oliveira
Rua João das Estivas, 1797
CEP: 59.030-640, Natal/RN – Brasil
e-mail: eng.thiagoarnaud@hotmail.com

AGRADECIMENTOS

Os pilares são resistentes. São capazes de suportar as situações mais adversas que se pode imaginar. A seguir, agradeço aos meus pilares.

À Kerginaldo Pinheiro e Rosali Abreu. Meus maiores exemplos, meus Pais. Por onde for estarei seguindo seus passos. A estes fica difícil a gratidão do quão são importantes. Gratidão essa que inclui Maryana Louise, Hugo Guimarães, Laurinha e Maria Queiroga. Estes são minha família, meu maior pilar.

Ao mestre Gilberto Gomes, *meu professor*. Muito mais que um orientador de mestrado, um orientador da vida. Sempre presente dando conselhos e guiando meus passos. Saiba, meu mestre, que sinto bastante honrado em ter trabalhado ao seu lado. A ti tenho bastante admiração. Este também representa meus agradecimentos a todos docentes do PECC.

Aos amigos de Brasília: Pedro Filipe, Gabriel Martins, André Augusto, Alvaro Neto, Iago Freitas e Jerfson Moura. Cada momento convivido com vocês ficarão marcados na minha vida. Vivemos juntos muito do que se passou, mas meus amigos, tem muito mais por vir. Natal/RN está de portas abertas para vocês.

Aos meus Tios, em especial Karla, Zeca e Rosane Abreu, e à vovó Maria de Lourdes que me passam conforto e acolhem com muito amor.

À Costa Neto, *Coya*. Meu Tio, não de sangue, mas se mostrou meu segundo pai quando me recebeu em Brasília. E à toda família Brasiliense: Andressa Barros, Marlene Lacerda, meus sinceros agradecimentos pelo companheirismo em minha recepção.

Faça algo hoje que te fará sentir orgulho amanhã.

“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”

Ayrton Senna da Silva

PUBLICAÇÕES INTERNACIONAIS

- [1] T. A. A. Oliveira, G. Gomes, and F. Evangelista Jr, “Multiscale aircraft fuselage fatigue analysis by the dual boundary element method,” *Eng Anal Bound Elem*, vol. 104, pp. 107–119, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.enganabound.2019.03.032.
- [2] G. Gomes, T. Oliveira, and F. Evangelista Jr, “A Probabilistic Approach in Fuselage Damage Analysis via Boundary Element Method,” in *Advances in Fatigue and Fracture Testing and Modelling*, IntechOpen, 2022. doi: 10.5772/intechopen.98982.
- [3] G. Gomes, T. A. A. Oliveira, and A. M. Delgado Neto, “A new methodology to predict damage tolerance based on *compliance* via global-local analysis,” *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 15, no. 58, pp. 211–230, Sep. 2021, doi: 10.3221/IGF-ESIS.58.16.
- [4] T. A. A. Oliveira, Gomes G., F. Evangelista Junior, and A. M. Delgado Neto, “Evaluation of cracked fuselage subject to contact mechanics,” in *XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, A. Ibrahimbegovic and P. M. Pimenta, Eds., Compiegne, 2018.
- [5] T. A. A. Oliveira, G. Gomes, F. Evangelista Jr, and A. M. Delgado Neto, “Multiscale analysis of multiple cracks in aircraft fuselage,” in *XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, University of Technology Compiègne, 2018.
- [6] T. A. A. Oliveira and G. Gomes, “Dual Boundary Element Method applied in aircraft fuselage fatigue analysis,” in *FORM and FORCE - 60th Anniversary Symposium of the International Association (IASS Symposium 2019)*, Barcelona, 2019.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 GENERALIDADES	1
1.2 MOTIVAÇÃO.....	3
1.3 OBJETIVOS	4
1.3.1 Objetivo geral.....	4
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE.....	5
CAPÍTULO 2 – ESTADO DA ARTE	6
2.1 TRABALHOS RELACIONADOS	23
2.1.1 Fadiga em fuselagem de aeronave.....	23
2.1.2 Tolerância ao dano em fuselagem de aeronave.....	26
2.1.3 Métodos computacionais aplicados em tolerância ao dano.....	28
2.1.4 Materiais e tolerância ao dano.....	29
CAPÍTULO 3 - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA.....	31
3.1 TENSÕES NA PONTA DA TRINCA	32
3.2 O MÉTODO GENERALIZADO DE WESTERGAARD.....	33
3.3 <i>COMPLIANCE</i>	36
3.4 ENERGIA DE FRATURA.....	38
3.5 TAXA DE DISSIPAÇÃO DE ENERGIA (<i>ENERGY RELEASE RATE</i>).....	39
3.6 INSTABILIDADE E CURVA R	40
3.7 INTEGRAL J.....	41
3.8 DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA.....	43
CAPÍTULO 4 - FADIGA.....	45
4.1 TIPOS DE COMPORTAMENTO A FADIGA	45
4.2 ESTÁGIOS DE FADIGA	46
4.3 LEI DE PARIS-ERDOGAN	47
4.4 TOLERÂNCIA AO DANO	47
CAPÍTULO 5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	50
5.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL.....	52
5.1.1 Integral de contorno de deslocamento.....	52

5.1.2	Integral de contorno de força de superfície.....	52
5.1.3	Sistema de equações algébricas.....	53
5.2	FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	54
5.2.1	BEMLAB2D	54
5.2.2	BEMCRACKER2D	56
5.3	ESTATÍSTICA.....	58
5.3.1	Simulação Monte Carlo.....	60
CAPÍTULO 6 – MODELAGEM COMPUTACIONAL.....		61
6.1	TÉCNICA COMPUTACIONAL	62
6.1.1	Análise para uma combinação.....	71
6.1.2	Análise das mil combinações	73
6.1.3	Curva $m(C)$	74
6.2	LIMITAÇÕES	76
CAPÍTULO 7 – RESULTADOS.....		77
7.1	ESTUDO DE CASO 1	77
7.1.1	Análise do modelo macro do Estudo de Caso 1	77
7.1.2	Análise do modelo micro do Estudo de Caso 1.....	79
7.1.3	Função $N(C,m)$	80
7.1.4	Função $m(C)$	81
7.2	ESTUDO DE CASO 2	82
7.2.1	Análise do modelo macro do Estudo de Caso 2.....	82
7.2.2	Análise do modelo micro do Estudo de Caso 2.....	84
7.2.3	Função $N(C,m)$	84
7.2.4	Função $m(C)$	85
7.3	ESTUDO DE CASO 3	87
7.3.1	Análise do modelo macro do Estudo de Caso 3.....	87
7.3.2	Análise do modelo micro do Estudo de Caso 3.....	90
7.3.3	Função $N(C,m)$	90
7.3.4	Função $m(C)$	91
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS		93

8.1	CONCLUSÕES GERAIS.....	93
8.2	CONCLUSÕES ESPECÍFICAS DOS ESTUDOS DE CASO	94
8.3	CONTRIBUIÇÕES	96
8.4	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	96
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A – Arquivo inicial da modelagem do projetista <i>0.dat</i>.....	109
	APÊNDICE B – Arquivo após a criação dos pontos internos <i>1.dat</i>.....	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Falha por fadiga da fuselagem do Boeing 737-200	1
Figura 2.1 – Modelo inicial para desenvolvimento do método.....	6
Figura 2.2 - Exemplo de modelo micro.....	7
Figura 2.3 – Análise do elemento micro	8
Figura 2.4 – Relação entre a <i>compliance</i> e o número de ciclos	8
Figura 2.5 - Todas as curvas <i>Compliance</i> vs Número de Ciclos na Posição 1	9
Figura 2.6 - Todas as curvas <i>Compliance</i> vs Número de Ciclos na Posição 2	10
Figura 2.7 - Todas as curvas <i>Compliance</i> vs Número de Ciclos na Posição 3	10
Figura 2.8 – Vida à Fadiga do elemento micro para 3C (em escalas linear e logarítmica).....	11
Figura 2.9 - Vida à Fadiga característica.....	12
Figura 2.10 - Probabilidade de falha	13
Figura 2.11 – Validação do Fator de Intensidade de Tensão	14
Figura 2.12 – Envoltórias das curvas de vida a fadiga.....	14
Figura 2.13 – Modelo macro da publicação da FIS	15
Figura 2.14 – Campo de tensões sigma-x (σ_x)	16
Figura 2.15 – Campo de tensões sigma-y (σ_y)	16
Figura 2.16 – Campo de tensões cisalhantes (τ_{xy}).....	16
Figura 2.17 – Curvas do número de ciclos versus <i>compliance</i>	17
Figura 2.18 – Relação C e m de Paris com N.....	18
Figura 2.19 – Interseção entre N(C,m) e o número de ciclos requerido (n^*).....	18
Figura 2.20 – Relação entre C e m necessários para um número de ciclos requerido (n^*).....	19
Figura 2.21 – Comparativo dos resultados numéricos de vida à fadiga expressa em número de ciclos obtidos por Maksimovic [32] e pelo BemCracker2D de chapa com furo central.....	20
Figura 2.22 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos experimentalmente e numericamente por Sato [33] e pelo BemCracker2D	20
Figura 2.23 – Comparativo dos resultados dos números de ciclos de Sato [33] corrigidos pelos modelos de Elber e Schijve para considerar o efeito do fechamento de trinca e pelo BemCracker2D.....	21
Figura 2.24 – Comparativo dos resultados finais dos números de ciclos considerando 65% de efetividade dos fatores de intensidade de tensão ($U = 0.65$) de Sato [33] e pelo BemCracker2D.....	21

Figura 2.25 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos experimentalmente e numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 90°	21
Figura 2.26 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 60°	22
Figura 2.27 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 30°	22
Figura 2.28 - Mapa de <i>co-citation</i>	24
Figura 2.29 - <i>coupling</i>	25
Figura 3.1 - Modos de fratura.....	31
Figura 3.2 - Modo misto de fraturamento	32
Figura 3.3 - Tensões na ponta da trinca, FIT da trinca (b) maior que (a)	33
Figura 3.4 - Placa com trinca central.....	33
Figura 3.5 - Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.	35
Figura 3.6 - Double cantilever beam (DCB) espécime solicitada à tração	37
Figura 3.7 - Medição da <i>compliance</i> em estrutura entalhada.....	37
Figura 3.8 - Curvas R (a) plana, (b) crescente.....	41
Figura 3.9 - Comparação de comportamento de materiais elastoplásticos e elástico não-linear	42
Figura 3.10 - Caminho arbitrário em volta da ponta da trinca	42
Figura 4.1 - Estágios de fadiga.....	46
Figura 4.2 - Procedimento para análise do crescimento de trinca.....	48
Figura 4.3 – Diagrama de tolerância ao dano de uma estrutura típica de aeronave.....	48
Figura 4.4 - Diagrama de tolerância no caso de <i>multiple site damage</i> (MSD)	49
Figura 5.1 - Tipos de elementos de contorno	51
Figura 5.2 - Discretização do sólido em elementos de contorno.....	51
Figura 5.3 - Representação de novos elementos no sistema de equações a cada incremento..	54
Figura 5.4 - Interface do BEMLAB2D	55
Figura 5.5 - Arquitetura de um sistema de análises de engenharia	55
Figura 5.6 - Diagrama de classes do BemCracker2D	57
Figura 5.7 - Diagrama de sequência do crescimento da trinca.....	58
Figura 5.8 – Domínio de falha, junção de função densidade de duas variáveis aleatórias fRS , funções densidades resistente e solicitante fR e fS , respectivamente	59
Figura 6.1 – Modelo Macro projetado no Bemlab	62
Figura 6.2 – Criação dos pontos internos.....	63

Figura 6.3 – Campo de tensão sigma x	63
Figura 6.4 – Campo de tensão sigma y	64
Figura 6.5 – Campo de tensão cisalhante	64
Figura 6.6 – Local do pico de tensão.....	64
Figura 6.7 – Posição do modelo micro.....	65
Figura 6.8 - Exemplo do modelo micro	66
Figura 6.9 - Distribuição da malha de MEC	66
Figura 6.10 – Incrementos de trinca.....	67
Figura 6.11 – Malha deformada	67
Figura 6.12 - Fluxograma para obtenção da relação número de ciclos x <i>compliance</i> a cada incremento.....	68
Figura 6.13 - Pontos da relação número de ciclos x <i>compliance</i> a cada incremento.....	68
Figura 6.14 - Curvas número de ciclos x <i>compliance</i>	69
Figura 6.15 - Pontas de trinca.....	69
Figura 6.16 - Número de ciclos x <i>compliance</i> das bordas para o elemento na posição 2.....	70
Figura 6.17 – Pontos da relação entre C, m e o número de ciclos	71
Figura 6.18 – Interseção entre a superfície N(C, m) e o número de ciclos de projeto.....	72
Figura 6.19 – Relação (C, m) que resulta no número de ciclos de projeto 10^4	72
Figura 6.20 – Relação (C, m) que resulta no número de ciclos de projeto 0.5×10^4 , 0.75×10^4 e 1×10^4	72
Figura 6.21 – Curvas N(C,m) para três combinações de defeitos iniciais (C1, C2 e C3).....	73
Figura 6.22 – Diferentes interseções para o número de ciclos de projeto ($n^*=10^4$).....	74
Figura 6.23 – Relação m(C) que resulta no número de ciclos 10^4	74
Figura 6.24 – Ordem do polinômio que otimiza o CIB	75
Figura 7.1 – Modelo macro do Estudo de Caso 1	77
Figura 7.2 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 1 (MPa).....	78
Figura 7.3 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 1 (MPa).....	78
Figura 7.4 – Campo de tensão cisalhante do Estudo de Caso 1 (MPa).....	78
Figura 7.5 – Posição do pico de tensão do Estudo de Caso 1	79
Figura 7.6 – Posicionando o microelemento do Estudo de Caso 1	79
Figura 7.7 – Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) do Estudo de Caso 1	80
Figura 7.8 – Superfície N(C, m) do Estudo de Caso 1	80
Figura 7.9 – Interseção da relação N(C, m) do Estudo de Caso 1 com o número de ciclos do projeto (10^4).....	81

Figura 7.10 – Relação entre C e m que resulta no número de ciclos do projeto 10^4	81
Figura 7.11 – Grau do polinômio que otimiza o CIB.....	81
Figura 7.12 - Modelo do Estudo de Caso 2.....	82
Figura 7.13 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 2 (MPa).....	83
Figura 7.14 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 2 (MPa).....	83
Figura 7.15 – Campo de tensão de cisalhamento do Estudo de Caso 2 (MPa).....	83
Figura 7.16 - Localização do pico de tensão do Estudo de Caso 2.....	83
Figura 7.17 - Posicionamento do microelemento do Estudo de Caso 2.....	84
Figura 7.18 - Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) no Estudo de Caso 2	85
Figura 7.19 - Interseção da relação N(C,m) do Estudo de Caso 2 com o número de ciclos do projeto n^*	85
Figura 7.20 - Relação entre C e m resultando no número de ciclos necessários no projeto (10^4)	86
Figura 7.21 - Grau do polinômio que otimiza o CIB.....	86
Figura 7.22 – Modelo do Estudo de Caso 3.....	87
Figura 7.23 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 3.....	88
Figura 7.24 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 3.....	88
Figura 7.25 – Campo de tensão de cisalhamento do Estudo de Caso 3.....	89
Figura 7.26 – Local do pico de tensão do Estudo de Caso 3.....	89
Figura 7.27 – Posicionamento do microelemento do Estudo de Caso 3.....	90
Figura 7.28 - Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) do Estudo de Caso 3	91
Figura 7.29 - Interseção da relação N(C,m) do Estudo de Caso 3 com a vida em fadiga de projeto (10^4).....	91
Figura 7.30 - Relação C, m resultando no número de ciclos do projeto 10^4	92
Figura 7.31 - Grau do polinômio que otimiza o CIB.....	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores das variáveis aleatórias.....	9
Tabela 2.2 – Número de ciclos mínimo para cada posição.....	11
Tabela 2.3 - Valores estatísticos de Vida à Fadiga para 3C.....	11
Tabela 2.4 - Validação do FIT ($\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$).....	13
Tabela 2.5 – Valores das variáveis aleatórias das aplicações 1 e 2.....	17
Tabela 2.6 – Resultados da vida à fadiga expressos em número de ciclos obtidos por Maksimovic [32] e por BemCracker2D de chapa com furo central.....	20
Tabela 3.1 - Campo de tensões próximo à trinca.....	35
Tabela 3.2 - Campo de deslocamentos próximo à trinca.....	36
Tabela 4.1 - Tipos de carregamento à fadiga (número de ciclos).....	46
Tabela 5.1 - Exemplos de Estados Limites.....	59
Tabela 6.1 – Estatísticas das variáveis R, L1 e L2.....	71
Tabela 6.2 – Valores de defeitos iniciais para combinações 1, 2 e 3.....	73
Tabela 7.1 – Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 1.....	77
Tabela 7.2 – Valores das tensões internas do Estudo de Caso 1.....	80
Tabela 7.3 - Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 2.....	82
Tabela 7.4 - Valores das tensões internas do Estudo de Caso 2.....	84
Tabela 7.5 – Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 3.....	87
Tabela 7.6 – Valores das tensões internas do Estudo de Caso 3.....	90

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
σ	Vetor de tensões
ε	Vetor de deformações
P	Solicitação externa normal
Q	Solicitação externa cisalhante
\bar{u}_x	Deslocamento tangencial
\bar{u}_z	Deslocamento normal
ϕ	Função tensão de Airy
C	<i>Compliance</i>
a	Tamanho da trinca
N	Número de ciclos
\mathbf{u}, \mathbf{p}	Vetores deslocamento e força de superfície
$CPV \int_{\Gamma}$	Valor principal da integral de Cauchy
$HPV \int_{\Gamma}$	Valor principal de Hadamard
\mathbf{c}_{ij}	Coefficientes geométricos
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\mathbf{T}_{ij}, \mathbf{U}_{ij}$	Soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento
R	Razão de carga de fadiga
r	Raio do furo circular central
$L1, L2$	Tamanho da trinca superior e inferior

RESUMO

O problema abordado neste trabalho centra-se em resolver a necessidade de estabelecer uma relação segura entre os parâmetros C e m da Lei de Paris e o número de ciclos de vida à fadiga em projetos de fuselagem de aeronave. Essa relação é particularmente importante para os projetistas que estão sempre procurando métodos de simulação rápidos e confiáveis que produzam dados médios seguros que evitem processos de dano e, conseqüentemente, a ocorrência de acidentes.

Para isso, neste trabalho, desenvolveu-se um novo procedimento de tolerância a danos com base na *compliance* crítica, sendo uma alternativa ao método clássico que considera o tamanho crítico de trinca. Nesta nova metodologia, assume-se que a estrutura, mesmo danificada, seja capaz de suportar as ações para as quais foi projetada até a detecção da instabilidade local quando a *compliance* atinge o valor crítico. Dessa forma, o objetivo geral é obter a função ótima dos parâmetros de Paris que resistem ao número de ciclos requisitado.

Para alcançar este objetivo, a metodologia é baseada em um problema multiescala e compreende duas etapas. Primeiramente, o modelo macro é empregado para analisar as tensões internas e identificar o local do ponto crítico. Em seguida, o modelo micro é implementado para avaliar o número de ciclos que leva à instabilidade local. Assim, obtém-se a curva ótima $N(C,m)$ (número de ciclos em função de C e m), que garante a integridade estrutural.

Para validar essa metodologia, foram conduzidos três estudos de caso utilizando os programas BEMCRACKER2D e BEMLAB2D. Esses estudos envolveram a análise dos campos de tensões internas para cada modelo, seguidos da simulação de propagação de trinca para, finalmente, obter a *compliance* crítica e estimativa de vida à fadiga. Como resultados, tem-se a função $m(C)$ que relaciona os parâmetros de Paris com o número de ciclos requerido em cada modelo.

Por fim, a técnica desenvolvida possibilita a generalização para diversos outros modelos. Ao fornecer dados dos parâmetros C e m de Paris, essa abordagem apresenta-se como uma forma inovadora para correlacionar estes parâmetros com o número de ciclos requerido em projeto. Além disso, a metodologia baseada na *compliance* crítica oferece uma nova perspectiva para avaliar a tolerância ao dano, representando um avanço na segurança e confiabilidade das estruturas sujeitas à fadiga.

Palavras-chave: fuselagem de aeronave, vida à fadiga, análise multiescala, Método dos Elementos de Contorno.

ABSTRACT

The problem addressed in this work focuses on resolving the need to establish a secure relationship between the C and m parameters of the Paris Law and the number of fatigue life cycles in aircraft fuselage designs. This relationship is particularly important for designers who are constantly seeking rapid and reliable simulation methods that produce secure average data, thereby avoiding damage processes and, consequently, the occurrence of accidents.

To achieve this, in this work, it was developed a new damage tolerance procedure based on critical *compliance*, as an alternative to the classical method that considers the critical crack size. In this new methodology, it is assumed that the structure, even when damaged, can withstand the actions for which it was designed until the detection of local instability when *compliance* reaches the critical value. Thus, the overall objective is to obtain the optimal function of the Paris parameters that withstands the required number of cycles.

To accomplish this objective, the methodology employed here hinges on a multiscale approach comprising two key stages. In the initial stage, the macro model is utilized to analyze internal stresses and pinpoint the critical point's location. In the subsequent stage, the micro model is implemented to assess the number of cycles leading to local instability. As a result, the optimal $N(C, m)$ curve (representing the number of cycles as a function of C and m) is derived, ensuring structural integrity.

To validate this methodology, three case studies were conducted utilizing BEMCRACKER2D and BEMLAB2D programs. These studies entailed the analysis of internal stress fields for each model, followed by simulations of crack propagation, ultimately yielding critical *compliance* and estimates fatigue life. Consequently, the $m(C)$ function, which correlates the Paris parameters with the required number of cycles in each model, was established.

In conclusion, the developed technique facilitates generalization to various other models. By providing data on the Paris parameters C and m, this approach presents an innovative means to correlate these parameters with the required number of cycles in the design. Furthermore, the methodology based on critical *compliance* offers a fresh perspective for evaluating damage tolerance, signifying a substantial advancement in the safety and reliability of structures subject to fatigue.

Keywords: aircraft fuselage, fatigue life, multiscale analysis, Boundary Element Method.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Antes de tudo, constata-se uma série de estudos documentados pelo National Transportation Safety Board [7] para interpretar a causa de acidentes em aviões. Wanhill [8] destaca os acidentes com os aviões Comet e Boeing 737-200. No caso do Comet concluiu-se como motivo principal a falha por fadiga resultando na desintegração da cabine pressurizada. Esta investigação também relatou que embora projetados para as condições de serviço, sua estrutura era incapaz de evitar a propagação de trincas, particularmente as trincas instáveis que após atingirem o comprimento crítico continuariam a propagar até completa ruptura da estrutura. Quanto ao Boeing 737 da Aloha Airlines, assim que se estabilizou a 7000 metros de altitude, altitude prevista de voo, ouviu-se um forte estrondo e, subitamente, o teto se desintegrou deixando uma abertura de 6 metros na fuselagem em pleno voo, mas ainda assim foi possível a aterrissagem do avião com sua estrutura danificada, as perdas são mostradas na Figura 1.1.



Figura 1.1 – Falha por fadiga da fuselagem do Boeing 737-200

Neste caso, as investigações indicaram a iniciação de trincas por fadiga em diversas zonas (*Multiple Site Damage - MSD*) que reduziu bastante a resistência da estrutura levando-a ao colapso.

Todas as estruturas estão sujeitas à fadiga, com trincas iniciando nas bordas e crescendo até atingir o tamanho crítico para ruptura frágil, mesmo quando sujeitas apenas a cargas permanentes [9]. Ao contrário de estruturas que são sobrecarregadas plasticamente, em que ocorrem grandes deformações antes da ruptura, a ruptura causada pela fadiga ocorre

repentinamente sem aviso prévio (ruptura frágil). Isso demonstra ser um grande problema nas estruturas, visto que impossibilita tomar medidas preventivas antes da ruptura completa. Com base nisso, as informações relacionadas à carga variável ao longo do tempo e, particularmente, seus efeitos nas trincas são de fundamental importância para prever o comportamento da estrutura como um todo. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) aparece como uma ferramenta poderosa para avaliar a fadiga da ponta de trinca sob condição de *Small Scale Yielding* [10]. O núcleo da literatura sobre este assunto no campo da MFLE encontra-se em [11]–[18].

Na fuselagem de uma aeronave, a avaliação dos parâmetros da Mecânica da Fratura (MF), como Fator de Intensidade de Tensão (FIT), número de ciclos de carga e campos de tensão e deslocamento, torna-se difícil devido à natureza complexa dos detalhes do painel: suportes, cliques de cisalhamento, rebites etc. Por outro lado, o conhecimento desses parâmetros é de suma importância para a compreensão da natureza do processo de dano, especialmente oriundo de cargas dinâmicas.

Dessa forma, os projetistas estão sempre procurando métodos de simulação rápidos e confiáveis que produzam dados médios precisos desses parâmetros, para evitar processos de dano e, conseqüentemente, a ocorrência de acidentes. A automação é então vista como um ponto-chave, permitindo avaliar várias análises como um meio para estudos paramétricos, resultando na otimização do projeto [18]. Portanto, métodos numéricos como métodos de domínio (Método dos Elementos Finitos - MEF/ Método dos Elementos Finitos Estendidos - XFEM / Método dos Elementos Finitos Generalizados - GFEM), métodos de contorno (Método dos Elementos de Contorno / Método dos Elementos de Contorno Dual / Método da Integração Radial) e métodos livres de malha (Métodos sem malha) aparecem como uma alternativa para problemas de fratura. O MECD apresenta como vantagens: modelagem simplificada da área de trinca, cálculo direto do FIT, tempos de execução reduzidos e simulação precisa do crescimento de trincas [19]–[21]. O comportamento de um sólido, discretizando apenas seus limites, permite a análise de milhares de simulações necessárias para um estudo probabilístico e, através do MECD, é possível estudar os defeitos, prevendo o comportamento à fadiga, em particular o processo de dano, danos em locais múltiplos, análise de confiabilidade, entre outros [22]–[26].

Assim, este trabalho tem como foco apresentar uma ferramenta computacional que utiliza métodos numéricos para avaliar modelos bidimensionais de fuselagem de aeronaves e traz como resultado uma função otimizada dos parâmetros C e m de Paris capazes de suportar o número de ciclos requerido em projeto. Para isso, o projetista desenha seu modelo e determina o número de ciclos requerido, a partir daí, a ferramenta é automatizada para processar o modelo e avaliar o conjunto mínimo de valores de C e m necessários para suportar esse número de ciclos. Assim, este trabalho finaliza uma série de outros trabalhos já desenvolvidos e publicados [1]–[6]. Portanto, a ferramenta fruto deste trabalho aparece como mais um meio automatizado de fornecer dados ao projetista de fuselagem de aeronave de forma a evitar danos por fadiga.

1.2 MOTIVAÇÃO

Ao longo dos anos várias filosofias de projeto à fadiga se desenvolveram tentando aliar segurança estrutural e economia no processo de fabricação e operação das aeronaves. A primeira abordagem foi denominada *safe-life*. Esta filosofia consiste em projetar e fabricar uma estrutura aeronáutica segura durante toda sua vida útil. Para isso, deve-se considerar nos testes em protótipos as situações mais extremas de solicitações de fadiga, previstas durante operação. Tal metodologia resulta em fatores que superdimensionam os elementos estruturais de maneira a impedir a possibilidade de falha. Esta abordagem evidentemente leva a custos de projeto elevados e não é capaz de garantir a segurança, caso uma falha não prevista em projeto ocorra durante a vida útil.

De maneira racional, uma nova filosofia foi desenvolvida com base no conceito de tolerância a danos. Nesta metodologia, assume-se que a estrutura, mesmo danificada, seja capaz de suportar as ações para as quais foi projetada até a detecção de uma trinca por fadiga ou outros defeitos durante sua operação. A unidade é então verificada, reparada e colocada novamente em operação até o final de sua vida útil.

A bibliografia clássica analisa a tolerância ao dano (número de ciclos) com base no tamanho da trinca. Por outro lado, este estudo se apresenta como inovador ao propor um novo método de tolerância ao dano baseado na *compliance*. Este método visa encontrar uma função ótima que relaciona os parâmetros físicos do material (C e m de Paris) necessários para atender o

número de ciclos definido em projeto, facilitando, assim, o trabalho do projetista de calcular o material para ser utilizado em fuselagem de aeronave.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Este trabalho apresenta como objetivo geral obter uma função ótima que atenda o número de ciclos definido em projeto. Com isso, esta função será capaz de otimizar a vida à fadiga sob o ponto de vista da *compliance* de elementos micro em substituição à abordagem tradicional que trata a vida à fadiga relacionando com o tamanho da trinca.

1.3.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos, temos:

- Desenvolver a técnica da instabilidade local por meio da *compliance* em vez da abordagem tradicional do tamanho crítico de trinca;
- Desenvolver uma ferramenta que auxilia ao projetista no processo de escolha do material a ser utilizado em fuselagem de aeronave definindo os parâmetros de Paris C e m;
- Avaliar a *compliance* mínima das bordas do elemento micro;
- Identificar o local crítico do campo de tensões do modelo;
- Automatizar a aplicação das tensões internas no elemento micro;
- Realizar análise estatística de mil combinações, estabelecendo a mínima segura para a tolerância ao dano a partir da curva mínima número de ciclos *versus* C e m de Paris (curva $N(C,m)$);
- Avaliar o momento em que ocorre a instabilidade local; e
- Obter a função que relaciona os parâmetros C e m de Paris ótimos que atendam ao número de ciclos definido em projeto;

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Esta tese foi dividida em 8 capítulos. Nesta seção, Capítulo 1, é apresentada uma breve visão do trabalho, descrevendo generalidades a respeito do tema proposto, a motivação e os objetivos do trabalho.

No Capítulo 2 é abordado o estado da arte com uma extensa revisão bibliográfica dos conceitos que levaram ao desenvolvimento da metodologia proposta, seguida dos trabalhos relacionados ao tema proposto.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos da mecânica da fratura linear elástica como suporte para o cálculo de tensões na ponta da trinca, *compliance*, energia de fratura, instabilidade, integral J, direção de propagação etc.

No capítulo 4 têm-se os conceitos inerentes à fadiga demonstrando os tipos de comportamento a fadiga, estágios de fadiga e tolerância ao dano.

No capítulo 5 apresenta-se o método dos elementos de contorno, sendo a base do cálculo numérico que possibilitou o desenvolvimento das ferramentas computacionais utilizadas.

O capítulo 6 descreve os passos para o desenvolvimento do método tratando da metodologia adotada, fluxogramas de implementação e os recursos e ferramentas utilizados.

No capítulo 7 tem-se o resultado do trabalho, sendo realizados três estudos de caso.

Por fim, no capítulo 8, serão apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros frutos desta tese.

CAPÍTULO 2 – ESTADO DA ARTE

Neste capítulo é apresentado o histórico da série de trabalhos já publicados até chegar a este último que finaliza o método, mostrando as inovações dos trabalhos anteriores, os resultados e suas limitações.

Inicialmente, Oliveira [1] propôs o método que utiliza a análise de *compliance* em vez do tamanho crítico de trinca para avaliar a tolerância a danos. Esse método envolve uma análise macro das cargas externas e uma avaliação micro com simulações probabilísticas de danos iniciais para avaliar a *compliance*. Basicamente, adotou-se o modelo de placa indicado por Johnson [27] para estudo do contato, avaliando a probabilidade de falha em três locais: um ponto central mais afastado do local de aplicação da carga (denominado ponto 1), um ponto central onde a carga é aplicada (denominado ponto 2) e em um ponto na borda da aplicação da carga (denominado ponto 3), conforme Figura 2.1. Neste modelo o campo de tensões do elemento macro Figura 2.1 (a) foi obtido analiticamente pelas fórmulas da Equação 1, sendo assim uma limitação daquele trabalho, pois não era possível aplicar o método em nenhum outro modelo.

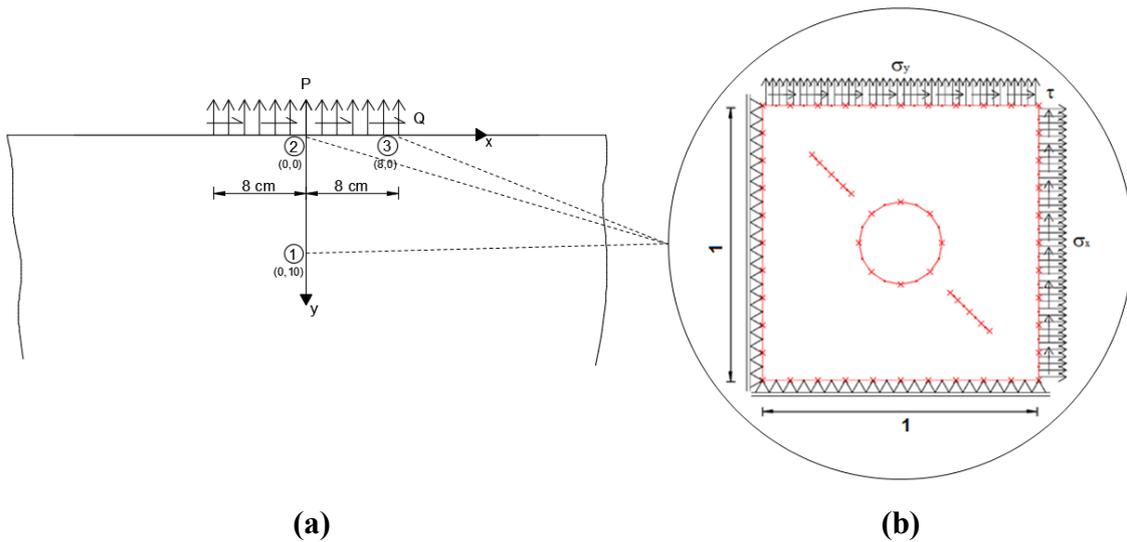


Figura 2.1 – Modelo inicial para desenvolvimento do método

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds \\
 \sigma_y &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^b \frac{p(s)(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds - \frac{2y}{\pi} \int_{-a}^b \frac{q(s)(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds$$

Logo após calcular o campo de tensões nos três pontos do modelo macro, a ferramenta posicionava o modelo micro em cada um destes pontos, um de cada vez, e aplicava as respectivas tensões internas para realizar a análise de dano por meio da *compliance*, Figura 2.1 (b).

O elemento micro foi representado por um quadrado de lado unitário com carga nas bordas direita e superior e apoiada nas bordas esquerda e inferior, com um furo central e duas trincas inclinadas 45°, conforme Figura 2.2. Sendo as tensões σ_x , σ_y e τ provenientes da análise macro, aplicadas na razão de carga $R = 0.5$.

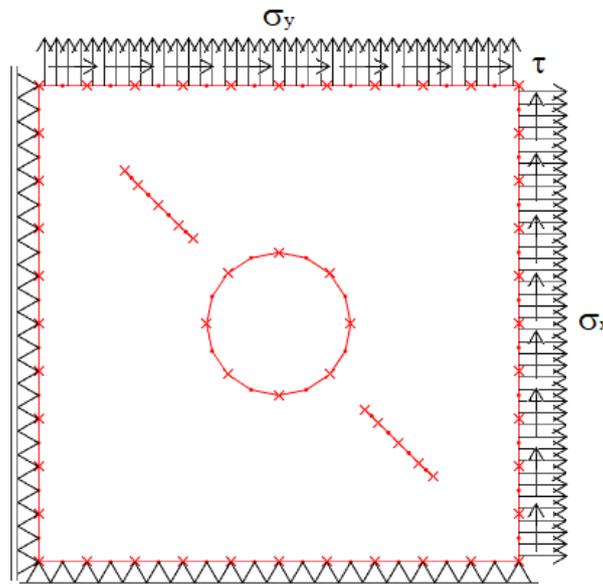


Figura 2.2 - Exemplo de modelo micro

Para representar a malha de MEC foram considerados 60 elementos e 120 nós geométricos. Com elementos contínuos quadráticos dispostos nas bordas e no furo circular central da placa e elementos descontínuos quadráticos representando as trincas com razão de 0.2, 0.3, 0.3, 0.2. Os elementos foram distribuídos da seguinte forma: 10 em cada borda externa somando 40, com distância 0.05 entre eles; 8 no furo circular central e 8 em cada trinca, somando 16.

A análise por *compliance* era então realizada da seguinte forma: inicialmente, cabe lembrar que a *compliance* é definida como o deslocamento da borda dividida pela carga aplicada,

assim, ao aplicar o campo de tensões no modelo micro Figura 2.1 (b), as bordas tendem a deslocar obtendo uma *compliance* inicial pela divisão do deslocamento médio da borda pela carga, isto é, a borda superior tem uma *compliance* inicial e a borda lateral direita outra e, à medida que a trinca vai propagando, o elemento vai perdendo rigidez e se deslocando ainda mais, aumentando a *compliance*, Figura 2.3 e Figura 2.4 que mostra o aumento da *compliance* a cada propagação.

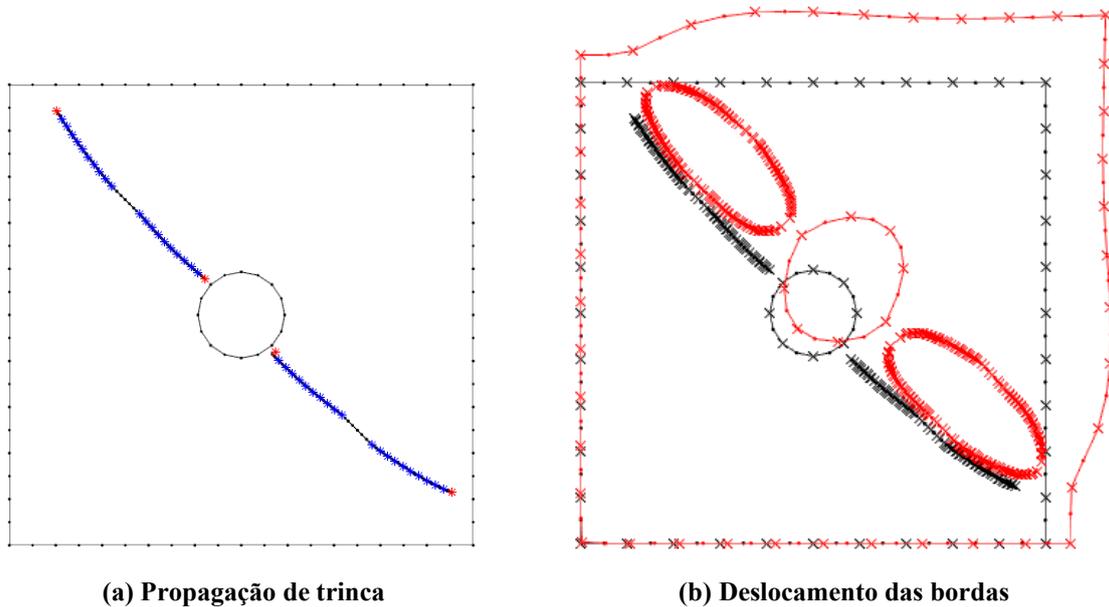
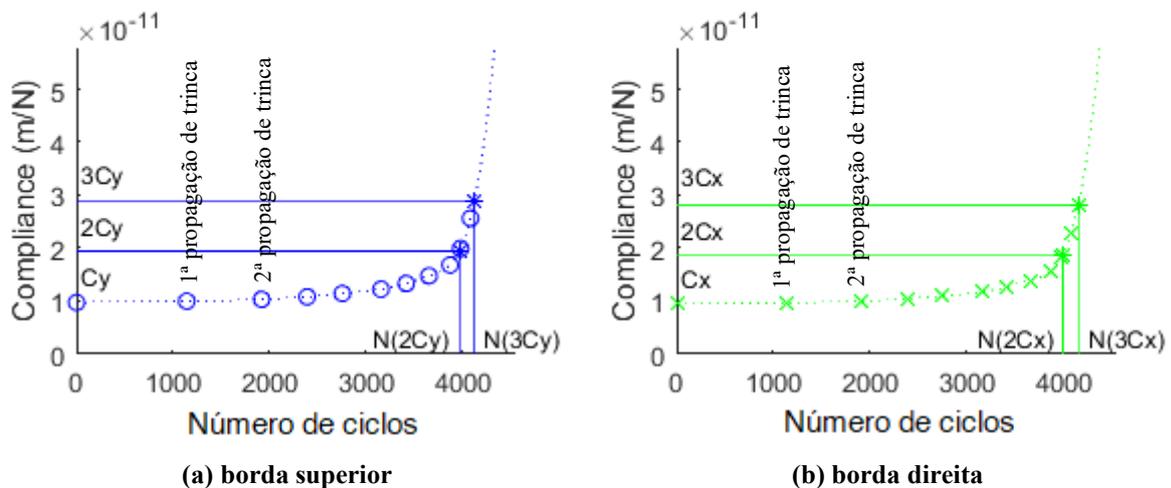


Figura 2.3 – Análise do elemento micro



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	3.9669e+03	2.9018e-11	4.1257e+03

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	3.9967e+03	2.8144e-11	4.1554e+03

Figura 2.4 – Relação entre a *compliance* e o número de ciclos

Como resultado, foi observado que quando a *compliance* das bordas do elemento micro atinge três vezes o seu valor inicial, o número de ciclos tende ao infinito, podendo-se concluir que ocorreu instabilidade local.

Todavia, necessitava-se avaliar o pior caso. Para isso, realizou-se a análise estatística com a adoção das variáveis (C, m, P, Q, R, L1, L2) como variáveis aleatórias, seguindo os valores das estatísticas apresentadas na Tabela 2.1, sendo C e m os parâmetros de Paris, P e Q as cargas externas normal e cisalhante, e R, L1 e L2 o diâmetro do furo central, os tamanhos das trincas superior e inferior do elemento micro, representando defeitos iniciais. Assim, processando as mil combinações de variáveis aleatórias obtivemos os resultados apresentados nas Figuras 2.5, 2.6 e 2.7 para as posições 1, 2 e 3, respectivamente.

