



Universidade de Brasília
Instituto de Física

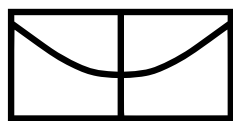
**ELETRODINÂMICA ESTENDIDA EM
ESTRUTURAS TOROIDAIS**

Roemir Peres Machado Moreira

Orientador: Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

Coorientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Brasília
2024



UnB

Universidade de Brasília

Instituto de Física

**ELETRODINÂMICA ESTENDIDA EM
ESTRUTURAS TOROIDAIS**

Roemir Peres Machado Moreira

Orientador: Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

Coorientador: Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de Brasília, para obtenção
do título de Doutor em Física.

Brasília

2024

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana por ter me guiado com este tema, ensinando-me os conceitos e fenômenos físicos, também por ter sido grande amigo me ajudando em minhas dificuldades tanto acadêmicas como pessoais. Por ter se mostrado um exemplo de pessoa a ser seguido. Obrigado por tudo!

Agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Humberto Belich Junior por ter compartilhado do desafio em instruir-me no vasto tema que nos propomos a estudar, por sempre se disponibilizar doando um pouco de sua atenção e sua sabedoria. Muito obrigado!

Agradeço aos meus colegas e professores que ajudaram-me durante o processo de doutoramento. Em especial, os membros do grupo Produto Estrela dos quais cito alguns que foram os que acompanharam de perto esta luta: Petronilo, Renato, Eduardo, Lucas, Sérgio, Rendisley, Ronni, Kayo, Hara. Obrigado!

Agradeço ao meu amigo Fernando por ter incentivado-me a continuar nos estudos dessa bela ciência. Também, a Josiane pelo apoio dedicado nestes anos e por ter mantido as conversas sobre os desafios da vida adulta.

Agradeço a Jessica Vale pela ajuda, complacência, acolhimento e parceria demonstrada nestes últimos anos. Acreditando e incentivando-me a continuar leve para travar as batalhas da vida. Muito obrigado!

Agradeço a Clediane Molina por sua condescendência demonstrada e ter me apoiado em momentos de necessidades. Muito obrigado!

Agradeço à minha família por acreditar, apoiar e incentivar-me a continuar em meus objetivos. Destaco aqui minhas irmãs Renata e Duana, minha Tia Maria José, meus sobrinhos e demais parentes que direto ou indiretamente tem torcido por mim. Muito obrigado!

Agradeço especialmente aos meus pais, Valdemar Moreira e Antônia Moreira, por serem ímpares em toda carreira terrestre, sempre estando ao meu lado no choro e sorrisos. Eternamente meu muitíssimo obrigado!

Agradeço ao Criador(es) deste imenso laboratório que chamamos de universo!

“Existe apenas um bem, o saber, e apenas um mal, a ignorância.”

-Sócrates

Publicações

R. P. M. Moreira, R. R. Luz, L. R. Silva, e-B. Fis. **10**, 10301 (2021).

R. P. M. Moreira, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, R. G. G. Amorim, H. Belich, Eur. Phys. J. C **82**, 999 (2022).

R. P. M. Moreira, A. E. Santana, H. Belich - Thermal Fields Dynamics applied to CPT-even Electrodynamics in toroidal topologies - submissão para a revista Eur. Phys. J. C.

Resumo

Determinou-se o tensor energia-momento para o eletromagnetismo com o termo de violação de Lorentz do setor de fótons de Modelo Padrão Estendido (MPE) confinado em um hipertoro. Um método de função de partição generalizada é usado, seguindo em paralelo o formalismo de dinâmica de campo térmico escrito em uma variedade toroidal N -dimensional. Depois de considerar aspectos gerais do setor fotônico do MPE em uma variedade toroidal, a influência do termo CPT-par isotrópico do setor eletromagnético do MPE é analisada. Uma abordagem é então aplicada para o efeito Casimir à temperatura finita, correspondendo a uma topologia $(S^1)^r \times \mathbb{R}^{N-r}$, onde N é a dimensão do espaço-tempo de Minkowski e r é a influência do número de dimensões compactificadas do termo CPT-par isotrópico do setor eletromagnético do MPE.

Palavras-chave: Efeito Casimir; eletrodinâmica CPT-par; variedade toroidal

Abstract

It was determined the energy-momentum tensor for the electromagnetism with Lorentz breaking even term of the Standard Model Extended (SME) photon sector confined in a hyper torus. A generalized partition function method is used, following in parallel the thermofield dynamics formalism written in N -dimensional toroidal manifold. After considering general aspects of the SME photon sector in a toroidal manifold, the influence of the isotropic CPT-even electromagnetic sector of the SME is analysed. The approach is then applied to the Casimir effect at finite temperature, corresponding to a topology $(S^1)^r \times \mathbb{R}^{N-r}$, where N is the dimension of the Minkowski space-time, and r is the number of compactified dimensions influence of the isotropic CPT-even electromagnetic sector of the SME is analysed.

Key words: Casimir effect; CPT-even electrodynamics; toroidal manifold

Sumário

1	Introdução	1
2	Dinâmica de Campos Térmicos	7
2.1	Espaço termal de Hilbert	7
2.2	Oscilador Bosônico	10
2.2.1	Transformação de Bogoliubov	11
2.2.2	Operadores Térmicos	12
2.3	Oscilador Fermiônico	15
2.4	Propagador do Campo Escalar Térmico	16
3	Campos Compactificados	24
3.1	Compactificação do tempo	24
3.2	Compactificação de uma dimensão espacial	30
3.3	Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial	35
3.4	Compactificação em d dimensões	37
4	Compactificação Via Método da Função de Partição: O Campo Eletromagnético	39
4.1	Exórdio das teorias compactificadas	39
4.2	Estrutura hamiltoniana	41
4.3	Condições de calibre	44
4.4	Função de partição	46
4.4.1	Compactificação no tempo	46
4.4.2	Compactificação de uma dimensão espacial	52
4.4.3	Compactificação em d dimensões	53
5	O Setor de Gauge do Modelo Padrão Estendido	56
5.1	Estado da Arte	56

5.2	O Setor CPT-ímpar do MPE	57
5.3	O Setor CPT-par do MPE	60
6	Compactificação Via Método da Função de Partição: A Eletrodinâmica CPT-par	64
6.1	Estrutura hamiltoniana e análise de vínculos	64
6.2	Condições de calibre	66
6.3	Função de partição	67
6.4	Setor de paridade par	73
6.4.1	Contribuição isotrópica	73
6.4.2	Compactificação de uma dimensão espacial	76
6.4.3	Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial	78
6.4.4	Compactificação em d dimensões	80
7	Dinâmica de Campos Térmicos: O Campo Eletromagnético livre	83
7.1	O estado de vácuo do campo eletromagnético	83
7.2	Efeito Casimir	91
8	Dinâmica de Campos Térmicos aplicada à Eletrodinâmica CPT-par	93
8.1	O modelo teórico e notação	93
8.2	Tensor Energia-Momento	94
8.3	Efeito Casimir	101
8.3.1	Efeito Casimir à temperatura zero	101
8.3.2	Efeito Casimir à temperatura finita	104
9	Conclusões	109
	Referências Bibliográficas	111

Capítulo 1

Introdução

O Modelo Padrão (MP) da física de partículas é até agora a melhor teoria que descreve de forma unificada as interações fundamentais da natureza. No entanto, ele falha em abordar a interação gravitacional. Apesar do sucesso experimental, sendo o último o bóson de Higgs em 2013, uma teoria mais completa é necessária para prever, por exemplo, a massa de Higgs. Além disso, resta ser devidamente explicada a origem do momento de dipolo elétrico do elétron, d_e , e seus limites superiores experimentais ^[1]. As teorias além do modelo padrão prevêm um pequeno, mas potencialmente mensurável $d_e \leq 10^{-29} e \cdot cm$ ^[2], que apresenta uma distribuição de carga assimétrica ao longo do eixo de rotação. Por essas motivações é obrigatório investigar a física além do modelo padrão.

Em 1989, Kostelecký e Samuel ^[3] propuseram a violação espontânea da simetria de Lorentz através de valores esperados diferente de zero no vácuo de campos não escalares (valores esperados no vácuo de campos tensoriais) com base em uma teoria de cordas. Introduzindo essa proposta de violação em um contexto de teoria de campo, Kostelecký e seus colegas investigaram uma possível extensão do Modelo Padrão ^[4]. Esta proposta ficou conhecida como Modelo Padrão Estendido (MPE) ^[5,6].

A presença de termos que violam a simetria de Lorentz impõe anisotropias no espaço-tempo ^[7,8]. Efeitos quânticos relativísticos ^[9-15] com quebra de simetria de Lorentz e acoplamento não mínimo ^[16-28] abriram a possibilidade de investigar implicações na mecânica quântica, que este background da violação da invariância de Lorentz pode promover.

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma teoria efetiva que está alicerçada na conformação dos grupos de simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, que mantém a invariância da estrutura de gauge, a renormalizabilidade e a microcausalidade do Modelo Padrão. Este modelo, possui uma estrutura capaz de identificar as partículas elementares, além de tratar

como estas interagem. Neste sentido, o MPE se consolida como uma pilastra capaz de explicar a maior parte das interações das partículas utilizando, para tanto, regras e equações. Um dos aspectos aferidos no cenário do MPE, correspondem as interações que violam as simetrias de Lorentz e CPT. Estas interações violadoras de simetrias são moderadas por coeficientes tensoriais obtidos através da quebra espontânea de simetria de Lorentz na escala de Planck. Na conjuntura do MPE, a ocorrência da quebra espontânea da simetria de Lorentz está vinculada ao referencial da partícula, fazendo com que estes coeficientes oriundos da violação não obedeçam as regras de transformação dada pela covariância de Lorentz. Por outro lado, no referencial do observador, não há ocorrência da violação da covariância de Lorentz e todas as transformações (rotações e translações) permanecem invariantes. É válido ressaltar que tal covariância advém como resultado do primeiro postulado da Teoria da Relatividade Restrita (TRR). De acordo com o postulado, as leis físicas são equivalentes para todos os observadores postados nos diferentes referenciais inerciais. Até o presente momento, não existem experimentos contradizendo as previsões dadas por meio da TRR, mostrando desta maneira, que tal teoria possui uma base sólida e consolidada. Diante disso, os experimentos que validam as previsões da TRR servem, por extensão, para legitimar também a covariância de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza.

Sendo pautada como uma das simetrias mais fundamentais, a simetria CPT carrega em seu bojo aspectos de cunho bastante explorados no universo da física contemporânea. Proposta em 1951 por Julian Schwinger e depois tendo sido amplificada sua robustez por Gerhard Lüders e Wolfgang Pauli em 1954, a simetria CPT trata da conjugação de carga (C), inversão da paridade (P) e reversão temporal (T). De forma simples, a operação de conjugação de carga pode ser compreendida que para cada partícula existe uma anti-partícula. A operação de paridade está relacionada à reflexão das coordenadas espaciais ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) e por fim, a reversão temporal consiste na inversão no sentido da evolução temporal do sistema ($t \rightarrow -t$). Esta simetria é a única conhecida que relaciona C, P e T de forma conjunta. Além disso, a simetria CPT exhibe conexões com a simetria de Lorentz, pois Oscar Greenberg mostrou que ao se quebrar a simetria CPT isto também se reflete na violação da simetria de Lorentz.

No início dos anos 90, surgiram os primeiros estudos abordando as consequências da violação das simetrias de Lorentz. Tal temática teve como ponto de partida o trabalho desenvolvido por Sean M. Carrol, George B. Field e Roman Jackiw ^[29], onde propuseram uma eletrodinâmica de Maxwell modificada. Esta modificação da eletrodinâmica veio com a adição na densidade de lagrangeana de um termo do tipo Chern-Simons, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} V^\mu A^\nu F^{\kappa\lambda}$,

em (1+3) dimensões do espaço-tempo. Com isso, houve um acoplamento do campo de gauge com um campo que viola a simetria de Lorentz (V^μ). Ainda na década de 90, Colladay e Kostelecky [5,6,30], elaboraram um modelo teórico que corresponderia a uma extensão do conhecido Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais, denominado de Modelo Padrão Estendido (MPE). Este novo modelo, o MPE, incorpora termos violadores da simetria de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do Modelo Padrão. Os termos de violação de Lorentz são obtidos através da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria de cordas em uma teoria mais fundamental (definida na escala de energia de Planck), e os termos responsáveis pela violação são quantidades tensoriais que fazem o papel de valores esperados no vácuo. Tais coeficientes são geralmente classificados de acordo com a paridade e birrefringência, podendo ser CPT-ímpar, quando viola a simetria CPT, ou CPT-par, quando não viola a simetria CPT. Todavia, alguns aspectos necessitam de análise detalhadas, como os efeitos de contorno e de temperatura.

Recentemente, uma variedade de trabalhos acerca de efeitos térmicos têm tomado notoriedade, em especial aqueles vinculados à física de altas energias e cosmologia, motivando o desenvolvimento de mecanismos para abordar a temperatura no cenário quântico. Um dos primeiros estudos a explorar a temática de teoria quântica de campos à temperatura finita foi elaborado por Matsubara [31], denominado de formalismo do tempo imaginário, que descreve um sistema quântico em equilíbrio termodinâmico. Para tal, o formalismo explora a relação entre a matriz de densidade $\rho = e^{-\beta H}$ e o operador de evolução temporal e^{-iHt} . No intuito de tratar efeitos térmicos na conjuntura da teoria quântica para sistemas fora do equilíbrio, onde o tempo real é significativo, surgiu o formalismo que utiliza integrais de trajetória denominado trajetória temporal fechada, proposto por Schwinger [32] e Keldysh [33].

Em 1975 surge um formalismo para tratar sistemas em equilíbrio denominado de Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), o qual foi desenvolvido por Takahashi e Umezawa [34–38]. Tal formalismo se distingue dos demais formalismos de termalização por pormenorizar a mecânica estatística a partir de uma estrutura vetorial de espaços de Hilbert. Desta forma, no arcabouço da DCT, há uma duplicação nos graus de liberdade do sistema original, e para tanto, utiliza-se das regras intituladas de conjugação dual (ou til). Neste sentido, todo estado $|n\rangle$ no espaço de Hilbert H tem um correspondente estado $|\tilde{n}\rangle$ no espaço de Hilbert til \tilde{H} . Isto significa que todo operador A atuando em H tem um operador imagem \tilde{A} atuando em \tilde{H} . As variáveis térmicas são introduzidas utilizando-se das transformações de Bogoliubov [39].

A média de um operador A na Dinâmica de Campos Térmicos é escrita como uma forma bilinear, de tal modo que coincide com a média de um operador A no ensemble canônico da mecânica estatística, isto é,

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = Tr \{ A \rho \}$$

onde $|0(\beta)\rangle$ corresponde ao estado de vácuo térmico, que é um vetor definido no espaço de Hilbert duplicado através das regras de conjugação til. Tal estado de vácuo térmico advém da aplicação de uma transformação unitária $U(\beta)$ no vácuo duplicado $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$, via transformação de Bogoliubov.

A utilização da Dinâmica de Campos Térmicos se lança como um bom formalismo para tratar efeitos térmicos e de compactificação toroidal ^[40], pois parte de uma teoria de representação contendo regras algébricas físicas e matemáticas bem definidas. Desta forma, tal formalismo, tem sido amplamente aplicado com pleno sucesso em diversos estudos. Por exemplo, em ^[41] os autores consideraram o efeito da temperatura na função de fragmentação de um hádron levando a pares quark-antiquark e usando uma definição de Wilson-loop em tempo real, onde a função de fragmentação diminui em magnitude com um aumento no temperatura. Já em ^[42] o formalismo DCT foi utilizado para analisar um invariante de Poincaré para teoria quântica de campos em temperatura finita. Ainda neste contexto, ^[43] trata do papel da temperatura na definição de um estado hadrônico após o resfriamento do plasma, uma abordagem através de integral de caminho em espaços não comutativos, bem como outros aspectos e aplicações no cenário da teoria quântica foram realizadas e discutidas em ^[40, 44]

Nos últimos anos, esforços têm sido realizados na tentativa de testar a simetria CPT, como por exemplo, mecanismos para testar as simetrias de Lorentz e CPT usando experimentos de antimatéria ^[45]. Em particular, tais simetrias são exploradas no âmbito de teoria da perturbação quiral ^[46]. Além disso, existem testes envolvendo neutrinos oriundos das explosões de raios gama ^[47–50] e uma discussão fenomenológica utilizando mésons neutros ^[51]. Continuando na mesma perspectiva, estudos envolvendo a quebra da simetria CPT a partir de efeitos gravitacionais em um sistema de partículas de auto-interação são apresentados em ^[52]. A aferição dos valores dos coeficientes de Lorentz e CPT também foram discutidos ^[53–55]. Neste sentido, um importante efeito de compactação, incluindo o efeito Casimir, com quebra da simetria CPT foi apenas parcialmente abordado na literatura ^[56].

O efeito Casimir é uma notável manifestação da flutuação do vácuo. Para o campo eletromagnético, este efeito surge devido à diferença entre a densidade de energia dos

modos fora das placas e dentro das placas, os quais estão sujeitos às condições de contorno. Isto leva a atração entre duas placas metálicas, paralelas entre si, embutidas no vácuo [57]. A atração é devida a uma flutuação da energia fundamental do campo, que pela presença das placas, seleciona o modo do vácuo eletromagnético através das condições de contorno [58–61]. As medições deste efeito com grande precisão nas últimas décadas tem ganhado a atenção da comunidade teórica e experimental [62, 63]. Uma implicação prática dessas conquistas foi o desenvolvimento de micro-dispositivos [64–67]. Também, o setor fotônico CPT-par do Modelo Padrão Estendido é levado em conta em [7] [68–78], bem como a introdução em fundo gravitacional [79, 80].

No presente trabalho, foi considerado o efeito da compactificação do eletromagnetismo com quebra da simetria de Lorentz [81], com a preservação da simetria CPT [82], a fim de analisar a influência em tal quebra de simetria no efeito Casimir com tratamento de campo térmico [81–90]. Em termos de dinâmica de campos térmicos, o formalismo algébrico da teoria quântica de campos à temperatura finita, foi realizada uma generalização da transformação de Bogoliubov para descrever efeitos térmicos da compactificação espacial, de um campo em uma topologia toroidal $\Gamma_N^r = (S^1)^r \times \mathbb{R}^{N-r}$ [40]. Em Γ_N^r , N representa a dimensão do espaço-tempo de Minkowski, enquanto r é o número de dimensões compactificadas. Aqui, seguindo um caminho diferente, foi considerada uma abordagem fazendo uma generalização da função de partição, a fim de lidar com a compactificação do espaço e do tempo. Uma vantagem deste procedimento é que evitou-se a duplicação do grau da liberdade no formalismo de Bogoliubov.

Considerando então aspectos gerais do setor de fótons do MPE em uma variedade toroidal, a influência do termo CPT-par isotrópico no setor eletromagnético do MPE no efeito Casimir à temperatura finita é analisada no presente trabalho. Nesta perspectiva, a referida tese está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 realizamos um breve estudo referente a Dinâmica de Campos Térmicos, no qual é exposto o formalismo bem como sua aplicação para os casos de osciladores bosônico e fermiônico. No capítulo 3 efetuamos um estudo sobre campos compactificados. No capítulo 4, estudamos o processo de compactificação para o campo eletromagnético livre. Também, construímos a função de partição deste modelo, possibilitando obter informações acerca das suas propriedades termodinâmicas. No capítulo 5 apresentamos uma breve revisão do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido, expondo os termos CPT-ímpar e CPT-par assim como as propriedades de tais termos. Já no capítulo 6 versamos sobre a compactificação na eletrodinâmica suplantada pelo termo CPT-par. Neste capítulo, realizamos a análise de vínculos para o ha-

miltoniano do modelo, em seguida verificamos os efeitos da compactificação na função de partição da eletrodinâmica CPT-par. A aplicação do formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos é confeccionada no capítulo 7, como exemplo pedagógico, utilizamos para tal estudo o campo eletromagnético livre. No capítulo 8 analisamos a eletrodinâmica CPT-par sob a óptica da Dinâmica de Campos Térmicos. Tendo sido explorado o efeito Casimir à temperatura zero e à temperatura finita para o referido campo em um hipertoro. Por fim, no capítulo 9 expomos a conclusão.

Capítulo 2

Dinâmica de Campos Térmicos

Para efetuar a introdução de temperatura em teorias de campos, uma rota a ser seguida é a descrita através do formalismo do tempo imaginário de Matsubara. Neste formalismo é explorada a relação entre o operador de evolução temporal e^{-iHt} e a mecânica estatística $e^{-\beta H}$. Desse modo, para sistemas em equilíbrio a temperatura fica associada com uma coordenada complexa. Outra forma de abordarmos os efeitos de temperatura em teorias de campos é o ingressado por Schwinger que trata sistemas fora do equilíbrio, onde o tempo real é significativo. Por fim, temos o formalismo desenvolvido por Takahashi e Umezawa conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) [40]. Este formalismo se distingue dos outros métodos de termalização por ter sido elaborado a partir de uma estrutura vetorial de espaços de Hilbert. Para solidificar a construção deste formalismo, dois elementos são de suma importância: Em primeiro lugar ocorre uma duplicação nos graus de liberdade do sistema original, usando as chamadas regras de conjugação til (ou dual). E, em segundo lugar, utiliza-se da transformação de Bogoliubov para introduzir temperatura. É justamente neste último método de termalização que reside o interesse deste capítulo, no qual será revisitado o processo para a construção da teoria e, como este formalismo porta-se mediante bósons e férmions.

2.1 Espaço termal de Hilbert

Tomando um sistema em equilíbrio térmico, no ensemble canônico a média de um operador A é definida por

$$\langle A \rangle = Z(\beta)^{-1} \text{Tr} (e^{-\beta H} A), \quad (2.1)$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição, H o hamiltoniano do sistema e $\beta = \frac{1}{k_B T}$, em que T é a temperatura e k_B a constante de Boltzmann. No presente texto, adotaremos as unidades

naturais: $k_B = c = \hbar = 1$, sendo c a velocidade da luz no vácuo e \hbar a constante de Planck.

Considerando uma base formada por autoestados $|n\rangle$ do hamiltoniano H

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.2)$$

em que as relações $\langle n | m \rangle = \delta_{mn}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1$ são respeitadas. Assim, o valor esperado de um operador fica

$$\langle A \rangle = Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle. \quad (2.3)$$

O cerne da Dinâmica de Campos Térmicos é obter um estado térmico $|0(\beta)\rangle$ definido sobre um espaço de Hilbert, de modo que possamos exprimir o valor esperado de qualquer operador nesse estado de maneira análoga à teoria a temperatura zero, diante disso

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle. \quad (2.4)$$

E neste âmbito, escrevendo $|0(\beta)\rangle$ como uma combinação linear de vetores no espaço de Hilbert

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle. \quad (2.5)$$

Logo, o valor esperado do operador A toma a forma

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle. \quad (2.6)$$

Utilizando a eq. (2.4), temos que

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z(\beta)^{-1} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \quad (2.7)$$

Todavia, como $f_n(\beta)$ são números, a eq. (2.7) não pode ser satisfeita. Por outro lado, tal expressão é semelhante a uma relação de ortogonalidade, nos sugerindo, então, que $f_n(\beta)$ seja elemento de um espaço vetorial. Dessa forma, uma maneira de contornar essa questão é realizando a introdução de outro sistema idêntico através da duplicação do espaço de Hilbert. Este espaço de Hilbert duplicado será constituído pelo produto tensorial entre o espaço original \mathcal{H} e um espaço fictício idêntico, chamado de sistema til, denotado por $\tilde{\mathcal{H}}$.

O sistema dual (original e cópia), são regidos através das seguintes relações denominadas de regras de conjugação til:

$$(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j \quad (2.8)$$

$$(cA_i + A_j)^\sim = c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j \quad (2.9)$$

$$(A_i^\dagger)^\sim = (\tilde{A}_i)^\dagger \quad (2.10)$$

$$(\tilde{A}_i)^\sim = A_i \quad (2.11)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0. \quad (2.12)$$

Nesse cenário, o estado $|0(\beta)\rangle$ fica dado por

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta) |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle. \quad (2.13)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | A | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | \otimes \langle \tilde{n} | A | m \rangle \otimes | \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle \delta_{nm} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | A | n \rangle, \end{aligned}$$

de modo que

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (2.14)$$

cujas soluções

$$f_n(\beta) = Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-\beta E_n/2}. \quad (2.15)$$

Logo, o estado de vácuo termal toma a forma

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle.$$

Essas regras constituirão a base para a construção de situações particulares.

2.2 Oscilador Bosônico

Nesta seção, dedicaremos em detalhar o formalismo da DCT tomando como modelo de aplicação um oscilador bosônico à temperatura zero, cujo hamiltoniano é dado por

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (2.16)$$

onde a^\dagger e a são os operadores criação e destruição respectivamente. Estes operadores satisfazem a seguinte álgebra

$$[a, a^\dagger] = 1; \quad [a, a] = 0; \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (2.17)$$

Com o intuito de construir o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos para um sistema bosônico, devemos realizar a duplicação dos graus de liberdade seguindo as regras de conjugação til, isto resultará na introdução dos operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} . Então,

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (2.18)$$

de modo que os operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} satisfazem a seguinte álgebra

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1; \quad [\tilde{a}, \tilde{a}] = 0; \quad [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (2.19)$$

A caracterização de um vetor da base de Fock é dado por

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle,$$

no qual $|0\rangle$ é o estado de vácuo, de forma que um estado arbitrário do espaço de Hilbert duplicado, $\mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, fica

$$|n, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^m |0, \tilde{0}\rangle.$$

O estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é descrito como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-\beta\omega n/2} \frac{(a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}\sqrt{\tilde{n}!}} |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Desta forma, a função de partição é obtida exigindo a ortonormalização do estado $|0(\beta)\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= Z(\beta)^{-1} \sum_{n,m} \langle \tilde{m}, m | e^{-\beta\omega(n+m)/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= Z(\beta)^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta\omega(n+m)/2} \delta_{nm} \delta_{mn} \\ &= Z(\beta)^{-1} \sum_n e^{-\beta\omega n}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizando da condição de normalização $\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1$, bem como da expansão da série geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$, resulta

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \quad (2.22)$$

Assim, a expressão para o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ torna-se

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n e^{-\beta\omega n/2} \frac{(a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n}{n!} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.23)$$

2.2.1 Transformação de Bogoliubov

A transformação de Bogoliubov consiste em uma transformação que permite obter o estado de vácuo térmico a partir do estado de vácuo não térmico. Neste sentido, tendo que a soma na eq. (2.23) corresponde a expansão de

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp(e^{-\beta\omega n/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.24)$$

Logo, definindo as funções hiperbólicas

$$\cosh \theta (\beta) = u (\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \quad (2.25)$$

$$\sinh \theta (\beta) = v (\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}, \quad (2.26)$$

e com tais relações, a eq. (2.24) fica escrita como

$$|0 (\beta)\rangle = \cosh^{-1} \theta (\beta) e^{\tanh \theta (\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.27)$$

tornando possível reescrever o estado $|0 (\beta)\rangle$ em termos de um operador unitário $U (\beta)$,

$$|0 (\beta)\rangle = U (\beta) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.28)$$

A transformação $U (\beta) = e^{-iG(\beta)}$ com $G (\beta) = -i\theta (\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)$ é denominada transformação de Bogoliubov na qual leva o estado de vácuo $|0, \tilde{0}\rangle$ ao estado termalizado $|0 (\beta)\rangle$.

