Universidade de Brasília

Bifurcação Global e aplicações para problemas elípticos do tipo Kirchhoff

Jônatas da Silva Peralta

Orientador: Dr. Willian Cintra

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 15 de Agosto de 2023

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu querido Deus por sua infinita misericórdia em minha vida. A Deus, seja concedida toda honra, glória e louvores.

Agradeço aos meus pais, irmãos e sobrinho pelo apoio, carinho e incentivo para prosseguir com os meus estudos. Eu amo vocês.

Agradeço profundamente ao meu orientador, Willian Cintra. Obrigado por todos os ensinamentos, pelo seu empenho, paciência e sensibilidade. Gratidão, por acreditar em mim em momentos que eu mesmo não acreditei.

Agradeço a minha noiva, Vânia. Obrigado por todo apoio, companheirismo, por ter me ouvido chorar e nos momentos mais difíceis ter ficado ao meu lado você é incrível. Te amo.

Agradeço meus tios, primos e avós tanto brasileiros quanto peruanos. Obrigado, pelas inspirações. Amo vocês.

Agradeço meus amigos que, de alguma forma, contribuíram no inicio, meio e fim do mestrado. Agnaldo, Renã, Sidney, Raylane, Gabriel Nogueira, Caio, Manu, Gabriela, Gabrielzinho, Joyce, Mateus Figueiredo, Mateus Edmundo, André Tavares, Leila, Felipe, Djeovana, Gustavo, Samuel, Júlia, Juscélia, Marcio, Jadde, Deyfila, Daniel Abreu, Maria Edna, Milena, Thiago, Felipe, Rodolfo, Ismael, Débora, Tharles, Katianny, Saulo, Guilherme, Flávia, Fred e Brenda. Em especial, as amigas Talita e Henrylla que além de amigos da graduação, viramos amigos de mestrados, irmãos de orientação e agora irmãos de vida. Amigos, obrigado pelo apoio amo vocês.

Agradeço aos meus professores da graduação em especial Sérgio Brazil, José Ivan, Cleber Pereira, Clebes Brandão, Lidermir Arruda, Wenden Charles e Marcos Aurélio obrigado pelos grandes ensinamentos e apoio quando se foi preciso.

Agradeço meus pastores Marcelo, Nilson, Alexandra e Icléia pelas inúmeras orações e boas conversas.

Agradeço aos professores membros da banca Romildo Nascimento e Carlos Alberto cujas sugestões enriqueceram este trabalho.

Meus agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro, no qual sem ele não poderia concluir meus estudos.

Resumo

Neste trabalho, enunciamos e provamos alguns Teoremas de Bifurcação Global e aplicamos esses resultados para obter soluções positivas para a seguinte classe do problema elíptico do tipo Kirchhoff

$$(P)\ \begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado com fronteira suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções regulares satisfazendo hipóteses adequadas.

Abstract

In this work we enunciate and prove some Global Bifurcation Theorems and apply these results to obtain positive solutions for the following Kirchhoff-type elliptic problem class

$$(P)\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is bounded domain with smooth boundary and $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ are regular functions satisfying suitable assumptions.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não-negativos.
$\mathbb{R}^N$	Espaço euclidiano N-dimensional.
$B_r(x)$	Bola aberta de centro x e raio r.
Ω	Domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular.
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\hookrightarrow$	Imersão.
$N = N(\cdot)$	Núcleo de um operador.
$C(X,Y)$	Espaço das funções contínuas de X em Y.
I	Operador Identidade.
$C(\overline{\Omega})$	Espaço das funções contínuas.
$C^k(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$.
$C^k_0(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$ que se anulam sobre $\partial\Omega$.
$C^\infty_c(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^∞ de suporte compacto.
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$	Espaço de Hölder.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev.
$H^1_0(\Omega)$	Fecho do conjunto $C^\infty_c(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,2}(\Omega)$.
$\partial_i u$ ou u_{x_i}	Derivada parcial de u com respeito à i-ésima coordenada, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
∇u	$(\partial_1 u, \cdots, \partial_N u)$ para $u \in H^1_0(\Omega)$.
p^*	Conjugado de Sobolev ou Expoente crítico de Sobolev, dado por $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.
$\|\cdot\|_0$	Norma do máximo.
$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$	Norma do espaço $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\|\cdot\|$	Norma do espaço de Sobolev $H^1_0(\Omega)$.

Lista de Figuras

Introdução

Neste trabalho, estaremos interessados em obter soluções positivas para o seguinte problema elíptico do tipo Kirchhoff

$$(P)\ \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções regulares satisfazendo hipóteses adequadas. Este problema herda tal nome devido ao fato de que quando $N = 1$, $\Omega = (0,L)$, $M(s) = 1+s$ e $\lambda f(x,u) = f(x)$ as soluções do problema (P) são os estados estacionários da seguinte equação hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x} dx\right|^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \ \ u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

que foi introduzido por Kirchhoff em [19] com intuito de descrever as pequenas oscilações transversais de uma corda elástica presa. Neste exemplo específico, L é o comprimento da corda. Particularmente, a equação descrita acima generaliza o problema clássico da onda proposto por D'Alambert.

A equação descrita por (P) é também conhecida como um problema não local, dada a presença do termo $M(\cdot)$. O aparecimento deste termo torna o problema interessante sob ponto de vista matemático, uma vez que, a equação não é uma igualdade pontual. Após Kirchhoff, este problema foi discutido de forma teórica e experimental por físicos (veja, por exemplo, [11] e [23]). É importante salientar que problemas relacionados a termos não locais, não se limitam ao campo da física. Podemos citar exemplos no campo biológico, particularmente na densidade populacional. Neste caso específico, u descreve um processo que depende apenas da sua própria média.

Neste trabalho, vamos mostrar que apesar do aparecimento do termo não local $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)$, as equações de Kirchhoff dadas por (P) podem ser solucionadas com argumentos clássicos de Análise Funcional não linear. O problema de Kirchhoff tem sido bastante estudado nos últimos anos usando métodos variacionais, veja, por exemplo, [3], [2], [12] e [13]. O objetivo principal deste trabalho é usar os teoremas clássicos de bifurcação para demonstrar a existência de soluções positivas para o problema (P), seguindo as ideias de Ambrossetti e Arcoya [5], Ambrossetti e Hess [6] e Arcoya, Carmona e Pellacci [8].

O presente trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro capítulo está destinado a apresentar alguns resultados preliminares que serão úteis ao longo do trabalho. Em particular, enunciamos e demonstramos alguns resultados de Análise funcional, em seguida fizemos uma breve revisão da Teoria do Grau e finalizamos com alguns resultados importantes sobre índice de certos operadores.

O Capítulo 2 é dedicado a apresentar e demonstrar resultados da Teoria de Bifurcação. O objetivo principal deste capítulo foi provar o teorema que é conhecido como Alternativa Global de Rabinowitz. Com o intuito de enunciar esse resultado, precisaremos introduzir algumas notações. Seja E espaço de Banach, considere operadores abstratos, $F:\mathbb{R}\times E\to E$ dado por

$$F(\lambda,u)=u-\lambda T+H(\lambda,u),$$

onde $T:E\to E$ é um operador linear, contínuo e compacto e $H:\mathbb{R}\times E\to E$ é um operador contínuo e compacto sobre conjuntos limitados de tal forma que $H(\lambda,u)=o(\|u\|_E)$, quando $u\to 0$, uniformemente em qualquer intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Note que essas hipóteses implicam que $F(\lambda,0)=0$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$.

Além disso, considere $\Sigma=\{\lambda\in\mathbb{R}:\dim N[I-\lambda T]\geq 1\}$, isto é, Σ é o conjunto dos valores característicos de T. Com essas notações, temos o seguinte teorema que nos fornece existência de um continuum (fechado e conexo) de soluções não nulas da equação $F(\lambda,u)=0$ emanando a partir da curva de soluções $(\lambda,0)$:

Teorema 0.1 (Alternativa Global de P.H.Rabinowitz)**.** *Seja $\lambda_0\in\Sigma$ tal que $i(I-\lambda T,0)$ muda de sinal quando λ cruza λ_0. Então existe um continuum $\mathfrak{C}$ de soluções não nulas de $F(\lambda,u)=0$ que emana da curva de soluções $(\lambda,0)$ em $(\lambda_0,0)$. Além disso, $\mathfrak{C}$ satisfaz uma das seguintes opções não excludentes:*

(i) $\mathfrak{C}$ *é ilimitado em* $\mathbb{R}\times E$*,*

(ii) Existe $\lambda_1\in\Sigma\setminus\{\lambda_0\}$*tal que* $(\lambda_1,0)\in\mathfrak{C}$*,*

Por fim, o Capítulo 3 foi destinado a aplicar a Alternativa Global de Rabinowitz para o problema (P), considerando $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ e $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções regulares satisfazendo as seguintes hipóteses básicas:

(f_1) $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, $a(x) := D_u^+ f(x,0) > 0$ e $a \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$

(f_2) $f(x,u) = b(x)u + g(x,u)$, com $b(x) > 0$ e b é regular o quanto nescessário e $\lim\limits_{u\to\infty} g(x,u)/u = 0$.

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(s) \geq m_0$ para todo $s \geq 0$.

(M_∞) existe $M_\infty > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = M_\infty$.

Com as hipóteses apresentadas acima, provamos mudanças de índice usando o operador abstrato associado a (P) e aplicamos o Teorema da Alternativa Global de Rabinowitz. Além disso, foi possível demonstrar um resultado que permitiu relacionar bifurcação a partir da solução trivial com a bifurcação a partir do infinito, obtendo assim um continuum emanando a partir do infinito. Desta forma, conseguimos fazer o estudo do comportamento global dos contínuos obtidos e obtemos distintos diagramas de bifurcação, dependendo das hipóteses sobre f e M.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados da Análise Funcional e da Teoria do Grau. O objetivo deste capítulo é apresentar as propriedades do Grau Topológico de Leray-Schauder e realizar o cálculo do índice através da linearização. Para isso, dividimos este capítulo em três seções. A Seção 1 mostrará alguns resultados da Análise Funcional, especificamente, provaremos diversas propriedades sobre o núcleo e a imagem de operadores lineares e compactos em espaços de Banach, isso permitirá definir o importante conceito de multiplicidade algébrica. A Seção 2 é dedicada a fazer uma revisão da Teoria do Grau. Por fim, na Seção 3 provaremos um Teorema que nos ensina a calcular o índice através da linearização de certos operadores diferenciáveis.

1.1 Resultados de Análise Funcional

Nesta seção, serão demonstradas algumas propriedades acerca da imagem e do núcleo de operadores compactos. Essas propriedades são fundamentais para definir o conceito de multiplicidade algébrica que está intimamente relacionada com o cálculo de índice via linearização. A seção está baseada no livro do Kreyszig [20].

Ao longo deste capítulo iremos adotar as seguintes notações:

- E_1 espaço de Banach real.
- $K(E_1)$ denota o espaço dos operadores lineares, contínuos e compactos de E_1 em E_1.
- $N(T)$ denota o núcleo do operador $T \in K(E_1)$.
- $T(E_1)$ é a imagem de $T \in K(E_1)$.
- I denotará o operador identidade de E_1 em E_1,

- $T_\lambda = T - \lambda I$.
- $T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n$. Em particular, $T_\lambda^0 = I$.
- $\Omega \subset [a,b] \times E_1$ aberto limitado, onde $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
- $\Omega_\lambda = \{x \in E_1 : (\lambda, x) \in \Omega\}$.
- $\partial\Omega_\lambda$ denota a fronteira de Ω_λ.
- $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo.
- $D \subset E_1$ será um aberto limitado.

Munidos das notações acima, podemos enunciar e demonstrar alguns resultados que serão utilizados para a demonstração do teorema principal desta seção.

O resultado abaixo nos diz que para cada autovalor não nulo de um operador compacto, a dimensão do núcleo de T_λ^n é finita.

Lema 1.1. *Seja $T \in K(E_1)$. Então para cada $\lambda \neq 0$, tem-se que*

$$\dim N(T_\lambda^n) = \dim N((T - \lambda I)^n) < \infty \qquad n = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

e

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda^1) \subset ... \tag{1.2}$$

Demonstração. Provemos inicialmente (1.2). Como T_λ é linear, temos que $T_\lambda(0) = 0$. Seja $x \in N(T_\lambda^n)$. Então, $T_\lambda^n(x) = 0$. Portanto,

$$T_\lambda^{n+1}(x) = T_\lambda(T_\lambda^n(x)) = T_\lambda(0) = 0.$$

Lembrando também que $T_\lambda^0 = I$, logo $N(T_\lambda^0) = \{0\}$, fica claro que obtemos (1.2).

Provaremos agora (1.1). Segue do Teorema Binominal que:

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \\ \Rightarrow T_\lambda^n &= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}. \end{aligned}$$

Tomemos $W = TS = ST$, onde $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$ e $\mu = -(-\lambda)^n$. Como $T \in K(E_1)$, S é limitado. Logo, $W \in K(E_1)$. Assim, escrevendo

$$T_\lambda^n \quad = \quad W - \mu I,$$

e aplicando a Alternativa de Fredholm (Teorema A.3 (i)) para $T_\lambda^n = W - \mu I$ o resultado segue.

□

O Lema seguinte nos diz que, para cada autovalor não nulo de $T \in K(E_1)$, a imagem T_λ^n é fechada. A demonstração deste resultado é simples, e está referenciada na bibliografa adequada para averiguação.

Lema 1.2. *Seja $T \in K(E_1)$. Então para cada $\lambda \neq 0$, a imagem de T_λ^n é fechada para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$. Além disso, tem-se que*

$$E = T_\lambda^0(E_1) \supset T_\lambda(E_1) \supset \ldots.$$

Demonstração. Ver [20, Corolário 8.3.6]

□

Os Lemas anteriores nos dizem que para um operador $T \in K(E_1)$ e $\lambda \neq 0$, a dimensão do núcleo T_λ^n é finita para cada $n = 1, 2, \cdots$. Além disso, satisfazem $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$; e as imagens $T_\lambda^n(E_1)$ são todas fechadas e satisfazem $T_\lambda^n(E_1) \supset T_\lambda^{n+1}(E_1)$.

Podemos dizer mais. De algum $n = r$ em diante, o núcleo desses espaços nulos são todos iguais (Lema 1.3); de um $n = q$ em diante, as imagens são todas iguais (Lema 1.4). Além disso, $q = r$ (Teorema 1.1; aqui, q e r são os menores inteiros com essas propriedades). Para demonstrar isso, iniciamos provando o lema a seguir:

Lema 1.3 (Espaços Nulos)**.** *Sejam $T \in K(E_1)$ e $\lambda \neq 0$. Então existe um menor inteiro r (dependendo de λ) tal que*

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \cdots.$$

Além disso, se $r > 0$ as inclusões

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda^1) \subset \ldots \subset N(T_\lambda^r)$$

são todas próprias.

Demonstração. Por simplicidade vamos escrever $N_n = N(T_\lambda^n)$. A ideia da prova será dividida em duas partes:

Etapa 1 Vamos assumir que $N_m = N_{m+1}$ não ocorre, seja qual for $m = 0, 1, 2, ...$ e chegar em uma contradição. O Lema de Riez (Lema A.2) será fundamental nessa etapa.

Etapa 2 Em seguida, mostraremos que $N_m = N_{m+1}$ implica que $N_n = N_{n+1}$ para todo $n > m$.

Vamos iniciar a demonstração da primeira etapa. Do Lema 1.1, segue que $N_m \subset N_{m+1}$ para todo $m = 0, 1, 2, ...$ Suponha por contradição que N_n é subespaço próprio de N_{n+1}, para cada $n = 0, 1, 2, ...$ Como N_n é fechado, o Lema de Riez (Lema A.2) implica que, existe uma sequência (y_n) tal que

$$y_n \in N_n,\ \|y_n\| = 1 \text{ e } \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}\ \ \forall x \in N_{n-1},\ \forall n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.3}$$

Mostraremos que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \qquad (m < n),$$

de modo que Ty_n não possui subsequência convergente, pois $|\lambda| > 0$. Isso contradiz a compacidade de T uma vez que (y_n) é limitada. De fato, temos que

$$T_\lambda = T - \lambda I \Rightarrow T_\lambda + \lambda I = T.$$

Assim, para $m < n$ temos

$$\begin{aligned} Ty_n - Ty_m &= T_\lambda y_n + \lambda y_n - T_\lambda y_m - \lambda y_m \\ &= \lambda y_n - (T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n) \\ &= \lambda y_n - x_1, \end{aligned}$$

onde $x_1 = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n$.

Mostraremos que $x_1 \in N_{n-1}$. Como $m \leq n-1$, claramente temos que $\lambda y_m \in N_m \subset N_{n-1}$. Além disso, $y_m \in N_m$ implica que

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m), \tag{1.4}$$

isto é, $T_\lambda y_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$. Analogamente, $y_n \in N_{n-1}$ implica que $T_\lambda y_n \in N_{n-1}$. Portanto, $x_1 \in N_{n-1}$. Tomando agora

$$x = \lambda^{-1} x_1,$$

tem-se que $x \in N_{n-1}$ e $x_1 = \lambda x \in N_{n-1}$. Segue de (1.3) que

$$\|\lambda y_n - x_1\| = \|\lambda y_n - \lambda x\| = |\lambda|\,\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|.$$

Sabendo ainda que $Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - x_1$. Segue que

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda y_n - x_1\| = |\lambda|\,\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \;\; m < n.$$

Essa contradição garante que para algum $m \in \mathbb{N}$, a igualdade $N_m = N_{m+1}$ ocorre.

Provaremos agora que $N_m = N_{m+1}$ implica que $N_n = N_{n+1}$, para todo $n > m$. Suponhamos que isso não seja verdade. Então $N_n \subset N_{n+1}$ é própria para algum $n > m$. Consideremos um $x \in N_{n+1} \setminus N_n$. Por definição, temos

$$T_\lambda^{n+1} x = 0 \quad \text{mas} \quad T_\lambda^n x \neq 0.$$

Sendo $n - m > 0$, definimos

$$z = T_\lambda^{n-m}(x).$$

Assim,

$$T_\lambda^{m+1}(z) = T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m}(x)) = T_\lambda^{n+1}(x) = 0.$$

Por outro lado,

$$T_\lambda^{m}(z) = T_\lambda^{m}(T_\lambda^{n-m}(x)) = T_\lambda^{n}(x) \neq 0.$$

Logo, $z \in N_{m+1}$ mas $z \notin N_m$. Assim, N_m é subespaço próprio de N_{m+1}. Contrariando o fato que $N_m = N_{m+1}$. Consequentemente existe um menor inteiro r não-negativo, tal que

$$N_r = N_{r+1} = N_{r+2} = \cdots.$$

Se $r > 0$, as inclusões indicadas no enunciado são todas próprias. De fato, se as inclusões não fossem próprias, então existiria um $p < r$ tal que

$$N(T_\lambda^p) = N(T_\lambda^{p+1}) = N(T_\lambda^{p+2}) = \cdots = N(T_\lambda^r),$$

conforme Etapa 2, contrariando a minimalidade de r. E o resultado segue.

□

Vejamos um resultado semelhante para as imagens

Lema 1.4. *Sejam $T \in K(E_1)$ e $\lambda \neq 0$. Então, existe um menor inteiro q não-negativo (que depende de λ) tal que*

$$T_\lambda^q(E_1) = T_\lambda^q(E_1) = \cdots.$$

Além disso, se $q > 0$, as inclusões

$$T_\lambda^0(E_1) \supset T_\lambda(E_1) \supset \ldots \supset T_\lambda^q(E_1),$$

são próprias.

Demonstração. Por simplicidade, denotaremos $R_n = T_\lambda^n(E_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que não existe $s \in \mathbb{N}$ com $R_s = T_\lambda^s(E) = R_{s+1} = T_\lambda^{s+1}(E_1)$ então, pelo Lema 1.2, R_{n+1} é subespaço próprio de R_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que estas imagens são fechadas, segue do Lema de Riez (Teorema A.2) que existe uma sequência x_n tal que

$$x_n \in R_n, \ \ \|x_n\| = 1 \text{ e } \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in R_{n+1}.$$

Seja $m < n$. Desde que $T = T_\lambda + \lambda I$, podemos escrever

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n).$$

No lado direito da equação acima, temos que $\lambda x_m \in R_m$, pois $x_m \in R_m$, de modo que $T_\lambda x_m \in R_{m+1}$. Desde que $n > m$, temos que $T_\lambda x_n + \lambda x_n \in R_n \subset R_{m+1}$. Portanto, a equação acima pode ser reescrita como

$$Tx_m - Tx_n = \lambda(x_n - x) \quad x \in R_{m+1},$$

onde $x = (-T_\lambda x_m/\lambda + T_\lambda x_n/\lambda + x_n)$. Consequentemente,

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \|\lambda(x_m - x)\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|. \tag{1.5}$$

Logo, $T(x_n)$ não possui subsequência convergente, contrariando a compacidade de T. Portanto, para algum s tem-se que $R_s = R_{s+1}$.
Seja agora q o menor inteiro k tal que $R_k = R_{k+1}$. Se $q > 0$, segue do Lema 1.2 que as inclusões são próprias. Além disso, $R_{q+1} = R_q$ significa que T_λ mapeia R_q em si mesmo. Portanto, a aplicação repetida de T_λ nos garante $R_{n+1} = R_n$ para todo $n > q$.

□

Combinando os Lemas 1.3 e 1.4, obtemos o importante

Teorema 1.1 (Espaços Nulos e Imagem)**.** *Sejam* $T \in K(E_1)$ *e* $\lambda \neq 0$. *Então, existe um menor inteiro r não-negativo (depende de* λ*) tal que*

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = ... \tag{1.6}$$

e

$$T_\lambda^r(E_1) = T_\lambda^{r+1}(E_1) = \cdots. \tag{1.7}$$

Além disso, se $r > 0$ *as seguintes inclusões são próprias*

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset ... \subset N(T_\lambda^r) \tag{1.8}$$

e

$$T_\lambda^0(E_1) \supset T_\lambda(E_1) \supset ... \supset T_\lambda^r(E_1). \tag{1.9}$$

Demonstração. O Lema 1.3 nos garante a igualdade (1.6) e a inclusão (1.8), enquanto o Lema 1.4 a igualdade (1.7) e a inclusão (1.9) com q no lugar de r. Resta então mostrar que $q = r$.

Para isso vamos dividir a prova em duas partes. Provaremos que $q \geq r$ e $q \leq r$. Façamos inicialmente que $q \geq r$. Por simplicidade vamos escrever $N_n = N(T_\lambda^n)$ e $R_n = T_\lambda^n(E_1)$.

Pelo Lema 1.4 temos que $R_{q+1} = R_q$. Isto significa que

$$T_\lambda(R_q) = R_q.$$

Portanto,

$$y \in R_q \Rightarrow y = T_\lambda(x)\ \forall x \in R_q. \tag{1.10}$$

Afirmamos que

$$T_\lambda(x) = 0,\ x \in R_q\ \Rightarrow x = 0. \tag{1.11}$$

Suponhamos por absurdo que isso não seja verdade. Então $T_\lambda(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in R_q$ com $x_1 \neq 0$. De (1.10) com $y = x_1$ temos que, $x_1 = T_\lambda(x_2)$ com $x_2 \in R_q$. Assim,

$$T_\lambda(T_\lambda x_2) = T_\lambda^2(x_2) = 0.$$

Como $x_2 \in R_q$, tem-se que $x_2 = T_\lambda(x_3)$. Similarmente, ao anterior $T_\lambda^3(x_3) = 0$ com $x_3 \neq 0$. Repetindo esse processo recursivamente obtemos que

$$0 \neq x_1 = T_\lambda(x_2) = T_\lambda^2(x_3) = ... = T_\lambda^{n-1}(x_n),$$

mas,

$$0 = T_\lambda(x_1) = T_\lambda^n(x_n). \tag{1.12}$$

Portanto, $x_n \notin N_{n-1}$ mas $x_n \in N_n$. Temos do Lema 1.3 que $N_{n-1} \subset N_n$ e nosso presente resultado mostra que esta inclusão é própria para todo n. Desde que n é arbitrário, isto contradiz o Lema 1.3, isso prova (1.11).

Pelo Lema 1.4 relembre que $R_{q+1} = R_q$, provamos que $N_{q+1} = N_q$ e pelo Lema 1.3 isso implica que $q \geq r$, pois r é o menor inteiro para qual temos a igualdade.

