



Universidade de Brasília

**Transformações de Ribaucour para
Superfícies Planas de Rotação no Espaço
Hiperbólico \mathbb{H}^3**

Júlio Christian Barbosa Carneiro

Orientador: Dr. Tarcísio Castro Silva

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília-DF

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Transformações de Ribaucour para Superfícies Planas de Rotação no Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^3

por

Júlio Christian Barbosa Carneiro *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,
como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de Agosto de 2023

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - Orientador (MAT/UnB)



Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli - Membro (IME/UFBA)



Prof. Dr. Pedro Roitman - Membro (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista da FAPDF durante a elaboração deste trabalho.

*"Poucos entendiam quase nada;
mas eu entendia um pouco menos."*

Manoel de Barros.

Agradecimentos

Eu agradeço aos ilustres mestres e professores que tive, do odiado ao mais amado. Eu agradeço ao meu orientador Tarcísio Castro, aos meus amigos (aquele abraço), à Universidade de Brasília (UnB), aos meus pais Jussara e Cláudio, aos meus irmãos Daniel e João, a você que me lê. Agradeço a mim. Agradeço à FAPDF, aos professores Pedro Roitman e Antonio Martínez. Eu agradeço a Luiz Gonzaga e Caetano Veloso por cantarem o que poderia ser o meu agradecimento: "*eu agradeço ao povo brasileiro, norte, centro, sul inteiro, onde reinou o baião*".

Resumo

Baseado em um trabalho de Corro, Martínez e Tenenblat [10], nesta dissertação aplicaremos as transformações de Ribaucour para superfícies planas de rotação no espaço hiperbólico tridimensional, \mathbb{H}^3 , fornecendo novas famílias explícitas de superfícies planas em \mathbb{H}^3 que são determinadas por vários parâmetros. Ao escolhermos certos parâmetros de forma especial, é possível obter superfícies que exibem periodicidade em relação a uma variável e também superfícies que possuem um número par arbitrário de fins do tipo horosfera mergulhados, ou até mesmo um número infinito de tais fins. Utilizaremos o trabalho de Wang e Tenenblat [27] de forma auxiliar, a fim de introduzir e desenvolver os principais resultados acerca da transformação de Ribaucour no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Palavras-Chave: espaço hiperbólico; fins do tipo horosfera, superfícies planas; transformações de Ribaucour

Abstract

Based on a paper by Corro, Martínez and Tenenblat [10], this dissertation applies Ribaucour transformations to flat surfaces of rotation in three-dimensional hyperbolic space, \mathbb{H}^3 , yielding new explicit families of flat surfaces in \mathbb{H}^3 determined by various parameters. By carefully selecting specific parameters, it is possible to obtain surfaces exhibiting periodicity concerning one variable, as well as surfaces featuring an arbitrary even number of embedded ends of horosphere type or even an infinite number of such ends. In order to introduce and develop the key findings regarding the Ribaucour transformation in hyperbolic space \mathbb{H}^3 , the work by Wang and Tenenblat [27] is used as an auxiliary source.

Key-Words: hyperbolic space; ends of horosphere type; flat surfaces; Ribaucour transformations.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Equações de estrutura do espaço de Lorentz \mathbb{L}^{n+2}	5
1.2 Um modelo para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1}	8
1.3 Aplicação às superfícies de \mathbb{H}^3	11
2 Transformação de Ribaucour em \mathbb{H}^3	21
2.1 Principais resultados	22
2.2 Transformações de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten	42
2.3 Transformações de Ribaucour para superfícies planas	45
2.4 Fins e curvas singulares em superfícies planas	54
3 Famílias de superfícies planas em \mathbb{H}^3	62
3.1 Transformação de Ribaucour para o cilindro	62
3.2 Transformação de Ribaucour para superfícies planas de rotação sem singularidades isoladas	74
3.3 Transformação de Ribaucour para superfícies planas de rotação com singularidades isoladas	103
Bibliografia	127
Apêndice A Comando para uma figura realizada em <i>software</i> MAPLE®	1

Introdução

No contexto das superfícies planas do espaço hiperbólico de dimensão 3, \mathbb{H}^3 , merecem destaque certos resultados, notadamente aquele que atesta a existência de exatamente duas superfícies planas completas, a saber, a horosfera e o cilindro hiperbólico. Com exceção destas duas, as demais superfícies planas em \mathbb{H}^3 apresentam singularidades. Tais superfícies podem ser caracterizadas através de uma função harmônica em termos das suas primeira e segunda formas fundamentais [26].

J.A. Gálvez, A. Martínez e F. Milán [15] mostram que as superfícies planas, cuja segunda forma fundamental está localmente associada à clássica equação de Monge-Ampère,

$$\det(\nabla^2 f) = 1,$$

admitem uma fórmula de representação do tipo-Weierstrass. Os resultados obtidos em [1], [2], [16] e [22], que tratam do problema de Cauchy para determinados tipos de equações Monge-Ampère, motivam um maior interesse pelas superfícies planas com singularidades em \mathbb{H}^3 . Além disso, em [23], P. Roitman apresenta um estudo que versa sobre as propriedades geométricas das superfícies planas baseado, principalmente, em um resultado clássico de Bianchi.

Neste contexto, são também conhecidos os trabalhos de M. Kokubu, M. Umehara e K. Yamada [19], os quais introduziram as chamadas *frentes planas* (ou *flat fronts*, em inglês). Define-se uma frente plana (ou superfície frontal plana) como uma aplicação $f : M^2 \rightarrow M^3(\bar{k})$, de uma variedade bidimensional M^2 em um espaço forma tridimensional $M^3(\bar{k})$, com um campo normal unitário ν bem definido, cumprindo a seguinte condição: *para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p tal que ou $f|_U$ é uma imersão plana ou p é um ponto singular e a aplicação paralela na distância $t \neq 0$ é uma imersão plana restrita a U para t suficientemente pequeno*. De fato, em [19], a geometria das superfícies planas em \mathbb{H}^3 com singularidades “admissíveis” (ou a geometria das frentes planas) tem sido amplamente estudada.

Concretamente, as famílias de superfícies planas de rotação em \mathbb{H}^3 apresentam exemplos de superfícies planas com uma singularidade isolada. Em [16], J. A. Gálvez e P. Mira fornecem uma descrição completa das superfícies planas que são regularmente mergulhadas em torno de uma singularidade isolada. Exemplos de tais superfícies com duas singularidades isoladas são dados por A. V. Corro, A. Martínez e F. Milán [9].

Nos trabalhos do matemático francês Albert Ribaucour, surgem as primeiras investigações acerca das transformações que veremos ao longo desta dissertação.

No desenvolvimento inicial da teoria das transformações de Ribaucour, L. Bianchi desempenha um papel fundamental ao publicar, entre os anos de 1918 e 1919, um artigo que posteriormente alcançou status clássico, intitulado: *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{li} ortogonali e il teorema generale di permutabilità* [3]. Desde então, vários pesquisadores têm dedicado significativo empenho à pesquisa das transformações de Ribaucour, com o propósito de gerar novas superfícies caracterizadas por curvatura gaussiana constante, tendo como ponto de partida uma superfície de mesmo tipo.

A. V. Corro, W. Ferreira e K. Tenenblat [6] consideraram, em 1999, a teoria para hipersuperfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . No início dos anos 2000, A. V. Corro, W. Ferreira e K. Tenenblat [7] aplicam as transformações para as superfícies *cmc*; em particular, para as superfícies mínimas, exibindo os primeiros exemplos explícitos de famílias de superfícies mínimas completas a partir do cilindro e das superfícies de Delaunay. Estas famílias contêm as chamadas superfícies *n*-bolhas *cmc* descritas por Sievert em [24], [14] e [25]. Em [8], a teoria avança com a obtenção da transformação de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten em \mathbb{R}^3 e com a unificação de diversos resultados clássicos. Prova-se, por exemplo, a existência de superfícies linear-Weingarten hiperbólicas completas imersas em \mathbb{R}^3 , em contraste com o Teorema de Hilbert que afirma a não existência de superfícies completas de curvatura constante negativa imersas em \mathbb{R}^3 .

De forma análoga à construção das transformações de Ribaucour para hipersuperfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , K. Tenenblat e Q. Wang [27] estenderam a teoria para hipersuperfícies no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} e no espaço esférico \mathbb{S}^{n+1} . Como aplicação, em [27], as autoras forneceram um método para produzir famílias de superfícies linear-Weingarten completas e de superfícies *cmc* em formas espaciais a partir de uma superfície previamente fixada. Outrossim, M. Lemes, P. Roitman, K. Tenenblat e R. Tribuzy [20] provaram que as únicas transformações de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten que são conformes são aquelas que relacionam superfícies de mesma curvatura média constante.

Em [7], demonstra-se um fenômeno interessante envolvendo as transformações de Ribaucour. A saber, quando aplicadas às superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , produzem fins planares mergulhados. M. Lemes, P. Roitman, K. Tenenblat e R. Tribuzy [20] mostram um compor-

tamento similar no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . A saber, as transformações de Ribaucour para superfícies $cmc1$ em \mathbb{H}^3 produzem fins do tipo horosfera mergulhados.