Tabela 2.1 – Valores das variáveis aleatórias

Variável aleatória	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação
C	7.0e-11	8.5e-12	0.12
m	3.2	0.4	0.12
P (MPa)	301.2	44.1	0.15
Q (MPa)	99.1	15.1	0.15
R (cm)	0.1	1.2e-02	0.12
L1 (cm)	0.1	9.8e-03	0.10
L2 (cm)	0.1	1.0e-02	0.10

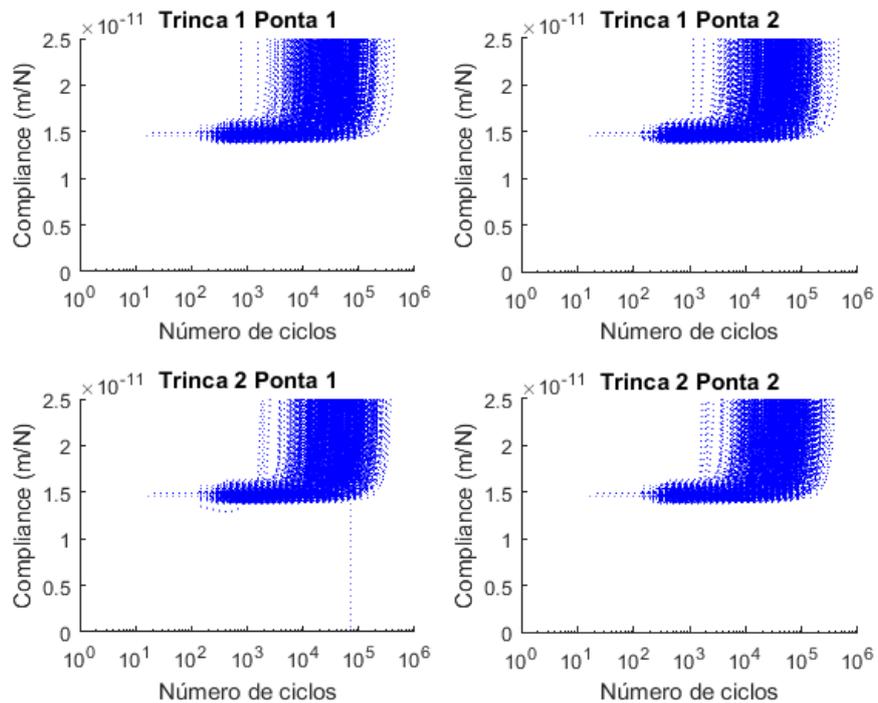


Figura 2.5 - Todas as curvas *Compliance* vs Número de Ciclos na Posição 1

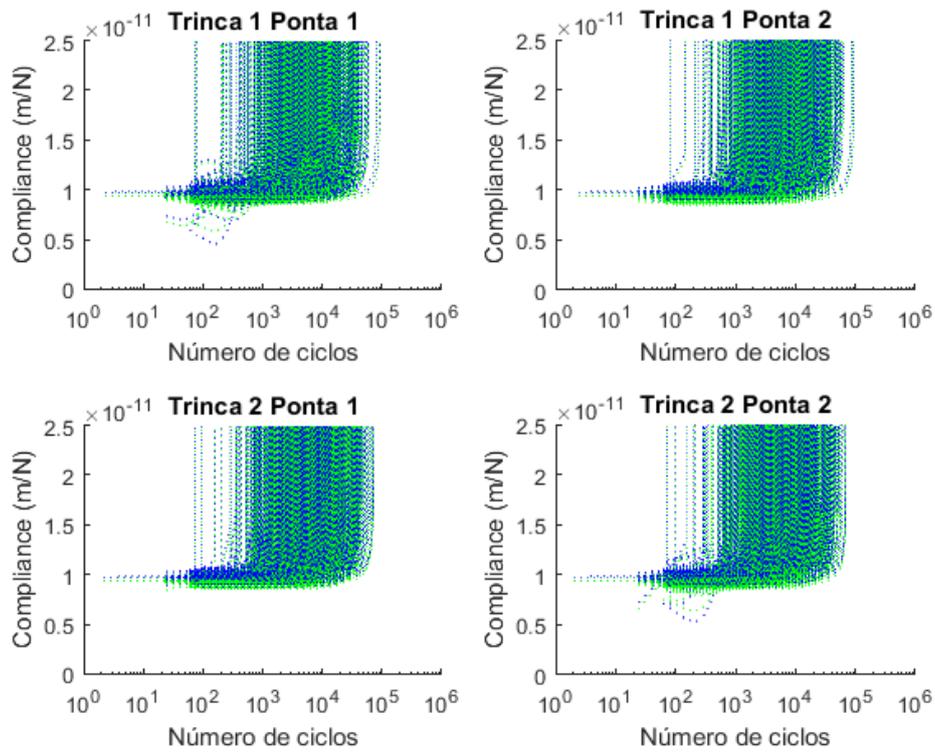


Figura 2.6 - Todas as curvas *Compliance* vs *Número de Ciclos* na Posição 2

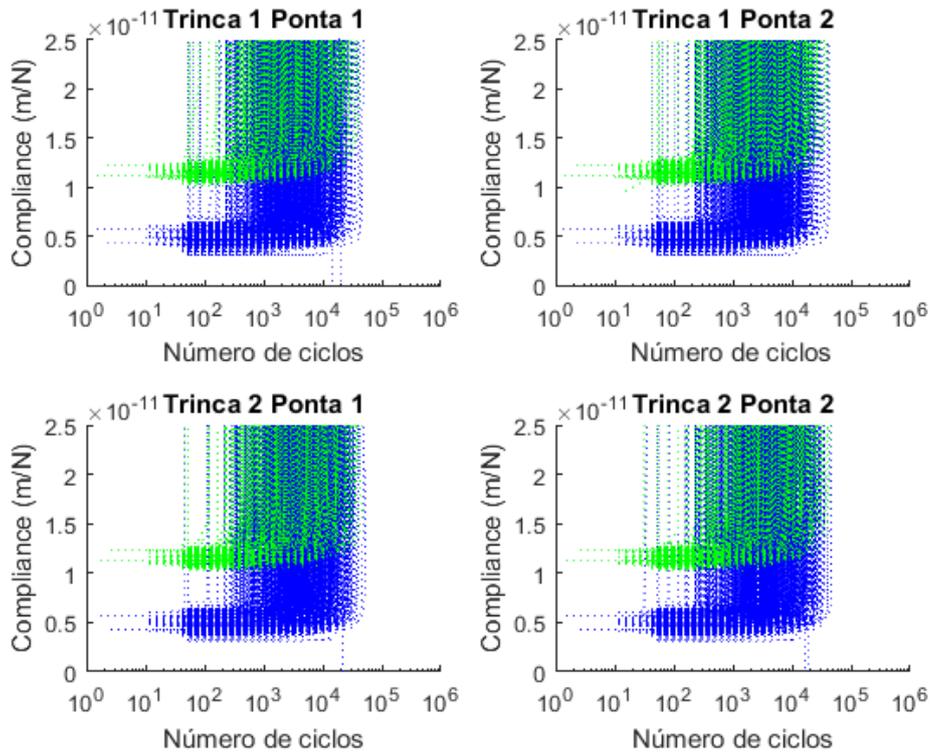


Figura 2.7 - Todas as curvas *Compliance* vs *Número de Ciclos* na Posição 3

A partir destas curvas, obtemos os números de ciclos mínimos apresentados na Tabela 2.2. Considerar o menor valor de N significa o pior caso, visto que é o menor número de ciclos

que já atinge 3C, sendo, portanto, a favor da segurança. Para a Posição 1 a instabilidade ocorre em 1.113 ciclos. Para a Posição 2, em 112 ciclos. Neste caso há uma redução de ciclos em relação ao caso anterior (dez vezes menos ciclos). Na Posição 3, a instabilidade ocorre em 47 ciclos, sendo a pior situação de defeitos iniciais.

Tabela 2.2 – Número de ciclos mínimo para cada posição

Posição 1	Posição 2	Posição 3
1.113	112	47

A Figura 2.8 mostra a função densidade de probabilidade $f(N_{3C})$ para análise da tolerância ao dano do elemento micro. Nela percebe-se que o elemento na Posição 3 apresenta uma curva mais acentuada e conseqüentemente uma menor variabilidade de tolerância ao dano, isto é, a faixa de variação de N que atinge 3C limita-se em $0.4e+05$. Já o elemento na Posição 2, tem variação de N que atinge 3C até $0.7e+05$. A Posição 1 apresenta uma curva mais dispersa, isso significa uma maior variação dos valores de N_{3C} . Isto é comprovado na Tabela 2.3 pelo maior coeficiente de variação.

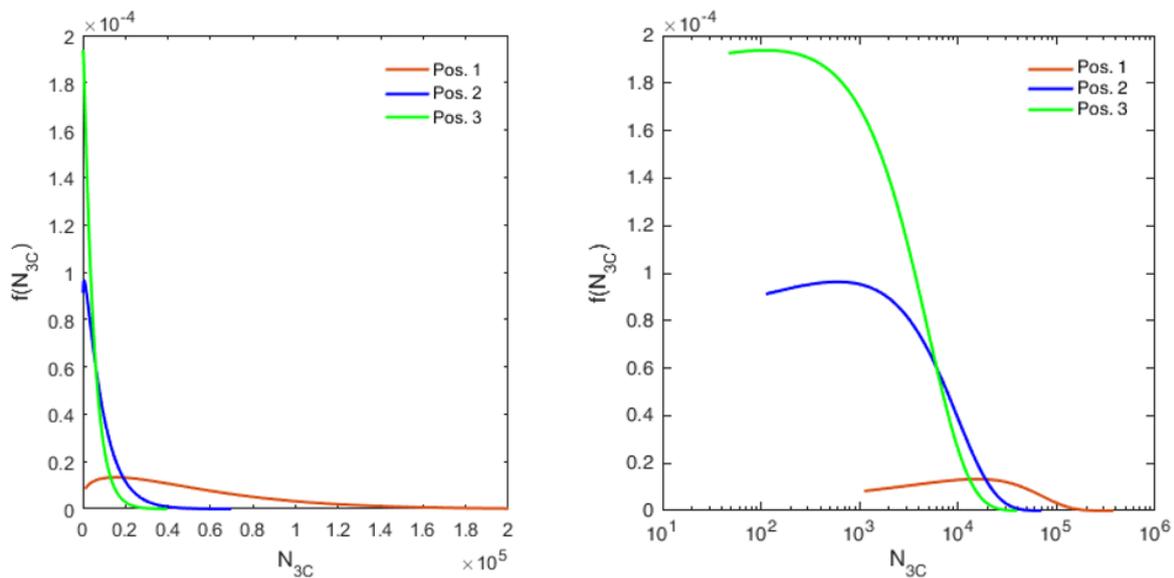


Figura 2.8 – Vida à Fadiga do elemento micro para 3C (em escalas linear e logarítmica)

Tabela 2.3 - Valores estatísticos de Vida à Fadiga para 3C

	Média	Desvio padrão	Coeficiente de variação
Posição 1	5.1e+04	4.5e+04	0.88
Posição 2	8.5e+03	9.0e+03	1.05
Posição 3	4.7e+03	5.1e+03	1.09

Considerando Vida à Fadiga Característica (N_k) o número de ciclos com probabilidade de não atingir X%, a Figura 2.9 mostra que 75% dos valores N estão abaixo de N_k , na Posição 1, $N_k = 7.1e+04$; na Posição 2, $N_k = 1.1e+04$ e na Posição 3, $N_k = 0.8e+04$. E, para 95%, na Posição 1, $N_k = 13.1e+04$; na Posição 2, $N_k = 2.8e+04$ e na Posição 3, $N_k = 1.3e+04$.

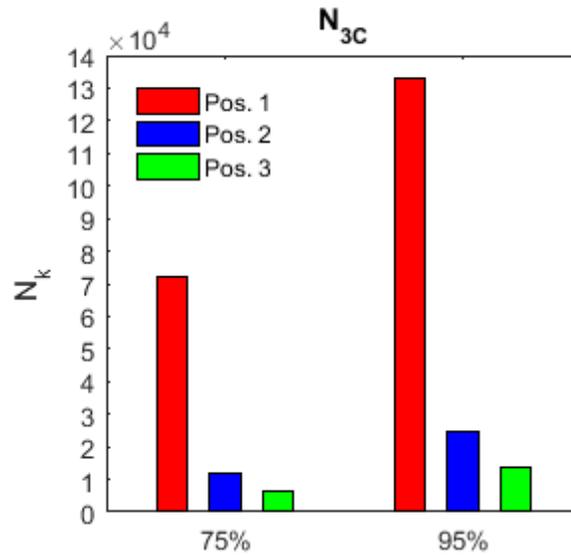


Figura 2.9 - Vida à Fadiga característica

A Figura 2.10 mostra a probabilidade de falha das três posições. Pode-se perceber que a probabilidade de falha é maior para a Posição 3, seguido da Posição 2 e, posteriormente, da Posição 1. A probabilidade de falha é calculada baseada na simulação de Monte Carlo a partir das Equações (2) e (3).

$$p_f = \frac{N_{G<0}}{N_{total}} \quad (2)$$

$$G(N_{3C}) = \underbrace{\lambda \mu_{N_{3C}}}_{\substack{\text{vida à fadiga} \\ \text{que a peça} \\ \text{tem que resistir}}} - \underbrace{N_{3C}}_{\substack{\text{vida à} \\ \text{fadiga da} \\ \text{solicitação}}} \quad (3)$$

Sendo p_f a probabilidade de falha do elemento estrutural e G a função estado limite. Se o estado limite é violado (i.e. $G < 0$), o elemento estrutural “falha”. Em que, $N_{G<0}$ denota o número de simulações em que $G < 0$, N_{total} o número total de simulações, λ um fator de segurança e $\mu_{N_{3C}}$ média da vida à fadiga da solicitação e N_{3C} a vida à fadiga.

Percebe-se ainda na Figura 2.10 que aumento o fator de segurança λ , reduz a probabilidade de falha do elemento estrutural. Com isso, obteve-se a posição 3 como a posição crítica com maior probabilidade de falha.

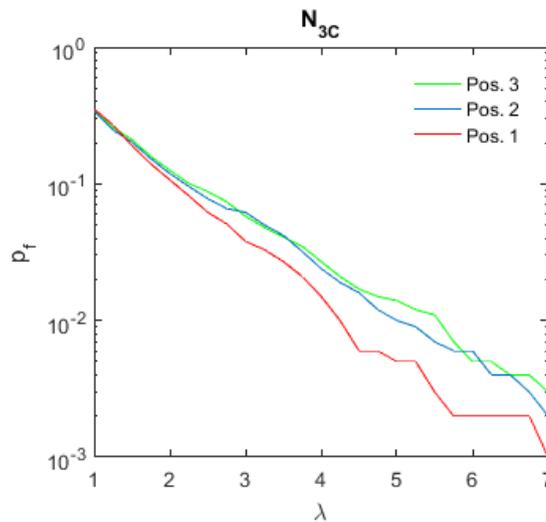


Figura 2.10 - Probabilidade de falha

Nesse primeiro trabalho destacam-se como inovações a utilização da *compliance* como variável definidora de instabilidade em vez do tamanho crítico de trinca, a descoberta de que quando a *compliance* atinge o valor de três vezes a *compliance* inicial ocorre a instabilidade, pois com poucos números de ciclos a mais ela já tende ao infinito e a descoberta de que o ponto 3 é o ponto crítico por apresentar maior probabilidade de falha.

Ainda nesse trabalho, houve a validação dos Fatores de Intensidade de Tensão do *software* BEMCRACKER2D, em que se modelou a placa infinita com furos de rebite indicada por Sanford [9], representada na Figura 2.11 com FIT analítico correspondente a:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W}} \quad (4)$$

para $\sigma = 100 \text{ MPa}$, $a = 0.0016 \text{ m}$ and $W = 0.1 \text{ m}$. Os resultados estão na Tabela 2.4, sendo que os valores de FIT preditos pelo *software* foram semelhantes aos analíticos.

Tabela 2.4 - Validação do FIT (MPa√m)

Analítico		Numérico					
		Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
KI	7.09280	7.15523	7.15517	7.15637	7.15637	7.15517	7.15523
KII	0.0	-2.05E-12	-1.80E-12	2.80E-12	3.17E-12	2.53E-12	-4.33E-12
Keq	7.09280	7.15523	7.15517	7.15637	7.15637	7.15517	7.15523

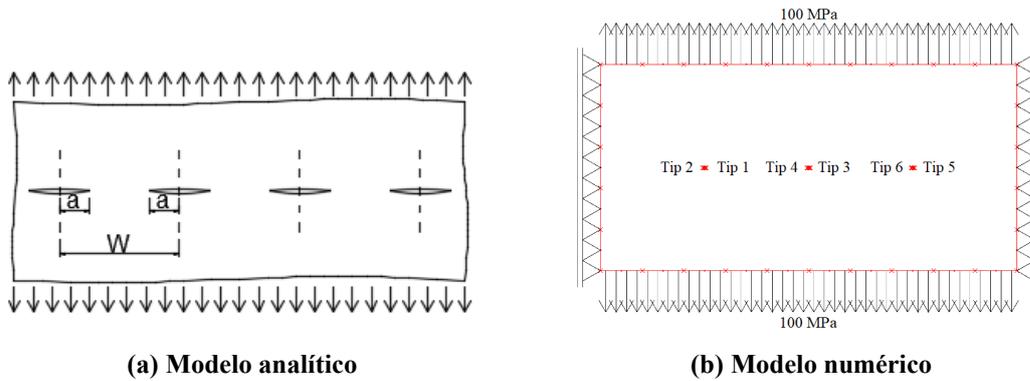


Figura 2.11 – Validação do Fator de Intensidade de Tensão

Em seguida, no segundo trabalho em [2], os autores juntaram os três casos e apresentaram as envoltórias das curvas das Figuras 2.5, 2.6 e 2.7, na Figura 2.12, possibilitando identificar a região em que a estrutura trabalha em cada posição e os limites mínimo e máximo em conjunto.

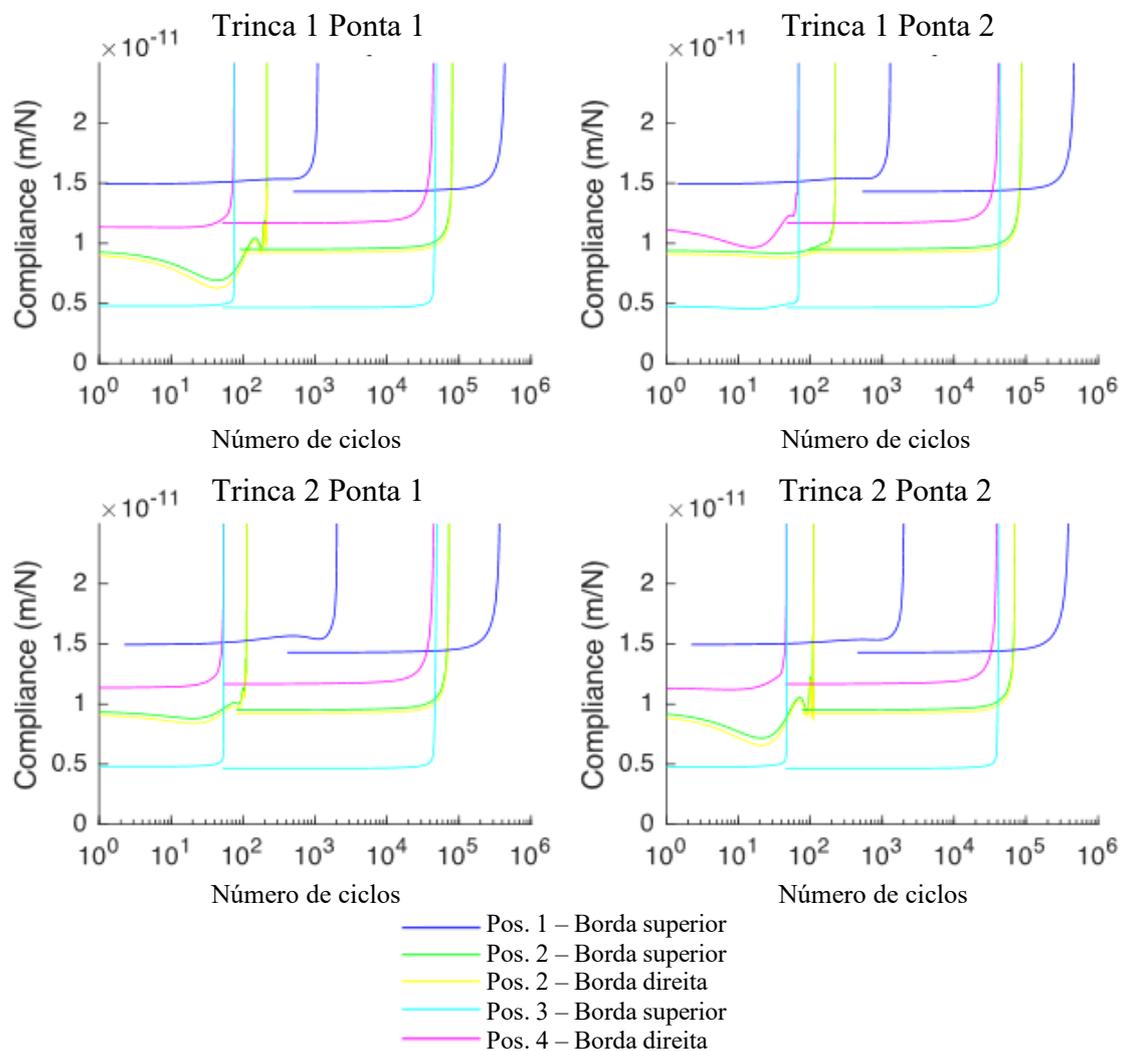


Figura 2.12 – Envoltórias das curvas de vida a fadiga

Já em [3] os autores apresentaram as seguintes inovações: 1) análise da localização do ponto crítico diretamente por MEC, em vez de usar a mecânica do contínuo, permitindo a generalização para qualquer modelo e não dependente do modelo analítico; 2) primeira vez que relaciona C e m da Lei de Paris com a vida à fadiga N por meio deste método, no entanto, esse modelo apresentava a limitação de ter defeitos iniciais com tamanhos únicos (R , $L1$, $L2$ fixos), sem análise probabilística, não sendo possível, portanto, prever a pior situação.

A análise do ponto crítico diretamente pelo MEC é possível por meio da integração entre os *softwares* educacionais BEMLAB e BEMCRACKER. O BEMLAB é a interface gráfica que permite ao projetista modelar sua estrutura. Após a modelagem, adiciona-se pontos internos ao modelo e calcula-se os valores das tensões internas. Calcular as tensões internas pelo método numérico flexibiliza que a análise seja feita para qualquer estrutura e não fique limitada às fórmulas analíticas dos trabalhos anteriores.

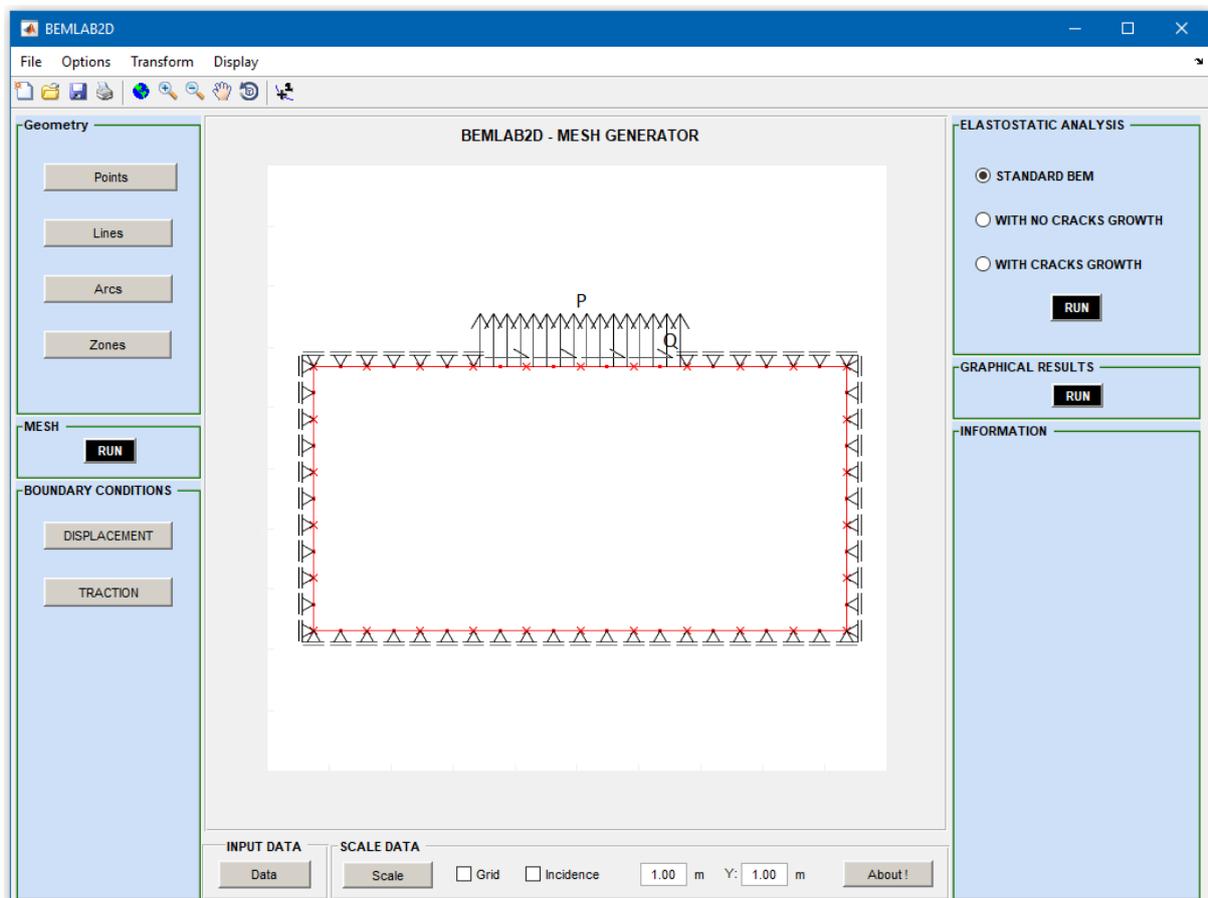


Figura 2.13 – Modelo macro da publicação da FIS

Assim, realizou-se a validação das tensões internas no *software* BEMCRACKER2D. Para isso, modelou-se no BEMLAB o modelo macro indicado na Figura 2.13. Nesse caso, as tensões internas computacionais foram comparadas com as analíticas propostas por Johnson [27], conforme pode-se perceber na comparação das Figuras 2.14, 2.15 e 2.16. Com a verificação do cálculo numérico do campo de tensões, possibilitou-se a flexibilização do método para modelagem de outras disposições estruturais e não mais aquela analítica fixada inicialmente nos trabalhos anteriores.

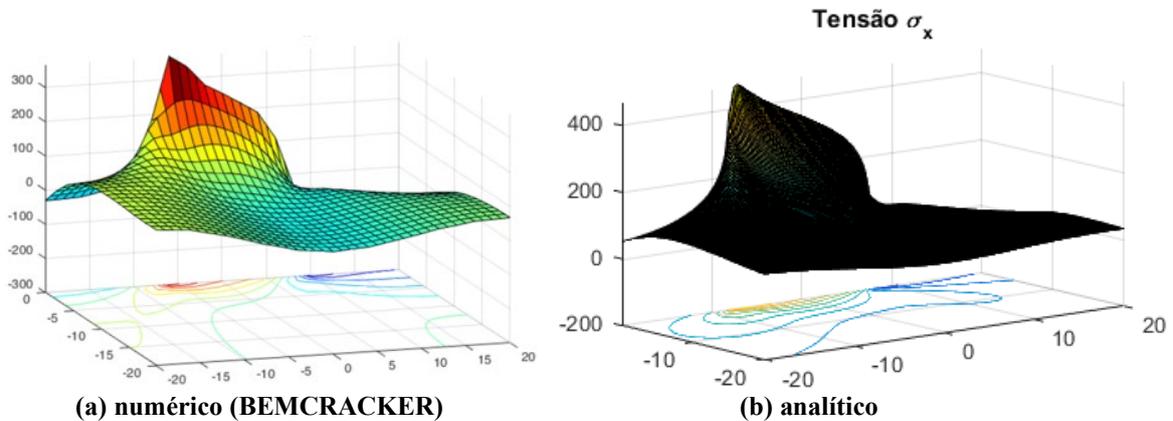


Figura 2.14 – Campo de tensões sigma-x (σ_x)

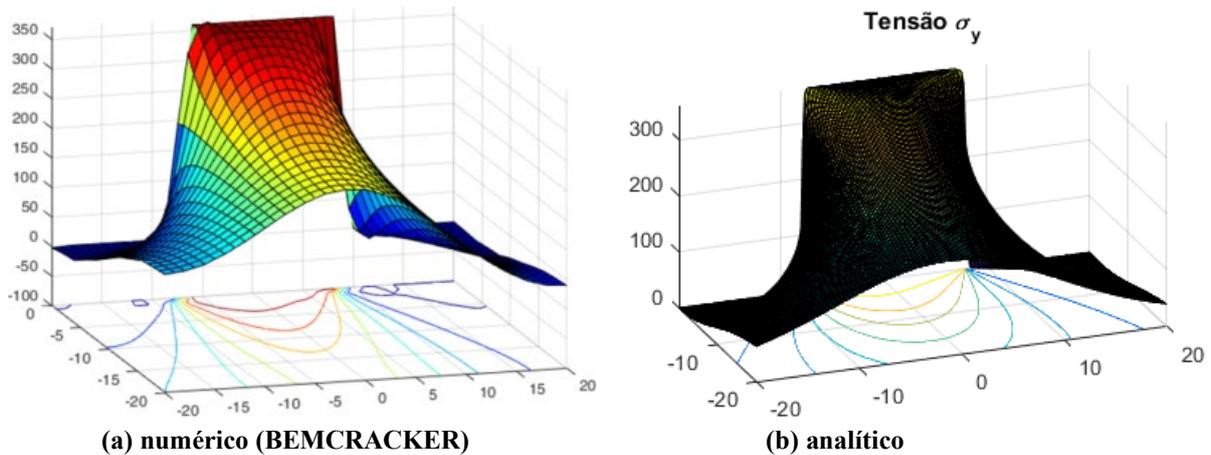


Figura 2.15 – Campo de tensões sigma-y (σ_y)

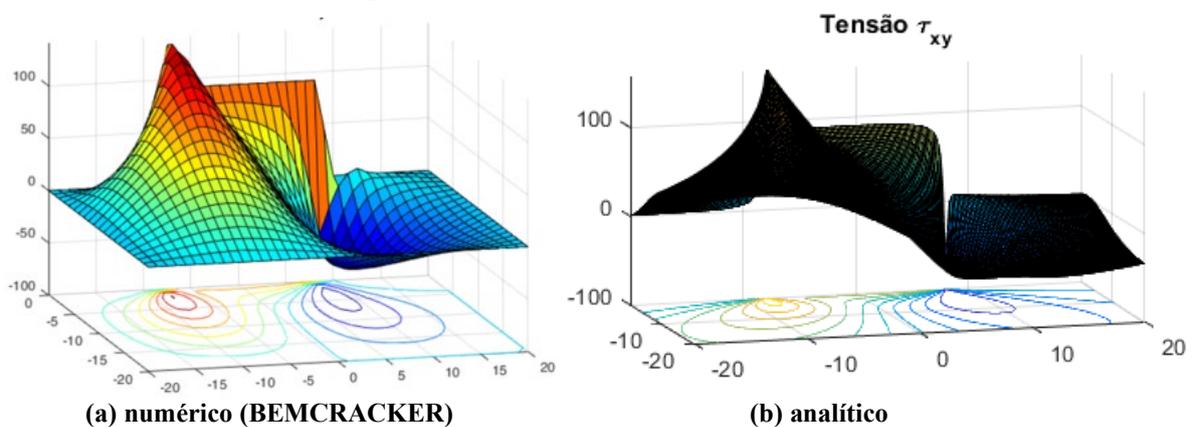


Figura 2.16 – Campo de tensões cisalhantes (τ_{xy})

Por fim, nesse trabalho obteve-se pela primeira vez uma curva que relaciona os parâmetros de Paris (C e m) com a vida a fadiga por meio do método da *compliance*. Neste caso, houve duas aplicações A1 e A2, para o mesmo modelo indicado na Figura 2.1 (a), alterando somente os valores das variáveis. Os valores dos parâmetros adotados nas aplicações 1 e 2 estão na Tabela 2.5, sendo P e Q as solicitações externas normal e cisalhante e R , $L1$, $L2$ o raio do furo circular central, o tamanho da trinca superior e o da inferior, representando defeitos iniciais.

Tabela 2.5 – Valores das variáveis aleatórias das aplicações 1 e 2

	A1	A2
P (MPa)	360.47	343.58
Q (MPa)	92.78	90.70
R (cm)	0.089	0.112
$L1$ (cm)	0.074	0.081
$L2$ (cm)	0.086	0.093

No local do pico de tensões, avaliou-se a instabilidade local por meio da *compliance*, conforme proposto em [1], obtendo-se as curvas número de ciclos *versus compliance* para as Aplicações 1 e 2, Figura 2.17.

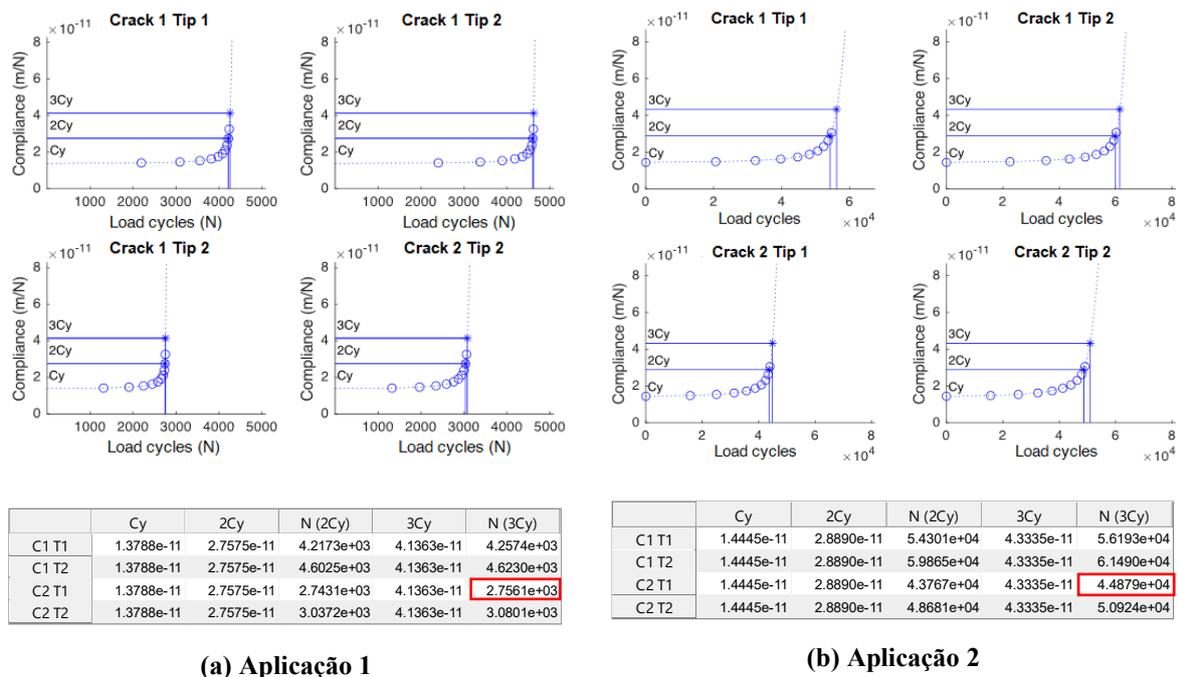


Figura 2.17 – Curvas do número de ciclos versus *compliance*

Cada $N(3C)$ indicado em vermelho na Figura 2.17, representa um ponto verde da Figura 2.18. Variando C e m de Paris em um *grid* $C = [5e-11, 9.5e-11]$ e $m = [2.7, 3.2]$, tem-se a relação entre C e m de Paris com o número de ciclos N por meio da *compliance*.

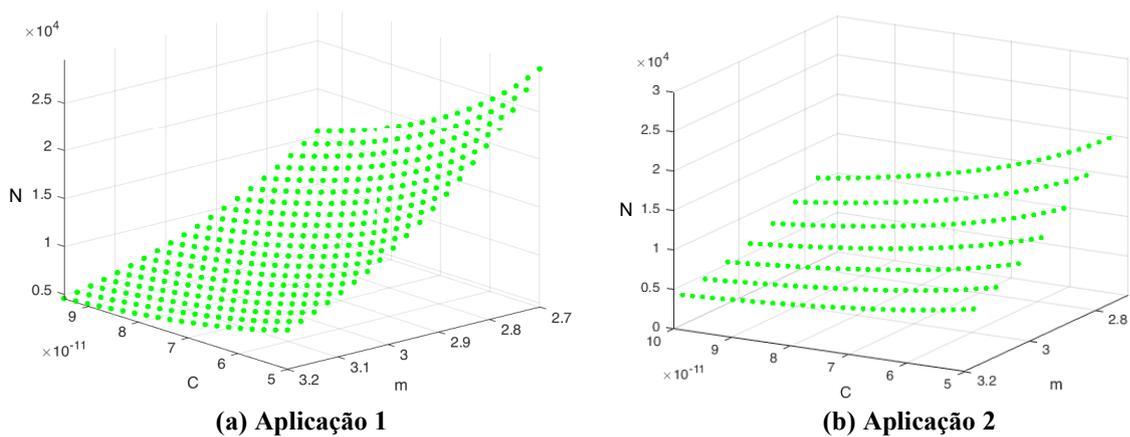


Figura 2.18 – Relação C e m de Paris com N

Agora, para descobrir a combinação de C e m que atinge um N requerido, basta realizar a interseção com o plano que corta o valor de N requisitado, este plano é o preto denominado (n^*) da Figura 2.19.

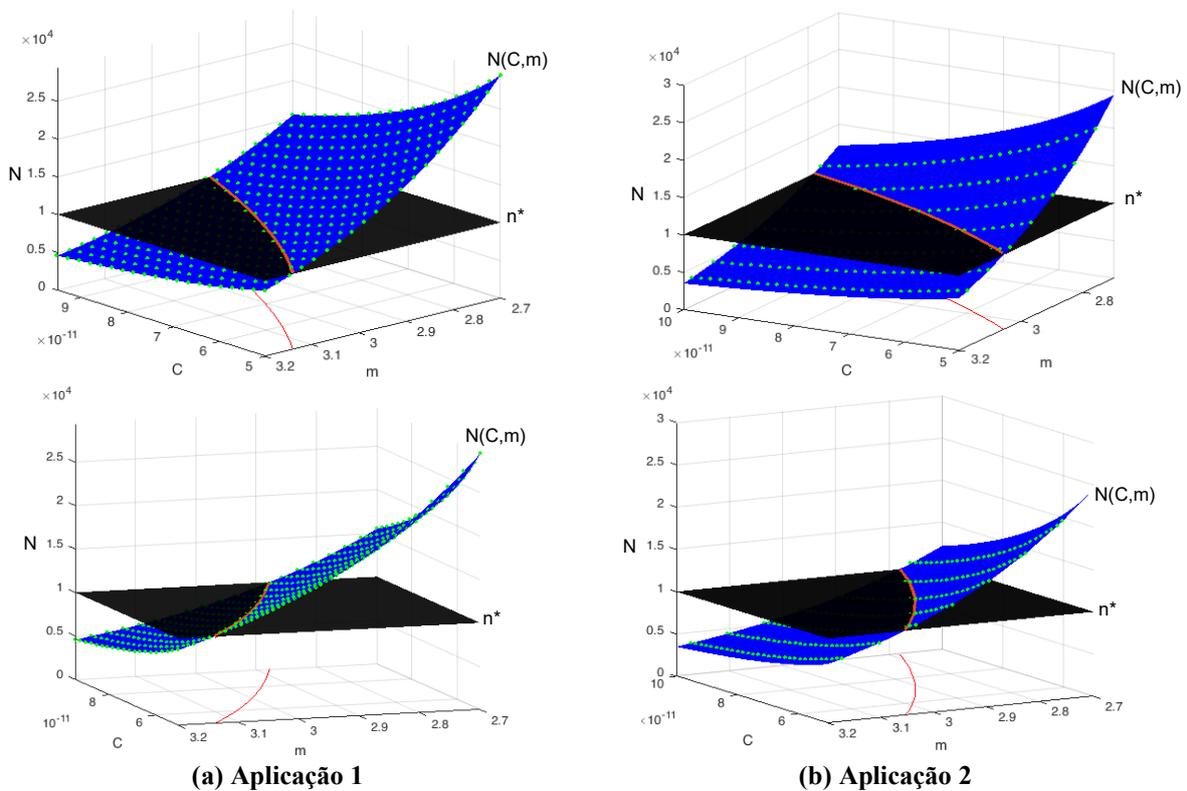
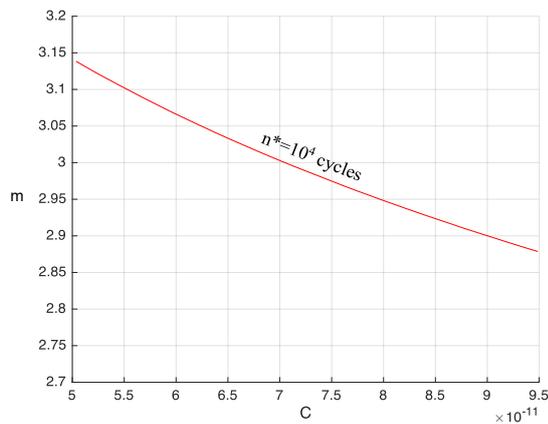
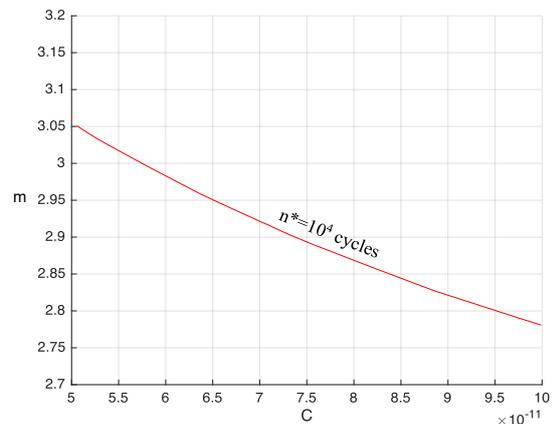


Figura 2.19 – Interseção entre $N(C,m)$ e o número de ciclos requerido (n^*)

Dessa forma, no plano C-m, tem-se os valores necessários dessas variáveis para atingir o número de ciclos requerido (n^*), Figura 2.20.



(a) Aplicação 1



(b) Aplicação 2

Figura 2.20 – Relação entre C e m necessários para um número de ciclos requerido (n^*)

Com isso, os casos apresentados são específicos para os valores adotados e, portanto, percebe-se que é necessária uma avaliação estatística para descobrir a pior situação e estabelecer uma combinação segura. Todavia, só o gráfico não é suficiente para satisfazer a proposta inicial em trazer dados fáceis e precisos que facilitam a vida do projetista, cabendo, assim, descobrir ainda qual a função $m(C)$ que representa as curvas vermelhas da Figura 2.20, para que a partir da função o projetista adote um valor de m com base em um valor de C e vice-versa. A pior combinação entre as mil realizadas e esta função foram desenvolvidos nesta última etapa da tese.

Vale destacar que o uso do *software* BEMCRACKER já passou por uma série de validação, podendo ser verificado em diversos trabalhos [1]–[6], [28]–[31]. O trabalho de Leite [31] demonstra uma série de validações do cálculo do número de ciclos. A Tabela 2.6 apresenta um comparativo dos resultados do BEMCRACKER com os resultados de Maksimovic et. al [32] com resultados ilustrados na Figura 2.21. As Figuras 2.22, 2.23 e 2.24 apresentam uma comparação dos resultados do BEMCRACKER com os resultados de Sato [33]. Já as Figuras, 2.25, 2.26 e apresentam uma comparação dos resultados do BEMCRACKER com os resultados de Ma [34]. O trabalho de Leite [31] apresenta ainda uma série de outras validações como Fator de Intensidade de Tensão, caminho da trinca etc. Dessa forma, analisando as validações, pode-se concluir que o *software* BEMCRACKER está ajustado e produz bons resultados de parâmetros da mecânica da fratura, em especial o número de ciclos que é objeto de estudo desta tese.

