



Universidade de Brasília

**Instabilidade de Plateau-Rayleigh em
fluidos magnéticos**

Ghyllherme Patriota Nunes da Rocha

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 21 de Março de 2024

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Instabilidade de Plateau-Rayleigh em fluidos magnéticos

por

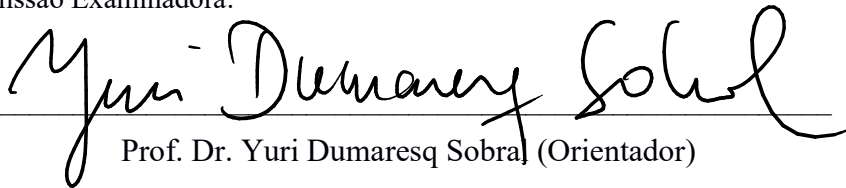
Ghyllherme Patriota Nunes da Rocha*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de Março de 2024.

Comissão Examinadora:


Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral (Orientador)

Universidade de Brasília (UnB)



Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira

Universidade de Brasília (UnB)



Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Jr.

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

* O autor foi bolsista do CNPq e Capes durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Este trabalho trata do problema de instabilidade de Plateau-Rayleigh. Inicialmente, é feita a descrição dos conceitos fundamentais, das equações governantes e dos métodos numéricos utilizados. Posteriormente, é discutido o problema linear analisado por Rosensweig (1985), que descreve o problema sob a influência de campo magnético, sem considerar aspectos específicos da geometria do jato, e considerando escoamento invíscido. Em seguida, adotamos uma abordagem assintótica, considerando jatos bastante delgados, e analisaremos os casos: invíscido sem magnetismo, viscoso sem magnetismo, invíscido com magnetismo e viscoso com magnetismo. Os resultados da teoria linear para o modelo assintótico são comparados com os resultados de Rosensweig, e avaliando os efeitos da viscosidade e do magnetismo na formação da gota. Nestes casos, o fluido magnético é considerado como superparamagnético. Finalmente, consideraremos a evolução não-linear para longos tempos e estudaremos os perfis obtidos nestes mesmos casos.

Palavras-chave: Instabilidade de Plateau-Rayleigh; Viscosidade; Magnetismo; Métodos Numéricos.

Abstract

This work deals with the Plateau-Rayleigh instability problem. Initially, a description of the fundamental concepts, governing equations, and numerical methods used is provided. Subsequently, the linear problem analyzed by Rosensweig (1985) is discussed, which describes the problem under the influence of a magnetic field, without considering specific aspects of jet geometry and assuming inviscid flow. Next, we adopt an asymptotic approach, considering very thin jets, and analyze the cases: inviscid without magnetism, viscous without magnetism, inviscid with magnetism, and viscous with magnetism. The results of the linear theory for the asymptotic model are compared with Rosensweig's results, evaluating the effects of viscosity and magnetism on droplet formation. In these cases, the magnetic fluid is considered to be superparamagnetic. Finally, we consider the nonlinear evolution for long times and study the profiles obtained in these same cases.

Keywords: Plateau-Rayleigh Instability; Viscosity; Magnetism; Numerical Methods.

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	4
1.1.1 Objetivos Específicos	5
2 Preliminares	7
2.1 Conceitos Fundamentais	7
2.1.1 Equação de Bessel	7
2.1.2 Método de Euler	10
2.1.3 Método do Trapézio	11
2.1.4 Diferenças Finitas	12
2.1.5 Método das linhas	18
2.1.6 Dinâmica dos fluidos	19
3 Equações Governantes	25
3.1 O tensor de tensões para um fluido magnético	25
3.2 Problema sem magnetismo	27
3.2.1 Caso invíscido	27
3.2.2 Caso viscoso	28
3.3 Problema com magnetismo	29
3.3.1 Caso invíscido	29
3.3.2 Caso viscoso	29
3.4 Aproximação de onda longa	30
3.4.1 Escoamento invíscido, sem magnetismo	31
3.4.2 Escoamento viscoso, sem magnetismo	33
3.4.3 Escoamento invíscido, com magnetismo	40

3.4.4	Escoamento viscoso, com magnetismo	44
4	Instabilidade linear do problema de Plateau-Rayleigh	47
4.1	Teoria Linear clássica de Rosensweig [13]	47
4.2	Análise do modelo de ondas longas: caso sem magnetismo	58
4.2.1	Escoamento invíscido	58
4.2.2	Escoamento viscoso	60
4.3	Análise do modelo de ondas longas: caso com magnetismo	63
4.3.1	Escoamento invíscido	63
4.3.2	Escoamento viscoso	66
5	Evolução para regimes não lineares	69
5.1	Sem magnetismo	69
5.2	Com magnetismo	73
5.3	Integração temporal	75
5.3.1	Método de Euler	75
5.3.2	Método do Trapézio	75
5.3.3	Convergência dos métodos numéricos	77
5.4	Resultados para o caso sem magnetismo	79
5.5	Resultados para o caso com magnetismo	84
	Conclusão	103
	Bibliografia	105

Lista de Figuras

1.1	Jato de água quebrando em gotas. Figura retirada de Hedge [8].	1
1.2	Esquema do fluido saindo da torneira. Figura retirada de Rapp [12].	2
1.3	Diagrama de uma impressora jato de tinta. Figura retirada de Martin [9].	3
1.4	a) Formação e crescimento de zonas de perturbação que conduzirá para uma eventual ruptura do jato em gotas. b) Detalhamento da perturbação no jato. Formação de curvaturas resulta em gradientes de pressão que desestabiliza o jato. c) Exemplo em um jato de água. Figura retirada de Rapp [12].	4
2.1	Comparação da solução numérica e analítica para a equação do calor, onde a linha contínua é a solução analítica. Imagem superior esquerda temos $t = 0$, superior direita $t = 0.5$, inferior esquerda $t = 1$ e inferior direita $t = 2$	16
2.2	Valores dos modos da série de Fourier. Imagem superior esquerda temos $t = 0$, superior direita $t = 0.5$, inferior esquerda $t = 1$ e inferior direita $t = 2$	17
2.3	Comparação teórico-numérico para a onda viajante, onde a linha contínua representa a solução analítica.	18
2.4	Cilindro infinitesimal na interface entre dois fluidos magnéticos. Figura retirada de Paz [11].	22
2.5	Curva fechada infinitesimal na interface entre dois fluidos magnéticos. Figura retirada de Paz [11].	23
3.1	Geometria do problema. Figura adaptada de Paz [11].	31
4.1	Relação de dispersão para um jato assimétrico. A linha tracejada representa a parte com magnetismo e a linha contínua representa a parte sem magnetismo. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	58
4.2	Comparação entre a solução sem magnetismo (4.79) e solução assintótica (4.93). A linha contínua é a solução assintótica. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	61

4.3	Representação da equação (4.102) para diferentes Re . OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	63
4.4	Comparação entre a solução de Rosensweig (4.112) e a solução assintótica (4.111), onde a linha contínua é a solução de Rosensweig. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	65
4.5	Ω para $Re = 10$. Da curva mais alta para a mais baixa temos respectivamente, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	66
4.6	Ω para $Re = 200$. Da curva mais alta para a mais baixa temos respectivamente, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	67
5.1	Convergência do Método de Euler. R no gráfico representa a razão R_0	77
5.2	Convergência do Método do Trapézio. R no gráfico representa R_0	78
5.3	Método de Euler e Trapézio convergindo para mesma solução. R no gráfico representa R_0	78
5.4	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 200$. A linha contínua é a função $0.5729e^{0.3293t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$	82
5.5	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 1$. A linha contínua é a função $0.8554e^{0.084t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$	83
5.6	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.9$, $Re = 1$. A linha contínua é a função $0.9759e^{0.3098t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$	84
5.7	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.2$, $Re = 0.1$. A linha contínua é a função $0.9841e^{0.01598t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$	85
5.8	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.5$. A linha contínua é a função $0.9866e^{0.04098t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$	87

5.9	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, com Re variando. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	87
5.10	Comparação do ansatz da teoria linear com os valores numéricos obtidos, para $Re = 0.1$ e $k = 0.2$. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\epsilon}$	88
5.11	Os valores obtidos por Ashgriz [2] a esquerda (imagem retirada de Ashgriz [2]), e os nossos dados comparados à direita, onde nossos dados são os X. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k}	88
5.12	Comparação do tempo de quebra conforme aumentamos o valor de ϵ (Epsilon no gráfico), para $k = 0.7$ e $Re = 10$	89
5.13	Gota se formando da esquerda para direita, de cima para baixo, com $k = 0.7$, $Re = 200$, com as porcentagens 10%, 25%, 50%, 75%, 80%, 85%, 90%, 95% e 99%.	90
5.14	Comparação com Paz [11] a esquerda e gota se formando a direita para $Re = 200$. Figura superior com $k = 0.45$ e inferior $k = 0.7$	91
5.15	Evolução de dois jatos no tempo, para $k = 0.7$. A coluna da esquerda tem $Re = 10$ e a da direita é o caso invíscido. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra.	92
5.16	Evolução de dois jatos no tempo, para $Re = 200$. A coluna da esquerda tem $k = 0.45$ e a da direita é para $k = 0.9$. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra.	93
5.17	Gotas para $Re = 200$ apresentadas em uma escala normalizada. Esquerda superior $k = 0.2$, direita superior $k = 0.45$, esquerda inferior $k = 0.7$, direita inferior $k = 0.9$	94
5.18	Relação tempo de quebra e discretização do eixo z . Superior esquerda $k = 0.7$, $Re = 10$. Superior direita $k = 0.7$, $Re = 200$, inferior esquerda $k = 0.9$, $Re = 10$, inferior direita $k = 0.9$, $Re = 200$	94
5.19	Evolução temporal da esquerda para direita e de cima para baixo, para $k = 0.7$ e $Re = 200$. Temos as porcentagens do tempo de quebra 0%, 1%, 2.5%, 5%, 7.5%, 10%, 25%, 50%, 75%, 99%.	95
5.20	Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.01$. A linha contínua é a função $0.9994e^{0.00798t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\epsilon}$	95

- 5.21 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.05$. A linha contínua é a função $1.002e^{0.00663t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$ 96
- 5.22 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.45$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.05$. A linha contínua é a função $1.003e^{0.01147t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$ 96
- 5.23 Os valores da tabela (5.3) em comparação com os valores numéricos. Gráfico à esquerda $Re = 10$, à direita $Re = 200$. A linha superior para inferior varia $C_{pm} = 0.01$ (xis), $C_{pm} = 0.05$ (quadrado), $C_{pm} = 0.1$ (círculo). OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} 97
- 5.24 Evolução de dois jatos no tempo, para $C_{pm} = 0.01$, $k = 0.7$. A coluna da esquerda tem $Re = 200$ e a da direita é o caso invíscido. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra. 98
- 5.25 A evolução temporal é caracterizada pelas cores evoluindo do preto ao vermelho. Euler a esquerda e Trapézio a direita, para $k = 0.7$, $Re = 200$ e $C_{pm} = 0.1$. Na figura inferior temos apenas as curvas nos tempos $t = 12$ (preto) e $t = 15$ (vermelho). 99
- 5.26 Jato estabilizando, para $C_{pm} = 0.5$, $Re = 1$ e $k = 0.7$ 99
- 5.27 Comparação no mesmo instante de tempo (aproximadamente 99% do tempo de quebra sem magnetismo), para C_{pm} distintos. A Figura da esquerda é a gota, e a da direita é a velocidade. Superior $k = 0.7$, $Re = 10$ e inferior $k = 0.7$, $Re = 200$ 100
- 5.28 Comparação no mesmo instante de tempo (aproximadamente 99% do tempo de quebra sem magnetismo), para $k = 0.7$, $Re = 10$ e C_{pm} distintos. Os gráficos de barra coloridos são a representação do módulo do campo magnético, de cima para baixo, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$, $C_{pm} = 0.2$, $C_{pm} = 0.3$. A linha preta tracejada é a gota sem magnetismo. 101

Lista de Tabelas

2.1	Comparação do valor numérico e exato da equação do calor, para $t = 0.5$. . .	15
5.1	Tempo de quebra em comparação com os demais autores.	79
5.2	Comparação de Ω numérico com o valor teórico da equação (4.102).	81
5.3	Comparação do Ω teórico da equação (4.114) com o valor numérico.	86

Capítulo 1

Introdução

Considere um jato líquido em forma cilíndrica, inicialmente com raio constante, caindo verticalmente sob ação da gravidade. O comprimento do jato aumenta até que o mesmo perde sua forma de cilindro e se transforma em um fluxo de gotas. Isso ocorre principalmente pelo efeito da tensão superficial (Breslouer, [4]). Este fenômeno está ilustrado na Figura (1.1) e é conhecido como instabilidade de Plateau-Rayleigh.

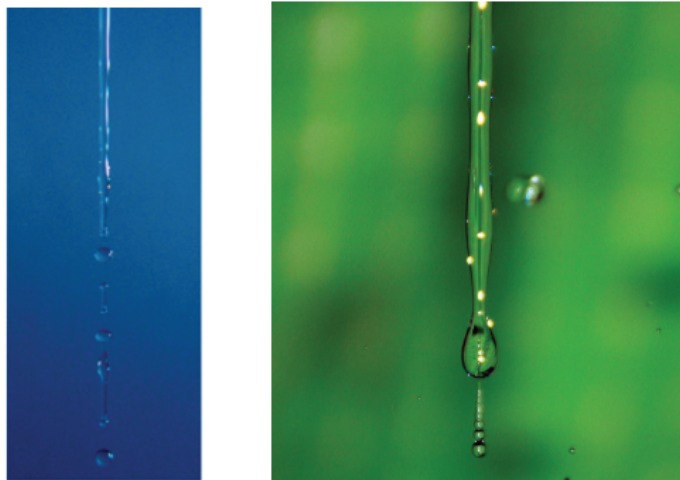


Figura 1.1 Jato de água quebrando em gotas. Figura retirada de Hedge [8].

Joseph Plateau caracterizou pela primeira vez esta instabilidade em 1873 através de observação experimental. Ele notou que um fluxo de água caindo verticalmente irá quebrar em gotas se seu comprimento for maior que algo em torno de 3.13 a 3.18 vezes seu diâmetro, que ele notou ser próximo de π . Posteriormente, Rayleigh mostrou teoricamente que uma coluna de líquido invíscido caindo verticalmente com seção circular deve quebrar em gotas se

seu comprimento exceder sua circunferência, o que é de fato π vezes seu diâmetro (Wikipédia, [15]).

Este comportamento deriva da existência de pequenas perturbações inerentes em qualquer sistema físico. Todos os fluxos do mundo real apresentam alguma perturbação externa não negligenciável que dadas as condições certas crescerá em sistemas instáveis. Em geral, esta deformação da coluna é representada como uma série de senoides de deslocamento periódico. Para certos comprimentos de onda, essas ondas de perturbação crescerão com o tempo.

O exemplo mais usual, que é experienciado em nosso dia a dia, é quando abrimos a torneira. Onde vemos um fio de água em forma cilíndrica, e conforme esse jato escoar, vemos a formação das gotas. A Figura (1.2) retrata este cenário, onde o jato é acelerado pela gravidade, o que causa seu estiramento. Conseqüentemente, teremos a diminuição do raio do jato. Isso alterará a curvatura da superfície do jato, que causará tensões superficiais que tentarão minimizar a superfície do jato, o que pode levar a sua decomposição em gotas (Rapp, [12]). Além da gravidade, existem outras forças que podem estar envolvidas nesse processo, como forças viscosas, forças magnéticas, e etc.

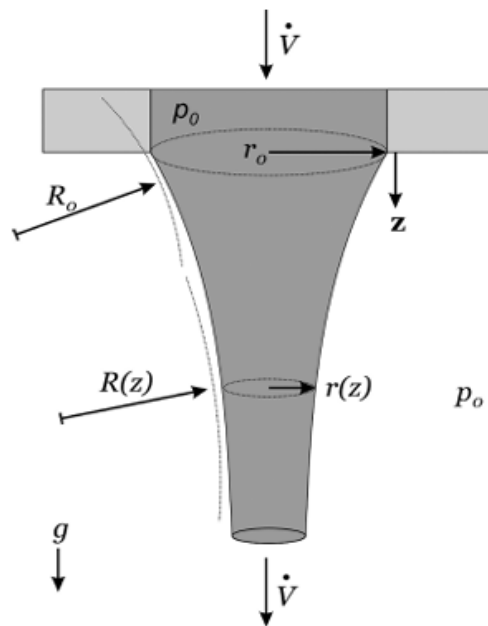


Figura 1.2 Esquema do fluido saindo da torneira. Figura retirada de Rapp [12].

Existem muitas aplicações do fenômeno da instabilidade de Plateau-Rayleigh, como em impressoras jato de tinta. Temos um diagrama de uma impressora jato de tinta na Figura (1.3). O processo inicia-se pela formação de gotas em um jato contínuo de fluido que é forçado por um bocal sob pressão. Impondo uma perturbação regular com frequência correta,

a quebra pode ser controlada, produzindo um fluxo uniforme de gotas. Algumas dessas gotas são selecionadas para a impressão. A seleção pode ser feita usando uma tinta carregada eletricamente. A gota formada e carregada passa por um campo elétrico que deflete a gota para a superfície de impressão (Martin, [9]).

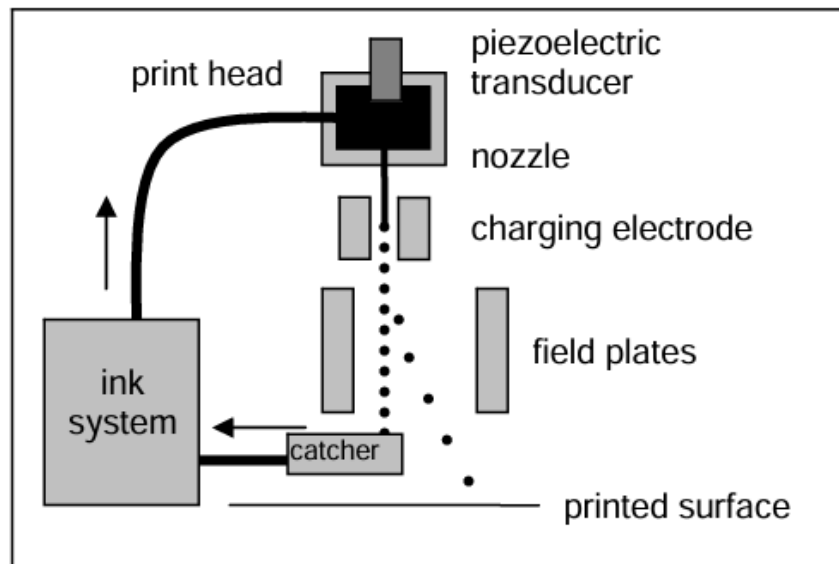


Figura 1.3 Diagrama de uma impressora jato de tinta. Figura retirada de Martin [9].

A Figura 1.4 detalha o processo de formação das gotas e que norteará o trabalho, onde vemos pela Figura 1.4 a) um jato muito comprido, e na Figura 1.4 b) temos a ampliação de um comprimento de onda, onde assumiremos a existência de alguns comprimentos de onda com poucas variações entre eles, e neste caso podemos utilizar uma condição periódica entre um comprimento de onda e outro.

Neste trabalho vamos tratar da instabilidade de Plateau-Rayleigh em fluidos magnéticos e não-magnéticos. No capítulo 2 começamos com conceitos preliminares que serão importantes para os demais capítulos, como: solução da equação de Bessel, diferenças finitas, métodos numéricos que serão utilizados e etc.

No capítulo 3 temos a apresentação das equações governantes do problema, subdivido em casos sem magnetismo e com magnetismo para escoamentos invíscidos e viscosos. Teremos também a apresentação da técnica de aproximação de ondas longas, que será utilizada para simplificar as equações governantes, onde obteremos em cada subseção um sistema de equações que definem a superfície do jato.

No capítulo 4 começamos com a teoria linear clássica desenvolvida inicialmente por Rosensweig (1985) [13] e finalizamos o capítulo com a análise de cada modelo desenvolvido no capítulo anterior, refazendo as análises feitas por Paz [11].

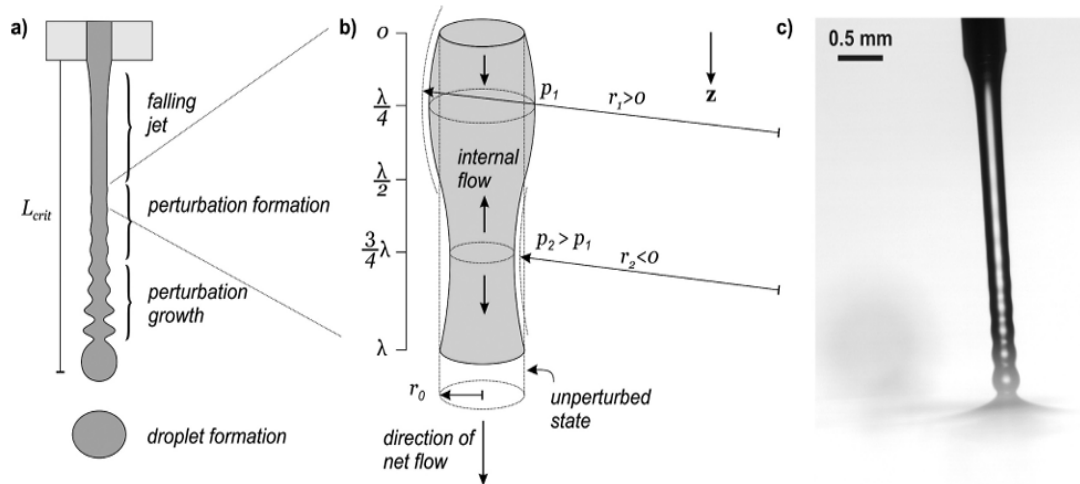


Figura 1.4 a) Formação e crescimento de zonas de perturbação que conduzirá para uma eventual ruptura do jato em gotas. b) Detalhamento da perturbação no jato. Formação de curvaturas resulta em gradientes de pressão que desestabiliza o jato. c) Exemplo em um jato de água. Figura retirada de Rapp [12].

No capítulo 5 temos a discretização das equações e verificamos se a convergência dos métodos numéricos são satisfeitas. Depois temos os resultados numéricos, comparando com a literatura e com a teoria desenvolvida no capítulo anterior.

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar a instabilidade de Plateau-Rayleigh utilizando o modelo assintótico de ondas longas, onde vamos estudar uma versão simplificada do problema, que será o caso onde o jato é delgado, ou seja, temos que o raio do jato é muito menor que seu comprimento. Após obter as equações que governam o problema, vamos realizar uma análise de estabilidade linear do modelo de ondas longas para determinar a estabilidade do sistema para pequenas perturbações da superfície do jato cilíndrico. Posteriormente, utilizaremos o modelo de ondas longas para determinar a evolução não-linear das perturbações instáveis do problema e determinar os perfis não-lineares de grande amplitude numericamente. Estas tarefas serão realizadas para jatos na ausência de campo magnético, e compararemos nossos resultados com resultados similares disponíveis na literatura e, posteriormente, consideraremos o problema de um fluido magnético superparamagnético na presença de um campo externo. A abordagem de ondas longas para este problema foi originalmente abordada por Paz [11], trabalho este também desenvolvido no MAT/UnB e que será a principal referência

desta dissertação, onde vamos verificar os resultados obtidos e dar algumas contribuições adicionais, principalmente na comparação entre a teoria linear e os resultados numéricos.

1.1.1 Objetivos Específicos

De uma maneira mais específica,

- Se a evolução das instabilidades para um regime não-linear pode levar à formação de uma gota, isto é, se há a possibilidade de ruptura do jato;
- O tempo de ruptura da jato, nos casos em que isto ocorrer, e sua dependência com relação aos vários parâmetros dos sistema;
- A influência da viscosidade da evolução das instabilidades no jato;
- A influência do campo magnético na evolução das instabilidades do jato;
- A faixa de tempo de validade da teoria linear quando comparada com os resultados das simulações numéricas;
- A influência dos diversos parâmetros do sistema na forma da gota nos momentos que antecedem a ruptura.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Conceitos Fundamentais

2.1.1 Equação de Bessel

A teoria linear desenvolvida por Rosensweig [13], na seção (4.1), baseia-se na solução da equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas e, portanto, são obtidas soluções em termos de funções de Bessel. A seguir, apresentaremos as soluções da equação de Bessel. A equação de Bessel é geralmente representada da seguinte forma:

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + (r^2 - s^2)f = 0, \quad (2.1)$$

onde s é uma constante (não necessariamente inteira) chamada de ordem da função de Bessel f (Boas [3]). A solução é encontrada através do Método de Frobenius, para tal supomos que f é representada pela série de potência:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda}, \quad (2.2)$$

onde λ é uma constante a ser determinada. Tomando as derivadas de f , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) A_n r^{n+\lambda-1}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) A_n r^{n+\lambda-2}, \quad (2.4)$$

e substituindo f e suas derivadas em (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
& r^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda-2} + r \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda-1} + r^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} - s^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda+2} - s^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda} + \\
& \quad + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} - s^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} = 0. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Para manter todos os termos no mesmo índice no somatório, vamos retirar os termos para $n = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{aligned}
& \lambda(\lambda-1)A_0 r^\lambda + (\lambda+1)\lambda A_1 r^{\lambda+1} + \lambda A_0 r^\lambda + (\lambda+1)A_1 r^{\lambda+1} - s^2 A_0 r^\lambda + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda} + (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda} + A_n r^{n+\lambda} - s^2 A_n r^{n+\lambda}\} = 0. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Como queremos que $A_0 \neq 0$, então chegamos na equação indicial $\lambda(\lambda-1) + \lambda - s^2 = 0$. No próximo capítulo, vamos trabalhar com uma versão modificada da equação de Bessel, que é a seguinte:

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} - k^2 r^2 f = 0, \tag{2.7}$$

Temos a nova equação indicial, para $s = 0$,

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0. \tag{2.8}$$

Usando novamente o Método de Frobenius:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda-1}, \tag{2.10}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda-2}. \tag{2.11}$$

Substituindo estas expressões em (2.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
r^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda-2} + r \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda-1} - k^2 r^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda} &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n+\lambda+2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)A_n r^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)A_n r^{n+\lambda} - k^2 \sum_{n=2}^{\infty} A_{n-2} r^{n+\lambda} &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)^2 A_n r^{n+\lambda} - k^2 \sum_{n=2}^{\infty} A_{n-2} r^{n+\lambda} &= 0. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Juntando as séries de potências, obtemos:

$$\lambda^2 A_0 r^\lambda + (\lambda+1)^2 A_1 r^{1+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+\lambda)^2 A_n - k^2 A_{n-2}] r^{n+\lambda} = 0, \tag{2.13}$$

de onde encontramos as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda^2 A_0 = 0, \\ (\lambda+1)^2 A_1 = 0, \\ (n+\lambda)^2 A_n - k^2 A_{n-2} = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ A_1 = 0, \\ A_n = \frac{k^2 A_{n-2}}{n^2}, \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Portanto, obtemos que:

$$A_{2n+1} = 0, \forall n \geq 0 \tag{2.16}$$

e, além disto:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{k^2 A_0}{2^2} = \frac{k^2 A_0}{1!2^2 \Gamma(2)}, A_4 = \frac{k^2 A_2}{4^2} = \frac{k^4 A_0}{4^2 2^2} = \frac{k^4 A_0}{2!2^4 \Gamma(3)}, \\
A_6 &= \frac{k^2 A_4}{6^2} = \frac{k^6 A_0}{6^2 2!2^4 \Gamma(3)} = \frac{k^6 A_0}{3!2^6 \Gamma(4)}, \dots \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Aplicando uma hipótese de indução para encontrarmos o termo geral:

$$A_{2(n-1)} = \frac{k^{2(n-1)}A_0}{(n-1)!2^{2(n-1)}\Gamma(n)}, \quad (2.18)$$

encontramos que:

$$A_{2n} = \frac{k^{2n}A_0}{(2n)^2(n-1)!2^{2(n-1)}\Gamma(n)} = \frac{k^{2n}A_0}{n!2^{2n}\Gamma(n+1)}. \quad (2.19)$$

Portanto, fazendo

$$A_0 = \frac{1}{0!2^0\Gamma(1)}, \quad (2.20)$$

temos que

$$f_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+1)} \frac{(kr)^{2n}}{2^{2n}} = I_0(kr). \quad (2.21)$$

Como a equação indicial (2.8) tem duas raízes iguais a 0, temos que a segunda solução é da forma:

$$f_2(r) = f_1(r) \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \quad (2.22)$$

Portanto, temos que solução da EDO (2.7) é:

$$f(r) = C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 \left[\ln(r) I_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \right]. \quad (2.23)$$

Segundo Abramowitz e Stegun [1], a segunda solução pode ser representada pela função,

$$K_s(x) = \frac{\pi I_{-s}(x) - I_s(x)}{2 \sin(s\pi)}, \quad (2.24)$$

onde $I_s(x)$ e $K_s(x)$ são, respectivamente, as funções de Bessel modificada de primeira espécie e segunda espécie, onde s é a raiz da equação indicial.

2.1.2 Método de Euler

Antes de entrarmos nas diferenças finitas, vamos falar dos métodos numéricos que serão usados para calcular as aproximações para as EDO's. Como veremos mais adiante, transformaremos as EDP's que governam a instabilidade de Plateau-Rayleigh em EDO's.

