



Universidade de Brasília
Programa de Pós-Graduação em Física
Instituto de Física

Breytner Ribeiro Moraes

Sobre a Termodinâmica Gravitacional no Universo FLRW

Brasília - DF

2023

Breytner Ribeiro Morais

Sobre a Termodinâmica Gravitacional no Universo FLRW

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa

Brasília - DF

2023

“Creator ineffabilis, qui de thesauris sapientiae tuae tres Angelorum hierarchias designasti et eas super caelum empyreum miro ordine collocasti atque universi partes elegantissime distribuisti: Tu, inquam, qui verus fons luminis et sapientiae diceris ac supereminens principium, infundere digneris super intellectus mei tenebras tuae radium claritatis, duplices, in quibus natus sum, a me removens tenebras, peccatum scilicet et ignorantiam. Tu, qui linguas infantium facis disertas, linguam meam erudias atque in labiis meis gratiam tuae benedictionis infundas. Da mihi intelligendi acumen, retinendi capacitatem, addiscendi modum et facilitatem, interpretandi subtilitatem, loquendi gratiam copiosam. Ingressum instruas, progressum dirigas, egressum compleas. Tu, qui es verus Deus et homo, qui vivis et regnas in saecula saeculorum. Amen.”

(Oração de Santo Tomás de Aquino)

Agradecimentos

A Deus em primeiríssimo lugar, aos meus pais, ao meu orientador, aos meus amigos e a todos que me apoiaram...

Resumo

A solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é a sugestão de uma métrica aplicável às equações de Einstein e que descreve um universo isotrópico e homogêneo que pode estar expandindo ou contraindo de forma acelerada. Dados observacionais recentes sugerem que o presente universo é aproximadamente plano e que este está expandindo acelerado. Neste trabalho, no contexto do Teleparallelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG), tentaremos entender a razão pela qual o universo, baseado no modelo de FLRW, está expandindo de forma acelerada. Apresentaremos também uma relação para a primeira lei da termodinâmica para a superfície do horizonte aparente do modelo de FLRW, de onde extrairemos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente. E a partir de um modelo de universo primordial e vazio, onde se aplica o procedimento de quantização de Weyl, obtendo valores para a discretização da energia, faremos um estudo da termodinâmica desse sistema com propriedades de um ensemble canônico.

Abstract

The Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) solution is the suggestion of a metric applicable to Einstein's equations and that describes an isotropic and homogeneous universe that may be expanding or contracting in an accelerated way. Recent observational data suggests that the present universe is approximately flat and that it is expanding accelerated. In this work, in the context of the Teleparallelism Equivalent of General Relativity (TEGR), we will try to understand the cause on which the universe, based in the FLRW model, is expanding in an accelerated way. We also present a relation to the first law of thermodynamics to the apparent horizon of the FLRW model, and from this relation we will obtain an expression to the temperature at the apparent horizon. And, based on a model of a primordial and empty universe where the Weyl quantization procedure is applied, obtaining values for the energy discretization, a study of the thermodynamics of this system will be carried out with the properties of a canonical ensemble.

Sumário

1	Introdução	7
2	A Teoria da Gravitação de Einstein	10
2.1	A Teoria da Relatividade	10
2.2	Geometria Riemanianna e os fundamentos da RG	15
2.3	Equações de Einstein	19
3	Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral	22
3.1	Introdução	22
3.2	Campos de tetradas e o espaço-tempo de Weitzenböck	23
3.3	Formalismo Lagrangiano do TERG	26
3.4	Formalismo Hamiltoniano do TERG	28
3.5	Expressões para a energia e a pressão	31
4	A métrica FLRW e o TERG	33
4.1	O modelo FLRW	33
4.2	Tetradas para a métrica FLRW	36
4.3	Energia e pressão no universo de FLRW	37
4.4	Primeira lei da termodinâmica para o horizonte aparente	41
5	A cosmologia quântica e o TERG	44
5.1	Quantização de Weyl	45
5.2	Cosmologia Quântica e o TERG	46
6	Termodinâmica gravitacional via quantização de Weyl no contexto do TERG	49
6.1	Aplicação da distribuição de Bose-Einstein aos fótons	51
6.2	O universo preenchido pelo gás de grávitons	54
7	Considerações finais	59

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia, como ramo da física moderna, tornou-se uma área rica que envolve praticamente todos os assuntos relacionados às descobertas que revolucionaram as teorias clássicas. Começando com a Teoria da Relatividade Especial (RE) de Einstein, baseada no princípio de que as leis da física assumem a mesma forma em todo referencial inercial, que foi desenvolvida inicialmente para descrever eventos observados de diferentes referenciais inerciais ou seja, referenciais que não estão acelerados uns em relação aos outros. Posteriormente, baseado no princípio da equivalência, que estabelece a equivalência entre um sistema de referência uniformemente acelerado e um sistema de referência inercial na presença de um campo gravitacional homogêneo, Einstein desenvolveu sua teoria da gravitação ou teoria da relatividade geral. Nesta teoria Einstein propôs que a gravidade não fosse mais considerada como uma força no sentido convencional, mas sim como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença de matéria.

Na teoria da relatividade geral, o espaço tempo é descrito em termos de um tensor métrico e as equações desenvolvidas por Einstein para gravitação, ou simplesmente equações de Einstein, descrevem a dinâmica do espaço-tempo na presença ou não de matéria. Quando descrita em termos do tensor métrico, a teoria de Einstein permite que se defina apenas pseudos-tensores de energia-momento, que são quantidades dependentes de sistema de coordenadas, e portanto tal dependência implica na impossibilidade de se obter expressões bem definidas para energia e momento angular do campo gravitacional. Tais quantidades para distintos sistemas de coordenadas fornecem distintos valores.

Por meio de um formalismo alternativo equivalente à teoria da relatividade é possível se obter expressões bem definidas para energia, momento angular e pressão do campo gravitacional. Neste formalismo, chamado de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) [1–5], o campo gravitacional é descrito em termos de um campo de tétradas autoparalelas. A teoria é desenvolvida no espaço-tempo de Weitzenböck, onde a curvatura é nula e a torção é diferente de zero.

Uma solução exata das equações de Einstein é a solução de FLRW, que descreve a dinâmica de um modelo de universo homogêneo e isotrópico contendo um fluido perfeito

na presença ou não de uma constante cosmológica. Neste modelo o universo pode estar em expansão ou contração acelerada. Dados observacionais recentes indicam que o universo é aproximadamente plano e que o mesmo está em expansão acelerada. Neste trabalho, no contexto do TEGR, faremos um estudo sobre o comportamento do horizonte aparente (cujo significado será explicado) do modelo de universo de FLRW com o intuito de entender a expansão acelerada do universo. Baseado na primeira lei da termodinâmica estabeleceremos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente. Usaremos como entropia a forma padrão da literatura, isto é, a entropia será assumida como sendo um quarto da área do horizonte aparente. Após essa discussão, será feito um tratamento de quantização para um modelo de universo jovem e vazio. Isso é possível graças ao processo de quantização de Weyl que, diferentemente do procedimento canônico, permite uma correspondência clara entre os observáveis clássicos e quânticos.

A cosmologia quântica é uma área onde se estuda a gravidade em nível cosmológico com algum tratamento quântico, sendo isso essencial para saber como foram os primeiros instantes do universo, onde as distâncias envolvidas sugerem que efeitos quânticos sejam inevitáveis. É necessário que se tenha ação gravitacional em todos os pontos e isso quer dizer que, com uma gravidade quantizada e devidamente aplicada, se abre o caminho para compreender eventos como a inflação. Inflação é um período que estaria relacionado com a radiação cósmica de fundo (CMB ou *Cosmic Microwave Background*). A CMB, vista em pequenos ângulos do universo, traz uma anisotropia que não pode ser explicada pelos modelos que se tem de inflação. E essa anisotropia é devido a efeitos quânticos da gravidade.

A partir de uma cosmologia quântica que tem por base o TEGR e a quantização de Weyl aplicados ao modelo de FLRW [6], de onde se obtém expressões de energia e densidade de energia gravitacional cosmológica, pode-se fazer um tratamento estatístico para os supostos grávitons. De modo análogo aos fótons do eletromagnetismo, os grávitons também seriam os bósons responsáveis por uma interação fundamental da natureza. O objetivo desse trabalho é desenvolver a mecânica estatística desse modelo de quantização da gravitação em escala cosmológica. Isso será feito para um jovem universo que ainda não possui matéria, mas, apenas os grávitons em questão.

Obter expressões para uma função de partição, entropia, temperatura, calor específico e, por exemplo, estudos futuros de transições de fase desse universo primordial, dão relevância a esse trabalho de investigação das propriedades de um mundo inicialmente sem matéria. Pois, o modelo inflacionário propõe que o Universo teria experimentado uma transição de fase que o levou de um estado dominado pelo vácuo falso a um estado dominado pela radiação. Supondo ainda que ele pode após isso, por algum mecanismo, gerar os outros componentes do universo que se tem hoje.

Nos capítulos que se seguem, apresentamos uma breve introdução à Teoria da Relatividade Geral com o modelo de FLRW, um resumo do TEGR aplicado ao modelo do universo

de Friedmann, a quantização de Weyl com as expressões de energia quantizada para os grávitons e, finalmente, a termodinâmica aplicada ao modelo FLRW e o tratamento estatístico inicial dos resultados citados para essa discretização da energia gravitacional com as perspectivas de continuidade do trabalho.

Notação: os índices latinos do meio do alfabeto em diante, $i, j, k...$ representam índices do tipo espaço e assumem os valores 1, 2, 3. Os índices gregos e latinos do início do alfabeto são índices do espaço-tempo e do grupo $SO(3, 1)$ respectivamente. Eles variam de 0 a 3 da seguinte forma, $\alpha = \{0, i\}$, $a = \{(0), (i)\}$. Se adotará a convenção de Einstein e um sistema natural de unidades tal que $c = G = h = k_B = 1$.

Capítulo 2

A Teoria da Gravitação de Einstein

2.1 A Teoria da Relatividade

No contexto da mecânica clássica (MC) há uma importante discussão sobre a dinâmica e relatividade dos movimentos que leva a uma definição de dois tipos básicos de referenciais que, a partir do quais, podemos utilizar para descrever os movimentos das massas em geral. Tais referenciais são classificados em inerciais e não inerciais e se diferenciam, respectivamente, conforme neles se verifique ou não a validade das leis da mecânica newtoniana.

Para um observador sabidamente em um referencial inercial há um conjunto de equações, conhecidas como transformações de Galilei, que permitem relacionar as coordenadas de um evento físico registradas por ele com as coordenadas registradas por outro observador que está em outro referencial inercial. Dessas transformações se destacam a absolutividade das medidas de intervalos de tempo e de distâncias, levando a um modelo físico de universo com geometria euclidiana e teoricamente sem limite de velocidade para a propagação de informações. De modo simplificado, dois sistemas de referência inerciais só podem se diferir por diferentes orientações de seus eixos coordenados e por uma translação em um movimento relativo com velocidade constante.

Juntamente com a teoria da gravitação desenvolvida por Newton, descrevendo a interação das massas à distância, a MC fez com que a dinâmica dos corpos terrestres e celestes ficasse aparentemente muito bem esclarecida até que, com a necessidade de encontrar os referenciais em que se pudessem aplicar as equações do eletromagnetismo de Maxwell, se percebeu no início do século XX que a luz, no vácuo, não possui um referencial especial para sua propagação. E assim, Einstein sugeriu que a luz deve se propagar com a mesma velocidade em todos os referenciais inerciais. Essa condição contraria a relatividade de Galilei e portanto, reconhecendo a validade das equações de Maxwell, houve a busca por uma nova teoria de uma mecânica que abrangesse o notável fato de haver evidências experimentais da constância na velocidade da luz para os diferentes observa-

dores.

Desse modo, o espaço e tempo absolutos de Newton deram lugar a uma nova estrutura, quadri-dimensional e pseudo-euclidiana, chamada espaço-tempo de Minkowski. Medidas de distância e tempo passam a ser relativas (dependentes do referencial específico de cada observador). Tudo isso em acordo com dois postulados feitos por Einstein, *(i)* as leis da física devem manter as suas formas em todos os referenciais inerciais (princípio de covariância das leis físicas) e *(ii)* a velocidade c da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

Essas foram as base da Teoria da Relatividade Especial (RE), onde percebe-se que o conceito de sistemas de referência continua sendo de fundamental importância e os referenciais inerciais são definidos pela validade da primeira lei de Newton (princípio da inércia), mantendo portanto algo em comum com o antigo modelo. A diferença fundamental nesta nova teoria está no modo como ficam relacionadas as coordenadas de um evento físico quando registradas por diferentes observadores inerciais pois, as transformações de Galilei dão lugar às transformações de Lorentz, surgindo os chamados efeitos relativísticos como, por exemplo, as contrações de distâncias, dilatações temporais e relatividade da simultaneidade.

Por exemplo, para um referencial inercial S' que se move apenas na direção do eixo x com uma velocidade constante v em relação a um referencial inercial S , as transformações de Lorentz, que relacionam as coordenadas de um evento P em relação aos dois sistemas de referência, podem ser escritas como

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Onde c é a velocidade da luz no vácuo, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e $\beta = v/c$. Essas transformações relacionam as coordenadas (x, y, z, t) de um evento P quando visto por um observador em S com as coordenadas (t', x', y', z') desse mesmo evento quando visto por um observador em S' . Neste caso se diz que (2.1) é um "boost" ao longo do eixo x .

As variáveis do sistema de equações (2.1) podem ser redefinidas em termos da notação de Einstein como $x^\mu = (t, x, y, z)$ onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $c = 1$, de modo que, em termos matriciais, o sistema (2.1) pode ser reescrito como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,\tag{2.2}$$

onde

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

e devemos ter $\Lambda^{\mu\nu}\Lambda_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$. Nesta notação, de forma implícita, há um somatório em um índice repetido desde que um deles apareça em cima e o outro apareça em baixo, tal como na equação (2.2).

De modo geral se considerarmos dois eventos separados infinitesimalmente um do outro num referencial S , o intervalo entre eles é dado, no espaço-tempo de Minkowski, por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4)$$

e tal intervalo é invariante por qualquer transformação de Lorentz $SO(3, 1)$ [8]. Ou seja, não importa o referencial inercial, sempre se tem

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.5)$$

onde a métrica pseudo-euclidiana $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu$ chamada métrica de Minkowski é um tensor de segunda ordem, invariante por transformações de Lorentz e é dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A dinâmica dos movimentos descrita pela RE possui toda uma reformulação em relação ao que se tinha em MC e gerou uma nova visão científica sobre o universo com os efeitos relativísticos. Destacando agora, por exemplo, a equivalência entre massa e energia e que existe uma velocidade limite no universo. Nenhum corpo material pode ser acelerado até atingir a velocidade da luz c e, mais ainda, nenhuma informação pode se propagar com valor superior a c . A RE se consolidou, mostra acordo com resultados experimentais e hoje é um grande pilar para física em teoria de campos, além de conter as transformações de Galilei e toda a MC como caso limite quando c tende a infinito.

Porém, logo após o nascimento da RE, uma generalização estava por vir. Einstein procurou expandir sua teoria para incluir os referenciais não inerciais, levando em consideração o fato de que um observador na presença de um campo gravitacional uniforme e um outro observador hipoteticamente livre da ação da gravidade mas, com uma aceleração constante visto de um terceiro referencial que seja inercial, possuem propriedades físicas equivalentes. Esse fenômeno é a base do Princípio da Equivalência, que estabe-

lece a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional dos corpos (hoje sabe-se experimentalmente que as massas inercial e gravitacional são iguais com uma incerteza menor do que 1 parte em 10^{11}) e é facilmente aplicável para campos gravitacionais uniformes. Para o caso de campos não uniformes esse princípio só possui validade local, sendo impossível equiparar todos os pontos de um campo gravitacional não uniforme a um referencial acelerado.