Pelo Corolário 1.1 nós temos que $N_{q+1} \supset N_q$. Vamos então provar que $N_{q+1} \subset N_q$, ou seja, $T_\lambda^{q+1}(x) = 0$ implica que $T_\lambda^q(x) = 0$. Suponhamos que isso não é verdade. Então, existe um x_0 tal que

$$y = T_\lambda^q(x_0) \neq 0, \quad \text{mas} \quad T_\lambda(y) = T_\lambda^{q+1}(x_0) = 0.$$

Portanto, $y \in R_q$, $y \neq 0$ e $T_\lambda y = 0$. Mas isso contradiz nossa afirmação (1.11). Logo, $N_{q+1} \subset N_q$. Assim, $N_{q+1} = N_q$ e $q \geq r$.
Provaremos agora que $q \leq r$. Se $q = 0$ isso vale pois r é um inteiro. Seja então $q \geq 1$. Mostraremos que N_{q-1} é subespaço próprio de N_q. Isso implica que $q \leq r$ visto que r é o menor inteiro n tal que $N_n = N_{n+1}$.

Pela definição de q no Lema 1.4 a inclusão $R_q \subset R_{q-1}$ é própria. Seja $y \in R_{q-1} \setminus R_q$. Então, $y \in R_{q-1}$, de modo que para algum x vale a igualdade

$$y = T_\lambda^{q-1}(x).$$

Além disso, para algum $z \in E_1$

$$T_\lambda(y) \in R_q = R_{q+1} \Rightarrow T_\lambda(y) = T_\lambda^{q+1}(z).$$

Desde que $T_\lambda(z) \in R_q$ mas $y \notin R_q$, nós temos que

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda(z)) = y - T_\lambda^q(z) \neq 0.$$

Portanto, $x - T_\lambda(z) \notin N_{q-1}$. Porém, $x - T_\lambda \in N_q$, pois

$$T_\lambda^q(x - T_\lambda(z)) = T_\lambda(y) - T_\lambda(y) = 0.$$

Isso prova que $N_{q-1} \neq N_q$, de modo que N_{q-1} é subespaço próprio de N_q. Daí, $q \leq r$ e portanto $q = r$.

□

Com estes Teoremas podemos definir os importantes conceitos de multiplicidade algébrica e geométrica de um operador $T \in K(E_1)$. Para isso, note que

$$N(I - \lambda T) = N(\mu I - T) \quad (\mu > 0), \tag{1.13}$$

onde $\lambda = 1/\mu$, isto é, λ é valor característico de $T \in K(E_1)$. Provemos que (1.13) ocorre, provaremos apenas a seguinte inclusão $N(\mu I - T) \subset N(I - \lambda T)$, pois a inclusão contrária é imediata. Seja $x \in N(\mu I - T)$ então,

$$\mu x - Tx = 0 \Rightarrow x - \lambda Tx = 0,$$

ou seja, $x \in N(I - \lambda T)$. Concluímos, assim, que (1.13) ocorre.

Mais precisamente, observe que o Teorema 1.1 nos garante que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(N(I - \lambda T)^k) = N(I - \lambda T)^r,$$

onde r, é o menor inteiro não-negativo dado pelo Teorema 1.1. Além disso, o Lema 1.1 nos, garante que

$$\dim \bigcup_{k=1}^{\infty}(N(I - \lambda T)^k) = \dim N(I - \lambda T)^r < \infty.$$

Definição 1.1. *Dado $T \in K(E_1)$ e $\lambda \neq 0$. Definimos a multiplicidade algébrica e geométrica de λ com respeito a T respectivamente, como sendo o número natural*

$$\mathbf{m}(\lambda, T) = \dim \bigcup_{k=1}^{\infty}(N(I - \lambda T)^k) = \dim N(I - \lambda T)^r, \text{ e } \mathbf{m}_g(\lambda, T) = \dim N(I - \lambda T).$$

Esse conceito aparecerá na fórmula do índice por linearização, conforme veremos na Seção 1.3.

1.2 Teoria do Grau

Nesta seção, faremos um breve resumo da Teoria do Grau em sua dimensão finita e infinita. Em termos mais específicos, abordaremos o Grau de Brower e o Grau de Leray Schauder. Os resultados desta seção serão apenas enunciados, e suas demonstrações serão referenciadas na bibliografia adequada. Está seção é baseada nos livros do Ambrosseti e Malchiodi [7] e do Kesavan [18].

Grau de Brouwer

Defini-se o seguinte conjunto admissível

$$\Gamma := \{(f,\Omega,y) : f \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ aberto limitado}, y \in \mathbb{R}^N, y \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Munidos desse conjunto pode-se provar o seguinte resultado.

Teorema 1.2. *Existe uma única aplicação $d_B : \Gamma \to \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(P_1) (Normalização): Se $y \in \Omega$, então $d_B(I,\Omega,y) = 1$.

(P_2) (Aditividade - Excisão) Se $\Omega_1,\Omega_2 \subset \Omega$ são abertos disjuntos e $y \notin f(\overline{\Omega}\setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$, então

$$d_B(f,\Omega,y) = d_B(f,\Omega_1,y) + d_B(f,\Omega_2,y).$$

(P_3) (Invariância do grau por homotopia) Se $h : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ são contínuas e $y(t) \notin h(t,\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$, então

$$d_B(h(t,.),\Omega,y(t)) = const. \quad \forall t \in [0,1].$$

Demonstração. Ver [18, Teorema 2.2.1, Proposição 2.2.2] □

Além disso, podemos enunciar algumas propriedades adicionais que o grau de Brouwer satisfaz.

Teorema 1.3.

(P_4) Se $d_B(f,\Omega,y) \neq 0$, então a equação $f(x) = y$, $x \in \Omega$, admite pelo menos uma solução.

(P_5) (O grau é localmente constante em f) Dado $(f,\Omega,y) \in \Gamma$, existe $r > 0$ tal que, para toda $\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi - f\| < r$, temos que $(\varphi,\Omega,y) \in \Gamma$ e

$$d_B(\varphi,\Omega,y) = d_B(f,\Omega,y).$$

(P_6) Se $y,z \in \mathbb{R}^N$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, então

$$d_B(f,\Omega,y) = d_B(f,\Omega,z).$$

(P_7) Se $(f,\Omega,y),(g,\Omega,y) \in \Gamma$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$, então

$$d_B(f,\Omega,y) = d_B(g,\Omega,y)$$

(P_8) Se $(f,\Omega,y) \in \Gamma$ e $\Omega_1 \subset \Omega$ é um aberto tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, então

$$d_B(f,\Omega,y) = d_B(f,\Omega_1,y).$$

(P_9) Se $(f,\Omega,y) \in \Gamma$, então

$$d_B(f,\Omega,y) = (f-y,\Omega,0).$$

Demonstração. Ver [18, Proposição 2.2.1, Proposição 2.1.4, Proposição 2.2.3] □

No que segue definiremos o *índice* de f relativo a x_0. Para tanto, observemos o seguinte: considere $(f,\Omega,y) \in \Gamma$ e $x_0 \in \Omega$ uma solução isolada da equação $f(x) = y$. Então, existe $r_0 > 0$ tal que

$$f(x) \neq y \qquad \forall x \in \overline{B_{r_0}(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Em particular, $y \notin f(\overline{B_{r_0}(x_0)} \setminus B_\varepsilon(x_0))$ para todo $0 < \varepsilon < r_0$. Portanto, pela propriedade (P_8) com $\Omega = B_{r_0}(x_0)$ e $\Omega_1 = B_\varepsilon(x_0)$, temos que

$$d_B(f,B_{r_0}(x_0),y) = d_B(f,B_\varepsilon(x_0),y).$$

Assim, para ε suficientemente pequeno, $d_B(f,B_\varepsilon(x_0),y)$ é constante. Com essas considerações, vale a seguinte definição.

Definição 1.2. *Sejam $(f,\Omega,y) \in \Gamma$ e $x_0 \in \Omega$ uma solução isolada de*

$$f(x) = y \qquad (x \in \Omega).$$

Definimos o índice de f relativo a x_0 como sendo

$$i(f,x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} d_B(f,B_\varepsilon(x_0),y)$$

Grau de Leray-Schauder

Queremos agora estender este conceito para espaços de dimensão infinita. Porém, está generalização não é possível. De fato, existe um exemplo, devido a Leray, mostrando que não existe nenhuma aplicação em $C([0,1])$ satisfazendo as propriedades $(P_1)-(P_3)$ (veja, por exemplo [17], página 172).

Todavia, restringindo o conjunto de funções consideradas podemos obter uma extensão deste conceito. Para o caso do grau de Leray-Schauder, vamos nos restringir às pertubações compactas da identidade. Precisamente, temos o seguinte:

Consideremos

$$\Gamma := \{(I-T,\Omega,y);\ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ aberto e limitado, } T:\overline{\Omega}\to E_1 \text{ contínuo e compacto,} \\ y\in E_1,\ y\notin (I-T)(\partial\Omega)\}.$$

Note agora que estamos buscando soluções da equação

$$x - T(x) = y \qquad (x\in\Omega).$$

É possível mostrarmos o seguinte resultado:

Teorema 1.4. *Existe uma única aplicação $d:\Gamma\to\mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

d_1) *(Normalização) Se $y\in\Omega$, então $d(I,\Omega,y)=1$.*

d_2) *(Aditividade - Excisão) Se $\Omega_1,\Omega_2\subset\Omega$ são abertos disjuntos e $y\notin (I-T)(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$, então*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(f,\Omega_2,y).$$

d_3) *(Invariância do grau por homotopia) Sejam $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ compacto e contínuo e $y(t)\notin (I-h)(t,\partial\Omega)$, para todo $t\in[0,1]$, então*

$$d(I-h(t,.),\Omega,y(t)) = const. \quad \forall t\in[0,1].$$

Demonstração. Ver [18, Teorema 3.3.1, Proposição 3.3.1, Proposição 3.3.2, Proposição 3.3.3] □

Esta aplicação é chamada Grau Topológico de Leray-Schauder de $I-T$ relativo a Ω e a y. Além disso, este grau satisfaz as seguintes propriedades adicionais.

Teorema 1.5.

d_4) Se $d(I-T,\Omega,y) \neq 0$, então a equação $x-T(x)=y$, $x \in \Omega$, admite pelos menos uma solução.

d_5) (O grau é localmente constante em T). Dado $(I-T,\Omega,y) \in \Gamma$, existe $r>0$ tal que, para toda $\varphi : \overline{\Omega} \to E_1$ contínua e compacta com $\|\varphi - T\|_{E_1} < r$, temos que $(I-\varphi,\Omega,y) \in \Gamma$ e

$$d(I-\varphi,\Omega,y) = d(I-T,\Omega,y).$$

d_6) Se $y,z \in E_1$ estão na mesma componente conexa de $E_1 \setminus (I-T)(\partial\Omega)$, então

$$d(I-T,\Omega,y) = d(I-T,\Omega,z).$$

d_7) Se $(I-T_1,\Omega,y),(I-T_2,\Omega,y) \in \Gamma$ e $T_1(x)=T_2(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$, então

$$d(I-T_1,\Omega,y) = d(I-T_2,\Omega,y).$$

d_8) Se $(I-T,\Omega,y) \in \Gamma$ e $\Omega_1 \subset \Omega$ é um aberto tal que $y \notin (I-T)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, então

$$d(I-T,\Omega,y) = d(I-T,\Omega_1,y).$$

Demonstração. Ver [18, Teorema 3.3.1, Proposição 3.3.1, Proposição 3.3.2, Proposição 3.3.3, Proposição 3.3.4] □

Definiremos agora o índice de uma solução isolada. Notemos que, para $(I-T,\Omega,y) \in \Gamma$ e $x_0 \in \Omega$ uma solução isolada da equação $x-T(x)=y$, existe $r_0>0$ tal que a equação

$$x-T(x) \neq y, \qquad \forall x \in \overline{B_{r_0}(x_0)} \setminus x_0,$$

Em particular, $y \notin (I-T)(\overline{B_r(x_0)} \setminus B_\varepsilon(x_0))$ para todo $0<\varepsilon<r_0$. Portanto, pela propriedade d_8), temos que

$$d(I-T,B_{r_0}(x_0),y) = d(I-T,B_\varepsilon(x_0),y).$$

Com essas considerações podemos apresentar a definição abaixo.

Definição 1.3. *Sejam $(I-T,\Omega,y) \in \Gamma$ e $x_0 \in \Omega$ uma solução isolada de*

$$x-T(x)=y.$$

Definimos o índice de T relativo a x_0 como sendo

$$i(I-T,x_0) := \lim_{\varepsilon\to 0} d(I-T,B_\varepsilon(x_0),y).$$

O Teorema abaixo, nos diz respeito a uma forma mais geral da invariância do grau por homotopia e será utilizado algumas vezes em demonstrações do capítulo seguinte. Como definimos no inicio do capítulo, para o Teorema abaixo considere

$$\Omega_\lambda = \{u \in E_1 : (\lambda,u) \in \Omega\}, \text{ para cada } \lambda \in [a,b] \text{ fixo.}$$

Note que em geral, vale que $\partial\Omega_\lambda \subset (\partial\Omega)_\lambda$. Considere, $h(\lambda,u) = u - T(\lambda,u)$ sendo $T(\lambda,\cdot)$ um operador compacto e $0 \notin h(\partial\Omega)$. Tal aplicação h é também chamada de uma homotopia admissível sobre Ω. Se h for admissível, então para todo $\lambda \in [a,b]$ e para todo $u \in \partial\Omega_\lambda$ tem-se que $h_\lambda(u) := h(\lambda,u) \neq 0$ e faz sentindo calcular o grau $d(h_\lambda,\Omega_\lambda,0)$.

Teorema 1.6 (Invariância Homotópica Generalizada)**.** *Se h é uma homotopia admissível sobre $\Omega \subset [a,b]\times E_1$ então*

$$d(h_\lambda,\Omega_\lambda,0) \equiv cte, \;\; \forall\lambda \in [a,b]$$

Demonstração. Ver [7, Teorema 4.1] □

É necessário que aprendamos a calcular o índice, visto que ele será crucial para os capítulos seguintes. Uma maneira é usar as propriedades do grau e fazer o cálculo pela definição. Outra forma de fazer isso é através da linearização, usando alguns teoremas, como mostra a seção seguinte.

1.3 Cálculo de Índice via Linearização

O propósito principal desta seção é demonstrar o Teorema 1.7, que fornece uma maneira de calcular o índice de certos operadores diferenciáveis. Para isso, provaremos três lemas técnicos e o teorema seguirá facilmente. A seção finalizará com uma proposição que relaciona o índice com os tipos de operadores que consideraremos no Capítulo 3. A seção é baseada no livro do Ambrosetti e Malchiodi [7].

Diante disso começamos com o seguinte lema:

Lema 1.5. *Seja $T \in C(E_1,E_1)$ compacto e diferenciável em x_0. Então $T'(x_0)$ é um operador linear compacto e, portanto existe apenas um número finito de valores característicos de $T'(x_0)$ contidos em (0,1) e cada um tem multiplicidade algébrica finita.*

Demonstração. Vamos assumir que T é diferenciável em 0 e que $T(0) = 0$, pois para o caso geral, poderíamos considerar,

$$F(x) = T(x_0 + x) - T(x_0),$$

e aplicar o argumento para F, pois

$$F'(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + x + th) - T(x_0 + x)}{t}$$

Tomando $x = 0$, segue que

$$F'(0)h = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + th) - T(x_0)}{t} = T'(x_0)h$$

Ou seja, $F'(0) = T'(x_0)$.

A prova do resultado será feita por contradição, ou seja, vamos supor que $T'(0)$ não é um operador compacto, e concluiremos que T não é compacta, uma contradição.

Suponhamos então que $T'(0)$ não é um operador compacto. Então existe uma sequência (x_n) limitada para qual $T'(0)x_n$ não possui subsequência convergente em E_1. A menos de multiplicação por uma constante vamos assumir que $\|x_n\| \leq 1$, pois como x_n é limitada, temos que existe $M > 0$ tal que,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \left\| \frac{x_n}{M} \right\| \leq 1.$$

Assim, tomando $y_n = x_n/M$ tem-se que $T'(0)y_n$ não possui subsequência convergente.

Como E_1 é completo, então $(T'(0)x_n)$ não possui subsequência de Cauchy em E_1, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que,

$$\left\| T'(0)x_n - T'(0)x_m \right\| \geq \varepsilon, \;\; n \neq m. \tag{1.14}$$

Como estamos supondo T diferenciável em 0, segue da definição da diferenciabilidade de Fréchet em $x_0 = 0$ que

$$T(x_0) = T'(0)x + R(x), \tag{1.15}$$

onde $R(x)/\|x\| \to 0$ quando $\|x\| \to 0$. Assim, dado $\varepsilon/3 > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|R(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \|x\|.$$

Ora, se $\|x\| < \delta$, temos que

$$\left\|T(x) - T'(0)x\right\| = \|R(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}\|x\|. \tag{1.16}$$

Afirmamos que $(T(\delta x_n))$ não possui subsequência de Cauchy. De fato, para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned}
\|T(\delta x_n) - T(\delta x_m)\| &= \left\|T^{'}(0)(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_m) + (T(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_n))\right.\\
&+ \left.(-T(\delta x_m) + T^{'}(0)(\delta x_m))\right\|\\
&\geq \left\|T'(0)(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_m)\right\| - \left\|T(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_n)\right\|\\
&- \left\|T(\delta x_m) + T'(0)(\delta x_m)\right\|\\
&\geq \delta\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}\|\delta x_n\| - \frac{\varepsilon}{3}\|\delta x_m\| = \delta\varepsilon - \frac{\varepsilon\delta}{3}\|x_n\| - \frac{\varepsilon\delta}{3}\|x_m\|\\
&\geq \varepsilon\delta - \frac{\delta\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon\delta}{3}\\
&= \frac{\varepsilon\delta}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, $(T(\delta x_n))$ não possui subsequência convergente. Logo, T não é compacta, o que é uma contradição.

Agora, vamos provar que o número de valores característicos de $T'(0)$ no intervalo $(0,1)$ é finito e cada um tem multiplicidade finita. Com efeito, sabemos que $\mu \in (0,1)$ é valor característico de $T'(0)$ se, somente se, $\mu^{-1} > 1$ é autovalor de $T'(0)$. Porém, como $T'(0)$ é operador compacto segue do Lema A.3 que há apenas uma quantidade finita de autovalores de $T'(0)$. Além disso, segue dos teoremas da Seção 1 que a multiplicidade algébrica é finita. □

O resultado abaixo nos diz que dado um operador compacto sobre algumas premissas, o índice de $I - T$ estará bem definido.

Lema 1.6. *Sejam $T \in C^1(\overline{D}, E_1)$ um operador compacto, $F(x) = x - T(x)$, $x_0 \in E_1$ e $F(x_0) = p$. Suponha que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$. Então temos que*

$$i(F, x_0) = d(F'(x_0), B_r(x_0), p) \quad r \ll 1.$$

Demonstração. Com argumentos semelhantes ao lema anterior, basta mostrar o resultado para $x_0 = 0$ e $p = 0$. Com efeito, como T é diferenciável, pela definição da diferencial de Fréchet, segue que

$$T(x) - T'(0)(x) = \mathcal{X}(x),$$

com $\mathcal{X}(x)/\|x\| \to 0$ quando $\|x\| \to 0$. Como $F(x) = x - T(x)$, então $F'(0)(x) = x - T'(0)(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \mathcal{X}(x) - T'(0)x = x - x + F'(0)(x) - \mathcal{X}(x) \\ F(x) &= F'(0)(x) + R(x), \end{aligned}$$

onde $R(x) = -\mathcal{X}(x)$ com $R(x)/\|x\| \to 0$ quando $\|x\| \to 0$. Note ainda que

$$\begin{aligned} R(x) &= F(x) - F'(0)(x) = x - T(x) - F'(0)(x) \\ \Rightarrow R(x) &= T'(0)(x) - T(x). \end{aligned}$$

Considere, agora, a seguinte homotopia $h : [0,1] \times E_1 \to E_1$ dada por

$$h(\lambda, u) = x - T'(0)(x) + \lambda R(x). \tag{1.17}$$

É claro que h é um operador pertubação compacta da identidade, pois R como acima é a diferença de operadores compactos.

Provaremos que existe $r_0 > 0$ tal que $0 \notin h(\partial B_r(0))$, para todo $0 < r < r_0$. Suponhamos, por contradição, que não exista tal $r > 0$. Logo, para todo $r > 0$, h não é admissível em $D = B_r(0)$. Em particular para $r = 1/n$, existe uma uma sequência $(\lambda_n, x_n) \in [0,1] \times \partial B_{1/n}(0)$ tal que

$$h(\lambda_n, x_n) = x_n - T'(0)(x_n) + \lambda_n R(x_n) = 0 \tag{1.18}$$

e $x_n \to 0$ em E_1. Seja $z_n = x_n/\|x_n\|$. É claro que z_n é limitada. Além disso, substituindo $x_n = z_n \|x_n\|$ em (1.18) obtemos que

$$\begin{aligned} z_n \|x_n\| - T'(0)(z_n \|x_n\|) + \lambda_n R(x_n) &= 0 \\ \Rightarrow z_n \|x_n\| &= T'(0)(z_n \|x_n\|) - \lambda_n R(x_n) \\ \Rightarrow z_n &= T^{'}(0) z_n - \lambda_n \frac{R(x_n)}{\|x_n\|}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Agora note que como λ_n é limitada e $R(x_n)/\|x_n\| \to 0$, segue que $\lambda_n R(x_n)/\|x_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, como z_n é uma sequência limitada e $T'(0)$ é um operador compacto, z_n possui subsequência que converge, digamos $z_n \to z$ em E_1. Além disso, temos que $\|z\| = 1$.

Assim, fazendo $n \to \infty$ em (1.19), obtemos

$$z = T'(0)(z) \qquad z \neq 0.$$

Ou seja, 1 é valor característico de $T^{'}(0)$ contrariando nossa hipótese. Portanto, como 0 é uma solução isolada da homotopia, segue da invariância homotópica do grau que

$$\begin{aligned} d(F,D,0) &= d(h(1,.),D,0) \\ &= d(h(0,.),B_r(0),0) \\ &= d(F'(0),B_r(0),0) \quad r \ll 1. \end{aligned}$$

Como provamos acima 0 é solução isolada, segue que

$$i(F,0) = d(F'(0),B_r(0),0).$$

□

O último lema que necessitamos é o seguinte

Lema 1.7. *Seja $T \in K(E_1)$ e suponha que 1 não é valor característico de T. Então*

$$d(I-T,B_r(0),0) = (-1)^{\beta} \quad \forall r > 0, \tag{1.20}$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de T em $(0,1)$.

Demonstração. Para cada valor característico μ_i de T temos por definição de multiplicidade algébrica que

$$\mathbf{m}(\mu_i,T) = \dim \bigcup_{m=1}^{\infty} (N(I-\mu_i T)^m).$$

Denote $q_i = \mathbf{m}(\mu_i,T)$. Sendo T compacto, existe apenas um número finito de valore característicos de T no intervalo $(0,1)$ (veja Lema A.3). Denotemos por μ_i, $1 \leq i \leq k$ tais valores, dois a dois distintos. Defina,

$$N = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i.$$

Então $\dim N = q_1 + q_2 + ... + q_k = \beta$. Caso T não possua valores característicos em $(0,1)$, temos que $N = \emptyset$ e, neste caso, $\beta = 0$.

Seja agora W tal que $E_1 = N \oplus W$ e $P, Q : E_1 \to E_1$ as projeções sobre N e W, respectivamente. Consideremos a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times E_1 &\to E_1 \\ (\lambda, x) &\mapsto h(\lambda, x) = x - T[Px] - \lambda T[Qx]. \end{aligned}$$

Notemos que $h(0,x) = x - T[Px]$ e $h(1,x) = x - T[Px + Qx]$. Para cada λ, temos que h é uma aplicação pertubação compacta da identidade, pois P e Q são aplicações continuas.Assim, segue que TP e TQ são compactos.

Afirmamos que h é admissível. De fato, suponhamos por contradição que existam $r > 0$ e (λ, x) tais que $h(\lambda, x) = 0$, com $\lambda \in [0,1]$ e $\|x\| = r$. Como $E = N \oplus W$ e P e Q são as projeções de N e W, respectivamente, então podemos escrever $x = x_N + x_W$. Daí, temos que

$$x_N - T[Px] = \lambda T[Qx] - x_W.$$

Que pode ser reescrito da seguinte forma

$$P(x) - T[Px] = \lambda T[Qx] - Q(x), \;\; Q(x) = x_W, \; P(x) = x_N.$$

Como $P(x) - T[Px] \in N$ e $\lambda T[Qx] - Q(x) \in W$, (pois N, W são invariantes por T) e $N \cap W = \{0\}$, segue que

$$\begin{cases} P(x) - T[Px] = 0 \\ \lambda T[Q(x)] - Q(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = T[P(x)] \\ Q(x) = \lambda T[Q(x)] \end{cases}. \tag{1.21}$$

Por outro lado, como 1 não é valor característico de T, e $P(x) = T[P(x)]$, segue que $x_N = P(x) = 0$. Assim, $Q(x) = x_W$, pois $x = x_N + x_W$. Como $x_N = 0$ então $x = x_W = Q(x)$. Consequentemente, de (1.21) obtemos que

$$x = \lambda T x \Leftrightarrow x - \lambda T x = 0.$$

Além disso,

$$r = \|x\| = \lambda \|Tx\| \leq \lambda \|T\| \|x\| = \lambda \|T\| r \quad\; r > 0.$$

Assim, $1 \leq \lambda \|T\|$.