Neste trabalho, temos como objetivo precípua realizar um estudo detalhado sobre as transformações de Ribaucour aplicadas às superfícies planas em \mathbb{H}^3 . Para isso, seguiremos os passos descritos em [10]. Mostraremos que tais transformações para superfícies planas em \mathbb{H}^3 produzem curvas de singularidades e fins do tipo horosfera mergulhados e completos. Mais especificamente, aplicaremos as transformações de Ribaucour às superfícies planas de rotação em \mathbb{H}^3 , obtendo assim novas famílias de superfícies planas. Também observaremos, ao longo do estudo, que cada família de tais superfícies admite uma classe distinta de superfícies que são periódicas em uma das variáveis, desde que se faça uma escolha adequada para a constante de Ribaucour. Estas superfícies geradas possuem um número par arbitrário $2n$ de fins do tipo horosfera completos e 2 fins completos com índice geométrico m , sendo $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} - \{0, 1\}$ irredutível.

Com o auxílio do programa computacional MAPLE, visualizaremos algumas superfícies planas associadas ao cilindro (Figuras 3.1 - 3.4) via transformação de Ribaucour. Analogamente, veremos algumas superfícies obtidas pelas transformações de Ribaucour a partir das superfícies planas de rotação sem singularidades isoladas (Figuras 3.5 - 3.8) e com uma singularidade isolada (Figuras 3.9 e 3.10), respectivamente.

A presente dissertação está dividida em três capítulos, aos quais delineamos, de forma sucinta, os respectivos temas que serão abordados:

Capítulo 1: Preliminares. Fixaremos notações e apresentaremos fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. Os requisitos para a compreensão deste capítulo são noções básicas de geometria riemanniana e formas diferenciais. Introduziremos a métrica de Lorentz e deduziremos as chamadas equações de estrutura para o espaço de Lorentz; forneceremos também um modelo para o espaço hiperbólico. Por último, aplicaremos os estudos prévios às superfícies do espaço hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 .

Capítulo 2: Transformação de Ribaucour em \mathbb{H}^3 . Motivados pelos estudos desenvolvidos em [27], enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes da teoria da transformação de Ribaucour para superfícies em \mathbb{H}^3 , bem como os resultados particularizados à classe de superfícies linear-Weingarten e, por último, à classe de superfícies planas em \mathbb{H}^3 . Seguindo [10], forneceremos resultados envolvendo os fins e as curvas singulares de superfícies planas de \mathbb{H}^3 obtidas por uma transformação de Ribaucour. Mostraremos que a transformação produz fins do tipo horosfera, que as curvas de singularidades são genericamente arestas cuspidais, e que as mesmas não intersectam os fins.

Capítulo 3: Famílias de superfícies planas em \mathbb{H}^3 . Inspirados por [10], na primeira parte descreveremos todas as superfícies planas do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 obtidas aplicando-se a transformação de Ribaucour para o cilindro hiperbólico. Na segunda parte, as famílias de superfícies planas associadas às superfícies planas de rotação sem singularidades isoladas serão tratadas. Por fim, iremos obter famílias de superfícies planas associadas por uma transformação de Ribaucour às superfícies planas de rotação com uma singularidade isolada. Em cada parte, determinaremos fins do tipo horosfera e curvas de singularidades geradas pela transformação.

Apêndice A: Plotando uma superfície no *software* MAPLE. Delinearemos os comandos necessários no programa computacional MAPLE para gerar uma superfície associada ao cilindro via transformação de Ribaucour em \mathbb{H}^3 (usando o clássico modelo da bola de Poincaré). Todas as figuras contidas neste trabalho podem ser obtidas de forma semelhante, apenas realizando-se os devidos ajustes nos comandos conforme dita cada um dos Teoremas do Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, seguiremos sucintamente as ideias contidas em [5] e [12] para, no contexto das Formas Diferenciais, fixarmos notações e conceitos que serão usados no decorrer deste trabalho. Nosso objetivo é estudar um *modelo para o espaço hiperbólico*, \mathbb{H}^{n+1} , que, depois do espaço euclidiano, constitui um dos modelos mais simples de variedades riemannianas devido à sua curvatura ser constante e não-nula.

Na Seção 1.1, o leitor será convidado a analisar um roteiro que possibilita obter as *equações de estrutura* do espaço de Lorentz \mathbb{L}^{n+2} . O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ será nosso objeto de estudo na Seção 1.2. Finalizaremos este capítulo com a Seção 1.3, aplicando os estudos prévios às superfícies de \mathbb{H}^3 .

1.1 Equações de estrutura do espaço de Lorentz \mathbb{L}^{n+2}

Uma métrica *pseudo-riemanniana* em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada ponto $p \in M$, de uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (não positiva definida) em $T_p M$ e que varia diferenciavelmente com p .

Diz-se espaço de Lorentz ao conjunto dos pontos $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ munido do *produto interno pseudo-riemanniano* dado por

$$\langle x, y \rangle_1 = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i, \quad (\text{métrica de Lorentz}) \quad (1.1.1)$$

para quaisquer $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}), y = (y_0, y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$. O espaço de Lorentz será denotado por $\mathbb{L}^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$.

Sejam $A, B, C, D \in \{0, 1, \dots, n+1\}$. Dizemos que $\{e_A\}$ é um *referencial móvel ortonormal* definido num conjunto aberto $U \subset \mathbb{L}^{n+2}$ quando, para todo ponto $p \in U$, tem-se

$$\langle e_A, e_B \rangle = \begin{cases} -1, & \text{se } A = B = 0; \\ 0, & \text{se } A \neq B; \\ 1, & \text{se } A = B = 1, 2, \dots, n+1. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

sendo os $n+2$ campos vetoriais e_A diferenciáveis em U .

Além disso, o conjunto das 1-formas diferenciais ω_A definidas por

$$\omega_A(e_B) = \begin{cases} -1, & \text{se } A = B = 0; \\ 0, & \text{se } A \neq B; \\ 1, & \text{se } A = B = 1, 2, \dots, n+1. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

formam uma base dual a $\{e_A\}$ em $p \in U$. O conjunto $\{\omega_A\}$ é chamado *correferencial* associado a $\{e_A\}$ em U .

Cada campo $e_A : U \subset \mathbb{L}^{n+2} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ induz uma aplicação linear $(de_A)_p : \mathbb{L}^{n+2} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, para todo $p \in U$. Com isso, definimos as chamadas *formas de conexão* ω_{AB} em U :

$$de_A = \sum_B \omega_{AB} e_B. \quad (1.1.4)$$

A definição de ω_A é equivalente a escrever

$$dt = \sum_A \omega_A e_A. \quad (1.1.5)$$

sendo $t : \mathbb{L}^{n+2} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ a aplicação identidade. Derivando exteriormente a equação (1.1.4), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d(de_A) = d\left(\sum_B \omega_{AB} e_B\right) = \sum_B (d\omega_{AB} e_B + de_B \wedge \omega_{AB}) \\ &= \sum_B \left(d\omega_{AB} e_B - \omega_{AB} \wedge \sum_C \omega_{BC} e_C\right) = \sum_B d\omega_{AB} e_B - \sum_B \omega_{AB} \wedge \sum_C \omega_{BC} e_C \\ &= \sum_C d\omega_{AC} e_C - \sum_C \left(\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_{BC}\right) e_C = \sum_C \left(d\omega_{AC} - \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_{BC}\right) e_C. \end{aligned}$$

Observe, porém, que como os campos e_C são linearmente independentes, temos que

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}. \quad (1.1.6)$$

Analogamente, a derivada exterior da equação (1.1.5) fornece

$$\begin{aligned} 0 &= d(dt) = d\left(\sum_A \omega_A e_A\right) = \sum_A (d\omega_A e_A - \omega_A \wedge de_A) \\ &= \sum_A \left(d\omega_A e_A - \omega_A \wedge \sum_B \omega_{AB} e_B\right) = \sum_A d\omega_A e_A - \sum_A \omega_A \wedge \sum_B \omega_{AB} e_B \\ &= \sum_B d\omega_B e_B - \sum_B \left(\sum_A \omega_A \wedge \omega_{AB}\right) e_B = \sum_B \left(d\omega_B - \sum_A \omega_A \wedge \omega_{AB}\right) e_B. \end{aligned}$$

Como os campos vetoriais e_B são linearmente independentes, segue-se que

$$d\omega_B = \sum_A \omega_A \wedge \omega_{AB}. \quad (1.1.7)$$

As duas equações obtidas, (1.1.6) e (1.1.7), são as conhecidas *equações de estrutura do espaço de Lorentz* \mathbb{L}^{n+2} .