Einstein conseguiu contornar esse problema de aplicação utilizando a Geometria Riemanniana para descrever completamente os fenômenos gravitacionais. Agora, o espaço-tempo passa a ter uma geometria não euclidiana curva mas, localmente a geometria é pseudo-euclidiana e assim incorpora o princípio da equivalência, vindo a ser uma estrutura quadridimensional que se reduz ao espaço-tempo de Minkowski no caso especial de curvatura nula. Se não há curvatura também não há efeitos gravitacionais, ou seja, a gravidade seria compreendida não mais como uma força entre os corpos mas, como uma deformação do espaço-tempo causada pela presença da matéria. Esta é a ideia central que dá suporte à Teoria da Relatividade Geral (RG) que, mais uma vez e em um curto espaço de tempo na história da física, criou outra revolução no modo de compreender a estrutura do universo. A RG é a teoria da gravitação de Einstein e às vezes chamada também de teoria da covariância, por tornar todos os referenciais igualmente adequados para a aplicação das leis da física.

Os pontos do espaço-tempo na RG são descritos por quatro coordenadas arbitrárias $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Esse novo sistema de coordenadas mais geral é denominado de Coordenadas Gaussianas. Nesse sistema de coordenadas o intervalo que separa dois eventos infinitesimalmente próximos, ou elemento de linha, é dado pela forma quadrática

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico e é uma função das coordenadas x^μ . O termo $g_{\mu\nu} dx^\mu = dx_\nu$ fornece a regra de transformação das coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ para as coordenadas do espaço dual $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, de modo que o elemento de linha possa ser reescrito como $ds^2 = dx_\nu dx^\nu$.

O tensor métrico caracteriza a relação geométrica entre eventos próximos, ou seja, ele descreve a geometria do espaço-tempo e também, conseqüentemente, o campo gravitacional no sistema de coordenadas gaussianas, o que o torna a peça fundamental da RG. A utilidade do tensor métrico ainda vai além: com ele se realizam outras operações geométricas em espaços curvos, como o transporte paralelo de vetores e outros objetos matemáticos. Através dele que se obtém a expressão para a curvatura do espaço-tempo e o Tensor de Einstein que sumariza a interação da geometria com a matéria. A curvatura do espaço-tempo significa que não podemos encontrar sistemas de coordenadas nos quais $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ em todos os pontos do espaço-tempo ou seja, a presença de um campo

gravitacional distorce a geometria do espaço-tempo, gerando neste uma curvatura.

O tensor métrico pode variar sob transformações gerais de coordenadas contudo, a forma quadrática acima permanece invariante. A arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas no espaço-tempo de Riemann leva à definição do Princípio da Covariância Generalizada. Esse princípio afirma que as leis da física mantêm sua forma em todos os sistemas de coordenadas gaussianas, isto é, as leis da física devem ser covariantes sob transformações gerais de coordenadas.

Concluindo, Einstein incorporou em um só ramo de estudo a RE como caso limite, os referenciais acelerados e a interação gravitacional. Uma consequência dessa unificação teórica é que o caminho das massas livres de ação externa é uma linha geodésica no espaço-tempo encurvado pela matéria. As equações de geodésica irão descrever também a propagação da luz no campo gravitacional. Isso foi confirmado quando se observou, por exemplo, o desvio da luz vindo de uma estrela e passando perto do Sol (eclipse visto em Sobral pela expedição montada por Eddington em 1919, mostrando que o espaço-tempo é curvado pela massa solar). E em um pouco mais de um século a RG tem tido muitos sucessos com diversos experimentos e observações confirmando sua validade. Além dos desvios da luz na vizinhança de corpos massivos podemos citar o efeito relativístico na dinâmica do planeta Mercúrio, a física de buracos negros, detecção de ondas gravitacionais e a aplicação tecnológica no GPS (Global Positioning System).

2.2 Geometria Riemanianna e os fundamentos da RG

No contexto da teoria da RE, no espaço-tempo de Minkowski, um vetor é caracterizado pelo seu comportamento sob as transformações de Lorentz as quais deixam a forma quadrática $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ invariante. Por outro lado no contexto da teoria da relatividade geral, um vetor no espaço-tempo de Riemann é caracterizado pelo seu comportamento sob transformações de coordenadas generalizadas. Neste formalismo o desenvolvimento é feito através da questão fundamental em RG que é a determinação do tensor métrico, sendo este uma característica do espaço-tempo e não do referencial pois, o que muda ao se passar de um sistema de coordenadas para outro é apenas a expressão do tensor métrico com as coordenadas do novo sistema.

A quantidade A_μ será um vetor covariante sob transformações de coordenadas generalizadas se sua lei de transformação for dada por

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu, \quad (2.8)$$

ou seja, A_μ se transforma como um tensor por transformações gerais de coordenadas. Essa generalização é importante porque em espaços-tempo Riemannianos a simples diferenciação parcial de um vetor não mais se transformará como um tensor, o caráter tensorial que se tinha no espaço-tempo de Minkowski da derivada parcial é perdido em espaços-tempo Riemannianos. De modo análogo a quantidade A^μ será um vetor contravariante sob transformações de coordenadas generalizadas se sua lei de transformação for dada por

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (2.9)$$

Para que possamos construir um tensor por diferenciação, precisamos introduzir o conceito de derivada covariante. Para isto, seja dois pontos infinitesimalmente próximos um do outro com coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, então, vetorialmente, a separação infinitesimal entre eles é

$$ds = \mathbf{e}_\mu(x) dx^\mu, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{e}_\mu(x)$ são vetores de base. Da relação acima temos que

$$ds^2 = ds \cdot ds = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.11)$$

de onde se conclui que o tensor métrico é dado por $g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ e de onde segue que $g^{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$ onde \mathbf{e}^μ são vetores de base dual à base $\mathbf{e}_\mu(x)$. Em um sistema de coordenadas arbitrário x^ν sobre uma variedade, se considerarmos os vetores \mathbf{e}_μ em dois pontos infinitesimalmente próximos um do outro x^ν e $x^\nu + \delta x^\nu$, podemos obter a derivada

parcial de \mathbf{e}_ν , em relação a x^ν da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \left(\lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{e}_\mu}{\delta x^\nu} \right). \quad (2.12)$$

Em geral a derivada parcial acima não resulta em um vetor tangente à variedade no ponto x^ν , desta forma se define a derivada parcial de um vetor de base, em um ponto x^ν da variedade, projetando a quantidade acima no espaço tangente no ponto em questão da seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu \mathbf{e}_\mu = \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}(x) \mathbf{e}_\gamma(x), \quad (2.13)$$

onde os coeficientes $\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}(x)$ são chamados de conexões afins.

Seja agora um vetor de campo \mathbf{A} definido sobre alguma região de uma variedade Riemanniana. Se este vetor for escrito em termos de suas componentes covariantes e dos vetores de base, ou seja, $\mathbf{A} = A^\mu(x) \mathbf{e}_\mu(x)$, sua derivada parcial, usando o resultado apresentado na equação (2.13), será dada por

$$\partial_\nu \mathbf{A} = \partial_\nu (A^\mu \mathbf{e}_\mu) = (\nabla_\nu A^\mu) \mathbf{e}_\mu, \quad (2.14)$$

onde a quantidade

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\gamma\nu} A^\gamma, \quad (2.15)$$

é definida como a derivada covariante das componentes do vetor de campo \mathbf{A} . Usando a relação $\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_\nu^\mu$ podemos mostrar imediatamente que

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} A_\gamma. \quad (2.16)$$

A derivada covariante definida acima se transforma como um tensor por transformações gerais de coordenadas e é de fundamental importância na formulação da teoria da relatividade geral.

Essa última operação pode ser aplicada a tensores em geral [10]. Por exemplo, se tomar a derivada covariante do tensor métrico se obtém,

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = \partial_\beta g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} \quad (2.17)$$

e assumindo que as conexões afins são conexões métricas [11], ou seja, que o tensor métrico é constante em relação à derivada covariante ($\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$) segue que

$$\partial_\beta g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} + g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\beta}. \quad (2.18)$$

Fazendo uma permutação cíclica nos índices da equação (2.18) obtém-se

$$\partial_\nu g_{\beta\mu} = g_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} + g_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \quad (2.19)$$

e

$$\partial_\mu g_{\nu\beta} = g_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + g_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Agora assumindo que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ e somando as equações (2.19), (2.20) e subtraindo a equação (2.18), pode-se expressar a conexão afim em termos do tensor métrico como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.21)$$

Sendo que $g^{\mu\nu}$ representa a matriz inversa do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. As conexões afins, determinadas pela equação (2.21), são conhecidas como Símbolos de Christoffel (que serão renomeados mais a frente como $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, de modo que não se confundam com outro tipo de conexão).

Para resolver o problema de se medir a curvatura de um espaço-tempo Riemanniano em qualquer ponto da variedade, considera-se a troca na ordem de duas derivadas covariantes, as quais são generalização de derivadas parciais e que em geral não comutam. Seja um vetor de campo arbitrário A_β sobre uma variedade Riemanniana, calculando a diferença $\nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta$ se obtém facilmente o tensor [12]

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta = R^\alpha_{\beta\mu\nu} A_\alpha \quad (2.22)$$

onde

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \quad (2.23)$$

é o tensor de curvatura de Riemann que determina a curvatura em qualquer ponto do espaço-tempo Riemanniano.

A contração no primeiro e no terceiro índice do tensor de Riemann gera um tensor de segunda ordem, $R_{\beta\nu} = R^\alpha_{\beta\alpha\nu}$, chamado de tensor de Ricci, dado por

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \quad (2.24)$$

E, finalmente, contraindo os índices do tensor de Ricci se obtém o escalar de curvatura R dado por

$$R = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha\nu}_{\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha\nu}_{\alpha} - \Gamma^{\sigma\nu}_{\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma\nu}_{\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}, \quad (2.25)$$

onde, para se fazer as contrações usa-se o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ da seguinte forma: $\Gamma^{\alpha\nu}_{\alpha} = g^{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$.

Baixando o índice α na equação (2.23), o tensor de curvatura pode ser escrito como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\beta\nu}) + g_{\sigma\rho} (\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu}), \quad (2.26)$$

de onde segue imediatamente as seguintes propriedades de simetria

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.27)$$

isto é, o tensor de curvatura é antissimétrico nos índices α, β e μ, ν e simétrico nos pares de índices (α, β) e (μ, ν) . Também pode se verificar que a soma cíclica em quaisquer três índices de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é zero

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (2.28)$$

Em um ponto P de um sistema de coordenadas localmente geodésico ($\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$) $_P$, a derivada covariante do tensor de curvatura em P pode ser escrita como

$$(\nabla_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu})_P = (\partial_\rho R_{\alpha\beta\mu\nu})_P = (\partial_\rho \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_\rho \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta\mu})_P, \quad (2.29)$$

devido ao caráter tensorial de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, usando a equação (2.28) e o resultado acima, se obtém para qualquer ponto da variedade que

$$\nabla_\rho R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\beta R^\alpha_{\mu\nu\rho} + \nabla_\mu R^\alpha_{\nu\rho\beta} = 0, \quad (2.30)$$

que são as identidades de Bianchi. Usando as propriedades de simetrias apresentadas na equação (2.27) se obtém o seguinte resultado

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.31)$$

onde

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.32)$$

é o tensor de Einstein, que descreve a curvatura do espaço-tempo nas equações de campo da relatividade geral. Com todo esse ferramental matemático se descreve os efeitos dos campos gravitacionais modificando a geometria do espaço-tempo de Minkowski para uma geometria não euclidiana.

2.3 Equações de Einstein

No ano de 1915 Einstein publicou as equações de campo gravitacional, as quais descrevem como a matéria modifica a geometria do espaço-tempo. Na dedução de suas equações, baseadas em geometria diferencial, Einstein impôs que elas deveriam ser covariantes sob transformações de coordenadas generalizadas e, além disso, ele também impôs a validade local do princípio da equivalência para referenciais não inerciais. Uma maneira interessante de se obter as equações de Einstein foi desenvolvida por Hilbert também em 1915, a qual usa o princípio da mínima ação de Hamilton. Uma das vantagens de seguir esse caminho é que ele permite conectar mais naturalmente a teoria da relatividade geral com outras teorias de campos clássicas como por exemplo, o eletromagnetismo de Maxwell, que também pode ser formulado em termos do princípio da ação mínima.

A ação de Hilbert-Einstein [13] para o campo gravitacional no vácuo pode ser escrita como

$$I_g = \int \mathcal{L}_g d^4x = \kappa \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (2.33)$$

A integral acima é sobre todo o espaço-tempo, sendo que g é o determinante do tensor métrico, R é o escalar de curvatura de Ricci, $\mathcal{L}_g = \kappa\sqrt{-g}R$ é a densidade de lagrangiana do campo gravitacional e $\kappa = 1/16\pi$. Adicionando à ação acima, I_m , um termo devido a campos de matéria e que contém uma densidade de lagrangiana, $\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}L_m$, obtemos a ação total I dada por

$$I = I_g + I_m = \int [\kappa\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_m] d^4x, \quad (2.34)$$

que será considerada como um funcional do tensor métrico e suas primeiras derivadas.

Aplicando o princípio da mínima ação de Hamilton à integral de ação acima i.e, $\delta I = 0$, obtemos as equações de Einstein na presença de matéria. Para calcular a variação de I primeiramente vamos considerar apenas a parte gravitacional da ação ou seja,

$$\delta I_g = \int \kappa \delta(\sqrt{-g}R) d^4x = 0. \quad (2.35)$$

Lembrando que $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ e usando que $\delta\sqrt{-g} = -(\sqrt{-g}/2)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, a variação da parte gravitacional da ação I pode ser escrita como

$$\delta(\kappa\sqrt{-g}R) = \kappa\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} + \kappa\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Usando a relação $\nabla_\alpha(\sqrt{-g}l^\alpha) = \partial_\alpha(\sqrt{-g}l^\alpha)$, o último termo na equação (2.36) acima pode ser escrito como

$$\kappa\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \kappa\sqrt{-g}[\nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}) - \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu})] = \kappa\partial_\nu v^\nu, \quad (2.37)$$

onde

$$v^\nu \equiv [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})]. \quad (2.38)$$

O último termo na equação (2.36) pode ser transformado em um termo de superfície usando-se o teorema da divergência porém, mesmo para o caso de espaços-tempo assintoticamente planos este termo, quando levado na integral de ação I_g , pode não se anular no contorno do espaço-tempo [14]. Para se contornar este problema, adiciona-se à integral de ação do campo gravitacional um termo de superfície dado por,

$$\sigma = -[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})],$$

de modo que a ação gravitacional I_g passa a ser escrita como

$$I'_g = \kappa \int (\sqrt{-g}R + \sigma)d^4x, \quad (2.39)$$

que quando submetida ao princípio da ação mínima os termos de superfície que aparecerão serão nulos no contorno da integral de ação

$$\delta I'_g = \kappa \int \left[\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.40)$$

Para obter o cálculo da variação da ação da matéria I_m usa-se o teorema de Gauss e impõe-se que $\delta g^{\mu\nu} = 0$ [15] nos limites da integral de tal forma que obtém-se

$$\delta I_m = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.41)$$

Definindo o tensor de energia momento $T_{\mu\nu}$ dos campos de matéria como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \right], \quad (2.42)$$

a variação dada em (2.41) fica

$$\delta I_m = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.43)$$

Desta forma aplicando o princípio da ação mínima $\delta I = \delta I'_g + \delta I_m = 0$, segue das equações (2.40) e (2.43) que

$$\kappa \int \left[\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x - \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.44)$$

usando o fato de que $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário nas integrais acima, as equações de Einstein para

o campo gravitacional na presença de matéria ficam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Na tentativa de obter um modelo de universo estável, Einstein também deduziu uma equação para a gravitação com a presença de uma constante cosmológica Λ . Essa versão pode ser facilmente obtida ao se incluir o termo $-2\sqrt{-g}\Lambda$ na integral de ação $I = I'_g + I_m$, de modo que a integral de ação fica

$$I = \int \left[\kappa\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \sigma + \mathcal{L}_m \right] d^4x, \quad (2.46)$$

que quando submetida ao princípio da ação mínima $\delta I = 0$ resulta na equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Ambas as equações (2.45) e (2.47) propostas por Einstein descrevem uma relação entre a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo e a distribuição de matéria descrita pelo tensor $T_{\mu\nu}$, ou seja, estas equações descrevem como a geometria do espaço-tempo é afetada pela distribuição de matéria sem ou com a presença da constante cosmológica.

