

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

LUIGI LUCAS DE CARVALHO SILVA

**ESPECTRO DE POTÊNCIA ANGULAR DE GALÁXIAS
E LENTEAMENTO DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE
FUNDO: VALIDAÇÃO DAS BIBLIOTECAS CCL E
NUMCOSMO**

BRASÍLIA

21 DE DEZEMBRO DE 2023

Luigi Lucas de Carvalho Silva

**Espectro de potência angular de galáxias e lenteamento
da radiação cósmica de fundo: validação das bibliotecas
CCL e NumCosmo**

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Dra. Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília

Instituto de Física

Brasília

21 de dezembro de 2023

Silva, Luigi Lucas de Carvalho

Espectro de potência angular de galáxias e lenteamento da radiação cósmica de fundo: validação das bibliotecas CCL e NumCosmo/ Luigi Lucas de Carvalho Silva; orientadora Mariana Penna Lima Vitenti. – Brasília, 2023.

160 p.

S586e

Dissertação(Mestrado em Física) – Universidade de Brasília, 2023.

1. modelo cosmológico padrão. 2. correlação cruzada. 3. galáxias. 4. radiação cósmica de fundo. 5. lenteamento gravitacional. I. Penna-Lima, Mariana, orient. II. Título.

Luigi Lucas de Carvalho Silva

Espectro de potência angular de galáxias e lenteamento da radiação cósmica de fundo: validação das bibliotecas CCL e NumCosmo

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 21 de dezembro de 2023:

Dra. Mariana Penna Lima Vitenti
Orientadora

Dra. Camila Paiva Novaes
Convidado 1

Dr. Bruno Azevedo Lemos Moraes
Convidado 2

Brasília
21 de dezembro de 2023

*Este trabalho é dedicado à minha família, minha fonte de suporte físico e emocional,
sem a qual eu não teria chegado até aqui.*

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Jade Dias Alves, por toda a compreensão e apoio ao longo de todo esse período, principalmente nos momentos finais, nos quais minha atenção estava voltada quase 100% ao mestrado - sem o seu apoio isto não seria possível.

Agradeço aos meus pais, Manoel Luís de Carvalho Silva e Juraci Dantas de Carvalho, por todo o apoio físico e psicológico ao longo desses anos, essencial em todas as etapas da minha vida.

Agradeço aos meus sogros, Júnio Batista Alves e Jackeline Tatiane Sousa Dias, e ao meu cunhado, Jonathan Dias Alves, pelo cuidado, preocupação e conselhos ao longo deste percurso.

Agradeço ao meu irmão de consideração, Douglas Batista Dantas, pelo companheirismo nas corridas, nos momentos de diversão e nos momentos de estudo.

Agradeço também à minha orientadora, Mariana Penna Lima Vitenti, não só pelo imenso apoio em todas as etapas do trabalho em si, mas também pelo carinho e compreensão nos momentos mais difíceis.

Agradeço também a todos os demais familiares e amigos presentes em minha vida ao longo desses últimos anos. Mesmo que indiretamente, em conversas e encontros mais curtos, vocês contribuíram para a manutenção da minha sanidade mental e motivação nesse período.

Agradeço, por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro ao longo da execução deste trabalho.

*“Se eu vi mais longe,
foi por estar sobre ombros de gigantes.”
(Isaac Newton)*

Resumo

Com o aumento do volume de dados observacionais obtidos por levantamentos astronômicos e a melhora na precisão desses dados, os erros estatísticos nas estimativas de parâmetros cosmológicos e astrofísicos vêm sendo superados pelos erros sistemáticos. Para melhor restringir esses parâmetros e minimizar o impacto dos erros sistemáticos nas análises, além do cálculo do espectro de potência angular de uma certa sonda cosmológica, uma outra ferramenta vem ganhando importância: o espectro cruzado de potência angular entre sondas de diferentes naturezas. Além disso, com a melhor precisão dos dados, é necessário também que os cálculos numéricos tenham precisão suficiente para que erros numéricos não interfiram nas análises dos dados, de forma que a comparação e validação de diferentes bibliotecas computacionais é essencial para garantir tal precisão. Neste trabalho, tratamos do cálculo teórico dos auto-espectros e espectro cruzado de potência angular de galáxias e do lenteamento gravitacional da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background* - CMB). Para tanto, fazemos uma revisão bibliográfica do modelo cosmológico padrão a fim de obter o espectro de potência linear de matéria. Em seguida, abordamos o cálculo da correlação de dois pontos e, conseqüentemente, do espectro de potência angular. Discutimos, então, dois traçadores de matéria: distribuição de galáxias e o lenteamento da CMB. Finalmente, realizamos o cálculo numérico dos auto-espectros e do espectro cruzado utilizando as bibliotecas de programação *Core Cosmology Library* (CCL) e *Numerical Cosmology* (NumCosmo), as quais são utilizadas pela colaboração *Dark Energy Science Collaboration do Legacy Survey of Space and Time* (DESC/LSST). Calculamos, então, a diferença relativa entre os resultados de ambas as bibliotecas e discutimos a precisão numérica desses cálculos.

Palavras-chaves: modelo cosmológico padrão, correlação cruzada, galáxias, radiação cósmica de fundo, lenteamento gravitacional.

Abstract

With the increase in the volume of observational data obtained from astronomical surveys and the improvement in the accuracy of these data, statistical errors in the estimates of cosmological and astrophysical parameters are being surpassed by systematic errors. To better constrain these parameters and minimize the impact of systematic errors on analyses, in addition to calculating the angular power spectrum of a certain cosmological probe, another tool is gaining importance: the cross-angular power spectrum between probes of different natures. Furthermore, with the improved precision of the data, it is also necessary for numerical calculations to have sufficient precision so that numerical errors do not interfere with data analyses. Therefore, the comparison and validation of different computational libraries are essential to ensure such precision. In this work, we focus on the theoretical calculation of auto- and cross-angular power spectra of galaxies and the gravitational lensing of the cosmic microwave background (CMB). To do this, we conduct a literature review of the standard cosmological model to obtain the linear matter power spectrum. Next, we address the calculation of the two-point correlation and, consequently, the angular power spectrum. We then discuss two matter tracers: the distribution of galaxies and CMB lensing. Finally, we perform the numerical calculation of auto- and cross- power spectra using the programming libraries Core Cosmology Library (CCL) and Numerical Cosmology (NumCosmo), which are used by the Dark Energy Science Collaboration of the Legacy Survey of Space and Time (DESC/LSST). We calculate the relative difference between the results of both libraries and discuss the numerical accuracy of these calculations.

Key-words: standard cosmological model, cross-correlation, galaxies, cosmic microwave background, gravitational lensing.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração representando as coordenadas comóveis e o fator de escala, retirada do livro <i>Modern Cosmology</i> (DODELSON; SCHMIDT, 2021). O fator de escala, dependente do tempo, é responsável por relacionar a distância física com a distância comóvel.	28
Figura 2 – Gráfico original de Hubble (HUBBLE, 1929). As velocidades são medidas em $\frac{km}{s}$ e as distâncias em Parsecs.	30
Figura 3 – Um esboço de um espaço plano bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares.	32
Figura 4 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço plano bi-dimensional, retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ rad}$	33
Figura 5 – Um esboço de um espaço esférico bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares.	33
Figura 6 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço esférico bi-dimensional, retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$, onde A é a área do triângulo.	35
Figura 7 – Um esboço de um espaço hiperbólico bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares. Essa representação só é aproximadamente válida nas proximidades da região central da sela.	35
Figura 8 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço hiperbólico bi-dimensional (região central da sela), retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2}$, onde A é a área do triângulo.	36
Figura 9 – Um esboço de uma perturbação de temperatura na forma de uma onda plana, retirado do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Nesse esboço, podemos ter uma ideia do significado do vetor de onda \mathbf{k} , que aponta na direção do gradiente da temperatura, e da relação da variável μ com a direção de propagação do fóton. Áreas mais claras representam regiões mais frias, enquanto áreas mais escuras representam regiões mais quentes.	62

Figura 10 – Ilustração de uma onda gravitacional cosmológica associada às perturbações tensoriais, no limite estático ao longo de um período, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Acima, temos como a amplitude dessas perturbações evoluem com o tempo e, abaixo, como seriam as distorções no plano x-y associadas à propagação da onda em diferentes instantes do ciclo. A direção de propagação é perpendicular à figura.	72
Figura 11 – Ilustração de um campo escalar “rolando” lentamente ao longo de um potencial $V(\phi)$, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Enquanto se encontra na fase de <i>slow-roll</i> , o campo tem pouca energia cinética, porém possui uma energia potencial não-nula, de forma que a pressão é negativa, conforme equação 2.81. Quando o campo atinge o mínimo do potencial, temos o fim da fase inflacionária.	76
Figura 12 – Evolução linear do potencial gravitacional ϕ para diferentes modos, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021).	82
Figura 13 – Gráfico do espectro de potência linear de matéria, retirado do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021), para diferentes <i>redshifts</i> . k_{NL} refere-se à escala a partir da qual efeitos não-lineares não podem ser ignorados.	84
Figura 14 – Distribuições de <i>redshift</i> utilizadas para o cálculo do espectro de potência angular de galáxias, seguindo o artigo de (CHISARI et al., 2019b). As distribuições na forma de histogramas podem ser encontradas no <i>github</i> da CCL (CHISARI et al., 2019a), no diretório <code>/CCL/benchmarks/data/</code> . Neste gráfico, essas distribuições não estão normalizadas, porém as bibliotecas as normalizam automaticamente para realizar os cálculos dos espectros de potência angular.	105
Figura 15 – Acurácias (equação 4.6) calculadas entre as bibliotecas para os diferentes casos dos auto-espectros de potência angular calculados, considerando as diferentes cosmologias da tabela 1.	107
Figura 16 – Acurácias (equação 4.6) calculadas entre as bibliotecas para os diferentes casos dos espectros cruzados de potência angular calculados, considerando as diferentes cosmologias da tabela 1.	109

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Diferentes cosmologias utilizadas para a comparação das bibliotecas.	. . .	104
Tabela 2	–	Valores da acurácia que passam do limite esperado, para o auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia calculado utilizando o histograma 1.	108	
Tabela 3	–	Valores da acurácia que passam do limite esperado, para o auto-espectro de potência angular lenteamento de CMB-lenteamento de CMB.	108

Sumário

	Introdução	23
1	MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	27
1.1	Definições iniciais e equação de Hubble	27
1.1.1	Tempo de Hubble e distância de Hubble	30
1.2	Métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker	31
1.2.1	Homogeneidade e isotropia	31
1.2.2	Sistema de coordenadas polares em espaços bi-dimensionais	31
1.2.3	A métrica correspondente ao Princípio Cosmológico	37
1.3	Equações de Friedmann	38
1.3.1	Equação de Einstein	39
1.3.2	Equação de conservação de energia	40
1.3.3	As equações de Friedmann	41
1.4	Distâncias cosmológicas	43
1.4.1	Revisitando a lei de Hubble	43
1.4.2	Distância comóvel	45
1.4.3	Distância diâmetro angular	46
1.4.4	Distância luminosidade	46
1.5	Equação de Boltzmann	47
1.5.1	Função de distribuição	47
1.5.2	Equação de Boltzmann clássica	48
1.5.3	Equação de Boltzmann relativística	48
1.5.4	Equação de Boltzmann para a métrica FLRW	50
1.5.5	Termos de colisão	51
1.6	O modelo ΛCDM	52
2	O UNIVERSO PERTURBADO	55
2.1	Introdução às perturbações	55
2.1.1	Perturbações na métrica	55
2.1.2	A equação de Boltzmann para a radiação, sem colisão	56
2.1.3	A equação de Boltzmann para partículas massivas, sem colisão	57
2.2	As equações de Boltzmann perturbadas para fótons, neutrinos e matéria	57
2.2.1	Fótons	57
2.2.1.1	A função de distribuição perturbada para os fótons	57
2.2.1.2	Termo de colisão	58

2.2.1.3	A equação de Boltzmann para os fótons	60
2.2.2	Matéria escura fria	63
2.2.3	Bárions	64
2.2.4	Neutrinos	66
2.3	As equações para as perturbações gravitacionais	67
2.3.1	Decomposição das perturbações na métrica	67
2.3.2	Transformação de coordenadas	68
2.3.3	As equações de Einstein para as perturbações escalares	70
2.3.4	As equações de Einstein para as perturbações tensoriais	71
2.4	Inflação	72
2.4.1	O problema do horizonte	73
2.4.2	As equações da inflação	74
2.4.3	Perturbações tensoriais	76
2.4.4	Perturbações escalares	77
2.4.4.1	Utilizando o calibre <i>spatially flat slicing</i>	78
2.4.5	Índices espectrais	79
3	EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES E TRAÇADORES DE ES-	
	TRUTURAS	81
3.1	Evolução das perturbações	81
3.1.1	A função de transferência e o fator de crescimento	81
3.1.2	O espectro de potência para a matéria	83
3.2	Homogeneidade e isotropia estatística	84
3.2.1	Campos aleatórios	85
3.2.2	De médias de conjunto estatístico para médias espaciais	88
3.2.3	O espectro de potência	89
3.3	Traçadores de estruturas	90
3.3.1	O espectro de potência angular	91
3.3.2	A aproximação de Limber	93
3.3.3	Traçadores de estruturas - galáxias	94
3.3.3.1	O contraste de densidade de galáxias projetado	95
3.3.3.2	Cálculo do espectro de potência angular de galáxias na CCL	96
3.3.3.3	Cálculo do espectro de potência angular de galáxias na NumCosmo	98
3.3.4	Traçadores de estruturas - lenteamento de CMB	98
3.3.4.1	Perturbações no caminho dos fótons	98
3.3.4.2	Espectro de potência angular do potencial de lenteamento	99
3.3.4.3	Cálculo do espectro de potência angular de lenteamento de CMB na CCL	100
3.3.4.4	Cálculo do espectro de potência angular de lenteamento de CMB na NumCosmo	100

4	COMPARAÇÃO DAS BIBLIOTECAS <i>NUMERICAL COSMOLOGY LIBRARY</i> E <i>CORE COSMOLOGY LIBRARY</i>	101
4.1	Parâmetros e funções utilizados na definição do modelo cosmológico	101
4.1.1	Espectro de potência de matéria e função de transferência	101
4.1.2	Equação de estado da energia escura	102
4.1.3	O parâmetro σ_8	102
4.2	Cosmologias utilizadas	103
4.3	Distribuições de <i>redshift</i> de galáxias	104
4.4	Critério para a comparação dos resultados	105
4.5	Resultados dos auto-espectros de potência angular	106
4.6	Resultados dos espectros cruzados de potência angular	108
4.7	Discussão dos resultados	109
	Conclusão	113
	REFERÊNCIAS	115
	APÊNDICES	123
	APÊNDICE A – <i>SCRIPTS</i> UTILIZADOS PARA GERAR OS RESULTADOS	125

Introdução

Com o passar dos anos, o volume de dados observacionais obtidos por levantamentos astronômicos tem aumentado, bem como a precisão desses dados. Exemplos desses levantamentos, no caso de galáxias, são o *Hyper Suprime-Cam Subaru Strategic Survey* (HSC) (2014 a 2021) (NAOJ, 2021) e o *Dark Energy Survey* (DES) (2013 a 2019) (CTIO, 2019). Os dois levantamentos citados obtiveram informações de uma quantidade de objetos da ordem de 500 milhões. Um dos próximos levantamentos a serem feitos, o *Legacy Survey of Space and Time* (LSST) (RUBIN-OBSERVATORY, 2023), previsto para começar a operar em 2025, pretende obter informações de cerca de 20 bilhões de galáxias (IVEZIÉ et al., 2019), um aumento de cerca de duas ordens de grandeza no volume de objetos. No caso da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background* - CMB), exemplos de levantamentos são o *Planck* (2009 a 2013) (ESA, 2013), o *Atacama Cosmology Telescope* (ACT) (2007 a 2022) (LCO, 2022) e o *South Pole Telescope* (SPT) (2007 até a atualidade) (ASSPS, 2022). Levantamentos futuros da CMB, como o *Cosmic Origins Explorer* (CORE), *Probe of Inflation and Cosmic Origins* (PICO) e o *CMB-S4* (ZOTTI et al., 2019) pretendem melhorar a resolução na observação para níveis muito próximos ao limite de difração.

Assim, a cosmologia começa a entrar numa era em que as incertezas nas estimativas não serão mais dominadas por erros estatísticos, mas sim por erros sistemáticos. Neste contexto, análises cosmológicas que consideram diferentes sondas somente de forma independente não extraem o máximo de informação possível. A análise conjunta de diversas sondas, que leva em conta correlações entre elas, tem ganhado cada vez mais importância.

Uma das principais informações extraídas das diversas sondas cosmológicas, como galáxias, flutuação da temperatura da radiação cósmica de fundo, cisalhamento de galáxias, entre outras, é a autocorrelação de dois pontos e o correspondente espectro de potência, angulares ou tri-dimensionais. De posse desses espectros de potência, é possível, por exemplo, inferirmos informações sobre o modelo teórico considerado, obtendo restrições dos parâmetros cosmológicos. Porém, para extrair o máximo de informação das sondas e minimizar o impacto dos erros sistemáticos nas análises, a obtenção dos espectros cruzados de potência entre observáveis de diferentes naturezas é essencial (RHODES et al., 2015) (DOUX et al., 2018) (ABBOTT et al., 2023) (PRAT et al., 2023).

Para calcularmos esses espectros de potência neste trabalho, são utilizadas bibliotecas computacionais, como a Numerical Cosmology Library (NumCosmo) (VITENTI; PENNA-LIMA, 2014) e a Core Cosmology Library (CCL) (CHISARI et al., 2019a). Na era da cosmologia de precisão, devemos ser cuidadosos também em relação aos erros

numéricos nos cálculos computacionais. Para isto, a comparação e validação dessas diferentes bibliotecas, de forma a assegurar um cálculo numérico suficientemente preciso e, conseqüentemente, resultados físicos corretos, também é uma tarefa essencial.

O objetivo deste trabalho é fazermos uma revisão do modelo cosmológico padrão e também apresentarmos comparações entre as duas bibliotecas mencionadas, no contexto do cálculo dos auto-espectros de potência angular e espectros cruzados de potência angular. Para tanto, ele é dividido em quatro capítulos.

No capítulo 1, apresentamos o modelo cosmológico padrão na ausência de perturbações. Esse modelo se baseia no princípio cosmológico, ou seja, na suposição de homogeneidade e isotropia estatística em largas escalas. Primeiramente, fazemos algumas definições iniciais, como a da distância comóvel, fator de escala, *redshift* e constante de Hubble. Em seguida, discutimos os sistemas de coordenadas polares em espaços bi-dimensionais. Essa discussão é importante para um melhor entendimento da métrica correspondente ao princípio cosmológico, a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (métrica FLRW), apresentada logo depois. Após isso, as equações de Friedmann, que relacionam a taxa de variação do fator de escala às diferentes componentes do universo, são obtidas a partir da equação de Einstein. Apresentamos, então, as diferentes definições das distâncias cosmológicas. Na penúltima seção, apresentamos a equação de Boltzmann, que descreve as partículas que interagem gravitacionalmente. Por fim, o modelo Λ CDM é apresentado, e alguns dos parâmetros cosmológicos obtidos pelo levantamento *Planck* são exibidos.

O capítulo 2 tem como foco a descrição do universo perturbado, isto é, introduzimos perturbações no modelo cosmológico padrão, necessárias para que o modelo seja capaz de explicar fenômenos como as estruturas verificadas no universo tardio e as flutuações na CMB. Primeiramente, a métrica perturbada no calibre Newtoniano conforme é apresentada. Em seguida, obtemos as equações de Boltzmann perturbadas para os fótons, neutrinos, matéria bariônica e matéria escura. A decomposição das perturbações na métrica em escalares, vetoriais e tensoriais é então apresentada, incluindo uma breve discussão sobre a liberdade de calibre na métrica. Após isso, apresentamos as equações de Einstein para as perturbações escalares e tensoriais. Por fim, o modelo de inflação é discutido, culminando na obtenção do espectro de potência para as perturbações de curvatura primordiais.

No capítulo 3, por sua vez, discutimos a evolução das perturbações até a época atual, onde as observamos, e como relacionar os observáveis (como galáxias e lenteamento de CMB) com a teoria desenvolvida até então. Primeiro, fazemos uma discussão da evolução do potencial gravitacional para diferentes modos, apresentando a função de transferência e o fator de crescimento. Em seguida, apresentamos a expressão do espectro de potência linear de matéria nos tempos atuais em termos da função de transferência, do fator de crescimento e do espectro de potência para as perturbações de curvatura pri-

mordiais. Após isso, o tratamento das variáveis cosmológicas como variáveis aleatórias é discutido, acompanhado das definições de homogeneidade e isotropia estatística, função de correlação de dois pontos e espectro de potência. A relação entre as médias de conjunto estatístico e as médias espaciais é apresentada, bem como a definição da variância cósmica. Finalmente, apresentamos a expressão para o cálculo do auto-espectro de potência angular de um observável e do espectro cruzado de potência entre diferentes observáveis a partir do espectro de potência linear de matéria. Fazemos, então, discussões sobre dois traçadores de estruturas: as galáxias e o lenteamento de CMB. A forma como o cálculo dos espectros de potência é feita nas bibliotecas NumCosmo e CCL, considerando esses dois traçadores, também é apresentada.

No capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos na comparação de ambas as bibliotecas. Primeiramente definimos alguns parâmetros e funções a serem utilizados. Em seguida, apresentamos as diferentes cosmologias consideradas para a comparação. As quatro distribuições de *redshift* de galáxias utilizadas são então apresentadas. O critério utilizado para a comparação dos resultados é então definido, mencionando o que seria esperado de acordo com validações já feitas da CCL. Por fim, os resultados obtidos são apresentados, seguidos de uma breve discussão sobre as possíveis origens dos desvios de alguns dos resultados do que seria esperado. Os *scripts* que usamos para gerar os resultados desse capítulo estão incluídos no apêndice A.

No primeiro capítulo, até a seção 1.2, utilizamos o sistema de unidades internacional, com o aparecimento explícito da velocidade da luz no vácuo c nas equações. A partir da seção 1.3, adotamos o sistema de unidades naturais no qual $\hbar = c = k_B = 1$, onde \hbar é a constante reduzida de Planck e k_B é a constante de Boltzmann. Além disso, em parte da seção 1.5 e nos capítulos 2, 3 e 4, para simplificar as equações e motivados por evidências observacionais, consideramos um universo espacialmente plano, com parâmetro de densidade de curvatura nulo. Isso e as mudanças de unidades serão mencionadas ao longo do texto, quando ocorrerem. Em relação à métrica, utilizaremos, ao longo de todo o trabalho, a convenção “maximamente positiva”, onde o termo temporal é negativo e os termos espaciais são positivos, também chamada de convenção $\{-1, 1, 1, 1\}$.

1 Modelo Cosmológico Padrão

A cosmologia é o ramo da física que estuda o universo como um todo, sua evolução e sua estrutura. O interesse nesse estudo vem desde os primórdios da humanidade, com a curiosidade de entender a origem e o destino de todas as estruturas que observamos ao redor de nossa posição no universo.

Os rumos que levariam ao advento da cosmologia moderna já se delineavam no século XIX. Em 1826, por exemplo, Heinrich Olbers ([OLBERS, 1826](#)) expôs um paradoxo que motivou uma reflexão acerca da natureza do universo. Com cálculos relativamente simples, podemos mostrar que, supondo um universo espacialmente e temporalmente infinito, o céu noturno deveria ser extremamente brilhante ([RYDEN, 2017](#), p. 20–24). Para resolver esse paradoxo, era necessário reavaliar as premissas de um universo infinito.

1.1 Definições iniciais e equação de Hubble

Observações, como as de Edwin Hubble ([HUBBLE, 1929](#)) na década de 1920, indicaram que o universo deve estar em expansão. Por meio da observação de diversas galáxias, Hubble mostrou que, quanto mais distante a galáxia, maior a velocidade de afastamento. Antes de exibir a equação de Hubble, é importante definirmos alguns parâmetros para descrever um universo em expansão.

Primeiramente, vamos considerar uma analogia. Imaginemos o universo como um balão, e observemos uma pequena região desse balão de perto, de tal modo que a curvatura possa ser desconsiderada. Podemos marcar posições \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 nessa região com um pincel; elas remetem ao sistema de coordenadas comóveis. Veja que, por mais que o balão seja inflado, as marcações do pincel nele permanecerão as mesmas. Se a distância entre esses pontos for definida como $x = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$, ela também permanecerá a mesma - essa é a chamada distância comóvel. Porém, a distância física, ou distância própria, entre as marcações irá aumentar. Esse aumento pode ser representado pelo fator de escala a . Se a distância física, ou distância própria, for representada por d_p , temos

$$d_p(t) = a(t)x, \tag{1.1}$$

onde x é a distância comóvel entre os pontos e t é o tempo cósmico. A figura 1 ilustra essa definição. Agora, considerando que estamos em um desses pontos (em \mathbf{x}_1 , por exemplo), e definindo nossa posição como a origem do espaço, podemos escrever

$$d_p(t) = a(t)\chi \tag{1.2}$$

onde, agora, $d_p(t)$ é a distância própria a um certo ponto que está a uma distância comóvel χ de nossa posição, no instante t .

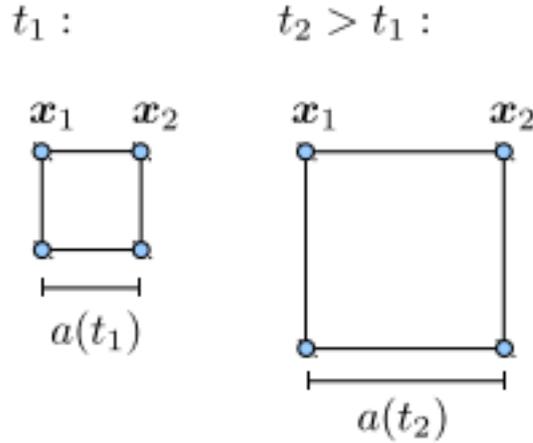


Figura 1 – Ilustração representando as coordenadas comóveis e o fator de escala, retirada do livro *Modern Cosmology* (DODELSON; SCHMIDT, 2021). O fator de escala, dependente do tempo, é responsável por relacionar a distância física com a distância comóvel.

Outro conceito importante é a do *redshift* z ¹. Quando a luz viaja pelo universo em expansão, o seu comprimento de onda físico aumenta proporcionalmente ao fator de escala. O *redshift* pode ser definido como

$$z = \frac{(\lambda_{obs} - \lambda_{emit})}{\lambda_{emit}}, \quad (1.3)$$

e sua relação com o fator de escala é dada por

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{a_{obs}}{a_{emit}} = \frac{1}{a_{emit}}, \quad (1.4)$$

onde λ_{obs} é o comprimento de onda observado, λ_{emit} é o comprimento de onda quando a luz foi emitida, a_{obs} é o fator de escala no momento de observação, e a_{emit} é o fator de escala no momento de emissão. A última igualdade segue ao considerarmos o fator de escala no momento atual como sendo $a_{obs} = 1$, uma convenção muito utilizada na literatura. Uma dedução relativamente simples para a relação exposta acima pode ser vista no livro *Introduction to Cosmology* (RYDEN, 2017, p. 70–75).

Finalmente, para medirmos a taxa de mudança do fator de escala no tempo, é importante definir o parâmetro de Hubble,

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (1.5)$$

¹ Em português dizemos “desvio para o vermelho”, mas opto, ao longo deste trabalho, por usar o termo em inglês.

Quando avaliado no presente momento ele é chamado de constante de Hubble, dada por

$$H_0 = H(t_0). \quad (1.6)$$

Na literatura, muitos autores utilizam, ao invés da constante de Hubble, a constante de Hubble adimensional. Ela é definida por

$$H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}. \quad (1.7)$$

Agora, consideremos uma certa fonte a uma distância comóvel fixa χ_{fonte} de nós, que se move apenas devido à expansão do universo, ou seja, sem velocidade peculiar ($\frac{d\chi_{\text{fonte}}}{dt} = 0$) (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 6–8). Podemos escrever

$$v_r = \frac{d(a\chi_{\text{fonte}})}{dt} = \dot{a}\chi_{\text{fonte}} = H(t)d_p(t), \quad (1.8)$$

onde v_r é a velocidade radial, ou velocidade de recessão. Para baixos *redshifts*, como será discutido mais à frente, $H(t) \approx H_0$, $v_r \approx v_{rs}$, onde $v_{rs} \equiv cz$ é a velocidade que uma fonte com *redshift* z teria se estivesse sujeita a um efeito Doppler linear (a fonte se movendo em uma velocidade $v \ll c$ devido a um movimento peculiar, sem a expansão do universo), e $d_p \approx d_{\text{obs}}$, isto é, as distâncias que podemos realmente observar, para z pequeno, são iguais à distância própria (não observável). Sob essas aproximações, podemos escrever

$$v_{rs} = H_0 d_{\text{obs}}, \quad (z \ll 1). \quad (1.9)$$

Essa é a lei de Hubble.

Quando Hubble obteve essa relação, já existia medidas de velocidades relativas de recessão de várias galáxias, mas havia poucas medidas de distância. Em seus esforços para medir essas distâncias, Hubble chegou ao gráfico exibido na figura 2, e, portanto, à relação linear da equação 1.9.

No entanto, os erros nas medidas eram significativos e fez com que ele obtivesse um valor de $H_0 \approx 500 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$. Com a melhora na precisão das medidas ao longo do tempo, os valores obtidos atualmente são da ordem de $H_0 \approx 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$. Aqui, usamos a expressão “da ordem de”, pois, na verdade, há discrepâncias entre diversas medidas atuais da constante de Hubble, algumas das quais estatisticamente significativas. Esse problema é conhecido como “tensão de Hubble”. Para se ter uma ideia, medidas obtidas a partir da radiação cósmica de fundo, por meio do ajuste do modelo padrão da cosmologia aos dados observados, levaram à obtenção de $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ (AGHANIM et al., 2021), enquanto que medidas obtidas a partir de medidas diretas de distância em baixos *redshifts*, utilizando velas-padrão como cefeidas e supernovas do tipo Ia, levaram à obtenção de $H_0 = (73.04 \pm 1.04) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ (RIESS et al., 2022). Essas medidas têm entre si uma discrepância da ordem de 5σ . Vários caminhos para solucionar a tensão de Hubble vêm sendo

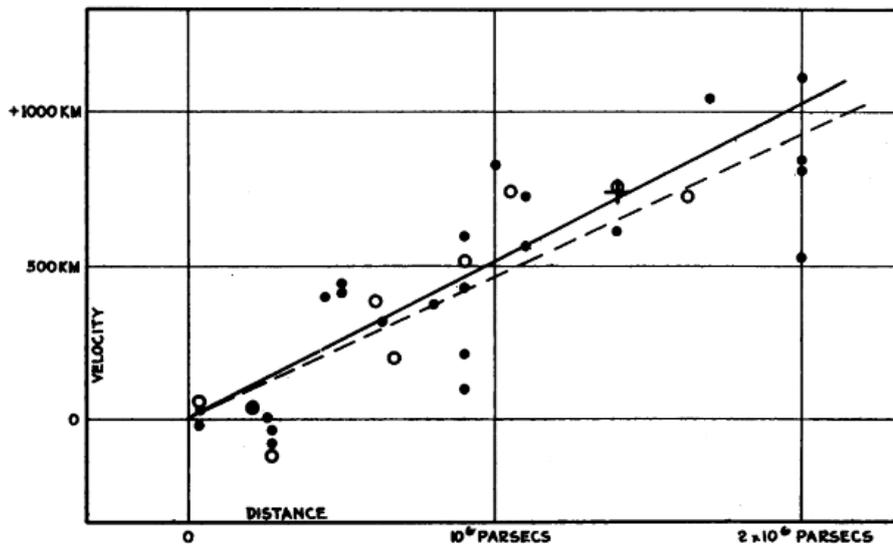


Figura 2 – Gráfico original de Hubble (HUBBLE, 1929). As velocidades são medidas em $\frac{km}{s}$ e as distâncias em Parsecs.

investigados, como a possível existência de erros sistemáticos não identificados (erros na modelagem para os cálculos de distância no universo local, por exemplo) (KENWORTHY, 2022) e até mesmo a modificação do modelo padrão da cosmologia (POULIN, 2020). O objetivo aqui não é detalhar a tensão de Hubble. Caso o leitor tenha interesse em aprofundar os estudos nessa tensão, além das referências já citadas, uma discussão detalhada pode ser vista em (SHAH; LEMOS; LAHAV, 2021).

1.1.1 Tempo de Hubble e distância de Hubble

Outra definição importante é a do tempo de Hubble. Ele pode ser obtido a partir do seguinte desenvolvimento: imaginemos duas galáxias, separadas por uma distância d . Sabemos que o universo está em expansão, portanto, em algum momento no passado, essas galáxias devem ter estado extremamente próximas. Considerando que as velocidades relativas entre dois pontos quaisquer no universo é constante (é o caso, por exemplo, de um modelo de universo vazio (RYDEN, 2017, p. 113–117)), o tempo desde que elas estiveram em contato é dado por

$$t_H = \frac{d}{v} = \frac{d}{H_0 d} = H_0^{-1}. \quad (1.10)$$

Este é o tempo de Hubble. Para uma constante de Hubble da ordem de $H_0 \sim 69 \frac{km}{s \cdot Mpc}$, por exemplo, o tempo de Hubble é da ordem de $t_H \sim 14.4 \times 10^9$ anos, ou 14.4 bilhões de anos. É importante mencionar que ele não é, necessariamente, igual à idade do universo, pois a suposição de velocidades relativas constantes não é necessariamente válida (não é válida para o universo em que vivemos, por exemplo).

Seguindo a definição do tempo de Hubble, definimos também a distância de Hub-

ble,

$$d_H = ct_H = \frac{c}{H_0}, \quad (1.11)$$

que é a distância que a luz poderia percorrer em um tempo de Hubble. Da mesma forma que o tempo de Hubble indica uma escala natural para o tempo em cosmologia, a distância de Hubble indica uma escala natural para a distância. Considerando novamente $H_0 \sim 69 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$, temos $d_H \sim 4350 \text{ Mpc}$.

1.2 Métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

1.2.1 Homogeneidade e isotropia

Em grandes escalas, consideramos que o universo seja homogêneo e isotrópico. O conceito de homogeneidade está relacionado com a ideia de que não há locais privilegiados no universo; de onde quer que estejamos olhando, o universo parecerá o mesmo. Por sua vez, o conceito de isotropia refere-se ao fato de não haver direções privilegiadas no universo; para onde quer que olhemos, o universo também parecerá o mesmo. Essa consideração sobre a homogeneidade e isotropia do universo em grandes escalas é chamada de “Princípio Cosmológico”.

A princípio, a suposição de homogeneidade e isotropia não é óbvia. Em pequenas escalas, o que vemos ao nosso redor é altamente inhomogêneo e anisotrópico. Em uma escala de alguns metros, por exemplo, aqui na Terra, nós mesmos somos corpos com alta densidade em comparação com o meio, e podemos definir uma direção privilegiada (a direção para onde as coisas caem, por exemplo). Mesmo na escala de aglomerados de galáxias ($\sim 5 \text{ Mpc}$), ainda temos claramente locais de alta densidade (os aglomerados) e locais de baixa densidade (os vazios). Porém, regiões com raio da ordem de 100 Mpc contém basicamente os mesmos padrões de sobredensidades e vazios e então, em um sentido estatístico, podemos dizer que nessa escala o universo é em boa aproximação homogêneo e isotrópico (RYDEN, 2017, p. 24–27).

1.2.2 Sistema de coordenadas polares em espaços bi-dimensionais

Para termos uma visualização dos espaços e dos sistemas de coordenadas a serem apresentados na seção seguinte, apresentaremos aqui os análogos em duas dimensões. Nos casos de um espaço bi-dimensional de curvatura uniforme nula, ou espaço plano, e de um espaço bi-dimensional de curvatura uniforme positiva, ou espaço esférico, podemos construí-los embutidos em um espaço euclidiano tri-dimensional. Porém, um espaço bi-dimensional de curvatura uniforme negativa, ou espaço hiperbólico, não pode ser construído embutido em um espaço euclidiano tri-dimensional, como comprovado pelo matemático David Hilbert (RYDEN, 2017, p. 64); o que podemos fazer para ter um vis-

lumbre de um espaço desse tipo, no espaço euclidiano 3D, seria, por exemplo, olhar a região central de uma sela. Nas proximidades da região central, a sela tem uma curvatura aproximadamente uniforme e negativa.

A seguir, usaremos as letras χ e r para as coordenadas radiais dos sistemas polares de coordenadas. No caso do espaço plano, elas serão iguais, mas para os demais casos as coordenadas radiais possuem definições distintas. Além disso, usaremos também as coordenadas radiais adimensionais, definidas por

$$\bar{\chi} \equiv \frac{\chi}{R} \quad (1.12)$$

e

$$\bar{r} \equiv \frac{r}{R}, \quad (1.13)$$

onde R é uma constante que, no caso dos espaços esférico e hiperbólico, é identificada como o raio de curvatura dos espaços. A coordenada angular, por sua vez, será denotada por ϕ .

Na figura 3, temos uma representação de um espaço plano bi-dimensional com a representação das coordenadas polares. No espaço plano, a geodésica² é uma linha reta. Podemos definir um sistema de coordenadas polares pegando uma dessas linhas

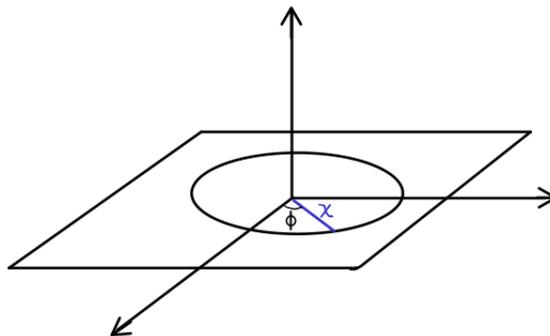


Figura 3 – Um esboço de um espaço plano bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares.

como referência para a definição da coordenada angular. Nesse sistema de coordenadas, a métrica³ espacial é dada por

$$dl^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\phi^2. \quad (1.14)$$

² A geodésica é a generalização, para espaços curvos, do conceito de uma “linha reta”. Ela é a trajetória seguida por uma partícula se movendo livremente ou em queda livre. No caso do espaço plano ela é, trivialmente, uma linha reta, como mencionado aqui. Porém, como veremos logo a seguir, o mesmo não acontece para outros espaços de curvatura não-nula. Posteriormente, uma outra definição de geodésica, em termos da derivada covariante, será mencionada no texto.

³ A métrica é uma estrutura adicional em uma variedade com a qual podemos definir certas propriedades geométricas, como distâncias e ângulos. Na relatividade geral, ela descreve as estruturas geométricas e causais do espaço-tempo, e define, por exemplo, o intervalo s entre dois eventos e a curvatura do espaço-tempo via conexão de Levi-Civita.

No caso do espaço plano, a coordenada χ também poderia ser chamada de r , de forma que $\chi = r$. Em termos da coordenada radial adimensional, dada pela equação 1.12 ou 1.13, onde R nesse caso é alguma constante arbitrária com dimensões de espaço, a métrica espacial pode ser escrita como

$$dl^2 = R^2(d\bar{\chi}^2 + \bar{\chi}^2 d\phi^2). \quad (1.15)$$

Agora, imaginemos um triângulo nesse espaço plano, formado pela interseção de três geodésicas. A soma dos ângulos internos desse triângulo será igual a $\pi \text{ rad}$. Além disso, esse espaço possui uma área infinita, ou seja, podemos delimitar regiões de área qualquer. Veja a figura 4.