Tabela 2.6 – Resultados da vida à fadiga expressos em número de ciclos obtidos por Maksimovic [32] e por BemCracker2D de chapa com furo central

Incremento	Maksimovic [32]		BemCracker2D com coeficiente C corrigido		BemCracker2D sem correção do coeficiente C	
	a (mm)	N (ciclos)	a (mm)	N (ciclos)	a (mm)	N (ciclos)
1	2	0	2	0	2	0
2	22	1.28E+05	22	1.25E+05	22	1.54E+05
3	24	1.75E+05	24	1.65E+05	24	2.03E+05
4	26	2.80E+05	26	2.70E+05	26	3.32E+05
5	3	4.00E+05	3	3.95E+05	3	4.86E+05
6	32	4.50E+05	32	4.43E+05	32	5.45E+05
7	36	5.00E+05	36	4.95E+05	36	6.09E+05
8	53	6.00E+05	53	5.90E+05	53	7.26E+05
9	71	6.50E+05	71	6.40E+05	71	7.87E+05
10	128	7.00E+05	128	6.80E+05	128	8.36E+05

Fonte: Leite [31]

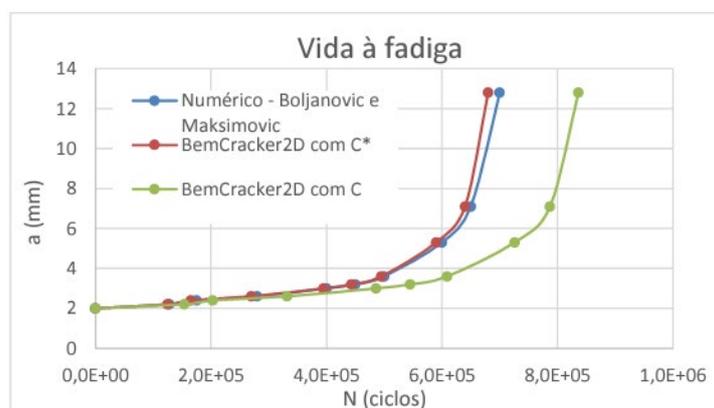


Figura 2.21 – Comparativo dos resultados numéricos de vida à fadiga expressa em número de ciclos obtidos por Maksimovic [32] e pelo BemCracker2D de chapa com furo central

Fonte: Leite [31]

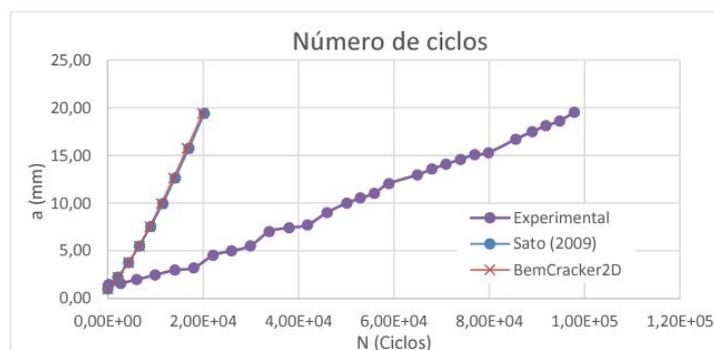


Figura 2.22 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos experimentalmente e numericamente por Sato [33] e pelo BemCracker2D

Fonte: Leite [31]

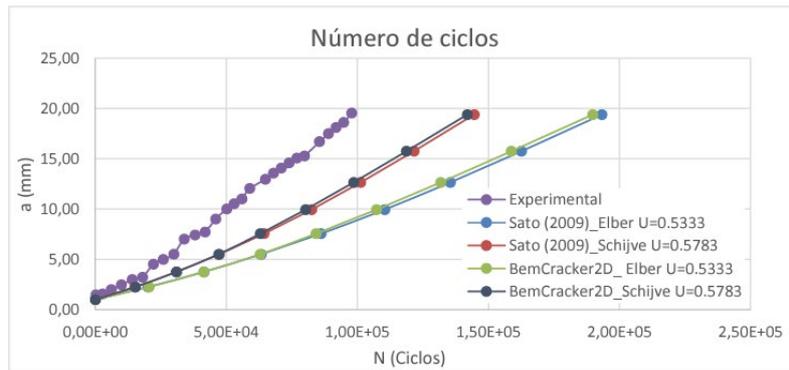


Figura 2.23 – Comparativo dos resultados dos números de ciclos de Sato [33] corrigidos pelos modelos de Elber e Schijve para considerar o efeito do fechamento de trinca e pelo BemCracker2D

Fonte: Leite [31]

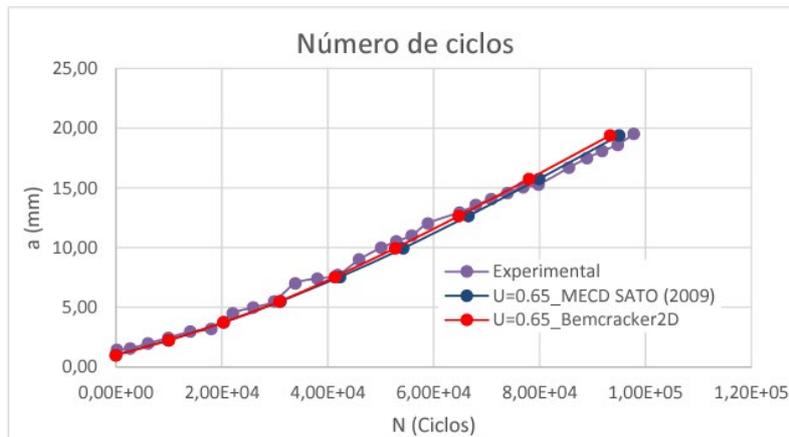


Figura 2.24 – Comparativo dos resultados finais dos números de ciclos considerando 65% de efetividade dos fatores de intensidade de tensão ($U = 0.65$) de Sato [33] e pelo BemCracker2D

Fonte: Leite [31]

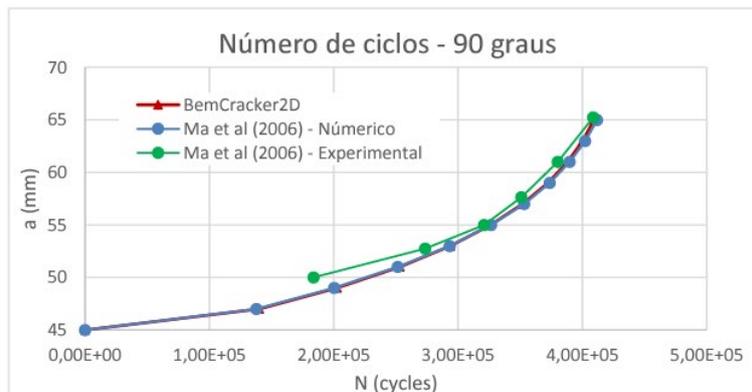


Figura 2.25 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos experimentalmente e numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 90°

Fonte: Leite [31]

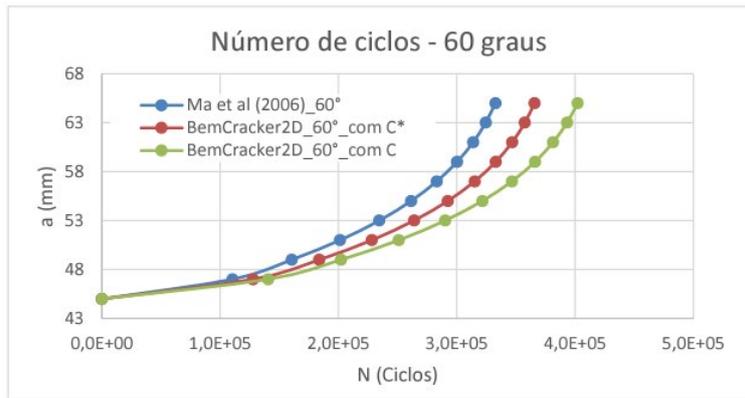


Figura 2.26 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 60°

Fonte: Leite [31]

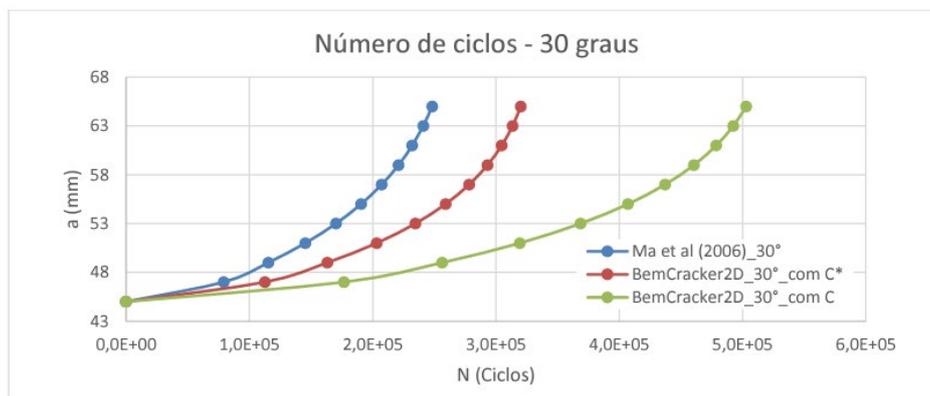


Figura 2.27 – Comparativo entre os números de ciclos obtidos numericamente por Ma et al [34] e via BemCracker2D para o modelo de 30°

Fonte: Leite [31]

Com base nessa jornada evolutiva, este trabalho atual surge como uma síntese do conhecimento cumulativo, aperfeiçoando-o e trazendo as últimas novidades propostas para o método. Assim, com a reintrodução das mil combinações das variáveis aleatórias, pode-se identificar a combinação mais crítica e que produz o pior cenário obtendo a função que correlaciona o número de ciclos definido em projeto com os parâmetros físicos C e m da Lei de Paris necessários para suportá-lo. Com isso, este método apresenta a generalização essencial para o projetista de fuselagem de aeronaves. É importante reconhecer as limitações dos trabalhos anteriores, as quais impediram à aplicação em projetos, sendo esta última novidade a base que permite a generalização.

Nesse sentido, e de forma resumida, aprofundando-se nos meandros de cada fase, o quadro a seguir mostra a evolução do método.

[1]	[2]	[3]	[Atual]
<ol style="list-style-type: none"> 1. A <i>compliance</i> é avaliada como variável definidora da instabilidade em vez do tamanho da trinca. 2. Descoberta de que a <i>compliance</i> já tende ao infinito ao atingir o valor de três vezes a <i>compliance</i> inicial (3C), sendo o número de ciclos deste ponto o crítico. 3. Cálculo analítico do campo de tensões. 4. Avaliação probabilística de mil combinações com variáveis aleatórias P, Q, R, L1, L2, C, m. 5. Descoberta da posição crítica para aquele caso específico. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Descoberta das envoltórias das curvas de instabilidade. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Primeira tentativa de relacionar o C, m de Paris com a vida a fadiga usando este método. 2. Cálculo direto do campo de tensões através do MEC. 3. Aplicação limitada apenas ao primeiro modelo [11] para validação do campo de tensão. 4. O cálculo do campo de tensões numérico permite a generalização para qualquer caso. 5. A avaliação foi restrita a uma única combinação de danos iniciais (R, L1 e L2), este caso não apresenta o pior cenário. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reintrodução de R, L1, L2 como variáveis aleatórias, permitindo a identificação da combinação que resulta no pior cenário. 2. A aplicação agora se torna completa e totalmente generalizada para qualquer modelo, de acordo com os requisitos do projetista. 3. Obtenção da função objetiva que correlaciona o número de ciclos definido em projeto com os parâmetros C e m de Paris necessários para suportá-lo.

2.1 TRABALHOS RELACIONADOS

A seguir, apresentamos os trabalhos relacionados com o tema dividido em cada tópico de interesse.

2.1.1 Fadiga em fuselagem de aeronave

Neste capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica referente a bases de dados digitais. Utilizando o *software VOSviewer* foram obtidos mapas de calor para análise de *co-citation* e *coupling* a partir dos registros na base *Scopus* do tema “Fadiga em fuselagem de aeronave”. Obtendo como resultados a Figura 2.28 que ilustra o mapa de *co-citation* e a Figura 2.29 que ilustra o de *coupling*. A seguir é apresentado uma breve característica destes parâmetros que dão suporte às pesquisas científicas.

O *co-citation* parte da premissa de que se um artigo cita outros dois sempre juntos indicam que estes outros tratam da mesma linha de pesquisa – sendo interessante para definir as bases teóricas já consolidadas a respeito do tema. Já o *coupling* mostra que quando uma variedade de artigos cita um mesmo artigo implica que este trata de um *front* de pesquisa – indicando áreas novas que estão sendo pesquisadas. Como resultado imediato do *co-citation* e *coupling* obtém-se o estado da arte do tema pesquisado indexado em uma base de dados.

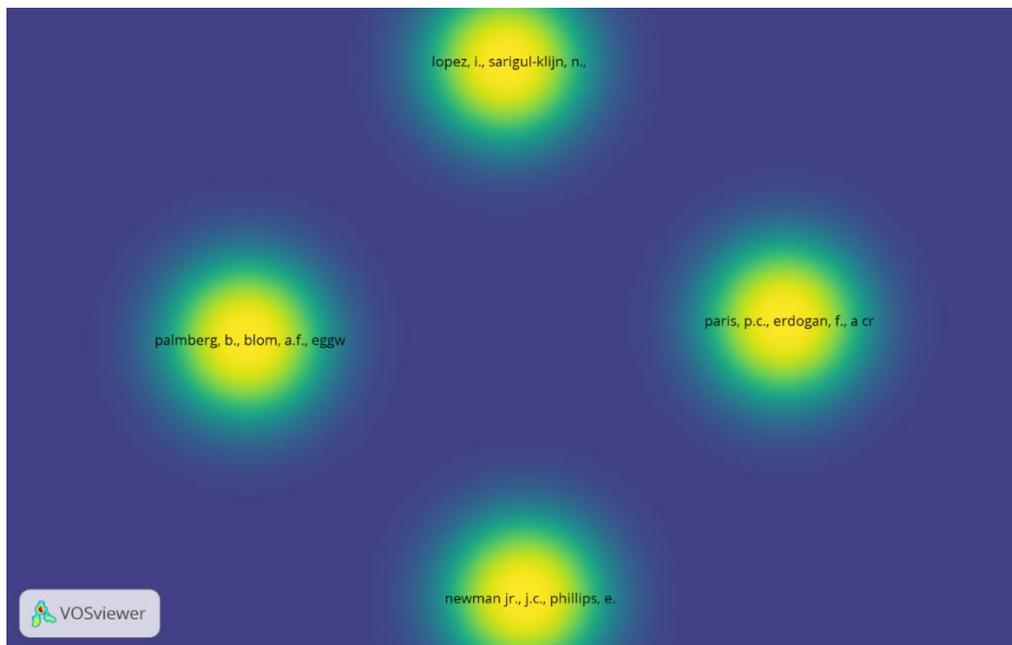


Figura 2.28 - Mapa de *co-citation*

Lopez [35] apresenta uma extensa revisão de incertezas envolvidas no monitoramento de dano estrutural em aeronaves abordando os métodos existentes desenvolvidos para o problema da incerteza nas áreas de diagnóstico, prognóstico e controle de danos. Newman Jr. [36] prevê a vida à fadiga de vários materiais metálicos sob diferentes condições de carregamento. Este estudo possibilitou relacionar o crescimento da trinca em função do intervalo de Fator de Intensidade de Tensão efetivo. Os resultados obtidos foram comparados com experimentos em espécimes entalhadas e não entalhadas de ligas de alumínio e aço. Paris e Erdogan [14] deram a fundamental contribuição para a modelagem de trincas em sólidos submetidos a cargas cíclicas a partir da Lei de Paris Erdogan, também denominada da/dN , que relaciona o número de ciclos de fadiga com o tamanho da trinca. Já Palmberg [37] é um dos pioneiros quando se fala em considerar o conceito de tolerância ao dano. Para isso, este autor realiza uma análise estatística para controle da propagação de trincas por fadiga e considera

intervalos de inspeção de forma a assegurar que a probabilidade de falha completa da estrutura seja mantida sempre baixa.

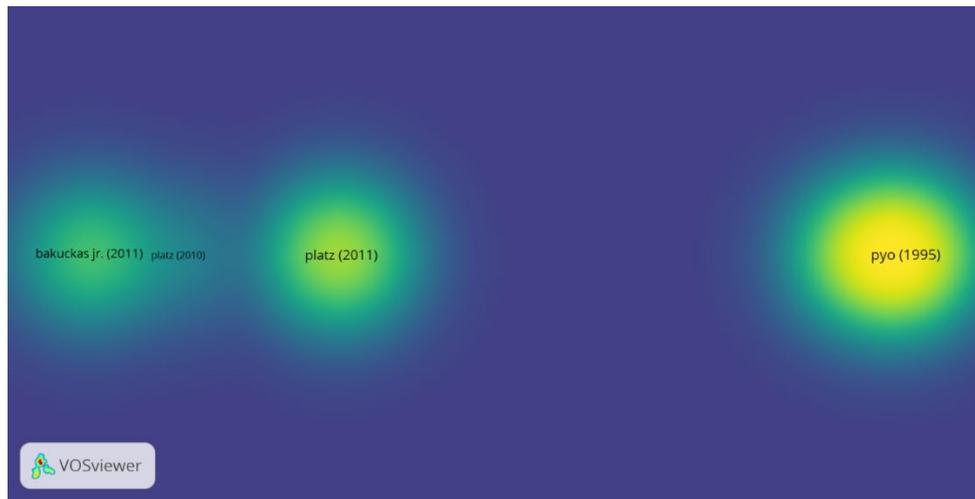


Figura 2.29 - coupling

Já os registros de *coupling* mostram o seguinte: Pyo [38] trata de um método alternativo para análise de dano por fadiga em estruturas de aeronave. Este autor desenvolveu uma metodologia denominada *Elastic Finite Element Alternating Method (EFEAM)* para prever a máxima capacidade de carga em painéis com trincas destacando o efeito de *Multi Site Damage (MSD)*. Ainda neste estudo é desenvolvida uma solução analítica para uma linha de trincas em uma chapa metálica infinita e como resultado o autor demonstra que a aproximação da MFLE clássica superestima a capacidade de carga. Jeong [39], em contrapartida, apresenta um método para prever o limiar de *MSD* e de dano generalizado também em fuselagens afirmando que o problema do dano generalizado é a redução da resistência residual da estrutura abaixo da tolerante enquanto o limiar do *MSD* refere-se ao ponto na vida útil quando ocorre coalescência (*linkup*) por fadiga de duas trincas adjacentes ainda na tensão admissível. A metodologia apresentada determina um valor de limiar a partir da análise da combinação de resultados de resistência residual e crescimento de trinca por fadiga avaliado por meio de testes de laboratório. Para este modelo os resultados para o limiar para dano de fadiga estiveram entre 32.000 e 40.000 ciclos e para o limiar de *MSD* cerca de 70.000 ciclos. Platz [40] destaca que trincas por fadiga em cascas leves ou estruturas em painel podem levar a grandes falhas quando usadas para vedação ou transporte de carga. Em sua pesquisa o autor investiga a aplicação de sistemas piezoelétricos aplicados na superfície de um painel de alumínio fino trincado para reduzir a propagação das trincas por fadiga. Com a redução da propagação, as incertezas na resistência da estrutura, que permanecem mesmo

quando a estrutura é usada sob condições de tolerância à dano como em fuselagem de aeronave, podem ser reduzidas. Os piezoelétricos atuam induzindo forças de compressão na ponta da trinca de modo a reduzir o FIT cíclico. Como resultado é destacado estatisticamente a partir de amostras experimentais que a taxa de propagação da trinca reduz significativamente.

Outras referências além das encontradas na base *Scopus* merecem destaque, em especial: a pesquisa de Khan [41] que analisou fadiga de baixo ciclo em placas de alumínio Al 2024-T351. A análise experimental foi realizada tanto para carregamento monotônico quanto cíclico a partir de tecnologia de imagens para detectar o local de início da trinca. Para demonstrar a validação do modelo adotado para problemas de engenharia complexos utiliza-se conjuntos de longarinas como utilizadas em fuselagem de avião. Breitbarth [42], baseado em testes biaxiais com amostras dispostas em cruz, estudou trincas em seções de fuselagem entre a asa e a cauda de aeronave obtendo valores máximos de FIT's para peças metálicas. Os resultados experimentais foram comparados a partir de imagens digitais com os analíticos obtendo estudos de FIT's, Integral J, zona plástica e efeitos de fechamento de trinca. Por fim, as publicações de Schijve [43] e Brot [44] revelaram que uma fuselagem sujeita a ensaio de compressão até o Estado Limite Último (ELU) e em seguida ensaiada à fadiga, os resultados à fadiga foram melhorados devido a tensões residuais de compressão. Estas tensões foram capazes de retardar o desenvolvimento das trincas. Ainda, a partir da Lei de Paris [14], Breitbarth [45] investigou o crescimento de trincas por fadiga em chapas de liga de alumínio AA2024-T3 sob condições de alta tensão. Neste experimento, fatores de intensidade de tensão elevados causam zonas plásticas que se estendem até aproximadamente 100 mm a partir da ponta da trinca. Os dados de $da/dN-\Delta K$ obtidos neste estudo fornecem informações cruciais sobre o crescimento de trincas por fadiga e tolerância a danos de trincas muito longas sob condições de alta tensão em estruturas leves e finas. A partir do conceito de fadiga surgiu o conceito de tolerância ao dano que representa o limiar da fadiga.

2.1.2 Tolerância ao dano em fuselagem de aeronave

Palmberg [37] é um dos pioneiros no conceito de tolerância a danos, realizando uma análise estatística para controlar a propagação de trincas por fadiga e considerando intervalos de inspeção para manter baixa a probabilidade de falha completa. Mais tarde, Wanhill [46], [47] examinou a tolerância a danos no uso de ligas de alumínio para aplicações estruturais de

aeronaves. Newman Jr. [36], [48] sugeriu que o dano por fadiga pode ser caracterizado pelo tamanho da trinca. Schijve [43] propôs alguns aspectos do projeto, previsões e experimentos associados à tolerância a danos nas estruturas da aeronave. Barter e Molent [49] mostraram que os ciclos de carga têm uma relação linear direta com o logaritmo do tamanho da trinca e que as maiores trincas formadas crescem de maneira aproximadamente exponencial (a chamada metodologia da “trinca principal”) [50] a partir de pequenas descontinuidades inerentes ao material, assim que uma aeronave entra em serviço [51]. Atualmente, o conceito de tolerância ao dano é aplicado em aeronaves com estruturas de compósitos [52]–[55], em análises de múltiplas trincas e em projetos de otimização de forma [56]–[58]. Estudos em tolerância ao dano probabilísticos são baseados em componentes de fabricação [59] e na dispersão da vida a fadiga a partir de uma distribuição de defeitos iniciais [60]. Outros trabalhos relacionam a tolerância ao dano aos métodos computacionais, usando XFEM [61], MEC [62] e MECD [63].

Ainda no diz respeito à tolerância a danos, Sayar [64] apresentou uma avaliação de vida útil por fadiga em duas etapas de um painel de fuselagem de aeronave de alumínio com nervuras, apresentando uma trinca circunferencial e uma longarina quebrada. Neste trabalho, os autores concluíram que a deformação da fuselagem devido à pressão interna pode ter um efeito significativo no fator de intensidade de tensão, resultando em rápida propagação da trinca após a quebra completa da longarina. Bakuckas Jr. [65] demonstrou o potencial de painéis de fuselagem avançados com tecnologias de estruturas metálicas emergentes variáveis por apresentarem melhor desempenho em fadiga e tolerância a danos em comparação com painéis construídos usando materiais e processos de fabricação convencionais. Abdi [66] descreveu uma nova abordagem de análise para avaliar a durabilidade e tolerância a danos de instalações externas de fixação de aeronaves, que envolve considerar múltiplas interações de trincas. A análise foi utilizada para avaliar a iniciação e propagação de trincas por fadiga na fuselagem e nos reforços feitos de ligas de alumínio. Os resultados mostraram que o estado de dano por fadiga nos componentes durante a vida útil projetada não excederia os requisitos de segurança.

Madhavi [67] investigou o projeto de tolerância a danos de uma estrutura de fuselagem de aeronave de transporte, que foi submetida a alta pressurização interna durante cada ciclo de decolagem e pouso, levando à fadiga do metal. O estudo concentrou-se no fator de intensidade de tensão para uma trinca longitudinal sob carga de pressurização e investigou as

características de iniciação, crescimento, fratura rápida e interrupção da trinca no painel reforçado. A análise foi realizada utilizando o solucionador *MSC NASTRAN* e pré-processada usando o *software MSC PATRAN* para evitar a propagação adicional da trinca.

Aplicando esses conceitos em fuselagens de aeronaves, Schijve [68] discutiu a importância das juntas rebitadas no projeto de fuselagens de aeronaves. O autor explicou que muitas variáveis devem ser consideradas ao projetar juntas rebitadas, como espessura da chapa, sobreposição, padrão de rebites, tipo de rebite e procedimentos de rebiteagem, com base nos resultados de muitos testes de fadiga realizados no passado em laboratórios da indústria aeronáutica e em institutos de pesquisa aeronáutica. Por fim, ele concluiu que sempre que a fadiga das juntas rebitadas precisar ser considerada no projeto de uma fuselagem, o livro de Skorupa [69] deve ser consultado.

Por sua vez, Toor [70], [71] discutiu os requisitos para o projeto de uma estrutura de fuselagem à prova de falhas para aeronaves. Ele destaca a importância de um componente estrutural leve e submetido a altas tensões operacionais, que deve desempenhar sua função pretendida, ter uma vida útil longa e ser produzido a um custo razoável. A Força Aérea exige uma análise de tolerância a danos para garantir a segurança das estruturas das aeronaves, especialmente para trincas longitudinais e circunferenciais causadas por altas tensões. Diversas abordagens analíticas e empíricas têm sido usadas para avaliar a capacidade de tolerância a danos da estrutura da fuselagem, e o artigo avalia e compara criticamente essas abordagens. Por fim, foi desenvolvido um modelo que leva em consideração a influência de reforços, cintas e curvatura, sendo utilizado para atender aos requisitos de tolerância a danos da Força Aérea em um exemplo de problema envolvendo um elemento estrutural típico da fuselagem de uma aeronave militar de carga.

Atualmente, com o avanço com o avanço computacional, os métodos numéricos apareceram como recursos essenciais para desenvolver as análises de tolerância ao dano.

2.1.3 Métodos computacionais aplicados em tolerância ao dano

A utilização de métodos numéricos para prever tolerância ao dano tem destaque no trabalho de Carta [72] que validou um método numérico de análise para prever a tolerância a danos de painéis reforçados de fuselagem de aeronaves. O estudo utiliza uma abordagem de mecânica

da fratura com vários modelos simulados com o solucionador de elementos finitos ABAQUS para determinar as taxas de crescimento de trinca por fadiga. Os resultados mostraram que diferentes soluções para melhorar a tolerância a danos de painéis reforçados de aeronaves podem ser testadas virtualmente antes de realizar experimentos. Proppe [73] apresentou um arcabouço probabilístico para calcular a probabilidade de falha de elementos estruturais de aeronaves sob o conceito de tolerância a danos, que exige que a aeronave tenha resistência residual suficiente na presença de danos durante inspeções de serviço. O problema de danos em múltiplos locais (MSD) é considerado, e as incertezas na iniciação de trinca, crescimento de trinca, limite de escoamento e tenacidade à fratura são descritas por variáveis aleatórias. O método dos elementos finitos alternados foi usado para cálculos de crescimento de trinca, e a amostragem probabilística foi empregada para obter a probabilidade de falha devido a dano em múltiplos locais. Kennedy [74] desenvolveu uma técnica computacional para prever cargas de falha em estruturas compostas com trincas através da espessura. O modelo discreto de trinca com um programa de elementos finitos foi usado para simular o crescimento do dano e prever a falha em uma variedade de tamanhos de trinca. A técnica foi aplicada em dois laminados e em uma fuselagem de aeronave composta, e os resultados mostraram boa concordância com testes experimentais. A análise numérica permitiu, assim, desenvolver uma série de materiais tolerantes ao dano e que possam ser utilizados.

2.1.4 Materiais e tolerância ao dano

Os materiais utilizados na construção de fuselagens de aeronaves evoluíram ao longo do tempo. Durante os primeiros dias da aviação, as fuselagens primitivas eram construídas com madeira. Só no final dos anos 20 e início dos anos 30, os fabricantes de aviões começaram a produzir mais fuselagens a partir do alumínio e do aço. Estes metais ofereciam mais estabilidade e maior proteção contra os elementos. Logo após, a fuselagem passou a ser feita de alumínio e cobre, fundidos, pois o cobre melhora as propriedades mecânicas do alumínio, muito resistente à corrosão, que é um bom condutor de eletricidade e calor, suportando, assim, as mudanças de pressão. Estruturas de aviões, especificamente a fuselagem, passaram, assim, a utilizar a liga de alumínio 2024 como material base devido a sua alta capacidade de suportar danos, boa resistência mecânica e à corrosão [75].

No que diz respeito aos materiais promissores a serem utilizados para suportar danos, Ucan [76] constatou que os laminados de fibra-metal e o *GLARE* em particular têm sido

identificados como materiais com melhor desempenho para aplicações aeroespaciais. O autor afirma que os laminados de fibra-metal possuem potencial para se tornarem o material básico para aeronaves de próxima geração. Johnson [77] estudou a integridade estrutural de painéis de fibra de carbono/epóxi pré-carregados em tração e compressão e submetidos a testes de impacto com gás que causaram danos significativos. Os resultados mostraram que a integridade estrutural estava bem acima dos limites de projeto para painéis compostos pré-carregados em tração e compressão com danos visíveis provenientes de testes de impacto de corpo rígido. No entanto, testes de impacto com carga de compressão em painéis deformados causaram grandes regiões de delaminação, o que reduziu a rigidez à flexão das placas e reduziu significativamente as resistências à compressão.

Em trabalhos recentes, há uma série de estudos de fadiga sobre elementos estruturais. Entre elas, destacam-se as obras [78]–[81]. Ma [78] examinou a predição da vida em fadiga em componentes de automóveis. Neste trabalho, danos por fadiga aleatória multiaxial foram adotados para prever a vida útil em fadiga de semieixos e os resultados mostram que o método de predição é confiável e atende aos requisitos de vida útil e segurança. Zhang [79] apresentou um modelo de dano equivalente à fadiga exponencial capaz de descrever a degradação da resistência residual dos materiais para melhorar as previsões de vida em fadiga, considerando que quando a sequência de carregamento das cargas de fadiga muda, a predição de dano cumulativo de fadiga tende a apresentar um grande erro. Liu [80] melhorou a acurácia da predição de parâmetros para dados de amostras pequenas, considerando a existência de erro nas amostras, o círculo de erro foi introduzido para analisar amostras originais. O autor descobriu que a curva S-N obtida pelo método do círculo de erro é mais confiável; a curva S-N do método de Bootstrap é mais confiável do que a do método de Estimativa de Máxima Verossimilhança (MLE). Li [81] melhorou o método de análise de vida em fadiga para o projeto ideal de engrenagens elétricas de múltiplas unidades (UEM), que visa defeitos da teoria tradicional de danos cumulativos por fadiga de Miner. Os resultados mostram que ela corresponde mais à prática de engenharia usando o método de análise de vida em fadiga aprimorado do que o método tradicional.

A partir desta extensa análise do estado da arte, nos capítulos seguintes, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos conceitos expostos.

CAPÍTULO 3 - MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é a teoria básica da Fratura originada por Griffith [15], [82] e complementada por Irwin [16], [83] e Rice [17], [84]. Esta é uma teoria sofisticada que lida com trincas em corpos elásticos. Desse modo, trata-se de uma situação ideal em que todo o material é elástico exceto em uma pequena região (um ponto) na ponta da trinca. De fato, as tensões próximas à ponta da trinca são tão altas que algum tipo de plasticidade deve ser desenvolvido, porém, tal região é tão pequena de forma que no limite, a perturbação é desprezível e os resultados obtidos da MFLE são satisfatórios [13].

Hutchinson [85] na *ASME Timoshenko medal acceptance speech* afirma:

... I think I am correct in saying that after fifty years of measuring toughness and fatigue crack growth rates experimentally, there is probably not a single instance where a critical application has made use of toughness that has been predicted theoretically. You have to give the earlier developers a great deal of credit for understanding this from the start – I'll single out George Irwin and Paul Paris as two of our many colleagues who had the great insight to set this into motion. Paris's early contribution was not the Paris law ... Along with Irwin, his contribution was the recognition that a truly esoteric quantity from elasticity theory, the stress intensity factor, could be used to develop a framework to measure crack growth and predict structural integrity...

Existem três principais modos de sollicitação da trinca, como pode ser observado na Figura 3.1: o modo I que está relacionado à abertura da trinca (as superfícies da trinca são tracionadas), o modo II que está relacionado ao cisalhamento dentro do plano (deslizamento) e o modo III que está relacionado ao cisalhamento fora do plano (rasgamento).

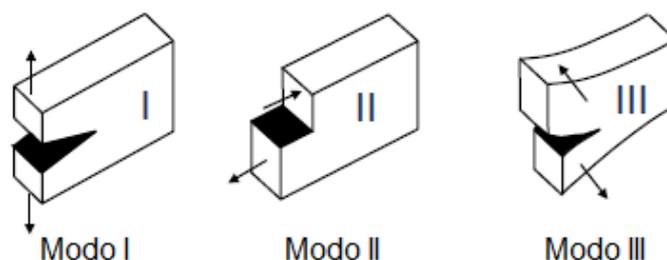


Figura 3.1 - Modos de fratura

Fonte: adaptado de Anderson [11]

O termo modo misto implica na presença simultânea de pelo menos dois modos de fratura. Ou seja, tensões tanto no plano normal quanto cisalhante na região imediatamente à frente da fratura. Dessa forma, a ponta da trinca bidimensional possui tanto componentes de modo I quanto de modo II, como pode ser visto na Figura 3.2.

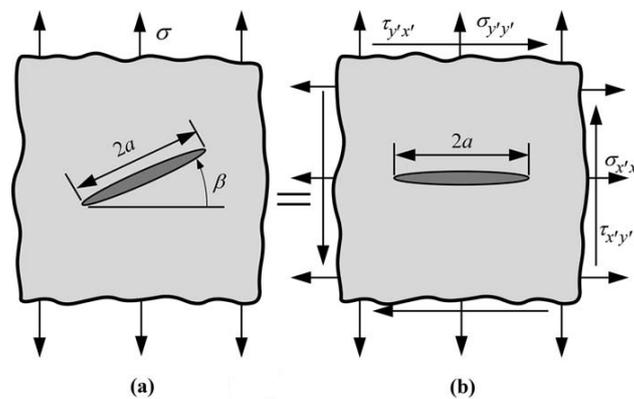


Figura 3.2 - Modo misto de fraturamento

Fonte: Anderson [11]

Problemas em modo misto ocorrem na maioria das estruturas da engenharia com a presença de trincas, uma vez que estas não são perfeitamente homogêneas em sua microestrutura apresentando vazios e geralmente estão sujeitas a carregamentos multiaxiais e mudança brusca na intensidade de carregamento. Uma falha em uma aeronave estará sujeita a frequentes mudanças na direção do carregamento, por exemplo.

3.1 TENSÕES NA PONTA DA TRINCA

O Fator de Intensidade de Tensão (FIT) é o parâmetro que define a amplitude da singularidade na ponta da trinca. Isto é, as tensões próximas a ponta da trinca aumentam na proporção K . Na Figura 3.3, o FIT em (b) é maior que em (a). Além disso, o FIT define as condições na ponta da trinca; se K é conhecido, é possível obter todos os componentes de tensão, deformação e deslocamento. Este é o motivo que torna o FIT como um dos conceitos mais importantes na Mecânica da Fratura. Pode-se definir K como:

$$K = \lim_{\delta^+ \rightarrow 0} \sigma_y \Big|_{\theta=0} \cdot \sqrt{2\pi\delta} \quad (5)$$

Onde δ é a distância medida da ponta da trinca e o limite é tomado do lado (+).

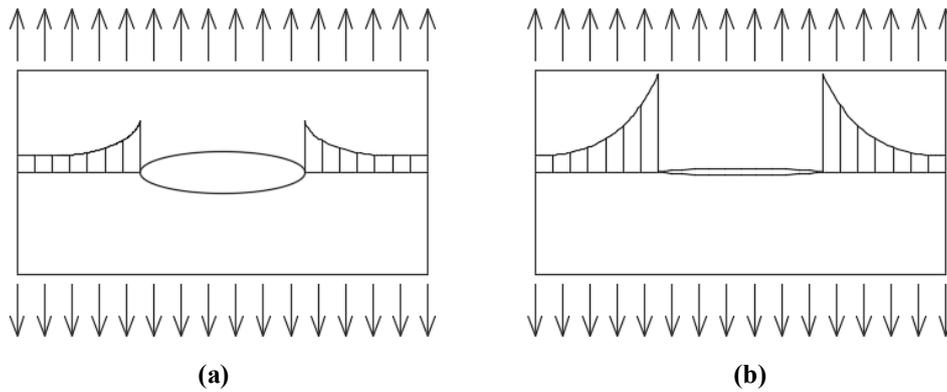


Figura 3.3 - Tensões na ponta da trinca, FIT da trinca (b) maior que (a)

Aplicando a definição de K para a tensão σ_y no problema de trinca central (Figura 3.4) encontra-se para esta geometria:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \quad (6)$$

onde K é o FIT, a é o tamanho da trinca, σ a tensão aplicada e $F\left(\frac{a}{W}\right)$ uma função que depende do tamanho da trinca e da geometria da placa.

À medida que a/W se aproxima de zero (isto é, uma trinca em uma placa de largura infinita) o valor de F se aproxima de 1. Para componentes de dimensões finitas, são utilizadas equações matemáticas para calcular $F(a/W)$.

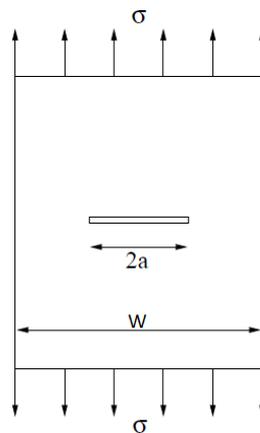


Figura 3.4 - Placa com trinca central

3.2 O MÉTODO GENERALIZADO DE WESTERGAARD

Este método introduzido por Westergaard em 1939 [86] aplica o método semi-inverso para a função de tensão de Airy expressa no domínio complexo. A introdução de variáveis complexas na formulação de problemas de elasticidade bidimensional oferece significantes vantagens, pois em contraste com a teoria de função real, onde a escolha de funções que satisfaçam a equação bi-harmônica é de difícil obtenção, a formulação da teoria da elasticidade em variáveis complexas assegura que todas as funções que sejam analíticas são potenciais funções de tensão de Airy.

Embora o número de funções analíticas seja infinito, nem todas as funções complexas são analíticas. Uma função é analítica se, e somente se satisfizer as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re}Z}{\partial y} &= -\frac{\partial \operatorname{Im}Z}{\partial x} = -\operatorname{Im}Z' \\ \frac{\partial \operatorname{Im}Z}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{Re}Z}{\partial x} = \operatorname{Re}Z'\end{aligned}\tag{7}$$

onde Z representa uma função do tipo complexa, sendo Re a raiz real e Im a imaginária.

Considerando uma função de tensão de Airy da forma:

$$F(z) = \operatorname{Re}\tilde{Z}(z) + y\operatorname{Im}\tilde{Z}(z)\tag{8}$$

Em que

$$\frac{d\tilde{Z}}{dz} = \tilde{Z} \quad e \quad \frac{dZ}{dz} = Z$$

Os componentes de tensão cartesiana são obtidos através da segunda derivada da função de Airy com respeito às variáveis reais x e y . Estas relações ainda são válidas mesmo quando a função de tensão é expressa em termos da coordenada complexa z . Utilizando as relações de Cauchy-Riemann obtém-se a primeira derivada de $F(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \operatorname{Re}\tilde{Z} + y\operatorname{Im}Z \\ \frac{dF}{dy} &= -\operatorname{Im}\tilde{Z} + y\operatorname{Re}Z + \operatorname{Im}\tilde{Z} = y\operatorname{Re}Z\end{aligned}\tag{9}$$

Repetindo o processo para a segunda derivada, obtém-se as tensões cartesianas:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{d^2F}{dx^2} = \operatorname{Re}Z + y\operatorname{Im}Z' \\ \sigma_x &= \frac{d^2F}{dy^2} = \operatorname{Re}Z - y\operatorname{Im}Z'\end{aligned}\tag{10}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{d^2F}{dx dy} = -y \operatorname{Re} Z'$$

Considerando a trinca ao longo do eixo x conforme Figura 3.5, a parte imaginária torna-se nula e as tensões resultantes tornam-se as da Equação (11).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} Z \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

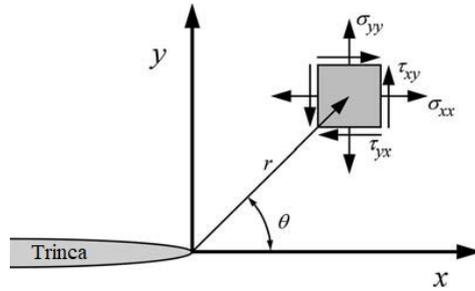


Figura 3.5 - Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca.

Fonte: Anderson [11]

O campo de tensões nas proximidades da trinca é definido pelo conjunto de equações apresentado na Tabela 3.1, em coordenadas polares com r e θ a distância e o ângulo em relação à ponta da trinca.

Tabela 3.1 - Campo de tensões próximo à trinca

Tensão	Modo I	Modo II	Modo III
σ_x	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	0
σ_y	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$	0
σ_z	0 (EPT) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (EPD)	0 (EPT) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (EPD)	0
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$	0
τ_{xz}	0	0	$-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$
τ_{yz}	0	0	$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$

Nota: ν – Coeficiente de Poisson; EPT – Estado Plano de Tensão; EPD - Estado Plano de Deformação

Já o campo de deslocamento nas proximidades da trinca é representado pelo conjunto de equações apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Campo de deslocamentos próximo à trinca

Desl.	Modo I	Modo II	Modo III
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$	0
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$	0
u_z	0	0	$\frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$

Nota: μ – módulo de cisalhamento; $\kappa = 3 - 4\nu$ (EPD) e $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (EPT)

Observa-se então que conhecendo os valores dos FIT's, é possível determinar tanto as tensões quanto os deslocamentos na ponta de uma trinca. Na literatura pode-se obter os valores dos FIT's para diversos casos já testados numericamente e experimentalmente, porém a maioria dessas soluções são para geometrias simples e/ou bem específicas [87]–[89]

Existe um valor de FIT crítico denominado Tenacidade à Fratura do material K_c , de forma que se o valor de K ultrapassar o valor de K_c haverá fratura frágil. Realizando uma analogia com a resistência dos materiais, assim como não se deseja o escoamento do material, é preciso manter as tensões abaixo da tensão de escoamento.

3.3 COMPLIANCE

A *compliance* é a grandeza que representa o inverso da rigidez. Matematicamente é determinada por:

$$C = \frac{\delta}{P} \quad (12)$$

sendo δ o deslocamento proveniente de uma carga P aplicada. Na Figura 3.6, $\delta = \Delta/2$.

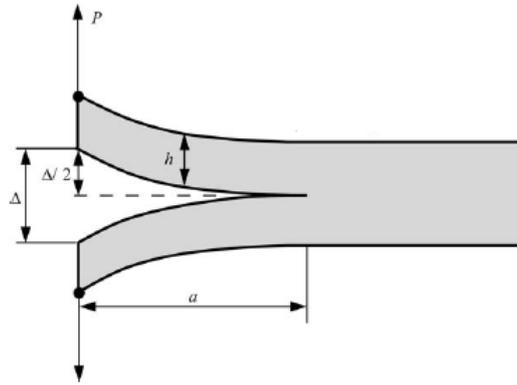


Figura 3.6 - Double cantilever beam (DCB) espécime solicitada à tração

Fonte: Anderson [11]

Aplicando este conceito em estruturas tem-se que a maioria das estruturas estão sujeitas à condição entre *load control* e *pure displacement control*. A situação intermediária pode ser esquematicamente representada por uma mola em série com uma estrutura entalhada (Figura 3.7). Fixando um deslocamento conhecido Δ_T , a mola representa a *compliance* do sistema C_M . A condição de *pure displacement control* corresponde à uma rigidez infinita, onde $C_M = 0$. Já a condição de *load control* implica uma mola sem rigidez e *compliance* infinita, $C_M = \infty$.

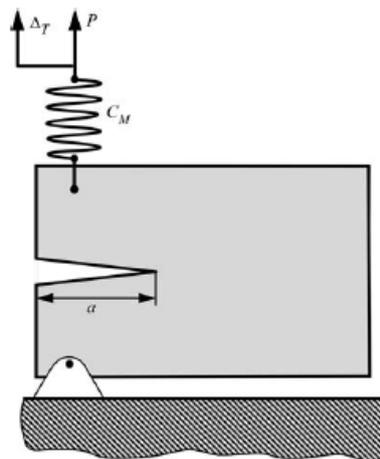


Figura 3.7 - Medição da *compliance* em estrutura entalhada

Fonte: Anderson [11]

Sendo a *compliance* finita, o ponto de instabilidade de fratura situa-se entre as condições de *load control* e *pure displacement control*.

3.4 ENERGIA DE FRATURA

De acordo com a primeira lei da termodinâmica, quando um sistema vai para um estado de não equilíbrio, há uma redução na energia. Uma trinca pode formar (ou uma trinca existente pode crescer) somente se tal processo causar a redução na energia total ou permanecer constante [11]. Assim, as condições críticas para fratura podem ser definidas como o ponto onde o crescimento da trinca ocorre sob condição de equilíbrio, sem mudança na energia total.

Considere a placa da Figura 3.4, com uma trinca central de tamanho $2a$ submetida à tensão σ . Assumindo a placa sendo infinita, ou seja $w \gg 2a$, para que haja o crescimento da trinca, deve haver energia potencial suficiente para superar a energia de superfície do material. O balanço energético de Griffith para um crescimento da trinca de área dA , sob condição de equilíbrio pode ser expressa como:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (13)$$

ou

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (14)$$

onde E é a energia total, Π a energia potencial fornecida pela energia de deformação interna e forças externas e W_s o trabalho requerido para criar novas superfícies.

Para o problema de trinca central, Griffith usou a análise de tensão de Inglis [90] para demonstrar que:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (15)$$

onde Π_0 é a energia potencial interna de uma placa sem trinca, σ a tensão aplicada, a o tamanho inicial a trinca, B a espessura da placa e E o módulo de elasticidade.