Capítulo 3

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral

3.1 Introdução

O Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG) é uma formulação da teoria da gravitação onde os efeitos do campo gravitacional são descritos em termos de um campo de tétradas autoparalelas. Neste formalismo o tensor de curvatura de Riemann é nulo porém os tensores de torção são não nulos e a teoria é agora desenvolvida no espaço-tempo de Weitzenböck [18]. Conforme veremos em acordo com o título deste capítulo, há uma explícita equivalência entre as equações de campo de Einstein e as equações de campo na formulação teleparalela. Ou seja, os efeitos gravitacionais podem ser descritos tanto em termos de espaço-tempo com curvatura não nula, como é feito na RG com as equações de Einstein que determinam o espaço-tempo de Riemann, como podem ser descritos em termos de um espaço-tempo com torção, como acontece no TERG, onde as equações de campo determinam campos de vetores paralelos do espaço-tempo de Weitzenböck.

A noção de paralelismo absoluto, utilizando um campo de tétradas para a descrição do campo gravitacional, foi introduzida por Einstein em 1928 [19, 20] na tentativa de uma unificação de sua teoria da gravitação com o eletromagnetismo. Posteriormente, Møller [21], baseado nas ideias de Einstein mostrou que só em termos de um campo de tétradas seria possível se obter uma densidade de lagrangiana que levaria a um tensor de energia momento gravitacional. Baseados nos trabalhos de Møller, Pellegrini e Plebanski, no início dos anos 60, obtiveram uma formulação lagrangiana para a gravitação em termos de tétradas [22]. E então, em 1963, Schwinger obteve uma expressão para a energia *total* do campo gravitacional [23].

Uma expressão para a energia do campo gravitacional para ser bem definida localmente deve depender de uma densidade de energia que seja independente de sistema de coordenadas. No contexto do TERG, vantajosamente, é possível mostrar que tal expressão

surge de modo natural. Outra vantagem deste formalismo é que, no contexto de sua formulação hamiltoniana, a evolução temporal da estrutura dos vínculos da teoria é bem definida. Além de uma expressão que permite calcular a energia gravitacional contida em um volume arbitrário do espaço, obtida com o TERG, também surge de forma natural uma equação da continuidade para o campo gravitacional a partir da qual obtém-se uma definição de pressão para o campo gravitacional [24].

Diante de tantas vantagens no TERG, surge então a possibilidade de um caminho alternativo para uma conciliação entre a teoria quântica e a gravitação que não se tem em RG. Esse assunto será abordado adiante, no quinto capítulo, com uma aplicação cosmológica em um modelo de universo primordial sem a presença de matéria.

3.2 Campos de tétradas e o espaço-tempo de Weitzenböck

Um campo de tétradas autoparalelas, também conhecido simplesmente por tétradas, é formado por um conjunto que possui quatro vetores linearmente independentes e ortogonais entre si, formando uma base adaptada a um sistema de coordenadas local, ou seja, em um ponto arbitrário x do espaço-tempo este conjunto é dado por

$$e^a{}_{\mu}(x) = \{e^{(0)}{}_{\mu}, e^{(1)}{}_{\mu}, e^{(2)}{}_{\mu}, e^{(3)}{}_{\mu}\}, \quad (3.1)$$

onde os índices $\mu = (0, 1, 2, 3)$ são índices do espaço-tempo e os índices $a = [(0), (1), (2), (3)]$ são índices do grupo $SO(3, 1)$ local de Lorentz. Sendo que o vetor $e^{(0)}{}_{\mu}(x)$ é do tipo tempo e os vetores $e^{(i)}{}_{\mu}(x)$ são do tipo espaço, com $i = (1, 2, 3)$.

O campo de tétradas satisfaz às seguintes relações de ortogonalidade

$$e^a{}_{\mu} e^{b\mu} = \eta^{ab}, \quad e_a{}^{\mu} e_{b\mu} = \eta_{ab}, \quad (3.2)$$

onde η^{ab} é a métrica de Minkowski, que pode ser utilizada para levantar e abaixar os índices locais de Lorentz da seguinte forma

$$e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b{}_{\mu},$$

e

$$e^{a\nu} = \eta^{ab} e_b{}^{\nu}.$$

De forma análoga, os índices do espaço-tempo do campo de tétradas podem ser abaixados ou levantados respectivamente, usando-se o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou o seu inverso $g^{\mu\nu}$ da

seguinte forma

$$e^a{}_{\mu} = g_{\mu\lambda} e^{a\lambda},$$

e

$$e_a{}^{\nu} = g^{\nu\lambda} e_{a\lambda}.$$

De onde segue facilmente uma relação entre as tétradas e o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e_{a\nu} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e^{a\mu} e_a{}^{\nu} = e^{a\mu} e^{b\nu} \eta_{ab}. \quad (3.3)$$

Desta forma, podemos observar que as tétradas convertem índices de Lorentz em índices do espaço-tempo e índices do espaço-tempo em índices de Lorentz.

A ocorrência de um paralelismo de vetores em pontos distantes do espaço-tempo, que é chamado de teleparalelismo, é garantido por meio de uma derivada covariante em relação a uma conexão com curvatura nula e torção diferente de zero. Em relação a esta conexão o transporte paralelo de vetores é independente de caminho e o transporte paralelo de vetores em relação a esta conexão é covariantemente constante [16]. Desta forma a derivada covariante das tétradas é nula em relação a esta conexão

$$\nabla_{\nu} e_a{}^{\mu} = \partial_{\nu} e_a{}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} e_a{}^{\lambda} = 0, \quad (3.4)$$

de onde segue que a conexão afim, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, é dada por

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} \partial_{\mu} e_{a\nu}. \quad (3.5)$$

Esta conexão é chamada de conexão de Weitzenböck [18], sendo assimétrica nos índices μ e ν .

As componentes de um vetor V^{μ} em um ponto x do espaço-tempo em relação à um campo de tétradas são dadas por $V^a(x) = e^a{}_{\mu}(x)V^{\mu}(x)$. Dizemos que os vetores são transportados paralelamente se suas componentes em relação ao campo de tétradas em pontos distintos são idênticas, ou seja, para pontos infinitesimalmente próximos temos que

$$V^a(x + dx) = V^a(x) + DV^a(x),$$

onde

$$DV^a(x) = e^a{}_{\nu}(x)(\nabla_{\mu} V^{\nu})(x)dx^{\mu} = 0 \rightarrow \nabla_{\mu} V^{\nu} = 0,$$

com a derivada covariante acima dada em termos da conexão (3.5). O fato desta derivada covariante se anular é o que garante o paralelismo absoluto de vetores e tensores.

Uma vez que a conexão afim dada na equação (3.5) é assimétrica esta gera um tensor de torção não nulo dado por

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}, \quad (3.6)$$

que contraído com $e^a{}_\lambda$ pode ser escrito como

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu. \quad (3.7)$$

Ao contrário do tensor de torção (3.6) que é não nulo, a conexão afim (3.5) quando levada na definição do tensor de Riemann (2.23), fornece um tensor de curvatura identicamente nulo. Este espaço-tempo dotado de um paralelismo absoluto dos vetores com torção não nula e curvatura identicamente nula é chamado espaço-tempo de Weitzenböck [18]. É neste espaço-tempo onde o teleparalelismo equivalente à relatividade geral TERG é desenvolvido.

3.3 Formalismo Lagrangiano do TERG

Apresentaremos agora a densidade de lagrangiana para o TERG, necessária para a construção das equações de campo e definições de densidade de energia, dentre outras quantidades físicas importantes, e a equivalência deste formalismo com a teoria da relatividade geral de Einstein. Para isto, reescreveremos os símbolos de Christoffel, os quais denotaremos a partir de agora, como $\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}$ em termos da conexão de Weitzenböck e da conexão de Levi-Civita na forma de uma identidade. E em seguida mostraremos que o escalar de curvatura construído em termos da conexão de Levi-Civita pode ser escrito em termos de uma combinação quadrática dos tensores de torção.

Para isto, seja o símbolo de Christoffel abaixo

$$\mathring{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (3.8)$$

usando a relação entre o campo de tetradas e o tensor métrico $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$, podemos reescrever a relação acima como uma identidade em termos das conexões de Levi-Civita e Weitzenböck, ou seja,

$$\mathring{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \mathring{\omega}_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde

$$\mathring{\omega}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2} (T_{\nu\mu\lambda} + T_{\mu\nu\lambda} + T_{\lambda\nu\mu}). \quad (3.10)$$

Este tensor definido em (3.10) está relacionado à conexão de Levi-Civita $\mathring{\omega}_{\mu ab}$ por

$$\mathring{\omega}_{\mu ab} = e_a{}^\lambda e_b{}^\nu \mathring{\omega}_{\mu\lambda\nu}. \quad (3.11)$$

O tensor de curvatura no TERG é construído em termos da conexão escrita em (3.11) e é dado por

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \mathring{\omega}_\mu{}^a{}_b + \mathring{\omega}_\mu{}^a{}_c \mathring{\omega}_\nu{}^c{}_b - \mathring{\omega}_\nu{}^a{}_c \mathring{\omega}_\mu{}^c{}_b. \quad (3.12)$$

Com o tensor de curvatura dado em (3.12) e o determinante do campo de tetradas $e \equiv \det(e^a{}_\mu)$, podemos então construir uma importante identidade relacionando o escalar de curvatura $R(e) = e_a{}^\nu e^{b\mu} R^a{}_{b\mu\nu}$ e uma combinação quadrática dos tensores de torção $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ dada por,

$$eR(e) = -e\Sigma^{\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} + 2\partial_\mu(eT^\mu), \quad (3.13)$$

onde $T^\mu = T^\lambda{}_{\lambda\mu}$ e $e = \det(e^a{}_\mu)$ sendo o tensor $\Sigma^{\lambda\mu\nu}$ definido como

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} (T^{\lambda\mu\nu} + T^{\mu\lambda\nu} - T^{\nu\lambda\mu}) + \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\nu} T^\mu - \eta^{\lambda\mu} T^\nu), \quad (3.14)$$

de onde segue a seguinte relação

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} = \left(\frac{1}{4}T^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\lambda\mu\nu}T_{\nu\lambda\mu} - T^\lambda T_\lambda \right). \quad (3.15)$$

Portanto, de (3.13) e (3.14) concluímos que o escalar de curvatura multiplicado pelo determinante do campo de tetradas pode ser identicamente escrito como uma combinação quadrática dos tensores de torção mais um divergente total.

A densidade de lagrangiana para o TERG na presença de campos de matéria é então dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m = -\kappa e \Sigma^{abc} T_{abc} + 2\kappa \partial_\mu (e T^\mu) + \mathcal{L}_m, \quad (3.16)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade de lagrangiana dos campos de matéria que pode depender de $e_{a\mu}$. A densidade de lagrangiana dada por (3.16) é invariante por transformações $SO(3,1)$ locais do grupo de Lorentz e por transformações gerais de coordenadas. Eliminando o termo de superfície em (3.16) \mathcal{L} passa a ser invariante por transformações $SO(3,1)$ globais do grupo de Lorentz.

Eliminando o termo de superfície em \mathcal{L} e tomando sua variação em relação a $e^{a\mu}$ (princípio variacional) obtemos as equações de campo para os campos de tetradas

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e \Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right) = \frac{1}{\kappa} e T_{a\mu}, \quad (3.17)$$

onde $T_{a\mu} = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e^{a\mu}}$ é o tensor energia-momento dos campos de matéria. Manipulando o lado esquerdo da equação acima e utilizando o resultado com (3.13) podemos reescrevê-la como

$$R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) = \frac{1}{\kappa} e T_{a\mu}, \quad (3.18)$$

que é o análogo das equações de Einstein em termos do tensor métrico. Por meio da relação (3.3) $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$, pode se mostrar que estas equações de campo são equivalentes às equações de Einstein.

3.4 Formalismo Hamiltoniano do TERG

Em resumo, o formalismo Hamiltoniano do TERG pode ser obtido a partir do formalismo Lagrangiano através de uma transformada de Legendre. O procedimento consiste em expressar as derivadas temporais das tétradas em termos dos seus momentos canonicamente conjugados e demais quantidades de campo.

Tomando a parte gravitacional \mathcal{L}_g da densidade de Lagrangiana que é dada por (3.16) e que pode ser reescrita na seguinte forma canônica

$$\mathcal{L}_g = \Pi^{ak} \dot{e}_{ak} - \mathcal{H}_0, \quad (3.19)$$

onde Π^{ak} são os momentos canonicamente conjugados a e_{ak} , obtidos variando a densidade de Lagrangiana (3.16) em relação a $\dot{e}_{ak} \equiv \partial_0 e_{ak}$, isto é,

$$\Pi^{ak} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4\kappa e \Sigma^{a0k}, \quad (3.20)$$

teremos \mathcal{H}_0 como a densidade de Hamiltoniana primária. Por inspeção direta é possível observar que a densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_g não depende das derivadas temporais de e_{a0} , ou seja, não há dependência explícita de \dot{e}_{a0} e, portanto o momento Π^{a0} é identicamente nulo.

Com a definição dada na equação (3.14) podemos reescrever os momentos Π^{ak} como

$$\begin{aligned} \Pi^{ak} &= \kappa e [g^{00} (-g^{kj} T^a{}_{0j} - e^{aj} T^k{}_{0j} + 2e^{ak} T^j{}_{0j}) \\ &+ g^{0k} (g^{0j} T^a{}_{0j} + e^{aj} T^0{}_{0j}) + e^{a0} (g^{0j} T^k{}_{0j} + g^{kj} T^0{}_{0j}) \\ &- 2(e^{a0} g^{0k} T^j{}_{0j}) - g^{0i} g^{kj} T^a{}_{ij} + e^{ai} (g^{0j} T^k{}_{ij} \\ &- g^{kj} T^0{}_{ij}) - 2(g^{0i} e^{ak} - g^{ik} e^{a0}) T^j{}_{ij}]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um ponto importante nesta análise é o fato de que apenas a parte simétrica dos momentos

$$\Pi^{(ij)} = \frac{1}{2} (e_a{}^i \Pi^{aj} + e_a{}^j \Pi^{ai}),$$

dependem das derivadas temporais \dot{e}_{ak} , enquanto que a parte antissimétrica dos momentos

$$\Pi^{[ij]} = \frac{1}{2} (e_a{}^i \Pi^{aj} - e_a{}^j \Pi^{ai}),$$

são relações entre os momentos e as tétradas que não dependem de \dot{e}_{ak} e que, portanto, juntamente com $\Pi^{a0} = 0$ constituem vínculos de primeira classe [25].