Seja o PVI (Problema de valor inicial):

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)); \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.25)$$

onde $t \in [t_0, T]$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Fazendo a expansão em série de Taylor em torno de t_0 para $\mathbf{y}(t)$ temos,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \mathbf{y}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\mathbf{y}''(\phi)}{2}(t - t_0)^2, \quad (2.26)$$

onde o último termo a direita é o resto de Lagrange, com $\phi \in (t_0, t)$. Portando, supomos que estamos próximos das vizinhanças de t_0 de tal forma que a linearização seja uma aproximação razoável, ou seja,

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{y}(t_0) + \mathbf{y}'(t_0)(t - t_0). \quad (2.27)$$

Substituindo $\mathbf{y}'(t_0) = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}(t_0))$ e fazendo $t_1 = t_0 + h$, chegamos que,

$$\mathbf{y}(t_1) \approx \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0). \quad (2.28)$$

E de forma recursiva, temos:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \quad (2.29)$$

em que \mathbf{y}_{n+1} é uma aproximação para $\mathbf{y}(t_{n+1})$. A equação (2.29) é conhecida como o Método de Euler Explícito. O nome explícito vem do fato de que para determinarmos a aproximação de \mathbf{y} no tempo t_{n+1} , o método depende apenas dos valores conhecidos até o tempo t_n .

2.1.3 Método do Trapézio

Agora, reconsiderando a equação (2.25), integrando-a no intervalo $[t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + h$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \Rightarrow \mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \quad (2.30)$$

Aproximando a integral do lado direito usando a regra do trapézio, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}(t_0) &\approx \frac{(t_1 - t_0)}{2} [\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}(t_1)) - \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}(t_0))] = \frac{h}{2} [\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}(t_1)) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}(t_0))] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y}(t_1) \approx \mathbf{y}(t_0) + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}(t_1)) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}(t_0))]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sendo \mathbf{y}_n uma aproximação para $\mathbf{y}(t_n)$, temos que a equação acima se reduz a:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2}[\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)]. \quad (2.32)$$

E assim como para o Método de Euler, de forma recursiva, podemos escrever:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}[\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) + \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)], \quad (2.33)$$

A equação acima é conhecida como Método do Trapézio. Diferente do Método de Euler, a equação está definida implicitamente, ou seja, para calcularmos \mathbf{y}_{n+1} dependemos do próprio \mathbf{y}_{n+1} . E por isso, o Método do Trapézio é um método implícito. Sua implementação requer um pouco mais de trabalho computacional, porém suas propriedades de estabilidade fazem deste método uma ferramenta importante.

2.1.4 Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas tem por base a ideia de discretização do domínio e a substituição das derivadas existentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função (Cuminato et al [5]). Essa substituição se faz da seguinte forma:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.34)$$

A aproximação acima se torna mais acurada conforme se diminui h . Quando há mais de uma variável, a ideia acima é aplicada separadamente para cada variável.

Iniciando com o problema unidimensional, seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e h um número real positivo. Definimos a malha de passo h associada a x_0 como o conjunto de pontos

$$x_i = x_0 \pm ih, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.35)$$

As aproximações serão feitas para uma função $y(x)$ e suas derivadas. Supondo que $y(x)$ tenha $n + 1$ derivadas, então, usando série de Taylor, escreve-se $y(x + h)$ como:

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \leq \xi \leq x + h. \quad (2.36)$$

Se $n = 1$,

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + y''(\xi)\frac{h^2}{2}. \quad (2.37)$$

E podemos aproximar a derivada primeira como,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (2.38)$$

onde (2.38) é conhecida como fórmula progressiva. Substituindo h por $-h$ em (2.36),

$$\begin{aligned} y(x-h) &= y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - \\ &\dots + (-1)^{(n+1)}y^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x-h \leq \xi \leq x. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} y(x-h) &= y(x) - y'(x)h + y''(\xi)\frac{h^2}{2}, \quad x-h \leq \xi \leq x \\ \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \end{aligned} \quad (2.40)$$

E (2.40) é a fórmula regressiva. Se $n = 2$,

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(\xi_1)\frac{h^3}{3!}, \quad x \leq \xi_1 \leq x+h, \quad (2.41)$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(\xi_2)\frac{h^3}{3!}, \quad x-h \leq \xi_2 \leq x. \quad (2.42)$$

Fazendo $y(x+h) - y(x-h)$, se obtém:

$$\begin{aligned} 2hy'(x) &= y(x+h) - y(x-h) + (y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2))\frac{h^3}{3!} \\ \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + (y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2))\frac{h^3}{3!} \\ \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (2.43)$$

A equação (2.43) é conhecida como fórmula da diferença centrada. Com isso, o que é efetivamente calculado é:

$$y'(x_i) \approx y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (\text{Diferença progressiva}), \quad (2.44)$$

$$y'(x_i) \approx y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (\text{Diferença regressiva}), \quad (2.45)$$

$$y'(x_i) \approx y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} \quad (\text{Diferença centrada}). \quad (2.46)$$

Agora, vamos utilizar essas aproximações para tratar das equações do calor e da advecção.

Exemplo (1): Seja a equação do calor ou da difusão:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2.47)$$

$$u(x, 0) = 100 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.48)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{cuja solução exata é: } u(x, t) = 100e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x).$$

Discretizaremos o intervalo $[0, 1]$ com espaçamento $\Delta x = 0.1$ e a variável tempo com $\Delta t = \frac{1}{500}$ e discretizaremos a função $u(x, t)$ nos pontos da malha e, aproximaremos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)$ como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}. \quad (2.50)$$

Substituindo estas expressões na equação (2.47), e isolando $u_{i,j+1}$, temos:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{\Delta x^2}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.51)$$

onde $u_{i,j}$ é a aproximação para $u(x_i, t_j)$. Das condições iniciais:

$$u(x_i, 0) = u_{i,0} = 100 \sin(\pi i \Delta x), \quad (2.52)$$

e das condições de fronteira:

$$u(x_0, t_j) = u_{0,j} = 0 = u(x_{10}, t_j) = u_{10,j}. \quad (2.53)$$

A discretização (2.51) é conhecida como Método de Euler para equação do calor. A tabela (2.1) mostra a comparação da solução numérica obtida com o Método de Euler e a solução exata. E a Figura (2.1) ilustra graficamente para $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 1$ e $t = 2$.

Para observar como se comporta a linearidade da solução com o passar do tempo, vamos utilizar um espaço completo de senos na série de Fourier. Logo, vamos precisar transformar nossa solução $u(x, t)$ em uma função ímpar. Portanto, cada coeficiente será calculado como:

$$a_n = \int_{-1}^1 \hat{u}(x, t) \sin(n\pi x) dx, \quad (2.54)$$

onde,

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), x \geq 0 \\ -u(x,t), x < 0 \end{cases} . \quad (2.55)$$

A perda da linearidade será constatada conforme forem sendo necessários mais modos da série de Fourier para representar a solução, onde esses modos são caracterizados pelos valores dos coeficientes a_n . Como conhecemos a solução exata, podemos comparar o valor exato dos coeficientes a_n , com o valor encontrado a partir da solução numérica. Substituindo a solução exata na integral (2.54), temos:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 u(x,t) \sin(n\pi x) dx &= 200 \int_0^1 e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx = \\ &= 200e^{-\pi^2 t} \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx \end{aligned} \quad (2.56)$$

E a integral acima é igual a $100e^{-\pi^2 t}$ para o caso de $n = 1$ e 0 para os demais valores de n . Ou seja, não temos perda da linearidade conforme o tempo passa, pois precisamos apenas de um modo da série de Fourier para representar a solução da equação do calor. A Figura (2.2) mostra o valor de alguns modos, onde a integral foi calculada com o método do trapézio e os valores para $u(x,t)$ são os valores obtidos numericamente pelo Método de Euler. Como esperado, temos que o único modo diferente de 0 é para o caso de $n = 1$.

Tabela 2.1 Comparação do valor numérico e exato da equação do calor, para $t = 0.5$.

(x, t)	Aproximada	Exata
(0.0, 0.5)	0.0	0.0
(0.1, 0.5)	0.2204507197770	0.2222414178512
(0.2, 0.5)	0.4193221871318	0.4227282972762
(0.3, 0.5)	0.5771474772206	0.5818355856425
(0.4, 0.5)	0.6784775510162	0.6839887529993
(0.5, 0.5)	0.7133935148872	0.7191883355826
(0.6, 0.5)	0.6784775510162	0.6839887529993
(0.7, 0.5)	0.5771474772206	0.5818355856425
(0.8, 0.5)	0.4193221871318	0.4227282972762
(0.9, 0.5)	0.2204507197770	0.2222414178512
(1.0, 0.5)	0.0	0.0

Exemplo (2): Agora, vamos tratar do problema da equação da advecção,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, u(x,0) = f(x). \quad (2.57)$$

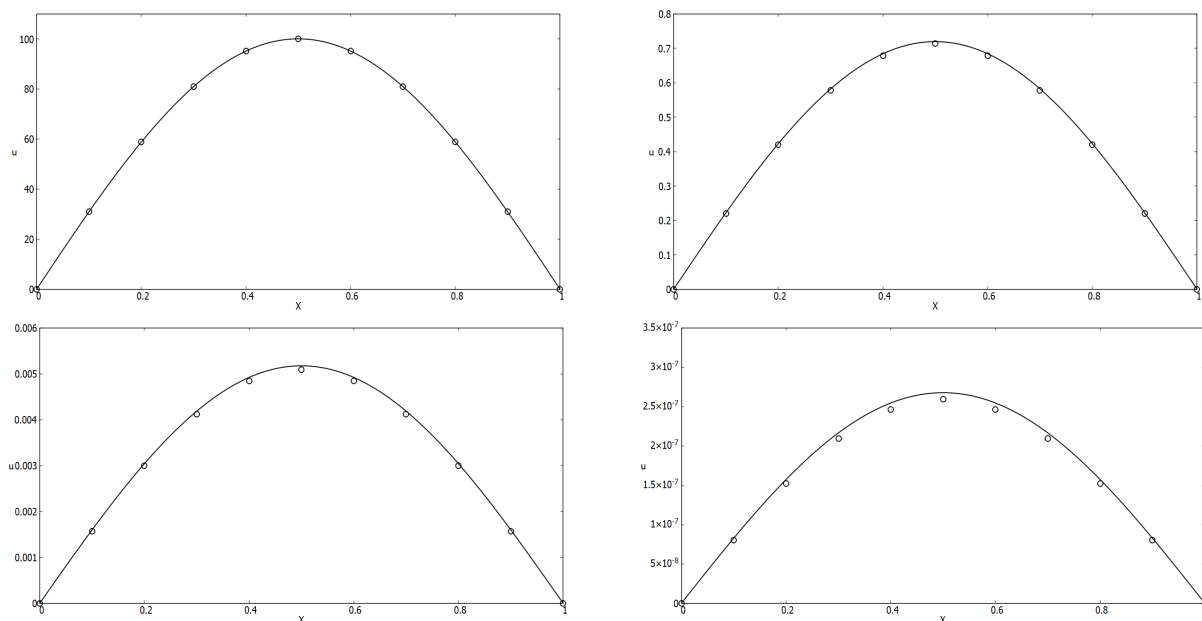


Figura 2.1 Comparação da solução numérica e analítica para a equação do calor, onde a linha contínua é a solução analítica. Imagem superior esquerda temos $t = 0$, superior direita $t = 0.5$, inferior esquerda $t = 1$ e inferior direita $t = 2$.

Como discutido por Olver [10], a escolha da diferença finita depende do sinal de $c(x, t, u)$, onde a diferença progressiva é adequada para $c \leq 0$ e a diferença regressiva é adequada para $c > 0$. Portanto, para o caso de $c = c(x, t)$, uma forma de contornar o problema do sinal é utilizar o Método Upwind, que é descrito da seguinte forma:

$$u_{i,j+1} = \begin{cases} u_{i,j} - c\Delta t \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right), & c \leq 0 \\ u_{i,j} - c\Delta t \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right), & c > 0 \end{cases}, \quad (2.58)$$

ou podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \max(c, 0)\Delta t \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \min(c, 0)\Delta t \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right). \quad (2.59)$$

A condição inicial é dada por:

$$u(x_i, 0) = f(x_i) \Rightarrow u_{i,0} = f(i\Delta x). \quad (2.60)$$

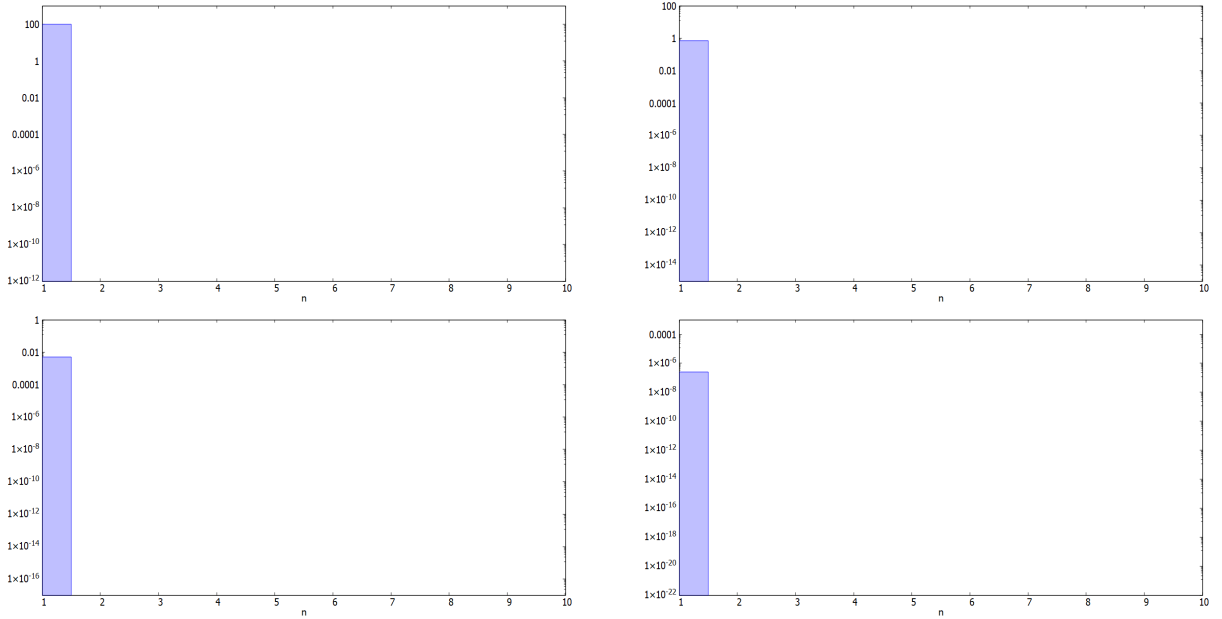


Figura 2.2 Valores dos modos da série de Fourier. Imagem superior esquerda temos $t = 0$, superior direita $t = 0.5$, inferior esquerda $t = 1$ e inferior direita $t = 2$.

Vamos considerar o caso particular da equação da advecção dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (2.61)$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \text{ cuja solução exata é : } u(x, t) = e^{-(x-0.5t)^2}.$$

Vamos calcular a solução para $-5 \leq x \leq 5$, $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = \frac{1}{500}$. Vamos fazer a condição inicial da seguinte forma:

$$u(-5 + i\Delta x, 0) = u_{i,0} = e^{-(-5+i\Delta x)^2}, \quad i \in \{0, \dots, 250\}. \quad (2.62)$$

Apesar de $c > 0$, como não temos valor definido na malha para $x < -5$, temos que usar uma condição de contorno forçada, para $i = 0$, onde temos que $u_{-1,j} \approx u_{250,j} \approx 0$. Logo:

$$u_{0,j+1} = u_{0,j} - 0.5\Delta t \left(\frac{u_{0,j} - u_{250,j}}{\Delta x} \right), \quad (2.63)$$

e para $i > 0$,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - 0.5\Delta t \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right). \quad (2.64)$$

O resultado deste método se encontra na Figura (2.3), que mostra uma leve diferença no processo de conservação da onda, que perde a amplitude conforme o tempo avança. Essa equação é bastante problemática, dado que ela não representa um processo difusivo, e vemos difusão na solução numérica da Figura (2.3). Uma forma de minimizar esse processo é diminuindo Δx .

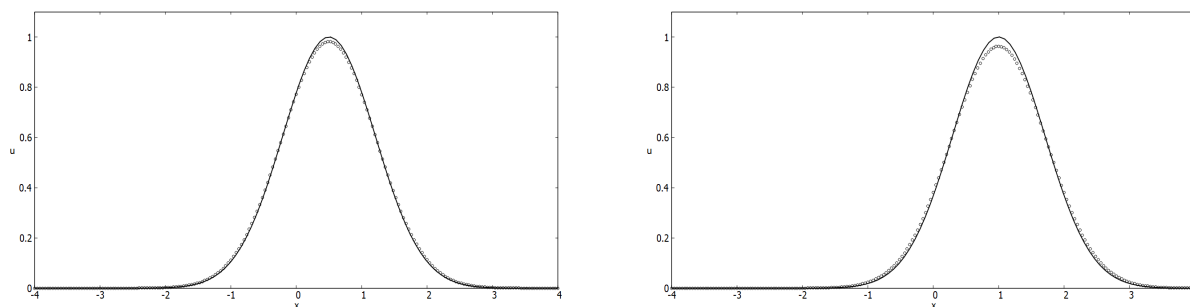


Figura 2.3 Comparação teórico-numérico para a onda viajante, onde a linha contínua representa a solução analítica.

2.1.5 Método das linhas

O método das linhas é uma técnica para resolver equações diferenciais parciais (EDP) que, diferentemente das diferenças finitas, em que há a discretização das derivadas em todas as variáveis, enquanto que no método das linhas discretizamos todas as dimensões, exceto uma (geralmente a derivada temporal ou de evolução), e então integramos o problema semi-discretizado como um sistema de EDO's. Uma vantagem com relação ao método de diferenças finitas é que podemos usar os métodos para solucionar EDO's. É necessário que a EDP esteja bem posta como um problema de valor inicial em pelo menos uma das dimensões (Wolfram [16]). Para exemplificar, vamos pegar novamente a equação do calor (2.47),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2.65)$$

$$u(x, 0) = 100 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.66)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2.67)$$

Temos a condição inicial na variável t , logo discretizando a derivada segunda em x com diferença centrada, chegamos na seguinte discretização:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.68)$$

E aplicando o Método de Euler para EDO's, chegamos no mesmo esquema obtido para diferenças finitas,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right). \quad (2.69)$$

Mas poderíamos aplicar outros métodos, como o Método do Trapézio, que nos daria o esquema:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right). \quad (2.70)$$

Este método é chamado de Crank-Nicholson.

2.1.6 Dinâmica dos fluidos

Pela lei de conservação de massa temos,

$$\frac{Dm}{Dt}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.71)$$

onde $m(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV$, com $\rho(\mathbf{x}, t)$ sendo a densidade do fluido, e

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (2.72)$$

que é chamada de derivada material, onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$ sendo o campo de velocidade e $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Portanto, substituindo em (2.71),

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0. \quad (2.73)$$

Pelo teorema de transporte de Reynolds,

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.74)$$

Aplicando o teorema do Divergente no segundo termo a direita, obtemos

$$\iint_{S(t)} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{V(t)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (2.75)$$

Então,

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0. \quad (2.76)$$

Pelo teorema da Localização,

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.77)$$

Temos que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho$. Portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.78)$$

A equação (2.78) é chamada de equação da continuidade. Caso tenhamos um escoamento incompressível, seja o volume $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, então,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.79)$$

onde a equação (2.79) é a equação da continuidade para um escoamento incompressível. Pela segunda Lei de Newton, temos que a força \mathbf{f} é igual a taxa de variação do momento linear $\mathbf{q} = m\mathbf{u}$, ou seja:

$$\mathbf{f} = \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV. \quad (2.80)$$

Pelo teorema de transporte de Reynolds,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) dV &= \iiint_{V(t)} \left\{ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) \right\} dV = \\ &= \iiint_{V(t)} \left\{ \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + u_i \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (2.81)$$

Pela equação da continuidade,

$$f_i = \iiint_{V(t)} \left\{ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right\} dV \Rightarrow \mathbf{f} = \iiint_{V(t)} \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} dV \quad (2.82)$$

E temos que $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{superfície}} + \mathbf{f}_{\text{campo}}$. Definimos:

$$\mathbf{f}_{\text{superfície}} = \iint_{S(t)} \Sigma \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{V(t)} \nabla \cdot \Sigma dV, \quad (2.83)$$

e

$$\mathbf{f}_{\text{campo}} = \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV, \quad (2.84)$$

em que Σ é um tensor de tensões e \mathbf{b} é o vetor das forças de campo. Juntando (2.82), (2.83) e (2.84), então:

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} dV = \iiint_{V(t)} \nabla \cdot \Sigma dV + \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV, \quad (2.85)$$

Pelo teorema da Localização,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b}. \quad (2.86)$$

A equação acima é conhecida como equação de Cauchy. Como vamos tratar de um problema de jato de fluido, também devem ser satisfeitas as condições do campo magnético na interface entre o jato e o meio. Para tal, vamos considerar um cilindro de volume infinitesimal δV , como mostra a Figura (2.4). Pela equação de Maxwell temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.87)$$

ou na sua representação integral,

$$\begin{aligned} \oiint_{\delta S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS &= 0 \\ \Leftrightarrow \iint_{\text{Área Superior}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_s dS + \iint_{\text{Área Lateral}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l dS + \iint_{\text{Área Inferior}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_i dS &= 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde,

$$\left| \iint_{\text{Área Lateral}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l dS \right| \leq \iint_{\text{Área Lateral}} |\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_l| dS \leq \sup |\mathbf{B}| \iint_{\text{Área Lateral}} |\mathbf{n}_l| dS = 2\pi r \varepsilon \sup |\mathbf{B}|, \quad (2.89)$$

em que ε é a espessura do volume de controle, como na Figura (2.4). Quando ε tende a zero, temos que a contribuição da região lateral é muito pequena e, portanto, podemos desconsiderar a indução magnética \mathbf{B} na região lateral. Temos que $\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_s$ e conforme ε tende a zero, a região inferior tende à região superior. Logo,

$$\iint_{\text{Área Superior}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_s dS + \iint_{\text{Área Inferior}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_i dS \approx \iint_{\text{Área Superior}} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_s dS - \iint_{\text{Área Superior}} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_s dS =$$

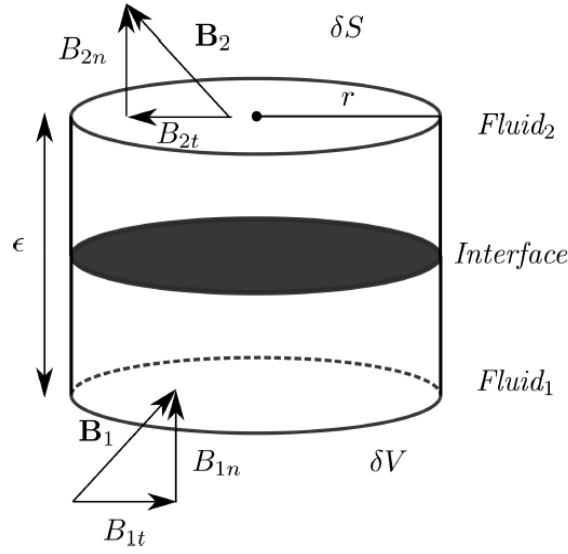


Figura 2.4 Cilindro infinitesimal na interface entre dois fluidos magnéticos. Figura retirada de Paz [11].

$$= \iint_{\text{Área Superior}} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_s dS = 0. \quad (2.90)$$

Ou seja, conforme ϵ tende a zero, temos a continuidade da indução magnética normal na interface, e assim:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_s = 0 \Leftrightarrow B_{2n} - B_{1n} = 0 \Leftrightarrow B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.91)$$

Para determinar as condições de \mathbf{H} (campo magnetizante) na interface, vamos utilizar uma curva fechada próxima a região da interface, como mostra a Figura (2.5). Pela Lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t}, \quad (2.92)$$

com \mathbf{D}_e sendo o campo de deslocamento elétrico e \mathbf{J} sendo a densidade de corrente. Como estamos tratando de um fluido magnético, não há quantidades elétricas envolvidas, logo $\mathbf{D}_e = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, e isso implica que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (2.93)$$

Usando o teorema de Stokes,

$$0 = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} =$$

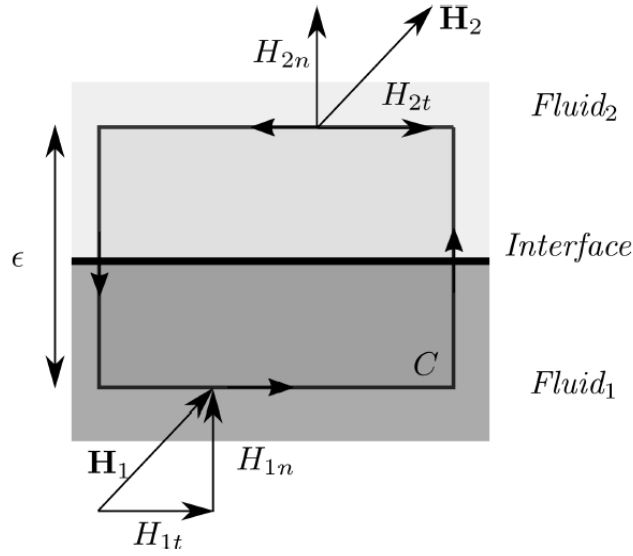


Figura 2.5 Curva fechada infinitesimal na interface entre dois fluidos magnéticos. Figura retirada de Paz [11].

$$= \int_{\text{Curva Sup.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} + \int_{\text{Curva Lat. Esq.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} + \int_{\text{Curva Inf.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} + \int_{\text{Curva Lat. Dir.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C}, \quad (2.94)$$

onde,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{Curva Lat. Esq.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} + \int_{\text{Curva Lat. Dir.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} \right| &\leq \int_{\text{Curva Lat. Esq.}} |\mathbf{H} \cdot d\mathbf{C}| + \int_{\text{Curva Lat. Dir.}} |\mathbf{H} \cdot d\mathbf{C}| = \\ &= \int_{\text{Curva Lat. Esq.}} |\mathbf{H} \cdot \mathbf{t}| dC + \int_{\text{Curva Lat. Dir.}} |\mathbf{H} \cdot \mathbf{t}| dC \leq \\ &\leq \sup |\mathbf{H}| \left(\int dC + \int dC \right) = 2\epsilon \sup |\mathbf{H}|. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Quando ϵ tende a zero, temos que a contribuição das curvas laterais é bem pequeno, logo, pode ser desconsiderada. Temos que $\mathbf{t}_i = -\mathbf{t}_s$, e conforme ϵ tende a zero, a curva inferior tende a curva superior. Logo:

$$\int_{\text{Curva Sup.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} + \int_{\text{Curva Inf.}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} = \int_{\text{Curva Sup.}} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}_s dC + \int_{\text{Curva Inf.}} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t}_i dC \approx$$

$$\approx \int_{\text{Curva Sup.}} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}_s dC - \int_{\text{Curva Sup.}} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t}_s dC = \int_{\text{Curva Sup.}} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_s dC = 0. \quad (2.96)$$

E conforme ε tende a zero, temos a continuidade dos campos magnéticos aplicados, e assim,

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_s = 0 &\Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = 0 \\ &\Leftrightarrow H_{1t} = H_{2t}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Capítulo 3

Equações Governantes

Neste capítulo, vamos apresentar as equações que serão tratadas nos próximos capítulos e a técnica de modelagem utilizada, que se baseia em uma expansão assintótica. Neste caso em particular, a expansão assintótica se baseia no fato de que uma das dimensões espaciais seja muito maior que as demais.

3.1 O tensor de tensões para um fluido magnético

Iniciamos com equações que serão abordadas no decorrer do trabalho, partindo da equação de Cauchy, vista no capítulo anterior:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{b}, \quad (3.1)$$

com \mathbf{u} sendo o campo de velocidade. Definindo $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ como campo gravitacional e

$$\Sigma = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} - \frac{\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I}}{2} + \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade, η a viscosidade e

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.3)$$

onde \mathbf{B} é a indução magnética, \mathbf{H} é o campo magnético, \mathbf{M} é a magnetização e μ_0 é a permeabilidade do vácuo e

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}. \quad (3.4)$$

Portanto:

$$\nabla \cdot \Sigma = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}). \quad (3.5)$$

Pelas equações de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, a equação (3.5) se reduz a:

$$\nabla \cdot \Sigma = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (3.6)$$

Substituindo \mathbf{B} ,

$$\nabla \cdot \Sigma = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{2} \right) + \mu_0(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (3.7)$$

Temos a identidade $(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nabla \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$. Pela equação (2.93), $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, logo, a equação acima se reduz a:

$$\nabla \cdot \Sigma = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad (3.8)$$

e, portanto:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.9)$$

Vamos analisar o caso onde temos a hipótese de superparamagnetismo, ou seja,

$$\mathbf{M} = \chi_0 \mathbf{H}, \quad (3.10)$$

e a equação (3.9) se torna:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \chi_0 (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.11)$$

onde $\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = 2(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}$. Definindo $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = H^2$, onde H é o módulo de \mathbf{H} , $\mathbf{g} = \nabla(-gz)$ temos que (3.11) pode ser reescrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left(p + \rho gz - \frac{\chi_0 \mu_0 H^2}{2} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.12)$$

isto é, o termo magnético se transforma em uma pressão magnética. Portanto, para um fluido incompressível, chegamos no sistema abaixo:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left(p + \rho g z - \frac{\chi_0 \mu_0 H^2}{2} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Agora vamos dividir a equações acima em 4 casos, que são os casos sem magnetismo invíscido e viscoso, e com magnetismo invíscido e viscoso. Pela geometria do problema, serão adotados coordenadas cilíndricas. Outra hipótese que será considerada é a de não haver movimento na direção angular, isto é, o escoamento será considerado axissimétrico.