Para a formação da trinca requer a criação de duas superfícies, portanto, W_s é dado por:

$$W_s = 2 \times (2aB\gamma_s) = 4aB\gamma_s \quad (16)$$

sendo $2aB$ a área de uma superfície e γ_s a energia elástica de superfície do material. Tem-se então:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (17)$$

e

$$\frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (18)$$

Igualando as Equações (17) e (18), tem-se a tensão resistente de fratura dada por:

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (19)$$

A Equação (19) é válida somente para sólidos idealmente frágeis. Assim, Griffith obteve uma boa aproximação desta equação a dados experimentais de resistência de fratura de vidro, mas subestima a resistência de metais. O modelo generalizado de Griffith para qualquer tipo de energia de dissipação é dado por:

$$\sigma_f = \left(\frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$w_f = \gamma_s + \gamma_p$$

sendo γ_p a parcela de dissipação de energia plástica que ocorre na ponta da trinca em sólidos dúcteis (metais). Com isso, w_f é a energia de fratura que pode incluir plasticidade, viscoelasticidade ou efeitos viscoplásticos, dependendo do material.

Embora a adição do novo termo na equação de Griffith possibilitasse o estudo em sólidos dúcteis, o método ainda possuía limitações para o estudo de instabilidade de uma trinca ideal. O método também apresentava problemas em várias situações práticas, especialmente em situações com o crescimento lento estável de uma trinca como, por exemplo, em fadiga e no crescimento de trinca em meios corrosivos.

3.5 TAXA DE DISSIPACÃO DE ENERGIA (*ENERGY RELEASE RATE*)

Irwin [83] propôs uma aproximação energética para fratura definida como taxa de dissipação de energia G , que é uma medida da energia necessária para um incremento de extensão de trinca:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (21)$$

A propagação da trinca ocorre quando G alcança o valor crítico G_c :

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (22)$$

sendo G_c a medida de tenacidade à fratura do material.

Assim, os dois parâmetros que descrevem o comportamento da trinca foram introduzidos: a taxa de dissipação de energia G e o Fator de Intensidade de Tensão K . Enquanto o primeiro quantifica a mudança na energia potencial necessária para um incremento de trinca, o segundo caracteriza as tensões, deformações, e deslocamentos próximos à ponta da trinca. Assim, taxa de dissipação de energia descreve o comportamento global e o FIT é um parâmetro local. Para material linear elástico K e G são relacionados por:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}; G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}; G_{III} = \frac{K_{III}^2}{E'} \quad (23)$$

com os subscritos indicando o modo de fratura, e $E' = E$ para estado plano de tensão e $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ para estado plano de deformação.

3.6 INSTABILIDADE E CURVA R

Ocorre crescimento da trinca quando $G = G_c = 2w_f$, porém tal crescimento deve ser estável ou instável. Para ilustrar estabilidade ou instabilidade, é conveniente substituir $2w_f$ por R , a resistência do material para o tamanho da trinca. O gráfico R vs. *tamanho da trinca* é chamado curva de resistência ou curva R.

Considerando uma placa com uma trinca inicial $2a$ (Figura 3.4). Em uma tensão σ constante, a taxa de dissipação de energia varia linearmente com o tamanho da trinca conforme Equação (21). A Figura 3.8 mostra Curva R para dois tipos de materiais.

No primeiro caso (a) tem-se a curva R plana, onde a resistência do material é constante com o crescimento da trinca. Quando a tensão vale σ_1 , o crescimento é estável, até atingir o valor σ_2 em que a tensão aumenta com o crescimento da trinca, porém a resistência do material permanece constante, ocasionando propagação instável.

No segundo caso (b) tem-se um material com a curva R crescente. A trinca cresce uma pequena quantidade quando atinge o valor σ_2 , mas para de crescer pois quando a tensão é fixada em σ_2 esta aumenta em uma taxa menor que R. Crescimento de trinca estável continua até atingir o valor σ_4 , quando finalmente a tensão é tangente à curva R e a partir daí a inclinação é maior que a da curva R.

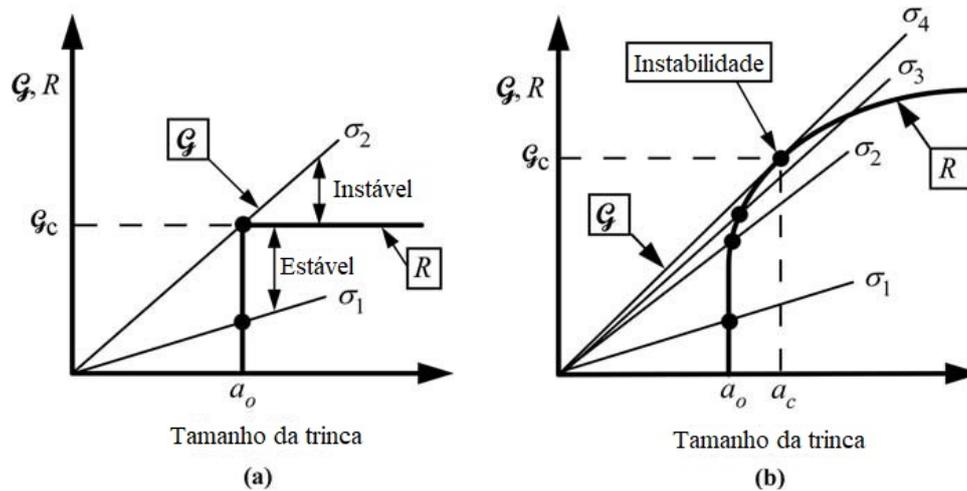


Figura 3.8 - Curvas R (a) plana, (b) crescente

Fonte: Anderson [11]

Condições para crescimento de trinca estável:

$$G = R$$

$$\frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da} \quad (24)$$

Crescimento de trinca instável ocorre quando

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \quad (25)$$

3.7 INTEGRAL J

Enquanto o FIT e taxa de dissipação de energia são parâmetros para análise de materiais lineares, a Integral J disseminou para análise de materiais não lineares. Com isso Rice [17] ampliou a base da Mecânica da Fratura para além dos limites da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

A utilização dos conceitos da MFLE apresenta resultados satisfatórios quando a Zona de Plasticidade (ZP) na ponta da trinca é relativamente pequena se comparada com as dimensões da peça estudada, podendo ser desconsiderada nas análises. Quando a ZP apresenta tamanho considerável, os conceitos da MFLE não se aplicam, uma vez que há deformações plásticas consideráveis atuando, sendo necessária a aplicação de outras metodologias para descrever o campo de tensões nas redondezas da trinca.

A Figura 3.9 mostra o comportamento da curva tensão-deformação de materiais elastoplásticos e elástico não-linear. Na fase de carregamento, o comportamento é idêntico, mas na fase de descarregamento estes apresentam respostas diferentes. O material elastoplástico segue um caminho linear com a inclinação igual ao Módulo de Elasticidade, enquanto o material elástico não linear segue o mesmo caminho da fase de carregamento.

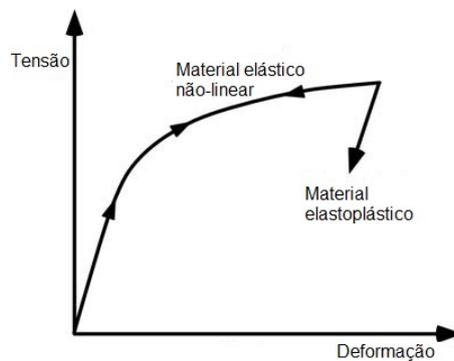


Figura 3.9 - Comparação de comportamento de materiais elastoplásticos e elástico não-linear

Fonte: adaptado de Anderson [11]

Rice [17] aplicou deformação plástica para análise de trincas em um material não-linear. Ele mostrou que a Integral J poderia ser escrita como uma integral independente do caminho - *path independent*. Hutchison [85] mostrou que J também pode caracterizar tensões e deformações na ponta da trinca em materiais não-lineares. Com isso, a Integral J pode tanto ser vista como parâmetro de energia quanto parâmetro de intensidade de tensão. Rice [17] ainda mostrou que o valor da Integral J é equivalente à taxa de dissipação de energia em um material elástico não linear. Considerando um caminho anti-horário (Γ) em volta da ponta da trinca, conforme Figura 3.10. A Integral J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{du_i}{dx} ds \right) \quad (26)$$

onde, w = densidade de energia de deformação, T_i = componentes do vetor tração, u_i = componentes do vetor deslocamento, ds = incremento de comprimento ao longo do caminho Γ .

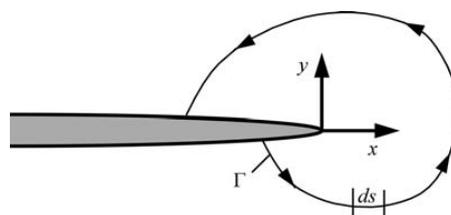


Figura 3.10 - Caminho arbitrário em volta da ponta da trinca

Fonte: Anderson [11]

3.8 DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA

Um dos métodos mais utilizados para definir a direção de propagação de trinca é o critério da Máxima Tensão Circunferencial [91]. Este critério considera que a direção de propagação da trinca é perpendicular ao plano da máxima tensão normal. Sabe-se que as tensões normais, máxima e mínima, ocorrem em planos onde a tensão cisalhante é nula. Pelo Princípio da Superposição Linear das equações dos Fatores de Intensidade de Tensão dos modos I e II apresentadas na Tabela 3.1, no plano cartesiano, tem-se:

$$\sigma_{xx}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (27)$$

$$\sigma_{yy}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (28)$$

$$\tau_{xy}^{TOTAL} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (29)$$

Reescrevendo as expressões para coordenadas polares, tem-se:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2}\right) \quad (30)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta\right) \quad (31)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)) \quad (32)$$

O critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC) estabelece que a trinca se propagará no plano perpendicular no qual σ_θ é máximo. Para isso, a condição que a tensão $\tau_{r\theta} = 0$ deve ser aplicada:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)) = 0 \quad (33)$$

Assim, há duas soluções:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0 \rightarrow \theta = \pm\pi \quad (34)$$

$$(K_I \sin \theta - K_{II} (3 \cos \theta - 1)) = 0 \quad (35)$$

Separando os modos I e II da Equação (35), temos para o modo I ($K_{II} = 0$):

$$K_I \sin \theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0 \quad (36)$$

Para o modo II ($K_I = 0$):

$$K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \rightarrow (3 \cos \theta - 1) = 0 \rightarrow \theta = \pm 70,5^\circ \quad (37)$$

Para o caso de modo misto I e II, da Equação (35), obtém-se:

$$\theta_t = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (38)$$

Com isso, é possível encontrar dois valores para a direção de propagação, geralmente descarta-se a solução de maior valor pois foge do sentido físico na análise de propagação. Os sinais das Equações (37) e (38) são dependentes do valor de K_{II} . Se K_{II} é positivo, então o valor de θ_t é negativo. Se K_{II} é negativo, então o valor de θ_t é positivo.

CAPÍTULO 4 - FADIGA

A fadiga é caracterizada por um processo de carregamento cíclico que causa progressivos danos cumulativos estruturais internos. Após certo número de ciclos as fissuras podem alcançar comprimentos críticos que podem tornar a estrutura instável e em alguns casos levar ao colapso. Segundo Bazant [13] o crescimento irreversível da trinca é atribuído ao comportamento inelástico do material na zona de singularidade gerando um dano acumulado que implica no endurecimento do material na vizinhança desta zona. Assim, o efeito de carregamento cíclico tem a característica de produzir a falha de um elemento com uma tensão inferior à necessária para o mesmo elemento sob carregamento estático.

4.1 TIPOS DE COMPORTAMENTO A FADIGA

Cargas de fadiga são divididos em duas categorias: baixo ciclo de carregamento e alto ciclo de carregamento. A principal diferença entre eles é a extensão da deformação plástica do material [92].

- Ciclo baixo de carregamento

A carga é aplicada com poucas repetições, mas com altas tensões que excedem o limite elástico do material, gerando grandes deformações plásticas em que a relação tensão-deformação não é mais proporcional. Por exemplo, a flexão de um clipe de papel até a ruptura. Nas estruturas, este tipo de carregamento é gerado por carregamentos sísmicos ou altas cargas de vento os quais são considerados no Estado Limite Último ou Especiais.

- Ciclo alto de carregamento

A carga é aplicada em um grande número de ciclos, mas as tensões são menores que as correspondentes ao limite elástico do material, mantendo a relação das tensões e deformações linear. Embora a estrutura como um todo ainda esteja no regime elástico, deformações plásticas infinitesimais (associadas com micro trincas internas) acumularão gradualmente com o crescimento do número de ciclos. Estas mudanças são responsáveis por causar degeneração

das propriedades mecânicas do material, o que leva a falha mesmo quando as cargas aplicadas são menores que a resistência estática [92].

A Tabela 4.1 ilustra alguns exemplos de estruturas classificando de acordo com os ciclos usuais de carregamentos.

Tabela 4.1 - Tipos de carregamento à fadiga (número de ciclos)

Carregamento baixo ciclo			Carregamento de alto ciclo				Carregamento de super-alto ciclo			
Regime inelástico			Regime elástico							
Estado Limite Último (ELU)			Estado Limite de Serviço (ELS)							
10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	
Estruturas sujeitas a terremoto			Pavimentos de aeroporto e pontes		Rodovias e trilhos		Estruturas de trânsito rápido em massa		Estruturas marítimas	

Fonte: adaptado de Liu et al. [92]

4.2 ESTÁGIOS DE FADIGA

- Estágio I: Inicia a fissuração a nível “micro” devido as imperfeições do material sem variações consideráveis nas tensões. Na Figura 4.1, o valor de ΔK_{th} marca o ponto no qual abaixo desse valor não há propagação de trinca.
- Estágio II: Formação de uma fissura “macro” que apresenta propagação estável da trinca, definido pela Lei de Paris.
- Estágio III: Os valores dos FIT’s são próximos ao fator crítico K_c , resultando numa propagação instável da trinca até ocasionar a fratura.

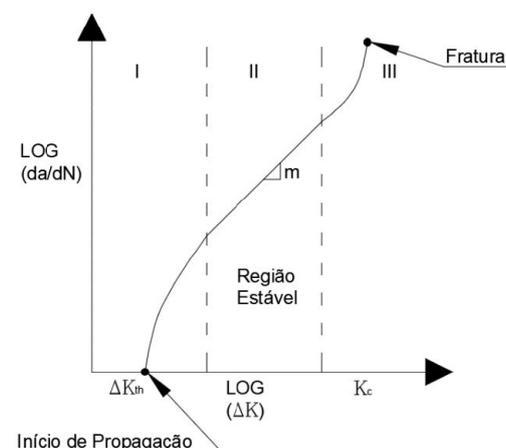


Figura 4.1 - Estágios de fadiga

Fonte: adaptado de Sanford [9]

4.3 LEI DE PARIS-ERDOGAN

Esta lei relaciona a taxa de propagação da trinca (da/dN) com a variação do Fator de Intensidade de Tensão (ΔK):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (39)$$

onde C e m são constantes do material, determinadas experimentalmente, a é o tamanho da trinca, N é o número de ciclos de carregamento e ΔK a variação do Fator de Intensidade de Tensão.

Esta lei é válida somente no Estágio 2 de Fadiga, ou seja, estágio com crescimento de trinca estável. Para isso, usualmente adota-se uma trinca inicial de tamanho a_0 geralmente na borda ou superfície do elemento de forma a haver concentração de tensão nesta área.

Usando Equação (39), a condição para comprimento de trinca aceitável a_{ac} é determinado por:

$$N = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_{ac}} \frac{da}{\Delta K^m} > N_{tot} \quad (40)$$

onde N é o número de ciclos necessários para aumentar a trinca do tamanho inicial a_0 até o comprimento de trinca aceitável a_{ac} e N_{tot} é o número de ciclos durante toda vida útil.

4.4 TOLERÂNCIA AO DANO

A análise do crescimento de trincas pode ser feita de duas formas: por meio de um procedimento analítico ou utilizando *softwares*. A Figura 4.2 ilustra uma sequência para análise de crescimento de trincas de acordo com o número de ciclos.

A Figura 4.3 mostra esquematicamente a evolução do dano e a correspondente diminuição da resistência residual. Em aeronaves tolerantes ao dano, o intervalo entre inspeções é definido baseado no comprimento de trinca aceitável. A partir do tamanho de trinca inicial possível de ser detectado por métodos convencionais, é calculado o número de ciclos até atingir um comprimento crítico. Este período de tempo (número de ciclos) aplicado um fator de segurança é definido como o intervalo de inspeção a ser adotado representado matematicamente por:

$$\frac{N_c - N_d}{FS} \quad (41)$$

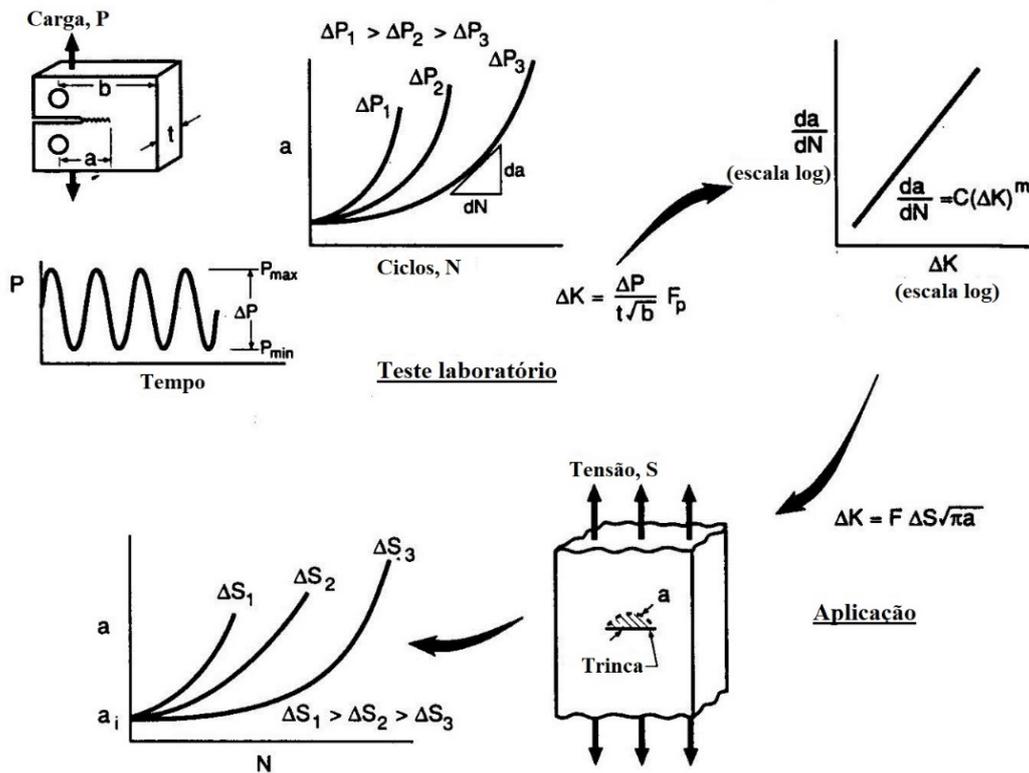


Figura 4.2 - Procedimento para análise do crescimento de trinca

Fonte: Baptista [93]

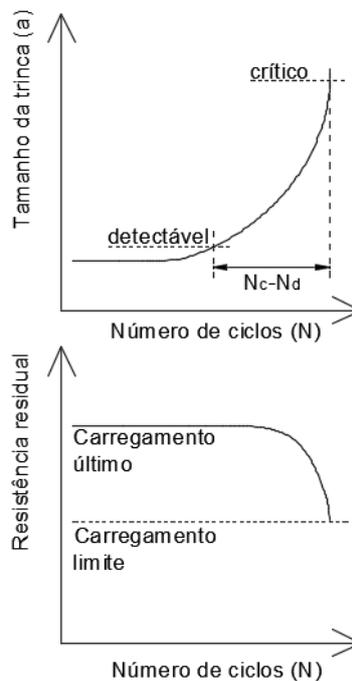


Figura 4.3 – Diagrama de tolerância ao dano de uma estrutura típica de aeronave

Fonte: Castro [94]

Quando ocorre a iniciação de trincas em mais de uma zona (MSD) a tolerância é reduzida e os intervalos de inspeções devem ser reformulados respeitando menor período de tempo conforme mostrado na Figura 4.4.

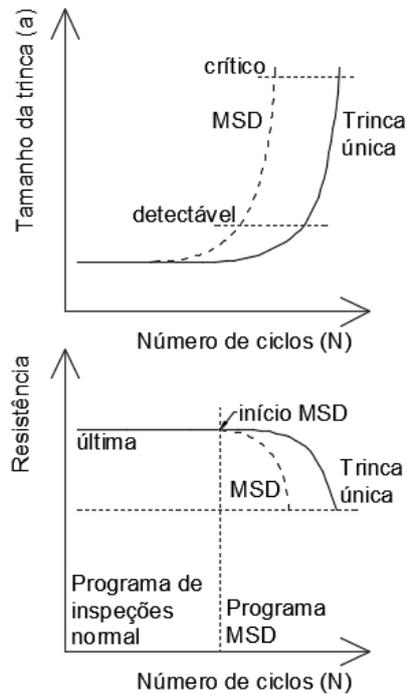


Figura 4.4 - Diagrama de tolerância no caso de *multiple site damage* (MSD)

Fonte: Castro [94]

CAPÍTULO 5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A técnica desenvolvida tem como pioneiros os trabalhos de Brebbia, Wrobel, Portela, Aliabadi et al [19], [20], [95]–[102] com destaque em aplicações por Gomes [103], [104], Dumont [105]–[107], Albuquerque [108], [109], Maciel [110] e muitos outros que demonstraram a validação e flexibilidade do método.

Se por um lado o Método dos Elementos Finitos (MEF) é provavelmente a principal técnica utilizada em análises de engenharia, destacando-se devido a sua grande versatilidade, a sua qualidade de resultados e a sua relativa facilidade de implementação [111], o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma alternativa complementar ao MEF, sendo indicado particularmente em casos especiais que requerem melhor interpretação e representação dos dados em problemas com concentração de tensões ou onde o domínio é infinito ou semi-infinito, por exemplo [95].

O MEC consiste em transformar a equação diferencial parcial, que representa o problema e suas incógnitas em uma equação integral que relaciona apenas os valores de contorno na busca de sua solução numérica. O cálculo dos valores das tensões ou deslocamentos nos pontos internos é feito de forma direta a partir dos dados encontrados primeiramente no contorno do corpo. Uma vez que todas as aproximações numéricas se dão apenas no contorno, a dimensionalidade do problema é reduzida em um, o que permite trabalhar com um sistema de equações bem menor do que aqueles obtidos com métodos diferenciais como MEF [95].

Para aplicação do MEC, discretiza-se o contorno do objeto em estudo em segmentos chamados de elementos. Quando este elemento possui apenas um nó, é dito como elemento constante e suas incógnitas também são constantes sobre o elemento. Já os elementos de contorno linear têm dois nós localizados nas extremidades do elemento, sendo suas incógnitas variando linearmente. Para a modelagem de geometrias curvas utilizam-se os elementos quadráticos, os quais possuem três nós e tem suas incógnitas variando sobre uma função de segundo grau ou quadrática. Estes elementos estão representados na Figura 5.1.

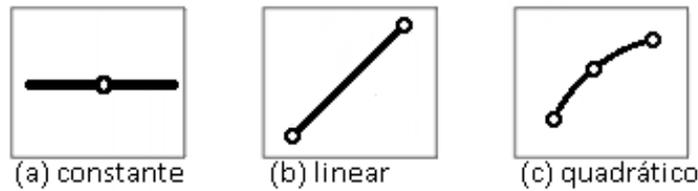


Figura 5.1 - Tipos de elementos de contorno

Fonte: Delgado Neto [112]

Na Figura 5.2 podemos ver um exemplo de sólido discretizado por elementos de contorno.

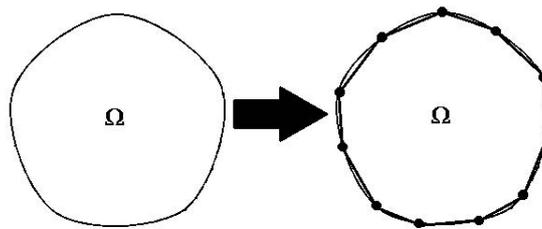


Figura 5.2 - Discretização do sólido em elementos de contorno

Os deslocamentos e forças de superfícies são representados em uma série de valores nodais. Os valores fora dos nós são obtidos através de funções de interpolação sobre cada elemento de contorno. Os deslocamentos e forças de superfície são representados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Phi^T \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p} &= \Phi^T \mathbf{p}^n \end{aligned} \quad (42)$$

onde, n é o número de nós do contorno e Φ as equações de interpolação.

Blandford [21] foi um dos primeiros a tentar aplicar a técnica dos elementos de contorno a problemas de análise incremental de extensão de trinca. Entretanto, a solução geral não pode ser alcançada com a aplicação direta pois a coincidência das superfícies da trinca geram um sistema de equações singular. As equações para um ponto em um lado da trinca são idênticas ao do outro ponto com mesma coordenada no outro lado visto que a mesma integral é aplicada com o mesmo caminho em ambos os pontos. Dentre as técnicas aplicadas para contornar este problema estão a divisão por subregiões [1] que modela a estrutura em contornos artificiais que conecta as trincas ao contorno de tal maneira que o domínio é dividido em subregiões sem trincas e o Método dos Elementos de Contorno Dual [2].

5.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

Esta técnica foi proposta por Portela et al. [19], [20] para contornar o problema de trincas na utilização do MEC. Ela é baseada em duas equações integrais distintas em cada face da trinca (equação de deslocamento e equação de tração). Desta forma, a degeneração do sistema de equações gerado pelo MEC não é mais presente e a necessidade de remalhamento na vizinhança da ponta da trinca não é necessária, gerando apenas novas linhas e colunas à matriz já existente.

5.1.1 Integral de contorno de deslocamento

Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deslocamentos em um ponto do contorno x' , as componentes de deslocamento da integral de contorno \mathbf{u}_i são dadas por:

$$\mathbf{c}_{ij}(x')\mathbf{u}_i(x') + CPV \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(x', x)\mathbf{u}_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}_{ij}(x', x)\mathbf{t}_j(x) d\Gamma(x) \quad (43)$$

sendo i e j componentes cartesianas; $\mathbf{T}_{ij}(x', x)$ e $\mathbf{U}_{ij}(x', x)$ as soluções fundamentais de Kelvin para força de superfície e deslocamento, respectivamente, $CPV \int_{\Gamma}$ o valor principal da integral de Cauchy e $\mathbf{c}_{ij}(x')$ coeficientes geométricos dado por $\delta_{ij}/2$ para contorno suave no ponto x' , sendo δ_{ij} o Delta de Kronecker.

As integrais na Equação (43) tornam-se regulares para r entre o ponto fonte x' e o ponto campo x não nulo. Quando r tende a zero, as soluções fundamentais apresentam forte singularidade proporcional a $1/r$ para \mathbf{T}_{ij} e singularidade fraca proporcional a $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ para \mathbf{U}_{ij} .

5.1.2 Integral de contorno de força de superfície

Na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deslocamentos e forças de superfícies em um ponto de contorno suave x' , as componentes de tensão σ_{ij} são dadas por

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} \mathbf{S}_{ijk}(x', x)\mathbf{u}_k(x) d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} \mathbf{D}_{ijk}(x', x)\mathbf{t}_k(x) d\Gamma(x) \quad (44)$$

sendo $HPV \int_{\Gamma}$ representa o valor principal de Hadamard. Os tensores $\mathbf{S}_{ijk}(x', x)$ e $\mathbf{D}_{ijk}(x', x)$ contêm derivadas de $\mathbf{T}_{ij}(x', x)$ e $\mathbf{U}_{ij}(x', x)$, respectivamente. De maneira similar à Equação (43), quando r tende a zero, \mathbf{S}_{ijk} apresenta uma hipersingularidade de ordem $1/r^2$ enquanto \mathbf{D}_{ijk} tem uma singularidade forte de $1/r$. Assim, a componente de força de superfície t_j em contornos suaves é representada por

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} \mathbf{S}_{ijk}(x', x)\mathbf{u}_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x')CPV \int_{\Gamma} \mathbf{D}_{ijk}(x', x)\mathbf{t}_k(x) d\Gamma(x) \quad (45)$$

Onde n_i representa o i ésimo componente da unidade externa normal ao limite no ponto x' .

5.1.3 Sistema de equações algébricas

Equações (43) e (44) são a base do Método dos Elementos de Contorno Dual e são transformadas em um sistema de equações algébricas lineares. As condições de contorno desconhecidas de forças de superfície e deslocamentos podem ser obtidas a partir da solução deste sistema de equações. Como o ponto fonte passa através de todos os nós do contorno, obtém-se o seguinte sistema:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \quad (46)$$

onde H e G são matrizes que contêm as integrais das soluções fundamentais T_{ij} e U_{ij} , respectivamente, no caso da Equação (43), ou integrais de S_{ijk} e D_{ijk} , respectivamente, no caso da Equação (45). Os vetores t e u contêm componentes das forças de superfícies e deslocamento nos nós de contorno, respectivamente. O sistema da Equação (46) pode ser representado por:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{By} = \mathbf{f} \quad (47)$$

sendo x o vetor contendo os valores desconhecidos de t_i e u_i , e y o vetor contendo as condições de contorno \bar{t}_i e \bar{u}_i . As matrizes A e B resultam do rearranjo de H e G . Com isso, uma solução única pode ser obtida a partir deste sistema de equações.

A aplicação deste método tem a grande vantagem de não necessitar de remalhamento quando ocorre incremento de trinca pois os incrementos são modelados com novos elementos gerando somente linhas e colunas à matriz existente. Sabendo que em volta da trinca há a *traction-free zone*, o lado direito do sistema de equações é somente estendido com os elementos correspondentes às variáveis introduzidas, como mostrado na Figura 5.3. Adotando o método da decomposição LU, a cada novo incremento de trinca somente as novas linhas e colunas

necessitam ser decompostas, as já existentes previamente decompostas em iterações anteriores permanecem, mostrando-se dessa forma como um poderoso método para análise computacional de fratura.

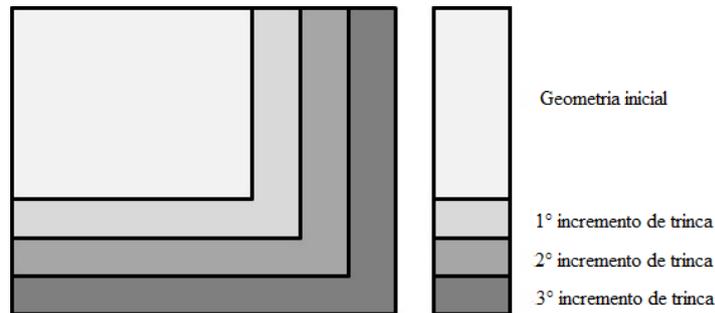


Figura 5.3 - Representação de novos elementos no sistema de equações a cada incremento

5.2 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

As ferramentas computacionais surgem como um meio para automatizar tarefas repetitivas e complexas, aumentando a eficiência e a produtividade. Elas podem processar grandes volumes de dados em um espaço reduzido de tempo, economizando horas de trabalho manual. Assim, este trabalho utiliza o BEMLAB2D como a interface gráfica que possibilita ao projetista desenhar modelos e o BEMCRACKER2D que é o programa de processamento e análise de dados por meio do MEC.

5.2.1 BEMLAB2D

O *software* BEMLAB2D é uma interface gráfica para manipulação de modelos bidimensionais de elementos de contorno, permitindo que informações geométricas, condições de contorno e atributos físicos possam ser gerenciados de forma eficiente e amigável evitando, assim, a tediosa tarefa do uso de arquivos de dados (Delgado Neto [112]). Este programa é totalmente implementado no ambiente de *software* Matrix Laboratory (MATLAB) e utilizou do módulo GUIA (Ambiente Gráfico de Desenvolvimento de Interface de Usuário) que foi usado para criar uma Interface Gráfica de Usuário (GUI) amigável. A interface do *software* é mostrada na Figura 5.4.

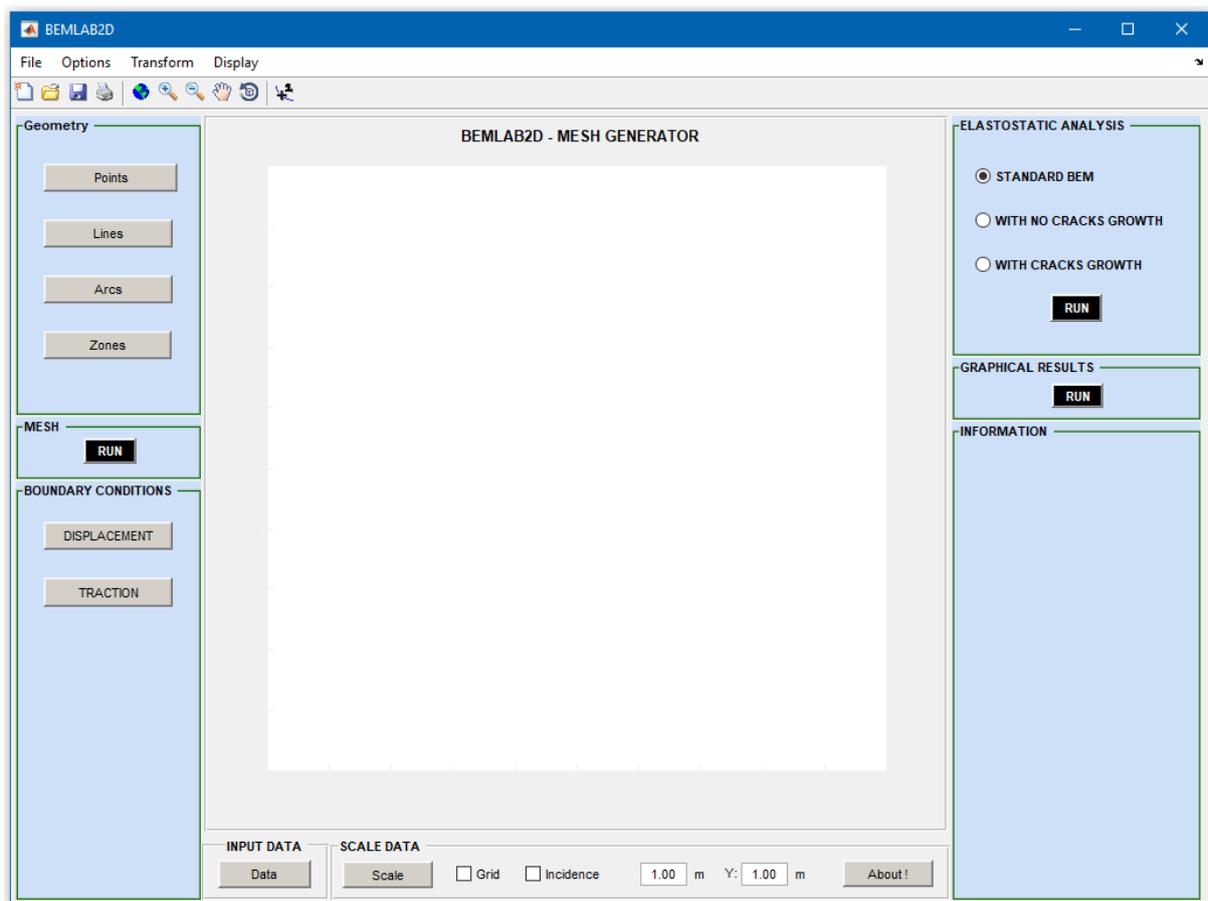


Figura 5.4 - Interface do BEMLAB2D

Como resultado o BemLab2D permite a geração de malha para Elementos de Contorno. As informações da malha e dos atributos são então passadas a um processador através de um arquivo de dados gerados na fase de pré-processamento.

O BemLab2D trabalha tanto como pré-processador quando na definição do modelo geométrico do problema, pela associação de atributos físicos à geometria e pela geração da malha de elementos de contorno, quanto como pós-processador quando utilizado para interpretar os dados fornecidos através de um arquivo de saída gerado pelo processador na análise numérica. A Figura 5.5 mostra a arquitetura de um sistema de análises de engenharia.

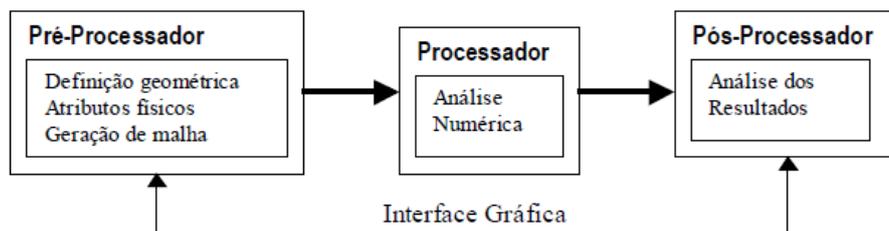


Figura 5.5 - Arquitetura de um sistema de análises de engenharia

Fonte: Gomes [103]

Esta interface gráfica para pré e pós-processamentos é capaz de representar modelos bidimensionais de elementos de contorno com as seguintes características [112]:

- Desenho do modelo 2D;
- Geração da malha (MEC/MEF) e *MESHLESS*;
- Atributos físicos e condições de contorno para MEC;
- Geração automática de arquivos de dados para análise com MEC, de informações de malha (coordenadas e topologia) para MEF e de coordenadas para métodos sem malha;
- Visualização de resultados diversos extraídos da análise com MEC;
- Interface com o programa BemCracker2D para análise via MEC.

5.2.2 BEMCRACKER2D

O BemCracker2D é o programa processador para análise elastostática de problemas 2D. Ele é escrito em linguagem C++ e todo estruturado nos conceitos da Programação Orientada à Objeto (POO) com objetivo de realizar análises por meio do Método dos Elementos de Contorno.

O BemCracker2D é solicitado através do BemLab2D em que o usuário informa qual tipo de processamento será realizado no solver que se compõe de três módulos de processamento:

1. MEC padrão (módulo I);
2. MECD Sem Propagação (módulo II);
3. MECD Com Propagação (módulo III)
 - Análise de Tensão com MEC
 - Avaliação de FITs (Integral J)
 - Avaliação da Direção/Correção do Crescimento da Trinca (Critério de Tensão Máxima)
 - Avaliação de Vida à Fadiga (Lei de Paris)
 - Coalescência ou *linkup* de múltiplas trincas

Este *software* foi desenvolvido por Gomes [103] a partir da modelagem do MEC padrão (equação de deslocamento e uso de elementos quadráticos contínuos) e Gomes [104] na estratégia da análise incremental desenvolvida por Portela [20] e Wrobel [113] para problemas envolvendo trincas. Baseado no diagrama de classes ilustrado na Figura 5.6, onde

BemCrk_BEMSYS é a classe motora do programa e principal elo de ligação com a interface BEMLAB2D.

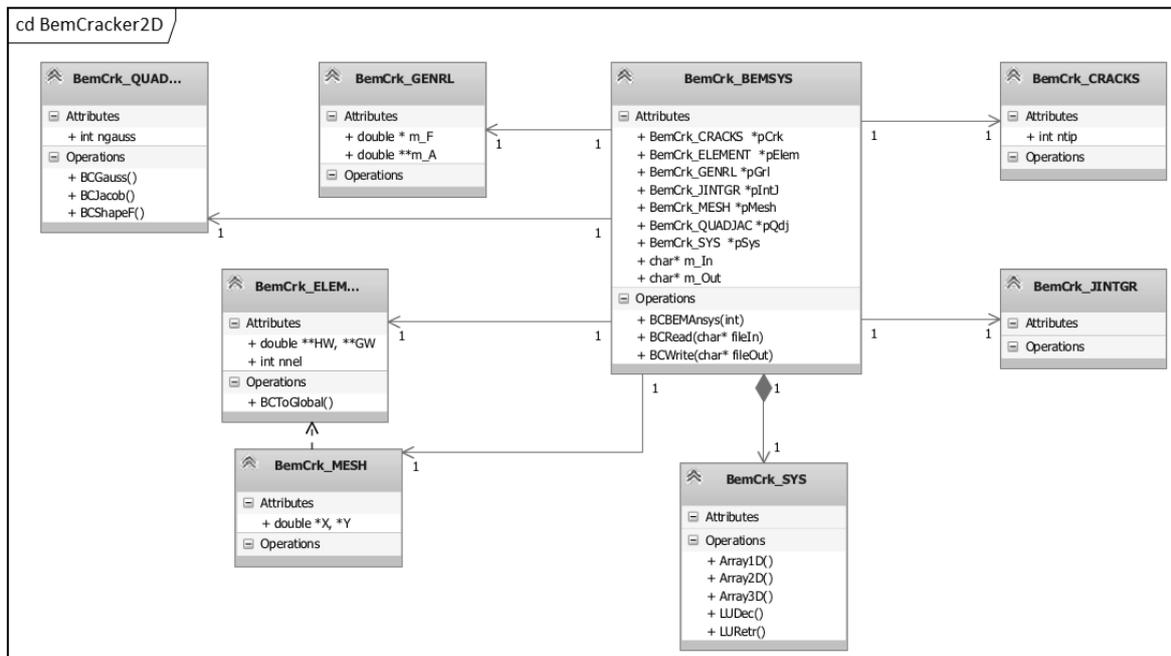


Figura 5.6 - Diagrama de classes do BemCracker2D

Fonte: Gomes [104]

Outras classes implementadas no BemCracker2D são interligadas a classe descrita anteriormente. Dentre elas tem-se a classe *BemCrk_GENRL*, responsável pela montagem do sistema de equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{By} = \mathbf{f}$; a classe *BemCrk_ELEMENT* desenvolve a montagem do elemento quadrático contínuo e descontínuo (C/D) do modelo gerado no BEMLAB2D; *BemCrk_MESH* é a classe que monta a malha do elemento (C/D) a partir dos elementos montados na classe anterior; a classe *BemCrk_QUADJAC* responsável por gerar os pontos de Gauss, o Jacobiano e as funções de forma (C/D) e ainda a *BemCrk_SYS* que é responsável pela alocação das matrizes e vetores e por resolver o sistema por LU.

As Classes relacionadas com modelos de propagação de trinca são as classes *BemCrk_CRACKS* e *BemCrk_IINTGR*, em que a primeira é responsável pela montagem do incremento de crescimento de trinca e a segunda é responsável por gerar os fatores de intensidade de tensão baseados na integral J. Para melhor esclarecer o entendimento da estratégia da análise incremental do crescimento da trinca tem-se a implementação do diagrama de sequências que pode ser visualizado na Figura 5.7.