2.2.2 Operadores Térmicos

A partir do operador unitário $U (\beta)$ podemos construir os operadores térmicos, os quais são expressos como

$$a (\beta) = U (\beta) a U (\beta)^\dagger \quad (2.29)$$

$$a^\dagger (\beta) = U (\beta) a^\dagger U (\beta)^\dagger \quad (2.30)$$

$$\tilde{a} (\beta) = U (\beta) \tilde{a} U (\beta)^\dagger \quad (2.31)$$

$$\tilde{a}^\dagger (\beta) = U (\beta) \tilde{a}^\dagger U (\beta)^\dagger. \quad (2.32)$$

Por exemplo, ao atuarmos o operador destruição termalizado $a (\beta)$ sobre o estado térmico $|0 (\beta)\rangle$, obtém-se

$$\begin{aligned} a (\beta) |0 (\beta)\rangle &= U (\beta) a U (\beta)^\dagger U (\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= U (\beta) a |0, \tilde{0}\rangle \\ &= U (\beta) a (|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) \\ &= U (\beta) (a |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) = 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos proceder para $\tilde{a}(\beta)$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}(\beta) |0(\beta)\rangle &= U(\beta) \tilde{a} U(\beta)^\dagger U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\
 &= U(\beta) \tilde{a} |0, \tilde{0}\rangle \\
 &= U(\beta) \tilde{a} (|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle) \\
 &= U(\beta) (|0\rangle \otimes \tilde{a} |\tilde{0}\rangle) = 0.
 \end{aligned}$$

Já em relação aos operadores a e \tilde{a} , temos

$$\begin{aligned}
 a |0(\beta)\rangle &= a \left(\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} a (|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (a |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (\sqrt{n} |n-1\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty \sqrt{n} e^{-\beta E_n/2} |n-1, \tilde{n}\rangle
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} |0(\beta)\rangle &= \tilde{a} \left(\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} \tilde{a} (|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (|n\rangle \otimes \tilde{a} |\tilde{n}\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty e^{-\beta E_n/2} (|n\rangle \otimes \sqrt{\tilde{n}} |\tilde{n}-1\rangle) \\
 &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n^\infty \sqrt{\tilde{n}} e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}-1\rangle.
 \end{aligned}$$

Em vista disso, notamos que $|0(\beta)\rangle$ é um estado de vácuo para os operadores térmicos

$a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$. Enquanto que um estado térmico para os operadores não-térmicos a e \tilde{a} .

Uma outra forma de apresentar os operadores térmicos são escrevendo-os como combinações lineares dos operadores não térmicos. Para tanto, utilizando a forma explícita do operador $U(\beta)$ juntamente com as expressões dadas em (2.29)-(2.32), acarretará nas seguintes relações:

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger \quad (2.33)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger \quad (2.34)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} \quad (2.35)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a, \quad (2.36)$$

em que $u(\beta)$ e $v(\beta)$ são dadas pelas eqs. (2.25) e (2.26). Se o intuito for obter os operadores não térmicos a e a^\dagger em função dos operadores térmicos, basta inverter as relações (2.33)-(2.36), resultando

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \quad (2.37)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta) \quad (2.38)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \quad (2.39)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (2.40)$$

A notação de dubleto é implementada

$$A = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Dessa maneira, os operadores térmicos escritos na forma matricial são tidos como

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

em que

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

2.3 Oscilador Fermiônico

No âmbito de um oscilador fermiônico, o sistema é definido através do hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (2.44)$$

tal que os operadores criação e destruição satisfazem a seguinte álgebra

$$\{a, a^\dagger\} = 1; \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \quad (2.45)$$

de maneira que $\{A, B\} = AB + BA$ é o anticomutador e que o espaço de Hilbert é composto apenas por dois estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, haja vista que o operador número $N = a^\dagger a$ possui autovalores 0 ou 1.

Semelhante ao script do sistema bosônico, a construção do sistema fermiônico deve ser tanto quanto consistente de sorte que a duplicação dos graus de liberdade introduzidos nos operadores til de criação e destruição satisfaçam as relações

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1; \quad \{\tilde{a}, \tilde{a}\} = \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = 0. \quad (2.46)$$

Portanto, o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é gerado como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-n\beta\omega/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= Z(\beta)^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.47)$$

A condição de normalização do estado térmico $|0(\beta)\rangle$ conduz a

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}$$

e assim,

$$|0(\beta)\rangle = (1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.48)$$

Procedendo de maneira análoga ao sistema bosônico, as novas variáveis são definidas

$$\cos \theta(\beta) = u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}}, \quad (2.49)$$

$$\sin \theta(\beta) = v(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega}}}, \quad (2.50)$$

em que

$$u(\beta)^2 + v(\beta)^2 = 1.$$

A introdução dos operadores térmicos é realizada através da transformação unitária $U(\beta)$, e esta implicará nas seguintes transformações para os operadores de criação e destruição:

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (2.51)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger, \quad (2.52)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \quad (2.53)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a. \quad (2.54)$$

As transformações inversas são dadas por:

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (2.55)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) - v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (2.56)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (2.57)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta)a(\beta). \quad (2.58)$$

2.4 Propagador do Campo Escalar Térmico

Esta seção se debruçará em verificar de que maneira o propagador térmico se conecta com o propagador no tempo imaginário. Para realizarmos tal verificação, utilizaremos como exemplo o campo escalar. Neste sentido, a densidade de lagrangeana representativa do campo escalar térmico possui a seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\tilde{\phi}\partial^\alpha\tilde{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 - J\tilde{\phi}. \end{aligned}$$

Desse modo, o momento canônico é definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial\dot{\phi}},$$

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\phi}, \partial \tilde{\phi})}{\partial \dot{\tilde{\phi}}},$$

por conseguinte, o hamiltoniano fica externado como

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}} d^3x = \int [\mathcal{H}(\phi, \pi) - \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\phi}, \tilde{\pi})] d^3x,$$

de tal maneira que

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi - \frac{1}{2}\tilde{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 + J\tilde{\phi}.$$

Uma teoria quântica de campos requer relações de comutação, logo

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.59)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (2.60)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.61)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\phi}(t, \mathbf{y})] = [\tilde{\pi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.62)$$

Os campos correspondem a operadores definidos para uma ação sobre um espaço de Hilbert. Diante disso, a introdução dos campos térmicos é realizada mediante as transformações de Bogoliubov. Com isso,

$$\phi(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k; \beta) e^{-ikx} + a^\dagger(k; \beta) e^{ikx}]$$

e

$$\tilde{\phi}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [\tilde{a}(k; \beta) e^{-ikx} + \tilde{a}^\dagger(k; \beta) e^{-ikx}],$$

em que $a(k; \beta)$ ($\tilde{a}(k; \beta)$) e $a^\dagger(k; \beta)$ ($\tilde{a}^\dagger(k; \beta)$) são respectivamente os operadores criação e destruição térmicos. Nesse sentido, o momento segue como

$$\pi(x; \beta) = \dot{\phi}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2} [a(k; \beta) e^{-ikx} - a^\dagger(k; \beta) e^{ikx}]$$

e

$$\tilde{\pi}(x; \beta) = \dot{\tilde{\phi}}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} [\tilde{a}(k; \beta) e^{-ikx} - \tilde{a}^\dagger(k; \beta) e^{-ikx}].$$

As relações de comutação para os modos térmicos são:

$$[a(k; \beta), a^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$[\tilde{a}(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

A transformação de Bogoliubov para cada um dos infinitos modos fica escrita da forma

$$U(\beta) = \exp \left\{ \sum_k \theta_k(\beta) [a^\dagger(k) \tilde{a}^\dagger(k) - a(k) \tilde{a}(k)] \right\}.$$

O espaço de Hilbert é moldado a partir do vácuo térmico, ou seja, $|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle$, em que

$$|0, \tilde{0}\rangle = \otimes_k |0, \tilde{0}\rangle_k, \quad (2.63)$$

que é o vácuo para o modo k . Com este cenário, o propagador térmico para o campo escalar é dado por

$$G_0(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\phi(x) \phi(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (2.64)$$

onde T é o operador de ordenamento temporal, e assim

$$\begin{aligned} iG_0(x - y; \beta) &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0(\beta) | \phi(x) \phi(y) | 0(\beta) \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0(\beta) | \phi(y) \phi(x) | 0(\beta) \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) g(x - y; \beta) + \theta(y^0 - x^0) g(y - x; \beta), \end{aligned}$$

onde foi designado $g(x - y; \beta) = \langle 0(\beta) | \phi(x) \phi(y) | 0(\beta) \rangle$, e

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 0, & x^0 - y^0 < 0 \\ 1, & x^0 - y^0 > 0 \end{cases},$$

que corresponde a função degrau. Realizando o cálculo de $g(x - y; \beta)$ fica,

$$\begin{aligned}
g(x - y; \beta) &= \langle 0(\beta) | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}] \\
&\quad \times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [a(p) e^{-ipy} + a^\dagger(p) e^{ipy}] | 0(\beta) \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_p} \\
&\quad \times (\langle 0(\beta) | a(k) a(p) | 0(\beta) \rangle e^{-i(kx+py)} \\
&\quad + \langle 0(\beta) | a(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle e^{-i(kx-py)} \\
&\quad + \langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a(p) | 0(\beta) \rangle e^{i(kx-py)} \\
&\quad + \langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle e^{i(kx+py)}). \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Nesse ínterim, devemos expressar cada operador de criação e destruição em função dos seus equivalentes térmicos. Para tanto, utilizamos como base as eq. (2.37), sendo assim, para o primeiro,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a(k) a(p) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(k; \beta) a(k; \beta) + v(k; \beta) \tilde{a}^\dagger(k; \beta)) \\
&\quad \times (u(p; \beta) a(p; \beta) + v(p; \beta) \tilde{a}^\dagger(p; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

isso porque

$$\begin{aligned}
a(p) | 0(\beta) \rangle &= 0, \\
a(k; \beta) \tilde{a}^\dagger(p; \beta) | 0(\beta) \rangle &= \tilde{a}^\dagger(p; \beta) a(k; \beta) | 0(\beta) \rangle = 0, \\
\langle 0(\beta) | \tilde{a}^\dagger(k; \beta) &= 0.
\end{aligned}$$

Já o segundo termo segue,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(k; \beta) a(k; \beta) + v(k; \beta) \tilde{a}^\dagger(k; \beta)) \\
&\quad \times (u(p; \beta) a^\dagger(p; \beta) + v(p; \beta) \tilde{a}(p; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= u(k; \beta) u(p; \beta) (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Enquanto que o terceiro termo fica,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a(p) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(k; \beta) a^\dagger(k; \beta) + v(k; \beta) \tilde{a}(k; \beta)) \\
&\quad \times (u(p; \beta) a(p; \beta) + v(p; \beta) \tilde{a}^\dagger(p; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= v(k; \beta) v(p; \beta) (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Por fim, o último termo,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | (u(k; \beta) a^\dagger(k; \beta) + v(k; \beta) \tilde{a}(k; \beta)) \\
&\quad \times (u(p; \beta) a^\dagger(p; \beta) + v(p; \beta) \tilde{a}(p; \beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados, $g(x - y; \beta)$ fica expresso como

$$\begin{aligned}
g(x - y; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_p} (2\pi)^3 2k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&\quad \times (u(k; \beta) u(p; \beta) e^{-i(kx - py)} \\
&\quad \quad + v(k; \beta) v(p; \beta) e^{i(kx - py)}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (u^2(k; \beta) e^{-ik(x-y)} + v^2(k; \beta) e^{ik(x-y)}).
\end{aligned}$$

Sendo $u^2(k; \beta) - v^2(k; \beta) = 1$, então

$$g(x - y; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} ((v^2(k; \beta) + 1) e^{-ik(x-y)} + v^2(k; \beta) e^{ik(x-y)}),$$

e dessa forma o propagador resulta

$$\begin{aligned}
 iG_0(x-y; \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \theta(x^0 - y^0) \left((v^2(k; \beta) + 1) e^{-ik(x-y)} + v^2(k; \beta) e^{ik(x-y)} \right) \\
 &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \theta(y^0 - x^0) \left((v^2(k; \beta) + 1) e^{-ik(y-x)} + v^2(k; \beta) e^{ik(y-x)} \right) \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)} \right) \\
 &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)} \right) \\
 &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} v^2(k; \beta) \left(\theta(x^0 - y^0) e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(y-x)} \right).
 \end{aligned}$$

Fazendo uso da representação da função $\theta(x)$ na representação de Fourier, segue que

$$\begin{aligned}
 G_0(x-y; \beta) &= -i \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + v^2(k; \beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. - v^2(k; \beta) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \right) \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} v^2(k; \beta) [G_0(k) - G_0^*(k)].
 \end{aligned}$$

Também podendo ser escrita de forma simplificada como

$$G_0(x-y; \beta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k; \beta), \quad (2.66)$$

no qual $G_0(k; \beta) = G_0(k) + v^2(k; \beta) [G_0(k) - G_0^*(k)]$. Tomando a definição da função $\delta(x)$,

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right],$$

isso implicará em

$$\begin{aligned}
 G_0(k) - G_0^*(k) &= \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \\
 &= 2\pi i \delta(k^2 - m^2).
 \end{aligned}$$

E assim,

$$G_0(k; \beta) = G_0(k) + 2\pi i v^2(k; \beta) \delta(k^2 - m^2). \quad (2.67)$$

Fazendo uso do propagador (2.64), na representação de Heisenberg para os campos, leva a

$$\begin{aligned} G_0(x - y; \beta) &= -i \langle 0(\beta) | T[\phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t)] | 0(\beta) \rangle \\ &= -i \text{Tr} \left\{ \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H} T[\phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t)] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{\beta H} \phi(\mathbf{y}, t) e^{-\beta H}] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[\phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H} e^{iH(t-i\beta)} \phi(\mathbf{y}) e^{-iH(t-i\beta)}] \right\} \\ &= -i \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left\{ T[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{y}, t - i\beta) \phi(\mathbf{x}, t)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

de modo que foi utilizado a propriedade cíclica do traço. Ressaltamos que a eq. (2.68) é denominada de relação de Kubo-Martin-Schwinger, ou simplesmente relação KMS. Isso denota que o propagador é periódico no eixo do tempo imaginário, com período β . Para perfazer a relação KMS, somente valores discretos para a frequência são permitidos,

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta},$$

para bósons e

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

para férmions, onde $n \in \mathbb{Z}$, e as referidas frequências são conhecidas como frequências de Matsubara. À vista disso, o propagador pode ser escrito,

$$G_0(x - y; \beta) = \frac{-1}{i\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik_n \cdot x}}{k_n^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.69)$$

de forma que $k_n = (k_n^0, \mathbf{k})$. O propagador obtido em (2.69), corresponde ao propagador do formalismo de tempo imaginário. Este representa um dos principais resultados do método proposto por Matsubara utilizando a rotação de Wick de tempo real para imaginário. Por conseguinte, nota-se que há uma conexão entre o propagador do formalismo de Matsubara e o propagador da DCT, encontrado na eq. (2.66). Tal conexão é firmada através dos

aspectos topológicos, bem como considerando as condições de periodicidade da função de Green.

Inserindo a notação duplicada para o campo escalar,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix},$$

o propagador térmico fica dado por

$$\begin{aligned} iG(x-y; \beta)^{ab} &= \langle 0, \tilde{0} | T [\phi(x; \beta)^a \phi(y; \beta)^b] | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k; \beta)^{ab} e^{ik(x-y)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $G(k; \beta)^{ab} = \mathcal{B}^{-1}(k_0) G_0(k)^{ab} \mathcal{B}(k_0)$, com

$$B = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix},$$

e

$$G_0(k)^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Isso posto, as componentes de $G(k; \beta)^{ab}$ são escritas como:

$$G(k; \beta)^{11} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k_0) \delta(k^2 - m^2),$$

$$G(k; \beta)^{22} = \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi i n(k_0) \delta(k^2 - m^2),$$

$$G(k; \beta)^{12} = G(k; \beta)^{21} = -2\pi i [n(k_0) + n^2(k_0)]^{1/2} \delta(k^2 - m^2),$$

em que $n(k_0) = v_k^2(\beta)$. Tais resultados demonstram que o propagador adquire uma estrutura matricial de duas dimensões. Ademais, o propagador $G(k; \beta)^{11}$ é o mesmo que o do método de Matsubara, e a função de Green se separa em dois termos, um independente da temperatura e outro que carrega consigo a dependência da temperatura semelhante ao propagador na abordagem Schwinger-Keldysh.

Uma vez expostos os componentes básicos da Dinâmica de Campos Térmicos, estes servirão de sustentáculo para a construção da teoria de campos à temperatura finita nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Campos Compactificados

No presente capítulo analisaremos os efeitos de uma compactificação no espaço-tempo. Para tanto, iremos considerar uma topologia $\Gamma_D^d = \mathbb{S}^{l_1} \times \mathbb{S}^{l_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{D-d}$, onde d corresponde ao número de dimensões compactificadas, D representa a dimensão da variedade e \mathbb{S}^{l_i} é a circunferência cujo comprimento é L_i . Inicialmente apresentamos a compactificação na dimensão temporal em uma circunferência de comprimento β , no qual o efeito de temperatura é efetuado. Em seguida, o procedimento de compactificação é incidido sobre uma dimensão espacial. Também, a compactificação tanto na componente temporal quanto em uma espacial é analisada. Por fim, uma generalização para d dimensões é efetuada ^[40]. As atuações de tais compactificações trazem consigo alguns fenômenos físicos dependentes de condições de fronteira. A exemplo, temos o efeito Casimir que será explorado nos próximos capítulos.

3.1 Compactificação do tempo

Ao abordarmos acerca da compactificação no tempo, isto denota que a direção na qual os efeitos da compactificação irá atuar será ao longo do eixo x_0 . Desta forma, tomando como modelo um espaço quadridimensional, a topologia fica dada por $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, com o comprimento da circunferência \mathbb{S}^1 igual a $\beta = \frac{1}{kT}$, onde T é a temperatura.

A função de Green satisfaz a seguinte condição de periodicidade,

$$G(x - y; \beta) = G(x - y - i\beta n_0; \beta). \quad (3.1)$$

de forma que n_0 é um vetor tipo-tempo dado por $n_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Em face da periodicidade da função de Green, a representação de Fourier para $G(x, \beta)$ fica expressa como

$$G(x - y; \beta) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip_n(x-y)} G(p_n; \beta), \quad (3.2)$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, de modo que $p_n = (p_n^0, p^1, p^2, p^3)$, $p_n^0 = \frac{2\pi n}{-i\beta}$ a frequência de Matsubara, e

$$G(p_n; \beta) = -\frac{1}{p_n^2 - m^2}. \quad (3.3)$$

Por outro lado, escrevendo a eq. (3.2), na forma invertida, obtém-se

$$G(p_n; \beta) = \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x e^{ip_n(x-y)} G(x-y; \beta). \quad (3.4)$$

Redigindo a função de Green $G(x-y; \beta)$ em termos das funções $G^>(x-y; \beta)$ e $G^<(x-y; \beta)$, decorre que

$$G(x-y; \beta) = \theta(x^0 - y^0) G^>(x-y; \beta) + \theta(y^0 - x^0) G^<(x-y; \beta), \quad (3.5)$$

de maneira que a condição de periodicidade fica expressa como

$$G^<(x-y; \beta)|_{x^0=0} = G^>(x-y; \beta)|_{y^0=-i\beta}, \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{cases} x^0 = [0, -i\beta] \\ y^0 = [0, -i\beta] \end{cases}.$$

Logo, a eq. (3.4) manifesta-se da seguinte forma

$$G(p_n; \beta) = \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x e^{ip_n(x-y)} G^>(x; \beta). \quad (3.7)$$

Assim, a transformada de Fourier de $G(x-y; \beta)$, é dada por

$$\bar{G}(p; \beta) = \int d^4x e^{ipx} \theta(x^0) G^>(x; \beta) + \int d^4x e^{ipx} \theta(-x^0) G^<(x; \beta), \quad (3.8)$$

ou como

$$\bar{G}(p; \beta) = \bar{G}^1(p; \beta) + \bar{G}^2(p; \beta) \quad (3.9)$$

sendo

$$\bar{G}^1(p; \beta) = \int d^4x e^{ipx} \theta(x^0) G^>(x; \beta),$$

$$\bar{G}^2(p; \beta) = \int d^4x e^{ipx} \theta(-x^0) G^<(x; \beta).$$

Com isso, ocorre que

$$G^>(x; \beta) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \bar{G}^>(p; \beta), \quad (3.10)$$

e utilizando a representação integral da função θ ,

$$\theta(x^0) = \frac{1}{2\pi i} \int d\tau \frac{e^{ix^0\tau}}{\tau - i\epsilon}, \quad (3.11)$$

de tal maneira que as funções $\bar{G}^1(p; \beta)$ e $\bar{G}^2(p; \beta)$ tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{G}^1(p; \beta) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4k e^{i(p-k)x} e^{ix^0\tau} \frac{\bar{G}^>(k; \beta)}{\tau + i\epsilon} \\ &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^>(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.12)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{G}^2(p; \beta) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4k e^{i(p-k)x} e^{-ix^0\tau} \frac{\bar{G}^<(k; \beta)}{\tau - i\epsilon} \\ &= -i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\bar{G}^<(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Então, ao substituirmos as eqs. (3.12) e (3.13) na transformada de Fourier (3.9), temos

$$\bar{G}(p; \beta) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \left[\frac{\bar{G}^>(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{\bar{G}^<(k^0, p^1, p^2, p^3)}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right]. \quad (3.14)$$

A condição de periodicidade (3.6) impõe que

$$G^<(x^0, \mathbf{x}; \beta) = G^>(x^0 - i\beta, \mathbf{x}; \beta),$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned} G^<(x^0, \mathbf{x}; \beta) &= G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) + (-i\beta) \frac{\partial}{\partial x^0} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) + \dots + \frac{(-i\beta)^n}{n!} \frac{\partial^n}{(\partial x^0)^n} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta) \\ &= e^{-i\beta\partial_0} G^>(x^0, \mathbf{x}; \beta), \end{aligned}$$

a qual aplicada na representação de Fourier, conduz para

$$\begin{aligned} \overline{G}^<(p; \beta) &= \int d^4x e^{ipx} G^<(x; \beta) \\ &= \int d^4x e^{ipx} e^{-i\beta\partial_0} G^>(x; \beta) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} e^{-i\beta\partial_0} e^{-ikx} \overline{G}^>(k; \beta) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} \left(1 + (-i\beta\partial_0) + \dots + \frac{(-i\beta\partial_0)^n}{n!} \right) e^{-ikx} \overline{G}^>(k; \beta) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{i(p-k)x} e^{-\beta k_0} \overline{G}^>(k; \beta) \\ &= e^{-\beta p_0} \overline{G}^>(p; \beta). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Definindo

$$f_\beta(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}, \tag{3.16}$$

podemos expressar

$$\overline{G}^>(p; \beta) = f_\beta(p_0) A(p; \beta), \tag{3.17}$$

$$\overline{G}^<(p; \beta) = [f_\beta(p_0) + 1] A(p; \beta), \tag{3.18}$$

e desse modo, a eq. (3.14), em função dessa definição, resulta em

$$\overline{G}(p; \beta) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \left[\frac{f_\beta(k_0) A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{[f_\beta(k_0) + 1] A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right]. \tag{3.19}$$

Todavia, a expressão para a função $A(k_0, p_1, p_2, p_3; \beta)$ ainda não foi explicitada. Sendo assim, para que tal função venha ser determinada, devemos partir da função conhecida

$G(p_n; \beta)$ e extendê-la para uma função contínua $G(p; \beta)$. Computando a função $G(p_n; \beta)$ a partir da eq. (3.7) e combinando com a eq. (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned}
 G(p_n; \beta) &= \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x e^{ip_n x} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \overline{G}^>(k; \beta) \\
 &= \int_0^{-i\beta} dx^0 \int d^3x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f_\beta(k_0) A(k; \beta) e^{-i(k-p_n)x} \\
 &= \int d^3x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f_\beta(k_0) A(k; \beta) e^{-i(\mathbf{p}_n - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \int_0^{-i\beta} dx^0 e^{i(p_n^0 - k^0)x^0} \\
 &= \int d^3x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f_\beta(k_0) A(k; \beta) e^{-i(\mathbf{p}_n - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \frac{-i}{p_n^0 - k^0} \left[e^{i(p_n^0 - k^0)\beta} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Contudo,

$$p_n^0 = \frac{2\pi n}{-i\beta},$$

então

$$G(p_n; \beta) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p}; \beta)}{p_n^0 - k^0}. \quad (3.20)$$

A continuação analítica de $G(p_n; \beta) \rightarrow G(p; \beta)$, rende

$$\mathcal{G}_0(p) = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p^0 - k^0},$$

no qual p^0 é uma variável contínua e, utilizando a definição de $\mathcal{G}_0(p)$, a função espectral $A(k^0, \mathbf{p}; \beta)$ pode ser obtida. Desta maneira,

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2}, \quad (3.21)$$

sendo que

$$\mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\delta} = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p^0 - k^0 + i\epsilon}, \quad (3.22)$$

e

$$\mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 - i\delta} = i \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{A(k_0, \mathbf{p})}{p^0 - k^0 - i\epsilon}. \quad (3.23)$$

Procedendo com a diferença entre as eqs. (3.22) e (3.23),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) - \mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}) &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} A(k_0, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{p^0 - k^0 + i\epsilon} - \frac{1}{p^0 - k^0 - i\epsilon} \right] \\
 &= i \int \frac{dk^0}{2\pi} A(k_0, \mathbf{p}) (-2\pi i) \delta(p^0 - k^0) \\
 &= A(p).
 \end{aligned}$$

Como $\mathcal{G}_0(p)$ é dado em (3.21), então

$$A(p) = \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\delta} + \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 - i\delta},$$

de modo que a função espectral demonstra ser

$$A(p) = 2\pi i \delta(p_0^2 - \omega_p^2). \quad (3.24)$$

Fazendo uso da identidade

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|} [\delta(x - y) + \delta(x + y)],$$

e aplicando-a na eq. (3.19), decorre em

$$\begin{aligned}
 \bar{G}(p; \beta) &= \frac{-1}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} + f_\beta(p_0) A(p) \\
 &= G_0(p) + f_\beta(p_0) [G_0(p) - G_0^*(p)],
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde a função $f_\beta(p_0)$ é escrita como $f_\beta(p_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\beta p_0})^n$. Desta forma, a função $G(x - y; \beta)$ segue como

$$G(x - y; \beta) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{G_0(p) + f_\beta(p_0) [G_0(p) - G_0^*(p)]\}. \quad (3.26)$$

O resultado obtido demonstra que o efeito topológico da compactificação presente no termo $f_\beta(p_0)$, encontra-se separado da contribuição espacial. Também, o efeito de temperatura incorporado através do formalismo de Matsubara é equivalente à teoria escrita na topologia $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, no qual o comprimento da circunferência \mathbb{S}^1 é igual a $\beta = \frac{1}{kT}$.