Com a evolução temporal do vínculo $\Pi^{a0} = 0$, segundo a prescrição de Dirac, gera-se

um novo vínculo secundário C^a de primeira classe, ou seja

$$C^a = \dot{\Pi}^{a0} = \{\Pi^{a0}, \mathcal{H}_0\} = \frac{\delta \mathcal{H}_0}{\delta e_{a0}} = 0, \quad (3.22)$$

que é dado por [4]

$$\begin{aligned} C^a &= \partial_i \Pi^{ai} + e^{a0} \left[-\frac{1}{4g^{00}} \kappa e (g_{ik} g_{jl} P^{ij} P^{kl} - \frac{1}{2} P^2) + \right. \\ &+ \kappa e \left(\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^b{}_{mn} T_{bij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i{}_{mn} T^m{}_{ij} - g^{ik} T^m{}_{mi} T^n{}_{nk} \right)] - \\ &- \frac{1}{2g^{00}} \kappa e (g_{ik} g_{jl} \gamma^{aij} P^{kl} - \frac{1}{2} g_{ij} \gamma^{aij} P) - \kappa e e^{ai} (g^{0m} g^{nj} T^b{}_{ij} T_{bmn} + \\ &+ g^{nj} T^0{}_{mn} T^m{}_{ij} + g^{0j} T^n{}_{mj} T^m{}_{ni} - 2g^{0k} T^m{}_{mk} T^n{}_{ni} - \\ &- 2g^{ik} T^0{}_{ij} T^n{}_{nk}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} P^{ki} &= \frac{1}{\kappa e} \Pi^{(ki)} - g^{0m} (g^{kj} T^i{}_{mj} + g^{ij} T^k{}_{mj} - 2g^{ik} T^j{}_{mj}) \\ &- (g^{km} g^{0i} + g^{im} g^{0k}) T^j{}_{mj}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

com γ^{aij} dado por

$$\begin{aligned} \gamma^{aij} &= -e^{ak} [g^{00} (g^{jm} T^i{}_{km} + g^{im} T^j{}_{km} + 2g^{ij} T^m{}_{mk}) + \\ &+ g^{0m} (g^{0j} T^i{}_{mk} + g^{0i} T^j{}_{mk}) - 2g^{0i} g^{0j} T^m{}_{mk} + \\ &+ (g^{jm} g^{0i} + g^{im} g^{0j} - 2g^{ij} g^{0m}) T^0{}_{mk}]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Uma vez que Π^{a0} é identicamente nulo, os vínculos primários relacionados à parte antissimétrica dos momentos $\Pi^{[ij]}$ podem ser escritos como

$$\Gamma^{ab} = 2\Pi^{[ab]} - 4\kappa e (\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}) = 0. \quad (3.26)$$

É possível mostrar por cálculo direto que os vínculos C^a e Γ^{ab} são tais que $\mathcal{H}_0 = e_{a0} C^a$, $\frac{\delta C^a}{\delta e_{c0}} = e^{a0} C^c - e^{a0} C^c \equiv 0$ e que $\frac{\delta \Gamma^{ab}}{\delta e_{c0}} \equiv 0$ [25] e, portanto nenhum novo vínculo aparece devido a evolução temporal de C^a e Γ^{ab} .

E assim, sem nenhum vínculo secundário surgindo, a densidade de hamiltoniana total \mathcal{H} pode ser escrita como [4, 25]

$$\mathcal{H} = e_{a0} C^a + \alpha_{ab} \Gamma^{ab}, \quad (3.27)$$

onde α_{ab} são multiplicadores de Lagrange e como a variação de \mathcal{H} em relação a e_{a0} gera

o vínculo C^a , e_{a0} em (3.27) surge naturalmente como um multiplicador de Lagrange.

A álgebra dos vínculos Γ^{ab} e C^a é dada por [25]

$$\{C^a(x), C^b(y)\} = 0 \quad (3.28)$$

$$\{C^a(x), \Gamma^{bc}(y)\} = (\eta^{ab}C^c - \eta^{ac}C^b) \delta(x - y), \quad (3.29)$$

e

$$\{\Gamma^{ab}(x), \Gamma^{cd}(y)\} = (\eta^{ac}\Gamma^{db} + \eta^{bc}\Gamma^{ad} - \eta^{ad}\Gamma^{cb} - \eta^{bd}\Gamma^{ac}) \delta(x - y). \quad (3.30)$$

Esta é uma álgebra de vínculos com a mesma estrutura da álgebra do grupo de Poincaré (álgebra também satisfeita pelas grandezas físicas quadrivetor energia-momento e momento angular gravitacional do TERG) e tem a mesma forma na presença ou não do termo de constante cosmológica [25].

O vínculo C^a dado em (3.23) carrega um termo de divergência espacial que, quando submetido a integração, leva à definição do quadrivetor energia-momento do TERG [4]. Já o vínculo Γ^{ab} está associado ao momento angular gravitacional. Utilizando-o para definir a densidade de momento angular [5] como

$$M^{ab} = 4\kappa e(\Sigma^{b0a} - \Sigma^{a0b}), \quad (3.31)$$

que pode também ser reescrita em função das tétradas como

$$M^{ab} = 2\kappa \partial_i [e(e^{ai}e^{b0} - e^{bi}e^{a0})], \quad (3.32)$$

é escrito finalmente o momento angular gravitacional L^{ab} como

$$L^{ab} = \int M^{ab} d^3x = 2\kappa \int \partial_i [e(e^{ai}e^{b0} - e^{bi}e^{a0})] d^3x. \quad (3.33)$$

3.5 Expressões para a energia e a pressão

As expressões para a energia total e para a pressão do campo gravitacional na presença de matéria [24] são obtidas com o formalismo lagrangiano do TERG e apresentadas a seguir. Para isto é preciso partir da equação de movimento dada em (3.17) reescrevendo-a como

$$\partial_\mu(e\Sigma^{a\lambda\mu}) = \frac{1}{4\kappa}ee^a{}_\mu(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (3.34)$$

onde $T^{\lambda\mu} = e_a{}^\lambda T^{a\mu}$ é o tensor energia-momento dos campos de matéria e

$$t^{\lambda\mu} = \kappa(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd}), \quad (3.35)$$

é identificado como sendo o tensor energia-momento do campo gravitacional [24].

Aplicando a propriedade de simetria $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu a}$ na equação (3.34) segue imediatamente uma lei de conservação local para os tensores de energia-momento gravitacional e para os campos de matéria

$$\partial_\mu[ee^a{}_\nu(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu})] = 0, \quad (3.36)$$

de onde se obtém a equação da continuidade para o campo gravitacional na presença de matéria

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}) = - \oint_S dS_i [ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu})]. \quad (3.37)$$

Nas integrais acima, V é um volume arbitrário do espaço tridimensional e S é uma superfície que envolve V . Nesta última equação temos a derivada temporal do quadri-vetor energia-momento total P^a no interior do volume V , isto é

$$P^a = \int_V d^3x ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}). \quad (3.38)$$

Novamente, usando a anti-simetria nos dois últimos índices de $\Sigma^{a\mu\nu}$, recordando que $\Pi^{ai} = -4\kappa\Sigma^{a0i}$ e tomando $\mu = 0$ em (3.34), segue que

$$\partial_i \Pi^{ai} = -ee^a{}_\mu(t^{0\mu} + T^{0\mu}), \quad (3.39)$$

e portanto,

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai} = - \oint_S dS_i \Pi^{ai}. \quad (3.40)$$

A componente $P^{(0)}$ na equação acima fornece a energia total devido aos campos gravitacional e de matéria.

Levando a equação (3.39) do lado esquerdo de (3.37) e usando a equação (3.34) com $\lambda = j$ do lado direito de (3.37) podemos rescrevê-la como

$$\frac{d}{dt} P^a = - \int_V d^3x \partial_j \phi^{aj} = - \oint_S dS_j \phi^{aj}, \quad (3.41)$$

onde ϕ^{aj} é dado por

$$\phi^{aj} = 4\kappa\partial_\mu(e\Sigma^{aj\mu}) = ee^a{}_\mu(t^{j\mu} + T^{j\mu}). \quad (3.42)$$

Tomando $a = (i)$ na equação (3.41) temos,

$$\frac{d}{dt}P^{(i)} = - \oint dS_j \phi^{(i)j}. \quad (3.43)$$

Na equação acima, a derivada temporal do vetor momento total possui dimensão de força, portanto, em coordenadas cartesianas $\phi^{(i)j}$, representa a densidade de pressão total devido ao campo gravitacional e aos campos de matéria na direção (i) sobre o elemento de área na direção j . Desta forma é definida uma força $f^{(i)}$ dada por

$$f^{(i)} = - \oint_S dS_j \phi^{(i)j} \quad (3.44)$$

como sendo a força total devido aos campo gravitacional e de matéria na direção (i) .

Capítulo 4

A métrica FLRW e o TERG

4.1 O modelo FLRW

O princípio cosmológico estabelece que em qualquer instante de tempo particular o universo visto por qualquer observador em qualquer direção é equivalente [16]. Uma solução das equações de Einstein baseada no princípio cosmológico é aquela que descreve um modelo de universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração acelerada. Esta solução fornece a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que representa uma aproximação em larga escala para um modelo de universo a partir do *big bang*, ou seja, ela pode ser utilizada como primeira aproximação para a evolução do universo e, também, pode ser estendida de forma a modelar as variações de temperatura do universo em diferentes escalas.

No modelo de universo de FLRW, assume-se que o espaço-tempo é constituído de fatias do tipo espaço com a quadri-velocidade de qualquer observador ortogonal às hipersuperfícies do tipo espaço, as quais são parametrizadas por um tempo cósmico $t = cte$. Além disso, assume-se que as coordenadas espaciais (x^1, x^2, x^3) são constantes ao longo de qualquer linha mundo, de modo que cada observador tem estas coordenadas fixas. Estas coordenadas são chamadas de coordenadas comóveis. Uma vez que cada hipersuperfície para $t = cte$ é ortogonal à linha mundo de cada observador, o elemento de linha para a métrica de FLRW tem a forma,

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.1)$$

onde g_{ij} são funções das coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) .

Seja uma linha mundo de um observador fundamental descrita por $X^\mu(\tau)$ com τ o tempo próprio ao longo da linha mundo. Logo por construção $X^\mu(\tau)$ é caracterizada por

$$x^0 = \tau, \quad x^i = cte.$$

Como $dx^i = 0$, ao longo de $X^\mu(\tau)$ temos que $ds = cd\tau = cdt$ logo, $t = \tau$, e portanto τ ao longo da linha mundo é igual ao tempo cosmológico t . Além disso, como a quadri-velocidade de um observador fundamental nas coordenadas comóvel é dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0),$$

e como qualquer vetor sobre as hipersuperfícies $t = cte$ tem a forma $a^\mu = (0, a^1, a^2, a^3)$, e como $g_{i0} = 0$, segue que

$$g_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = u^\mu a_\mu = 0.$$

Logo as quadri-velocidades são ortogonais às hipersuperfícies conforme mencionado acima.

Para que a métrica em (4.1) contemple a homogeneidade e a isotropia devemos impor sobre esta que todos os pontos sobre uma particular hipersuperfície do tipo espaço, bem como todas as direções devem ser equivalentes. Desta forma, sobre uma superfície do tipo espaço, se considerarmos um triângulo formado por três galáxias próximas em um tempo t , a isotropia requer que o triângulo formado por estas mesmas galáxias em um tempo posterior deve ter a mesma forma. Além disso, a homogeneidade requer que o fator de ampliação temporal deste triângulo deve ser independente de sua posição sobre a superfície espacial. Isto significa que t só pode entrar em g_{ij} através de um fator comum e, portanto, o elemento de linha em (4.1) deve ter a forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.2)$$

cujas a métrica associada é dada por,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde k assume os valores $-1, 0, 1$ dependendo do universo ser hiperbólico, plano ou hiperesférico, respectivamente. E $a(t)$ é o fator de escala que caracteriza a dinâmica da geometria do espaço-tempo.

Para determinar $a(t)$ devemos resolver as equações de Einstein na presença de matéria as quais na presença da constante cosmológica são dadas pela equação (2.47), onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento para um fluido perfeito caracterizado por sua densidade ρ e sua pressão p dado por

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu, \quad (4.4)$$

onde u_μ é a quadri-velocidade do fluido. Como a procura é por soluções homogêneas e isotrópicas, ρ e p são funções apenas de t .

Quando se leva o tensor energia-energia momento dado por (4.4) na equação (2.47), se obtém duas equações diferenciais para a evolução temporal de $a(t)$ dadas por

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p, \quad (4.5)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho}{3}, \quad (4.6)$$

que são conhecidas como equações de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. No caso em que $\Lambda = 0$ elas são chamadas de equações de Friedmann [16]. Pode-se reescrever a equação (4.6) como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi\rho}{3}, \quad (4.7)$$

que são equações a serem usadas posteriormente.

Para determinar a localização do horizonte aparente associado à métrica (4.2), se define $\tilde{r} = a(t)r$ e a métrica bidimensional $h_{ij} = \text{diag}(-1, a^2/(1 - kr^2))$, $i = 0, 1; j = 0, 1$. O horizonte aparente, que é um horizonte dinâmico, é determinado pela relação $h^{ij}\partial_i\tilde{r}\partial_j\tilde{r} = 0$, o que implica que o horizonte aparente está localizado sobre uma superfície de expansão nula, ou seja os vetores $\partial_i\tilde{r}$ são vetores nulos sobre a superfície do horizonte aparente [17]. Ao contrário de horizontes de eventos (definido como o limite ao redor de buracos negros onde, a partir do qual, a luz não pode mais escapar da gravidade) e horizonte de partículas (definido como o limite de distância para qualquer interação entre partículas), o horizonte aparente sempre existe para espaços FLRW, portanto, é este último tipo de horizonte o melhor candidato para se formular leis da termodinâmica neste tipo de espaço [17]. Usando a condição mencionada acima se obtém:

$$-(\partial_t\tilde{r})^2 + \frac{1 - kr^2}{a^2}(\partial_r\tilde{r})^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{r} = R_A = \frac{1}{\sqrt{H^2 + k/a^2}}, \quad (4.8)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Diferentemente de um horizonte de eventos para um buraco negro que independe de observador, no espaço-tempo de FLRW o horizonte aparente não é uma propriedade absoluta do espaço-tempo. O horizonte aparente é dependente do observador, ou seja, cada observador comóvel em distinto ponto sobre uma hipersuperfície $t = \text{cte}$ do espaço-tempo de FLRW verá seu próprio horizonte aparente [17].

Subtraindo (4.5) de (4.6) obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho' + 3p'), \quad (4.9)$$

onde $\rho' = \rho + \rho_\Lambda$, $p' = p - \rho_\Lambda$ com $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}$ sendo a densidade de energia do vácuo [16].

O parâmetro de desaceleração q é definido como

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (4.10)$$

cujo valor sendo negativo significa que a taxa de expansão do Universo é acelerada, sendo positivo significa que a taxa de expansão do Universo é desacelerada e sendo nulo indica uma taxa constante de expansão. Uma vez que $R_A \geq 0$, para modelos de universo em expansão acelerada segue de (4.5) e de (4.9) que $p' < 0$ e $\rho' + 3p' < 0$.