É claro que $\lambda \neq 0$, pois caso contrário $1 \leq 0$, absurdo. Além disso, $\lambda \neq 1$, pois se $\lambda = 1$, temos que $Tx = x$, e isso implica que $x = 0$, pois 1 não é autovalor, mas isto é um absurdo, visto que $x \neq 0$. Portanto, $\lambda \in (0,1)$. Logo, para algum i temos que $\lambda = \mu_i$ e, assim $x \in N$, contradizendo o fato de $x = Q(x) \in W$. Deste modo, h é admissível. Assim, pela propriedade da invariância homotópica do grau, obtemos que

$$d(I-T, B_r(0), 0) = d(I-TP, B_r(0), 0). \tag{1.22}$$

Agora, como $TP(E) = T(N) \subset N$ tem posto finito, segue da definição de grau para aplicações do tipo $\phi = x - \psi(x)$ com ψ de posto finito que

$$d(I-TP, B_r(0), 0) = d_B((I-TP)\mid_N, N \cap B_r(0), 0). \tag{1.23}$$

Afirmamos que $\mu \in (0,1)$ é valor característico de T se, e somente se, $\lambda = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$ é autovalor negativo de $(I-T)$. De fato, suponhamos que μ é valor característico de T, então existe $x \neq 0$ tal que $x = \mu T(X)$. Daí,

$$x - T(x) = \mu T(x) - T(x) \Rightarrow (I-T)(x) = (\mu - 1)T(x).$$

Como $\mu \neq 0$, temos que $x/\mu = T(x)$. Logo,

$$(I-T)(x) = \frac{\mu - 1}{\mu} x,$$

mostrando assim uma implicação.
Suponhamos agora que λ é autovalor negativo de $I-T$. Assim, existe $x \in E \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{aligned} (I-T)(x) = \lambda x \Rightarrow x(1-\lambda) &= Tx \\ x\left(\frac{1}{\mu}\right) &= Tx. \end{aligned}$$

Ou seja, μ^{-1} é autovalor de T, isto é, μ é valor característico de T. Desta maneira, β é também a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores negativos de $(I-T)'(0) = I-T$ em N.

Como 1 não é valor característico de T, então não é autovalor de T. Deste modo, $I-T\mid_N$ é injetiva. Portanto, $(I-T)\mid_N : N \to N$ é sobrejetora. Assim, 0 é valor regular de $I-T$ em N. Por outro lado, como $(I-T)\mid_N = (I-TP)\mid_N$ segue que

$$d_B((I-TP)\mid_N, N \cap B_r(0), 0) = (-1)^\beta = i(I-TP, 0).$$

Além disso, de (1.22) e (1.23) obtemos

$$i(h,0) = d(I-T,B_r(0),0) = (-1)^{\beta},$$

como queríamos demonstrar. □

Com os lemas anteriores, estamos prontos para provar o seguinte resultado.

Teorema 1.7. *Seja $T \in C^1(\overline{D},E_1)$ um operador compacto tal que* 1 *não seja valor característico de $T'(x_0)$ para algum $x_0 \in D$. Definindo*

$$F(x) = x - T(x) \;\; e \;\; F(x_0) = p.$$

Então x_0 é uma solução isolada de $F(x) = p$ e vale que

$$i(F,x_0) = (-1)^{\beta},$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T'(x_0)$ contidos em $(0,1)$.

Demonstração. Notemos que pelos Lemas 1.6 e 1.7, para $r \ll 1$, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} i(F,x_0) &= d(F'(x_0),B_r(x_0),0) \\ &= d(I-T'(x_0),B_r(x_0),0) \\ i(F,x_0) &= (-1)^{\beta}. \end{aligned}$$

E o resultado segue. □

A proposição abaixo também será crucial para o capítulo seguinte, pois relaciona o índice com os certos tipos de operadores que utilizaremos mais adiante.

Proposição 1.1. *Seja $F : J \times E_1 \to E_1$ um operador contínuo da forma*

$$F(\lambda,u) \;\; = \;\; L(\lambda)u + H(\lambda,u)$$

onde $L(\lambda) = I - \lambda T$ é compacto, com $T \in K(E_1)$ e $H(\lambda,u) = o(\|u\|)$, quando $u \to 0$, uniformemente em intervalos compactos de J. Suponha que $F(\lambda,0) = 0$ para todo λ. Denotando $\mathcal{T}(\lambda,u) = \lambda Tu - H(\lambda,u)$, então $i(I-\lambda T,0)$ e $i(I-\mathcal{T}(\lambda,u),0)$ estão bem definidos quando

λ não é autovalor de T e, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} i(I-\lambda T,0) &= d(I-\lambda T,B_r(0),0) \\ &= d(I-\mathcal{T}(\lambda,\cdot),B_r(0),0) \\ &= d(F(\lambda,.),B_r(0),0) \\ &= i(I-\mathcal{T}(\lambda,\cdot),0) \end{aligned}$$

para $r>0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Com efeito, defina a seguinte homotopia $h:[0,1]\times B_r(0)\to E_1$ dada por

$$h(t,u)=I-\lambda Tu+tH(\lambda,u), \quad \forall\, t \;\in\; [0,1],$$

onde λ não é autovalor da pertubação compacta da identidade $I-\lambda T$. Provaremos que existe $r_0>0$ tal que $0\notin h(t,.)(\partial B_r(0))$, para todo $0<r<r_0$. De fato caso contrário, para $r=1/n$ com $n\geq 1$, existe $t_n\in[0,1]$ tal que

$$0\in(h(t_n,.)(\partial B_{\frac{1}{n}}(0)).$$

Então, existe $u_n\in E$, com $\|u_n\|=1/n$ e,

$$h(t_n,u_n)=0,$$

isto é,

$$u_n-\lambda Tu_n=-t_nH(\lambda,u_n).$$

Uma vez que λ não é autovalor de $I-\lambda T$ e este é um operador pertubação compacta da identidade, segue que $I-\lambda T$ é um isomorfismo. Assim, podemos escrever a igualdade acima, da seguinte maneira

$$u_n=(I-\lambda T)^{-1}(-t_nH(\lambda,u_n)).$$

Consequentemente, das propriedades dos operados lineares limitados

$$\|u_n\|\leq\left\|(I-\lambda T)^{-1}\right\|\|H(\lambda,u_n)\|.$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|$ tem-se que

$$1 \leq \left\|(I-\lambda T)^{-1}\right\| \frac{\|H(\lambda, u_n)\|}{\|u_n\|}.$$

E passando a desigualdade acima ao limite, obtemos que $1 \leq 0$ pois,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H(\lambda, u_n)}{\|u_n\|} = 0,$$

o que é um absurdo. Assim, está bem definido o grau $d(h(t,.), B_r(0), 0)$ para $0 < r < r_0$ e pela invariância homotópica do grau,

$$\begin{aligned} d(h(1,.), B_r(0), 0) &= d(I - h(0,.), B_r(0), 0) \\ d(I - \mathcal{T}(\lambda, \cdot), B_r(0), 0) &= d(I - \lambda T), B_r(0), 0). \end{aligned}$$

Como 0 é solução isolada de $u - h(t,u) = 0$, este grau coincide com índice e o resultado segue.

□

Capítulo 2

Bifurcação Global de Rabinowitz

Neste capítulo, apresentaremos e demonstraremos alguns resultados da Teoria de Bifurcação que serão usados como ferramentas para este trabalho. O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o resultado da bifurcação de Rabinowitz que será usado amplamente utilizado no Capítulo 3. Este capítulo é baseado no livro do Lopéz-Goméz [21] e nos artigos de Rabnowitz [24] e Dancer [14].

Ao longo deste capítulo vamos considerar o seguinte:

- E_1, E_2 serão espaços de Banach reais.
- $K(E_1)$ denotará o espaço dos operadores lineares, limitados e compactos de E_1 em E_1.
- I é operador identidade de E_1 em E_1.
- $L(\lambda) = I - \lambda T$ com $T \in K(E_1)$, ou seja, $L(\lambda)$ é um operador pertubação compacta da identidade.
- Vamos denotar por Σ o conjunto dos autovalores de $L(\lambda)$, isto é,

  $$\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{R} : \dim N[L(\lambda)] \geq 1\}.$$

  Destacamos as seguintes propriedades deste conjunto:

  1. $0 \notin \Sigma$ pois, $\dim N[L(0)] = \dim N[I] = 0$.
  2. Σ coincide com o conjunto dos valores característicos de T.
  3. Pelo Lema A.3, Σ é discreto.

Com as notações acima, iniciaremos este capítulo definindo o que é um ponto de bifurcação. Para isso consideremos $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e um operador não linear abstrato

$$F : J \times E_1 \to E_2.$$

Consideremos também a seguinte equação não linear associada

$$F(\lambda, u) = 0. \tag{2.1}$$

Suponhamos que $(\lambda, 0) \in J \times E_1$ é uma solução da equação acima para todo $\lambda \in J$, ou seja,

$(\mathbf{H_1})$ $F(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in J.$

Desta forma, iremos nos referir a esta solução como a solução trivial, uma vez que ela já é conhecida. A ideia da bifurcação é encontrar soluções a partir de uma curva de soluções conhecidas e que no caso são as soluções da forma $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Com estas considerações, nós temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Seja $\lambda_0 \in J$. Dizemos que $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação de $F(\lambda, u) = 0$ da curva de soluções triviais, se existe uma sequência*

$$(\lambda_n, u_n) \in J \times E_1 \setminus \{0\},$$

onde $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda_0, 0) \ \ \text{em } J \times E_1$$

e

$$F(\lambda_n, u_n) = 0,$$

para todo $n \geq 1$.

Observação 2.1. Note que na definição de ponto de bifurcação não implica que exista uma curva de soluções.

Daqui em diante, neste capítulo, iremos considerar $E = E_1 = E_2$ e uma equação não linear da seguinte forma

$(\mathbf{H_2})$ $F(\lambda, u) = L(\lambda)u + H(\lambda, u) = 0,$

onde

$$H : J \times E \to E,$$

é um operador compacto sobre subconjuntos limitados tal que

$$H(\lambda, u) = o(\|u\|_E),$$

quando $u \to 0$, uniformemente em qualquer intervalo compacto de J.

Estamos interessados em estudar o seguinte conjunto

$$S = \{(\lambda, u) \in J \times E \setminus \{0\} : F(\lambda, u) = 0\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\}.$$

Note que este é o conjunto das soluções não triviais da equação (2.1) unido com os possíveis pontos de bifurcação (conforme constataremos no lema abaixo). Munidos desta notação, perceba que $(\lambda_0, 0)$ é ponto de bifurcação da solução trivial, se

$$(\lambda_0, 0) \in \overline{S}.$$

Queremos buscar um *continuum* do conjunto das soluções não triviais de (2.1), onde a definição de continuum segue abaixo:

Definição 2.2. *Um continuum $\mathfrak{C} \subset S$ de soluções não triviais de $F(\lambda, u) = 0$ é um subconjunto fechado e conexo (na topologia $J \times E$). Quando este continuum for maximal para inclusão, isto é, se não for um subconjunto próprio de nenhum outro subconjunto fechado e conexo do conjuntos de soluções não triviais o chamaremos de componente.*

Com base nas observações apresentadas acima, podemos enunciar e demonstrar o resultado abaixo, que nos fornece uma condição necessária para que um ponto seja ponto de bifurcação. Porém, tal condição não é suficiente.

Lema 2.1. *Se $\mu \notin \Sigma$, então existe $\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0$ tal que*

$$B_\varepsilon(\mu, 0) \cap S = \emptyset, \tag{2.2}$$

onde $B_\varepsilon(\mu, 0) = \{(\lambda, u) \in J \times E : \mid \lambda - \mu \mid < \varepsilon, \|u\| < \varepsilon\}$. Em particular $(\mu, 0)$ não pode ser ponto de bifurcação.

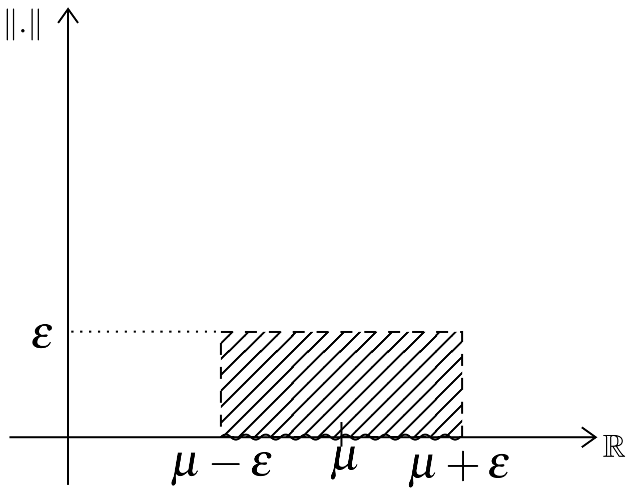

Figura 2.1 Figura da $B_\varepsilon(\mu,0)$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que não exista tal ε. Então, para $\varepsilon = 1/n$, $n \geq 1$, existe $(\lambda_n, u_n) \in B_{1/n}(\mu,0) \cap S$. Como $(\lambda_n, u_n) \in B_{1/n}(\mu,0)$, por definição temos que

$$| \lambda_n - \mu |< \frac{1}{n}. \tag{2.3}$$

Então, $\lambda_n \to \mu$ quando $n \to \infty$. Além disso, $\|u_n\| < 1/n$ e novamente fazendo $n \to \infty$, obtemos que $u_n \to 0$ em E. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_n) = (\mu,0). \tag{2.4}$$

Por outro lado, $(\lambda_n, u_n) \in S$, então $F(\lambda_n, u_n) = 0$ *e* $u_n \neq 0$. Pela hipótese $(\mathbf{H_2})$, segue que

$$\begin{aligned} L(\lambda_n)u_n + H(\lambda_n, u_n) &= 0 \\ (L(\lambda_n) - L(\mu))u_n + H(\lambda_n, u_n) &= -L(\mu)u_n. \end{aligned}$$

Como $\mu \notin \Sigma$ tem-se que $L(\mu)$ é injetivo e, pela Alternativa de Fredholm (Teorema A.3), segue que $L(\mu)$ é bijeção. Assim,

$$\begin{aligned} L^{-1}(\mu)[(L(\lambda_n) - L(\mu))u_n + H(\lambda_n, u_n)] &= -u_n \\ \frac{L^{-1}(\mu)[(L(\lambda_n) - L(\mu))u_n + H(\lambda_n, u_n)]}{\| u_n \|} &= \frac{-u_n}{\| u_n \|} \\ \left\| \frac{L^{-1}(\mu)[(L(\lambda_n) - L(\mu))u_n + H((\lambda_n), u_n)]}{\| u_n \|} \right\| &= \left\| \frac{-u_n}{\| u_n \|} \right\| = 1. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de operadores lineares limitados e a desigualdade triangular da norma, obtemos que

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \frac{\left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|(L(\lambda_n) - L(\mu))u_n + H(\lambda_n, u_n)\|}{\|u_n\|} \\
1 &\leq \frac{\left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|(L(\lambda_n) - L(\mu))\| \|u_n\|}{\|u_n\|} + \frac{\left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|H(\lambda_n), u_n)\|}{\|u_n\|} \\
1 &\leq \left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|(L(\lambda_n) - L(\mu))\| + \frac{\left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|H(\lambda_n, u_n)\|}{\|u_n\|}. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Desde que $L^{-1}(\mu)$ é limitado e da hipótese que $H(\lambda, u)/\|u\| \to 0$ quando $\|u\| \to 0$, temos que

$$\frac{\left\|L^{-1}(\mu)\right\| \|H(\lambda_n, u_n)\|}{\|u_n\|} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\|L(\lambda_n) - L(\mu)\| = \|I - \lambda_n T - I + \mu T\| = |(\mu - \lambda_n)| \, \|T\| \to 0\ , \ \text{ quando } n \to \infty$$

Portanto, quando fazemos $n \to \infty$ na desigualdade (2.5), obtemos que $1 \leq 0$, absurdo.

$\square$

Como consequência do Lema acima, segue o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *$S = \{(\lambda, u) \in J \times E \setminus \{0\} : F(\lambda, u) = 0\} \cup \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\}$ é um subconjunto fechado de $J \times E$*

Demonstração. Por definição

$$S = F^{-1}(0) \setminus \{(\lambda, 0) : \lambda \in J \setminus \Sigma\}.$$

Como F é contínua, $F^{-1}(0)$ é um conjunto fechado. Além disso, pelo lema anterior

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in J \setminus \Sigma\},$$

é aberto em $(J \times E) \setminus S$. Portanto, S é fechado. $\square$

Como é demonstrado no resultado abaixo, uma mudança de índice fornece um ponto de bifurcação para um continuum de soluções não triviais, ou seja, temos uma condição suficiente para termos um ponto de bifurcação.

Teorema 2.1. *Se existem $a_1, b_1 \in J$ com $a_1 < b_1$, e $a_1, b_1 \notin \Sigma$, tais que:*

(i) $(a_1, b_1) \cap \Sigma = \{\lambda_0\}$,

(ii) $i(I - a_1 T, 0) \neq i(I - b_1 T, 0)$.

Então, $(\lambda_0, 0)$ *é ponto de bifurcação da solução trivial de* $F(\lambda, u) = 0$*. Além disso, existe* $\eta_0 > 0$ *com a seguinte propriedade: para todo* $\eta \in (0, \eta_0)$*, existe um continuum* $\mathfrak{C} \subset S$ *conectando o ponto de bifurcação* $(\lambda_0, 0)$ *com a superfície* $\|u\| = \eta$*.*

Demonstração. Seja $\eta > 0$ e consideremos o cilindro fechado

$$Q_\eta = \{(\lambda, u) \in [a_1, b_1] \times E : \|u\| \leq \eta\}.$$

(Veja um esboço do conjunto acima na figura 2.2).

Observe que $\partial Q_\eta = \{(\lambda, u), \lambda \in [a_1, b_1], \|u\| = \eta\} \cup \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1$, onde

$$\mathfrak{A}_1 = \{(a_1, u), \|u\| \leq \eta\}, \quad \mathfrak{B}_1 = \{(b_1, u), \|u\| \leq \eta\}.$$

Como $a_1, b_1 \notin \Sigma$, pelo Lema 2.1, exitem $\varepsilon > 0$ e η_0 tais que

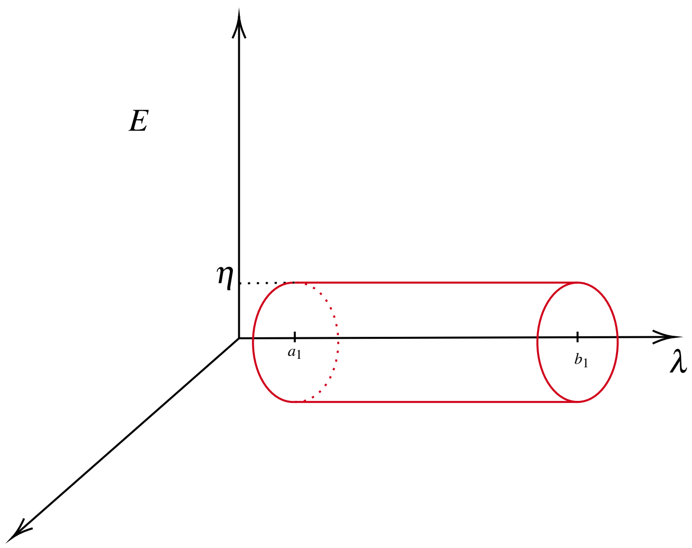

Figura 2.2 Cilindro Q_η.

$$(\lambda, u) \in Q_{\eta_0} \cap S \Rightarrow a_1 + \varepsilon < \lambda < b_1 - \varepsilon. \tag{2.6}$$

Em particular

$$\mathfrak{A}_1 \cap S = \emptyset = \mathfrak{B}_1 \cap S \tag{2.7}$$

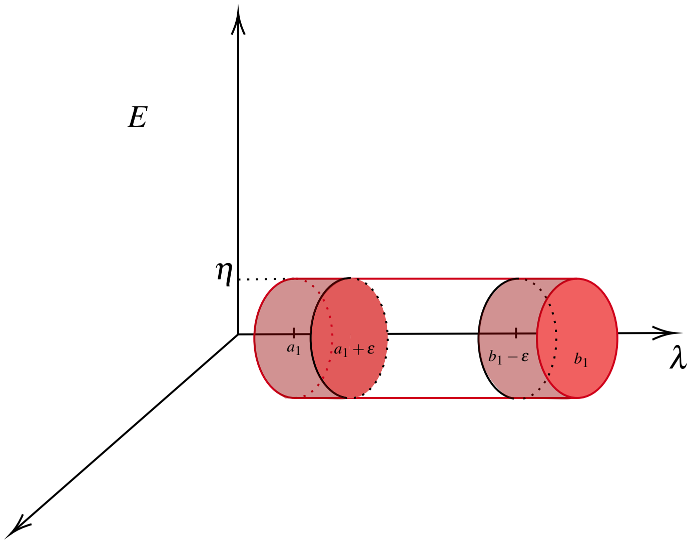

Figura 2.3 Ideia geométrica da condição (2.6). S não intercepta a região em vermelho.

A primeira parte da demonstração consistirá em provar que λ_0 é ponto de bifurcação. Para isso procedemos como segue:

Afirmamos que, para cada $\eta \in (0,\eta_0)$, $\partial Q_\eta \cap S \neq \emptyset$. Com efeito, caso contrário, existiria $\eta \in (0,\eta_0)$ tal que

$$\partial Q_\eta \cap S = \emptyset. \tag{2.8}$$

Porém, de acordo com a expressão (2.6), 0 é solução isolada de

$$F(a_1,u) = 0$$

ou seja, $u = 0$ é a única solução desta equação para $\|u\| < \eta_0$. Donde segue que

$$i(F(a_1,\cdot),0) = d(F(a_1,\cdot),B_\eta(0),0) \quad \eta \in (0,\eta_0). \tag{2.9}$$

Analogamente,

$$i(F(b_1,\cdot),0) = d(F(b_1,.),B_\eta(0),0) \quad \eta \in (0,\eta_0). \tag{2.10}$$

Por outro lado, definindo a seguinte homotopia $h : [0,1] \times B_\eta(0) \to E$ dada por

$$h(t,u) = F((a_1(1-t)+b_1 t),u),$$

temos que h é uma pertubação compacta da identidade. Além disso, pela equação (2.8), $0 \notin h(t, \partial B_\eta(0))$ para todo $t \in [0,1]$. De fato, caso contrário, existiriam u tal que $\|u\| = \eta$ e $\bar{t}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} h(\bar{t}, u) &= F(a_1(1-\bar{t}) + b_1\bar{t}, u) \\ &= u - a_1(1-\bar{t}) + b_1\bar{t}Tu + H(a_1(1-\bar{t}) + b_1\bar{t}, u) = 0, \end{aligned}$$

isto é, $(a_1(1-\bar{t}) + b_1\bar{t}, u) \in S$. Portanto, $(a_1(1-\bar{t}) + b_1\bar{t}, u) \in \partial Q_\eta \cap S$, o que é uma contradição com (2.8). Assim, $d(h(t,.), B_\eta(0), 0)$ está bem definido e, pela invariância homotópica do grau, segue que

$$d(F(a_1,.), B_\eta(0), 0) = d(F(b_1, 0), B_\eta(0), 0).$$

Então, por (2.9) e (2.10), concluímos que

$$i(F(a_1, \cdot), 0) = i(F(b_1, \cdot), 0).$$

Pela Proposição 1.1 segue que

$$i(I - a_1T, 0) = i(I - b_1T, 0),$$

contradizendo nossa hipótese. Logo,

$$\partial Q_\eta \cap S \neq \emptyset \;\; \forall \eta \in (0, \eta_0).$$

Assim, tomando uma sequência $\eta_n \in (0, \eta_0)$ com $\eta_n \to 0$, quando $n \to +\infty$, existirá

$$(\lambda_n, u_n) \in \partial Q_{\eta_n} \cap S,$$

tendo em vista a expressão de ∂Q_η e (2.7), segue que $\|u_n\| = \eta_n$. Além disso, como $\lambda_n \in [a_1, b_1]$, a menos de subsequência, $\lambda_n \to \overline{\lambda} \in [a_1, b_1]$ quando $n \to \infty$. Segue então que

$$(\lambda_n, u_n) \to (\overline{\lambda}, 0) \;\; \text{em} \;\; [a_1, b_1] \times E,$$

com $F(\lambda_n, u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(\overline{\lambda}, 0)$ é ponto de bifurcação a partir da solução trivial. Pelo Lema 2.1, $\overline{\lambda} \in [a_1, b_1]$ verifica $\overline{\lambda} \in \Sigma$, como $\Sigma \cap [a_1, b_1] = \{\lambda_0\}$, segue que $\overline{\lambda} = \lambda_0$. E assim, finalizamos a primeira parte da demonstração.