3.2 Compactificação de uma dimensão espacial

Dedicamos, nesta seção, para o caso em que a compactificação incide sobre uma dimensão espacial. O caso escolhido possui uma topologia $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, com a compactificação atuando ao longo de x_1 e o comprimento da circunferência \mathbb{S}^1 igual a L_1 . Diante disso, a função de Green satisfaz a seguinte condição de periodicidade,

$$G(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv G(x^0, x^1 + L_1, x^2, x^3) = G(x + L_1 n_1), \quad (3.27)$$

em que $n_1 = (n_1^\mu) = (0, 1, 0, 0)$. Para esse caso, a condição de periodicidade em x_1 conduz a $0 \leq x_1 \leq L_1$, simultaneamente em que as outras componentes variam no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Mediante a condição de contorno periódica, eq. (3.27), a expansão de Fourier da função de Green fica descrita conforme

$$G(x - y; L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_n(x-y)} G(p_n; L_1), \quad (3.28)$$

sendo $p_n = (p_0, p_{1n}, p_2, p_3)$, $p_{1n} = \frac{2\pi n}{L_1}$ a frequência de Matsubara, e

$$G(p_n; L_1) = -\frac{1}{p_n^2 - m^2}. \quad (3.29)$$

Expressando a inversa da eq. (3.28), decorrerá em

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{ip_n(x-y)} G(x - y; L_1). \quad (3.30)$$

Escrevendo a função de Green $G(x - y; L_1)$ em função de $G^>(x - y; L_1)$ e $G^<(x - y; L_1)$, temos

$$G(x - y; L_1) = \theta(x^1 - y^1) G^>(x - y; L_1) + \theta(y^1 - x^1) G^<(x - y; L_1), \quad (3.31)$$

de tal modo que a condição de periodicidade segue como

$$G^<(x; L_1)|_{x^1=0} = G^>(x; L_1)|_{x^1=L_1}. \quad (3.32)$$

Neste sentido, a eq. (3.30) é reescrita de acordo com

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{ip_n x} G^>(x; L_1). \quad (3.33)$$

A transformada de Fourier para a função de Green $G(x - y; L_1)$ revela-se consoante a

$$\bar{G}(p; L_1) = \int d^4 x e^{ipx} \theta(x^1) G^>(x; L_1) + \int d^4 x e^{ipx} \theta(-x^1) G^<(x; L_1), \quad (3.34)$$

ou também sendo

$$\bar{G}(p; L_1) = \bar{G}^1(p; L_1) + \bar{G}^2(p; L_1), \quad (3.35)$$

que por sua vez

$$\bar{G}^1(p; L_1) = \int d^4 x e^{ipx} \theta(x^1) G^>(x; L_1),$$

$$\bar{G}^2(p; L_1) = \int d^4 x e^{ipx} \theta(-x^1) G^<(x; L_1).$$

Escrevendo

$$G^>(x; L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \bar{G}^>(p; L_1), \quad (3.36)$$

e usando a representação integral da função θ , eq. (3.11), a função $\bar{G}^{(1)}(p; L_1)$ é apresentada conforme

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(1)}(p; L_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4 x \int d\tau d^4 k e^{i(p-k)x} e^{ix^1 \tau} \frac{\bar{G}^>(k; L_1)}{\tau + i\epsilon} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\bar{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.37)$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
 \overline{G}^{(2)}(p; L_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int d\tau d^4k e^{i(p-k)x} e^{-ix^1\tau} \frac{\overline{G}^<(k; L_1)}{\tau - i\epsilon} \\
 &= -i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\overline{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Agora, substituindo as eqs. (3.38) e (3.37) na eq. (3.35), resulta

$$\overline{G}(p; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{\overline{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{\overline{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right]. \tag{3.39}$$

A condição de periodicidade (3.32) impõe que

$$\begin{aligned}
 G^<(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) &= G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) \\
 &= G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) + L_1 \frac{\partial}{\partial x^1} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) + \dots \\
 &\quad + \frac{(L_1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{(\partial x^1)^n} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) \\
 &= e^{L_1 \partial_1} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1).
 \end{aligned}$$

Considerando a transformada de Fourier para $G^<(x; L_1)$,

$$\begin{aligned}
 \overline{G}^<(p; L_1) &= \int d^4x e^{ipx} G^<(x; L_1) \\
 &= \int d^4x e^{ipx} e^{L_1 \partial_1} G^>(x; L_1) \\
 &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} e^{L_1 \partial_1} e^{-ikx} \overline{G}^>(k; L_1) \\
 &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{ipx} \left(1 + L_1 \partial_1 + \dots + \frac{(L_1 \partial_1)^n}{n!} \right) e^{-ikx} \overline{G}^>(k; L_1) \\
 &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4x d^4k e^{i(p-k)x} e^{iL_1 k^1} \overline{G}^>(k; L_1) \\
 &= e^{iL_1 p^1} \overline{G}^>(p; L_1)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

e definindo

$$f_{L_1}(p^1) = \frac{1}{e^{iL_1 p^1} - 1}, \quad (3.41)$$

de tal modo que escrevemos

$$\overline{G}^>(p; L_1) = f_{L_1}(p^1) A(p; L_1) \quad (3.42)$$

$$\overline{G}^<(p; L_1) = [f_{L_1}(p^1) + 1] A(p; L_1), \quad (3.43)$$

e assim, a eq. (3.39), em face dessa definição, proporciona

$$\begin{aligned} \overline{G}(p; L_1) = & i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} \right. \\ & \left. - \frac{[f_{L_1}(k^1) + 1] A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Entretanto, a forma da função espectral $A(p; L_1)$ não foi explicitada ainda. Mediante isso, tomaremos como referência o procedimento realizado para o caso da compactificação do tempo, na qual foi estendida a função conhecida $G(p_n; L_1)$ para uma função contínua $G(p; L_1)$. Calculando a função $G(p_n; L_1)$ tendo como base a eq. (3.33) associada a eq. (3.36), temos

$$\begin{aligned} G(p_n; L_1) &= \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{ip_n x} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \overline{G}^>(k; L_1) \\ &= \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f_{L_1}(k^1) A(k; L_1) e^{-i(k-p_n)x} \\ &= \int dx^0 dx^2 dx^3 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f_{L_1}(k^1) A(k; L_1) e^{-i(k^0-p_n^0)x^0} e^{i(k^2-p_n^2)x^2} e^{i(k^3-p_n^3)x^3} \\ &\quad \times \int_0^{L_1} dx^1 e^{-i(p_n^1-k^1)x^1} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{p_n^1 - k^1} \end{aligned}$$

A continuação analítica de $G(p_n; L_1) \rightarrow G(p; L_1)$, proporciona

$$\mathcal{G}_0(p) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1},$$

em que p^1 é uma variável contínua e, a função espectral $A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)$ é encontrada a partir da definição de $\mathcal{G}_0(p)$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) &= \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 + i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1 + i\epsilon},\end{aligned}\quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 - i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2} \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1 - i\epsilon}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Realizando a diferença entre as eqs. (3.45) e (3.46),

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) - \mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3) \left[\frac{1}{p^1 - k^1 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^1 - k^1 - i\epsilon} \right] \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3) (-2\pi i) \delta(p^1 - k^1) \\ &= A(p).\end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0(p_0, p_1 + i\epsilon, p_2, p_3) - \mathcal{G}_0(p_0, p_1 - i\epsilon, p_2, p_3) &= \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 + i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2} \\ &\quad - \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 - i\epsilon)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2}\end{aligned}$$

de maneira que a função espectral fica escrita como

$$A(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2). \quad (3.47)$$

Utilizando o resultado encontrado da função espectral na transformada de Fourier da função de Green dada em eq. (3.44),

$$\begin{aligned}
\bar{G}(p; L_1) &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1) \left[\frac{1}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{1}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right] \\
&\quad - i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \\
&= i \int \frac{dk^1}{2\pi} f_{L_1}(k^1) A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1) (-2\pi i) \delta(k^1 - p^1) \\
&\quad - i \int \frac{dk^1}{2\pi} (-2\pi i) \frac{\delta(\omega_p^2 - (k^1)^2)}{k^1 - p^1 - i\epsilon},
\end{aligned}$$

onde foi utilizado a definição da função delta $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right]$, bem como $\omega_p^2 = p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2$. Fazendo uso da identidade

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|} [\delta(x - y) + \delta(x + y)],$$

e aplicando-a na eq. (3.44), fica

$$\begin{aligned}
\bar{G}(p; L_1) &= f_{L_1}(p^1) A(p) - \frac{1}{p_0^2 - m^2 - i\epsilon} \\
&= G_0(p) + f_{L_1}(p^1) [G_0(p) - G_0^*(p)],
\end{aligned} \tag{3.48}$$

sendo $f_{L_1}(p^1) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ilL_1 p^1}$. Logo, a função $G(x - y; L_1)$ demonstra ser

$$G(x - y; L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{G_0(p) + f_{L_1}(p^1) [G_0(p) - G_0^*(p)]\}. \tag{3.49}$$

A expressão encontrada possui o mesmo reflexo oriundo do resultado da compactificação no tempo. Aqui, observamos que a expressão é dividida em duas partes, uma contendo o efeito da compactificação e a outra correspondente ao conteúdo do espaço plano.

3.3 Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial

Dando continuidade ao formalismo da compactificação, desta feita, realizaremos concomitantemente a compactificação do tempo e de uma dimensão espacial. Para o caso citado,

a topologia fica descrita como $\Gamma_4^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. O tempo será compactificado em uma circunferência \mathbb{S}^1 de comprimento β , enquanto que a compactificação espacial será ao longo de x^1 com comprimento de circunferência \mathbb{S}^1 igual a L_1 . Nesta perspectiva, a expansão de Fourier da função de Green é escrita como

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; \beta, L_1), \quad (3.50)$$

onde

$$p_{nl} = (p_n^0, p_l^1, p^2, p^3),$$

com

$$p_n^0 = \frac{2\pi n}{\beta}; \quad p_l^1 = \frac{2\pi l}{L_1}$$

e

$$G(p_{nl}; \beta, L_1) = -\frac{1}{p_{nl}^2 - m^2}. \quad (3.51)$$

Expressando a função de Green como sendo

$$G(p_{nl}; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_l(x-y; \beta), \quad (3.52)$$

em que

$$G_l(x-y; \beta) = \frac{1}{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; \beta).$$

Seguindo os mesmos procedimentos para o caso da função $G(x-y; \beta)$, obtemos

$$G_l(x-y; \beta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_l(x-y)} \bar{G}(p_l, \beta), \quad (3.53)$$

de modo que

$$\bar{G}(p_l, \beta) = G_0(p_l) + f_\beta(p_0) [G_0(p_l) - G_0^*(p_l)].$$

Substituindo a eq. (3.53) na eq. (3.52), fica

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_l(x-y)} \bar{G}(p_l; \beta). \quad (3.54)$$

A compactificação da dimensão espacial seguirá o mesmo processo da seção anterior. Assim, a função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G(x-y; \beta, L_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 e^{ip(x-y)} \left(\bar{G}(p; \beta) + f_{L_1}(p_1) \left[\bar{G}(p; \beta) - \bar{G}^*(p; \beta) \right] \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 e^{ip(x-y)} (G_0(p) + [f_\beta(p_0) + f_{L_1}(p_1)] [G_0(p) - G_0^*(p)] \\ &\quad + 2f_\beta(p_0) f_{L_1}(p_1) [G_0(p) - G_0^*(p)]), \end{aligned}$$

que escrita em uma notação simplificada

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 e^{ip(x-y)} (G_0(p) + f_{\beta, L_1}(p_0, p_1) [G_0(p) - G_0^*(p)]), \quad (3.55)$$

onde

$$f_{\beta, L_1}(p_0, p_1) = f_\beta(p_0) + f_{L_1}(p_1) + 2f_\beta(p_0) f_{L_1}(p_1).$$

A partir da eq. (3.55), as expressões tanto para a compactificação do tempo bem como para a compactificação espacial podem ser retomadas separadamente. Para tanto, devemos tomar casos limites da relação acima, ou seja, para se obter a compactificação no tempo basta fazer $f_\beta(p_0) = \lim_{L_1 \rightarrow \infty} f_{\beta, L_1}(p_0, p_1)$, enquanto que a compactificação em uma dimensão espacial é tida quando $f_{L_1}(p_1) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_{\beta, L_1}(p_0, p_1)$.

3.4 Compactificação em d dimensões

O mesmo roteiro aplicado para obtermos as funções de Green para os campos compactificados no tempo e em uma dimensão espacial, pode ser utilizado no intuito de uma generalização para n dimensões compactificadas em uma variedade de dimensão D . Neste caso, a topologia é tida como $\Gamma_D^d = \mathbb{S}^{1_1} \times \dots \times \mathbb{S}^{1_d} \times \mathbb{R}^{D-d}$, de modo que $d = 1 + N$, em que N corresponde ao número de dimensões compactificadas, D representa à dimensão da variedade e \mathbb{S}^{1_d} é a circunferência com comprimento L_i . Considerando o conjunto de parâmetros de compactificação $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$, e $k_{(\alpha)} = (k_0, \dots, k_N)$, a generalização

fica dada por

$$\begin{aligned}
v_{\xi}^2(k_{(\alpha)}; \alpha) &= \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) 2^{s-1} \\
&\times \sum_{l_{\sigma_1, \dots, l_{\sigma_s}=1}}^{\infty} (-\xi)^{s+\sum_{r=1}^s l_{\sigma_r}} \exp \left\{ -\sum_{j=1}^s \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right\}, \quad (3.56)
\end{aligned}$$

de modo que $f(\alpha_j) = 0$ para $\alpha_j = 0$ e $f(\alpha_j) = 1$ para $\alpha_j \neq 0$, $\{\sigma_s\}$ denota o conjunto de todas as combinações com s elementos, $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$ dos primeiros $N+1$ números naturais $\{1, 2, \dots, N\}$, ordenados de tal forma que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s$. Aqui, para bósons ($\xi = -1$), enquanto férmions ($\xi = +1$). Assim, para bósons a função de Green resulta ser

$$G(x-y; \alpha) = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{G_0(k) + v_B^2(k; \alpha) [G_0(k) - G_0^*(k)]\}, \quad (3.57)$$

e para férmions a função de Green é escrita como

$$S(x-y; \alpha) = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{S_0(k) + v_F^2(k; \alpha) [S_0(k) - S_0^*(k)]\}. \quad (3.58)$$

Uma vez explanado o mecanismo para concretização da compactificação e tendo em vista realizar uma transição suave para os resultados deste trabalho. No próximo capítulo, o processo de compactificação será novamente estudado. Entretanto, o mesmo estará sendo aplicado a um exemplo cuja escolha para atuação é o campo eletromagnético livre.

Capítulo 4

Compactificação Via Método da Função de Partição: O Campo Eletromagnético

Neste capítulo iremos explorar a teoria do campo compactificado. Todavia, para realizar tal propósito, utilizaremos o método da função de partição no qual seguirá um roteiro diferente do processo da termo álgebra apresentada no capítulo anterior. Para o desenvolvimento, tomaremos como sustentáculo o campo eletromagnético livre. Diante disso, iremos revisar alguns resultados explorados na literatura acerca da compactificação, objetivando termos uma passagem suave para os resultados apresentados no próximo capítulo. A exemplo, procedemos com a compactificação da dimensão espacial na função de partição e o efeito Casimir sobrevêm como resposta. Por fim, apresentamos uma generalização da função de partição para n dimensões e, dependendo da escolha realizada, a lei de Stefan-Boltzmann bem como o efeito Casimir são obtidos.

4.1 Exórdio das teorias compactificadas

No início do século XX, Albert Einstein apresentava à comunidade científica sua Teoria da Relatividade Geral, em que a gravidade passava a ser tratada como uma propriedade do espaço-tempo. Outrossim, Einstein também dedicou-se em desenvolver uma teoria de unificação das interações gravitacionais e eletromagnética, com o propósito que esta pudesse explicar todos os fenômenos da natureza. Contudo, este não logrou êxito com a tentativa de unificar tais grandezas.

É através da conjuntura de unificar as interações fundamentais da natureza que as teorias de dimensões extras ganham força. Neste contexto, um dos primeiros trabalhos pautados na investigação do cenário de dimensões extras foi desenvolvido por Nordström [\[91\]](#), o qual tratou da generalização da teoria da gravitação de Einstein para um espaço-tempo de 5 dimensões.

Em 1919, motivado pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein, Theodor Kaluza [92] buscou compreender as consequências de se escrever tal teoria em um ambiente 5-dimensional. Neste ínterim, Kaluza reescreveu as equações de Einsteins em cinco dimensões do espaço-tempo, e assim, conseguiu mostrar que contidas em tais equações encontravam-se a teoria quadridimensional da gravitação einsteiniana bem como o eletromagnetismo de Maxwell.

No final da década de 20, o matemático sueco Oskar Klein [93], forneceu uma justificativa para a dimensão extra proposta por Kaluza. Este sugeriu que o universo poderia ter dimensões compactas e muito pequenas, as quais não se conseguiria detectá-las e, desta forma, a dimensão extra fornecida nos trabalhos de Kaluza seria invisível. Geometricamente, a quinta dimensão extra pode ser vista como um grupo circular $U(1)$, que corresponde a formulação da teoria eletromagnética como uma teoria de gauge com grupo de gauge $U(1)$. Ainda a respeito dessas dimensões extras compactificadas, ressalta-se que essas estão além do nosso mundo quadridimensional, e é razoável inferir que a existência da mesma pode proporcionar efeitos em diferentes escalas, não apenas no universo cosmológico ou domínio da física de altas energias, mas também em fenômenos de baixa energias [94,95].

Com o transcorrer dos anos, novos experimentos bem como teorias foram sendo concebidas e, dentro desta celeuma de ideias, uma revolucionaria a forma de se enxergar a física de partículas, tal teoria foi denominada de Modelo Padrão. A continuidade pela unificação das forças na física serviu como combustível e propiciou o favorecimento, assim como o sucesso, do Modelo Padrão pois até o momento esta se sobressaía em descrever de forma unificada as interações fundamentais da natureza. No entanto, tal teoria falhava na abordagem da interação gravitacional.

Em virtude das descobertas de novas forças, novas dimensões foram sendo necessárias para descrevê-las e as ideias de Kaluza-Klein tomaram notoriedade. Tal modelo desempenhou o papel de incubadora para teorias que utilizam 10 e 11 dimensões a fim de explicar eventos físicos, a Teoria de Cordas [96-98]. A exemplo da utilização de tais ideias, em 1998 Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali indicaram a solução para o Problema da Hierarquia [99,100]. Outros estudos considerando efeitos de dimensão extras foram realizados, como no artigo seminal de Randall e Sundrum [101,102], no qual abordaram a dimensão extra como compacta devido à existência de uma brana, e assim, tal dimensão passa a ter um comprimento finito.

A premissa da compactificação não fica restrita somente a dimensões extras. Uma corrente dessa vertente é a abordagem da temperatura no cenário quântico. Um dos pri-

meios estudos a explorar a temática de teoria quântica de campos à temperatura finita foi elaborada por Matsubara ^[31], denominado de formalismo do tempo imaginário, o qual descreve um sistema quântico em equilíbrio termodinâmico. Uma característica desse formalismo é que ele se baseia na periodicidade (antiperiodicidade) das funções de correlação de bósons (férmions) ^[103–106]. Isso significa que a periodicidade equivalerá descrever a teoria em um toro compactado $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$, onde \mathbb{S}^1 é uma circunferência de comprimento proporcional ao inverso da temperatura ^[96,97]. Uma contribuição significativa no formalismo do tempo imaginário foi realizada na década de 80, onde Birrell e Ford ^[107] desenvolveram uma generalização do mecanismo de Matsubara para incluir a compactificação de coordenadas espaciais.

Dentro do arcabouço da teoria do campo quântico toroidal, podemos pontuar algumas aplicações significativas, dentre as quais temos o efeito Casimir ^[108]. Este efeito é causado devido às flutuações do vácuo do campo eletromagnético confinado entre duas placas condutoras, paralelas com separação L , que dão origem a uma força de atração entre as placas. O efeito foi estudado em diferentes geometrias, topologias, campos e condições físicas de contorno ^[109–114].

4.2 Estrutura hamiltoniana

A densidade de lagrangiana responsável por descrever o campo eletromagnético, na ausência de fontes, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

e, aplicando-a na equação de Euler-Lagrange, a eq. (4.1), resulta na seguinte equação de movimento

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Dentro da estrutura do eletromagnetismo de Maxwell, além das simetrias de Lorentz e CPT, esta teoria admite uma simetria na qual estabelece que os campos elétricos e magnéticos, escritos em função do potencial escalar e vetorial, são invariantes se os potenciais mudam como $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, com $\Lambda(x)$ sendo uma função escalar arbitrária. Esta simetria é denominada de simetria de gauge local.

Em face da existência da simetria de calibre no eletromagnetismo indica que tal teoria é um sistema vinculado. Desta forma, analisar a estrutura do seu hamiltoniano via formalismo de Dirac torna-se de fundamental importância para uma futura quantização quer através do formalismo canônico operatorial ou quer do formalismo de integração funcional.

No intuito de se proceder com a análise da estrutura hamiltoniana do modelo, princi-

piaremos estabelecendo o momento canônico conjugado do campo A_μ .

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (4.3)$$

Fixando $\mu = 0$ na eq. (4.3), resultará em $\pi^0 = 0$ e, dessa forma, temos um vínculo primário que será denominado de ϕ_1 . A ocorrência de um vínculo primário surge quando não se pode escrever a velocidade (nesse caso a derivada temporal do potencial vetor) em termos dos momentos e dos campos. Desse modo, ocorre que

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (4.4)$$

Por outro lado, se $\mu = k$, a eq. (4.3) conduz para seguinte relação das componentes espaciais do momento canônico conjugado

$$\pi^k = \dot{A}_k - \partial_k A_0, \quad (4.5)$$

e a partir da eq. (4.5) salientamos que a mesma não representa um vínculo dado que há a possibilidade de se escrever a velocidade \dot{A}_k em termos dos momentos e dos campos,

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0. \quad (4.6)$$

Desta forma, os parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas conjugadas ficam redigidos como

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.7)$$

À vista disso, a densidade hamiltoniana canônica, $\mathcal{H}_C = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$, toma a forma

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{kl})^2 + \pi^k \partial_k A_0, \quad (4.8)$$

e a hamiltoniana canônica, H_C , será

$$H_C = \int d\mathbf{y} \left[\frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{kl})^2 + \pi^k \partial_k A_0 \right]. \quad (4.9)$$

A elaboração de uma hamiltoniana bem definida, leva em consideração que os vínculos primários sejam mantidos invariantes frente a evolução temporal do sistema. E, pensando

nisso, Dirac introduziu a hamiltoniana primária, definida como

$$H_P = H_C + \int dy C \phi_1, \quad (4.10)$$

onde C é o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo primário ϕ_1 .

Uma vez definida a hamiltoniana primária, o cálculo da condição de consistência do vínculo primário que garanta que este permaneça preservado no tempo é dado por

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_P\} \approx 0. \quad (4.11)$$

Entretanto, esta imposição pode conduzir-nos para as seguintes situações: introdução de novos vínculos, chamados de vínculos secundários; equações que levam a mais multiplicadores de Lagrange ou resultem ser identicamente nulas.

Para o caso em estudo, a condição de consistência do vínculo primário leva a

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_P\} = \partial_k \pi^k \approx 0, \quad (4.12)$$

resultado que proporciona um vínculo secundário o qual será denominado de ϕ_2

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0. \quad (4.13)$$

A condição de consistência para o vínculo secundário mostra ser identicamente nula,

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_P\} = 0. \quad (4.14)$$

Diante disso, constatamos que a teoria não possui mais vínculos visto que o vínculo secundário é preservado sob a evolução temporal gerada pela hamiltoniana primária. Entretanto, o multiplicador de Lagrange C continua indeterminado, demonstrando que a teoria ainda mantém-se indefinida.

No formalismo de Dirac, o fato de ocorrer esta indeterminação no multiplicador de Lagrange é um indicativo da existência de vínculos de primeira classe. Estes vínculos de primeira classe são aqueles que possuem parênteses de Poisson nulos com todos os vínculos obtidos no modelo em estudo. Neste caso, os parênteses de Poisson entre os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são identicamente nulos, $\{\pi^0, \partial_k \pi^k\} = 0$. Portanto, a referida teoria exhibe dois vínculos de primeira classe

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0, \quad \phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0. \quad (4.15)$$

Dessa maneira, a estrutura da hamiltoniana responsável por descrever o eletromagnetismo de Maxwell é tida como de primeira classe. E, para suceder com a quantização da mesma, faz-se necessário que eliminemos a indeterminação oriunda do multiplicador de Lagrange. Para tanto, este deve ser fixado.

4.3 Condições de calibre

De acordo com o pressuposto por Dirac, os vínculos de primeira classe são os geradores da simetria do sistema físico e, portanto, a evolução temporal do sistema deve ser regida por uma hamiltoniana que englobe esses vínculos de primeira classe. Esta é denominada de hamiltoniana estendida H_E , que no presente estudo fica escrita como

$$H_E = H_C + \int dy [C\phi_1 + D\phi_2], \quad (4.16)$$

em que C e D são os multiplicadores de Lagrange.

Conforme a prescrição de Dirac, a hamiltoniana estendida será a responsável por regular a evolução temporal do sistema físico. Diante disso, necessitamos determinar a evolução das variáveis canônicas. Assim, iniciando com o campo A_μ , resulta que:

Se $\mu = 0$, logo

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\} = C, \quad (4.17)$$

contudo, se $\mu = k$, então

$$\dot{A}_k = \{A_k, H_E\} = \pi^k + \partial_k A_0 - \partial_k D, \quad (4.18)$$

evidenciando que a dinâmica de A_0 e A_k continua indeterminada uma vez que persiste a dependência dos parâmetros arbitrários C e D .

Procedendo a análise para o momento canônico conjugado π^μ :

Caso $\mu = 0$, resulta em

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_E\} = \partial_k \pi^k \approx 0, \quad (4.19)$$

porém, se $\mu = k$, logo

$$\dot{\pi}^k = \{\pi^k, H_E\} = -\partial_l F_{kl}. \quad (4.20)$$

Dois pontos podemos destacar acerca dessa verificação: ao combinarmos a eq. (4.19) com a

eq. (4.20), é resgatada a expressão de Euler-Lagrange dada na eq. (4.2). E o segundo ponto a ser destacado está na similaridade entre as eqs. (4.18) e (4.6), quando se toma $\partial_k D = 0$ ou $D = 0$. Desta maneira, devemos impor uma condição de calibre de tal forma que fixe D convenientemente. Tal imposição é feita de modo que o número de condições de calibre seja igual ao número de vínculos de primeira classe na teoria. Todavia, tem de se ter o cuidado para que estas condições devam ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange.

Calibre de Coulomb

Um caminho para se obter a condição de calibre é observando a componente do campo eletromagnético cujo momento conjugado é de primeira classe na equação de movimento da lagrangiana. Para o caso em estudo $\pi \approx 0$, então a eq. (4.2) satisfará

$$\nabla^2 A_0 - \partial_0 (\partial_k A_k) = 0. \quad (4.21)$$

Tomando como primeira condição de calibre

$$\psi_1 = \partial_k A_k \approx 0, \quad (4.22)$$

resulta em $\nabla^2 A_0 = 0$, que na ausência de fontes e a condição de contorno nula no infinito, conduz a $A_0 = 0$. Para a segunda condição de calibre, segue

$$\psi_2 = A_0 \approx 0. \quad (4.23)$$

A condição de consistência de ψ_1 , $\{\partial_k A_k, H_E\} \approx 0$, decorre na expressão

$$\partial_k \pi^k + \nabla^2 A_0 - \nabla^2 D \approx 0, \quad (4.24)$$

em consonância com o fato que $\partial_k A_k \approx 0$ e $A_0 \approx 0$, então, D é uma função harmônica que pela eq. (4.18) deve ter gradiente nulo. À vista disso, D configura-se como constante, e aplicando a condição de contorno que os campos se anulam no infinito, resulta que $D = 0$. Por outro lado, utilizando a condição de consistência, $\{A_0, H_E\} \approx 0$, segue que o multiplicador de Lagrange $C = 0$ é fixado.

Com a imposição da condição de calibre de Coulomb, obtivemos a fixação de todos os multiplicadores de Lagrange da teoria. Dessa maneira, a matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de primeira classe juntamente com as condições de calibre é expressa por:

$$M = \begin{matrix} & \phi_1 & \phi_2 & \psi_1 & \psi_2 \\ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \nabla^2 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{matrix} \delta(x-y), \quad (4.25)$$

tendo um determinante funcional não nulo

$$\det M(x, y) = [\det(-\nabla^2)]^2. \quad (4.26)$$

Portanto, a hamiltoniana estendida do campo eletromagnético fica escrita como

$$H_E = \int d\mathbf{y} \left[\frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{4} (F_{kl})^2 \right]. \quad (4.27)$$

Uma vez realizada a análise dos vínculos e de posse da hamiltoniana da teoria, podemos efetuar um estudo das propriedades termodinâmicas. Para tanto, um roteiro a ser seguido é o descrito pelo formalismo de integração funcional em que se faz necessário o cálculo da função de partição do modelo. Esta será o objeto de estudo que executaremos na próxima seção.