Finalizaremos esta seção analisando algumas relações envolvendo ω_{AB} . Ora, se $A \neq B$, diferenciando a equação $\langle e_A, e_B \rangle_1 = \delta_{AB}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle de_A, e_B \rangle_1 + \langle e_A, de_B \rangle_1 \\ &= \left\langle \sum_C \omega_{AC} e_C, e_B \right\rangle_1 + \left\langle e_A, \sum_D \omega_{BD} e_D \right\rangle_1 \\ &= \omega_{AB} + \omega_{BA}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA}.$$

Se $A = B = 0$, por definição, temos $\langle e_0, e_0 \rangle_1 = -1$. Diferenciando esta última equação,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle de_0, e_0 \rangle_1 + \langle e_0, de_0 \rangle_1 \\ &= \left\langle \sum_C \omega_{0C} e_C, e_0 \right\rangle_1 + \left\langle e_0, \sum_D \omega_{0D} e_D \right\rangle_1 \\ &= -\omega_{00} - \omega_{00} = -2\omega_{00}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_{00} = 0. \quad (1.1.8)$$

Analogamente, da equação $\langle e_A, e_0 \rangle_1 = 0$, com $A \neq 0$, obtemos

$$0 = \langle de_A, e_0 \rangle_1 + \langle e_A, de_0 \rangle_1 = -\omega_{A0} + \omega_{0A}.$$

Ou seja,

$$\omega_{A0} = \omega_{0A}. \quad (1.1.9)$$

1.2 Um modelo para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1}

Considere o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{L}^{n+2}$ tais que $\langle x, x \rangle_1 = -1$. Escrevendo $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1}$, obtemos

$$\langle x, x \rangle_1 = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1. \quad (1.2.1)$$

Um tal conjunto é um *hiperbolóide de duas folhas* em \mathbb{L}^{n+2} . Pela relação (1.2.1), temos $x_0 = \pm \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2}$. A componente conexa correspondente a $x_0 > 0$ deste hiperbolóide será indicada por \mathbb{H}^{n+1} . Como $\langle x, x \rangle_1 = -1$, segue-se que $\langle x, dx \rangle_1 = 0$, isto é, o espaço tangente a \mathbb{H}^{n+1} em cada ponto de \mathbb{H}^{n+1} é normal a x . Logo, podemos escolher uma base $\{a_0, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ de \mathbb{L}^{n+2} satisfazendo

$$a_0 = x, \quad \langle a_0, a_i \rangle_1 = 0, \quad \langle a_i, a_j \rangle_1 = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n+1,$$

ou seja, o espaço tangente $T_x \mathbb{H}^{n+1}$ é gerado por a_1, \dots, a_{n+1} , o que significa dizer que a métrica induzida de \mathbb{L}^{n+2} sobre \mathbb{H}^{n+1} é uma métrica riemanniana.

Considere $\{e_A\}$ referenciais locais em \mathbb{L}^{n+2} satisfazendo (1.1.1) e que são adaptados a \mathbb{H}^{n+1} , isto é, quando restritos a \mathbb{H}^{n+1} , os campos diferenciáveis de vetores e_1, \dots, e_{n+1} são tangentes a \mathbb{H}^{n+1} enquanto que $e_0 = x$ descreve o espaço \mathbb{H}^{n+1} . Agora, indiquemos por ω_A e ω_{AB} as restrições a \mathbb{H}^{n+1} das formas com mesma notação em \mathbb{L}^{n+2} ; o que implica em $\omega_{00} = 0$. Além disso, considerando (1.1.5) no caso em que x é a restrição da aplicação identidade de \mathbb{L}^{n+2} a \mathbb{H}^{n+1} , temos

$$dx = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i e_i = de_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{0i} e_i,$$

donde $\omega_i = \omega_{0i} = \omega_{i0}$. Consequentemente,

$$de_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i e_i, \quad (1.2.2)$$

$$de_i = \omega_i e_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{ij} e_j. \quad (1.2.3)$$

Diferenciando a equação (1.2.3), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega_i e_0) + d\left(\sum_j \omega_{ij} e_j\right) = d\omega_i e_0 + de_0 \wedge \omega_i + \sum_j de_j \wedge \omega_{ij} + \sum_j d\omega_{ij} e_j \\ &= d\omega_i e_0 + \left(\sum_j \omega_j e_j\right) \wedge \omega_i + \sum_j \left(\omega_j e_0 + \sum_k \omega_{jk} e_k\right) \wedge \omega_{ij} + \sum_j d\omega_{ij} e_j \\ &= d\omega_i e_0 + \sum_k \omega_k \wedge \omega_i e_k + \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ij} e_0 + \sum_k \left(\sum_j \omega_{jk} \wedge \omega_{ij}\right) e_k + \sum_k d\omega_{ik} e_k \\ &= \left(d\omega_i + \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ij}\right) e_0 + \sum_k \left(d\omega_{ik} + \omega_k \wedge \omega_i + \sum_j \omega_{jk} \wedge \omega_{ij}\right) e_k. \end{aligned}$$

Finalmente, deduzimos as chamadas *equações de estrutura do espaço hiperbólico* \mathbb{H}^{n+1} :

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad (1.2.4)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_i \wedge \omega_j. \quad (1.2.5)$$

De posse destas duas equações, podemos determinar a curvatura de \mathbb{H}^{n+1} na métrica induzida. Para isso, permutamos k com j e usamos a relação (1.1.9). Assim:

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \omega_i \wedge \omega_j = -(-1)\omega_{i0} \wedge \omega_{0j}.$$

Portanto, \mathbb{H}^{n+1} tem curvatura constante igual a -1 .

A seguir, enunciaremos dois lemas importantes ao estudo das hipersuperfícies do espaço hiperbólico, cujas demonstrações serão omitidas nesta leitura preliminar, a fim de mantermos o caráter sucinto deste capítulo.

Lema 1.1 (Lema de Cartan). *Seja V^n um espaço vetorial de dimensão n , e sejam $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $r \leq n$, formas lineares em V linearmente independentes. Se existirem formas*

lineares $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0,$$

então

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Lema 1.2. *Seja $U \subset V^n$ aberto e sejam $\omega_1, \dots, \omega_n$ 1-formas diferenciais em U , linearmente independentes. Admita que exista um conjunto de 1-formas diferenciais em U , $\{\omega_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, n$ satisfazendo as seguintes condições*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad e \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Então, tal conjunto é único.

Seja M^n uma hipersuperfície orientável, isto é, uma subvariedade de codimensão 1 de \mathbb{H}^{n+1} . Seja ainda M orientada pelo seu campo vetorial normal unitário $\eta : M \rightarrow T_p \mathbb{H}^{n+1}$. Como $\langle x, dx \rangle = 0$, o espaço tangente em cada ponto de \mathbb{H}^{n+1} é normal a x . Seja e_α um referencial móvel ortonormal em \mathbb{L}^{n+2} adaptado a M , onde e_i , $i = 1, \dots, n$, são os campos tangentes a M , $e_0 = x$ é o vetor posição e $e_{n+1} = \eta$ o campo normal unitário a M .

Agora, considere $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões riemannianas em \mathbb{H}^{n+1} e M , respectivamente. Seja B a segunda forma fundamental de M , e S o operador Weingarten associado a B , definido da seguinte maneira: para todo $p \in M$, o operador $S : T_p M \rightarrow T_p M$ é tal que

$$\langle S(u), v \rangle = \langle B(u, v), N(p) \rangle, \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Dizemos que os autovalores de $-S$ são as curvaturas principais de M e os autovetores correspondentes são as direções principais. Com isto, temos o seguinte lema:

Lema 1.3. *Se os campos vetoriais definidos anteriormente, e_i , são direções principais que correspondem às curvaturas principais λ_i , $1 \leq i \leq n$, então vale o seguinte*

$$\omega_{i,n+1} = -\lambda_i \omega_i, \quad dN(e_i) = \lambda_i e_i. \quad (1.2.6)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \langle S(x), y \rangle &= \langle B(x, y), N(p) \rangle = -\langle y, \bar{\nabla}_x N \rangle \\ &= -\left\langle y, \sum_{i=1}^n \omega_{n+1,i}(x) e_i \right\rangle, \end{aligned}$$

para qualquer $p \in M$ e para quaisquer $x, y \in T_p M$. O que implica em $S = -dN$ e, consequentemente, $dN(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Como

$$\begin{aligned}\omega_{i,n+1}(e_j) &= -\omega_{n+1,i}(e_j) = -\langle \bar{\nabla}_{e_j} e_{n+1}, e_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_i, N \rangle = \langle B(e_i, e_j), N \rangle \\ &= \langle S(e_i), e_j \rangle = -\lambda_i \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n \omega_{i,n+1}(e_j) \omega_j = -\lambda_i \omega_i.$$

O que finaliza a demonstração. \square

Concluiremos estas notas preliminares apresentando, na próxima seção, uma aplicação das ideias desenvolvidas neste texto.

1.3 Aplicação às superfícies de \mathbb{H}^3

Considere $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ um referencial móvel ortonormal orientado positivamente, em \mathbb{L}^4 , satisfazendo (1.1.2). O correferencial $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ associado a $\{e_A\}$, $0 \leq A \leq 3$, satisfaz (1.1.3); e ω_{AB} , $0 \leq B \leq 3$, são as formas de conexão definidas por (1.1.4).

As equações de estrutura de \mathbb{H}^3 , dadas por (1.2.4) e (1.2.5), são equivalentes às seguintes equações:

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad (1.3.1)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_i \wedge \omega_j. \quad (1.3.2)$$

Agora, denote por $X : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão de uma superfície suave, orientada e conexa, M^2 .