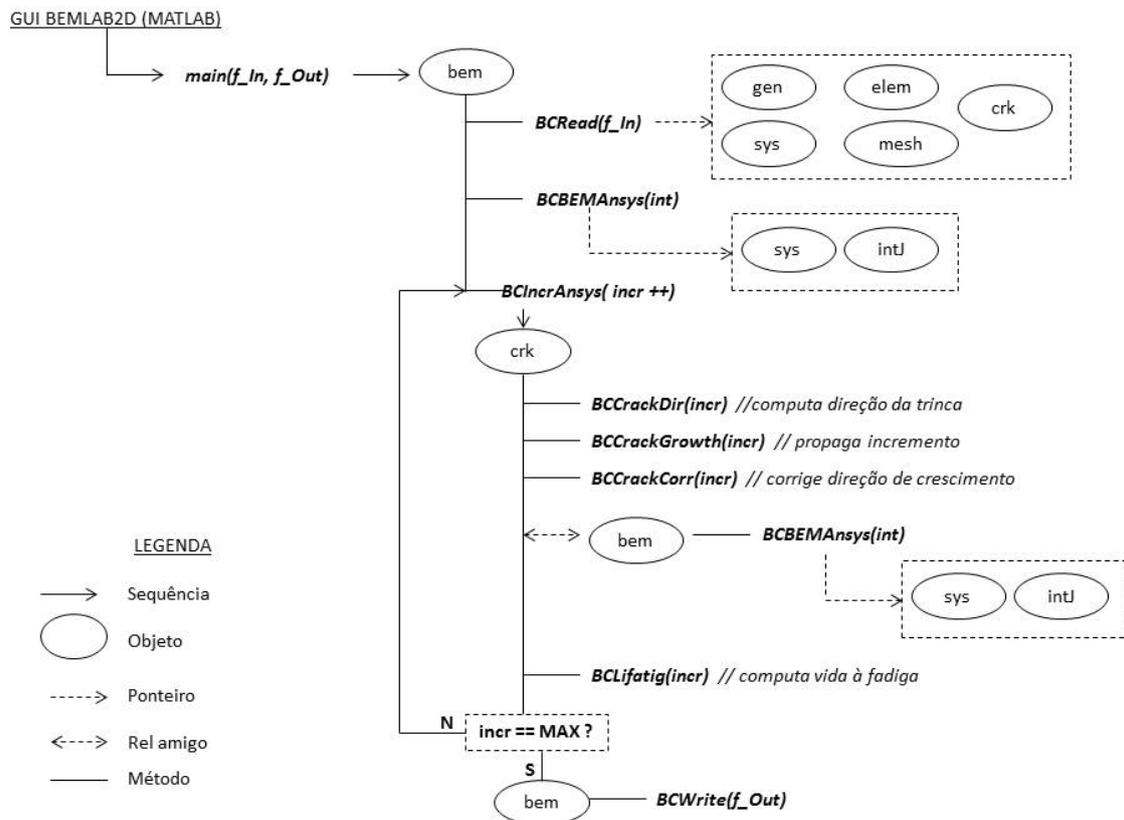


Figura 5.7 - Diagrama de seqüência do crescimento da trinca

Fonte: Gomes [104]

Para análise de problemas de Mecânica da Fratura, o BemCracker2D calcula tensões elásticas pelo MEC convencional e realiza análises incrementais da extensão da trinca por meio do MECD. Os fatores de intensidade de tensão (FIT) são computados para cada incremento através da integral-J, a direção de propagação pelo critério da máxima tensão circunferencial e a taxa de crescimento da trinca por uma equação modificada de Paris, que utiliza um FIT equivalente considerando os modos I e II de fratura. A utilização dos programas BEMLAB2D e BemCracker2D pode ser verificada em diversos trabalhos desde 2016, a saber [1]–[6], [28]–[31]

5.3 ESTATÍSTICA

As estruturas responderão ao carregamento de acordo com o tipo e a magnitude da carga aplicada e sua resistência e rigidez. Para estabelecer se a resposta é considerada satisfatória depende dos requisitos que devem ser satisfeitos. Isso inclui segurança da estrutura contra o colapso, limitações do dano ou de deflexão, ou outros critérios. Cada requisito é considerado

um estado limite. A violação de um estado limite é considerada como uma condição indesejada da estrutura. Alguns exemplos de Estado Limite são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Exemplos de Estados Limites

Estado Limite	Descrição	Exemplos
Último	Colapso de todo ou parte da estrutura	Ruptura, colapso progressivo, rótula plástica, instabilidade, corrosão, fadiga, incêndio
Dano		Trincas excessivas ou prematuras, deformação plástica permanente
Serviço	Perda do uso normal	Deflexões excessivas, vibrações, dano local, etc

Fonte: Melchers [114]

O estudo da confiabilidade estrutural considera o cálculo e predição da probabilidade da violação de um estado limite para um sistema estrutural em algum estágio durante a vida útil. Em particular, a segurança estrutural está relacionada com a violação do Estado Limite Último.

Considerando os carregamentos S resistido por uma resistência R , considera-se falha do elemento estrutural quando $S > R$. A probabilidade de falha p_f é então calculada como:

$$p_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P[G(R, S) \leq 0] \quad (48)$$

onde $G()$ é definida como uma função estado limite tal que a probabilidade de falha é igual à probabilidade da violação do estado limite.

Como exemplo, considerando as funções densidade f_R e f_S para R e S , respectivamente mostradas na Figura 5.8, tem-se o domínio de falha definido no domínio $G < 0$ e o domínio seguro definido em $G > 0$.

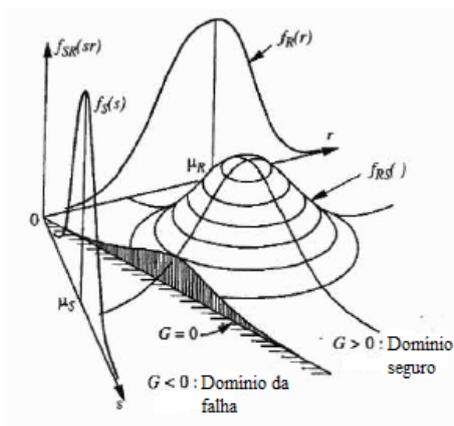


Figura 5.8 – Domínio de falha, junção de função densidade de duas variáveis aleatórias f_{RS} , funções densidades resistente e solicitante f_R e f_S , respectivamente

Fonte: Melchers [114]

5.3.1 Simulação Monte Carlo

A simulação Monte Carlo envolve amostragem e aleatoriedade para simular um grande número de experimentos e observar um resultado. No caso da análise de confiabilidade estrutural, tal experimento é repetido inúmeras vezes, com um vetor $\hat{\mathbf{x}}$ escolhido aleatoriamente de $\hat{\mathbf{x}}_i$ valores. Nestas tentativas, ocorrerá falha do elemento estrutural se houver violação do estado limite (isto é $G(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$). Assim, se N experimentos são conduzidos a probabilidade de falha é dada aproximadamente por:

$$p_f \approx \frac{n(G(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)}{N} \quad (49)$$

sendo $n(G(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)$ significa o número de tentativas n que $G(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0$.

Desse modo, a simulação de Monte Carlo representa um jogo de chance de propriedades probabilísticas conhecidas de maneira a deduzir um resultado requerido. Podendo assim ser utilizada como meio para avaliação da segurança estrutural, mais especificamente a probabilidade de falha.

CAPÍTULO 6 – MODELAGEM COMPUTACIONAL

Neste capítulo apresenta-se a técnica computacional desenvolvida para a otimização da vida à fadiga de peças de fuselagem de aeronave. A técnica é uma continuação do trabalho desenvolvido no mestrado [1]–[3] e apresenta as seguintes inovações: 1) os defeitos iniciais (R, L1 e L2) voltaram a ser considerados variáveis aleatórias ao avaliar mil iterações de tamanhos diferentes, sendo a tolerância ao dano avaliada para o pior caso; 2) otimização dos parâmetros físicos do material (C, m da Lei de Paris), de modo que o número mínimo de ciclos seja igual ao definido no projeto; e, finalmente, 3) obtenção da função objetiva otimizada que auxilia na definição do material a ser utilizado no projeto da fuselagem da aeronave. Para isso, a técnica desenvolvida é executada por um algoritmo que relaciona o BemLab e o BemCracker, em que o primeiro é a interface gráfica e o segundo é o programa de processamento.

Para isso, o algoritmo funciona da seguinte forma:

- 1) o usuário cria um modelo no BemLab e define o número de ciclos requerido (n^*);
- 2) o algoritmo calcula o campo de tensões na análise macro e localiza o pico de tensão antes de atingir a plastificação, viabilizando, assim, a análise elástica;
- 3) o algoritmo posiciona o elemento micro nesse pico de tensão e calcula o número de ciclos que a *compliance* atinge $3C$ (N_{3C});
- 4) o algoritmo, considerando os defeitos iniciais da fuselagem (R, L1, L2), obtém a série de parâmetros físicos do material a ser utilizado (C e m) que leva o número de ciclos da *compliance* mínima de instabilidade (N_{3C}) àquela definida pelo usuário (n^*).
- 5) por fim, obtém-se a função objetiva que relacione os parâmetros físicos do material (C e m) que resulte no número de ciclos seguro para toda a placa.

A função objetiva possui uma aplicação especial para os projetistas de aeronaves, que podem definir o material a ser utilizado para o número necessário de ciclos de carga. Por exemplo, se o projetista deseja atingir a instabilidade em $n^*=10^4$, a otimização mostrará quais séries de parâmetros físicos (C e m) o material precisa ter para levar o mínimo N_{3C} ao número de ciclos definido no projeto (n^*).

6.1 TÉCNICA COMPUTACIONAL

A técnica desenvolvida é dividida em duas análises: Macro, que destaca a localização onde ocorre o pico de tensão, e Micro, que destaca o número crítico de ciclos de vida em fadiga. Para fins de simplificação, o passo a passo da técnica será descrito abaixo.

1) Criação do modelo e definição do número de ciclos: Inicialmente, o projetista modela a fuselagem no BemLab, definindo os dados geométricos e solicitações externas.

Inicialmente, realiza-se a modelagem da fuselagem no BemLab, obtendo-se o arquivo *0.dat* (Apêndice A) que traz dados referentes aos parâmetros físicos e à malha de elemento de contorno, dentre eles estão as coordenadas nodais, topologia da malha, condições de contorno de tração e deslocamento etc. O modelo exemplo é o da Figura 6.1 que consiste em uma placa com solicitações externas normal $P = 10 \text{ MPa}$ e cisalhante $Q = 5 \text{ MPa}$, estes valores foram definidos somente para exemplificar, e restrição de deslocamento nos demais nós.

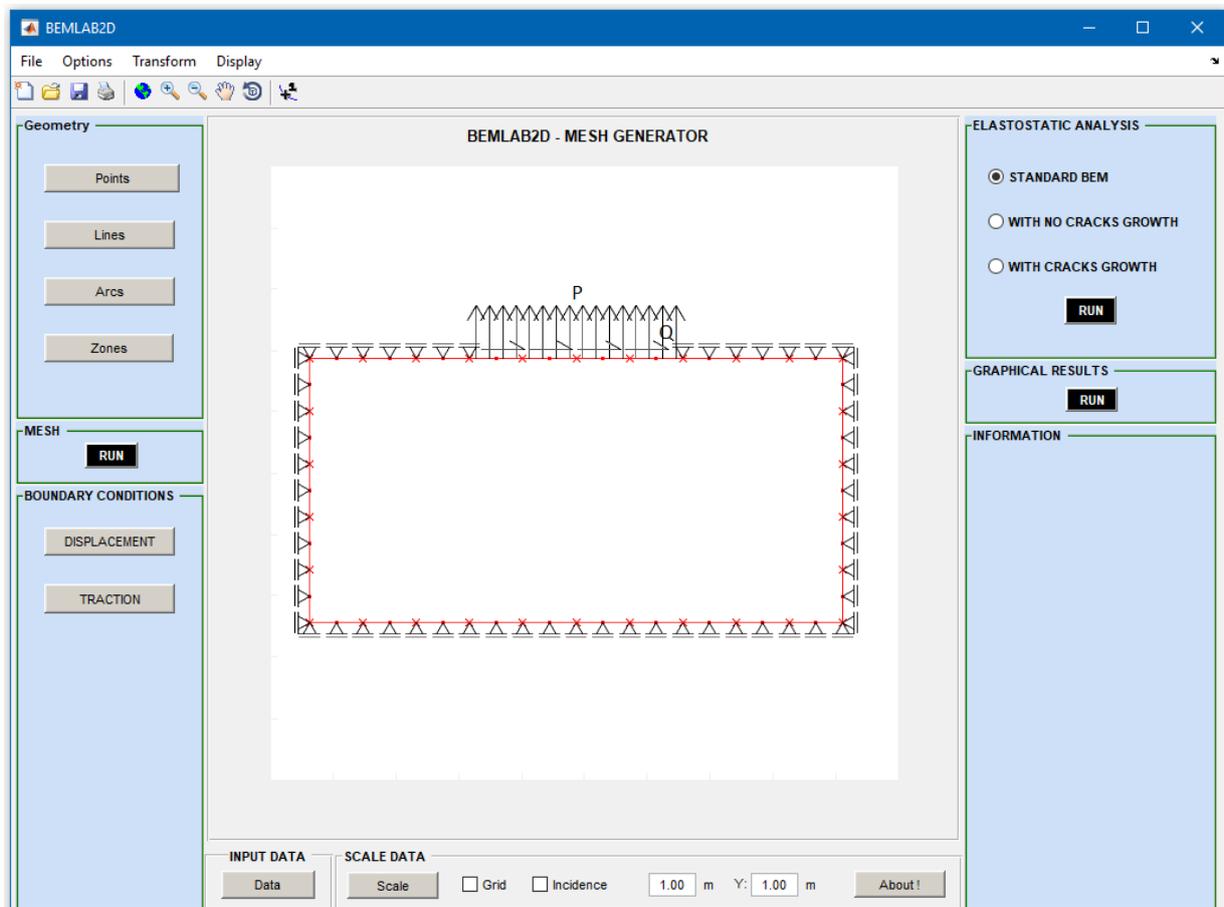


Figura 6.1 – Modelo Macro projetado no Bemlab

Após desenhar o modelo inicial, o projetista executa o programa principal *main.m*, em que nele define o número de ciclos requerido em projeto (n^*) e todo o restante do processo já está automatizado e é realizado pela máquina. Assim, a partir do modelo inicial, o algoritmo cria os pontos internos para o cálculo do campo de tensões, conforme o código abaixo, resultando na Figura 6.2 (Apêndice B). Para isso, ele altera o arquivo *0.dat* e inclui os pontos internos gerando o arquivo *1.dat*.

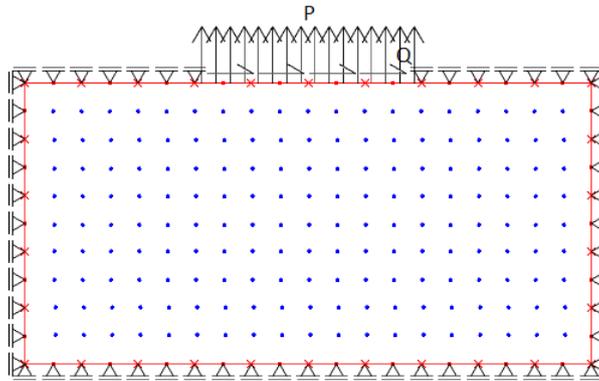


Figura 6.2 – Criação dos pontos internos

Logo após, o programa principal *main.m* executa o arquivo *1.dat* no BemCracker para o cálculo dos campos de tensões.

2) O algoritmo calcula o campo de tensão na análise macro e localiza o pico de tensão antes de atingir a plastificação, permitindo a análise elástica.

Dessa forma, ao processar o arquivo *1.dat* no BemCracker obtêm-se os campos de tensões internas do modelo macro. Assim, ao executar o exemplo, tem-se como resultado os campos de tensões das Figuras 6.3, 6.4 e 6.5.

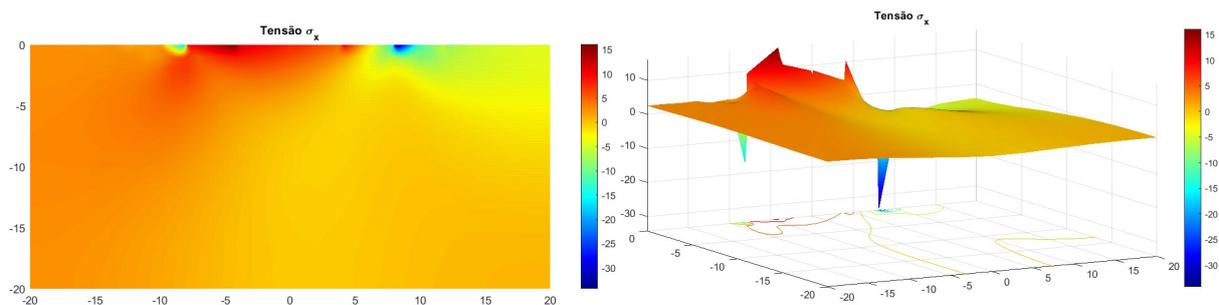


Figura 6.3 – Campo de tensão sigma x

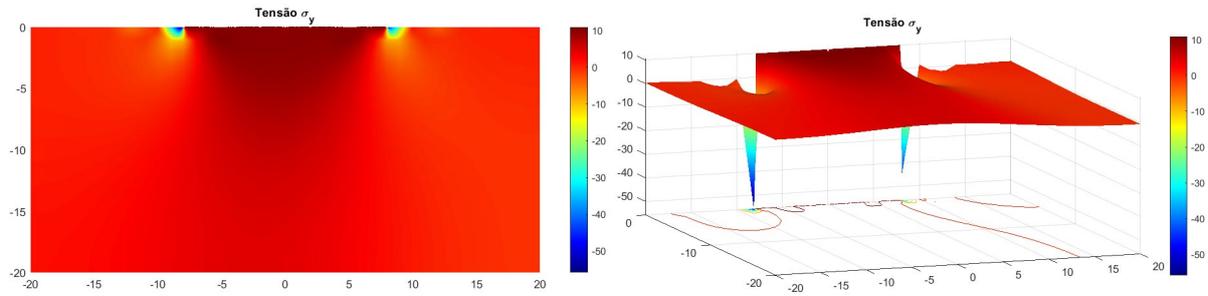


Figura 6.4 – Campo de tensão sigma y

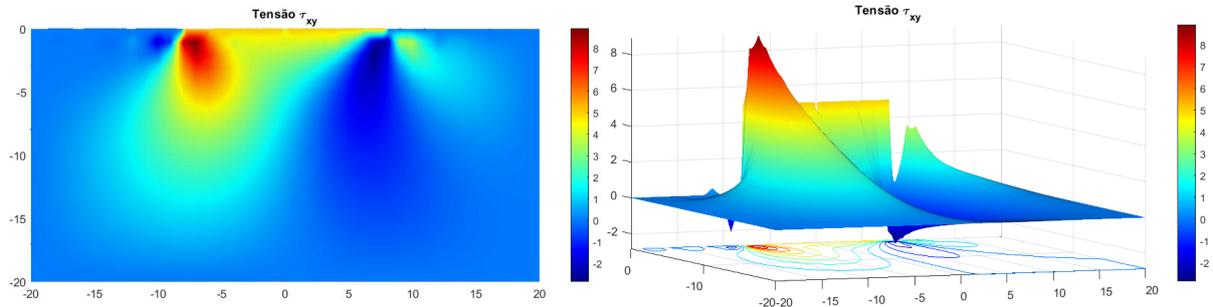


Figura 6.5 – Campo de tensão cisalhante

Com estes campos de tensões, necessita-se encontrar o local crítico, ou seja, um pico que considere as três tensões conjuntamente, para isso, utiliza-se o critério de Von Mises resultando na Figura 6.6. Destaca-se que o critério de Von Mises foi adotado somente para identificação do pico ainda no regime elástico, não há nenhuma análise de plasticidade, visto que o algoritmo é preconizado para o regime elástico. Desta forma, caso seja adotado outros critérios como o de Tresca etc. não haverá mudança significativa da posição do pico.

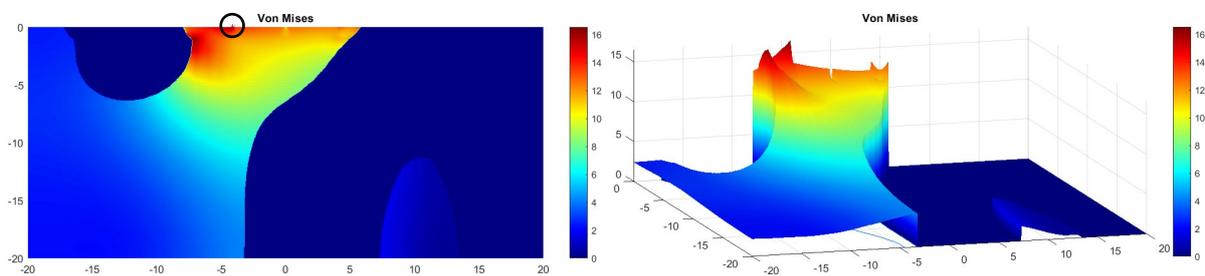


Figura 6.6 – Local do pico de tensão

Neste ponto do pico de tensão destacado na Figura 6.6, as tensões são:

σ_x (MPa)	16.1
σ_y (MPa)	10
τ (MPa)	5

Estas tensões são então aplicadas no modelo micro mostradas no item a seguir.

3) O algoritmo posiciona o microelemento nesse pico de tensão e calcula o número de ciclos em que a *compliance* atinge 3C (N3C).

O modelo micro representado tem forma quadrada com tamanho de borda de 1 cm com falhas iniciais caracterizadas por um furo central de raio r e duas trincas com tamanhos $L1$ e $L2$ representado as trincas superior e inferior, respectivamente. O tamanho do modelo micro e dos defeitos iniciais estão entre os principais problemas em uma análise em múltiplas escalas, especialmente em técnicas nas quais as quantidades físicas são transferidas da microescala para a escala global, conforme realizado nas técnicas de homogeneização [115]. Inúmeros pesquisadores abordaram esse problema ao longo dos anos [116]–[120]. Neste trabalho, os valores utilizados refletem o tamanho efetivo de supostas falhas iniciais, no entanto, a metodologia probabilística adotada juntamente com o método do elemento de contorno – utilizando o BemCracker2D – permitem que os defeitos iniciais sejam modelados sob diferentes tamanhos.

Nesta linha, a análise micro é realizada no local de pico do campo de tensões, pois, por ser a situação mais desfavorável, todas as outras posições naturalmente seriam atendidas. Ainda seguindo o exemplo adotado, o pico está mostrado na Figura 6.6 e o posicionamento do modelo micro está demonstrado na Figura 6.7.

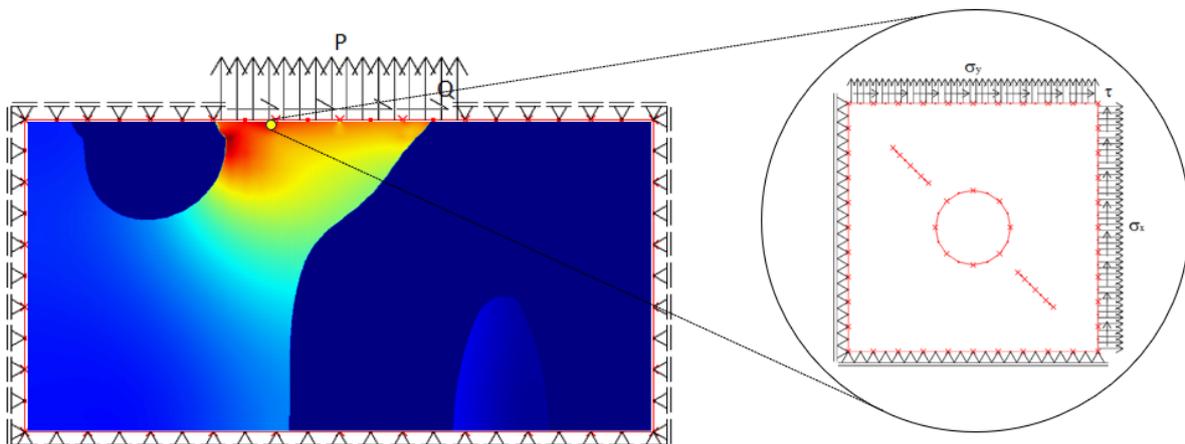


Figura 6.7 – Posição do modelo micro

Neste caso, as tensões são obtidas do campo de tensões neste ponto e aplicadas na borda direita e superior com Razão de Carga de Fadiga (R) de 0,5 e restrição de deslocamento nas bordas esquerda e inferior, Figura 6.8. Para a modelagem foram considerados 64 elementos e 128 nós geométricos, com elementos contínuos quadráticos dispostos nas bordas e no furo

circular central e elementos descontínuos quadráticos representando as trincas na proporção 0,2-0,3-0,3-0,2. Os elementos foram distribuídos da seguinte forma: 10 em cada borda externa somando 40, com distância de 0,05 entre eles; 8 no furo circular central e 8 em cada trinca, conforme Figura 6.9. O modelo micro está representado no arquivo *2.dat*.

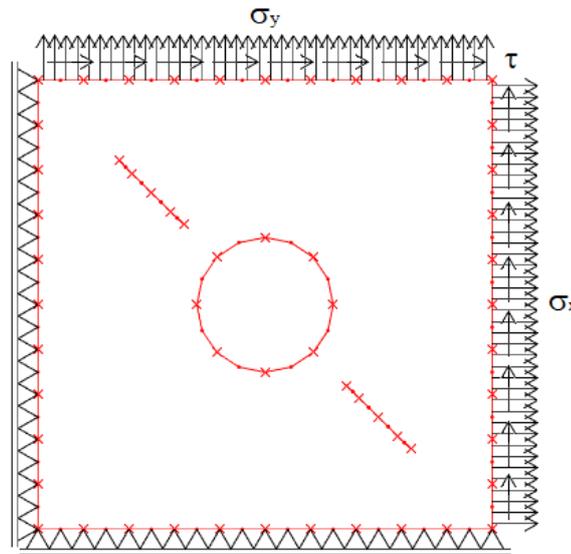


Figura 6.8 - Exemplo do modelo micro

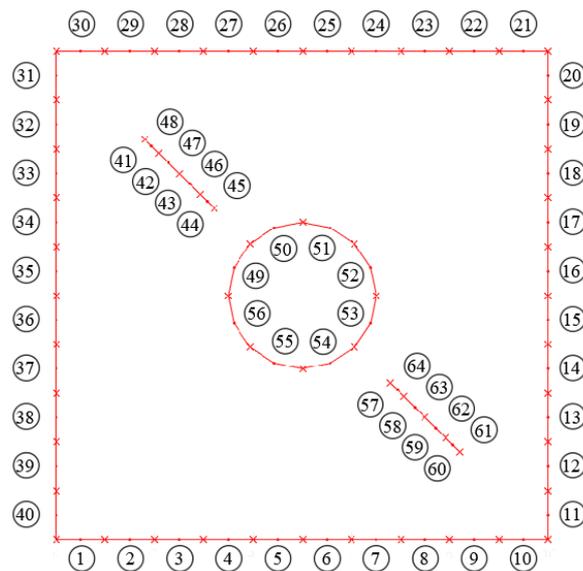


Figura 6.9 - Distribuição da malha de MEC

Para a análise, adotou-se incremento de trinca de 0,02 cm até o último incremento antes de atingir uma borda. O número de ciclos necessário para cada incremento é calculado pela Lei de Paris. Ao executar cada propagação de trinca, o BemCracker traz o resultado do número de ciclos (Figura 6.10) e deslocamento da malha de contorno para cada incremento (Figura 6.11).

Com estes resultados, calcula-se a *compliance* a partir da média dos deslocamentos de cada borda e a respectiva tensão na borda considerada (direita ou superior) seguindo os passos da Figura 6.12, obtendo-se então os pontos para a formação do gráfico número de ciclos x *compliance* (Figura 6.13).

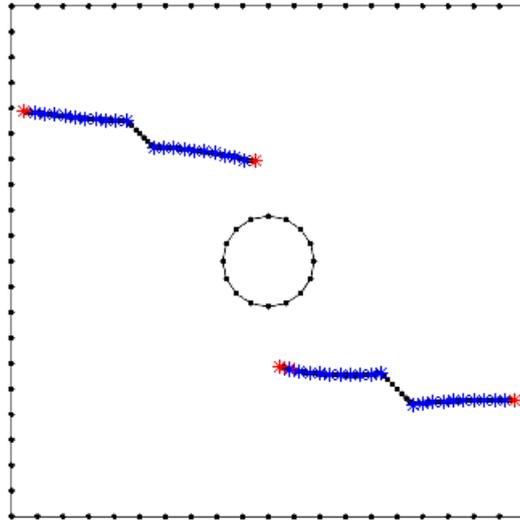


Figura 6.10 – Incrementos de trinca

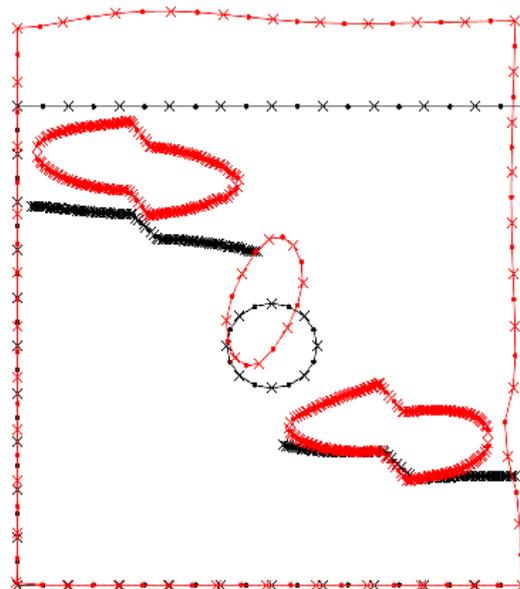


Figura 6.11 – Malha deformada

Cada ponto da Figura 6.13 (da esquerda para direita) representa um incremento de trinca da Figura 6.10. A *compliance* inicial, antes da propagação de trincas, está no eixo das abcissas, com a propagação das trincas a placa vai perdendo rigidez aumentando exponencialmente a relação *compliance* x ciclos. A partir destes pontos, cria-se um *curvefit* correspondente ao

spline no Matlab resultando nas curvas da Figura 6.14. Com as curvas, obtém-se o número de ciclos que corresponde a 2 x *compliance* inicial e 3 x *compliance* inicial. Considera-se instável o número de ciclos referente a 3 x *compliance* inicial, pois a partir deste ponto a *compliance* já tende ao infinito.

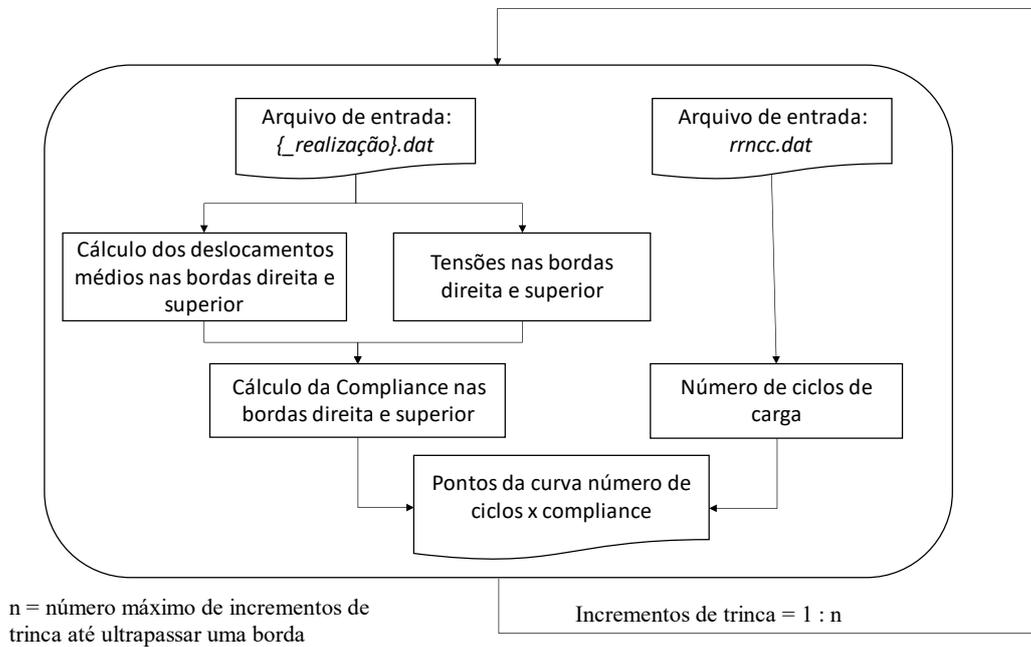


Figura 6.12 - Fluxograma para obtenção da relação número de ciclos x *compliance* a cada incremento

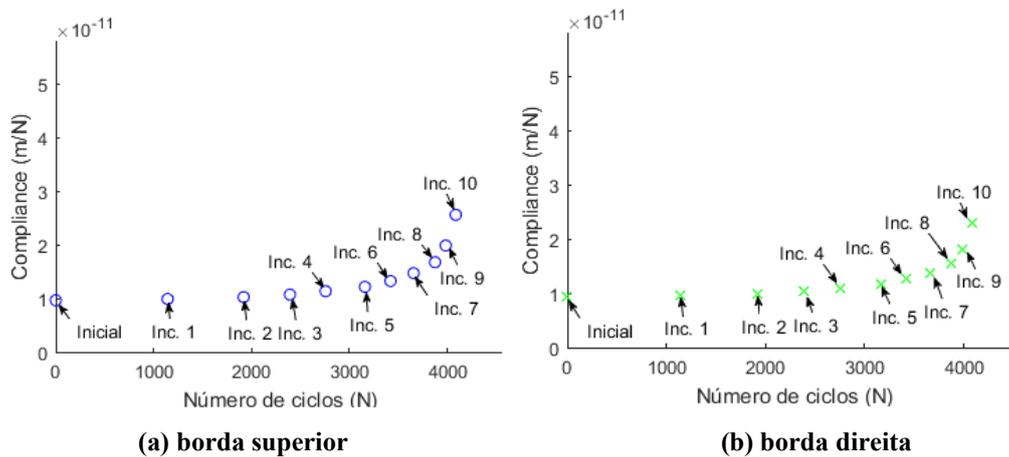
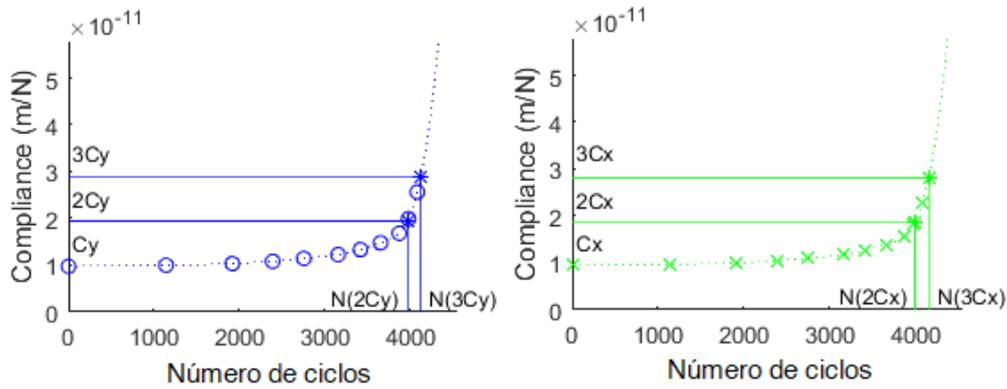


Figura 6.13 - Pontos da relação número de ciclos x *compliance* a cada incremento



(a) borda superior

(b) borda direita

	C_y	$2C_y$	$N(2C_y)$	$3C_y$	$N(3C_y)$
C1 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	3.9669e+03	2.9018e-11	4.1257e+03

	C_x	$2C_x$	$N(2C_x)$	$3C_x$	$N(3C_x)$
C1 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	3.9967e+03	2.8144e-11	4.1554e+03

Figura 6.14 - Curvas número de ciclos x *compliance*

Estes resultados se referem à Ponta 1 da Trinca 1 (Crack 1 Tip 1) de acordo com a Figura 6.15. Nas realizações analisadas foram avaliados os resultados dos números de ciclos para as quatro pontas de trincas, em que C1 T1 significa Trinca 1 Ponta 1; C2 T2, Trinca 2 Ponta 2, e assim sucessivamente, resultando nos gráficos mostrados na Figura 6.16. Para efeito de tolerância ao dano, deve-se considerar o menor número de ciclos que atinge a instabilidade em $3 \times$ *compliance* inicial (N_{3C}), visto que a escolha do menor se baseia a favor da segurança. No caso do exemplo da Figura 6.16, $N_{3C} = 1.8636e+03$.

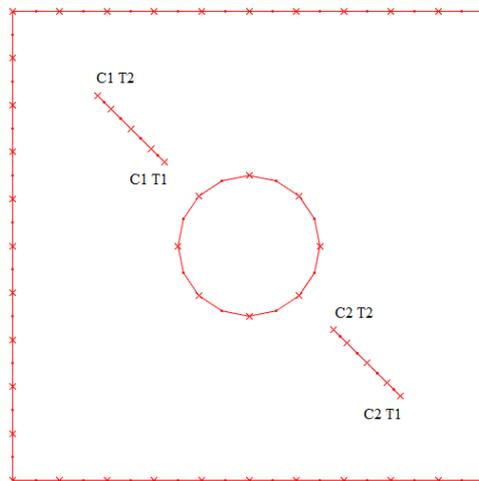
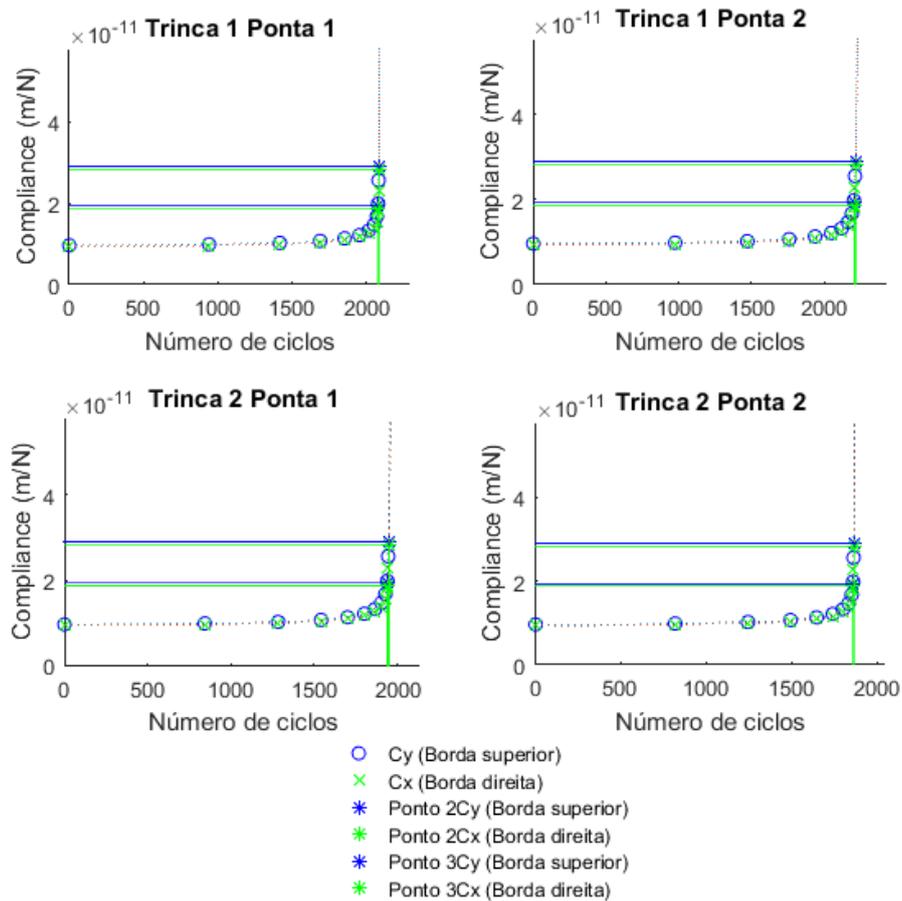


Figura 6.15 - Pontas de trinca



	Cy	2Cy	N (2Cy)	3Cy	N (3Cy)
C1 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	2.0804e+03	2.9018e-11	2.0848e+03
C1 T2	9.6728e-12	1.9346e-11	2.2020e+03	2.9018e-11	2.2131e+03
C2 T1	9.6728e-12	1.9346e-11	1.9368e+03	2.9018e-11	1.9454e+03
C2 T2	9.6728e-12	1.9346e-11	1.8601e+03	2.9018e-11	1.8636e+03

(i) Borda superior

	Cx	2Cx	N (2Cx)	3Cx	N (3Cx)
C1 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	2.0812e+03	2.8144e-11	2.0856e+03
C1 T2	9.3814e-12	1.8763e-11	2.2043e+03	2.8144e-11	2.2150e+03
C2 T1	9.3814e-12	1.8763e-11	1.9386e+03	2.8144e-11	1.9469e+03
C2 T2	9.3814e-12	1.8763e-11	1.8607e+03	2.8144e-11	1.8643e+03

(ii) Borda direita

Figura 6.16 - Número de ciclos x *compliance* das bordas para o elemento na posição 2

Os passos de 1 a 3 podem ser encontrados em [1]. As inovações são mostradas a partir do passo 4.

4) O algoritmo, considerando os defeitos iniciais da fuselagem (R, L1, L2), obtém a série de parâmetros físicos do material a ser utilizado (C e m) que leva o número de ciclos da *compliance* mínima de instabilidade (N_{3C}) ao valor definido pelo usuário (n^*).

Neste passo, o algoritmo gera valores aleatórios para os defeitos iniciais (R, L1 e L2) resultando em mil combinações com estatísticas representadas na Tabela 6.1 seguindo uma distribuição lognormal.

Tabela 6.1 – Estatísticas das variáveis R, L1 e L2

Variável aleatória	Média	Desvio padrão	Coefficiente de variação
R (cm)	0.1	2.0e-02	0.23
L1 (cm)	0.1	1.9e-02	0.22
L2 (cm)	0.1	1.9e-02	0.22

6.1.1 Análise para uma combinação

Ao processar uma combinação de R, L1 e L2 variando C e m da Lei de Paris em um *grid* no domínio de $C = [5e-11, 10e-11]$ e $m = [2.5, 3.0]$, obtém-se os pontos que relacionam C e m ao número de ciclos, conforme mostrado na Figura 6.17 (a). Nela, cada ponto verde se refere a um valor de $N(3C)$ mínimo da Figura 6.16, tal que variando os valores de C e m, há um novo $N(3C)$ mínimo e um novo ponto verde. Ao interpolar os pontos, obtém-se a superfície que relaciona C e m com o número de ciclos $N(C,m)$, como mostrado na Figura 6.17 (b).

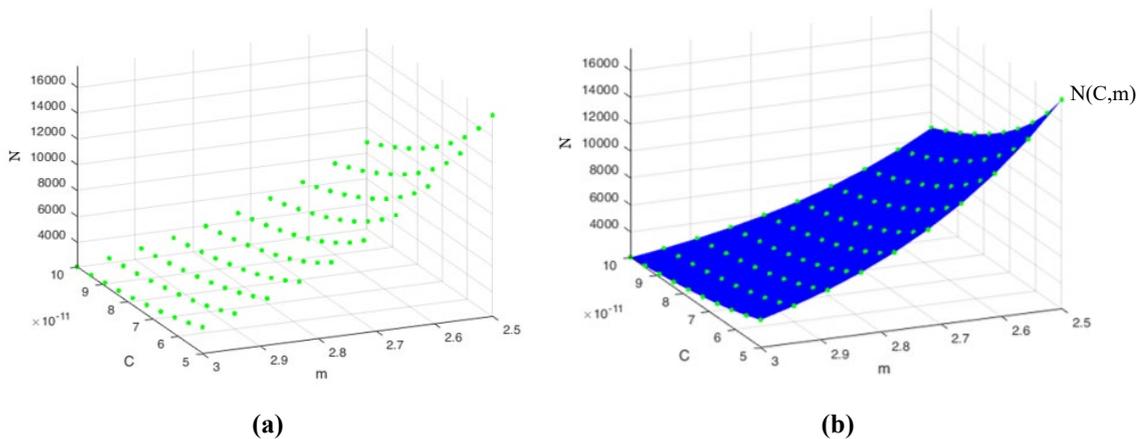


Figura 6.17 – Pontos da relação entre C, m e o número de ciclos

Para encontrar os valores das constantes de Paris (C, m) que levam o número de ciclos resistido $N(C,m)$ ao exigido pelo projeto (n^*), deve-se encontrar a interseção entre estas curvas. Por exemplo, considerando o número de ciclos definido no projeto como $n^*=10.000$ ciclos, a interseção é mostrada na linha vermelha, conforme Figura 6.18 (a). Por outro lado, a Figura 6.18 (b) mostra a curva no plano C x m que indica os valores de C e m que o material

deve ter para suportar o número de ciclos solicitado pelo usuário, resultando no gráfico de C e m da Figura 6.19, suportando 10.000 ciclos.

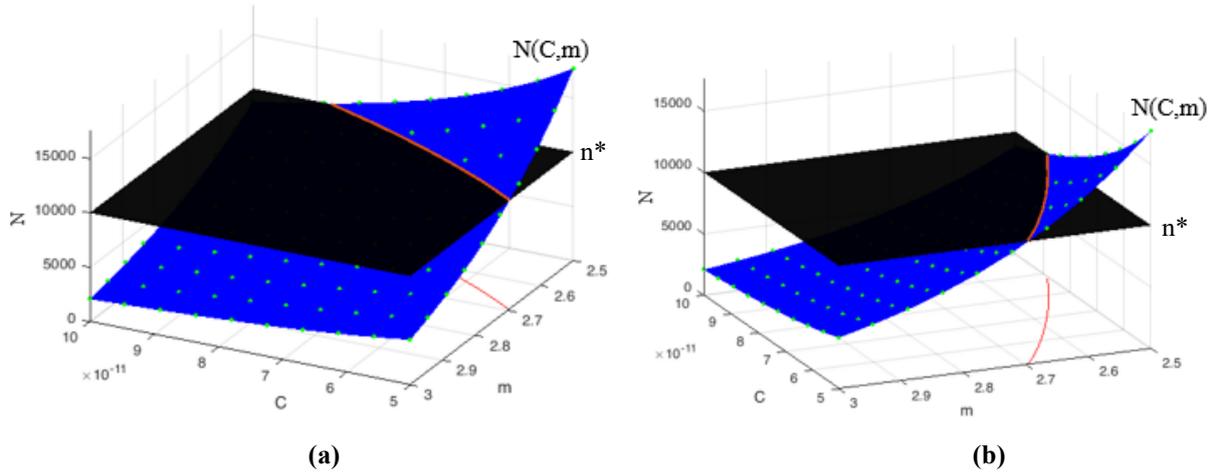


Figura 6.18 – Interseção entre a superfície $N(C, m)$ e o número de ciclos de projeto

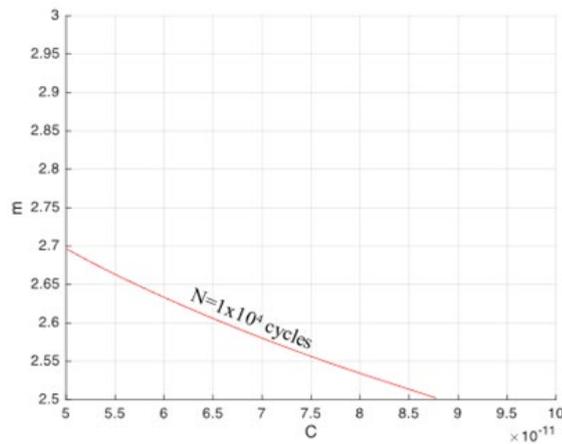


Figura 6.19 – Relação (C, m) que resulta no número de ciclos de projeto 10^4

Além disso, ao modificar o valor do número de ciclos de projeto n^* (superfície preta na Figura 6.18), é possível obter a variação de C e m para cada valor solicitado de n^* no projeto, conforme mostrado na Figura 6.20.