4.2 Tétradas para a métrica FLRW

Um campo de tétradas $e^a{}_{\mu}$ tem como função básica projetar quantidades do espaço-tempo físico, em um ponto x^{μ} , no espaço-tempo de referência também chamado de espaço-tempo tangente [26]. Por exemplo, as diferenciais dx^{μ} , em um ponto x^{μ} do espaço-tempo físico, podem ser projetadas em diferenciais dq^a do espaço-tempo de referência como

$$dq^a = e^a{}_{\mu} dx^{\mu}, \quad (4.11)$$

onde q^a representa as coordenadas no espaço-tempo de referência.

Quando a relação em (4.11) for integrável globalmente ela é dita uma relação holonômica e ambos os espaços mencionados acima são planos com $e^a{}_{\mu}$ podendo ser escrito em termos de gradientes, isto é,

$$e^a{}_{\mu} = \frac{\partial q^a}{\partial x^{\mu}}, \quad (4.12)$$

o que resulta em tensores de torção $T^a{}_{\mu\nu} = 0$. Na presença de campo gravitacional a relação (4.11) é dita não-holonômica e não pode ser integrada globalmente porque, neste caso, os tensores de torção $T^a{}_{\mu\nu}$ não são nulos.

Um campo de tétradas, que são as variáveis básicas do TERG, pode ser naturalmente visto como um sistema de referência adaptado a observadores em cada ponto do espaço-tempo [27]. Para isto, seja $X^{\mu}(\tau)$ a linha mundo de um observador ao longo de uma curva C no espaço-tempo, onde τ é o tempo próprio do observador. A quadri-velocidade do observador ao longo de C é dada por $u^{\mu}(\tau) = dX^{\mu}/d\tau$ que é identificada com a componente (0) de $e_a{}^{\mu}$ ou seja, $u^{\mu}(\tau) = e_{(0)}{}^{\mu}$ ao longo de C . Portanto, por meio da relação $g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e_{av}$, para cada tensor métrico solução das equações de Einstein há uma classe de tétradas adaptadas a diferentes observadores.

Para estudar as propriedades físicas de um tensor métrico é feito a escolha de um campo de tétradas adaptado a um observador estático. Isto pode ser feito impondo sobre $e_{a\mu}$ duas condições. A primeira condição é que $e_{(0)}{}^i = 0$, o que implica que $e_{(i)}{}^0 = 0$, o que significa que a velocidade de translação espacial do observador é zero. Na segunda condição impomos que os três eixos espaciais adaptados ao observador não estejam girando

em relação a um sistema de referência que não gire [28]. Um campo de tétradas adaptado a um observador estático que está associado à métrica (4.2) é dado por

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \operatorname{sen}\theta \cos\phi & \operatorname{ar}\cos\theta \cos\phi & -\operatorname{ar}\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \alpha \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \operatorname{ar}\cos\theta \operatorname{sen}\theta & \operatorname{ar}\operatorname{sen}\theta \cos\theta \\ 0 & \alpha \cos\theta & -\operatorname{ar}\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (4.14)$$

A energia total e a pressão total associadas ao campo de tétradas (4.13) serão apresentadas na próxima seção para posteriormente, se fazer a análise das propriedades termodinâmicas do modelo de universo de FLRW.

4.3 Energia e pressão no universo de FLRW

Nesta seção estão apresentados os tensores de torção associados ao campo de tétradas dadas em (4.13). Em seguida, usando a definição de energia obtida a partir da equação (3.40), será calculada a energia no interior do horizonte aparente do modelo de universo de FLRW. Também será obtida a expressão para a força total que atua sobre a superfície do horizonte aparente e, em seguida a expressão para a pressão total que atua sobre a superfície do horizonte aparente. Aplicando a definição de torção dada em (3.7) ao campo de tétradas dado por (3.40), as componentes não nulas das torções são:

$$\begin{aligned} T_{(1)01} &= -T_{(1)10} = \dot{\alpha} \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ T_{(1)02} &= -T_{(1)20} = \dot{\operatorname{ar}} \cos\theta, \cos\phi, \\ T_{(1)03} &= -T_{(1)30} = -\dot{\operatorname{ar}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ T_{(1)12} &= -T_{(1)21} = (a - \alpha) \cos\theta \cos\phi, \\ T_{(1)13} &= -T_{(1)31} = (\alpha - a) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ T_{(2)01} &= -T_{(2)10} = \dot{\alpha} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ T_{(2)02} &= -T_{(2)20} = \dot{\operatorname{ar}} \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \\ T_{(2)03} &= -T_{(2)30} = \dot{\operatorname{ar}} \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ T_{(2)12} &= -T_{(2)21} = (a - \alpha) \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \\ T_{(2)13} &= -T_{(2)31} = (a - \alpha) \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ T_{(3)01} &= -T_{(3)10} = \dot{\alpha} \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(3)02} &= -T_{(3)20} = -\dot{a}r \operatorname{sen}\theta, \\
T_{(3)12} &= -T_{(3)21} = (\alpha - a) \operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

onde o ponto denota a derivada em relação a t .

Para calcular a energia contida no interior do horizonte aparente e a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente do modelo de universo de FLRW é necessário primeiro obter as quantidades abaixo associadas a $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$ definidas na equação (3.14)

$$\begin{aligned}
\Sigma^{001} &= \frac{1}{ra\alpha^2}(\alpha - a), \\
\Sigma^{110} &= -\frac{\dot{a}}{a\alpha^2}, \\
\Sigma^{220} &= -\frac{\dot{a}}{r^2a^3}, \\
\Sigma^{330} &= -\frac{\dot{a}}{a^3r^2\operatorname{sen}^2\theta}, \\
\Sigma^{212} &= \frac{(\alpha - a)}{2r^3a^3\alpha^2}, \\
\Sigma^{313} &= \frac{(\alpha - a)}{2r^3a^3\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta}.
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Integrando em θ e ϕ a densidade de energia $\Pi^{(0)1} = -4\kappa e\Sigma^{(0)01}$ sobre uma superfície de raio r constante, se obtém a energia E no interior desta superfície, isto é,

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \Pi^{(0)1}, \\
&= ar(1 - \sqrt{1 - kr^2}),
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

onde para obter o resultado acima foi utilizado $\kappa = \frac{1}{16\pi}$. Na equação (4.17), assumindo $r = r'$ tal que $R_A = ar'$ e usando a definição de R_A dada na equação (4.8), se obtém a energia contida dentro do horizonte aparente do universo de FLRW que é dada por

$$E_A = R_A(1 - \sqrt{1 - kR_A^2/a^2}).
\tag{4.18}$$

Usando as eqs. (4.7) e (4.8) pode-se escrever a expressão da energia como

$$E_A = 2M_A - R_A^2 H,
\tag{4.19}$$

onde M_A é a massa efetiva no interior do horizonte aparente definida como

$$M_A = \frac{4\pi R_A^3}{3}(\rho + \rho_\Lambda),
\tag{4.20}$$

onde

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}.$$

M_A é a massa de Misner-Sharp-Hernandez na presença da constante cosmológica [17] que só pode ser definida para espaços com simetria esférica. Pela equação (4.19) se observa que a energia total no interior do horizonte aparente, para universos em expansão, $H > 0$, possui um termo negativo que, do ponto de vista gravitacional, é repulsivo. Na próxima seção a expressão da energia dada por (4.19) será usada para escrevermos a primeira lei da termodinâmica sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW.

Antes de prosseguir, é importante salientar que para um modelo de universo plano temos $k = 0$ e $1 - R_a H = 0$, portanto, E_A dada por (4.18) é zero. Neste caso a energia do campo gravitacional se cancela com a energia dos campos de matéria. No caso do modelo de universo fechado $k = 1$, $1 - R_A H > 0$ e a energia $E_A > 0$. E para o modelo de universo aberto $k = -1$, $E_A < 0$, sendo isso uma situação onde o universo poderia se contrair após uma expansão desacelerada.

Para obter a expressão da pressão sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW, se deve primeiro calcular a expressão da força radial $f(r)$ sobre a superfície de uma esfera de raio r constante usando a definição de força dada em (3.39) e usar a definição de horizonte aparente apresentada na equação (4.9) para, em seguida, obter a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente. Da equação (3.44) $f(r)$ é dada por

$$f(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (-\phi^{(r)1}) d\theta, \quad (4.21)$$

onde $\phi^{(r)1}$ é $\phi^{(i)1}$ projetado na direção radial, ou seja,

$$-\phi^{(r)1} = -(\phi^{(1)1} \text{sen}\theta \cos\phi + \phi^{(2)1} \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \phi^{(3)1} \cos\theta), \quad (4.22)$$

e pela equação (3.42) temos que $\phi^{(i)j} = 4\kappa \partial_\mu (e \Sigma^{(i)j\mu})$. Usando a inversa da métrica em (4.3), o campo de tétradas em (4.13), as quantidades dadas em (4.16) e lembrando que $e^{(i)}_0 = 0$ se obtém

$$\begin{aligned} \phi^{(1)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2} \right] \text{sen}^2\theta \cos\theta, \\ \phi^{(2)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2} \right] \text{sen}^2\theta \text{sen}\phi, \\ \phi^{(3)1} &= -4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + 1 - \sqrt{1 - kr^2} \right] \text{sen}\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Levando os resultados da última equação em (4.22) se obtém

$$-\phi^{(r)1} = 4\kappa \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + (1 - \sqrt{1 - kr^2}) \right] \text{sen}\theta. \quad (4.24)$$

Agora levando $\phi^{(r)1}$ na equação (4.21) e integrando em ϕ e θ é obtido

$$f(r) = \left[\partial_0(\dot{a}a)r^2 + (1 - \sqrt{1 - kr^2}) \right], \quad (4.25)$$

onde usou-se $\kappa = \frac{1}{16\pi}$.

Novamente na equação acima assumindo $r = r'$ tal que $R_A = ar'$ e usando a definição de R_A apresentada na equação (4.8), é obtido a força total atuando sobre o horizonte aparente do modelo de FLRW que é dada por

$$f(R_A) = \left[\partial_0(\dot{a}a) \frac{R_A^2}{a^2} + 1 - R_A H \right]. \quad (4.26)$$

Uma vez que para a superfície esférica definida por R_A , $f(R_A)$ é homogênea, pode-se obter a pressão total exercida sobre esta superfície como sendo dada por,

$$P_A = f(R_A)/4\pi R_A^2 = \frac{1}{4\pi R_A^2} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) R_A^2 + 1 - R_A H \right]. \quad (4.27)$$

Para modelos de universo em expansão acelerada, ou seja, $\ddot{a} > 0$, usando a definição de R_A apresentada na equação (4.8), pode-se mostrar que para $k = 0$ ou $k = 1$, $1 - R_A H \geq 0$ e para $k = -1$ tem-se que $H^2 R_A^2 + 1 - H R_A > 0$ e, portanto a força total $f(R_A)$ e conseqüentemente a pressão total $P(R_A)$ sobre o horizonte aparente são grandezas positivas. Note que mesmo para um modelo de universo plano $k = 0$ onde a energia total no interior do horizonte aparente é zero, a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente é diferente de zero e positiva.

Do ponto de vista da análise feita nesta seção no contexto do TERG, pelas equações (4.26) e (4.27), conclui-se que a expansão acelerada do universo é conseqüência do próprio campo gravitacional gerado pelo fluido em movimento presente no universo. A expansão acelerada é uma conseqüência de a pressão total $P(R_A)$, devido o campo gravitacional e a matéria em movimento ser positiva, ou seja, qualquer observador estático sempre verá a pressão total empurrar para frente a superfície do horizonte aparente. Desta forma, não se faz necessário invocar qualquer forma de energia exótica e totalmente desconhecida para se explicar a expansão acelerada do universo. Muitas vezes a equação (4.9) é analisada em um contexto Newtoniano para invocar alguma forma de energia desconhecida, chamada de *energia escura*, para explicar a expansão acelerada do universo, ou seja, uma forma de energia que gera uma pressão p' negativa responsável pela expansão acelerada [33]. No entanto, tal análise só leva em consideração a pressão devido à constante cosmológica e ao fluido presente no universo, deixando de fora a pressão do campo gravitacional.

Para entender melhor a dinâmica da solução de FLRW, será comparado a razão da expansão de uma grandeza $\dot{\delta}/\delta$ com H que é a razão de expansão da matéria no universo

[17]. Para R_A e E_A com $k \neq 0$ temos que

$$\frac{\dot{R}_A}{R_A} - H = - \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) R_A^2, \quad (4.28)$$

$$\frac{\dot{E}_A}{E_A} - H = - \left(\frac{\ddot{a} R_A}{a} \right) \left(R_A + \frac{R_A^2}{(1 - R_A H)} \frac{k}{a^2} \right). \quad (4.29)$$

Das duas equações acima pode-se mostrar que

$$\frac{\dot{E}_A}{E_A} - \frac{\dot{R}_A}{R_A} = - \frac{R_A^3}{(1 - R_A H)} \frac{k}{a^3} \ddot{a}. \quad (4.30)$$

Portanto, pela equação (4.28) fica claro que para modelos de universo em expansão acelerada, o horizonte de evento aparente expande mais devagar do que a matéria que é comóvel logo, existe um fluxo de matéria saindo do interior do horizonte aparente, ou seja, à medida que o tempo cosmológico aumenta tem-se cada vez menos matéria no interior do horizonte aparente para frear a expansão acelerada.

A diferença dada na equação (4.29), para modelos de universo em expansão acelerada, é negativa, logo a energia total E_A no interior do horizonte aparente expande mais devagar que a matéria. Finalmente, a equação (4.30) estabelece que para modelos de universo em expansão acelerada, a energia total no interior do horizonte aparente expande mais lentamente do que o horizonte aparente.

Embora a energia total aumente com o tempo, este crescimento não é suficiente para impedir a expansão acelerada. Notável que para o caso $k = 0$, $E_A = 0$, a energia do campo gravitacional se cancela com a energia devido à matéria, porém, pela equação (4.28) ainda temos um fluxo de matéria saindo do horizonte aparente para expansões aceleradas o que gera uma pressão não nula e positiva sobre a superfície do horizonte aparente.

4.4 Primeira lei da termodinâmica para o horizonte aparente

Nesta seção, usando as definições de energia e pressão obtidas no contexto do TERG, será escrita uma relação para a primeira lei da termodinâmica no horizonte aparente do espaço-tempo de FLRW [47]. Nesta análise se assumirá que a entropia associada com o horizonte aparente é dada por um quarto da área do horizonte aparente [17] e, a partir desta relação para a primeira lei, obteremos uma expressão para a temperatura no horizonte aparente.

A análise termodinâmica de sistemas gravitacionais foi inicialmente desenvolvida tendo como foco o estudo de buracos negros estáticos ou estacionários. Posteriormente tal análise, num contexto cosmológico, foi estendida para o estudo da termodinâmica de

horizontes que evoluem com o tempo como o horizonte aparente do espaço-tempo de FLRW [34–36].

Usando a equação (4.8) em (4.18) pode-se reescrever E_A como

$$E_A = (R_A - R_A^2 H). \quad (4.31)$$

Para escrever uma equação para a primeira lei da termodinâmica no horizonte aparente é necessário calcular a variação de E_A devido uma variação infinitesimal dt no tempo cosmológico. Para isto, usando as relações, $dR_A = \dot{R}_A dt$ e $dH = \dot{H} dt$, segue de (4.31) que

$$dE_A = \left(1 - 2R_A H - \frac{R_A^2 \dot{H}}{\dot{R}_A}\right) \frac{dS_A}{2\pi R_A}, \quad (4.32)$$

onde S_A é a entropia dada por

$$S_A = \frac{A_A}{4} = \pi R_A^2.$$

O termo de trabalho devido a P_A , na primeira lei, é dado por

$$P_A dV_A = \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) R_A^2 + 1 - R_A H \right] \frac{dS_A}{2\pi R_A}, \quad (4.33)$$

onde

$$V_A = \frac{4}{3}\pi R_A^3.$$

é o volume areal do horizonte aparente, o qual contém a energia E_A cuja superfície está sob a ação da pressão P_A .