4.4 Função de partição

Após conhecermos a estrutura da hamiltoniana do campo eletromagnético e, tendo como propósito o estudo das propriedades termodinâmicas do sistema físico, nesta seção, buscaremos compreender a função de partição da respectiva teoria ^[115].

4.4.1 Compactificação no tempo

A representação da função de partição para o campo eletromagnético, no calibre de Coulomb, é definida da seguinte forma

$$Z(\beta) = \int DA_\mu D\pi^\mu \delta(\Sigma_a) |\det M(x-y)|^{1/2} \times \exp \left\{ \int_\beta d\mathbf{x} (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_C) \right\}, \quad (4.28)$$

em que $\Sigma_a = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ é o conjunto de vínculos de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre, $|\det M(x - y)|^{1/2}$ é o determinante da matriz de vínculos expressa na eq. (4.26), $\int_\beta d\mathbf{x} = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}$ e \mathcal{H}_C a densidade de hamiltoniana canônica.

Não obstante, a integração funcional do campo eletromagnético deve ser realizada sob as configurações de campo satisfazendo condições de contorno periódicas no intervalo $0 \leq \tau \leq \beta$,

$$A_\mu(\tau, \mathbf{x}) = A_\mu(\tau + \beta, \mathbf{x}). \quad (4.29)$$

Ao substituirmos as eqs. (4.4), (4.8), (4.13), (4.22) e (4.23) na função de partição (4.28), temos

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(A_0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_\beta dx [i\pi^0 \partial_\tau A_0 - \pi^k \partial_k A_0] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[i\pi^k \partial_\tau A_k - \frac{1}{2} (\pi^k)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Efetuada a integração em A_0 e depois em π^0 , a função de partição toma a forma

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DA_k D\pi^k \delta(\partial_k \pi^k) \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[i\pi^k \partial_\tau A_k - \frac{1}{2} (\pi^k)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Fazendo uso da representação funcional da δ -Dirac no momento canônico π^k

$$\delta(\partial_k \pi^k) = \int D\Lambda \exp \left\{ \int_\beta dx i\Lambda \partial_k \pi^k \right\} = \int D\Lambda \exp \left\{ \int_\beta dx (-i\pi^k \partial_k \Lambda) \right\}, \quad (4.32)$$

a integração no momento canônico π^k segue como,

$$Z(\beta) = \int DA_k D\Lambda \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \times \exp \left\{ i \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (\partial_{\tau} A_k - \partial_k \Lambda)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}. \quad (4.33)$$

Por fim, tomando $\Lambda = A_{\tau}$, a função de partição do campo eletromagnético livre no calibre de Coulomb fica escrita como

$$Z(\beta) = \int DA_a \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} \right] \right\}, \quad (4.34)$$

sendo $a, b = \tau, 1, 2, 3$. Em face do calibre de Coulomb não ser covariante, a função de partição apresentada na eq. (4.34), também não será. À vista disso, para que esta venha ser escrita na forma covariante, utilizamo-nos do ansatz de Faddeev-Popov dado por

$$\int D\omega(x) \delta(\mathcal{G}[A_a^{\omega}]) \det \left| \frac{\delta(\mathcal{G}[A_a^{\omega}])}{\delta\omega} \right|_{\omega=0} = 1, \quad (4.35)$$

em que $\omega(x)$ é o parâmetro de calibre, $D\omega(x)$ é a medida do grupo de calibre, $\mathcal{G}[A_a^{\omega}]$ uma condição de calibre covariante, A_a^{ω} o campo transformado, que no caso abeliano $A_a^{\omega} = A_a + \partial_a \omega$ e $\det \left| \frac{\delta(\mathcal{G}[A_a^{\omega}])}{\delta\omega} \right|_{\omega=0}$ o determinante de Faddeev-Popov invariante de calibre.

Sendo assim, ao introduzirmos o ansatz de Faddeev-Popov na função de partição (4.34) e fazendo a transformação de calibre $A_a \rightarrow A_a - \partial_a \omega$, resulta

$$Z(\beta) = \int DA_a \delta(G[A_a]) \det \left| \frac{\delta(G[A_a^{\omega}])}{\delta\omega} \right|_{\omega=0} \times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right] \right\} \times \int D\omega |\det(-\nabla^2)| \delta(\partial_k A_k - \nabla^2 \omega). \quad (4.36)$$

A integração funcional em ω corresponde ao ansatz de Faddeev-Popov no calibre de Coulomb, que equivale a uma unidade. Portanto, a função de partição escrita em um calibre covariante fica

$$Z(\beta) = \int DA_a \delta(G[A_a]) \det \left| \frac{\delta(G[A_a^{\omega}])}{\delta\omega} \right|_{\omega=0} \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right] \right\}. \quad (4.37)$$

Tomando o calibre de Lorentz como condição de calibre covariante

$$G[A_a] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f, \quad (4.38)$$

onde f corresponde a uma função escalar arbitrária e ξ um parâmetro real arbitrário, de modo que

$$G[A_a^\omega] = G[A_a] - \frac{\square}{\sqrt{\xi}} \omega, \quad (4.39)$$

logo,

$$\det \left| \frac{\delta(G[A_a^\omega])}{\delta\omega} \right|_{\omega=0} = \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right|, \quad (4.40)$$

sendo $\square = \partial_a \partial_a = (\partial_\tau)^2 + \nabla^2$.

Com isso, a função de partição (4.37), fica expressa como

$$Z(\beta) = \int DA_a \delta \left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f \right) \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{4} (F_{ab})^2 \right] \right\}. \quad (4.41)$$

Tendo em vista que a função de partição deva ser independente de f , então, para que isso ocorra multiplicamos a expressão por $\left(-\frac{1}{2} \int_\beta dx f^2 \right)$ e, procedendo com a integração em f , obtemos

$$Z(\beta) = \int DA_a \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{4} (F_{ab})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_a A_a)^2 \right] \right\}, \quad (4.42)$$

e, realizando uma integração por partes na exponencial, temos

$$Z(\beta) = \int DA_a \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} A_a \left(-\square \delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right) A_b \right] \right\}. \quad (4.43)$$

A integração sobre o campo de calibre gera o seguinte resultado

$$\int DA_a \exp \left\{ \int_\beta dx -\frac{1}{2} A_a \left[-\square \delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right] A_b \right\} = \det \left| -\square \delta_{ab} - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b \right|^{-1/2}. \quad (4.44)$$

Para solucionar o determinante (4.44), definiremos um operador diferencial

$$\mathbb{D}_{ab} = -\square\delta_{ab} - \lambda\partial_a\partial_b, \quad (4.45)$$

em que $\lambda = \frac{1}{\xi} - 1$.

O operador (4.45), posto no espaço de Fourier toma a forma

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = \delta_{ab}p^2 + \lambda p_a p_b, \quad (4.46)$$

onde $p^2 = p_0^2 + \mathbf{p}^2$, cujo determinante da matriz $\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p)$ é redigido explicitamente como

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \lambda p_0^2 & \lambda p_0 p_1 & \lambda p_0 p_2 & \lambda p_0 p_3 \\ \lambda p_1 p_0 & p^2 + \lambda p_1^2 & \lambda p_1 p_2 & \lambda p_1 p_3 \\ \lambda p_2 p_0 & \lambda p_2 p_1 & p^2 + \lambda p_2^2 & \lambda p_2 p_3 \\ \lambda p_3 p_0 & \lambda p_3 p_1 & \lambda p_3 p_2 & p^2 + \lambda p_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

decorrendo em

$$\det \tilde{\mathbb{D}}_{ab}(p) = p^8 + \lambda p^6(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = p^8(1 + \lambda) = \frac{p^8}{\xi}. \quad (4.48)$$

Assim, o resultado do determinante funcional no espaço de configurações é processado como

$$\det \mathbb{D}_{ab} = \det \frac{(-\square)^4}{\xi}. \quad (4.49)$$

Substituindo a eq. (4.49) na expressão da função de partição (4.43), decorrerá em

$$Z(\beta) = \det \left| \frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right| \det \left| \frac{(-\square)^4}{\xi} \right|^{-1/2}, \quad (4.50)$$

e realizando as devidas simplificações, a função de partição para o campo eletromagnético toma a seguinte forma

$$\ln Z(\beta) = -Tr \ln(-\square). \quad (4.51)$$

O traço funcional dado pela eq. (4.51) é calculado na base de Fourier que expande o campo vetorial

$$A_a(\tau, \mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(n, \mathbf{p}), \quad (4.52)$$

sendo V o volume do sistema, $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}n$, com $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$ as frequências bosônicas de Matsubara e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Desta forma, o logaritmo da função de partição fica escrito como

$$\ln Z(\beta) = -V \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left([(\beta\omega_n)^2 + (\beta\omega)^2] \right), \quad (4.53)$$

onde $\omega = |\mathbf{p}|$. A soma em n é efetuada mediante a identidade

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2] = \beta\omega - \ln(2) + 2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}). \quad (4.54)$$

À vista disso, a função de partição (4.53) sob a óptica da identidade (4.54) resulta

$$\ln Z(\beta) = -2V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}). \quad (4.55)$$

Em que a contribuição do vácuo foi desprezada e a expressão descreve o espectro de energia da radiação de um corpo negro.

Escrevendo a eq. (4.55) em coordenadas esféricas, $\mathbf{p} \rightarrow (\omega, \theta, \phi)$, obtemos

$$\ln Z(\beta) = -\frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (4.56)$$

no qual $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido.

Executando as integrais na eq. (4.56), encontramos o seguinte resultado para a função de partição do campo eletromagnético

$$\ln Z(\beta) = \frac{\pi^2 V}{45\beta^3}. \quad (4.57)$$

Doravante, a densidade de energia é dada por

$$u = -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta} = \frac{1}{4\pi^3} \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} \right). \quad (4.58)$$

Realizando a integração na frequência ω , a densidade de energia por elemento de ângulo sólido fica expressa como

$$u(\beta) = \int \frac{\pi}{60\beta^4} d\Omega. \quad (4.59)$$

Em contrapartida, na eq. (4.58) ao integrarmos somente o ângulo sólido, a densidade de energia proporcionará

$$u(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} \right), \quad (4.60)$$

cujo termo entre parênteses corresponde a lei de radiação de Planck.

Todavia, ao processarmos todas as integrais na eq. (4.58), temos

$$u(\beta) = \frac{\pi^2}{15\beta^4}, \quad (4.61)$$

que corresponde a densidade de energia da cavidade ou lei de Stefan-Boltzmann.

Por conseguinte, a pressão da radiação é dada por

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial V} = \frac{\pi^2}{45\beta^4}. \quad (4.62)$$

Dado que fora realizada a compactificação na dimensão temporal da função de partição do campo eletromagnético e como resposta encontramos a lei de Stefan-Boltzmann. Então, continuaremos nesse mesmo roteiro para verificar o comportamento da função de partição ao ser compactificada em uma dimensão espacial.

4.4.2 Compactificação de uma dimensão espacial

A compactificação na dimensão espacial será efetuada ao longo do eixo x_1 , isto é, $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, tendo o comprimento da circunferência de \mathbb{S}^1 igual a L_1 . Desta forma, as configurações do campo satisfazem a seguinte condição de periodicidade no intervalo $0 \leq x_1 \leq L_1$,

$$A(x_0, x_1, x_2, x_3) = A(x_0, x_1 + L_1, x_2, x_3). \quad (4.63)$$

Desse modo, a função de partição do campo eletromagnético fica escrita como

$$\begin{aligned} Z(L_1) &= \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(A_0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(\partial_k A_k) |\det(-\nabla^2)| \\ &\times \exp \left\{ \int_{L_1} dx [i\pi^0 \partial_\tau A_0 - \pi^k \partial_k A_0] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \int_{L_1} dx \left[i\pi^k \partial_\tau A_k - \frac{1}{2} (\pi^k)^2 - \frac{1}{4} (F_{ij})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

na qual $\int_{L_1} dx = \int_0^{L_1} dx_1 \int d^3\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = (x_0, x_2, x_3)$. Executando as devidas operações, a eq. (4.64) resulta

$$\ln Z(L_1) = -Tr \ln(-\square). \quad (4.65)$$

O traço funcional de (4.65) é calculado na base de Fourier

$$A_a(x_1, \mathbf{x}) = \left(\frac{L_1}{V}\right)^{1/2} \sum_{m, \mathbf{p}} e^{i(\omega_m x_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(m, \mathbf{p}), \quad (4.66)$$

em que V é o volume do sistema, $\omega_m = \frac{2\pi}{L_1}m$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), as frequências de Matsubara e $\mathbf{p} = (p_0, p_2, p_3)$. Assim, o logaritmo da função de partição toma a forma

$$\ln Z(L_1) = -V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln[(2\pi m)^2 + (L_1\omega)^2] \quad (4.67)$$

onde $\omega = |\mathbf{p}|$. A soma em m é realizada por meio da identidade (4.54), conduzindo-nos para

$$\ln Z(L_1) = -2V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\ln(1 - e^{-L_1\omega})]. \quad (4.68)$$

A eq. (4.68) em coordenadas esféricas $\mathbf{p} \rightarrow (\omega, \theta, \phi)$, fica

$$\ln Z(L_1) = -\frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-L_1\omega}), \quad (4.69)$$

sendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ o elemento de ângulo sólido.

Derivando a eq. (4.69) em relação a L_1 , a energia interna do sistema é expressa como

$$u = \frac{-\pi^2}{15(L_1)^4}, \quad (4.70)$$

que corresponde ao efeito Casimir para o campo eletromagnético.

4.4.3 Compactificação em d dimensões

A função de partição do campo eletromagnético livre generalizada para n dimensões escrita na forma de integral funcional é dada por

$$Z(L_0 \cdots L_r) = \int DA_\mu D\pi^\mu \delta(\Sigma_a) \times |\det M_{ab}(x, y)|^{1/2} \\ \times \exp \left\{ \int_0^{L_0} \cdots \int_0^{L_r} \int d^{D+1}x (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_c) \right\}, \quad (4.71)$$

de modo que $\Sigma_a = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ denota o conjunto de vínculos de segunda classe formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre, $|\det M_{ab}(x, y)|^{1/2}$ corresponde ao determinante da matriz de vínculos $\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} = \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^4$ e \mathcal{H}_C é a densidade de hamiltoniana canônica. A eq. (4.71) caracteriza uma generalização do sistema $N = D + 1$ dimensões com topologia $\Gamma_{D+1}^{D-r} = \mathbb{S}^{1_0} \times \mathbb{S}^{1_1} \cdots \mathbb{S}^{1_r} \times \mathbb{R}^{D-r}$. Para o referido caso, a compactificação ocorrerá em $r + 1$ dimensões, com $r \leq D$. Sendo assim, a função de partição generalizada para o campo eletromagnético livre é tida como

$$Z(L_0 \cdots L_r) = \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0) \\ \times \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \\ \times \exp \left\{ \int_0^{L_0} \cdots \int_0^{L_r} \int d^{D+1}x (i\pi^0 \partial_\tau A_0 + i\pi^k \partial_\tau A_k) \right\} \\ \times \exp \left\{ \int_0^{L_0} \cdots \int_0^{L_r} \int d^{D+1}x \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j \right. \right. \\ \left. \left. - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 \right] \right\} \quad (4.72)$$

Procedendo com as devidas integrações, a expressão para a função de partição em (4.72), toma a seguinte forma

$$\ln Z(L_0 \cdots L_r) = -Tr \ln[-\square]. \quad (4.73)$$

O traço para a eq. (4.73), é calculado na base de Fourier

$$A_a(L_0 \cdots L_r, \mathbf{x}) = \left(\frac{L_0}{V}\right)^{1/D-1} \cdots \left(\frac{L_r}{V}\right)^{1/D-1} \\ \times \int \prod_{n=r+1}^D V^{n/3} \frac{d^n \mathbf{p}_n}{(2\pi)^n} \sum_{n_0 \cdots n_r} e^{i(\omega_{n_j} x_j + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(n_0 \cdots n_r, \mathbf{p}), \quad (4.74)$$

em que, j varre as dimensões compactificadas, ω_{n_j} são as frequências bosônicas de Matsu-

para $\omega_{n_j} = \frac{2\pi}{L_j} n_j$ para $n_j = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{p} = (p_{r+1}, \dots, p_D)$ e V corresponde ao hipervolume do sistema. Desta maneira, a função de partição, (4.73), para o campo eletromagnético livre é externada como

$$\begin{aligned} \ln Z(L_0 \cdots L_r) = & - \int \prod_{n=r+1}^D V^{n/3} \frac{d^n \mathbf{p}_n}{(2\pi)^n} \\ & \times \sum_{n_0 \cdots n_r = -\infty}^{+\infty} \ln \prod_{j=0}^r L_j^2 V^{\frac{D-3r}{3}} \left[\sum_{n_j=0}^r \omega_{n_j}^2 + \mathbf{p}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

A partir da eq. (4.75), podemos recuperar os dois casos particulares já estudados: lei de Stefan-Boltzmann, (4.61), e efeito Casimir (4.70).

Havendo sido apresentado todo ferramental matemático para a compactificação e, como modelo de aplicação utilizamos o campo eletromagnético livre, ainda seguiremos com os estudos das propriedades à temperatura finita. Desta feita, empregaremos tal formalismo na eletrodinâmica CPT-par do Modelo Padrão Estendido cuja representação é dada pelo termo $(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Como primeiro estágio, no capítulo precedente realizaremos uma revisão acerca do Modelo Padrão Estendido. Em sequência, iremos apresentar um estudo dessa teoria através do formalismo do tempo imaginário de Matsubara generalizado [40].

Capítulo 5

O Setor de Gauge do Modelo Padrão Estendido

No vigente capítulo realizaremos uma abordagem tão pedagógica quanto possível do Modelo Padrão Estendido. Neste ínterim, apresentaremos a estrutura que concebe tal modelo: o termo CPT-ímpar bem como o termo CPT-par. Também, explanaremos sobre a influência que tais termos impelem para a eletrodinâmica de Maxwell.

5.1 Estado da Arte

No Modelo Padrão Estendido a parte referente ao setor de gauge tem como cenário base o termo gerador do campo eletromagnético, bem como os dois termos correspondentes a estrutura CPT: o termo CPT-ímpar e o termo CPT-par. O termo CPT-ímpar, também denominado de termo de Carroll-Field-Jackiw ^[29], possui paridade ímpar e birrefringência, gerando uma eletrodinâmica de Maxwell modificada denominada de eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. Esta eletrodinâmica tem servido de motivação para os mais variados estudos, tais como: soluções clássicas, aspectos de causalidade, estabilidade e unitariedade. Por outro lado, o termo CPT-par é descrito pelo tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$, o qual possui 19 coeficientes independentes, dentre os quais existem 10 birrefringentes e 9 coeficientes não birrefringentes ^[116–118]. Desta forma, a lagrangiana representativa do setor de gauge do MPE que contempla tanto o termo de Maxwell quanto os termos CPT-ímpar e CPT-par possui a forma ^[119],

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}V^\mu A^\nu F^{k\lambda} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} - J_\mu A^\mu, \quad (5.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, o segundo termo corresponde ao termo CPT-ímpar, o terceiro termo representa o CPT-par e $J_\mu A^\mu$ constitui a interação

do campo com a fonte.

Após o surgimento do MPE, diversos experimentos foram realizados na tentativa de impor limites superiores para os termos de violação [120–127]. A proposta e o desenvolvimento do MPE foram também estimulados por estudos que estabeleceram a possibilidade de quebra espontânea de simetria de Lorentz no contexto da teoria das cordas [3] [128–130]. Além disso, o MPE tem sido investigado no arcabouço do setor de férmions [131–133]. Uma linha explorada na eletrodinâmica do MPE está relacionada com o fenômeno da birrefringência [29][116–118], uma vez que a birrefringência está intimamente relacionada com a distância de propagação da luz. Sendo assim, fazer a análise deste fenômeno na escala cosmológica proporciona uma maneira de aferir a violação e, desta forma, restringir limites superiores a tais parâmetros violadores. Recentemente, o setor de gauge do MPE foi estudado no âmbito de dimensões reduzidas [8] [134], um estudo referente a análise de consistência foi realizado em [135]. Um outro aspecto que tem sido foco de investigação são os efeitos da violação de Lorentz em defeitos topológicos. Os estudos topológicos vinculados ao cenário de violação de Lorentz foram iniciados para sistemas com defeitos escalares [136,137]. Desde a introdução das soluções de vórtices BPS (Bogomol’nyi, Prasad, Sommerfeld) [138,139], trabalhos envolvendo as consequências de tais soluções no contexto do modelo de Chern-Simons-Higgs foram desenvolvidos [140,141]. Também, vórtices Chern-Simons foram estudados no âmbito de acoplamento não mínimo [142], e tem sido uma temática recorrente [143,144]. Além disso, configurações de vórtices BPS foram encontrados no modelo de Maxwell-Chern-Simons [145,146]. As primeiras publicações referente ao estudo de soluções de vórtice BPS com o termo de violação de Lorentz CPT-par foram realizadas em [147,148]. Em seus estudos os autores [147] investigaram vórtices BPS não carregados na estrutura do modelo Abelian Maxwell-Higgs suplementados pelos termos CPT-par e de violação de Lorentz. Seguindo o mesmo cenário, foi observada a existência de vórtices BPS eletricamente carregados no modelo de Maxwell-Higgs suplementado com o termo de violação de Lorentz na estrutura de paridade ímpar pertencentes ao setor CPT-par do MPE na ausência do termo de Chern-Simons [148].

5.2 O Setor CPT-ímpar do MPE

Como pioneiros nos estudos dos efeitos provenientes da violação da simetria de Lorentz e CPT, Carroll-Field-Jackiw [29] apresentaram uma eletrodinâmica de Maxwell modificada pela adição de um termo do tipo Chern-Simons ($\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}V^\mu A^\nu F^{\rho\lambda}$). Ao fazerem a generalização da eletrodinâmica planar de Chern-Simons para (1+3) dimensões, foi necessária a introdução do vetor $V_\mu = (V_0, V_i)$ que atua como campo de fundo (background) responsável

por estabelecer o acoplamento do campo de gauge com o "background" violador da simetria de Lorentz. O 4-vetor V_μ que representa o background violador possui dimensão de massa e é designado um limite superior $V_\mu \leq 10^{-33}\text{eV}$, o qual foi estabelecido por meio da observação da birrefringência da luz oriunda de sistemas astronômicos distantes. Após os estudos iniciados por Carroll-Field-Jackiw, muitos outros afluíram acerca desta eletrodinâmica. No trabalho [149,150], os autores examinaram a consistência desta eletrodinâmica e verificaram que é estável, causal e unitária apenas quando se considera um background puramente tipo espaço $V_\mu = (0, v)$. Em [71] os autores realizaram estudos sobre vórtices BPS, já em [151] foi realizado um estudo das propriedades à temperatura finita desta eletrodinâmica para um background puramente tipo espaço, a redução dimensional desta eletrodinâmica bem como a obtenção das soluções clássicas foram realizadas e discutidas em Refs. [152–154].

A lagrangiana do setor CPT-ímpar do MPE é composta pelos termos de Maxwell associado ao termo Carroll-Field-Jackiw, resultando em

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}V^\mu A^\nu F^{\kappa\lambda} + J^\mu A_\mu, \quad (5.2)$$

onde $F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ é o tensor do campo eletromagnético, o segundo termo corresponde ao termo de Carroll-Field-Jackiw e o terceiro termo representa a interação do campo com a fonte. A lagrangiana (5.2), pode ser expressa em função dos campos elétrico e magnético e, neste caso, possui o formato

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2}[V^0 A^k B^k - A^0 V^k B^k - \varepsilon_{ilm} V^i A^l E^m]. \quad (5.3)$$

Como já mencionado, a lagrangiana dada em (5.2) viola a simetria CPT. Este comportamento é de fácil observação ao analisar a forma como os campos e os potenciais se transformam frente a aplicação de tal simetria. Tal fato é evidenciado no quadro a seguir:

$A_\mu \xrightarrow{CPT} -A_\mu$	$\partial_\mu \xrightarrow{CPT} -\partial_\mu$
$\mathbf{E} \xrightarrow{CPT} \mathbf{E}$	$\mathbf{B} \xrightarrow{CPT} \mathbf{B}$

Portanto, os termos da lagrangiana (5.3) sob a operação CPT modificam-se como

$$\mathcal{L} \xrightarrow{CPT} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}_{+(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{V^0 A^k B^k}_{-V^0 A^k B^k} - \underbrace{A^0 V^k B^k}_{-A^0 V^k B^k} - \underbrace{\varepsilon_{ilm} V^i A^l E^m}_{-\varepsilon_{ilm} V^i A^l E^m} \right]. \quad (5.4)$$

É possível observar que todos os termos decorrentes do setor de Carrol-Field-Jackiw V^0 e V^i alteram o sinal. Tal mudança significa que estes são CPT-ímpar perante a operação CPT.

Com a lagrangiana do sistema, torna-se exequível obter as equações de movimento do setor CPT-ímpar do MPE. Para tanto, uma das alternativas para tal proposta é utilizar a equação de Euler-Lagrange que aplicada a lagrangiana (5.2) obtém-se

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\mu\kappa\lambda} V^\mu F^{\kappa\lambda} = -J^\alpha, \quad (5.5)$$

que corresponde a equação de movimento de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw. Redigindo o tensor $F^{\alpha\beta}$ em função dos campos elétrico e magnético, as equações de Maxwell modificadas ficam:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \quad (5.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{j}, \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.9)$$

Uma outra maneira de reescrever tais equações são redigi-las em termos das expressões de onda para campos e assim, fazendo algumas manipulações, têm-se:

$$\square \mathbf{B} + \mathbf{v}_0 (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{j}, \quad (5.10)$$

$$\square \mathbf{E} + \partial_t (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{v}_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla \rho + \partial_t \mathbf{j}, \quad (5.11)$$

por outro lado, os potenciais tomam a seguinte forma:

$$\square A^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \quad (5.12)$$

$$\square \mathbf{A} + \mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}. \quad (5.13)$$

Um ponto a ser ressaltado é que na eletrodinâmica usual de Maxwell, as cargas elétricas são fontes apenas do campo elétrico. Já as correntes são fontes geradoras tanto do campo elétrico quanto do campo magnético. Entretanto, com a inclusão do termo CPT-ímpar na eletrodinâmica de Maxwell, pode-se observar por meio das eqs. (5.6-5.9), que tanto o

campo elétrico bem como o campo magnético podem ser gerados por fontes de cargas, alterando, desta forma, a eletrodinâmica usual de Maxwell.

5.3 O Setor CPT-par do MPE

Após o trabalho seminal de Colladay e Kostelecky [5,6], o setor de gauge tem servido de motivação para os mais variados estudos. Um destes, foi realizado nos idos de 2002 por Kostelecky e Mewes [116,117], no qual apresentaram uma eletrodinâmica modificada pelo tensor adimensional $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$. Este exhibe as mesmas simetrias do tensor de Riemann satisfazendo as propriedades:

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa} = -(K_F)_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad (5.14)$$

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa} = -(K_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (5.15)$$

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa} = (K_F)_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad (5.16)$$

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa} + (K_F)_{\mu\lambda\kappa\nu} + (K_F)_{\mu\kappa\nu\lambda} = 0. \quad (5.17)$$

Com estas propriedades de simetria e anti-simetria associadas com um duplo traço nulo $(K_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$, as 256 componentes originais são reduzidas a 19 componentes independentes.

A lagrangiana com o termo representativo do setor CPT-par é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} + J^\mu A_\mu. \quad (5.18)$$

As equações de movimento desta eletrodinâmica surgem como

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - (K_F)_{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F^{\lambda\kappa} = J^\alpha. \quad (5.19)$$

Logo, as equações de Maxwell suplementadas pelo termo CPT-par são:

$$\partial_i E^i + (K_{DE})^{ij}\partial_i E^j + (K_{DB})^{ik}\partial_i B^k = \rho, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} j^i &= \epsilon^{ijk}\partial_j B^k - \partial_t E^i + [(K_{DE})^{ij}\partial_t E^j - (K_{DB})^{ik}\partial_t B^k] \\ &+ \epsilon^{ijn} [(K_{HE})^{nk}\partial_j E^k - (K_{HB})^{nk}\partial_j B^k]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

As expressões obtidas com a introdução do termo $(K_F)_{\beta\alpha\lambda\kappa}$ geram uma mudança na

eletrodinâmica usual de Maxwell. Esta alteração ocorre nos campos elétrico e magnético que ficam sendo produzidos tanto por cargas quanto por correntes estacionárias.