Dado $p \in M^2$, seja $U \subset M^2$ uma vizinhança de p na qual a restrição $X|_U$ seja injetiva. Considere V uma vizinhança de $X(p)$ em \mathbb{H}^3 de modo que $X(U) \subset V$ e que, em V , esteja definido um referencial adaptado, isto é, $e_0 = X$ é o vetor posição, e_1 e e_2 geram o espaço tangente à M^2 , e e_3 é o campo normal unitário à M pertencente ao espaço tangente de \mathbb{H}^3 .

As restrições das formas ω_i e ω_{ij} a M , satisfazem as equações (1.3.1) e (1.3.2), juntamente com a condição $\omega_3 = 0$, isto é,

$$d\omega_j = \sum_{i=1}^2 \omega_i \wedge \omega_{ij}, \quad (1.3.3)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^2 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i3} \wedge \omega_{3j} - (-1)\omega_i \wedge \omega_j, \quad (1.3.4)$$

$$d\omega_{i3} = \sum_{k=1}^2 \omega_{ik} \wedge \omega_{k3}. \quad (1.3.5)$$

Ora, $\omega_3 = 0$ implica em $d\omega_3 = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i3} = 0$ e, pelo lema de Cartan, resulta que

$$\begin{pmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.6)$$

onde as funções suaves h_{ij} ($= h_{ji}$) são os coeficientes da segunda forma fundamental, \mathbb{II} , de X . Por conseguinte, as curvaturas *gaussiana* e *média* de M^2 são dadas, respectivamente, por

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 - 1, \quad (1.3.7)$$

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}. \quad (1.3.8)$$

Exemplo 1.1 (Cilindro hiperbólico). Considere o cilindro em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ parametrizado por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que

$$X(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha u_2), \frac{1}{\beta} \cos(\beta u_1), \frac{1}{\beta} \sin(\beta u_1), \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha u_2) \right), \quad (1.3.9)$$

onde $(u_1, u_2) \in U$ e $\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = -1$ com $\alpha, \beta > 0$.

Vamos calcular as curvaturas *gaussiana* e *média* do cilindro hiperbólico parametrizado por (1.3.9). Com efeito, inicialmente vemos que

$$dX = (\sinh(\alpha u_2) du_2, -\sin(\beta u_1) du_1, \cos(\beta u_1) du_1, \cosh(\alpha u_2) du_2),$$

donde resulta que

$$dX(\partial_{u_1}) = (0, -\sin(\beta u_1), \cos(\beta u_1), 0),$$

$$dX(\partial_{u_2}) = (\sinh(\alpha u_2), 0, 0, \cosh(\alpha u_2)),$$

isto é, X é uma imersão. Além disso, façamos a seguinte escolha para um referencial ortonormal adaptado ao cilindro:

$$\begin{aligned} e_0 &= X, \\ e_1 &= (0, -\sin(\beta u_1), \cos(\beta u_1), 0), \\ e_2 &= (\sinh(\alpha u_2), 0, 0, \cosh(\alpha u_2)), \\ e_3 &= \left(\frac{1}{\beta} \cosh(\alpha u_2), \frac{1}{\alpha} \cos(\beta u_1), \frac{1}{\alpha} \sin(\beta u_1), \frac{1}{\beta} \sinh(\alpha u_2) \right). \end{aligned}$$

Usando as equações (1.2.2) e (1.2.3) podemos facilmente obter o correferencial ω_i associado ao referencial e_i , $0 \leq i \leq 3$, isto é

$$\omega_0 = \langle de_0, e_0 \rangle_1 = 0, \quad \omega_1 = \langle de_0, e_1 \rangle_1 = du_1, \quad \omega_2 = \langle de_0, e_2 \rangle_1 = du_2, \quad \omega_3 = \langle de_0, e_3 \rangle_1 = 0.$$

Por outro lado, tendo em vista as expressões dadas por

$$\begin{aligned} de_1 &= (0, -\beta \cos(\beta u_1) du_1, -\beta \sin(\beta u_1) du_1, 0), \\ de_2 &= (\alpha \cosh(\alpha u_2) du_2, 0, 0, \alpha \sinh(\alpha u_2) du_2), \end{aligned}$$

um cálculo simples resulta em

$$\omega_{13} = \langle de_1, e_3 \rangle_1 = \frac{\beta}{\alpha} du_1, \quad \omega_{23} = \langle de_2, e_3 \rangle_1 = \frac{\alpha}{\beta} du_2.$$

Para concluirmos, utilizando (1.3.6) resulta que os coeficientes da segunda forma quadrática na direção de e_3 são dados por

$$h_{11} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Logo, as equações (1.3.7) e (1.3.8) fornecem $K = 0$ (superfície flat) e $H = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2\alpha\beta}$.

Utilizando-se da projeção estereográfica de \mathbb{H}^3 no modelo da bola de Poincaré, \mathcal{B}^3 , isto é, considerando a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathcal{B}^3 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}, \frac{x_3}{1+x_0} \right) \end{aligned}$$

a Figura 1.1 ilustra a superfície do Exemplo 1.1.

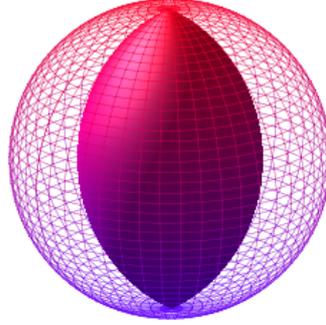


Figura 1.1 Cilindro hiperbólico.

Salientamos ainda que, os resultados da teoria da transformação de Ribaucour, presentes no Capítulos 2, serão aplicados a este exemplo para obtermos uma nova família de superfícies planas no espaço hiperbólico tridimensional (veja o Teorema 3.1). A seguir, apresentamos mais um exemplo de superfície plana, o *boneco de neve*, uma superfície de rotação em \mathbb{H}^3 sem singularidades isoladas, mas com uma curva de singularidades (veja a Figura 1.2).

Exemplo 1.2 (Boneco de neve). Considere a superfície plana de rotação sem singularidades isoladas de $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que

$$X(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{a\alpha} \cosh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \cos \frac{\alpha u_1}{2}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \sin \frac{\alpha u_1}{2}, -\frac{1}{a\alpha} \sinh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) \right), \quad (1.3.10)$$

onde

$$\alpha = \frac{\varepsilon(1-a^2)}{a}, \quad \phi = \frac{\varepsilon(1+a^2)}{2a} u_2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{com} \quad \varepsilon(1-a^2) > 0, \quad (1.3.11)$$

e, sem perda de generalidade, consideramos $a > 0$, $a \neq 1$ e

$$\beta = \frac{1}{1+a^2} [(1-a^2) \log(\varepsilon(1-a^2)) + 2a^2 \log a].$$

Vamos calcular as curvaturas gaussiana e média da superfície plana de rotação em \mathbb{H}^3 sem singularidades isoladas parametrizada por (1.3.10). Inicialmente, vemos que

$$\begin{aligned} dX = & \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \sinh(\varepsilon a u_2 + \beta) du_2 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) du_2, \right. \\ & \cosh \phi \sin\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right) du_1 - \frac{2b}{\alpha} \sinh \phi \cos\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right) du_2, \\ & - \cosh \phi \cos\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right) du_1 - \frac{2b}{\alpha} \sinh \phi \sin\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right) du_2, \\ & \left. - \frac{\varepsilon}{\alpha} \cosh(\varepsilon a u_2 - \beta) du_2 - \frac{\varepsilon}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) du_2 \right), \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} dX(\partial_{u_1}) &= \left(0, \cosh \phi \sin\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right), -\cosh \phi \cos\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right), 0 \right), \\ dX(\partial_{u_2}) &= \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \sinh(\varepsilon a u_2 - \beta) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right), -\frac{2b}{\alpha} \sinh \phi \cos\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right), \right. \\ & \left. -\frac{2b}{\alpha} \sinh \phi \sin\left(\frac{\alpha u_1}{2}\right), -\frac{\varepsilon}{\alpha} \cosh(\varepsilon a u_2 - \beta) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) \right), \end{aligned}$$

isto é, X é uma imersão. Além disso, façamos a seguinte escolha para um referencial ortonormal adaptado à superfície X :

$$\begin{aligned} e_0 &= X, \\ e_1 &= dX(\partial_{u_1}), \\ e_2 &= dX(\partial_{u_2}), \\ e_3 &= \left(\frac{1}{a\alpha} \sinh(\varepsilon a u_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \cos\frac{\alpha u_1}{2}, \right. \\ & \left. -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \sin\frac{\alpha u_1}{2}, -\frac{1}{a\alpha} \cosh(\varepsilon a u_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) \right). \end{aligned}$$

Um cálculo direto permite ver que os campos diferenciáveis acima são dois a dois ortonormais (com relação ao produto interno pseudo-riemanniano $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$). Portanto, a escolha realizada é admissível.