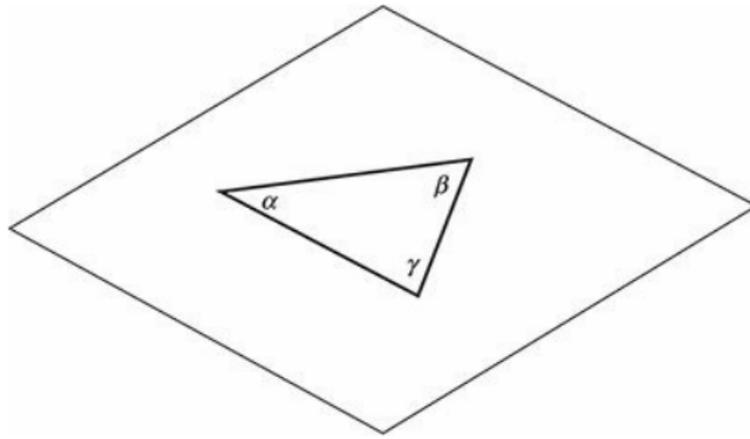


Figura 4 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço plano bi-dimensional, retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ rad}$.

Por sua vez, na figura 5, temos uma representação de um espaço esférico bi-dimensional, com a representação das coordenadas polares. Nesse espaço, a geodésica

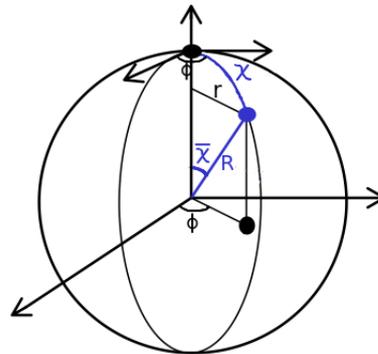


Figura 5 – Um esboço de um espaço esférico bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares.

é uma porção de um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera. Podemos definir um sistema de coordenadas polares definindo um polo norte e um polo sul e tomando uma das geodésicas entre esses dois pontos como referência para a definição da coordenada angular. Nesse sistema de coordenadas, a métrica espacial é dada por

$$dl^2 = d\chi^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{\chi}{R}\right) d\phi^2, \quad (1.16)$$

onde aqui R é identificado como o raio de curvatura do espaço. Definindo uma nova coordenada radial, dada por

$$r = R \sin\left(\frac{\chi}{R}\right), \quad (1.17)$$

podemos escrever a métrica espacial como

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\phi^2. \quad (1.18)$$

Esse sistema de coordenadas com coordenada radial r também é chamado Coordenadas Polares de Circunferência Reduzida (em inglês, *Reduced-Circumference Polar Coordinates*). Enquanto a coordenada χ se encontra no intervalo $[0, \pi R]$, a coordenada r se encontra no intervalo $[0, R]$ e só tem uma relação um para um com a coordenada χ até $\chi = \frac{\pi}{2}R$, onde $r = R$. Depois disso, temos uma degenerescência da coordenada r , pois ela volta a diminuir. Em termos da coordenada radial adimensional $\bar{\chi}$ (equação 1.12), a métrica espacial pode ser escrita como

$$dl^2 = R^2(d\bar{\chi}^2 + \sin^2(\bar{\chi})d\phi^2). \quad (1.19)$$

Analogamente, para a coordenada radial adimensional \bar{r} (equação 1.13), podemos escrever a métrica como

$$dl^2 = R^2\left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\phi^2\right). \quad (1.20)$$

Enquanto a coordenada $\bar{\chi}$ se encontra no intervalo $[0, \pi]$, a coordenada \bar{r} se encontra no intervalo $[0, 1]$ e, assim como a coordenada r , é degenerada. Agora, no caso de um espaço esférico, a soma dos ângulos internos de um triângulo desenhado a partir da interseção de três geodésicas desse espaço não será de π rad; ela será maior. O quão maior ela será depende da área do triângulo e do raio de curvatura R do espaço. Além disso, esse espaço terá uma área finita, ou seja, há um limite máximo para a área de uma certa região delimitada, e é possível circunavegá-lo, viajando uma distância de $C = 2\pi R$ (RYDEN, 2017). Veja a figura 6.

Por fim, na figura 7, temos uma representação de um espaço hiperbólico bi-dimensional, com a representação das coordenadas polares. Ressaltamos aqui, novamente, que essa representação só é aproximadamente válida nas proximidades da região central da sela. Podemos definir o sistema de coordenadas polares nesse espaço tomando uma

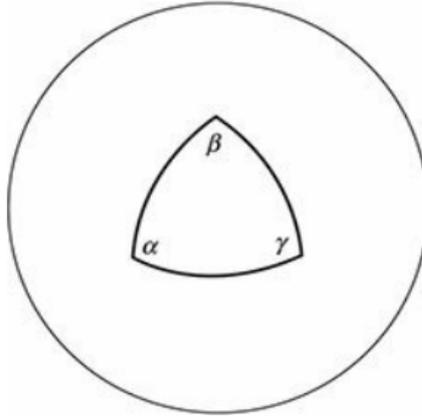


Figura 6 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço esférico bi-dimensional, retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$, onde A é a área do triângulo.

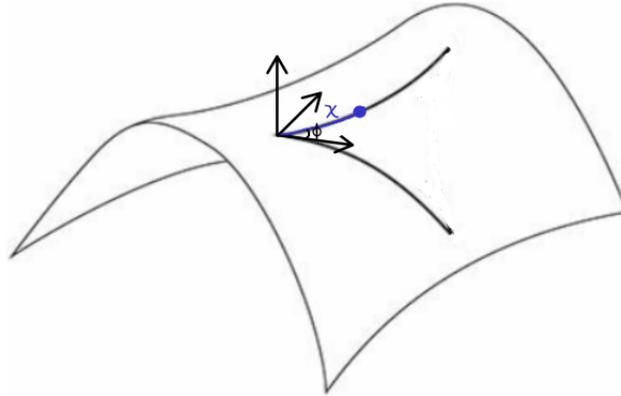


Figura 7 – Um esboço de um espaço hiperbólico bi-dimensional, exibindo as coordenadas polares. Essa representação só é aproximadamente válida nas proximidades da região central da sela.

geodésica, que parte da origem, como referência para a definição da coordenada angular. Assim, a métrica espacial pode ser escrita como

$$dl^2 = d\chi^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{\chi}{R}\right) d\phi^2, \quad (1.21)$$

onde R é o raio de curvatura do espaço. Definindo uma nova coordenada radial, dada por

$$r = R \sinh\left(\frac{\chi}{R}\right), \quad (1.22)$$

a métrica pode ser escrita como

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\phi^2. \quad (1.23)$$

A coordenada χ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \infty]$, bem como a coordenada r . Como $f(x) = \sinh(x)$ é bijetora em \mathbb{R} , aqui não há degenerescência. Em termos da

coordenada radial adimensional $\bar{\chi}$ (equação 1.12), a métrica pode ser escrita como

$$dl^2 = R^2(d\bar{\chi}^2 + \sinh^2(\bar{\chi})d\phi^2). \quad (1.24)$$

Já em termos da coordenada radial adimensional \bar{r} (equação 1.13), a métrica fica

$$dl^2 = R^2 \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\phi^2 \right). \quad (1.25)$$

No caso de um espaço hiperbólico, a soma dos ângulos internos de um triângulo desenhado a partir de três geodésicas será menor que $\pi \text{ rad}$. O quão menor ela será também depende da área do triângulo e do raio de curvatura do espaço. Além disso, esse espaço não tem limitação de área (RYDEN, 2017). Veja a figura 8.

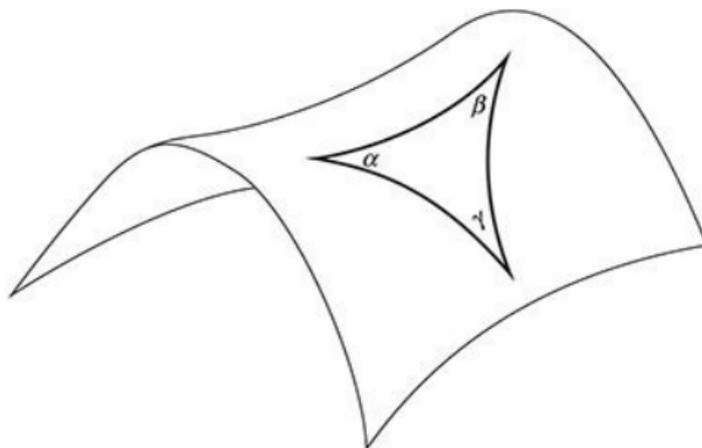


Figura 8 – Uma ilustração de um triângulo em um espaço hiperbólico bi-dimensional (região central da sela), retirada do livro de (RYDEN, 2017). Nesse espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo obedece $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2}$, onde A é a área do triângulo.

Podemos, ainda, compactar todas as métricas descritas anteriormente. Primeiramente, definimos uma variável K que assume os valores $\{-1, 0, 1\}$, onde $K = -1$ refere-se ao espaço hiperbólico, $K = 0$ ao espaço plano e $K = 1$ ao espaço esférico. Definimos também a variável κ , dada por

$$\kappa = \frac{K}{R^2}, \quad (1.26)$$

de forma que $\kappa = \frac{-1}{R^2} < 0$ refere-se ao espaço hiperbólico, $\kappa = \frac{0}{R^2} = 0$ ao espaço plano e $\kappa = \frac{1}{R^2} > 0$ ao espaço esférico. Assim, as métricas 1.14, 1.16 e 1.21, em termos da coordenada radial χ , podem ser escritas como

$$dl^2 = d\chi^2 + S_\kappa^2(\chi)d\phi^2, \quad (1.27)$$

onde

$$S_\kappa(\chi) = r = \begin{cases} |\kappa|^{-\frac{1}{2}} \sinh(|\kappa|^{\frac{1}{2}} \chi), & \text{se } \kappa < 0, \\ \chi, & \text{se } \kappa = 0, \\ \kappa^{-\frac{1}{2}} \sin(\kappa^{\frac{1}{2}} \chi), & \text{se } \kappa > 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Já as métricas 1.14, 1.18 e 1.23, em termos da coordenada radial r , podem ser escritas como

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\phi^2. \quad (1.29)$$

Por sua vez, as métricas 1.15, 1.19 e 1.24, em termos da coordenada radial adimensional $\bar{\chi}$, podem ser escritas como

$$dl^2 = R^2(d\bar{\chi}^2 + \bar{S}_K^2(\bar{\chi})d\phi^2) \quad (1.30)$$

onde

$$\bar{S}_K(\bar{\chi}) = \bar{r} = \begin{cases} \sinh(\bar{\chi}), & \text{se } K = -1, \\ \bar{\chi}, & \text{se } K = 0, \\ \sin(\bar{\chi}), & \text{se } K = 1. \end{cases} \quad (1.31)$$

Já as métricas 1.15, 1.20 e 1.25, em termos da coordenada radial adimensional \bar{r} , podem ser escritas como

$$dl^2 = R^2 \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - K\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\phi^2 \right). \quad (1.32)$$

1.2.3 A métrica correspondente ao Princípio Cosmológico

Nessa seção, vamos exibir a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (métrica FLRW), que é a métrica correspondente ao Princípio Cosmológico. Considerando esse princípio, ou seja, considerando espaços homogêneos e isotrópicos, há três possibilidades⁴: um de curvatura espacial uniforme positiva (também chamado de espaço “esférico”, em analogia com o caso bidimensional de uma superfície esférica, ou fechado), um de curvatura espacial uniforme nula (também chamado de espaço Euclideano ou “plano”, em analogia com o caso bidimensional de um plano) e um de curvatura espacial uniforme negativa (também chamado de espaço “hiperbólico”, ou aberto).

A métrica que representa os espaços acima descritos pode ser escrita, em termos da coordenada radial χ , como (RYDEN, 2017, p. 69)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(d\chi^2 + S_\kappa^2(\chi)d\Omega^2). \quad (1.33)$$

onde t é o tempo cósmico, $a(t)$ é o fator de escala adimensional, $S_\kappa(\chi)$ é dado pela equação 1.28 e $d\Omega$ é dado por $d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$, onde θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal do sistema de coordenadas esféricas. Essa é a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. Escrita em termos da coordenada radial r , como definida na seção passada, a métrica FLRW fica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.34)$$

⁴ A demonstração formal segue o conceito de espaços maximamente simétricos, que são completamente caracterizados por sua curvatura escalar. Para mais detalhes, ver (WEINBERG, 1972, p. 409–412).

onde κ é dado pela equação 1.26 e pode ser positivo, nulo ou negativo, a depender do tipo de espaço considerado.

Podemos, ainda, optar por incluir as dimensões de espaço no fator de escala, definindo o fator de escala dimensional,

$$R(t) = a(t)R, \quad (1.35)$$

onde R pode ser identificado como o raio de curvatura do espaço, nos casos esférico e hiperbólico, no instante de tempo t_{ref} onde $a(t_{\text{ref}}) = 1$, de forma que

$$R = R(t_{\text{ref}}). \quad (1.36)$$

Uma convenção muito utilizada, como já mencionado, é a de que o fator de escala adimensional é igual a 1 no presente momento t_0 , ou seja, $a(t_0) = a_0 = 1$, de forma que

$$R = R(t_0) = R_0 \quad (1.37)$$

é identificado como o raio de curvatura atual do espaço, sob essa convenção. Utilizando a coordenada radial adimensional $\bar{\chi}$, como definida na seção passada, a métrica pode ser escrita, então, como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left(d\bar{\chi}^2 + \bar{S}_K^2(\bar{\chi}) d\Omega^2 \right), \quad (1.38)$$

onde $\bar{S}_K(\bar{\chi})$ é dado pela equação 1.31. Analogamente, para a coordenada radial adimensional \bar{r} , podemos escrever

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - K\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.39)$$

onde K foi definido na seção passada e assume os valores $\{-1, 0, 1\}$, a depender do tipo de espaço considerado.

Por fim, se considerarmos um espaço plano, a métrica, em coordenadas cartesianas, assume a forma simples

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.40)$$

1.3 Equações de Friedmann

A partir dessa seção, será utilizado o sistema de unidades no qual

$$\hbar = c = k_B = 1, \quad (1.41)$$

onde \hbar é a constante reduzida de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k_B é a constante de Boltzmann.

Índices gregos, por exemplo μ , abrangem os valores $\{0, 1, 2, 3\}$ que correspondem, respectivamente, à coordenada temporal e às três coordenadas espaciais. Já os índices latinos, por exemplo i , abrangem os valores $\{1, 2, 3\}$, e correspondem apenas às coordenadas espaciais.

Será utilizada também a convenção de soma de Einstein, onde índices repetidos em um mesmo termo de uma equação representam uma soma.

Em relação à métrica, como pode ser visto na seções anteriores, será utilizada a convenção “maximamente positiva”, onde o termo temporal é negativo e os termos espaciais são positivos, também chamada de convenção $\{-1, 1, 1, 1\}$. Caso haja alguma parte com convenção diferente, isso será explicitado no texto.

1.3.1 Equação de Einstein

Para deduzir as equações de Friedmann, partimos das equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

O lado esquerdo dessa equação está relacionado à geometria do espaço-tempo e seus termos são funções da métrica. Já o lado direito está relacionado às componentes de matéria do universo. Em termos simples, a equação de Einstein nos mostra que, assim como a matéria dita como o espaço-tempo deve se curvar, o espaço-tempo curvo dita como a matéria deve se mover. Abaixo, descreveremos cada termo que aparece nessa equação.

O primeiro termo, $G_{\mu\nu}$, é o tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.43)$$

O tensor $R_{\mu\nu}$, denominado tensor de Ricci, é dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}, \quad (1.44)$$

onde Γ refere-se aos símbolos de Christoffel, que, por sua vez, podem ser obtidos diretamente da métrica por meio de

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2}[g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}], \quad (1.45)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica inversa. Nas relações anteriores, a vírgula denomina a derivada parcial com relação à coordenada de índice correspondente; por exemplo, $g_{\alpha\nu,\beta} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}}$. O escalar R , por sua vez, é chamado de escalar de Ricci, e é obtido por meio da contração do tensor de Ricci com a métrica,

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.46)$$

O segundo termo, $\Lambda g_{\mu\nu}$, contém a chamada constante cosmológica Λ e a métrica $g_{\mu\nu}$.

O terceiro termo, $8\pi G T_{\mu\nu}$, contém a constante da gravitação de Newton G e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que está relacionado às características daquilo que está interagindo gravitacionalmente, seja matéria, radiação ou outro tipo de componente. No caso da métrica FLRW, o tensor energia-momento está sujeito às seguintes restrições (PIATTELLA, 2018, p. 29):

- não se pode ter fluxo de energia para nenhuma direção, pois isso violaria o princípio de isotropia, portanto $T_{0i} = T_{i0} = 0$;
- ao calcular o tensor de Einstein, temos que $G_{ij} \propto g_{ij}$, de forma que, pela equação de Einstein 1.42, $T_{ij} \propto g_{ij}$;
- assim como o tensor de Einstein só depende do tempo, o tensor energia-momento também dependerá apenas do tempo.

Considerando essas restrições, o tensor energia-momento para as diversas componentes do universo pode ser escrito (CARROLL, 2004, p. 333), na forma covariante, como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}\wp & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

ou, na forma mista,

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \wp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \wp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \wp \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

onde ρ é a densidade de energia⁵ e \wp é a pressão. A transição entre ambas as formas é dada pela relação

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}. \quad (1.49)$$

1.3.2 Equação de conservação de energia

Para entender a evolução do tensor energia-momento, é necessário considerar a equação de conservação de energia. Apenas para analogia, no caso sem gravidade, um fluido com velocidades desprezíveis seria descrito pelas equações de continuidade, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, e de Euler, $\frac{\partial \wp}{\partial x^i} = 0$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 34). A generalização para o

⁵ Como estamos utilizando as unidades naturais, não há necessidade de distinguir entre densidade de matéria e energia aqui.

contexto da relatividade geral é feita substituindo as derivadas comuns por derivadas covariantes. Assim, a equação de conservação de energia é dada por

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} T^{\alpha}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} T^{\mu}_{\alpha} = 0. \quad (1.50)$$

Por meio da análise da componente $\nu = 0$ da equação 1.50, considerando um universo homogêneo e isotrópico que possui uma métrica FLRW, chegamos à seguinte expressão para a lei de conservação,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} [3\rho + 3\wp] = 0. \quad (1.51)$$

Uma outra equação importante é a equação de estado, a qual relaciona a densidade e a pressão de uma certa componente. Para materiais em geral, essa equação pode ser bem complicada e altamente não linear, mas, no caso da cosmologia, por causa da diluição das componentes no universo (RYDEN, 2017, p. 94), a equação de estado assume uma forma bem simples,

$$\wp_s = w_s \rho_s, \quad (1.52)$$

onde w_s é o parâmetro da equação de estado,

$$w_s = \frac{\wp_s}{\rho_s}, \quad (1.53)$$

e o subíndice “s” pode se referir a qualquer uma das componentes do universo. Por exemplo, para matéria temos $w = 0$, para radiação temos $w = \frac{1}{3}$ e para uma constante cosmológica temos $w = -1$ ⁶.

Considerando os valores de w mencionados acima e a equação 1.51, é possível obtermos a dependência das componentes com relação ao fator de escala. Temos, por exemplo, $\rho_m \propto a^{-3}$ e $\rho_r \propto a^{-4}$. A primeira relação se deve, basicamente, ao decréscimo na densidade numérica de partículas de matéria conforme o universo se expande. A segunda relação, referente à densidade de radiação, se deve ao fato de, além da densidade numérica de fótons decrescer de acordo com a^{-3} , os fótons ainda perdem energia devido ao *redshift* (a energia cai com a^{-1}). De forma geral, se w é constante,

$$\rho \propto a^{-3(1+w_s)}. \quad (1.54)$$

1.3.3 As equações de Friedmann

Trabalhando com as componentes $\mu\nu = 00$ e $\mu\nu = ij$ da equação de Einstein 1.42, considerando a métrica FLRW, chegamos às seguintes equações para o fator de escala (CARROLL, 2004, p. 336),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (1.55)$$

⁶ Para uma descrição um pouco mais detalhada do porquê desses valores, veja (RYDEN, 2017, p. 93–96) e (CARROLL, 2004, p. 333–335).

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\wp). \quad (1.56)$$

Essas são as equações de Friedmann, que relacionam a taxa de variação do fator de escala às componentes do universo. Aqui, a constante cosmológica Λ não aparece explicitamente, pois ela já foi incluída na densidade ρ , juntamente às outras componentes⁷. A primeira equação de Friedmann 1.55 é suficiente para resolvermos para o fator de escala, caso saibamos a dependência de ρ em a . Ela é muitas vezes chamada simplesmente de “equação de Friedmann”, enquanto a segunda é chamada de “segunda equação de Friedmann”, ou “equação da aceleração”. Vale notar que as equações de Friedmann (equações 1.55 e 1.56) e a equação de conservação de energia (equação 1.51) não são independentes, pois esta última pode ser obtida diretamente da equação de Einstein por meio da identidade de Bianchi,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0, \quad (1.57)$$

onde ; refere-se à derivada covariante.

Podemos, ainda, definir o parâmetro de densidade, dado por

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{cr}}, \quad (1.58)$$

onde ρ_{cr} é a densidade crítica, definida por

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.59)$$

Usando essas definições, a equação de Friedmann 1.55 pode ser reescrita como

$$\Omega - 1 = \frac{\kappa}{H^2 a^2}. \quad (1.60)$$

Vemos, então, a razão de ρ_{cr} ser assim denominada: a razão da densidade das componentes com a densidade crítica é o que determina o sinal da curvatura do universo. Se $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} > 1$, o lado esquerdo dessa equação é positivo e, conseqüentemente, devemos ter $\kappa > 0$ do lado direito, correspondente a um universo esférico. Já se $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} < 1$, o lado esquerdo dessa equação é negativo e, portanto, devemos ter $\kappa < 0$ do lado direito, correspondente a um universo hiperbólico. Por fim, se $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} = 1$, o lado esquerdo da equação é nulo e, conseqüentemente, devemos ter $\kappa = 0$, correspondente a um universo plano.

Também é comum encontrarmos uma outra definição para os parâmetros de densidade, a definição em termos da densidade crítica atual, $\rho_{cr0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$,

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{cr0}}. \quad (1.61)$$

⁷ Lembre que podemos considerar a constante cosmológica como uma componente que obedece uma equação de estado do tipo $\wp_\Lambda = -\rho_\Lambda$, onde $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Outra forma de visualizar isso é “passando” o termo que envolve a constante cosmológica na equação de Einstein 1.42 para o lado direito e então embuti-lo no tensor energia-momento.

Com essa definição, a equação de Friedmann 1.55 pode ser escrita como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega - \frac{\kappa}{H_0^2 a^2}. \quad (1.62)$$

Podemos pensar no termo de curvatura como um outro parâmetro de densidade, apenas para deixarmos a notação mais enxuta⁸,

$$\Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{H_0^2 a^2}. \quad (1.63)$$

Assim, a equação de Friedmann se torna

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \Omega_\kappa. \quad (1.64)$$

Além disso, usando a equação 1.54, podemos escrever

$$\Omega_s = \frac{\rho_s}{\rho_{cr0}} = \frac{\rho_{s0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_s)}}{\rho_{cr0}} = \Omega_{s0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_s)}, \quad (1.65)$$

onde o subíndice s refere-se a uma componente qualquer, ρ_{s0} é a densidade atual dessa componente e

$$\Omega_{s0} \equiv \frac{\rho_{s0}}{\rho_{cr0}}. \quad (1.66)$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação de Friedmann como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{s=r,m,\nu,DE} \Omega_{s0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_s)} + \Omega_{\kappa0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \quad (1.67)$$

Os índices r , m , ν e DE correspondem a radiação, matéria, neutrinos e energia escura, respectivamente. Até aqui, a energia escura vem sendo tratada como uma constante cosmológica, ou seja $DE = \Lambda$, mas é interessante deixar o índice nessa relação como DE , pois assim podemos considerar outras possíveis formas de energia escura.

1.4 Distâncias cosmológicas

1.4.1 Revisitando a lei de Hubble

No início desse capítulo, foi apresentada a equação de Hubble (equação 1.9). Agora que já vimos a métrica correspondente ao princípio cosmológico, ou seja, a métrica FLRW, vamos realizar uma discussão mais detalhada da lei de Hubble. Porque essa lei só vale para pequenas distâncias, ou, equivalentemente, pequenos *redshifts*?

Consideremos a métrica dada pela equação 1.33. Agora, de acordo com essa relação, a distância física instantânea (isto é, considerando $d\Omega = 0$ e $dt = 0$), ou distância própria,

⁸ Vale ressaltar, porém, que o parâmetro de densidade de curvatura não corresponde a uma densidade de energia de fato. É apenas um artifício.

entre nossa posição ($\chi = 0$) e uma fonte na posição fixa χ_{fonte} é dada, para um certo tempo t , por

$$d_p(t) = a(t)\chi_{\text{fonte}}, \quad (1.68)$$

considerando a ausência de velocidades peculiares, como foi feito no início do capítulo. Apenas para visualização, a distância própria atual seria a medida que obteríamos se utilizássemos uma régua bem grande (da ordem das distâncias cosmológicas) e a colocássemos entre a fonte e a nossa posição de forma instantânea, o que é fisicamente impossível de ocorrer.

Agora, vamos definir a velocidade de recessão como sendo $v_r = \dot{d}_p = H(t)d_p(t)$. Veja, não há problemas se essa velocidade eventualmente for maior que a velocidade da luz, pois não há nada se movendo nessa velocidade - o espaço entre os pontos é que está expandindo⁹. Porém, novamente, não temos como observar essa velocidade de recessão diretamente.

O que podemos, então, observar? Podemos observar *redshift* z , fluxo de luz F , distância angular $\delta\theta$, dentre outras grandezas. Consideremos primeiramente o *redshift*. Como ele se relaciona com a velocidade de recessão? A distância física instantânea atual entre nossa posição e uma certa fonte, na ausência de movimentos peculiares, também pode ser definida a partir da métrica 1.33 por meio do caminho que um fóton percorre entre a fonte e nossa posição atual ($ds^2 = 0$). Assim, podemos escrever¹⁰

$$d_p(t_0) = a(t_0)\chi(t_e) = a_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.69)$$

onde t_e é o tempo quando um fóton foi emitido pela fonte, $\chi(t_e)$ é a distância comóvel percorrida pelo fóton desde a sua emissão em t_e até ser detectado no instante atual t_0 , que coincide com a distância comóvel da fonte, dado que ela se encontra a uma distância χ_{fonte} fixa, e $a(t_0) = a_0$. Como o fator de escala varia de forma suave na história recente do universo, podemos expandir $\frac{a_0}{a(t)}$ em uma série de Taylor para tempos próximos ao tempo atual. Essa expansão é dada, até segunda ordem (RYDEN, 2017, p. 157), por

$$\frac{a_0}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_0)^2, \quad (1.70)$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração,

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0}. \quad (1.71)$$

Portanto, a relação 1.69 fica

$$d_p(t_0) \approx (t_0 - t_e) + \frac{H_0}{2}(t_0 - t_e)^2, \quad (1.72)$$

⁹ Aliás, em um espaço-tempo curvo, não há nem sentido em se comparar velocidades de objetos em pontos distintos da variedade.

¹⁰ Lembre que, agora, estamos usando um sistema de unidades no qual $c = 1$.

onde $(t_0 - t_e)$ é chamado de tempo de retrospectiva ou, em inglês, *lookback time*. O *redshift* z , dado pela equação 1.4 também pode ser aproximado usando a relação 1.70,

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_e)^2, \quad (1.73)$$

de onde temos que

$$t_0 - t_e \approx H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 \right]. \quad (1.74)$$

Combinando as equações 1.72 e 1.74, temos, finalmente

$$d_p(t_0) \approx \frac{1}{H_0} z \left[1 - \frac{1 + q_0}{2} z \right], \quad (1.75)$$

ou

$$v_r(t_0) = H_0 d_p(t_0) \approx z \left[1 - \frac{1 + q_0}{2} z \right]. \quad (1.76)$$

Veja, portanto, que a velocidade de recessão v_r só pode ser associada a uma velocidade de redshift $v_{rs} \equiv z$ para $z \ll \frac{2}{1+q_0}$ (no modelo padrão atual, $q_0 \approx -0.53$ (RYDEN, 2017, p. 156)).

Portanto, a equação de Hubble (equação 1.9) só é válida, considerando v como uma velocidade de redshift (que é o que conseguimos observar), para baixos redshifts. Além disso, como veremos a seguir, as distâncias observáveis só coincidem com a distância própria, a qual não conseguimos observar, para baixos redshifts. Ou seja, a lei de Hubble, escrita como

$$v_{rs} = H_0 d_{obs}, \quad (1.77)$$

onde v_{rs} é uma velocidade inferida por *redshift* e d_{obs} uma distância observável, só é válida para $z \ll 1$.

1.4.2 Distância comóvel

A distância comóvel que a luz percorre desde que foi emitida por um objeto no tempo t até a observarmos no tempo atual t_0 , considerando a métrica FLRW (equação 1.33), é dada por

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{a(t)}^{a_0} \frac{da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')}, \quad (1.78)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala no momento da emissão e $a(t_0) = a_0$. As últimas igualdades são obtidas considerando a definição do parâmetro de Hubble (equação 1.5) e do *redshift* (equação 1.4). Esta não é uma distância observável, mas é muito utilizada ao longo dos cálculos teóricos, então é importante a definirmos aqui.

A distância própria atual da localização de onde o fóton foi emitido, de distância comóvel $\chi(t)$, até nós é dada por

$$d_p(t_0; t) = a(t_0)\chi(t) = a_0\chi(t), \quad (1.79)$$

Ela coincide com a distância própria atual da fonte na ausência de velocidades peculiares.

1.4.3 Distância diâmetro angular

Uma das maneiras comuns de se medir distâncias em astronomia é utilizando fontes cujo tamanho físico l é conhecido, chamadas de “régua padrão”. Se o ângulo $\delta\theta$ subtendido no céu por essa fonte for pequeno, podemos escrever

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}, \quad (1.80)$$

onde d_A é a distância diâmetro angular. Utilizando a métrica FLRW (equação 1.33), podemos mostrar que l é dado por

$$l = a(t)S_\kappa(\chi(t))\delta\theta, \quad (1.81)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala quando a luz foi emitida. Dessa forma, podemos escrever

$$d_A = a(t)S_\kappa(\chi(t)) = a_0 \frac{S_\kappa(\chi(z))}{1+z}, \quad (1.82)$$

onde usamos a definição do *redshift* (equação 1.4).

Para $z \ll 1$, temos que $S_\kappa(\chi) \approx \chi$ e, portanto, $d_A \approx a_0\chi = d_p$.

1.4.4 Distância luminosidade

Uma outra maneira comum de se medir as distâncias em astronomia é por meio de fontes cuja luminosidade L é conhecida, chamadas de “vela padrão”. Ao medir o fluxo f dessa fonte, podemos obter a distância luminosidade d_L por meio da relação

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.83)$$

Considerando a métrica FLRW (equação 1.33), podemos mostrar que os fótons, no caminho até nós, são distribuídos sobre a superfície de uma esfera de raio próprio $d_p(t_0; t) = a_0\chi(t)$ e área própria $A_p(t_0; t) = 4\pi[a_0S_\kappa(\chi(t))]^2$. Além disso, a energia do fóton cai por um fator de $\frac{a_0}{a(t)} = 1+z$ ao longo do caminho, pois seu comprimento de onda é esticado com a expansão do universo, e o intervalo entre a detecção de dois fótons aumenta por um fator de $\frac{a_0}{a(t)} = 1+z$, por causa da expansão do espaço entre eles ao longo do caminho. Dessa forma, o fluxo observado é dado por

$$f = \frac{L}{4\pi[a_0S_\kappa(\chi(z))]^2(1+z)^2}, \quad (1.84)$$

de forma que

$$d_L = a_0S_\kappa(\chi(z))(1+z). \quad (1.85)$$

Para $z \ll 1$, temos novamente que $S_\kappa(\chi) \approx \chi$ e, portanto, $d_L \approx a_0\chi = d_p$.

1.5 Equação de Boltzmann

Nas seções anteriores, vimos as equações que descrevem a geometria, ou seja, a gravidade, em espaços homogêneos e isotrópicos. Porém, para uma descrição completa do cenário cosmológico, precisamos também das equações que descrevem as partículas que interagem gravitacionalmente. Essa descrição é feita por meio da equação de Boltzmann, que será apresentada a seguir.

1.5.1 Função de distribuição

Antes de apresentarmos a equação de Boltzmann em sua forma relativística, vamos definir a função de distribuição em sua forma clássica. Isso pode ser feito por meio da equação

$$dN(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{(d^3\mathbf{x})(d^3\mathbf{p})}{(2\pi)^3}, \quad (1.86)$$

onde $dN(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é o número de partículas em um volume infinitesimal no espaço de fase, $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é a função de distribuição, e $\frac{(d^3\mathbf{x})(d^3\mathbf{p})}{(2\pi)^3}$ é o elemento de volume do espaço de fase. Esse fator de $(2\pi)^3$ aparece por causa do princípio de incerteza de Heisenberg, que diz que é impossível localizar precisamente uma partícula no espaço de fase. O máximo que podemos fazer é localizá-la em um volume mínimo de $V = (2\pi)^3$ ¹¹ ao redor de um ponto (\mathbf{x}, \mathbf{p}) .

Com a função de distribuição, é possível obtermos diversas grandezas relacionadas ao sistema de partículas. A densidade numérica de partículas de uma certa espécie s , por exemplo, é dada por (PIATTELLA, 2018, p. 62)

$$n_s(\mathbf{x}, t) \equiv g_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (1.87)$$

onde g_s é a degenerescência da espécie em questão.

A densidade de energia, por sua vez, é dada por

$$\rho_s(\mathbf{x}, t) = g_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) E_s(p), \quad (1.88)$$

onde $E_s(p) = \sqrt{p^2 + m_s^2}$ é a energia e $p \equiv |\mathbf{p}|$.

Podemos também definir a pressão em termos da função de distribuição. Ela é dada por

$$\wp_s(\mathbf{x}, t) = g_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{p^2}{3E_s(p)}. \quad (1.89)$$

¹¹ Em unidades SI, esse volume seria dado por $V = (2\pi\hbar)^3$. Para uma dedução desse volume, ver (PIATTELLA, 2018, p. 61–62).

Na forma relativística, generalizando as relações anteriores, o tensor energia-momento pode ser escrito (PIATTELLA, 2018, p. 62), em termos da função de distribuição, como

$$T^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, t) = g_s \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{-\det[g_{\alpha\beta}]}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (1.90)$$

onde

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (1.91)$$

é o momento comóvel e λ é um parâmetro afim, geralmente tomado como sendo $\lambda = \frac{\tau}{m}$ para partículas massivas, onde τ é o tempo próprio. Podemos perceber que a função de distribuição continua dependendo apenas do tri-momento \mathbf{p} . Ela não aparece com uma dependência generalizada em P^μ pois é possível eliminar a dependência em P^0 em detrimento das componentes espaciais do quadri-momento, como será exibido mais adiante.

1.5.2 Equação de Boltzmann clássica

A função de distribuição para uma dada espécie evolui conforme a equação de Boltzmann, dada por

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (1.92)$$

onde $C[f]$ é chamado termo de colisão, e representa a interação entre partículas (DODDELSON; SCHMIDT, 2021, p. 63).

A derivada total em relação ao tempo pode ser expressa em termos do operador de Liouville (PIATTELLA, 2018, p. 78),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f \equiv \hat{L}(f). \quad (1.93)$$

Se não há interações entre diferentes partículas, ou se essas interações não são relevantes, podemos escrever

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (1.94)$$

que representa o fato de que o número de partículas é conservado em um elemento de volume do espaço de fase.

1.5.3 Equação de Boltzmann relativística

No caso relativístico, a função de distribuição deve ser escrita com uma dependência mais geral em x^μ e P^μ , isto é, $f(x^\mu, P^\mu)$. A equação de Boltzmann tem uma forma análoga à equação 1.92, porém a derivada da função de distribuição não é feita em relação

ao tempo, mas sim em relação a um parâmetro afim λ ¹² (PIATTELLA, 2018, p. 81),

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{d\lambda}. \quad (1.95)$$

Utilizando agora a equação da geodésica¹³, que carrega as informações da geometria,

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} P^\nu P^\rho = 0, \quad (1.96)$$

a equação 1.95 se torna

$$\frac{df}{d\lambda} = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \equiv \hat{L}_{rel}(f), \quad (1.97)$$

onde $\hat{L}_{rel}(f)$ é o operador de Liouville relativístico.

Podemos, ainda, eliminar a dependência da função de distribuição em P^0 , utilizando a relação

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2, \quad (1.98)$$

também chamada de vínculo de camada de massa (*mass-shell constraint*). Para obtermos essa equação, consideremos a métrica, dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.99)$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por $(d\lambda)^2$, temos que

$$\frac{(ds)^2}{(d\lambda)^2} = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu, \quad (1.100)$$

utilizando a equação 1.91. No caso de uma partícula massiva, podemos escolher $\lambda = \frac{\tau}{m}$, onde τ é o tempo próprio, definido por $ds^2 = -d\tau^2$. Dessa forma, temos

$$\frac{(ds)^2}{(d\lambda)^2} = m^2 \frac{(ds)^2}{(d\tau)^2} = -m^2, \quad (1.101)$$

que, junto com a equação 1.100, implica na equação 1.98. No caso de uma partícula sem massa, segue diretamente da equação 1.100 que

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0. \quad (1.102)$$

A equação 1.97 fica, portanto,

$$\frac{df}{d\lambda} = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\nu\rho} P^\nu P^\rho \frac{\partial f}{\partial P^i}, \quad (1.103)$$

onde, agora, a função de distribuição depende de x^μ e P^i , isto é, $f = f(x^\mu, P^i)$.

¹² De acordo com o princípio da covariância geral, as leis da física devem ser invariantes sob mudanças de coordenadas. Nessa equação e na equação da geodésica, para escrevê-las de forma geral, sem nos restringirmos ao uso de um sistema de coordenadas específico, é necessário que a derivada total seja tomada com relação a um parâmetro afim, preservando, portanto, o princípio da covariância na escrita da equação.

¹³ A geodésica pode ser definida como uma curva que transporta o seu vetor tangente paralelamente ao longo de si mesma, isto é, $u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = 0$, onde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ é o vetor tangente ao caminho considerado. Ao definirmos a geodésica dessa maneira, estamos definindo também a parametrização dessa geodésica em termos de um parâmetro afim, isto é, qualquer parâmetro relacionado ao tempo próprio por meio da equação $\lambda = a\tau + b$ (CARROLL, 2004). Portanto, a forma da equação da geodésica apresentada aqui já considera, necessariamente, uma parametrização afim. Se fosse utilizada outra classe de parâmetros, o lado direito da equação não seria nulo.

1.5.4 Equação de Boltzmann para a métrica FLRW

Aqui, vamos supor um universo espacialmente plano, isto é, $K = 0$ na métrica FLRW, não apenas para simplificar as deduções, mas também pelo fato de haver fortes evidências observacionais em favor de um universo espacialmente plano (AGHANIM et al., 2021). Caso o leitor tenha interesse em uma discussão sem essa restrição na curvatura espacial, uma boa referência é a tese de doutorado de Wayne Hu (HU, 1995).