Uma maneira de redigir a lagrangiana (5.18) é expressá-la em função dos campos elétrico e magnético, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{4} \left[4(K_F)_{0i0j} E^i E^j + 4(K_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} E^i B^p + (K_F)_{ablm} \epsilon_{abq} \epsilon_{lmp} B_q B_p \right]. \quad (5.22)$$

O mesmo mecanismo empregado para analisar o comportamento da lagrangiana (5.3) sob a influência da operação CPT, pode ser empregado no estudo da lagrangiana (5.22) e, com isso, entender como esta mantém-se inalterada perante a atuação do operador CPT. Desta forma, atuando o operador CPT na lagrangiana (5.22), tem-se

$$\mathcal{L} \xrightarrow{CPT} \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{4} \left[4(K_F)_{0i0j} \underbrace{E^i E^j}_{+E^i E^j} + 4(K_F)_{0ilm} \epsilon_{lmp} \underbrace{E^i B^p}_{+E^i B^p} + (K_F)_{ablm} \epsilon_{abq} \epsilon_{lmp} \underbrace{B_q B_p}_{+B_q B_p} \right].$$

É observado que os coeficientes $(K_F)_{0i0j}$, $(K_F)_{0ilm}$ e $(K_F)_{ablm}$ são CPT-pares, mostrando que a lagrangiana constituída pelo tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$ é invariante sob a ótica do operador CPT.

A lagrangiana (5.22) pode ser concebida em termos de uma outra parametrização para o tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$. Nesta parametrização, as 19 componentes independentes são expressas em função de matrizes 3×3 [116,117]:

$$(\kappa_{DE})^{j\kappa} = -2(K_F)^{0j0\kappa}, \quad (\kappa_{HB})^{j\kappa} = \frac{1}{2} \epsilon^{jpq} \epsilon^{\kappa lm} (K_F)^{pq lm}, \quad (5.23)$$

$$(\kappa_{DB})^{j\kappa} = -(\kappa_{HE})^{\kappa j} = \epsilon^{\kappa pq} (K_F)^{0j pq}. \quad (5.24)$$

Neste sentido, a lagrangiana (5.22) expressa na conformação destas matrizes é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[(\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j + (\kappa_{DB})_{ip} E^i B^p - (\kappa_{HB})_{qp} B^q B^p \right], \quad (5.25)$$

ou também

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\delta_i^j + (\kappa_{DE})_{ij} \right) E^i E^j + \frac{1}{2} (\kappa_{DB})_{ip} E^i B^p - \frac{1}{2} \left(\delta_p^q - (\kappa_{HB})_{qp} \right) B^q B^p.$$

As matrizes κ_{DE} , κ_{HB} contêm juntas 11 componentes independentes, enquanto κ_{DB} , κ_{HE} possuem juntas 8 componentes, que somadas dão os 19 elementos independentes do tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$. Ao atuar somente o operador de paridade $(\mathbf{E} \xrightarrow{P} -\mathbf{E}, \mathbf{B} \xrightarrow{P} \mathbf{B})$ na lagrangiana (5.25),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \left[(\kappa_{DE})_{ij} \underbrace{E^i E^j}_{+E^i E^j} + (\kappa_{DB})_{ip} \underbrace{E^i B^p}_{-E^i B^p} - (\kappa_{HB})_{qp} \underbrace{B^q B^p}_{+B^q B^p} \right].$$

As componentes $(\kappa_{DE})_{ij}$ e $(\kappa_{HB})_{qp}$ possuem paridade par, enquanto que $(\kappa_{DB})_{ip}$ e $(\kappa_{HE})_{ip}$ possuem paridade ímpar. Assim, sob a ótica da paridade, tais matrizes podem ser rearranjadas em dois grupos: as que possuem componentes de paridade par ($\tilde{\kappa}_e$) e as que possuem paridade ímpar ($\tilde{\kappa}_o$),

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{j\kappa} = \frac{1}{2} (\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{j\kappa}, \quad (\tilde{\kappa}_{e-})^{j\kappa} = \frac{1}{2} (\kappa_{DE} - \kappa_{HB})^{j\kappa} - \frac{1}{3} \delta^{j\kappa} (\kappa_{DE})^{ii}, \quad \kappa_{\text{tr}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\kappa_{DE}), \quad (5.26)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{j\kappa} = \frac{1}{2} (\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{j\kappa}, \quad (\tilde{\kappa}_{o-})^{j\kappa} = \frac{1}{2} (\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{j\kappa}. \quad (5.27)$$

Neste arranjo, todos os coeficientes de paridade par estão englobados nas matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+})$, $(\tilde{\kappa}_{e-})$ e (κ_{tr}) , enquanto os coeficientes de paridade ímpar estão em $(\tilde{\kappa}_{o+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$. Além disso, as matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+})$, $(\tilde{\kappa}_{e-})$, $(\tilde{\kappa}_{o+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$ possuem traço nulo, enquanto (κ_{tr}) é um coeficiente simples. Assim sendo, a lagrangiana (5.25) externada em função destes coeficientes tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (1 + \kappa_{\text{tr}}) \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} (1 - \kappa_{\text{tr}}) \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \left[\left((\tilde{\kappa}_{e+})_{ij} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} \right) E^i E^j \right. \\ & \left. + \left((\tilde{\kappa}_{o+})_{ip} + (\tilde{\kappa}_{o-})_{ip} \right) E^i B^p - \left((\tilde{\kappa}_{e+})_{qp} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{qp} \right) B^q B^p \right]. \end{aligned}$$

Os 19 coeficientes independentes do tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$ têm servido como fonte para variados aspectos. Estudos abrangendo ausência de emissão de radiação Cherenkov [68, 69], bem como interações envolvendo fóton-férmion têm sido fontes para produzir limites sobre os

coeficientes de violação de Lorentz [\[155–159\]](#). Recentemente, as relações de dispersão oriundas da eletrodinâmica CPT-par foram discutidas em [\[7\]](#), mostrando que o coeficiente de paridade ímpar fornece uma teoria estável, não causal e unitária. Por outro lado, o termo de paridade par exibe uma teoria estável, causal e unitária.

Capítulo 6

Compactificação Via Método da Função de Partição: A Eletrodinâmica CPT-par

Neste capítulo efetuaremos um estudo das propriedades à temperatura finita da eletrodinâmica CPT-par do MPE representada pelo termo $(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. O âmago deste estudo é compreender a influência oriunda do termo CPT-par no toro, que inclui a compactificação espacial, bem como a compactificação do tempo para analisarmos os efeitos de temperatura. Nesta perspectiva, generalizamos por hipertoros o formalismo que introduz temperatura em teorias de campos para a eletrodinâmica CPT-par. Inicialmente, analisamos a estrutura da hamiltoniana CPT-par, com efoque nos vínculos oriundos da teoria. O estudo da propriedade termodinâmica do sistema físico em equilíbrio térmico advém da função de partição da eletrodinâmica. Tendo esta sido posta, são apresentados a lei de Stefan-Boltzmann bem como o efeito Casimir mediante o termo CPT.

6.1 Estrutura hamiltoniana e análise de vínculos

A eletrodinâmica do setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido é descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}. \quad (6.1)$$

Empregando a equação de Euler-Lagrange na densidade de lagrangiana (6.1), resulta na seguinte equação para o campo de gauge

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - (K_F)_{\beta\alpha\lambda\rho}\partial^\alpha F^{\lambda\rho} = 0. \quad (6.2)$$

Pontuamos que em virtude do acréscimo do termo CPT-par a estrutura da eletrodinâmica fica modificada. Para realizarmos a análise da estrutura hamiltoniana, devemos

partir da definição do momento canônico conjugado

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu} - (K_F)^{0\mu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \quad (6.3)$$

cujos parênteses de Poisson fundamentais

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu(\vec{x} - \vec{y}).$$

A partir da eq. (6.3), quando tomamos $\mu = 0 \rightarrow \pi^0 = 0$, denotando um vínculo primário que será definido como

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0. \quad (6.4)$$

Para as componentes espaciais do momento temos $\mu = k$, resultando na seguinte relação

$$\pi^k = D_{kj}F_{0j} - (K_F)^{0kjl}F_{jl}, \quad (6.5)$$

na qual $D_{kj} = \delta_{kj} - 2(K_F)_{0k0j}$, uma matriz simétrica e não singular.

Da eq. (6.5) podemos obter as velocidades \dot{A}_k em termos dos campos e momentos

$$\partial_0 A_k = \partial_k A_0 + (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right]. \quad (6.6)$$

Com isso, a densidade de hamiltoniana canônica fica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \frac{1}{2} \left[\pi^k + (K_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \\ & + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para que tenhamos uma hamiltoniana bem definida, necessitamos levar em conta que os vínculos primários se mantenham invariantes frente a evolução temporal da mesma. Nesta perspectiva, lança-se mão da hamiltoniana primária, dada por

$$H_p = H_C + \int d^3\mathbf{y} C \pi^0,$$

sendo C um multiplicador de Lagrange correspondente ao vínculo primário.

A condição de que um vínculo primário seja invariante no tempo, $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_p\} \approx 0$,

fornece um vínculo secundário

$$\phi_2 = \partial_k \pi^k \approx 0. \quad (6.8)$$

Outrossim, a condição de consistência do vínculo secundário é identicamente nula $\dot{\phi}_2 = \{\partial_k \pi^k, H_p\} = 0$, significando que tal vínculo é conservado. Então, a teoria não possui mais vínculos. Entretanto, o multiplicador de Lagrange C ainda permanece indeterminado, demonstrando que a teoria continua indefinida. Esta indefinição do multiplicador de Lagrange C sugere a existência de vínculos de primeira classe, que podem ser ratificados ao se calcular os parênteses de Poisson entre os vínculos

$$\{\pi^0, \partial_k \pi^k\} = 0. \quad (6.9)$$

Portanto, temos que os vínculos das eqs. (6.4) e (6.8) são de primeira classe mostrando, também, que a eletrodinâmica embebida com o termo CPT-par possui a mesma estrutura de vínculos da eletrodinâmica de Maxwell.

6.2 Condições de calibre

A hamiltoniana estendida dada pela adição dos vínculos de primeira classe tem a seguinte forma

$$H_E = H_C + \int d\vec{y} [C\phi_1 + \Lambda\phi_2], \quad (6.10)$$

em que C e Λ são os multiplicadores de Lagrange. Esta hamiltoniana estendida governará a evolução temporal do sistema físico. Desta forma, devemos calcular a evolução temporal dos campos,

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H_E\} = C \quad (6.11)$$

e

$$\dot{A}_k = \{A_k, H_E\} = (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] + \partial_k A_0 - \partial_k \Lambda, \quad (6.12)$$

mostrando que a dinâmica de A_0 e de A_k se mantém indeterminada, uma vez que continua dependendo dos parâmetros arbitrários C e Λ . Por outro lado, podemos notar que a segunda expressão será igual a eq. (6.6), se e somente se, $\partial_k \Lambda = 0$ ou $\Lambda = 0$. Neste sentido, devemos impor uma condição de calibre que fixe Λ convenientemente.

Como π^0 é um vínculo de primeira classe há a possibilidade de se procurar condições

de calibre na equação de movimento do campo A_0 ,

$$D_{jk}\partial_j\partial_k A_0 - \partial_0(D_{jk}\partial_j A_k) - (K_F)_{0ijk}\partial_i F_{jk} = 0.$$

Assim, as condições de calibre serão:

$$\psi_1 = D_{jk}\partial_j A_k \approx 0, \quad (6.13)$$

$$\psi_2 = D_{jk}\partial_j\partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk}\partial_i F_{jk} \approx 0. \quad (6.14)$$

A condição de consistência para ψ_1 dada por $\{D_{kj}\partial_j A_k, H_E\} \approx 0$ fornece $D_{kj}\partial_j\partial_k \Lambda = 0$, fixando $\Lambda = 0$. Já a condição de consistência para ψ_2 fornece uma equação para o multiplicador de Lagrange C , $D_{kj}\partial_j\partial_k C - (K_F)_{0kjl}\partial_k F_{jl} \approx 0$. Determinando, assim, todos os multiplicadores de Lagrange.

Logo, a hamiltoniana canônica (6.7) toma a seguinte forma

$$H = \int d\mathbf{y} \left\{ \frac{1}{2} E_j \left[-2(K_F)_{0j0k} \right] E_k + \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{4} (K_F)^{kijlm} F_{kj} F_{lm} \right\}. \quad (6.15)$$

Com a estrutura hamiltoniana definida, torna-se possível estudarmos as suas propriedades termodinâmicas. Para tanto, precisamos calcular a função de partição da teoria e este cálculo será realizado na seção subsequente.

6.3 Função de partição

Para que se concretize o estudo das propriedades termodinâmicas de um sistema físico em equilíbrio térmico, conhecer a respectiva função de partição é de sumária importância. A definição da função de partição advém do conhecimento da densidade de hamiltoniana de modo que

$$Z(\beta) = \int DA_\mu D\pi^\mu \delta(\Sigma_a) \times |\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}|^{1/2} \\ \times \exp \left\{ \int_\beta dx (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_c) \right\}. \quad (6.16)$$

Na qual $\int_\beta d\mathbf{x} = \int_0^\tau d\tau \int d^3\mathbf{x}$, $\Sigma_a = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ é o conjunto de vínculos de segunda classe formados pelos vínculos de primeira classe juntamente com as condições de calibre e $M_{ab}(x, y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ a matriz de vínculos definida como

$$M = \begin{matrix} & \phi_1 & \phi_2 & \psi_1 & \psi_2 \\ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -D_{kj}\partial_j\partial_k \\ 0 & 0 & D_{kj}\partial_j\partial_k & 0 \\ 0 & -D_{kj}\partial_j\partial_k & 0 & 0 \\ D_{kj}\partial_j\partial_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \delta(x-y) \quad (6.17)$$

em que $\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} = \det(-D_{kj}\partial_j\partial_k)^4$.

A integração funcional do campo eletromagnético deve ser realizada sob as configurações de campo satisfazendo condições de contorno periódicas na coordenada $\tau \in [0, \beta]$: $A_\mu(\tau, \mathbf{x}) = A_\mu(\tau + \beta, \mathbf{x})$. Por conseguinte, ao tomarmos a função de partição

$$Z(\beta) = \int DA_\mu D\pi^\mu \delta(\phi_1) \delta(\phi_2) \delta(\psi_1) \delta(\psi_2) \times |\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}|^{1/2} \times \exp \left\{ \int_\beta dx (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_c) \right\}, \quad (6.18)$$

e substituirmos nas eqs. (6.4),(6.7),(6.8),(6.13),(6.14), obtemos

$$Z(\beta) = \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(D_{jk}\partial_j A_k) \delta(D_{jk}\partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \times \det(-D_{kj}\partial_j\partial_k)^2 \times \exp \left\{ \int_\beta dx (i\pi^0 \partial_\tau A_0 + i\pi^k \partial_\tau A_k) \right\} \times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} \left[\pi^k + (K_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\}. \quad (6.19)$$

Realizando a integração em π^0 na eq. (6.19), encontramos

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \\
 &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} F_{pq} (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\
 &\times \int D\pi^k \delta(\partial_k \pi^k) \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k \partial_{\tau} A_k \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \pi^k \partial_k A_0 - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\} \\
 &\times \int DA_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

Utilizando a representação da delta de Dirac para $\delta(\partial_k \pi^k)$

$$\delta(\partial_k \pi^k) = \int D\Omega \exp \left[i \int_{\beta} dx \Omega \partial_k \pi^k \right] = \int D\Omega \exp \left[\int_{\beta} dx (-i\pi^k \partial_k \Omega) \right]$$

na eq. (6.20), resulta

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \\
 &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} F_{pq} (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\
 &\times \int D\pi^k D\Omega \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k [\partial_{\tau} A_k - \partial_k (\Omega - iA_0)] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\} \\
 &\times \int DA_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \tag{6.21}
 \end{aligned}$$

Efetuada a translação $\Omega \rightarrow \Omega - iA_0$ na eq. (6.21), implicará em

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \\
 &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} F_{pq} (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\
 &\times \int D\pi^k D\Omega \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k [\partial_{\tau} A_k - \partial_k \Omega] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\} \\
 &\times \int DA_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \tag{6.22}
 \end{aligned}$$

A integração sobre o campo A_0 é tida como

$$\int DA_0 \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) = \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^{-1}.$$

Assim, substituindo na eq. (6.22), a função de partição fica expressa como

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k) \\
 &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} F_{pq} (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\
 &\times \int D\pi^k D\Omega \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k [\partial_{\tau} A_k - \partial_k \Omega] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\} \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

Desta feita, chamando $\Omega = A_\tau$ decorrerá que $F_{\tau k} = \partial_\tau A_k - \partial_k \Omega$; logo

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k DA_\tau \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k) \\
 &\times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} F_{pq} (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\} \\
 &\times \int D\pi^k \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k F_{\tau k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\}. \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Nesse contexto, o passo seguinte será resolvermos a integração sobre o campo π^k

$$\begin{aligned}
 I &= \int D\pi^k \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} \pi^k (D^{-1})_{kj} \pi^j + i\pi^k F_{\tau k} - (D^{-1})_{kj} \pi^k (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right\} \\
 &= \exp \left[\int_\beta dx \left(-\frac{1}{2} F_{\tau k} D_{kj} F_{\tau j} - i (K_F)^{0kmn} F_{\tau k} F_{mn} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (D^{-1})_{kj} (K_F)^{0kpq} (K_F)^{0jmn} F_{pq} F_{mn} \right) \right]
 \end{aligned}$$

na qual $F_{0k} = F_{\tau k}$, e ao ser implementada na eq. (6.24) nos conduzirá para

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int DA_k DA_\tau \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k) \\
 &\times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} F_{\tau k} D_{kj} F_{\tau j} - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} - i (K_F)^{0kmn} F_{\tau k} F_{mn} \right] \right\}. \tag{6.25}
 \end{aligned}$$

Procedendo com as seguintes redefinições para as componentes do tensor K_F

$$(K_F)^{0kmn} = i (K_F)^{\tau kmn}, \quad (K_F)^{0k0j} = - (K_F)^{\tau k\tau j}. \tag{6.26}$$

Então, a função de partição CPT-par do Modelo Padrão Estendido fica expressa como

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= N \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \int DA_a \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \\
 &\times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{4} (K_F)_{abcd} F_{ab} F_{cd} \right] \right\} \tag{6.27}
 \end{aligned}$$

sendo $a, b, c, d = \tau, 1, 2, 3$. Esta função de partição não é explicitamente covariante de Lorentz e, para que se torne, utilizamos o ansatz de Faddeev-Popov definido como

$$\int D\omega(x) \delta(\mathcal{G}[A_a^\omega]) \det \left[\frac{\delta \mathcal{G}[A_a^\omega]}{\delta \omega} \right] \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (6.28)$$

onde $\omega(x)$ é o parâmetro de calibre, $D\omega(x)$ é a medida do grupo de calibre, $\mathcal{G}[A_a^\omega]$ uma condição de calibre covariante, A_a^ω o campo transformador e $\det \left[\frac{\delta \mathcal{G}[A_a^\omega]}{\delta \omega} \right] \Big|_{\omega=0}$ é o determinante de Faddeev-Popov invariante de calibre. Introduzindo o ansatz na função de partição (6.27),

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= N \int DA_a \delta(G[A_a]) \det \left[\frac{\delta \mathcal{G}[A_a^\omega]}{\delta \omega} \right] \Big|_{\omega=0} \\ &\times \exp \left\{ \int_{\beta} dx \left[-\frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{4} (K_F)_{abcd} F_{ab} F_{cd} \right] \right\} \\ &\times \int D\omega(x) \det(-D_{jk} \partial_j \partial_k) \delta(D_{jk} \partial_j A_k - D_{jk} \partial_j \partial_k \omega) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Escolhendo como condição de gauge covariante o gauge de Lorentz generalizado

$$G[A_a] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_a A_a + f,$$

sendo f uma função arbitrária e ξ um parâmetro real arbitrário.

$$G[A_a^\omega] = G[A_a] - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \square \omega \rightarrow \det \left[\frac{\delta \mathcal{G}[A_a^\omega]}{\delta \omega} \right] \Big|_{\omega=0} = \det \left[\frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right].$$

A função de partição toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= N \int DA_a \det \left[\frac{-\square}{\sqrt{\xi}} \right] \exp \left\{ \int_{\beta} dx -\frac{1}{2} A_a [-\square \delta_{ab} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_a \partial_b + S_{ab}] A_b \right\}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

de modo que $\square = \partial_\alpha \partial_\alpha = (\partial_t)^2 + \nabla^2$ e $S_{ab} = 2(K_F)_{abcd} \partial_c \partial_d$. Uma vez que a função de partição independe do parâmetro de calibre ξ , por comodidade podemos tomar $\xi = 1$. Com isso, a integração sobre o campo de calibre conduz para seguinte função de partição

$$Z(\beta) = \det(-\square) \left[\det(-\square \delta_{ab} + S_{ab})^{-1/2} \right]. \quad (6.31)$$

Na seção seguinte, obteremos a função de partição do Modelo Padrão Estendido para o setor de paridade par isotrópico, bem como as propriedades termodinâmicas do modelo.

6.4 Setor de paridade par

Como mencionamos, o tensor (K_F) é composto por 256 componentes originais que, sob propriedades de simetria e anti-simetria, reduz-se para 19 componentes independentes. Assim sendo, realizar o cálculo exato da função de partição da eletrodinâmica CPT-par constitui-se uma tarefa desafiadora. Todavia, ao utilizarmos da prescrição proposta em [116–118] para a decomposição deste tensor, o cálculo da função de partição torna-se factível. Portanto, empregando as redefinições impostas na eq. (6.26), o setor de paridade par surge como

$$(\kappa_{DE})_{jk} = 2(K_F)^{\tau k \tau j}, \quad (\kappa_{HB})_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{j p q} \epsilon_{k m n} (K_F)_{p q m n} \quad (6.32)$$

Tomando como pauta a questão da birrefringência, podemos considerar $\tilde{\kappa}_{e+} = 0$ conduzindo a $\kappa_{DE} = -\kappa_{HB}$ e, associado com as relações dadas na eq. (5.26), as seguintes expressões para as componentes não birrefringentes são obtidas

$$(\kappa_{DE})_{jk} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{jk} + \tilde{\kappa}_{tr} \delta_{jk}, \quad \tilde{\kappa}_{tr} = \frac{1}{3} tr(\kappa_{DE}) \quad (6.33)$$

em que $(\tilde{\kappa}_{e-})$ corresponde a contribuição anisotrópica e $\tilde{\kappa}_{tr}$ correspondendo a contribuição isotrópica. Na subseção a seguir, analisaremos a função de partição sob a ótica da contribuição isotrópica.

6.4.1 Contribuição isotrópica

Para iniciarmos a investigação dos reflexos da contribuição isotrópica $\tilde{\kappa}_{tr}$ na função de partição, o procedimento a ser empregado será isolar tal componente. Nesta conformação, ficará imposto que $\tilde{\kappa}_{e-} = 0$ na eq. (6.33), logo

$$(\kappa_{DE})_{jk} = \tilde{\kappa}_{tr} \delta_{jk}, \quad (\kappa_{HB})_{jk} = -\tilde{\kappa}_{tr} \delta_{jk}, \quad (6.34)$$

e ao substituí-los nos coeficientes dados na eq. (5.26), decorrerá que

$$(K_F)_{0j0k} = (K_F)_{\tau j \tau k} = \frac{1}{2} \tilde{\kappa}_{tr} \delta_{jk}, \quad (K_F)_{p q m n} = -\frac{\tilde{\kappa}_{tr}}{2} [\delta_{pm} \delta_{qn} - \delta_{pn} \delta_{qm}]. \quad (6.35)$$

Transcrevendo o operador $(-\square \delta_{ab} + S_{ab})$ para o espaço dos momentos obtemos como resposta $(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab})$, de modo que $\tilde{S}_{ab} = 2(K_F)_{abcd} p_c p_d$ é uma matriz simétrica pos-

suindo as seguintes componentes:

$$\tilde{S}_{\tau\tau} = -\tilde{\kappa}_{tr}^2 \vec{p}^2, \tilde{S}_{\tau k} = \tilde{\kappa}_{tr} p_\tau p_k, \tilde{S}_{jk} = -\delta_{jk} \tilde{\kappa}_{tr} p^2 + 2\tilde{\kappa}_{tr} \delta_{jk} \vec{p}^2 - \tilde{\kappa}_{tr} p_j p_k. \quad (6.36)$$

Com esse cenário, o determinante fica expresso como sendo

$$\det \left(p^2 \delta_{ab} - \tilde{S}_{ab} \right) = (\tilde{\kappa}_{tr} + 1)^3 (p^2)^2 \left[p^2 - \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \vec{p}^2 \right]^2, \quad (6.37)$$

conduzindo para o seguinte determinante funcional

$$\det (-\square \delta_{ab} + S_{ab}) = \det [(\tilde{\kappa}_{tr} + 1)^3 (-\square)^2] \det \left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \nabla^2 \right]^2. \quad (6.38)$$

Ao substituir este determinante funcional na eq. (6.31) e tomando o logaritmo da função de partição, adquire-se

$$\ln Z(\beta) = -Tr \ln \left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \nabla^2 \right]. \quad (6.39)$$

O traço funcional da eq. (6.39) é calculado na base de Fourier que expande o campo de tal forma que

$$A_a(\tau, \mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{n, \mathbf{p}} e^{i(\omega_n \tau + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(n, \mathbf{p}),$$

onde V corresponde ao volume do sistema, $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} n$ com $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ as frequências de Matsubara e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Assim, o logaritmo da função de partição fica

$$\ln Z(\beta) = -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 \left[\omega_n^2 + \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \right) \mathbf{p}^2 \right] \quad (6.40)$$

em que $|\tilde{\kappa}_{tr}| < 1$ para garantir uma função de partição bem definida.

Realizando a seguinte transformação nos momentos

$$p_i \rightarrow p_i \sqrt{\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}},$$

então, a eq. (6.40) resulta

$$\ln Z(\beta) = -\frac{V}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \right)^{3/2} \int d^3\mathbf{p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n)^2 + (\beta\omega)^2] \quad (6.41)$$

de modo que foi tomado $\omega = |\mathbf{p}|$.

A soma em n é realizada através da identidade (4.54). À vista disso, a função de partição para o campo eletromagnético acoplada ao termo CPT-par torna-se

$$\ln Z(\beta) = -\frac{2V}{(2\pi)^3} \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \int d^3\omega \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (6.42)$$

sendo $\eta(\tilde{\kappa}_{tr}) = \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \right)^{3/2}$. Esta expressão descreve a função de partição da eletrodinâmica de Maxwell multiplicada pelo parâmetro $\eta(\tilde{\kappa}_{tr})$.

Escrevendo a eq. (6.42) em coordenadas esféricas $p \rightarrow (\omega, \theta, \phi)$, obtemos

$$\ln Z(\beta) = -\frac{2V}{(2\pi)^3} \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (6.43)$$

em que $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido.

Finalmente, calculando as integrais na eq. (6.43), o seguinte resultado para a função de partição da eletrodinâmica CPT-par é encontrado

$$\ln Z(\beta) = \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) V \frac{\pi^2}{45\beta^3}. \quad (6.44)$$

A partir da eq. (6.43), podemos calcular a energia livre de Helmholtz, de modo que

$$F = \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \frac{\pi^2 V}{45\beta^4}. \quad (6.45)$$

A energia interna por unidade de volume é dada por

$$u(\beta) = \frac{1}{4\pi^3} \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} \right). \quad (6.46)$$

Resolvendo a integral em ω encontramos

$$u(\beta) = \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \int d\Omega \frac{\pi}{60\beta^4}, \quad (6.47)$$

e ao se integrar, também, o ângulo sólido

$$u(\beta) = \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \frac{\pi^2}{15\beta^4}, \quad (6.48)$$

que corresponde a densidade de energia da cavidade ou lei de Stefan-Boltzmann modificada.