Usando as equações (1.2.2) e (1.2.3) e efetuando algumas contas razoavelmente longas, obtemos o correferencial ω_i associado ao referencial e_i , $0 \leq i \leq 3$, isto é,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \langle de_0, e_0 \rangle_1 = 0, \\ \omega_1 &= \langle de_0, e_1 \rangle_1 = \cosh^2 \phi \, du_1, \\ \omega_2 &= \langle de_0, e_2 \rangle_1 = \sinh^2 \phi \, du_2, \\ \omega_3 &= \langle de_0, e_3 \rangle_1 = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em vista as expressões dadas por

$$\begin{aligned}de_1 &= \left(0, \frac{\alpha}{2} \cosh \phi \cosh \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_1 + b \sinh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_2, \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha}{2} \cosh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_1 - b \sinh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_2, 0 \right), \\ de_2 &= \left(\frac{a}{\alpha} \cosh(\varepsilon a u_2 - \beta) du_2 + \frac{1}{\alpha a} \cosh \left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta \right) du_2, \right. \\ &\quad b \sinh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_1 - \frac{2b^2}{\alpha} \cosh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_2, \\ &\quad - b \sinh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_1 - \frac{2b^2}{\alpha} \cosh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) du_2, \\ &\quad \left. - \frac{a}{\alpha} \sinh(\varepsilon a u_2 - \beta) du_2 + \frac{1}{\alpha a} \sinh \left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta \right) du_2 \right),\end{aligned}$$

um cálculo direto resulta em

$$\omega_{13} = \langle de_1, e_3 \rangle_1 = -\frac{1}{2} \sinh(2\phi) \, du_1, \quad \omega_{23} = \langle de_2, e_3 \rangle_1 = -\frac{1}{2} \sinh(2\phi) \, du_2.$$

Para concluirmos, utilizando (1.3.6), temos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} -\sinh \phi \cosh \phi \, du_1 \\ -\sinh \phi \cosh \phi \, du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi \, du_1 \\ \sinh^2 \phi \, du_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.12)$$

que fornece os coeficientes da segunda forma quadrática na direção de e_3 , dados por

$$h_{11} = -\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi}, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = -\frac{\cosh \phi}{\sinh \phi}.$$

Logo, as equações (1.3.7) e (1.3.8) fornecem $K = 0$ (superfície flat) e $H = -\frac{\cosh 2\phi}{\sinh 2\phi}$.

Utilizando-se da projeção estereográfica de \mathbb{H}^3 no modelo da bola de Poincaré, \mathcal{B}^3 , isto é, considerando a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathcal{B}^3 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}, \frac{x_3}{1+x_0} \right), \end{aligned}$$

a Figura 1.2 ilustra a superfície do Exemplo 1.2.

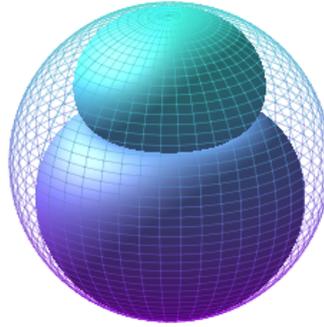


Figura 1.2 Boneco de neve (*Snowman*, veja [21]).

A partir desta superfície, exibiremos uma nova família de superfícies planas de \mathbb{H}^3 , aplicando os resultados da teoria das transformações de Ribaucour presentes no Capítulo 2, conforme o Teorema 3.2. O próximo exemplo ilustra, no modelo da bola de Poincaré do espaço hiperbólico, uma superfície plana de rotação com uma singularidade isolada, trata-se da superfície *ampulheta* (veja a Figura 1.3).

Exemplo 1.3 (Ampulheta). Considere a superfície plana de rotação com singularidade isolada de $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que

$$\begin{aligned} X(u_1, u_2) = & \left(\frac{1}{a\alpha} \cosh(au_1 + \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \cos \frac{\alpha u_2}{2}, \right. \\ & \left. -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \sin \frac{\alpha u_2}{2}, \frac{1}{a\alpha} \sinh(au_1 + \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) \right), \quad (1.3.13) \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{1+a^2}{a}, \quad \phi = \frac{1-a^2}{2a}u_1, \quad a^2 \neq 1, \quad a \neq 0, \quad (1.3.14)$$

e, sem perda de generalidade, consideramos $a > 0$ e

$$\beta = \frac{1}{1-a^2}[(1+a^2)\log(1+a^2) - 2a^2\log a].$$

Vamos calcular as curvaturas gaussiana e média da superfície plana de rotação em \mathbb{H}^3 com uma singularidade isolada parametrizada por (1.3.13). Inicialmente, vemos que

$$\begin{aligned} dX = & \left(\frac{1}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) du_1 + \frac{1}{\alpha} \sinh(au_1 + \beta) du_1, \right. \\ & - \frac{(1-a^2)}{a\alpha} \cosh\phi \cos\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right) du_1 + \sinh\phi \sin\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right) du_2, \\ & - \frac{(1-a^2)}{a\alpha} \cosh\phi \sin\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right) du_1 - \sinh\phi \cos\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right) du_2, \\ & \left. \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) du_1 + \frac{1}{\alpha} \cosh(au_1 + \beta) du_1 \right), \end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} dX(\partial_{u_1}) = & \left(\frac{1}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) + \frac{1}{\alpha} \sinh(au_1 + \beta), -\frac{(1-a^2)}{a\alpha} \cosh\phi \cos\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right), \right. \\ & \left. -\frac{(1-a^2)}{a\alpha} \cosh\phi \sin\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right), \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) + \frac{1}{\alpha} \cosh(au_1 + \beta) \right), \\ dX(\partial_{u_2}) = & \left(0, \sinh\phi \sin\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right), -\sinh\phi \cos\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right), 0 \right), \end{aligned}$$

isto é, X é uma imersão. Além disso, façamos a seguinte escolha para um referencial ortonormal adaptado à superfície X :

$$\begin{aligned} e_0 &= X, \\ e_1 &= dX(\partial_{u_1}), \\ e_2 &= dX(\partial_{u_2}), \\ e_3 &= \left(\frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) - \frac{1}{a\alpha} \sinh(au_1 + \beta), -\frac{2}{\alpha} \cosh\phi \cos\frac{\alpha u_2}{2}, \right. \\ & \left. -\frac{2}{\alpha} \cosh\phi \sin\frac{\alpha u_2}{2}, \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) - \frac{1}{a\alpha} \cosh(au_1 + \beta) \right). \end{aligned}$$

Um cálculo direto permite ver que os campos diferenciáveis acima são dois a dois ortonormais (com relação ao produto interno pseudo-riemanniano $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$). Portanto, a escolha acima está bem posta.

Usando as equações (1.2.2) e (1.2.3) e efetuando algumas contas razoavelmente longas, obtemos o correferencial ω_i associado ao referencial e_i , $0 \leq i \leq 3$, isto é,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \langle de_0, e_0 \rangle_1 = 0, \\ \omega_1 &= \langle de_0, e_1 \rangle_1 = \cosh^2 \phi \, du_1, \\ \omega_2 &= \langle de_0, e_2 \rangle_1 = \sinh^2 \phi \, du_2, \\ \omega_3 &= \langle de_0, e_3 \rangle_1 = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em vista as expressões dadas por

$$\begin{aligned}de_1 &= \left(\frac{1}{a\alpha} \cosh \left(\frac{u_1}{a} + \beta \right) du_1 + \frac{a}{\alpha} \cosh(au_1 + \beta) du_1, \right. \\ &\quad - \frac{(1-a^2)^2}{2a^2\alpha} \sinh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_1 + \frac{(1-a^2)}{2a} \cosh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_2, \\ &\quad \left. - \frac{(1-a^2)^2}{2a^2\alpha} \sinh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_1 - \frac{(1-a^2)}{2a} \cosh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{a\alpha} \sinh \left(\frac{u_1}{a} + \beta \right) du_1 + \frac{a}{\alpha} \sinh(au_1 + \beta) du_1 \right), \\ de_2 &= \left(0, \frac{1-a^2}{2a} \cosh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_1 + \frac{\alpha}{2} \sinh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_2, \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-a^2)}{2a} \cosh \phi \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_1 + \frac{\alpha}{2} \sinh \phi \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) du_2, 0 \right),\end{aligned}$$

um cálculo direto resulta em

$$\omega_{13} = \langle de_1, e_3 \rangle_1 = -\frac{1}{2} \sinh(2\phi) \, du_1, \quad \omega_{23} = \langle de_2, e_3 \rangle_1 = -\frac{1}{2} \sinh(2\phi) \, du_2.$$

Para concluirmos, utilizando (1.3.6), temos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} -\sinh \phi \cosh \phi \, du_1 \\ -\sinh \phi \cosh \phi \, du_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi \, du_1 \\ \sinh^2 \phi \, du_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.15)$$

que fornece os coeficientes da segunda forma quadrática de X na direção de e_3 :

$$h_{11} = -\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi}, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = -\frac{\cosh \phi}{\sinh \phi}.$$

Logo, as equações (1.3.7) e (1.3.8) fornecem $K = 0$ (superfície flat) e $H = -\frac{\cosh 2\phi}{\sinh 2\phi}$.