Primeiramente, vamos definir a norma do tri-momento em termos das componentes do quadri-momento, dada por

$$p^2 \equiv g_{ij} P^i P^j. \quad (1.104)$$

Utilizando essa equação e a equação 1.98, obtemos, para a métrica FLRW (equação 1.40),

$$E^2 \equiv -g_{00}(P^0)^2 = p^2 + m^2. \quad (1.105)$$

Para conseguirmos trabalhar com a função de distribuição com dependência no tri-momento, $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, é útil descrever o tri-momento \mathbf{p} em termos de seu módulo p e seus vetores unitários $\hat{p}^i = \hat{p}_i$, que satisfazem, por definição, $\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j = 1$. Esperamos, ainda, que os vetores unitários sejam proporcionais às componentes espaciais do quadri-momento (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 66), isto é,

$$P^i \equiv C \hat{p}^i, \quad (1.106)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Para descobri-la, podemos utilizar a equação 1.104, tal que

$$p^2 = g_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j C^2. \quad (1.107)$$

Aplicando essa equação para a métrica FLRW, chegamos a

$$p^2 = a^2 C^2, \quad (1.108)$$

ou seja, $C = \frac{p}{a}$. Dessa forma, podemos escrever as componentes do quadri-momento em termos do tri-momento como

$$P^i = \frac{p}{a} \hat{p}^i. \quad (1.109)$$

Podemos mostrar, por meio da equação 1.103 após o cálculo dos símbolos de Christoffel e utilização das relações anteriores entre o tri-momento e o quadri-momento, que a equação de Boltzmann para um universo homogêneo e isotrópico espacialmente plano é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - H p \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]. \quad (1.110)$$

Nessa equação, não há dependência na direção do momento, apenas em seu módulo, devido à homogeneidade e isotropia. O termo que contém a dependência na posição x^i

também poderia ser retirado, pelo mesmo motivo, mas ele será deixado aqui para uso em considerações posteriores.

Além disso, integrando a equação 1.110 em relação ao momento \mathbf{p} , considerando $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$ na integração, obtemos também a seguinte equação para a densidade numérica $n(t)$ no universo homogêneo e isotrópico,

$$\frac{dn(t)}{dt} + 3Hn(t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} C[f]. \quad (1.111)$$

Essa equação, considerando um termo de colisão nulo, é análoga à equação de conservação de energia 1.51. Na ausência de colisões, vemos que a densidade numérica de partículas cai com a^{-3} , pois o volume de uma certa região contendo um número constante de partículas cresce com a^3 . No entanto, se o termo de colisão for não nulo, a densidade numérica de uma certa espécie de partículas é modificada não apenas pelo aumento do volume do universo, mas também pela interação com as demais espécies (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 68).

1.5.5 Termos de colisão

O termo de colisão carrega as informações acerca da interação entre partículas. Um processo comumente estudado em cosmologia é o processo do tipo (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 68)

$$(1)_{\mathbf{p}} + (2)_{\mathbf{q}} \leftrightarrow (3)_{\mathbf{p}'} + (4)_{\mathbf{q}'}, \quad (1.112)$$

onde os subíndices referem-se aos momentos das partículas interagentes. Nesse processo, energia e momento são conservados. Para um certo tipo de partículas, diferentes estados, como os estados de spin, possuem as mesmas funções de distribuição em geral. Portanto, ao invés de definir uma função de distribuição para cada estado, é comum tratá-los utilizando apenas uma função de distribuição multiplicada pelo peso estatístico correspondente g_s , também chamado de degenerescência.

Como a colisão é local, ou seja, ocorre na mesma posição \mathbf{x} e instante de tempo t , o termo de colisão dependerá apenas do momento \mathbf{p} . Para as partículas do tipo 1, por exemplo, precisamos contabilizar, para um certo momento \mathbf{p} no espaço de fase, as partículas de tipo 1 que estão deixando esse elemento do espaço de fase e as que estão entrando nele. Para isso, precisamos somar sobre todos os outros momentos que afetam a função de distribuição $f_1(\mathbf{p})$.

O termo de colisão é dado pela expressão

$$\begin{aligned}
C[f_1(\mathbf{p})] &= \frac{1}{2E_1(p)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_2(q)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_3(p')} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_4(q')} |\mathcal{M}|^2 \\
&\times (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}[\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}'] \delta_D^{(1)}[E_1(p) + E_2(q) - E_3(p') - E_4(q')] \\
&\times \{f_3(\mathbf{p}') f_4(\mathbf{q}') [1 \pm f_1(\mathbf{p})] [1 \pm f_2(\mathbf{q})] - f_1(\mathbf{p}) f_2(\mathbf{q}) [1 \pm f_3(\mathbf{p}')] [1 \pm f_4(\mathbf{q}')]\},
\end{aligned} \tag{1.113}$$

onde $E_s(p)$ é a energia da partícula s , dada pela mesma expressão já vista anteriormente,

$$E_s(p) = \sqrt{p^2 + m_s^2}, \tag{1.114}$$

f_s é a função de distribuição das partículas de tipo s e $|\mathcal{M}|^2$ é a amplitude de espalhamento quadrática e depende dos detalhes microfísicos da interação que está ocorrendo. As funções deltas de Dirac estão presentes para impor a conservação de energia e momento. Além disso, termos da forma $1 + f$ e $1 - f$ estão presentes para contabilizar os efeitos de emissão estimulada e do princípio de exclusão de Pauli. Para mais detalhes da dedução dessa equação, ver (PIATTELLA, 2018, p. 84 – 87) e (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 68 – 70).

1.6 O modelo Λ CDM

O modelo mais bem sucedido em explicar as observações cosmológicas, considerado o modelo padrão da cosmologia, é o chamado modelo Λ CDM. Esse modelo é composto por matéria bariônica (matéria composta de prótons, nêutrons e elétrons¹⁴), radiação (fótons e neutrinos¹⁵), matéria escura fria (em inglês, *cold dark matter*, abreviado como CDM) e energia escura na forma de uma constante cosmológica Λ . Nesse modelo, a equação de Friedmann 1.67 é dada por

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \Omega_{c0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{b0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\kappa 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \tag{1.115}$$

O sucesso desse modelo reside em sua série de explicações e previsões bem sucedidas. Por exemplo, as curvas de rotação de galáxias e o lenteamento gravitacional dependem da existência de matéria escura para sua explicação, componente importante do modelo padrão. A introdução da constante cosmológica também tem papel importante na explicação da expansão acelerada do universo. O modelo também fez previsões bem sucedidas, como as previsões dos espectros de potência da radiação cósmica de fundo. Esses

¹⁴ Elétrons na verdade são léptons, mas chamamos tudo de “matéria bariônica” pois a massa dos prótons e nêutrons é muito maior que a dos elétrons.

¹⁵ Os neutrinos, na verdade, deixam de ser relativísticos no universo recente, devendo então ser incluídos como uma componente de matéria, e não de radiação, nesse período.

são apenas alguns poucos exemplos dos sucessos desse modelo, os quais vêm sustentando-o ao longo das últimas décadas. Porém, há também problemas importantes em aberto. Não sabemos, por exemplo, a natureza física da matéria escura e da energia escura; aliás, para esta última, cálculos na tentativa de associar a energia escura à energia do vácuo chegaram a discrepâncias de dezenas de ordens de grandeza. Temos também o problema da tensão de Hubble, mencionado anteriormente. Uma boa referência para uma discussão dos sucessos e falhas desse modelo, e possíveis soluções, pode ser vista em (BULL et al., 2016).

A seguir, vamos exibir alguns valores recentes obtidos para esses parâmetros. O propósito aqui é apenas mostrar esses valores obtidos em um levantamento específico, sem entrar em detalhes nos métodos utilizados para a obtenção destes e nem na comparação entre diferentes levantamentos. A ideia é apenas ilustrarmos os valores atuais dos parâmetros cosmológicos. Os últimos resultados do levantamento Planck (AGHANIM et al., 2021) indicam os seguintes valores para alguns desses parâmetros cosmológicos, ao nível de confiança de 68%:

$$\Omega_{\kappa 0} = 0.001 \pm 0.002, \quad (1.116)$$

$$\Omega_{c0}h^2 = 0.120 \pm 0.001, \quad (1.117)$$

$$\Omega_{b0}h^2 = 0.0224 \pm 0.0001, \quad (1.118)$$

$$H_0 = (67.4 \pm 0.05) \frac{\text{km}}{\text{sMpc}} \quad (1.119)$$

e

$$\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.007. \quad (1.120)$$

Além disso, a partir de cálculos utilizando a equação de Boltzmann e considerando a temperatura observada da CMB, T_{CMB} , e o número efetivo das espécies de neutrinos observado, $N_{eff} = N_\nu g_\nu$, onde N_ν é o número de diferentes espécies de neutrinos e g_ν é a degenerescência dos neutrinos (PIATTELLA, 2018), é possível mostrar que

$$\Omega_{\gamma 0}h^2 \approx 2.47 \times 10^{-5} \quad (1.121)$$

e

$$\Omega_{\nu 0}h^2 \approx 1.68 \times 10^{-5}. \quad (1.122)$$

Como esses parâmetros de radiação são muito pequenos em comparação a Ω_{m0} , podemos obter Ω_Λ diretamente de Ω_{m0} por meio da relação $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{m0}$, considerando um universo plano $\Omega_{\kappa 0} = 0$. Nesse caso, temos (AGHANIM et al., 2021)

$$\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.007, \quad (1.123)$$

ao nível de confiança de 68%.

Vemos, portanto, que a componente dominante atualmente é a energia escura. Em relação à matéria, apenas uma pequena fração $\Omega_{b0} \approx 0.05$ corresponde à matéria bariônica, cujas propriedades físicas são bem conhecidas. Ou seja, só conhecemos bem as propriedades de 5% das componentes de nosso universo, um fato intrigante.

2 O Universo Perturbado

Deste capítulo em diante, serão utilizados o mesmo sistema de unidades e as mesmas convenções apresentadas na seção 1.3 do capítulo anterior. Além disso, consideraremos um universo espacialmente plano, da mesma forma que foi feito em parte da seção 1.5. Passaremos a utilizar também a convenção de que $a(t_0) = a_0 = 1$.

2.1 Introdução às perturbações

Até agora, trabalhamos com o universo perfeitamente homogêneo e isotrópico. Porém, como já vimos, isso só é válido em grandes escalas. Em pequenas escalas, o universo é altamente inhomogêneo e anisotrópico (HELBIG, 2020). Para levar em conta a formação de estruturas em nosso universo, portanto, é necessário perturbar o “plano de fundo” homogêneo e isotrópico.

2.1.1 Perturbações na métrica

Uma das maneiras de escrever a métrica perturbada é (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 71)

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t), \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ corresponde ao potencial Newtoniano e $\Phi(\mathbf{x}, t)$ é a perturbação da parte espacial da métrica, que pode ser interpretada como uma perturbação local do fator de escala ¹. Essas perturbações têm magnitudes da ordem de 10^{-4} em nosso universo, o que justifica o tratamento por teoria de perturbação.

Na equação 2.1, aparecem apenas perturbações escalares, mas há também as perturbações vetoriais e tensoriais, que não serão discutidas nesse momento. Como os diferentes tipos de perturbação evoluem de forma independente, podemos tratar separadamente as perturbações escalares. Além disso, a forma da métrica exibida corresponde a um tipo particular de escolha de coordenadas, denominado calibre Newtoniano conforme. Esses diferentes tipos de escolhas de coordenadas não modificam a física do problema, afinal, os resultados físicos devem ser os mesmos. Elas apenas alteram a forma das variáveis, podendo simplificar os cálculos e a interpretação de certos resultados.

¹ Alguns livros têm notação distinta para essas perturbações. No livro de Steven Weinberg (WEINBERG, 2008), por exemplo, $\Psi \rightarrow \Phi$ e $\Phi \rightarrow -\Psi$.

2.1.2 A equação de Boltzmann para a radiação, sem colisão

Por meio da equação 1.103, calculando os símbolos de Christoffel para a métrica perturbada 2.1 e eliminando termos de segunda ordem, é possível mostrar que a equação de Boltzmann para a radiação ($m = 0$ e $E = p$) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i}{a} (1 - \Phi + \Psi) - \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ [H + \dot{\Phi}]p + \frac{1}{a} p^i \Psi_{,i} \right\} \\ & + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{1}{a} \left[(\Phi - \Psi)_{,i} - \hat{p}^i \hat{p}^k (\Phi - \Psi)_{,k} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde, lembrando, a vírgula no subíndice refere-se às derivadas com relação à coordenada x de índice correspondente, $p^i = p\hat{p}^i$ e $\dot{\Phi}$ representa a derivada com relação ao tempo de Φ .

Além disso, os fótons no universo homogêneo obedecem a uma distribuição de Bose-Einstein, sendo esta a distribuição de equilíbrio para bósons a uma certa temperatura T (PIATTELLA, 2018, p. 65). Ela é dada por

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1}. \quad (2.3)$$

A distribuição análoga para férmions em equilíbrio é a distribuição de Fermi-Dirac, dada por

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + 1}. \quad (2.4)$$

Em ambas as distribuições, μ é o potencial químico. Essas distribuições não dependem da posição \mathbf{x} nem da direção do momento $\hat{\mathbf{p}}$, e sim do módulo do momento p por meio da energia $E_s(p)$.

Portanto, a equação 2.3 representa a função de distribuição de ordem zero dos fótons. Como ela não depende de \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{p}}$, as derivadas dessa função em relação à posição e à direção do momento são de primeira ordem, e ao multiplicar outros termos de primeira ordem, surgem termos de segunda ordem, que podem ser eliminados ². Além disso, o potencial químico pode ser desprezado para os fótons ($\frac{\mu}{T} < 9 \times 10^{-5}$) (PIATTELLA, 2018, p. 67). Portanto, a equação de Boltzmann para a radiação se torna

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{1}{a} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (2.5)$$

² Aqui, supomos que os desvios da distribuição de ordem zero sejam da mesma ordem de magnitude das perturbações gravitacionais Φ e Ψ (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 78).

2.1.3 A equação de Boltzmann para partículas massivas, sem colisão

Para as partículas massivas, utilizando a equação 1.103, os símbolos de Christoffel para a métrica perturbada e eliminando termos de segunda ordem, podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i p}{a E} (1 - \Phi + \Psi) - p \frac{\partial f}{\partial p} \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \Psi_{,i} \right] \\ & + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{E}{ap} \left[\left(\frac{p^2}{E^2} \Phi - \Psi \right)_{,i} - \hat{p}^i \hat{p}^k \left(\frac{p^2}{E^2} \Phi - \Psi \right)_{,k} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Além disso, supondo também que a função de distribuição da matéria não depende da posição e da direção do momento, chegamos à equação

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (2.7)$$

Se $E = p$, caso dos fótons, essa equação se reduz à equação 2.5.

No caso da matéria, porém, a premissa de um comportamento linear não é válida para o universo tardio. Nesse caso, as equações devem ser modificadas para incluir efeitos não-lineares.

2.2 As equações de Boltzmann perturbadas para fótons, neutrinos e matéria

2.2.1 Fótons

2.2.1.1 A função de distribuição perturbada para os fótons

Além das equações perturbadas obtidas anteriormente, é necessário, ainda, perturbarmos a função de distribuição. No caso dos fótons, essa perturbação pode ser introduzida escrevendo a função de distribuição da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{\mathbf{p}}, t) = \left\{ \exp \left[\frac{p}{T(t)[1 + \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)]} \right] - 1 \right\}. \quad (2.8)$$

Nessa equação, $\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)$ é a perturbação de temperatura fracionária, que também pode ser representada por $\frac{\delta T}{T}$. A dependência dela no módulo do momento p pode ser desconsiderada, pois a interação dominante (espalhamento Compton) praticamente não modifica o momento dos fótons (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 113).

Podemos expandir a função de distribuição em primeira ordem em $\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)$, obtendo

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \simeq f^{(0)}(p, t) - p \frac{\partial f^{(0)}(p, t)}{\partial p} \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t), \quad (2.9)$$

onde

$$f^{(0)}(p, t) \equiv \frac{1}{\exp \left[\frac{p}{T} \right] - 1} \quad (2.10)$$

é a distribuição de ordem zero, uma distribuição de Bose-Einstein com potencial químico nulo. As derivadas em relação ao módulo do momento podem ser convertidas em derivadas em relação à temperatura, ou vice-versa, via $T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}$.

Agora, a equação de Boltzmann 2.5 pode ser separada em uma parte de ordem zero e uma parte de primeira ordem. A parte de ordem zero é dada por (ver equação 1.110)

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{ordem zero}} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0. \quad (2.11)$$

Como estamos tratando da distribuição de ordem zero, ou seja, a distribuição de equilíbrio, o termo de colisão conseqüentemente é nulo (a taxa para uma dada reação e a taxa da reação inversa se anulam no caso do equilíbrio).

Por outro lado, se inserirmos na equação 2.5 a expansão 2.9, podemos extrair a seguinte equação de Boltzmann, envolvendo apenas termos de primeira ordem:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{primeira ordem}} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[\dot{\Theta} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right]. \quad (2.12)$$

2.2.1.2 Termo de colisão

Aqui, será feita uma discussão resumida do termo de colisão para os fótons. Para um desenvolvimento mais detalhado e, conseqüentemente, justificativas para as suposições feitas em algumas partes dessa seção, ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 114–119) e (PIATTELLA, 2018, p. 173–176).

O processo de interesse, no caso dos fótons, é o espalhamento Compton,

$$e^-(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p}) \leftrightarrow e^-(\mathbf{q}') + \gamma(\mathbf{p}'), \quad (2.13)$$

onde os termos nos parênteses são os momentos de cada partícula. Considerando a equação 1.113 e integrando sobre os momentos, exceto \mathbf{p} (estamos interessados em analisar a equação de Boltzmann para a função de distribuição $f(\mathbf{p})$), temos

$$\begin{aligned} C[f(\mathbf{p})] &= \frac{1}{2E(p)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} \sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}[\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}'] \delta_D^{(1)}[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ &\times \{f_e(\mathbf{q}')f(\mathbf{p}') - f_e(\mathbf{q})f(\mathbf{p})\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde a soma é sobre os estados finais de spins do elétron e do fóton após a colisão, sendo dois estados para cada, e do elétron que colide inicialmente com o fóton de momento \mathbf{p} . Nessa equação, os fatores de emissão estimulada e de exclusão de Pauli não aparecem. Isto ocorre porque os fatores de emissão estimulada se cancelam, enquanto que a exclusão de Pauli deixa de ser importante após a época de aniquilação elétron-pósitron. As energias dos fótons são dadas por $E(p) = p$ e $E(p') = p'$. Já para os elétrons, será considerado o

limite não-relativístico (na recombinação, as energias cinéticas dos elétrons, da ordem da temperatura T , são muito menores que sua massa). Portanto, próximo ao equilíbrio,

$$\begin{aligned} E(p) &= p \sim T, \\ E_e(q) - m_e &= \frac{q^2}{2m_e} \sim T \Rightarrow q \sim T \sqrt{\frac{2m_e}{T}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde p é o momento do fóton, $E_e(q)$ refere-se à energia do elétron, q é o momento do elétron e m_e é a massa do elétron.

Para prosseguir, iremos considerar que pouca energia é transferida ($p \simeq p'$) no espalhamento Compton. O termo de colisão se torna, sob essa aproximação,

$$\begin{aligned} C[f(\mathbf{p})] &= \frac{\pi}{8m_e^2 p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_e(\mathbf{q}) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} \sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \left\{ \delta_D^{(1)}(p - p') + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{q}}{m_e} \frac{\partial \delta_D^{(1)}(p - p')}{\partial p'} \right\} \{f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em relação à amplitude quadrática do espalhamento Compton, podemos escrever, no limite de baixas energias (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 117) (PIATTELLA, 2018, p. 175)

$$\sum_{3 \text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 = 32\pi\sigma_T m_e^2 \quad (\text{média sobre os spins e ângulos}), \quad (2.17)$$

onde σ_T é a seção de choque de Thomson. Neste trabalho, não entraremos em detalhes na obtenção dessa amplitude quadrática, que depende dos detalhes microscópicos da interação considerada. O cálculo completo dessa amplitude é feito no contexto da teoria quântica de campos (ver, por exemplo, (BURDMAN, 2023)). O que é importante ressaltar é que essa expressão final é obtida fazendo uma média sobre os estados de spin dos fótons incidente e espalhado e também sobre os ângulos (a princípio, haveria um fator dependente de $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}'$ nessa expressão). Por conta disso, a polarização da radiação é ignorada, bem como a dependência angular do espalhamento Compton. Porém, o efeito de polarização é importante e se acopla com as perturbações de temperatura. Para o tratamento completo dos fótons, portanto, é importante introduzir esse termo de polarização posteriormente. A seguir, consideramos essa expressão para a amplitude quadrática. Além disso, termos de segunda ordem na transferência de energia (lembramos que, no espalhamento Compton, a transferência de energia é pequena) serão descartados. Com essas considerações e algumas manipulações algébricas, chegamos à equação

$$C[f(\mathbf{p})] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{\mathbf{p}}) + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (2.18)$$

onde \mathbf{u}_b é a velocidade de grupo (em inglês, *bulk velocity*) dos elétrons, n_e é a densidade de elétrons livres e Θ_0 é o monopolo, definido por

$$\Theta_0(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{x}, t), \quad (2.19)$$

onde Ω' é o ângulo sólido associado ao vetor unitário $\hat{\mathbf{p}}'$.

Quando o espalhamento Compton é muito eficiente, somente a perturbação de monopolo sobrevive, desconsiderando a velocidade de grupo dos elétrons. Por outro lado, se essa velocidade é importante, haverá também a contribuição de um momento de dipolo. O espalhamento Compton deixa de ser eficiente depois do desacoplamento da matéria bariônica e dos fótons, porém a abordagem a partir da equação de Boltzmann permanece válida.

2.2.1.3 A equação de Boltzmann para os fótons

Finalmente, igualando as equações 2.12 e 2.18, obtemos

$$\dot{\Theta} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (2.20)$$

onde os pontos denotam derivadas com relação ao tempo t .

É interessante escrever essa equação em termos do tempo conforme, ao invés do tempo cósmico. Ele é definido por

$$d\eta = \frac{dt}{a} \quad \text{ou} \quad \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.21)$$

Nessa equação, a variação $\eta - \eta_i$ representa também a distância comóvel que um fóton viaja entre os tempos η e η_i . Agora, considerando que $\eta(t_i = 0) = 0$ ³, podemos escrever

$$\eta(t) \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.22)$$

Essa última equação define o horizonte comóvel, isto é, a distância comóvel que a luz poderia ter percorrido desde o início dos tempos. Portanto, nenhuma informação poderia ter se propagado entre regiões cuja distância entre elas fosse maior que η para um certo tempo t . Além dessa interpretação clara do tempo conforme em termos da distância comóvel que a luz percorre, uma outra vantagem dele é que a métrica (equação 1.40) assume uma forma simples,

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.23)$$

Portanto, a equação 2.20, em termos do tempo conforme, fica

$$\Theta' + \hat{p}^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \Phi' + \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T a [\Theta_0 - \Theta + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (2.24)$$

onde as linhas, por exemplo em Θ' , agora denotam derivadas com relação ao tempo conforme.

³ Essa não é uma boa definição no contexto da inflação. Nele, é mais conveniente que η seja nulo para $t_i = t_e$, onde t_e é o momento do fim da inflação.

É comum, e mais prático, trabalharmos com as equações diferenciais no espaço de Fourier. A transformada de Fourier espacial de uma função é definida (RILEY; HOBSON; BENCE, 2006, p. 451–453)

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}, \quad (2.25)$$

e a transformada inversa é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \quad (2.26)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda e \mathbf{x} é o vetor de posição. As constantes que aparecem nas definições dessas transformadas podem ser escolhidas de formas diferentes; o único requisito é que, quando multiplicadas, resultem em $\frac{1}{(2\pi)^3}$. Dentre várias propriedades úteis dessas transformadas, uma delas é que as derivadas se tornam relações algébricas no espaço de Fourier ⁴,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial x^i} \rightarrow ik_i \tilde{f}(\mathbf{k}, \eta). \quad (2.27)$$

Para escrever a equação de Boltzmann para os fótons, equação 2.24, no espaço de Fourier, primeiro vamos definir algumas variáveis. A primeira é o cosseno entre \mathbf{k} e $\hat{\mathbf{p}}$, denominado μ e definido por

$$\mu \equiv \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{k}. \quad (2.28)$$

Assim, se pensarmos em uma perturbação de temperatura na forma de uma onda plana, definida por um certo \mathbf{k} que aponta na direção em que a temperatura muda (aponta na direção do gradiente), $\Theta(k, \mu = 1)$ representaria, por exemplo, um fóton que viaja na mesma direção do gradiente (ver a figura 9).

Além disso, no contexto das observações cosmológicas em grande escala, verificamos que o campo de velocidade possui rotacional praticamente nulo. Dessa forma, a velocidade é irrotacional no espaço real. De forma bem geral, isso é explicado pois, no modelo padrão da cosmologia, não há fontes para campos de velocidades com vorticidade, isto é, com rotacional não nulo. As condições iniciais do universo no modelo padrão também são irrotacionais. Não entraremos em detalhes dessa questão neste trabalho; mais informações podem ser vistas em (BERTSCHINGER, 1995) e (UMEH, 2023). No espaço de Fourier, isso quer dizer que a velocidade aponta na mesma direção de \mathbf{k} (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 121). Portanto, podemos escrever

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{k}, \eta) = \frac{\mathbf{k}}{k} u_b(\mathbf{k}, \eta). \quad (2.29)$$

Por fim, podemos definir a profundidade ótica,

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a, \quad (2.30)$$

⁴ Como o vetor de onda é definido no espaço Euclidiano, $k^i = k_i$.

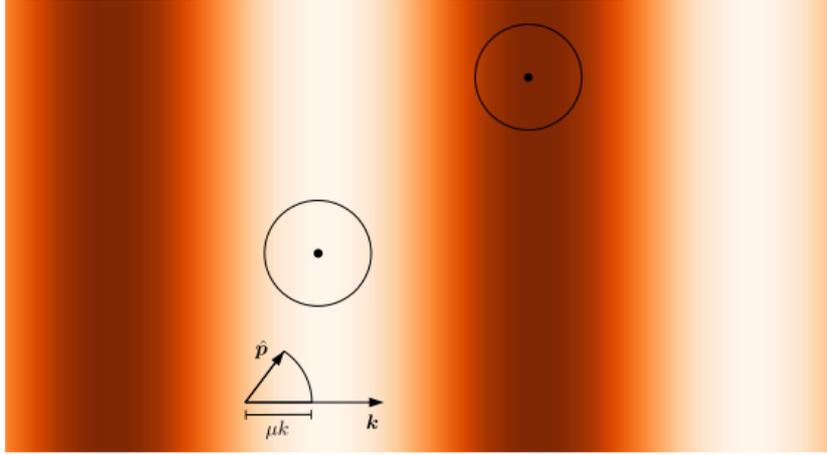


Figura 9 – Um esboço de uma perturbação de temperatura na forma de uma onda plana, retirado do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Nesse esboço, podemos ter uma ideia do significado do vetor de onda \mathbf{k} , que aponta na direção do gradiente da temperatura, e da relação da variável μ com a direção de propagação do fóton. Áreas mais claras representam regiões mais frias, enquanto áreas mais escuras representam regiões mais quentes.

que está relacionada à opacidade dos elétrons livres à passagem dos fótons desde o momento em que foram emitidos até o momento de observação atual. Para o universo jovem ($\eta \ll \eta_0$), a densidade de elétrons livres n_e era muito grande, de forma que τ é muito grande. Já para o universo tardio ($\eta \sim \eta_0$), n_e é muito pequeno, de forma que $\tau \ll 1$.

Com essas definições, a equação de Boltzmann para os fótons pode ser escrita como

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau'[\Theta_0 - \Theta + \mu u_b]. \quad (2.31)$$

Podemos, portanto, resolver essa equação para os diferentes k e μ de forma independente. Essa equação, porém, não engloba a dependência angular do espalhamento Compton nem os efeitos de polarização da CMB, como discutido na seção do termo de colisão. A equação de Boltzmann completa para os fótons, incluindo esses efeitos, é dada por (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 132)

$$\Theta' + ik\mu\Theta = -\Phi' - ik\mu\Psi - \tau'[\Theta_0 - \Theta + \mu u_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi], \quad (2.32)$$

onde

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P,2} + \Theta_{P,0}. \quad (2.33)$$

Nessas equações, $\mathcal{P}_2(\mu)$ é o segundo polinômio de Legendre, Θ_2 é o quadrupolo da distribuição de temperatura e Θ_P é o campo de polarização, que tem como fonte apenas Θ_2 . Além disso, $\Theta_{P,0}$ e $\Theta_{P,2}$ são o monopolo e o quadrupolo do campo de polarização. Os momentos de multipolo do campo de temperatura são definidos por

$$\Theta_l(k, \eta) \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu, k, \eta), \quad (2.34)$$

onde $\mathcal{P}_l(\mu)$ é o polinômio de Legendre de ordem l . Por exemplo, Θ_0 é o monopolo, Θ_1 é o dipolo, Θ_2 é o quadrupolo, Θ_3 é o octopolo, e assim por diante. Quanto maior o l , menor é a escala em que o polinômio de Legendre varia. Portanto, momentos de multipolo com alto valor de l capturam informações de perturbações de temperatura em pequenas escalas.

2.2.2 Matéria escura fria

Para obtermos a equação de Boltzmann perturbada para a matéria escura fria, o desenvolvimento é análogo ao dos fótons, com algumas diferenças. Primeiramente, passado algum tempo após a sua criação, a matéria escura não interage mais com os demais constituintes do universo e, considerando que ela também não interage fortemente consigo mesma, não há necessidade de considerarmos um termo de colisão (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 122). Além disso, as partículas de matéria escura fria devem ser muito massivas (PIATTELLA, 2018, 164), de forma que podemos considerar as velocidades das partículas como não-relativísticas. Partiremos, portanto, da equação 2.7, igualando-a a zero por causa da ausência do termo de colisão,

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f_c}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f_c}{\partial p} = 0. \quad (2.35)$$

Como as partículas possuem baixa velocidade, podemos descartar termos que envolvam potências quadráticas ou superiores de $(\frac{p}{m})$, guardando apenas termos de ordem zero e primeira ordem. Com isso em mente, vamos considerar o momento de ordem zero dessa equação de Boltzmann. Multiplicando a equação 2.35 por $\frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p \hat{p}^i}{E(p)} - [H + \dot{\Phi}] \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \frac{\partial f_c}{\partial p} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial p} E(p) \hat{p}^i = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por integração por partes, podemos mostrar que o último termo é nulo. Para trabalharmos com os demais, temos que ter em mente as expressões para a densidade de matéria escura,

$$n_c = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c, \quad (2.37)$$

e para a velocidade do “fluido” de matéria escura,

$$u_c^i \equiv \frac{1}{n_c} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p \hat{p}^i}{E(p)}. \quad (2.38)$$

Inserindo essas expressões na equação 2.36, obtemos, após algumas manipulações, a generalização cosmológica da equação de continuidade,

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_c u_c^i)}{\partial x^i} + 3[H + \dot{\Phi}] n_c = 0. \quad (2.39)$$

Podemos, ainda, separar a parte de ordem zero e de primeira ordem nessa equação. Como a velocidade e as perturbações da métrica são de primeira ordem, a equação de ordem zero é dada por

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial t} + 3H\bar{n}_c = 0, \quad (2.40)$$

onde \bar{n}_c é a parte de ordem zero da densidade, ou seja, a densidade média correspondente ao que teríamos em um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico. Agora, para obtermos a equação de primeira ordem, é necessário definir a perturbação fracionária da densidade de matéria escura, $\delta_c(\mathbf{x}, t)$,

$$n_c(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_c(t)[1 + \delta_c(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.41)$$

Essa perturbação δ_c também é igual à sobredensidade fracionária de energia da matéria escura, $\frac{\delta \rho_c}{\rho_c}$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 124). Introduzindo essa definição na equação 2.39 e eliminando termos de segunda ordem, obtemos a equação de primeira ordem

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_c^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0. \quad (2.42)$$

Obtemos aqui uma equação para as duas novas variáveis δ_c e u_c^i . Precisamos, portanto, de outra equação, que é obtida a partir do primeiro momento da equação 2.35. Para tal, multiplicamos essa equação por $(d^3p/(2\pi)^3)p\hat{p}^j/E$ e integramos. Após algumas manipulações, chegamos à equação

$$\frac{\partial u_c^j}{\partial t} + H u_c^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (2.43)$$

Por fim, podemos escrever essas duas equações que governam a evolução da matéria escura fria no espaço de Fourier e em termos do tempo conforme. Iremos supor aqui, novamente, que a velocidade é irrotacional, como na equação 2.29. Elas ficam, portanto,

$$\delta_c' + i k u_c + 3\Phi' = 0, \quad (2.44)$$

e

$$u_c' + \frac{a'}{a} u_c + i k \Psi = 0. \quad (2.45)$$

2.2.3 Bárions

Agora, iremos obter a equação de Boltzmann perturbada para a matéria bariônica, isto é, a matéria composta por prótons, nêutrons e também os elétrons; esses últimos são, na verdade, léptons, mas são inclusos nessa definição cosmológica de matéria bariônica por, dentre outros motivos, contribuírem muito pouco para a densidade de energia em comparação aos prótons e nêutrons. Na discussão a seguir, falaremos apenas “prótons”, mas na verdade estão inclusos também outros núcleos de menor quantidade, como o Hélio (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 126).

Os elétrons e prótons são acoplados fortemente pelo espalhamento Coulombiano ($e + p \leftrightarrow e + p$). Iremos supor que essa interação é tão eficiente que os elétrons e prótons possuem valores de sobredensidades praticamente iguais⁵,

$$\frac{\rho_e - \bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_e} = \frac{\rho_p - \bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_p} \equiv \delta_b, \quad (2.46)$$

ou seja, não esperamos ter mais elétrons em uma região e mais prótons em outra, gerando dipolos cósmicos. Dada essa suposição, o mesmo acontece para as velocidades,

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_p \equiv \mathbf{u}_b. \quad (2.47)$$

Como, para as épocas de interesse, $T \ll m_e$, a matéria bariônica pode ser tratada como um fluido não relativístico, assim como a matéria escura. Aqui, porém, devemos considerar a interação da matéria bariônica com os fótons.

Considerando o momento de ordem zero da equação de Boltzmann para partículas massivas, assim como no caso da matéria escura, somos levados à equação

$$\delta'_b + ik u_b + 3\Phi' = 0. \quad (2.48)$$

Apesar de que, agora, devemos levar em conta um termo de colisão nas deduções, o lado direito dessa equação, a qual está relacionada com a generalização cosmológica da equação de continuidade, acaba zerando, pois as colisões consideradas não alteram o número de elétrons e prótons nas épocas de interesse (próximo e depois da recombinação).

Por outro lado, considerando o momento de primeira ordem da equação de Boltzmann, somos levados à equação

$$m_p \frac{\partial(n_b u_b^j)}{\partial t} + 4H m_p n_b u_b^j + \frac{m_p n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = F_{e\gamma}^j(\mathbf{x}, t), \quad (2.49)$$

onde agora o termo de colisão $\mathbf{F}_{e\gamma}$ não é nulo. O espalhamento Compton gera transferência de momento entre fótons e elétrons que, por sua vez, transferem momento aos núcleos, e isso é incorporado ao termo de colisão. Dividindo essa equação por $\rho_b = m_p \bar{n}_b$, obtemos

$$\frac{\partial u_b^j}{\partial t} + H u_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{1}{\rho_b} F_{e\gamma}^j(\mathbf{x}, t). \quad (2.50)$$

Agora, para trabalharmos com o termo de colisão integrado $F_{e\gamma}^j$, que descreve a transferência de momento entre fótons e elétrons, partiremos do seguinte raciocínio: como o momento é conservado a cada colisão, esse termo de colisão deve ser igual e oposto ao que aparece na equação análoga para os fótons. O termo de colisão integrado dos fótons, por

⁵ Um fato curioso é que, além das sobredensidades serem iguais, as observações, como a isotropia de raios cósmicos, a isotropia da CMB e a abundância de elementos leves, também indicam que o universo deve ser eletricamente neutro, ou seja, o número de prótons e de elétrons também deve ser igual (SIEGEL; FRY, 2006).

sua vez, é obtido a partir do primeiro momento da equação para o termo de colisão do fóton, equação 2.16. Não faremos aqui uma dedução detalhada desse termo, que pode ser encontrada em (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 128). Uma vez obtido esse termo, podemos inseri-lo na equação 2.50, obtendo, já no espaço de Fourier e em relação ao tempo conforme,

$$u'_b + \frac{a'}{a}u_b + ik\Psi = \tau' \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} [3i\Theta_1 + u_b], \quad (2.51)$$

onde Θ_1 é o dipolo da distribuição dos fótons. Ainda é possível reescrever o lado direito dessa equação se definirmos a razão dos fótons para os bárions como

$$\frac{1}{R(\eta)} \equiv \frac{4\rho_\gamma(\eta)}{3\rho_b(\eta)}. \quad (2.52)$$

Apesar dessa equação ter sido obtida considerando prótons e elétrons livres, ela também é válida na presença de hidrogênio neutro e hélio, isso porque estes também são fortemente acoplados aos prótons e elétrons, de modo que a equação obtida pode descrever todos os bárions.

2.2.4 Neutrinos

Por fim, para os neutrinos, seguiremos um caminho análogo ao dos fótons, dado que eles possuem uma distribuição de equilíbrio de Fermi-Dirac e que são relativísticos no universo jovem. Dessa forma, podemos escrever a função de distribuição perturbada como

$$\begin{aligned} f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \left[\exp \left\{ \frac{p}{T_\nu(t)[1 + \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)]} \right\} + 1 \right]^{-1} \\ &= \left[1 - \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)p \frac{d}{dp} \right] f_\nu^{(0)}(p), \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $f_\nu^{(0)}(p) = [e^{p/T_\nu(t)} + 1]^{-1}$ é a distribuição de ordem zero dos neutrinos e \mathcal{N} é a perturbação de temperatura.

Como nas épocas de interesse, depois do desacoplamento dos neutrinos, eles não interagem com nenhuma outra componente de forma significativa, o termo de colisão é nulo. Portanto, usando a equação 2.7, obtemos, em primeira ordem,

$$\mathcal{N}'(\mathbf{k}, p, \mu, \eta) + ik\mu \frac{p}{E_\nu(p)} \mathcal{N} - Hp \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu \frac{E_\nu(p)}{p} \Psi. \quad (2.54)$$

É importante notar que, ao contrário dos fótons, não podemos supor que a perturbação de temperatura não depende de p , pois, uma vez que deixem de ser ultra-relativísticos, neutrinos em diferentes partes da distribuição se moverão de formas distintas (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 130).

2.3 As equações para as perturbações gravitacionais

Nessa seção, iremos obter as equações para a evolução das perturbações gravitacionais Ψ e Φ . Além disso, veremos também a questão da liberdade de calibre (em inglês, *gauge freedom*) na escolha de coordenadas; a depender da escolha, o formato da métrica perturbada pode mudar, destoando daquela apresentada no calibre Newtoniano conforme.

2.3.1 Decomposição das perturbações na métrica

Na equação 2.1, vimos uma das possíveis formas de escrever a métrica perturbada. Essa forma, no entanto, não é a forma mais geral e não abrange todos os tipos de perturbação de interesse. A métrica perturbada pode ser escrita, de forma geral, como (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 135)

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 + h_{00}(\mathbf{x}, t), \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= a(t)h_{0i}(\mathbf{x}, t) = a(t)h_{i0}(\mathbf{x}, t), \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a^2(t)[\delta_{ij} + h_{ij}(\mathbf{x}, t)], \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde todas as perturbações, denotadas por h , são consideradas pequenas. Essas perturbações, por sua vez, podem ser classificadas como escalares, vetoriais ou tensoriais, a depender do comportamento delas sob rotações espaciais.

A perturbação denotada por h_{00} é classificada como escalar, por não conter nenhum índice espacial. Podemos defini-la como

$$h_{00} = -2A. \quad (2.56)$$

Não há nada de especial nesse fator de -2 nem na função escalar A , é apenas uma questão de convenção notacional.