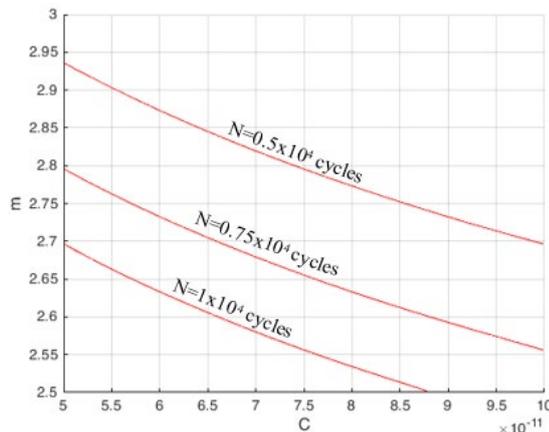


Figura 6.20 – Relação (C, m) que resulta no número de ciclos de projeto 0.5×10^4 , 0.75×10^4 e 1×10^4

6.1.2 Análise das mil combinações

De fato, observa-se que cada combinação de defeitos iniciais (R, L1, L2) leva a uma curva $N(C,m)$ distinta. Essa característica é ilustrada na Figura 6.21, que apresenta três exemplos de combinações (C1, C2, C3) da Tabela 6.2. Cada combinação gera uma curva $N(C,m)$ única, refletindo a influência dos parâmetros iniciais do defeito na vida à fadiga da estrutura da fuselagem. A variabilidade nas curvas $N(C,m)$ enfatiza a importância de considerar diferentes combinações de defeitos iniciais na análise. Assim, diferentes padrões de defeitos podem impactar a relação entre C, m e o número de ciclos, ressaltando a necessidade de estudos abrangentes e probabilísticos para avaliar a tolerância a danos para diversos cenários.

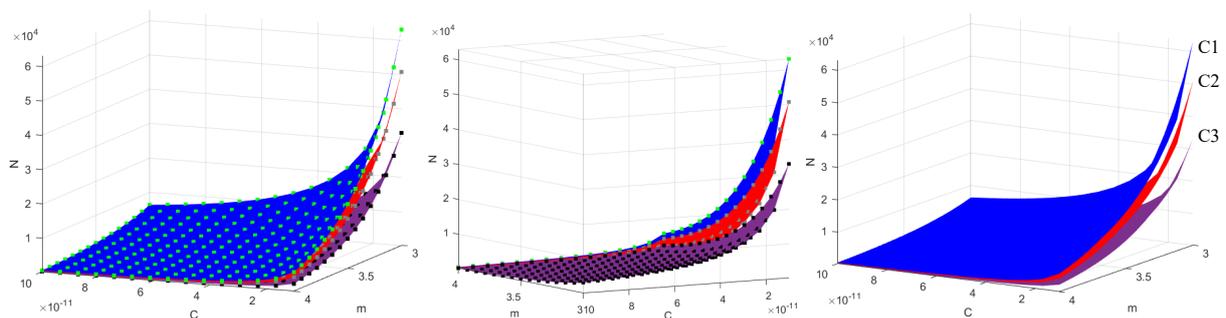


Figura 6.21 – Curvas $N(C,m)$ para três combinações de defeitos iniciais (C1, C2 e C3)

Tabela 6.2 – Valores de defeitos iniciais para combinações 1, 2 e 3

Variável aleatória	Combinação 1 (curva azul)	Combinação 2 (curva vermelha)	Combinação 3 (curva roxa)
R (cm)	0.088	0.073	0.086
L1 (cm)	0.111	0.081	0.093
L2 (cm)	0.130	0.105	0.119

Essas três curvas cruzam o número de ciclos requerido ($n^*=10^4$) em diferentes interseções, como mostra a Figura 6.22. O pior cenário é representado pela curva inferior, pois as curvas mais altas podem suportar um maior número de ciclos para a mesma combinação de C e m em comparação com a curva inferior. Consequentemente, a adoção do pior cenário é favorável à segurança, pois corresponde à menor curva $N(C,m)$ entre as mil combinações analisadas. Ao considerar o pior cenário, os projetistas priorizam a segurança e garantem que a combinação escolhida dos valores de C e m suportará o número de ciclos requerido. Esta abordagem responde por possíveis variações nos padrões iniciais de defeitos e garante a integridade estrutural e confiabilidade da fuselagem sob fadiga.

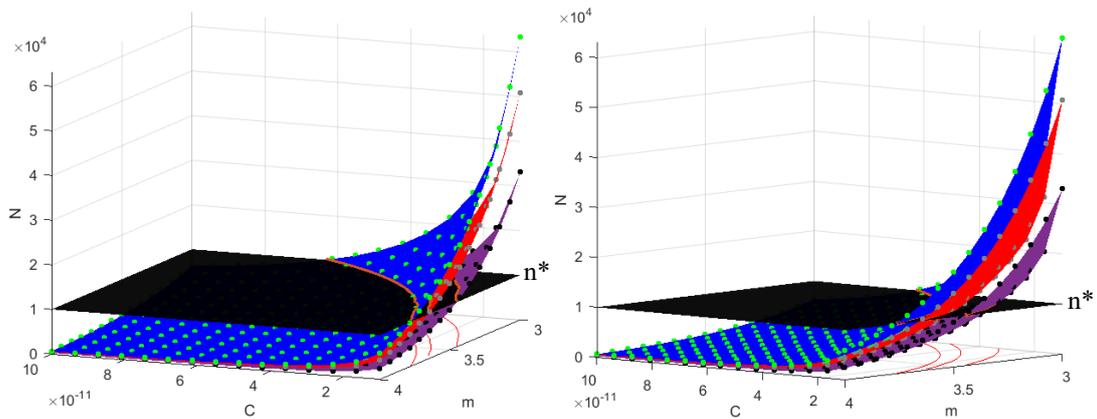


Figura 6.22 – Diferentes interseções para o número de ciclos de projeto ($n^*=10^4$)

Processando cada caso dos mil, tem-se que a pior iteração será a que resultar no mínimo N_{3C} , ou seja, todas as outras combinações resistirão a maiores ciclos de vida N , e, assim, adotá-la estará a favor da segurança.

6.1.3 Curva $m(C)$

A curva $N(C,m)$ mais baixa das mil combinações é a curva $N(C,m)$ mínima. A intersecção dessa curva mínima com o número desejado de ciclos (n^*), representado pela superfície preta, resulta na curva $m(C)$, conforme ilustrado na Figura 6.23. É importante notar que a intersecção entre a curva $N(C,m)$ mínima e a superfície preta (representando o número desejado de ciclos) corresponde aos valores ótimos de C e m que satisfazem a exigência de vida em fadiga. Quaisquer outras interseções entre diferentes curvas $N(C,m)$ e a superfície preta estarão acima da curva $m(C)$.

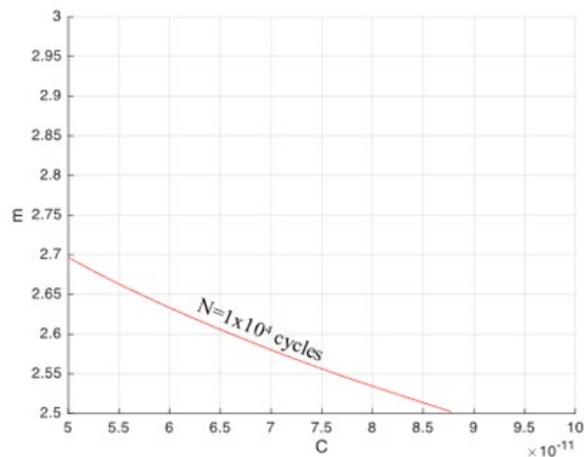


Figura 6.23 – Relação $m(C)$ que resulta no número de ciclos 10^4

Ao focar na intersecção da curva $N(C,m)$ mínima e o número desejado de ciclos, os projetistas podem identificar os valores específicos de C e m que o material precisa possuir para suportar o número solicitado de ciclos definidos pelo usuário. Isso garante a seleção das propriedades apropriadas do material para alcançar a vida de fadiga desejada da estrutura da fuselagem.

5) Por fim, há uma função objetiva que relaciona os parâmetros físicos do material (C e m) que resultam no número de ciclos definido em projeto.

A função objetiva é a curva $m(C)$ e é obtida a partir de uma curva polinomial com ordem otimizada pelo Critério de Informação Bayesiano (CIB). Esse critério é a estatística que resulta no menor valor de CIB, dado por:

$$CIB = n \ln(\widehat{\sigma}_e^2) + k \ln(n) \quad (50)$$

sendo n o número de pontos, $\widehat{\sigma}_e^2$ a variância, e k o grau do polinômio. Neste caso, o polinômio otimizado tem grau 5, conforme Figura 6.24.

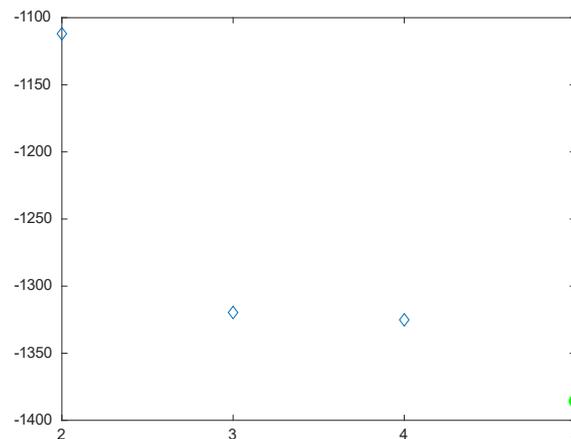


Figura 6.24 – Ordem do polinômio que otimiza o CIB

Portanto, a curva $m(C)$ na Figura 6.19 é representada por:

$$m(C) = - 1.17 \times 10^{51} * C^5 + 4.10 \times 10^{41} * C^4 - 5.71 \times 10^{31} * C^3 + 4.01 \times 10^{21} * C^2 - 1.48 \times 10^{11} * C + 5.02 \quad (51)$$

Assim, o valor de m para o material pode ser avaliado pela substituição de C na equação.

6.2 LIMITAÇÕES

As principais limitações identificadas neste trabalho foram:

- Impossibilidade de modelar trincas curvas por não ter sido implementado no BEMCRACKER;
- Como a disposição dos pontos internos para cálculo das tensões internas é realizada em forma de *grid*, o modelo macro não pode:
 - ter formato diferente de retangular;
 - apresentar curvas;
 - conter furos;
- As cargas aplicadas não podem resultar na plastificação do modelo, visto que a fadiga é avaliada no regime elástico;
- As trincas e furos da análise realizada para o elemento micro possuem posições fixas, variando os respectivos tamanhos; e
- Análise desenvolvida somente para modelos bidimensionais.

CAPÍTULO 7 – RESULTADOS

Para ilustrar os resultados da técnica utilizada, são apresentados os seguintes três estudos de caso com diferentes combinações de cargas externas e arranjos de restrição de deslocamento na malha de elementos de contorno.

7.1 ESTUDO DE CASO 1

O Estudo de Caso 1 é apresentado na Figura 7.1. Este modelo representa uma peça de fuselagem submetida a cargas externas normais (P) e de cisalhamento (Q) com valores mostrados na Tabela 7.1 e com restrição de deslocamento na direção perpendicular aos outros nós.

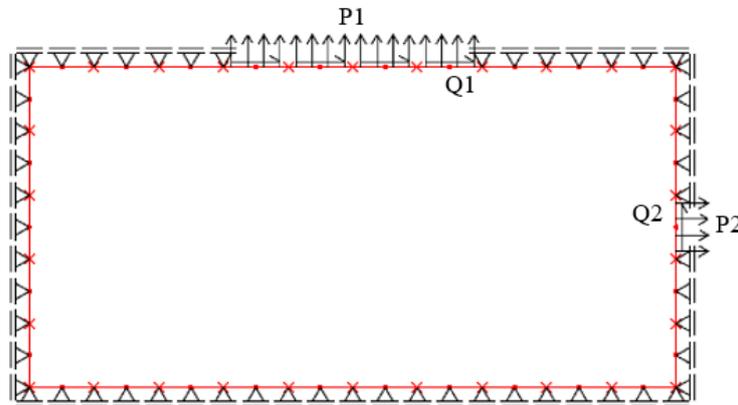


Figura 7.1 – Modelo macro do Estudo de Caso 1

Tabela 7.1 – Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 1

Variáveis da análise macro	
P1 (MPa)	60.47
Q1 (MPa)	42.78
P2 (MPa)	43.58
Q2 (MPa)	90.70

7.1.1 Análise do modelo macro do Estudo de Caso 1

A partir do modelo inicial, o BemCracker2D calcula os campos de tensão interna do modelo macro, conforme mostrado nas Figuras 7.2, 7.3 e 7.4, com as dimensões do modelo destacadas nos eixos x e y em metros.

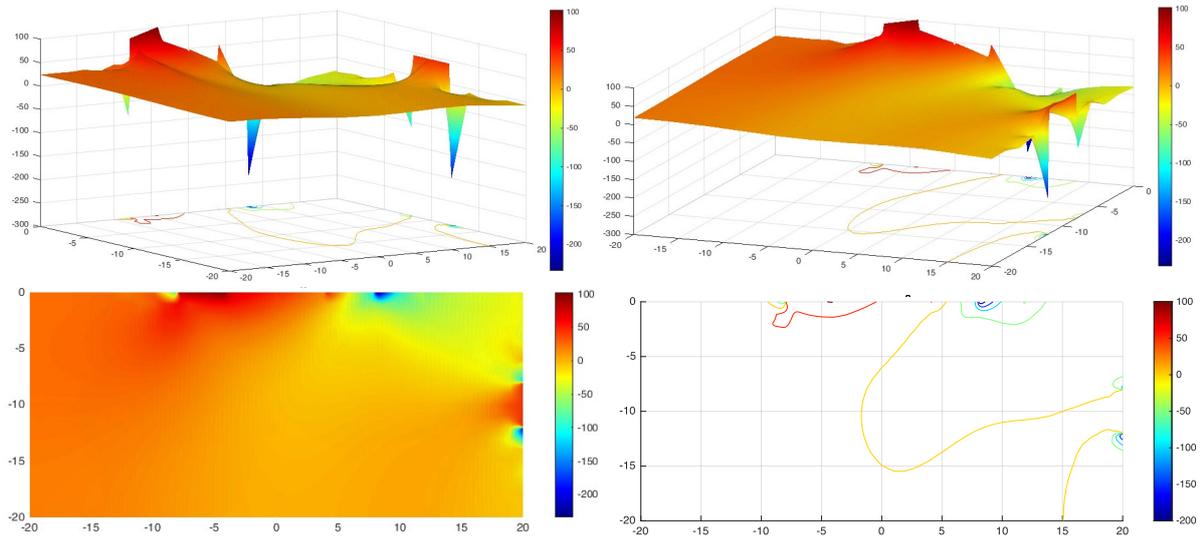


Figura 7.2 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 1 (MPa)

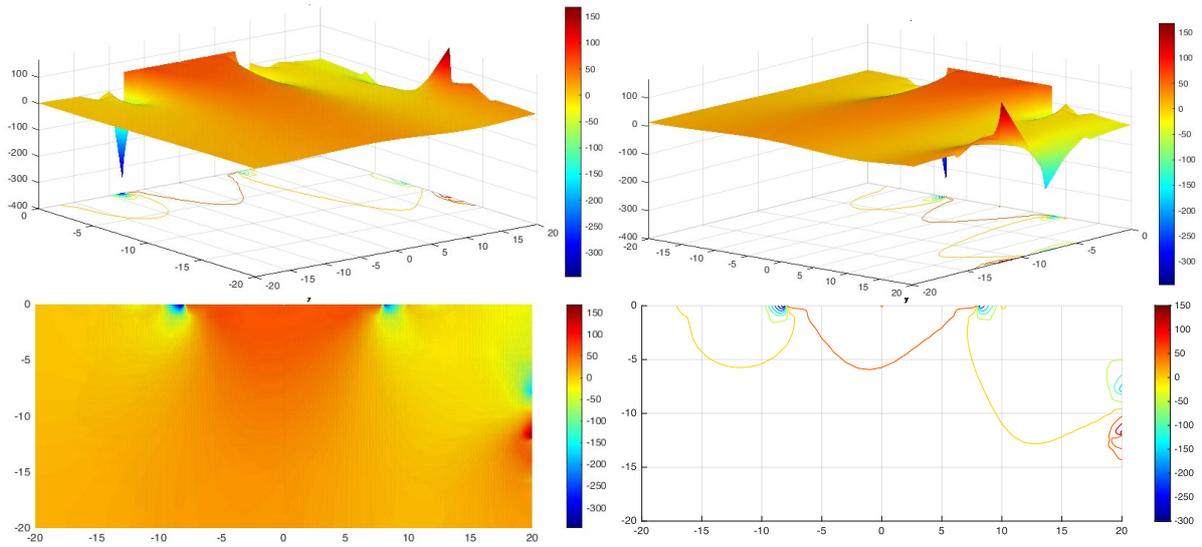


Figura 7.3 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 1 (MPa)

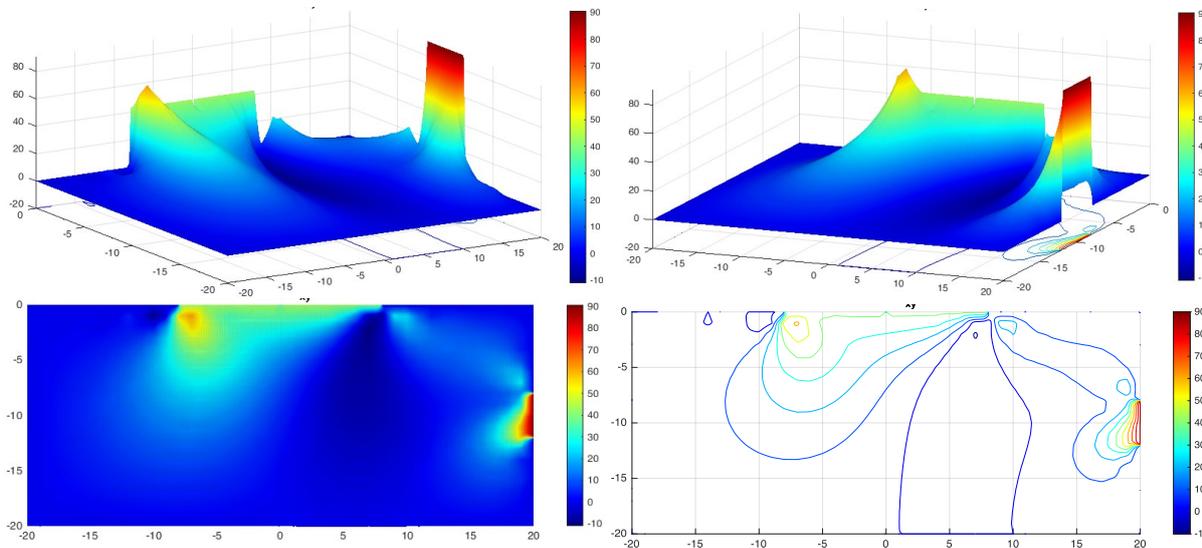


Figura 7.4 – Campo de tensão cisalhante do Estudo de Caso 1 (MPa)

A partir dos campos de tensão, a posição da tensão crítica é obtida pelo critério de von Mises antes de atingir o limite de escoamento, como mostrado na Figura 7.5.

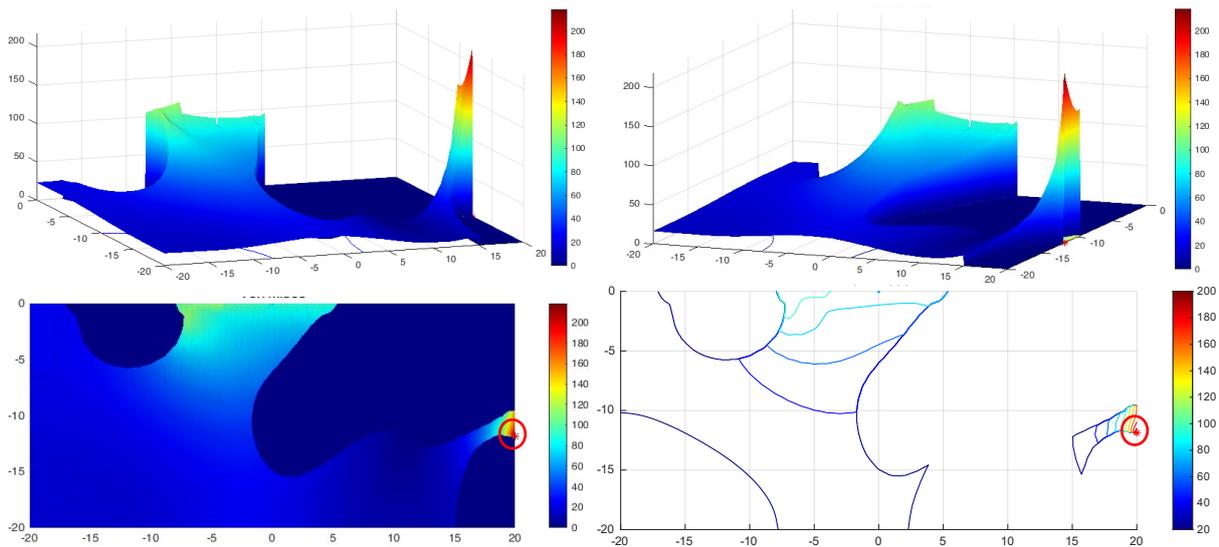


Figura 7.5 – Posição do pico de tensão do Estudo de Caso 1

Ao identificar a localização do pico de tensão, o método posiciona o microelemento neste ponto e aplica as tensões internas. Neste resultado, identificou-se que o ponto crítico passou a ser na borda direita da placa em que as solicitações externas P2 e Q2 foram maiores que P1 e Q1, concentrando-se em uma área menor e, conseqüentemente, causando uma tensão interna maior.

7.1.2 Análise do modelo micro do Estudo de Caso 1

A Figura 7.6 mostra o posicionamento do modelo micro e aplicação das tensões internas com valores representados na Tabela 7.2.

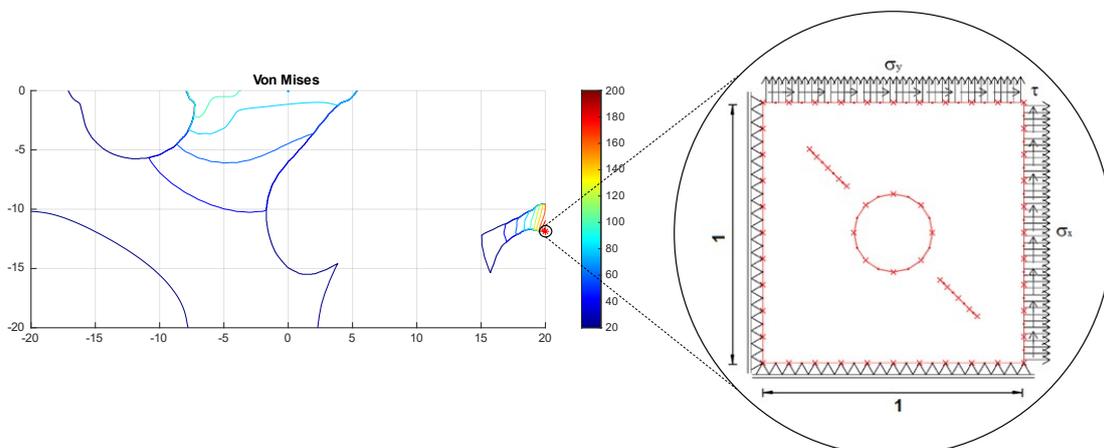


Figura 7.6 – Posicionando o microelemento do Estudo de Caso 1

Tabela 7.2 – Valores das tensões internas do Estudo de Caso 1

σ_x (MPa)	43.58
σ_y (MPa)	168.81
τ (MPa)	90.70

7.1.3 Função $N(C,m)$

Variando-se os valores de C e m da Lei de Paris em um grid, o número resultante de ciclos de fadiga é calculado para cada combinação (C, m) , conforme mostrado na Figura 7.7.

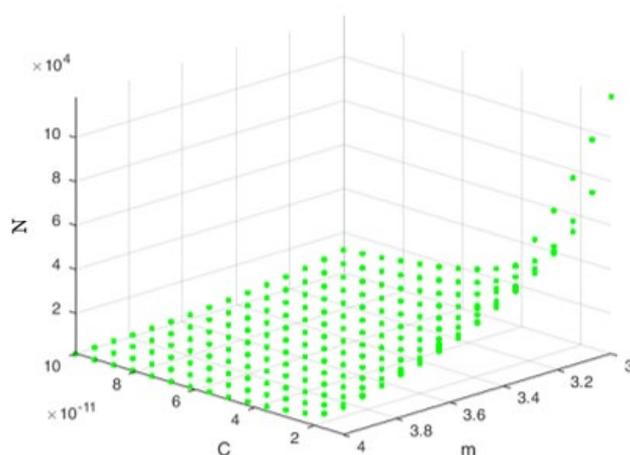


Figura 7.7 – Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) do Estudo de Caso 1

A interpolação desses pontos resulta na superfície que relaciona o número de ciclos de cada combinação (C, m) , gerando a função $N(C,m)$, como mostra a Figura 7.8.

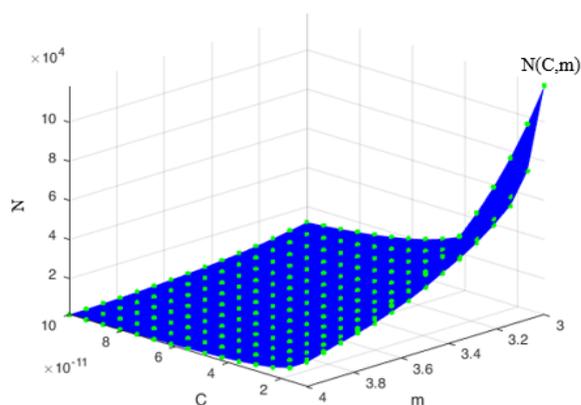


Figura 7.8 – Superfície $N(C, m)$ do Estudo de Caso 1

Em seguida, o método posiciona o número de ciclos do projeto (n^*) definido pelo projetista, de modo que a intersecção de $N(C,m)$ com n^* resulte na combinação de C e m da Lei de Paris para o número necessário de ciclos no projeto, como mostra a Figura 7.9, para este exemplo, a superfície preta adotada foi $n^*=10^4$ ciclos, destacando-se que ela vai variar para cima ou para

baixo de acordo com o número de ciclos definido pelo projetista. Neste caso, a interseção também irá variar acompanhando o movimento.

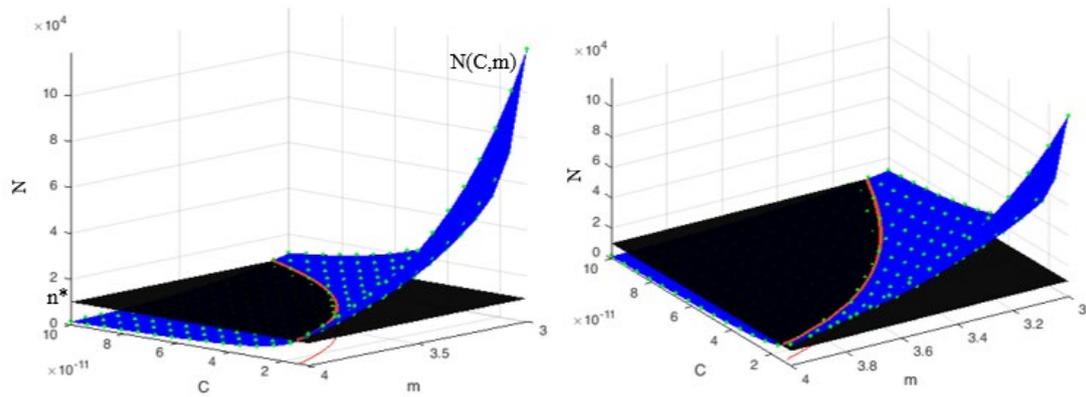


Figura 7.9 – Interseção da relação $N(C, m)$ do Estudo de Caso 1 com o número de ciclos do projeto (10^4)

7.1.4 Função $m(C)$

A Figura 7.10 mostra a combinação de C e m da Lei de Paris para o número de ciclos de 10^4 .

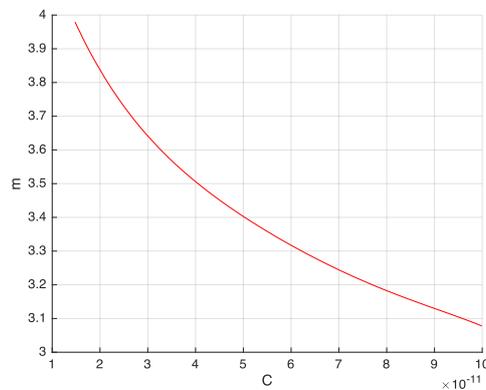


Figura 7.10 – Relação entre C e m que resulta no número de ciclos do projeto 10^4

Finalmente, a equação da curva é obtida através de uma regressão polinomial com grau ótimo definido pelo método CIB. Nesse caso, o polinômio com menor CIB foi de grau 5, como mostra a Figura 7.11.

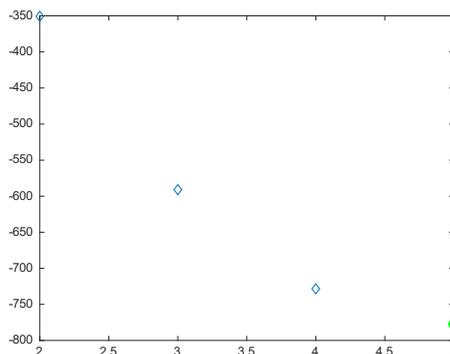


Figura 7.11 – Grau do polinômio que otimiza o CIB

$$m(C) = - 4.26x10^{50} * C^5 + 1.44x10^{41} * C^4 - 1.97x10^{31} * C^3 + 1.40x10^{21} * C^2 - 6.09x10^{10} * C + 4.63 \quad (52)$$

Assim, para o Estudo de Caso 1, a combinação de C e m para o número de ciclos de 10^4 está representada na Equação (52). Portanto, a técnica computacional fornece ao projetista do Estudo de Caso 1 os parâmetros físicos do material que podem suportar o número necessário de ciclos no projeto.

7.2 ESTUDO DE CASO 2

O Estudo de Caso 2 apresenta um modelo semelhante ao Estudo de Caso 1, mas adiciona tensões normais (P3) e de cisalhamento (Q3), como mostra a Figura 7.12. Novamente, os valores de cada tensão são apresentados na Figura 7.12.

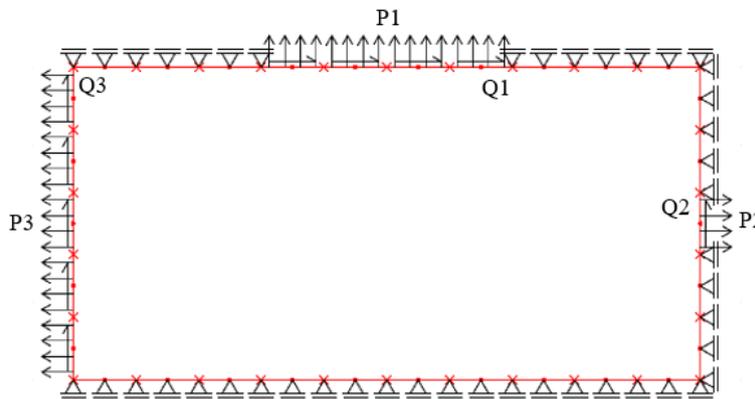


Figura 7.12 - Modelo do Estudo de Caso 2

Tabela 7.3 - Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 2

Variáveis da análise macro	
P1 (MPa)	60.47
Q1 (MPa)	42.78
P2 (MPa)	43.58
Q2 (MPa)	90.70
P3 (MPa)	70.22
Q3 (MPa)	30.63

7.2.1 Análise do modelo macro do Estudo de Caso 2

Com base no modelo inicial, o BemCracker calcula os campos de tensões internas do modelo macro, como mostram as Figuras 7.13, 7.14 e 7.15, com as dimensões do modelo destacadas nos eixos x-y em metros.

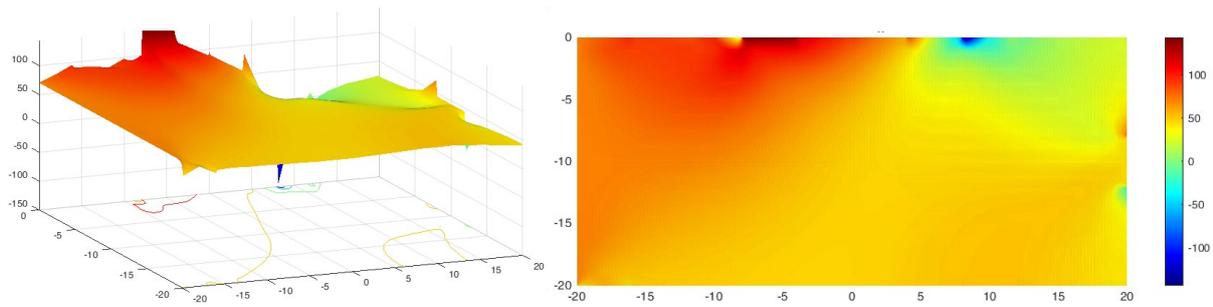


Figura 7.13 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 2 (MPa)

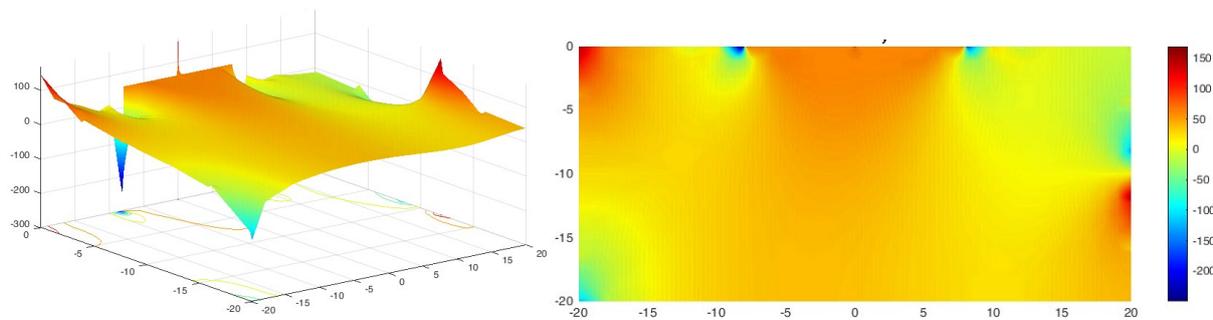


Figura 7.14 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 2 (MPa)

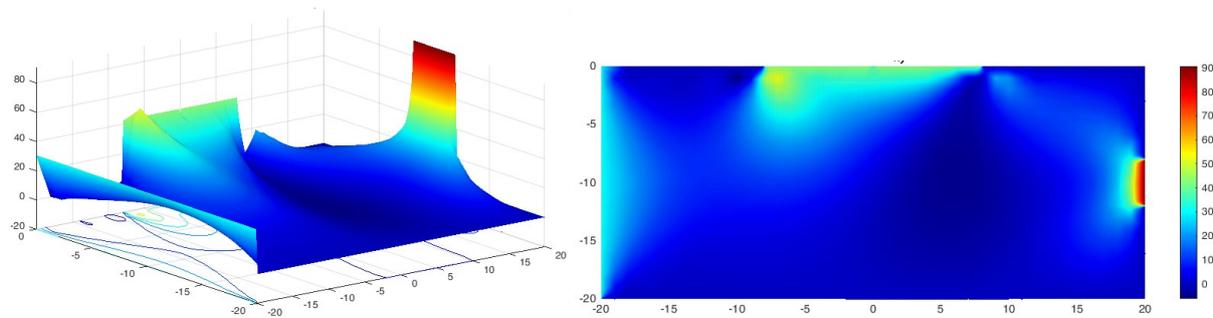


Figura 7.15 – Campo de tensão de cisalhamento do Estudo de Caso 2 (MPa)

Com os campos de tensões, a localização da tensão crítica é analisada pelo critério de von Mises antes de atingir o escoamento, como mostra a Figura 7.16.

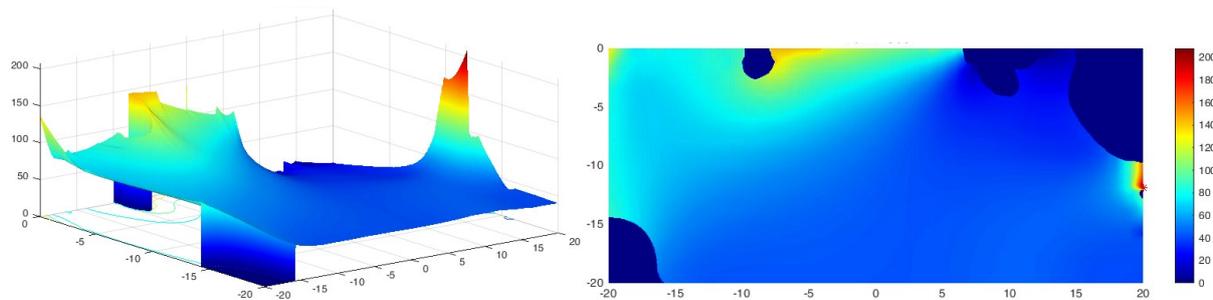


Figura 7.16 - Localização do pico de tensão do Estudo de Caso 2

Ao identificar a localização do pico de tensões, o método posiciona o microelemento nesse pico e aplica as tensões internas nesse ponto. Percebe-se que o ponto crítico continuou idêntico ao do estudo de caso 1, ainda que tenha variada a solitação externa na borda direita. Isto está destacado na conclusão e mostra que quanto mais concentrada esteja a solitação externa, mais o ponto crítico tende a convergir para este local de concentração de tensões.

7.2.2 Análise do modelo micro do Estudo de Caso 2

A Figura 7.17 mostra o posicionamento do modelo micro e aplicação das tensões internas com valores representados na Tabela 7.4.

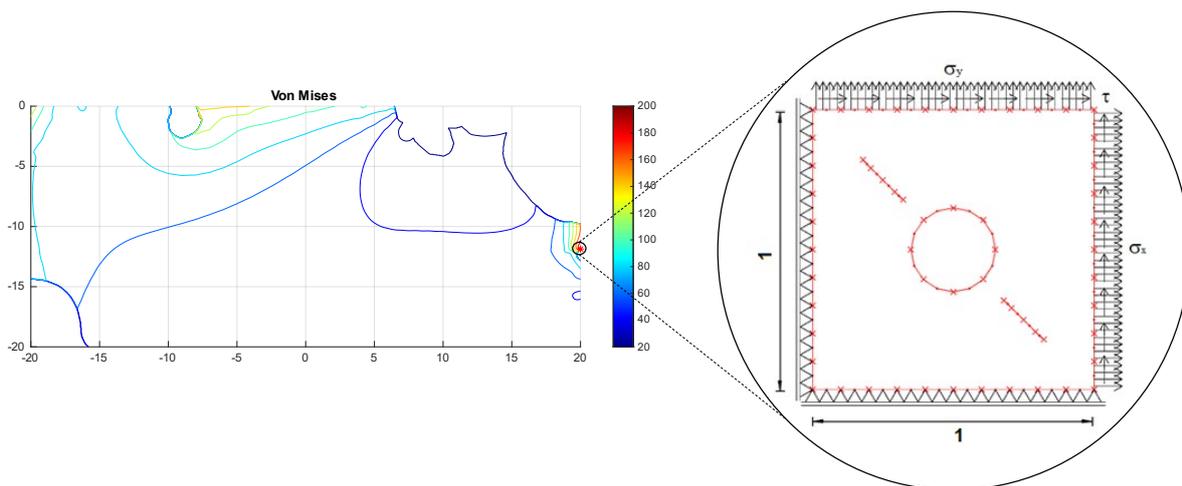


Figura 7.17 - Posicionamento do microelemento do Estudo de Caso 2

Tabela 7.4 - Valores das tensões internas do Estudo de Caso 2

σ_x (MPa)	43.58
σ_y (MPa)	152.86
τ (MPa)	90.70

7.2.3 Função N(C,m)

Pode-se notar que os valores de tensão são semelhantes aos do Estudo de Caso 1, uma vez que o ponto crítico foi o mesmo, sendo a única diferença a tensão de cisalhamento. Portanto, variando os valores de C e m da Lei de Paris, o ciclo de fadiga para cada combinação (C, m), é mostrado na Figura 7.18.

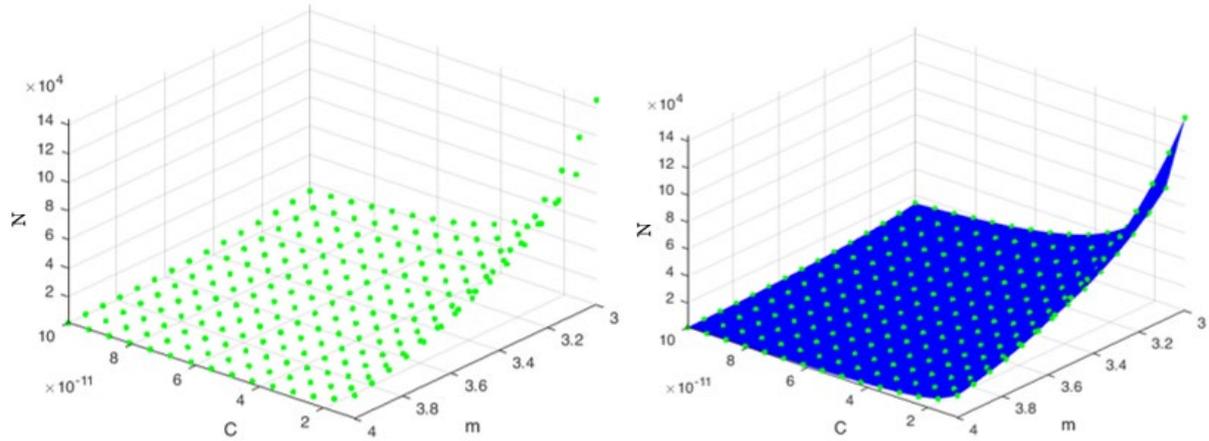


Figura 7.18 - Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) no Estudo de Caso 2

Em seguida, o método posiciona o número de ciclos de projeto (n^*) definido pelo projetista, de modo que a interseção de $N(C,m)$ com n^* resulta na combinação de C e m da Lei de Paris para o número de ciclos de projeto, Figura 7.19, para este exemplo, a superfície preta continuou sendo $n^*=10^4$ ciclos, destacando-se que ela vai variar para cima ou para baixo de acordo com o número de ciclos definido pelo projetista. Neste caso, a interseção também irá variar acompanhando o movimento.