Utilizando-se da projeção estereográfica de \mathbb{H}^3 no modelo da bola de Poincaré, \mathcal{B}^3 , isto é, considerando a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{H}^3 &\rightarrow \mathcal{B}^3 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}, \frac{x_3}{1+x_0} \right), \end{aligned}$$

a Figura 1.3 ilustra a superfície do Exemplo 1.3.

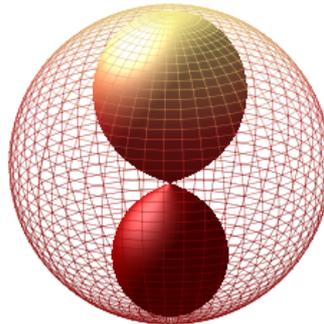


Figura 1.3 Ampulheta (*Hourglass*, veja [21]).

De acordo com os resultados do Capítulo 2, aplicaremos a teoria das transformações de Ribaucour a esta superfície plana de rotação com uma singularidade isolada para gerar uma nova família de superfícies planas de \mathbb{H}^3 , conforme o Teorema 3.3. Veremos, oportunamente, algumas proposições que fornecem propriedades geométricas relacionadas às novas superfícies obtidas.

Capítulo 2

Transformação de Ribaucour em \mathbb{H}^3

Neste capítulo, seguiremos os passos contidos em [27] e apresentaremos a teoria da transformação de Ribaucour para superfícies no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , um espaço forma simplesmente conexo de curvatura seccional constante igual a -1. Além disso, denotaremos por \mathbb{L}^4 o conjunto dos pontos $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ munido do produto interno pseudo-riemanniano

$$\langle x, y \rangle_1 = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^3 x_iy_i.$$

Assim, a seguinte subvariedade configura um modelo para o espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4; \langle x, x \rangle_1 = -1, x_0 > 0\}.$$

Seja M uma superfície orientável em \mathbb{H}^3 . Considere $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal tangente a M e N um campo vetorial normal unitário definido sobre M . Além disso, ω_i as 1-formas duais a e_i e ω_j as formas de conexão de M dadas por

$$d\omega_i = \sum_{j \neq i} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \text{com} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

Seguem-se das equações de estrutura de \mathbb{H}^3 que a *equação de Gauss* é dada por

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_1 \wedge \omega_2,$$

onde $\omega_{23} = -\omega_{32} = \langle de_2, N \rangle_1$ e $\omega_{13} = -\omega_{31} = \langle de_1, N \rangle_1$, e as *equações de Codazzi* são expressas por

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \quad (2.0.1)$$

Outrossim, se os campos vetoriais e_i são direções principais correspondentes às curvaturas principais $-\lambda_i$, então, podemos escrever

$$\omega_{i3} = -\lambda_i \omega_i, \quad dN(e_i) = \lambda_i e_i, \quad 1 \leq i \leq 2. \quad (2.0.2)$$

Por último, consideraremos M uma superfície em \mathbb{H}^3 parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $X(u_1, u_2)$, sendo X o vetor posição em \mathbb{L}^4 , e as direções principais $e_1 = \frac{X_{u_1}}{a_1}$, $e_2 = \frac{X_{u_2}}{a_2}$ com $a_1 = |X_{u_1}|$ e $a_2 = |X_{u_2}|$ diferenciáveis. A primeira forma fundamental de M é dada por $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$, onde $\omega_1 = a_1 du_1$ e $\omega_2 = a_2 du_2$. Para uso posterior, fixaremos também a seguinte expressão para a forma de conexão ω_{12} :

$$\omega_{12} = \frac{1}{a_1 a_2} \left(-\frac{\partial a_1}{\partial u_2} \omega_1 + \frac{\partial a_2}{\partial u_1} \omega_2 \right).$$

2.1 Principais resultados

Tendo em vista as definições clássica e moderna da transformação de Ribaucour para superfícies em \mathbb{R}^3 (veja [4], [6], [26]) e, a fim de considerarmos uma situação similar para superfícies em \mathbb{H}^3 (veja Definição 2.4), trataremos de algumas definições preliminares.

Definição 2.1 (Congruência de esferas geodésicas). Uma congruência de esferas geodésicas em \mathbb{H}^3 é uma família de esferas geodésicas a 2-parâmetros tal que o conjunto dos centros das esferas geodésicas é uma superfície de \mathbb{H}^3 e o raio das esferas geodésicas é dado por uma função diferenciável sobre a superfície.

Definição 2.2 (Involuta). Uma involuta de uma congruência de esferas geodésicas é uma subvariedade bidimensional M de \mathbb{H}^3 , tal que cada ponto de M é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Definição 2.3 (Superfícies associadas por uma congruência de esferas geodésicas). Sejam M e \tilde{M} superfícies em \mathbb{H}^3 . Dizemos que M e \tilde{M} estão associadas por uma congruência de esferas geodésicas se existe um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$ tal que, nos pontos correspondentes p e $\psi(p)$, M e \tilde{M} são tangentes à mesma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Na definição acima, trata-se de um caso importante quando o difeomorfismo ψ é tal que $d\psi$ aplica dois campos vetoriais principais de M em dois campos vetoriais principais de \tilde{M} .

A seguir, apresentamos a definição de uma transformação de Ribaucour para superfícies em \mathbb{H}^3 .

Definição 2.4 (Transformação de Ribaucour). Seja M uma superfície orientável em \mathbb{H}^3 . Suponha que existem campos vetoriais principais ortonormais e_1, e_2 definidos em M . Dizemos que uma superfície orientável $\tilde{M} \subset \mathbb{H}^3$ está associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 , se existem uma função diferenciável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$ e campos vetoriais normais unitários N e \tilde{N} de M e \tilde{M} , respectivamente, tais que

- i) $p + \tanh(\phi(p))N(p) = \psi(p) + \tanh(\phi(p))\tilde{N}(\psi(p)), \forall p \in M$;
- ii) O subconjunto $S := \{p + \tanh(\phi(p))N(p); p \in M\}$ é uma superfície de \mathbb{H}^3 ;
- iii) $d\psi(e_1)$ e $d\psi(e_2)$ são direções principais ortogonais de \tilde{M} (i.e., o difeomorfismo ψ preserva linhas de curvatura).

Podemos tomar a inversa da transformação de Ribaucour no seguinte sentido: existem campos vetoriais principais ortonormais \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 definidos em \tilde{M} tais que M está associada a \tilde{M} com respeito a \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 .

Consideramos a seguir uma definição local para a transformação de Ribaucour.

Definição 2.5 (Local). Seja M uma superfície orientável em \mathbb{H}^3 . Suponha que existem 2 campos vetoriais principais ortonormais e_1, e_2 definidos em M . Dizemos que uma superfície $\tilde{M} \subset \mathbb{H}^3$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 , se para qualquer $\tilde{q} \in \tilde{M}$ existem uma vizinhança \tilde{V} de \tilde{q} em \tilde{M} e um subconjunto aberto $V \subset M$ tal que \tilde{V} está associada a V por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 .

O próximo teorema fornece uma caracterização da transformação de Ribaucour por meio de equações diferenciais quando o espaço ambiente é o \mathbb{H}^3 . Este resultado é uma extensão natural da caracterização da transformação de Ribaucour no espaço euclidiano (veja [6]).

Teorema 2.1 ([27]). *Seja M uma superfície orientável em \mathbb{H}^3 . Sejam $e_i, 1 \leq i \leq 2$, campos vetoriais principais ortonormais definidos em M . Uma superfície $\tilde{M} \subset \mathbb{H}^3$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour se, e somente se, para todo $p \in \tilde{M}$, existem uma parametrização $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{M} \subset \mathbb{H}^3$ de uma vizinhança de p e uma função diferenciável $h : U \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, que não se anula, tais que*

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}), \quad (2.1.1)$$

onde X é uma parametrização de um subconjunto aberto de M , N é um campo vetorial normal unitário de M e \tilde{N} é um campo vetorial normal unitário de \tilde{M} dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta - h^2 + 1} \left[\sum_{i=1}^2 2Z_i e_i + (\Delta - h^2 - 1)N - 2hX \right], \quad (2.1.2)$$

com

$$Z_i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda_i}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^2 (Z_i)^2 \quad (2.1.3)$$

e h satisfazendo o sistema de equações diferenciais

$$dZ_j(e_i) + Z_i \omega_{ij}(e_i) - Z_i Z_j \lambda_i = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2 \quad (2.1.4)$$

onde ω_{ij} são as formas de conexão do referencial $\{e_i\}$.