A perturbação h_{0i} , por sua vez, é um tri-vetor. Podemos decompor essa perturbação em termos de um campo vetorial de divergência nula e um de rotacional nulo (decomposição de Helmholtz (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013, p. 177)). Podemos escrever, portanto

$$h_{0i} = -\frac{\partial B}{\partial x^i} - B_i \quad \text{onde} \quad B_i{}^{,i} \equiv \frac{\partial B_i}{\partial x^i} = 0, \quad (2.57)$$

e B e B_i são uma função escalar e uma função vetorial, respectivamente. No espaço de Fourier, temos

$$h_{0i}(\mathbf{k}, t) = -ik_i B(\mathbf{k}, t) - B_i(\mathbf{k}, t) \quad \text{onde} \quad k^i B_i = 0. \quad (2.58)$$

Em relação à perturbação tensorial h_{ij} , um tensor simétrico de ordem três, podemos decompô-la em uma parte proporcional ao delta de Kronecker, uma parte contendo duas derivadas espaciais de uma função escalar, e uma parte em termos da derivada de

um campo vetorial de divergência nula. Todas essas componentes serão, por definição, simétricas. Porém, uma parte da perturbação tensorial não pode ser decomposta em termos de funções escalares e vetoriais - há uma parte dessa perturbação que é “puramente tensorial”, a qual denotaremos h_{ij}^{TT} . Temos, portanto,

$$h_{ij} = 2D\delta_{ij} - 2E_{,ij} + V_{i,j} + V_{j,i} + h_{ij}^{TT}, \quad (2.59)$$

ou, no espaço de Fourier,

$$h_{ij} = 2D\delta_{ij} + 2k_i k_j E + ik_i V_j + ik_j V_i + h_{ij}^{TT}. \quad (2.60)$$

As perturbações podem ser separadas, portanto, em escalares, vetoriais e tensoriais, como visto acima. Porque, então, trabalhamos até aqui apenas com perturbações escalares, usando a métrica 2.1? Isso não irá gerar um problema, dado que não consideramos os outros tipos de perturbações? A resposta é que não teremos problemas, por causa do teorema da decomposição. De acordo com ele, em primeira ordem, as perturbações evoluem de forma independente em nosso universo. Isso se deve, principalmente, à isotropia espacial do universo de FLRW (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 137). Podemos, portanto, trabalhar com os diferentes tipos de perturbações separadamente. Além disso, as perturbações escalares têm como fonte as flutuações de densidade, que é justamente o que foi trabalhado anteriormente nesse capítulo, justificando, portanto, o uso anterior apenas das perturbações escalares na métrica.

2.3.2 Transformação de coordenadas

No estudo das perturbações, diferentes escolhas de coordenadas são denominadas calibres (em inglês, *gauges*). Essas escolhas podem, por exemplo, simplificar certas contas ou exibir de maneira mais clara as ligações entre parâmetros teóricos e observáveis. A seguir, veremos como um campo escalar e como a métrica se transformam sob uma mudança de coordenadas (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 137–140). A motivação por trás disso é que o período de inflação acontece na presença de um campo escalar.

Seja um campo escalar $\phi(x)$, onde x se refere às coordenadas espaço-temporais (\mathbf{x}, t) (a partir deste ponto, x irá se referir às coordenadas espaço-temporais, enquanto que a distância comóvel será representada por χ). Podemos escrevê-lo em termos de sua parte de ordem zero e uma perturbação,

$$\phi(x) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.61)$$

onde $\bar{\phi}(t)$ não depende de \mathbf{x} , pois o universo de fundo é homogêneo. Agora, vamos considerar uma transformação de coordenadas escalar pequena, dada por $x \rightarrow \hat{x}(x)$. Expandindo em série de Taylor, temos

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \hat{t} = t + \zeta(\mathbf{x}, t), \\ x^i &\rightarrow \hat{x}^i = x^i + \xi^i(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde $\zeta(\mathbf{x}, t)$ é o desvio no tempo e $\xi^i(\mathbf{x}, t)$ é o desvio espacial, que é escrito como o gradiente de uma outra função escalar ξ , ou seja, temos aqui apenas escalares, pois estamos trabalhando por enquanto com as perturbações escalares.

O campo escalar se transforma trivialmente como

$$\hat{\phi}(\hat{x}) = \phi(x[\hat{x}]) = \phi(\hat{t} - \zeta, \hat{\mathbf{x}} - \nabla\xi). \quad (2.63)$$

Já sua perturbação se transforma da seguinte maneira:

$$\hat{\delta}\phi(\mathbf{x}, t) = \delta\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{d\bar{\phi}(t)}{dt}\zeta(\mathbf{x}, t). \quad (2.64)$$

Agora, vamos aplicar essa transformação de coordenadas à métrica perturbada (equação 2.55) considerando apenas transformações escalares, ou seja, à métrica

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2A), \\ g_{0i} &= -aB_{,i}, \\ g_{ij} &= a^2[\delta_{ij}(1 + 2D) - 2E_{,ij}]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

A métrica, por sua vez, se transforma de acordo com a relação

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (2.66)$$

ou, inversamente,

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(\hat{x}) \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}(x). \quad (2.67)$$

Trabalhando com essa relação, e eliminando termos de segunda ordem, podemos relacionar as perturbações da métrica transformada com as perturbações da métrica original,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A - \frac{1}{a}\zeta', \\ \hat{B} &= B - a^{-1}\zeta + \xi', \\ \hat{D} &= D - H\zeta, \\ \hat{E} &= E + \xi. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Portanto, apesar de termos quatro funções caracterizando as perturbações escalares na métrica a princípio, podemos, por meio de uma transformação de coordenadas, eliminar algumas delas. Por exemplo, se escolhermos $\xi = -E$, a nova métrica terá $\hat{E} = 0$. Por causa dessas possibilidades de escolha das funções ζ e ξ , temos, na verdade, apenas dois graus de liberdade físicos na métrica com perturbações escalares, ao invés de quatro. No calibre Newtoniano conforme, por exemplo, eliminamos B e E utilizando essa liberdade na escolha das funções.

Além disso, também é útil obter variáveis que são invariantes sob as transformações das equações 2.68 (variáveis invariantes por transformação de calibre). Com elas,

podemos alterar mais facilmente entre um calibre e outro, bastando calcular a variável em um calibre, calcular no outro, e igualar as duas expressões. As variáveis de Bardeen (BARDEEN, 1980), por exemplo, são muito utilizadas. Elas são dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_A &\equiv A + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \eta} [a(E' - B)], \\ \Phi_H &\equiv -D + aH(B - E').\end{aligned}\tag{2.69}$$

No caso do calibre Newtoniano, $\Phi_A = \Psi$ e $\Phi_H = -\Phi$.

Claro que poderíamos, também, fazer desenvolvimentos análogos para as perturbações vetoriais e tensoriais. No caso das vetoriais, teríamos um grau de liberdade a mais na transformação de coordenadas, dado por um vetor transversal ξ^i , que nos permitiria eliminar B_i ou V_i . Já a perturbação tensorial h_{ij}^{TT} é invariante por transformações de calibre em primeira ordem. Assim, os dez graus de liberdade que tínhamos inicialmente, considerando as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, se reduzem, na verdade, a seis (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 140).

2.3.3 As equações de Einstein para as perturbações escalares

Para obter as equações de Einstein para as perturbações escalares, partiremos da métrica perturbada no calibre Newtoniano conforme dada pela equação 2.1. É necessário calcular os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e, por fim, o tensor energia-momento (equação 1.90). A ideia, ao longo desses cálculos, é coletar as partes de primeira ordem do tensor de Einstein e do tensor energia-momento e igualá-las. Também é necessário ficarmos atentos para que, ao longo das contas, eliminemos termos de segunda ordem.

Não faremos esse desenvolvimento detalhado aqui, que pode ser facilmente encontrado na literatura (ver, por exemplo, (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 141–146) ou (PIATTELLA, 2018, p. 145–149)). A seguir, iremos exibir as equações finais obtidas para os potenciais gravitacionais.

A primeira equação de evolução para os potenciais gravitacionais é dada por

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \left(\Phi' - \Psi \frac{a'}{a} \right) = 4\pi G a^2 [\rho_c \delta_c + \rho_b \delta_b + 4\rho_\gamma \Theta_0 + 4\rho_\nu \mathcal{N}_0].\tag{2.70}$$

No limite estático, ou seja, quando $a = \text{constante}$, essa equação se reduz à equação de Poisson para a gravidade.

A segunda equação de evolução é dada por

$$k^2 (\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 [\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu \mathcal{N}_2].\tag{2.71}$$

Nessa equação, é importante notar que, se os momentos de quadrupolo forem desprezíveis, teremos $\Phi = -\Psi$.

2.3.4 As equações de Einstein para as perturbações tensoriais

Outro tipo de perturbação de interesse são as perturbações tensoriais, que estão associadas às ondas gravitacionais primordiais, formadas no período de inflação. Aqui, trataremos dessas perturbações. As perturbações vetoriais, por sua vez, não serão discutidas nesse trabalho, pois elas não são geradas em quantidades significativas e, de toda forma, decaem rapidamente (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 147) (WEINBERG, 2008, p. 227). Porém, se for do interesse do leitor, elas são tratadas em (PIATTELLA, 2018, p. 152–154) e (MUKHANOV, 2005, p. 271–275).

Para as perturbações tensoriais, partimos da métrica dada pela equação 2.55 com $h_{00} = 0$, $h_{0i} = 0$ e

$$\delta g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t)h_{ij}^{TT}(\mathbf{x}, t), \quad h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Ao escrevermos a perturbação tensorial dessa forma, estamos definindo a direção \hat{z} como sendo a direção de propagação da onda, ou seja, $\hat{k} = \hat{z}$ (PIATTELLA, 2018, p. 150). De forma geral, h_+ e h_\times devem ser componentes de um tensor de divergência nula, traço nulo e simétrico, isso porque estamos tratando a perturbação tensorial “pura” (a parte de divergência não nula da perturbação h_{ij} , por exemplo, está contida nas perturbações escalares e vetoriais) (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 148).

Para obter as equações para as perturbações tensoriais, os passos são os mesmos das perturbações escalares: calcular o tensor de Einstein e o tensor energia-momento e extrair as componentes de primeira ordem. Fazendo isso, chegamos à seguinte equação:

$$h_t'' + 2\frac{a'}{a}h_t' + k^2h_t = 0, \quad (2.73)$$

onde $t = +, \times$. Nessa equação, estamos desconsiderando o estresse anisotrópico, que é a fonte dessas perturbações gravitacionais. Se o considerarmos, o lado direito dessa equação não seria nulo (ver (PIATTELLA, 2018, p. 149)), mas sim proporcional ao quadrupolos das componentes de radiação (fótons e neutrinos). Isso influencia significativamente nos modos tensoriais em baixa escala, mas pode ser desprezado para os modos em larga escala (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 151).

A equação 2.73 é uma equação de onda, a partir da qual temos as ondas gravitacionais. Isso fica ainda mais claro se considerarmos o limite de não expansão ($a = \text{constante}$, $a' = 0$). Uma ilustração dessas ondas é mostrada na figura 10.

Enquanto um certo modo k é maior que o horizonte ($k\eta < 1$), ou seja, o horizonte comóvel η (equação 2.21) é menor que a escala λ associada ao modo ($k \propto \frac{1}{\lambda}$), o modo é constante. Quando o modo entra no horizonte ($k\eta = 1$), ele começa a decair. Modos de menores comprimentos (ou k grande) entram mais rapidamente no horizonte e, portanto,

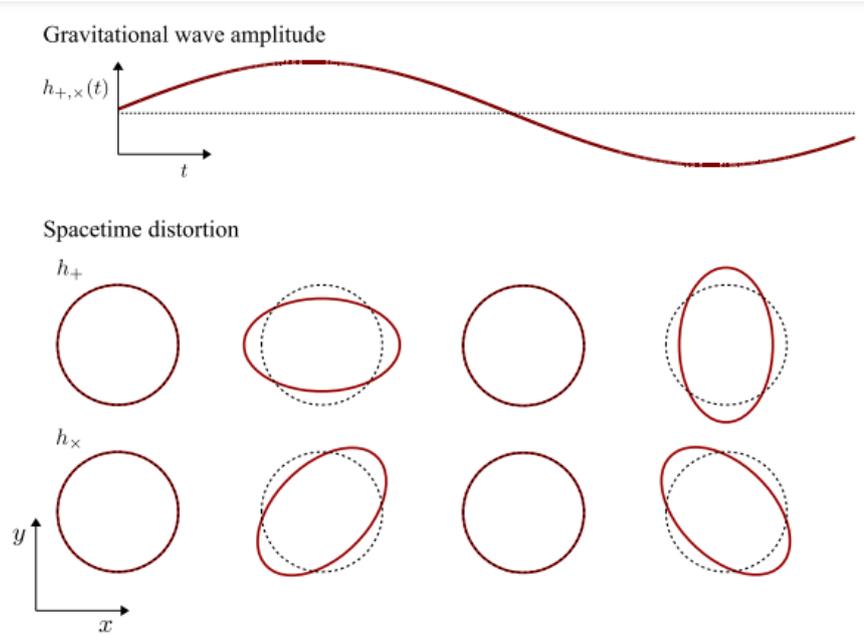


Figura 10 – Ilustração de uma onda gravitacional cosmológica associada às perturbações tensoriais, no limite estático ao longo de um período, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Acima, temos como a amplitude dessas perturbações evoluem com o tempo e, abaixo, como seriam as distorções no plano x-y associadas à propagação da onda em diferentes instantes do ciclo. A direção de propagação é perpendicular à figura.

decaíram mais ao longo da expansão do universo do que modos de maiores comprimentos (ou k pequeno) (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 152).

2.4 Inflação

Temos, agora, o conjunto completo de equações governando as perturbações em torno de um universo homogêneo e isotrópico. Porém, para resolvê-las, precisamos de condições iniciais. Essas condições advêm, por exemplo, da teoria de inflação.

Um dos pontos de partida do seu desenvolvimento foi resolver o problema do horizonte, isto é, para explicar como regiões que não deveriam estar em contato causal possuem temperaturas extremamente semelhantes, com flutuações da ordem de 10^{-5} K. Porém, além de resolver este e outros problemas, a inflação ainda nos fornece as condições iniciais para as perturbações no universo, o que possibilita a resolução das equações de Boltzmann e equações de Einstein perturbadas. Apesar de não fornecer as perturbações primordiais de forma exata em cada ponto, ela nos fornece as distribuições estatísticas das quais essas perturbações provêm por meio dos espectros de potência primordiais das perturbações escalares e tensoriais.

O propósito dessa seção não é descrever a inflação em detalhes. O objetivo prin-

principal é apresentar os espectros de potência primordiais. Para descrições mais detalhadas, ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 157–189), (PIATTELLA, 2018, p. 235–271) ou (WEINBERG, 2008, p. 201–217).

Vale lembrar que, apesar de as teorias inflacionárias serem amplamente utilizadas e investigadas na literatura, existem outras teorias cujas previsões são compatíveis com os dados observacionais, como é o caso dos modelos de universo eterno com ricochete. Este trabalho não tem como foco a descrição desses modelos alternativos, mas, para os interessados, uma boa referência é a de (VITENTI, 2011).

2.4.1 O problema do horizonte

Na época da recombinação ($t \sim 380.000$ anos), o universo era extremamente uniforme. Como dito, as flutuações eram da ordem de 10^{-5} . Como explicar essa uniformidade? Poderíamos pensar, inicialmente, em termalização, ou seja, o contato térmico entre as diferentes regiões levaria, ao longo do tempo, à uniformidade. Porém, nessa época, diferentes partes do universo ainda não tinham contato causal, de forma que elas não poderiam ter termalizado.

O horizonte comóvel na época da recombinação, isto é, a distância comóvel que a luz poderia ter percorrido até então, é $\eta_* = \eta(a_*) \approx 281h^{-1}\text{Mpc}$. A distância comóvel atual entre duas partes do céu da CMB separadas por um ângulo θ , suposto pequeno, é dada por

$$\chi(\theta) \simeq \chi_*\theta = (\eta_0 - \eta_*)\theta. \quad (2.74)$$

Atualmente, temos $\eta_0 \approx 14200h^{-1}\text{Mpc}$, de modo que regiões do céu da CMB separadas por um ângulo

$$\theta \geq \frac{\eta_*}{\eta_0 - \eta_*} \approx 1.2^\circ \quad (2.75)$$

não podiam estar em contato causal (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 158) (PIATTELLA, 2018, p. 238).

Uma outra forma de escrever a expressão para o horizonte comóvel é a seguinte (as linhas na seguinte expressão são apenas para denotar a variável de integração - não confundir com as derivadas em relação ao tempo conforme):

$$\eta(a) = \int_0^a d \ln(a') \frac{1}{a'H(a')}. \quad (2.76)$$

O termo $\frac{1}{aH}$ que aparece nessa expressão é chamado de raio de Hubble comóvel, e expressa a distância que a luz pode viajar ao longo do tempo que o fator de escala cresce por um fator de e . Dessa forma, para um universo dominado por matéria ou radiação ($H \propto a^{-3/2}$ ou a^{-2}), esse raio comóvel sempre cresce, de forma que mais regiões entram em contato causal quanto mais perto da época atual.

Então, se houvesse um período no universo em que o raio de Hubble comóvel decrescesse, significaria que, em épocas muito iniciais, mais regiões estariam em contato causal. Assim, para que $\frac{1}{aH} = \frac{1}{a}$ decresça, devemos ter um \dot{a} crescente, ou seja, $\ddot{a} > 0$. Uma época de expansão acelerada nos primórdios do universo, portanto, resolve o problema do horizonte. Essa é a época da inflação.

Nos primórdios da inflação, todos os modos de interesse estão dentro do horizonte ($k \gg aH$), ou seja, seus comprimentos são muito menores que o raio de Hubble comóvel. Ao fim da inflação, esses modos não mais estarão dentro do horizonte, pois o raio de Hubble comóvel é extremamente diminuído ($k \ll aH$). Posteriormente, porém, esses modos entram novamente no horizonte, já que o raio comóvel volta a crescer.

Uma última definição importante a se fazer é a do horizonte comóvel. Para incluirmos a inflação na definição, escrevemos

$$\eta(t) = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.77)$$

onde t_e refere-se ao fim da inflação. Assim, temos $\eta > 0$ para períodos depois da inflação, e $\eta < 0$ para o período de inflação.

Há outros problemas que podem ser resolvidos com a inflação, como o problema da planeza, mas eles não serão discutidos aqui. Para mais detalhes, ver (WEINBERG, 2008) ou (HU; TURNER; WEINBERG, 1994). Além disso, há teorias alternativas à inflação que também resolvem os problemas mencionados, como, por exemplo, os modelos de *Bounce*. Para mais informações, ver (VITENTI, 2011).

2.4.2 As equações da inflação

Assim como a energia escura, cuja pressão é negativa, leva a uma expansão acelerada do universo, a componente que domina na época inflacionária também deve ter pressão negativa.

Uma maneira de gerar essa expansão acelerada é considerar o potencial de um campo escalar. Este campo, porém, não está entre os campos escalares físicos que conhecemos (pelo menos até agora as propriedades dos campos conhecidos não correspondem às do campo da inflação) (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 163). Há, ainda, modelos que consideram outras componentes, diferentes de campos escalares, para o período de inflação (ver, por exemplo, (GOLOVNEV; MUKHANOV; VANCHURIN, 2008), para uma inflação regida por um campo vetorial).

O tensor energia-momento de um campo escalar com um potencial pode ser escrito como (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 164)

$$T^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} - \delta^{\alpha}_{\beta} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} + V(\phi) \right], \quad (2.78)$$

onde ϕ é o campo escalar e $V(\phi)$ é o potencial para o campo.

Considerando apenas a parte homogênea do campo, devemos ter apenas derivadas temporais. Assim, o tensor energia-momento fica

$$T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_0 \delta^0_\beta \dot{\phi}^2 + \delta^\alpha_\beta \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.79)$$

A partir da componente T^0_0 , temos a densidade,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (2.80)$$

O primeiro termo à direita é a densidade de energia cinética do campo e o segundo termo é a densidade de energia potencial.

A pressão, por sua vez, é dada por $\wp = T^i_i$, para um dado valor de i (aqui, especificamente, não temos uma soma). Logo,

$$\wp = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.81)$$

Por meio da equação de conservação do tensor energia momento, $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, obtemos

$$\phi'' + 2aH\phi' + a^2 V_{,\phi} = 0, \quad (2.82)$$

já em termos do tempo conforme, onde $V_{,\phi} \equiv \frac{dV}{d\phi}$.

Muitos modelos de inflação são modelos de *slow-roll*, ou seja, o campo e a taxa de Hubble variam devagar (ver, por exemplo, (LINDE, 1982)). Assim, durante a inflação, podemos escrever, para o tempo conforme,

$$\eta \equiv \int_{a_e}^a \frac{da}{Ha^2} \simeq \frac{1}{H} \int_{a_e}^a \frac{da}{a^2} \simeq -\frac{1}{aH}, \quad (2.83)$$

onde a_e é o fator de escala ao fim da inflação. A primeira aproximação se deve ao fato de H ser quase constante ao longo da inflação, enquanto que a segunda aproximação se deve ao fato de que $a_e \gg a$ no meio do período inflacionário.

Para quantificar o *slow-roll*, são usados certos parâmetros. Dois deles são exibidos a seguir. O primeiro é chamado ϵ_{sr} , dado por

$$\epsilon_{sr} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = -\frac{H'}{aH^2}, \quad (2.84)$$

e quantifica, basicamente, o quanto desviamos de um espaço dominado por uma constante cosmológica (espaço de *de Sitter*). O segundo parâmetro é dado por

$$\begin{aligned} \delta_{sr} &\equiv \frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\frac{1}{aH\phi'} [aH\phi' - \phi''] \\ &= -\frac{1}{aH\phi'} [3aH\phi' + a^2 V_{,\phi}], \end{aligned} \quad (2.85)$$

e quantifica o quão devagar o campo está variando. Ambos os parâmetros, em modelos de *slow-roll*, devem ser pequenos.

Ao fim da inflação, saímos da fase de *slow-roll*. O potencial se torna íngreme e o campo se aproxima do valor mínimo do potencial. Nesse momento, a energia cinética do campo se torna significativa e ele oscila em torno desse mínimo. Esse é o fim da inflação, e o universo passa, então, para uma fase de expansão desacelerada (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 167) (ver figura 11).

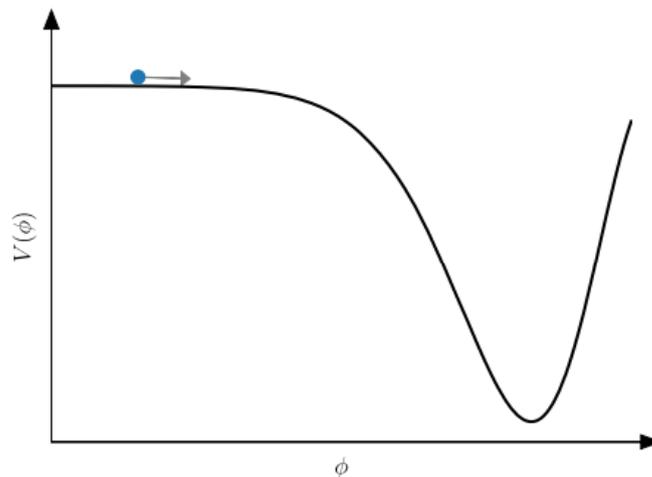


Figura 11 – Ilustração de um campo escalar “rolando” lentamente ao longo de um potencial $V(\phi)$, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Enquanto se encontra na fase de *slow-roll*, o campo tem pouca energia cinética, porém possui uma energia potencial não-nula, de forma que a pressão é negativa, conforme equação 2.81. Quando o campo atinge o mínimo do potencial, temos o fim da fase inflacionária.

2.4.3 Perturbações tensoriais

Em ordem zero, a inflação é dominada por um campo uniforme. Porém, existem flutuações quânticas nesse campo e, conforme o universo expande aceleradamente, essas flutuações são “esticadas”, gerando as perturbações macroscópicas que dão origem às estruturas do universo. A média das flutuações será nula, porém a sua variância não será. De posse desta variância, poderemos gerar uma distribuição da qual extrairemos as condições iniciais para a formação de estruturas do universo (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 168).

A inflação não fornece exatamente essas perturbações em cada local do universo, mas sim a distribuição estatística a partir da qual essas perturbações têm origem. Na verdade, na maioria dos estudos em cosmologia, trabalhamos com conceitos estatísticos, como a função de correlação ou o espectro de potência. Posteriormente, a intenção é associar o valor esperado quântico dessas flutuações primordiais com uma média de conjunto

estatístico (*ensemble average*) de campos clássicos aleatórios associados aos observáveis, a ser discutida posteriormente.

No caso das perturbações tensoriais, para obter o espectro de potência primordial partimos da equação 2.73, considerando apenas um modo ($t = +$ ou $t = \times$). A ideia é fazer de h um operador quântico e, utilizando teoria quântica de campos, obter o valor esperado no vácuo da variância desse operador. O espectro de potência P_h será definido, então, por

$$\langle \hat{h}^\dagger(\mathbf{k}, \eta) \hat{h}(\mathbf{k}', \eta) \rangle \equiv P_h(k, \eta) (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.86)$$

Uma outra definição muito utilizada é a do espectro de potência adimensional,

$$\Delta_h^2(k, \eta) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_h(k, \eta). \quad (2.87)$$

Depois que o modo é esticado pela inflação e fica maior que o horizonte comóvel, esse espectro de potência fica constante. Essa constante pode ser utilizada, posteriormente, como condição inicial depois que o modo entrar novamente no horizonte. Ela é dada por

$$P_h(k) = \frac{16\pi G}{a^2} \frac{1}{2k^3\eta^2} = \frac{8\pi G H^2}{k^3} \Big|_{k|\eta|=1}, \quad (2.88)$$

usando a aproximação 2.83.

Uma medida desse espectro de potência poderia, portanto, dar informação acerca da constante de Hubble na época da inflação, e também do potencial inflacionário. Além disso, as flutuações em h basicamente gaussianas, uma previsão importante da inflação que se reflete na estrutura observada em grande escala no universo. Para mais detalhes das contas desta seção e da justificativa dos conceitos, ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 167–173) e (PIATTELLA, 2018, p. 248–255).

2.4.4 Perturbações escalares

A ideia aqui é análoga à da seção anterior: obter um espectro de potência primordial para as perturbações escalares. Uma das previsões da inflação com um único campo escalar é que as perturbações são adiabáticas, isto é, as perturbações de densidade fracionárias são iguais para todas as componentes do universo,

$$\frac{\delta\rho_s}{\rho_s} = \frac{\delta\rho}{\rho}. \quad (2.89)$$

Basta, portanto, obter o espectro de potência para $\delta\rho$, ou equivalentemente, utilizando as equações de Einstein, para Ψ (no regime de interesse $\Psi = -\Phi$). Para tal, precisaremos associar o espectro de potência primordial das perturbações do campo $\delta\phi$ com o de Ψ .

Utilizando a equação de conservação do tensor energia momento para o campo perturbado, $\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)$ e fazendo uma analogia com o caso das perturbações

tensoriais, é possível mostrar, desconsiderando perturbações na métrica, que

$$P_{\delta\phi} = \frac{H^2}{2k^3}. \quad (2.90)$$

Essa aproximação, de desconsiderar as perturbações na métrica (ou seja, desconsiderar Ψ), é válida durante a inflação. Porém, próximo ao fim da inflação, isso já não vale mais. Precisamos, em algum ponto, converter as perturbações em $\delta\phi$ para as perturbações em Ψ .

Para fazermos essa conversão, usamos a perturbação de curvatura \mathcal{R} ,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \eta) \equiv \frac{ik_i \delta T_0^i(\mathbf{k}, \eta) a^2 H(\eta)}{k^2 [\rho + \wp](\eta)} - \Psi(\mathbf{k}, \eta). \quad (2.91)$$

Essa variável é conservada depois que o modo cruza o horizonte. Assim, por meio dela, podemos relacionar a perturbação escalar $\delta\phi$ no momento em que o modo cruza o horizonte com o potencial Ψ já depois da inflação. Durante a inflação, temos

$$\mathcal{R} = -\frac{aH}{\phi'} \delta\phi \quad (\text{durante a inflação}), \quad (2.92)$$

enquanto que depois da inflação, já na era de dominação da radiação, temos

$$\mathcal{R} = -\frac{3}{2} \Psi \quad (\text{após a inflação}). \quad (2.93)$$

Dessa forma, temos

$$\Psi \Big|_{\text{após a inflação}} = \frac{2}{3} aH \frac{\delta\phi}{\phi'} \Big|_{\text{ao cruzar o horizonte}}, \quad (2.94)$$

e, para o espectro de potência,

$$\begin{aligned} P_{\Psi}(k) \Big|_{\text{após a inflação}} &= \frac{4}{9} \left(\frac{aH}{\phi'} \right)^2 P_{\delta\phi}(k) \Big|_{aH=k} \\ &= \frac{2}{9k^3} \left(\frac{aH^2}{\phi'} \right)^2 \Big|_{aH=k}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Podemos, ainda, reescrever esse espectro de potência em termos da variável de *slow-roll* ϵ_{sr} . Ele fica

$$P_{\Psi}(k) = P_{\Phi}(k) = \frac{8\pi G}{9k^3} \frac{H^2}{\epsilon_{sr}} \Big|_{aH=k}. \quad (2.96)$$

2.4.4.1 Utilizando o calibre *spatially flat slicing*

Nesse calibre, a métrica é dada por

$$ds^2 = -[1 + 2A(\mathbf{x}, t)]dt^2 - 2a(t)B_{,i}(\mathbf{x}, t)dx^i dt + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (2.97)$$

A vantagem desse calibre é que a perturbação $\delta\phi$ é desacoplada da perturbação Ψ , de forma que o espectro de potência para $\delta\phi$ é dado de forma exata pela equação 2.90, e não de forma aproximada, como vimos anteriormente.

Agora, consideremos uma das variáveis invariantes por calibre de Bardeen, dada por

$$\mathcal{V} \equiv B(\mathbf{k}, t) + \frac{ik_i a \delta T_0^i(\mathbf{k}, t)}{k^2 (\rho + \wp)}. \quad (2.98)$$

No calibre *spatially flat slicing*, temos

$$\mathcal{V} = B - \frac{\bar{\phi}' \delta \phi}{(\rho + \wp) a^2} \quad (\textit{spatially flat slicing}). \quad (2.99)$$

Nesse calibre, a outra variável de Bardeen Φ_H é dada por aHB . Podemos definir uma outra variável invariante por calibre dada por

$$\mathcal{R} \equiv -\Phi_H + aH\mathcal{V}, \quad (2.100)$$

de modo que, nesse calibre,

$$\mathcal{R} = -\frac{aH}{\bar{\phi}'} \delta \phi \quad (\textit{spatially flat slicing}). \quad (2.101)$$

Assim, podemos relacionar os espectros de potência das duas variáveis por

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{aH}{\bar{\phi}'} \right)^2 P_{\delta \phi}(k). \quad (2.102)$$

Usando a equação 2.90, temos, portanto,

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{2\pi GH^2}{\epsilon_{sr} k^3} \Big|_{aH=k}. \quad (2.103)$$

Temos, finalmente, o espectro de potência primordial das perturbações escalares em termos de uma variável invariante por transformações de calibre. Isso é importante pois, dessa forma, podemos calcular a variável \mathcal{R} em qualquer calibre e então relacionar o espectro de potência neste determinado calibre ao espectro de potência invariante dado pela equação 2.103. No calibre Newtoniano, por exemplo, vimos que $\mathcal{R} = 3\Phi/2$, de forma que $P_{\Phi} = 4P_{\mathcal{R}}/9$. Usando a equação 2.103, essa relação retorna exatamente o espectro de potência dado pela equação 2.96. Por causa dessa vantagem de podermos transitar facilmente entre diferentes calibres, o espectro de potência primordial em termos de \mathcal{R} é o mais utilizado na literatura.

Novamente, para mais detalhes das contas desta seção e da justificativa dos conceitos, ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 173–183) e (PIATTELLA, 2018, p. 256–262).

2.4.5 Índices espectrais

É comum escrevermos os espectros de potência nas formas apresentadas a seguir (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 187) (PIATTELLA, 2018, p. 262):

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{2\pi}{k^3} \frac{H^2}{m_{Pl}^2 \epsilon_{sr}} \Big|_{aH=k} \equiv 2\pi^2 \mathcal{A}_s k^{-3} \left(\frac{k}{k_P} \right)^{n_s(k)-1} \quad (2.104)$$

e

$$P_T(k) = 4P_h(k) = \frac{32\pi}{k^3} \frac{H^2}{m_{Pl}^2} \Big|_{aH=k} \equiv 2\pi^2 \mathcal{A}_T k^{-3} \left(\frac{k}{k_P} \right)^{n_T(k)}, \quad (2.105)$$

onde m_{Pl} é a massa de Planck (em unidades S.I., é dada por $m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$) e P_T é o espectro de potência total das ondas gravitacionais primordiais (engloba ambas as polarizações dos modos tensoriais). Os fatores \mathcal{A}_s e \mathcal{A}_T são chamados de amplitudes espectrais e estão relacionados com a escala de energia da inflação (PIATTELLA, 2018, p. 262). k_P , por sua vez, é a escala pivô, definida por convenção (o time do levantamento Planck, por exemplo, usa $k_P = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (ADE et al., 2016)). Já $n_s(k)$ e $n_T(k)$ são os índices espectrais, que carregam a dependência dos modos na escala (veja, por exemplo, que se $n_s(k) = 1$ para um certo modo k , o espectro de potência adimensional $\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}$ não dependerá da escala).

No modelo cosmológico tratado até aqui, a ordem de grandeza das perturbações na escala k_P é dada por $\sqrt{\mathcal{A}_s} = \sqrt{\frac{k_P^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k_P)} \sim 10^{-5}$, que coincide com a ordem de grandeza das perturbações observadas na *CMB*.

Muitas vezes, ao invés de trabalharmos com \mathcal{A}_T , trabalhamos com a razão tensor-escalar, definida por

$$r(k) \equiv \frac{P_T(k)}{P_{\mathcal{R}}(k)} \Big|_{k=k_P} \frac{\mathcal{A}_T}{\mathcal{A}_s}, \quad (2.106)$$

que pode ser escrita, utilizando as definições anteriores dos espectros de potência, como

$$r(k) = 16\epsilon_{sr} \Big|_{aH=k}. \quad (2.107)$$

Além disso, os índices espectrais também podem ser escritos em termos dos parâmetros de *slow-roll*:

$$n_T = -2\epsilon_{sr} \quad (2.108)$$

e

$$n_s = 1 - 4\epsilon_{sr} - 2\delta_{sr}. \quad (2.109)$$

A importância dessas relações reside no fato de que, se conseguirmos observar n_s e n_T e, conseqüentemente, obter informações sobre os parâmetros de *slow-roll*, poderemos adquirir informações sobre o potencial no período inflacionário, pois ϵ_{sr} e δ_{sr} estão diretamente ligados a ele.

3 Evolução das Perturbações e Traçadores de Estruturas

Como vimos, as perturbações primordiais são da ordem de 10^{-5} . Porém, com o passar do tempo, a gravidade atua e o acúmulo de matéria leva à formação das estruturas que conhecemos hoje. Ao mesmo tempo em que a gravidade leva a esse acúmulo, a expansão do universo e regiões de alta pressão de matéria bariônica e fótons tendem a retardar esse acúmulo.

De posse das equações que governam as perturbações, obtidas no capítulo anterior, como podemos fazer para relacionar as perturbações primordiais com as perturbações verificadas no universo tardio, em especial o contraste de densidade de matéria total $\delta_m(\mathbf{k}, a)$ e o respectivo espectro de potência linear $P_L(k, a)$?

Além disso, não conseguimos observar diretamente o contraste de densidade de matéria. Para obtermos informações deste, utilizamos os traçadores, como galáxias, as anisotropias secundárias da CMB, lenteamento gravitacional, dentre vários outros. Como podemos, então, relacionar esses observáveis com as grandezas teóricas que queremos obter?

Este capítulo tem o objetivo de responder a essas perguntas.

3.1 Evolução das perturbações

3.1.1 A função de transferência e o fator de crescimento

Ao fim da inflação, em $\eta = 0$, todos os modos estão fora do horizonte, isto é, $k\eta \ll 1$. Conforme o universo se expande, os modos passam a entrar novamente no horizonte. Além disso, o universo transita entre as fases de dominação de radiação e dominação de matéria, transição esta que ocorre em a_{eq} , o fator de escala na época de igualdade entre radiação e matéria. Os modos de pequena escala (k grande) entram no horizonte primeiro, ainda na fase de domínio da radiação, enquanto que os modos de grande escala (k pequeno) entram no horizonte depois. Isso faz com que os modos evoluam de forma diferente em suas “reentradas”.

Passado algum tempo depois da época de igualdade, já no meio da fase de dominação de matéria (denominamos por a_{late} o fator de escala de referência quando já estamos profundamente dentro da fase de dominação de matéria), os modos permanecem constantes. Já próximo à época atual, eles passam a decair novamente por causa da dominação de energia escura. Isso pode ser observado na figura 12.

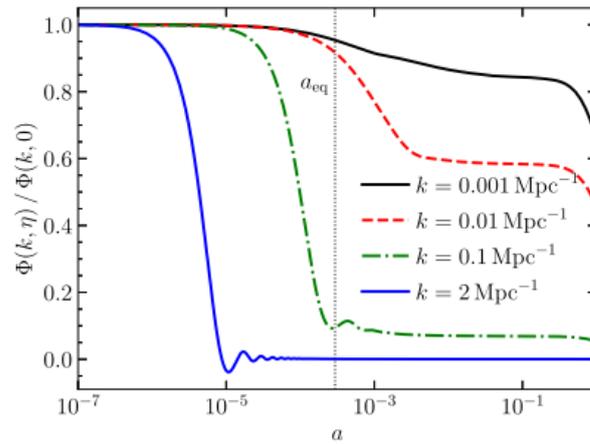


Figura 12 – Evolução linear do potencial gravitacional ϕ para diferentes modos, retirada do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Para relacionarmos o potencial na época que conseguimos observar, ao final da época de dominação de matéria, com a perturbação de curvatura primordial, podemos escrever (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 197)

$$\Phi(\mathbf{k}, a) = \frac{3}{5} \mathcal{R}(\mathbf{k}) \times \{\text{Função de Transferência}(k)\} \times \{\text{Fator de Crescimento}(a)\}. \quad (3.1)$$

A função de transferência engloba a evolução dos modos ao entrarem novamente no horizonte e também ao passarem pela época de equivalência entre radiação e matéria. Já o fator de crescimento¹ descreve a evolução independente de k dos modos já no meio da fase de dominação de matéria. Como mesmo os maiores modos decaem um pouco na época de equivalência, é comum normalizarmos a função de transferência para que ela assuma o valor 1 para o potencial dos modos de larga escala. Assim, temos, para a função de transferência,

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(\mathbf{k}, a_{\text{late}})}{\Phi_{\text{grande-escala}}(\mathbf{k}, a_{\text{late}})}, \quad (3.2)$$

onde $\Phi_{\text{grande-escala}}(\mathbf{k}, a_{\text{late}})$ é a solução do potencial gravitacional para os modos que entram no horizonte muito depois da época de equivalência.

Já o fator de crescimento está relacionado ao potencial por meio da equação

$$\frac{\Phi(\mathbf{k}, a)}{\Phi(\mathbf{k}, a_{\text{late}})} \equiv \frac{D_+(a)}{a} \quad (a > a_{\text{late}}). \quad (3.3)$$

Na época de dominação de matéria, o potencial é constante e, portanto, $D_+(a) = a$.

O fator $\frac{3}{5}$ que aparece na relação entre o potencial e a perturbação de curvatura primordial não será explicado em detalhes aqui. Ele vem da relação entre o potencial e

¹ O fator de crescimento tem esse nome pois o contraste de densidade de matéria total δ_m cresce proporcionalmente a ele.

a perturbação de curvatura na época de dominação de matéria e do decréscimo mencionado acima para os modos de grandes escalas. Para mais detalhes, ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 203–207).