Com as expressões em (4.32) e (4.33) a relação para a primeira lei da termodinâmica é escrita como:

$$dE_A + P_A dV_A = T_A dS_A, \quad (4.34)$$

onde a quantidade T_A é identificada como sendo a temperatura na superfície do horizonte aparente e é dada por

$$T_A = \frac{1}{2\pi R_A} \left[-2\kappa' R_A + (1 - R_A H)^2 - \left(R_A H + \frac{R_A^2 \dot{H}}{\dot{R}_A} \right) \right], \quad (4.35)$$

onde κ' é a gravidade de superfície de Kodoma-Hayward [17] dada por

$$\kappa' = -\frac{R_A}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

O último termo entre parênteses na expressão (4.35) pode ser simplificado e escrito como

$$-\frac{k\ddot{a}}{\dot{a}} \frac{R_A}{(\dot{a}^2 + k - a\ddot{a})},$$

e portanto a temperatura T_A pode ser escrita como

$$T_A = \frac{1}{2\pi R_A} \left[-2\kappa' R_A + (1 - R_A H)^2 - \frac{k\ddot{a}}{\dot{a}} \frac{R_A}{(\dot{a}^2 + k - a\ddot{a})} \right]. \quad (4.36)$$

Para modelos de universo em expansão acelerada $\dot{R}_A \geq 0$ portanto $\rho' + p' \geq 0$ ou seja, que não viole a condição de energia mínima na presença da constante cosmológica, a temperatura acima é positiva.

O primeiro termo em (4.36) é exatamente metade da temperatura de Kodama-Hayward no horizonte aparente do modelo de FLRW que é dada por [17]

$$T_{KH} = -\frac{\kappa'}{2\pi},$$

e que depende da escolha de κ' , porém, existem várias prescrições não equivalentes para esta quantidade [37] e portanto várias expressões não equivalentes para T_{KH} . Para o caso de modelos de universo plano $k = 0$, os dois últimos termos em (4.36) se anulam e T_A reduz a

$$T_A = \frac{T_{KH}}{2}. \quad (4.37)$$

Esse resultado mostrando uma temperatura proporcional ao raio do horizonte aparente contrasta de modo notável à temperatura Hawking para um buraco negro $T_H = 1/8\pi M$, onde M é a massa do buraco negro que é inversamente proporcional à temperatura.

Capítulo 5

A cosmologia quântica e o TERG

Uma quantização é um procedimento matemático para construir um modelo quântico de um sistema físico a partir de sua descrição clássica. Tendo em vista que as interações fundamentais que regem o mundo atômico e subatômico conhecido exigem um tratamento quântico para uma descrição satisfatória dos fenômenos que ocorrem nessa escala, é natural que se busque também uma possível teoria quântica para a gravitação. Especialmente para os primeiros momentos após o início do universo, os efeitos quânticos gravitacionais poderiam responder várias questões em aberto. A cosmologia quântica se iniciou com o formalismo hamiltoniano da RG por Arnowitt, Deser e Misner (ADM), adotado por Wheeler e DeWitt para a equação de Einstein-Schrödinger (futuramente conhecida como cosmologia quântica padrão ou equação de Wheeler-DeWitt - WDW).

Há mais de um processo de quantização conhecido que, ao conjunto de magnitudes físicas ou observáveis medíveis no sistema clássico, se corresponda a um conjunto de observáveis quânticos ou operadores auto-adjuntos que satisfazem a determinadas relações de comutação [38].

A quantização de um sistema clássico é realizada usualmente via quantização canônica. Nessa regra basta trocar as variáveis clássicas dadas no hamiltoniano pelos seus respectivos operadores. Assim, as variáveis clássicas de posição q e momento p correspondem aos operadores $q \rightarrow \hat{q}$ e $p \rightarrow \hat{p}$ de modo que $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ (no caso clássico isso é análogo aos parênteses de Poisson). A partir disso se obtém uma teoria quântica com a dinâmica dos sistemas físicos governada pela equação de Schrödinger $i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(t)$. O hamiltoniano quântico \hat{H} é construído de acordo com a função clássica inicial e os estados quânticos do sistema descrito pelo conjunto de vetores Ψ que são evoluídos pela equação de Schrödinger.

A quantização canônica, apesar de ser extremamente simples para as funções polinomiais que geralmente aparecem na mecânica quântica, pode apresentar algumas ambiguidades. Graças à não comutatividade que geralmente existe entre os operadores, o produto de funções de variáveis clássicas não encontram uma correspondência simples com o respectivo operador quântico. Por exemplo, para uma função do tipo $f(q, p) = q^2p$ onde se deseja encontrar a correspondência $f(q, p) \rightarrow f(\hat{q}, \hat{p})$, poderia se imaginar que o resultado

fosse $f(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{q}\hat{q}\hat{p}$, quando na verdade é feita uma simetrização de f e o resultado é $f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{3}(\hat{q}\hat{q}\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}\hat{q})$.

5.1 Quantização de Weyl

Além da problemática da ambiguidade, a quantização canônica não é facilmente aplicável quando se deseja quantizar funções não-polinomiais. Por esse motivo, outras técnicas de quantização foram introduzidas como, por exemplo, a que foi proposta por H. Weyl. Essa técnica merece destaque pois, além de ter um procedimento matemático claro e bem definido (levando a um entendimento físico mais elucidativo), é um procedimento que pode ser usado em espaços de fase curvos.

Dadas as variáveis q e p de um sistema clássico que são quantizadas segundo a regra $q \rightarrow \hat{q}$ e $p \rightarrow \hat{p}$, as funções f definidas sobre essas quantidades segundo o mapeamento de Weyl [39] $W : f \rightarrow \hat{f} = W[f]$, serão dadas por

$$W[f] = \hat{f}(\hat{q}, \hat{p}) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int \int d\sigma d\tau dq dp f(q, p) \exp \{i\sigma(q - \hat{q}) + i\tau(p - \hat{p})\}. \quad (5.1)$$

Ou seja, nesse procedimento a função é automaticamente quantizada. E se for dado n variáveis, z_1, z_2, \dots, z_n , de um sistema clássico, seus correspondentes operadores quânticos serão $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n$. O mapeamento de Weyl $W : f \rightarrow \hat{f} = W[f]$ é dado por:

$$W[f](z_1, z_2, \dots, z_n) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n z f(z_1, z_2, \dots, z_n) \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n k_l (z_l - \hat{z}_l) \right\} \quad (5.2)$$

O espaço não comutativo é formado pelos operadores \hat{z}_n , ou seja, pela troca das coordenadas locais z_n pelos operadores hermitianos \hat{z}_n , levando à comutação

$$[\hat{z}_a, \hat{z}_b] = i\alpha_{ab} \quad (5.3)$$

Onde α_{ab} é um tensor anti-simétrico. Isso significa que a constante de Planck \hbar é apenas um caso específico nesse processo.

Considerando, por exemplo, uma função do tipo $f(q, p) = qp$, tem-se que $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Aplicando o mapeamento de Weyl é possível se ter $f(q, p) \rightarrow f(\hat{q}, \hat{p})$ resultando em

$$\hat{f}(\hat{q}, \hat{p}) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\sigma d\tau dq dp f(q, p) \exp \{i [d\sigma(q - \hat{q}) + d\tau(p - \hat{p})]\} \quad (5.4)$$

Com o auxílio da relação de Baker-Campbell-Hausdorff $\exp i(\sigma\hat{q} + \tau\hat{p}) = e^{i\sigma\hat{q}} e^{i\tau\hat{p}} e^{1/2\sigma\tau}$ e propriedades da função delta de Dirac, a expressão anterior resulta em

$$f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \quad (5.5)$$

Ou seja, o resultado simetrizado da quantização canônica.

5.2 Cosmologia Quântica e o TERG

A cosmologia quântica, inicialmente com a apresentação do modelo proposto por DeWitt e com colaboração de Wheeler, por mais de de 50 anos abriu um leque natural pra outras pesquisas e atuação de estudos cosmológicos, principalmente no que tange ao universo primordial. De modo resumido, será apresentado nesse capítulo um modelo de cosmologia quântica na gravidade teleparalela (CQGT) [46] que, diferente do modelo de Wheeler-DeWitt (WDW) que parte de tronco evolutivo aparentado da RG, parte de expressões de energia e densidade de energia gravitacional construídas no TERG. Aplicando ao modelo a métrica de FLRW, base do MCP, e, através do processo de quantização de Weyl chega-se a uma solução cosmológica de vácuo e foi obtido, como consequência, que o espaço vazio do universo primordial exibe uma expansão. O resultado é análogo aos trabalhos de Guth e posteriores [40–45].

Através de um campo de tétradas adaptado a um observador estacionário obtido da métrica de FLRW (4.3)

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ar \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

obtém-se a densidade de energia gravitacional através de

$$et^{0(0)} = \frac{(-a \operatorname{sen}\theta)}{8\pi} \left[\frac{(3\dot{a}^2 r^2)}{\sqrt{1-kr^2}} + \sqrt{1-kr^2} \right] \quad (5.7)$$

O componente $P^{(0)}$ obtido da equação 3.40 fornece a energia total do universo e possui as seguintes parcelas $P^{(0)} = E = E_g + E_m$, de modo que

$$E_g = \int d^3x et^{0(0)}, E_m = \int d^3x eT^{0(0)} \quad (5.8)$$

O limite superior de integração será o raio do horizonte aparente da equação 4.8, considerado então como o raio do modelo de um pequeno universo primordial e vazio. Portanto, não será considerado o termo correspondente à matéria mas, apenas o termo correspondente ao campo no vácuo gerando um resultado que é

$$kE_g = \frac{(3\dot{a}^2 - k)\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}}{4(\dot{a}^2 + k)} a^2 - \frac{a(3\dot{a}^2 + k)}{4\sqrt{k}} \arctan \left[\frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}} \right] \quad (5.9)$$

Podendo ser reescrita como $kE_g = \varepsilon^1 + \varepsilon^2$ onde

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &= \frac{(3\dot{a}^2 - k)\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}}{4(\dot{a}^2 + k)}a^2, \\ \varepsilon^2 &= -\frac{a(3\dot{a}^2 + k)}{4\sqrt{k}}\arctan\left[\frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{\dot{a}^2 + k(1 - a^2)}}\right].\end{aligned}\tag{5.10}$$

Para o universo plano, $k = 0$, esta última expressão gera resultado identicamente nulo e, portanto, nesse modelo o universo será estudado apenas para geometrias curvas correspondentes a $k = 1$ ou $k = -1$.

Supondo agora que esse universo é um sistema quântico, sem matéria e governado por uma equação do tipo Schrödinger $(k\hat{H}_g)\Psi = Ek\Psi$, aplicando o mapeamento citado na seção anterior $W[kE_g] = k\hat{H}_g$, pode-se calcular o operador \hat{H}_g pelo procedimento de Weyl e então procurar as soluções Ψ . A equação 4.37 é escrita em termos de a e \dot{a} , fazendo que as escolhas adequadas para o mapeamento de Weyl sejam

$$W[a] = \hat{a}, \quad W[\dot{a}] = \hat{\dot{a}} = -i\omega\frac{\partial}{\partial a}.\tag{5.11}$$

Com as quais se calcula o operador $k\hat{H}_g = \hat{\varepsilon}^1 + \hat{\varepsilon}^2$ correspondente a $kE_g = \varepsilon^1 + \varepsilon^2$ que é aplicado à equação estacionária do tipo Schrödinger $(k\hat{H}_g)\Psi = Ek\Psi$, resultando em primeira aproximação como

$$\left[15a^2 + \frac{66}{8} + \left(6a^2 + \frac{76}{8}\right)a\frac{d}{da} + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{31}{8}\right)a^2\frac{d^2}{da^2}\right]\Psi = \varepsilon\Psi\tag{5.12}$$

E encontra-se finalmente como consequência

$$992\varepsilon_n - 6159 = 124^2 \left[n^2 + 2\frac{327n}{124} + \left(\frac{327}{124}\right)^2 \right] = 124^2 \left[n + \frac{327}{124} \right]^2\tag{5.13}$$

onde ε_n é interpretado como sendo os níveis de energia possíveis para o universo e, em especial, o nível ε_0 é o menor nível possível. Ou seja, é a energia existente no início do universo com um valor deduzido $\varepsilon_0 \sim 114$. Esse nível fundamental de energia dependerá da magnitude de ω , que é a relação de comutação entre os operadores vindo da expressão

$$[\hat{a}, \hat{\dot{a}}] = i\omega,\tag{5.14}$$

havendo uma relação de incerteza entre a medida dos observáveis dada por

$$\Delta a \Delta \dot{a} \leq \frac{\omega}{2}.\tag{5.15}$$

É notável que o autovalor \hat{a} seja diferente de zero pois isso implica que há uma dinâmica expansiva na fase inicial do universo, sendo assim temos um mecanismo de inflação conectado ao parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$. A cosmologia quântica aplicada a esse contexto primordial de um universo tem, como resultado um início expansivo (curvatura positiva) na ausência de campos de matéria.

Capítulo 6

Termodinâmica gravitacional via quantização de Weyl no contexto do TERG

Agora, após o estudo e aplicação da quantização de Weyl no capítulo anterior, será feito um estudo das propriedades estatísticas de um sistema em equilíbrio termodinâmico composto pelos *quanta* de energia permitidos pelo modelo de universo descrito anteriormente conforme a equação (5.13). De modo análogo aos fótons no eletromagnetismo, os grávitons são os bósons da interação gravitacional e devem obedecer à estatística de Bose-Einstein, fornecendo ao sistema as propriedades termodinâmicas características dessa distribuição estatística.

A dinâmica das partículas na teoria quântica é diferente da dinâmica clássica tendo, como exemplo, o problema da indistinguibilidade de partículas idênticas. Considerando um sistema de dois bósons idênticos, a autofunção pode ser escrita de um modo geral como

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2) + \Psi_\beta(1)\Psi_\alpha(2)]. \quad (6.1)$$

Fazendo com que os bósons 1 e 2 estejam no mesmo estado, ou seja $\alpha = \beta$, a função densidade de probabilidade desse sistema será

$$\Psi_S^* \Psi_S = 2\Psi_\alpha^*(1)\Psi_\alpha^*(2)\Psi_\alpha(1)\Psi_\alpha(2). \quad (6.2)$$

Isso significa que a probabilidade de que dois bósons sejam encontrados no mesmo estado é o dobro da probabilidade correspondente de um sistema clássico que forneceria

$$\Psi^* \Psi = \Psi_\alpha^*(1)\Psi_\alpha^*(2)\Psi_\alpha(1)\Psi_\alpha(2). \quad (6.3)$$

Ou seja, a simples presença de um bóson em um estado quântico faz com que se aumente a possibilidade de que outro bóson esteja no mesmo estado quântico. Esse resultado pode

ser estendido para vários bósons idênticos de modo que, se já existirem n bósons em um estado quântico, a probabilidade de que um outro também assuma esse mesmo estado será aumentada de um fator $(n + 1)$ do que seria o correspondente clássico com partículas distinguíveis.