Demonstração. Suponha que \tilde{M} está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 . Por definição, para cada $p \in \tilde{M}$, existem parametrizações locais \tilde{X} e X de uma vizinhança de p e de um subconjunto de M , respectivamente, e existe uma função diferenciável ϕ definida em um aberto U de \mathbb{R}^2 tais que

$$(\cosh \phi)X + (\sinh \phi)N = (\cosh \phi)\tilde{X} + (\sinh \phi)\tilde{N},$$

onde N e \tilde{N} são os campos normais unitários de M e \tilde{M} , respectivamente. Temos que

$$\langle d\tilde{X}(e_i), \tilde{N} \rangle_1 = 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \quad (2.1.5)$$

Seja $h = \tanh \phi$. Assim, $\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N})$ e, portanto,

$$d\tilde{X} = dX + dh(N - \tilde{N}) + h(dN - d\tilde{N}). \quad (2.1.6)$$

A fim de provarmos o teorema, consideraremos \tilde{N} o campo vetorial normal unitário dado por

$$\tilde{N} = \sum_{k=1}^2 b_k e_k + b_3 N + \mu X, \quad (2.1.7)$$

onde

$$\sum_{k=1}^2 (b_k)^2 + (b_3)^2 - \mu^2 = 1. \quad (2.1.8)$$

Tomando a diferencial de (2.1.7), obtemos então

$$\begin{aligned}
d\tilde{N} &= \sum_{k=1}^2 (db_k e_k + b_k de_k) + db_3 N + b_3 dN + d\mu X + \mu dX \\
&= \sum_{k=1}^2 \left[db_k e_k + b_k \left(\sum_{l=1}^2 \omega_{kl} e_l + \omega_{k3} N + \omega_k X \right) \right] \\
&\quad + db_3 N + b_3 dN + d\mu X + \mu \sum_{k=1}^2 \omega_k e_k.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Usando o Lema 1.3, segue que

$$\begin{aligned}
d\tilde{N}(e_i) &= \sum_{k=1}^2 \left(db_k(e_i) + \sum_{l=1}^2 b_l \omega_{lk}(e_i) \right) e_k + \left(\sum_{k=1}^2 b_k \omega_{k3}(e_i) + db_3(e_i) \right) N \\
&\quad + (d\mu(e_i) + b_i)X + b_3 dN(e_i) + \mu e_i \\
&= \sum_{k=1}^2 \left(db_k(e_i) + \sum_{l=1}^2 b_l \omega_{lk}(e_i) + \mu \delta_{ik} + b_3 \lambda_k \delta_{ik} \right) e_k \\
&\quad + (db_3(e_i) - \lambda_i b_i)N + (d\mu(e_i) + b_i)X.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

De (2.1.6), obtemos

$$\begin{aligned}
d\tilde{X}(e_i) &= dX(e_i) + dh(e_i)(N - \tilde{N}) + h(dN(e_i) - d\tilde{N}(e_i)) \\
&= e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}) + h(\lambda_i e_i - d\tilde{N}(e_i)) \\
&= (1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}) - hd\tilde{N}(e_i).
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Substituindo (2.1.7) e (2.1.11) em (2.1.5), encontramos

$$(1 + h\lambda_i)b_i + dh(e_i)(b_3 - 1) = 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \tag{2.1.12}$$

Agora, provaremos a seguinte afirmação: $1 + h\lambda_i \neq 0$ para todo i . Consideraremos, pois, a variedade central $X^0 = (X + hN) \cosh \phi$. Então,

$$\begin{aligned}
dX^0(e_i) &= (dX(e_i) + dh(e_i)N + hdN(e_i)) \cosh \phi + (X + hN) \sinh \phi d\phi(e_i) \\
&= (e_i + dh(e_i)N + h\lambda_i e_i) \cosh \phi + (X + hN) \sinh \phi d\phi(e_i) \\
&= [(1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)N] \cosh \phi + (X + hN) \sinh \phi d\phi(e_i).
\end{aligned}$$

Porém, $h = \operatorname{tgh} \phi$, então $dh = \operatorname{sech}^2 \phi d\phi$, isto é, $d\phi = \cosh^2 \phi dh$. Portanto,

$$dX^0(e_i) = [(1 + h\lambda_i) \cosh \phi] e_i + [N + (X + hN) \operatorname{senh} \phi \cosh \phi] \cosh \phi dh(e_i).$$

Suponha, por contradição, que $(1 + h\lambda_i)(u^0) = 0$ para algum u^0 . Então, obtemos de (2.1.12) que $(b_3 - 1)dh(e_i)(u^0) = 0$ e, conseqüentemente, $dh(e_i)(u^0) = 0$. Caso contrário, $b_3(u^0) = 1$ implicaria em $\tilde{N}(u^0) = N(u^0)$, daí $\tilde{X}(u^0) = X(u^0) = X^0(u^0)$, o que significaria que $\phi(u^0) = 0$, uma contradição. Sendo assim, devemos ter $dh(e_i)(u^0) = 0$ e $dX^0(e_i)(u^0) = 0$, mas, isto também é uma contradição, pois X^0 é uma subvariedade bidimensional. O que nos permite concluir que $1 + h\lambda_i \neq 0$ para todo i .

Pela equação (2.1.12), vemos o seguinte

$$b_i = \frac{dh(e_i)}{1 + h\lambda_i} (1 - b_3) = Z_i(1 - b_3). \quad (2.1.13)$$

Além disso, a condição $\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle_1 = 0$ fica

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X + h(N - \tilde{N}), \tilde{N} \rangle_1 = \langle X, \tilde{N} \rangle_1 + h(\langle N, \tilde{N} \rangle_1 - \langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle_1) \\ &= \left\langle X, \sum_{k=1}^2 b_k e_k + b_3 N + \mu X \right\rangle_1 + h \left(\left\langle N, \sum_{k=1}^2 b_k e_k + b_3 N + \mu X \right\rangle_1 - 1 \right) \\ &= \mu \langle X, X \rangle_1 + h(b_3 \langle N, N \rangle_1 - 1) = -\mu + h(b_3 - 1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu = h(b_3 - 1). \quad (2.1.14)$$

Ao substituirmos $\Delta := \sum_{k=1}^2 (Z_k)^2$ e as equações (2.1.13), (2.1.14) em (2.1.8), obtemos

$$b_3 = \frac{\Delta - h^2 - 1}{\Delta - h^2 + 1}. \quad (2.1.15)$$

Uma conta simples, explicitada na prova do Teorema 2.2, permite-nos ver que de fato \tilde{N} é dado como em (2.1.2).

Agora, expressamos $d\tilde{N}(e_i)$ da seguinte forma

$$d\tilde{N}(e_i) = \sum_{k=1}^2 L_i^k e_k + L_i^3 N + q_i X. \quad (2.1.16)$$

Por (2.1.10), obtemos

$$L_i^k = db_k(e_i) + \sum_{l=1}^2 b_l \omega_{lk}(e_i) + \mu \delta_{ik} + b_3 \lambda_k \delta_{ik}, \quad (2.1.17)$$

$$L_i^3 = db_3(e_i) - \lambda_i b_i, \quad (2.1.18)$$

$$q_i = d\mu(e_i) + b_i. \quad (2.1.19)$$

Sabemos que \tilde{X} preserva linhas de curvatura, ou seja, os campos $d\tilde{X}(e_i)$ são direções principais ortogonais. Então, para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq 2$, são válidas as relações

$$\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 = \langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 = \langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{N}(e_j) \rangle_1 = 0.$$

Usando as equações (2.1.11) e (2.1.16), deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 = \langle d\tilde{N}(e_i), (1 + h\lambda_j)e_j + dh(e_j)N - dh(e_j)\tilde{N} - hd\tilde{N}(e_j) \rangle_1 \\ &= \langle d\tilde{N}(e_i), (1 + h\lambda_j)e_j + dh(e_j)N \rangle_1 = \left\langle \sum_{k=1}^2 L_i^k e_k + L_i^3 + q_i X, (1 + h\lambda_j)e_j + dh(e_j)N \right\rangle_1 \\ &= L_i^j (1 + h\lambda_j) + L_i^3 dh(e_j), \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Como $1 + h\lambda_j \neq 0$, segue-se que

$$L_i^j + L_i^3 Z_j = 0, \quad i \neq j. \quad (2.1.20)$$

Usando (2.1.16), vemos também que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{N}(e_j) \rangle_1 = \left\langle \sum_{k=1}^2 L_i^k e_k + L_i^3 N + q_i X, \sum_{k=1}^2 L_j^k e_k + L_j^3 N + q_j X \right\rangle_1 \\ &= \sum_{k=1}^2 L_i^k L_j^k + L_i^3 L_j^3 - q_i q_j. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Diferenciando (2.1.13) obtemos a relação

$$db_j = dZ_j(1 - b_3) - Z_j db_3, \quad 1 \leq j \leq 2. \quad (2.1.22)$$

Substituindo (2.1.13), (2.1.17), (2.1.18) e (2.1.20) em (2.1.22), temos, para $i \neq j$, que

$$0 = dZ_j(e_i)(1 - b_3) - Z_j db_3(e_i) - db_j(e_i)$$

$$\begin{aligned}
&= dZ_j(e_i)(1 - b_3) - Z_j db_3(e_i) - L_i^j + \sum_{l=1}^2 b_l \omega_{lj}(e_i) + \mu \delta_{ij} + b_3 \lambda_j \delta_{ij} \\
&= dZ_j(e_i)(1 - b_3) - Z_j db_3(e_i) + L_i^3 Z_j + \sum_{l=1}^2 Z_l (1 - b_3) \omega_{lj}(e_i) \\
&= dZ_j(e_i)(1 - b_3) - Z_j db_3(e_i) + (db_3(e_i) - \lambda_i b_i) Z_j + \sum_{l=1}^2 Z_l (1 - b_3) \omega_{lj}(e_i) \\
&= dZ_j(e_i)(1 - b_3) - \lambda_i Z_i (1 - b_3) Z_j + \sum_{l=1}^2 Z_l (1 - b_3) \omega_{lj}(e_i) \\
&= (1 - b_3) \left(dZ_j(e_i) + \sum_{l=1}^2 Z_l \omega_{lj}(e_i) - \lambda_i Z_i Z_j \right).
\end{aligned}$$

Com isso, temos as equações diferenciais em (2.1.4). O que prova uma das direções do Teorema 2.1.