Finalmente, temos a seguinte relação para o potencial gravitacional em função de a :

$$\Phi(\mathbf{k}, a) = \frac{3}{5} \mathcal{R}(\mathbf{k}) T(k) \frac{D_+(a)}{a} \quad (a > a_{late}). \quad (3.4)$$

E de onde obtemos a função de transferência e o fator de crescimento? Iremos obtê-los resolvendo as equações encontradas no capítulo anterior, isto é, as equações de Boltzmann perturbadas e as equações de Einstein perturbadas (PIATTELLA, 2018, p. 223). Essa não é uma tarefa simples, muitas vezes sem soluções analíticas, porém já existem códigos computacionais eficientes que fazem esses cálculos, como o *Code for Anisotropies in the Microwave Background* (CAMB) (LEWIS; CHALLINOR, 2011) e o *Cosmic Linear Anisotropy Solving System* (CLASS) (LESGOURGUES; TRAM; SCHOENEBERG, 2011).

É importante mencionar ainda que os neutrinos e suas massas impactam nos fatores da equação 3.1. Por serem massivos, em algum momento eles deixam de contribuir como componente de radiação e passam a contribuir como componente de matéria, conforme o universo se expande e esfria. Isso influencia em $H(a)$ (a densidade de energia de neutrinos deixa de decair com a^{-4} e passa a decair com a^{-3}) e, conseqüentemente, no fator de crescimento. Além disso, a presença dos neutrinos leva a um amortecimento significativo das perturbações em pequenas escalas e impacta também a evolução dos modos de larga escala, esse último de maneira menos significativa, o que influencia na função de transferência. Não trataremos em detalhes desses efeitos aqui, por não ser o foco do trabalho. Além disso, a cosmologia de neutrinos é uma área por si só, tendo inclusive livros-textos inteiros e inúmeros artigos destinados ao estudo desse tópico (ver, por exemplo, (LESGOURGUES et al., 2013)). De toda forma, em caso de necessidade nas análises dos resultados, as bibliotecas computacionais cosmológicas a serem utilizadas fornecem ferramentas para incluir esses efeitos dos neutrinos.

3.1.2 O espectro de potência para a matéria

No universo tardio, a matéria bariônica e a matéria escura se movem juntas ($u_b = u_c$) e têm os mesmos contrastes de densidade ($\delta_b = \delta_c$) (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p.302). É comum, portanto, descrevê-las em termos do contraste de densidade de matéria total δ_m e seu respectivo campo de velocidade \mathbf{u}_m . Para relacionar o contraste de densidade de matéria com o potencial em tempos recentes, podemos usar a equação de Poisson dada por 2.70, no limite em que os modos já estão dentro do horizonte ($k \gg aH$) e sem radiação,

$$k^2 \Phi(\mathbf{k}, a) = 4\pi G \rho_m(a) a^2 \delta_m(\mathbf{k}, a) \quad (a > a_{late}, k \gg aH). \quad (3.5)$$

Agora, temos que $\rho_m = \frac{\Omega_m \rho_{cr}}{a^3}$ e $4\pi G \rho_{cr} = \frac{3}{2} H_0^2$, de modo que

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = \frac{2k^2 a}{3\Omega_m H_0^2} \Phi(\mathbf{k}, a) \quad (a > a_{late}, k \gg aH). \quad (3.6)$$

Podemos então escrever, usando a equação 3.4:

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = \frac{2}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \mathcal{R}(\mathbf{k}) T(k) D_+(a) \quad (a > a_{late}, k \gg aH). \quad (3.7)$$

Já para o espectro de potência, tendo em mente a relação 2.104, podemos escrever

$$P_L(k, a) = \frac{8\pi^2}{25} \frac{\mathcal{A}_s}{\Omega_m^2} D_+^2(a) T^2(k) \frac{k^{n_s}}{H_0^4 k_p^{n_s-1}}. \quad (3.8)$$

Esse espectro de potência é mostrado na figura 13. Nela, podemos ver que, depois de um certo $k = k_{eq}$, o espectro de potência diminui. Isso se deve ao fato de que modos que entram cedo no horizonte (k grande), ainda na época dominada por radiação, sofrem uma supressão (o potencial diminui para esse modos, conforme vemos na figura 12 e, conseqüentemente, o crescimento do contraste de densidade de matéria é retardado). Quanto mais cedo um modo entra no horizonte, maior a supressão. k_{eq} refere-se ao modo que entra no horizonte exatamente na época de equivalência entre radiação e matéria. Uma medida de k_{eq} nos permitiria restringir o parâmetro de densidade de matéria no universo (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 200).

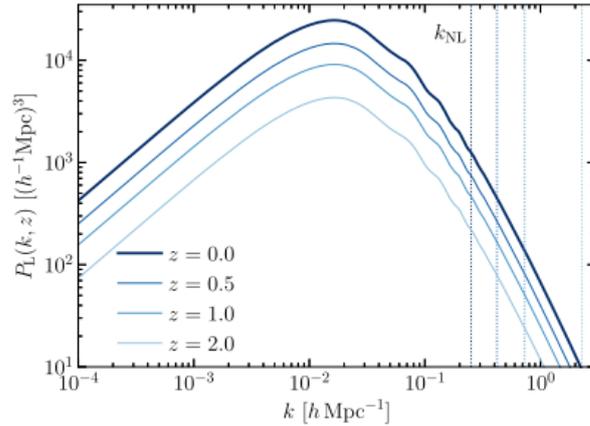


Figura 13 – Gráfico do espectro de potência linear de matéria, retirado do livro de (DODELSON; SCHMIDT, 2021), para diferentes *redshifts*. k_{NL} refere-se à escala a partir da qual efeitos não-lineares não podem ser ignorados.

3.2 Homogeneidade e isotropia estatística

Na seção anterior, exibimos o espectro de potência linear de matéria. Nele, vemos uma dependência apenas em k , e não em \mathbf{k} . Isso acontece porque, ao considerarmos o que

podemos realmente observar no universo, somos levados a pensar nas variáveis cosmológicas, como $\delta_m(\mathbf{x}, a)$, como variáveis aleatórias. Consequentemente, suas correspondentes no espaço de Fourier, como $\delta_m(\mathbf{k}, a)$, também serão variáveis aleatórias. Além disso, supomos que essas variáveis são estatisticamente homogêneas e isotrópicas acima de uma certa escala. Isso será detalhado a seguir.

Como vimos no capítulo anterior, as equações diferenciais que governam as perturbações nas diferentes componentes do universo e nos potenciais gravitacionais dependem apenas do módulo k dos modos, e não em \mathbf{k} . Isso significa que apenas as condições iniciais dependem de \mathbf{k} . Por isso escrevemos os esquemas da equação 3.1 e, consequentemente, da equação 3.7. Veja que, nessas equações, a dependência em \mathbf{k} está toda contida na perturbação de curvatura primordial $\mathcal{R}(\mathbf{k})$.

Porém, não temos como obter exatamente $\mathcal{R}(\mathbf{k})$. As equações que obtivemos para as perturbações são válidas após a fase inflacionária, quando já estamos no regime de gravitação clássica. As condições iniciais, por sua vez, têm origem quântica, e ainda não temos uma teoria de gravitação quântica que permita descrever em detalhes essa fase inicial da evolução do universo. No entanto, por terem origem quântica, essas condições iniciais têm características probabilísticas. Se elas têm origem em um processo gaussiano, essas características estarão contidas no espectro de potência (equivalente à variância) das perturbações primordiais - esse sim nós conseguimos obter a partir de uma teoria inflacionária.

Além disso, também não conseguimos obter exatamente $\delta_m(\mathbf{x}, a)$, e, consequentemente, $\delta_m(\mathbf{k}, a)$. Isso porque, quando fazemos uma observação astronômica, estamos vendo o nosso cone de luz passado. Não temos como, portanto, determinar, para um certo instante de tempo cósmico correspondente a um certo a , qual é a posição de cada galáxia no universo e, consequentemente, o contraste de densidade de matéria em cada ponto no universo. Assim, não temos como recuperar a condição inicial $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ a partir das observações e, por mais que tivéssemos uma teoria de gravitação quântica de forma que a prevíssemos com exatidão, não teríamos como testá-la, pois não temos acesso completo a $\delta_m(\mathbf{k}, a)$ para um certo a (PIATTELLA, 2018, p. 212).

A solução é, portanto, tratarmos essas variáveis cosmológicas como variáveis aleatórias, de modo que possamos estimar os seus valores esperados, espectros de potência e até mesmo momentos estatísticos de ordem maior.

3.2.1 Campos aleatórios

Para tratarmos as variáveis cosmológicas como variáveis aleatórias, precisamos explorar o conceito de campos aleatórios. Denotaremos por $G(\mathbf{x})$ um campo aleatório qualquer. No contexto da cosmologia, esse campo aleatório seria, por exemplo, o campo

de contraste de densidade de matéria $\delta_m(\mathbf{x})$. Nesta subseção e nas seguintes, seguiremos, principalmente, a discussão feita em (PIATTELLA, 2018, p. 211–234).

Uma função $G(\mathbf{x})$ é um campo aleatório se, para qualquer ponto \mathbf{x} , os valores que ela pode assumir são variáveis aleatórias e se, para qualquer valor de n , existem funções de distribuição dadas por

$$F_{1,2,\dots,n}(g_1, g_2, \dots, g_n) = P[G(\mathbf{x}_1) < g_1, G(\mathbf{x}_2) < g_2, \dots, G(\mathbf{x}_n) < g_n]. \quad (3.9)$$

Nessa equação, g se refere a um certo valor que o campo aleatório pode assumir em uma certa posição dentre todos aqueles que formam o conjunto estatístico (ou *ensemble*). g_1 , por exemplo, é um certo valor que o campo pode assumir na posição \mathbf{x}_1 . Além disso, P se refere à probabilidade, por exemplo, $P[G(\mathbf{x}_1) < g_1]$ seria a probabilidade de que o campo assumisse um valor menor que g_1 no ponto \mathbf{x}_1 . No caso de funções de distribuição conjuntas, por exemplo $F_{12}(g_1, g_2) = P[G(\mathbf{x}_1) < g_1, G(\mathbf{x}_2) < g_2]$, as vírgulas devem ser lidas como “e”, no sentido de que ambos os argumentos devem ser satisfeitos simultaneamente.

Em cada ponto, existe também um funcional de densidade de probabilidade $p(g)$, de tal forma que, por exemplo,

$$p_1(g_1)dg_1 \quad (3.10)$$

fornece a probabilidade do campo assumir um certo valor g_1 no ponto \mathbf{x}_1 . A relação com a função de distribuição é dada por

$$p_1(g_1) = \frac{dF_1(g_1)}{dg_1}. \quad (3.11)$$

Como a função de distribuição está associada a uma probabilidade acumulada, temos que $F_1(-\infty) = 0$ e $F_1(+\infty) = 1$.

O valor esperado do campo aleatório pode ser obtido por meio da média de conjunto estatístico (*ensemble average*),

$$\langle G(\mathbf{x}_1) \rangle \equiv \int_{\Omega} g_1 p_1(g_1) dg_1, \quad (3.12)$$

onde, nesta seção, Ω se refere ao *ensemble*.

Em geral, podemos ter

$$p_1(g_1) \neq p_2(g_2), \quad (3.13)$$

isto é, as distribuições de probabilidade podem ser diferentes em pontos distintos. Quando isso não acontece, ou seja, quando a distribuição de probabilidade é invariante por translação, dizemos que o campo aleatório é **estatisticamente homogêneo** (PIATTELLA, 2018, p. 214). Se isso acontece, podemos escrever

$$\langle G \rangle \equiv \int_{\Omega} gp(g)dg. \quad (3.14)$$

Por outro lado, dada uma matriz de rotação R , e definindo $\mathbf{x}_{R1} = R\mathbf{x}_1$, dizemos que o campo aleatório é **estatisticamente isotrópico** se a distribuição de probabilidade é invariante por rotação (PIATTELLA, 2018, p. 214), ou seja,

$$p_1(g_1) = p_{R1}(g_{R1}), \quad \forall R. \quad (3.15)$$

Agora, podemos questionar qual é a probabilidade de o campo assumir um valor $G(\mathbf{x}_1) = g_1$ no ponto \mathbf{x}_1 e $G(\mathbf{x}_2) = g_2$ no ponto \mathbf{x}_2 , simultaneamente. Essa probabilidade é dada por

$$p_{12}(g_1, g_2)dg_1dg_2, \quad (3.16)$$

onde $p_{12}(g_1, g_2)$ é a densidade de probabilidade conjunta, dada por

$$p_{12}(g_1, g_2) = \frac{\partial^2 F_{12}(g_1, g_2)}{\partial g_1 \partial g_2}. \quad (3.17)$$

Em geral,

$$p_{12}(g_1, g_2) \neq p_1(g_1)p_2(g_2). \quad (3.18)$$

Se $p_{12}(g_1, g_2) = p_1(g_1)p_2(g_2)$, isso significa que as realizações são independentes, e o processo aleatório é denominado processo de Poisson.

Podemos também definir a função de correlação de dois pontos, dada por

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle G(\mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_2) \rangle \equiv \int_{\Omega} g_1 g_2 p_{12}(g_1, g_2) dg_1 dg_2, \quad (3.19)$$

e, de forma geral, a função de correlação de N-pontos, dada por

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \equiv \langle G(\mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_2)\dots G(\mathbf{x}_N) \rangle \equiv \int_{\Omega} g_1 g_2 \dots g_N p_{12\dots N}(g_1, g_2, \dots, g_N) dg_1 dg_2 \dots dg_N. \quad (3.20)$$

Em geral, $p_{12\dots N} \neq p_{21\dots N}$, ou seja, a ordem dos pontos importa. Além disso, nessa equação, consideramos o mesmo *ensemble* em cada ponto.

É possível mostrarmos que, para um campo aleatório estatisticamente homogêneo, a correlação de dois pontos só depende do vetor de diferença entre os pontos (PIATTELLA, 2018, p.214), ou seja

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \xi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3.21)$$

e que, para um campo aleatório estatisticamente homogêneo e estatisticamente isotrópico, essa correlação só depende do módulo desse vetor de diferença, ou seja, da distância entre os dois pontos (PIATTELLA, 2018, p. 215),

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \xi(r_{12}), \quad (3.22)$$

onde $r_{12} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$.

Finalmente, a variância de conjunto estatístico (*ensemble variance*) é dada por

$$\sigma^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle G(\mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle G(\mathbf{x}_1) \rangle \langle G(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (3.23)$$

Se o campo aleatório é estatisticamente homogêneo e isotrópico,

$$\sigma^2(r_{12}) = \xi(r_{12}) - \langle G \rangle^2, \quad (3.24)$$

onde $\langle G \rangle^2$ não depende da posição. Se o processo aleatório fosse um processo de Poisson, teríamos $p_{12}(g_1, g_2) = p_1(g_1)p_2(g_2)$ e, portanto,

$$\xi(r_{12}) = \langle G \rangle^2, \quad (3.25)$$

ou seja, $\sigma^2 = 0$. Esse não é o caso, por exemplo, para o contraste de densidade de galáxias, pois estas tendem a estar mais próximas umas das outras por causa da atração gravitacional, de modo que as distribuições de probabilidade em pontos distintos não são independentes. A função de correlação de dois pontos, portanto, pode quantificar esse desvio do que seria esperado em um processo de Poisson, desvio esse associado à gravidade.

3.2.2 De médias de conjunto estatístico para médias espaciais

Na cosmologia, nos deparamos com alguns problemas, e um deles é que só temos uma realização do universo à disposição para as observações. Não conseguimos reproduzir o universo várias e várias vezes para fazermos as médias de conjunto estatístico. O que conseguimos fazer são médias espaciais na nossa realização do universo. Para as relacionarmos, considere a seguinte definição da média espacial do campo aleatório sobre um volume V ,

$$\bar{G} \equiv \frac{1}{V} \int_V d^3\mathbf{x}G(\mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Vamos estimar o erro que estamos cometendo ao trocar a média de conjunto estatístico pela média espacial por meio da variável $X \equiv \bar{G} - \langle G \rangle$. Supondo homogeneidade estatística, temos que

$$\langle X \rangle = 0 \quad (3.27)$$

e

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3\mathbf{r}\xi(\mathbf{r}) - \langle G \rangle^2, \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. É possível mostrarmos (PIATTELLA, 2018, p. 231–233) que essa variância tende a zero conforme V tende a infinito por causa do teorema ergódico. Esse teorema está intimamente ligado à hipótese de amostra justa, que diz que a parte do universo a que temos acesso por meio das observações é uma amostra justa de todo o universo (CHAVEZ, 2019, p. 38). Na prática, porém, o volume é finito e essa variância é diferente de zero, e é chamada de **variância cósmica**.

Todas as propriedades anteriores também se aplicam à transformada de Fourier do campo $G(\mathbf{x})$, pois a transformada de um campo aleatório também é um campo aleatório (PIATTELLA, 2018, p. 216). Em se tratando das observações, como geralmente estamos restritos a um certo volume, por exemplo uma caixa de volume L^3 , precisamos usar, ao invés da transformada de Fourier, uma expansão em termos da série de Fourier,

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_n G_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.29)$$

onde

$$G_n = \int d^3\mathbf{x} G(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} \quad (3.30)$$

e os vetores de onda são quantizados,

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (3.31)$$

onde \mathbf{n} é um vetor com componentes inteiras. Nessa equação, podemos pensar que L está relacionado à escala limite do levantamento considerado.

3.2.3 O espectro de potência

Supondo homogeneidade estatística, é possível mostrarmos, por meio da transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos, que

$$\langle \tilde{G}(\mathbf{k}) \tilde{G}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_G(\mathbf{k}), \quad (3.32)$$

onde

$$P_G(\mathbf{k}) \equiv \int d^3\mathbf{x} \xi_G(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.33)$$

é o espectro de potência, definido pela transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos. Além disso, se também supusermos isotropia estatística, veremos que o espectro de potência só dependerá de k , ou seja, teremos $P(k)$. É justamente por essas suposições que o espectro de potência exibido na equação 3.8 depende apenas de k .

Do ponto de vista observacional, considerando o espectro de potência do campo aleatório $G(\mathbf{x})$, com transformada de Fourier discreta dada pelos coeficientes G_n , e considerando também a substituição de médias de conjunto estatístico por médias espaciais ao longo do desenvolvimento para a obtenção desse espectro de potência, podemos mostrar que a variância cósmica² do espectro de potência pode ser dada por (ver (PIATTELLA, 2018, 219–221) para mais detalhes)

$$\frac{\sigma_P(k)}{P(k)} \simeq \frac{1}{kL}. \quad (3.34)$$

² Na verdade, tecnicamente, estamos exibindo aqui o desvio padrão, apenas por uma questão de elegância da equação. A variância cósmica em si seria $\sigma_P^2(k)$.

De acordo com essa equação, a variância cósmica é pequena quando a escala considerada é muito menor que a escala limite do levantamento ($kL \gg 1$). Para modos de pequenas escalas, temos muitos elementos de volume $d^3\mathbf{x} = dV$ para executar as médias espaciais, enquanto que, para modos de grandes escalas, perdemos precisão estatística pela baixa quantidade de termos no cálculo da média.

Se por um lado temos a variância cósmica que limita a informação que podemos obter sobre modos de grande escala (k pequeno), por outro lado, em pequenas escalas (k grande) a suposição de homogeneidade e isotropia estatística não pode ser aplicada, pois nessas escalas vemos um universo inhomogêneo e anisotrópico. Nelas, devemos corrigir a previsão do espectro de potência com a inclusão dos efeitos não lineares, que não serão discutidos a fundo nesse trabalho. Uma discussão da inclusão desses efeitos pode ser vista em (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 325–369).

3.3 Traçadores de estruturas

Vamos agora nos voltar para a segunda pergunta elencada no início do capítulo, referente a como relacionar os observáveis com a teoria desenvolvida até aqui.

Uma das principais informações obtidas por meio das observações é a do espectro de potência angular de um certo observável. De posse do espectro de potência angular observado, é possível compará-lo com o previsto pela teoria. Por meio dessa análise comparativa, é possível restringirmos os valores dos parâmetros cosmológicos.

Com o aumento da precisão e do volume de dados dos levantamentos observacionais ao longo dos anos, os erros estatísticos nos levantamentos têm ficado cada vez menores. Estamos, agora, em um período em que esses erros começam a ser superados pelos erros sistemáticos. Estes, por sua vez, não são resolvidos simplesmente por meio do aumento do volume dos dados (LEGRAND, 2020).

Para extrairmos toda a informação possível das observações e superarmos essas limitações impostas pelos erros sistemáticos, a análise combinada de diferentes observáveis tem ganhado uma importância cada vez maior. Isso se deve, dentre outros motivos, ao fato de que observáveis de naturezas distintas, associados a levantamentos distintos, sofrem com erros sistemáticos distintos (LEGRAND, 2020). Ao correlacionarmos esses observáveis, esperamos que os erros sistemáticos não estejam correlacionados e, portanto, tenham um impacto menor nos resultados da análise.

Por essa razão, além dos espectros de potência angular de um observável apenas, é importante calcularmos os espectros de potência angular cruzados entre diferentes observáveis. Comparando-os com aqueles obtidos por meio da observação, é possível obtermos melhores restrições dos parâmetros cosmológicos.

Para essa seção e as seguintes, vale lembrar que podemos alternar facilmente entre as variáveis t , η e z pensando nas relações 1.4 e 2.21.

3.3.1 O espectro de potência angular

Os espectros de potência angular podem ser obtidos a partir da projeção dos campos aleatórios no céu. Para um certo campo aleatório projetado, podemos escrever (DOUX et al., 2018)

$$A(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty dz W^A(z) \delta_m(\chi(z)\hat{\mathbf{n}}, z), \quad (3.35)$$

onde $A(\hat{\mathbf{n}})$ é um campo aleatório projetado qualquer e $W^A(z)$ é a função núcleo (em inglês, *kernel function*). Aqui, já escrevemos essa relação em termos do *redshift* e $\chi(z)$ está relacionado a z por meio da equação 1.78. O *kernel* contém toda a informação acerca do observável, de modo a ligar diretamente o contraste de densidade de matéria teórico com o campo projetado de um certo observável.

Para a radiação cósmica de fundo, por exemplo, é natural trabalharmos com o campo projetado, afinal, o seu sinal é um campo 2D observado no céu. Já para observáveis que possuem uma certa distribuição 3D, como as galáxias, podemos projetar a distribuição de objetos no céu, ou seja, em uma esfera 2D, e então estudar esse campo projetado e sua ligação com o contraste de densidade de matéria δ_m .

Para obtermos o espectro de potência angular de um observável, ou até mesmo o espectro de potência angular cruzado entre dois observáveis, partimos da correlação entre os campos projetados $\langle A(\hat{\mathbf{n}})B^*(\hat{\mathbf{n}}') \rangle$. Os campos com que trabalhamos em cosmologia são, em geral, supostos estatisticamente homogêneos e isotrópicos. Dessa forma, a correlação só depende de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'$ e pode ser expandida como (DOUX et al., 2018)

$$\langle A(\hat{\mathbf{n}})B^*(\hat{\mathbf{n}}') \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}') C_l^{AB}, \quad (3.36)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre e C_l^{AB} é o espectro de potência angular. Uma outra forma comum de definirmos o espectro de potência angular é a partir da expansão dos campos em termos dos harmônicos esféricos. Por exemplo, podemos escrever

$$A(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} A_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (3.37)$$

onde $\sum_{lm} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$ e A_{lm} são os coeficientes da expansão. Nessa forma, o espectro de potência angular é definido por

$$\langle A_{lm} B_{l'm'} \rangle = C_l^{AB} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.38)$$

Após algumas manipulações algébricas, utilizando a transformada inversa da equação 3.35 (uma dedução análoga, porém restrita ao caso de galáxias, pode ser vista em (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 312)) e também a expansão de onda plana das exponenciais

complexas (aparecem as funções de Bessel), podemos escrever (DOUX et al., 2018)

$$C_l^{AB} = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \int dz W^A(z) j_l(k\chi(z)) \int dz' W^B(z') j_l(k\chi(z')) \times P_\delta(k, z, z'), \quad (3.39)$$

onde j_l são as funções de Bessel esféricas e $P_\delta(k, z, z')$ é o espectro de potência linear de matéria entre duas épocas diferentes (*unequal-time matter power spectrum*). Essa é a expressão geral para o espectro de potência angular entre dois campos aleatórios projetados quaisquer.

É possível, ainda, expressarmos o espectro de potência de matéria entre duas épocas diferentes em termos do espectro de potência primordial das perturbações escalares (equação 2.104). Isso é possível pois, na teoria linear, podemos desacoplar a dependência em z e z' desse espectro por meio da seguinte relação (LEGRAND, 2020) (CHISARI et al., 2019b),

$$P_\delta(k, z, z') = T_\delta(k, z) T_\delta(k, z') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\mathcal{R}(k), \quad (3.40)$$

onde $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ é o espectro de potência primordial adimensional³, dado por $\frac{k^3}{2\pi^2}$ vezes a expressão 2.104. A função T_δ também é chamada de função transferência, mas não é a mesma que foi definida anteriormente nesse capítulo. Ela é definida pela razão da quantidade em questão pela perturbação de curvatura primordial (CHISARI et al., 2019b),

$$T_X(k, z) = \frac{X(\mathbf{k}, z)}{\mathcal{R}(\mathbf{k})}. \quad (3.41)$$

Por exemplo, a função de transferência do contraste de densidade de matéria linear pode ser escrita como

$$T_\delta(k, z) = \frac{\delta_m(\mathbf{k}, z)}{\mathcal{R}(\mathbf{k})} = \frac{2}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} T(k) D_+(z) \quad (z < z_{late}, k \gg \frac{H}{1+z}), \quad (3.42)$$

onde usamos a relação 3.7 e 1.4. Aqui, $z_{late} = \frac{1}{a_{late}} - 1$.

Podemos, então, reescrever a relação 3.39 como

$$C_l^{AB} = 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \int dz W^A(z) T_\delta(k, z) j_l(k\chi(z)) \times \int dz' W^B(z') T_\delta(k, z') j_l(k\chi(z')). \quad (3.43)$$

Definindo as funções de transferência dos traçadores como

$$\Delta_l^A(k) = \int dz W^A(z) T_\delta(k, z) j_l(k\chi(z)), \quad (3.44)$$

podemos escrever

$$C_l^{AB} = 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \Delta_l^A(k) \Delta_l^B(k). \quad (3.45)$$

³ Anteriormente havíamos chamado o espectro de potência primordial adimensional de $\Delta_{\mathcal{R}}^2$, mas daqui a pouco o símbolo Δ será usado para outra grandeza, então resolvemos mudar a notação.

3.3.2 A aproximação de Limber

As expressões exibidas na seção passada são expressões gerais para o cálculo do espectro de potência angular, porém os cálculos são muito custosos, pois envolvem três integrais sobre as funções oscilatórias j_l . Para tornar os cálculos mais rápidos, é comum usarmos a aproximação de Limber, descrita a seguir.

Podemos mostrar que, para l grande, o produto entre duas funções de Bessel $j_l(k\chi)j_l(k\chi')$ possui picos estreitos em torno de $k\chi \approx k\chi' \approx \sqrt{l(l+1)} \approx l + \frac{1}{2}$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 313). Isso se baseia no fato de que o primeiro pico da função esférica de Bessel, que se encontra aproximadamente nessa região, é dominante em relação aos demais picos (FELDBRUGGE, 2023). Se o espectro de potência varia pouco no intervalo Δk em que o produto das funções de Bessel é não nulo, podemos aproximar o espectro de potência de matéria (ver equação 3.39) como constante na integração em k . Podemos usar, então, a seguinte relação:

$$\frac{2}{\pi} \int k^2 dk j_l(k\chi) j_l(k\chi') = \frac{1}{\chi^2} \delta_D^{(1)}(\chi - \chi'). \quad (3.46)$$

Normalmente, essa aproximação tem uma boa precisão para $l \gtrsim 20$, porém ela tem um grande erro para l 's muito pequenos, para *kernels* que variam rapidamente, como *kernels* estreitos, e, no caso do espectro cruzado de potência angular, para *kernels* que tenham uma sobreposição pequena nos *redshifts* (LOVERDE; AFSHORDI, 2008) (FELDBRUGGE, 2023).

A partir da definição da distância comóvel 1.78, temos que

$$d\chi = \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.47)$$

e podemos, então, escrever a equação 3.39 na aproximação de Limber como

$$C_l^{AB} = \int dz \frac{H(z)}{\chi^2(z)} W^A(z) W^B(z) P_\delta \left(k = \frac{l + \frac{1}{2}}{\chi(z)}, z \right). \quad (3.48)$$

Sabemos que, na aproximação de Limber,

$$k = \frac{l + \frac{1}{2}}{\chi} \quad (3.49)$$

Diferenciando essa equação, temos

$$dk = -\frac{l + \frac{1}{2}}{\chi^2} d\chi, \quad (3.50)$$

e, como $d\chi = dz/H(z)$, temos

$$dz = -\frac{H\chi^2}{l + \frac{1}{2}} dk. \quad (3.51)$$

Portanto, efetuando uma mudança de variável na equação 3.48 de z para k (o sinal negativo é incorporado ajustando os limites de integração), obtemos

$$C_l^{AB} = \frac{2}{2l+1} \int dk P_\delta(k, z_l) [H(z_l)W^A(z_l)][H(z_l)W^B(z_l)], \quad (3.52)$$

onde $z_l = \chi^{-1}(\chi_l(k))$, isto é, a inversa da definição 1.78 calculada em χ_l , dado por

$$\chi_l \equiv (l + 1/2)/k. \quad (3.53)$$

Definindo, agora, as funções de transferência dos observáveis na aproximação de Limber como

$$\tilde{\Delta}_l^A = H(z_l)W^A(z_l), \quad (3.54)$$

podemos escrever

$$C_l^{AB} = \frac{2}{2l+1} \int dk P_\delta(k, z_l) \tilde{\Delta}_l^A \tilde{\Delta}_l^B. \quad (3.55)$$

3.3.3 Traçadores de estruturas - galáxias

Um dos observáveis mais comuns são as galáxias. Os levantamentos de *redshifts* de galáxias, como o *2dF Galaxy Redshift Survey*⁴ (AAO, 2002) e o *Sloan Digital Sky Survey* (APO, 2023)⁵, fornecem a posição angular das galáxias e os seus respectivos *redshifts*. A partir destes levantamentos, podemos obter o contraste de densidade de galáxias observado em uma certa casca esférica correspondente ao *redshift* z , isto é, $\delta_{g,obs}(\mathbf{x} = \chi(z)\hat{\mathbf{n}}, z)$. Porém, não podemos fazer uma associação direta de $\delta_{g,obs}$ ao contraste de densidade de matéria δ_m , pelas razões expressas a seguir.

Primeiramente, as galáxias são resultado de um complexo processo de formação de estrutura e são objetos altamente não-lineares. Não devemos esperar, portanto, que a distribuição desses objetos nos indicará diretamente a distribuição de matéria. Dizemos, portanto, que as galáxias são um traçador enviesado da distribuição de matéria, e a relação entre essas distribuições pode ser muito complicada em geral (DESJACQUES; JEONG; SCHMIDT, 2018). Porém, em grandes escalas, a formação de estruturas é dominada pela gravidade, de forma que podemos escrever, em primeira ordem, uma relação simples entre o contraste de densidade de galáxias,

$$\delta_g(\mathbf{x}, z) \equiv \frac{n_g(\mathbf{x}, z) - \bar{n}_g(z)}{\bar{n}_g(z)}, \quad (3.56)$$

⁴ O *2dF Galaxy Redshift Survey* operou de 1997 a 2002 e obteve o espectro de 245591 objetos, em sua maioria galáxias, e cobriu uma área de cerca de 1500 graus quadrados (aproximadamente 4% do céu) (AAO, 2002).

⁵ O *Sloan Digital Sky Survey* começou em 2000 e continua até hoje. Ele se encontra em sua quinta fase, prevista para durar até 2027 e cobrir o céu inteiro. Em sua terceira fase (2008 a 2014), um de seus programas denominado *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (BOSS) (DAWSON et al., 2013) observou cerca de 1.5 milhão de galáxias em uma área de 10000 graus quadrados (cerca de 25%) do céu.

onde n_g é a densidade numérica de galáxias e \bar{n}_g é a densidade numérica média de galáxias, e o contraste de densidade de matéria. Essa relação é dada por

$$\delta_g(\mathbf{x}, z) = b(z)\delta_m(\mathbf{x}, z), \quad (3.57)$$

onde $b(z)$ é o fator de viés.

Além disso, o contraste de densidade de galáxias observado $\delta_{g,obs}$ não nos fornece diretamente o contraste de densidade de galáxias real δ_g . Isso porque $\delta_{g,obs}$ está sujeito a efeitos observacionais como os efeitos de distorção de espaço de *redshift* (em inglês, *redshift-space distortions*, ou RSD) e de *magnification bias*. O efeito de RSD tem origem nas velocidades peculiares das galáxias. Galáxias que se afastam de nós introduzem um *redshift* extra na observação, e aparentam estar mais distantes, enquanto que galáxias se aproximando de nós aparentam estar mais próximas do que realmente estão. Uma discussão detalhada desse efeito pode ser vista em (KAISER, 1987). Já o efeito de *magnification bias* modifica a densidade observada de galáxias, pois o fluxo observado de uma determinada fonte pode ser aumentado ou diminuído pelo efeito de lenteamento gravitacional, fazendo com que galáxias com magnitude m acima do limite do levantamento (pouco brilho) acabem sendo detectadas ou com que galáxias abaixo do limite de magnitude do levantamento (com brilho a princípio suficiente para ser detectado) sejam excluídas dele (para mais detalhes, ver, por exemplo, (WENZL; CHEN; BEAN, 2023)).

3.3.3.1 O contraste de densidade de galáxias projetado

A ideia por trás da obtenção do espectro de potência angular de galáxias está em projetar o contraste de densidade de galáxias observado $\delta_{g,obs}$ no céu. Isso pode ser representado pela seguinte relação,

$$G(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty dz p_z(z) \delta_{g,obs}(\chi(z)\hat{\mathbf{n}}, z), \quad (3.58)$$

onde $G(\hat{\mathbf{n}})$ é o contraste de densidade de galáxias projetado. Nessa relação, $p_z(z)$ é a distribuição normalizada de distâncias das galáxias, dada por

$$p_z(z) = \frac{1}{N_T} \frac{dN}{dz} = \frac{dn}{dz}, \quad (3.59)$$

onde N_T é o número total de galáxias de um certo levantamento, $N(z)$ é a contagem cumulativa de galáxias até o *redshift* z e $n = \frac{N}{N_T}$. A integração de $p_z(z)$ de $z = 0$ a $z = \infty$ tem como resultado 1, ou seja, essa função é normalizada nesse intervalo. Para grandes valores de z essa função cai para zero, pois as galáxias estão muito distantes para serem detectadas. Para baixos valores ela também cai para zero, pois o volume é muito pequeno e há, portanto, poucas galáxias (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 311).

Para relacionarmos diretamente o contraste de densidade de matéria com o contraste de densidade projetado de galáxias, usamos a relação 3.35. No caso das galáxias,

o *kernel* $W^G(z)$ engloba a distribuição de distâncias, o *bias* e, ainda, outras correções provenientes de efeitos como o de lenteamento gravitacional. Porém, a inclusão do efeito de distorção do espaço de *redshift* é mais sutil, pois envolve um divergente do campo de velocidade,

$$\delta_{g,RSD}(\mathbf{x}) = b\delta_m(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{aH} \right]. \quad (3.60)$$

3.3.3.2 Cálculo do espectro de potência angular de galáxias na CCL

A biblioteca computacional *Core Cosmology Library* (CCL) ⁶ (CHISARI et al., 2019a) parte da equação 3.45 para o cálculo do espectro de potência angular. Um dos pontos interessantes em usarmos essa relação é que o efeito de distorção de *redshift* linear pode ser incluído como uma componente da função de transferência das galáxias Δ_l^G .

A função de transferência das galáxias, na CCL, é separada em três contribuições, $\Delta_l^G = \Delta_l^D + \Delta_l^{RSD} + \Delta_l^M$. A primeira contribuição, proporcional ao contraste de densidade de matéria, é dada por (CHISARI et al., 2019b)

$$\Delta_l^D(k) = \int dz p_z(z) b(z) T_\delta(k, z) j_l(k\chi(z)), \quad (3.61)$$

onde $p_z(z) \equiv \frac{dn}{dz}$ é a distribuição de distâncias normalizada das galáxias.

A segunda contribuição, correspondente à contribuição linear do efeito de distorção do espaço de *redshift*, é dada por (CHISARI et al., 2019b)

$$\Delta_l^{RSD}(k) = \int dz \frac{(1+z)p_z(z)}{H(z)} T_\theta(k, z) j_l''(k\chi(z)), \quad (3.62)$$

onde $j_l''(k\chi(z))$ é a segunda derivada da função esférica de Bessel e $T_\theta(k, z)$ é a função de transferência da divergência do campo de velocidade $\theta(\mathbf{k}, z)$, definido por

$$\theta(\mathbf{k}, z) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_m(\mathbf{k}, z) = \frac{-H(z)f(z)}{1+z} \delta(\mathbf{k}, z), \quad (3.63)$$

onde $f(a(z)) = d\ln(D_+)/d\ln(a)$ é a taxa de crescimento linear e a última igualdade segue ao considerarmos as velocidades como irrotacionais, como na equação 2.29, e a equação 2.44 (ver (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 302)). Dividindo ambos os lados dessa equação por $\mathcal{R}(\mathbf{k})$, podemos escrever, portanto,

$$T_\theta(k, z) = \frac{-H(z)f(z)}{1+z} T_\delta(k, z). \quad (3.64)$$

Este trabalho não tem como foco o detalhamento do efeito de distorção do espaço de *redshift* e da obtenção de sua função de transferência Δ_l^{RSD} . Porém, para os interessados, boas discussões podem ser vistas em (BONVIN; DURRER, 2011), (GAO; VLAH; CHALLINOR, 2023), (ASSASSI; SIMONOVÍĆ; ZALDARRIAGA, 2017) e (SAITO, 2016),

⁶ Neste trabalho, utilizamos a versão 3.0.0 da CCL.

incluindo discussões sobre como lidar com as derivadas segundas das funções esféricas de Bessel.

Por fim, a terceira contribuição, correspondente aos efeitos de lenteamento gravitacional, é dada por (CHISARI et al., 2019b)

$$\Delta_l^M(k) = -l(l+1) \int \frac{dz}{H(z)} w^M(z) T_{\Psi-\Phi}(k, z) j_l(k\chi(z)), \quad (3.65)$$

onde ⁷

$$w^M(z) \equiv \int_z^\infty dz' p_z(z') \frac{5s(z') - 2\chi' - \chi}{2\chi'\chi}. \quad (3.66)$$

Nas expressões acima, $T_{\Psi-\Phi}(k, z)$ é a função transferência para os potenciais gravitacionais, dada por

$$T_{\Psi-\Phi}(k, z) = -\frac{3\Omega_m H_0^2}{k^2} (1+z) T_\delta(k, z), \quad (3.67)$$

e $s(z)$ é a derivada logarítmica do número de fontes com magnitude limite (CHALLINOR; LEWIS, 2011),

$$s(z) = \left. \frac{\partial \log N(z, m < m')}{\partial m'} \right|_{m'=m_{max}}, \quad (3.68)$$

onde $N(z, m < m')$ é a contagem cumulativa de objetos com magnitude abaixo de m' e é estimada no limite de magnitude do catálogo. Essa contribuição engloba efeitos de lenteamento gravitacional, como o aumento aparente do volume do levantamento e o efeito de *magnification bias* (ver (WENZL; CHEN; BEAN, 2023)). Novamente, esse trabalho não tem por objetivo detalhar o efeito de *magnification bias* e sua inclusão no espectro de potência angular. Para mais detalhes, ver, por exemplo, (PEIRIS; SPERGEL, 2000) e (CHALLINOR; LEWIS, 2011).