Considerando um sistema de bósons em equilíbrio pode-se equacionar

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^b = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^b, \quad (6.4)$$

onde n_1 e n_2 são as quantidades de partículas nos estados 1 e 2 enquanto $R_{1 \rightarrow 2}^b$ e $R_{2 \rightarrow 1}^b$ são as taxas de transições entre os bósons nesses estados. Tais taxas podem ser expressas em função das taxas para partículas clássicas R^c multiplicadas pelo fator $(n + 1)$, ou seja $R_{1 \rightarrow 2}^b = (n_2 + 1)R_{1 \rightarrow 2}^c$, já que a cada transição para o estado 2 a probabilidade de nova transição aumenta pelo fator $(n_2 + 1)$, sendo n_2 o número de partículas que já estavam nesse estado. As taxas de transições de estado para partículas clássicas podem ser escritas em termos da distribuição de Boltzmann, o que dá na condição de equilíbrio

$$n_1(n_2 + 1)R_{1 \rightarrow 2}^c = n_2(n_1 + 1)R_{2 \rightarrow 1}^c = n_1(n_2 + 1)e^{-\varepsilon_2/kT} = n_2(n_1 + 1)e^{-\varepsilon_1/kT}, \quad (6.5)$$

sendo k a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema, podendo ser reescrito como

$$\frac{n_1}{n_1 + 1}e^{-\varepsilon_1/kT} = \frac{n_2}{n_2 + 1}e^{-\varepsilon_2/kT}. \quad (6.6)$$

O valor de cada membro desta equação não pode envolver propriedades particulares de cada estado e o resultado é que eles forneçam apenas algo relacionado à temperatura T de equilíbrio. Igualando-os convenientemente a uma função do tipo $e^{-\alpha}$ se chega a

$$\frac{n}{n + 1}e^{-\varepsilon/kT} = e^{-\alpha}. \quad (6.7)$$

E finalmente, isolando n

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{\varepsilon/kT} - 1} = \frac{1}{e^{\varepsilon'/kT} - 1}, \quad (6.8)$$

onde $\varepsilon'/kT = \alpha + (\varepsilon/kT)$. Este resultado é a distribuição de Bose-Einstein, fornecendo o número de bósons em um sistema com temperatura de equilíbrio T ocupando o estado quântico de energia ε .

6.1 Aplicação da distribuição de Bose-Einstein aos fótons

A radiação contida em uma cavidade, de volume fixo V e a uma temperatura constante T , possui propriedades que podem ser estudadas aplicando a distribuição de Bose-Einstein. Tratando os fótons como um gás, se tem como resultado o espectro da radiação de cavidade do corpo negro, que foi obtido por Max Planck com dados experimentais já conhecidos.

A distribuição para fótons possui a forma da equação (6.8) com $\alpha = 0$, ou seja

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}. \quad (6.9)$$

Isso ocorre porque o parâmetro α é especificado pelo número de partículas do sistema e, no caso dos fótons na cavidade, não há uma constância nesse número já que existe absorção e emissão dos fótons nas paredes do recipiente que os contém. Assim a distribuição não pode depender do termo e^α com o sistema em equilíbrio térmico.

Isso pode parecer pouco óbvio mas, esse resultado é obtido naturalmente ao tomar a função de partição do sistema

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta n_1 \varepsilon_1} e^{-\beta n_2 \varepsilon_2} \dots \quad (6.10)$$

onde $\beta = 1/kT$ e a soma deve ser feita sobre todos os possíveis números de partículas $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ em cada estado com energia $\varepsilon_r = 0, 1, 2, 3, \dots$. Reescrevendo a última equação com a propriedade do produto de exponenciais se obtém

$$Z = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1 \varepsilon_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta n_2 \varepsilon_2} \right) \dots \quad (6.11)$$

Cada termo entre parênteses é uma série de expansão da expressão $(1 - e^{-\beta n})^{-1}$ e a função de partição assume a forma

$$Z = \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_1}} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_2}} \right) \dots \quad (6.12)$$

E assim, o número provável de fótons $n(\varepsilon)$ ocupando o estado quântico de energia ε é obtido da expressão

$$n_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_r} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \sum_r - \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_r})}{\partial \varepsilon_r} \quad (6.13)$$

Derivando o logaritmo e simplificando a expressão resultante se obtém finalmente $n(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/kT} - 1)^{-1}$ de acordo com a equação (6.9).

Chamando de $G(\varepsilon)d\varepsilon$ o número de possíveis estados quânticos para fótons no intervalo de energia de ε até $\varepsilon + d\varepsilon$, e com o número provável de partículas ocupando o estado quântico de energia ε dado por $n(\varepsilon)$ em (6.9), o número de fótons em tal intervalo energético é dado pelo produto $n(\varepsilon)G(\varepsilon)d\varepsilon$.

A função $G(\varepsilon)$ pode ser calculada com argumentos geométricos, considerando uma cavidade cúbica de lado L e aplicando as condições de contorno aos vetores de ondas estacionárias que são permitidos nas dimensões da cavidade. Sendo (k_x, k_y, k_z) o vetor de uma onda eletromagnética, suas componentes obrigatoriamente satisfazem as condições periódicas

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_1, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_2, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_3, \quad (6.14)$$

onde n_1, n_2 e n_3 são números inteiros. Pensando em um espaço abstrato formado pelos pontos (k_x, k_y, k_z) , o volume cúbico em torno de cada ponto é $(2\pi/L)^3$ e cada um desses pontos corresponde a um possível vetor de onda permitido. A energia dos fótons é quantizada de acordo com

$$\varepsilon = h\nu = \frac{ch}{2\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (6.15)$$

sendo ν a frequência e c a velocidade de propagação da luz. Essa equação define uma esfera de raio $2\pi\varepsilon/ch$ e todos os pontos do reticulado interior a essa esfera possuem energia menor do que ε . O número de todos esses pontos que possuem energia entre 0 e ε é dado pela divisão do volume da esfera pelo volume cúbico $(2\pi/L)^3$ em torno de cada ponto. Executando a divisão e multiplicando o resultado por dois, já que para cada vetor de onda há dois modos de propagação relacionados à polarização da onda, se encontra

$$N(\varepsilon) = 2 \frac{4\pi}{3} (2\pi\varepsilon/ch)^3 (2\pi/L)^{-3} = \frac{8\pi V}{3c^3 h^3} \varepsilon^3, \quad (6.16)$$

que fornece o número $N(\varepsilon)$ de possíveis ondas no interior da cavidade de volume $V = L^3$ com energia entre 0 e ε . Derivando essa função obtemos $G(\varepsilon)d\varepsilon$ o número de estados quânticos para fótons no intervalo de energia de ε até $\varepsilon + d\varepsilon$

$$G(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon, \quad (6.17)$$

De posse das funções $n(\varepsilon)$ dada em (6.9) e $G(\varepsilon)$ dada em (6.17), algumas propriedades termodinâmicas são naturalmente determinadas. Por exemplo, o número médio N de fótons na cavidade

$$N = \int_0^\infty n(\varepsilon)G(\varepsilon)d\varepsilon, \quad (6.18)$$

que permite naturalmente calcular a densidade volumétrica de fótons como

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int_0^\infty n(\varepsilon)G(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3 h^3 (e^{\varepsilon/kT} - 1)} \varepsilon^2 d\varepsilon. \quad (6.19)$$

Ao fazer uma mudança de variável $x = \varepsilon/kT$, a última equação é reduzida a

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi(kT)^3}{(ch)^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{(e^x - 1)} dx \simeq \frac{8\pi(kT)^3}{(ch)^3} 2,40. \quad (6.20)$$

Substituindo os valores das constantes e utilizando $T = 2,7 \text{ kelvin}$ como a temperatura atual do universo, estimamos a densidade de fótons da radiação cósmica de fundo (CMB) da ordem de 400 milhões de fótons por metro cúbico.

Agora, a energia interna para a cavidade será

$$U = \int_0^\infty \varepsilon n(\varepsilon) G(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty V \frac{8\pi\varepsilon^3 d\varepsilon}{c^3 h^3 (e^{\varepsilon/kT} - 1)} \quad (6.21)$$

de onde vem a razão U/V proporcional a T^4 , fazendo novamente $x = \varepsilon/kT$

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x - 1)} dx \simeq \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} 6,494 \quad (6.22)$$

resultado conhecido como a lei de Stefan-Boltzmann e também, finalmente, escrevemos a densidade volumétrica de energia no intervalo de ε até $\varepsilon + d\varepsilon$

$$\rho_T(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\varepsilon n(\varepsilon) G(\varepsilon) d\varepsilon}{V} = \frac{8\pi\varepsilon^3 d\varepsilon}{c^3 h^3 (e^{\varepsilon/kT} - 1)}, \quad (6.23)$$

de onde surge o espectro de Planck ao substituir $\varepsilon = h\nu$. A função $\rho_T(\nu)$ possui um valor máximo para uma frequência que muda linearmente com a temperatura, resultado conhecido como a lei do deslocamento de Wien.

6.2 O universo preenchido pelo gás de grávitons

De modo análogo ao estudo do gás de fótons na cavidade, será feito agora um estudo da termodinâmica para o modelo de quantização obtido pelo mapeamento de Weyl, apresentado no capítulo anterior. A partir da energia discreta obtida para o vácuo no início do Universo, pode-se construir imediatamente uma função de partição:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (6.24)$$

Essa é função de partição de um ensemble canônico, ou seja, estamos modelando inicialmente um universo com temperatura, volume e número de partículas fixos, supondo assim que elas não escapam do universo. Buscando então o resultado em (5.13) e fazendo $E_i = \varepsilon_n$ na expressão apresentada para a função de partição, obtemos:

$$Z = \sum_n e^{[-\frac{\varepsilon_n}{kT}]} = \sum_n \exp \left[-\frac{(124n + 327)^2 + 6159}{992kT} \right] \quad (6.25)$$

Com a qual se pode calcular a energia livre de Helmholtz, F , e a entropia, S

$$F = -kT \ln Z, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (6.26)$$

Pode-se também calcular a capacidade térmica C_V (para $k = 1$)

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}, \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (6.27)$$

De imediato percebe-se uma dificuldade com a função partição por não possuir uma forma analítica simples, sendo uma série de exponenciais

$$\begin{aligned} Z \simeq & e^{-\frac{114}{T}} + e^{-\frac{211,25}{T}} + e^{-\frac{339,5}{T}} + e^{-\frac{498,75}{T}} + e^{-\frac{689}{T}} + e^{-\frac{910,25}{T}} + e^{-\frac{1162,5}{T}} + \\ & e^{-\frac{1445,75}{T}} + e^{-\frac{1760}{T}} + e^{-\frac{2105,25}{T}} + e^{-\frac{2481,5}{T}} + e^{-\frac{2888,75}{T}} + e^{-\frac{3327}{T}} + e^{-\frac{3796,25}{T}} + e^{-\frac{4296,5}{T}} + \\ & e^{-\frac{4827,75}{T}} + e^{-\frac{5390}{T}} + e^{-\frac{5983,25}{T}} + e^{-\frac{6607,5}{T}} + e^{-\frac{7262,75}{T}} + e^{-\frac{7949}{T}} + e^{-\frac{8666,25}{T}} + e^{-\frac{9414,5}{T}} + \dots \end{aligned} \quad (6.28)$$

Isso sugere um tratamento numérico ou, pelo menos, um truncamento da série em algum termo, já que com o crescimento de n os termos correspondentes vão decrescendo em sua contribuição. Sendo assim, como pequeno ensaio, considerando uma temperatura $T = 100$ e somando os termos até $n = 10$ se obtém $Z \simeq 0.4822563163087$ enquanto que para $n = 50$ se obtém $Z \simeq 0.4822563163090$. Dividindo ambos os valores se tem uma razão menor do que 10^{-13} , mostrando que para cálculos práticos a série com poucos termos já oferece um boa aproximação.

Os gráficos da função de partição Z e da energia livre de Helmholtz F calculada a partir da função Z , ficam, respectivamente, com o seguinte aspecto

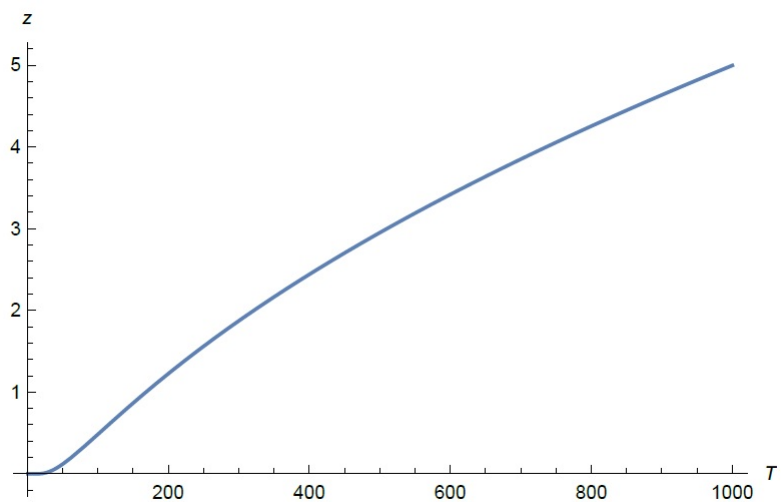


Figura 6.1: Z em função da temperatura

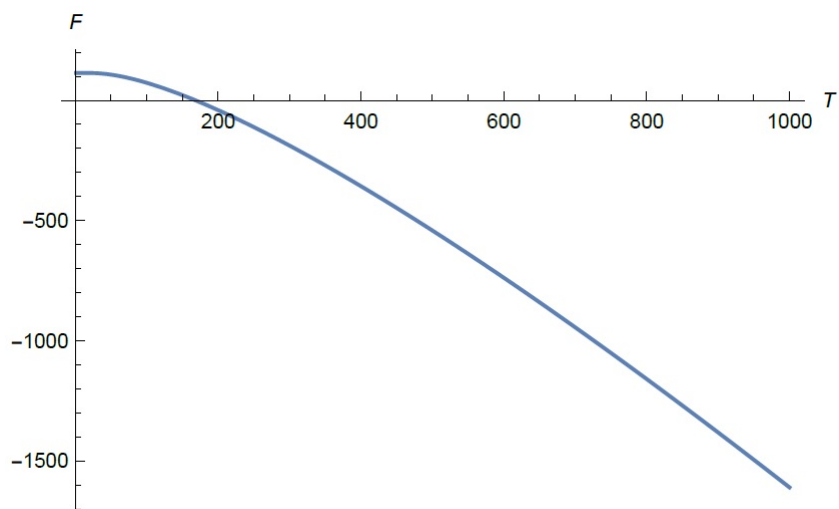


Figura 6.2: F em função da temperatura

Gerando, então, a função entropia que fica crescente com a temperatura e mudando de concavidade

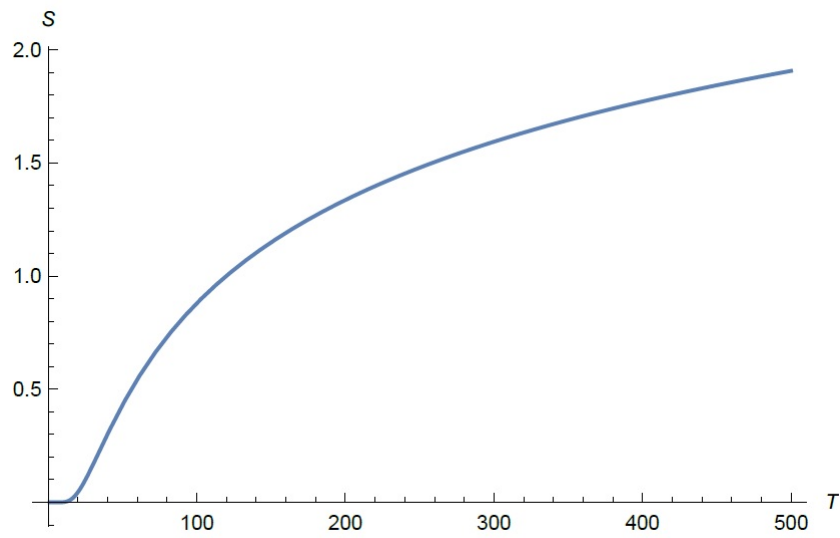


Figura 6.3: S em função da temperatura

E, para a capacidade térmica em função de T a volume constante, vemos que é interessante a existência de uma transição com derivada nula no seguinte gráfico obtido