3.2 Problema sem magnetismo

3.2.1 Caso invíscido

Considerando a equação do momento no sistema (3.13) com $\eta = 0$, na ausência de campo magnético:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla(p + \rho g z), \quad (3.14)$$

onde o campo de velocidade é dado por $\mathbf{u} = (u, 0, w)$. Temos que $p + \rho g z = \hat{p}$ é uma pressão modificada. No texto que se segue, por simplicidade, adotaremos p para a pressão modificada. Em coordenadas cilíndricas, temos a equação na direção radial:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.15)$$

e na equação na direção axial:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.16)$$

Por fim, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.17)$$

O efeito da pressão depende da curvatura média local da superfície (\mathcal{H}), que é dada pela equação de Young-Laplace:

$$p = 2\mathcal{H}\sigma = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (3.18)$$

com

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.19)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal na superfície do jato, σ é o coeficiente de tensão superficial, R_1 e R_2 são os raios principais. Para encontrar \mathbf{n} temos o raio na superfície como $r = R(z, t)$. Portanto, seja $G(r, z, t) = r - R(z, t)$, então

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \left(\frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{r \partial \theta}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) / |\nabla G| = \left(1, 0, -\frac{\partial R}{\partial z} \right) / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2}. \quad (3.20)$$

Portanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = R^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} + \quad (3.21)$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2}, \quad (3.22)$$

e, portanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = R^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \quad (3.23)$$

Assim, a pressão p será dada por:

$$p = \sigma \left(R^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \right). \quad (3.24)$$

3.2.2 Caso viscoso

Considerando o sistema (3.13) e sem magnetismo:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla(p + \rho g z) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.25)$$

onde $p + \rho g z = \hat{p}$ (pressão modificada). Adotando p para a pressão modificada, as equações que governam um escoamento viscoso incompressível, em coordenadas cilíndricas, são na direção radial:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.26)$$

e na equação na direção axial:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.27)$$

E a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.28)$$

O campo de velocidade é dado por $\mathbf{u} = (u, 0, w)$.

3.3 Problema com magnetismo

3.3.1 Caso invíscido

Considerando o sistema (3.13) e $\eta = 0$, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left(p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + \rho g z \right), \quad (3.29)$$

onde $p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + \rho g z = \hat{p}$ (pressão modificada). E assim, adotando p para a pressão modificada, as equações em coordenadas cilíndricas são:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{Direção radial}), \quad (3.30)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{Direção axial}), \quad (3.31)$$

e pela equação da continuidade,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.32)$$

O campo de velocidade é dado por $\mathbf{u} = (u, 0, w)$.

3.3.2 Caso viscoso

Considerando o sistema (3.13),

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left(p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + g z \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.33)$$

onde $p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + gz = \hat{p}$ (pressão modificada). Adotando p para a pressão modificada, as equações em coordenadas cilíndricas são:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.34)$$

e na equação na direção axial:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.35)$$

O campo de velocidade é dado por $\mathbf{u} = (u, 0, w)$.

3.4 Aproximação de onda longa

Essa técnica se faz necessária aqui, pois estamos tratando um problema não linear, com não linearidades oriundas da equação de Navier-Stokes e das condições de contorno. E, assumindo a aproximação de ondas longas, que é uma aproximação assintótica, em que uma das escalas de comprimento é muito menor do que as demais, é possível simplificar nosso problema. De fato, veremos que é possível considerar o problema quase como unidimensional, e obter um conjunto de equações para a evolução da velocidade e da superfície livre que, apesar de não linear, podem ser resolvidas numericamente de maneira mais fácil.

Dado isso, vamos assumir que o raio inicial do cilindro \mathcal{R} é muito menor que o comprimento característico do jato λ , ou seja, $\mathcal{R} \ll \lambda$. O comprimento característico será tomado como o comprimento de onda das perturbações do jato. E pode ser definido um parâmetro pequeno adimensional

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{R}}{\lambda}, \quad (3.36)$$

que está associado as pequenas deformações que ocorrem na superfície do cilindro, como mostra a Figura (3.1).

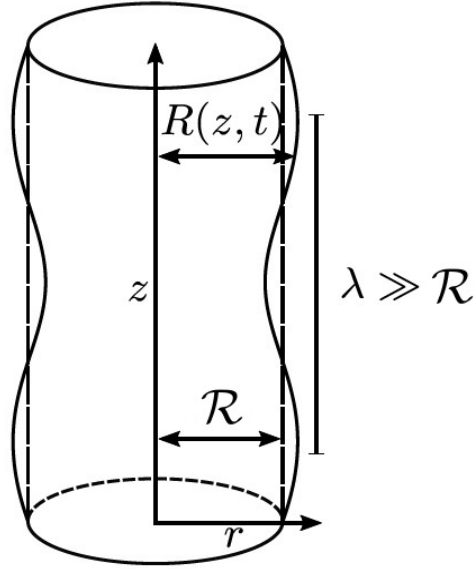


Figura 3.1 Geometria do problema. Figura adaptada de Paz [11].

3.4.1 Escoamento invíscido, sem magnetismo

Introduzindo o parâmetro ε , vamos reescalar as variáveis da seguinte forma:

$$r \rightarrow \varepsilon r, u \rightarrow \varepsilon u, \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial r}, u \ll w. \quad (3.37)$$

Então, reescalando as equações (3.15), (3.16), (3.17), temos, para as equações do momento na direção r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial t} + (\varepsilon u) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial r} + w \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \Leftrightarrow \rho \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

E na direção z :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (\varepsilon u) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Finalmente, a equação da continuidade se reduz a:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial(\varepsilon^2 r u)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.40)$$

Pela equação (3.38), para haver balanço dos dois lados da igualdade, pelo termo $\mathcal{O}(1)$, temos que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (3.41)$$

ou seja, p é função apenas de z e t . Com isso, para termos igualdade na equação (3.39), dado que p é independente de r , é necessário que o lado esquerdo da equação seja independente de r , portanto,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (3.42)$$

Pela equação (3.40), multiplicando ambos os lados por r e integrando em $r \in [0, R]$:

$$\int_0^R \frac{\partial(ru)}{\partial r} dr + \int_0^R r \frac{\partial w}{\partial z} dr = 0 \Leftrightarrow \quad (3.43)$$

$$ru|_0^R + \frac{r^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_0^R = 0 \Leftrightarrow Ru + \frac{R^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -\frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.44)$$

Temos que

$$u = \frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (3.45)$$

Substituindo em (3.44):

$$-\frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} \Leftrightarrow \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2R \left(\frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.46)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0. \quad (3.47)$$

Reconsiderando a equação (3.39), dado que $w = w(z, t)$, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.48)$$

Com as equações (3.47) e (3.48) formamos o seguinte sistema de equações não lineares que governam o problema para $R(z, t)$ e $w(z, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}, \quad (3.49)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} R(0, t) = R(\lambda, t) \\ w(0, t) = w(\lambda, t) \end{cases}. \quad (3.50)$$

O sistema de equações (3.49) foi obtido anteriormente por Paz [11].

3.4.2 Escoamento viscoso, sem magnetismo

Assim como no caso invíscido, o raio inicial do cilindro é \mathcal{R} e a função raio depende apenas das variáveis z e t . E reescalando as variáveis como feito na seção 3.4.1,

$$r \rightarrow \varepsilon r, \quad u \rightarrow \varepsilon u, \quad \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial r}, \quad u \ll w, \quad (3.51)$$

podemos reescalar a equação (3.27):

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (\varepsilon u) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\varepsilon r) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.52)$$

$$\Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.53)$$

Para encontrar um balanço na equação (3.53), devido ao termo $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$, vamos supor que w seja da forma,

$$w = w_0(r, z, t) + \varepsilon^2 w_2(r, z, t) + \dots \quad (3.54)$$

Substituindo em (3.53), temos:

$$\rho \left(\frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial t} + u \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial r} \right) +$$

$$\begin{aligned} & \rho \left((w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots) \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Multiplicando ambos os lados por ε^2 ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \rho \left(\frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial t} + u \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial r} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \rho \left((w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots) \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial z} \right) = \\ & = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2(w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Considerando os termos de ordem $\mathcal{O}(1)$, obtemos:

$$\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow r \frac{\partial w_0}{\partial r} = C_0(z, t) \Leftrightarrow w_0 = C_0(z, t) \ln(r) + w(z, t). \quad (3.57)$$

Como w_0 está definido em $r = 0$, temos que $C_0(z, t) \equiv 0$ e $w_0 = w(z, t)$. Considerando os termos de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, temos que:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.58)$$

Substituindo a equação (3.54) em (3.26), temos:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial t} + (\varepsilon u) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial r} + (w + \varepsilon^2 w_2) \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + \eta \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial(\varepsilon^2 r u)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(\varepsilon u)}{\partial z^2} \right) \\ & \Leftrightarrow \rho \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

A equação da continuidade (3.28) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial(\varepsilon^2 r u)}{\partial r} + \frac{\partial(w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial z} = 0. \quad (3.60)$$

Considerando os termos $\mathcal{O}(1)$ da equação (3.60)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(ru)}{\partial r} = -r \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.61)$$

E, retornando para a equação (3.59), temos pelos termos $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$,

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.62)$$

Substituindo em (3.61), obtemos:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.63)$$

Como $w = w(z, t)$, temos que $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, ou seja, p é independente de r . E, integrando (3.61) em $r \in [0, R]$,

$$\begin{aligned} \int_0^R \partial(ru) &= - \int_0^R \frac{\partial(w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial z} r dr \\ \Leftrightarrow Ru &= - \frac{R^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon^2 \int_0^R \frac{\partial w_2}{\partial z} r dr. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Temos que

$$u = \frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (3.65)$$

Substituindo em (3.64), obtemos:

$$-\frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon^2 \int_0^R \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (3.66)$$

Pelos termos $\mathcal{O}(1)$, obtemos:

$$\frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow R^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2R \left(\frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.67)$$

que pode ser escrito como:

$$\frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0. \quad (3.68)$$

Agora, vamos avaliar as condições de contorno deste caso. A condição de tensão normal na superfície livre é dada por:

$$\mathbf{n}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} = -2\mathcal{H}\sigma, \quad (3.69)$$

com σ sendo a tensão superficial,

$$2\mathcal{H} = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.70)$$

a curvatura média local. Similarmente, a condição de contorno na direção tangente é dada por:

$$\mathbf{n}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (3.71)$$

em que Σ é o tensor de tensões de um jato de escoamento incompressível em coordenadas cilíndricas, onde

$$\Sigma = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}, \quad (3.72)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade e \mathbf{D} é o tensor:

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T}{2}, \quad (3.73)$$

com $\nabla\mathbf{u}$ sendo o gradiente de velocidade, que é dado explicitamente por:

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\varepsilon u)}{\varepsilon \partial r} & 0 & \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial z} \\ 0 & \frac{\varepsilon u}{\varepsilon r} & 0 \\ \frac{\partial w}{\varepsilon \partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Logo,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Definindo a equação da superfície do escoamento por:

$$G(r, z, t) = r - R(z, t) = 0, \quad (3.76)$$

o vetor normal unitário é dado por,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}, \quad (3.77)$$

onde ∇ também deve ser reescalado, assim como G . Portanto:

$$\nabla G = \left(\frac{\partial(\varepsilon r - \varepsilon R(z, t))}{\varepsilon \partial r}, 0, \frac{\partial(\varepsilon r - \varepsilon R(z, t))}{\partial z} \right) = \left(1, 0, -\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{n} = \left(1, 0, -\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right) / \sqrt{1 + \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right)^2} \approx \left(1, 0, -\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right). \quad (3.78)$$

Como $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$, temos que o vetor tangente unitário é dado por,

$$\mathbf{t} = \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}, 0, 1\right) / \sqrt{1 + \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right)^2} \approx \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}, 0, 1\right). \quad (3.79)$$

Usando a equação (3.69), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} &= [\mathbf{n}^T]_i [\Sigma \cdot \mathbf{n}]_i = n_i \Sigma_{ij} n_j = n_i (-p \delta_{ij} + 2\eta D_{ij}) n_j = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_i (-p \delta_{ij} + 2\eta D_{ij}) n_j = \\ &= -p - p\varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + 2\eta (n_1 n_1 D_{11} + 2n_1 n_3 D_{13} + n_3 n_3 D_{33}) = \\ &= -p - p\varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + 2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \\ &= -2\mathcal{H}\sigma = -\sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Substituindo (3.54) na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} &-p - p\varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + \\ &+ 2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial r}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial (w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial z}\right) = \\ &= -p - p\varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + \\ &+ 2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial r}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial (w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial z}\right) = \\ &= -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon^2 \left(-2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + 2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial r} + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 \left(-p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) + \\ &+ \varepsilon^4 \left(2\eta \frac{\partial w_2}{\partial z} \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\right) = -\sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dos termos $\mathcal{O}(1)$, conclui-se que:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.82)$$

Substituindo u de (3.64),

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + 2\eta \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \eta \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.83)$$

Agora, usando a equação (3.71), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t} &= [\mathbf{n}^T]_i \cdot [\Sigma \cdot \mathbf{t}]_i = n_i \Sigma_{ij} t_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_i \Sigma_{ij} t_j = \\ &= n_1 (\Sigma_{11} t_1 + \Sigma_{13} t_3) + n_3 (\Sigma_{31} t_1 + \Sigma_{33} t_3) = \\ &= (-p \delta_{11} + 2\eta D_{11}) t_1 + (-p \delta_{13} + 2\eta D_{13}) t_3 - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} (-p \delta_{31} + 2\eta D_{31}) t_1 - \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} (-p \delta_{33} + 2\eta D_{33}) t_3 = \\ &= \left(-p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} \right) \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} + \eta \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \left(\eta \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) - \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \left(-p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left(-p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} \right) \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} + \eta \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \left(\eta \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \right) - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \left(-p + 2\eta \frac{\partial (w + \varepsilon^2 w_2)}{\partial z} \right) = \\ &\quad = \varepsilon \left(2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial w_2}{\partial r} - 2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\eta \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) - 2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Considerando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$ e substituindo a aproximação da velocidade $u = \frac{-r}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$ encontrada em (3.64) para um r qualquer, temos:

$$2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \eta \frac{\partial w_2}{\partial r} - 2\eta \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\partial w_2}{\partial r} &= 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ &+ \frac{r}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Fazendo $r = R(z, t)$ na superfície,

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 3 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (3.86)$$

Substituindo (3.83) em (3.58),

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Multiplicando os dois lados por r e integrando em $r \in [0, R]$, temos:

$$\frac{R^2}{2} \left(\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \eta \left(R \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.88)$$

Substituindo (3.86) na equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2} \left(\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \\ &= \eta \left(3R \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{R^2}{2} \left(\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \right) &= \eta \left(3R \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3R^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) &= \frac{3\eta}{R^2} \left(2R \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Finalmente,

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.90)$$

E com isso, considerando (3.68) e (3.90) temos o sistema de equações para este caso dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}, \quad (3.91)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} R(0, t) = R(\lambda, t) \\ w(0, t) = w(\lambda, t) \end{cases}. \quad (3.92)$$

O sistema de equações (3.91) foi obtido anteriormente por Paz [11].

3.4.3 Escoamento invíscido, com magnetismo

Como temos que satisfazer a equação (2.93) na interface do jato, temos que $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. Como temos um campo uniforme constante na direção axial com intensidade H_0 , podemos definir ψ como:

$$\psi = H_0 z + \xi \quad (3.93)$$

Pela equação (2.87) e pela hipótese de superparamagnetismo (3.10),

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})) = \nabla \cdot (\mu_0(\chi_0 + 1)\mathbf{H}) \\ &\Leftrightarrow \nabla \cdot (\mu_0(\chi_0 + 1)\mathbf{H}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \psi = 0, \\ &\Leftrightarrow \nabla^2 \psi = \nabla^2 (H_0 z + \xi) = \nabla^2 \xi = 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Definindo $\mu_0(\chi_0 + 1) = \mu$, em que μ é a constante de permeabilidade do fluido magnético. Em coordenadas cilíndricas, podemos reescrever (3.94) como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.95)$$

Fazendo $r \rightarrow \varepsilon r$ na equação acima,

$$\frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon^{-2}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.96)$$

Para balancear a equação, devido ao termo ε^{-2} , vamos supor uma expansão assintótica do tipo:

$$\xi = \xi_0(r, z, t) + \varepsilon^2 \xi_2(r, z, t) + \dots \quad (3.97)$$

Substituindo em (3.96)

$$\frac{\varepsilon^{-2}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (\xi_0 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (\xi_0 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots)}{\partial z^2} = 0. \quad (3.98)$$

Pelos termos $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_0}{\partial r} \right) = 0 \Leftrightarrow r \frac{\partial \xi_0}{\partial r} = f(z, t) \Leftrightarrow \xi_0 = \ln(r) f(z, t) + \Xi(z, t). \quad (3.99)$$

Como ξ está definida em $r = 0$, temos que $f(z, t) \equiv 0$. Pelos termos $\mathcal{O}(1)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_2}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} \\ \Leftrightarrow r \frac{\partial \xi_2}{\partial r} = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + g(z, t) &\Leftrightarrow \xi_2 = -\frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \ln(r) g(z, t) + h(z, t). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Como ξ_2 está definida em $r = 0$, temos que $g(z, t) \equiv 0$, logo, a expansão (3.97) se torna:

$$\xi = \Xi(z, t) + \varepsilon^2 \left(-\frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + h(z, t) \right) + \dots, \quad (3.101)$$

de onde obtemos:

$$\psi = H_0 z + \Xi(z, t) + \varepsilon^2 \left(-\frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + h(z, t) \right) + \dots \quad (3.102)$$

Agora, vamos definir as condições de contorno na interface ($r = R(z, t)$), que são:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 \Leftrightarrow \mu \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_1 = \mu_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_2, \quad (3.103)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{H}_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{H}_2 \Leftrightarrow \mathbf{t} \cdot \nabla \psi_1 = \mathbf{t} \cdot \nabla \psi_2. \quad (3.104)$$

Os índices 1 e 2 representam respectivamente a região interior e exterior do cilindro, onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário e \mathbf{t} é o vetor tangente unitário, definidos em (3.4.2) e (3.78). E retornando à equação (3.103), vamos considerar um simplificação tomando $\mu_0 \approx 0$. Logo, a

equação (3.103) se reduz a:

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{n} \cdot \nabla\psi_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \nabla\psi_1 = 0 \Leftrightarrow \left(1, 0, -\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial\psi_1}{\varepsilon\partial r}, 0, \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) = 0. \quad (3.105)$$

Substituindo $\psi_1 = H_0z + \xi$ e considerando (3.101) acima,

$$\begin{aligned} \left(1, 0, -\varepsilon \frac{\partial R}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\varepsilon\partial r} \left(-\varepsilon^2 \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \dots\right), 0, H_0 + \frac{\partial(\Xi + \dots)}{\partial z}\right) &= 0. \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\varepsilon\partial r} \left(-\varepsilon^2 \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \dots\right) - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial(\Xi + \dots)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Considerando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$, temos que:

$$\frac{R}{2} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \frac{\partial R}{\partial z} \left(H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) = 0. \quad (3.107)$$

Multiplicando a equação anterior por $2R$, obtemos:

$$R^2 \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + 2R \frac{\partial R}{\partial z} \left(H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \left(H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z}\right)\right) = 0, \quad (3.108)$$

o que implica que:

$$R^2 \left(H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) = C(t). \quad (3.109)$$

Vamos supor que $C(t)$ seja constante. Em $t = 0$, $\frac{\partial \Xi}{\partial z}(z, 0) = 0$ e $R(z, 0) = \mathcal{R}$, logo,

$$H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z} = \mathcal{R}^2 H_0 \mathcal{R}^{-2}. \quad (3.110)$$

Como $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, substituindo (3.102), obtemos:

$$\mathbf{H} = \left(\varepsilon^2 \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial z^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \hat{\mathbf{r}} + \left(-H_0 - \frac{\partial \Xi}{\partial z} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.111)$$

Portanto, pela equação (3.110)

$$H = \sqrt{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}} \approx H_0 + \frac{\partial \Xi}{\partial z} = \mathcal{R}^2 H_0 \mathcal{R}^{-2}. \quad (3.112)$$

Rosensweig [13] define a equação (que será detalhada no próximo capítulo),

$$\Pi + \mu_0 \int_0^H M dH' + \frac{\mu_0 M_n^2}{2} = p_0 + 2\mathcal{H}\sigma, \quad (3.113)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi = p, \\ \mu_0 \int_0^H M dH' = \mu_0 \chi_0 \int_0^H H' dH' = \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} = (\mu - \mu_0) \frac{H^2}{2} \approx \mu \frac{H^2}{2}, \\ \frac{\mu_0 M_n^2}{2} \approx 0, \\ 2\mathcal{H} = \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. . \quad (3.114)$$

Sendo assim:

$$p + \mu \frac{H^2}{2} \approx p_0 + \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \Leftrightarrow p \approx p_0 + \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \mu \frac{H^2}{2}, \quad (3.115)$$

substituindo (3.112) acima,

$$p \approx p_0 + \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{\mu}{2} \mathcal{R}^4 H_0^2 R^{-4}. \quad (3.116)$$

Considerando a equação (3.31) e tratando como em (3.39), chegamos em:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.117)$$

Substituindo a pressão (3.116) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(p_0 + \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{\mu}{2} \mathcal{R}^4 H_0^2 R^{-4} \right) \\ \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Pelas equações (3.47) e (3.118) chegamos no sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases}, \quad (3.119)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} R(0, t) = R(\lambda, t) \\ w(0, t) = w(\lambda, t) \end{cases}. \quad (3.120)$$

O sistema de equações (3.119) foi obtido anteriormente por Paz [11].

3.4.4 Escoamento viscoso, com magnetismo

E considerando que não há movimento na direção angular, assim como no caso viscoso sem magnetismo, chegamos nas equações:

$$\frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0, \quad (3.121)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.122)$$

E pela parte magnética da seção 3.4.3, temos o termo de pressão (3.116),

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{\mu}{2} \mathcal{R}^4 H_0^2 R^{-4}. \quad (3.123)$$

Substituindo a pressão acima em (3.122), obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.124)$$

Pelas equações (3.68) e (3.124) chegamos no sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}, \quad (3.125)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} R(0,t) = R(\lambda,t) \\ w(0,t) = w(\lambda,t) \end{cases} . \quad (3.126)$$

O sistema de equações (3.125) foi obtido anteriormente por Paz [11].

Capítulo 4

Instabilidade linear do problema de Plateau-Rayleigh

Neste capítulo vamos estudar o comportamento do problema de Plateau-Rayleigh, recuperando os resultados clássicos de Rosensweig [13]. Em seguida, vamos investigar o comportamento do escoamento nas vizinhanças das condições de contorno $R = \mathcal{R}$ e $w = 0$, fazendo uso da aproximação de ondas longas.

4.1 Teoria Linear clássica de Rosensweig [13]

Pela equação de Euler para um ferrofluido incompressível e invíscido (3.29), considerando a hipótese de superparamagnetismo (3.10) temos que:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla \left(p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + \rho g z \right), \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.2)$$

Se considerarmos o escoamento como irrotacional, temos que existe função Φ tal que

$$\mathbf{u} = -\nabla \Phi = (u, 0, w). \quad (4.3)$$

Por (4.2) a velocidade potencial Φ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (4.4)$$

Logo, em coordenadas cilíndricas temos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

em r representa a direção radial, z é a direção axial e θ é a direção azimutal. Assumindo que o jato é simétrico com o eixo z , Φ não depende do ângulo θ . Portanto, a equação (4.5) se reduz à:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.6)$$

Supondo uma solução da forma

$$\Phi(r, z) = f(r)e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.7)$$

e substituindo-a na equação (4.6), encontra-se a equação de Bessel (2.7). A solução da mesma foi discutida na seção (2.1.1). Portanto, o potencial de velocidade Φ é dado por:

$$\Phi = f(r)e^{i(kz - \omega t)} = \left\{ C_1 I_0(kr) + C_2 \left[\ln(r) I_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \right] \right\} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.8)$$

Como a velocidade é finita e $\ln(r)$ diverge nas proximidades de $r = 0$, então C_2 deve ser nula. Portanto:

$$\Phi = C_1 I_0(kr) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.9)$$

Se o raio da superfície não perturbada é \mathcal{R} , a equação da superfície perturbada pode ser escrita da forma:

$$R(z, t) = \mathcal{R} + \zeta(z, t), \quad (4.10)$$

onde

$$\zeta(z, t) = a_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad a_0 \ll 1. \quad (4.11)$$

A escolha do a_0 pequeno é para indicar que temos apenas uma pequena perturbação da superfície. Na superfície do escoamento, a componente normal da velocidade v_n do fluido deve ser igual a taxa de deslocamento na superfície. Assim, e por um lado

$$v_n = u = \left. \frac{\partial R}{\partial t} \right|_{r=\mathcal{R}} = -i\omega a_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.12)$$

e, por outro,

$$u = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=\mathcal{R}} = -C_1 k I_1(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.13)$$

Igualando as equações (4.12) e (4.13), precisamos que

$$C_1 = \frac{i\bar{\omega}a_0}{kI_1(k\mathcal{R})}, \quad (4.14)$$

e

$$\Phi = \frac{i\bar{\omega}a_0}{kI_1(k\mathcal{R})} I_0(kr) e^{i(kz - \bar{\omega}t)}. \quad (4.15)$$

Uma relação entre k e $\bar{\omega}$, chamada de relação de dispersão ainda deve ser estabelecida. Isso será obtido através de equilíbrio de forças. Para esse fim, é necessário uma solução para o campo magnético nesse cenário. Pelas equações de Maxwell, aplicadas para um fluido magnético superparamagnético sem campo elétrico,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})) = \nabla \cdot (\mu_0(\chi_0 + 1)\mathbf{H}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4.17)$$

onde $\mu_0(\chi_0 + 1) = \mu$ foi definido na seção (3.4.3). Segue de (4.16) e (4.17) que \mathbf{H} tem uma função potencial ψ tal que $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ tal que ψ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (4.18)$$

A função potencial ψ pode ser representada por:

$$\psi = H_0 z + \xi, \quad (4.19)$$

em que o primeiro termo à direita descreve o campo uniforme não-perturbado dentro do solenóide, com H_0 constante, e ξ é a superposição de campos que aparecem devido às perturbações na forma da coluna do fluido constituindo o jato. Como no caso da velocidade potencial, a equação de Laplace para o potencial magnético pode ser expressa em coordenadas cilíndricas, da forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.20)$$

Como o primeiro termo a direita de (4.19) só depende de z , a função acima se reduz a:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.21)$$

Desta forma, as soluções encontradas na região interior e exterior do jato são, respectivamente:

$$\xi_1(r, z, t) = a_1 I_0(kr) e^{i(kz - \bar{\omega}t)}, \quad (4.22)$$

$$\xi_2(r, z, t) = [a_2 I_0(kr) + b_2 K_0(kr)] e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.23)$$

Ou seja,

$$\xi(r, z, t) = \begin{cases} \xi_1(r, z, t) = a_1 I_0(kr) e^{i(kz - \omega t)}, & r \leq \mathcal{R} \\ \xi_2(r, z, t) = [a_2 I_0(kr) + b_2 K_0(kr)] e^{i(kz - \omega t)}, & r > \mathcal{R}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Essas soluções devem satisfazer as condições de contorno do campo magnético na interface do jato dadas pelas as equações (2.91) e (2.97). Ou, em termos dos potenciais em $r = \mathcal{R}$:

$$\mu \mathbf{n} \cdot \nabla(H_0 z + \xi_1(\mathcal{R}, z, t)) = \mu_0 \mathbf{n} \cdot \nabla(H_0 z + \xi_2(\mathcal{R}, z, t)), \quad (4.25)$$

e

$$\xi_1(\mathcal{R}, z, t) = \xi_2(\mathcal{R}, z, t). \quad (4.26)$$

E para $r = \check{R} \gg \mathcal{R}$ (ou seja, para o raio muito distante do jato),

$$\xi_2(\check{R}, z, t) \approx 0. \quad (4.27)$$

As soluções (4.22) e (4.23) contêm três constantes a determinar, e as equações (4.25), (4.26) e (4.27) fornecem a mesma quantidade de restrições. Logo, é possível obter os valores das constantes. Avaliar os termos em (4.25) requer uma expressão para o vetor normal \mathbf{n} em coordenadas cilíndricas. A interface do jato é representada pela equação (4.10), logo, $R - \zeta(z, t) = \mathcal{R}$ representa o contorno próximo a interface. E temos que se:

$$F(r, \theta, z) = \text{constante}, \quad (4.28)$$

então:

$$dF(r, \theta, z) = \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \nabla F \cdot (dr, r d\theta, dz) = 0. \quad (4.29)$$

Ou seja, o vetor ∇F aponta na direção normal da superfície. Portanto, $\nabla[R - \zeta(z, t)]$ é paralelo a \mathbf{n} . Logo, temos que

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla[R - \zeta(z, t)]}{|\nabla[R - \zeta(z, t)]|}. \quad (4.30)$$

Como

$$|\nabla[R - \zeta(z, t)]| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2} = \left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2. \quad (4.31)$$

Usando apenas o termo de primeira ordem podemos aproximar

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (4.32)$$

De (4.27), temos que:

$$\xi_2(\check{\mathcal{R}}) = 0 = [a_2 I_0(k\check{\mathcal{R}}) + b_2 K_0(k\check{\mathcal{R}})] e^{i(kz - \bar{\omega}t)} \Leftrightarrow a_2 I_0(k\check{\mathcal{R}}) + b_2 K_0(k\check{\mathcal{R}}) = 0, \quad (4.33)$$

de onde obtemos que:

$$b_2 = -\frac{a_2 I_0(k\check{\mathcal{R}})}{K_0(k\check{\mathcal{R}})}. \quad (4.34)$$

De (4.26), podemos escrever que

$$\xi_1(\mathcal{R}) = \xi_2(\mathcal{R}) \Leftrightarrow a_1 I_0(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \bar{\omega}t)} = [a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \bar{\omega}t)}, \quad (4.35)$$

e, assim, encontramos que

$$a_1 I_0(k\mathcal{R}) = a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R}). \quad (4.36)$$

Substituindo o valor de b_2 da equação (4.34), temos que:

$$\begin{aligned} a_1 I_0(k\mathcal{R}) &= a_2 I_0(k\mathcal{R}) - \frac{a_2 I_0(k\check{\mathcal{R}})}{K_0(k\check{\mathcal{R}})} K_0(k\mathcal{R}) \\ \Leftrightarrow a_1 I_0(k\mathcal{R}) &= a_2 \frac{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})}{K_0(k\check{\mathcal{R}})} \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{a_1 I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}})}{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Inicialmente, da equação (4.25), escrevemos que:

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}} i k a_0 e^{i(kz - \bar{\omega}t)}, \quad (4.38)$$

e, assim:

$$\begin{aligned} \nabla(H_0 z + \xi_1)(\mathcal{R}) &= \hat{\mathbf{r}} k a_1 I_1(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \bar{\omega}t)} + \hat{\mathbf{z}} [H_0 + i k a_1 I_0(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \bar{\omega}t)} \\ \nabla(H_0 z + \xi_2)(\mathcal{R}) &= \hat{\mathbf{r}} k [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \bar{\omega}t)} + \\ &+ \hat{\mathbf{z}} \{H_0 + i k [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \bar{\omega}t)}\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

de onde:

$$\begin{aligned} \mu ka_1 I_1(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \omega t)} - \mu ik H_0 a_0 e^{i(kz - \omega t)} + \mu k^2 a_0 a_1 I_0(k\mathcal{R}) e^{2i(kz - \omega t)} = \\ \mu_0 k [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \omega t)} - \mu_0 ik H_0 a_0 e^{i(kz - \omega t)} + \\ + \mu_0 k^2 a_0 [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] e^{2i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Obtemos, após manipulações, que:

$$\begin{cases} \mu ka_1 I_1(k\mathcal{R}) - \mu ik H_0 a_0 = \mu_0 k [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] - \mu_0 ik H_0 a_0 \\ \mu k^2 a_0 a_1 I_0(k\mathcal{R}) = \mu_0 k^2 a_0 [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] \end{cases}. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.34) e (4.37) nas expressões acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu ka_1 I_1(k\mathcal{R}) = \mu_0 k [a_2 I_1(k\mathcal{R}) + b_2 K_1(k\mathcal{R})] + ik H_0 a_0 (\mu - \mu_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mu ka_1 I_1(k\mathcal{R}) - \mu_0 k \left[\frac{a_1 I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) I_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})} \right] + \\ + \mu_0 k \left[\frac{a_1 I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_1(k\mathcal{R})}{K_0(k\check{\mathcal{R}}) [I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})]} \right] = ik H_0 a_0 (\mu - \mu_0). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mu ka_1 I_1(k\mathcal{R}) - \mu_0 ka_1 \left[\frac{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) I_1(k\mathcal{R}) - I_0(k\mathcal{R}) I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})} \right] = \\ = ik H_0 a_0 (\mu - \mu_0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Portanto:

$$a_1 \left[\mu I_1(k\mathcal{R}) - \mu_0 I_0(k\mathcal{R}) \frac{K_0(k\check{\mathcal{R}}) I_1(k\mathcal{R}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})} \right] = ik H_0 a_0 (\mu - \mu_0), \quad (4.44)$$

e, assim, obtemos que:

$$a_1 = \frac{ik H_0 a_0 (\mu - \mu_0)}{\mu I_1(k\mathcal{R}) - \mu_0 A I_0(k\mathcal{R})}, \quad (4.45)$$

onde:

$$A = \frac{K_0(k\check{\mathcal{R}}) I_1(k\mathcal{R}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}}) K_0(k\mathcal{R})}. \quad (4.46)$$

Assumindo que o solenóide está distante, tal que $\frac{\mathcal{R}}{\check{\mathcal{R}}} \ll 1$, então,

$$K_0(k\check{\mathcal{R}})I_1(k\mathcal{R}) \approx K_0(k\check{\mathcal{R}})I_0(k\mathcal{R}) \approx 0. \quad (4.47)$$

Logo, podemos simplificar A como

$$A \approx \frac{K_1(k\mathcal{R})}{K_0(k\mathcal{R})}. \quad (4.48)$$

Portanto, substituindo a_1 em (4.34) e (4.37), encontramos:

$$a_2 = \frac{iH_0a_0(\mu - \mu_0)K_0(k\mathcal{R})I_0(k\mathcal{R})K_0(k\check{\mathcal{R}})}{[I_0(k\mathcal{R})K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}})K_0(k\mathcal{R})][\mu I_1(k\mathcal{R})K_0(k\mathcal{R}) - \mu_0 K_1(k\mathcal{R})I_0(k\mathcal{R})]}, \quad (4.49)$$

e

$$b_2 = \frac{-iH_0a_0(\mu - \mu_0)K_0(k\mathcal{R})I_0(k\mathcal{R})I_0(k\check{\mathcal{R}})}{[I_0(k\mathcal{R})K_0(k\check{\mathcal{R}}) - I_0(k\check{\mathcal{R}})K_0(k\mathcal{R})][\mu I_1(k\mathcal{R})K_0(k\mathcal{R}) - \mu_0 K_1(k\mathcal{R})I_0(k\mathcal{R})]}. \quad (4.50)$$

Neste ponto, encontramos as perturbações do campo magnético, porém ainda não conhecemos as perturbações do raio, que definem a superfície do jato. Para isto, precisamos recorrer novamente ao balanço dado na interface do fluido magnético com um fluido não-magnético externo. Para isto, fazemos um balanço de pressões de cada lado, que foi definido por Rosensweig [13] como:

$$\Pi + \mu_0 \int_0^H M dH' + \frac{\mu_0 M_n^2}{2} = p_0 + 2\mathcal{H}\sigma, \quad (4.51)$$

em que

$$\begin{cases} \Pi = p - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} + \rho gz, \\ M = \sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}}, \\ M_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \end{cases} \quad (4.52)$$

p_0 é a pressão atmosférica e \mathcal{H} é a curvatura média local. Sendo assim, da equação da curvatura média local em termos de ζ , obtemos que:

$$2\mathcal{H} = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}. \quad (4.53)$$

Como r na superfície é

$$R = \mathcal{R} + \zeta \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathcal{R} + \zeta} = (\mathcal{R} + \zeta)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left[1 + \frac{\zeta}{\mathcal{R}}\right]^{-1} \approx \frac{1}{\mathcal{R}} \left[1 - \frac{\zeta}{\mathcal{R}}\right], \quad (4.54)$$

e a expressão da curvatura média local se torna:

$$2\mathcal{H} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left[1 - \frac{\zeta}{\mathcal{R}}\right] + k^2\zeta = \frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{\zeta}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \quad (4.55)$$

Como $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, isso implica que $\mu_0\mathbf{M} = (\mu - \mu_0)\mathbf{H}$ e portanto,

$$\mu_0 M = (\mu - \mu_0)H. \quad (4.56)$$

Logo,

$$\mu_0 \int_0^H M dH' = (\mu - \mu_0) \int_0^H H' dH' = (\mu - \mu_0) \frac{H^2}{2}. \quad (4.57)$$

Por (4.19),

$$\mathbf{H} = \left(-\frac{\partial\xi}{\partial r}, 0, -H_0 - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(H_0 + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + H_0^2 + 2H_0\frac{\partial\xi}{\partial z} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2. \quad (4.58)$$

Como os termos $\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2$ e $\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2$ são pequenos, dado que são proporcionais a a_0^2 , então:

$$H^2 \approx H_0^2 + 2H_0\frac{\partial\xi}{\partial z} \quad (4.59)$$

e (4.57) é aproximadamente

$$(\mu - \mu_0) \left(\frac{H_0^2}{2} + H_0\frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \quad (4.60)$$

onde $\frac{\partial\xi}{\partial z} = ik\xi$. Calculando

$$M_n = \chi_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \chi_0 \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}, 0, H_0 + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \cdot \left(1, 0, -ik\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) =$$

$$= \chi_0 \frac{\partial\xi}{\partial r} - ik\chi_0 \left(H_0 + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \frac{\partial\xi}{\partial z}, \quad (4.61)$$

e assim, M_n^2 é proporcional a $a_0^2 \ll 1$, portanto,

$$\frac{\mu_0 M_n^2}{2} \approx 0. \quad (4.62)$$

Desta forma, a equação (4.51) se reduz a:

$$\Pi + (\mu - \mu_0) \left(\frac{H_0^2}{2} + H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = p_0 + \frac{\sigma}{\mathcal{R}} - \frac{\sigma \zeta}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \quad (4.63)$$

E para o caso não perturbado (ou seja, com o cilindro circular), temos $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{z}}$ e por (4.57),

$$(\mu - \mu_0) \frac{H^2}{2} = (\mu - \mu_0) \frac{H_0^2}{2}. \quad (4.64)$$

A curvatura média local é $\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{R}}$ e como $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$, então

$$M_n = \chi_0 H_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0. \quad (4.65)$$

E a equação (4.51) se torna,

$$\Pi_0 + (\mu - \mu_0) \frac{H_0^2}{2} = p_0 + \frac{\sigma}{\mathcal{R}}, \quad (4.66)$$

com Π_0 constante sendo a pressão para o cilindro não perturbado. Subtraindo (4.63) de (4.66), obtemos:

$$\Pi - \Pi_0 + (\mu - \mu_0) ikH_0 \xi = \frac{\sigma}{\mathcal{R}} - \frac{\sigma \zeta}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2] - \frac{\sigma}{\mathcal{R}} = -\frac{\sigma \zeta}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2] \quad (4.67)$$

Pela equação de Bernoulli para escoamento incompressível e transiente, temos:

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} + \rho gz - \mu_0 \chi_0 \frac{H^2}{2} = m(t) \quad (4.68)$$

Definindo $m(t) = \Pi_0$ e substituindo Π de (4.52) na equação acima, obtemos:

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Pi + \rho \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} = \Pi_0 \Leftrightarrow \Pi - \Pi_0 = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{|\nabla \Phi|^2}{2}. \quad (4.69)$$

Como $|\nabla \Phi|^2$ é proporcional a $a_0^2 \ll 1$, temos

$$\Pi - \Pi_0 \approx \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\rho \varpi^2 a_0}{k I_1(k\mathcal{R})} I_0(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \varpi t)}. \quad (4.70)$$

Considerando a região exterior do jato, fazendo

$$\lim_{r \rightarrow \mathcal{R}^+} \xi(r, z, t) = \xi_2(\mathcal{R}, z, t) \quad (4.71)$$

e substituindo em (4.67), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \varpi^2 a_0}{k I_1(k\mathcal{R})} I_0(k\mathcal{R}) e^{i(kz - \varpi t)} + (\mu - \mu_0) ik H_0 [a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R})] e^{i(kz - \varpi t)} = \\ = -\frac{\sigma a_0 e^{i(kz - \varpi t)}}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2], \end{aligned} \quad (4.72)$$

de onde:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \varpi^2 a_0}{k I_1(k\mathcal{R})} I_0(k\mathcal{R}) + (\mu - \mu_0) ik H_0 [a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R})] = -\frac{\sigma a_0}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2] \\ \Leftrightarrow \frac{\rho \varpi^2 a_0}{k I_1(k\mathcal{R})} I_0(k\mathcal{R}) = -(\mu - \mu_0) ik H_0 [a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R})] - \frac{\sigma a_0}{\mathcal{R}^2} [1 - (k\mathcal{R})^2] \\ \Leftrightarrow \varpi^2 = -\frac{(\mu - \mu_0) ik^2 H_0 I_1(k\mathcal{R}) [a_2 I_0(k\mathcal{R}) + b_2 K_0(k\mathcal{R})]}{\rho a_0 I_0(k\mathcal{R})} \\ - \frac{\sigma k I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^2 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Substituindo b_2 da equação (4.34), temos que:

$$\begin{aligned} \varpi^2 = -\frac{(\mu - \mu_0) ik^2 H_0 I_1(k\mathcal{R}) a_2}{\rho a_0 I_0(k\mathcal{R})} \left[I_0(k\mathcal{R}) - \frac{K_0(k\mathcal{R}) I_0(k\check{\mathcal{R}})}{K_0(k\check{\mathcal{R}})} \right] - \\ - \frac{\sigma k I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^2 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2] = \\ = -\frac{(\mu - \mu_0) ik^2 H_0 I_1(k\mathcal{R}) a_2 [I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}}) - K_0(k\mathcal{R}) I_0(k\check{\mathcal{R}})]}{\rho a_0 I_0(k\mathcal{R}) K_0(k\check{\mathcal{R}})} - \\ - \frac{\sigma k I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^2 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Substituindo a_2 da equação (4.49):

$$\varpi^2 = \frac{(\mu - \mu_0)^2 k^2 H_0^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\rho [\mu I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \mu_0 K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} - \frac{\sigma k I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^2 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2].$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \varpi^2 &= \frac{(\mu - \mu_0)^2 (k\mathcal{R})^2 H_0^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\mathcal{R}^2 \rho [\mu I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \mu_0 K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} - \frac{\sigma k\mathcal{R} I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^3 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2] \\
\Leftrightarrow \varpi^2 &= \frac{\mu^2 (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 (k\mathcal{R})^2 H_0^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\mathcal{R}^2 \rho \mu [I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \frac{\mu_0}{\mu} K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} - \frac{\sigma k\mathcal{R} I_1(k\mathcal{R})}{\rho \mathcal{R}^3 I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2] \\
\Leftrightarrow \varpi^2 &= \left(\frac{-\sigma}{\rho \mathcal{R}^3} \right) \left(-\frac{\rho \mathcal{R}^3 \mu (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 (k\mathcal{R})^2 H_0^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\sigma \mathcal{R}^2 \rho [I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \frac{\mu_0}{\mu} K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{-\sigma}{\rho \mathcal{R}^3} \right) \left(\frac{k\mathcal{R} I_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2] \right), \tag{4.75}
\end{aligned}$$

de onde, finalmente, obtemos que:

$$\frac{-\varpi^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} = -\frac{H_0^2 \mathcal{R} \mu (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 (k\mathcal{R})^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\sigma [I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \frac{\mu_0}{\mu} K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} + \frac{k\mathcal{R} I_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \tag{4.76}$$

$$\frac{(-i\varpi)^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} = -\frac{H_0^2 \mathcal{R} \mu (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 (k\mathcal{R})^2 K_0(k\mathcal{R}) I_1(k\mathcal{R})}{\sigma [I_1(k\mathcal{R}) K_0(k\mathcal{R}) - \frac{\mu_0}{\mu} K_1(k\mathcal{R}) I_0(k\mathcal{R})]} + \frac{k\mathcal{R} I_1(k\mathcal{R})}{I_0(k\mathcal{R})} [1 - (k\mathcal{R})^2]. \tag{4.77}$$

Adimensionalizando com

$$\Omega = \frac{-i\varpi}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}}}, \quad \check{k} = k, \quad \varpi \in \mathbb{C} \text{ e } \check{k} = k\mathcal{R} \tag{4.78}$$

obtemos:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k} I_1(\check{k})}{I_0(\check{k})} (1 - \check{k}^2) - \frac{H_0^2 \mathcal{R} \mu (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 \check{k}^2 K_0(\check{k}) I_1(\check{k})}{\sigma [I_1(\check{k}) K_0(\check{k}) - \frac{\mu_0}{\mu} K_1(\check{k}) I_0(\check{k})]}. \tag{4.79}$$

E assim encontramos a relação de dispersão entre ϖ e k . Se desligarmos o campo, ou seja, fazendo $H_0 = 0$, teremos Ω sem magnetismo. E para valores de $\frac{\mu_0}{\mu} \neq 1$ e $H_0 \neq 1$ temos a presença de magnetismo. Assim como adotado por Rosensweig [13], vamos utilizar $\frac{H_0^2 \mathcal{R} \mu}{\sigma} = \frac{5}{4\pi}$. Escolhendo $\frac{\mu_0}{\mu} \approx 0$ (com magnetismo), temos a Figura (4.1), onde está representado o valor de Ω . Observamos que a presença de um campo magnético reduz significativamente a taxa de amplificação dos distúrbios, além de restringir os números de onda instáveis a uma faixa menor. Podemos dizer, assim, que houve uma estabilização do escoamento para números de onda fora dessa faixa.

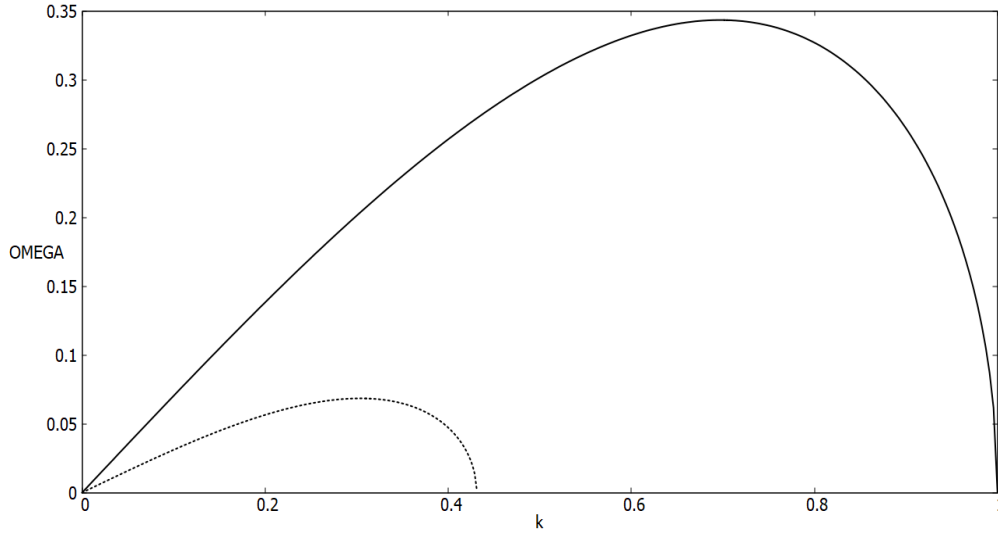


Figura 4.1 Relação de dispersão para um jato assimétrico. A linha tracejada representa a parte com magnetismo e a linha contínua representa a parte sem magnetismo. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

4.2 Análise do modelo de ondas longas: caso sem magnetismo

4.2.1 Escoamento invíscido

Para resolver o sistema com as equações (3.47) e (3.48), vamos considerar as seguintes perturbações em R e w ,

$$R \approx \mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1, \quad w \approx \varepsilon \hat{W}_1, \quad (4.80)$$

onde $\hat{\mathcal{R}}_1, \hat{W}_1$ são dadas pelo ansatz $e^{i(kz - \varpi t)}$, onde k é o número de onda e ϖ é a frequência da onda. Portanto:

$$\hat{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 e^{i(kz - \varpi t)} \quad (4.81)$$

e

$$\hat{W}_1 = W_1 e^{i(kz - \varpi t)}, \quad (4.82)$$

com \mathcal{R}_1 e W_1 constantes (amplitudes iniciais dos distúrbios). Substituindo as duas equações acima em (3.47),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon \hat{W}_1 (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^2)}{\partial z} + \frac{\partial((\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^2)}{\partial t} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial(\mathcal{R}^2)}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial(2\mathcal{R}\hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{W}_1 \mathcal{R}^2)}{\partial z} \right) + \end{aligned}$$

$$+\varepsilon^2 \left(\frac{\partial(\hat{\mathcal{R}}_1^2)}{\partial t} + \frac{\partial(2\hat{W}_1\mathcal{R}\hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z} \right) + \dots = 0. \quad (4.83)$$

Como \mathcal{R} é constante, temos que o termo $\mathcal{O}(1)$ é nulo, satisfazendo a equação do lado direito. E observando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$, temos:

$$-i2\varpi\mathcal{R}\hat{\mathcal{R}}_1 + ik\mathcal{R}^2\hat{W}_1 = 0 \Leftrightarrow \varpi = \frac{k\mathcal{R}\hat{W}_1}{2\hat{\mathcal{R}}_1}. \quad (4.84)$$

Substituindo w e p da equação (3.48),

$$\begin{aligned} \rho \left(\varepsilon \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial t} + \varepsilon^2\hat{W}_1 \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial z} \right) &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left((\mathcal{R} + \varepsilon\hat{\mathcal{R}}_1)^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial(\mathcal{R} + \varepsilon\hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) + \\ &+ \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2(\mathcal{R} + \varepsilon\hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial(\mathcal{R} + \varepsilon\hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \right). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Reorganizando os termos em \mathcal{R} , temos:

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial t} + \rho\varepsilon^2\hat{W}_1 \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial z} &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \left(1 + \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right)^{-1} \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial\hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) + \\ &+ \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial^2\hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial\hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \right), \end{aligned} \quad (4.86)$$

de onde, após expandi-los em termos de ε , obtemos:

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial t} + \rho\varepsilon^2\hat{W}_1 \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial z} &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \left(1 - \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right) + \\ &+ \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial^2\hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z^2} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Juntando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$, temos:

$$\rho\varepsilon \frac{\partial\hat{W}_1}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(-\varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} - \varepsilon \frac{\partial^2\hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z^2} \right). \quad (4.88)$$

Assumindo a forma dos ansatz de $\hat{\mathcal{R}}_1$ e \hat{W}_1 , temos:

$$-\rho i \varpi \hat{W}_1 = -\sigma \left(-ik \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} + ik^3 \hat{\mathcal{R}}_1 \right), \quad (4.89)$$

que pode ser rearranjado como:

$$\rho \varpi \hat{W}_1 = \sigma \left(-k \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} + k^3 \hat{\mathcal{R}}_1 \right) = -\frac{\sigma}{\mathcal{R}^3} (k\mathcal{R} \hat{\mathcal{R}}_1 - k^3 \mathcal{R}^3 \hat{\mathcal{R}}_1). \quad (4.90)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{k\mathcal{R}}{2\hat{\mathcal{R}}_1}$, e substituindo a equação (4.84), resulta em:

$$\begin{aligned} \rho \varpi^2 &= -\frac{\sigma}{2\mathcal{R}^3} (k^2 \mathcal{R}^2 - k^4 \mathcal{R}^4) \\ \Leftrightarrow -\varpi^2 &= \frac{\sigma (k\mathcal{R})^2}{2\rho \mathcal{R}^3} (1 - (k\mathcal{R})^2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-i\varpi)^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} = \frac{(k\mathcal{R})^2}{2} (1 - (k\mathcal{R})^2). \quad (4.92)$$

Substituindo por (4.78), obtemos, finalmente:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2). \quad (4.93)$$

Temos duas soluções para Ω reais para $\check{k} \in [0, 1]$, mas a solução negativa não é de relevância para este estudo pois está associada apenas a modos estáveis, e também não é compatível com a realidade e os resultados numéricos que serão apresentados no próximo capítulo. Comparada com a equação (4.79), sem campo magnético, temos que o primeiro termo da série de Taylor de $\frac{I_1(\check{k})}{I_0(\check{k})}$ é $\frac{\check{k}}{2}$, ou seja, (4.93) é uma primeira aproximação para a equação (4.79), com $\check{k} \in [0, 1]$. Na Figura (4.2) temos a comparação da equação (4.79) com (4.93).

4.2.2 Escoamento viscoso

Assim como no caso sem viscosidade, vamos considerar as mesmas perturbações de R e w , dadas pelas equações (4.81) e (4.82). Substituindo na equação (3.90), temos:

$$\rho \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \hat{W}_1 \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1} - \frac{\partial^2 (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z^2} \right) +$$

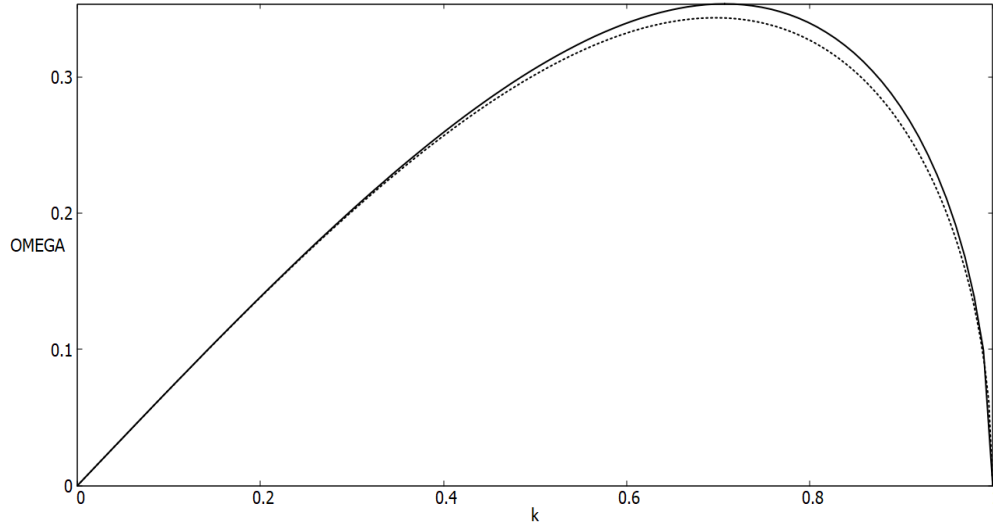


Figura 4.2 Comparação entre a solução sem magnetismo (4.79) e solução assintótica (4.93). A linha contínua é a solução assintótica. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

$$+ \frac{3\eta}{(\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left((\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^2 \frac{\partial(\varepsilon \hat{W}_1)}{\partial z} \right), \quad (4.94)$$

onde:

$$\frac{1}{\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1} \approx \frac{1}{\mathcal{R}} \left(1 - \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right), \quad (4.95)$$

e

$$\frac{1}{(\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^2} = \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left(1 + \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right)^{-2} \approx \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left(1 - 2\varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right). \quad (4.96)$$

Substituindo as duas aproximações e considerando os termos $\mathcal{O}(1)$, temos:

$$0 = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial z^2} \right) \quad (4.97)$$

Como \mathcal{R} é constante, há igualdade do lado esquerdo e direito. Agora, considerando os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t} &= -\sigma \left(-\frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial \hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z} - \frac{\partial^3 \hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z^3} \right) + \frac{3\eta}{\mathcal{R}^2} \left(\mathcal{R}^2 \frac{\partial^2 \hat{W}_1}{\partial z^2} \right) \\ \Leftrightarrow -\rho i \omega \hat{W}_1 &= -\sigma \left(-\frac{ik \hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} - (ik)^3 \hat{\mathcal{R}}_1 \right) + 3\eta (ik)^2 \hat{W}_1 \\ \Leftrightarrow -\rho i \omega \hat{W}_1 &= -\sigma \left(-\frac{ik \hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} + ik^3 \hat{\mathcal{R}}_1 \right) - 3\eta k^2 \hat{W}_1. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Como a equação (3.68) é a mesma de (3.47), multiplicando os dois lados por $\frac{k\mathcal{R}}{2\hat{\mathcal{R}}_1}$ temos, por (4.84):

$$\begin{aligned}
-\rho i \varpi^2 &= -\frac{\sigma k \mathcal{R}}{2\hat{\mathcal{R}}_1} \left(-\frac{ik\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} + ik^3 \right) - 3\eta k^2 \varpi \\
\Leftrightarrow \varpi^2 &= -\frac{\sigma k^2 \mathcal{R}^2}{2\rho \mathcal{R}^3} (1 - (k\mathcal{R})^2) - i \frac{3\eta k^2 \varpi \mathcal{R}^2}{\rho \mathcal{R}^2} \\
\Leftrightarrow \varpi^2 &= -\frac{\sigma (k\mathcal{R})^2}{2\rho \mathcal{R}^3} (1 - (k\mathcal{R})^2) - i \frac{3\eta \varpi (k\mathcal{R})^2}{\rho \mathcal{R}^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\varpi^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} &= -\frac{(k\mathcal{R})^2}{2} (1 - (k\mathcal{R})^2) - i \frac{3\eta \varpi (k\mathcal{R})^2}{\rho \mathcal{R}^2 \frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} \\
\Leftrightarrow -\frac{\varpi^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} &= \frac{(k\mathcal{R})^2}{2} (1 - (k\mathcal{R})^2) - \frac{3\eta (-i\varpi) (k\mathcal{R})^2}{\rho \mathcal{R}^2 \frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} \\
\Leftrightarrow \frac{(-i\varpi)^2}{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}} &= \frac{(k\mathcal{R})^2}{2} (1 - (k\mathcal{R})^2) - \frac{3\eta (-i\varpi) (k\mathcal{R})^2}{\rho \mathcal{R}^2 \frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}}. \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Adimensionalizando com as expressões na equação (4.78), temos:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2) - \frac{3\eta \check{k}^2 \Omega}{\rho \mathcal{R}^2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3}}} = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2) - \frac{3\eta \check{k}^2 \Omega}{\rho \mathcal{R} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}}}} \tag{4.100}$$

Temos que $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}}}$ é um termo de velocidade, logo,

$$Re = \frac{\rho \mathcal{R} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}}}}{\eta} = \frac{\sqrt{\rho \mathcal{R} \sigma}}{\eta}. \tag{4.101}$$

Então (4.100) se torna:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2) - \frac{3\check{k}^2 \Omega}{Re}. \tag{4.102}$$

Na Figura (4.3) temos que a representação da equação acima para Ω real não-negativa, onde a solução negativa não será considerada, pela mesma razão do escoamento invíscido, onde vemos que conforme diminuimos Re , menor é a taxa de amplificação. Vemos isso em nossa experiência cotidiana com diferentes fluidos, onde vemos que fluidos mais viscosos se deformam mais lentamente e têm mais dificuldade em gerar gotas.