Queremos agora mostrar a segunda parte do teorema, ou seja, que existem um continuum conectando a superfície $\|u\| = \eta$ e o ponto de bifurcação $\{(\lambda_0, 0)\}$, para qualquer $\eta \in (0, \eta_0)$.

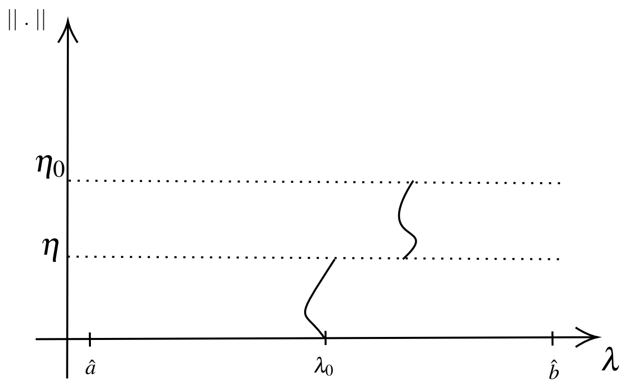

Figura 2.4 Situação que não pode ocorrer sob as hipóteses do Teorema 2.1.

Com efeito, fixado $\eta \in (0, \eta_0)$ defina $M = Q_\eta \cap S$. Note que M é fechado e limitado. Além disso, segue da compacidade da aplicação $(\lambda, u) \mapsto \lambda T(\lambda, u) - H(\lambda, u)$ que M é compacto. De fato, seja $(\lambda_n, u_n) \in M$, assim $\lambda_n \in [a_1, b_1]$ e $\|u_n\| \leq \eta$. Todavia, (λ_n, u_n) também verifica $F(\lambda_n, u_n) = 0$ para todo n, isso implica que $u_n = \lambda_n T u_n - H(\lambda_n, u_n)$. Como T e H são compactos, u_n converge a menos de subsequência, digamos $u_n \to u$. Por outro lado, como $\lambda_n \in [a_1, b_1]$ temos que a menos de subsequência $\lambda_n \to \lambda$. Desta forma, da continuidade de T e H temos que

$$u_n = \lambda_n T u_n - H(\lambda_n, u_n) \to u = \lambda T u - H(\lambda, u), \quad \|u\| \leq \eta \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, $F(\lambda, u) = 0$ e $(\lambda, u) \in M$ o que mostra a compacidade de M. Consideremos agora os seguintes conjuntos,

$$A = \{(\lambda, u) \in M : \|u\| = \eta\} \text{ e } B = \{(\lambda, 0) \in M : \lambda \in \Sigma\} = \{(\lambda_0, 0)\}.$$

Já sabemos da primeira parte da demonstração deste teorema que tais conjuntos são não vazios, disjuntos e compactos de M. Para completar a prova, devemos mostrar que existe um continuum de M conectando A e B, para isso argumentaremos por contradição.

Suponhamos por contradição que A e B não podem ser conectados por nenhum subcontinuum de M. Pela Proposição A.1, devem existir $\mathbf{M_A}, \mathbf{M_B} \subset M$ compactos tais que $dist(\mathbf{M_A}, \mathbf{M_B}) > 0$, com $A \subset \mathbf{M_A}$, $B \subset \mathbf{M_B}$ e $M = \mathbf{M_A} \cup \mathbf{M_B}$.

Desde que $dist(\mathbf{M_A},\mathbf{M_B}) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que ,

$$\mathbf{M_B^\delta} := \mathbf{M_B} + B_\delta(0,0),$$

verifica $\mathbf{M_B^\delta} \cap \mathbf{M_A} = \emptyset$ (ver Figura 2.5).

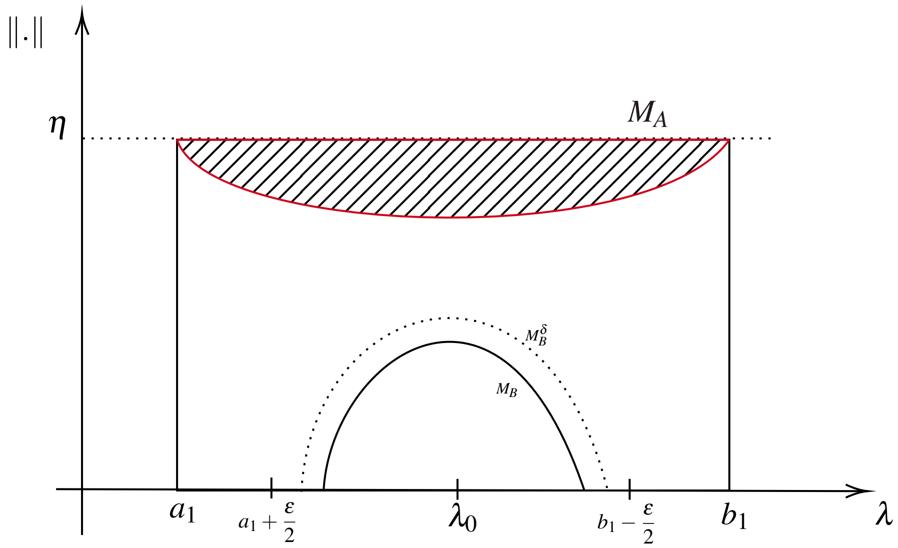

Figura 2.5 Possível configuração para os conjuntos M_A, M_B e M_B^δ.

Como $\mathbf{M_B} \subset M = Q_\eta \cap S$, então para cada $(\lambda,u) \in \mathbf{M_B} \subset M \subset Q_{\eta_0} \cap S$, temos $(\lambda,u) \in Q_{\eta_0} \cap S$. Daí, pela propriedade (2.6) podemos tomar $\delta > 0$ de modo que

$$(\lambda,u) \in \mathbf{M_B^\delta} \Rightarrow a_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda < b_1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Por construção, temos que

$$\partial \mathbf{M_B^\delta} \cap M = \emptyset. \tag{2.12}$$

Além disso, se $\beta \in (0,\eta)$ é suficientemente pequeno,

$$Q_\beta \cap \mathbf{M_A} = \emptyset. \tag{2.13}$$

Assim, para tais β, temos que o aberto

$$\Omega = int(Q_\beta) \cap \mathbf{M_B^\delta},$$

verifica $\mathbf{M_B} \subset \Omega$ (pois $\mathbf{M_B} \subset \mathbf{M_B^\delta}$) e $\partial\Omega \cap M = \emptyset$.

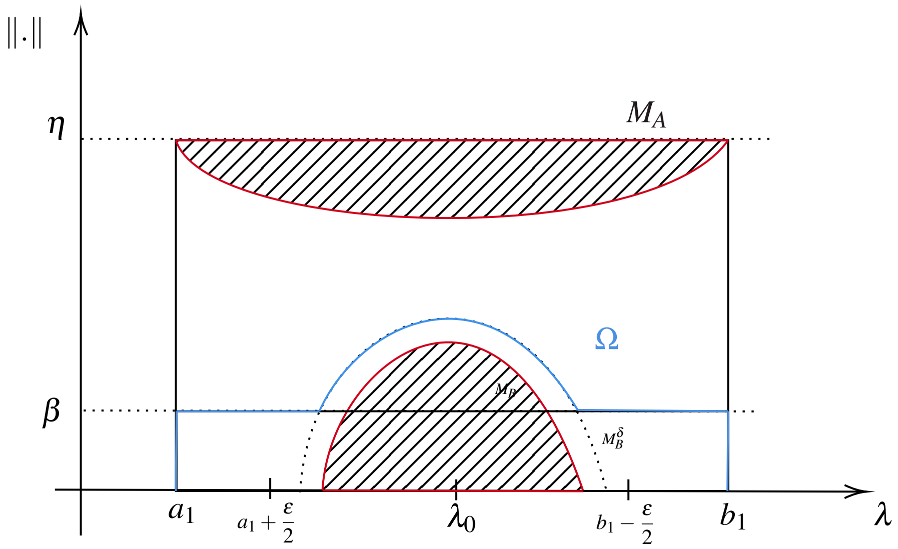

Figura 2.6 Possível configuração para o conjunto Ω.

Vamos mostrar que

$$\partial\Omega \cap M = \emptyset. \tag{2.14}$$

Para isso, basta mostrar que

(i) $\partial\Omega \cap \mathbf{M}_B = \emptyset$,

(ii) $\partial\Omega \cap \mathbf{M}_A = \emptyset$.

Provaremos inicialmente (i). Como Ω é aberto segue que $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$. Pela definição de Ω, isto implica que

$$\partial\Omega \cap (int(Q_\beta) \cup \mathbf{M}_B^\delta) = \emptyset,$$

em particular, $\partial\Omega \cap \mathbf{M}_B^\delta = \emptyset$, e como $\mathbf{M}_B \subset \mathbf{M}_B^\delta$ segue $\partial\Omega \cap \mathbf{M}_B = \emptyset$. Finalizando assim a prova de (i).

Provaremos agora (ii). Para tanto note que

$$\partial\Omega = \partial(Q_\beta \cup \mathbf{M}_B^\delta) \subset \partial Q_\beta \cup \partial\mathbf{M}_B^\delta.$$

Assim, basta mostrar que

a) $\partial\mathbf{M}_B^\delta \cap \mathbf{M}_A = \emptyset$,

b) $\partial Q_\beta \cap \mathbf{M}_A = \emptyset$.

Todavia a) e b) ocorrem respectivamente por (2.12) e (2.13). Portanto, fica provado (2.14).

Agora, para cada $\lambda \in [a_1, b_1]$, considere o seguinte conjunto

$$\Omega_\lambda = \{u \in E : (\lambda, u) \in \Omega\}.$$

Por (2.14), temos que para todo $\lambda \in [a_1, b_1]$

$$\partial\Omega_\lambda \cap \{u \in E : (\lambda, u) \in M\} = \emptyset.$$

Como $M = Q_\eta \cap S$, temos que $\partial\Omega_\lambda \cap S = \emptyset$. Assim,

$$F(\lambda, u) \neq 0 \;\; \forall \text{ u} \in \partial\Omega_\lambda.$$

Isso implica que $0 \notin (I - h(\lambda, u))(\partial\Omega_\lambda)$, onde $h(\lambda, u) := \lambda Tu - H(\lambda, u)$. Daí pela invariância homotópica do grau generalizada (Teorema 1.6) segue que

$$d(I - h(\lambda, .), \Omega_\lambda, 0) = cte \quad \forall\lambda \in [a_1, b_1].$$

Por outro lado, como

$$(\lambda, u) \in \mathbf{M}_{\mathbf{B}}^{\delta} \Rightarrow a_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda < b_1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

tem-se que

$$\Omega_{a_1} = \Omega_{b_1} = B_\beta(0).$$

Consequentemente, pela Proposição 1.1 obtemos que

$$d(I - a_1 T, \Omega_{a_1}, 0) = i(I - a_1 T, B_\beta(0)) = d(I - b_1 T, B_\beta(0), 0) = d(I - b_1 T, \Omega_{b_1}, 0).$$

o que é uma contradição com a nossa hipótese. Recorde que a contradição surgiu por assumir que A e B não são ligados por um continuum. Então, necessariamente isso é falso, o que encerra demonstração.

$\square$

Em seguida, vamos definir a função paridade que será empregada no próximo resultado.Para isso, vejamos o que significa dizer quando ocorre ou não uma mudança de índice.

Definição 2.3. *Seja $\mu \in \Sigma$. Dizemos que o $i(I-\lambda T,0)$ não muda de sinal quando λ cruza μ, se existir um $\delta > 0$ tal que $i(I-\lambda T,0)$ é constante para todo $\lambda \in (\mu-\delta, \mu+\delta)$, sempre que $i(I-\lambda T,0)$ estiver bem definido.*

Com a definição acima, podemos definir a seguinte função.

Definição 2.4 (Função Paridade)**.** *Considere a aplicação*

$$P : \Sigma \to \{-1, 0, 1\},$$

definida do seguinte modo:

1. *Se $\mu \in \Sigma$ e $i(I-\lambda T,0)$ não muda quando λ cruza μ, então*

$$P(\mu) = 0.$$

2. *No que segue definimos $\widetilde{\Sigma}$ como sendo o conjunto dos valores de Σ em que $i(I-\lambda T,0)$ muda de sinal, e organizamos esses valores por exemplo em ordem crescente (pois tal conjunto é enumerável),*

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_h$$

   (a) *Se $\widetilde{\Sigma}$ for constituído por um número infinito de valores ilimitados por baixo e por cima, organizamos os valores da seguinte maneira*

$$..., \mu_{-i}, ..., \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_i, ...$$

   (b) *Se $\widetilde{\Sigma}$ for constituído por um número infinito de valores limitados por baixo e ilimitados por cima, organizamos estes da seguinte forma*

$$\mu_0, \mu_1, ..., \mu_i, ...$$

   (c) *Se $\widetilde{\Sigma}$ for constituído por um número infinito de valores limitados por cima e ilimitados por baixo, organizamos estes valores da seguinte maneira*

$$..., \mu_{-i}, ..., \mu_{-1}, \mu_0$$

então, podemos definir

$$P(\mu_i) = (-1)^i.$$

Tal função é chamada função de paridade.

Com a definição acima, podemos enunciar e demonstrar o próximo teorema, o que é crucial, pois a famosa Alternativa Global de P. H. Rabinowitz, surgirá imediatamente após este resultado.

Teorema 2.2. *Seja $\mathfrak{C}$ a componente limitada de S. Então, o conjunto*

$$\mathcal{B} = \mathfrak{C} \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\}$$

é finito, possivelmente vazio. Além disso, se para algum $k \in \mathbb{N}$ existirem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ tais que

$$\mathcal{B} = \{(\lambda_1, 0), ..., (\lambda_k, 0)\} \tag{2.15}$$

então,

$$\sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) = 0.$$

Demonstração. Começamos a prova deste teorema fazendo a seguinte afirmação: desde que F é um operador pertubação compacta da identidade então $\mathfrak{C}$ é compacta.

De fato, seja (λ_n, u_n) uma sequência limitada em $\mathfrak{C}$. Como $\mathfrak{C} \subset S$, temos que

$$\begin{aligned} F(\lambda_n, u_n) = u_n - \lambda_n T u_n + H(\lambda_n, u_n) &= 0 \\ \Rightarrow u_n &= \lambda_n T u_n - H(\lambda_n, u_n). \end{aligned}$$

Ora, λ_n é limitada em $\mathbb{R}$ então, passando a uma subsequência, $\lambda_n \to \lambda$. Além disso, T e H são operadores compactos e como (λ_n, u_n) são limitadas, segue que Tu_n e $H(\lambda_n, u_n)$ possuem subsequências convergentes. Portanto, a equação acima fornece que u_n possui também subsequência que converge digamos que $u_n \to u$. Da continuidade de F, temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} F(\lambda_n, u_n) = F(\lambda, u). \tag{2.16}$$

Assim, $(\lambda, u) \in \mathfrak{C}$, e portanto, $\mathfrak{C}$ é compacta.

Consideremos agora a seguinte aplicação λ-projeção

$$\mathfrak{P} : J \times E \to \mathbb{R},$$

definida por $\mathfrak{P}(\lambda, u) = \lambda$. Como $\mathfrak{P}$ é uma aplicação contínua e $\mathfrak{C}$ é compacta, $\mathfrak{P}(\mathfrak{C})$ é compacta. Assim existem $a_1, b_1 \in J$ com $a_1 < b_1$ tais que

$$\mathfrak{C} \subset [a_1, b_1] \times E. \tag{2.17}$$

Lembremos que S é definido como

$$S = \{(\lambda,u) \in J \times E \setminus \{0\} : F(\lambda,u) = 0\} \cup \{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\}. \tag{2.18}$$

Por simplicidade vamos escrever

$$S_1 = \{(\lambda,u) \in J \times E \setminus \{0\} : F(\lambda,u) = 0\} \text{ e } S_2 = \{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\}.$$

Defina também,

$$D = \mathfrak{C} \cap \{(\lambda,0) : \lambda \in [a_1,b_1]\}. \tag{2.19}$$

Como $\mathfrak{C} \subset S$, logo $D \subsetneq S_1$, portanto $D \subset S_2$.

Desde que Σ é discreto, temos que o conjunto $\Sigma \cap [a_1,b_1]$ é necessariamente finito. Portanto, $\mathcal{B}$ é finito e possivelmente vazio. Note que se $\mathcal{B} = \emptyset$ a prova está concluída. Suponhamos então que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, ou seja, existem $\lambda_1,...,\lambda_k$ tais que

$$\mathcal{B} = \{(\lambda_1,0),...,(\lambda_k,0)\}. \tag{2.20}$$

Pela definição da função paridade, à medida que λ cresce o $i(I-\lambda T,0)$ muda de sinal apenas se λ cruza algum $\mu \in \Sigma$ com

$$P(\mu) = \pm 1. \tag{2.21}$$

Além disso, o comprimento de $i(I-\lambda T,0)$ é $2P(\mu)$ para todo $\mu \in \Sigma$ ou, $-2P(\mu)$ para todo $\mu \in \Sigma$.

Como $\mathfrak{C}$ é limitada e Σ é discreto, existem $\hat{a},\hat{b} \in J$ com $\hat{a} < \hat{b}$ e $\hat{a},\hat{b} \notin \Sigma$ tais que

$$\mathfrak{C} \subset (\hat{a},\hat{b}) \times E.$$

Vamos agora provar que existe um aberto limitado Ω tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \subset \Omega \subset (\hat{a},\hat{b}) \times E, \\ \partial\Omega \cap S = \emptyset, \end{aligned} \tag{2.22}$$

e

$$\{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\} \cap \Omega = \mathcal{B}. \tag{2.23}$$

Começamos da seguinte maneira, dado $\varepsilon > 0$, consideramos a ε-vizinhança da componente $\mathfrak{C}$ definida por

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{(\lambda, u) \in J \times E : dist((\lambda, u), \mathfrak{C}) < \varepsilon\}.$$

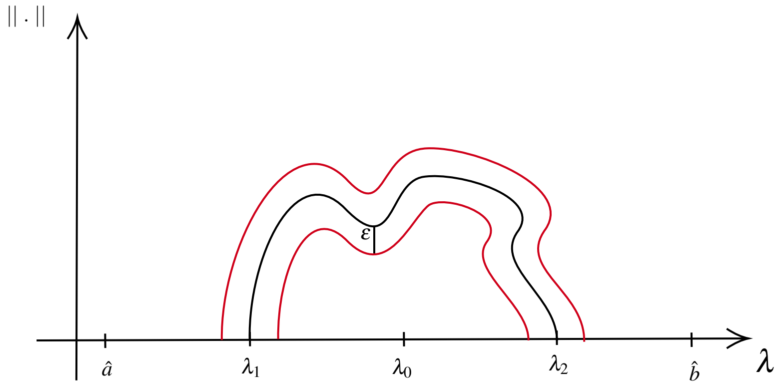

Figura 2.7 Esboço de $\mathcal{U}_\varepsilon$.

Como Σ é discreto, podemos diminuir ainda mais ε, de tal modo que

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\} \cap \overline{\mathcal{U}_\varepsilon} = \mathcal{B}. \tag{2.24}$$

Ora, se $\partial \mathcal{U}_\varepsilon \cap S = \emptyset$, então definindo $\Omega = \mathcal{U}_\varepsilon$ a demonstração está encerrada. Porém, isso não ocorre necessariamente. Assim, teremos um trabalho adicional para construir Ω. É o que faremos a seguir.

Defina os seguintes conjuntos,

$$M = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \cap S \text{ , } A = \mathfrak{C} \text{ e } B = \partial \mathcal{U}_\varepsilon \cap S. \tag{2.25}$$

Notemos que M é fechado (pois é intersecção de fechados) e também limitado de S. Logo, M é um espaço métrico compacto para a topologia induzida de $(\hat{a}, \hat{b}) \times E$. Além disso, por construção

$$\mathfrak{C} \cap \partial \mathcal{U}_\varepsilon = \emptyset.$$

De fato, seja $(\lambda, u) \in \mathfrak{C}$, então $dist((\lambda, u), \mathfrak{C}) = 0$. Portanto, A e B são dois subconjuntos compactos disjuntos de M, pois

$$A \cap B = \mathfrak{C} \cap (\partial \mathcal{U}_\varepsilon \cap S) = \emptyset. \tag{2.26}$$

Agora note que, pela maximalidade de $\mathfrak{C}$, não existe um continuum que conecta A e B. De fato, suponhamos por contradição que existisse um continuum $\mathfrak{C}^1 \subset M$ tal que

$$\mathfrak{C}^1 \cap B \neq \emptyset \;\text{ e }\; \mathfrak{C}^1 \cap A \neq \emptyset.$$

Em particular, $\mathfrak{C}^1 \cap B \neq \emptyset$ implica que existe $y \in \mathfrak{C}^1 \cap B$. Assim

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}^1.$$

Além disso a inclusão acima é estrita, pois dado $y \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}^1$ tem-se que $y \in \mathfrak{C}^1$, mas $y \notin \mathfrak{C}$ visto que $y \in B = \partial \mathcal{U}_\varepsilon \cap S$ e $\mathfrak{C} \cap \partial \mathcal{U}_\varepsilon = \emptyset$. Isso contradiz a maximalidade de $\mathfrak{C}$. Assim pela Proposição A.1, existem dois subconjuntos de M, digamos M_A e M_B, satisfazendo

$$A \subset M_A, \;\; B \subset M_B \;\text{ e }\; M = M_A \cup M_B.$$

Provaremos agora que $M_A \subset \mathcal{U}_\varepsilon$.

De fato, sabemos que $M_A \subset M = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \cap S \subset \overline{\mathcal{U}_\varepsilon} = \partial \mathcal{U} \cup \mathcal{U}_\varepsilon$, ou seja, $M_A \subset \partial \mathcal{U} \cup \mathcal{U}_\varepsilon$. Note que $M_A \cap \partial \mathcal{U}_\varepsilon = \emptyset$, pois caso contrário existiria $(\lambda, u) \in M_A \cap \partial \mathcal{U}_\varepsilon$, em particular $(\lambda, u) \in M_A \subset \overline{\mathcal{U}_\varepsilon} \cap S \subset S$ e $(\lambda, u) \in S$. Assim, $(\lambda, u) \in \partial \mathcal{U}_\varepsilon \cap S = B \subset M_B$, ou seja, $(\lambda, u) \in M_A \cap M_B$. Absurdo, pois $M_A \cap M_B = \emptyset$. Logo vale que $M_A \subset \mathcal{U}_\varepsilon$.

Considere agora $0 < \eta < \min\{dist(M_A, M_B), dist(M_A, \partial \mathcal{U}_\varepsilon)\}$ e defina o seguinte conjunto

$$\Omega = \{(\lambda, u) \in J \times E : d((\lambda, u), M_A)) < \eta\}.$$

Da forma como fora escolhido η tem-se que

$$\Omega \subset \mathcal{U}_\varepsilon \subset (\hat{a}, \hat{b}) \times E, \tag{2.27}$$

e além disso,

$$\partial \Omega \cap S = \emptyset. \tag{2.28}$$

De fato, suponhamos por contradição que isso não ocorra, então existiria $(\lambda_1, u_1) \in \partial \Omega \cap S$. Assim, note que $(\lambda_1, u_1) \in M$, pois $(\lambda_1, u_1) \in S$ e vimos que, $\partial \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$. Recorde que $M = M_A \cup M_B$, logo $(\lambda_1, u_1) \in M_A$ ou $(\lambda_1, u_1) \in M_B$. É claro que $(\lambda_1, u_1) \notin M_A$, pois se pertencesse $dist((\lambda_1, u_1), M_A) = 0$ e não é verdade, uma vez que $dist((\lambda_1, u_1), M_A) = \eta > 0$.

Note também que $(\lambda_1, u_1) \notin M_B$, em virtude que

$$\eta = dist((\lambda_1, u_1), M_A) \geq dist(M_A, M_B) > \eta,$$

e, isto é, um absurdo. Portanto, $\partial \Omega \cap S = \emptyset$.