A pressão da radiação é escrita como

$$P = \eta(\tilde{\kappa}_{tr}) \frac{\pi^2}{45\beta^4}. \quad (6.49)$$

Estes resultados corroboram com os encontrados preliminarmente na literatura ^[160].

Ao realizar a compactificação na dimensão temporal obtivemos como resposta a lei de Stefan-Boltzmann modificada pelo parâmetro isotrópico. Então, continuando nesse roteiro, a questão a ser respondida é saber qual resultado ocorrerá ao se compactificar uma dimensão espacial? A busca por tal resposta será o caminho a ser trilhado na sequência.

6.4.2 Compactificação de uma dimensão espacial

Aqui, a compactificação será realizada sobre uma dimensão espacial. Neste sentido, a compactificação ficará ao longo do eixo x_1 , ou seja, $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, com o comprimento da circunferência de \mathbb{S}^1 igual a L_1 ^[40]. Para esse caso, a condição de periodicidade em x_1 conduz a $0 \leq x_1 \leq L_1$, ao mesmo tempo que as outras componentes variam no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

A função de partição que traz em seu bojo as configurações citadas corresponde a

$$\begin{aligned} Z(L_1) = & \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \\ & \times \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \times \exp \left\{ \int_{L_1} dx (i\pi^0 \partial_\tau A_0 + i\pi^k \partial_\tau A_k) \right\} \\ & \exp \left\{ \int_{L_1} dx \left[-\frac{1}{2} \left[\pi^k + (K_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

onde $\int_{L_1} d\mathbf{x} = \int_0^{L_1} dx_1 \int d^3\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = (x_0, x_2, x_3)$. Realizando as devidas integrações, a eq. (6.50) toma a forma

$$\ln Z(L_1) = -Tr \ln \left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \nabla^2 \right]. \quad (6.51)$$

O traço da função de partição é calculado na base

$$A_a(x_1, \mathbf{x}) = \left(\frac{L_1}{V}\right)^{1/2} \sum_{m, \mathbf{p}} e^{i(\omega_m x_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(m, \mathbf{p}),$$

sendo $\mathbf{p} = (p_0, p_2, p_3)$, V corresponde ao volume do sistema e $\omega_m = \frac{2\pi}{L_1}m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, as frequências de Matsubara. Logo, a função de partição proporciona

$$\ln Z(L_1) = -V \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln L_1^2 \left[\left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1}\right) \omega_m^2 + \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1}\right) \mathbf{p}^2 + p_0^2 \right]. \quad (6.52)$$

Tomando a seguinte transformação nos momentos

$$p_i \rightarrow p_i \sqrt{\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}},$$

a eq. (6.52) decorrerá em

$$\ln Z(L_1) = -V \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}\right) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi m)^2 + (L_1 \omega)^2], \quad (6.53)$$

onde $\omega = |\mathbf{p}|$. Ao efetuarmos a soma em m , tendo como base a identidade (4.54), encontramos

$$\ln Z(L_1) = -2V \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}\right) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-L_1 \omega}), \quad (6.54)$$

Passando esta equação para coordenadas esféricas $\vec{p} \rightarrow (\omega, \theta, \phi)$, fica

$$\ln Z(L_1) = -\frac{2V}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}\right) \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln (1 - e^{-L_1 \omega}), \quad (6.55)$$

em que $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido. A energia interna do sistema é obtida derivando eq. (6.55) em relação a L_1

$$u = - \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}\right) \frac{\pi^2}{15 (L_1)^4}, \quad (6.56)$$

este resultado corresponde ao efeito Casimir para o campo eletromagnético associado ao termo CPT-par. A partir dele podemos ressaltar que a energia interna é consistente com o caso usual a um fator de multiplicação.

6.4.3 Compactificação do tempo e de uma dimensão espacial

Tomando como modelo a prescrição dada tanto na compactificação do tempo quanto na compactificação de uma dimensão espacial, agora, realizaremos o cálculo da compactificação do tempo e de uma dimensão espacial concomitantemente, ou seja, a topologia fica como $\Gamma_4^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. O tempo será compactificado em uma circunferência \mathbb{S}^1 de comprimento β enquanto que a compactificação espacial será ao longo de x_1 com comprimento de circunferência \mathbb{S}^1 igual a L_1 . Neste caso, a função de partição é escrita como

$$\begin{aligned} Z(\beta, L_1) = & \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (K_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \\ & \times \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \times \exp \left\{ \int_{\vartheta} dx (i\pi^0 \partial_\tau A_0 + i\pi^k \partial_\tau A_k) \right\} \\ & \exp \left\{ \int_{\vartheta} dx \left[-\frac{1}{2} \left[\pi^k + (K_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \left[\pi^j + (K_F)^{0jmn} F_{mn} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (K_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

em que $\int_{\vartheta} d\mathbf{x} = \int_0^\beta dx_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int d^2\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} = (x_2, x_3)$. Realizando as devidas integrações, a eq. (6.57) resultará em

$$\ln Z(\beta, L_1) = -Tr \ln \left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \nabla^2 \right]. \quad (6.58)$$

Para calcular o traço da função de partição utilizamos a base

$$A_a(\tau, x_1, \mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{n_0} \left(\frac{L_1}{V} \right)^{1/2} \sum_{n_1} \sum_{\mathbf{p}} e^{i(\omega_{n_0} \tau + \omega_{n_1} x_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(n_0, n_1, \mathbf{p}), \quad (6.59)$$

sendo $\mathbf{p} = (p_2, p_3)$, V corresponde ao volume do sistema, $\omega_{n_0} = \frac{2\pi}{\beta} n_0$ e $\omega_{n_1} = \frac{2\pi}{L_1} n_1$, as frequências de Matsubara. Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, L_1) = & -V^{2/3} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \ln \beta^2 L_1^2 V^{-4/3} \\ & \times \left[\omega_{n_0}^2 + \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \right) \omega_{n_1}^2 + \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \right) \mathbf{p}^2 \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

Realizando a seguinte transformação nos momentos

$$p_i \rightarrow p_i \sqrt{\frac{1 + \tilde{k}_{tr}}{1 - \tilde{k}_{tr}}},$$

a eq. (6.60) fica posta como

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, L_1) = & - \left(\frac{1 + \tilde{k}_{tr}}{1 - \tilde{k}_{tr}} \right) V^{2/3} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[\sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n_0)^2 + (\beta\omega)^2] \right. \\ & + \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n_1)^2 + (L_1\omega)^2] \\ & + 4 \sum_{n_0=1}^{+\infty} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \ln V^{-4/3} [(2\pi n_0 L_1)^2 + (2\pi n_1 \beta)^2 + (\beta L_1 \omega)^2] \\ & \left. + \ln V^{-4/3} \beta^2 + \ln V^{-4/3} L_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.61)$$

No limite termodinâmico, $V \rightarrow \infty$, os dois últimos termos geram uma divergência pura. Para contornar tal divergência, devemos realizar uma renormalização na expressão, o que conduz a

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, L_1) = & - \left(\frac{1 + \tilde{k}_{tr}}{1 - \tilde{k}_{tr}} \right) V^{2/3} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[\sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n_0)^2 + (\beta\omega)^2] \right. \\ & + \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \ln [(2\pi n_1)^2 + (L_1\omega)^2] \\ & \left. + 4 \sum_{n_0=1}^{+\infty} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \ln V^{-4/3} [(2\pi n_0 L_1)^2 + (2\pi n_1 \beta)^2 + (\beta L_1 \omega)^2] \right]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Ao realizarmos a soma sobre os dois primeiros termos via identidade (4.54) e, escrevendo a expressão em coordenadas polares $\mathbf{p} \rightarrow (\omega, \phi)$, $\omega = |\mathbf{p}|$, obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, L_1) &= -2 \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \right) V^{2/3} \int \frac{d\phi d\omega \omega}{(2\pi)^2} [\ln(1 - e^{-\beta\omega}) + \ln(1 - e^{-L_1\omega})] \\ &\quad + 2 \sum_{n_0=1}^{+\infty} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \ln V^{-4/3} [(2\pi n_0 L_1)^2 \\ &\quad + (2\pi n_1 \beta)^2 + (\beta L_1 \omega)^2]. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Executando a integração sobre os dois primeiros termos, a função de partição dada na eq. (6.63) fica escrita

$$\ln Z(\beta, L_1) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \right) V^{2/3} \left[\frac{\zeta(3)}{\beta^2} + \frac{\zeta(3)}{L_1^2} \right] + \mathcal{O}, \quad (6.64)$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}_{tr}}{1 - \tilde{\kappa}_{tr}} \right) V^{2/3} \int d\omega \omega \left(\sum_{n_0=1}^{+\infty} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \ln V^{-4/3} [(2\pi n_0 L_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + (2\pi n_1 \beta)^2 + (\beta L_1 \omega)^2] \right). \end{aligned} \quad (6.65)$$

É importante ressaltar que ao tomarmos o limite $\beta \rightarrow \infty$, o efeito Casimir dado na eq. (6.56) é recuperado. Por outro lado, tomando $L_1 \rightarrow \infty$, a lei de Stefan-Boltzmann, eq. (6.48), é obtida novamente.

6.4.4 Compactificação em d dimensões

A função de partição para o setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido na representação de integral funcional é definida como ^[161],

$$\begin{aligned} Z(L_0 \cdots L_r) &= \int DA_\mu D\pi^\mu \delta(\Sigma_a) \times |\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}|^{1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_0^{L_0} \cdots \int_0^{L_r} \int d^{D+1}x (i\pi^\mu \partial_\tau A_\mu - \mathcal{H}_c) \right\}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

onde $\Sigma_a = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ é o conjunto de vínculos de segunda classe formados pelos vínculos de primeira classe juntamente com as condições de calibre; $M_{ab}(x, y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ a matriz de vínculos com determinante $\det \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\} = \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^4$ e \mathcal{H}_c a densidade de hamiltoniana canônica. A função de partição representa uma generalização do sistema em $N = D + 1$ dimensões e topologia $\Gamma_N^r = \Gamma_{D+1}^r = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cdots \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D+1-r}$. Neste

caso, a compactificação do setor CPT-par do MPE acontecerá em $r + 1$ dimensões, com $r \leq D$. Portanto, a função de partição do Modelo Padrão Estendido para o setor CPT-par é lida como

$$\begin{aligned} Z(L_0 \cdots L_r) &= \int DA_0 D\pi^0 DA_k D\pi^k \delta(\pi^0) \delta(\partial_k \pi^k) \delta(D_{jk} \partial_j A_k) \delta(D_{jk} \partial_j \partial_k A_0 - (k_F)_{0ijk} \partial_i F_{jk}) \\ &\times \det(-D_{kj} \partial_j \partial_k)^2 \times \exp \left\{ \int_0^{L_0} \cdots \int_0^{L_r} \int d^{D+1}x (i\pi^0 \partial_\tau A_0 + i\pi^k \partial_\tau A_k) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \int_\beta dx \left[-\frac{1}{2} \left[\pi^k + (k_F)^{0kmn} F_{mn} \right] (D^{-1})_{kj} \right. \right. \\ &\left. \left. \left[\pi^j + (k_F)^{0jmn} F_{mn} \right] - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{1}{4} (F_{jk})^2 - \frac{1}{4} (k_F)^{kjlm} F_{kj} F_{lm} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Transcorrendo com as integrações pertinentes, a eq. (6.67) resulta

$$\ln Z(L_0 \cdots L_r) = -Tr \ln \left[-\square + \frac{2\tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \nabla^2 \right]. \quad (6.68)$$

O traço desta equação é calculado escrevendo o campo de gauge em termos da expansão de Fourier, isto é,

$$\begin{aligned} A_a(L_0 \cdots L_r, \mathbf{x}) &= \left(\frac{L_0}{V} \right)^{1/D-1} \cdots \left(\frac{L_r}{V} \right)^{1/D-1} \\ &\times \int \prod_{n=r+1}^D V^{n/3} \frac{d^n \mathbf{p}_n}{(2\pi)^n} \sum_{n_0 \cdots n_r} e^{i(\omega_{n_j} x_j + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p})} \tilde{A}_a(n_0 \cdots n_r, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Na expressão acima, j corre sobre as dimensões compactificadas, ω_{n_j} são as frequências bosônicas de Matsubara, o número de ondas $\omega_{n_j} = \frac{2\pi}{L_j} n_j$ com $n_j = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{p} = (p_{r+1}, \dots, p_D)$ e V corresponde ao hipervolume do sistema. A generalização da função de partição do campo de gauge, dada pela eq. (6.68), é agora expressa como

$$\begin{aligned} \ln Z(L_0 \cdots L_r) &= - \int \prod_{n=r+1}^D V^{n/3} \frac{d^n \mathbf{p}_n}{(2\pi)^n} \\ &\times \sum_{n_0 \cdots n_r = -\infty}^{+\infty} \ln \prod_{j=0}^r L_j^2 V^{\frac{D-3r}{3}} \left[\sum_{n_j=0}^r \omega_{n_j}^2 + \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}_{tr}}{\tilde{\kappa}_{tr} + 1} \right) \mathbf{p}^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Uma vez encontrada a eq. (6.70), podemos, a partir desta, utilizá-la para explorar os resultados obtidos para o efeito Casimir, eq. (6.56), assim como a lei de Stefan-Boltzmann,

eq. (6.48), suplantados pela contribuição isotrópica do termo de paridade par oriundo do setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido.

Capítulo 7

Dinâmica de Campos Térmicos: O Campo Eletromagnético livre

No presente capítulo abordaremos o efeito Casimir dispendo, para tal perspectiva, a teoria de campos elaborada para campos compactificados baseados na transformação generalizada de Bogoliubov. Durante o processo para compreender como os efeitos de compactificação influenciam no efeito Casimir, perpassaremos pela dedução do tensor energia-momento para o campo eletromagnético livre via método de compactificação de campos. Tal mecanismo se faz necessário uma vez que o efeito Casimir aflora como a diferença entre o tensor energia-momento para os campos compactificados e o tensor energia-momento para os campos no espaço plano. Este é um resultado já explorado na literatura [\[40,114\]](#) que aqui deduzimos para fins pedagógicos e no intuito de tornar suave a transição para os resultados do próximo capítulo.

7.1 O estado de vácuo do campo eletromagnético

A densidade de lagrangiana representativa para o campo eletromagnético livre é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (7.1)$$

em que o termo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Com o intuito de discorrermos acerca da energia de Casimir do campo eletromagnético, tomaremos como rota de partida para o desenvolvimento de tal análise o tensor energia-momento do campo.

O tensor energia-momento para o caso em estudo é dado por

$$T^{\alpha\beta}(x) = -F^{\alpha\nu}(x)F^\beta{}_\nu(x) + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x). \quad (7.2)$$

Para que possamos obter quantidades físicas, devemos calcular o valor esperado do tensor $T^{\alpha\beta}(x)$. Entretanto, emerge um impasse pois o produto de dois operadores em um mesmo ponto do espaço-tempo não é bem definido, impelindo em divergências no valor esperado no vácuo. Contudo, para contornar tal impasse, utilizamos um processo de regularização denominado de split. No caso em estudo, split do tensor energia-momento toma a forma

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{T} \left[-F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta}_{\nu}(x') + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x') \right] \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta}_{\nu}(x, x') + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu, \mu\nu}(x, x') \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

em que \mathcal{T} corresponde ao operador ordenamento temporal, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta\mu}(x, x') &= \mathcal{T} [F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta\mu}(x')] \\ &= F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta\mu}(x') \theta(x_0 - x'_0) + F^{\beta\mu}(x') F^{\alpha\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ressaltamos que a função θ se relaciona com a função delta de Dirac de tal forma que

$$\partial^\mu \theta(x_0 - x'_0) = n_0^\mu \delta(x_0 - x'_0),$$

onde n_0^μ é a μ -componente do quadrivetor $n_0 = (1, 0, 0, 0)$. Usando as relações de comutação para os campos, o termo $\mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta\mu}(x, x')$ surge como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta\mu}(x, x') &= \Gamma^{\alpha\nu, \beta\mu, \lambda\rho}(x, x') \mathcal{T} [A_\lambda(x) A_\rho(x')] \\ &\quad - n_0^\alpha \delta(x_0 - x'_0) I^{\nu, \beta\mu}(x, x') \\ &\quad + n_0^\nu \delta(x'_0 - x_0) I^{\alpha, \beta\mu}(x, x'), \end{aligned} \quad (7.5)$$

sendo

$$\Gamma^{\alpha\nu, \beta\mu, \lambda\rho}(x, x') = (g^{\nu\lambda} \partial^\alpha - g^{\alpha\lambda} \partial^\nu) (g^{\mu\rho} \partial^\beta - g^{\beta\rho} \partial^\mu),$$

e

$$\begin{aligned} I^{\nu,\beta\mu}(x, x') &= [A^\nu(x), F^{\beta\mu}(x')], \\ I^{\alpha,\beta\mu}(x, x') &= [A^\alpha(x) F^{\beta\mu}(x')]. \end{aligned}$$

Com a finalidade de demonstrar a eq. (7.5), tomaremos como ponto de partida o primeiro termo após a igualdade. Isto é,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\nu,\beta\mu,\lambda\rho}(x, x') \mathcal{T}[A_\lambda(x) A_\rho(x')] &= (g^{\nu\lambda}\partial^\alpha - g^{\alpha\lambda}\partial^\nu) (g^{\mu\rho}\partial'^\beta - g^{\beta\rho}\partial'^\mu) \mathcal{T}[A_\lambda(x) A_\rho(x')] \\ &= (g^{\nu\lambda}\partial^\alpha - g^{\alpha\lambda}\partial^\nu) (g^{\mu\rho}\partial'^\beta - g^{\beta\rho}\partial'^\mu) \\ &\quad \times [A_\lambda(x) A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) \\ &\quad + A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Para facilitar o cálculo da eq. (7.6), esta será dividida em dois termos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta} &= (g^{\mu\rho}\partial'^\beta - g^{\beta\rho}\partial'^\mu) [A_\lambda(x) A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) + A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0)] \text{ e} \\ \mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha} &= (g^{\nu\lambda}\partial^\alpha - g^{\alpha\lambda}\partial^\nu), \text{ de tal forma que a eq. (7.6) ficará} \end{aligned}$$

$$\Gamma^{\alpha\nu,\beta\mu,\lambda\rho}(x, x') \mathcal{T}[A_\lambda(x) A_\rho(x')] = \mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha} \mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta}.$$

A parcela \mathcal{I}_1 apresenta-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta} &= g^{\mu\rho}\partial'^\beta [A_\lambda(x) A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0)] + g^{\mu\rho}\partial'^\beta [A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0)] \\ &\quad - g^{\beta\rho}\partial'^\mu [A_\lambda(x) A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0)] - g^{\beta\rho}\partial'^\mu [A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0)] \\ &= g^{\mu\rho} A_\lambda(x) \partial'^\beta A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) + g^{\mu\rho} A_\lambda(x) A_\rho(x') \partial'^\beta \theta(x_0 - x'_0) \\ &\quad + g^{\mu\rho}\partial'^\beta A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0) + g^{\mu\rho} A_\rho(x') A_\lambda(x) \partial'^\beta \theta(x'_0 - x_0) \\ &\quad - g^{\beta\rho} A_\lambda(x) \partial'^\mu A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) - g^{\beta\rho} A_\lambda(x) A_\rho(x') \partial'^\mu \theta(x_0 - x'_0) \\ &\quad - g^{\beta\rho}\partial'^\mu A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0) - g^{\beta\rho} A_\rho(x') A_\lambda(x) \partial'^\mu \theta(x'_0 - x_0) \\ &= g^{\mu\rho} A_\lambda(x) \partial'^\beta A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) - g^{\mu\rho} A_\lambda(x) A_\rho(x') n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad + g^{\mu\rho}\partial'^\beta A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0) + g^{\mu\rho} A_\rho(x') A_\lambda(x) n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad - g^{\beta\rho} A_\lambda(x) \partial'^\mu A_\rho(x') \theta(x_0 - x'_0) + g^{\beta\rho} A_\lambda(x) A_\rho(x') n^\mu \delta(x'_0 - x_0) \\ &\quad - g^{\beta\rho}\partial'^\mu A_\rho(x') A_\lambda(x) \theta(x'_0 - x_0) - g^{\beta\rho} A_\rho(x') A_\lambda(x) n^\mu \delta(x'_0 - x_0). \end{aligned}$$

Por conseguinte, o produto $\mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha} \mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta}$ segue

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha}\mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta} = & \partial^\alpha A^\nu(x) \partial'^\beta A^\mu(x') \theta(x_0 - x'_0) - \partial^\nu A^\alpha(x) \partial'^\beta A^\mu(x') \theta(x_0 - x'_0) \\
 & - \partial^\alpha A^\nu(x) A^\mu(x') n^\beta \delta(x'_0 - x_0) + \partial^\nu A^\alpha(x) A^\mu(x') n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\
 & + \partial'^\beta A^\mu(x') \partial^\alpha A^\nu(x) \theta(x'_0 - x_0) - \partial'^\beta A^\mu(x') \partial^\nu A^\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
 & - A^\mu(x') \partial^\nu A^\alpha(x) n^\beta \delta(x'_0 - x_0) + A^\mu(x') \partial^\alpha A^\nu(x) n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - \partial^\alpha A^\nu(x) \partial'^\mu A^\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) + \partial^\nu A^\alpha(x) \partial'^\mu A^\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) \\
 & - A^\nu(x) \partial'^\mu A^\beta(x') n^\alpha \delta(x_0 - x'_0) + A^\nu(x) \partial'^\beta A^\mu(x') n^\alpha \delta(x_0 - x'_0) \\
 & + A^\alpha(x) \partial'^\mu A^\beta(x') n^\nu \delta(x_0 - x'_0) - A^\alpha(x) \partial'^\beta A^\mu(x') n^\nu \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - \partial^\nu A^\alpha(x) A^\beta(x') n^\mu \delta(x'_0 - x_0) + \partial^\alpha A^\nu(x) A^\beta(x') n^\mu \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - \partial'^\mu A^\beta(x') \partial^\alpha A^\nu(x) \theta(x'_0 - x_0) + \partial'^\mu A^\beta(x') \partial^\nu A^\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
 & - \partial'^\mu A^\beta(x') A^\nu(x) n^\alpha \delta(x'_0 - x_0) + \partial'^\beta A^\mu(x') A^\nu(x) n^\alpha \delta(x'_0 - x_0) \\
 & + \partial'^\mu A^\beta(x') A^\alpha(x) n^\nu \delta(x'_0 - x_0) - \partial'^\beta A^\mu(x') A^\alpha(x) n^\nu \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - A^\beta(x') \partial^\alpha A^\nu(x) n^\mu \delta(x'_0 - x_0) + A^\beta(x') \partial^\nu A^\alpha(x) n^\mu \delta(x'_0 - x_0).
 \end{aligned}$$

Para simplificar o produto acima, é adequado externá-lo em função do tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, proporcionando

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha}\mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta} = & F^{\alpha\nu}(x) \partial'^\beta A^\mu(x') \theta(x_0 - x'_0) \\
 & - F^{\alpha\nu}(x) A^\mu(x') n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\
 & + \partial'^\beta A^\mu(x') F^{\alpha\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
 & + A^\mu(x') F^{\alpha\nu}(x) n^\beta \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - F^{\alpha\nu}(x) \partial'^\mu A^\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) \\
 & + A^\nu(x) F^{\beta\mu}(x') n^\alpha \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - A^\alpha(x) F^{\beta\mu}(x') n^\nu \delta(x_0 - x'_0) \\
 & + F^{\alpha\nu}(x) A^\beta(x') n^\mu \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - \partial'^\mu A^\beta(x') F^{\alpha\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0) \\
 & + F^{\beta\mu}(x') A^\nu(x) n^\alpha \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - F^{\beta\mu}(x') A^\alpha(x) n^\nu \delta(x'_0 - x_0) \\
 & - A^\beta(x') F^{\alpha\nu}(x) n^\mu \delta(x'_0 - x_0).
 \end{aligned}$$

Realocando os termos, o produto segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{\nu\lambda\alpha}\mathcal{I}_{1\lambda}^{\mu\beta} &= F^{\alpha\nu}(x)F^{\beta\mu}(x')\theta(x_0-x'_0) + F^{\beta\mu}(x')F^{\alpha\nu}(x)\theta(x'_0-x_0) \\ &\quad + n^\nu\delta(x_0-x'_0)[A^\alpha(x)F^{\beta\mu}(x')] - n^\alpha\delta(x_0-x'_0)[A^\nu(x),F^{\beta\mu}(x')]. \end{aligned}$$

Desta forma, como resultado final obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\nu,\beta\mu,\lambda\rho}(x,x')\mathcal{T}[A_\lambda(x)A_\rho(x')] &= \mathcal{F}^{\alpha\nu,\beta\mu}(x,x') \\ &\quad + n_0^\alpha[A^\nu(x),F^{\beta\mu}(x')]\delta(x_0-x'_0) \\ &\quad - n_0^\nu[A^\alpha(x)F^{\beta\mu}(x')]\delta(x_0-x'_0). \end{aligned}$$

Com a demonstração realizada, podemos utilizá-lo a fim de calcular o tensor energia-momento em termos do produto "T". Tomando a eq. (7.5), segue-se

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}(x) &= \lim_{x\rightarrow x'}\mathcal{T}\left\{-F^{\alpha\gamma}(x)F^{\beta\lambda}(x')g_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}F^{\rho\eta}(x)F^{\mu\nu}(x')\right\} \\ &= \lim_{x\rightarrow x'}\left\{-\mathcal{T}[F^{\alpha\gamma}(x),F^{\beta\lambda}(x')]g_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}\mathcal{T}[F^{\rho\eta}(x),F^{\mu\nu}(x')]\right\} \\ &= \lim_{x_0\rightarrow x'_0}\left\{\Gamma^{\alpha\gamma,\beta\lambda,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x,x')\mathcal{T}[A_{\bar{\alpha}}(x)A_{\bar{\beta}}(x')]g_{\lambda\nu} + n_0^\alpha g_{\lambda\nu}[A^\gamma(x),F^{\beta\lambda}(x')]\delta(x_0-x'_0)\right. \\ &\quad - n_0^\gamma g_{\lambda\nu}[A^\alpha(x),F^{\beta\lambda}(x')]\delta(x_0-x'_0) + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}\Gamma^{\rho\eta,\mu\nu,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x,x')\mathcal{T}[A_{\bar{\alpha}}(x)A_{\bar{\beta}}(x')] \\ &\quad + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}n_0^\eta[A^\rho(x),F^{\mu\nu}(x')]\delta(x_0-x'_0) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}n_0^\rho[A^\eta(x),F^{\mu\nu}(x')]\delta(x_0-x'_0)\right\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} [A^\alpha(x),F^{\beta\lambda}(x')] &= [A^\alpha(x),\partial'^\beta A^\lambda(x')] - [A^\alpha(x),\partial'^\lambda A^\beta(x')] \\ &= in_0^\lambda g^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - in_0^\beta g^{\alpha\lambda}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &\quad + n_0^\lambda\nabla^{-2}\partial^\alpha\partial^\beta\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - n_0^\beta\nabla^{-2}\partial^\alpha\partial^\lambda\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \end{aligned}$$

e assim, substituindo no operador, encontramos

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta}(x) = & -\lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left(\Gamma^{\alpha\gamma, \beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\gamma}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu, \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') \right) \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] \right. \\
 & \left. + 2i \left(n_0^{\alpha} n_0^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \right\}. \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

A partir do resultado obtido na eq. (7.8), é possível partir em busca do valor esperado do tensor energia-momento no vácuo, o qual surge consoante