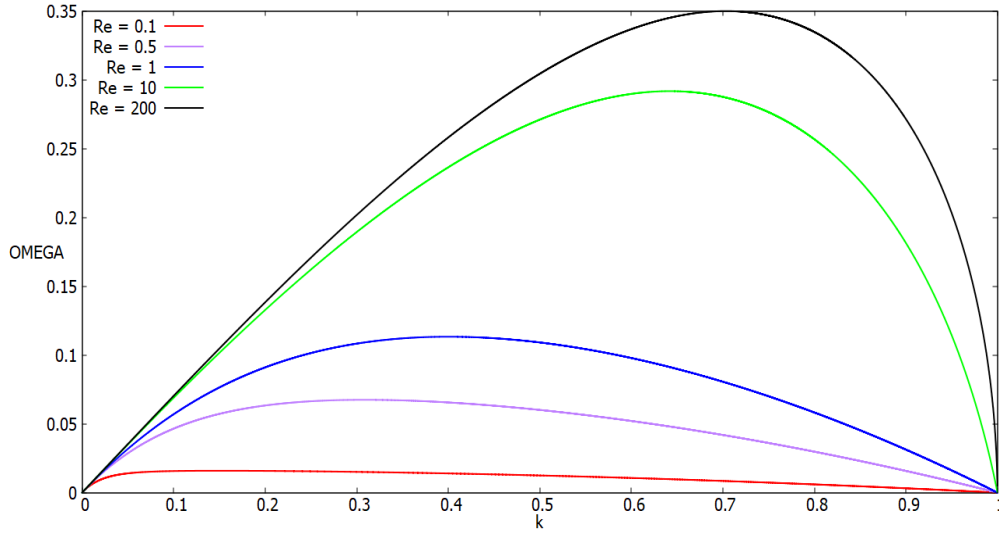


Figura 4.3 Representação da equação (4.102) para diferentes Re . OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \hat{k} .

4.3 Análise do modelo de ondas longas: caso com magnetismo

4.3.1 Escoamento invíscido

Assim como no caso sem magnetismo, vamos considerar as mesmas perturbações de R e w , dadas pelas equações (4.81) e (4.82). Substituindo na equação (3.118),

$$\rho \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \hat{W}_1 \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1} - \frac{\partial^2 (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2}{(\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^5} \frac{\partial (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z}. \quad (4.103)$$

Fazendo as seguintes simplificações:

$$\frac{1}{\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1} \approx \frac{1}{\mathcal{R}} \left(1 - \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} - \varepsilon \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}^2}, \quad (4.104)$$

$$\frac{1}{(\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)^5} \approx \frac{1}{\mathcal{R}^5} \left(1 - 5\varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}^5} - 5\varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^6}, \quad (4.105)$$

e, substituindo em (4.103), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \hat{W}_1 \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial z} \right) = & -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} - \varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} - \frac{\partial^2 (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z^2} \right) - \\ & - \left(\frac{1}{\mathcal{R}^5} - 5\varepsilon \frac{\hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^6} \right) 2\mu \mathcal{R}^4 H_0^2 \frac{\partial (\mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Pelos termos $\mathcal{O}(1)$, temos que

$$-\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial z^2} \right) - \frac{2\mu H_0^2}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} = 0, \quad (4.107)$$

dados que \mathcal{R} é constante. E os termos $\mathcal{O}(\varepsilon)$, resultaram em:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t} = & \sigma \left(\frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial \hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z} + \frac{\partial^3 \hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z^3} \right) - \frac{2\mu H_0^2}{\mathcal{R}} \frac{\partial \hat{\mathcal{R}}_1}{\partial z} \\ \Leftrightarrow -i\omega \rho \hat{W}_1 = & \sigma \left(\frac{ik \hat{\mathcal{R}}_1}{\mathcal{R}^2} - ik^3 \hat{\mathcal{R}}_1 \right) - ik \frac{2\mu H_0^2}{\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}}_1 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Multiplicando os dois lados por $\frac{k\mathcal{R}}{2\hat{\mathcal{R}}_1}$, pela equação (4.84), temos que:

$$\begin{aligned} -i\rho \omega^2 = & \frac{\sigma}{2} \left(\frac{ik^2}{\mathcal{R}} - ik^4 \mathcal{R} \right) - ik^2 \mu H_0^2 \Leftrightarrow -\rho \omega^2 = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{k^2}{\mathcal{R}} - k^4 \mathcal{R} \right) - k^2 \mu H_0^2 \\ \Leftrightarrow (-i\omega)^2 = & \frac{\sigma}{2\rho} \left(\frac{k^2}{\mathcal{R}} - k^4 \mathcal{R} \right) - \frac{k^2 \mu H_0^2}{\rho} = \frac{\sigma}{2\rho} \left(\frac{k^2}{\mathcal{R}} - k^4 \mathcal{R} \right) - \frac{k^2 \mu H_0^2}{\rho} \\ \Leftrightarrow (-i\omega)^2 = & \left(\frac{\sigma}{\rho \mathcal{R}^3} \right) \left[\frac{(k\mathcal{R})^2}{2} (1 - (k\mathcal{R})^2) - \frac{(k\mathcal{R})^2 \mu \mathcal{R} H_0^2}{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Adimensionalizando com a equação (4.78) e definindo o parâmetro adimensional

$$C_{pm} = \frac{\mu \mathcal{R} H_0^2}{\sigma}, \quad (4.110)$$

a equação acima se torna:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2) - C_{pm} \check{k}^2, \quad (4.111)$$

onde C_{pm} foi definido por Paz [11] como pressão magnética adimensional. Comparando com (4.79), escolhendo $\frac{\mu_0}{\mu} \approx 0$, obtemos

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}I_1(\check{k})}{I_0(\check{k})} (1 - \check{k}^2) - \frac{\mu \mathcal{R} H_0^2 \check{k}^2}{\sigma} = \frac{\check{k}I_1(\check{k})}{I_0(\check{k})} (1 - \check{k}^2) - C_{pm} \check{k}^2. \quad (4.112)$$

O primeiro termo da série de Taylor de $\frac{I_1(\check{k})}{I_0(\check{k})}$ é $\frac{\check{k}}{2}$, e a expressão acima se aproxima da equação (4.111), para $0 < \check{k} \ll 1$. Se fizermos $C_{pm} = 0$, recuperamos o caso invíscido (4.93). A Figura (4.4) mostra a diferença entre a aproximação na equação (4.111) e a expressão encontrada em (4.112), para $C_{pm} = \frac{5}{4\pi}$ e Ω real.

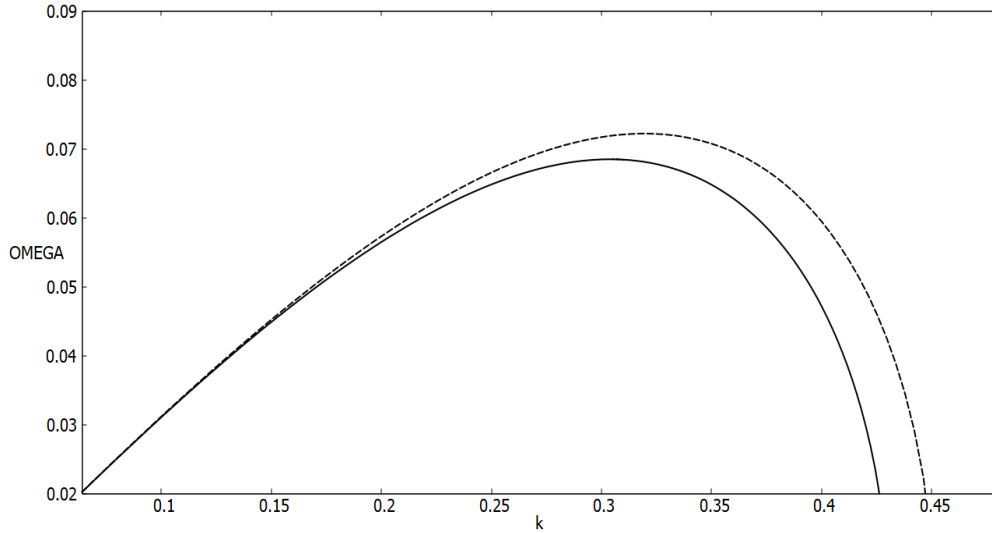


Figura 4.4 Comparação entre a solução de Rosensweig (4.112) e a solução assintótica (4.111), onde a linha contínua é a solução de Rosensweig. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

Como $\hat{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 e^{i(kz - \omega t)} = \mathcal{R}_1 e^{i\check{k}\hat{z}} e^{i\Omega\hat{t}}$, onde $\hat{z} = \frac{z}{\mathcal{R}}$ e $\hat{t} = \frac{t}{\sqrt{\frac{\rho \mathcal{R}^3}{\sigma}}}$. Se $\Omega^2 \leq 0$, então teremos uma solução que não amplificará, dado que teremos uma função oscilatória. De (4.102),

$$\Omega^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\check{k}^2(1 - \check{k}^2)}{2} - C_{pm} \check{k}^2 \leq 0 \Leftrightarrow \check{k}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\check{k}^2}{2} - C_{pm} \right) \leq 0. \quad (4.113)$$

Portanto, se $C_{pm} \geq \frac{1}{2}$, temos $\Omega^2 \leq 0, \forall \check{k} \in \mathbb{R}$ e o escoamento é estável.

4.3.2 Escoamento viscoso

Como já foi observado para o caso viscoso não magnético e magnético invíscido, temos que a equação (3.124) é uma combinação das duas soluções. Portanto, podemos descrever Ω como:

$$\Omega^2 = \frac{\check{k}^2}{2} (1 - \check{k}^2) - C_{pm}\check{k}^2 - \frac{3\check{k}^2\Omega}{Re}. \quad (4.114)$$

As Figuras (4.5) e (4.6) são a representação de (4.114) para C_{pm} variando entre 0.01, 0.05 e 0.1 e Ω real. Vemos por essas duas figuras que se Re for maior, ou seja, quanto menor a influência da viscosidade no escoamento, precisamos de um campo magnético mais intenso para reduzir as instabilidades no jato.

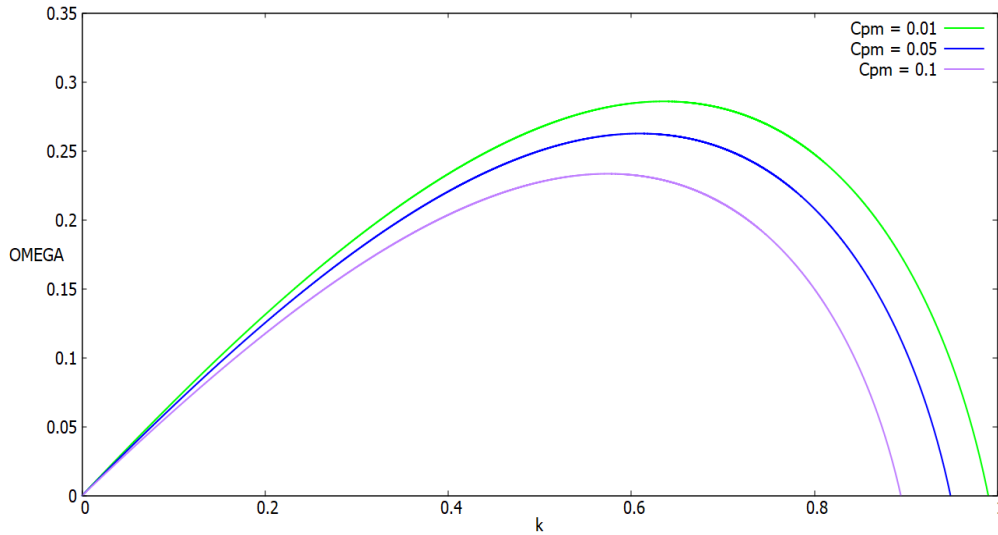


Figura 4.5 Ω para $Re = 10$. Da curva mais alta para a mais baixa temos respectivamente, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

Novamente temos duas soluções para Ω , mas o único caso relevante é o seguinte:

$$\Omega = -\frac{3\check{k}^2}{2Re} + \sqrt{\frac{9\check{k}^4}{4Re^2} + \frac{\check{k}^2(1 - \check{k}^2)}{2} - C_{pm}\check{k}^2}. \quad (4.115)$$

Assim como para o caso invíscido, se $C_{pm} \geq \frac{1}{2}$, então $\Omega \leq 0$ ou $\Omega \in \mathbb{C}$. Desta forma, esta teoria prevê que devemos ter o retorno do jato perturbado para forma cilíndrica. Isso será discutido no capítulo seguinte.

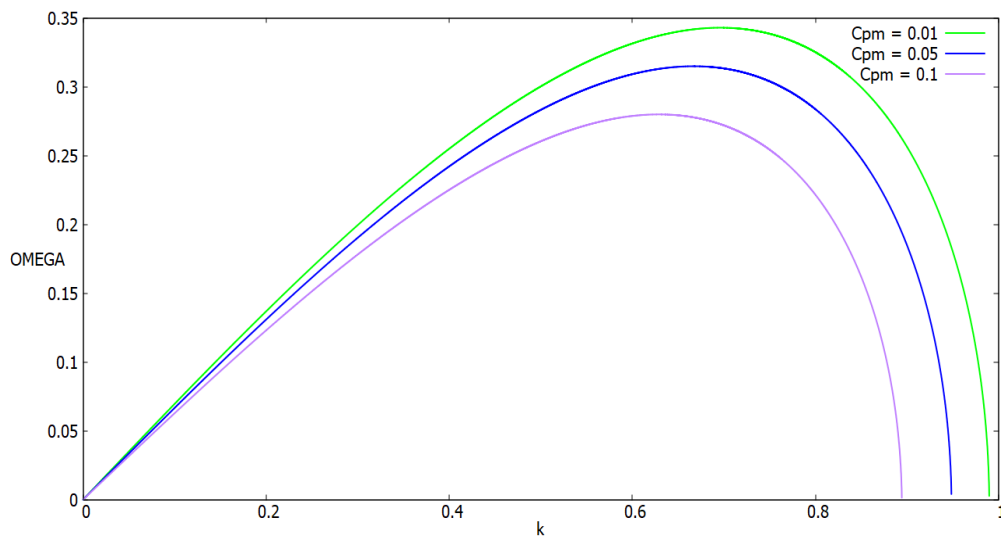


Figura 4.6 Ω para $Re = 200$. Da curva mais alta para a mais baixa temos respectivamente, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

Capítulo 5

Evolução para regimes não lineares

5.1 Sem magnetismo

De forma mais geral, vamos tratar do sistema (3.91), cujas as equações são dadas abaixo:

$$\frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} + \frac{\partial(R^2)}{\partial t} = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (5.2)$$

em que o primeiro termo do lado direito de (5.2) é um termo de pressão, e a equação pode ser reescrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{3\eta}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (5.3)$$

Para adimensionalizar as duas equações, temos os parâmetros de comprimento, velocidade e tempo, dados respectivamente, por:

$$\mathcal{R}, v_c, t_c, \quad (5.4)$$

onde \mathcal{R} é raio inicial do cilindro sem perturbação e v_c é chamado de velocidade de capilaridade. Logo, as variáveis adimensionais são:

$$\hat{w} = \frac{w}{v_c}, \hat{R} = \frac{R}{\mathcal{R}}, \hat{t} = \frac{t}{t_c} = \frac{t v_c}{\mathcal{R}}, \hat{z} = \frac{z}{\mathcal{R}}, \hat{p} = \frac{p}{\rho v_c}. \quad (5.5)$$

Substituindo em (5.1), obtemos:

$$\frac{\mathcal{R}^2 v_c}{\mathcal{R}} \frac{\partial(\hat{R}^2 \hat{w})}{\partial \hat{z}} + \frac{\mathcal{R}^2 v_c}{\mathcal{R}} \frac{\partial(\hat{R}^2)}{\partial \hat{t}} = 0 \quad (5.6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\hat{R}^2\hat{w})}{\partial\hat{z}} + \frac{\partial(\hat{R}^2)}{\partial\hat{t}} = 0. \quad (5.7)$$

E substituindo em (5.3), obtemos

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{v_c^2}{\mathcal{R}} \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{t}} + \frac{v_c^2}{\mathcal{R}} \hat{w} \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} \right) &= -\frac{\rho v_c^2}{\mathcal{R}} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{z}} + \frac{\mathcal{R}^2 v_c}{\mathcal{R}^4} \frac{3\eta}{\hat{R}^2} \frac{\partial}{\partial\hat{z}} \left(\hat{R}^2 \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{t}} + \hat{w} \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} &= -\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{z}} + \frac{3\eta}{\rho \mathcal{R} v_c} \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial}{\partial\hat{z}} \left(\hat{R}^2 \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{t}} + \hat{w} \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} &= -\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{z}} + \frac{3}{Re} \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial}{\partial\hat{z}} \left(\hat{R}^2 \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por simplicidade de notação, vamos retirar o $(\hat{\cdot})$ das equações. Com isso, as equações governantes adimensionais são:

$$\begin{cases} \frac{\partial(R^2)}{\partial t} + \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{3}{Re} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}. \quad (5.9)$$

Tomaremos como condições iniciais, apenas uma perturbação da superfície livre,

$$R(z, 0) = \mathcal{R}(1 + \varepsilon \cos(\check{k}z)), \quad (5.10)$$

e manteremos a velocidade do jato nula, isto é:

$$w(z, 0) = 0. \quad (5.11)$$

Seguindo Ashgriz [2], como $\mathcal{R} = 1$, $\check{k} = \frac{2\pi\mathcal{R}}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$, em que λ é o comprimento de onda e $\varepsilon = 0.05$, que representa uma perturbação máxima de 5% do raio inicial \mathcal{R} (ou seja, do raio do cilindro sem perturbação).

Vamos considerar as condições de contorno periódicas, isto é, vamos assumir que $R(0, t) = R(\lambda, t)$ e $w(0, t) = w(\lambda, t)$. Para a discretização das equações, z será dividido em n partes, com $z \in [0, \lambda]$. Considerando R_i e w_i , como o raio e a velocidade na posição i , considerando as condições de contorno periódica, como mencionado por Paz [11],

$$\begin{cases} R_{-1} = R_{n-1}, R_0 = R_n, R_1 = R_{n+1} \\ w_{-1} = w_{n-1}, w_0 = w_n, w_1 = w_{n+1} \end{cases}. \quad (5.12)$$

Para resolver o sistema de equações (5.9), foi utilizado o Método das linhas, que consiste na transformação de um equação diferencial parcial em um sistema de equações diferenciais ordinárias, como foi proposto por Pavel e Furlani [11, 6], onde as derivadas espaciais são escritas como diferenças finitas, como descrito na seção (2.1.4). Começando pela primeira equação de (5.9),

$$\frac{\partial(R^2)}{\partial t} + \frac{\partial(R^2 w)}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 2R \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial(R^2 w)}{\partial z}. \quad (5.13)$$

Assim, obtemos a equação para a evolução do raio na superfície livre como:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = -\frac{R_{i+1/2}^2 w_i - R_{i-1/2}^2 w_{i-1}}{2R_i \Delta z}, \quad (5.14)$$

onde

$$R_{i+1/2} = \frac{R_i + R_{i+1}}{2}, \quad R_{i-1/2} = \frac{R_i + R_{i-1}}{2}. \quad (5.15)$$

Substituindo acima estas expressões, temos:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = -\frac{(R_i + R_{i+1})^2 w_i - (R_i + R_{i-1})^2 w_{i-1}}{8R_i \Delta z}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (5.16)$$

Pela condição de contorno (5.12), para $i = n$,

$$\frac{\partial R_n}{\partial t} = \frac{\partial R_0}{\partial t} \quad (5.17)$$

Agora, para a segunda equação de (5.9), temos o termo de pressão. A aproximação assintótica dada pela equação (5.2) foi obtida pela equação (3.83). Entretanto, para trazer mais informação sobre o termo de pressão, que é muito relevante no comportamento não-linear da equação, vamos utilizar a expressão abaixo, como sugere Paz e Furlani [11, 6]:

$$p = \sigma \left(R^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \right). \quad (5.18)$$

Adimensionalizando, com as escalas adequadas:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \left(\hat{R}^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \hat{z}^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right)^{-3/2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{p}{\frac{\sigma}{\mathcal{R}}} &= \hat{p} = \left(\hat{R}^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \hat{z}^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right)^{-3/2} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por simplicidade, vamos retirar o ($\hat{\cdot}$), e assim:

$$p = \left(R^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left(1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right)^{-3/2} \right). \quad (5.20)$$

Vamos discretizar o gradiente de pressão que aparece no sistema (5.9) como:

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} = \frac{\text{Pressão}_{i+1} - \text{Pressão}_i}{\Delta z}, \quad (5.21)$$

onde, Pressão_i é o termo discretizado calculado a partir da equação (5.18), isto é:

$$\text{Pressão}_i = \frac{1}{R_i A_i^{1/2}} - \frac{R_{i+1} - 2R_i + R_{i-1}}{(\Delta z)^2 A_i^{3/2}}, \quad (5.22)$$

com A_i é calculada usando-se uma fórmula de diferença centrada:

$$A_i = \left(1 + \left(\frac{R_{i+1} - R_{i-1}}{2\Delta z} \right)^2 \right). \quad (5.23)$$

O termo de viscosidade é dado da seguinte forma:

$$\text{Viscosidade}_i = \frac{1}{R_{i+1/2}^2} \frac{R_{i+1}^2 (w_{i+1} - w_i) - R_i^2 (w_i - w_{i-1})}{(\Delta z)^2}, \quad (5.24)$$

em que $R_{i+1/2}$ é média de R_i e R_{i+1} , isto é:

$$\text{Viscosidade}_i = \frac{4}{(R_{i+1} + R_i)^2} \frac{R_{i+1}^2 (w_{i+1} - w_i) - R_i^2 (w_i - w_{i-1})}{(\Delta z)^2}. \quad (5.25)$$

Por fim, o termo de advecção precisa ser discretizado. Para este termo, faremos uso do Método Upwind para calculá-lo, ou seja:

$$w_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = \text{Advecção}_i = (w_i^+ d_i^- + w_i^- d_i^+), \quad (5.26)$$

onde,

$$w_i^+ = \max(w_i, 0), \quad w_i^- = \min(w_i, 0), \quad (5.27)$$

e

$$d_i^+ = \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta z}, \quad d_i^- = \frac{w_i - w_{i-1}}{\Delta z}. \quad (5.28)$$

Juntando (5.22), (5.25) e (5.26), temos,

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\text{Advecção}_i - \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{3}{Re} \text{Viscosidade}_i, \quad (5.29)$$

onde $i = 0, \dots, n-1$ e pela condição de contorno periódica,

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \frac{\partial w_0}{\partial t}. \quad (5.30)$$

Finalmente, chegamos nas discretizações do sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_i}{\partial t} = -\frac{(R_i + R_{i+1})^2 w_i - (R_i + R_{i-1})^2 w_{i-1}}{8R_i \Delta z} \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} = -(w_i^+ d_i^- + w_i^- d_i^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1} - \text{Pressão}_i}{\Delta z} + \\ + \frac{12 R_{i+1}^2 (w_{i+1} - w_i) - R_i^2 (w_i - w_{i-1})}{Re (R_{i+1} + R_i)^2 (\Delta z)^2} \end{array} \right. , \quad (5.31)$$

onde $i = 0, \dots, n-1$.

Para tratarmos do caso invíscido basta fazer $Re \rightarrow \infty$, que computacionalmente representa colocar um valor muito grande de Re tal forma que a parte da viscosidade resultante seja desprezível, ou introduzir uma constante junto a parte viscosa, de tal forma que quando queremos viscosidade, colocamos 1 ou caso contrário, zeramos o valor da constante.

5.2 Com magnetismo

Adimensionalizando a equação (3.122), seguindo (5.4), temos:

$$\begin{aligned} \rho \frac{v_c^2}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\sigma}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{1}{\hat{R}} - \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \hat{z}^2} \right) - \frac{2\mu H_0^2}{\mathcal{R} \hat{R}^5} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} + \frac{3\eta}{\mathcal{R}^2 \hat{R}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\hat{R}^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{1}{\hat{R}} - \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \hat{z}^2} \right) - \frac{2C_{pm}}{\hat{R}^5} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{z}} + \frac{3}{Re} \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\hat{R}^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Retirando o ($\hat{\cdot}$) por simplicidade, temos a equação do momento adimensionalizada:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) - \frac{2C_{pm}}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{3}{Re} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(R^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (5.33)$$

A equação (3.121) adimensionalizada se mantém inalterada. Temos as condições iniciais iguais à do caso sem magnetismo, ou seja:

$$R(z, 0) = \mathcal{R}(1 + \varepsilon \cos(kz)), \quad (5.34)$$

$$w(z, 0) = 0. \quad (5.35)$$

Assim como as mesmas condições de contorno dadas em (5.12). A equação (5.33) retirando o termo magnético já foi discretizada na seção anterior. E a parte magnética será discretizada da seguinte forma:

$$\left. \frac{-2C_{pm}}{R^5} \frac{\partial R}{\partial z} \right|_i = \frac{-2C_{pm}}{(0.5(R_i + R_{i+1}))^5} \frac{(R_{i+1} - R_{i-1})}{2\Delta z}. \quad (5.36)$$

E assim, temos as discretizações,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_i}{\partial t} = -\frac{(R_i + R_{i+1})^2 w_i - (R_i + R_{i-1})^2 w_{i-1}}{8R_i \Delta z}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} = -(w_i^+ d_i^- + w_i^- d_i^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1} - \text{Pressão}_i}{\Delta z} + \\ + \frac{12 R_{i+1}^2 (w_{i+1} - w_i) - R_i^2 (w_i - w_{i-1})}{(R_{i+1} + R_i)^2 (\Delta z)^2} - \frac{2C_{pm}}{(0.5(R_i + R_{i+1}))^5} \frac{(R_{i+1} - R_{i-1})}{2\Delta z} \end{array} \right., \quad (5.37)$$

em que $i \in \{0, \dots, n-1\}$, e pelas condições de contorno:

$$\frac{\partial R_n}{\partial t} = \frac{\partial R_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial w_n}{\partial t} = \frac{\partial w_0}{\partial t}. \quad (5.38)$$

5.3 Integração temporal

5.3.1 Método de Euler

Temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias a resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_i}{\partial t} = -\frac{(R_i + R_{i+1})^2 w_i - (R_i + R_{i-1})^2 w_{i-1}}{8R_i \Delta z}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} = -(w_i^+ d_i^- + w_i^- d_i^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1} - \text{Pressão}_i}{\Delta z} + \\ + \frac{12 R_{i+1}^2 (w_{i+1} - w_i) - R_i^2 (w_i - w_{i-1})}{Re (R_{i+1} + R_i)^2 (\Delta z)^2} - \frac{2C_{pm}}{(0.5(R_i + R_{i+1}))^5} \frac{(R_{i+1} - R_{i-1})}{2\Delta z}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Aplicando o Método de Euler dada na equação (2.29) temos:

$$R_{i,j+1} = R_{i,j} - \Delta t \left(\frac{(R_{i,j} + R_{i+1,j})^2 w_{i,j} - (R_{i,j} + R_{i-1,j})^2 w_{i-1,j}}{8R_{i,j} \Delta z} \right), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} w_{i,j+1} = w_{i,j} + \Delta t \left(-(w_{i,j}^+ d_{i,j}^- + w_{i,j}^- d_{i,j}^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1,j} - \text{Pressão}_{i,j}}{\Delta z} \right) + \\ + \Delta t \left(\frac{12 R_{i+1,j}^2 (w_{i+1,j} - w_{i,j}) - R_{i,j}^2 (w_{i,j} - w_{i-1,j})}{Re (R_{i+1,j} + R_{i,j})^2 (\Delta z)^2} \right) - \\ - \left(\frac{2C_{pm}}{(0.5(R_{i,j} + R_{i+1,j}))^5} \frac{(R_{i+1,j} - R_{i-1,j})}{2\Delta z} \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde i representa a discretização no eixo z e j representa a discretização temporal.

5.3.2 Método do Trapézio

Aplicando o Método do Trapézio, definido na equação (2.33) no sistema (5.39):

$$\begin{aligned} R_{i,j+1} = R_{i,j} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(R_{i,j+1} + R_{i+1,j+1})^2 w_{i,j+1} - (R_{i,j+1} + R_{i-1,j+1})^2 w_{i-1,j+1}}{8R_{i,j+1} \Delta z} \right) - \\ - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(R_{i,j} + R_{i+1,j})^2 w_{i,j} - (R_{i,j} + R_{i-1,j})^2 w_{i-1,j}}{8R_{i,j} \Delta z} \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{\Delta t}{2} \left(-(w_{i,j+1}^+ d_{i,j+1}^- + w_{i,j+1}^- d_{i,j+1}^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1,j+1} - \text{Pressão}_{i,j+1}}{\Delta z} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{12 R_{i+1,j+1}^2 (w_{i+1,j+1} - w_{i,j+1}) - R_{i,j+1}^2 (w_{i,j+1} - w_{i-1,j+1})}{Re (R_{i+1,j+1} + R_{i,j+1})^2 (\Delta z)^2} \right) + \\
& \frac{\Delta t}{2} \left(- \frac{2C_{pm}}{(0.5(R_{i,j+1} + R_{i+1,j+1}))^5} \frac{(R_{i+1,j+1} - R_{i-1,j+1})}{2\Delta z} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(-(w_{i,j}^+ d_{i,j}^- + w_{i,j}^- d_{i,j}^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1,j} - \text{Pressão}_{i,j}}{\Delta z} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{12 R_{i+1,j}^2 (w_{i+1,j} - w_{i,j}) - R_{i,j}^2 (w_{i,j} - w_{i-1,j})}{Re (R_{i+1,j} + R_{i,j})^2 (\Delta z)^2} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(- \frac{2C_{pm}}{(0.5(R_{i,j} + R_{i+1,j}))^5} \frac{(R_{i+1,j} - R_{i-1,j})}{2\Delta z} \right). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, vamos escrever as equações acima como:

$$R_{i,j+1} = R_{i,j} + \frac{\Delta t}{2} (f_{i,j+1} + f_{i,j}), \tag{5.44}$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{\Delta t}{2} (g_{i,j+1} + g_{i,j}), \tag{5.45}$$

onde

$$f_{i,j} = - \frac{(R_{i,j} + R_{i+1,j})^2 w_{i,j} - (R_{i,j} + R_{i-1,j})^2 w_{i-1,j}}{8R_{i,j}\Delta z}, \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
g_{i,j} = & -(w_{i,j}^+ d_{i,j}^- + w_{i,j}^- d_{i,j}^+) - \frac{\text{Pressão}_{i+1,j} - \text{Pressão}_{i,j}}{\Delta z} + \\
& + \frac{12 R_{i+1,j}^2 (w_{i+1,j} - w_{i,j}) - R_{i,j}^2 (w_{i,j} - w_{i-1,j})}{Re (R_{i+1,j} + R_{i,j})^2 (\Delta z)^2} - \\
& - \frac{2C_{pm}}{(0.5(R_{i,j} + R_{i+1,j}))^5} \frac{(R_{i+1,j} - R_{i-1,j})}{2\Delta z}. \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Definindo o vetor com as coordenadas

$$\Theta_i = R_{i,j+1} - R_{i,j} - \frac{\Delta t}{2} (f_{i,j+1} + f_{i,j}), \quad 0 \leq i \leq n, \tag{5.48}$$

$$\Theta_{n+1+i} = w_{i,j+1} - w_{i,j} - \frac{\Delta t}{2} (g_{i,j+1} + g_{i,j}), \quad 0 \leq i \leq n. \tag{5.49}$$

Com isso chegamos no sistema de equações $\Theta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, onde \mathbf{x} é função de $R_{i,j}$ e $w_{i,j}$. Para resolver este sistema, vamos utilizar o Método de Newton para sistemas, definido pelo processo iterativo:

$$\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p - [\nabla \Theta(\mathbf{x}^p)]^{-1} \Theta(\mathbf{x}^p), \tag{5.50}$$

com \mathbf{x}^p , para $p = 0$ sendo um chute inicial e em que $\nabla\Theta$ é a matriz Jacobiana do sistema. Pela dificuldade computacional de inverter matrizes, podemos definir o novo sistema:

$$\mathbf{y}^p = [\nabla\Theta(\mathbf{x}^p)]^{-1}\Theta(\mathbf{x}^p) \Leftrightarrow [\nabla\Theta(\mathbf{x}^p)]\mathbf{y}^p = \Theta(\mathbf{x}^p), \quad (5.51)$$

e encontrar \mathbf{y}^p resolvendo-se um sistema linear. Para encontrar $\nabla\Theta(\mathbf{x}^p)$ foram calculadas as derivadas exatas, usando software de computação algébrica para fazer todas as derivadas. Para resolver (5.51), foi usado o Método iterativo de Gauss-Seidel. Encontrando \mathbf{y}^p , retornamos para (5.50) com $\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p - \mathbf{y}^p$. Então repetimos esse processo até que $|\mathbf{x}^{p+1} - \mathbf{x}^p| \leq \text{erro}$, com esse erro definido previamente.