Assim, a equação (2.23) decorre da igualdade (2.24). De fato,

$$\mathcal{B} = \mathfrak{C} \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\}.$$

Já provamos que $\Omega \subset \mathcal{U}_\varepsilon$. Logo, $\{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\} \cap \Omega \subset \{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\} \cap \overline{\mathcal{U}_\varepsilon}$. Além disso, como $\mathfrak{C} \subset \Omega$. Segue que,

$$\mathcal{B} \subset \Omega \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\}.$$

E, portanto a equação ocorre. Seguindo a demonstração, provaremos agora que

$$\sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) = 0.$$

Para isso, fixemos um desses Ω. Seja $\delta > 0$ tal que

$$\hat{a} < \lambda_1 - \delta < \lambda_1 + \delta .... < \lambda_N - \delta < \lambda_N + \delta < \hat{b}.$$

Por exemplo, basta tomar

$$\delta \leq \min\{|\lambda_1 - \hat{a}|/2, |\lambda_1 - \lambda_2|/2, ..., \left|\lambda_k - \hat{b}\right|/2\}.$$

Por outro lado, uma vez que $(\lambda_j, 0) \in \mathcal{B} \subset \Omega$ e Ω é aberto, temos que para todo $j = 1, ..., k$, existe $r_j > 0$ tal que

$$B_j = \{(\lambda, u) \in J \times E : \left|\lambda - \lambda_j\right| < r_j, \|u\| < r_j\} \subset \Omega.$$

Em particular para $\delta < r_j$,

$$\{(\lambda, 0) : \left|\lambda - \lambda_j\right| < \delta\} \subset B_j \subset \Omega \quad \forall j = 1, ..., k.$$

Assim,

$$\bigcup_{j=1}^{k} \{(\lambda, 0) : \left|\lambda - \lambda_j\right| < \delta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega = \Omega.$$

Portanto,

$$\bigcup_{j=1}^{k}\{(\lambda,0):|\lambda-\lambda_j|<\delta\}\subset\Omega.$$

Agora, para cada $\lambda\in[\hat{a},\hat{b}]$ defina o seguinte conjunto

$$\Omega_\lambda=\{u\in E:(\lambda,u)\in\Omega\}.$$

Afirmamos que $0\notin F(\lambda,\cdot)(\partial\Omega_\lambda)$, ou seja,

$$F(\lambda,u)\neq 0,\quad \forall u\in\partial\Omega_\lambda\subset(\partial\Omega)_\lambda.$$

De fato, suponhamos por contradição que exista $u\in\partial\Omega_\lambda$ tal que,

$$F(\lambda,u)=0,$$

onde $(\lambda,u)\in\partial\Omega$. Então, $(\lambda,u)\in S$, absurdo pois $\partial\Omega\cap S=\emptyset$.

Deste modo, $d(F(\lambda,.),\Omega_\lambda,0)$ é admissível e pelo Teorema da invariância homotópica generalizada (Teorema 1.6), para $i\leq j\leq k$, $d(F(\lambda,.),\Omega_\lambda,0)$ é constante para todo $\lambda\in(\lambda_j-\delta,\lambda_j+\delta)$. Em particular, para cada $i\leq j\leq k$

$$d(F(\lambda_j-\delta/2,.),\Omega_{\lambda_j-\delta/2})=d(F(\lambda_j+\delta/2,.),\Omega_{\lambda_j+\delta/2}).\tag{2.29}$$

Fixemos agora

$$B_\rho=\{u\in E_1:\|u\|<\rho\}.$$

Agora afirmamos que existe $\rho>0$ com a seguinte propriedade se $\lambda\in[\hat{a},\hat{b}]\setminus\bigcup_{j=1}^{k}(\lambda_j-\delta/2,\lambda_j+\delta/2)$ então

$$\overline{B}_\rho\cap\Omega_\lambda=\emptyset,$$

ou, a única solução de $F(\lambda,u)=0$ com $u\in\overline{B}_\rho$ é $u=0$.

De fato, se $\lambda\notin\Sigma$ então de acordo com o Lema 2.1, existe $\rho>0$ tal que $F(\lambda,u)=0$ e $u\in\overline{B}_\rho$ implica que $u=0$.

Agora suponhamos que

$$\lambda\in\Sigma\setminus\mathcal{B},$$

então por definição,

$$(\lambda,0) \in S.$$

Além disso, relembrando que $\{(\lambda,0) : \lambda \in \Sigma\} \cap \Omega = \mathcal{B}$ nós temos que $(\lambda,0) \notin \Omega$, pois caso contrário se $(\lambda,0) \in \Omega$ e como $(\lambda,0) \in \Sigma$ então, teríamos que $(\lambda,0) \in \mathcal{B}$ e, isto é, um absurdo. Assim,

$$0 \notin \Omega_\lambda = \{u \in E_1 : (\lambda,u) \in \Omega\}, \tag{2.30}$$

pois caso contrário teríamos que $(\lambda,0) \in \Omega$ o que já vimos que não ocorre. Por outro lado, $\partial\Omega \cap S = \emptyset$ e $(\lambda,0) \in S$ implica que $(\lambda,0) \notin \partial\Omega$.

Consequentemente,

$$0 \notin \partial\Omega_\lambda. \tag{2.31}$$

Portanto, segue de (2.30) e (2.31) que $0 \notin \overline{\Omega}_\lambda$. Logo, existe $\rho > 0$ tal que

$$\overline{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset.$$

Por um argumento de compacidade, segue a afirmação.

Suponhamos agora que escolhemos um $\rho > 0$ satisfazendo as propriedades acima demonstradas. Deste modo, para qualquer λ satisfazendo

$$\lambda \in [\hat{a},\hat{b}] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (\lambda_j - \delta/2, \lambda_j + \delta/2), \tag{2.32}$$

a aplicação $F(\lambda,\cdot)$ não se anula na fronteira do conjunto $\Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho$.

Com efeito, suponhamos inicialmente que λ é tal que $\overline{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset$.
Neste caso, $\Omega \setminus \overline{B}_\rho = \Omega_\lambda$. Suponhamos agora que exista $u \in \partial\Omega_\lambda$ tal que $F(\lambda,u) = 0$. Mas $u \in \partial\Omega_\lambda$ implica que $(\lambda,u) \in \partial\Omega$ e, como $F(\lambda,u) = 0$, temos que $(\lambda,u) \in S$, contradizendo o fato de que $\partial\Omega \cap S = \emptyset$.

Agora suponha que exista $u \in \partial(\Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho)$ de tal modo que $F(\lambda,u) = 0$. Como,

$$\partial(\Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho) \subset \partial\Omega_\lambda \cup \partial\overline{B}_\rho,$$

temos que $u \in \partial\Omega_\lambda$ ou $u \in \partial\overline{B}_\rho$. Se acontecer o primeiro, voltamos para o caso acima já demonstrado. Além disso, $u \in \partial\overline{B}_\rho$ implica que $\|u\| = \rho$ que também não pode ocorrer, pois contraria a hipótese de que $u = 0$ é a única solução de $F(\lambda, u) = 0$ com $u \in \overline{B}_\rho$.

Segue assim, que o grau abaixo está bem definido,

$$d(F(\lambda, .), \Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho, 0).$$

Assim, fazendo novamente uso da invariância homotópica generalizada, tal grau é constante para todo $\lambda \in [\hat{a}, \lambda_1 - \delta/2], \lambda \in [\lambda_2 + \delta/2, \lambda_3 - \delta/2], ..., \lambda \in [\lambda_j + \delta/2, \lambda_{j+1} - \delta/2]$ para $1 \leq j \leq k-1$ e $\lambda \in [\lambda_k + \delta/2, \hat{b}]$

Sejam agora $x_0, x_1, ..., x_k$ os valores de $d(F(\lambda, .), \Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho, 0)$ em cada um desses $k+1$, intervalos respectivamente. Desde que

$$\Omega_{\hat{a}} = \Omega_{\hat{b}} = \emptyset,$$

nós temos que,

$$x_0 = x_k = 0.$$

Além disso, pela propriedade da adição do grau, para $j = 1, ..., k$ tem-se que

$$\begin{aligned} d(F(\lambda_j - \delta/2, .), \Omega_{\lambda_{j-\delta/2}}, 0) &= d(F(\lambda_j - \delta/2, .), \Omega_\lambda \setminus \overline{B}_\rho, 0) + d(F(\lambda_j - \delta/2, .), B_\rho, 0) \\ &= x_{j-1} + d(F(\lambda_j - \delta/2, .), B_\rho, 0) \\ &= x_{j-1} + i(0, L(\lambda_j - \delta/2)). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Note que a última igualdade acima ocorre pois 0 é solução isolada para o $\rho > 0$ escolhido e usando Proposição 1.1.

De maneira, inteiramente análoga, obtemos que,

$$d(F(\lambda_j + \delta/2, .), \Omega_{\lambda_{j+\delta/2}}, 0) = x_j + i(0, L(\lambda_j + \delta/2)). \tag{2.34}$$

Utilizando as equações (2.29), (2.33) e (2.34) concluímos que

$$x_{j-1} + i(0, L(\lambda_j - \delta/2) = x_j + i(0, L(\lambda_j + \delta/2)).$$

Assim,

$$x_{j-1} - x_j = i(0, L(\lambda_j + \delta/2)) - i(0, L(\lambda_j - \delta/2) \quad \forall \ 1 \leq j \leq k$$

Então, umas das possibilidades ocorre: ou

$$x_{j-1} - x_j = 2P(\lambda_j) \quad \forall\, 1 \leq j \leq k,$$

ou,

$$x_{j-1} - x_j = -2P(\lambda_j) \quad \forall\, 1 \leq j \leq k.$$

Para ambos os casos, note que a soma sobre j nos fornece que

$$\sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) = 0.$$

□

Como consequência deste Teorema segue a famosa Alternativa Global de Rabinowitz.

Corolário 2.2 (Alternativa Global de P.H.Rabinowitz). *Assuma que $J = \mathbb{R}$. Seja $\lambda_0 \in \Sigma$ tal que $i(I - \lambda T, 0)$ muda de sinal quando λ cruza λ_0. Seja $\mathfrak{C}$ a componente de S que emana de $(\lambda, 0)$ em $(\lambda_0, 0)$, cuja a existência é garantida pelo Teorema 2.1. Então, ocorre umas das seguintes opções não excludentes:*

(i) $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times E$,

(ii) Existe $\lambda_1 \in \Sigma \setminus \{\lambda_0\}$ tal que $(\lambda_1, 0) \in \mathfrak{C}$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que não ocorre nem uma das opções. Deste modo temos que $\mathfrak{C}$ é limitada em $\mathbb{R} \times E$, como $\mathfrak{C}$ emana de $(\lambda_0, 0)$ temos que

$$\mathcal{B} = \{(\lambda_0, 0)\}.$$

Assim, como $i(I - \lambda T, 0)$ muda de sinal quando λ cruza λ_0, segue que

$$\sum_{\mathcal{B}} P(\lambda) = P(\lambda_0) = \pm 1,$$

uma contradição com o Teorema anterior. □

Segue abaixo um outro resultado que também decorre do Teorema 2.2.

Corolário 2.3. *Assuma que $J = \mathbb{R}$. Seja λ_0 tal que*

$$P(\lambda_0) = \pm 1,$$

e seja $\mathfrak{C}$ a componente de S que emana $(\lambda_0, 0)$, cuja a existência é garantida pelo Teorema 2.1. Suponha ainda que o conjunto

$$\mathfrak{C} \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\},$$

possui um número infinito de termos, ou

$$\mathfrak{C} \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\} = \{(\lambda_j, 0) : 1 \leq j \leq k\},$$

com,

$$\sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) \neq 0.$$

Então, $\mathfrak{C}$ é ilimitada em $\mathbb{R} \times E$.

Demonstração. Com efeito, se

$$\mathfrak{C} \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in \Sigma\},$$

possui um número infinito de termos, então $\mathfrak{C}$ é ilimitado desde que Σ é discreto. Suponhamos agora que o conjunto é finito e suponha por contradição que $\mathfrak{C}$ limitado, então estamos nas hipóteses do Teorema 2.2 que implica

$$\sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j) = 0.$$

Mas, isso é uma contradição com nossa hipótese. Portanto, $\mathfrak{C}$ é ilimitada em $\mathbb{R} \times E$.

$\square$

Capítulo 3

Um Problema Elíptico do Tipo Kirchhoff

Neste capítulo, aplicaremos os resultados de bifurcação estudados no capítulo anterior para obter soluções positivas para o seguinte problema de Kirchhoff

$$(P)\quad \begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega,\\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio limitado regular e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções regulares e satisfazem as seguintes hipóteses:

(f_1) $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, e $a(x) := D_u^+ f(x,0) > 0$.

(f_2) $f(x,u) = b(x)u + g(x,u)$, com $b(x) > 0$ e $\lim\limits_{u\to\infty} g(x,u)/u = 0$.

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(s) \geq m_0$ para todo $s \geq 0$.

Além disso, para obter pontos de bifurcação a partir do infinito, na Seção 3.3 vamos considerar:

(M_∞) existe $M_\infty > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = M_\infty$.

E para estudar o comportamento global dos contínuos obtidos, na Seção 3.4, iremos adotar as seguintes hipóteses adicionais:

(f_3) existe $k > 0$ tal que $f(x,u) \geq ku$ para todo $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$.

(f_3') Existem $0 < s' < s''$ tal que $f(x,u) \leq 0$ para toda $u \in [s', s'']$, e $f(x,u) > 0$ para cada $u \in (0,s') \cup (s'', +\infty)$.

Vamos usar a teoria de bifurcação desenvolvida no capítulo anterior para obter soluções positivas de (P) em $E = C_0^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Ao longo deste capítulo faremos uso de algumas notações, são elas:

- $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ denotará a norma do espaço $H_0^1(\Omega)$,
- $\|\cdot\|_0$, norma usual do máximo.
- $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$, norma usual do espaço $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.
- $\|u\|_E = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |u(x)| + \sup\limits_{\overline{\Omega}} |\nabla u(x)|$, norma do espaço E.
- $\mathcal{F}$ denotará o operador de Nemytskii associado a $f(x,u)$, isto é, $\mathcal{F}(u) : \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\mathcal{F}(u)(x) = f(x,u(x))$.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotará o produto interno em $\mathcal{L}^2(\Omega)$.
- $\lambda_m[a]$ com $m = 1,2,...$ denota os autovalores de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

  com $a(x) > 0$ e regular. Quando $a(x) = 1$ denotaremos simplesmente por λ_m.
- $\Lambda_1 = M(0)\lambda_1[a]$ denota o autovalor principal de

$$\begin{cases} -M(0)\Delta v = \lambda a(x)v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

- $\overline{\varphi}_1 > 0$ é autofunção associada a Λ_1 com $\|\overline{\varphi}_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 1$.
- $\varphi_1 > 0$ autofunção associada a λ_1 com $\|\varphi_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 1$.
- $\Lambda_\infty = M_\infty\lambda_1[b]$ denota o autovalor principal de

$$\begin{cases} -M_\infty\Delta v = \lambda b(x)v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

  com $b(x) > 0$ e regular.
- $\psi > 0$ autofunção associada a Λ_∞ com $\|\psi\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 1$.

- Por fim, o seguinte operador solução será essencial:

$$\mathrm{L} = (-\Delta)^{-1} : C(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega}), \tag{3.1}$$

onde u é a única solução do problema (Teorema A.4)

$$\begin{cases} -\Delta u = w & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

para cada $w \in C(\overline{\Omega})$. Destacamos que este operador está bem definido, é linear, contínuo e compacto.

- Por simplicidade denotaremos as integrais $\displaystyle\int_\Omega \cdot \, dx$ por $\displaystyle\int \cdot$.

- Definimos a parte positiva e negativa uma função u respectivamente por

$$u^+ = \max\{u, 0\} \quad \text{e} \quad u^- = \max\{-u, 0\}.$$

3.1 Construção do Operador Abstrato

Nesta seção, faremos a construção do operador compacto para usar os teoremas de bifurcação global. Mostraremos que o mesmo está bem definido, é contínuo e compacto.

Para construirmos o operador abstrato, suponha que u é solução clássica de (P). Tendo em vista a hipótese (M_1), temos que u satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda f(x,u)}{M(\|u\|^2)} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Agora, considere o operador solução $\mathrm{L} : C(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definido em (3.1). Pela definição de L, temos que (3.3) é equivalente a

$$u = \frac{\lambda \mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)}.$$

Desse modo, é natural que o candidato a operador a ser utilizado é $\mathcal{T} : E \to E$ dado por

$$\mathcal{T}(u) = \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)}. \tag{3.4}$$

Mostraremos que de fato esse operador possui as propriedades desejadas. Precisamente:

Proposição 3.1. *O operador* $\mathcal{T} : E \to E$ *dado por* (3.4) *está bem definido, é contínuo e compacto.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $\mathcal{T}$ está bem definido. Com efeito, temos que $u \in E$, e f é regular. Logo, $\mathcal{F}(u) \in E$. Assim, pela definição de L segue que $\mathcal{T}(u) \in E$.

Para mostrarmos que $\mathcal{T}$ é contínuo, consideremos $u_n, u \in E$ tais que $u_n \to u$ em E. Devemos provar então que $\mathcal{T}(u_n) \to \mathcal{T}(u)$ em E, quando $n \to \infty$. De fato, note que

$$\mathcal{T}(u_n) = \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)}.$$

Como $u_n \to u$ em E e E está imerso continuamente em $H_0^1(\Omega)$, tem-se que $\|u_n\| \to \|u\|$. Além disso, da continuidade de $\mathcal{F}$ segue que $\mathcal{F}(u_n) \to \mathcal{F}(u)$ em $C(\overline{\Omega})$. Assim, da continuidade de L, e das convergências anteriores temos que

$$\frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)} \to \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)} \text{ em } E.$$

Portanto,

$$\mathcal{T}(u_n) \to \mathcal{T}(u) \text{ em } E.$$

Provaremos agora que $\mathcal{T}$ é compacto. Seja (u_n) uma sequência limitada em E, como tem-se que L é um operador compacto, devemos apenas mostrar que $\mathcal{F}(u_n)$ é limitada em $C(\overline{\Omega})$ e assim da compacidade do operador L seguirá que $\mathrm{L}(\mathcal{F}(u_n))$ possuirá subsequência convergente. Com efeito, isto ocorre, pois sendo (u_n) limitada em E, sabemos que existe $m > 0$ tal que $\|u_n\|_E \leq m$. Em particular $|u_n(x)| \leq m$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $n \geq 1$. Assim, tem-se que $(x, u_n(x)) \in \overline{\Omega} \times [-m, m]$. Utilizando a regularidade da f, segue que

$$|\mathcal{F}(u_n)| = |f(x, u_n(x))| \leq \sup_{\overline{\Omega} \times [-m,m]} |f(x,s)| = K,$$

ou seja, $|\mathcal{F}(u_n)| \leq K$, mostrando assim que $\mathcal{F}(u_n)$ é limitada em $C(\overline{\Omega})$. Portanto, segue que $\mathcal{T}$ é compacto. Finalizando assim, a demonstração. □

Com esta notação, temos que as soluções de

$$u = \lambda \mathcal{T}(u) \quad u \in E,$$

são soluções do problema (P). E ainda, definindo

$$F(\lambda,u) = u - \lambda \mathcal{T}(u),$$

temos um operador pertubação compacta da identidade. Além disso, desde que F é regular, segue que satisfaz a hipótese $(\mathbf{H_2})$. Neste caso, buscaremos um continuum de soluções não triviais de F. Isto é, continuum em:

$$S = \{(\lambda,u) \in \mathbb{R} \times E : F(\lambda,u) = 0, u \neq 0\} \cup \{(\lambda,0); \lambda \in \Sigma\},$$

onde $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R} : \dim N[I - \lambda \mathrm{L}] \geq 1\}$. A proposição abaixo nos diz que Λ_1 é ponto de bifurcação de $F(\lambda,.)$ mais precisamente

Proposição 3.2. *Λ_1 é ponto de bifurcação de $F(\lambda,u) = 0$ a partir da solução trivial.*

Demonstração. Tendo em vista o Corolário 2.2, basta mostrarmos que o $i(F(\lambda,.),0)$ muda de sinal quando λ cruza Λ_1. Como $\mathcal{F}$ e M são regulares, temos que $\mathcal{T} \in C^1(E,E)$. Assim podemos usar o Teorema 1.7. Considere então $x_0 = 0$ e $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \mathcal{T}$. Isto é,

$$\mathcal{T}_\lambda(u) = \lambda \mathrm{L}\left(\frac{\mathcal{F}(u)}{M(\|u\|^2)}\right).$$

Por um cálculo direto temos,

$$\mathcal{T}'_\lambda(0)v = \lambda \mathrm{L}\left(\frac{\mathcal{F}'(0)M(0)v}{M(0)^2}\right) = \lambda \mathrm{L}\left(\frac{\mathcal{F}'(0)v}{M(0)}\right).$$

Mostraremos agora que 1 não é valor característico de $\mathcal{T}'_\lambda(0)$ para $\lambda \neq \Lambda_1$ e λ próximo de Λ_1. Ou seja, que a seguinte equação

$$\mathcal{T}'_\lambda(0)v = v, \quad v \in E$$

admite apenas a solução trivial. De fato, considere $v \in E$ solução da equação acima. Utilizando a definição do operador L, temos que v verifica

$$\begin{cases} -\Delta v = \dfrac{\lambda a(x) v}{M(0)} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Como Σ é discreto, existe $\varepsilon > 0$ tal que definindo $J = (\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1 + \varepsilon)$, obtemos que $J \cap \Sigma = \{\Lambda_1\}$. Logo, para $\lambda \in J \setminus \{\Lambda_1\}$ temos que $\lambda \notin \Sigma$. Portanto, a equação (3.5) admite apenas a solução trivial, mostrando que $v = 0$. Deste modo, estamos nas hipóteses do Teorema 1.7, e podemos concluir que

$$i(F(\lambda,\cdot),0) = (-1)^{\beta}, \quad \forall \lambda \in J \setminus \{\Lambda_1\},$$

onde β é a soma de todas as multiplicidades algébricas dos valores característicos de $\mathcal{T}'_{\lambda}(0)$ compreendidos entre $(0,1)$. Além disso, se $\lambda \in J$ com $\lambda < \Lambda_1$, não há valores característicos de $\mathcal{T}'_{\lambda}(0)$ em $(0,1)$. Portanto,

$$i(F(\lambda,\cdot),0) = (-1)^{\beta} = (-1)^{0} = 1, \quad \forall \lambda \in J,\ \lambda < \Lambda_1.$$

Por outro lado, se $\lambda \in J$ com $\lambda > \Lambda_1$, o único valor característico de $\mathcal{T}'_{\lambda}(0)$ em $(0,1)$ é Λ_1, que possui multiplicidade algébrica 1 (Ver Teorema A.5). Assim,

$$i(F(\lambda,\cdot),0) = (-1)^{\beta} = (-1)^{1} = -1, \quad \forall \lambda \in J,\ \lambda > \Lambda_1.$$

Pelas considerações acima, provamos mudança de índice. Portanto, Λ_1 é ponto de bifurcação de $F(\lambda,u) = 0$ a partir da solução trivial.

□

Observação 3.1. Com a Proposição anterior vimos que há ponto de bifurcação, porém este resultado não nos dá o sinal das soluções. Como estamos interessados em obter soluções positivas para o problema (P), teremos que contornar tal dificuldade.

3.2 Bifurcação de soluções positivas

Nesta seção, apresentaremos um resultado de bifurcação a partir da solução trivial para o problema (P) que fornecerá soluções positivas. Com este objetivo, definamos uma função auxiliar $\overline{f}$, dada por

$$\overline{f}(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \text{se } s \geq 0, \\ 0 & \text{se } s < 0, \end{cases}$$

e consideremos o seguinte problema

$$(P') \quad \begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right) \Delta u = \lambda \overline{f}(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De agora em diante, vamos considerar $\overline{\mathcal{F}}$ o operador de Nemytskii, associado a $\overline{f}(x,u)$. Note que se $u \geq 0$ então

$$\mathcal{F}(u) = \overline{\mathcal{F}}(u). \tag{3.6}$$

Além disso, adotaremos

$$F(\lambda,u) = u - \lambda\mathcal{T}(u),$$

onde $\mathcal{T}(u) = \left(\dfrac{\mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u))}{M(\|u\|)^2}\right)$. A proposição abaixo nos diz que as soluções fracas do problema (P') são soluções positivas do problema (P).

Proposição 3.3. *Se $u \in H_0^1(\overline{\Omega})$ é solução fraca de (P') então, $u \geq 0$ q.t.p em Ω.*

Demonstração. Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P'). Então u verifica

$$\int \nabla u \nabla \phi = \int \frac{\lambda \overline{f}(x,u)\phi}{M(\|u\|^2)} \qquad \forall\ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Tomemos agora $\phi = u^-$. Assim, temos que

$$\int \nabla u \nabla u^- = \int \frac{\lambda \overline{f}(x,u)u^-}{M(\|u\|^2)}.$$

Recordando que $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$, e substituindo essa informação na equação acima, obtemos que

$$\int (\nabla u^+ - \nabla u^-)\nabla u^- = \int \frac{\lambda \overline{f}(x,u)u^-}{M(\|u\|^2)}.$$

Sabendo que $\nabla u^+ \nabla u^- = 0$ $q.t.p$ em Ω e que $m_0 \leq M(\|u\|^2)$, tem-se que,

$$-m_0\|u^-\|^2 \geq -M(\|u\|^2)\|u^-\|^2 = \lambda \int \overline{f}(x,u)u^-.$$

Segue diretamente da definição de $\overline{f}(x,u)$ e de u^- que $\overline{f}(x,u)u^- = 0$ $q.t.p$ em Ω. Logo,

$$\int \overline{f}(x,u)u^- = 0$$

Assim, $\|u^-\|^2 \leq 0$. Mas isso implica que $\|u^-\| = 0$ e, portanto, $u^- = 0$ $q.t.p$ em Ω. Deste modo, $u \geq 0$ $q.t.p$ em Ω.