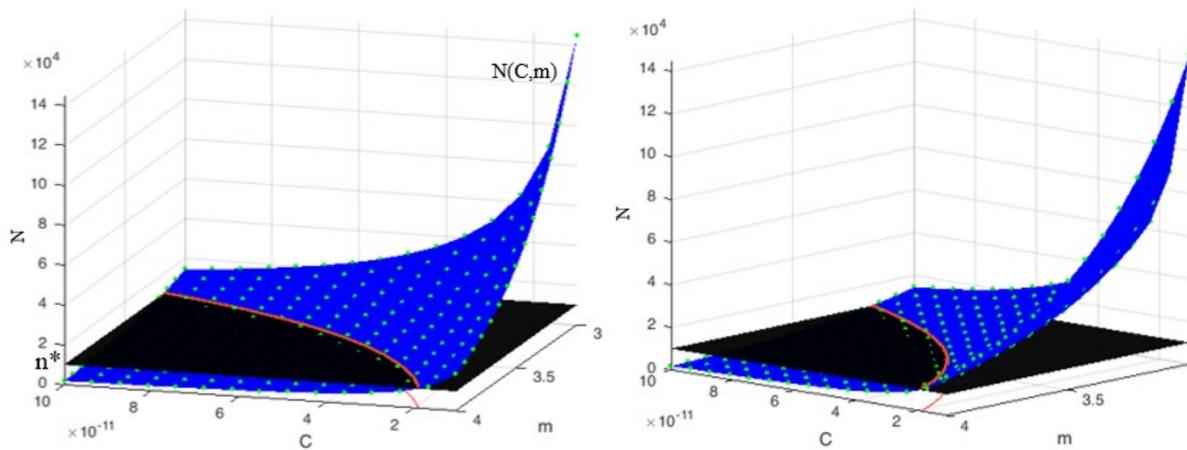


Figura 7.19 - Interseção da relação $N(C,m)$ do Estudo de Caso 2 com o número de ciclos do projeto n^*

7.2.4 Função $m(C)$

Assim, a Figura 7.20 mostra a combinação de C e m para o número de ciclos de 10^4 .

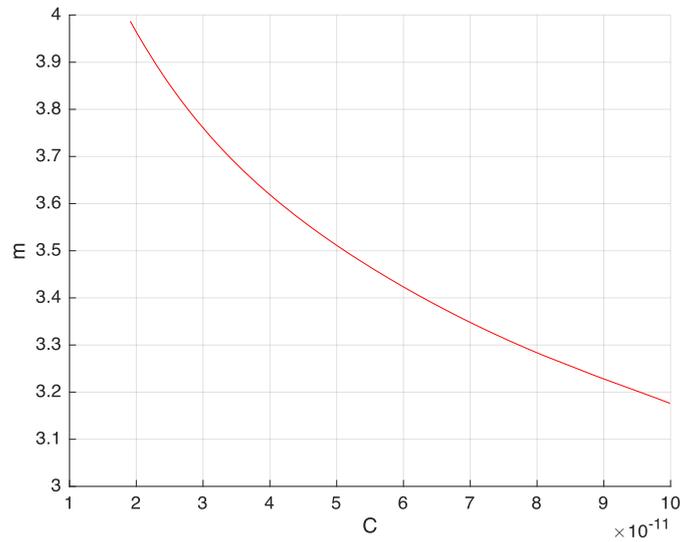


Figura 7.20 - Relação entre C e m resultando no número de ciclos necessários no projeto (10^4)

Finalmente, a equação da curva é obtida através de uma regressão polinomial com grau ótimo determinado usando o método Critério de Informação Bayesiano (CIB). Nesse caso, o polinômio com menor CIB foi de grau 5, como mostra a Figura 7.21.

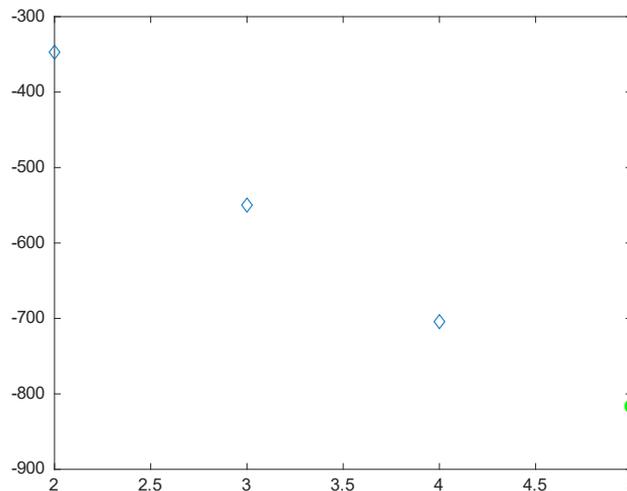


Figura 7.21 - Grau do polinômio que otimiza o CIB

$$\begin{aligned}
 m(C) = & -3.52 \times 10^{50} * C^5 + 1.24 \times 10^{41} * C^4 - 1.76 \times 10^{31} * C^3 \\
 & + 1.31 \times 10^{21} * C^2 - 5.98 \times 10^{10} * C + 4.76
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Portanto, para o Estudo de Caso 2, a combinação de C e m para o número de ciclos de 10^4 é representada pela Equação (53). Assim, a técnica computacional fornece ao projetista do Estudo de Caso 2 os parâmetros físicos do material que suportam o número necessário de ciclos no projeto.

7.3 ESTUDO DE CASO 3

O Estudo de Caso 3 apresenta um modelo com tensões desbalanceadas em cada fronteira, bordas livres e restrições de deslocamento de segundo grau em alguns nós da fronteira esquerda, como mostrado na Figura 7.22. Mais uma vez, os valores de cada carregamento são apresentados na Tabela 7.5.

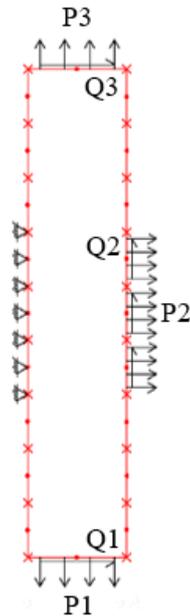


Figura 7.22 – Modelo do Estudo de Caso 3

Tabela 7.5 – Valores das variáveis macro do Estudo de Caso 3

Variáveis da análise macro	
P1 (MPa)	3.97
Q1 (MPa)	18.83
P2 (MPa)	5.54
Q2 (MPa)	9.96
P3 (MPa)	7.18
Q3 (MPa)	12.40

7.3.1 Análise do modelo macro do Estudo de Caso 3

A partir do modelo inicial, o BemCracker calcula os campos internos de tensões do modelo macro, conforme Figuras 7.23, 7.24 e 7.25.

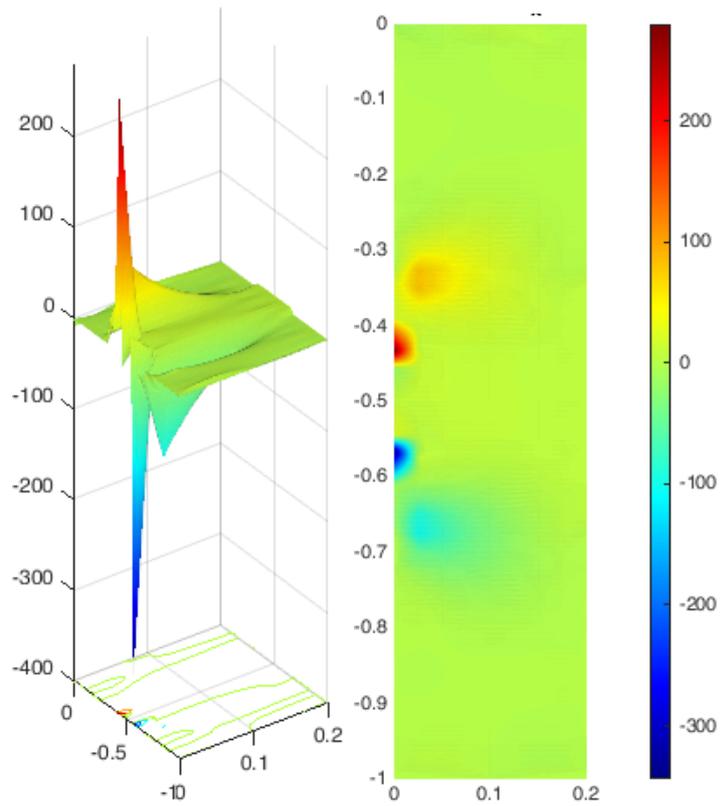


Figura 7.23 – Campo de tensão sigma x do Estudo de Caso 3

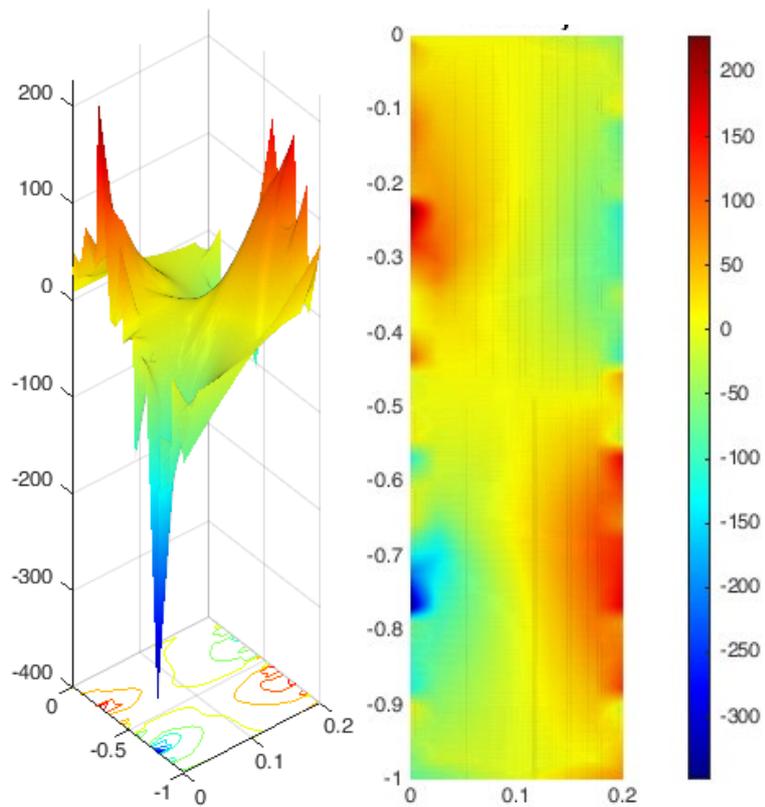


Figura 7.24 – Campo de tensão sigma y do Estudo de Caso 3

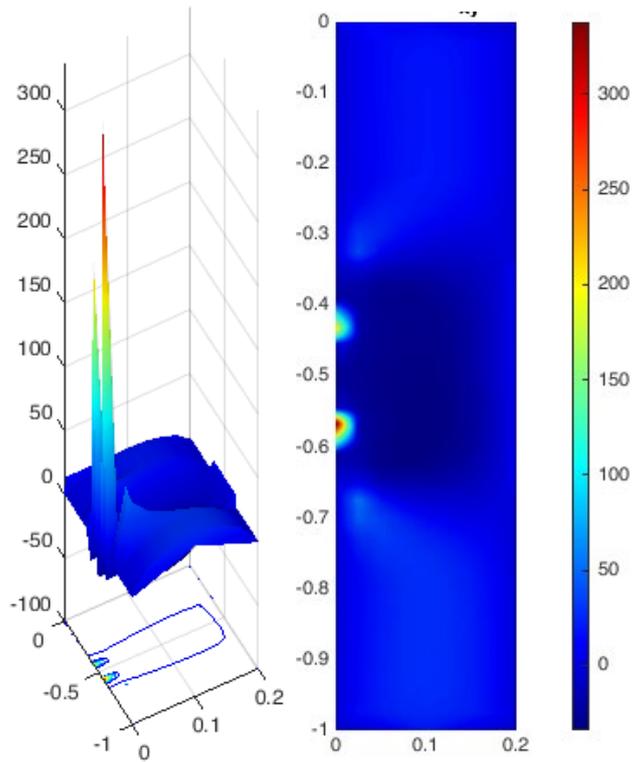


Figura 7.25 – Campo de tensão de cisalhamento do Estudo de Caso 3

Com os campos de tensões, o local crítico de tensões é analisado pelo critério de von Mises antes de atingir o escoamento, como mostrado na Figura 7.26.

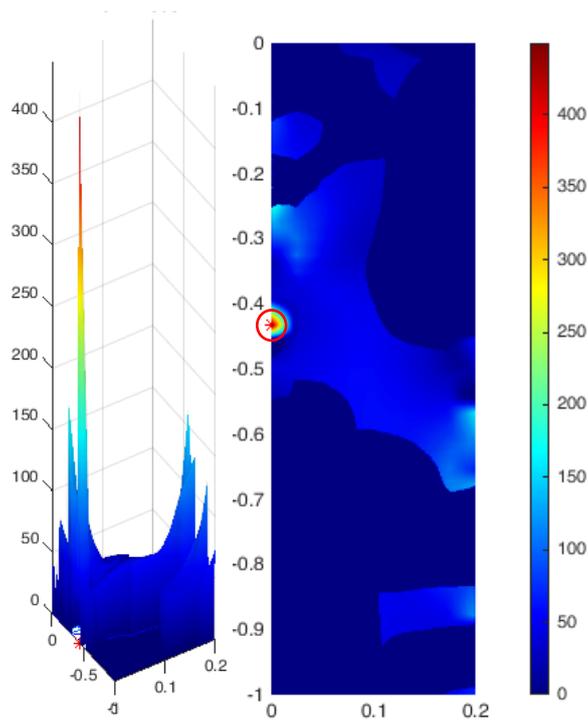


Figura 7.26 – Local do pico de tensão do Estudo de Caso 3

Ao identificar a localização do pico de tensão, o método posiciona o microelemento neste ponto e aplica as tensões internas,

7.3.2 Análise do modelo micro do Estudo de Caso 3

A Figura 7.27 mostra o posicionamento do modelo micro e aplicação das tensões internas com valores representados na Tabela 7.6.

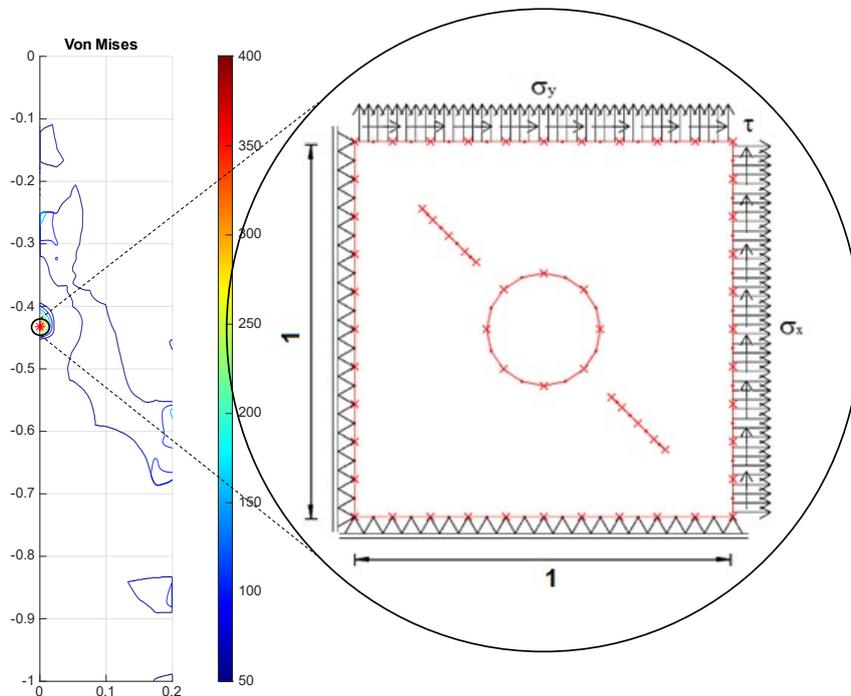


Figura 7.27 – Posicionamento do microelemento do Estudo de Caso 3

Tabela 7.6 – Valores das tensões internas do Estudo de Caso 3

σ_x (MPa)	280.21
σ_y (MPa)	92.46
τ (MPa)	216.75

7.3.3 Função $N(C,m)$

Em seguida, variam-se os valores de C e m da Lei de Paris e o número do ciclo de fadiga resultante é calculado para cada combinação (C, m) , como mostrado na Figura 7.28.

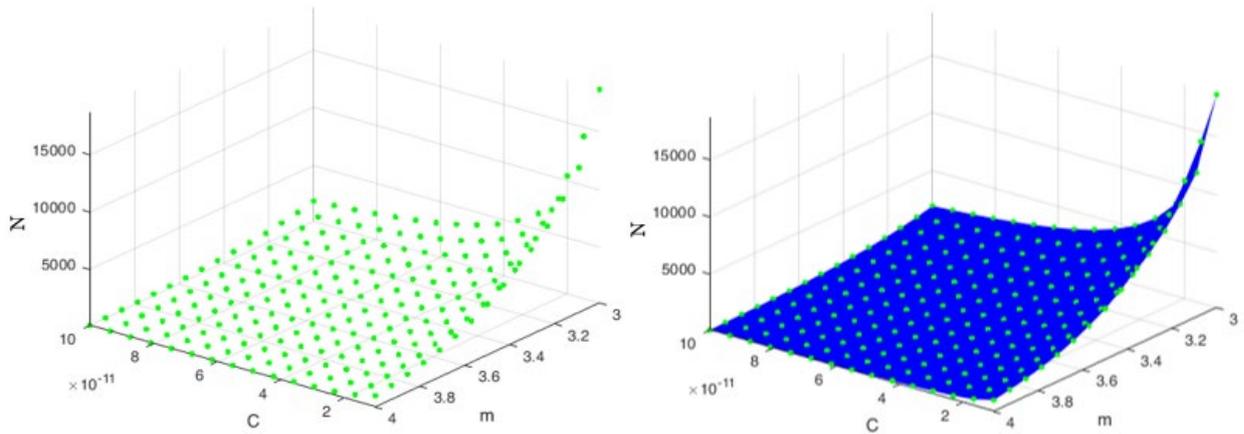


Figura 7.28 - Pontos do número de ciclos para cada combinação (C, m) do Estudo de Caso 3

Em seguida, o método posiciona o número do ciclo de projeto (n^*) definido pelo projetista, de modo que a interseção de $N(C,m)$ com n^* resulta na combinação de C e m da Lei de Paris para o número de ciclos do projeto, como mostrado na Figura 7.29.

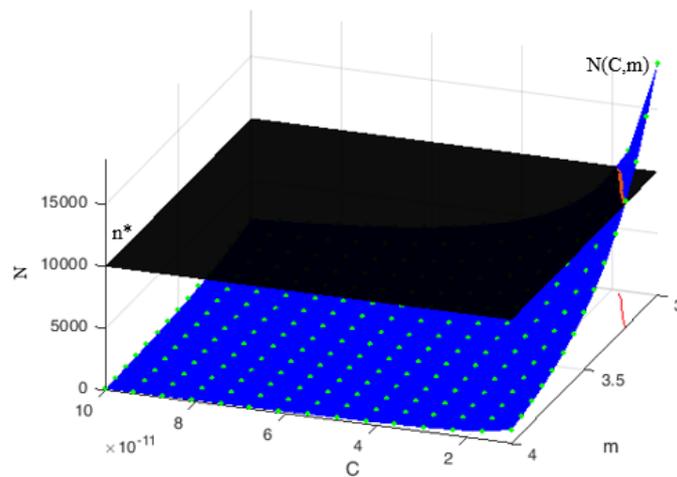


Figura 7.29 - Interseção da relação $N(C,m)$ do Estudo de Caso 3 com a vida em fadiga de projeto (10^4)

7.3.4 Função $m(C)$

Então, a Figura 7.30 mostra a combinação de C e m de Paris para o número de ciclos de 10^4 .

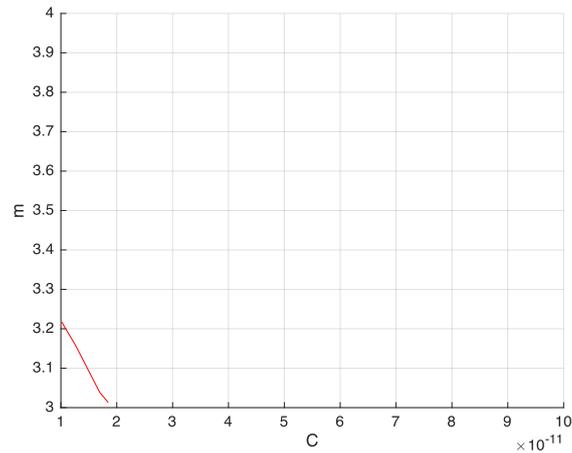


Figura 7.30 - Relação C, m resultando no número de ciclos do projeto 10^4

Finalmente, a equação da curva é obtida a partir de uma regressão polinomial com um grau ótimo definido pelo Critério de Informação Bayesiano (CIB). Nesse caso, o polinômio com menor CIB foi de grau 4, como mostra a Figura 7.31.

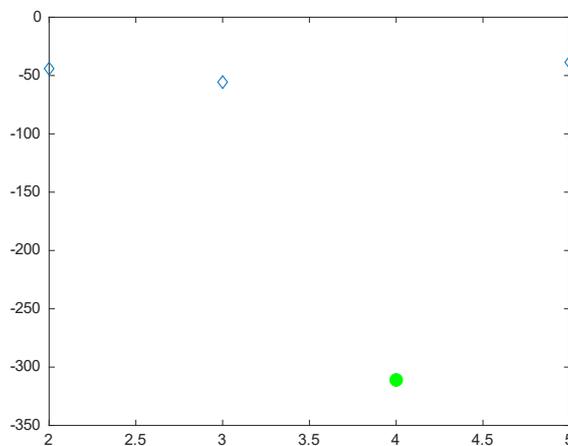


Figura 7.31 - Grau do polinômio que otimiza o CIB

$$\begin{aligned}
 m(C) = & 6.93 \times 10^{43} * C^4 - 3.76 \times 10^{33} * C^3 + 7.51 \times 10^{22} * C^2 \\
 & - 6.80 \times 10^{11} * C + 5.59
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Assim, para o Estudo de Caso 3, a combinação de C e m para o número de ciclos de 10^4 é representada pela Equação (54) Portanto, a técnica computacional fornece ao projetista do Estudo de Caso 3 os parâmetros físicos do material que suportam o número necessário de ciclos no projeto.

CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

8.1 CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma técnica capaz de automatizar os parâmetros de Paris para facilitar o desenvolvimento de projetos de fuselagem de aeronave, por meio do método dos elementos de contorno através dos programas BEMCRACKER2D e BEMLAB2D.

Inicialmente, abordou-se uma introdução sobre o tema, correlacionando as generalidades que demonstram a necessidade do desenvolvimento da técnica, a motivação da necessidade e os respectivos objetivos.

Logo após, demonstrou-se o estado atual da arte por meio da apresentação de toda a técnica desenvolvida em trabalhos anteriores seguida dos trabalhos relacionados ao tema. Depois, apresentou-se a abordagem da mecânica da fratura linear elástica, mais especificamente os conceitos de tensões na ponta da trinca, do método generalizado de Westergaard, de *compliance*, de energia de fratura, de taxa de dissipação de energia, de instabilidade e curva R, da integral J e de direção de propagação de trinca. Em seguida, apresentou-se os conceitos relacionados à fadiga, dentre eles os tipos de comportamento a fadiga, estágios de fadiga, lei de Paris-Erdogan e de tolerância ao dano. Finalmente, apresentou-se os conceitos inerentes ao método dos elementos de contorno, abordando a inovação da estratégia do MEC dual para análise de problemas que envolve trincas, o uso de ferramentas computacionais, especialmente o BEMLAB2D e o BEMCRACKER2D e os conceitos da abordagem estatística.

Nos três capítulos citados, formou-se a base teórica necessária para o desenvolvimento da técnica. Com isso, apresentou-se a modelagem computacional utilizada na técnica, em que inicialmente o projetista desenha o modelo e define um número de ciclos requerido em projeto. Em seguida, a técnica calcula o campo de tensões internas, depois, define o ponto crítico e posiciona o elemento micro neste ponto, para realizar a análise micro que é encontrar a *compliance* crítica, isto é, o número de ciclos em que leva a *compliance* ao valor de três

vezes a *compliance* inicial (N_{3C}), visto que, neste ponto, ocorre instabilidade local que é quando a *compliance* tende ao infinito. Logo após, a técnica executa a análise estatística para mil outras combinações de defeitos iniciais para encontrar a pior situação, ou seja, adotar a pior situação fica a favor da segurança. Com a pior situação, pode-se então obter a curva $N(C,m)$ que relaciona o número de ciclos com os parâmetros de Paris e, ainda, a curva e a função $m(C)$ que mostra a combinação destes parâmetros necessários para o número de ciclos requisitado. Toda esta metodologia é apresentada para o modelo validado já publicado em trabalhos anteriores. Apresentou-se, ainda, as limitações encontradas para o uso da técnica.

Acerca do uso do Método dos Elementos de Contorno, ele foi essencial, pois, através de sua flexibilidade, permitiu avaliar as tensões internas, destacando o local do pico de tensão, e a *compliance* das bordas do elemento da análise micro. A automação das milhares de análises realizadas permitiu ainda o tratamento estatístico para prever a pior situação que o modelo pode ter defeitos iniciais.

Acerca do uso da mecânica fratura linear elástica, a escolha desta base teórica se encontra no fato de permitir analisar os defeitos iniciais no modelo micro. Esta teoria além de possibilitar o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, permite ainda prever a direção da propagação da trinca, cálculo da *compliance* e previsão da instabilidade da fratura. Unindo esta base teórica com a fadiga, pode-se prever a tolerância ao dano que é o objeto deste estudo, por meio da Lei de Paris-Erdogan, sem adentrar no campo da plasticidade.

Acerca das ferramentas computacionais utilizadas, percebeu-se que elas permitem a modelagem e processamento de diversos outros tipos de estruturas e, ainda, facilita nos cálculos estatísticos para avaliação das mil combinações, permitindo, assim, identificar o pior caso. Neste sentido, a modelagem computacional só foi possível devido às ferramentas computacionais BEMLAB2D e BEMCRACKER2D, sendo que este trabalho acoplou cada uma delas de forma a automatizar todo o processo.

8.2 CONCLUSÕES ESPECÍFICAS DOS ESTUDOS DE CASO

Após as conclusões gerais a respeito do método, apresenta-se as conclusões específicas para cada um dos estudos de caso. Os três estudos de caso adotados representaram exemplos de

modelos de projetos de fuselagem de aeronave utilizando a técnica desenvolvida, em que o estudo de caso 1 é semelhante ao adotado nos trabalhos anteriores já publicados, acrescentando as solicitações externas P2 e Q2. O estudo de caso 2, também semelhante aos anteriores, acrescenta as cargas P3 e Q3, e o estudo de caso 3 que apresenta um modelo totalmente diferente, mostrando o poder da flexibilidade fornecido pela utilização do MEC. De cada estudo de caso, concluiu-se que no estudo de caso 1 o ponto crítico ficou na borda direita da placa devido às solicitações externas maiores que concentraram o campo de tensões internas neste ponto, resultando na combinação C e m , para o número de ciclos de projeto de 10^4 ciclos, representada na Equação (52), com polinômio ótimo de grau 5. Já no estudo de caso 2, a concentração de tensões continuou no mesmo ponto do estudo 1, portanto, pode-se notar que a concentração de solicitações externas em espaço reduzido tende a convergir com o ponto crítico, ainda que haja mudança de cargas distribuídas em outras bordas. Ainda neste segundo estudo de caso, o polinômio ótimo foi destacado como o de grau 5 e a Equação (53) representa a combinação C e m de Paris para o número de ciclos de projeto também de 10^4 ciclos. Já o estudo de caso 3, por apresentar um modelo totalmente diferente e com tensões desbalanceadas, resultou no ponto crítico na borda esquerda localizada no apoio com restrição de deslocamento, por ser o ponto com maior magnitude de tensões normais e cisalhantes, especialmente a normal na direção x . Ainda esse estudo de caso, a interseção da curva $N(C,m)$ foi totalmente diferente das dos outros estudos, com polinômio ótimo de grau 4, representado na Equação (54). Esta diferença já era esperada por tratar de uma modelagem diferente das demais. Isso comprova o poder e a flexibilidade do método para modelos diferentes.

Acerca dos resultados, observa-se que a curva $N(C,m)$ depende da configuração do modelo, dos parâmetros físicos do material, dos danos iniciais e das solicitações externas, visto que resultará em diferentes interseções com o número de ciclos definido em projeto (n^*). Portanto, a automação se mostra como a solução para este tipo de impasse que os projetistas precisavam dedicar muito esforço para resolver, mostrando que para cada modelo, haverá uma faixa de valores C e m que atendem aos requisitos do projeto.

Assim, este estudo inova ao apresentar a relação que existe entre as constantes de Paris C e m e o conceito de tolerância ao dano (número de ciclos requisitado pelo projetista), sendo destacadas a seguir as principais contribuições desta automação.

8.3 CONTRIBUIÇÕES

De forma geral, a primeira contribuição destacada neste trabalho é que a utilização desta metodologia se mostrou como uma alternativa à análise de tolerância ao dano adotado pela bibliografia clássica em que o dano é considerado a partir do tamanho crítico de trinca. Neste método utilizado, desconsidera-se o tamanho crítico e a *compliance* crítica é avaliada como variável definidora da instabilidade. A segunda contribuição é a descoberta de que a *compliance* crítica ocorre quando atinge o valor de três vezes a inicial. A terceira é a definição do ponto crítico a partir do método numérico, substituindo os cálculos analíticos que eram realizados nos trabalhos anteriores. A quarta e maior contribuição deste trabalho é poder obter uma função otimizada que relaciona os Parâmetros C e m de Paris com o número de ciclos desejado em projeto. Esta contribuição facilita o trabalho do projetista, pois já mostra os dados que o material deve possuir para suportar o número de ciclos requerido. Por fim, a quinta e última contribuição é que a automação e a utilização dos programas computacionais BEMLAB2D e BEMCRACKER2D permitem a generalização para outros modelos de painel de fuselagem resultando nos dados paramétricos de Paris seguros para tolerância ao dano e que evitam que o modelo atinja um Estado Limite.

Com estas contribuições, a seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros para uma possível continuidade da pesquisa realizada.

8.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com estes dados observa-se como sugestões para trabalhos futuros:

- Análise do elemento macro com outros materiais, em especial compósitos que estão sendo bastante utilizados neste tipo de estruturas;
- Adoção de novas séries de solicitações podendo prever diversos processos de danos possíveis;
- Análise micro com trincas e furos em posições variáveis observando as diferenças em relação ao modelo proposto;
- Novas implementações nos programas propostos, mais especificamente no BemLab2D e BemCracker2D, de maneira a possibilitar uma análise multiescala única a

cada realização, tornando-se uma ferramenta computacional poderosa em análise multiescala, mecânica da fratura, e tolerância ao dano utilizando o Método dos Elementos de Contorno;

- Construção de modelos tridimensionais utilizando os métodos desenvolvidos nesta pesquisa;
- Utilização de métodos de confiabilidade e quantificação de incerteza em sistemas complexos da engenharia.

REFERÊNCIAS

- [1] T. A. A. Oliveira, G. Gomes, and F. Evangelista Jr, “Multiscale aircraft fuselage fatigue analysis by the dual boundary element method,” *Eng Anal Bound Elem*, vol. 104, pp. 107–119, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.enganabound.2019.03.032.
- [2] G. Gomes, T. Oliveira, and F. Evangelista Jr, “A Probabilistic Approach in Fuselage Damage Analysis via Boundary Element Method,” in *Advances in Fatigue and Fracture Testing and Modelling*, IntechOpen, 2022. doi: 10.5772/intechopen.98982.
- [3] G. Gomes, T. A. A. Oliveira, and A. M. Delgado Neto, “A new methodology to predict damage tolerance based on compliance via global-local analysis,” *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 15, no. 58, pp. 211–230, Sep. 2021, doi: 10.3221/IGF-ESIS.58.16.
- [4] T. A. A. Oliveira, Gomes G., F. Evangelista Junior, and A. M. Delgado Neto, “Evaluation of cracked fuselage subject to contact mechanics,” in *XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, A. Ibrahimbegovic and P. M. Pimenta, Eds., Compiegne, 2018.
- [5] T. A. A. Oliveira, G. Gomes, F. Evangelista Jr, and A. M. Delgado Neto, “Multiscale analysis of multiple cracks in aircraft fuselage,” in *XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, University of Technology Compiègne, 2018.
- [6] T. A. A. Oliveira and G. Gomes, “Dual Boundary Element Method applied in aircraft fuselage fatigue analysis,” in *FORM and FORCE - 60th Anniversary Symposium of the International Association (IASS Symposium 2019)*, Barcelona, 2019.
- [7] N. T. S. B. NTSB, “Aircraft Accident Report, Aloha Airlines, Flight 243, Boeing 737-200, N73711, Near Maui, Hawaii, April 28, 1988.” Washington, DC, 1989.
- [8] R. Wanhill, L. Molent, and S. Barter, “Milestone Case Histories in Aircraft Structural Integrity,” in *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*, Elsevier, 2016. doi: 10.1016/B978-0-12-803581-8.00847-X.
- [9] R. J. Sanford, *Principles of Fracture Mechanics*. 2002.
- [10] M. Krejsa, L. Koubova, J. Flodr, J. Protivinsky, and Q. T. Nguyen, “Probabilistic prediction of fatigue damage based on linear fracture mechanics,” *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 11, no. 39, pp. 143–159, Dec. 2016, doi: 10.3221/IGF-ESIS.39.15.
- [11] T. L. Anderson and T. L. Anderson, *Fracture Mechanics*. CRC Press, 2005. doi: 10.1201/9781420058215.

- [12] T. MANN, “The influence of mean stress on fatigue crack propagation in aluminium alloys,” *Int J Fatigue*, vol. 29, no. 8, pp. 1393–1401, Aug. 2007, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2006.11.010.
- [13] Z. P. Bažant and J. Planas, *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. Routledge, 2019. doi: 10.1201/9780203756799.
- [14] P. Paris and F. Erdogan, “A Critical Analysis of Crack Propagation Laws,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, no. 4, pp. 528–533, Dec. 1963, doi: 10.1115/1.3656900.
- [15] A. A. Griffith, “VI. The phenomena of rupture and flow in solids,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 221, no. 582–593, pp. 163–198, Jan. 1921, doi: 10.1098/rsta.1921.0006.
- [16] G. R. Irwin, “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate,” *J Appl Mech*, vol. 24, no. 3, pp. 361–364, Sep. 1957, doi: 10.1115/1.4011547.
- [17] J. R. Rice, “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks,” *J Appl Mech*, vol. 35, no. 2, pp. 379–386, Jun. 1968, doi: 10.1115/1.3601206.
- [18] J. Ju and X. You, “Dynamic fracture analysis technique of aircraft fuselage containing damage subjected to blast,” *Math Comput Model*, vol. 58, no. 3–4, pp. 627–633, Aug. 2013, doi: 10.1016/j.mcm.2011.10.044.
- [19] A. Portela, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, “The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems,” *Int J Numer Methods Eng*, vol. 33, no. 6, pp. 1269–1287, Apr. 1992, doi: 10.1002/nme.1620330611.
- [20] A. Portela, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, “Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique,” *Int J Fract*, vol. 55, no. 1, pp. 17–28, May 1992, doi: 10.1007/BF00018030.
- [21] G. E. Blandford, A. R. Ingraffea, and J. A. Liggett, “Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method,” *Int J Numer Methods Eng*, vol. 17, no. 3, pp. 387–404, Mar. 1981, doi: 10.1002/nme.1620170308.
- [22] R. Citarella, “MSD crack propagation by DBEM on a repaired aeronautic panel,” *Advances in Engineering Software*, vol. 42, no. 10, pp. 887–901, Oct. 2011, doi: 10.1016/j.advengsoft.2011.02.014.
- [23] R. Citarella, P. Carlone, R. Sepe, and M. Lepore, “DBEM crack propagation in friction stir welded aluminum joints,” *Advances in Engineering Software*, vol. 101, pp. 50–59, Nov. 2016, doi: 10.1016/j.advengsoft.2015.12.002.

- [24] R. J. Price and J. Trevelyan, “Boundary element simulation of fatigue crack growth in multi-site damage,” *Eng Anal Bound Elem*, vol. 43, pp. 67–75, Jun. 2014, doi: 10.1016/j.enganabound.2014.03.002.
- [25] L. Morse, Z. S. Khodaei, and M. H. Aliabadi, “Multi-Fidelity Modeling-Based Structural Reliability Analysis with the Boundary Element Method,” *Journal of Multiscale Modelling*, vol. 08, no. 03n04, p. 1740001, Sep. 2017, doi: 10.1142/S1756973717400017.
- [26] X. Huang, M. H. Aliabadi, and Z. S. Khodaei, “Fatigue Crack Growth Reliability Analysis by Stochastic Boundary Element Method,” *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 102, no. 4, pp. 291–330, 2014, doi: 10.3970/cmcs.2014.102.291.
- [27] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985. doi: 10.1017/CBO9781139171731.
- [28] G. Gomes, T. A. A. Oliveira, and A. M. Delgado Neto, “BEMCRACKER2D: A SOFTWARE PACKAGE FOR TWO-DIMENSIONAL FATIGUE CRACKGROWTH ANALYSIS,” in *XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*, Natal-RN, 2019.
- [29] A. M. Delgado Neto, T. A. A. Oliveira, and G. Gomes, “An efficient GUI update for BEM-FEM mixed mesh generation,” *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 20, no. 3, pp. 256–267, May 2019, doi: 10.1080/15502287.2019.1632975.
- [30] W. M. RODRIGUES and G. GOMES, “Linkup de múltiplas trincas com elementos de contorno dual usando o programa BemCracker2D,” in *XIII SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional*, Vitória, 2018.
- [31] P. G. P. LEITE and G. GOMES, “Numerical simulation of fatigue crack growth in mixed mode condition (I+II),” in *XXXVIII IberianLatin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, 2017.
- [32] M. Maksimović, I. Vasović, K. Maksimović, S. Maksimović, and D. Stamenković, “Crack growth analysis and residual life estimation of structural elements under mixed modes,” *Procedia Structural Integrity*, vol. 13, pp. 1888–1894, 2018, doi: 10.1016/j.prostr.2018.12.324.
- [33] Sato M, “Modelagem de problemas da mecânica da fratura e propagação de trincas em fadiga,” Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

- [34] S. MA, X. ZHANG, N. RECHO, and J. LI, “The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen,” *Int J Fatigue*, vol. 28, no. 12, pp. 1780–1790, Dec. 2006, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2006.01.005.
- [35] I. Lopez and N. Sarigul-Klijn, “A review of uncertainty in flight vehicle structural damage monitoring, diagnosis and control: Challenges and opportunities,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 46, no. 7, pp. 247–273, Oct. 2010, doi: 10.1016/j.paerosci.2010.03.003.
- [36] J. Newman, “Fatigue-life prediction methodology using small-crack theory,” *Int J Fatigue*, vol. 21, no. 2, pp. 109–119, Feb. 1999, doi: 10.1016/S0142-1123(98)00058-9.
- [37] B. Palmberg, A. F. Blom, and S. Eggwertz, “Probabilistic damage tolerance analysis of aircraft structures,” in *Probabilistic fracture mechanics and reliability*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, pp. 47–130. doi: 10.1007/978-94-017-2764-8_2.
- [38] C. R. Pyo, H. Okada, and S. N. Atluri, “An elastic-plastic finite element alternating method for analyzing wide-spread fatigue damage in aircraft structures,” *Comput Mech*, vol. 16, no. 1, pp. 62–68, Apr. 1995, doi: 10.1007/BF00369886.
- [39] D. Y. Jeong and P. Tong, “Onset of multiple site damage and widespread fatigue damage in aging airplanes,” *Int J Fract*, vol. 85, pp. 185–200, 1997, doi: 10.1023/A:1007452712730.
- [40] R. Platz, C. Stapp, and H. Hanselka, “Statistical approach to evaluating reduction of active crack propagation in aluminum panels with piezoelectric actuator patches,” *Smart Mater Struct*, vol. 20, no. 8, p. 085009, Aug. 2011, doi: 10.1088/0964-1726/20/8/085009.
- [41] S. Khan, O. Kintzel, and J. Mosler, “Experimental and numerical lifetime assessment of Al 2024 sheet,” *Int J Fatigue*, vol. 37, pp. 112–122, Apr. 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.09.010.
- [42] E. Breitbarth, M. Besel, and S. Reh, “Biaxial testing of cruciform specimens representing characteristics of a metallic airplane fuselage section,” *Int J Fatigue*, vol. 108, pp. 116–126, Mar. 2018, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.12.005.
- [43] J. Schijve, “Fatigue damage in aircraft structures, not wanted, but tolerated?,” *Int J Fatigue*, vol. 31, no. 6, pp. 998–1011, Jun. 2009, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2008.05.016.
- [44] A. Brot and Y. Peleg-Wolfin, “The damage tolerance behavior of integrally stiffened metallic structures,” in *48th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences*, 2008.

- [45] E. Breitbarth, T. Strohmann, and G. Requena, “High-stress fatigue crack propagation in thin AA2024-T3 sheet material,” *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 43, no. 11, pp. 2683–2693, Nov. 2020, doi: 10.1111/ffe.13335.
- [46] R. Wanhill, “Flight simulation fatigue crack growth testing of aluminium alloys Specific issues and guidelines,” *Int J Fatigue*, vol. 16, no. 2, pp. 99–110, Feb. 1994, doi: 10.1016/0142-1123(94)90100-7.
- [47] R. WANHILL, “Status and prospects for aluminium-lithium alloys in aircraft structures,” *Int J Fatigue*, vol. 16, no. 1, pp. 3–20, Jan. 1994, doi: 10.1016/0142-1123(94)90441-3.
- [48] J. C. Newman, “The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: a historical perspective,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 34, no. 5–6, pp. 347–390, Jul. 1998, doi: 10.1016/S0376-0421(98)00006-2.
- [49] S. Barter, L. Molent, N. Goldsmith, and R. Jones, “An experimental evaluation of fatigue crack growth,” *Eng Fail Anal*, vol. 12, no. 1, pp. 99–128, Feb. 2005, doi: 10.1016/j.engfailanal.2004.04.002.
- [50] L. Molent and S. A. Barter, “The lead fatigue crack concept for aircraft structural integrity,” *Procedia Eng*, vol. 2, no. 1, pp. 363–377, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.proeng.2010.03.041.
- [51] S. A. Barter, L. Molent, and R. J. H. Wanhill, “Typical fatigue-initiating discontinuities in metallic aircraft structures,” *Int J Fatigue*, vol. 41, pp. 11–22, Aug. 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.10.017.
- [52] L. Molent and C. Forrester, “The lead crack concept applied to defect growth in aircraft composite structures,” *Compos Struct*, vol. 166, pp. 22–26, Apr. 2017, doi: 10.1016/j.compstruct.2016.12.076.
- [53] P. Chowdhury, H. Sehitoglu, and R. Rateick, “Damage tolerance of carbon-carbon composites in aerospace application,” *Carbon N Y*, vol. 126, pp. 382–393, Jan. 2018, doi: 10.1016/j.carbon.2017.10.019.
- [54] N. M. Chowdhury, W. K. Chiu, J. Wang, and P. Chang, “Experimental and finite element studies of bolted, bonded and hybrid step lap joints of thick carbon fibre/epoxy panels used in aircraft structures,” *Compos B Eng*, vol. 100, pp. 68–77, Sep. 2016, doi: 10.1016/j.compositesb.2016.06.061.
- [55] F. Pegorin, K. Pingkarawat, and A. P. Mouritz, “Comparative study of the mode I and mode II delamination fatigue properties of z-pinned aircraft composites,” *Materials &*

- Design (1980-2015)*, vol. 65, pp. 139–146, Jan. 2015, doi: 10.1016/j.matdes.2014.08.072.
- [56] L. Smith, R. Pilarczyk, and J. Feiger, “Validation Testing and Analysis of Cracked-Hole Continuing Damage Solutions,” *Mater Perform Charact*, vol. 5, no. 3, p. MPC20150055, Dec. 2016, doi: 10.1520/MPC20150055.
- [57] F. O. Sonmez, “Shape optimization of 2D structures using simulated annealing,” *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 196, no. 35–36, pp. 3279–3299, Jul. 2007, doi: 10.1016/j.cma.2007.01.019.
- [58] S. Chintapalli, M. S. A. Elsayed, R. Sedaghati, and M. Abdo, “The development of a preliminary structural design optimization method of an aircraft wing-box skin-stringer panels,” *Aerosp Sci Technol*, vol. 14, no. 3, pp. 188–198, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.ast.2009.12.007.
- [59] M. Gorelik, “Additive manufacturing in the context of structural integrity,” *Int J Fatigue*, vol. 94, pp. 168–177, Jan. 2017, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2016.07.005.
- [60] M. Ciavarella and A. Papangelo, “On the distribution and scatter of fatigue lives obtained by integration of crack growth curves: Does initial crack size distribution matter?,” *Eng Fract Mech*, vol. 191, pp. 111–124, Mar. 2018, doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.01.019.
- [61] A. K. Srivastava, P. K. Arora, and H. Kumar, “Numerical and experiment fracture modeling for multiple cracks of a finite aluminum plate,” *Int J Mech Sci*, vol. 110, pp. 1–13, May 2016, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.02.010.
- [62] P. H. Wen, M. H. Aliabadi, and A. Young, “Crack growth analysis for multi-layered airframe structures by boundary element method,” *Eng Fract Mech*, vol. 71, no. 4–6, pp. 619–631, Mar. 2004, doi: 10.1016/S0013-7944(03)00021-3.
- [63] N. K. Salgado and M. H. Aliabadi, “THE ANALYSIS OF MECHANICALLY FASTENED REPAIRS AND LAP JOINTS,” *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 20, no. 4, pp. 583–593, Apr. 1997, doi: 10.1111/j.1460-2695.1997.tb00290.x.
- [64] B. Sayar and A. Kayran, “Two-stage fatigue life evaluation of an aircraft fuselage panel with a bulging circumferential crack and a broken stringer,” *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 37, no. 5, pp. 494–507, May 2014, doi: 10.1111/ffe.12127.
- [65] J. G. Bakuckas *et al.*, “Assessment of emerging metallic structures technologies through test and analysis of fuselage structure,” *SN Appl Sci*, vol. 1, no. 11, p. 1521, Nov. 2019, doi: 10.1007/s42452-019-1471-7.