5.3.3 Convergência dos métodos numéricos

Utilizando as discretizações do Método de Euler e Método do Trapézio podemos verificar se a ordem dos Métodos estão corretas. Para realizar esta análise, fixamos a posição R_0 da malha (esse ponto sempre está presente em todas as discretizações), para $Re = 200$ e instante de tempo fixado $t = 9$. Temos na Figura (5.1) que o valor de R_0 converge linearmente conforme diminuimos Δt . Sendo assim, como esperado, o Método de Euler é de primeira ordem. Na Figura (5.2), com os resultados numéricos obtemos uma convergência quadrática, quando diminui-se Δt . Portanto, temos que o Método do Trapézio é de segunda ordem. Na Figura (5.3) temos que os métodos convergem para a mesma solução.

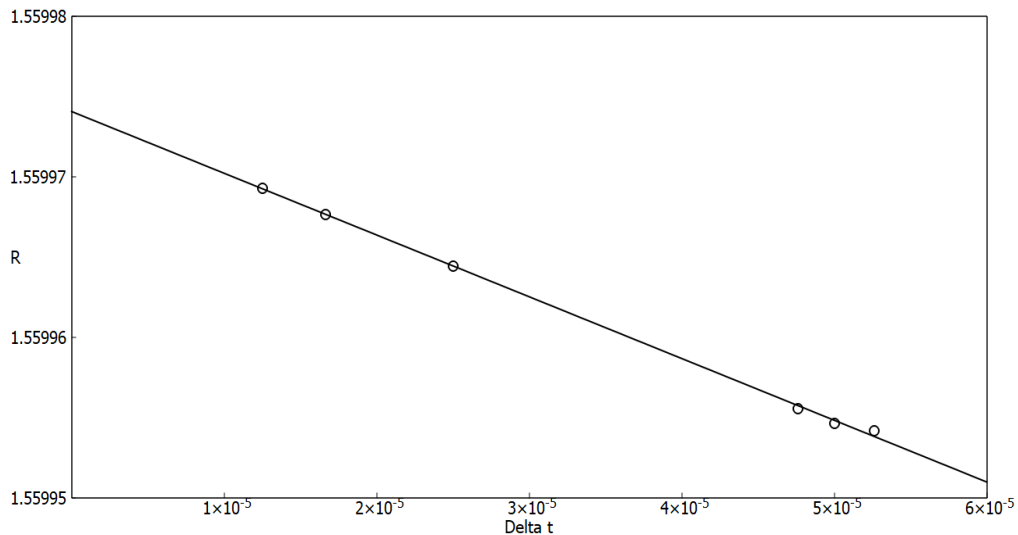


Figura 5.1 Convergência do Método de Euler. R no gráfico representa a razão R_0 .

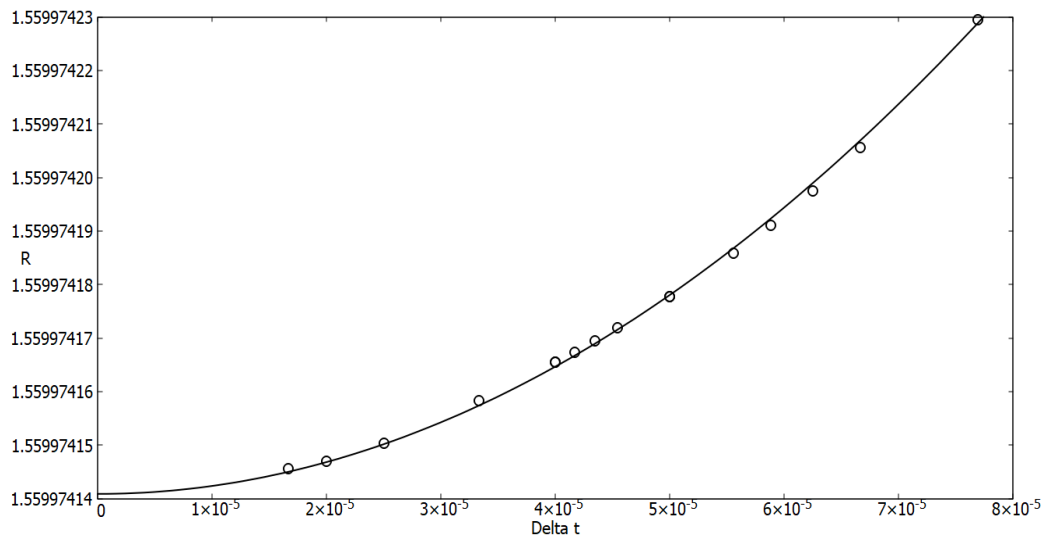


Figura 5.2 Convergência do Método do Trapézio. R no gráfico representa R_0 .

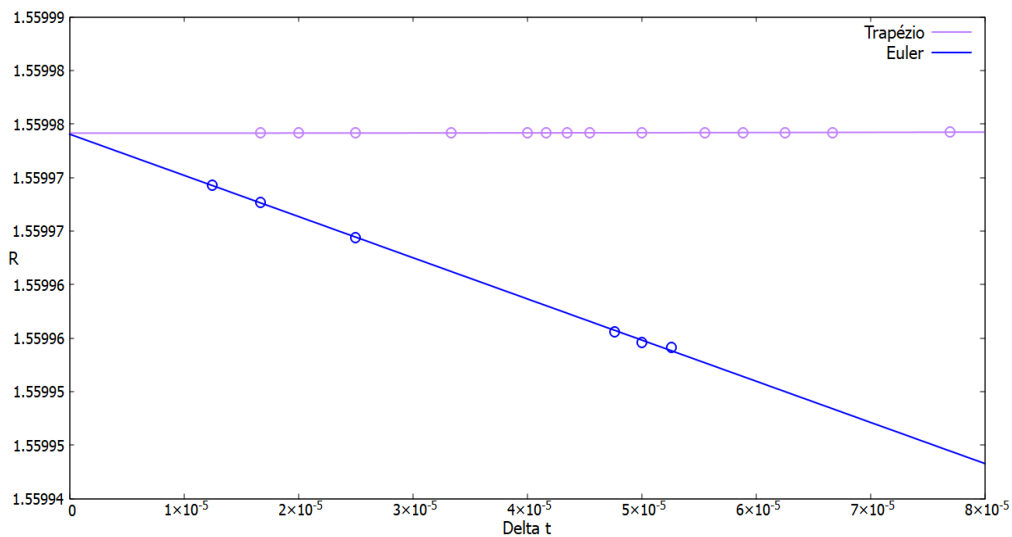


Figura 5.3 Método de Euler e Trapézio convergindo para mesma solução. R no gráfico representa R_0 .

Agora, vamos resolver as equações obtidas acima e ver os resultados para regimes não-lineares.

5.4 Resultados para o caso sem magnetismo

Para solucionar o sistema de equações (5.9) foi utilizado o Método de Euler para os casos viscosos ($Re = 10$ e $Re = 200$). Em nosso código, o eixo z foi dividido em 700 partes. Para os casos invíscidos ($Re \rightarrow \infty$) foi necessário utilizar o Método do Trapézio, com eixo z dividido em 250 partes, pois os resultados apresentados no Método de Euler não são consistentes com a teoria. A tabela 5.1 mostra uma comparação do tempo de quebra adimensional, com os tempos obtidos por Ashgriz, Furlani e Paz [2, 6, 11]. O critério de parada foi o mesmo adotado por Ashgriz [2], que definiu o tempo de parada em quando R_i para algum $i \in \{0, \dots, n\}$ for menor que 1% de \mathcal{R} . Esse mesmo critério de parada será definido como gota formada, pois como vamos ver pelas figuras nessa seção, não há de fato gota formada, por haver singularidades na equações para quando R tende a 0 e as curvas obtidas a partir da solução numérica são refletidas sobre o eixo z , para visualizamos o jato. Isso pode ser feito pois temos a hipótese do jato ser axissimétrico com relação ao eixo z . Os resultados apresentados foram arredondados para duas casas decimais. Vemos que há uma excelente concordância com o tempo de quebra obtido neste trabalho com outros trabalhos disponíveis na literatura. Vemos pela tabela 5.1 que conforme foi visto no capítulo anterior, que a viscosidade afeta consideravelmente o tempo de quebra, onde a gota demora mais para se formar em escoamentos viscosos.

Tabela 5.1 Tempo de quebra em comparação com os demais autores.

Re	k	Ashgriz [2]	Furlani [6]	Paz [11]	Presente trabalho
10	0.2	26.683	27.9	27.48	27.42
10	0.45	14.299	14.3	14.35	14.35
10	0.7	11.623	11.4	11.47	11.47
10	0.9	14.83	14.4	14.39	14.39
200	0.2	25.213	25	24.87	24.90
200	0.45	12.911	12.6	12.63	12.63
200	0.7	10.035	9.7	9.71	9.71
200	0.9	14.495	11.0	11	11.00
∞	0.2	-	-	-	24.89
∞	0.45	-	-	-	12.60
∞	0.7	-	-	-	9.66
∞	0.9	-	-	-	10.87

Agora, vamos comparar a teoria linear para o valor de Ω , obtido em (4.102), com o valor numérico, onde $R \approx \mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1$ e $\hat{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 e^{i(kz - \omega t)}$, o que implica que fazendo $z = 0$ e $\mathcal{R} = 1$, podemos encontrar uma aproximação de tal forma que $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon} \sim \mathcal{R}_1 e^{i(0k - \omega t)} = \mathcal{R}_1 e^{-i\omega t}$, onde R_0 é o valor numérico para a função $R(0, t)$. Adimensionalizando $\hat{t} = \frac{t}{t_c} = \frac{t}{\sqrt{\frac{\rho \mathcal{R}^3}{\sigma}}}$, e pela equação (4.78), obtemos:

$$\mathcal{R}_1 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho \mathcal{R}^3}{\sigma}} \hat{t}} = \mathcal{R}_1 e^{\Omega \hat{t}}. \quad (5.52)$$

E assim, a partir dos valores numéricos obtidos por $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$ durante vários instantes de tempo, fazemos uma regressão linear com a função $\mathcal{R}_1 e^{\Omega \hat{t}}$, onde podemos determinar os valores numéricos de \mathcal{R}_1 e Ω . E com isso chegamos nos valores da tabela 5.2. Vale ressaltar que dependendo da quantidade de pontos utilizados na regressão, temos valores diferentes para as constantes, portanto, o critério adotado foi mais visual, onde a regressão se ajustou melhor aos valores numéricos, como podemos ver pelas Figuras (5.4), (5.5), (5.6), (5.7).

Na Figura (5.9) temos a comparação gráfica dos valores de (4.102) para diferentes números de Reynolds, comparada com valores numéricos da tabela 5.2. Para número de Reynolds menor que 10, temos as melhores aproximações de modo geral, com erro relativo bem pequeno. Pelas imagens compreendidas entre as Figuras (5.4) e (5.9) podemos ver que a teoria que supõe a solução como aproximadamente $R(z, t) \approx \mathcal{R} + \varepsilon \hat{\mathcal{R}}_1$ é bastante acurada para baixo Reynolds, onde podemos assumir $\mathcal{R}_1 = 1$ e Ω teórico, como podemos ver na Figura (5.10), para $Re = 0.1$ e $k = 0.2$. Nas Figuras (5.4), (5.5) temos que a curva somente se ajusta aos pontos após alguns instantes de evolução, então, mesmo com o Ω relativamente próximo do valor teórico, precisamos determinar \mathcal{R}_1 . Na Figura (5.11) temos a comparação dos dados obtidos por Ashgriz [2] e nossos dados, para variados números de Reynolds.

Na Figura (5.12) temos, como esperado, para perturbações maiores no instante inicial, mais rápido o jato evolui para a quebra, onde a figura mostra os tempos de quebra conforme ε aumenta. O último ponto do gráfico, para $\varepsilon = 1$, é um valor teórico, onde em tese já temos a gota formada, dado que pelas condições iniciais

$$R\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{2}\right) = 1 - 1 = 0. \quad (5.53)$$

Na Figura (5.13) apresentamos uma gota se formando conforme o tempo avança, para $k = 0.7$ e $Re = 200$. Verifica-se que o jato evolui lentamente e onde a gota só aparece

Tabela 5.2 Comparação de Ω numérico com o valor teórico da equação (4.102).

Re	k	Ω teórico	Ω numérico	Erro relativo (%)
0.1	0.2	0.0158	0.01597	1.08
0.5	0.2	0.0633	0.06405	1.18
1	0.2	0.091	0.0913	0.33
10	0.2	0.1327	0.1201	9.5
200	0.2	0.1383	0.1568	13.38
0.1	0.3	0.01508	0.0151	0.13
0.5	0.3	0.06742	0.06789	0.7
1	0.3	0.1083	0.1094	1.02
10	0.3	0.1893	0.2077	9.72
200	0.3	0.2017	0.1906	5.50
0.1	0.45	0.01326	0.013	1.96
0.5	0.45	0.06317	0.06233	1.33
1	0.45	0.1122	0.1106	1.43
10	0.45	0.2554	0.2649	3.72
50	0.45	0.2782	0.2911	4.64
200	0.45	0.2826	0.2967	4.99
∞	0.45	0.2842	0.3014	6.05
0.1	0.7	0.0085	0.00836	1.64
0.5	0.7	0.0419	0.04098	2.20
1	0.7	0.0806	0.0840	4.22
10	0.7	0.2875	0.2871	0.14
50	0.7	0.3391	0.3171	6.49
200	0.7	0.3498	0.3293	5.86
∞	0.7	0.3535	0.3332	5.74
0.1	0.9	0.00317	0.00312	1.58
0.5	0.9	0.01578	0.01542	2.28
1	0.9	0.0313	0.03098	1.02
10	0.9	0.1813	0.1772	2.26
50	0.9	0.2542	0.2492	1.97
200	0.9	0.2714	0.2834	4.42
∞	0.9	0.2774	0.2566	7.5

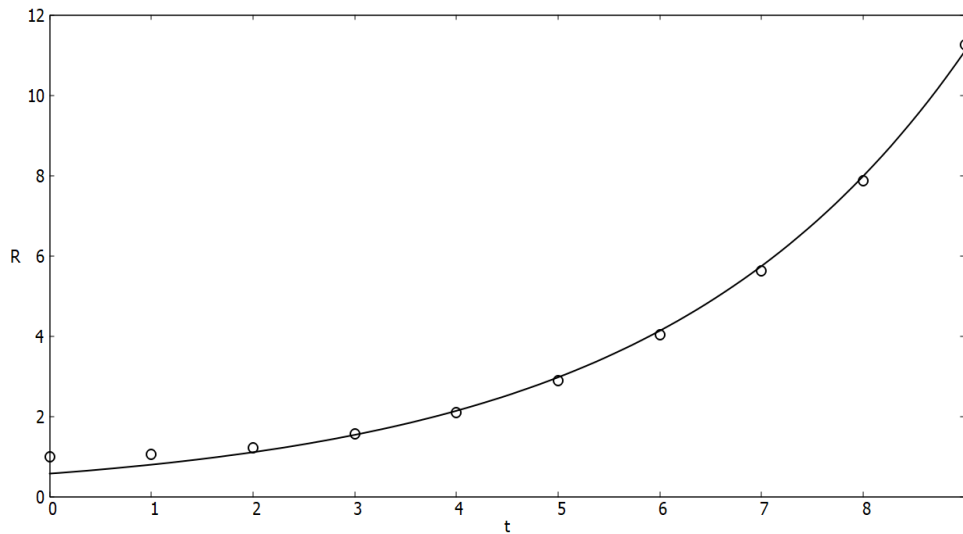


Figura 5.4 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 200$. A linha contínua é a função $0.5729e^{0.3293t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

mais evidentemente nos últimos instantes de tempo. Vemos claramente a formação de uma constrição nas vizinhanças da gota, que seria uma zona de potencial ruptura.

A Figura (5.14) é uma comparação com os resultados de Paz [11]. Nossa solução foi feita com Método de Euler, com divisão do eixo z igual a 500 e o tempo de parada escolhido foi quando para algum $i \in \{0, \dots, n\}$, R_i for menor que 10% do raio inicial \mathcal{R} (ou seja, quando $R_i < 0.1$, dado que \mathcal{R} é igual a 1). Apesar de parecer que o tempo de parada é distante do tempo de quebra, que foi definido como 1% de \mathcal{R} , temos que a evolução a partir de 10% é muito rápida: para $k = 0.7$ e $Re = 200$ temos os tempos 9.71 e 9.66 que representam 1% e 10% de \mathcal{R} , respectivamente. E para $k = 0.45$, $Re = 200$ temos os tempos 12.63 e 12.61. Em ambos os casos com eixo z dividido em 500 partes.

As Figuras (5.15) e (5.16) mostram a evolução temporal para um jato. A Figura (5.15) com $k = 0.7$ e Re variando. A Figura (5.16) com $Re = 200$ fixo e diferentes valores para k . A Figura (5.16) mostra como o número de onda afeta a evolução do perfil do jato. Observamos que, para maior k , a gota final tem uma forma mais alongada e mais distribuída ao longo do comprimento de onda. É notório a ausência de uma região de constrição em 99% do tempo de quebra para $k = 0.9$, o que se observa claramente no caso $k = 0.45$. É importante ressaltar que $k = 0.9$ está no limite máximo dos k instáveis e, portanto, a instabilidade nesse caso é mais suave e pode não levar a formação de gotas propriamente dita. A Figura (5.17) mostra a comparação das gotas normalizadas, para $Re = 200$, onde o eixo vertical foi dividido pelo

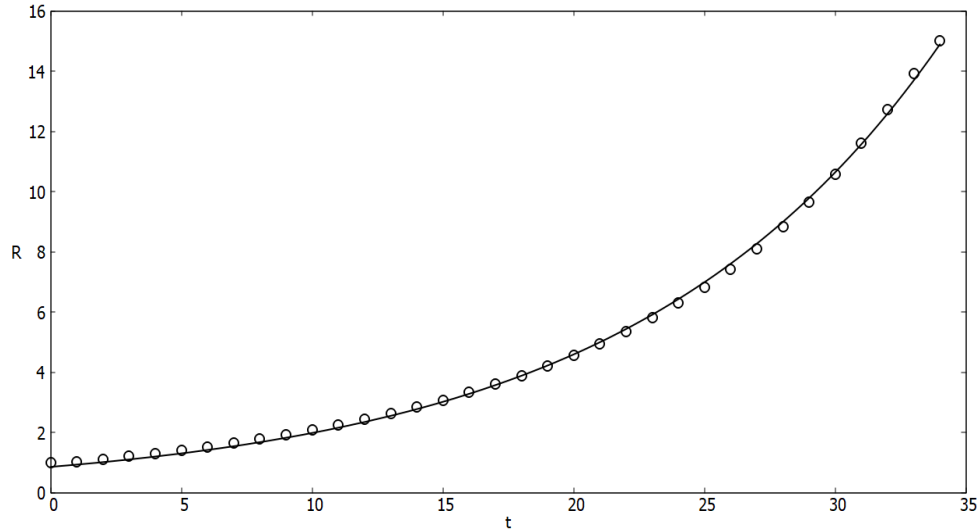


Figura 5.5 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 1$. A linha contínua é a função $0.8554e^{0.084t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

maior altura da gota, e no eixo horizontal, foi dividido pelo comprimento de onda λ . Vemos que a diminuição do k faz com que haja um achatamento da gota.

Algo que foi discutido por Paz [11] e que foi notado durante a execução dos métodos numéricos neste trabalho é a influência da discretização em z no tempo de quebra da gota. Para isso, definindo $\Delta t = \frac{1}{T}$ para T fixo e $\Delta z = \frac{\lambda}{Z}$. Definindo $\frac{Z^2}{T} = 0.125$, chegamos na relação fixada

$$\frac{\Delta t}{\Delta z^2} = \frac{0.125}{\lambda^2} = \frac{0.125k^2}{4\pi^2}, \quad (5.54)$$

e temos os resultados na Figura (5.18). Notamos que não há um padrão nessa relação, apesar de indicar que há uma convergência aparente no tempo de quebra para divisão do eixo z próximos de 700. Vale ressaltar que foi utilizado o Método de Euler para obter esses dados.

Assim como foi feito para a equação do calor na Figura (2.2), vamos verificar como a solução vai perdendo a linearidade. A forma dos coeficientes de Fourier é:

$$a_n(t) = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda R(z,t) \cos(n\check{k}z) dz. \quad (5.55)$$

Normalizando todos os termos por $a_1(t)$, chegamos na Figura (5.19), que mostra como a não-linearidade se forma com o passar do tempo, e a contribuição dos demais modos torna-se cada vez mais relevantes. Note que as não-linearidades aparecem bem cedo na evolução do

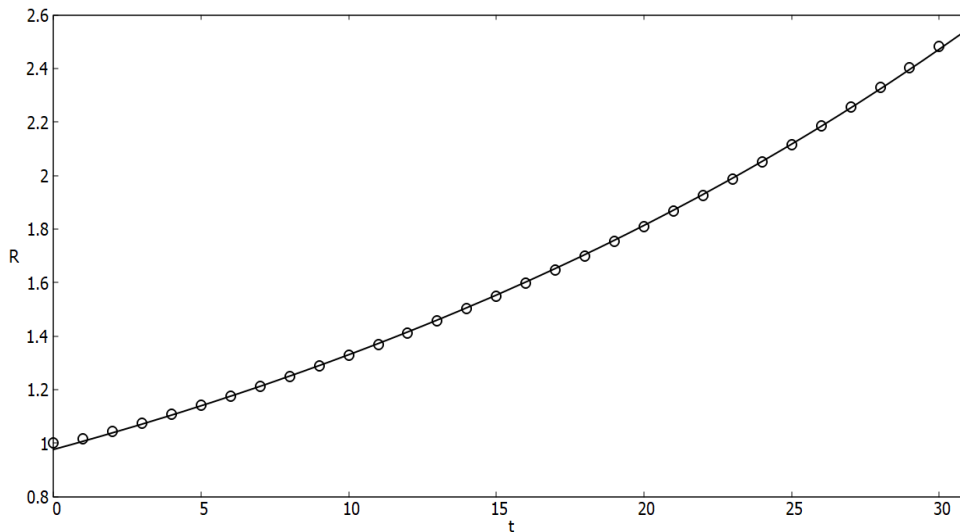


Figura 5.6 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.9$, $Re = 1$. A linha contínua é a função $0.9759e^{0.3098t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

perfil. Isso implica que o ansatz proposto na teoria linear somente será uma boa aproximação da solução nos instantes iniciais de tempo, variando conforme alteramos k e Re .

5.5 Resultados para o caso com magnetismo

Agora vamos repetir as análises feitas na seção anterior para o caso magnético. Na tabela 5.3, temos a comparação entre Ω teórico e numérico, para diferentes Re , C_{pm} e k . Assim como foi observado na tabela 5.2, as melhores aproximações encontradas são para Re baixo, onde o valor de C_{pm} não parece ser determinante para melhores aproximações.

Nas Figuras (5.20), (5.21), (5.22) temos a comparação entre os valores numéricos em comparação com o ansatz proposto na equação (5.52), para $z = 0$ e variando no tempo. Como nessas figuras estamos trabalhando com Re baixo, assim como no caso sem magnetismo vemos que a curva do ansatz praticamente coincide com os valores numéricos. Na Figura (5.23) temos a comparação dos valores numéricos de Ω com a equação (4.114). Na Figura (5.24) temos a formação da gota, para $C_{pm} = 0.01$, $k = 0.7$ e diferentes Re . Nesse caso foi utilizado o Método do Trapézio, com divisão do eixo z igual a 250. Na parte magnética não foi possível determinar os tempos de quebra, devido a variação muito acentuada conforme aumentamos a discretização do eixo z . E para $C_{pm} > 0.01$ nem foi possível verificar se há formação da gota, como podemos ver para pela Figura (5.25), onde $C_{pm} = 0.1$ e tanto para o Método de Euler como para o Método de Trapézio vemos que o jato evolui até um

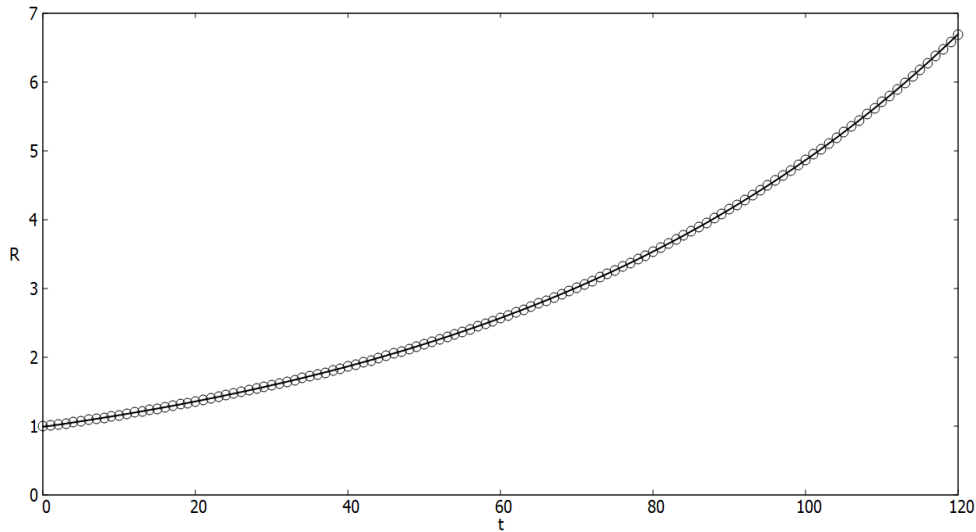


Figura 5.7 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.2$, $Re = 0.1$. A linha contínua é a função $0.9841e^{0.01598t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

determinado estágio, nos instantes $t = 12$ e $t = 15$ (figuras inferiores) as curvas praticamente coincidem, mas depois variam perdendo a simetria e não chegando a evoluir para uma eventual quebra. Essa estabilidade obtida entre os instantes $t = 12$ e $t = 15$ pode indicar que o jato deve estabilizar nessa forma, não havendo quebra. Talvez seja necessário uma nova análise para valores de C_{pm} medianos, usando métodos numéricos mais precisos (de ordem superiores) ou com esquemas diferentes, como o esquema de Godunov [7].

E como já havia sido discutido na seção (4.3.2), na Figura (5.26) com $C_{pm} = 0.5$ temos que o efeito do magnetismo controla a instabilidade inicial e o jato retorna para a forma cilíndrica original. Na Figura (5.27) vemos que conforme aumentamos C_{pm} , menor a constrição do jato para um mesmo instante de tempo. Nas imagens da direita, temos a velocidade no eixo axial, e a anti-simetria do gráfico indica que conforme as extremidades são espremidas pelo efeito da tensão superficial, o fluido se desloca para o centro. Note que este efeito é menor à medida em que C_{pm} aumenta.

Na seção (3.4.3), encontramos uma aproximação para o módulo do campo magnético, dada por $H \approx \mathcal{R}^2 H_0 R^{-2}$. Adimensionalizando, temos que $\hat{H} = \hat{R}^{-2}$. Na Figura (5.28), vemos a intensidade desse campo magnético, que vai aumentando de acordo com o achatamento do fluido nas extremidades.

Tabela 5.3 Comparação do Ω teórico da equação (4.114) com o valor numérico.