$\square$

Observação 3.2. Note que, com tal mudança, o operador T perde a diferenciabilidade na origem. Diante disso, não podemos usar os resultados de índice expostos no primeiro capítulo. Porém, conseguimos ainda obter mudanças de índices e usar os resultados de bifurcação do Capítulo 2.

No que segue, vamos apresentar alguns resultados que garantem mudanças de índices. Ressaltamos que os próximos Lemas são inspirados nos trabalhos de Ambrosseti e Hess [6] e de Arcoya, Carmona e Pellacci [8].

Começamos com o seguinte resultado

Lema 3.1. *Seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo compacto tal que $\Lambda_1 \notin J$. Então, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$F(\lambda, u) \neq 0 \quad \forall u \in E,\ 0 < \|u\| \leq \delta,\ \forall \lambda \in J.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que isto não seja verdade. Assim, tomando $\delta = 1/n$ existem uma sequência $u_n \in E$, tal que $\|u_n\|_E \leq 1/n$ e, $(\lambda_n) \subset J$, satisfazendo, $F(\lambda_n, u_n) = 0$, isto é,

$$u_n = \frac{\lambda_n \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)}. \tag{3.7}$$

Como $(\lambda_n) \subset J$, podemos supor que, a menos de subsequência,

$$\lambda_n \to \overline{\lambda}. \tag{3.8}$$

Pela definição do operador $\mathrm{L} = (-\Delta)^{-1}$, obtemos de (3.7) que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{\lambda_n \overline{f}(x, u_n)}{M(\|u_n\|^2)} & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que, pela Proposição 3.3, temos $u_n \geq 0$ em Ω. Assim, como observado em (3.6), $\mathcal{F}(u_n) = \overline{\mathcal{F}}(u_n)$. Agora defina

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_E} \qquad n \geq 1.$$

Substituindo $u_n = v_n \|u_n\|_E$ em (3.7), obtemos a seguinte igualdade

$$v_n = \mathrm{L}\left(\frac{\lambda_n \mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E}\right). \tag{3.9}$$

Mostraremos agora que $\mathcal{F}(u_n)/M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E$ é limitada em $C(\overline{\Omega})$. De fato, sabemos que $a(x) = D_u^+ f(x,0) > 0$. Por outro lado, como

$$D_u^+ f(x,0) = \lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s) - f(x,0)}{s},$$

a hipótese (f_1) nos garante que,

$$a(x) = \lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} > 0.$$

Desde que $x \in \overline{\Omega}$, o limite acima é uniforme em x. Assim, pela definição de limite, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ (que não depende de x), tal que se $0 < s < \delta$ então

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x,s)}{s} - a(x)\right| &< \varepsilon \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x,s)}{s}\right| - |a(x)| &< \varepsilon \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x,s)}{s}\right| &< \varepsilon + a(x). \end{aligned}$$

Fixado $\varepsilon > 0$, por exemplo $\varepsilon = 1$, existe um $\delta(1) > 0$, tal que

$$0 < s < \delta \Rightarrow |f(x,s)| \leq (1 + a(x))\,|s|\,. \tag{3.10}$$

Como $\|u_n\|_E \to 0$, para n suficiente grande, tem-se que

$$\|u_n\|_E = \sup_{\overline{\Omega}} |u_n(x)| + \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u_n(x)| < \delta. \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11), concluímos que para n suficientemente grande a seguinte desigualdade ocorre

$$|f(x,u_n(x))| \leq (1 + a(x))\,|u_n(x)| \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$\frac{|\mathcal{F}(u_n(x))|}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} = \frac{|f(x,u_n(x))|}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \leq (1+a(x))\frac{|u_n(x)|}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \leq (1+a(x))\frac{1}{M(\|u_n\|^2)}.$$

Mas, como $m_0 \leq M(s)$ para todo $s \geq 0$ temos

$$\frac{|\mathcal{F}(u_n(x))|}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \leq (1+a(x))\frac{1}{m_0}.$$

Deste modo está provada a afirmação. Agora, sabendo que o operador L é compacto, retornando à equação (3.9), temos que v_n converge a menos de subsequência em E, digamos

$$v_n \to \overline{v}, \tag{3.12}$$

com $\overline{v} \geq 0$ em Ω e $\|v\|_E = 1$. Além disso, perceba que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \to \frac{D_u^+ f(x,0)\overline{v}}{M(0)} \quad \text{em } C(\overline{\Omega}).$$

Com efeito, como vimos $u_n \geq 0$ e portanto $\mathcal{F}(u_n) = f(x,u_n)$ é diferenciável. Assim, temos que

$$\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}'(0)v + r(v),$$

com

$$\frac{r(v)}{\|v\|_E} \to 0 \ \text{ quando } \|v\|_E \to 0. \tag{3.13}$$

Em particular, tomando $v = u_n$ e dividindo a igualdade acima por $M(\|u\|^2)\,\|u\|_E$, e lembrando que $F'(0) = D_u^+ f(x,0)$ segue que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} = \frac{D_u^+ f(x,0)u_n}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} + \frac{r(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E}.$$

Lembrando que $v_n = u_n / \|u_n\|_E$, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|} = \frac{D_u^+ f(x,0)v_n}{M(\|u_n\|^2)} + \frac{r(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E}.$$

Passando a expressão acima ao limite com $n \to \infty$ e utilizando (3.12) concluímos que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \to \frac{D_u^+ f(x,0)\overline{v}}{M(0)} \quad \text{em } C(\overline{\Omega}).$$

Assim, passando a equação (3.9) ao limite, e usando as convergências (3.8) e (3.12) obtemos que

$$\overline{v} = \mathrm{L}\left(\frac{\overline{\lambda} D_u^+ f(x,0)\overline{v}}{M(0)}\right),$$

e pela definição do operador L, isso é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta\overline{v} = \dfrac{\overline{\lambda} D_u^+ f(x,0)\overline{v}}{M(0)} & \text{em } \Omega, \\ \overline{v} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\overline{v} \geq 0$ e $\overline{v} \neq 0$, isso implica que $\overline{\lambda} \in J$ é autovalor principal do problema (3.5). Pela unicidade deste autovalor $\overline{\lambda} = \Lambda_1$, mas isso é uma contradição, pois por hipótese $\Lambda_1 \notin J$.

□

Do Lema 3.1 é possível calcular o índice de $F(\lambda,.)$ para $\lambda < \Lambda_1$. Precisamente temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Para cada $\lambda \in [0,\Lambda_1)$, temos que $i(F(\lambda,\cdot),B_r(0),0) = 1$.*

Demonstração. Fixemos $\overline{\lambda} \in [0,\Lambda_1)$ e considere $J = [0,\overline{\lambda}]$. Defina também a seguinte homotopia $h : [0,1] \times B_r(0) \to E$ dada por

$$h(t,u) = u - \frac{t\lambda \mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|)}.$$

Aplicando o Lema 3.1 para o intervalo J, temos que existe um $\delta > 0$, tal que

$$u - \frac{t\lambda \mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)} \neq 0, \quad \forall\, u \in E,\ \forall t \in [0,1],\ \forall \lambda \in J,$$

com $0 < \|u\| \leq \delta$. Note que, isso nos diz que h é admissível, isto é, $0 \notin (h(t,.))(\partial B_r(0))$ onde $r \in (0,\delta)$, e que 0 é solução isolada. Desta forma, da invariância homotópica, segue que

$$d(F(\lambda,\cdot),B_r(0),0) = d(h(1,.),B_r(0),0) = d(h(0,.),B_r(0),0) = d(I,B_r(0),0) = 1.$$

Como 0 é solução isolada, temos que

$$i(F(\lambda,\cdot),B_r(0),0) = 1.$$

□

Para calcular o índice no caso em que $\lambda > \Lambda_1$, precisamos do seguinte Lema auxiliar.

Lema 3.2. *Seja $\lambda > \Lambda_1$. Então, existe $\delta > 0$ tal que*

$$F(\lambda,u) \neq \tau\varphi_1, \quad \forall \tau \geq 0 \ \ e \ \ 0 < \|u\|_E \leq \delta.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que isso não ocorra. Tomando $\delta = 1/n$ existem $u_n \in E$ e $\tau_n \geq 0$ tais que $\|u_n\|_E \leq 1/n$ e

$$u_n = \frac{\lambda \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)} + \tau_n\varphi_1. \tag{3.14}$$

Novamente usando a definição do operador L, obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{\lambda \overline{f}(x,u_n)}{M(\|u_n\|^2)} + \tau_n\lambda_1\varphi_1 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Seguindo a demonstração da Proposição 3.3, concluímos que $u_n \geq 0$. Por outro lado, definindo $v_n = u_n/\|u_n\|$ com $n \geq 1$, obtemos que $u_n = v_n\|u_n\|$. Substituindo a expressão obtida de u_n na equação (3.15), segue que

$$v_n = \frac{\lambda \mathrm{L}(\mathcal{F}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|} + \tau_n\varphi_1.$$

Note que, (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, a menos de subsequência, temos que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Porém, $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (ver Teorema A.8) logo,

$$v_n \to v \ \text{ em } \ \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Afirmamos que $\tau_n/\|u_n\|$ é limitada. De fato, tomando φ_1 como função teste em (3.15) e substituindo na formulação fraca, segue que

$$\int \nabla v_n \nabla \varphi_1 = \int \frac{\lambda \mathcal{F}(u_n)\varphi_1}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|} + \int \frac{\lambda_1 \tau_n \varphi_1^2}{\|u_n\|}. \tag{3.16}$$

Por outro lado, sabemos que $\|\varphi_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 1$ e

$$\int \nabla v_n \nabla \varphi_1 = \int v_n(-\Delta \varphi_1) = \int v_n \lambda_1 \varphi_1.$$

Substituindo essas informações em (3.2) e dividindo por λ_1, segue que

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|} = \int v_n \varphi_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int \frac{\mathcal{F}(u_n)\varphi_1}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{\|u_n\|} &= \limsup_{n\to\infty} \left[\int v_n \varphi_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int \frac{\mathcal{F}(u_n)\varphi_1}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|} \right] \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int v_n \varphi_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \liminf_{n\to\infty} \int \frac{\mathcal{F}(u_n)\varphi_1}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Usando a continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que $v_n \to v$ em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int v_n \varphi_1 = \left\langle \limsup_{n\to\infty} v_n, \varphi_1 \right\rangle = \langle v, \varphi_1 \rangle = \int v \varphi_1 \tag{3.18}$$

Para o segundo termo da desigualdade (3.17), queremos usar o Lema de Fatou (Teorema A.2). Note que $\mathcal{F}(u_n)/M(\|u_n\|^2)\|u_n\|$, é uma sequência de funções não negativas. Devemos apenas mostrar que $\mathcal{F}(u_n) \geq 0$, pois $M(\|u_n\|^2)\|u_n\| > 0$. De fato, como $u_n \to 0$ em E tem-se que dado $\delta > 0$ para n suficientemente grande, $0 \leq u_n(x) \leq \delta$, para todo $x \in \Omega$. Por outro lado, como

$$a(x) = D_u^+ f(x,0) > 0,$$

e $f(x,0) = 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $s \in (0, \delta_0)$, $f(x,s) > 0$. Logo, para n suficientemente grande

$$\mathcal{F}(u_n) = f(x, u_n(x)) > 0,$$

como queríamos demonstrar. Análogo ao Lema 3.1, temos que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|} \to \frac{a(x)v}{M(0)} \text{ em } C(\overline{\Omega}).$$

Assim, usando o Lema de Fatou (Teorema A.2) e a convergência (3.2), (3.17) nos fornece que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{\|u_n\|} \le \int v\overline{\varphi}_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \frac{a(x)v\varphi_1}{M(0)} < +\infty.$$

Portanto, temos que $\tau_n/\|u_n\|$ é de fato limitada. Defina agora, $z_n = u_n/\|u_n\|_E$. Note que $\tau_n/\|u_n\|_E$ também é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois E está imerso em $H_0^1(\Omega)$. Daí,

$$\|u_n\| \le C\,\|u_n\|_E\,,$$

e portanto

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|_E} \le C\frac{\tau_n}{\|u_n\|} < \infty.$$

Deste modo existe $\tau^* \ge 0$ tal que a menos de subsequência

$$\tau_n/\|u_n\|_E \to \tau^*.$$

Dividindo a equação (3.14) por $\|u_n\|_E$, obtemos que

$$z_n = \mathrm{L}\left(\frac{\lambda\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E}\right) + \frac{\tau_n\varphi_1}{\|u_n\|_E}.$$

Como, $\lambda\mathcal{F}(u_n)/M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E$ e $\tau_n\varphi_1/\|u_n\|_E$ são limitadas em $C(\overline{\Omega})$, segue da compacidade do operador L que, a menos de subsequência, z_n converge, digamos $z_n \to z$ em E. Portanto, usando a definição de L segue que

$$\begin{cases} -\Delta z_n = \dfrac{\lambda\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} + \dfrac{\tau_n\lambda_1\varphi_1}{\|u_n\|_E} & \text{em } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Agora, tomando $\overline{\varphi}_1$ como função teste e substituindo na formulação fraca do problema acima, tem-se que

$$\int \nabla z_n \nabla \overline{\varphi}_1 = \int \frac{\lambda \mathcal{F}(u_n)\overline{\varphi}_1}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} + \int \frac{\tau_n \varphi_1 \overline{\varphi}_1}{\|u_n\|_E}. \tag{3.20}$$

Queremos passar ao limite a igualdade acima, então justificaremos cada passagem. Inicialmente note que,

$$\int \nabla z_n \nabla \overline{\varphi}_1 \to \int \nabla z \nabla \overline{\varphi}_1. \tag{3.21}$$

Com efeito, como $z_n \to z$ em E e $E \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, temos que $z_n \to z$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, segue da continuidade do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que

$$\int \nabla z_n \nabla \overline{\varphi}_1 \to \int \nabla z \nabla \overline{\varphi}_1.$$

Análogo ao que fora feito no Lema 3.1, segue que

$$g_n(x) = \frac{\mathcal{F}(u_n)\overline{\varphi_1}}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \to \frac{a(x)z(x)\overline{\varphi_1}}{M(0)} = g(x) \quad \text{em } C(\overline{\Omega})$$

e, portanto converge $q.t.p$ em Ω. A convergência uniforme acima implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &< \varepsilon \\ g_n(x) &< \varepsilon + |g(x)| \in \mathcal{L}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Teorema A.1), segue que

$$\int \frac{\lambda \mathcal{F}(u_n)\overline{\varphi_1}}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} \to \frac{\lambda}{M(0)} \int a(x) z \overline{\varphi}_1 \tag{3.22}$$

Desta forma, passando a igualdade (3.20) ao limite e utilizando $\tau_n / \|u_n\|_E \to \tau^*$, (3.21) e (3.22), obtemos que

$$\begin{aligned} \int \nabla z \nabla \overline{\varphi_1} &= \frac{\lambda}{M(0)} \int a(x) z \varphi_1 + \tau^* \int \overline{\varphi_1}\varphi \\ &\geq \frac{\lambda}{M(0)} \int a(x) z \overline{\varphi_1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando integração por partes:

$$\int M(0)\nabla z\nabla\overline{\varphi_1} = \int zM(0)(-\Delta\overline{\varphi_1}) = \int \Lambda_1 a(x)\overline{\varphi_1}z.$$

Então,

$$\Lambda_1 \int a(x)\overline{\varphi_1}z \geq \lambda \int a(x)z\overline{\varphi_1}.$$

Como $\int a(x)z\overline{\varphi}_1 \neq 0$ isto implica que, $\Lambda_1 \geq \lambda$. Mas, isso é uma contradição pois $\lambda > \Lambda_1$.

□

Do Lema 3.2 podemos calcular o índice para $\lambda > \Lambda_1$. Mais precisamente segue o seguinte resultado.

Corolário 3.2. *Para $\lambda > \Lambda_1$, $i(F(\lambda,\cdot),B_r(0),0) = 0$.*

Demonstração. Consideremos $0 < r \leq \delta$, onde δ é o mesmo do Lema 3.2. Seja também a homotopia $h : [0,1]\times B_r(0) \to E$ dada por

$$h(t,u) = F(\lambda,u) - t\tau\varphi_1.$$

Note que, a homotopia é admissível em $[0,1]\times B_r(0)$. Além disso, o Lema anterior nos diz $h(1,.) \neq 0$ para todo $u \in \overline{B}_r(0)$. Portanto, segue da invariância homotópica do grau que

$$d(F(\lambda,.),B_r(0),0) = d(h(1,\cdot),B_r(0),0) = 0.$$

Consequentemente,

$$i(F(\lambda,.),B_r(0),0) = 0.$$

□

Munidos dos resultados acima, foi possível provar mudanças de índices. Assim, estamos aptos a provar o seguinte resultado que garante a existência de um continuum de soluções positivas que emana da solução trivial.

Teorema 3.1. *Se as hipóteses (f_1), (f_2) e (M_1) são satisfeitas, então $\Lambda_1 = M(0)\lambda[a]$ é um ponto de bifurcação a partir da solução trivial e de soluções positivas para o problema (P). Além disso, uma componente ilimitada $\mathfrak{C} \subset (0,\infty)\times E$ emana de $(\Lambda_1,0)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{T}$ é um operador compacto, pelos corolários anteriores, temos que há uma mudança de índice em $\lambda = \Lambda_1$. Assim, pelo Corolário 2.2, temos que $(\Lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação e segue que a componente que emana de $(\Lambda_1, 0)$ é ilimitada em $\mathbb{R} \times E$ ou existe $\lambda_1 \in \Sigma \setminus \{\Lambda_1\}$tal que $(\lambda_1, 0) \in \mathfrak{C}$. Provaremos que não existe $\lambda_1 \in \Sigma \setminus \{\Lambda_1\}$ tal que $(\lambda_1, 0) \in \mathfrak{C}$. De fato, suponhamos por contradição que isto ocorre. Então, existe (λ_n, u_n) tal que $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_1, 0)$ e além disso,

$$u_n = \frac{\lambda_n \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)}.$$

Defina agora $v_n = u_n / \|u_n\|_E$. Então, substituindo $u_n = v_n \|u_n\|_E$ na equação acima obtemos que

$$v_n = \frac{\lambda_n \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E}.$$

Agora procedendo com as contas feitas no Lema 3.1 obtemos uma contradição. Portanto, a componente que emana de $(\Lambda_1, 0)$ é ilimitada. Para finalizar a demonstração vamos mostrar que $\mathfrak{C} \subset (0, \infty) \times E$. Com efeito, a equação (P) com $\lambda = 0$ se reduz a

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $M(\|u\|^2) > 0$, obtemos que o problema acima possui apenas a solução trivial. Portanto, $\mathfrak{C}$ não pode cruzar o eixo $\lambda = 0$. Logo, $\mathfrak{C} \subset (0, \infty) \times E$. □

3.3 Bifurcação No Infinito

Aqui estaremos concentrados em apresentar os resultados de bifurcação no infinito. Para isso, não precisamos criar uma teoria, como foi feito no Capítulo 2, basta fazer uma mudança de variável e aplicar, por exemplo, o Corolário 2.2. Vamos seguir os passos da seção anterior, ou seja, iremos provar mudanças de índices. Destacamos que para os Lemas 3.3 e 3.4 usamos argumentos inspirados pelos trabalhos Ambrosseti e Hess [6] e Arcoya, Carmona e Pellacci [8], respectivamente.
Primeiramente vamos tornar preciso o conceito de bifurcação a partir do infinito. Consideremos E_1 espaço de Banach

Definição 3.1. *Dizemos que $\lambda^* \in \mathbb{R}$ é um ponto de bifurcação do infinito para $F(\lambda,u)=0$, se existe uma sequência $(\lambda_n,u_n) \in \mathbb{R}\times E_1$ tais que $F(\lambda_n,u_n)=0$,*

$$\lambda_n \to \lambda^*, \quad e \quad \|u_n\|_{E_1} \to \infty.$$

A partir de agora vamos considerar,

$$F(\lambda,u) = u - \lambda\mathcal{T}u,$$

com $\mathcal{T}$ sendo o operador compacto da seção anterior. A seguinte mudança de variável que será de suma importância ao longo desta seção,

$$z = \frac{u}{\|u\|_E^2}, \quad u \neq 0.$$

Logo, temos que

$$\left.\begin{array}{l} F(\lambda,u)=0 \\ u\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z - \|z\|_E^2\,\lambda\mathcal{T}\left(\dfrac{z}{\|z\|_E^2}\right) = 0, \\ z \neq 0. \end{array}\right.$$

Portanto, se definirmos $\overline{F}:\mathbb{R}\times E_1 \to E$ dada por

$$\overline{F}(\lambda,z) = \begin{cases} z - \|z\|_E^2\,\lambda\mathcal{T}\left(\dfrac{z}{\|z\|_E^2}\right) & \text{se } z\neq 0, \\ 0 & \text{se } \ z=0, \end{cases}$$

vale o seguinte resultado que relaciona de certa forma bifurcação na origem com a bifurcação no infinito após uma mudança de variável.

Proposição 3.4. *Assumindo que $F:\mathbb{R}\times E \to E$ dada por $F(\lambda,u)=u-\lambda\mathcal{T}(u)$. Temos que $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$ é ponto de bifurcação a partir do infinito de $F(\lambda,u)=0$ se, e somente se, λ_∞ é ponto de bifurcação a partir da solução trivial de $\overline{F}(\lambda,z)=0$.*

Demonstração. Iniciamos observando que valem as seguintes equivalências: λ_∞ é ponto de bifurcação do infinito de $F(\lambda,u)=0$ se, e somente se, existe uma sequência $(\lambda_n,u_n)\in\mathbb{R}\times E_1$ tais que

$$\begin{cases} F(\lambda_n,u_n)=0, \ \forall n \\ (\lambda_n,\|u_n\|_E) \to (\lambda_\infty,+\infty), \\ u_n \neq 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Fazendo agora a mudança de variável $z_n = u_n / \|u_n\|_E^2$, conforme o comentário acima, temos que (3.23) é equivalente a

$$\begin{cases} \overline{F}(\lambda_n, z_n) = 0, \ \forall n \\ (\lambda_n, \|z_n\|_E) \to (\lambda_\infty, 0), \\ z_n \neq 0, \end{cases}$$

o que é equivalente a dizer que λ_∞ é ponto de bifurcação a partir da origem para $\overline{F}(\lambda, u) = 0$. $\square$

Como mencionado no início desta seção, provaremos mudanças de índices considerando a mudança de variável apresentada acima. Aqui, será necessário utilizar a hipótese (M_∞).

E começamos com o seguinte resultado.

Lema 3.3. *Assuma (M_∞) e seja $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo compacto com $\Lambda_\infty \notin J$. Então, existe um número real $R > 0$ tal que,*

$$F(\lambda, u) \neq 0 \ \ \forall u \in E; \ \ \|u\| \geq R, \ \ \forall \lambda \in J.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que isto não ocorre. Então, existem $(u_n) \subset E$ com $\|u_n\|_E \to +\infty$ em E e $(\lambda_n) \subset J$ tais que, $F(\lambda_n, u_n) = 0$. Isto é,

$$u_n - \frac{\lambda_n \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)} = 0.$$

Como J é compacto, podemos assumir que, a menos de subsequência, $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ em J. Analogamente ao que foi efetuado na seção anterior, temos pela Proposição 3.3 que $u_n \geq 0$ em Ω. Defina $v_n = u_n / \|u_n\|_E$. Isto implica que $u_n = v_n \|u_n\|_E$. Substituindo na equação acima obtemos que

$$v_n = \lambda_n \mathrm{L}\left(\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E} \right).$$

Afirmamos que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E},$$

é limitada em $C(\Omega)$. De fato, usando a hipótese (f_2) e a definição de v_n obtemos que

$$\frac{\mathcal{F}(u_n)}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E} = \frac{\lambda_n b(x) u_n + g(x, u_n(x))}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E} = \frac{\lambda_n b(x) v_n}{M(\|u_n\|^2)} + \frac{\lambda_n g(x, u_n(x))}{M(\|u_n\|^2)\, \|u_n\|_E},$$

Pela hipótese (M_∞), $1/M(\|u_n\|^2)$ é limitada. Além disso, (v_n) é limitada em $C(\overline{\Omega})$ pois

$$\|v_n\|_0 = \frac{\|u_n\|_0}{\|u_n\|_E} \leq \frac{\|u_n\|_0}{\|u_n\|_0} = 1.$$

Resta-nos mostrar, então, que,

$$\frac{g(x,u_n(x))}{\|u_n\|_E}$$

é limitada em $C(\overline{\Omega})$. De fato isso ocorre, pois pela hipótese (f_2) temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$|g(x,s)| < \varepsilon\,|s|\,,\ \ \forall s > A,\ \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Além disso, como g é regular podemos tomar $c = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}\times[0,A]} |g(x,s)|$. Logo,

$$|g(x,s)| \leq c,\ \ \forall x \in \overline{\Omega},\ \ s \in [0,A].$$

Assim, das duas desigualdades acima, obtemos que

$$|g(x,s)| \leq \varepsilon\,|s| + c\ \ \forall x \in \overline{\Omega},\ \ s \geq 0.$$

Em particular,

$$|g(x,u_n(x))| \leq \varepsilon u_n(x) + c.$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|_E$, obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{|\ g(x,u_n(x))\ |}{\|u_n\|_E} \leq \varepsilon v_n + \frac{c}{\|u_n\|_E},$$

e nossa afirmação segue pois, v_n é limitada em $C(\overline{\Omega})$.