Podemos optar também, na CCL, por efetuar o cálculo do espectro de potência angular utilizando a aproximação de Limber. Ele é feito a partir da relação 3.55. As diferentes contribuições para a função de transferência de galáxias na aproximação de Limber são, então, dadas por (CHISARI et al., 2019b)

$$\tilde{\Delta}_l^D(k) = p_z(z_l) b(z_l) H(z_l), \quad (3.69)$$

$$\tilde{\Delta}_l^{RSD}(k) = \frac{1+8l}{(2l+1)^2} p_z(z_l) f(z_l) H(z_l) - \frac{4}{2l+3} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} p_z(z_{l+1}) f(z_{l+1}) H(z_{l+1}) \quad (3.70)$$

e

$$\tilde{\Delta}_l^M(k) = 3\Omega_m H_0^2 \frac{l(l+1)}{k^2} (1+z_l) w^M(z_l). \quad (3.71)$$

⁷ Lembre que estamos considerando, ao longo deste trabalho, um universo espacialmente plano. No tratamento do lenteamento feito aqui, e também no tratamento do lenteamento de CMB a ser feito posteriormente, se não estivéssemos fazendo essa consideração, as distâncias comóveis deveriam ser substituídas por $S_\kappa(\chi)$.

3.3.3.3 Cálculo do espectro de potência angular de galáxias na NumCosmo

A biblioteca cosmológica *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo)⁸ (VITENTI; PENNA-LIMA, 2014), por sua vez, ainda não tem suporte para o cálculo do espectro de potência angular por métodos diferentes da aproximação de Limber. Nela, o cálculo, utilizando a aproximação de Limber, é feito a partir da relação 3.48. O *kernel* na aproximação de Limber é então escrito, desconsiderando efeitos de distorção de *redshift*, como (DOUX et al., 2018)

$$W^G(z) = b(z) \frac{dn}{dz} + \frac{3\Omega_m}{2} \frac{H_0^2}{H(z)} (1+z) \chi(z) (5s-2) g(z), \quad (3.72)$$

onde

$$g(z) = \int_z^\infty dz' \left(1 - \frac{\chi(z)}{\chi(z')} \right) \frac{dn}{dz'}. \quad (3.73)$$

O primeiro termo da equação 3.72 é facilmente relacionado com o termo dado pela equação 3.69, bastando dividir $\tilde{\Delta}_l^D(k)$ por $H(z)$, conforme definição 3.54. O segundo termo da equação 3.39 também é facilmente relacionado com o termo dado pela equação 3.71, bastando dividir $\tilde{\Delta}_l^M(k)$ por $H(z)$, utilizar o fato de que, na aproximação de Limber, $\frac{l(l+1)}{k^2} \approx \chi^2$ ($l \gg 1$), e, por último, considerar que a função $s(z)$ é uma constante. Essa última aproximação pode ser boa a depender da análise e do levantamento considerado, mas deve ser feita com cautela (para uma discussão acerca dessa dependência em z do parâmetro s , ver (WENZL; CHEN; BEAN, 2023)).

3.3.4 Traçadores de estruturas - lenteamento de CMB

Um outro traçador importante é o lenteamento da CMB. Ao viajar da última superfície de espalhamento até nós, os fótons da CMB sofrem deflexões por causa das estruturas no caminho. Isso faz com que os pontos frios e quentes do campo de temperatura da CMB sejam distorcidos em torno dessas estruturas do universo tardio (HU, 1996). A seguir, descreveremos esse efeito.

3.3.4.1 Perturbações no caminho dos fótons

Aqui, iremos considerar apenas efeitos de lenteamento fraco, em que os desvios angulares das trajetórias dos fótons são pequenos. Isso é esperado porque poucas linhas de visada se encontram perto de estruturas extremamente densas, como buracos negros, capazes de gerar desvios significativos da aproximação de ângulo pequeno (LEWIS; CHALLINOR, 2006).

Considerando a equação da geodésica para o fótons (equação 1.96), dada a métrica perturbada no calibre newtoniano (equação 2.1), podemos mostrar que (LEWIS;

⁸ Neste trabalho, utilizamos a versão 0.18.2 da NumCosmo.

CHALLINOR, 2006, p. 11–13)

$$\theta(\eta_0 - \chi_*) = \theta_0 - \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_{Weyl}(\chi \hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi) \quad (3.74)$$

e

$$\phi(\eta_0 - \chi_*) = \phi_0 - \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} \frac{2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi_{Weyl}(\chi \hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi), \quad (3.75)$$

onde χ_* é a distância comóvel da última superfície de espalhamento, θ e ϕ são as coordenadas angulares no sistema de coordenadas esféricas, θ_0 e ϕ_0 são as coordenadas angulares da linha de visada $\hat{\mathbf{n}}$ e Ψ_{Weyl} é o potencial de Weyl, definido por

$$\Psi_{Weyl} = \frac{\Psi - \Phi}{2}. \quad (3.76)$$

O vetor de deslocamento $\boldsymbol{\alpha}$, por sua vez, tem componentes dadas por $\alpha_\theta = \theta - \theta_0$ e $\alpha_\phi = \sin^2 \theta (\phi - \phi_0)$, de modo que podemos escrever

$$\boldsymbol{\alpha} = -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} \nabla_{\hat{\mathbf{n}}} \Psi_{Weyl}(\chi \hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi), \quad (3.77)$$

onde $\nabla_{\hat{\mathbf{n}}}$ é a derivada covariante na esfera. O vetor de deslocamento nos fornece, portanto, o ângulo de deflexão de uma fonte à distância χ_* . Agora, podemos definir o potencial de lenteamento,

$$\psi(\hat{\mathbf{n}}) \equiv -2 \int_0^{\chi_*} d\chi \frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} \Psi_{Weyl}(\chi \hat{\mathbf{n}}; \eta_0 - \chi), \quad (3.78)$$

de forma que o ângulo de deflexão é dado por $\nabla_{\hat{\mathbf{n}}} \psi$.

A temperatura lenteada da CMB em uma certa direção $\hat{\mathbf{n}}$ é igual à temperatura não lenteada ao longo da direção deslocada, isto é, $\tilde{T}(\hat{\mathbf{n}}) = T(\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\alpha})$. Isso se deve ao fato de a intensidade da CMB só variar com a frequência, e esta, por sua vez, só se altera em razão do *redshift* cosmológico, *redshifts* gravitacionais e efeito Doppler (DODELSON; SCHMIDT, 2021, p. 378). A alteração na direção, portanto, não gera uma alteração na intensidade e, conseqüentemente, na temperatura.

3.3.4.2 Espectro de potência angular do potencial de lenteamento

Para obtermos o espectro de potência angular do potencial de lenteamento, o processo é igual àquele que levou à equação 3.39, e pode ser visto em detalhes em (LEWIS; CHALLINOR, 2006, p. 27–29). Ele é dado por

$$C_l^\psi = 16\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \left[\int_0^{\chi_*} d\chi T_{\Psi_{Weyl}}(k; \eta_0 - \chi) j_l(k\chi) \left(\frac{\chi_* - \chi}{\chi_* \chi} \right) \right]^2. \quad (3.79)$$

Como o ângulo de deflexão é o mais relevante fisicamente, é mais comum vermos o espectro de potência angular da convergência κ ,

$$\kappa = -\frac{1}{2} \nabla_{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.80)$$

Ele é dado por

$$C_l^{\kappa_{CMB}} = \frac{[l(l+1)]^2}{4} C_l^\psi. \quad (3.81)$$

Usando a relação 3.47 e que

$$T_{\Psi_{Weyl}} = \frac{T_{\Psi-\Phi}}{2}, \quad (3.82)$$

obtemos

$$C_l^{\kappa_{CMB}} = 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \left[\frac{l(l+1)}{2} \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)} \frac{\chi(z_*) - \chi(z)}{\chi(z_*)\chi(z)} T_{\Psi-\Phi}(k, z) j_l(k\chi(z)) \right]^2. \quad (3.83)$$

3.3.4.3 Cálculo do espectro de potência angular de lenteamento de CMB na CCL

Na CCL, assim como anteriormente, o cálculo do espectro de potência angular do lenteamento de CMB é feito a partir da relação 3.45, com a função de transferência (CHISARI et al., 2019b):

$$\Delta_l^{\kappa_{CMB}}(k) = -\frac{l(l+1)}{2} \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)} \frac{\chi(z_*) - \chi(z)}{\chi(z_*)\chi(z)} T_{\Psi-\Phi}(k, z) j_l(k\chi(z)). \quad (3.84)$$

Já na aproximação de Limber, considerando a relação 3.55, podemos escrever

$$\tilde{\Delta}_l^{\kappa_{CMB}}(z) = \frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \frac{l(l+1)}{k^2} (1+z) \frac{\chi(z_*) - \chi(z)}{\chi(z_*)\chi(z)}. \quad (3.85)$$

3.3.4.4 Cálculo do espectro de potência angular de lenteamento de CMB na NumCosmo

A NumCosmo faz o cálculo do espectro de potência angular do lenteamento de CMB já considerando a aproximação de Limber. O *kernel*, por sua vez, é dado por (DOUX et al., 2018):

$$W^{\kappa_{CMB}}(z) = \frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \frac{(1+z)}{H(z)} \chi(z) \frac{\chi(z_*) - \chi(z)}{\chi(z_*)}. \quad (3.86)$$

É fácil relacionar esse *kernel* com o termo dado pela equação 3.85, bastando dividir $\tilde{\Delta}_l^{\kappa_{CMB}}(z)$ por $H(z)$, considerando a relação 3.54, e utilizar o fato de que, na aproximação de Limber, $\frac{l(l+1)}{k^2} \approx \chi^2$ ($l \gg 1$).

4 Comparação das bibliotecas *Numerical Cosmology Library* e *Core Cosmology Library*

Chegamos, então, ao “*kernel*” deste trabalho. Trocadilho à parte, o propósito dessa seção é apresentar os resultados obtidos na comparação das bibliotecas *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo) e *Core Cosmology Library* (CCL). As funções computacionais implementadas foram a do auto-espectro de potência angular de galáxias, auto-espectro de potência angular de lenteamento de CMB e o espectro de potência angular cruzado entre esses dois tipos de sondas cosmológicas, sob a aproximação de Limber. A seguir, descreveremos quais os dados utilizados, os critérios para a comparação e apresentaremos os gráficos e resultados obtidos.

4.1 Parâmetros e funções utilizados na definição do modelo cosmológico

Para que as comparações sejam acuradas, é essencial que as funções e os parâmetros utilizados na definição inicial das cosmologias em ambas as bibliotecas estejam alinhados. A seguir, eles serão apresentados.

4.1.1 Espectro de potência de matéria e função de transferência

Neste trabalho, não lidaremos com efeitos não-lineares, de modo que o espectro de potência utilizado nas comparações é o espectro de potência linear de matéria. Para calculá-lo, precisamos da função de transferência, do fator de crescimento e do espectro de potência primordial, como foi visto no capítulo 3. O fator de crescimento é calculado a partir das equações de Boltzmann e o espectro de potência primordial a partir da expressão analítica exibida no capítulo 2.

A expressão da função de transferência utilizada nos códigos, por sua vez, foi a expressão analítica aproximada de Eisenstein-Hu, dada por

$$T(k) = \frac{\Omega_b}{\Omega_m} T_b(k) + \frac{\Omega_c}{\Omega_m} T_c(k), \quad (4.1)$$

onde $T_b(k)$ e $T_c(k)$ são as contribuições da matéria bariônica e da matéria escura para a função de transferência. Para mais detalhes dessa expressão e dos parâmetros envolvidos

em seu cálculo, ver (EISENSTEIN; HU, 1998). Um dos motivos para a utilização de uma expressão analítica aproximada é agilizar o cálculo numérico.

Vale lembrar que existem outras expressões analíticas aproximadas para a função de transferência, como a de Bardeen, Bond, Kaiser e Szalay (BBKS) (BARDEEN et al., 1986). Além disso, existem códigos que calculam a função de transferência diretamente da resolução do sistema de equações de Boltzmann, como o CAMB (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*) (LEWIS; CHALLINOR, 2011). Como o foco deste trabalho não é no cálculo das funções de transferência e nas especificidades de cada uma, a função de transferência de Eisenstein-Hu servirá aos nossos propósitos.

4.1.2 Equação de estado da energia escura

Até agora trabalhamos principalmente com uma componente de energia escura dada por uma constante cosmológica, com o parâmetro da equação de estado dado por $w_{DE} = -1$. Porém, apesar de ser uma grande candidata a energia escura, ela não é a única. Uma forma de escrevermos a equação de estado para que ela englobe uma variedade maior de candidatos ao posto de energia escura é por meio da equação de estado de Chevallier–Polarski–Linder (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001) (LINDER, 2003), dada por

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}. \quad (4.2)$$

Nessa equação, w_0 é o valor atual da equação de estado e o termo w_a está associado à evolução temporal dessa equação. Dessa forma, o modelo de constante cosmológica é um caso particular, dado por $w_0 = -1$ e $w_a = 0$.

4.1.3 O parâmetro σ_8

Um outro parâmetro muito utilizado na cosmologia é a média quadrática (*root mean square* - RMS) do contraste de densidade em esferas de raio de $R = 8h^{-1}Mpc$, que pode ser calculado por meio da relação:

$$\sigma_8 = \sqrt{\frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P_\delta(k) \tilde{W}_R^2(k)}, \quad (4.3)$$

onde $P_\delta(k)$ é o espectro de potência linear de matéria em $z = 0$ e $\tilde{W}_R(k)$ é a transformada de Fourier de um filtro *top hat* esférico, dada por

$$\tilde{W}_R(k) = \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)]. \quad (4.4)$$

Esse, porém, não é um parâmetro fundamental, e sim um parâmetro derivado do espectro de potência linear de matéria, que por sua vez está relacionado ao espectro de potência primordial das perturbações escalares. Este último depende dos parâmetros fundamentais \mathcal{A}_s e n_s .

Ao definirmos a cosmologia na CCL, podemos estabelecer a normalização do espectro de potência de duas maneiras. A primeira é fornecermos o valor de σ_8 , que estabelece uma normalização em $z = 0$. A segunda é estabelecermos a normalização em altos *redshifts* a partir do fornecimento da amplitude do espectro de potência primordial \mathcal{A}_s . Se fornecermos o valor de σ_8 para a CCL, ela calcula automaticamente o \mathcal{A}_s para a cosmologia especificada (CHISARI et al., 2019b). O problema disso é que algumas funções na biblioteca podem ser instanciadas em termos de σ_8 , outras em termos de \mathcal{A}_s , e corremos o risco de ter funções que não são compatíveis com ambos os parâmetros, ou até mesmo que não compatibilizem os parâmetros entre si.

Ao definirmos a cosmologia na NumCosmo, por outro lado, ela parte necessariamente do parâmetro fundamental \mathcal{A}_s . Assim, σ_8 é um parâmetro derivado na biblioteca. Isso garante com que todas as funções tenham \mathcal{A}_s e σ_8 compatíveis.

De toda forma, mesmo que tenhamos apenas o valor do parâmetro derivado σ_8 , é fácil alinhar as cosmologias da CCL e da NumCosmo. Dado um valor padrão $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_s^{NC}$ da NumCosmo, basta redefini-lo de acordo com a relação

$$\mathcal{A}_s^{CCL} = \left(\frac{\sigma_8^{CCL}}{\sigma_8^{NC}} \right)^2 \mathcal{A}_s^{NC}, \quad (4.5)$$

onde σ_8^{CCL} é o valor fornecido de σ_8 e σ_8^{NC} é o valor de σ_8 calculado na NumCosmo antes do alinhamento. Nessa equação, consideramos que os demais parâmetros cosmológicos utilizados na definição inicial das cosmologias já estão alinhados.

4.2 Cosmologias utilizadas

Os espectros de potência angular foram calculados para modelos cosmológicos com densidade de curvatura nula. Isso se deve ao fato de ambas as bibliotecas não possuírem, por enquanto, um suporte completo ao cálculo dos espectros de potência angular em universos abertos e fechados. A biblioteca NumCosmo utiliza as expressões encontradas em (DOUX et al., 2018) e exibidas no capítulo anterior, que são obtidas no contexto de uma cosmologia plana, e utiliza as funções esféricas de Bessel. A biblioteca CCL, sob a aproximação de Limber, também não possui suporte para as cosmologias não planas, e ela não faz a substituição das funções de Bessel esféricas pelas funções de Bessel hiperesféricas, substituição esta necessária para uma correta abordagem de cosmologias não-planas (CHISARI et al., 2019b). O propósito aqui não é detalharmos essas diferenças dos cálculos no contexto de uma cosmologia plana e não-plana, mas sim nos deixar cientes de que elas existem para que, futuramente, possam ser investigadas a fundo para uma possível implementação nas bibliotecas. De toda forma, para os interessados nesse aprofundamento, uma boa referência de partida pode ser encontrada em (KAMIONKOWSKI; SPERGEL, 1994).

Além disso, cosmologias com neutrinos massivos também não foram utilizadas nas comparações feitas aqui, pois, após a última atualização da CCL (versão *3.0.0*), as funções de alinhamento entre as cosmologias implementadas na NumCosmo (versão *0.18.2*) ainda não foram atualizadas para a inclusão dos neutrinos massivos. No futuro, quando houver essas atualizações, também seria interessante implementarmos essas comparações, para verificar o comportamento e precisão das bibliotecas nesse contexto.

Os modelos cosmológicos implementados^{1 2} são exibidos na tabela 1. Esses são alguns dos modelos utilizados na validação da CCL descrita no artigo (CHISARI et al., 2019b). A temperatura atual da CMB, o número efetivo de neutrinos e o *redshift* da última superfície de espalhamento foram fixados em $T_{CMB} = 2.726$, $N_{eff} = 3.0$ e $z_* = 1090.0$.

Nome	Modelo	Ω_m	Ω_b	Ω_Λ	h_0	σ_8	n_s	w_0	w_a
CCL1	Λ CDM plano	0.3	0.05	0.7	0.7	0.8	0.96	-1	0
CCL2	w CDM	0.3	0.05	0.7	0.7	0.8	0.96	-0.9	0
CCL3	w CDM	0.3	0.05	0.7	0.7	0.8	0.96	-0.9	0.1
WMAP7	Λ CDM plano	0.272	0.0455	0.728	0.704	0.810	0.967	-1	0
Planck 2013	Λ CDM plano	0.318	0.0490	0.682	0.671	0.834	0.962	-1	0

Tabela 1 – Diferentes cosmologias utilizadas para a comparação das bibliotecas.

4.3 Distribuições de *redshift* de galáxias

Seguindo o artigo de (CHISARI et al., 2019b), foram utilizadas quatro distribuições de *redshifts* para o cálculo do espectro de potência angular de galáxias, duas distribuições analíticas, dadas por gaussianas com centros em $z_1 = 1$ e $z_2 = 1.5$ e desvio padrão de $\sigma = 0.15$, e duas distribuições na forma de histogramas, cuja largura de cada *bin* de *redshift* é de 0.0075^3 . Essas distribuições são mostradas na figura 14. O propósito de utilizarmos esses histogramas é verificarmos a existência de erros numéricos oriundos das interpolações sobre os pontos dessa distribuição.

Além disso, neste trabalho, não incluiremos os efeitos de *magnification bias* e RSD nas funções de transferência das galáxias. Utilizaremos apenas a contribuição proporcional ao contraste de densidade de matéria (equação 3.61). Enquanto que a comparação incluindo o *magnification bias* pode ser facilmente feita no futuro, dado que este efeito

¹ Em relação ao modelo WMAP7, a *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) (NASA, 2010) foi uma sonda da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) que operou de 2001 a 2010, cujo objetivo principal era medir as anisotropias da CMB. Os parâmetros utilizados aqui podem ser encontrados na tabela 8 do artigo de (LARSON et al., 2011).

² Em relação ao modelo Planck 2013, ele está relacionado à sonda espacial Planck (ESA, 2013), já mencionada anteriormente nesse trabalho, cujo objetivo principal também era medir as anisotropias da CMB. Os parâmetros utilizados aqui podem ser encontrados na tabela 5 do artigo (ADE et al., 2014).

³ Não confundir com a largura a meia altura do histograma. A largura que eu menciono aqui é de cada *bin*. Apenas para exemplificar, um dos *bins* é limitado pelos *redshifts* 1.00625 e 1.01375.

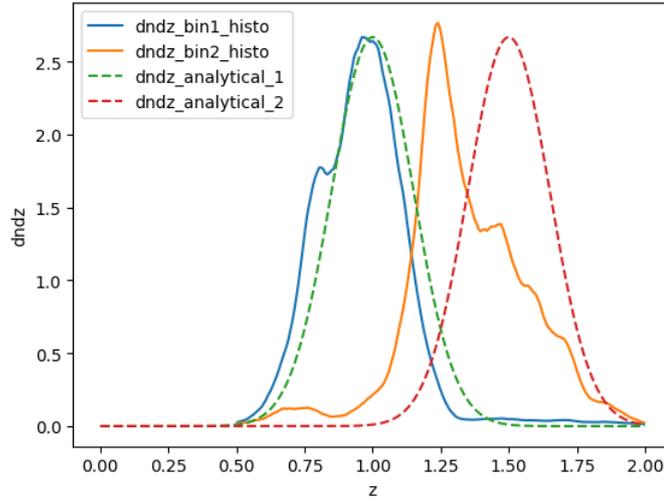


Figura 14 – Distribuições de *redshift* utilizadas para o cálculo do espectro de potência angular de galáxias, seguindo o artigo de (CHISARI et al., 2019b). As distribuições na forma de histogramas podem ser encontradas no *github* da CCL (CHISARI et al., 2019a), no diretório `/CCL/benchmarks/data/`. Neste gráfico, essas distribuições não estão normalizadas, porém as bibliotecas as normalizam automaticamente para realizar os cálculos dos espectros de potência angular.

já está implementando em ambas as bibliotecas, a NumCosmo ainda não possui suporte para o cálculo do efeito de RSD.

4.4 Critério para a comparação dos resultados

Para a comparação dos resultados dos espectros de potência angular entre as bibliotecas, a métrica de acurácia utilizada foi o módulo da razão da diferença dos cálculos dos C_l entre elas e da variância cósmica σ_l ,

$$A = \left| \frac{C_l^{CCL} - C_l^{NC}}{\sigma_l} \right|, \quad (4.6)$$

onde o erro proveniente da variância cósmica para o espectro de potência angular entre dois campos a e b é dado por

$$\sigma_l^2 = \frac{C_l^{aa}C_l^{bb} + (C_l^{ab})^2}{2l + 1}. \quad (4.7)$$

Essa foi a métrica utilizada para a validação da CCL no artigo de (CHISARI et al., 2019b). Para o cálculo do σ_l , foram utilizados os espectros de potência angular calculados pela NumCosmo. De acordo com esse artigo, a acurácia esperada para a CCL é de $A < 0.1$. Além disso, a expressão 4.7 é obtida considerando um levantamento de céu inteiro. Na prática a cobertura do levantamento é menor, o que faz com que a variância cósmica aumente. A acurácia exigida na CCL, portanto, é mais restrigente do que seria o caso

considerando a variância cósmica dos levantamentos reais. O *Legacy Survey of Space and Time* (LSST) (RUBIN-OBSERVATORY, 2023), por exemplo, previsto para começar a operar em 2025, deve cobrir por volta de 40% do céu (IVEZIĆ et al., 2019).

4.5 Resultados dos auto-espectros de potência angular

Nesta e nas seções seguintes, serão apresentados e discutidos os resultados dos espectros de potência angular calculados neste trabalho. Os *scripts* nos quais esses resultados são gerados podem ser vistos no apêndice A.

Os cálculos dos auto-espectros de potência angular foram feitos em ambas as bibliotecas, considerando as diversas cosmologias da tabela 1, para os casos a seguir:

1. Auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia considerando a distribuição de *redshifts* dada pela distribuição analítica 1 (A1) na figura 14.
2. Auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia considerando a distribuição de *redshifts* dada pela distribuição analítica 2 (A2) na figura 14.
3. Auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia considerando a distribuição de *redshifts* dada pelo histograma 1 (H1) na figura 14.
4. Auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia considerando a distribuição de *redshifts* dada pelo histograma 2 (H2) na figura 14.
5. Auto-espectro de potência angular lenteamento de CMB-lenteamento de CMB.

Após a obtenção desses espectros de potência, foram calculadas as métricas de acurácia (equação 4.6) entre os resultados das bibliotecas para cada um dos casos. Os resultados são exibidos na figura 15.

Como podemos ver, os resultados para os auto-espectros de potência angular galáxia-galáxia utilizando as distribuições analíticas 1 e 2 se encontram bem abaixo do limite esperado de acurácia de 0.1, para todas as cosmologias. Além disso, a acurácia varia de forma razoavelmente suave ao longo dos diferentes valores de l .

No caso dos auto-espectros de potência angular galáxia-galáxia utilizando os histogramas 1 e 2, a acurácia não apresenta um comportamento suave, apresentando oscilações bruscas para alguns valores de l . Além disso, para o auto-espectro utilizando o histograma 1 e as cosmologias CCL2 e CCL3 (modelos w CDM), alguns valores de A passam do limite esperado, como mostrado na tabela 2.

Por fim, para os auto-espectros de potência angular lenteamento de CMB-lenteamento de CMB, a acurácia também não apresenta um comportamento suave. Além disso, alguns valores de A passam do limite esperado, como mostrado na tabela 3.

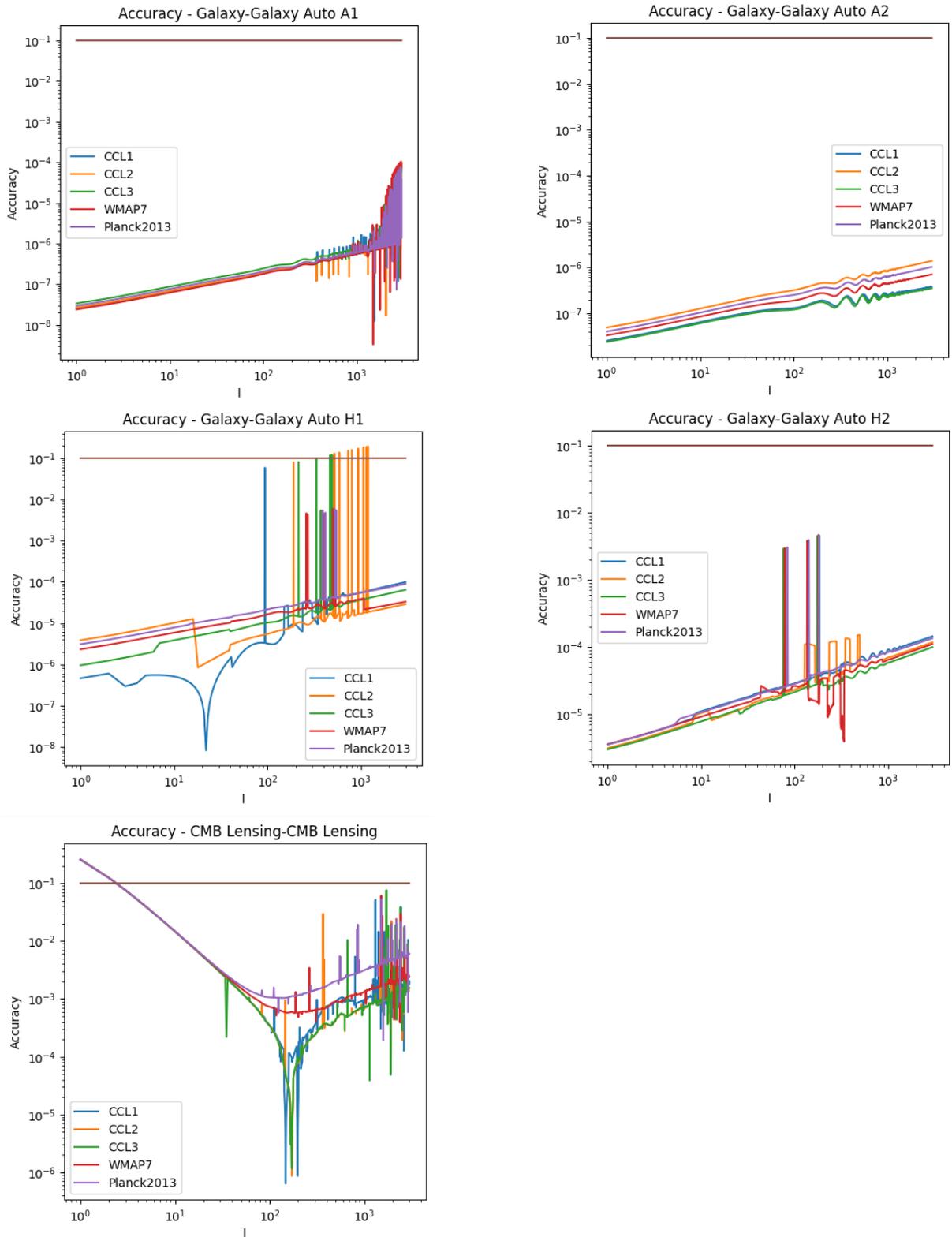


Figura 15 – Acurácias (equação 4.6) calculadas entre as bibliotecas para os diferentes casos dos auto-espectros de potência angular calculados, considerando as diferentes cosmologias da tabela 1.

CCL2		CCL3	
l	A	l	A
520	0.13034823	469	0.11816312
587	0.13818622	488	0.12059318
731	0.1530142		
799	0.15979073		
932	0.17225958		
1064	0.18347048		
1148	0.18980029		
1149	0.18989404		
1190	0.19343655		
1191	0.19351013		

Tabela 2 – Valores da acurácia que passam do limite esperado, para o auto-espectro de potência angular galáxia-galáxia calculado utilizando o histograma 1.

	CCL1	CCL2	CCL3	WMAP7	Planck 2013
l	A	A	A	A	A
1	0.2570369	0.25703992	0.25703991	0.25704742	0.25705569
2	0.1239521	0.12395445	0.12395433	0.12396942	0.12398276

Tabela 3 – Valores da acurácia que passam do limite esperado, para o auto-espectro de potência angular lenteamento de CMB-lenteamento de CMB.

4.6 Resultados dos espectros cruzados de potência angular

Os cálculos dos espectros cruzados de potência angular foram feitos em ambas as bibliotecas, considerando as diversas cosmologias da tabela 1, para os casos a seguir:

1. Espectro cruzado de potência angular galáxia-galáxia entre as distribuições de *redshifts* dadas pela distribuição analítica 1 (A1) e pela distribuição analítica 2 (A2) na figura 14.
2. Espectro cruzado de potência angular galáxia-galáxia entre as distribuições de *redshifts* dadas pelo histograma 1 (H1) e pelo histograma 2 (H2) na figura 14.
3. Espectro cruzado de potência angular galáxia-lenteamento de CMB, usando as distribuições de *redshifts* dadas pela distribuição analítica 1 (A1) e pela distribuição analítica 2 (A2) para as galáxias.
4. Espectro cruzado de potência angular galáxia-lenteamento de CMB, usando as distribuições de *redshifts* dadas pelo histograma 1 (H1) e pelo histograma 2 (H2) para as galáxias.

Após a obtenção desses espectros de potência, foram calculadas as métricas de acurácia (equação 4.6) entre os resultados das bibliotecas para cada um dos casos. Os resultados

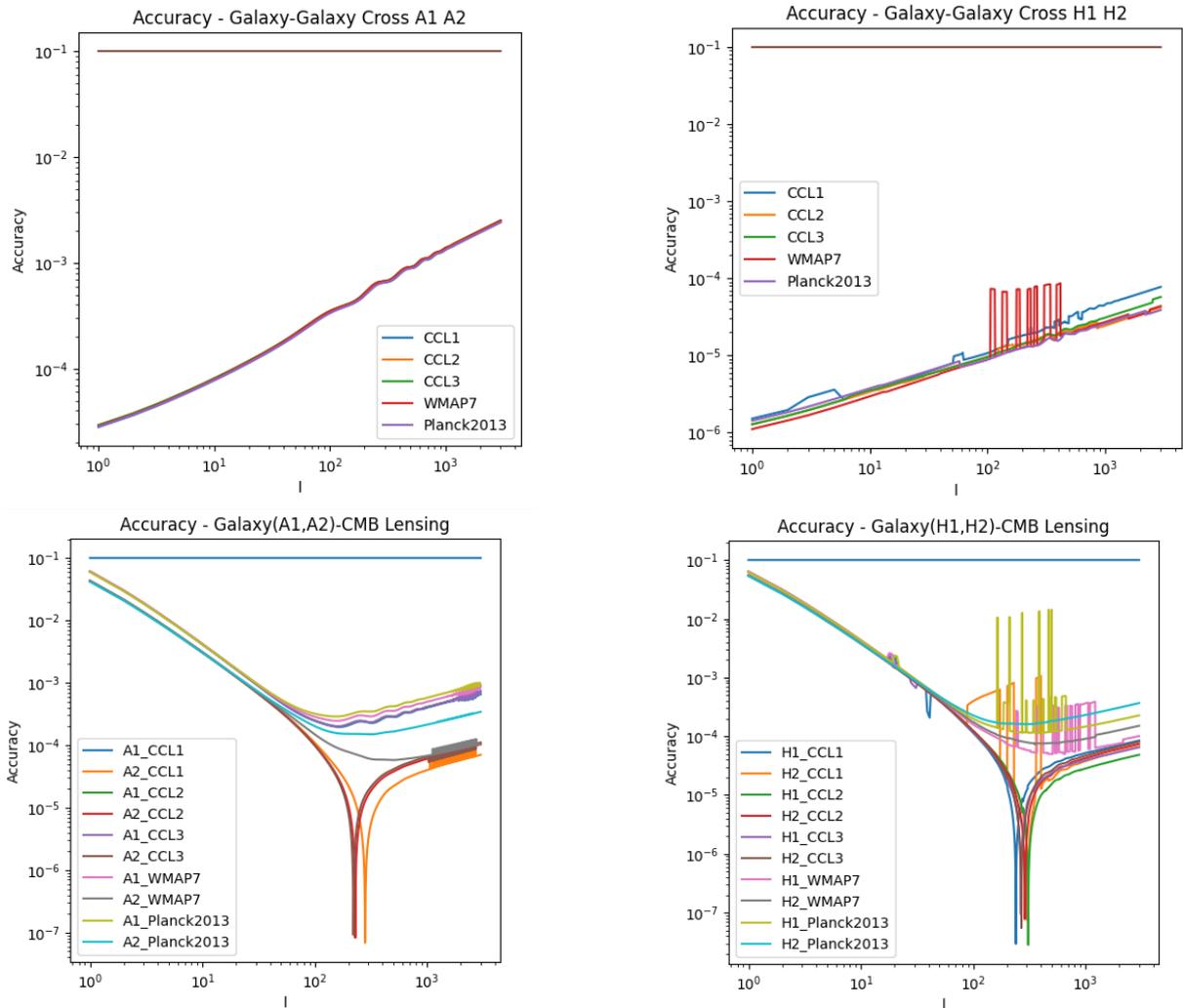


Figura 16 – Acurácias (equação 4.6) calculadas entre as bibliotecas para os diferentes casos dos espectros cruzados de potência angular calculados, considerando as diferentes cosmologias da tabela 1.

são exibidos na figura 16.

Como podemos ver, os resultados para os espectros cruzados de potência angular, em todos os casos e cosmologias consideradas, se encontram abaixo do limite esperado de acurácia de 0.1. Além disso, a acurácia varia de forma razoavelmente suave ao longo dos diferentes valores de l para aqueles em que são utilizadas as distribuições analíticas. No caso dos histogramas, temos variações bruscas, como aquelas vistas na seção passada.

4.7 Discussão dos resultados

As oscilações bruscas da acurácia verificadas nas seções passadas podem estar relacionadas ao modo como as interpolações são feitas nas bibliotecas, suposição essa reforçada pelo fato de que as curvas de acurácia mais irregulares foram aquelas relacionadas

às distribuições de *redshift* na forma de histogramas, extremamente dependentes da forma de interpolação utilizada.

O método utilizado para as interpolações das distribuições de *redshift* na NumCosmo foi o de interpolação por *spline* cúbica com a condição de contorno “*not-a-knot*”, na qual as derivadas terças dos dois primeiros nós são definidas como sendo iguais, bem como as derivadas terças dos dois últimos nós (VITENTI; PENNA-LIMA, 2019). Na NumCosmo, a implementação desse tipo de interpolação é feita de forma independente, dentro da própria biblioteca. Nesse método de interpolação com essa condição de contorno, as derivadas primeiras ou segundas não precisam ser conhecidas e fornecidas nos limites do intervalo de interpolação (SUN et al., 2023). O interessante desse método é que o erro de interpolação é da ordem de $\mathcal{O}(\alpha^4)$, onde α é a máxima distância entre dois nós adjacentes. Para comparação, o *spline* cúbico com condições de contorno naturais (derivadas segundas definidas como nulas nos extremos do intervalo) tem erro de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ e o *spline* linear de $\mathcal{O}(\alpha^1)$ (VITENTI; PENNA-LIMA, 2019).

Já a CCL, por sua vez, utiliza o método de interpolação de Akima (AKIMA, 1970) implementado na biblioteca *GNU Scientific Library* (GSL) (GALASSI et al., 2021). Esse método determina a inclinação da curva em cada ponto de maneira local, utilizando dois pontos anteriores e dois pontos posteriores, e depois os usa juntamente com os valores da função para determinar um polinômio cúbico em cada intervalo. A função interpolada resultante, no entanto, não é um *spline*, pois somente a função e sua derivada primeira são contínuas (VITENTI; PENNA-LIMA, 2019). Enquanto os métodos de interpolação cúbica podem oscilar em regiões próximas a um *outlier* (ponto cujo valor da ordenada seja muito superior ou inferior aos valores vizinhos), esse método tem uma estabilidade melhor nessas regiões (ALGLIB, 2023). Além disso, por ser um algoritmo local, é mais simples e rápido. No entanto, o erro de interpolação, de $\mathcal{O}(\alpha^2)$, é pior do que o de uma *spline* cúbica com condição de contorno “*not-a-knot*” (VITENTI; PENNA-LIMA, 2019).

Veja também que, como há uma dependência do cálculo do espectro de potência angular no espectro de potência linear de matéria (ver, por exemplo, equação 3.48), a definição dos limites inferior e superior de k e conseqüentemente as interpolações dessa função nesse intervalo também podem ser fonte de erros numéricos nos resultados, principalmente próximo aos limites do intervalo, onde é necessário aplicarmos as condições de contorno. Neste trabalho, os valores mínimo e máximo dos modos k para o cálculo do espectro de potência linear de matéria, em ambas as bibliotecas, foram definidos como 10^{-6} e 10^3 .

Uma outra informação a mencionarmos é que, na CCL, a definição dos nós utilizados nas *splines* é fixa. Dada uma certa função em um certo intervalo delimitado por pontos x_{min} e x_{max} , a CCL define um conjunto de nós fixos nesse intervalo, independente da precisão numérica selecionada na biblioteca. No caso da NumCosmo, a definição desses nós,

para um certo intervalo, varia automaticamente de acordo com a precisão numérica selecionada, garantindo essa precisão nos cálculos (VITENTI et al., To-be-submitted). Uma proposta está em elaboração para a implementação desse modo automático de seleção dos nós na CCL (VITENTI et al., To-be-submitted).

No caso do auto-espectro de potência angular lenteamento de CMB-lenteamento de CMB, vemos que em todos os casos o parâmetro de acurácia passa do limite esperado para $l = 1$ e $l = 2$, e isso acontece para todas as cosmologias consideradas. No artigo de (CHISARI et al., 2019b), é mencionado que os resultados, no caso de lenteamento de CMB, são particularmente sensíveis a erros numéricos no cálculo das distâncias até a última superfície de espalhamento. Portanto, um ponto de investigação futura pode ser o modo como o cálculo dessas distâncias é feito em ambas as bibliotecas. Além disso, esse auto-espectro de potência angular também sofre dos possíveis erros numéricos associados às interpolações mencionados anteriormente, afinal, o cálculo dele também depende do espectro de potência linear de matéria. Agora, em se tratando especificamente do *redshift* da superfície de espalhamento, a definição em ambas as bibliotecas foi igual ($z_* = 1090.0$), de modo que a definição desse parâmetro em específico não deve ser fonte de erro nos cálculos.