C_{pm}	Re	k	Ω teórico	Ω numérico	Erro relativo (%)
0.1	10	0.8	0.1498	0.1271	15.15
0.05	10	0.8	0.208	0.1924	7.5
0.01	10	0.8	0.2475	0.2696	8.93
0.1	200	0.8	0.2215	0.1931	12.82
0.05	200	0.8	0.2837	0.2717	4.22
0.01	200	0.8	0.3251	0.2945	9.41
0.1	0.1	0.7	0.00516	0.005	3.1
0.05	0.1	0.7	0.00683	0.00663	2.93
0.01	0.1	0.7	0.00816	0.00798	2.08
0.1	1	0.7	0.05	0.0482	3.6
0.01	1	0.7	0.0776	0.0756	2.58
0.1	10	0.7	0.2117	0.1905	10.01
0.05	10	0.7	0.2518	0.2336	7.22
0.01	10	0.7	0.2807	0.2945	4.92
0.1	200	0.7	0.2719	0.2425	10.81
0.05	200	0.7	0.3133	0.2953	5.75
0.01	200	0.7	0.3428	0.3595	4.87
0.1	∞	0.7	0.2756	0.2453	10.99
0.05	∞	0.7	0.3169	0.3040	4.07
0.01	∞	0.7	0.3465	0.3521	1.62
0.1	0.1	0.45	0.00994	0.00984	1.01
0.05	0.1	0.45	0.01160	0.01147	1.12
0.01	0.1	0.45	0.01293	0.01279	1.08
0.1	10	0.45	0.2175	0.2100	3.45
0.05	10	0.45	0.2371	0.2361	0.42
0.01	10	0.45	0.2518	0.2573	2.18
0.1	200	0.45	0.2444	0.2446	0.08
0.05	200	0.45	0.2642	0.2759	4.43
0.01	200	0.45	0.2791	0.3041	8.96
0.1	∞	0.45	0.2460	0.2468	0.33
0.05	∞	0.45	0.2657	0.2785	4.82
0.01	∞	0.45	0.2806	0.3073	9.52
0.1	10	0.2	0.1174	0.0953	18.82
0.05	10	0.2	0.1252	0.1333	6.47
0.01	10	0.2	0.1312	0.1093	16.69
0.1	200	0.2	0.1230	0.0992	19.35
0.05	200	0.2	0.1308	0.1073	17.97
0.01	200	0.2	0.1368	0.1135	17.03

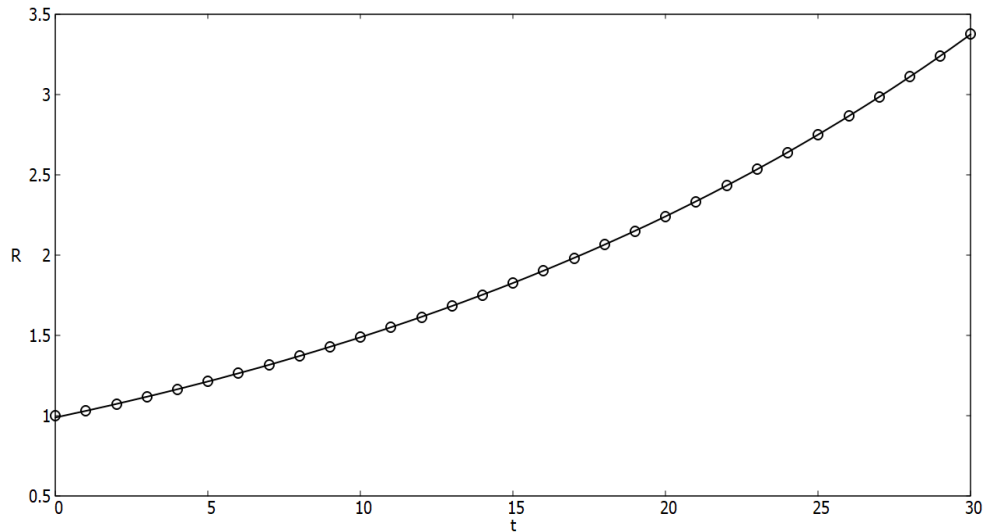


Figura 5.8 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.5$. A linha contínua é a função $0.9866e^{0.04098t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

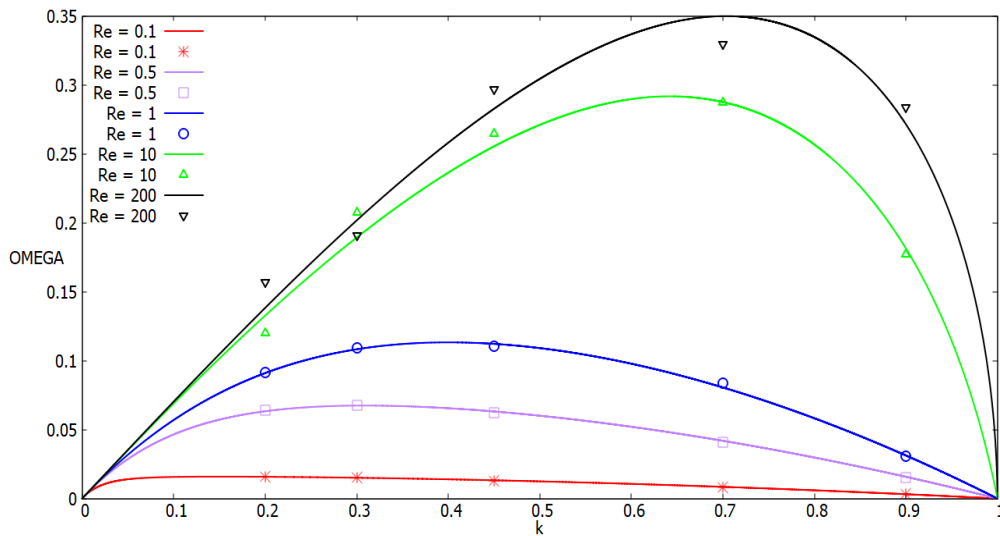


Figura 5.9 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, com Re variando. $OMEGA$ e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

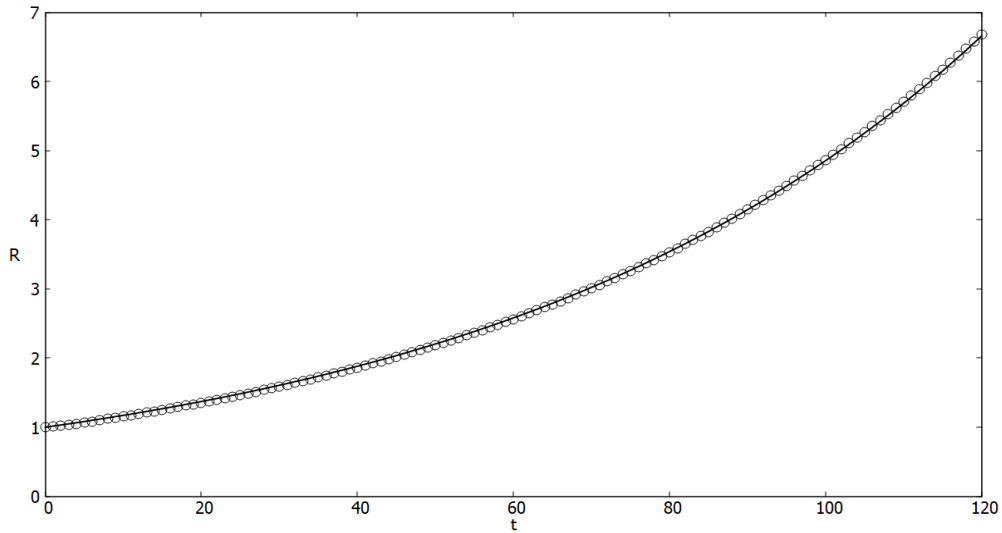


Figura 5.10 Comparação do ansatz da teoria linear com os valores numéricos obtidos, para $Re = 0.1$ e $k = 0.2$. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

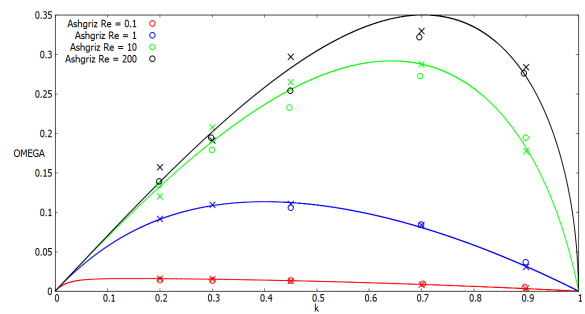
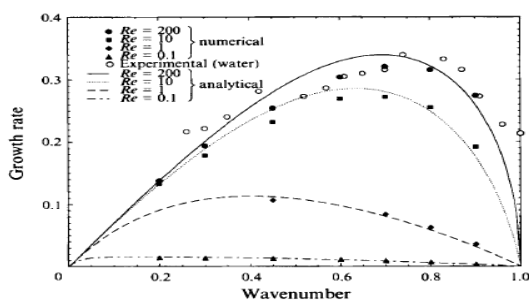


Figura 5.11 Os valores obtidos por Ashgriz [2] a esquerda (imagem retirada de Ashgriz [2]), e os nossos dados comparados à direita, onde nossos dados são os X. OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \tilde{k} .

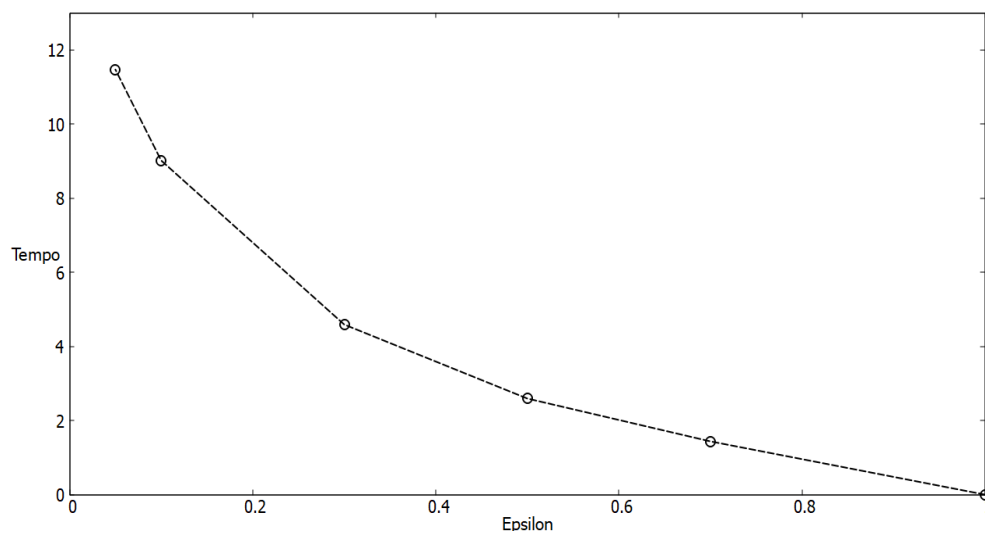


Figura 5.12 Comparação do tempo de quebra conforme aumentamos o valor de ε (Epsilon no gráfico), para $k = 0.7$ e $Re = 10$.

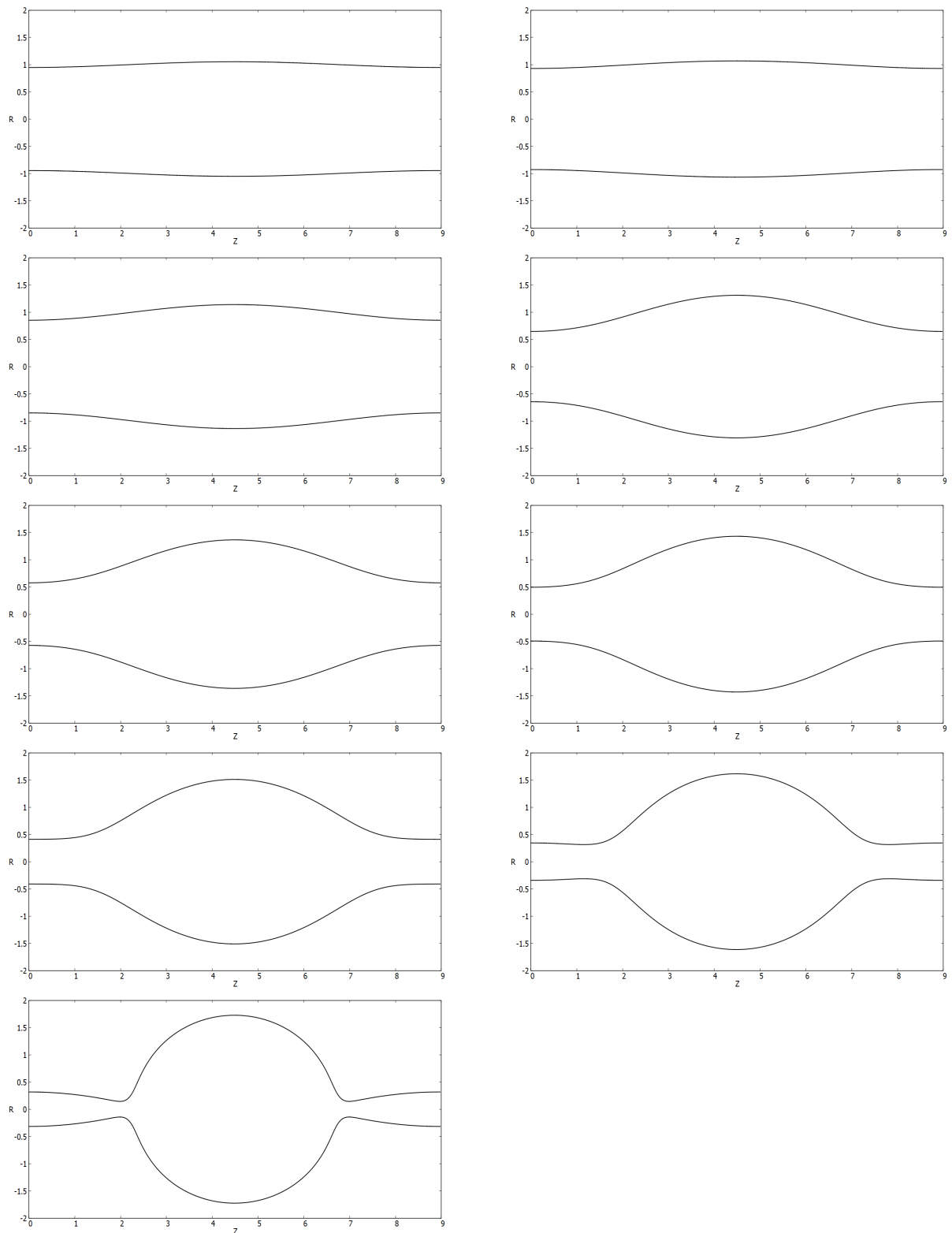


Figura 5.13 Gota se formando da esquerda para direita, de cima para baixo, com $k = 0.7$, $Re = 200$, com as porcentagens 10%, 25%, 50%, 75%, 80%, 85%, 90%, 95% e 99%.

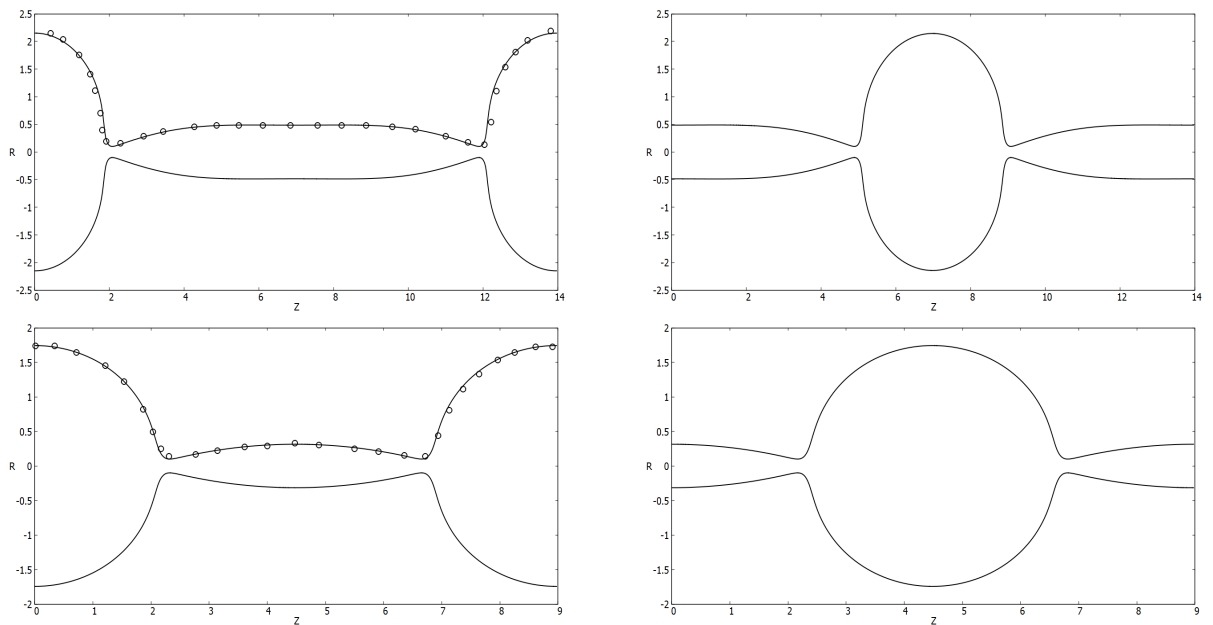


Figura 5.14 Comparação com Paz [11] a esquerda e gota se formando a direita para $Re = 200$.
Figura superior com $k = 0.45$ e inferior $k = 0.7$.

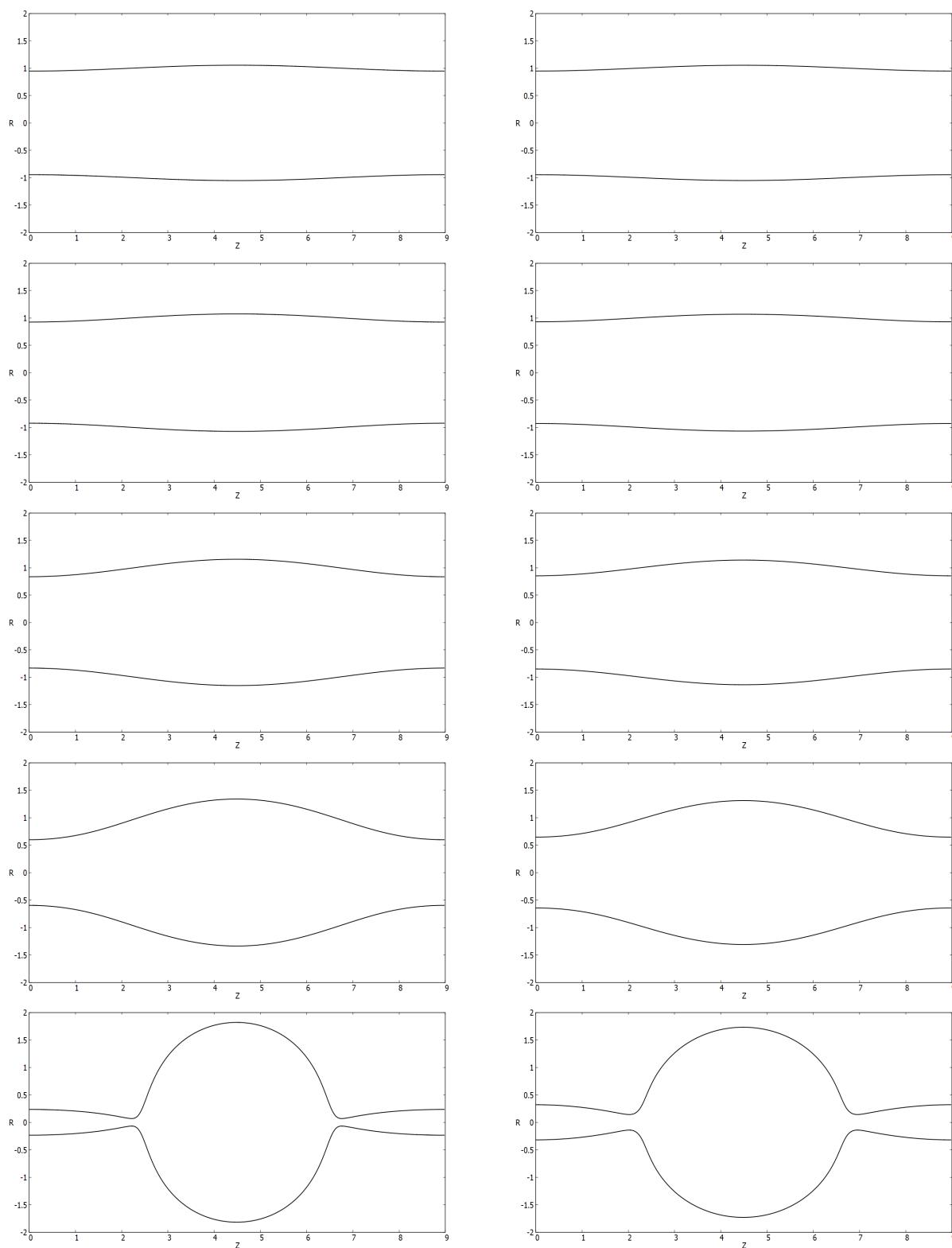


Figura 5.15 Evolução de dois jatos no tempo, para $k = 0.7$. A coluna da esquerda tem $Re = 10$ e a da direita é o caso invíscido. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra.

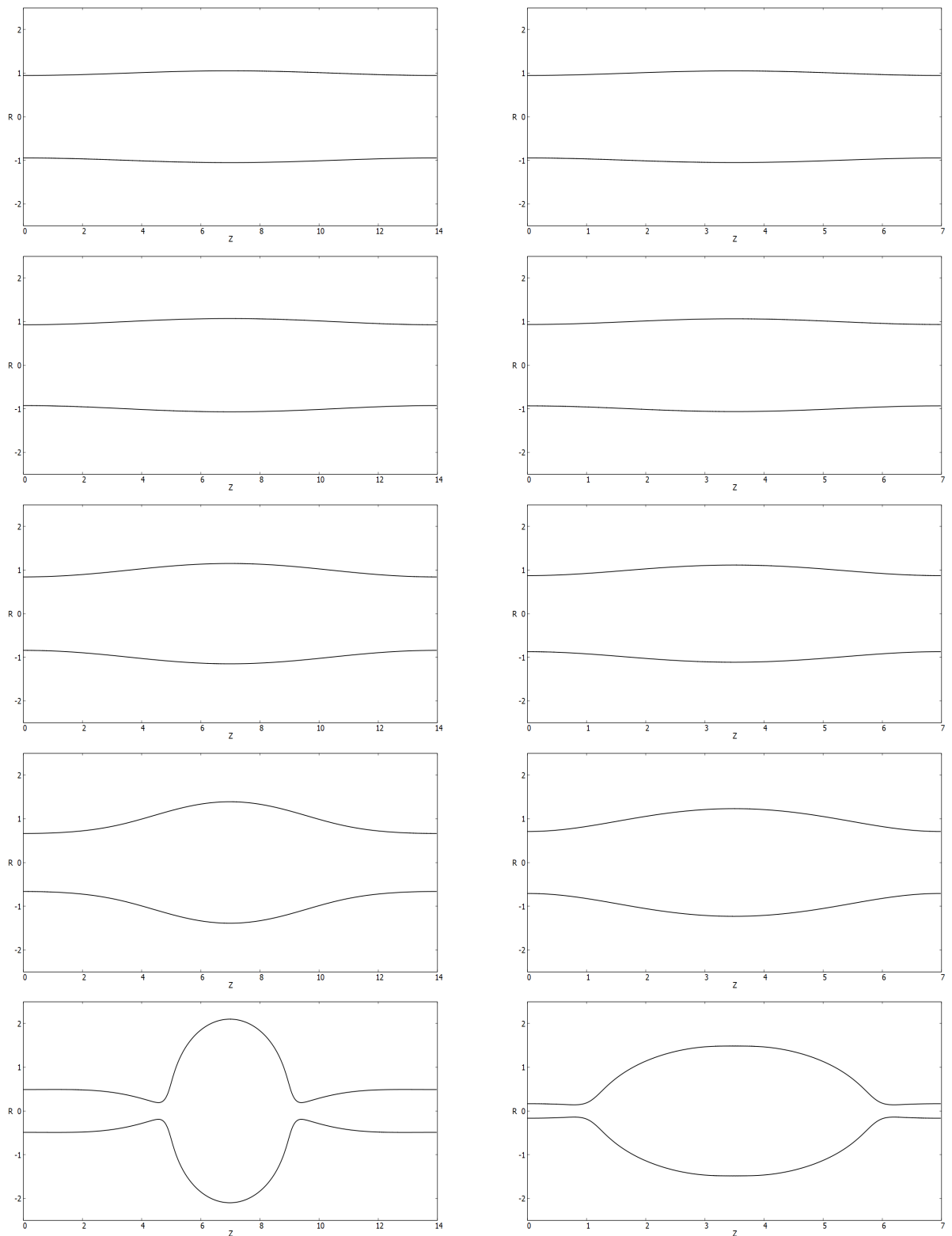


Figura 5.16 Evolução de dois jatos no tempo, para $Re = 200$. A coluna da esquerda tem $k = 0.45$ e a da direita é para $k = 0.9$. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra.

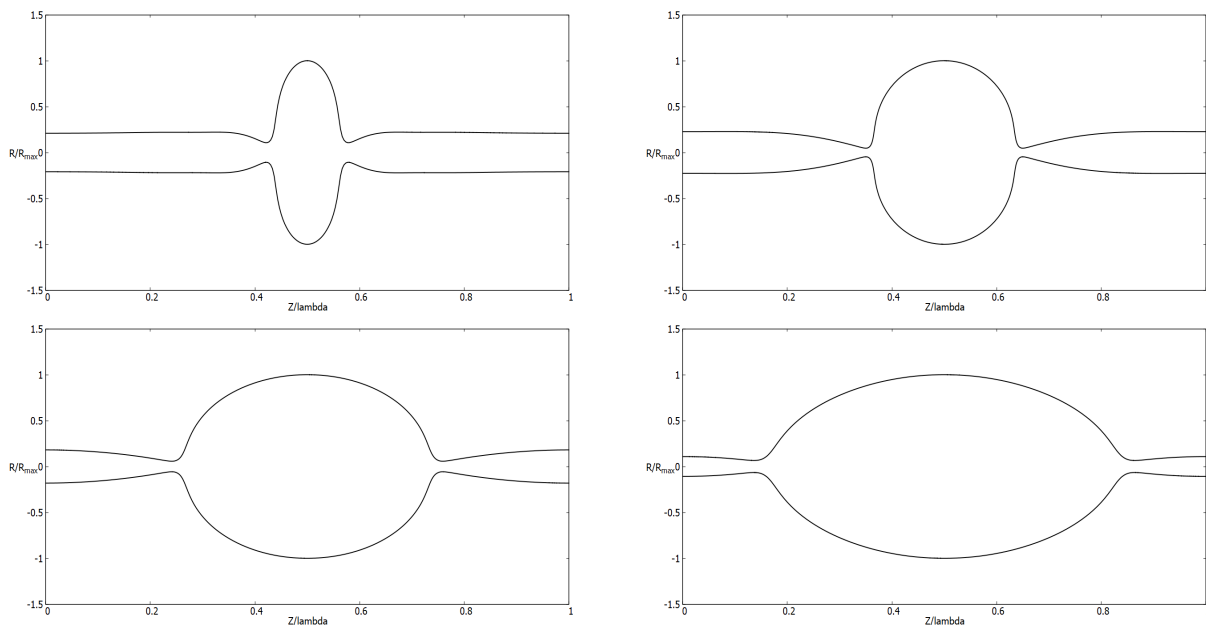


Figura 5.17 Gotas para $Re = 200$ apresentadas em uma escala normalizada. Esquerda superior $k = 0.2$, direita superior $k = 0.45$, esquerda inferior $k = 0.7$, direita inferior $k = 0.9$.

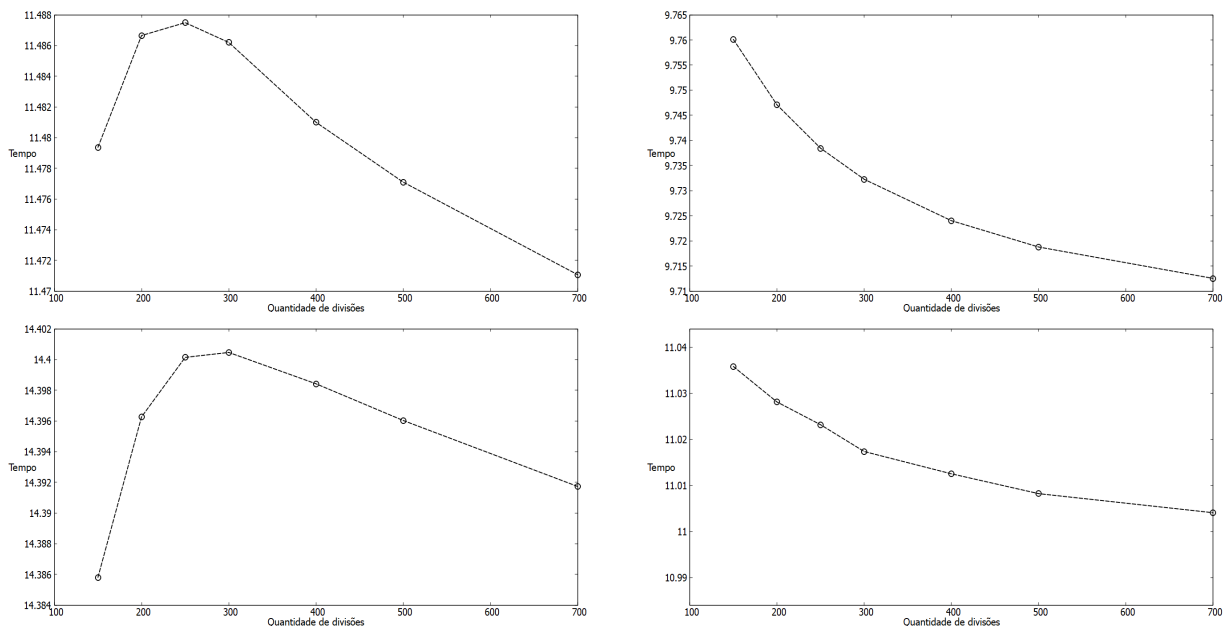


Figura 5.18 Relação tempo de quebra e discretização do eixo z. Superior esquerda $k = 0.7$, $Re = 10$. Superior direita $k = 0.7$, $Re = 200$, inferior esquerda $k = 0.9$, $Re = 10$, inferior direita $k = 0.9$, $Re = 200$.