Da compacidade do operador L, concluímos que, a menos de subsequência, v_n converge. Digamos $v_n \to \overline{v}$ em E. Como, $\|v_n\| = 1$ e $v_n \geq 0$ segue que $\|\overline{v}\|_E = 1$ e $\overline{v} \geq 0$ em Ω. Além disso, notemos o seguinte

$$v_n = \mathrm{L}\left(\frac{\lambda_n b(x) v_n}{M(\|u_n\|^2)} + \frac{\lambda_n g(x,u_n(x))}{\|u_n\|_E}\right). \tag{3.24}$$

Novamente pela definição do operador L temos

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \dfrac{\lambda_n b(x) v_n}{M(\|u_n\|^2)} + \dfrac{\lambda_n g(x,u_n(x))}{M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|_E} & \text{em } \Omega, \\ \bar{v} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, para toda $\phi \in H_0^1$ segue que

$$\int \nabla v_n \nabla \phi = \frac{\lambda_n}{M(\|u_n\|^2)} \int b(x) v_n \phi + \frac{\lambda_n}{M(\|u_n\|^2)} \int \frac{g(x,u_n(x))\phi}{\|u_n\|_E}. \tag{3.25}$$

Queremos agora, passar a igualdade acima ao limite. Inicialmente note que análogo ao que fora feito no Lema 3.2 tem-se que

$$\int \nabla v_n \nabla \phi \to \int \nabla \bar{v} \nabla \phi, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Similarmente, vale que

$$\int b(x) v_n \phi \to \int b(x) v \phi, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Afirmamos que

$$\int \frac{g(x,u_n(x))}{\|u_n\|_E} \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Com efeito, segue que

$$\frac{|g(x,u_n(x))|}{\|u_n\|_E} \leq \varepsilon v_n + \frac{c}{\|u_n\|_E} \leq \varepsilon + \frac{c}{\|u_n\|_E} \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Por outro lado, para cada $x \in \Omega$, se $u_n(x)$ for limitada tem-se que $g(x,u_n(x))$ também é, ou seja, existe $K > 0$ tal que $g(x,u_n(x)) \leq K$. Como $\|u_n\|_E \to \infty$ em E temos que

$$\frac{|g(x,u_n(x))|}{\|u_n\|_E} \leq \frac{K}{\|u_n\|_E} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Agora, caso $u_n(x)$ não seja limitada, existe uma subsequência $u_{n_j}(x) \to \infty$. Deste modo, podemos supor $u_{n_j}(x) \neq 0$. Assim, usando a hipótese (f_2) e que $v_n \to \bar{v}$ temos que

$$\frac{g(x,u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|_E} = \frac{g(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}}{u_{n_j}\|u_{n_j}\|_E} = \frac{g(x,u_{n_j}(x))v_{n_j}}{u_{n_j}} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.1) segue a nossa afirmação.

Logo, usando as convergências acima, a hipótese (M_∞) e que $\lambda_n \to \overline{\lambda}$, podemos passar a igualdade (3.25) ao limite a menos de subsequência, e obtemos que

$$\int \nabla \overline{v} \nabla \phi = \frac{\overline{\lambda}}{M_\infty} \int b(x) \overline{v} \phi.$$

Isto é, $\overline{v}$ é solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} -M_\infty \Delta \overline{v} = \overline{\lambda} b(x) \overline{v} & \text{em } \Omega, \\ \overline{v} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, como $v \geq 0$ e $v \neq 0$ segue da unicidade do autovalor principal que $\overline{\lambda} = \Lambda_\infty$ contradizendo nossa hipótese. □

Como consequência do resultado acima, segue o seguinte Corolário que nos fornece o valor do índice para $\lambda < \Lambda_\infty$.

Corolário 3.3. *Para* $\lambda \in (0, \Lambda_\infty)$, $i(\overline{F}(\lambda, \cdot), 0) = 1$.

Demonstração. Consideremos $J = [0, \lambda]$. Pelo Lema anterior, temos que existe $R > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$,

$$u - \lambda t \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)} \neq 0,$$

para todo $u \in E$ com $\|u\| \geq R$. Defina, $z = u / \|u\|_E^2$ com $u \neq 0$ então obtemos que $u = z / \|z\|_E^2$ e substituindo essa expressão na igualdade acima, segue que

$$\frac{z}{\|z\|_E^2} - t\lambda \frac{\mathrm{L}\left(\mathcal{F}\left(\frac{z}{\|z\|_E^2}\right)\right)}{M(\|u\|^2)} \neq 0 \Rightarrow z - t\|z\|_E^2 \lambda \frac{\mathrm{L}\left(\mathcal{F}\left(\frac{z}{\|z\|_E^2}\right)\right)}{M(\|u\|^2)} \neq 0,$$

para todo $z \in E$ com $0 < \|z\|_E \leq R^{-1}$, para todo $t \in [0,1]$. Assim, definindo a seguinte homotopia $h : [0,1] \times B_\varepsilon(0) \to E$ dada por

$$h(t,u) = z - t\|z\|_E^2 \lambda \frac{\mathrm{L}\left(\mathcal{F}\left(\frac{z}{\|z\|_E^2}\right)\right)}{M(\|u\|^2)} \neq 0,$$

temos para $0 < \varepsilon \leq R^{-1}$ que a homotopia é admissível e o Lema acima nos diz que 0 é solução isolada. Segue então da invariância homotópica do grau que

$$d(\overline{F}(\lambda,u),B_{\varepsilon}(0),0) = d(I,B_{\varepsilon}(0),0) = 1.$$

Consequentemente,

$$i(\overline{F}(\lambda,u),0) = 1 \quad \forall \lambda \in (0,\Lambda_{\infty}).$$

□

Por outro lado, temos também os seguintes resultados.

Lema 3.4. *Assuma* (M_{∞}) *e suponha que* $\lambda > \Lambda_{\infty}$. *Então, existe um* $R > 0$ *com a seguinte propriedade*

$$F(\lambda,u) \neq \tau\varphi_1, \ \forall u \in E; \ \|u\|_E \geq R, \ \forall \tau \geq 0.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que isso não ocorra. Então, existem $(u_n) \subset E$, e $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$F(\lambda,u_n) = \tau_n\varphi_1, \ \ \tau_n \geq 0 \ \text{ e } \ \|u_n\| \to +\infty.$$

Em particular,

$$u_n = \frac{\lambda \mathrm{L}(\overline{\mathcal{F}}(u_n))}{M(\|u_n\|^2)} + \tau_n\varphi_1.$$

Pela definição do operador L, segue que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{\lambda \overline{f}(x,u_n)}{M(\|u_n\|^2)} + \tau_n\lambda_1\varphi_1 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Pela Proposição 3.3, $u_n \geq 0$. Além disso, segue do Teorema De Giorgi-Stampacchi (ver [25, Theorem 7.3]) e [15, 13 Theorem II]) mais regularidade elíptica (Teorema A.6) que $\|u_n\| \to \infty$. Defina agora $z_n = u_n/\|u_n\|$. Assim, da limitação de z_n em $H_0^1(\Omega)$ e da reflexibilidade de $H_0^1(\Omega)$ temos que

$$z_n \rightharpoonup z \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)$$

com $z \geq 0$. Tomando agora $\varphi_1 / \|u_n\|$ como função teste e substituindo na formulação fraca de (3.26) obtemos que

$$\int \lambda_1 z_n \varphi_1 = \int \nabla u_n \frac{\nabla \varphi_1}{\|u_n\|} = \frac{\lambda}{M(\|u_n\|)} \int \frac{f(x,u_n)\varphi_1}{\|u_n\|} + \frac{\tau_n \lambda_1}{\|u_n\|} \int \varphi_1^2.$$

Dividindo a equação acima por λ_1 e lembrando que $\|\varphi_1\|_{\mathcal{L}^2} = 1$, tem-se que

$$\int z_n \varphi_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1 M(\|u_n\|)} \int \frac{f(x,u_n)\varphi_1}{\|u_n\|} + \frac{\tau_n}{\|u_n\|}.$$

Afirmamos que $\tau_n / \|u_n\|$ é limitada. De fato, notemos que

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|} = \int z_n \varphi_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1 M(\|u_n\|)} \int \frac{f(x,u_n)\varphi_1}{\|u_n\|} \leq \int |z_n \varphi_1| + \frac{\lambda}{\lambda_1 M(\|u_n\|^2)} \int \frac{|f(x,u_n)\varphi_1|}{\|u_n\|}.$$

Lembrando que $f(x,u_n) = b(x)u_n + g(x,u_n)$, nós temos que

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|} \leq \int |z_n \varphi_1| + \frac{\lambda}{\lambda_1 M(\|u_n\|^2)} \int |b(x) z_n \varphi_1| + \frac{\lambda}{\lambda_1 M(\|u_n\|^2)} \int \frac{|g(x,u_n)\varphi_1|}{\|u_n\|}.$$

Analogamente ao Lema 3.3 prova-se que $g(x,u_n)/\|u_n\|$ é limitada em $C(\overline{\Omega})$. Por outro lado, usando a hipótese (M_1) temos que $1/M(\|u_n\|^2) \leq 1/m_0$. Além disso, $b > 0$ é regular, portanto, limitada. Deste modo, usando a desigualdade de Holder (Teorema A.1), $\|\varphi_1\|_{\mathcal{L}^2} = 1$ e, a limitação de $g(x,u_n)/\|u_n\|$, b e z_n. Obtemos uma constante K tal que

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|} \leq K.$$

Assim, a menos de subsequência, $\tau_n / \|u_n\| \to \tau^*$ com $\tau^* \geq 0$. Tomando agora $(z_n - z)/\|u_n\|$ como função teste em (3.26) e substituindo na formulação fraca obtemos que

$$\int \nabla z_n \nabla (z_n - z) = \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int \frac{f(x,u_n)(z_n - z)}{\|u_n\|} + \frac{\tau_n}{\|u_n\|} \int \varphi_1 (z_n - z).$$

Subtraindo na igualdade acima a seguinte expressão $\int \nabla z \nabla (z_n - z)$ obtemos que

$$\|z_n - z\|^2 = \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int \frac{f(x,u_n)(z_n - z)}{\|u_n\|} + \frac{\tau_n}{\|u_n\|} \int \varphi_1 (z_n - z) - \int \nabla z \nabla (z_n - z).$$

Novamente substituindo a expressão de $f(x,u_n)$ segue que

$$\begin{aligned}\|z_n - z\|^2 &= \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int b(x) z_n (z_n - z) + \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int \frac{g(x,u_n)(z_n - z)}{\|u_n\|} \\ &+ \frac{\tau_n}{\|u_n\|} \int \varphi_1 (z_n - z) - \int \nabla z \nabla (z_n - z)\end{aligned}$$

Usando a limitação de b, $g(x,u_n)/\|u_n\|$, $\tau_n/\|u_n\|$ e a hipótese (M_1) adquirimos o seguinte

$$\begin{aligned}\|z_n - z\|^2 &\leq \frac{\lambda}{m_0} \|b\|_0 \int |z_n| \, |z_n - z| + \frac{\lambda}{m_0} K_1 \int |z_n - z| + K \int \varphi_1 \, |z_n - z| \\ &- \int \nabla z \nabla (z_n - z),\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $K_1 = \varepsilon v_n + c/\|u_n\|$. Como $z_n \rightharpoonup z$ em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (ver Teorema A.8) concluímos que

$$z_n \to z \quad \text{em} \quad \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Assim, usando a desigualdade de Holder (Teorema A.1), valem as seguintes igualdades

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{m_0} K_1 \int |z_n| \, |z_n - z| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int \varphi_1 \, |z_n - z| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{m_0} K_2 \int |z_n - z| = 0.$$

Note também que

$$\lim_{n\to\infty} \int \nabla z \nabla (z_n - z) = \lim_{n\to\infty} \langle z, z_n - z \rangle = 0.$$

Portanto, passando o limite $n \to \infty$ em (3.27) e utilizando as convergências anteriores concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|^2 = 0,$$

ou seja, $z_n \to z$ em $H_0^1(\Omega)$.
Análogo ao que foi feito no Lema 3.3 pode-se provar que

$$\frac{g(x,u_n(x))}{\|u_n\|} \to 0, \ q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Tomando como função teste $v/\|u_n\|$ em (3.26) e substituindo na formulação fraca obtemos

$$\int \nabla z_n \nabla v = \int \frac{\lambda b(x) z_n v}{M(\|u_n\|^2)} + \int \frac{\lambda g(x,u_n)v}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|} + \int \frac{\lambda_1 \tau_n \varphi_1 v}{\|u_n\|} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, as convergências acima demonstradas e a hipótese (M_∞) segue que

$$\begin{aligned}
\int \nabla z \nabla v &= \lim_{n\to\infty} \int \nabla z_n \nabla v = \lim_{n\to\infty} \left(\int \frac{\lambda b(x) z_n v}{M(\|u_n\|^2)} + \int \frac{\lambda g(x,u_n)v}{M(\|u_n\|^2)\|u_n\|} + \int \frac{\lambda_1 \tau_n \varphi_1 v}{\|u_n\|} \right) \\
&= \int \frac{\lambda b(x) z v}{M_\infty} + \int \tau^* \lambda_1 \varphi_1 v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Ou seja, z é solução fraca da seguinte equação

$$\begin{cases} -M_\infty \Delta z = \lambda b(x) z + M_\infty \tau^* \lambda_1 \varphi_1 & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\psi = v$ em (3.28) e utilizando uma integração por partes segue que,

$$\int -M_\infty \Delta \psi z = \int \nabla z \nabla \psi = \int \lambda b(x) z \psi + \tau^* \int M_\infty \lambda_1 \varphi_1 \psi \geq \lambda \int b(x) z \psi.$$

Por outro lado, pela definição de ψ, temos que

$$\begin{cases} -M_\infty \Delta \psi = \Lambda_\infty b(x) \psi & \text{em } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\Lambda_\infty \int b(x) z \psi \geq \lambda \int b(x) z \psi.$$

Uma vez que $\int b(x) z \psi \neq 0$, isto implica que,

$$\Lambda_\infty \geq \lambda.$$

O que é uma contradição com nossa hipótese.

$\square$

Como consequência do Lema acima, conseguimos calcular o índice para $\lambda > \Lambda_\infty$. Mais precisamente

Corolário 3.4. *Para* $\lambda > \Lambda_\infty$*,* $i(\overline{F}(\lambda,\cdot),0) = 0$*.*

Demonstração. De fato, pelo Lema acima sabemos que existe $R > 0$ tal que

$$F(\lambda,u) \neq \tau \|u\|_E^2 \varphi_1,$$

para todo $u \in E$ com $\|u\|_E \geq R$, e $t \in [0,1]$. Isto é,

$$u - \lambda \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(u))}{M(\|u\|^2)} \neq \tau \|u\|_E^2 \varphi_1.$$

Defina $z = u/\|u\|_E^2$, então obtemos que $u = z/\|z\|_E^2$ e $\|u\|^2 = 1/\|z\|_E^2$. Substituindo essas expressões na equação acima, obtemos que

$$\frac{z}{\|z\|_E^2} - \lambda \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(z/\|z\|_E^2)}{M(\|u\|^2)} \neq \frac{1}{\|z\|_E^2} t\varphi_1 \;\Rightarrow\; z - \lambda \|z\|_E^2 \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(z/\|z\|_E^2)}{M(\|u\|^2)} \neq \tau\varphi_1.$$

Defina agora a seguinte homotopia, $h : [0,1] \times B_\varepsilon(0) \to E$ dada por

$$h(t,z) = z - \lambda \|z\|_E^2 \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(z/\|z\|_E^2)}{M(\|u\|^2)} - t\tau\varphi_1,$$

para todo $0 < \|z\|_E < R^{-1}$, e para todo $t \in [0,1]$. Assim, nós temos que h é admissível em $[0,1] \times B_\varepsilon(0)$, com $\varepsilon \in (0,R^{-1})$ pois, o Lema acima nos mostra que $h(t,.) \neq 0$ para todo $z \in \partial B_\varepsilon(0)$. Segue assim da invariância homotópica do grau que

$$d(\overline{F}(\lambda,\cdot),B_\varepsilon(0),0) = d(h(1,.),B_\varepsilon(0),0) = 0.$$

Consequentemente,

$$i(\overline{F}(\lambda,u),0) = 0.$$

□

Munidos destes resultados conseguimos provocar mudanças de índices, assim como destacado no início desta seção podemos então provar o principal resultado desta seção. Que nos diz que Λ_∞ é ponto de bifurcação do infinito, e que emana um continuum deste ponto.

Teorema 3.2. *Assuma* (f_2) *e* (M_∞)*. Então,* $\Lambda_\infty = M_\infty\lambda_1[b]$ *é um ponto de bifurcação do infinito de soluções positivas para o problema* (P)*. Além disso, uma componente ilimitada* $\mathfrak{C}_\infty \subset (0,\infty) \times E$ *emana de* (Λ_∞,∞)*.*

Demonstração. Vamos provar que Λ_∞ é ponto de bifurcação no infinito. De fato, seja

$$F(\lambda,u) = u - \lambda \mathcal{T}u = u - \lambda \frac{\mathrm{L}(F(u))}{M(\|u\|^2)}$$

Como fora feito no início desta seção, definindo $z = u/\|u\|_E^2$ obtemos que,

$$\overline{F}(\lambda,u) = z - \lambda \|z\|_E^2 \mathcal{T}\left(\frac{z}{\|z\|_E^2}\right) = z - \lambda \|z\|_E^2 \frac{\mathrm{L}(\mathcal{F}(z/\|z\|_E^2)}{M(\|u\|^2)},$$

provocamos com os Corolários 3.3 e 3.4 mudanças de índice para o operador modificado via mudança de variável e assim, temos que Λ_∞ é ponto de bifurcação a partir da solução trivial para $\overline{F}(\lambda,u) = 0$. Além disso, a partir de $(\Lambda_\infty, 0)$ emana um continuum de soluções positivas $\mathfrak{C}'$. Consequentemente, pela Proposição 3.4 segue que Λ_∞ é ponto de bifurcação no infinito para o problema original. E, o continuum $\mathfrak{C} = \{(\lambda,u) : u = z/\|z\|^2 (\lambda,u) \in \mathfrak{C}'\}$ é um continuum ilimitado de F que emana de (Λ_∞, ∞). Analogamente, ao que foi feito no Teorema 3.1, segue que $\mathfrak{C}_\infty \subset (0,+\infty) \times E$.

□

Adeptos dos Teoremas acimas demonstrados estamos aptos a provar o seguinte resultado central deste capítulo que será provado na seção abaixo.

3.4 Aplicações

O principal objetivo dessa seção, é apresentar alguns exemplos considerando a não linearidade f e alguns resultados que dependem do comportamento da função M. Mais especificamente, vamos estudar o comportamento global dos contínuos obtidos na Seção anterior e, consequentemente, obter resultados de existência de soluções positivas para certos valores de λ.

Nos próximos resultados usaremos a seguinte convenção.

Observação 3.3. Dado um continuum $\mathfrak{C}$ de soluções de (P) e $\overline{\Lambda} \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathfrak{C}$ encontra $(\overline{\Lambda}, +\infty)$ se existe uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathfrak{C}$ tal que $(\lambda_n, \|u_n\|_E) \to (\overline{\Lambda}, +\infty)$.

Dos Teoremas 3.1 e 3.2 segue o seguinte resultado que fornece diferentes bifurcações globais dependendo do comportamento de M.

Teorema 3.3. *Sejam (f_1), (f_2), (M_1) e considere $\mathfrak{C}$ o ramo de soluções positivas do problema (P) bifurcando de $(\Lambda_1, 0)$ obtido no Teorema 3.1.*

(i) Se a condições (M_∞) e (f_3) também forem satisfeitas, então $\mathfrak{C}$ encontra $(\Lambda_\infty, +\infty)$.

(ii) Se $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$ *então a projeção de* $\mathfrak{C}$ *no eixo* λ *é um intervalo ilimitado* $[l,+\infty)$ *com* $l \leq \Lambda_1$.

Demonstração. Vamos inicialmente provar (i).

Pelos Teoremas 3.1 e 3.2, sabemos que existem um ramo $\mathfrak{C}$ ilimitado bifurcando de $(\Lambda_1,0)$, bem como um ramo $\mathfrak{C}_\infty$ bifurcando de (Λ_∞,∞). Lembrando que $(\lambda,u)\in\mathfrak{C}$ implica que $\lambda>0$. Assim, para concluirmos a prova de (i) devemos mostrar que não existe soluções positivas para o problema (P) para $\lambda \gg 1$ mais especificamente para

$$\lambda > \lambda_1 \overline{M}/K,$$

onde $\overline{M} = \sup_{t\geq 0} M(t)$. Pois, sabendo que o problema (P) não tem soluções positivas para $\lambda \gg 1$ então, existe um $\overline{\lambda}$ tal que $\mathfrak{C}\subset(0,\overline{\lambda})\times E$, isso implica que $\mathfrak{C}$ é ilimitado na $\|.\|_E$, então existe $(\lambda_n,u_n)\in\mathfrak{C}$ com $\lambda_n\to\overline{\lambda}$ e $\|u_n\|_E\to\infty$. Como Λ_∞ é o único ponto de bifurcação a partir do infinito para (P) segue que $\Lambda_\infty = \overline{\lambda}$. Portanto, $\mathfrak{C}$ encontra $(\Lambda_\infty,+\infty)$.

Vamos então provar a afirmação. Suponha que (λ,u) é uma solução positiva para o problema (P). Tomando φ_1 como uma função teste, obtemos que

$$\lambda\int\varphi_1 f(x,u) = -M(\|u\|^2)\int\nabla\varphi_1\nabla u = \lambda_1 M(\|u\|^2)\int\varphi_1 u.$$

Pela hipótese (M_∞), temos que a função M é limitada superiormente. Assim, definindo $\overline{M} = \sup_{t\geq 0} M(t)$, nós temos que

$$\lambda\int\varphi_1 f(x,u) \leq \lambda_1\overline{M}\int\varphi_1 u.$$

Agora utilizando a hipótese (f_3), obtemos que

$$\lambda k\int\varphi_1 u \leq \lambda\int\varphi_1 f(x,u) \leq \lambda_1\overline{M}\int\varphi_1 u,$$

com a primeira desigualdade sendo estrita, a menos que $f(x,s)\equiv ks$. Isto implica então que

$$\lambda \leq \frac{\lambda_1\overline{M}}{k}. \tag{3.29}$$

Observe novamente que desigualdade é estrita, a menos que $f(x,s)\equiv ks$. Assim, finalizamos a prova de (i).

Provaremos agora (ii). Para isso, afirmamos que se $\lim_{t\to\infty} M(t) = +\infty$, então não há bifurcação a partir do infinito. Para tanto, mostraremos uma estimativa a priori para cada solução positiva de (P).