Os modos como as bibliotecas lidam com as interpolações, em especial nas extremidades dos intervalos, portanto, podem ser as fontes de erro numérico que geraram os valores de acurácia divergentes do esperado. Futuramente, é importante fazermos uma investigação mais a fundo das implementações das interpolações em ambas as bibliotecas, e como isso pode ser fonte das divergências verificadas.

Um outro ponto de investigação futura interessante seria como implementar as cosmologias não-planas no contexto do cálculo dos espectros de potência angular, em ambas as bibliotecas. Além disso, após a atualização da NumCosmo para compatibilizar a função do alinhamento das cosmologias com a nova versão da CCL, seria interessante fazermos as análises dos espectros de potência incluindo os neutrinos massivos nas cosmologias.

Por fim, é importante mencionar que, no futuro, as comparações feitas aqui serão estendidas para as distribuições de *redshift* esperadas do LSST ao longo de seus anos de operação (MANDELBAUM et al., 2021) (ZHANG et al., 2023), afinal a CCL é a biblioteca principal da colaboração *Dark Energy Science Collaboration* (DESC) do LSST.

Conclusão

Para um entendimento sólido das cosmologias, funções e parâmetros utilizados nas implementações computacionais no contexto do capítulo 4, o estudo da física por trás deles foi essencial. Para isso, o ponto de partida foi a construção do modelo cosmológico padrão, na ausência e presença das perturbações, nos capítulos 1 e 2, e também a construção das expressões dos espectros de potência angular feita no capítulo 3.

Essa construção teórica foi muito importante para a compreensão dos modelos utilizados e de como conectar esses modelos com os observáveis que podemos medir nos levantamentos cosmológicos. Esse estudo também possibilitou uma maior agilidade no desenvolvimento dos *scripts* e um melhor entendimento das estruturas das bibliotecas NumCosmo e CCL.

Feita essa revisão da teoria, os resultados das comparações entre as bibliotecas, no contexto do cálculo dos espectros de potência angular, foram então obtidos, e eles foram exibidos no capítulo 4. Como vimos nesse capítulo, algumas curvas de acurácia, como mostrado nas figuras 15 e 16, apresentaram oscilações bruscas em determinados pontos, inclusive extrapolando o limite esperado ($A < 0.1$) para alguns valores específicos de l . Apesar disso, entendemos que esses resultados não indicam a presença de um erro global na implementação do espectro de potência angular. Dada a dependência do cálculo desses espectros de potência e da distribuição de galáxias nas formas de interpolação utilizadas, é provável que essas irregularidades tenham origem nas diferenças entre os critérios de interpolação de ambas as bibliotecas como, por exemplo, o critério de determinação dos nós. No caso do auto-espectro de potência angular de lenteamento de CMB, para o qual a acurácia extrapola o limite esperado em baixos valores de l , as irregularidades podem estar relacionadas à forma como a interpolação é feita no intervalo de k do espectro de potência linear de matéria, principalmente nas extremidades do intervalo. É importante, portanto, que uma investigação mais profunda das implementações dos métodos de interpolação em ambas as bibliotecas seja conduzida futuramente.

Essas análises corroboram o que foi dito na introdução deste trabalho sobre a importância da comparação e validação entre as bibliotecas. Na era da cosmologia de precisão, precisamos garantir que as bibliotecas forneçam resultados compatíveis entre si dentro do limite de acurácia necessário para que os erros numéricos não interfiram nas análises físicas. Buscamos entender os fatores que geraram os comportamentos irregulares nos resultados e como resolvê-los é, portanto, uma tarefa essencial.

Em relação às cosmologias, as comparações deste trabalho foram feitas para cinco das doze cosmologias mencionadas no artigo da CCL (CHISARI et al., 2019b). Os mode-

los com curvatura não-nula e com neutrinos massivos não foram utilizados neste trabalho, pelos motivos mencionados no capítulo 4. No futuro, com as atualizações das bibliotecas e compatibilização com esses outros modelos no contexto do cálculo dos espectros de potência angular, é importante que as validações sejam feitas considerando-os também, com o mesmo objetivo mencionado de garantir a acurácia numérica suficiente dos resultados.

Além disso, como mencionado, é importante que as comparações feitas neste trabalho sejam estendidas para as distribuições representativas dos anos de operação do LSST, para garantir que as bibliotecas estão realizando os cálculos corretamente para essas distribuições de interesse.

Referências

- AAO. *The 2dF Galaxy Redshift Survey*. 2002. <<http://www.2dfgrs.net/>>. Acesso em: 01 dez. 2023. Citado na página 94.
- ABBOTT, T. M. C. et al. Joint analysis of dark energy survey year 3 data and cmb lensing from spt and planck. iii. combined cosmological constraints. *PHYSICAL REVIEW D*, American Physical Society, v. 107, n. 02, 01 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2206.10824>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 23.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, ESO, v. 571, n. 16, 11 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1303.5076.pdf>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 104.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, ESO, v. 594, n. 13, 09 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1502.01589.pdf>>. Acesso em: 03 ago. 2023. Citado na página 80.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, ESO, v. 641, n. 6, 08 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1807.06209.pdf>>. Acesso em: 21 nov. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 29, 50 e 53.
- AKIMA, H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the ACM*, ACM, v. 17, n. 4, 10 1970. Disponível em: <<https://dl.acm.org/doi/10.1145/321607.321609>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 110.
- ALGLIB. *Spline interpolation and fitting*. 2023. <<http://www.alglib.net/interpolation/spline3.php>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 110.
- APO. *Sloan Digital Sky Survey*. 2023. <<https://www.sdss.org/>>. Acesso em: 01 dez. 2023. Citado na página 94.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. 1. ed. EUA: Elsevier, 2013. Citado na página 67.
- ASSASSI, V.; SIMONOVIC, M.; ZALDARRIAGA, M. Efficient evaluation of cosmological angular statistics. *arXiv*, arXiv, v. 1705.05022, n. 1, 05 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1705.05022>>. Acesso em: 07 nov. 2023. Citado na página 96.
- ASSPS. *South Pole Telescope*. 2022. <<https://pole.uchicago.edu/public/Home.html>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 23.
- BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 22, n. 8, 10 1980. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.22.1882>>. Acesso em: 12 out. 2023. Citado na página 70.
- BARDEEN, J. M. et al. The statistics of peaks of gaussian random fields. *Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 304, n. 15, 05 1986. Disponível em:

<<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986ApJ...304...15B/abstract>>. Acesso em: 30 nov. 2023. Citado na página 102.

BERTSCHINGER, E. Cosmological dynamics. *arXiv*, arXiv, v. 9503125, n. 1, 04 1995. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9503125>>. Acesso em: 31 out. 2023. Citado na página 61.

BONVIN, C.; DURRER, R. What galaxy surveys really measure. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 84, n. 6, 09 2011. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.84.063505>>. Acesso em: 07 nov. 2023. Citado na página 96.

BULL, P. et al. Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, Elsevier, v. 12, n. 6, 06 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1512.05356.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2023. Citado na página 53.

BURDMAN, G. *Quantum Field Theory I*. 2023. <<https://fma.if.usp.br/%7Eburdman/QFT1/qft1index.html>>. Acesso em: 31 out. 2023. Citado na página 59.

CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. 1. ed. Califórnia, EUA: Addison Wesley, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 49.

CHALLINOR, A.; LEWIS, A. Linear power spectrum of observed source number counts. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 84, n. 4, 08 2011. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.84.043516>>. Acesso em: 07 nov. 2023. Citado na página 97.

CHAVEZ, H. O. C. *Large Scale Structures in photometric and spectroscopic surveys*. 2019. <<https://teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-07052019-084133/en.php>>. Acesso em: 19 out. 2023. Citado na página 88.

CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 10, n. 02, 01 2001. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0009008>>. Acesso em: 30 nov. 2023. Citado na página 102.

CHISARI, N. E. et al. *CCL: Core Cosmology Library*. 2019. Astrophysics Source Code Library. Disponível em: <<https://github.com/LSSTDESC/CCL>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 96 e 105.

CHISARI, N. E. et al. Core cosmology library: Precision cosmological predictions for lsst. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 242, n. 1, 05 2019. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4365/ab1658>>. Acesso em: 27 out. 2023. Citado 10 vezes nas páginas 16, 92, 96, 97, 100, 103, 104, 105, 111 e 113.

CTIO. *Dark Energy Survey*. 2019. <<https://www.darkenergysurvey.org/>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 23.

DAWSON, K. S. et al. The baryon oscillation spectroscopic survey of sdss-iii. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 145, n. 01, 01 2013. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-6256/145/1/10/pdf>>. Acesso em: 01 dez. 2023. Citado na página 94.

DESJACQUES, V.; JEONG, D.; SCHMIDT, F. Large-scale galaxy bias. *Physics Reports*, Elsevier, v. 733, n. 1, 02 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1611.09787>>. Acesso em: 26 out. 2023. Citado na página 94.

DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern Cosmology*. 2. ed. Londres, Reino Unido: Academic Press - Elsevier, 2021. Citado 38 vezes nas páginas 15, 16, 28, 29, 40, 48, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 79, 82, 83, 84, 90, 91, 93, 95, 96 e 99.

DOUX, C. et al. Cosmological constraints from a joint analysis of cosmic microwave background and spectroscopic tracers of the large-scale structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Royal Astronomical Society, v. 480, n. 4, 11 2018. Disponível em: <<https://academic.oup.com/mnras/article/480/4/5386/5068701>>. Acesso em: 26 out. 2023. Citado 6 vezes nas páginas 23, 91, 92, 98, 100 e 103.

EISENSTEIN, D. J.; HU, W. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 496, n. 2, 03 1998. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9709112.pdf>>. Acesso em: 25 out. 2023. Citado na página 102.

ESA. *Planck*. 2013. <<https://www.cosmos.esa.int/web/planck/home>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 104.

FELDBRUGGE, J. Complex evaluation of angular power spectra: Going beyond the limber approximation. *arXiv*, arXiv, v. 2304.13064, n. 1, 04 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2304.13064.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2023. Citado na página 93.

GALASSI, M. et al. *GNU Scientific Library - Release 2.7*. 2021. GNU Operating System. Disponível em: <<https://www.gnu.org/software/gsl/>>. Citado na página 110.

GAO, Z.; VLAH, Z.; CHALLINOR, A. Flat-sky angular power spectra revisited. *arXiv*, arXiv, v. 2307.13768, n. 1, 07 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2307.13768>>. Acesso em: 07 nov. 2023. Citado na página 96.

GOLOVNEV, A.; MUKHANOV, V.; VANCHURIN, V. Vector inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2008, n. 9, 06 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0802.2068.pdf>>. Acesso em: 17 out. 2023. Citado na página 74.

HELBIG, P. Calculation of distances in cosmological models with small-scale inhomogeneities and their use in observational cosmology: a review. *The Open Journal of Astrophysics*, arXiv, v. 3, n. 1, 01 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1912.12269.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2023. Citado na página 55.

HU, W. *CMB Lensing*. 1996. <<http://background.uchicago.edu/~whu/CMBlens/cmlens.html>>. Acesso em: 14 nov. 2023. Citado na página 98.

HU, W. T. *Wandering in the Background: A Cosmic Microwave Background Explorer*. 1995. <<http://background.uchicago.edu/~whu/thesis/thesis.pdf>>. Acesso em: 03 ago. 2023. Citado na página 50.

- HU, Y.; TURNER, M. S.; WEINBERG, E. J. Dynamical solutions to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 49, n. 8, 04 1994. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.49.3830>>. Acesso em: 13 out. 2023. Citado na página 74.
- HUBBLE, E. P. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Academy of Sciences, Washington, D.C., EUA, v. 15, n. 3, p. 168–173, 03 1929. Disponível em: <<https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.15.3.168>>. Acesso em: 13 dez. 2022. Citado 3 vezes nas páginas 15, 27 e 30.
- IVEZIĆ Željko et al. Lsst: From science drivers to reference design and anticipated data products. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 873, n. 02, 03 2019. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ab042c/pdf>>. Acesso em: 01 dez. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 106.
- KAISER, N. Clustering in real space and in redshift space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Royal Astronomical Society, v. 227, n. 1, 07 1987. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1987MNRAS.227....1K/abstract>>. Acesso em: 26 out. 2023. Citado na página 95.
- KAMIONKOWSKI, M.; SPERGEL, D. N. Large-angle cosmic microwave background anisotropies in an open universe. *Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 432, n. 7, 09 1994. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994ApJ...432....7K/abstract>>. Acesso em: 30 nov. 2023. Citado na página 103.
- KENWORTHY, W. D. *TIGHTENING THE DISTANCE LADDER*. 2022. <<https://jscholarship.library.jhu.edu/server/api/core/bitstreams/023c286c-dc36-4c9a-9529-d5685bec2178/content>>. Acesso em: 21 nov. 2023. Citado na página 30.
- LARSON, D. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Power spectra and wmap-derived parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 192, n. 02, 01 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1001.4635>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 104.
- LCO. *Atacama Cosmology Telescope*. 2022. <<https://act.princeton.edu/>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 23.
- LEGRAND, L. *Large surveys: from galaxy evolution to cosmological probes*. 2020. <<https://www.theses.fr/2020UPASP023.pdf>>. Acesso em: 27 out. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 92.
- LESGOURGUES, J. et al. *Neutrino Cosmology*. 1. ed. EUA: Cambridge University Press, 2013. Citado na página 83.
- LESGOURGUES, J.; TRAM, T.; SCHOENEBERG, N. *CLASS: Cosmic Linear Anisotropy Solving System*. 2011. Astrophysics Source Code Library. Disponível em: <https://lesgourg.github.io/class_public/class.html>. Citado na página 83.
- LEWIS, A.; CHALLINOR, A. Weak gravitational lensing of the cmb. *Physics Reports*, Elsevier, v. 429, n. 1, 06 2006. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0601594.pdf>>. Acesso em: 14 nov. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.

- LEWIS, A.; CHALLINOR, A. *CAMB: Code for Anisotropies in the Microwave Background*. 2011. Astrophysics Source Code Library. Disponível em: <<https://camb.info/>>. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 102.
- LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 108, n. 6, 02 1982. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0370269382912199>>. Acesso em: 17 out. 2023. Citado na página 75.
- LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the universe. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, American Physical Society, v. 90, n. 09, 03 2003. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.091301>>. Acesso em: 30 nov. 2023. Citado na página 102.
- LOVERDE, M.; AFSHORDI, N. Extended limber approximation. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 78, n. 12, 12 2008. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD..78l3506L/abstract>>. Acesso em: 22 dez. 2023. Citado na página 93.
- MANDELBAUM, R. et al. The lsst dark energy science collaboration (desc) science requirements document. *arXiv*, arXiv, v. 1809.01669, n. 1, 09 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1809.01669>>. Acesso em: 28 dez. 2023. Citado na página 111.
- MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. 1. ed. EUA: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 71.
- NAOJ. *Hyper Suprime-Cam*. 2021. <<https://hsc.mtk.nao.ac.jp/ssp/>>. Acesso em: 01 dez. 2023. Citado na página 23.
- NASA. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*. 2010. <<https://map.gsfc.nasa.gov/>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 104.
- OLBERS, H. W. M. On the transparency of space. *The Edinburgh New Philosophical Journal*, Edinburgo, Escócia, v. 1, n. 1, p. 141, 04-10 1826. Disponível em: <<https://www.biodiversitylibrary.org/item/19999#page/4/mode/1up>>. Acesso em: 13 dez. 2022. Citado na página 27.
- PEIRIS, H. V.; SPERGEL, D. N. Cross-correlating the sloan digital sky survey with the microwave sky. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 540, n. 2, 09 2000. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/309373>>. Acesso em: 09 nov. 2023. Citado na página 97.
- PIATTELLA, O. *Lecture Notes in Cosmology*. 1. ed. Cham, Suíça: Springer, 2018. Citado 22 vezes nas páginas 40, 47, 48, 49, 52, 53, 56, 58, 59, 63, 70, 71, 73, 77, 79, 80, 83, 85, 86, 87, 88 e 89.
- POULIN, V. *How to Resolve the Hubble Tension*. 2020. <<https://inspirehep.net/files/576da9210351ef4531f388b02d48af96>>. Acesso em: 21 nov. 2023. Citado na página 30.
- PRAT, J. et al. The catalog-to-cosmology framework for weak lensing and galaxy clustering for lsst. *arXiv*, arXiv, v. 2212.09345, n. 01, 04 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2212.09345>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 23.

- RHODES, J. et al. Exploiting cross correlations and joint analyses. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 63, n. 01, 03 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1309.5388>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 23.
- RIESS, A. G. et al. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s⁻¹ mpc⁻¹ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 934, n. 1, 07 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2112.04510.pdf>>. Acesso em: 21 nov. 2023. Citado na página 29.
- RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3. ed. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 61.
- RUBIN-OBSERVATORY. *Legacy Survey of Space and Time*. 2023. <<https://www.lsst.org/>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 106.
- RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. 2. ed. Cambridge, Reino Unido: Pearson Education, 2017. Citado 13 vezes nas páginas 15, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 44 e 45.
- SAITO, S. *Galaxy Clustering in Redshift Space*. 2016. <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/~komatsu/lecturenotes/Shun_Saito_on_RSD.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2023. Citado na página 96.
- SHAH, P.; LEMOS, P.; LAHAV, O. A buyer's guide to the hubble constant. *arXiv*, arXiv, v. 2109.01161, n. 1, 10 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2109.01161>>. Acesso em: 26 dez. 2023. Citado na página 30.
- SIEGEL, E. R.; FRY, J. N. Can electric charges and currents survive in an inhomogeneous universe? *arXiv*, arXiv, v. 0609031, n. 01, 09 2006. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609031>>. Acesso em: 03 dez. 2023. Citado na página 65.
- SUN, M. et al. Cubic spline interpolation with optimal end conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 425, n. 1, 06 2023. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042722006379>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 110.
- UMEH, O. Vorticity generation in cosmology and the role of shell crossing. *arXiv*, arXiv, v. 2303.08782, n. 1, 03 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2303.08782>>. Acesso em: 31 out. 2023. Citado na página 61.
- VITENTI, S. D. P. *Estudo das perturbações em universo com ricochete*. 2011. <http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/thesis_vitenti.2012_03_07_16_43_50.pdf>. Acesso em: 03 out. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.
- VITENTI, S. D. P.; PENNA-LIMA, M. *Numerical Cosmology – NumCosmo*. 2014. Astrophysics Source Code Library. Disponível em: <<https://github.com/NumCosmo/NumCosmo>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 98.

- VITENTI, S. D. P.; PENNA-LIMA, M. Selected topics in numerical methods for cosmology. *Universe*, MDPI, v. 192, n. 09, 08 2019. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/5/9/192>>. Acesso em: 05 dez. 2023. Citado na página 110.
- VITENTI, S. D. P. et al. Adaptive knot allocation for spline interpolation. *To-be-submitted*, To-be-submitted, v. 01, n. 01, 01 To-be-submitted. Citado na página 111.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1. ed. Nova Iorque, EUA: John Wiley & Sons, Inc., 1972. Citado na página 37.
- WEINBERG, S. *Cosmology*. 1. ed. Nova Iorque, EUA: Oxford University Press, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 55, 71, 73 e 74.
- WENZL, L.; CHEN, S.-F.; BEAN, R. Magnification bias estimators for realistic surveys: an application to the boss survey. *arXiv*, arXiv, v. 2308.05892, n. 1, 10 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2308.05892.pdf>>. Acesso em: 27 out. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 95, 97 e 98.
- ZHANG, Z. et al. Transitioning from stage-iii to stage-iv: Cosmology from galaxy×cmb lensing and shear×cmb lensing. *arXiv*, arXiv, v. 2111.04917, n. 1, 09 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2111.04917>>. Acesso em: 28 dez. 2023. Citado na página 111.
- ZOTTI, G. D. et al. Extragalactic astrophysics with next-generation cmb experiments. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, Frontiers, v. 06, n. 01, 08 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1907.05323.pdf>>. Acesso em: 02 dez. 2023. Citado na página 23.

Apêndices

APÊNDICE A – *Scripts* utilizados para gerar os resultados

Neste apêndice, incluímos todos os *scripts* utilizados para gerar os resultados apresentados no capítulo [4](#).

MASTER-THESIS-AUTO-GALAXY

December 23, 2023

NC_CCL_auto_cross_galaxy_galaxy

Copyright (C) 2023 Luigi Lucas de Carvalho Silva luigi.lcsilva@gmail.com

numcosmo is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

numcosmo is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

0.1 Startups and Packages

First of all, let us import some useful packages.

```
[ ]: ##### NUM COSMO #####
try:
    import gi

    gi.require_version("NumCosmo", "1.0")
    gi.require_version("NumCosmoMath", "1.0")
except:
    pass

from gi.repository import GObject
from gi.repository import NumCosmo as Nc
from gi.repository import NumCosmoMath as Ncm

##### CCL #####
import pycc1 as pycc1

##### GENERAL #####
import sys
import numpy as np
```



```
##### COSMOLOGIES #####
#Reference: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf, Table 3 and Table 4.
#Order of parameters: Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s, w0, wa, Neff,
↳ m_nu
CCL_cosmologies = {}
### MASSLESS NEUTRINOS ###
CCL_cosmologies["CCL1"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
CCL_cosmologies["CCL2"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
CCL_cosmologies["CCL3"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
#CCL_cosmologies["CCL4"] = [0.25, 0.05, 0.65, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #open wCDM # Bad results for k different from
↳ 0.
#CCL_cosmologies["CCL5"] = [0.25, 0.05, 0.75, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #closed wCDM # Bad results for k different from
↳ 0.
#CCL_cosmologies["CCL6"] = [0.3, 0.0, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM # Kernel dying for this
↳ cosmology
CCL_cosmologies["WMAP7"] = [0.2265, 0.0455, 0.728, 0.704, 0.810, 0.967, -1.0, 0.
↳ 0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
CCL_cosmologies["Planck2013"] = [0.269, 0.0490, 0.682, 0.671, 0.834, 0.962, -1.
↳ 0, 0.0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
### MASSIVE NEUTRINOS ###
# Obs.: The create_nc_obj from nc_ccl.py is not updated for the new version of
↳ CCL. So, we cannot include massive neutrinos right now.
#CCL_cosmologies["CCL7"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0, 3.013,
↳ [0.04,0,0]] #flat ΛCDM, m

names = []
for key, value in CCL_cosmologies.items():
    names.append(key)
```

1 Defining the tracers

```
[ ]: ##### REDSHIFT DISTRIBUTION OF OBJECTS FROM HISTOGRAM #####
### Getting the redshift distribution for the objects from the CCL bin1_histo
↳ and bin2_histo files.
# Source: https://github.com/LSSTDESC/CCL/tree/master/benchmarks/data -- Files
↳ bin1_histo.txt and bin2_histo.txt
# Used in the CCL article: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf
```

```

# Loading the data. The txt files have 2 columns. The first column contains the
↳redshift values,
# and the second column contains the dndz values.
bin1_histo = np.loadtxt("./data/bin1_histo.txt", delimiter=" ") # Loading the
↳first histogram.
len_bin1_histo = bin1_histo.shape[0] # Getting the number of lines.

bin2_histo = np.loadtxt("./data/bin2_histo.txt", delimiter=" ") # Loading the
↳second histogram.
len_bin2_histo = bin2_histo.shape[0] # Getting the number of lines.

# Saving the redshift in two lists.
z_bin1_histo = []
z_bin2_histo = []

for i in range(len_bin1_histo):
    z_bin1_histo.append(bin1_histo[i][0])

for i in range(len_bin2_histo):
    z_bin2_histo.append(bin2_histo[i][0])

z_bin1_histo_np = np.array(z_bin1_histo)
z_bin2_histo_np = np.array(z_bin2_histo)

# Checking if the histograms have the same number of lines, and if the
↳redshifts values are equal.
if len_bin1_histo != len_bin2_histo:
    print("Different histograms size!")
else:
    print("Equal histograms size! \n")
    z_histo_diff = [z_bin1_histo[i] - z_bin2_histo[i] for i in
↳range(len_bin1_histo)]
    count_z_histo_diff_nonzero = np.count_nonzero(z_histo_diff)
    if count_z_histo_diff_nonzero == 0:
        print("Redshifts are also equal!")

# Saving the dndz values in two lists.
dndz_bin1_histo = []
dndz_bin2_histo = []
for i in range(len_bin1_histo):
    dndz_bin1_histo.append(bin1_histo[i][1])

for i in range(len_bin2_histo):
    dndz_bin2_histo.append(bin2_histo[i][1])

dndz_bin1_histo_np = np.array(dndz_bin1_histo)
dndz_bin2_histo_np = np.array(dndz_bin2_histo)

```

```
[ ]: ##### ANALYTICAL REDSHIFT DISTRIBUTION OF OBJECTS #####
### Getting the analytical redshift distribution for the objects as used in CCL
↳ article.
# Source: https://github.com/LSSTDESC/CCL/tree/master/benchmarks/data -- Files
↳ bin1_histo.txt and bin2_histo.txt
# Used in the CCL article: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf

# Redshift values.
z_analytical_max = math.ceil(max(z_bin1_histo))
z_analytical = np.arange(0, z_analytical_max, 0.001)

# Below, I will multiply the gaussian distributions by the maximum value of the
↳ bin1_histo distribution, just for better visualization.
# The libraries used here do the normalization automatically.
peak_factor = max(dndz_bin1_histo)

# Analytical redshift distributions.
analytical_zmean_1 = 1.0
analytical_sigz_1 = 0.15
analytical_zmean_2 = 1.5
analytical_sigz_2 = 0.15
dndz_analytical_1 = peak_factor*np.exp(-0.5 * ((z_analytical -
↳ analytical_zmean_1) / analytical_sigz_1)**2)
dndz_analytical_2 = peak_factor*np.exp(-0.5 * ((z_analytical -
↳ analytical_zmean_2) / analytical_sigz_2)**2)
```

```
[ ]: ##### PLOT OF THE REDSHIFT DISTRIBUTIONS OF OBJECTS #####
plt.plot(z_bin1_histo, dndz_bin1_histo, label='dndz_bin1_histo')
plt.plot(z_bin2_histo, dndz_bin2_histo, label='dndz_bin2_histo')
plt.plot(z_analytical, dndz_analytical_1, label='dndz_analytical_1',
↳ linestyle='dashed')
plt.plot(z_analytical, dndz_analytical_2, label='dndz_analytical_2',
↳ linestyle='dashed')
plt.legend()
plt.xlabel('z')
plt.ylabel('dndz')
plt.show()
```

2 Defining the function for the comparisson

```
[ ]: # Obs.: Problem with the "mass_function" in the nc_ccl.py file. I commented it
↳ there.
def compare_galaxy_galaxy_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s,
↳ w0, wa, Neff, m_nu, z1, z2, dndz1, dndz2, ells):
    """
```

```

Compare the angular power spectrum of two galaxy type probes.
"""
##### GENERAL #####
# Set Omega_K in a consistent way
Omega_k = 1.0 - Omega_c - Omega_b - Omega_v

##### COSMOLOGIES #####
# Defining the CCL cosmology.
ccl_cosmo = pyccl.Cosmology(
    Omega_c=Omega_c,
    Omega_b=Omega_b,
    Neff=Neff,
    m_nu=m_nu,
    h=h,
    n_s=n_s,
    Omega_k=Omega_k,
    Omega_g=None,
    w0=w0,
    wa=wa,
    sigma8=sigma8,
    transfer_function='eisenstein_hu',
    T_CMB = T_CMB,
    matter_power_spectrum='linear',
)
# Setting CCL to high precision.
ccl_cosmo_set_high_prec()

# Defining the NumCosmo cosmology.
cosmo, dist, ps_lin, ps_nln, hmfunc = create_nc_obj(ccl_cosmo)
# More info: https://github.com/NumCosmo/NumCosmo/blob/master/numcosmo\_py/
↪ccl/nc_ccl.py

##### CCL POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
# Setting the galaxy bias to unity.
unity_bias_1 = np.array([1 for i in np.arange(0, len(z1))])
unity_bias_2 = np.array([1 for i in np.arange(0, len(z2))])

# Initialize tracers in CCL.
trcs_ccl = dict()
trcs_ccl['g1'] = pyccl.NumberCountsTracer(cosmo=ccl_cosmo, dndz=(z1, ↪
↪dndz1), bias=(z1, unity_bias_1), mag_bias=None, has_rsd=False)
trcs_ccl['g2'] = pyccl.NumberCountsTracer(cosmo=ccl_cosmo, dndz=(z2, ↪
↪dndz2), bias=(z2, unity_bias_2), mag_bias=None, has_rsd=False)

# Computing the angular power spectrum in CCL.
ccl_cl_cross = pyccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['g1'], trcs_ccl['g2'], ↪
↪ells)

```

```

    ccl_cl_auto1 = pycccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['g1'], trcs_ccl['g1'],
↪ells)
    ccl_cl_auto2 = pycccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['g2'], trcs_ccl['g2'],
↪ells)

    # Converting the results to Numpy arrays.
    ccl_cl_cross_np = np.array(ccl_cl_cross)
    ccl_cl_auto1_np = np.array(ccl_cl_auto1)
    ccl_cl_auto2_np = np.array(ccl_cl_auto2)

    ##### NUMCOSMO POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
    # Defining the z and dndz as vectors in NumCosmo.
    v_z1 = Ncm.Vector.new_array (z1)
    v_z2 = Ncm.Vector.new_array (z2)
    v_pz1 = Ncm.Vector.new_array (dndz1)
    v_pz2 = Ncm.Vector.new_array (dndz2)

    # Obtaining the spline in NumCosmo.
    # Parameters Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full:
    # xv: NcmVector of knots
    # yv: NcmVector of the values of the function, to be interpolated, computed
↪at xv
    # init: TRUE to prepare the new NcmSpline or FALSE to not prepare it
    s_pz1 = Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full (v_z1, v_pz1, True)
    s_pz2 = Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full (v_z2, v_pz2, True)

    # Defining the kernels in NumCosmo.
    nc_g1 = None
    nc_g2 = None
    # Parameters Nc.XcorLimberKernelGal.new:
    #zmin: a gdouble.
    #zmax: a gdouble.
    #np: number of points in the interpolation.
    #nbarm1: a gdouble, noise spectrum.
    #dn_dz: a NcmSpline.
    #dist: a NcDistance.
    #domagbias: whether to do magnification bias.
    nc_g1 = Nc.XcorLimberKernelGal.new (z1[0], z1[-1], 1, 0.0, s_pz1, dist,
↪False)
    nc_g2 = Nc.XcorLimberKernelGal.new (z2[0], z2[-1], 1, 0.0, s_pz2, dist,
↪False)

    # Pushing the objects to mset in NumCosmo.
    mset = Ncm.MSet.empty_new ()
    mset.set (cosmo)
    mset.push (nc_g1)
    mset.push (nc_g2)

```

```

# Computing the angular power spectrum in NumCosmo.
# Parameters nc_xcor_new:
# nc_xcor_new (NcDistance *dist, NcmPowspec *ps, NcXcorLimberMethod meth);
# Two methods are available to compute Limber-approximated integrals:
↳ independent GSL numerical integration or
# vector integration using Sundials's CVode algorithm.
xcor = Nc.Xcor.new (dist, ps_lin, Nc.XcorLimberMethod.GSL)
####
vp_cross = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
vp_auto1 = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
vp_auto2 = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
####
xcor.prepare (cosmo)
####
# Parameters xcor.limber:
# xc -> a NcXcor
# xclk1 -> a NcXcorLimberKernel
# xclk2 -> a NcXcorLimberKernel
# cosmo -> a NcHICosmo
# lmin -> a quint
# lmax -> a quint
# vp -> a NcmVector
if nc_g1 and nc_g2:
    nc_g1.prepare (cosmo)
    nc_g2.prepare (cosmo)
    xcor.limber (nc_g1, nc_g2, cosmo, 0, lmax, vp_cross)
    xcor.limber (nc_g1, nc_g1, cosmo, 0, lmax, vp_auto1)
    xcor.limber (nc_g2, nc_g2, cosmo, 0, lmax, vp_auto2)

# Getting the results and converting them to Numpy arrays.
nc_cl_cross = [Ncm.Vector.get (vp_cross, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]
nc_cl_auto1 = [Ncm.Vector.get (vp_auto1, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]
nc_cl_auto2 = [Ncm.Vector.get (vp_auto2, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]

nc_cl_cross_np = np.array(nc_cl_cross)
nc_cl_auto1_np = np.array(nc_cl_auto1)
nc_cl_auto2_np = np.array(nc_cl_auto2)

##### RELATIVE DIFFERENCE COMPUTATION #####
relative_diff_cross = (nc_cl_cross_np - ccl_cl_cross_np)/nc_cl_cross_np
relative_diff_auto1 = (nc_cl_auto1_np - ccl_cl_auto1_np)/nc_cl_auto1_np
relative_diff_auto2 = (nc_cl_auto2_np - ccl_cl_auto2_np)/nc_cl_auto2_np

### ACCURACY METRIC ###
## CROSS
# Source: page 28, https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf

```

```

CCL_Cl_cross = ccl_cl_cross_np
# For cross PS of fields a and b, we must have Caa, Cbb and Cab of the
↳independent realization.
# For auto PS of field a, Caa, Cbb and Cab can be set to the same value.
Caa_cross = nc_cl_auto1_np
Cbb_cross = nc_cl_auto2_np
Cab_cross = nc_cl_cross_np
grid_cross = np.indices(Cab_cross.shape)
l_index_cross = grid_cross[0]

intern_fact_cross = (Caa_cross*Cbb_cross + Cab_cross**2)/(2*l_index_cross+1)
sig_l_cross = np.sqrt(intern_fact_cross)

A_acc_cross = np.abs((CCL_Cl_cross - Cab_cross)/sig_l_cross)
## AUTO 1
CCL_Cl_auto1 = ccl_cl_auto1_np
# For cross PS of fields a and b, we must have Caa, Cbb and Cab of the
↳independent realization.
# For auto PS of field a, Caa, Cbb and Cab can be set to the same value.
Caa_auto1 = nc_cl_auto1_np
Cbb_auto1 = nc_cl_auto1_np
Cab_auto1 = nc_cl_auto1_np
grid_auto1 = np.indices(Cab_auto1.shape)
l_index_auto1 = grid_auto1[0]

intern_fact_auto1 = (Caa_auto1*Cbb_auto1 + Cab_auto1**2)/(2*l_index_auto1+1)
sig_l_auto1 = np.sqrt(intern_fact_auto1)

A_acc_auto1 = np.abs((CCL_Cl_auto1 - Cab_auto1)/sig_l_auto1)
## AUTO 2
CCL_Cl_auto2 = ccl_cl_auto2_np
# For cross PS of fields a and b, we must have Caa, Cbb and Cab of the
↳independent realization.
# For auto PS of field a, Caa, Cbb and Cab can be set to the same value.
Caa_auto2 = nc_cl_auto2_np
Cbb_auto2 = nc_cl_auto2_np
Cab_auto2 = nc_cl_auto2_np
grid_auto2 = np.indices(Cab_auto2.shape)
l_index_auto2 = grid_auto2[0]

intern_fact_auto2 = (Caa_auto2*Cbb_auto2 + Cab_auto2**2)/(2*l_index_auto2+1)
sig_l_auto2 = np.sqrt(intern_fact_auto2)

A_acc_auto2 = np.abs((CCL_Cl_auto2 - Cab_auto2)/sig_l_auto2)

return ccl_cl_cross_np, ccl_cl_auto1_np, ccl_cl_auto2_np, nc_cl_cross_np,
↳nc_cl_auto1_np, nc_cl_auto2_np, relative_diff_cross,\

```

```

        relative_diff_auto1, relative_diff_auto2, A_acc_cross, A_acc_auto1,
↪A_acc_auto2

```

3 Doing the Galaxy-Galaxy comparison for the histogram case

```

[ ]: lmax=3000
     ells = np.arange(lmax+1)

     z1=z_bin1_histo_np
     z2=z_bin2_histo_np
     dndz1=dndz_bin1_histo_np
     dndz2=dndz_bin2_histo_np

```

```

[ ]: fig, axs = plt.subplots(5, 2, figsize=(12,30))

     i=0
     for cosmology in names:
         Omega_c = CCL_cosmologies[cosmology][0]
         Omega_b = CCL_cosmologies[cosmology][1]
         Omega_v = CCL_cosmologies[cosmology][2]
         h = CCL_cosmologies[cosmology][3]
         sigma8 = CCL_cosmologies[cosmology][4]
         n_s = CCL_cosmologies[cosmology][5]
         w0 = CCL_cosmologies[cosmology][6]
         wa = CCL_cosmologies[cosmology][7]
         Neff = CCL_cosmologies[cosmology][8]
         m_nu = CCL_cosmologies[cosmology][9]

         name=cosmology

         ccl_cl_cross_np, ccl_cl_auto1_np, ccl_cl_auto2_np, nc_cl_cross_np,
↪nc_cl_auto1_np, nc_cl_auto2_np, relative_diff_cross, \
         relative_diff_auto1, relative_diff_auto2, A_acc_cross, A_acc_auto1,
↪A_acc_auto2 = \
         compare_galaxy_galaxy_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s,
↪w0, wa, Neff, m_nu, z1, z2, dndz1, dndz2, ells)

         label_cross_nc = 'nc_'+name
         label_cross_ccl = 'ccl_'+name
         label_cross_rel_diff = name
         label_cross_A_acc = name

         label_auto1_nc = 'nc_'+name
         label_auto1_ccl = 'ccl_'+name
         label_auto1_rel_diff = name
         label_auto1_A_acc = name

```

```

label_auto2_nc = 'nc_'+name
label_auto2_cc1 = 'cc1_'+name
label_auto2_rel_diff = name
label_auto2_A_acc = name

axs[0, 0].plot(ells[1:], nc_cl_cross_np[1:], label=label_cross_nc)
axs[0, 0].plot(ells[1:], cc1_cl_cross_np[1:], label=label_cross_cc1)

axs[0, 1].plot(ells[1:], nc_cl_auto1_np[1:], label=label_auto1_nc)
axs[0, 1].plot(ells[1:], cc1_cl_auto1_np[1:], label=label_auto1_cc1)

axs[1, 0].plot(ells[1:], nc_cl_auto2_np[1:], label=label_auto2_nc)
axs[1, 0].plot(ells[1:], cc1_cl_auto2_np[1:], label=label_auto1_cc1)

axs[1, 1].plot(ells[1:], relative_diff_cross[1:],  
↪label=label_cross_rel_diff)

axs[2, 0].plot(ells[1:], relative_diff_auto1[1:],  
↪label=label_auto1_rel_diff)

axs[2, 1].plot(ells[1:], relative_diff_auto2[1:],  
↪label=label_auto2_rel_diff)

axs[3, 0].plot(ells[1:], A_acc_cross[1:], label=label_cross_A_acc)

axs[3, 1].plot(ells[1:], A_acc_auto1[1:], label=label_auto1_A_acc)

axs[4, 0].plot(ells[1:], A_acc_auto2[1:], label=label_auto2_A_acc)

if A_acc_cross.max()>0.1:
    print("A_acc_cross max "+name+" = "+ str(A_acc_cross[A_acc_cross>0.  
↪1]))+"\n")
    print("A_acc_cross max value position "+name+" = "+ str(np.  
↪where(A_acc_cross>0.1)[0]))+"\n")
    if A_acc_auto1.max()>0.1:
        print("A_acc_auto1 max "+name+" = "+ str(A_acc_auto1[A_acc_auto1>0.  
↪1]))+"\n")
        print("A_acc_auto1 max value position "+name+" = "+ str(np.  
↪where(A_acc_auto1>0.1)[0]))+"\n")
    if A_acc_auto2.max()>0.1:
        print("A_acc_auto2 max "+name+" = "+ str(A_acc_auto2[A_acc_auto2>0.  
↪1]))+"\n")
        print("A_acc_auto2 max value position "+name+" = "+ str(np.  
↪where(A_acc_auto2>0.1)[0]))+"\n")