- [66] F. Abdi, Y. Xue, M. Garg, B. Farahmand, J. Housner, and K. Nikbin, “An analysis approach toward FAA certification for damage tolerance of aircraft components,” *The Aeronautical Journal*, vol. 118, no. 1200, pp. 181–196, Feb. 2014, doi: 10.1017/S0001924000009064.
- [67] N. Madhavi and R. Saritha, “Two bay crack arrest capability evaluation for metallic fuselage,” *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 455, no. 1, p. 012015, Dec. 2018, doi: 10.1088/1757-899X/455/1/012015.
- [68] J. Schijve, “Book review,” *Int J Fatigue*, vol. 51, p. 132, Jun. 2013, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.02.001.
- [69] A. Skorupa and M. Skorupa, *Riveted Lap Joints in Aircraft Fuselage*, vol. 189. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. doi: 10.1007/978-94-007-4282-6.
- [70] P. M. Toor, “On damage tolerance design of fuselage structure—circumferential cracks,” *Eng Fract Mech*, vol. 26, no. 5, pp. 771–782, Jan. 1987, doi: 10.1016/0013-7944(87)90140-8.
- [71] P. M. Toor, “On damage tolerance design of fuselage structure (longitudinal cracks),” *Eng Fract Mech*, vol. 24, no. 6, pp. 915–927, Jan. 1986, doi: 10.1016/0013-7944(86)90276-6.
- [72] F. Carta and A. Pirondi, “Damage tolerance analysis of aircraft reinforced panels,” *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 5, no. 16, pp. 34–42, Apr. 2011, doi: 10.3221/IGF-ESIS.16.04.
- [73] C. Proppe, “Probabilistic analysis of multi-site damage in aircraft fuselages,” *Comput Mech*, vol. 30, no. 4, pp. 323–329, Mar. 2003, doi: 10.1007/s00466-002-0408-x.
- [74] T. C. Kennedy, M. H. Cho, and M. E. Kassner, “Predicting failure of composite structures containing cracks,” *Compos Part A Appl Sci Manuf*, vol. 33, no. 4, pp. 583–588, Apr. 2002, doi: 10.1016/S1359-835X(01)00145-2.
- [75] Y. C. Lin, Y.-C. Xia, Y.-Q. Jiang, H.-M. Zhou, and L.-T. Li, “Precipitation hardening of 2024-T3 aluminum alloy during creep aging,” *Materials Science and Engineering: A*, vol. 565, pp. 420–429, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.msea.2012.12.058.
- [76] H. Ucan *et al.*, “Automated, Quality Assured and High Volume Oriented Production of Fiber Metal Laminates (FML) for the Next Generation of Passenger Aircraft Fuselage Shells,” *Science and Engineering of Composite Materials*, vol. 26, no. 1, pp. 502–508, Jan. 2019, doi: 10.1515/secm-2019-0031.

- [77] A. F. Johnson, N. Toso-Pentecôte, and D. Schueler, “Damage Tolerance of Pre-Stressed Composite Panels Under Impact Loads,” *Applied Composite Materials*, vol. 21, no. 1, pp. 123–147, Feb. 2014, doi: 10.1007/s10443-013-9383-y.
- [78] X. Ma, X. Liu, H. Wang, J. Tong, and X. Yang, “Fatigue Life Prediction of Half-Shaft Using the Strain-Life Method,” *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2020, pp. 1–8, Aug. 2020, doi: 10.1155/2020/5129893.
- [79] M. Zhang, G. Hu, X. Liu, and X. Yang, “An improved strength degradation model for fatigue life prediction considering material characteristics,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 43, no. 5, p. 275, May 2021, doi: 10.1007/s40430-021-02997-4.
- [80] X. Liu, J. Liu, H. Wang, and X. Yang, “Prediction and evaluation of fatigue life considering material parameters distribution characteristic,” *International Journal of Structural Integrity*, vol. 13, no. 2, pp. 309–326, Mar. 2022, doi: 10.1108/IJSI-11-2021-0118.
- [81] Y.-H. Li, C. Zhang, H. Yin, Y. Cao, and X. Bai, “Modification optimization-based fatigue life analysis and improvement of EMU gear,” *International Journal of Structural Integrity*, vol. 12, no. 5, pp. 760–772, Oct. 2021, doi: 10.1108/IJSI-07-2021-0072.
- [82] Griffith A A, “Theory of rupture,” in *Proc. Ist. Int. Cong. Appl. Mech*, Delft, 1924, pp. 55–63.
- [83] Irwin G R, “Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminium Alloys,” in *Sagamore Research Conferece Proceedings*, 1956, pp. 289–305.
- [84] Rice J R, “Mechanics of Crack Tip Deformation and Extension by Fatigue,” in *Fatigue Crack Propagation*, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International, pp. 247-247–65. doi: 10.1520/STP47234S.
- [85] J. W. Hutchinson, “ASME Timoshenko medal acceptance speech.,” *ASME Applied Mechanics Division newsletter*. pp. 1–4, 2003.
- [86] H. M. Westergaard, “Bearing Pressures and Cracks: Bearing Pressures Through a Slightly Waved Surface or Through a Nearly Flat Part of a Cylinder, and Related Problems of Cracks,” *J Appl Mech*, vol. 6, no. 2, pp. A49–A53, Jun. 1939, doi: 10.1115/1.4008919.
- [87] H. L. Ewalds and R. J. Wanhill, *Fracture Mechanics*. London: Edward Arnold Publishers, 1984.

- [88] Broek D, *The practical use of fracture mechanics*, 1st ed. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [89] M. Janssen, J. Zuidema, and R. J. H. Wanhill, *Fracture mechanics*, 2nd ed. Netherlands: VSSD, 2002.
- [90] C. E. Inglis, “Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners,” in *Transactions of the Institute of Naval Architects*, vol. 55, 1913, pp. 219–241.
- [91] F. Erdogan and G. C. Sih, “On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, no. 4, pp. 519–525, Dec. 1963, doi: 10.1115/1.3656897.
- [92] T.-H. Liu, C.-W. Tang, H.-W. Liao, and H.-J. Chen, “A New Testing Method for Fatigue of Reinforced Concrete Beam,” in *Structures Congress 2008*, Reston, VA: American Society of Civil Engineers, Oct. 2008, pp. 1–7. doi: 10.1061/41016(314)281.
- [93] Baptista C, “Ensaio mecânicos: Ensaio de fadiga,” *Notas de aula*. Universidade de São Paulo, 2016.
- [94] Castro P T, “Problemas de fadiga e fractura em estruturas de aviões fabricadas em alumínio.” Lisboa, 2012.
- [95] C. A. Brebbia, *The boundary element method for engineers*. London/New York: Pentech Press/Halstead Press, 1978.
- [96] D. Nardini and C. A. Brebbia, “A new approach to free vibration analysis using boundary elements,” *Appl Math Model*, vol. 7, no. 3, pp. 157–162, Jun. 1983, doi: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
- [97] Brebbia C A, Telles J C F, and Wrobel L C, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [98] L. C. Wrobel and C. A. Brebbia, “A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction,” *Int J Heat Mass Transf*, vol. 24, no. 5, pp. 843–850, May 1981, doi: 10.1016/S0017-9310(81)80007-5.
- [99] Y. Mi and M. H. Aliabadi, “Three-dimensional crack growth simulation using BEM,” *Comput Struct*, vol. 52, no. 5, pp. 871–878, Sep. 1994, doi: 10.1016/0045-7949(94)90072-8.
- [100] M. H. Aliabadi, “Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics,” *Appl Mech Rev*, vol. 50, no. 2, pp. 83–96, Feb. 1997, doi: 10.1115/1.3101690.
- [101] A. Portela, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, “The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems,” *Int J Numer Methods Eng*, vol. 33, no. 6, pp. 1269–1287, Apr. 1992, doi: 10.1002/nme.1620330611.

- [102] F. M. H. Aliabadi, “Boundary Element Methods,” in *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020, pp. 182–193. doi: 10.1007/978-3-662-55771-6_18.
- [103] G. Gomes, “Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em problemas de plasticidade 2D orientada a objeto,” Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [104] G. Gomes, A. M. Delgado Neto, and L. C. Wrobel, “Modelling and 2D cracks view using dual boundary integral equation,” in *XXXCII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*, Brasília-DF, 2016.
- [105] N. A. Dumont, “The Hybrid Boundary Element Method,” in *Mathematical and Computational Aspects*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1987, pp. 117–130. doi: 10.1007/978-3-662-21908-9_8.
- [106] N. A. Dumont, “The Hybrid Boundary Element Method: An Alliance Between Mechanical Consistency and Simplicity,” *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 11S, pp. S54–S63, Nov. 1989, doi: 10.1115/1.3152408.
- [107] Y. J. Liu *et al.*, “Recent Advances and Emerging Applications of the Boundary Element Method,” *Appl Mech Rev*, vol. 64, no. 3, May 2011, doi: 10.1115/1.4005491.
- [108] L. S. Campos, É. L. de Albuquerque, and L. C. Wrobel, “An ACA accelerated isogeometric boundary element analysis of potential problems with non-uniform boundary conditions,” *Eng Anal Bound Elem*, vol. 80, pp. 108–115, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.enganabound.2017.04.004.
- [109] E. Lima de Albuquerque, “Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno,” Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2001. doi: 10.47749/T/UNICAMP.2001.221821.
- [110] D. N. Maciel, “Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais,” Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. doi: 10.11606/D.18.2003.tde-02042004-163007.
- [111] K. J. BATHE and E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1976.
- [112] A. M. Delgado Neto, “Interface gráfica de modelagem, visualização e análise com elementos de contorno - Uma aplicação em problemas elastostáticos,” Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2017.
- [113] L. C. Wrobel and M. H. Aliabadi, *The Boundary Element Method, Volume 2: Applications in Solids and Structures*. Wiley, 2002.

- [114] Melchers R E, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, 2nd ed. Chinchester: Wiley, 1999.
- [115] Pavliots G. A. and Stuart A., *Multiscale Methods*, vol. 53. in *Texts Applied in Mathematics*, vol. 53. New York, NY: Springer New York, 2008. doi: 10.1007/978-0-387-73829-1.
- [116] S. I. Ranganathan and M. Ostoja-Starzewski, “Towards scaling laws in random polycrystals,” *Int J Eng Sci*, vol. 47, no. 11–12, pp. 1322–1330, Nov. 2009, doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.05.003.
- [117] W. Song, V. Krishnaswamy, and R. V. Pucha, “Computational homogenization in RVE models with material periodic conditions for CNT polymer composites,” *Compos Struct*, vol. 137, pp. 9–17, Mar. 2016, doi: 10.1016/j.compstruct.2015.11.013.
- [118] R. Zabihiyan, J. Mergheim, A. Javili, and P. Steinmann, “Aspects of computational homogenization in magneto-mechanics: Boundary conditions, RVE size and microstructure composition,” *Int J Solids Struct*, vol. 130–131, pp. 105–121, Jan. 2018, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.10.009.
- [119] F.-Y. Zhu, S. Jeong, H. J. Lim, and G. J. Yun, “Probabilistic multiscale modeling of 3D randomly oriented and aligned wavy CNT nanocomposites and RVE size determination,” *Compos Struct*, vol. 195, pp. 265–275, Jul. 2018, doi: 10.1016/j.compstruct.2018.04.060.
- [120] T. A. Carniel, B. Klahr, and E. A. Fancello, “On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles,” *J Mech Behav Biomed Mater*, vol. 91, pp. 131–138, Mar. 2019, doi: 10.1016/j.jmbbm.2018.12.003.

APÊNDICE A – Arquivo inicial da modelagem do projetista *0.dat*

Modelo exemplo

STRESS

74000.00 0.33

60 30 0 45.00 10

Nodal_Coordinates_(NODE,X,Y)

1 -20.000000 0.000000
2 -20.000000 -2.000000
3 -20.000000 -4.000000
4 -20.000000 -6.000000
5 -20.000000 -8.000000
6 -20.000000 -10.000000
7 -20.000000 -12.000000
8 -20.000000 -14.000000
9 -20.000000 -16.000000
10 -20.000000 -18.000000
11 -20.000000 -20.000000
12 -18.000000 -20.000000
13 -16.000000 -20.000000
14 -14.000000 -20.000000
15 -12.000000 -20.000000
16 -10.000000 -20.000000
17 -8.000000 -20.000000
18 -6.000000 -20.000000
19 -4.000000 -20.000000
20 -2.000000 -20.000000
21 -0.000000 -20.000000
22 2.000000 -20.000000
23 4.000000 -20.000000
24 6.000000 -20.000000
25 8.000000 -20.000000
26 10.000000 -20.000000
27 12.000000 -20.000000
28 14.000000 -20.000000
29 16.000000 -20.000000
30 18.000000 -20.000000
31 20.000000 -20.000000
32 20.000000 -18.000000
33 20.000000 -16.000000
34 20.000000 -14.000000
35 20.000000 -12.000000
36 20.000000 -10.000000
37 20.000000 -8.000000
38 20.000000 -6.000000
39 20.000000 -4.000000
40 20.000000 -2.000000
41 20.000000 0.000000
42 18.000000 0.000000
43 16.000000 0.000000

44 14.000000 0.000000
45 12.000000 0.000000
46 10.000000 0.000000
47 8.000000 0.000000
48 6.000000 0.000000
49 4.000000 0.000000
50 2.000000 0.000000
51 0.000000 0.000000
52 -2.000000 0.000000
53 -4.000000 0.000000
54 -6.000000 0.000000
55 -8.000000 0.000000
56 -10.000000 0.000000
57 -12.000000 0.000000
58 -14.000000 0.000000
59 -16.000000 0.000000
60 -18.000000 0.000000

Mesh_Topology_(ELEMENT,G-NODE1,G-NODE2,G-NODE3)

1 1 2 3
2 3 4 5
3 5 6 7
4 7 8 9
5 9 10 11
6 11 12 13
7 13 14 15
8 15 16 17
9 17 18 19
10 19 20 21
11 21 22 23
12 23 24 25
13 25 26 27
14 27 28 29
15 29 30 31
16 31 32 33
17 33 34 35
18 35 36 37
19 37 38 39
20 39 40 41
21 41 42 43
22 43 44 45
23 45 46 47
24 47 48 49
25 49 50 51
26 51 52 53
27 53 54 55
28 55 56 57
29 57 58 59
30 59 60 1

Displacement_Boundary_Conditions_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)

26 0 0

1 1 0.00
2 1 0.00
3 1 0.00
4 1 0.00
5 1 0.00
6 2 0.00
7 2 0.00
8 2 0.00
9 2 0.00
10 2 0.00
11 2 0.00
12 2 0.00
13 2 0.00
14 2 0.00
15 2 0.00
16 1 0.00
17 1 0.00
18 1 0.00
19 1 0.00
20 1 0.00
21 2 0.00
22 2 0.00
23 2 0.00
28 2 0.00
29 2 0.00
30 2 0.00
Traction_Boundary_Conditions_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)
8 0 0
24 2 50.00
25 2 50.00
26 2 50.00
27 2 50.00
24 1 30.00
25 1 30.00
26 1 30.00
27 1 30.00
Constrained_Unknowns_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)
0 0 0
Crack_Propagation_(Number_OF_Crack-Extension_Increments)
0

APÊNDICE B – Arquivo após a criação dos pontos internos *1.dat*

Modelo exemplo

STRESS

74000.00 0.33

60 30 741 45.00 10

Nodal_Coordinates_(NODE,X,Y)

1 -20.000000 0.000000
2 -20.000000 -2.000000
3 -20.000000 -4.000000
4 -20.000000 -6.000000
5 -20.000000 -8.000000
6 -20.000000 -10.000000
7 -20.000000 -12.000000
8 -20.000000 -14.000000
9 -20.000000 -16.000000
10 -20.000000 -18.000000
11 -20.000000 -20.000000
12 -18.000000 -20.000000
13 -16.000000 -20.000000
14 -14.000000 -20.000000
15 -12.000000 -20.000000
16 -10.000000 -20.000000
17 -8.000000 -20.000000
18 -6.000000 -20.000000
19 -4.000000 -20.000000
20 -2.000000 -20.000000
21 -0.000000 -20.000000
22 2.000000 -20.000000
23 4.000000 -20.000000
24 6.000000 -20.000000
25 8.000000 -20.000000
26 10.000000 -20.000000
27 12.000000 -20.000000
28 14.000000 -20.000000
29 16.000000 -20.000000
30 18.000000 -20.000000
31 20.000000 -20.000000
32 20.000000 -18.000000
33 20.000000 -16.000000
34 20.000000 -14.000000
35 20.000000 -12.000000
36 20.000000 -10.000000
37 20.000000 -8.000000
38 20.000000 -6.000000
39 20.000000 -4.000000
40 20.000000 -2.000000
41 20.000000 0.000000
42 18.000000 0.000000
43 16.000000 0.000000

44 14.000000 0.000000
45 12.000000 0.000000
46 10.000000 0.000000
47 8.000000 0.000000
48 6.000000 0.000000
49 4.000000 0.000000
50 2.000000 0.000000
51 0.000000 0.000000
52 -2.000000 0.000000
53 -4.000000 0.000000
54 -6.000000 0.000000
55 -8.000000 0.000000
56 -10.000000 0.000000
57 -12.000000 0.000000
58 -14.000000 0.000000
59 -16.000000 0.000000
60 -18.000000 0.000000

Mesh_Topology_(ELEMENT,G-NODE1,G-NODE2,G-NODE3)

1 1 2 3
2 3 4 5
3 5 6 7
4 7 8 9
5 9 10 11
6 11 12 13
7 13 14 15
8 15 16 17
9 17 18 19
10 19 20 21
11 21 22 23
12 23 24 25
13 25 26 27
14 27 28 29
15 29 30 31
16 31 32 33
17 33 34 35
18 35 36 37
19 37 38 39
20 39 40 41
21 41 42 43
22 43 44 45
23 45 46 47
24 47 48 49
25 49 50 51
26 51 52 53
27 53 54 55
28 55 56 57
29 57 58 59
30 59 60 1

Internal_Points_(POINT,XP,YP)

1 -19.000000 -1.000000

2 -18.000000 -1.000000
3 -17.000000 -1.000000
4 -16.000000 -1.000000
5 -15.000000 -1.000000
6 -14.000000 -1.000000
7 -13.000000 -1.000000
8 -12.000000 -1.000000
9 -11.000000 -1.000000
10 -10.000000 -1.000000
11 -9.000000 -1.000000
12 -8.000000 -1.000000
13 -7.000000 -1.000000
14 -6.000000 -1.000000
15 -5.000000 -1.000000
16 -4.000000 -1.000000
17 -3.000000 -1.000000
18 -2.000000 -1.000000
19 -1.000000 -1.000000
20 0.000000 -1.000000
21 1.000000 -1.000000
22 2.000000 -1.000000
23 3.000000 -1.000000
24 4.000000 -1.000000
25 5.000000 -1.000000
26 6.000000 -1.000000
27 7.000000 -1.000000
28 8.000000 -1.000000
29 9.000000 -1.000000
30 10.000000 -1.000000
31 11.000000 -1.000000
32 12.000000 -1.000000
33 13.000000 -1.000000
34 14.000000 -1.000000
35 15.000000 -1.000000
36 16.000000 -1.000000
37 17.000000 -1.000000
38 18.000000 -1.000000
39 19.000000 -1.000000
40 -19.000000 -2.000000
41 -18.000000 -2.000000
42 -17.000000 -2.000000
43 -16.000000 -2.000000
44 -15.000000 -2.000000
45 -14.000000 -2.000000
46 -13.000000 -2.000000
47 -12.000000 -2.000000
48 -11.000000 -2.000000
49 -10.000000 -2.000000
50 -9.000000 -2.000000
51 -8.000000 -2.000000

52 -7.000000 -2.000000
53 -6.000000 -2.000000
54 -5.000000 -2.000000
55 -4.000000 -2.000000
56 -3.000000 -2.000000
57 -2.000000 -2.000000
58 -1.000000 -2.000000
59 0.000000 -2.000000
60 1.000000 -2.000000
61 2.000000 -2.000000
62 3.000000 -2.000000
63 4.000000 -2.000000
64 5.000000 -2.000000
65 6.000000 -2.000000
66 7.000000 -2.000000
67 8.000000 -2.000000
68 9.000000 -2.000000
69 10.000000 -2.000000
70 11.000000 -2.000000
71 12.000000 -2.000000
72 13.000000 -2.000000
73 14.000000 -2.000000
74 15.000000 -2.000000
75 16.000000 -2.000000
76 17.000000 -2.000000
77 18.000000 -2.000000
78 19.000000 -2.000000
79 -19.000000 -3.000000
80 -18.000000 -3.000000
81 -17.000000 -3.000000
82 -16.000000 -3.000000
83 -15.000000 -3.000000
84 -14.000000 -3.000000
85 -13.000000 -3.000000
86 -12.000000 -3.000000
87 -11.000000 -3.000000
88 -10.000000 -3.000000
89 -9.000000 -3.000000
90 -8.000000 -3.000000
91 -7.000000 -3.000000
92 -6.000000 -3.000000
93 -5.000000 -3.000000
94 -4.000000 -3.000000
95 -3.000000 -3.000000
96 -2.000000 -3.000000
97 -1.000000 -3.000000
98 0.000000 -3.000000
99 1.000000 -3.000000
100 2.000000 -3.000000
101 3.000000 -3.000000

102 4.000000 -3.000000
103 5.000000 -3.000000
104 6.000000 -3.000000
105 7.000000 -3.000000
106 8.000000 -3.000000
107 9.000000 -3.000000
108 10.000000 -3.000000
109 11.000000 -3.000000
110 12.000000 -3.000000
111 13.000000 -3.000000
112 14.000000 -3.000000
113 15.000000 -3.000000
114 16.000000 -3.000000
115 17.000000 -3.000000
116 18.000000 -3.000000
117 19.000000 -3.000000
118 -19.000000 -4.000000
119 -18.000000 -4.000000
120 -17.000000 -4.000000
121 -16.000000 -4.000000
122 -15.000000 -4.000000
123 -14.000000 -4.000000
124 -13.000000 -4.000000
125 -12.000000 -4.000000
126 -11.000000 -4.000000
127 -10.000000 -4.000000
128 -9.000000 -4.000000
129 -8.000000 -4.000000
130 -7.000000 -4.000000
131 -6.000000 -4.000000
132 -5.000000 -4.000000
133 -4.000000 -4.000000
134 -3.000000 -4.000000
135 -2.000000 -4.000000
136 -1.000000 -4.000000
137 0.000000 -4.000000
138 1.000000 -4.000000
139 2.000000 -4.000000
140 3.000000 -4.000000
141 4.000000 -4.000000
142 5.000000 -4.000000
143 6.000000 -4.000000
144 7.000000 -4.000000
145 8.000000 -4.000000
146 9.000000 -4.000000
147 10.000000 -4.000000
148 11.000000 -4.000000
149 12.000000 -4.000000
150 13.000000 -4.000000
151 14.000000 -4.000000

152 15.000000 -4.000000
153 16.000000 -4.000000
154 17.000000 -4.000000
155 18.000000 -4.000000
156 19.000000 -4.000000
157 -19.000000 -5.000000
158 -18.000000 -5.000000
159 -17.000000 -5.000000
160 -16.000000 -5.000000
161 -15.000000 -5.000000
162 -14.000000 -5.000000
163 -13.000000 -5.000000
164 -12.000000 -5.000000
165 -11.000000 -5.000000
166 -10.000000 -5.000000
167 -9.000000 -5.000000
168 -8.000000 -5.000000
169 -7.000000 -5.000000
170 -6.000000 -5.000000
171 -5.000000 -5.000000
172 -4.000000 -5.000000
173 -3.000000 -5.000000
174 -2.000000 -5.000000
175 -1.000000 -5.000000
176 0.000000 -5.000000
177 1.000000 -5.000000
178 2.000000 -5.000000
179 3.000000 -5.000000
180 4.000000 -5.000000
181 5.000000 -5.000000
182 6.000000 -5.000000
183 7.000000 -5.000000
184 8.000000 -5.000000
185 9.000000 -5.000000
186 10.000000 -5.000000
187 11.000000 -5.000000
188 12.000000 -5.000000
189 13.000000 -5.000000
190 14.000000 -5.000000
191 15.000000 -5.000000
192 16.000000 -5.000000
193 17.000000 -5.000000
194 18.000000 -5.000000
195 19.000000 -5.000000
196 -19.000000 -6.000000
197 -18.000000 -6.000000
198 -17.000000 -6.000000
199 -16.000000 -6.000000
200 -15.000000 -6.000000
201 -14.000000 -6.000000

202 -13.000000 -6.000000
203 -12.000000 -6.000000
204 -11.000000 -6.000000
205 -10.000000 -6.000000
206 -9.000000 -6.000000
207 -8.000000 -6.000000
208 -7.000000 -6.000000
209 -6.000000 -6.000000
210 -5.000000 -6.000000
211 -4.000000 -6.000000
212 -3.000000 -6.000000
213 -2.000000 -6.000000
214 -1.000000 -6.000000
215 0.000000 -6.000000
216 1.000000 -6.000000
217 2.000000 -6.000000
218 3.000000 -6.000000
219 4.000000 -6.000000
220 5.000000 -6.000000
221 6.000000 -6.000000
222 7.000000 -6.000000
223 8.000000 -6.000000
224 9.000000 -6.000000
225 10.000000 -6.000000
226 11.000000 -6.000000
227 12.000000 -6.000000
228 13.000000 -6.000000
229 14.000000 -6.000000
230 15.000000 -6.000000
231 16.000000 -6.000000
232 17.000000 -6.000000
233 18.000000 -6.000000
234 19.000000 -6.000000
235 -19.000000 -7.000000
236 -18.000000 -7.000000
237 -17.000000 -7.000000
238 -16.000000 -7.000000
239 -15.000000 -7.000000
240 -14.000000 -7.000000
241 -13.000000 -7.000000
242 -12.000000 -7.000000
243 -11.000000 -7.000000
244 -10.000000 -7.000000
245 -9.000000 -7.000000
246 -8.000000 -7.000000
247 -7.000000 -7.000000
248 -6.000000 -7.000000
249 -5.000000 -7.000000
250 -4.000000 -7.000000
251 -3.000000 -7.000000

252 -2.000000 -7.000000
253 -1.000000 -7.000000
254 0.000000 -7.000000
255 1.000000 -7.000000
256 2.000000 -7.000000
257 3.000000 -7.000000
258 4.000000 -7.000000
259 5.000000 -7.000000
260 6.000000 -7.000000
261 7.000000 -7.000000
262 8.000000 -7.000000
263 9.000000 -7.000000
264 10.000000 -7.000000
265 11.000000 -7.000000
266 12.000000 -7.000000
267 13.000000 -7.000000
268 14.000000 -7.000000
269 15.000000 -7.000000
270 16.000000 -7.000000
271 17.000000 -7.000000
272 18.000000 -7.000000
273 19.000000 -7.000000
274 -19.000000 -8.000000
275 -18.000000 -8.000000
276 -17.000000 -8.000000
277 -16.000000 -8.000000
278 -15.000000 -8.000000
279 -14.000000 -8.000000
280 -13.000000 -8.000000
281 -12.000000 -8.000000
282 -11.000000 -8.000000
283 -10.000000 -8.000000
284 -9.000000 -8.000000
285 -8.000000 -8.000000
286 -7.000000 -8.000000
287 -6.000000 -8.000000
288 -5.000000 -8.000000
289 -4.000000 -8.000000
290 -3.000000 -8.000000
291 -2.000000 -8.000000
292 -1.000000 -8.000000
293 0.000000 -8.000000
294 1.000000 -8.000000
295 2.000000 -8.000000
296 3.000000 -8.000000
297 4.000000 -8.000000
298 5.000000 -8.000000
299 6.000000 -8.000000
300 7.000000 -8.000000
301 8.000000 -8.000000

302 9.000000 -8.000000
303 10.000000 -8.000000
304 11.000000 -8.000000
305 12.000000 -8.000000
306 13.000000 -8.000000
307 14.000000 -8.000000
308 15.000000 -8.000000
309 16.000000 -8.000000
310 17.000000 -8.000000
311 18.000000 -8.000000
312 19.000000 -8.000000
313 -19.000000 -9.000000
314 -18.000000 -9.000000
315 -17.000000 -9.000000
316 -16.000000 -9.000000
317 -15.000000 -9.000000
318 -14.000000 -9.000000
319 -13.000000 -9.000000
320 -12.000000 -9.000000
321 -11.000000 -9.000000
322 -10.000000 -9.000000
323 -9.000000 -9.000000
324 -8.000000 -9.000000
325 -7.000000 -9.000000
326 -6.000000 -9.000000
327 -5.000000 -9.000000
328 -4.000000 -9.000000
329 -3.000000 -9.000000
330 -2.000000 -9.000000
331 -1.000000 -9.000000
332 0.000000 -9.000000
333 1.000000 -9.000000
334 2.000000 -9.000000
335 3.000000 -9.000000
336 4.000000 -9.000000
337 5.000000 -9.000000
338 6.000000 -9.000000
339 7.000000 -9.000000
340 8.000000 -9.000000
341 9.000000 -9.000000
342 10.000000 -9.000000
343 11.000000 -9.000000
344 12.000000 -9.000000
345 13.000000 -9.000000
346 14.000000 -9.000000
347 15.000000 -9.000000
348 16.000000 -9.000000
349 17.000000 -9.000000
350 18.000000 -9.000000
351 19.000000 -9.000000

352 -19.000000 -10.000000
353 -18.000000 -10.000000
354 -17.000000 -10.000000
355 -16.000000 -10.000000
356 -15.000000 -10.000000
357 -14.000000 -10.000000
358 -13.000000 -10.000000
359 -12.000000 -10.000000
360 -11.000000 -10.000000
361 -10.000000 -10.000000
362 -9.000000 -10.000000
363 -8.000000 -10.000000
364 -7.000000 -10.000000
365 -6.000000 -10.000000
366 -5.000000 -10.000000
367 -4.000000 -10.000000
368 -3.000000 -10.000000
369 -2.000000 -10.000000
370 -1.000000 -10.000000
371 0.000000 -10.000000
372 1.000000 -10.000000
373 2.000000 -10.000000
374 3.000000 -10.000000
375 4.000000 -10.000000
376 5.000000 -10.000000
377 6.000000 -10.000000
378 7.000000 -10.000000
379 8.000000 -10.000000
380 9.000000 -10.000000
381 10.000000 -10.000000
382 11.000000 -10.000000
383 12.000000 -10.000000
384 13.000000 -10.000000
385 14.000000 -10.000000
386 15.000000 -10.000000
387 16.000000 -10.000000
388 17.000000 -10.000000
389 18.000000 -10.000000
390 19.000000 -10.000000
391 -19.000000 -11.000000
392 -18.000000 -11.000000
393 -17.000000 -11.000000
394 -16.000000 -11.000000
395 -15.000000 -11.000000
396 -14.000000 -11.000000
397 -13.000000 -11.000000
398 -12.000000 -11.000000
399 -11.000000 -11.000000
400 -10.000000 -11.000000
401 -9.000000 -11.000000

402 -8.000000 -11.000000
403 -7.000000 -11.000000
404 -6.000000 -11.000000
405 -5.000000 -11.000000
406 -4.000000 -11.000000
407 -3.000000 -11.000000
408 -2.000000 -11.000000
409 -1.000000 -11.000000
410 0.000000 -11.000000
411 1.000000 -11.000000
412 2.000000 -11.000000
413 3.000000 -11.000000
414 4.000000 -11.000000
415 5.000000 -11.000000
416 6.000000 -11.000000
417 7.000000 -11.000000
418 8.000000 -11.000000
419 9.000000 -11.000000
420 10.000000 -11.000000
421 11.000000 -11.000000
422 12.000000 -11.000000
423 13.000000 -11.000000
424 14.000000 -11.000000
425 15.000000 -11.000000
426 16.000000 -11.000000
427 17.000000 -11.000000
428 18.000000 -11.000000
429 19.000000 -11.000000
430 -19.000000 -12.000000
431 -18.000000 -12.000000
432 -17.000000 -12.000000
433 -16.000000 -12.000000
434 -15.000000 -12.000000
435 -14.000000 -12.000000
436 -13.000000 -12.000000
437 -12.000000 -12.000000
438 -11.000000 -12.000000
439 -10.000000 -12.000000
440 -9.000000 -12.000000
441 -8.000000 -12.000000
442 -7.000000 -12.000000
443 -6.000000 -12.000000
444 -5.000000 -12.000000
445 -4.000000 -12.000000
446 -3.000000 -12.000000
447 -2.000000 -12.000000
448 -1.000000 -12.000000
449 0.000000 -12.000000
450 1.000000 -12.000000
451 2.000000 -12.000000

452 3.000000 -12.000000
453 4.000000 -12.000000
454 5.000000 -12.000000
455 6.000000 -12.000000
456 7.000000 -12.000000
457 8.000000 -12.000000
458 9.000000 -12.000000
459 10.000000 -12.000000
460 11.000000 -12.000000
461 12.000000 -12.000000
462 13.000000 -12.000000
463 14.000000 -12.000000
464 15.000000 -12.000000
465 16.000000 -12.000000
466 17.000000 -12.000000
467 18.000000 -12.000000
468 19.000000 -12.000000
469 -19.000000 -13.000000
470 -18.000000 -13.000000
471 -17.000000 -13.000000
472 -16.000000 -13.000000
473 -15.000000 -13.000000
474 -14.000000 -13.000000
475 -13.000000 -13.000000
476 -12.000000 -13.000000
477 -11.000000 -13.000000
478 -10.000000 -13.000000
479 -9.000000 -13.000000
480 -8.000000 -13.000000
481 -7.000000 -13.000000
482 -6.000000 -13.000000
483 -5.000000 -13.000000
484 -4.000000 -13.000000
485 -3.000000 -13.000000
486 -2.000000 -13.000000
487 -1.000000 -13.000000
488 0.000000 -13.000000
489 1.000000 -13.000000
490 2.000000 -13.000000
491 3.000000 -13.000000
492 4.000000 -13.000000
493 5.000000 -13.000000
494 6.000000 -13.000000
495 7.000000 -13.000000
496 8.000000 -13.000000
497 9.000000 -13.000000
498 10.000000 -13.000000
499 11.000000 -13.000000
500 12.000000 -13.000000
501 13.000000 -13.000000

502 14.000000 -13.000000
503 15.000000 -13.000000
504 16.000000 -13.000000
505 17.000000 -13.000000
506 18.000000 -13.000000
507 19.000000 -13.000000
508 -19.000000 -14.000000
509 -18.000000 -14.000000
510 -17.000000 -14.000000
511 -16.000000 -14.000000
512 -15.000000 -14.000000
513 -14.000000 -14.000000
514 -13.000000 -14.000000
515 -12.000000 -14.000000
516 -11.000000 -14.000000
517 -10.000000 -14.000000
518 -9.000000 -14.000000
519 -8.000000 -14.000000
520 -7.000000 -14.000000
521 -6.000000 -14.000000
522 -5.000000 -14.000000
523 -4.000000 -14.000000
524 -3.000000 -14.000000
525 -2.000000 -14.000000
526 -1.000000 -14.000000
527 0.000000 -14.000000
528 1.000000 -14.000000
529 2.000000 -14.000000
530 3.000000 -14.000000
531 4.000000 -14.000000
532 5.000000 -14.000000
533 6.000000 -14.000000
534 7.000000 -14.000000
535 8.000000 -14.000000
536 9.000000 -14.000000
537 10.000000 -14.000000
538 11.000000 -14.000000
539 12.000000 -14.000000
540 13.000000 -14.000000
541 14.000000 -14.000000
542 15.000000 -14.000000
543 16.000000 -14.000000
544 17.000000 -14.000000
545 18.000000 -14.000000
546 19.000000 -14.000000
547 -19.000000 -15.000000
548 -18.000000 -15.000000
549 -17.000000 -15.000000
550 -16.000000 -15.000000
551 -15.000000 -15.000000

552 -14.000000 -15.000000
553 -13.000000 -15.000000
554 -12.000000 -15.000000
555 -11.000000 -15.000000
556 -10.000000 -15.000000
557 -9.000000 -15.000000
558 -8.000000 -15.000000
559 -7.000000 -15.000000
560 -6.000000 -15.000000
561 -5.000000 -15.000000
562 -4.000000 -15.000000
563 -3.000000 -15.000000
564 -2.000000 -15.000000
565 -1.000000 -15.000000
566 0.000000 -15.000000
567 1.000000 -15.000000
568 2.000000 -15.000000
569 3.000000 -15.000000
570 4.000000 -15.000000
571 5.000000 -15.000000
572 6.000000 -15.000000
573 7.000000 -15.000000
574 8.000000 -15.000000
575 9.000000 -15.000000
576 10.000000 -15.000000
577 11.000000 -15.000000
578 12.000000 -15.000000
579 13.000000 -15.000000
580 14.000000 -15.000000
581 15.000000 -15.000000
582 16.000000 -15.000000
583 17.000000 -15.000000
584 18.000000 -15.000000
585 19.000000 -15.000000
586 -19.000000 -16.000000
587 -18.000000 -16.000000
588 -17.000000 -16.000000
589 -16.000000 -16.000000
590 -15.000000 -16.000000
591 -14.000000 -16.000000
592 -13.000000 -16.000000
593 -12.000000 -16.000000
594 -11.000000 -16.000000
595 -10.000000 -16.000000
596 -9.000000 -16.000000
597 -8.000000 -16.000000
598 -7.000000 -16.000000
599 -6.000000 -16.000000
600 -5.000000 -16.000000
601 -4.000000 -16.000000

602 -3.000000 -16.000000
603 -2.000000 -16.000000
604 -1.000000 -16.000000
605 0.000000 -16.000000
606 1.000000 -16.000000
607 2.000000 -16.000000
608 3.000000 -16.000000
609 4.000000 -16.000000
610 5.000000 -16.000000
611 6.000000 -16.000000
612 7.000000 -16.000000
613 8.000000 -16.000000
614 9.000000 -16.000000
615 10.000000 -16.000000
616 11.000000 -16.000000
617 12.000000 -16.000000
618 13.000000 -16.000000
619 14.000000 -16.000000
620 15.000000 -16.000000
621 16.000000 -16.000000
622 17.000000 -16.000000
623 18.000000 -16.000000
624 19.000000 -16.000000
625 -19.000000 -17.000000
626 -18.000000 -17.000000
627 -17.000000 -17.000000
628 -16.000000 -17.000000
629 -15.000000 -17.000000
630 -14.000000 -17.000000
631 -13.000000 -17.000000
632 -12.000000 -17.000000
633 -11.000000 -17.000000
634 -10.000000 -17.000000
635 -9.000000 -17.000000
636 -8.000000 -17.000000
637 -7.000000 -17.000000
638 -6.000000 -17.000000
639 -5.000000 -17.000000
640 -4.000000 -17.000000
641 -3.000000 -17.000000
642 -2.000000 -17.000000
643 -1.000000 -17.000000
644 0.000000 -17.000000
645 1.000000 -17.000000
646 2.000000 -17.000000
647 3.000000 -17.000000
648 4.000000 -17.000000
649 5.000000 -17.000000
650 6.000000 -17.000000
651 7.000000 -17.000000

652 8.000000 -17.000000
653 9.000000 -17.000000
654 10.000000 -17.000000
655 11.000000 -17.000000
656 12.000000 -17.000000
657 13.000000 -17.000000
658 14.000000 -17.000000
659 15.000000 -17.000000
660 16.000000 -17.000000
661 17.000000 -17.000000
662 18.000000 -17.000000
663 19.000000 -17.000000
664 -19.000000 -18.000000
665 -18.000000 -18.000000
666 -17.000000 -18.000000
667 -16.000000 -18.000000
668 -15.000000 -18.000000
669 -14.000000 -18.000000
670 -13.000000 -18.000000
671 -12.000000 -18.000000
672 -11.000000 -18.000000
673 -10.000000 -18.000000
674 -9.000000 -18.000000
675 -8.000000 -18.000000
676 -7.000000 -18.000000
677 -6.000000 -18.000000
678 -5.000000 -18.000000
679 -4.000000 -18.000000
680 -3.000000 -18.000000
681 -2.000000 -18.000000
682 -1.000000 -18.000000
683 0.000000 -18.000000
684 1.000000 -18.000000
685 2.000000 -18.000000
686 3.000000 -18.000000
687 4.000000 -18.000000
688 5.000000 -18.000000
689 6.000000 -18.000000
690 7.000000 -18.000000
691 8.000000 -18.000000
692 9.000000 -18.000000
693 10.000000 -18.000000
694 11.000000 -18.000000
695 12.000000 -18.000000
696 13.000000 -18.000000
697 14.000000 -18.000000
698 15.000000 -18.000000
699 16.000000 -18.000000
700 17.000000 -18.000000
701 18.000000 -18.000000

702 19.000000 -18.000000
703 -19.000000 -19.000000
704 -18.000000 -19.000000
705 -17.000000 -19.000000
706 -16.000000 -19.000000
707 -15.000000 -19.000000
708 -14.000000 -19.000000
709 -13.000000 -19.000000
710 -12.000000 -19.000000
711 -11.000000 -19.000000
712 -10.000000 -19.000000
713 -9.000000 -19.000000
714 -8.000000 -19.000000
715 -7.000000 -19.000000
716 -6.000000 -19.000000
717 -5.000000 -19.000000
718 -4.000000 -19.000000
719 -3.000000 -19.000000
720 -2.000000 -19.000000
721 -1.000000 -19.000000
722 0.000000 -19.000000
723 1.000000 -19.000000
724 2.000000 -19.000000
725 3.000000 -19.000000
726 4.000000 -19.000000
727 5.000000 -19.000000
728 6.000000 -19.000000
729 7.000000 -19.000000
730 8.000000 -19.000000
731 9.000000 -19.000000
732 10.000000 -19.000000
733 11.000000 -19.000000
734 12.000000 -19.000000
735 13.000000 -19.000000
736 14.000000 -19.000000
737 15.000000 -19.000000
738 16.000000 -19.000000
739 17.000000 -19.000000
740 18.000000 -19.000000
741 19.000000 -19.000000

Displacement_Boundary_Conditions_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)

26 0 0

1 1 0.00

2 1 0.00

3 1 0.00

4 1 0.00

5 1 0.00

6 2 0.00

7 2 0.00

8 2 0.00

9 2 0.00
10 2 0.00
11 2 0.00
12 2 0.00
13 2 0.00
14 2 0.00
15 2 0.00
16 1 0.00
17 1 0.00
18 1 0.00
19 1 0.00
20 1 0.00
21 2 0.00
22 2 0.00
23 2 0.00
28 2 0.00
29 2 0.00
30 2 0.00
Traction_Boundary_Conditions_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)
8 0 0
24 2 50.00
25 2 50.00
26 2 50.00
27 2 50.00
24 1 30.00
25 1 30.00
26 1 30.00
27 1 30.00
Constrained_Unknowns_(ELEMENT,L-NODE,G-NODE)
0 0 0
Crack_Propagation_(Number_OF_Crack-Extension_Increments)
0