Começaremos provando a seguinte afirmação. Segue da hipótese (f_2) que existe um $K > 0$ tal que

$$f(x,s) \leq Ks \quad \forall s \geq 0. \tag{3.30}$$

De fato, sabemos desta hipótese que

$$f(x,s) = b(x)s + g(x,s) = \left(b(x) + \frac{g(x,s)}{s}\right)s, \tag{3.31}$$

com $\lim\limits_{s\to\infty} g(x,s)/s = 0$. Em particular, dado $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$|g(x,s)| \leq \varepsilon s \quad \forall s > A \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.32}$$

Combinando (3.31) e (3.32), para $s > A$, temos a seguinte estimativa

$$f(x,s) \leq (\|b\|_0 + \varepsilon)s. \tag{3.33}$$

Além disso, temos que

$$Df_s^+(x,0) = b(x) + g_s^+(x,0) < C_1,$$

onde $C_1 = \|b\|_0 + \left\|g_s^+(\cdot,0)\right\|_0$. Ou seja,

$$Df_s^+(x,0) = \lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} < C_1.$$

Isso implica que

$$|f(x,s)| < C_1 s, \tag{3.34}$$

sempre que $0 < s < \delta$. Agora definindo, $C_2 = \max\limits_{s\in[\delta,A],\, x\in\overline{\Omega}} f(x,s)/s$, temos que

$$\frac{f(x,s)}{s} \leq C_2, \ \ \forall s \in [\delta, A], \ \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.35}$$

Logo, tomando $K = \max\{C_1, C_2, \|b\|_0 + \varepsilon\}$ e $s = u$, obtemos (3.30). Seguindo a demonstração, provaremos agora a estimativa a priori. Seja $\lambda \geq 0$ e assuma que $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é uma solução positiva para λ. Tomando u como função teste, obtemos que

$$M(\|u\|^2)\,\|u\|^2 = M(\|u\|^2)\int |\nabla u|^2 = \lambda \int f(x,u)u, \tag{3.36}$$

Assim, usando (3.30), (3.36) pode ser reescrita como

$$M(\|u\|^2)\,\|u\|^2 \leq \lambda K \int u^2.$$

Segue da caracterização variacional do primeiro autovalor (Teorema A.5) que,

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{\|u\|^2}{\lambda_1}.$$

Logo,

$$M(\|u\|^2)\,\|u\|^2 \leq \lambda K \frac{1}{\lambda_1}\,\|u\|^2.$$

Isto é,

$$M(\|u\|^2) \leq \frac{\lambda K}{\lambda_1}.$$

Agora, como por hipótese $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$, temos que existe $C_\lambda > 0$ tal que

$$\|u\|^2 \leq C_\lambda. \tag{3.37}$$

Além disso, por regularidade elíptica temos que u também é limitada em E. De fato, pelo Teorema De Giorgi-Stampacchi (ver [25, Theorem 7.3]) e [15, Theorem II]) temos que

$$\|u_n\|_0 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|u_n\| \to \infty.$$

Note que isso implica que existe $K_\lambda > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_0 \leq K_\lambda \tag{3.38}$$

De fato, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria u_n solução de (P) tal que $\|u_n\|_0 > n$, mas isso implica que $\|u_n\| \to +\infty$, o que é uma contradição com (3.38). Definindo $h(x,u) = \lambda f(x,u)/M(\|u\|^2)$, temos que h é regular, pois f e M são regulares. Assim, obtemos que u

satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a hipótese (M_1) segue que

$$|h(x,u)| \leq \frac{\lambda}{m_0} |f(x,u)|,$$

por outro lado, usando (3.30) temos

$$|h(x,u)| \leq \frac{\lambda}{m_0} K |u|.$$

Assim,

$$\|h\|_0 \leq \overline{K} \|u\|_0 \leq K_2,$$

onde $K_2 = \lambda K K_1 / m_0$. Portanto, $h \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para todo $p > N/2$. Logo, pelo Teorema A.6 (de Agmon, Douglis e Nirenberg) $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$(Teorema A.7) e vale que

$$\|u\|_E \leq K_3 \|u\|_{W^{2,p}} \leq K_4 \|h\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u\|_0 \leq K_5(\lambda).$$

Ou seja, u também é limitada em E como queríamos demonstrar.

$\square$

(Vejamos na figura 3.1 os possíveis diagramas sugestivos de bifurcação para o Teorema acima).

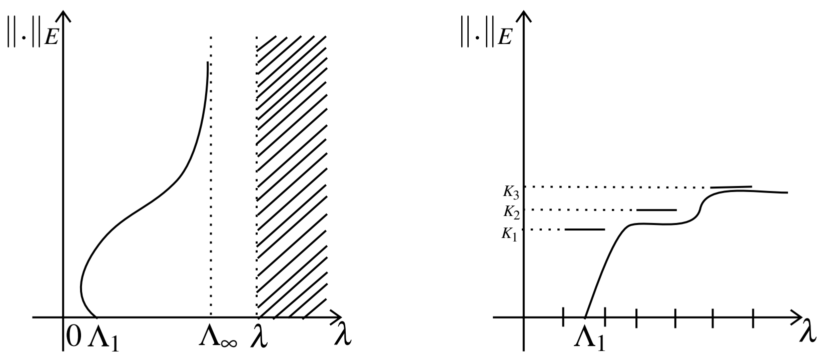

Figura 3.1 Possíveis diagramas de bifurcação usando as hipóteses do Teorema 3.3 (i) e (ii), respectivamente.

Seguem agora algumas consequências diretas do Teorema acima.

Corolário 3.5. *Assuma* (f_1)*,* (f_2) *e* (M_1)*,*

(i) Se as condições (M_∞) *e* (f_3) *forem válidas e* $\Lambda_1 < \Lambda_\infty$*, (resp.* $\Lambda_1 > \Lambda_\infty$*), então o Problema (P) tem solução positiva para todo* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_\infty)$ *(resp.*$(\Lambda_\infty, \Lambda_1)$*).*

(ii) Se $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$*, então existe uma solução positiva do problema* (P) *para todo* $\lambda > \Lambda_1$*.*

Demonstração. Vamos provar inicialmente (i).

Suponhamos por contradição que isso não ocorra, ou seja, existe $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_\infty)$ tal que o problema não possuí solução positiva. Como $\mathfrak{C} \subset (0,\lambda) \times E$ e $\mathfrak{C}$ é ilimitada, temos que que existe $\overline{\lambda} \in [0,\lambda]$ ponto de bifurcação no infinito, assim temos que

$$\overline{\lambda} \leq \lambda < \Lambda_\infty,$$

isto é, $\overline{\lambda} \neq \Lambda_\infty$ o que é uma contradição pois Λ_∞ é único ponto de bifurcação do infinito conforme o Teorema 3.2.

Vamos agora provar (ii). De fato, notemos que para todo $\lambda > \Lambda_1$ tem-se que λ está na projeção de $\mathfrak{C}$, isto é, existe $u \in E$ tal que (λ, u) é solução positiva para o problema (P), como queríamos demonstrar.

$\square$

(Vejamos nas figuras 3.2 e 3.3 os possíveis diagramas sugestivos de bifurcação para do Corolário acima).

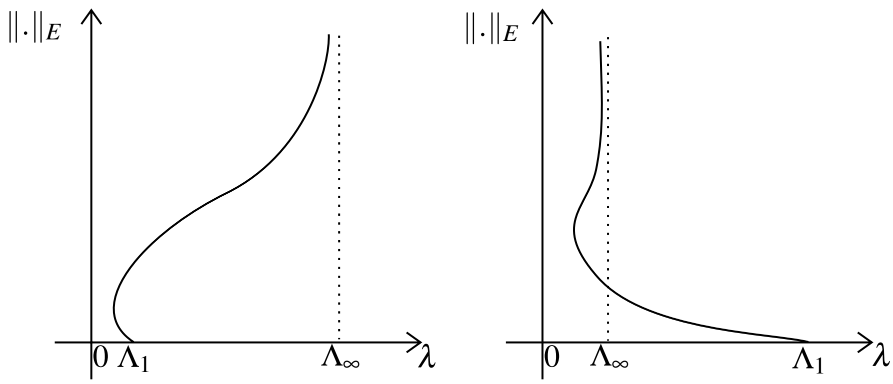

Figura 3.2 Possíveis diagramas de bifurcação usando as hipóteses do Corolário 3.5 (i) para $\Lambda_1 < \Lambda_\infty$ e $\Lambda_\infty < \Lambda_1$

Com os resultados acimas, segue agora alguns exemplos. O primeiro exemplo, é um caso particular em que encontra-se múltiplas soluções positivas, quando considerado $\Lambda_1 = \Lambda_\infty$.

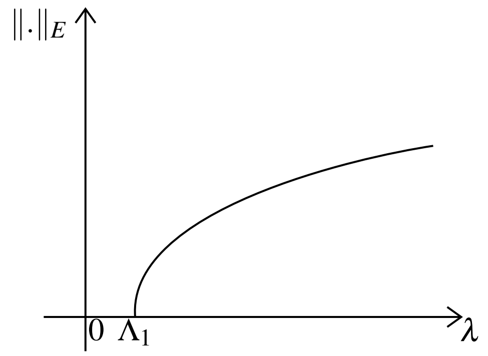

Figura 3.3 Possível diagrama de bifurcação usando as hipóteses do Corolário 3.5 (ii)

Exemplo 3.1. *Sejam* (f_1), (f_2), (f_3), (M_1) *e* (M_∞) *e suponha que* $\Lambda_1 = \Lambda_\infty$. *Além disso, se em* (f_3) *pudermos tomar*

$$k = \frac{\lambda_1 \overline{M}}{\lambda_1[b] M_\infty},$$

então (3.29) *se torna*

$$\lambda \leq \frac{\lambda_1 \overline{M} \lambda_1[b] M_\infty}{\lambda_1 \overline{M}} = \lambda_1[b] M_\infty = \Lambda_\infty = \Lambda_1.$$

Em particular, as bifurcações de zero e infinito estão ambos à esquerda do ponto de bifurcação, exceto para o caso linear $f(x,u) \equiv ku$, *pois neste caso, obtemos*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda k u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

E definindo $\overline{\lambda} = \lambda k / M(\|u\|^2)$, *obtém-se que*

$$\begin{cases} -\Delta u = \overline{\lambda} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

que possuí solução positiva se, e somente se, $\lambda_1 = \overline{\lambda}$.

Como consequência, pela natureza global de $\mathfrak{C}$ *existe* $\lambda^* < \Lambda_1$ *tal que o problema (P) tem pelo menos duas soluções para todo* $\lambda \in (\lambda^*, \Lambda_1)$.

(A figura 3.4 apresenta um possível diagrama de bifurcação para este exemplo).

Também podemos considerar outras não linearidades. Vamos nos limitar a esboçar dois casos específicos. Outros exemplos podem ser discutidos de maneira semelhante.

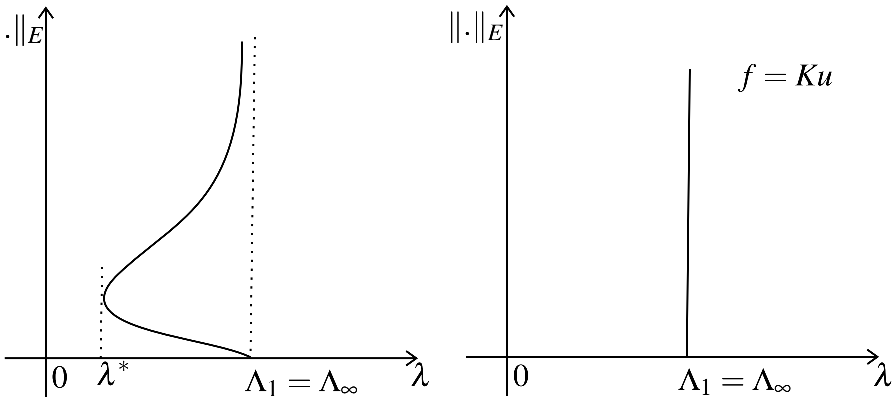

Figura 3.4 Possíveis diagramas de bifurcação sobre as hipóteses do exemplo 3.1

Exemplo 3.2. *Em primeiro lugar vamos considerar o caso em que a função M satisfaz* (M_1) *e* (M_∞) *e a não linearidade f satisfaz* (f_1), (f_2) *e* (f_3').

Seja u solução positiva do problema (P). *Afirmamos que* $\|u\|_0 \notin [s', s'']$. *De fato, suponha que* $\|u\|_0 \in [s', s'']$ *e consideremos o seguinte aberto* $D = \{x \in \Omega : s' < u(x) < s''\}$ *onde sua fronteira é dada por* $\partial D = \{x \in \Omega : u(x) = s' \text{ ou } u(x) = s''\}$. *Assim, temos*

$$\begin{cases} -\Delta u = \overline{\lambda} f(x,u) & \text{em } D, \\ u = s' \text{ ou } u = s'' & \text{sobre } \partial D, \end{cases}$$

onde, $\overline{\lambda} = \lambda / M(\|u\|^2)$. *Agora, pela hipótese* (f_3') *nós temos que para toda* $s \in [s', s'']$, $f(x,s) \leq 0$. *Assim,*

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & \text{em } D, \\ u = s' \text{ ou } u = s'' & \text{sobre } \partial D. \end{cases}$$

Logo, pelo princípio do máximo (Teorema A.9)

$$s'' = \max_{\partial D} u = \max_{\overline{D}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u < s'',$$

ou seja, $s'' < s''$, *mas isso é um absurdo. Portanto,* $\|u\|_0 \notin [s', s'']$. *Com isso, obtemos que* $\|u\|_0 < s'$ *para qualquer* (λ, u) *que emana de* $(\Lambda_1, 0)$. *Agora note que, pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 3.3* (ii), *existe* $\overline{s}' = \overline{s}'(s')$ *tal que* $\|u\|_E \leq \overline{s}'$ *para toda solução* (λ, u) *de* $\mathfrak{C}$.

Por outro lado, as soluções (λ, u) *que emanam do infinito em* Λ_∞ *satisfazem* $\|u\|_0 > \overline{s}'$. *Com efeito, caso contrário se existisse uma sequência* $(\lambda_n, u_n) \in \mathfrak{C}_\infty$ *com*

$$(\lambda_n, \|u_n\|_E) \to (\Lambda_\infty, +\infty) \text{ quando } n \to \infty,$$

e $\|u_n\|_0 < s''$, *pelos mesmos argumentos do Teorema 3.2* (ii) *existiria* $s^* = s^*(\overline{s}')$ *tal que* $\|u_n\|_E < s^*$ *o que é uma contradição, pois* $\|u_n\|_E \to \infty$. *Assim, podemos concluir que* $\mathfrak{C}$ *e* $\mathfrak{C}_\infty$ *não se interceptam, pois caso contrário*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\infty,$$

e neste caso $\mathfrak{C}$ *admitiria solução com norma maior que* $\overline{s}'$, *o que é uma contradição.*

Veja na figura (3.5) um diagrama sugestivo para o exemplo acima onde consideramos $\Lambda_1 < \Lambda_\infty$ e consideramos uma bifurcação supercrítica, ou seja, a direita do ponto de bifurcação. Porém, em qualquer caso, vejamos que o problema (P) tem pelo menos duas soluções para todo $\lambda > \max\{\Lambda_1, \Lambda_\infty\}$

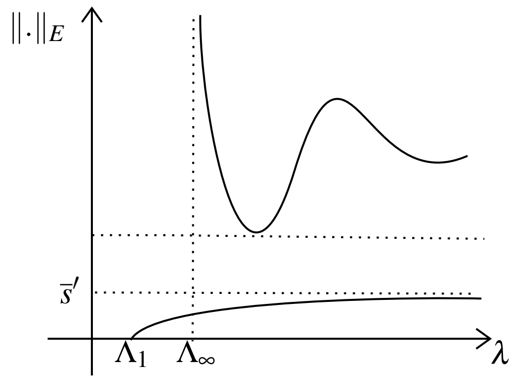

Figura 3.5 Possível diagrama de bifurcação para o Exemplo 3.2 com $\Lambda_1 < \Lambda_\infty$

Exemplo 3.3. *Como outro exemplo, para uma função que satisfaça a condição* (M_1), *consideramos o caso de uma não linearidade logística* $f(x,s) = f(s) = as - s^{p+1}$, *isto é, obtemos o seguinte problema*

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda(au - u^{p+1}) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.39}$$

com $a > 0$ *e* $p > 0$.

Note que neste caso $f(s) \le 0$ *se, somente se,* $as - s^{p-1} \le 0$ *e, isto só ocorre se, somente se,* $s \ge a^{1/p}$. *Assim, como no exemplo anterior, segue do princípio do máximo (Teorema*

A.9) que $\|u\|_0 \leq a^{1/p}$ *e por regularidade elíptica existe* $K = K(a)$ *tal que* $\|u\|_E \leq K$*, para toda solução positiva de* (3.39)*. Portanto, a projeção do ramo de soluções positivas para* (3.39) *provenientes de* $\Lambda_1 = M(0)\lambda_1[a]$ *contém o intervalo* $[\Lambda_1, +\infty)$ *e consequentemente o problema* (3.39) *tem pelo menos uma solução positiva para todo* $\lambda > \Lambda_1$.

(A figura 3.6 apresenta um possível diagrama de bifurcação para exemplo acima).

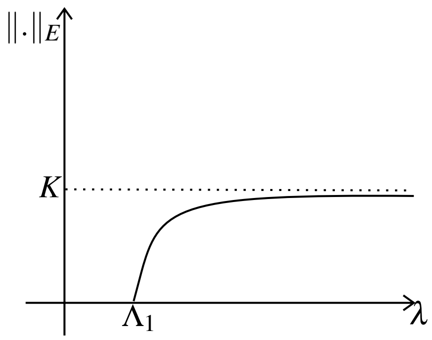

Figura 3.6 Possível diagrama de bifurcação para o Exemplo 3.3

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice apresentamos, os resultados auxiliares que foram utilizados durante o presente trabalho. Especialmente são alguns resultados clássicos de Teoria da Medida e Integração, Análise Funcional, Equações Diferenciais Parciais Elípticas e Topologia.

A.1 Resultados de Teoria da Medida e Integração

Consideraremos nesta seção $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.

Teorema A.1 (Desigualdade de Holder). *Sejam $f \in \mathcal{L}^P(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}.$$

Demonstração. Ver [9, 6.9 Desigualdade de Holder] □

Lema A.1 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1$ que satisfaz*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω,

(ii) Existe uma função $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω

Então $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Demonstração. Ver [9, Teorema 5.6] □

Teorema A.2 (Lema de Fatou). *Seja f_n uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(\Omega)$ que satisfaz*

(i) para todo n, $f_n \geq 0$ q.t.p.

(ii) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$ nós definimos $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \infty$. Então $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Demonstração. Ver [9, 4.8 Lema de Fatou] □

A.2 Resultados de Análise Funcional

Daqui em diante, dado um operador $T : E \to E$ linear e contínuo, vamos denotar por $\sigma(T)$ o espectro de T.

Teorema A.3 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja $T \in K(E)$. Então*

(i) $N(I-T)$ *tem dimensão finita.*

(ii) $R(I-T)$ *é fechado, mais precisamente* $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$

(iii) $N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$

(iv) $\dim N(I-T) = \dim N(I-T^*)$

Demonstração. Ver [10, Teorema 6.6] □

Lema A.2 (Lema de Riez)**.** *Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$ um subespaço fechado de E tal que $M \neq E$. Então*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \quad \textit{tal que} \quad \|u\| = 1 \ \ \textit{e} \ \ d(u,M) \geq 1-\varepsilon.$$

Demonstração. Ver [10, Lema 6.1] □

Lema A.3. *Seja $T \in K(E)$ e considere $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ uma sequência de números reais distintos de tal modo que*

$$\lambda_n \to \lambda,$$

então $\lambda = 0$.

Em particular os pontos $\sigma(T) \setminus \{0\}$ são todos isolados.

Demonstração. Ver [10, Lema 6.2] □

A.3 Resultados de EDP

Teorema A.4. *Para toda $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Possuí uma única solução em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [22, Exemplo 1, Capítulo 6] □

Considere o seguinte problema de autovalor

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com $a > 0$ e regular. O próximo resultado fornece informações sobre os autovalores de (P_λ).

Teorema A.5. *O problema (P_λ) admite uma sequência de autovalores λ_k tal que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \quad \lambda_k \to \infty.$$

Além disso, λ_1 tem multiplicidade algébrica 1 e satisfaz a seguinte caracterização:

$$\lambda_1 = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega a(x) u^2 \,\mathrm{d}x = 1 \right\}. \tag{A.1}$$

Demonstração. Ver [4, Teorema 1.3.8, Teorema 1.3.12]. □

Definição A.1. ***(Autovalor Principal ou Primeiro Autovalor)*** *Chamaremos $\lambda_1 > 0$ de autovalor principal de $-\Delta$ ou primeiro autovalor.*

Observação A.1. Segundo [16, p. 336] e [7, p. 9], a igualdade (A.1) é conhecida como caracterização variacional do primeiro autovalor ou fórmula de Rayleigh e é equivalente a

$$\lambda_1 = \min\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega a(x) u^2 \,\mathrm{d}x} : u \in W_0^1(\Omega) \text{ e } u \not\equiv 0 \right\}. \tag{A.2}$$

Teorema A.6 (de Agmon, Douglis e Nirenberg)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Se Ω é de classe C^2 e $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $\mathbf{C} > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \mathbf{C}\, \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1] □

Teorema A.7 (Imersões Gerais de Sobolev)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Assuma que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) Se

$$k < \frac{n}{p},$$

então $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$*, com*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

E vale a seguinte estimativa

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \leq \mathcal{C}\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

a constante $\mathcal{C}$ *dependendo apenas de* k, p, n *e* Ω*.*

(ii) Se

$$k > \frac{n}{p},$$

então $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, com*

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, \; se \; \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{qualquer número pertencente em } (0,1), \; se \; \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

E vale a seguinte estimativa

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \mathcal{C}\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

a constante $\mathcal{C}$ *depende apenas de* k, p, n *e* Ω*.*

Demonstração. Ver [16, Teorema 6 (Imersões de Sobolev)] □

Teorema A.8 (Rellich-Kondrashov)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado de de classe* C^1*. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$ *para* $p < N$ *e* $1 \leq q \leq p^* := \dfrac{Np}{N-p}$*,*

(ii) $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$ *para* $1 \leq q < \infty$ *(aqui temos* $p = N$*),*

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ *para* $p > N$*.*

Demonstração. Ver [22, Teorema 2.(Rellich-Kondrashov)]

□

Teorema A.9. *(Princípio do Máximo Fraco) Assuma que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*.*

(i) Se

$$-\Delta u \leq 0 \;\; em \;\; \Omega,$$

então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Ver [16, Teorema 1] □

A.4 Resultado de Topologia

Proposição A.1. *Sejam* $\mathbf{M}$ *um espaço métrico compacto e* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{M}$ *subconjuntos compactos e disjuntos. Então umas das alternativas se verifica.*

1. *Existe* $\mathfrak{C} \subset \mathbf{M}$*, um continuum unindo* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$.

2. $\mathbf{M} = \mathbf{M_A} \cup \mathbf{M_B}$*, onde* $\mathbf{M_A}$ *e* $\mathbf{M_B}$ *são compactos disjuntos tais que* $\mathbf{A} \subset \mathbf{M_A}$ *e* $\mathbf{B} \subset \mathbf{M_B}$.

Demonstração. Ver [21, Lema 3.2.3] □

Bibliografia

[1] Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. (1959). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. i. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 12(4):623–727.

[2] Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A., and Figueiredo, G. M. (2010). On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth. *Differ. Equ. Appl.*, 2(3):409–417.

[3] Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A., and Ma, T. F. (2005). Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type. *Comput. Math. Appl.*, 49(1):85–93.

[4] Ambrosetti, A. and Arcoya, D. (2011). *An introduction to nonlinear functional analysis and elliptic problems*, volume 82 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA.

[5] Ambrosetti, A. and Arcoya, D. (2017). Positive solutions of elliptic kirchhoff equations. *Advanced Nonlinear Studies*, 17(1):3–15.

[6] Ambrosetti, A. and Hess, P. (1980). Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 73(2):411–422.

[7] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Number v. 10 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

[8] Arcoya, D., Carmona, J., and Pellacci, B. (2001). Bifurcation for some quasilinear operators. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 131(4):733–765.

[9] Bartle, R. (1966). *The Elements of Integration*. Wiley Classics Library. Wiley.

[10] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.

[11] Carrier, G. F. (1945). On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3:157–165.

[12] Corrêa, F. J. S. A. and Figueiredo, G. M. (2006). On the existence of positive solution for an elliptic equation of kirchhoff type via moser iteration method. *Boundary Value Problems*, 2006:1–10.

[13] Corrêa, F. J. S. A. and Nascimento, R. G. (2009). On a nonlocal elliptic system of p-Kirchhoff-type under Neumann boundary condition. *Math. Comput. Modelling*, 49(3-4):598–604.

[14] DANCER, E. N. and Phillips, R. (1974). On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems. *Indiana University Mathematics Journal*, 23(11):1069–1076.

[15] De Giorgi, E. (1957). Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, pages 25–43.

[16] Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[17] Fonseca, I. and Gangbo, W. (1995). *Degree Theory in Analysis and Applications*. Oxford Lecture Mathematics and. Clarendon Press.

[18] Kesavan, S. (2009). *Functional Analysis*. Texts and Readings in Mathematics. Hindustan Book Agency.

[19] Kirchhoff, G. (1883). Mechanik, teubner, leipzig. *Kirchhoff G*.

[20] Kreyszig, E. (1991). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley.

[21] Lopez-Gomez, J. (2001). *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. CRC Press.

[22] Mitrovic, D. and Zubrinic, D. (1997). *Fundamentals of Applied Functional Analysis*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis.

[23] Narasimha, R. (1968). Non-Linear vibration of an elastic string. *Journal of Sound Vibration*, 8(1):134–146.

[24] Rabinowitz, P. H. (1971). A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications.

[25] Stampacchia, G. (1965). Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 15:189–258.