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T^{\alpha\beta}(x) | 0 \rangle = & -\lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left(\Gamma^{\alpha\gamma, \beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\gamma}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu, \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') \right) G_0(x - x') \right. \\
 & \left. + 2i \left(n_0^{\alpha} n_0^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \right\},
 \end{aligned}$$

de maneira que foi utilizado

$$iD_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x - x') = \langle 0 | T [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] | 0 \rangle = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} G_0(x - x').$$

Nesse cenário, utilizando o calibre de Feynmann, o propagador fica expresso tal qual o do campo escalar livre,

$$G_0(x - x') = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{(x - x')^2 - i\varepsilon}.$$

E, diante disso, a conexão entre o tensor energia-momento e o propagador fica estabelecida. Aplicando a notação de dubleto, o tensor tomará a forma

$$T^{\alpha\beta(ab)}(x) = -F^{\alpha\nu(ab)}(x) F_{\nu}^{\beta(ab)}(x) + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{(ab)}(x) F^{\mu\nu(ab)}(x),$$

tal que $a, b = 1, 2$ e

$$F^{\alpha\nu(ab)} = \partial^{\alpha} A^{\nu(a)} - \partial^{\nu} A^{\alpha(b)}.$$

Desse modo, o propagador térmico, na notação de dubleto, manifesta-se como

$$iD_{\alpha\beta}^{(ab)}(x - x') = g_{\alpha\beta} G_0^{(ab)}(x - x'),$$

em consonância com

$$iD_{\alpha\beta}^{(ab)}(x - x') = \left\langle 0, \tilde{0} \left| \mathcal{T} [A_{\alpha}^a(x) A_{\beta}^b(x')] \right| 0, \tilde{0} \right\rangle,$$

e que

$$G_0^{(ab)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k),$$

sendo $G_0^{(ab)}(k)$ expresso por

$$G_0^{(ab)}(k) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{k^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

E assim, o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo térmico revela-se tal qual

$$\begin{aligned} \langle 0, \tilde{0} | T^{\alpha\beta(ab)}(x) | 0, \tilde{0} \rangle &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x') \right. \\ &\quad \left. + 2i \left(n_0^\alpha n_0^\beta - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \delta_{ab} \right\}. \end{aligned}$$

No intuito de estudarmos os efeitos induzidos pela topologia no tensor energia-momento, introduziremos campos "η" dependentes, de modo que o tensor mantenha a mesma forma, porém caracterizado pelos parâmetros "η".

$$\begin{aligned} \langle 0, \tilde{0} | T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) | 0, \tilde{0} \rangle &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x'; \eta) \right. \\ &\quad \left. + 2i \left(n_0^\alpha n_0^\beta - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \delta_{ab} \right\}. \end{aligned}$$

Através de um procedimento de regularização, ocorrerá a inserção de um tensor finito, dado pela diferença entre o valor esperado do tensor energia-momento "η" dependente e o valor esperado do tensor energia-momento sem efeitos de compactificação

$$T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) = \langle T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) \rangle - \langle T^{\alpha\beta(ab)}(x) \rangle,$$

direcionando para o tensor energia-momento renormalizado

$$T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) = -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \bar{G}^{(ab)}(x - x'; \eta) \right\},$$

sendo que

$$\bar{G}^{(ab)}(x - x'; \eta) = G^{(ab)}(x - x'; \eta) - G_0^{(ab)}(x - x').$$

Que por sua vez, na representação de Fourier

$$G^{(ab)}(x - x'; \eta) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x-x')} G^{(ab)}(k; \eta),$$

onde

$$G^{(ab)}(k; \eta) = B^{-1(ac)}(k; \eta) G_0^{(cd)}(k) B^{(db)}(k; \eta),$$

e $B(k; \eta)$ uma matriz dada por

$$B(k; \eta) = \begin{pmatrix} u(k; \eta) & -v(k; \eta) \\ -v(k; \eta) & u(k; \eta) \end{pmatrix},$$

que retrata a transformação de Bogoliubov. Isto posto, as componentes da mesma são reproduzidas como

$$\begin{aligned} \overline{G}^{(11)}(k; \eta) &= \overline{G}^{(22)}(k; \eta) = v^2(k; \eta) [G_0(k) - G_0^*(k)], \\ \overline{G}^{(12)}(k; \eta) &= \overline{G}^{(21)}(k; \eta) = v^2(k; \eta) u^2(k; \eta) [G_0^*(k) - G_0(k)]. \end{aligned}$$

Para o caso generalizado, isto é, para N compactificações, em que $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N)$, a transformação de Bogoliubov é apresentada como

$$\begin{aligned} v^2(k; \eta) &= \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \\ &\times \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Através desse roteiro, a componente $\overline{G}_0^{(11)}$ fica escrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} \overline{G}_0^{(11)} &= \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \\ &\times \left[G_0^* \left(x - x' - i \sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j} \right) - G_0 \left(x - x' - i \sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j} \right) \right], \end{aligned}$$

em que $\chi_{\sigma_j} = 1$, se $\sigma_j = 0$ e $\chi_{\sigma_j} = -1$, se $\sigma_j = 1, 2, \dots, N$. Finalmente, o tensor energia

momento renormalizado em uma variedade quadridimensional evidencia-se como

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \eta) \right\} \\
 &= \frac{-2}{\pi^2} \sum_{s=1}^4 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \\
 &\quad \times \left[\frac{g^{\alpha\beta}}{\left[\sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2 \right]^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 \sum_{j,r=1}^s (1 + \chi_{\sigma_j} \chi_{\sigma_r}) (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j}) (\eta_{\sigma_r} l_{\sigma_r}) n_{\sigma_j}^{\alpha} n_{\sigma_r}^{\beta}}{\left[\sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2 \right]^3} \right]. \tag{7.10}
 \end{aligned}$$

7.2 Efeito Casimir

O primeiro caso que analisaremos é o de temperatura zero, cujos parâmetros de compactificação a serem considerados equivalem a $\eta = (0, 0, 0, 2iL_3)$, de tal forma que o tensor energia-momento (7.10), mostra-se como

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \bar{G}_0^{(11)}(x - x'; \eta) \right\} \\
 &= \frac{-2}{\pi^2} \left[\sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^{\alpha} n_3^{\beta}}{(2L_3 l_3)^4} \right]. \tag{7.11}
 \end{aligned}$$

Para a energia $T^{00(11)}$, levamos em consideração que os índices $\alpha = 0$ e seja $\beta = 0$, impelindo a eq. (7.11) em

$$T^{00(11)} = \frac{-\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_3^4} \right), \tag{7.12}$$

onde foi usado a função zeta de Riemann

$$\zeta(4) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Já para a pressão de Casimir, adotamos $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ na eq. (7.11), resultando

$$T^{33(11)} = \frac{-\pi^2}{240} \left(\frac{1}{L_3^4} \right). \tag{7.13}$$

Agora, analisando o caso à temperatura finita, a escolha no tensor energia-momento (7.10), será $\eta = (L_0, 0, 0, 2iL_3)$, proporcionando

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta(11)}(\eta) = & \frac{-2}{\pi^2} \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} - 4n_0^\alpha n_0^\beta}{(L_0 l_0)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^\alpha n_3^\beta}{(2L_3 l_3)^4} \right. \\
 & + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\} \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

A energia $E = T^{00(11)}$ aflora quando tomamos os índices $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ na eq. (7.14),

$$\begin{aligned}
 T^{00(11)} = & \left\{ \frac{\pi^2}{15L_0^4} - \frac{\pi^2}{720L_3^4} \right. \\
 & \left. - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{-3(L_0 l_0)^2 + 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, quando limitamos $\alpha = 3$ e $\beta = 3$, emerge a pressão de Casimir $P = T^{33(11)}$,

$$\begin{aligned}
 T^{33(11)} = & \left\{ \frac{\pi^2}{45L_0^4} - \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{L_3^4} \right. \\
 & \left. + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \quad (7.16)
 \end{aligned}$$

A exposição do mecanismo da teoria de campos elaborada para campos compactificados baseados na transformação generalizada de Bogoliubov, utilizando como arcabouço o campo eletromagnético livre, se sucedeu com o objetivo de tornar a transição do ponto de vista pedagógico mais tranquila para os resultados do próximo capítulo. Sendo assim, o próximo capítulo teremos como enfoque a aplicação de tal proposta para a eletrodinâmica CPT-par do Modelo Padrão Estendido.

Capítulo 8

Dinâmica de Campos Térmicos aplicada à Eletrodinâmica CPT-par

Neste capítulo aplicaremos a teoria de campos compactificados com a finalidade de examinar o efeito Casimir na topologia Γ_D^d , onde d representa o número de dimensões compactificadas, D refere-se à dimensão da variedade considerada. Nesse propósito de entender como o efeito Casimir pode depender dos parâmetros de compactificação, executamos o cálculo do tensor energia-momento para a eletrodinâmica CPT-par, empregando o método de campos compactificados ^[162–164]. O efeito Casimir surge em face da mudança da energia de ponto zero causada pela compactificação. Esta é obtida como a diferença entre o tensor energia-momento para os campos compactificados e o tensor energia-momento para os campos no espaço. Nesse contexto, avaliamos o efeito Casimir para bósons na topologia $\Gamma_4^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, com uma compactificação espacial ao longo do eixo x_3 , em uma circunferência de comprimento $2L_3$. Também, analisamos o efeito na topologia $\Gamma_4^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, com os eixos espaciais x_1 , x_2 e x_3 compactificados em circunferências de diferentes comprimentos expressos, respectivamente, por $2L_1$, $2L_2$ e $2L_3$. Objetivando investigar o efeito de temperatura, esta foi implementada a partir da compactificação do tempo em uma circunferência de comprimento $L_0 = \beta$.

8.1 O modelo teórico e notação

A densidade de lagrangiana correspondente a eletrodinâmica CPT-par manifesta-se como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}, \quad (8.1)$$

como discutimos no capítulo 5, o termo $(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ é composto por 19 coeficientes independentes, dos quais 9 são coeficientes não-birrefringentes e 10 coeficientes birrefringentes. As nove componentes não birrefringentes do setor CPT-par podem ser incorporados em um tensor simétrico e traço nulo $\kappa_{\mu\rho}$, definido como uma contração

$$\kappa_{\mu\rho} = (K_F)_{\mu\alpha\rho}^{\alpha}. \quad (8.2)$$

As componentes não birrefringentes do tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ são parametrizadas como

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda}\kappa_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\kappa_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}\kappa_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\kappa_{\mu\lambda}). \quad (8.3)$$

Com esta parametrização, detém-se

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} = 2\kappa_{\nu\rho} F_{\lambda}^{\nu} F^{\lambda\rho}, \quad (8.4)$$

e assim, a densidade de lagrangiana externando somente as componentes não-birrefringentes do setor de violação resulta em

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa_{\nu\rho} F_{\lambda}^{\nu} F^{\lambda\rho}. \quad (8.5)$$

8.2 Tensor Energia-Momento

Agora, seguiremos com o cálculo do valor esperado do tensor energia-momento no vácuo associado a eletrodinâmica CPT-par das componentes não-birrefringentes é dado por

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}(x) = & -F^{\alpha\gamma}(x) F^{\beta}_{\gamma}(x) + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \\ & -k^{\gamma}_{\rho} F^{\alpha\rho}(x) F^{\beta}_{\gamma}(x) + k^{\alpha}_{\rho} F^{\gamma\rho}(x) F^{\beta}_{\gamma}(x) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \kappa_{\nu\rho} F_{\lambda}^{\nu}(x) F^{\lambda\rho}(x) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Assim como no caso do campo eletromagnético livre, no qual o mecanismo para obtermos as quantidades físicas se fez através do cálculo do valor esperado do tensor $T^{\alpha\beta}(x)$. Porém, o produto de dois operadores em um mesmo ponto do espaço-tempo não é bem definido, impelindo em divergências no valor esperado do vácuo. Para contornar tal divergência, realizamos um processo de regularização denominado de split. Diante disso, o tensor energia-momento suplantado pelos termos não-birrefringentes fica escrito como

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta}(x) &= \lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{T} \left[-F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta}_{\nu}(x') + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x') \right. \\
 &\quad \left. - k^{\nu}_{\mu} F^{\alpha\mu}(x) F^{\beta}_{\nu}(x') + k^{\alpha}_{\mu} F^{\nu\mu}(x) F^{\beta}_{\nu}(x') + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} F_{\lambda}{}^{\nu}(x) F^{\lambda\mu}(x') \right] \\
 &= \lim_{x' \rightarrow x} \left[-\mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta}_{\nu}(x, x') + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(x, x') \right. \\
 &\quad \left. - k^{\nu}_{\mu} \mathcal{F}^{\alpha\mu, \beta}_{\nu}(x, x') + k^{\alpha}_{\mu} \mathcal{F}^{\nu\mu, \beta}_{\nu}(x, x') + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} \mathcal{F}_{\lambda}{}^{\nu, \lambda\mu}(x, x') \right], \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

em que \mathcal{T} corresponde ao operador ordenamento temporal,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta\mu}(x, x') &= \mathcal{T} [F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta\mu}(x')] \\
 &= F^{\alpha\nu}(x) F^{\beta\mu}(x') \theta(x_0 - x'_0) + F^{\beta\mu}(x') F^{\alpha\nu}(x) \theta(x'_0 - x_0). \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

Fazendo uso das relações de comutação para os campos, a eq. (8.8) resulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{\alpha\nu, \beta\mu}(x, x') &= \Gamma^{\alpha\nu, \beta\mu, \lambda\rho}(x, x') \mathcal{T} [A_{\lambda}(x) A_{\rho}(x')] \\
 &\quad - n_0^{\alpha} [A^{\nu}(x), F^{\beta\mu}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 &\quad + n_0^{\nu} [A^{\alpha}(x) F^{\beta\mu}(x')] \delta(x_0 - x'_0), \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

em que utilizamos

$$\Gamma^{\alpha\nu, \beta\mu, \lambda\rho}(x, x') = (g^{\nu\lambda} \partial^{\alpha} - g^{\alpha\lambda} \partial^{\nu}) (g^{\mu\rho} \partial^{\beta} - g^{\beta\rho} \partial^{\mu}).$$

A partir deste resultado, podemos utilizá-lo a fim de calcular o tensor energia-momento em termos do produto "T". Desse modo, a eq. (8.9), conduz para

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ -\mathcal{T} [F^{\alpha\nu}(x), F^{\beta\lambda}(x')] g_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} \mathcal{T} [F^{\rho\eta}(x), F^{\mu\nu}(x')] \right. \\
 &\quad \left. - k^{\nu}_{\mu} \mathcal{T} [F^{\alpha\mu}(x), F^{\beta\lambda}(x')] g_{\lambda\nu} + k^{\alpha}_{\mu} \mathcal{T} [F^{\nu\mu}(x), F^{\beta\lambda}(x')] g_{\lambda\nu} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda} \kappa_{\nu\mu} \mathcal{T} [F^{\rho\nu}(x), F^{\lambda\mu}(x')] \right\},
 \end{aligned}$$

ou ainda escrito como

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta}(x) = & \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \left\{ -\Gamma^{\alpha\nu, \beta\lambda, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] g_{\lambda\nu} \right. \\
 & + n_0^\alpha g_{\lambda\nu} [A^\nu(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - n_0^\nu g_{\lambda\nu} [A^\alpha(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} \Gamma^{\rho\eta, \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] \\
 & + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} n_0^\eta [A^\rho(x), F^{\mu\nu}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} n_0^\rho [A^\eta(x), F^{\mu\nu}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - k^\nu_\mu \Gamma^{\alpha\mu, \beta\lambda, \bar{\alpha}\bar{\beta}} \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] g_{\lambda\nu} + k^\nu_\mu n_0^\alpha g_{\lambda\nu} [A^\mu(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & - k^\nu_\mu n_0^\mu g_{\lambda\nu} [A^\alpha(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & + k^\alpha_\mu \Gamma^{\nu\mu, \beta\lambda, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] g_{\lambda\nu} \\
 & + k^\alpha_\mu n_0^\mu g_{\lambda\nu} [A^\nu(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) - k^\alpha_\mu n_0^\nu g_{\lambda\nu} [A^\mu(x), F^{\beta\lambda}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda} \kappa_{\nu\mu} \Gamma^{\rho\nu, \lambda\mu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] \\
 & - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda} n_0^\rho \kappa_{\nu\mu} [A^\nu(x), F^{\lambda\mu}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \\
 & \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\rho\lambda} n_0^\nu \kappa_{\nu\mu} [A^\rho(x), F^{\lambda\mu}(x')] \delta(x_0 - x'_0) \right\}. \tag{8.10}
 \end{aligned}$$

Não obstante, lançando mão da relação

$$\begin{aligned}
 [A^\alpha(x), F^{\beta\lambda}(x')] &= [A^\alpha(x), \partial'^\beta A^\lambda(x')] - [A^\alpha(x), \partial'^\lambda A^\beta(x')] \\
 &= in_0^\lambda (g^{\alpha\beta} + \nabla^{-2} \partial^\alpha \partial^\beta) \delta(x - x') \\
 &\quad - in_0^\beta (g^{\alpha\lambda} - \nabla^{-2} \partial^\alpha \partial^\lambda) \delta(x - x')
 \end{aligned}$$

e ao substituí-la no operador, encontramos

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta}(x) = & -\lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left(\Gamma^{\alpha\nu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu, \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \Gamma^{\nu\mu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} k^{\alpha}_{\mu} \right. \right. \\
 & + \Gamma^{\alpha\mu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} k^{\nu}_{\mu} - \left. \frac{1}{2} \Gamma^{\rho\nu, \mu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} \kappa_{\nu\mu} g^{\alpha\beta} \right) \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] \\
 & + 2i \left(n_0^{\alpha} n_0^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \\
 & + \left[in_0^{\alpha} n_0^{\beta} k^{\mu}_{\mu} + in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\alpha\beta} - in_0^{\alpha} n_0^{\lambda} k_{\lambda}^{\beta} - 2in_0^{\mu} n_0^{\beta} k^{\alpha}_{\mu} \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\mu} \kappa_{\mu}^{\lambda} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\mu}_{\mu} g^{\alpha\beta} \right] \delta(x - x') \left. \right\}. \tag{8.11}
 \end{aligned}$$

O valor esperado do tensor energia-momento no vácuo $T^{\alpha\beta}(x)$ é encontrado a partir da eq. (8.11), logo

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T^{\alpha\beta}(x) | 0 \rangle = & -\lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left(\Gamma^{\alpha\nu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu, \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}}(x, x') - \Gamma^{\nu\mu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} k^{\alpha}_{\mu} \right. \right. \\
 & + \Gamma^{\alpha\mu, \beta}_{\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} k^{\nu}_{\mu} - \left. \frac{1}{2} \Gamma^{\rho\nu, \mu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} \kappa_{\nu\mu} g^{\alpha\beta} \right) G_0(x - x') \\
 & + 2i \left(n_0^{\alpha} n_0^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \\
 & \left[-2in_0^{\mu} n_0^{\beta} k^{\alpha}_{\mu} - in_0^{\alpha} n_0^{\lambda} k_{\lambda}^{\beta} + in_0^{\alpha} n_0^{\beta} k^{\mu}_{\mu} + in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\alpha\beta} \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\mu} \kappa_{\mu}^{\lambda} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\mu}_{\mu} g^{\alpha\beta} \right] \delta(x - x') \left. \right\} \tag{8.12}
 \end{aligned}$$

e o propagador para o vetor campo A^{μ} é dado por

$$iD_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T} [A_{\bar{\alpha}}(x) A_{\bar{\beta}}(x')] | 0 \rangle = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} G_0(x - x').$$

Aqui, também, empregamos o calibre de Feynmann, de tal maneira que o propagador toma a forma

$$iG_0(x - x') = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{(x - x')^2 - i\varepsilon}.$$

Dispondo das regras de conjugação til e, utilizando a notação de dubleto já introduzida anteriormente, o tensor energia-momento fica expresso como

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta(ab)}(x) = & -F^{\alpha\nu(ab)}(x) F_{\nu}^{\beta(ab)}(x) + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{(ab)}(x) F^{\mu\nu(ab)}(x) \\
 & -k^{\nu}_{\mu} F^{\alpha\mu(ab)}(x) F_{\nu}^{\beta(ab)}(x) + k^{\alpha}_{\mu} F^{\nu\mu(ab)}(x) F_{\nu}^{\beta(ab)}(x) \\
 & + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \kappa_{\nu\mu} F_{\lambda}^{\nu(ab)}(x) F^{\lambda\mu(ab)}(x),
 \end{aligned}$$

de maneira que os índices $a, b = 1, 2$ são definidos de acordo com a notação de dubleto e $F^{\alpha\nu(ab)} = \partial^{\alpha} A^{\nu(a)} - \partial^{\nu} A^{\alpha(b)}$. Com tais características, o propagador térmico reluz como

$$iD_{\alpha\beta}^{(ab)}(x-x') = \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T} [A_{\alpha}^a(x) A_{\beta}^b(x')] | 0, \tilde{0} \rangle = g_{\alpha\beta} G_0^{(ab)}(x-x'),$$

e que

$$G_0^{(ab)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} G_0^{(ab)}(k)$$

com $G_0^{(ab)}(k)$ dado por

$$G_0^{(ab)}(k) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{k^2+i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2-i\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Então, o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo térmico surge como

$$\begin{aligned}
 \langle 0, \tilde{0} | T^{\alpha\beta(ab)}(x) | 0, \tilde{0} \rangle = & -i \left\{ \lim_{x \rightarrow x'} \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') G_0^{(ab)}(x-x') \right. \\
 & + 2i \left(n_0^{\alpha} n_0^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x-x') \delta_{ab} \\
 & + \left[in_0^{\alpha} n_0^{\beta} k^{\mu}_{\mu} + in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\alpha\beta} - in_0^{\alpha} n_0^{\lambda} k_{\lambda}^{\beta} - 2in_0^{\mu} n_0^{\beta} k^{\alpha}_{\mu} \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\mu} k_{\mu}^{\lambda} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} in_{\lambda 0} n_0^{\lambda} k^{\mu}_{\mu} g^{\alpha\beta} \right] \delta(x-x') \delta_{ab} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

com o termo $\Gamma^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha\nu, \beta}_{\nu} \cdot \bar{\alpha}\bar{\beta}(x, x') - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu} \cdot \mu\nu, \bar{\alpha}\bar{\beta}(x, x') - \Gamma^{\nu\mu, \beta}_{\nu} \cdot \bar{\alpha}\bar{\beta} k^{\alpha}_{\mu} + \Gamma^{\alpha\mu, \beta}_{\nu} \cdot \bar{\alpha}\bar{\beta} k^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \Gamma^{\rho\nu, \mu, \bar{\alpha}\bar{\beta}} \kappa_{\nu\mu} g^{\alpha\beta}$.

Para estudarmos os efeitos induzidos através da topologia do tensor energia-momento, inserimos η -campos dependentes, de modo que o tensor energia-momento preserve sua forma, muito embora caracterizado pelos parâmetros η , que como vimos está relacionado com as compactificações do espaço-tempo. Nesta perspectiva, temos

$$\begin{aligned} \langle 0, \tilde{0} | T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) | 0, \tilde{0} \rangle &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') G_0^{(ab)}(x - x'; \eta) \right. \\ &\quad + 2i \left(n_0^\alpha n_0^\beta - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \right) \delta(x - x') \delta_{ab} \\ &\quad + \left[in_0^\alpha n_0^\beta k_\mu^\mu + in_{\lambda 0} n_0^\lambda k^{\alpha\beta} - in_0^\alpha n_0^\lambda k_\lambda^\beta - 2in_0^\mu n_0^\beta k_\mu^\alpha \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} in_{\lambda 0} n_0^\mu k_\mu^\lambda g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} in_{\lambda 0} n_0^\lambda k_\mu^\mu g^{\alpha\beta} \right] \delta(x - x') \delta_{ab} \right\} \end{aligned}$$

Mediante um procedimento de regularização, temos a inserção de um tensor finito concedido através da diferença entre o valor esperado do tensor energia-momento "η" dependente e o valor esperado do tensor energia-momento sem efeitos de compactificação

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) = \langle T^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) \rangle - \langle T^{\alpha\beta(ab)}(x) \rangle,$$

que por sua vez, leva-nos ao tensor energia-momento renormalizado

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta(ab)}(x; \eta) = -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \overline{G}^{(ab)}(x - x'; \eta) \right\},$$

onde

$$\overline{G}^{(ab)}(x - x'; \eta) = G^{(ab)}(x - x'; \eta) - G_0^{(ab)}(x - x'),$$

e na representação de Fourier, o propagador fica

$$G^{(ab)}(x - x'; \eta) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x-x')} G^{(ab)}(k; \eta),$$

de forma que

$$G^{(ab)}(k; \eta) = B^{-1(ac)}(k; \eta) G_0^{(cd)}(k) B^{(db)}(k; \eta),$$

em que $B(k; \eta)$ é uma matriz escrita como

$$B(k; \eta) = \begin{pmatrix} u(k; \eta) & -v(k; \eta) \\ -v(k; \eta) & u(k; \eta) \end{pmatrix},$$

descrevendo, assim, a transformação de Bogoliubov cujas componentes são expressas como

$$\begin{aligned}\overline{G}^{(11)}(k; \eta) &= \overline{G}^{(22)}(k; \eta) = v^2(k; \eta) [G_0(k) - G_0^*(k)] \\ \overline{G}^{(12)}(k; \eta) &= \overline{G}^{(21)}(k; \eta) = v^2(k; \eta) u^2(k; \eta) [G_0^*(k) - G_0(k)].\end{aligned}$$

Para o caso generalizado, isto é, para N compactificações, em que $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N)$, a transformação de Bogoliubov generalizada fica escrita

$$\begin{aligned}v^2(k; \eta) &= \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \\ &\times \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^s \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j} \right\}.\end{aligned}$$

Neste contexto, a componente $\overline{G}_0^{(11)}$ fica

$$\begin{aligned}\overline{G}_0^{(11)} &= \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{s=1}^{N+1} 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \\ &\times \left[G_0^* \left(x - x' - i \sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j} \right) - G_0 \left(x - x' - i \sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} \eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j} n_{\sigma_j} \right) \right],\end{aligned}$$

em que $\chi_{\sigma_j} = 1$, se $\sigma_j = 0$ e $\chi_{\sigma_j} = -1$, se $\sigma_j = 1, 2, \dots, N$. Por conseguinte, o tensor energia momento renormalizado toma a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \eta) \right\} \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \sum_{s=1}^4 2^{s-1} \sum_{\{\sigma_s\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\eta_{\sigma_n}) \right) \sum_{l_{\sigma_1}, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} \\ &\times \left[\frac{g^{\alpha\beta}}{\left[\sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2 \right]^2} \right. \\ &\left. - \frac{2 \sum_{j,r=1}^s (1 + \chi_{\sigma_j} \chi_{\sigma_r}) (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j}) (\eta_{\sigma_r} l_{\sigma_r}) n_{\sigma_j}^\alpha n_{\sigma_r}^\beta}{\left[\sum_{j=1}^s \chi_{\sigma_j} (\eta_{\sigma_j} l_{\sigma_j})^2 \right]^3} \right].\end{aligned}\quad (8.13)$$

Com tais resultados, podemos calcular o efeito Casimir da eletrodinâmica CPT-par

para algumas topologias arbitrárias.

8.3 Efeito Casimir

Nesta seção, estudaremos o efeito Casimir seguido do efeito de quebra da simetria de Lorentz. Porém, tal estudo terá como foco somente a componente isotrópica do termo responsável pela estrutura CPT-par. Isto posto, esta componente isotrópica é obtida ao impormos $\kappa_{\nu\mu} = \kappa_{\mu\nu}$ e $\mu = \nu = 0$ na eq. (8.13).