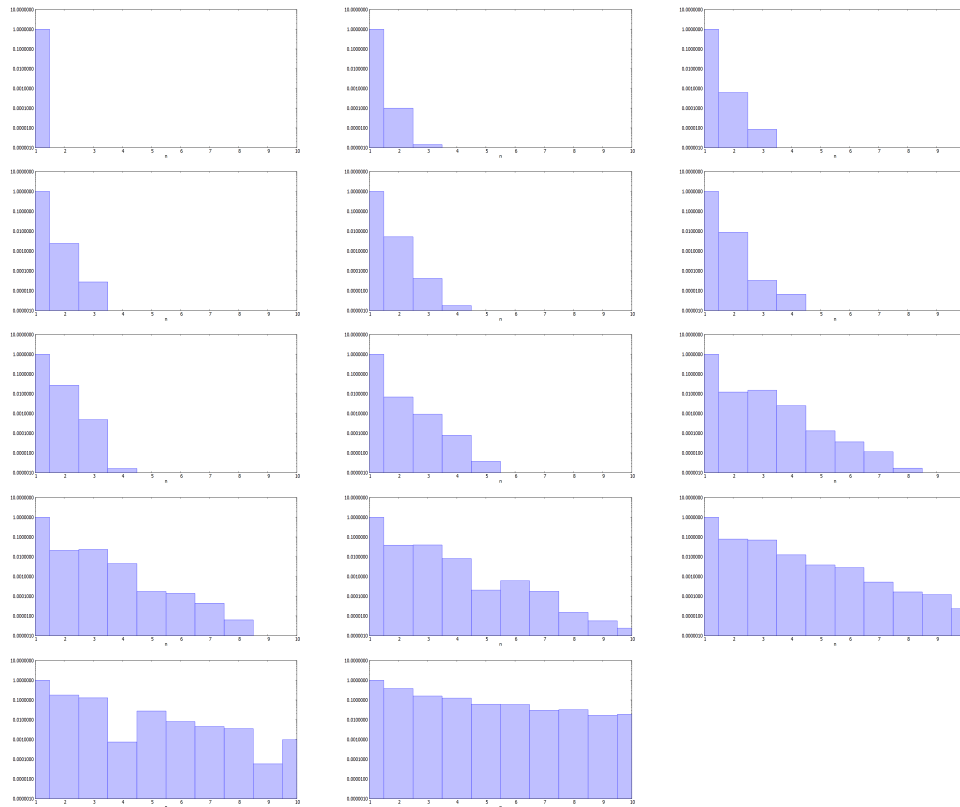


Figura 5.19 Evolução temporal da esquerda para direita e de cima para baixo, para $k = 0.7$ e $Re = 200$. Temos as porcentagens do tempo de quebra 0%, 1%, 2.5%, 5%, 7.5%, 10%, 25%, 50%, 75%, 99%.

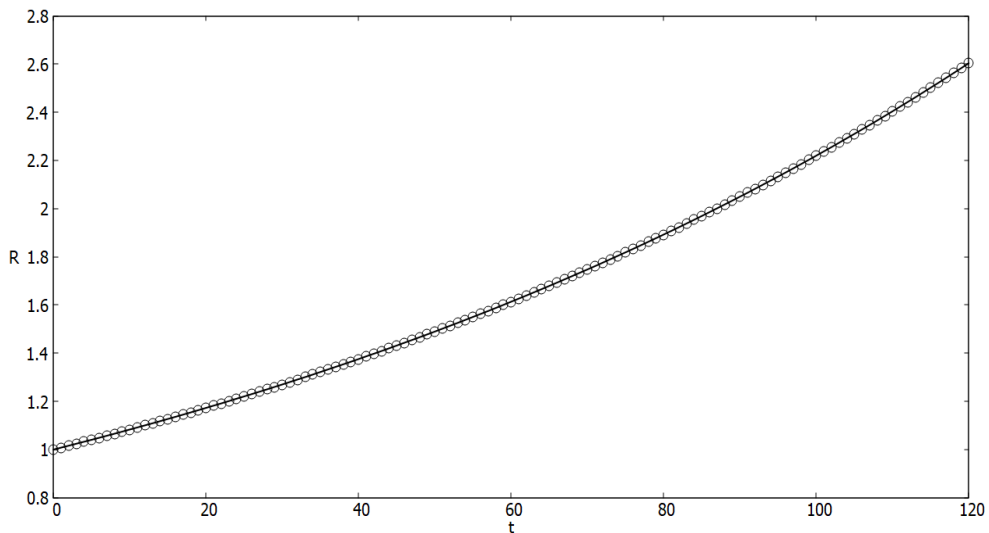


Figura 5.20 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.01$. A linha contínua é a função $0.9994e^{0.00798t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\epsilon}$.

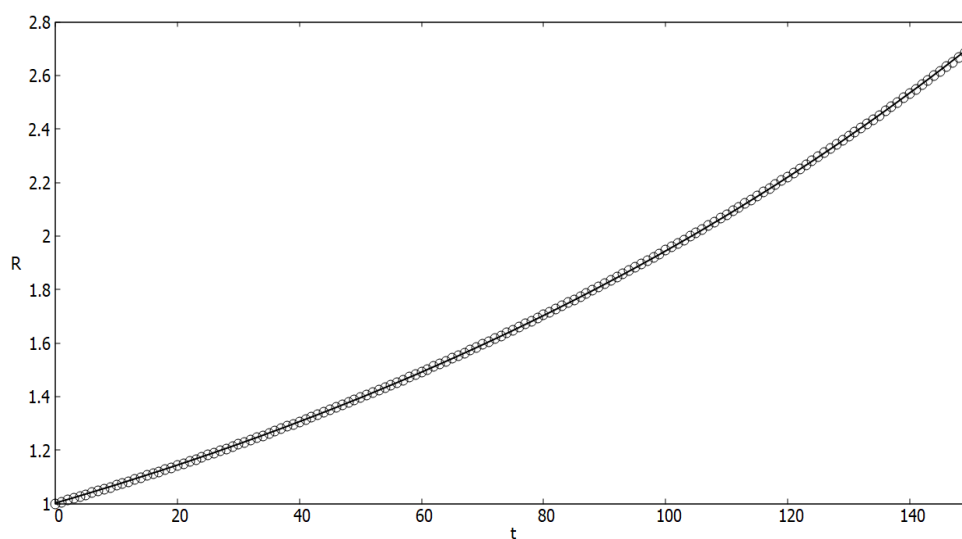


Figura 5.21 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.7$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.05$. A linha contínua é a função $1.002e^{0.00663t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

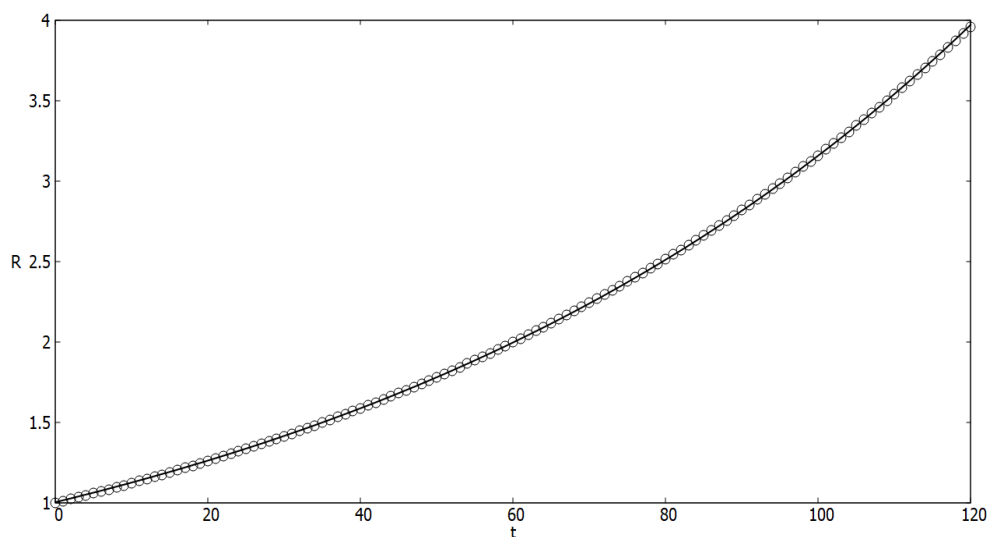


Figura 5.22 Comparação da regressão linear obtida a partir do ansatz, com os valores numéricos, para $k = 0.45$, $Re = 0.1$, $C_{pm} = 0.05$. A linha contínua é a função $1.003e^{0.01147t}$ e os círculos são os resultados numéricos. R no gráfico representa a razão $\frac{R_0 - 1}{\varepsilon}$.

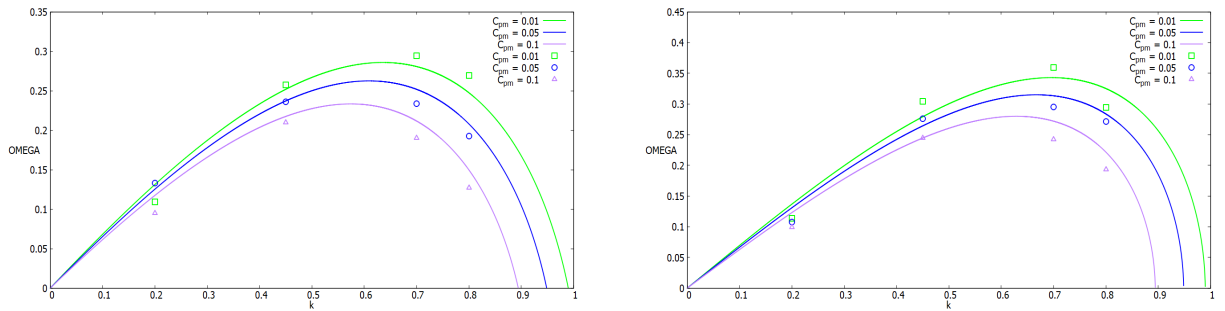


Figura 5.23 Os valores da tabela (5.3) em comparação com os valores numéricos. Gráfico à esquerda $Re = 10$, à direita $Re = 200$. A linha superior para inferior varia $C_{pm} = 0.01$ (xis), $C_{pm} = 0.05$ (quadrado), $C_{pm} = 0.1$ (círculo). OMEGA e k no gráfico representam, respectivamente, Ω e \check{k} .

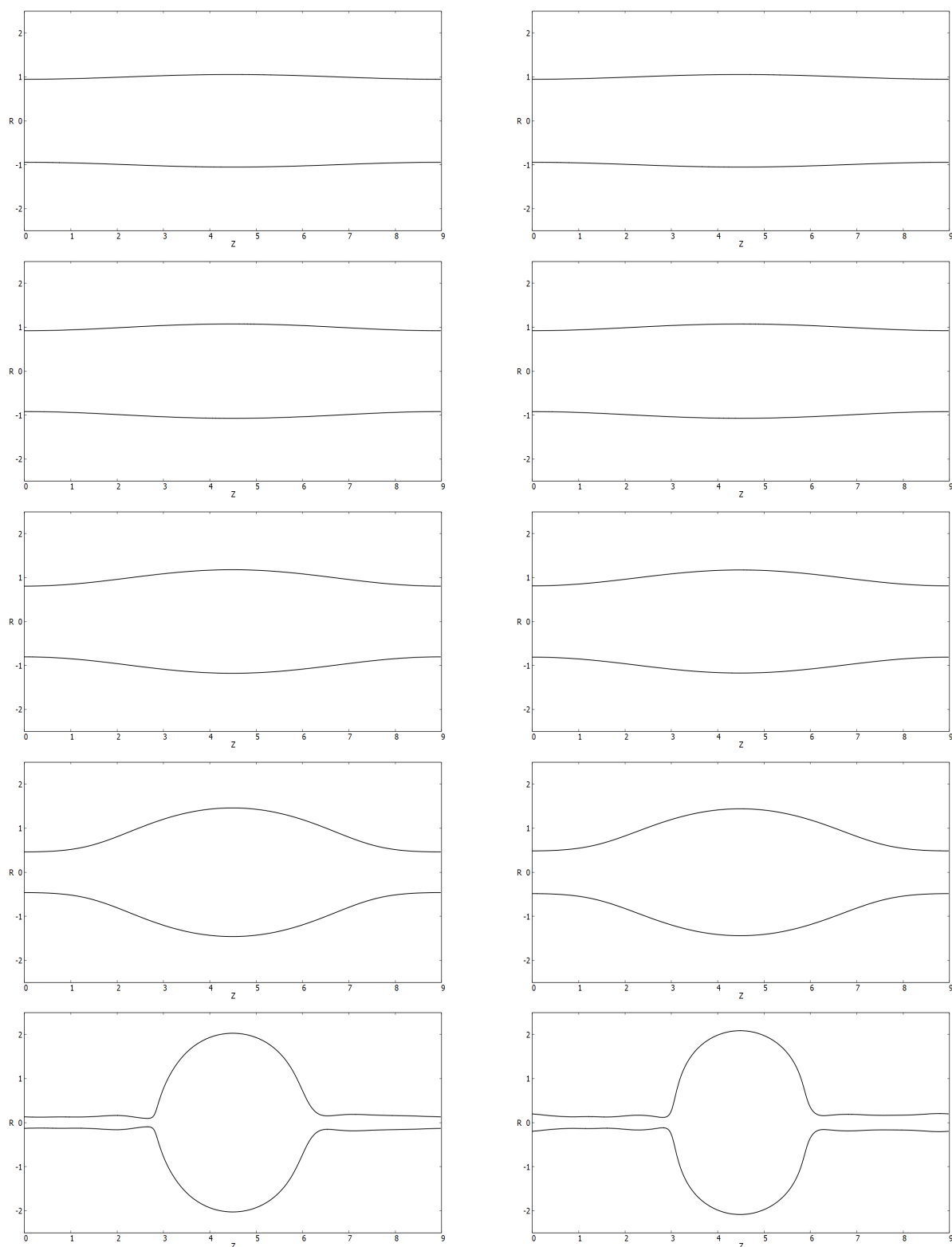


Figura 5.24 Evolução de dois jatos no tempo, para $C_{pm} = 0.01$, $k = 0.7$. A coluna da esquerda tem $Re = 200$ e a da direita é o caso invíscido. E as linhas são de cima para baixo aproximadamente 10%, 25%, 50%, 75% e 99% do tempo de quebra.

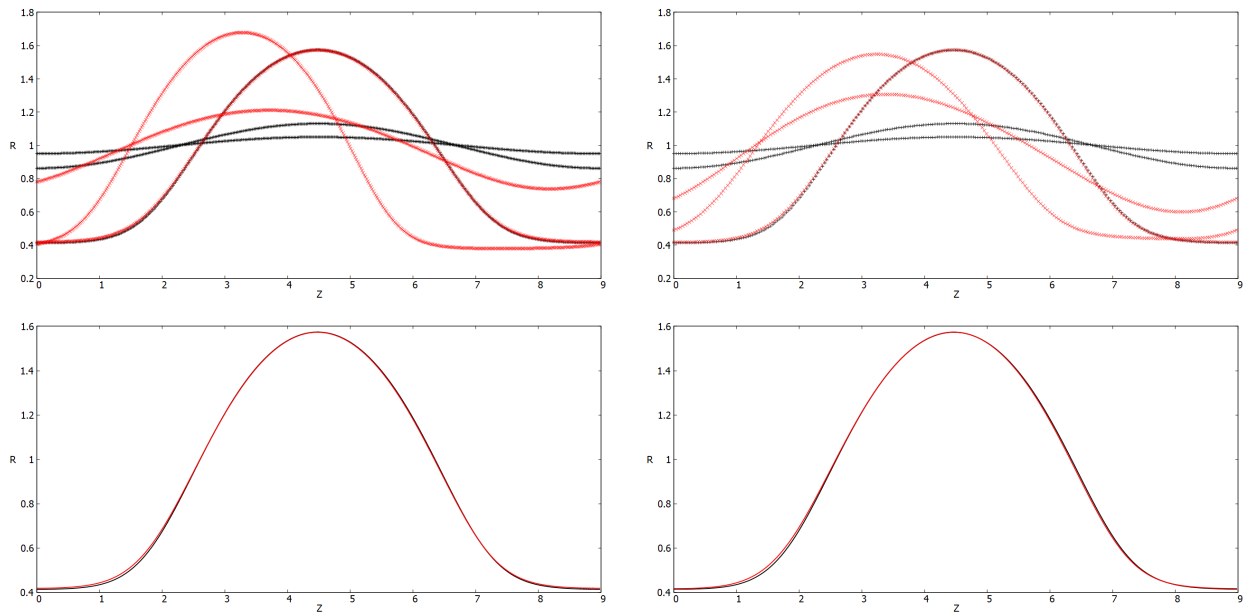


Figura 5.25 A evolução temporal é caracterizada pelas cores evoluindo do preto ao vermelho. Euler a esquerda e Trapézio a direita, para $k = 0.7$, $Re = 200$ e $C_{pm} = 0.1$. Na figura inferior temos apenas as curvas nos tempos $t = 12$ (preto) e $t = 15$ (vermelho).

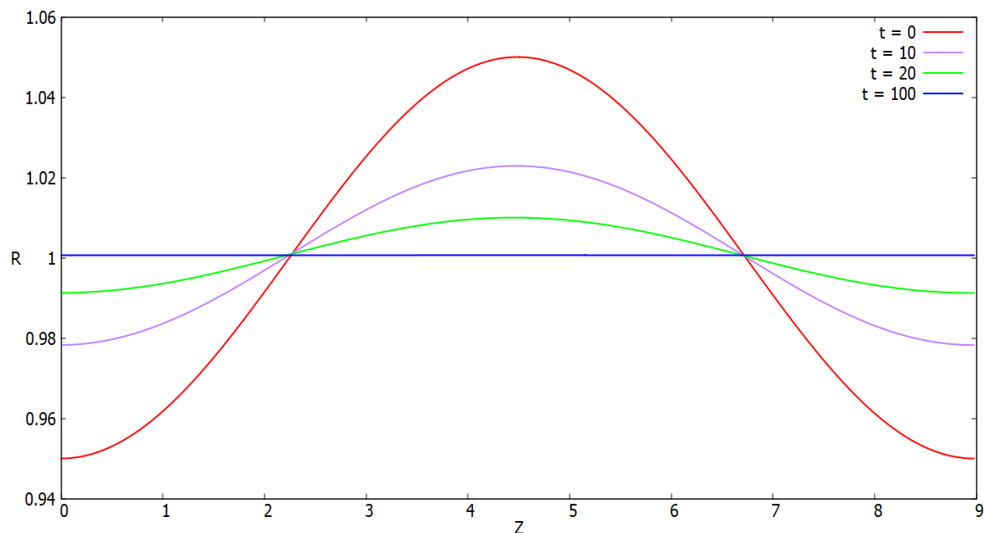


Figura 5.26 Jato estabilizando, para $C_{pm} = 0.5$, $Re = 1$ e $k = 0.7$.

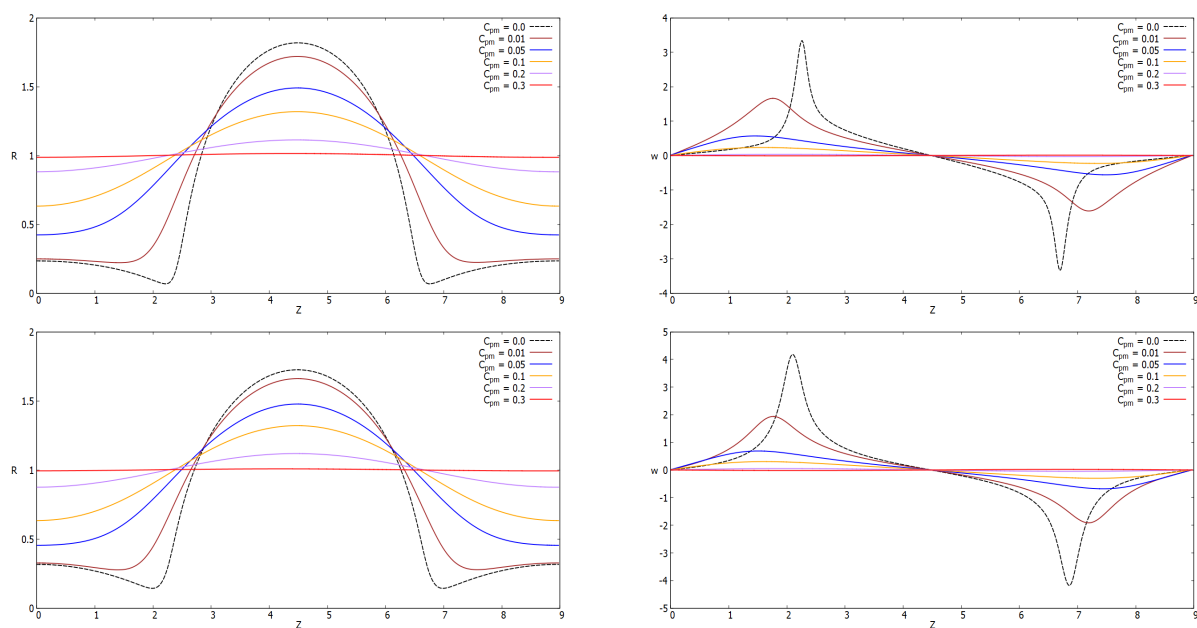


Figura 5.27 Comparação no mesmo instante de tempo (aproximadamente 99% do tempo de quebra sem magnetismo), para C_{pm} distintos. A Figura da esquerda é a gota, e a da direita é a velocidade. Superior $k = 0.7, Re = 10$ e inferior $k = 0.7, Re = 200$.

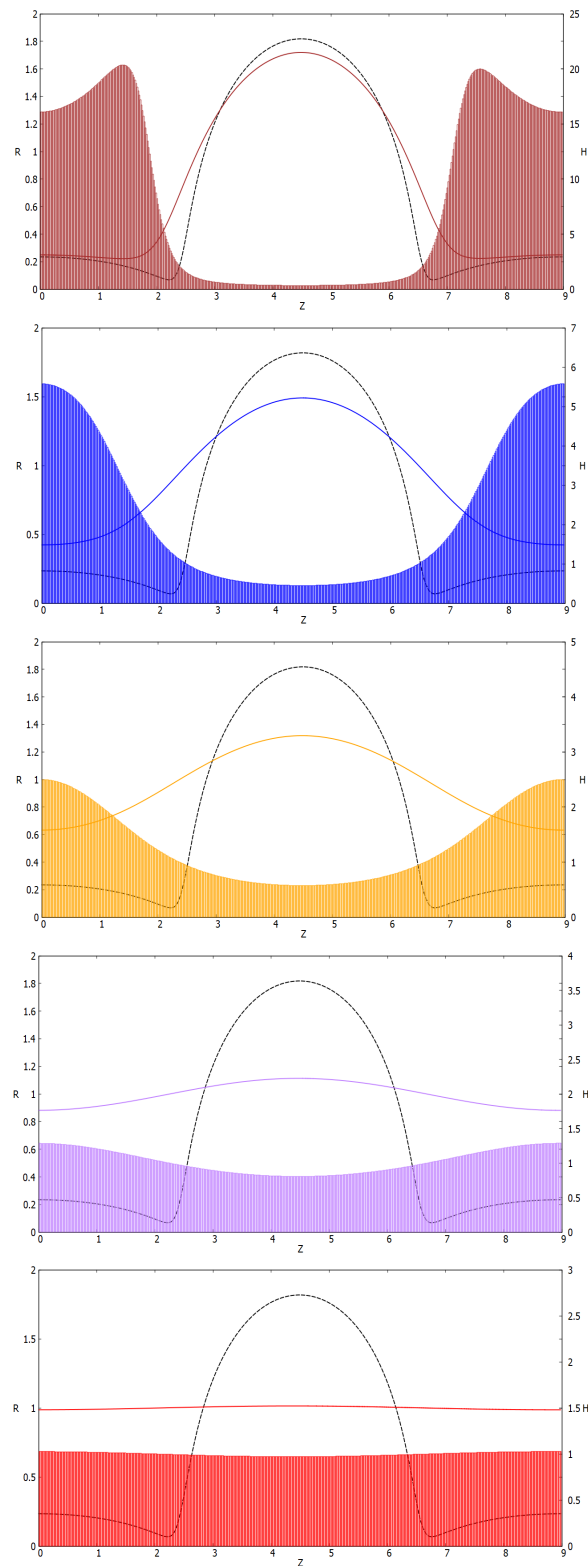


Figura 5.28 Comparação no mesmo instante de tempo (aproximadamente 99% do tempo de quebra sem magnetismo), para $k = 0.7$, $Re = 10$ e C_{pm} distintos. Os gráficos de barra coloridos são a representação do módulo do campo magnético, de cima para baixo, $C_{pm} = 0.01$, $C_{pm} = 0.05$, $C_{pm} = 0.1$, $C_{pm} = 0.2$, $C_{pm} = 0.3$. A linha preta tracejada é a gota sem magnetismo.

Conclusão

Neste trabalho estudamos a instabilidade de Plateau-Rayleigh usando a aproximação de onda longa para fluidos magnéticos e não magnéticos. Apresentamos o conjunto de equações que regem esse problema e que são formadas por: a equação de continuidade, a equação de Euler, a equação de Navier-Stokes e equação de Navier-Stokes modificadas pelas forças magnéticas na presença de um campo magnético uniforme aplicado na direção axial.

Inicialmente, as equações para a instabilidade de Plateau-Rayleigh foram derivadas para o limite assintótico de ondas longas, tanto para fluidos não magnéticos invíscidos quanto viscosos. Alguns resultados clássicos do problema foram recuperados para comparação. Em seguida, o problema superparamagnético foi considerado para ambos os casos, invíscido e viscoso. Obtivemos resultados numéricos para a dinâmica não-linear da formação de gotas, seguindo Ashgriz, Furlani e Paz [2, 6, 11]. Comparamos o problema superparamagnético invíscido com Rosensweig [13] e o problema superparamagnético viscoso com Paz [11]. A partir da análise realizada neste trabalho, verificamos que a viscosidade atrasa o tempo de quebra do jato cilíndrico. Para o magnetismo, além de retardar o tempo de quebra, verificamos que se a intensidade do campo for suficientemente grande, a instabilidade inicial é controlada e o jato retorna para a forma cilíndrica original. Houve problemas em determinar os tempos de quebra para o caso com campo magnético de baixa intensidade, pois, conforme refinamos a discretização do eixo z , obtivemos diferentes tempos de quebra, e não foi possível obter padrão de convergência. Por limitação computacional, não foi possível utilizar discretizações muito refinadas para talvez podermos encontrar algum padrão de convergência no tempo de quebra. Para intensidades de campo magnético medianas não foi possível determinar se haverá formação de gota ou se teremos um jato com forma estática.

Em trabalhos futuros, planejamos retornar para o caso superparamagnético, para trabalhar com outros métodos numéricos que possam talvez dar resultados mais confiáveis sobre o comportamento não-linear do jato para baixas e médias intensidades de campo magnético. Além de tratar o problema magnético completo, acrescentando a equação da magnetização proposta por Shliomis [14].

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M. Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. (1964). Disponível em: https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/page_375.htm. Data de acesso: 10 de março de 2024.
- [2] Ashgriz, N. Mashayek, F. Temporal Analysis of Capillary Jet Breakup. *Journal of Fluid Mechanics*. 291, 163-190 (1995).
- [3] Boas, M. L. *Mathematical Methods in the physical sciences*. Section 12. Third Edition. John Wiley & Sons. (2006).
- [4] Breslouer, O. *Rayleigh-Plateau Instability: Falling Jet, Analysis and Applications*. Mechanical & Aerospace Engineering 559. Princeton University. (2010).
- [5] Cuminato, J. A. Messias, M. J. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais*. Editora: SBM. (2013).
- [6] Furlani, E. P. Hanchak, M.S. Nonlinear Analysis of the Deformation and Breakup of the Viscous Microjets using the Method of Lines. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 65, 563-577, (2011).
- [7] Godunov, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, (1969).
- [8] Hedge, M. *Fluid Dynamics and The Plateau-Rayleigh Instability*. (2013).
- [9] Martin, G. D. Inkjet printing - the physics of manipulating liquid jets and drops. *J. Phys.: Conf. Ser.* 105 012001. (2008). Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/105/1/012001/pdf>. Data de acesso: 10 de março de 2024.
- [10] Olver, P. *Lecture Notes on Numerical Analysis. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. Cap 11. Disponível em: https://www-users.cse.umn.edu/~olver/num_/lnp.pdf. Data de acesso: 10 de março de 2024.

-
- [11] Paz, P. Z. S. Instabilities in Flows of Magnetic Fluids. Tese de doutorado. UnB. Departamento de Matemática. (2020).
- [12] Rapp, B. Plateau-Rayleigh Instability. *Microfluidics: Modelling, Mechanics and Mathematics*. Chapter 23. pp.467-477. (2017). Disponível em: <http://kinampark.com/PL/files/Rapp%202017%2C%20Plateau-Rayleigh%20instability%2C%20Ch%2023.pdf>. Data de acesso: 10 de março de 2024.
- [13] Rosensweig, R. E. *Ferrohydrodynamics*. Cap 7.7. Dover. (2014).
- [14] Shliomis, M. I. *Ferrohydrodynamics: Retrospective and Issues*. *Ferrofluids: Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*. Ed. Odenbach, Stefan: Springer Berlin Heidelberg. 85-111, (2002).
- [15] Wikipedia: the Free Encyclopedia. Plateau-Rayleigh instability. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Plateau%E2%80%93Rayleigh_instability. Data de acesso: 10 de março de 2024.
- [16] Wolfram language & system. The numerical Method of Lines. Disponível em: <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveMethodOfLines.html>. Data de acesso: 10 de março de 2024.