```

```
i+=1

axs[0, 0].set_title('Galaxy-Galaxy Cross PS - H1 H2')
axs[0, 0].legend()
axs[0, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[0, 0].set(xscale='log')

axs[0, 1].set_title('Galaxy-Galaxy Auto PS - H1')
axs[0, 1].legend()
axs[0, 1].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[0, 1].set(xscale='log')

axs[1, 0].set_title('Galaxy-Galaxy Auto PS - H2')
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[1, 0].set(xscale='log')

axs[1, 1].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Cross H1 H2')
axs[1, 1].legend()
axs[1, 1].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[1, 1].set(xscale='log')

axs[2, 0].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Auto H1')
axs[2, 0].legend()
axs[2, 0].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[2, 0].set(xscale='log')

axs[2, 1].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Auto H2')
axs[2, 1].legend()
axs[2, 1].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[2, 1].set(xscale='log')

expected_acc = np.empty(len(ells))
expected_acc.fill(0.1)

axs[3, 0].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[3, 0].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Cross H1 H2')
axs[3, 0].legend()
axs[3, 0].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[3, 0].set(xscale='log')
axs[3, 0].set(yscale='log')

axs[3, 1].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[3, 1].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Auto H1')
axs[3, 1].legend()
axs[3, 1].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[3, 1].set(xscale='log')
```

```

axs[3, 1].set(yscale='log')

axs[4, 0].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[4, 0].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Auto H2')
axs[4, 0].legend()
axs[4, 0].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[4, 0].set(xscale='log')
axs[4, 0].set(yscale='log')

```

4 Doing the Galaxy-Galaxy comparison for the analytic case

```

[ ]: lmax=3000
     ells = np.arange(lmax+1)

     z1=z_analytical
     z2=z_analytical
     dndz1=dndz_analytical_1
     dndz2=dndz_analytical_2

```

```

[ ]: fig, axs = plt.subplots(5, 2, figsize=(12,30))

     i=0
     for cosmology in names:
         Omega_c = CCL_cosmologies[cosmology][0]
         Omega_b = CCL_cosmologies[cosmology][1]
         Omega_v = CCL_cosmologies[cosmology][2]
         h = CCL_cosmologies[cosmology][3]
         sigma8 = CCL_cosmologies[cosmology][4]
         n_s = CCL_cosmologies[cosmology][5]
         w0 = CCL_cosmologies[cosmology][6]
         wa = CCL_cosmologies[cosmology][7]
         Neff = CCL_cosmologies[cosmology][8]
         m_nu = CCL_cosmologies[cosmology][9]

         name=cosmology

         ccl_cl_cross_np, ccl_cl_auto1_np, ccl_cl_auto2_np, nc_cl_cross_np,
↵nc_cl_auto1_np, nc_cl_auto2_np, relative_diff_cross, \
         relative_diff_auto1, relative_diff_auto2, A_acc_cross, A_acc_auto1,
↵A_acc_auto2 = \
         compare_galaxy_galaxy_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s,
↵w0, wa, Neff, m_nu, z1, z2, dndz1, dndz2, ells)

         label_cross_nc = 'nc_'+name
         label_cross_ccl = 'ccl_'+name
         label_cross_rel_diff = name

```

```

label_cross_A_acc = name

label_auto1_nc = 'nc_'+name
label_auto1_ccl = 'ccl_'+name
label_auto1_rel_diff = name
label_auto1_A_acc = name

label_auto2_nc = 'nc_'+name
label_auto2_ccl = 'ccl_'+name
label_auto2_rel_diff = name
label_auto2_A_acc = name

axs[0, 0].plot(ells[1:], nc_cl_cross_np[1:], label=label_cross_nc)
axs[0, 0].plot(ells[1:], ccl_cl_cross_np[1:], label=label_cross_ccl)

axs[0, 1].plot(ells[1:], nc_cl_auto1_np[1:], label=label_auto1_nc)
axs[0, 1].plot(ells[1:], ccl_cl_auto1_np[1:], label=label_auto1_ccl)

axs[1, 0].plot(ells[1:], nc_cl_auto2_np[1:], label=label_auto2_nc)
axs[1, 0].plot(ells[1:], ccl_cl_auto2_np[1:], label=label_auto1_ccl)

axs[1, 1].plot(ells[1:], relative_diff_cross[1:],
↵label=label_cross_rel_diff)

axs[2, 0].plot(ells[1:], relative_diff_auto1[1:],
↵label=label_auto1_rel_diff)

axs[2, 1].plot(ells[1:], relative_diff_auto2[1:],
↵label=label_auto2_rel_diff)

axs[3, 0].plot(ells[1:], A_acc_cross[1:], label=label_cross_A_acc)

axs[3, 1].plot(ells[1:], A_acc_auto1[1:], label=label_auto1_A_acc)

axs[4, 0].plot(ells[1:], A_acc_auto2[1:], label=label_auto2_A_acc)

i+=1

axs[0, 0].set_title('Galaxy-Galaxy Cross PS - A1 A2')
axs[0, 0].legend()
axs[0, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[0, 0].set(xscale='log')

axs[0, 1].set_title('Galaxy-Galaxy Auto PS - A1')
axs[0, 1].legend()
axs[0, 1].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[0, 1].set(xscale='log')

```

```
axs[1, 0].set_title('Galaxy-Galaxy Auto PS - A2')
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[1, 0].set(xscale='log')

axs[1, 1].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Cross A1 A2')
axs[1, 1].legend()
axs[1, 1].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[1, 1].set(xscale='log')

axs[2, 0].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Auto A1')
axs[2, 0].legend()
axs[2, 0].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[2, 0].set(xscale='log')

axs[2, 1].set_title('Rel. Diff. - Galaxy-Galaxy Auto A2')
axs[2, 1].legend()
axs[2, 1].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[2, 1].set(xscale='log')

expected_acc = np.empty(len(ells))
expected_acc.fill(0.1)

axs[3, 0].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[3, 0].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Cross A1 A2')
axs[3, 0].legend()
axs[3, 0].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[3, 0].set(xscale='log')
axs[3, 0].set(yscale='log')

axs[3, 1].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[3, 1].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Auto A1')
axs[3, 1].legend()
axs[3, 1].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[3, 1].set(xscale='log')
axs[3, 1].set(yscale='log')

axs[4, 0].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[4, 0].set_title('Accuracy - Galaxy-Galaxy Auto A2')
axs[4, 0].legend()
axs[4, 0].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[4, 0].set(xscale='log')
axs[4, 0].set(yscale='log')
```

MASTER-THESIS-AUTO-CMB-LENSING

December 23, 2023

NC_CCL_auto_cmbensing_cmbensing

Copyright (C) 2023 Luigi Lucas de Carvalho Silva luigi.lcsilva@gmail.com

numcosmo is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

numcosmo is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

0.1 Startups and Packages

First of all, let us import some useful packages.

```
[ ]: ##### NUM COSMO #####
try:
    import gi

    gi.require_version("NumCosmo", "1.0")
    gi.require_version("NumCosmoMath", "1.0")
except:
    pass

from gi.repository import GObject
from gi.repository import NumCosmo as Nc
from gi.repository import NumCosmoMath as Ncm

##### CCL #####
import pycc1 as pycc1

##### GENERAL #####
import sys
import numpy as np
```

```

import math
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

##### COMPARISSON #####
sys.path.append('/home/luigi/cosmology/NumCosmo/numcosmo_py/ccl/')

from nc_ccl import create_nc_obj, ccl_cosmo_set_high_prec

#create_nc_obj: Create a NumCosmo object from a CCL cosmology.
#ccl_cosmo_set_high_prec: Set CCL cosmology to high precision.

```

Now, let us get the libraries versions.

```

[ ]: ### GETTING NUMCOSMO VERSION
      #dir(Ncm) # Show the library functions.

ncmpath = Ncm.__path__[0]
ncmpath = ncmpath.replace("/NumCosmoMath-1.0.typelib","")
buildfile = open(ncmpath+"/build_cfg.h", "r").readlines()

for line in buildfile:
    if "NUMCOSMO_VERSION" in line:
        ncversion=line
        for ch in ['#define', 'NUMCOSMO_VERSION', '"', '\n', ' ']:
            if ch in ncversion:
                ncversion = ncversion.replace(ch, '')
print('NumCosmo Version: '+ncversion)

### GETTING CCL VERSION
print("CCL Version: "+str(pyccl.__version__))

```

Now, let us initialize the NumCosmo library.

```

[ ]: Ncm.cfg_init ()
      Ncm.cfg_set_log_handler(lambda msg: sys.stdout.write(msg) and sys.stdout.
      ↪flush())

```

0.2 Cosmological parameters

```

[ ]: # Fixed parameters.
      Neff_massless_neutrinos = 3.0      # Effective number of massless neutrinos
      ↪present. For the massive case, the Neff is
      # defined with the other parameters in the
      ↪cosmology array.
      T_CMB = 2.726                      # The CMB temperature today.

```

```

##### COSMOLOGIES #####
#Reference: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf, Table 3 and Table 4.
#Order of parameters: Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s, w0, wa, Neff,
↳m_nu
CCL_cosmologies = {}
### MASSLESS NEUTRINOS ###
CCL_cosmologies["CCL1"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #flat LCDM
CCL_cosmologies["CCL2"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.0,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
CCL_cosmologies["CCL3"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
#CCL_cosmologies["CCL4"] = [0.25, 0.05, 0.65, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #open wCDM # Bad results for k different from
↳0.
#CCL_cosmologies["CCL5"] = [0.25, 0.05, 0.75, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #closed wCDM # Bad results for k different from
↳0.
#CCL_cosmologies["CCL6"] = [0.3, 0.0, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳Neff_massless_neutrinos, 0] #flat LCDM # Kernel dying for this
↳cosmology
CCL_cosmologies["WMAP7"] = [0.2265, 0.0455, 0.728, 0.704, 0.810, 0.967, -1.0, 0.
↳0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat LCDM
CCL_cosmologies["Planck2013"] = [0.269, 0.0490, 0.682, 0.671, 0.834, 0.962, -1.
↳0, 0.0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat LCDM
### MASSIVE NEUTRINOS ###
# Obs.: The create_nc_obj from nc_ccl.py is not updated for the new version of
↳CCL. So, we cannot include massive neutrinos right now.
#CCL_cosmologies["CCL7"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0, 3.013,
↳[0.04,0,0]] #flat LCDM, m

names = []
for key, value in CCL_cosmologies.items():
    names.append(key)

```

1 Defining the function for the comparisson

```

[ ]: #CMB Lensing not working properly.
def compare_CMBlens_CMBlens_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↳n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z_lss, ell_s):
    """
    Compare the angular power spectrum of CMB lensing.
    """
    ##### GENERAL #####
    # Set Omega_K in a consistent way

```

```

Omega_k = 1.0 - Omega_c - Omega_b - Omega_v

##### COSMOLOGIES #####
# Defining the CCL cosmology.
ccl_cosmo = pyccl.Cosmology(
    Omega_c=Omega_c,
    Omega_b=Omega_b,
    Neff=Neff,
    m_nu=m_nu,
    h=h,
    n_s=n_s,
    Omega_k=Omega_k,
    Omega_g=None,
    w0=w0,
    wa=wa,
    sigma8=sigma8,
    transfer_function='eisenstein_hu',
    T_CMB = T_CMB,
    matter_power_spectrum='linear',
)
# Setting CCL to high precision.
ccl_cosmo_set_high_prec()

# Defining the NumCosmo cosmology.
cosmo, dist, ps_lin, ps_nln, hmfunc = create_nc_obj(ccl_cosmo)
# More info: https://github.com/NumCosmo/NumCosmo/blob/master/numcosmo\_py/
↪ccl/nc_ccl.py

##### CCL POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
# Initialize tracers in CCL.
trcs_ccl = dict()
trcs_ccl['cmb1'] = pyccl.CMBLensingTracer(ccl_cosmo, z_source=z_1ss)

# Computing the angular power spectrum in CCL.
ccl_cl_cmb1_auto1 = pyccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['cmb1'],
↪trcs_ccl['cmb1'], ells, l_limber=-1)

# Converting to Numpy array
ccl_cl_cmb1_auto1_np = np.array(ccl_cl_cmb1_auto1)

##### NUMCOSMO POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
### Recombination by Seager
recomb = Nc.RecombSeager()
Nl_lensing = Ncm.Vector.new_array (np.zeros(lmax+1))
#recomb.prepare (cosmo)

# Defining the kernels in NumCosmo.

```

```

nc_cmbLens_1 = None
##### NcXcorLimberKernelCMBLensing
# Parameters
#dist: a NcDistance
#recomb: a NcRecomb
#Nl: a NcmVector
nc_cmbLens_1 = Nc.XcorLimberKernelCMBLensing.new (dist, recomb, Nl_lensing)

# Pushing the objects to mset in NumCosmo.
mset = Ncm.MSet.empty_new ()
mset.set (cosmo)
mset.push (nc_cmbLens_1)

# Computing the angular power spectrum in NumCosmo.
# Parameters nc_xcor_new:
# nc_xcor_new (NcDistance *dist, NcmPowspec *ps, NcXcorLimberMethod meth);
# Two methods are available to compute Limber-approximated integrals:
↳independent GSL numerical integration or
# vector integration using Sundials's CVode algorithm.
xcor = Nc.Xcor.new (dist, ps_lin, Nc.XcorLimberMethod.GSL)
#####
vp_cmbLens_auto1 = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
#####
xcor.prepare (cosmo)
#####
# Parameters xcor.limber:
# xc -> a NcXcor
# xclk1 -> a NcXcorLimberKernel
# xclk2 -> a NcXcorLimberKernel
# cosmo -> a NcHICosmo
# lmin -> a quint
# lmax -> a quint
# vp -> a NcmVector

nc_cmbLens_1.prepare (cosmo)
xcor.limber (nc_cmbLens_1, nc_cmbLens_1, cosmo, 0, lmax, vp_cmbLens_auto1)

# Getting the results and converting them to Numpy arrays.
nc_cl_cmbLens_auto1 = [Ncm.Vector.get (vp_cmbLens_auto1, i) for i in np.
↳arange(0,lmax+1)]

nc_cl_cmbLens_auto1_np = np.array(nc_cl_cmbLens_auto1)

##### RELATIVE DIFFERENCE COMPUTATION #####
relative_diff_cmbLens_auto1 = (nc_cl_cmbLens_auto1_np -
↳ccl_cl_cmbLens_auto1_np)/nc_cl_cmbLens_auto1_np

```

```

### ACCURACY METRIC ###
# Source: page 28, https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf
## AUTO 1
CCL_Cl_auto1 = ccl_cl_cmb lens_auto1_np
# For cross PS of fields a and b, we must have Caa, Cbb and Cab of the
↪ independent realization.
# For auto PS of field a, Caa, Cbb and Cab can be set to the same value.
Caa_auto1 = nc_cl_cmb lens_auto1_np
Cbb_auto1 = nc_cl_cmb lens_auto1_np
Cab_auto1 = nc_cl_cmb lens_auto1_np
grid_auto1 = np.indices(Cab_auto1.shape)
l_index_auto1 = grid_auto1[0]

intern_fact_auto1 = (Caa_auto1*Cbb_auto1 + Cab_auto1**2)/(2*l_index_auto1+1)
sig_l_auto1 = np.sqrt(intern_fact_auto1)

A_acc_cmb lens_auto1 = np.abs((CCL_Cl_auto1 - Cab_auto1)/sig_l_auto1)

return ccl_cl_cmb lens_auto1_np, nc_cl_cmb lens_auto1_np,
↪ relative_diff_cmb lens_auto1, A_acc_cmb lens_auto1

```

2 Doing the CMB Lensing comparisson

```

[ ]: lmax=3000
     ells = np.arange(lmax+1)
     z_lss = 1090.0

```

```

[ ]: fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12,12))

i=0
for cosmology in names:
    Omega_c = CCL_cosmologies[cosmology][0]
    Omega_b = CCL_cosmologies[cosmology][1]
    Omega_v = CCL_cosmologies[cosmology][2]
    h = CCL_cosmologies[cosmology][3]
    sigma8 = CCL_cosmologies[cosmology][4]
    n_s = CCL_cosmologies[cosmology][5]
    w0 = CCL_cosmologies[cosmology][6]
    wa = CCL_cosmologies[cosmology][7]
    Neff = CCL_cosmologies[cosmology][8]
    m_nu = CCL_cosmologies[cosmology][9]

    name=cosmology

    ccl_cl_cmb lens_auto1_np, nc_cl_cmb lens_auto1_np,
↪ relative_diff_cmb lens_auto1, A_acc_cmb lens_auto1 = \

```

```

compare_CMBlens_CMBlens_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↪n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z_lss, ells)

label_auto1_nc = 'nc_'+name
label_auto1_ccl = 'ccl_'+name
label_auto1_rel_diff = name
label_auto1_A_acc = name

axs[0,0].plot(ells[1:], nc_cl_cmbless_auto1_np[1:], label=label_auto1_nc)
axs[0,0].plot(ells[1:], ccl_cl_cmbless_auto1_np[1:], label=label_auto1_ccl)

axs[0,1].plot(ells[1:], relative_diff_cmbless_auto1[1:],
↪label=label_auto1_rel_diff)

axs[1,0].plot(ells[1:], A_acc_cmbless_auto1[1:], label=label_auto1_A_acc)

if A_acc_cmbless_auto1.max()>0.1:
    print("A_acc_cmbless_auto1 max "+name+" = "+
↪str(A_acc_cmbless_auto1[A_acc_cmbless_auto1>0.1])+"\n")
    print("A_acc_cmbless_auto1 max value position "+name+" = "+ str(np.
↪where(A_acc_cmbless_auto1>0.1)[0])+"\n")

i+=1

axs[0, 0].set_title('CMB Lensing-CMB Lensing Auto PS')
axs[0, 0].legend(loc='upper right')
axs[0, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_l')
axs[0, 0].set(xscale='log')

axs[0, 1].set_title('Rel. Diff. - CMB Lensing-CMB Lensing')
axs[0, 1].legend()
axs[0, 1].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[0, 1].set(xscale='log')

expected_acc = np.empty(len(ells))
expected_acc.fill(0.1)
axs[1, 0].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[1, 0].set_title('Accuracy - CMB Lensing-CMB Lensing')
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[1, 0].set(xscale='log')
axs[1, 0].set(yscale='log')

```

MASTER-THESIS-CROSS-GALAXY-CMB-LENSING

December 23, 2023

NC_CCL_cross_galaxy_cmlensing

Copyright (C) 2023 Luigi Lucas de Carvalho Silva luigi.lcsilva@gmail.com

numcosmo is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

numcosmo is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

0.1 Startups and Packages

First of all, let us import some useful packages.

```
[ ]: ##### NUM COSMO #####
try:
    import gi

    gi.require_version("NumCosmo", "1.0")
    gi.require_version("NumCosmoMath", "1.0")
except:
    pass

from gi.repository import GObject
from gi.repository import NumCosmo as Nc
from gi.repository import NumCosmoMath as Ncm

##### CCL #####
import pycc1 as pycc1

##### GENERAL #####
import sys
import numpy as np
```



```
##### COSMOLOGIES #####
#Reference: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf, Table 3 and Table 4.
#Order of parameters: Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8, n_s, w0, wa, Neff,
↳ m_nu
CCL_cosmologies = {}
### MASSLESS NEUTRINOS ###
CCL_cosmologies["CCL1"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
CCL_cosmologies["CCL2"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
CCL_cosmologies["CCL3"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #wCDM
#CCL_cosmologies["CCL4"] = [0.25, 0.05, 0.65, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #open wCDM # Bad results for k different from
↳ 0.
#CCL_cosmologies["CCL5"] = [0.25, 0.05, 0.75, 0.7, 0.8, 0.96, -0.9, 0.1,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #closed wCDM # Bad results for k different from
↳ 0.
#CCL_cosmologies["CCL6"] = [0.3, 0.0, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0,
↳ Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM # Kernel dying for this
↳ cosmology
CCL_cosmologies["WMAP7"] = [0.2265, 0.0455, 0.728, 0.704, 0.810, 0.967, -1.0, 0.
↳ 0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
CCL_cosmologies["Planck2013"] = [0.269, 0.0490, 0.682, 0.671, 0.834, 0.962, -1.
↳ 0, 0.0, Neff_massless_neutrinos, 0] #flat ΛCDM
### MASSIVE NEUTRINOS ###
# Obs.: The create_nc_obj from nc_ccl.py is not updated for the new version of
↳ CCL. So, we cannot include massive neutrinos right now.
#CCL_cosmologies["CCL7"] = [0.25, 0.05, 0.7, 0.7, 0.8, 0.96, -1.0, 0.0, 3.013,
↳ [0.04,0,0]] #flat ΛCDM, m

names = []
for key, value in CCL_cosmologies.items():
    names.append(key)
```

1 Defining the tracers

```
[ ]: ##### REDSHIFT DISTRIBUTION OF OBJECTS FROM HISTOGRAM #####
### Getting the redshift distribution for the objects from the CCL bin1_histo
↳ and bin2_histo files.
# Source: https://github.com/LSSTDESC/CCL/tree/master/benchmarks/data -- Files
↳ bin1_histo.txt and bin2_histo.txt
# Used in the CCL article: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf
```

```

# Loading the data. The txt files have 2 columns. The first column contains the
↳redshift values,
# and the second column contains the dndz values.
bin1_histo = np.loadtxt("./data/bin1_histo.txt", delimiter=" ") # Loading the
↳first histogram.
len_bin1_histo = bin1_histo.shape[0] # Getting the number of lines.

bin2_histo = np.loadtxt("./data/bin2_histo.txt", delimiter=" ") # Loading the
↳second histogram.
len_bin2_histo = bin2_histo.shape[0] # Getting the number of lines.

# Saving the redshift in two lists.
z_bin1_histo = []
z_bin2_histo = []

for i in range(len_bin1_histo):
    z_bin1_histo.append(bin1_histo[i][0])

for i in range(len_bin2_histo):
    z_bin2_histo.append(bin2_histo[i][0])

z_bin1_histo_np = np.array(z_bin1_histo)
z_bin2_histo_np = np.array(z_bin2_histo)

# Checking if the histograms have the same number of lines, and if the
↳redshifts values are equal.
if len_bin1_histo != len_bin2_histo:
    print("Different histograms size!")
else:
    print("Equal histograms size! \n")
    z_histo_diff = [z_bin1_histo[i] - z_bin2_histo[i] for i in
↳range(len_bin1_histo)]
    count_z_histo_diff_nonzero = np.count_nonzero(z_histo_diff)
    if count_z_histo_diff_nonzero == 0:
        print("Redshifts are also equal!")

# Saving the dndz values in two lists.
dndz_bin1_histo = []
dndz_bin2_histo = []
for i in range(len_bin1_histo):
    dndz_bin1_histo.append(bin1_histo[i][1])

for i in range(len_bin2_histo):
    dndz_bin2_histo.append(bin2_histo[i][1])

dndz_bin1_histo_np = np.array(dndz_bin1_histo)
dndz_bin2_histo_np = np.array(dndz_bin2_histo)

```

```
[ ]: ##### ANALYTICAL REDSHIFT DISTRIBUTION OF OBJECTS #####
### Getting the analytical redshift distribution for the objects as used in CCL
↳ article.
# Source: https://github.com/LSSTDESC/CCL/tree/master/benchmarks/data -- Files
↳ bin1_histo.txt and bin2_histo.txt
# Used in the CCL article: https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf

# Redshift values.
z_analytical_max = math.ceil(max(z_bin1_histo))
z_analytical = np.arange(0, z_analytical_max, 0.001)

# Below, I will multiply the gaussian distributions by the maximum value of the
↳ bin1_histo distribution, just for better visualization.
# The libraries used here do the normalization automatically.
peak_factor = max(dndz_bin1_histo)

# Analytical redshift distributions.
analytical_zmean_1 = 1.0
analytical_sigz_1 = 0.15
analytical_zmean_2 = 1.5
analytical_sigz_2 = 0.15
dndz_analytical_1 = peak_factor*np.exp(-0.5 * ((z_analytical -
↳ analytical_zmean_1) / analytical_sigz_1)**2)
dndz_analytical_2 = peak_factor*np.exp(-0.5 * ((z_analytical -
↳ analytical_zmean_2) / analytical_sigz_2)**2)
```

```
[ ]: ##### PLOT OF THE REDSHIFT DISTRIBUTIONS OF OBJECTS #####
plt.plot(z_bin1_histo, dndz_bin1_histo, label='dndz_bin1_histo')
plt.plot(z_bin2_histo, dndz_bin2_histo, label='dndz_bin2_histo')
plt.plot(z_analytical, dndz_analytical_1, label='dndz_analytical_1',
↳ linestyle='dashed')
plt.plot(z_analytical, dndz_analytical_2, label='dndz_analytical_2',
↳ linestyle='dashed')
plt.legend()
plt.xlabel('z')
plt.ylabel('dndz')
plt.show()
```

2 Defining the function for the comparisson

```
[ ]: # Obs.: Problem with the "mass_function" in the nc_ccl.py file. I commented it
↳ there.
def compare_galaxy_cmb lens_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↳ n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z1, dndz1, z_1ss, ell):
    """
```

```

Compare the cross- angular power spectrum of galaxy and CMB Lensing.
"""
##### GENERAL #####
# Set Omega_K in a consistent way
Omega_k = 1.0 - Omega_c - Omega_b - Omega_v

##### COSMOLOGIES #####
# Defining the CCL cosmology.
ccl_cosmo = pyccl.Cosmology(
    Omega_c=Omega_c,
    Omega_b=Omega_b,
    Neff=Neff,
    m_nu=m_nu,
    h=h,
    n_s=n_s,
    Omega_k=Omega_k,
    Omega_g=None,
    w0=w0,
    wa=wa,
    sigma8=sigma8,
    transfer_function='eisenstein_hu',
    T_CMB = T_CMB,
    matter_power_spectrum='linear',
)
# Setting CCL to high precision.
ccl_cosmo_set_high_prec()

# Defining the NumCosmo cosmology.
cosmo, dist, ps_lin, ps_nln, hmfunc = create_nc_obj(ccl_cosmo)
# More info: https://github.com/NumCosmo/NumCosmo/blob/master/numcosmo\_py/
↪ccl/nc_ccl.py

##### CCL POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
# Setting the galaxy bias to unity.
unity_bias_1 = np.array([1 for i in np.arange(0, len(z1))])

# Initialize tracers in CCL.
trcs_ccl = dict()
trcs_ccl['g1'] = pyccl.NumberCountsTracer(cosmo=ccl_cosmo, dndz=(z1, ↪
↪dndz1), bias=(z1, unity_bias_1), mag_bias=None, has_rsd=False)
trcs_ccl['cmb1'] = pyccl.CMBLensingTracer(ccl_cosmo, z_source=z_1ss)

# Computing the angular power spectrum in CCL.
ccl_cl_cross = pyccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['g1'], ↪
↪trcs_ccl['cmb1'], ells)
#ccl_cl_auto1 = pyccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['g1'], trcs_ccl['g1'], ↪
↪ells)

```

```

    #ccl_cl_auto2 = pycccl.angular_cl(ccl_cosmo, trcs_ccl['cmb1'],
↪trcs_ccl['cmb1'], ells)

# Converting the results to Numpy arrays.
ccl_cl_cross_np = np.array(ccl_cl_cross)
#ccl_cl_auto1_np = np.array(ccl_cl_auto1)
#ccl_cl_auto2_np = np.array(ccl_cl_auto2)

##### NUMCOSMO POWER SPECTRUM COMPUTATION #####
# Defining the z and dndz as vectors in NumCosmo.
v_z1 = Ncm.Vector.new_array (z1)
v_pz1 = Ncm.Vector.new_array (dndz1)

# Obtaining the spline in NumCosmo.
# Parameters Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full:
# xv: NcmVector of knots
# yv: NcmVector of the values of the function, to be interpolated, computed
↪at xv
# init: TRUE to prepare the new NcmSpline or FALSE to not prepare it
s_pz1 = Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full (v_z1, v_pz1, True)

### Recombination by Seager
recomb = Nc.RecombSeager()
Nl_lensing = Ncm.Vector.new_array (np.zeros(lmax+1))
#recomb.prepare (cosmo)

# Defining the kernels in NumCosmo.
nc_g1 = None
nc_cmlens_1 = None
##### Nc.XcorLimberKernelGal.new:
#zmin: a gdouble.
#zmax: a gdouble.
#np: number of points in the interpolation.
#nbarm1: a gdouble, noise spectrum.
#dn_dz: a NcmSpline.
#dist: a NcDistance.
#domagbias: whether to do magnification bias.
##### NcXcorLimberKernelCMBLensing.new:
# Parameters
#dist: a NcDistance
#recomb: a NcRecomb
#Nl: a NcmVector
nc_g1 = Nc.XcorLimberKernelGal.new (z1[0], z1[-1], 1, 0.0, s_pz1, dist,
↪False)
nc_cmlens_1 = Nc.XcorLimberKernelCMBLensing.new (dist, recomb, Nl_lensing)

# Pushing the objects to mset in NumCosmo.

```

```

mset = Ncm.MSet.empty_new ()
mset.set (cosmo)
mset.push (nc_g1)
mset.push (nc_cmlens_1)

# Computing the angular power spectrum in NumCosmo.
# Parameters nc_xcor_new:
# nc_xcor_new (NcDistance *dist, NcmPowspec *ps, NcXcorLimberMethod meth);
# Two methods are available to compute Limber-approximated integrals:
↳ independent GSL numerical integration or
# vector integration using Sundials's CVode algorithm.
xcor = Nc.Xcor.new (dist, ps_lin, Nc.XcorLimberMethod.GSL)
####
vp_cross = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
vp_auto1 = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
vp_auto2 = Ncm.Vector.new (lmax + 1)
####
xcor.prepare (cosmo)
####
# Parameters xcor.limber:
# xc -> a NcXcor
# xclk1 -> a NcXcorLimberKernel
# xclk2 -> a NcXcorLimberKernel
# cosmo -> a NcHICosmo
# lmin -> a quint
# lmax -> a quint
# vp -> a NcmVector
nc_g1.prepare (cosmo)
nc_cmlens_1.prepare (cosmo)
xcor.limber (nc_g1, nc_cmlens_1, cosmo, 0, lmax, vp_cross)
xcor.limber (nc_g1, nc_g1, cosmo, 0, lmax, vp_auto1)
xcor.limber (nc_cmlens_1, nc_cmlens_1, cosmo, 0, lmax, vp_auto2)

# Getting the results and converting them to Numpy arrays.
nc_cl_cross = [Ncm.Vector.get (vp_cross, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]
nc_cl_auto1 = [Ncm.Vector.get (vp_auto1, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]
nc_cl_auto2 = [Ncm.Vector.get (vp_auto2, i) for i in np.arange(0,lmax+1)]

nc_cl_cross_np = np.array(nc_cl_cross)
nc_cl_auto1_np = np.array(nc_cl_auto1)
nc_cl_auto2_np = np.array(nc_cl_auto2)

##### RELATIVE DIFFERENCE COMPUTATION #####
relative_diff_cross = (nc_cl_cross_np - ccl_cl_cross_np)/nc_cl_cross_np
#relative_diff_auto1 = (nc_cl_auto1_np - ccl_cl_auto1_np)/nc_cl_auto1_np
#relative_diff_auto2 = (nc_cl_auto2_np - ccl_cl_auto2_np)/nc_cl_auto2_np

```

```

### ACCURACY METRIC ###
## CROSS
# Source: page 28, https://arxiv.org/pdf/1812.05995.pdf
CCL_Cl_cross = ccl_cl_cross_np
# For cross PS of fields a and b, we must have Caa, Cbb and Cab of the
↪independent realization.
# For auto PS of field a, Caa, Cbb and Cab can be set to the same value.
Caa_cross = nc_cl_auto1_np
Cbb_cross = nc_cl_auto2_np
Cab_cross = nc_cl_cross_np
grid_cross = np.indices(Cab_cross.shape)
l_index_cross = grid_cross[0]

intern_fact_cross = (Caa_cross*Cbb_cross + Cab_cross**2)/(2*l_index_cross+1)
sig_l_cross = np.sqrt(intern_fact_cross)

A_acc_cross = np.abs((CCL_Cl_cross - Cab_cross)/sig_l_cross)

return ccl_cl_cross_np, nc_cl_cross_np, relative_diff_cross, A_acc_cross

```

3 Doing the Galaxy-CMB Lensing comparisson for the histogram case

```

[ ]: lmax=3000
     ells = np.arange(lmax+1)

     z1=z_bin1_histo_np
     z2=z_bin2_histo_np
     dndz1=dndz_bin1_histo_np
     dndz2=dndz_bin2_histo_np

     z_lss = 1090.0

```

```

[ ]: fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12,12))

     i=0
     for cosmology in names:
         Omega_c = CCL_cosmologies[cosmology][0]
         Omega_b = CCL_cosmologies[cosmology][1]
         Omega_v = CCL_cosmologies[cosmology][2]
         h = CCL_cosmologies[cosmology][3]
         sigma8 = CCL_cosmologies[cosmology][4]
         n_s = CCL_cosmologies[cosmology][5]
         w0 = CCL_cosmologies[cosmology][6]
         wa = CCL_cosmologies[cosmology][7]
         Neff = CCL_cosmologies[cosmology][8]

```

```

m_nu = CCL_cosmologies[cosmology][9]

name=cosmology

ccl_cl_cross_np_H1, nc_cl_cross_np_H1, relative_diff_cross_H1,
↪A_acc_cross_H1 = \
    compare_galaxy_cmlens_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↪n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z1, dndz1, z_lss, ells)

ccl_cl_cross_np_H2, nc_cl_cross_np_H2, relative_diff_cross_H2,
↪A_acc_cross_H2 = \
    compare_galaxy_cmlens_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↪n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z2, dndz2, z_lss, ells)

label_cross_nc_H1 = 'nc_'+name
label_cross_ccl_H1 = 'ccl_'+name
label_cross_rel_diff_H1 = 'H1_'+name
label_cross_A_acc_H1 = 'H1_'+name

label_cross_nc_H2 = 'nc_'+name
label_cross_ccl_H2 = 'ccl_'+name
label_cross_rel_diff_H2 = 'H2_'+name
label_cross_A_acc_H2 = 'H2_'+name

axs[0, 0].plot(ells[1:], nc_cl_cross_np_H1[1:], label=label_cross_nc_H1)
axs[0, 0].plot(ells[1:], ccl_cl_cross_np_H1[1:], label=label_cross_ccl_H1)

axs[0, 1].plot(ells[1:], nc_cl_cross_np_H2[1:], label=label_cross_nc_H2)
axs[0, 1].plot(ells[1:], ccl_cl_cross_np_H2[1:], label=label_cross_ccl_H2)

axs[1, 0].plot(ells[1:], relative_diff_cross_H1[1:],
↪label=label_cross_rel_diff_H1)
axs[1, 0].plot(ells[1:], relative_diff_cross_H2[1:],
↪label=label_cross_rel_diff_H2)

axs[1, 1].plot(ells[1:], A_acc_cross_H1[1:], label=label_cross_A_acc_H1)
axs[1, 1].plot(ells[1:], A_acc_cross_H2[1:], label=label_cross_A_acc_H2)
i+=1

axs[0, 0].set_title('Galaxy H1 - CMB Lensing Cross PS')
axs[0, 0].legend()
axs[0, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_l')
axs[0, 0].set(xscale='log')

axs[0, 1].set_title('Galaxy H2 - CMB Lensing Cross PS')
axs[0, 1].legend()

```

```

axs[0, 1].set(xlabel='l', ylabel='C_1')
axs[0, 1].set(xscale='log')

axs[1, 0].set_title('Rel. Diff. - Galaxy(H1,H2)-CMB Lensing')
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[1, 0].set(xscale='log')

expected_acc = np.empty(len(ells))
expected_acc.fill(0.1)

axs[1, 1].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[1, 1].set_title('Accuracy - Galaxy(H1,H2)-CMB Lensing')
axs[1, 1].legend()
axs[1, 1].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[1, 1].set(xscale='log')
axs[1, 1].set(yscale='log')

```

4 Doing the Galaxy-CMB Lensing comparisson for the analytic case

```

[ ]: lmax=3000
     ells = np.arange(lmax+1)

     z1=z_analytical
     z2=z_analytical
     dndz1=dndz_analytical_1
     dndz2=dndz_analytical_2

     z_lss = 1090.0

```

```

[ ]: fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12,12))

     i=0
     for cosmology in names:
         Omega_c = CCL_cosmologies[cosmology][0]
         Omega_b = CCL_cosmologies[cosmology][1]
         Omega_v = CCL_cosmologies[cosmology][2]
         h = CCL_cosmologies[cosmology][3]
         sigma8 = CCL_cosmologies[cosmology][4]
         n_s = CCL_cosmologies[cosmology][5]
         w0 = CCL_cosmologies[cosmology][6]
         wa = CCL_cosmologies[cosmology][7]
         Neff = CCL_cosmologies[cosmology][8]
         m_nu = CCL_cosmologies[cosmology][9]

```

```

name=cosmology

    ccl_cl_cross_np_A1, nc_cl_cross_np_A1, relative_diff_cross_A1,
↪A_acc_cross_A1 = \
    compare_galaxy_cmb_lensing_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↪n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z1, dndz1, z_lss, ell_s)

    ccl_cl_cross_np_A2, nc_cl_cross_np_A2, relative_diff_cross_A2,
↪A_acc_cross_A2 = \
    compare_galaxy_cmb_lensing_angular_cl(Omega_c, Omega_b, Omega_v, h, sigma8,
↪n_s, w0, wa, Neff, m_nu, z2, dndz2, z_lss, ell_s)

    label_cross_nc_A1 = 'nc_'+name
    label_cross_ccl_A1 = 'ccl_'+name
    label_cross_rel_diff_A1 = 'A1_'+name
    label_cross_A_acc_A1 = 'A1_'+name

    label_cross_nc_A2 = 'nc_'+name
    label_cross_ccl_A2 = 'ccl_'+name
    label_cross_rel_diff_A2 = 'A2_'+name
    label_cross_A_acc_A2 = 'A2_'+name

    axs[0, 0].plot(ell_s[1:], nc_cl_cross_np_A1[1:], label=label_cross_nc_A1)
    axs[0, 0].plot(ell_s[1:], ccl_cl_cross_np_A1[1:], label=label_cross_ccl_A1)

    axs[0, 1].plot(ell_s[1:], nc_cl_cross_np_A2[1:], label=label_cross_nc_A2)
    axs[0, 1].plot(ell_s[1:], ccl_cl_cross_np_A2[1:], label=label_cross_ccl_A2)

    axs[1, 0].plot(ell_s[1:], relative_diff_cross_A1[1:],
↪label=label_cross_rel_diff_A1)
    axs[1, 0].plot(ell_s[1:], relative_diff_cross_A2[1:],
↪label=label_cross_rel_diff_A2)

    axs[1, 1].plot(ell_s[1:], A_acc_cross_A1[1:], label=label_cross_A_acc_A1)
    axs[1, 1].plot(ell_s[1:], A_acc_cross_A2[1:], label=label_cross_A_acc_A2)
    i+=1

axs[0, 0].set_title('Galaxy A1 - CMB Lensing Cross PS')
axs[0, 0].legend()
axs[0, 0].set(xlabel='l', ylabel='C_l')
axs[0, 0].set(xscale='log')

axs[0, 1].set_title('Galaxy A2 - CMB Lensing Cross PS')
axs[0, 1].legend()
axs[0, 1].set(xlabel='l', ylabel='C_l')

```

```
axs[0, 1].set(xscale='log')

axs[1, 0].set_title('Rel. Diff. - Galaxy(A1,A2)-CMB Lensing')
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].set(xlabel='l', ylabel='Rel. Diff.')
axs[1, 0].set(xscale='log')

expected_acc = np.empty(len(ells))
expected_acc.fill(0.1)

axs[1, 1].plot(ells[1:], expected_acc[1:])
axs[1, 1].set_title('Accuracy - Galaxy(A1,A2)-CMB Lensing')
axs[1, 1].legend()
axs[1, 1].set(xlabel='l', ylabel='Accuracy')
axs[1, 1].set(xscale='log')
axs[1, 1].set(yscale='log')
```