8.3.1 Efeito Casimir à temperatura zero

Para examinarmos o efeito Casimir, à temperatura zero, seguido do efeito da quebra da simetria de Lorentz, devemos considerar $\eta = (0, 0, 0, 2iL_3)$ e o tensor energia–momento na eq. (8.13), fica

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \eta) \right\} \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \left(1 - k^{\alpha}_0 + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left[\sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^{\alpha} n_3^{\beta}}{(2L_3 l_3)^4} \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Diante disso, ao realizarmos as devidas considerações na eq. (8.14), podemos obter a energia ou a pressão à temperatura zero.

Energia de Casimir à temperatura zero

Tomando os índices $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ na eq. (8.14), isto nos leva a seguinte expressão para a energia de Casimir,

$$\mathcal{T}^{00(11)} = \left(1 + \frac{3}{2} \kappa_{00} \right) \left[\frac{-\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_3^4} \right) \right]. \quad (8.15)$$

Pressão de Casimir à temperatura zero

Por outro lado, ao tomarmos os índices $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ a eq. (8.14), nos renderá uma pressão,

$$\mathcal{T}^{33(11)} = \left(1 - \kappa^3_0 + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left[\frac{-\pi^2}{240} \left(\frac{1}{L_3^4} \right) \right]. \quad (8.16)$$

Ainda nesse roteiro, agora, consideramos $\eta = (0, 2iL_1, 2iL_2, 2iL_3)$, e o tensor energia–

momento na eq. (8.13), toma a forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \Gamma^{\alpha\beta}(x, x') \overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \eta) \right\} \\
 &= \frac{-2}{\pi^2} \left(1 - k_0^\alpha + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left\{ \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_1^\alpha n_1^\beta}{(2L_1 l_1)^4} + \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_2^\alpha n_2^\beta}{(2L_2 l_2)^4} \right. \\
 &\quad + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^\alpha n_3^\beta}{(2L_3 l_3)^4} \\
 &\quad + 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta}{[(2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 &\quad + 4 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \left. \right\}. \tag{8.17}
 \end{aligned}$$

Para essa condição, a energia e pressão de Casimir tomam uma nova roupagem.

Energia de Casimir à temperatura zero

Ao adotarmos nos índices $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a eq. (8.17), seguirá como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00(11)} = & \left(1 + \frac{3}{2}\kappa_{00} \right) \left\{ \frac{-\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_1^4} + \frac{1}{L_2^4} + \frac{1}{L_3^4} \right) \right. \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2]^2} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_3 l_3)^2]^2} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^2} \right) \\ & \left. - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Pressão de Casimir à temperatura zero

Quando empregamos nos índices $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ na eq. (8.17), esta conduz para

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33(11)} = & \left(1 - \kappa^3_0 + \frac{1}{2}\kappa_{00} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_1^4} + \frac{1}{L_2^4} - \frac{3}{L_3^4} \right) \right. \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2]^2} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_1 l_1)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_1 l_1)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_2 l_2)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Discutida a forma da energia e pressão de Casimir à temperatura zero, a partir deste ponto direcionamos nossa atenção ao efeito de temperatura.

8.3.2 Efeito Casimir à temperatura finita

Agora, o efeito Casimir é calculado à temperatura finita vinculado ao efeito de quebra da simetria de Lorentz. Desta feita, o parâmetro fica dado por $\eta = (L_0, 0, 0, 2iL_3)$ e o tensor energia–momento da eq. (8.13), assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\alpha\beta(11)}(\eta) = & \frac{-2}{\pi^2} \left(1 - k^\alpha_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} - 4n_0^\alpha n_0^\beta}{(L_0 l_0)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^\alpha n_3^\beta}{(2L_3 l_3)^4} \right. \\ & + 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Ao tomarmos as escolhas apropriadas, teremos como respostas a energia e pressão de Casimir à temperatura finita.

Energia de Casimir à temperatura finita

Quando adotamos os índices $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ na eq. (8.20), esta revela-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00(11)} = & \left(1 + \frac{3}{2} \kappa_{00} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{15L_0^4} - \frac{\pi^2}{720L_3^4} \right. \\ & \left. - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{-3(L_0 l_0)^2 + 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Pressão de Casimir à temperatura finita

Por outra perspectiva, ao considerarmos $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ na eq. (8.20), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{33(11)} = & \left(1 - \kappa^3_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{45L_0^4} - \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{L_3^4} \right. \\ & \left. + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Seguindo o script, quando aplicamos $\eta = (L_0, 2iL_1, 2iL_2, 2iL_3)$ no tensor energia–momento (8.13), este é tido como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{\alpha\beta(11)}(\eta) &= \frac{-2}{\pi^2} \left(1 - k^\alpha_0 + \frac{1}{2} \kappa_{00} \right) \left\{ \sum_{l_0=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} - 4n_0^\alpha n_0^\beta}{(L_0 l_0)^4} + \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_1^\alpha n_1^\beta}{(2L_1 l_1)^4} \right. \\
 &+ \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_2^\alpha n_2^\beta}{(2L_2 l_2)^4} + \sum_{l_3=1}^{\infty} \frac{g^{\alpha\beta} + 4n_3^\alpha n_3^\beta}{(2L_3 l_3)^4} \\
 &+ 2 \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2]^2} + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2]^3} \right) \\
 &+ 2 \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 &+ 2 \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 &+ 2 \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^2} + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 &+ 2 \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta}{[(2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 &+ 2 \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} + \frac{4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta}{[(2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4 \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & +4 \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & +4 \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \\
 & \left. + \frac{4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & \left. +8 \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4(2L_1 l_1)^2 n_1^\alpha n_1^\beta + 4(2L_2 l_2)^2 n_2^\alpha n_2^\beta + 4(2L_3 l_3)^2 n_3^\alpha n_3^\beta - 4(L_0 l_0)^2 n_0^\alpha n_0^\beta}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2 + (2L_2 l_2)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \quad (8.23)
 \end{aligned}$$

Novamente, com as escolhas apropriadas, encontramos as respectivas expressões para a energia e pressão de Casimir à temperatura finita.

Energia de Casimir à temperatura finita

Considerando os índices $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ na eq. (8.23), esta é lida como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{00(11)} = & \left(1 + \frac{3}{2}\kappa_{00} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{15L_0^4} - \frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_1^4} + \frac{1}{L_2^4} + \frac{1}{L_3^4} \right) \right. \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_1 l_1)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_2 l_2)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2]^2} \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_3 l_3)^2]^2} \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^2} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_1 l_1)^2 - 4(L_2 l_2)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_1 l_1)^2 - 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_2 l_2)^2 - 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_2 l_2)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & \left. + \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{3(L_0 l_0)^2 - 4(L_1 l_1)^2 - 4(L_2 l_2)^2 - 4(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_2 l_2)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Pressão de Casimir à temperatura finita

Sob outro enfoque, ao empregarmos $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ na eq. (8.23), resulta em

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{33(11)} = & \left(1 - \kappa^3_0 + \frac{1}{2}\kappa_{00} \right) \left\{ \frac{\pi^2}{45L_0^4} + \frac{\pi^2}{720} \left(\frac{1}{L_1^4} + \frac{1}{L_2^4} \right) - \frac{\pi^2}{240} \frac{1}{L_3^4} \right. \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_1 l_1)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{l_0, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + (2L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_1 l_1)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_1 l_1)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_2 l_2)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_2 l_2)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & + \frac{8}{\pi^2} \sum_{l_0, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 + 4(L_2 l_2)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_2 l_2)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 - 3(L_3 l_3)^2}{[(L_1 l_1)^2 + (L_2 l_2)^2 + (L_3 l_3)^2]^3} \right) \\
 & \left. + \frac{16}{\pi^2} \sum_{l_0, l_1, l_2, l_3=1}^{\infty} \left(\frac{(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_2 l_2)^2 - 12(L_3 l_3)^2}{[(L_0 l_0)^2 + 4(L_1 l_1)^2 + 4(L_2 l_2)^2 + 4(L_3 l_3)^2]^3} \right) \right\}. \quad (8.25)
 \end{aligned}$$

Capítulo 9

Conclusões

Neste trabalho calculamos as flutuações de vácuo (efeito Casimir) da eletrodinâmica CPT-par em uma variedade toroidal. Conduzimos uma introdução sobre os efeitos de uma compactificação no espaço-tempo. Apresentamos um estudo detalhado a respeito de um campo compactificado na dimensão temporal, em uma dimensão espacial, de forma concomitante com o tempo e uma dimensão espacial bem como o comportamento para d dimensões.

Em sequência, procedemos com um estudo do campo eletromagnético de Maxwell livre tendo como propósito demonstrar o formalismo assim como coletar informações das propriedades termodinâmicas. O ponto de partida foi estabelecer a estrutura da hamiltoniana através da prescrição de Dirac para sistemas vinculados, evidenciando os vínculos de primeira classe e suas respectivas condições de calibre. E dessa maneira, pudemos conceber uma função de partição via formalismo de integração funcional do sistema físico.

Procedemos com a generalização do método da função de partição para uma estrutura toroidal, no qual buscamos investigar a influência da violação da simetria de Lorentz por campos de fundo na flutuação do vácuo no Modelo Padrão Estendido do campo eletromagnético em $D + 1$ dimensões com r dimensões compactificadas em um toro. Isto posto, aplicamos este procedimento na eletrodinâmica CPT-par, de forma que calculamos a Lei de Stefan-Boltzmann, que corresponde a realizar uma compactificação temporal. Também, fizemos uma compactificação em uma dimensão espacial, que corresponde ao efeito Casimir à temperatura zero. Ainda neste contexto, realizamos a compactificação em duas dimensões toroidais (temporal e espacial), que corresponde ao efeito Casimir à temperatura finita e estendemos o método para $D + 1$ dimensões.

A condição de periodicidade em x_0 levou à lei de Stefan-Boltzmann com a contribuição do termo de violação de Lorentz. Já, realizando a compactificação na direção de x_1 , calcula-

mos a densidade de energia (a pressão) do sistema sob a influência do termo de violação de Lorentz. Isso levou a uma correção do resultado padrão do efeito Casimir, devido ao campo de fundo. Não obstante, a condição de periodicidade na direção de x_0 e na direção de x_1 , forneceram a modificação do efeito Casimir à temperatura finita com base na contribuição da violação de simetria de Lorentz.

Usamos o método da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) generalizada, que é uma teoria de campo formulada em variedades toroidais para calcular as flutuações de vácuo (efeito Casimir) da eletrodinâmica estendida CPT-par. Através de tal metodologia, obtemos expressões analíticas para o efeito Casimir em temperatura finita em dimensões toroidais espaciais arbitrárias. Para os dois métodos, investigamos a influência da violação da simetria de Lorentz por campos de fundo na flutuação do vácuo no Modelo Padrão Estendido do campo eletromagnético em $D + 1$ dimensões com r dimensões compactificadas em um toro.

Os resultados encontrados pela teoria DCT generalizada foram comparados com o método da função de partição generalizada, evidenciando a consistência dos dois métodos. O método da função de partição generalizada possui a vantagem de prescindir da necessidade de duplicação dos graus de liberdade do formalismo de DCT generalizado. Por sua vez, a DCT apresenta a vantagem de separar o propagador: parte livre das compactificadas, permitindo um procedimento de renormalização simples e factível. No caso do efeito Casimir, isto conduziu expressões analíticas da compactificação em toros r -dimensionais.

Referências Bibliográficas

- 1 W. Bernreuther and M. Suzuki, Rev. Mod. Phys. **63**, 313 (1991). [1](#)
- 2 J. Baron et al., Science **343**, 269 (2014). [1](#)
- 3 V. A. Kostelecky, S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989). [1](#), [57](#)
- 4 H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M. T. D. Orlando, Rev. Bras. Ens. Fís. **29**, 1 (2007). [1](#)
- 5 D. Colladay, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997). [1](#), [3](#), [60](#)
- 6 D. Colladay, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998). [1](#), [3](#), [60](#)
- 7 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, F. E. P. Santos, Phys. Rev. D **82**, 125006 (2010). [1](#), [5](#), [63](#)
- 8 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., R. P. M. Moreira, Phys. Rev. D **84**, 125014 (2011). [1](#), [57](#)
- 9 K. Bakke and C. Furtado, Phys. Rev. D **80**, 024033 (2009). [1](#)
- 10 K. Bakke and C. Furtado, Phys. Lett. A **375**, 3956 (2011). [1](#)
- 11 K. Bakke and C. Furtado, Quantum Inf. Comput. **11**, 444 (2011). [1](#)
- 12 K. Bakke, A. Yu. Petrov, C. Furtado, Annals Phys. **327**, 2946-2954 (2012). [1](#)
- 13 K. Bakke and C. Furtado, Ann. Phys. (NY) **327**, 376 (2012). [1](#)
- 14 K. Bakke and C. Furtado, Quantum Inf. Process. **12**, 119 (2013). [1](#)
- 15 H. F. Mota, K. Bakke, Phys. Rev. D **89**, 027702 (2014). [1](#)
- 16 K. Bakke and H. Belich, Annalen der Physik (Leipzig) **526**, 187-194, (2014). [1](#)

- 17 A. G. Lima, H. Belich, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus, **128**, 154-162 (2013). [1](#)
- 18 K. Bakke, H. Belich, J. Phys. G, **40**, 065002 (2013). [1](#)
- 19 K. Bakke, H. Belich, Ann. Phys. (NY), **333**, 272-281 (2013). [1](#)
- 20 A. G. de Lima¹, H. Belich and K. Bakke Annalen der Physik (Leipzig), **526**, 514–519 (2014). [1](#)
- 21 H. Belich, K. Bakke, Phys. Rev. D, **90**, 112 (2014). [1](#)
- 22 K. Bakke, H. Belich, Eur. Phys. J. Plus, **129**, 147 (2014). [1](#)
- 23 H. Belich, K. Bakke, Int. J. Mod. Phys. A , **30**, 1550136 (2015). [1](#)
- 24 K. Bakke, H. Belich, J. Phys. G, **42**, 095001 (2015). [1](#)
- 25 K. Bakke, H. Belich, Ann. Phys. (NY), **360**, 596-604 (2015). [1](#)
- 26 K. Bakke, H. Belich, Ann. Phys. (NY), **354**, 1-9, (2015). [1](#)
- 27 R.L.L. Vitoria, H. Belich, K. Bakke, Adv. High Energy Phys. 6893084 (2017). [1](#)
- 28 R.L.L. Vitória, H. Belich, Adv. High Energy Phys. 1248393 (2019). [1](#)
- 29 S.M. Carroll, G.B. Field, R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990). [2](#), [56](#), [57](#)
- 30 S. R. Coleman, S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999). [3](#)
- 31 T. Matsubara, Prog. T. Phys. **14**, 351 (1955). [3](#), [41](#)
- 32 J. Schwinger, Proc. Nat. Ac. Scin. **37**, 452 (1951). [3](#)
- 33 L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **47**, 1515 (1965).
- 34 Y. Takahashi, H. Umezawa, J. Mod. Phys. B **10**, 1755, (1996). [3](#)
- 35 H. Umezawa, Y. Yamanaka, Adv. Phys. **37**, 531 (1989). [3](#)
- 36 H. Umezawa, Phys. Essay **2** (1989). [3](#)
- 37 K. L. Kowalski, N. P. Landsman, C. G . V. Weert, Phys. A, **158** (1989). [3](#)

- 38 H. Umezawa, H. Matsunomoto, M. Tachick, *Thermofield Dynamics and Condensed States* (North-Holland, New York, 1982). [3](#)
- 39 H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics* (A. I. P. New York, 1992). [3](#)
- 40 F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (W. Scientific, Singapore, 2009). [3](#)
- [4](#), [5](#), [7](#), [24](#), [55](#), [76](#), [83](#)
- 41 M. Ladrem, M. Chekerker, F. C. Khanna, A. E. Santana, *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350032 (2013). [4](#)
- 42 M. Leineker, A. R. Queiroz, A. E. Santana, S. C. De Assis, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 2569 (2011). [4](#)
- 43 M. Chekerker, M. Ladrem, F. C. Khanna, A. E. Santana, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 2881 (2011). [4](#)
- 44 M. L. Costa, A. R. Queiroz, A. E. Santana, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 3209 (2010). [4](#)
- 45 A.J. Vargas, *Phil. Trans. R. Soc. A* **376**, 20170276 (2018). [4](#)
- 46 J.P. Noordmans, J. de Vries, R.G.E. Timmermans, *Phys. Rev. C* **94**, 025502 (2016). [4](#)
- 47 Y. Huang and B.Q. Ma, *Communications Physics* **1**, 62 (2018), arXiv:1810.01652 [hep-ph]. [4](#)
- 48 Y. Huang, H. Li, and B.Q. Ma, *Phys. Rev. D* **99**, 123018 (2019), arXiv:1906.07329 [hep-ph]. [4](#)
- 49 A. Crivellin, F. Kirk, and M. Schreck, *JHEP* **04**, 082 (2021), arXiv:2009.01247 [hep-ph]. [4](#)
- 50 X. Zhang, B.-Q. Ma *Phys. Rev. D* **99**, 043013 (2019). [4](#)
- 51 A. Roberts *Phys. Rev. D* **96**, 116015 (2017). [4](#)
- 52 K. Simonov, A. Capolupo, S. M. Giampaolo, *Eur. Phys. J. C* **79**, 902 (2019). [4](#)

- 53 E. De Lucia, J. Phys.: Conf. Series **1526**, (2020). [4](#)
- 54 R. Lehnert, Symm. **114**, (2016). [4](#)
- 55 V. A. Kostelecky, N. Russell, arXiv: 0801.0287v15. [4](#)
- 56 L.M. Silva, H. Belich, J.A. Helayël-Neto; Casimir effect at finite temperature for the CPT-even extension of QED. <https://arxiv.org/abs/1605.02388>. [4](#)
- 57 H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- 58 K.A. Milton, *The Casimir Effect; Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (World Scientific, Singapore, 2001). [5](#)
- 59 P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1994). [5](#)
- 60 G. Plunien, B. Muller, W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 89 (1986). [5](#)
- 61 M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001). [5](#)
- 62 S.K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997). [5](#)
- 63 U. Mohideen, A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998). [5](#)
- 64 A. Kempf, in Proc. 10th Marcel Grossmann meeting, Rio de Janeiro, 20-26 July 2003, ed. by M. Novello, S. P. Bergliaffa, R. Ruffini (World Scientific, Singapore, part C, 2005), 2271(2003), arXiv:gr-qc/0403112. [5](#)
- 65 A. Kempf, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164038 (2008). [5](#)
- 66 M. Bordag, J. Phys. **A39**, 6173 (2006). [5](#)
- 67 M.T.D. Orlando et al., J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 025502 (2009). [5](#)
- 68 F. R. Klinkhamer, M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008). [5](#)
- 69 F. R. Klinkhamer, M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008). [5](#), [62](#)
- 70 F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (2008), arXiv:0806.4351 [hep-ph]. [5](#), [62](#)
- 71 R. Casana, M.M. Ferreira, C. E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008). [5](#)

-
- 72 R. Casana, M.M. Ferreira, Jr., A.R. Gomes, and P.R.D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009), arXiv:0909.0544 [hep-th]. [5](#), [58](#)
- 73 F.R. Klinkhamer and M. Schreck, Nucl. Phys. B **848**, 90 (2011), arXiv:1011.4258 [hep-th]. [5](#)
- 74 M. Schreck, Phys. Rev. D **86**, 065038 (2012), arXiv:1111.4182 [hep-th]. [5](#)
- 75 M. Schreck, Phys. Rev. D **89**, 085013 (2014), arXiv:1311.0032 [hep-th]. [5](#)
- 76 J.S. Díaz, F.R. Klinkhamer, and M. Risse, Phys. Rev. D **94**, 085025 (2016), arXiv:1607.02099 [hep-ph]. [5](#)
- 77 F.R. Klinkhamer, M. Niechciol, and M. Risse, Phys. Rev. D **96**, 116011 (2017), arXiv:1710.02507 [hep-ph]. [5](#)
- 78 F. Duenkel, M. Niechciol, and M. Risse, Phys. Rev. D **104**, 015010 (2021), arXiv:2106.01012 [hep-ph]. [5](#)
- 79 E. Kant, F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Lett. B **682**, 316 (2009). [5](#)
- 80 G. Betschart, E. Kant and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **815**, 198 (2009). [5](#)
- 81 A.F.Santos, F. C. Khanna, Phys. Rev. D **95**, 025021 (2017). [5](#)
- 82 A.F.Santos, F. C. Khanna, Ann. Phys. (N.Y.) **375**, 36-48 (2016). [5](#)
- 83 N.D. Birrell, L.H. Ford, Phys. Rev. D **22**, 330 (1980). [5](#)
- 84 L.H. Ford, N.F. Svaiter, Phys. Rev D **51**, 6981 (1995). [5](#)
- 85 A.P.C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263 (2002). [5](#)
- 86 A.P.C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, Nucl. Phys. B **631**, 83 (2002). [5](#)
- 87 J.C. da Silva, F. C. Khanna, A. Matos Neto, A. E. Santana, Phys. Rev. A **66**, 052101 (2002). [5](#)
- 88 H. Queiroz, J.C. da Silva, F.C. Khanna, J.M.C Malbouisson, M. Revzen, A.E. Santana, Ann. Phys. (N.Y.) **317**, 220 (2005). [5](#)

-
- 89 C. A. Escobara, A. Martín-Ruiz, O. J. Francab, M. A. G. Garcia, Phys. Lett. B **807**, 135567 (2020). [5](#)
- 90 A. Erdas, International Journal of Modern Physics A, **36**, 2150155 (2021). [5](#)
- 91 G. Nordström, Phys. Zeitsch. **15**, 504(1914). [39](#)
- 92 T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966 (1921). [40](#)
- 93 O. Klein, Zeitsch. Phys. A **37**, 895 (1926). [40](#)
- 94 A.J. Roy, M. Bander, Nuclear Phys. B **811**, 353 (2009). [40](#)
- 95 C.C. Ttira, C.D. Fosco, A.P.C. Malbouisson, I. Roditi, Phys. Rev. A **81**, 032116 (2010). [40](#)
- 96 J. Polchinski, Comm. Math. Phys. **104**, 37 (1986). [40](#), [41](#)
- 97 J.J. Atick, E. Witten, Nuclear Phys. B **310**, 291 (1988). [40](#), [41](#)
- 98 J. Polchinski, String Theory, vol. I and II, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. [40](#)
- 99 N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263-272 (1998). [40](#)
- 100 N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, Phys. Rev., D **59**, 086004 (1999). [40](#)
- 101 L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999). [40](#)
- 102 L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999). [40](#)
- 103 H. Ezawa, Y. Tomozawa, H. Umezawa, N. Cimento 5, 810 (1957). [41](#)
- 104 P.C. Martin, J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959). [41](#)
- 105 R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957). [41](#)
- 106 R. Haag, N.M. Hugenholtz, M. Winnink, Comm. Math. Phys. **5**, 215 (1967). [41](#)
- 107 N.D. Birrell, L.H. Ford, Phys. Rev. D **22**, 330 (1980). [41](#)
- 108 H.B.G. Casimir, Proc. Ned. Akad. Wet. B **51**, 793 (1948). [41](#)

-
- 109 V.M. Mostepanenko, N.N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Clarendon, Oxford, 1997. [41](#)
- 110 M. Bordag, *The Casimir Effect 50 Years Later*, World Scientific, Singapore, 1999. [41](#)
- 111 M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten, S. Leseduarte, *Phys. Rev. D* **56**, 4896 (1997). [41](#)
- 112 E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, S. Ogushi, *Phys. Rev. D* **67**, 063515 (2003). [41](#)
- 113 G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, S. Zerbini, *JCAP* **0502**, 010 (2005). [41](#)
- 114 F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Phys. Rep.* **539**, 135-224 (2014). [41](#), [83](#)
- 115 J. I. Kapusta, C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006). [46](#)
- 116 V. A. Kostelecky, M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001). [56](#), [57](#), [60](#), [61](#), [73](#)
- 117 V. A. Kostelecky, M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002). [56](#), [57](#), [60](#), [61](#), [73](#)
- 118 V. A. Kostelecky, M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006). [56](#), [57](#), [73](#)
- 119 R. P. M. Moreira, R. R. Luz, L. R. Silva, *e-B. Fis.* **10**, 10301 (2021). [56](#)
- 120 L.B. Auerbach et al., *Phys. Rev. D* **72**, 076004 (2005). [57](#)
- 121 Y.B. Hsiung et al., *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **86**, 312 (2000). [57](#)
- 122 P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, A. Clairon, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060801 (2006). [57](#)
- 123 F. Cane et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230801 (2004). [57](#)
- 124 D. Bear et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000). [57](#)
- 125 V.W. Hughes et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 111804 (2001). [57](#)
- 126 H. Dehmelt et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999). [57](#)
- 127 R. Lehnert, R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004). [57](#)
- 128 V. A. Kostelecky, S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989). [57](#)

-
- 129 V. A. Kostelecky, S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991). [57](#)
- 130 V. A. Kostelecky, R. Potting, Phys. Lett. B **381**, 89 (1996). [57](#)
- 131 B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004). [57](#)
- 132 G. M. Shore, Nucl. Phys. B **717**, 86 (2005). [57](#)
- 133 K. Bakke, H. Belich Jr, J. Phys. G **39**, 085001 (2012). [57](#)
- 134 R. Casana, E.S. Carvalho, M. M. Ferreira Jr., Phys. Rev. D **84**, 045008 (2011). [57](#)
- 135 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., R. P. M. Moreira, Eur. Phys. J. C **72**, 2070 (2012). [57](#)
- 136 M. N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006). [57](#)
- 137 A. S. Dutra, M. Hott, F. A. Barone, Phys. Rev. D **74**, 085030 (2006). [57](#)
- 138 E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nuc. Phys. **24**, 449 (1976). [57](#)
- 139 M. Prasad, C. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975). [57](#)
- 140 R. Jackiw, E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990). [57](#)
- 141 R. Jackiw, K. Lee, E.J. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990). [57](#)
- 142 P. K. Ghosh, Phys. Rev. D **49**, 5458 (1994). [57](#)
- 143 N. Sakai, D. Tong, J. High Energy Phys. **03**, 019 (2005). [57](#)
- 144 S. Bolognesi, S.B. Gudnason, Nucl. Phys. B **805**, 104 (2008). [57](#)
- 145 C. K. Lee, K. M. Lee, H. Min, Phys. Lett. B **252**, 79 (1990). [57](#)
- 146 D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora, R. Menezes, Phys. Rev. D **85**, 125028 (2012). [57](#)
- 147 C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, Phys. Rev. D **86**, 065011 (2012). [57](#)
- 148 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, C. Miller, Phys. Lett. B **718**, 620 (2012). [57](#)
- 149 C. Adam, F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001). [58](#)

-
- 150 C. Adam, F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003). [58](#)
- 151 R. Casana, M. M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008). [58](#)
- 152 H. Belich Jr., M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003). [58](#)
- 153 H. Belich Jr., M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003). [58](#)
- 154 H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **38**, 511 (2005). [58](#)
- 155 V. A. Kostelecky, A. G. M. Pickering, Phys. Rev. Lett. **91**, 031801 (2003). [63](#)
- 156 C. D. Carone, M. Sher, M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006). [63](#)
- 157 M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, R. L. Walsworth, Phys. Rev. D **80**, 036010 (2009). [63](#)
- 158 B. Altschul, Phys. Rev. D **79**, 016004 (2009). [63](#)
- 159 J.-P. Bocquet et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 241601 (2010). [63](#)
- 160 R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., J. S. Rodrigues, M. R. O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009). [76](#)
- 161 R. P. M. Moreira, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, R. G. G. Amorim, H. Belich, Eur. Phys. J. C **82**, 999 (2022). [80](#)
- 162 A.F.Santos, F. C. Khanna, Phys. Rev. D **95**, 025021 (2017). [93](#)
- 163 A.F.Santos, F. C. Khanna, Ann. Phys. (N.Y.) **375**, 36-48 (2016). [93](#)
- 164 R. P. M. Moreira, A. E. Santana, H. Belich - Thermal Fields Dynamics applied to CPT-even Electrodynamics in toroidal topologies - submissão para a revista Eur. Phys. J. C. [93](#)