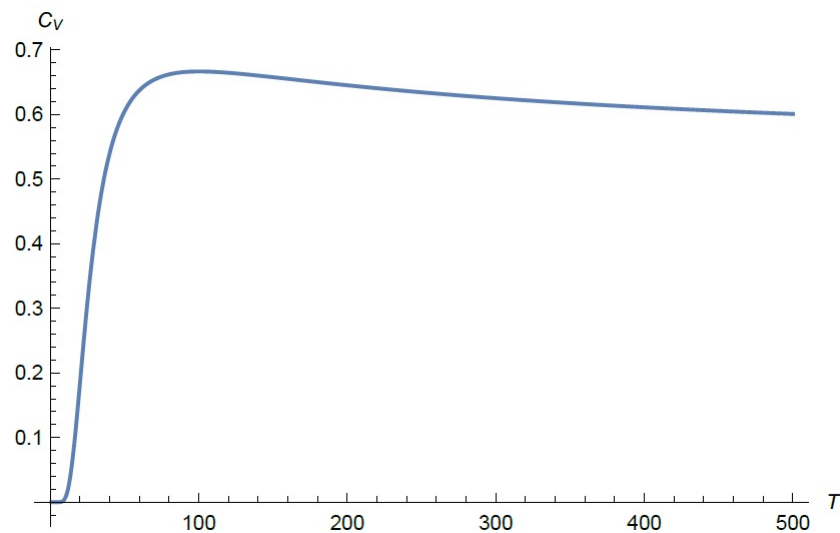


Figura 6.4: C em função da temperatura

Esse modelo termodinâmico tem uma notável propriedade semelhante ao modelo de Einstein para sólidos, que é uma pressão nula no sistema devido a não dependência explícita da função de partição com o volume

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = 0. \quad (6.29)$$

Conclui-se assim que ao escrever a primeira lei da termodinâmica, esta assume uma forma simples do tipo $d\langle E \rangle = C_V dT = T dS$. Se essa equação é escrita em termos da função de partição chega-se a uma identidade, sendo que todas as grandezas envolvidas são funções apenas da temperatura e as derivadas parciais tornam-se derivadas totais.

Encerrando, para se obter uma solução para a função partição na forma de funções elementares, será agora considerado uma aproximação. Quando o valor de n no somatório for muito grande, o termo quadrático dentro do somatório será dominante, logo,

$$Z \cong f(T) + \frac{1}{2} e^{-114/T} \left[\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{31}{2}/T} \right) + 1 \right], \quad (6.30)$$

onde a função $f(T)$ é uma função que a princípio pode depender da temperatura T e ϑ_3 é a função elíptica de Jacobi de terceira espécie. Verificando como a função $f(T)$ se comporta, basta traçar a função partição Z para a expressão acima com $f(T)$ nula e comparar com o resultado numérico. É mostrado o comportamento da função acima (com $f(T) = 0$) em preto pontilhado e o comportamento do somatório da função Z em azul na figura 6.5.

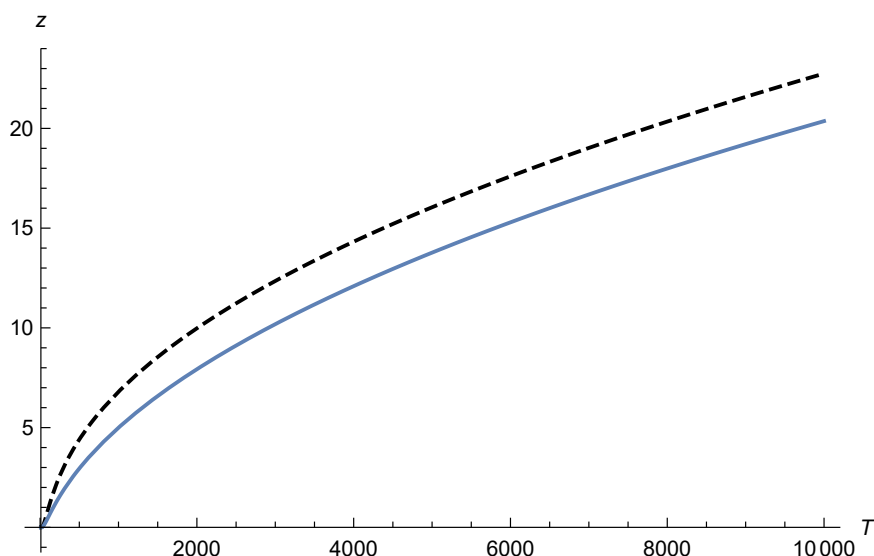


Figura 6.5: Comparação da função partição com a aproximação por função elíptica.

Assim se verifica que a partir de certo valor de temperatura, os gráficos divergem apenas por um valor constante de valor aproximado $5/2$. Sendo assim, temos que $f(T = \infty) \cong -\frac{5}{2}$. As funções coincidem na origem, logo, uma função candidata que satisfaz

$f(T = \infty) \cong -\frac{5}{2}$ e $f(T = 0) = 0$ é o do tipo arco-tangente. Resulta então que

$$f(T) = -\frac{5}{\pi} \arctan(T/500), \quad (6.31)$$

onde o fator divisor 500 foi ajustado manualmente para que a curva tivesse a mesma suavidade de crescimento que a da solução numérica. Sendo assim, o resultado é

$$Z \cong \frac{1}{2} e^{-114/T} \left[\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{31}{2}/T} \right) + 1 \right] - \frac{5}{\pi} \arctan(T/500). \quad (6.32)$$

O comportamento dessa função analítica pode ser visto na figura 6.6.

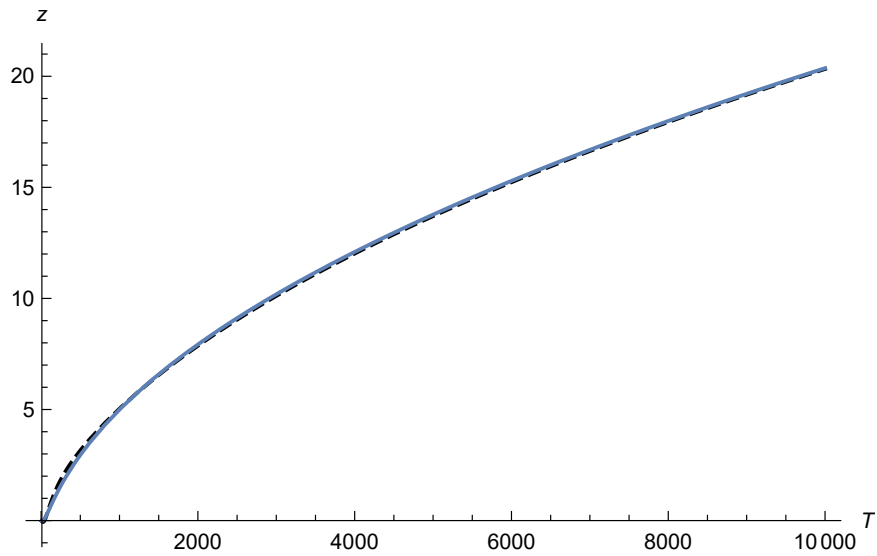


Figura 6.6: Comparação da função partição com a aproximação por função elíptica com a correção do arco-tangente.

Essa especulação naturalmente pode ainda receber novas sugestões para um melhor ajuste e, assim, todas as grandezas termodinâmicas possam ser aproximadamente expressas por funções analíticas mais convenientes.

Capítulo 7

Considerações finais

Neste trabalho, com o objetivo de discutir cosmologia em contexto que alcance até a teoria quântica, fizemos uma breve revisão da teoria da relatividade de Einstein, até se chegar às equações de campo de Einstein para a gravitação na presença ou não da constante cosmológica. Devido às dificuldades existentes na RG apresentamos uma formulação equivalente à teoria da gravitação de Einstein que é denominada de teleparalelismo equivalente à relatividade geral TEGR. Discutimos brevemente as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana do TEGR; mostramos que no contexto deste formalismo é possível obter uma expressão localmente bem definida para a energia do campo gravitacional. Mostramos também que a partir das equações de campo e da definição de energia é possível obter, a partir de uma equação de continuidade, uma expressão para a pressão gravitacional na presença ou não de matéria.

Apresentamos o modelo de universo de FLRW que é uma solução exata das equações de Einstein que descreve modelos de universos homogêneos e isotrópicos em expansão ou contração acelerada. Apresentamos a definição de horizonte aparente do modelo de FLRW, construímos um campo de tétradas adaptadas a observadores espacialmente estáticos associados à métrica de FLRW. Calculamos a energia total contida no interior do horizonte aparente, calculamos também a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente. Mostramos que para modelos de universo em expansão acelerada a pressão total sobre a superfície do horizonte aparente é positiva podendo ser responsável pela expansão acelerada do universo atualmente.

Usando as expressões para a energia e pressão obtidas anteriormente, escrevemos uma relação para a primeira lei da termodinâmica na superfície do horizonte aparente. Para isto adotamos a entropia como sendo dada por um quarto da área da superfície do horizonte aparente. A partir da relação para a primeira lei, extraímos uma expressão para temperatura na superfície do horizonte aparente. Em particular para modelos de universo plano esta temperatura reduz-se à metade da temperatura de Kodama-Hayward [17] na superfície do horizonte aparente.

Após toda essa discussão foi feito um resumo do procedimento de quantização de Weyl

com uma aplicação a um modelo de universo vazio, gerando uma solução aproximada com discretização da energia, possibilitando um estudo de propriedades desse modelo de universo. Um resultado importante é que o autovalor de \hat{a} é diferente de zero e é atrelado à curvatura do universo k e dando a ela uma interpretação positiva, ou seja, uma espécie de expansão, exatamente o que é esperado para modelo inflacionário.

E no capítulo final, com uma analogia à estatística de fótons, apresentamos um estudo da termodinâmica do universo vazio primordial, possuindo uma função de partição dependente apenas da temperatura e grandezas termodinâmicas com características de um ensemble canônico. É notável nas funções que descrevem a entropia, que muda de concavidade, e a capacidade térmica, que possui uma transição com derivada nula, que o sistema muda seu comportamento de acordo com a temperatura. Isso abre caminho para futuras especulações sobre mecanismos de evolução do universo, como por exemplo a formação de partículas elementares, transições de fase e inflação. Além de possibilitar novos ensaios com modelos de universo em equilíbrio ou fora do equilíbrio termodinâmico, gerando vasto ramo de pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Schweizer and N. Straumann, Phys. Lett. **71A**, 493 (1979).
- [2] M. Schweizer, N. Straumann and A. Wipf, Gen. Rel. Grav. **12**, 951 (1980).
- [3] J. Nitsch and F. W. Hejl, Phys. Lett. **96B**, 98 (1980).
- [4] J. W. Maluf and J. F. da Rocha Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014, (2001).
- [5] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa, F. F. Faria, J. F. da Rocha, "The angular momentum of the gravitational field and the Poincare group", Classical and Quantum Gravity **23**, 6245 (2006).
- [6] A. S. Fernandes, S. C. Ulhoa, and R. G. G. Amorim, J. Phys. Conf. Ser. **965** (2018) 012014.
- [7] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memorials, Dover New York NY, (1952).
- [8] N. Hammermesh, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Dover New York NY, (1962).
- [9] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, 6th print NJ, (1966).
- [10] A. Einstein, Ann. d. Phys. (Leipzig) **55**, (1918).
- [11] H. C. Ohanian and R. Ruffini, Gravitation and Spacetime, W. W. Norton, New York, NY, (1994).
- [12] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2, p. 135 Publish or Perish, Delaware, (1975).
- [13] R. P. Feynman, Feynman Lectures on Gravitation, Addison-Wesley, Redwood City, CA, (1995).
- [14] L. D. Faddeev, Sov. Phys. Usp. **25**, 130 (1982).

- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1994).
- [16] M. P. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity, A introduction for Physics*, Cambridge University Press, (2003).
- [17] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **84**, 024003 (2011).
- [18] R. Weitzenböck, *Invarianten Theorie* (Nordhoff, Groningen), (1923).
- [19] A. Einstein, *Berliner Sitzungsber*, 217, (1928).
- [20] A. Einstein, *Berliner Sitzungsber*, 156, (1929).
- [21] C. Møller, Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitation. Proceedings of the conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablona, 1962. Scientific Publishes, Warszawa e Gauthier - Vilars, Paris, (1964).
- [22] C. Pellegrini and J. Plebanski, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk* **2** (2), (1962).
- [23] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **130** (3), 1253, (1963).
- [24] J. W. Maluf, *Ann. Phys.* **14**, 723 (2005).
- [25] J. F. da Rocha Neto, J. W. Maluf and S. C. Ulhoa, *Phys. Rev. D* **82**, 124035, (2010).
- [26] J. W. Maluf, J. F. da Rocha Neto, T. M. L. Toríbio and K. H. Castelo Branco, *Phys. Rev. D* **65**, 124001, (2003).
- [27] F. W. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity in Geometry and Theoretical Physics*, edited by S. J. Debrus and A. C. Hirshfieldpring Berlin, Heidelberg, (1991).
- [28] J. W. Maluf, S. C. Ulhoa and F. F. Faria, *Phys. Rev. D* **80**, 044036 (2009).
- [29] S. P. Permutter et al., *Nature* **391**, 51 (1998).
- [30] S. P. Permutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [31] G. Riess et al., *Astron. J.* **116** 1009 (1998).
- [32] B. Schmidt et al., *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998).
- [33] W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmology* (2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [34] W. Collins, *Phys. Rev. D* **45**, 495 (1992).

- [35] S. A. Hayward, S. Mukohyama, and M. C. Ashwort, Phys. Rev. Lett. A **256**, 347 (1999).
- [36] S. A. Hayward, Classical Quantum Gravity **15**, 3147 (1998).
- [37] A. B. Nielson and J. H. Yoon, Classical Quantum Gravity **25**, 085010 (2008).
- [38] D. Giulini, That Strange Procedure Called Quantisation, volume 40, pages 17–40, 2003.
- [39] S. C. Ulhoa and R. G. G. Amorim, Adv. High Energy Phys. **2014** (2014) 1.
- [40] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23** (1981) 347.
- [41] A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1110.
- [42] A. D. Linde, Phys. Lett. B **116** (1982) 335.
- [43] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108** (1982) 389.
- [44] A. D. Linde, Phys. Lett. B **129** (1983) 177.
- [45] A. D. Linde, Reports Prog. Phys. **47** (1984) 925.
- [46] S. Ulhoa; R. Amorim; A.Capistrano; A. Fernandes, Towards Energy Discretization in Quantum Cosmology, Preprints 2018, 2018080171.
- [47] J.F. da Rocha-Neto; B.R. Morais, Gravitational pressure, apparent horizon and thermodynamics of FLRW universe in the teleparallel gravity, Gen Relativ Gravit (2018) 50: 35.