Reciprocamente, suponha que h é uma solução de (2.1.4) que não se anula. Motivados pelo que vimos, definimos as funções Z_i e Δ por (2.1.3), b_i , μ , b_3 e \tilde{N} por (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15) e (2.1.7), respectivamente. Observamos inicialmente que

$$\sum_{k=1}^2 (b_k)^2 + (b_3)^2 - \mu^2 = (1 - b_3)^2 (Z_1^2 + Z_2^2) + (b_3)^2 - \mu^2 = (1 - b_3)^2 \Delta + (b_3)^2 - \mu^2 = 1,$$

onde \tilde{N} é um campo vetorial unitário. Queremos mostrar que \tilde{X} , como em (2.1.1), está associada a X por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 . Assumimos, sem perda de generalidade, que $h(x) \in (0, +\infty)$, para todo $x \in U$, uma vez que a função h não se anula. Além disso, tomamos a função diferenciável $\phi := \operatorname{arctgh} h$. Daí, pela equação (2.1.1) temos que, de fato,

$$\tilde{X} = X + \operatorname{tgh} \phi (N - \tilde{N}),$$

isto é, $\tilde{X}(\cosh \phi) + (\sinh \phi) \tilde{N} = X(\cosh \phi) + (\sinh \phi) N$, o que verifica a condição (i) da Definição 2.4. Das relações em (2.1.1), (2.1.7) e (2.1.14), constatamos facilmente que $\langle \tilde{N}, \tilde{X} \rangle_1 = 0$. Também podemos concluir, pela definição de \tilde{X} , que $d\tilde{X}(e_i)$ é dada por (2.1.11). Consequentemente, usando as expressões já conhecidas de \tilde{N} e b_i , dadas em (2.1.7), (2.1.13), respectivamente, e a hipótese em (2.1.3), temos que

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{X}(e_i), \tilde{N} \rangle_1 &= \langle (1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}) - h d\tilde{N}(e_i), \tilde{N} \rangle_1 \\
&= \left\langle (1 + h\lambda_i)e_i, \sum_{k=1}^2 b_k e_k + b_3 N + \mu X \right\rangle_1 + dh(e_i) (\langle N, \tilde{N} \rangle_1) - h \langle d\tilde{N}(e_i), \tilde{N} \rangle_1 \\
&= (1 + h\lambda_i)b_i + dh(e_i)(b_3 - 1) = -(1 + h\lambda_i)Z_i(b_3 - 1) + dh(e_i)(b_3 - 1)
\end{aligned}$$

$$= [-(1 + h\lambda_i)Z_i + dh(e_i)](b_3 - 1) = 0,$$

o que nos mostra que \tilde{N} é um campo normal unitário de \tilde{X} em \mathbb{H}^3 . Por (2.1.15),

$$\begin{aligned} db_3(e_i) &= d\left(\frac{\Delta - h^2 - 1}{\Delta - h^2 + 1}\right)(e_i) \\ &= \frac{(d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i))(\Delta - h^2 + 1) - (d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i))(\Delta - h^2 - 1)}{(\Delta - h^2 + 1)^2} \\ &= \frac{d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i) + d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i)}{(\Delta - h^2 + 1)^2} = \frac{2d\Delta(e_i) - 4hdh(e_i)}{(\Delta - h^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Daí, por (2.1.13),

$$\begin{aligned} db_j(e_i) &= dZ_j(e_i)(1 - b_3) - Z_j db_3(e_i) \\ &= \frac{2dZ_j(e_i)}{\Delta - h^2 + 1} - \frac{2Z_j[d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i)]}{(\Delta - h^2 + 1)^2}, \quad 1 \leq i, j \leq 2. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Diferenciando a expressão de μ em (2.1.14), usando (2.1.15) e (2.1.23), obtemos

$$\begin{aligned} d\mu(e_i) &= dh(e_i)(b_3 - 1) + hdb_3(e_i) \\ &= -\frac{2dh(e_i)}{\Delta - h^2 + 1} + \frac{2h[d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i)]}{(\Delta - h^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Agora, usando (2.1.16)-(2.1.19) e as expressões calculadas anteriormente, encontramos

$$\begin{aligned} L_i^1 &= db_i(e_i) + \mu + \sum_{k=1}^2 b_k \omega_{ki}(e_i) + b_3 \lambda_i \\ &= \frac{2dZ_i(e_i)}{\Delta - h^2 + 1} - \frac{2Z_i[d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i)]}{(\Delta - h^2 + 1)^2} \\ &\quad - \frac{2h}{\Delta - h^2 + 1} + \frac{\sum_{k=1}^2 2Z_k \omega_{ki}(e_i)}{\Delta - h^2 + 1} + \frac{(\Delta - h^2 - 1)\lambda_i}{\Delta - h^2 + 1}, \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

$$\begin{aligned} L_i^3 &= db_3(e_i) - \lambda_i b_i \\ &= \frac{2d\Delta(e_i) - 4hZ_i(1 + h\lambda_i)}{(\Delta^2 - h^2 + 1)^2} - \frac{2\lambda_i Z_i}{\Delta - h^2 + 1} \\ &= \frac{2d\Delta(e_i)}{(\Delta - h^2 + 1)^2} - \frac{2[2hZ_i + (\Delta + h^2 + 1)\lambda_i Z_i]}{(\Delta - h^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Consequentemente, segue-se de (2.1.19), (2.1.13), (2.1.15), (2.1.25) e (2.1.27) (e observando por (2.1.3) que $dh(e_i) = Z_i(1 + h\lambda_i)$), que

$$\begin{aligned} q_i &= d\mu(e_i) + b_i \\ &= -\frac{2dh(e_i) - 2Z_i}{\Delta - h^2 + 1} + \frac{2h[d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i)]}{(\Delta - h^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-(2dh(e_i) - 2Z_i)}{\Delta - h^2 + 1} - \frac{4h^2Z_i(1 + h\lambda_i)}{(\Delta - h^2 + 1)^2} + hL_i^3 + \frac{2h[2hZ_i + (\Delta + h^2 + 1)\lambda_iZ_i]}{(\Delta - h^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$q_i = hL_i^3. \quad (2.1.28)$$

Segue de (2.1.4), (2.1.26) e (2.1.27) que

$$\begin{aligned} Z_iL_i^i &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} \left[Z_i dZ_i(e_i) + Z_i \sum_{k=1}^2 Z_k \omega_{ki}(e_i) \right] \\ &\quad - \frac{(Z_i)^2 (d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i))}{(\Delta - h^2 + 1)^2} + \frac{Z_i[-2h + (\Delta - h^2 - 1)\lambda_i]}{\Delta - h^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} \left[Z_i dZ_i(e_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 Z_l \omega_{lk}(e_i) + dZ_k(e_i) - Z_k Z_i \lambda_i \right) \right] \\ &\quad - \frac{2(Z_i)^2 (d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i))}{(\Delta - h^2 + 1)^2} + \frac{Z_i[-2h + (\Delta - h^2 - 1)\lambda_i]}{\Delta - h^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} \left[\frac{d\Delta(e_i)}{2} - (\Delta - (Z_i)^2)Z_i \lambda_i \right] \\ &\quad - \frac{2(Z_i)^2 (d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i))}{(\Delta - h^2 + 1)^2} + \frac{Z_i[-2h + (\Delta - h^2 - 1)\lambda_i]}{\Delta - h^2 + 1} \\ &= \frac{\Delta - h^2 + 1}{2} \left[L_i^3 - \frac{2(-2hZ_i - (\Delta - h^2 + 1)\lambda_i Z_i)}{(\Delta - h^2 + 1)^2} \right] \\ &\quad - \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} (\Delta - (Z_i)^2)Z_i \lambda_i - (Z_i)^2 \left(L_i^3 + \frac{2\lambda_i Z_i}{\Delta - h^2 + 1} \right) \\ &\quad + \frac{Z_i[-2h + (\Delta - h^2 - 1)\lambda_i]}{\Delta - h^2 + 1}. \end{aligned}$$

Decorre disto que

$$Z_iL_i^i = \left[\frac{\Delta - h^2 + 1}{2} - (Z_i)^2 \right] L_i^3. \quad (2.1.29)$$

Por outro lado, também podemos a partir das relações em (2.1.4), (2.1.17), (2.1.24) e (2.1.27) deduzir a equação (2.1.20). Daí, usando (2.1.20), (2.1.28) e (2.1.29), verificamos, para todo

$i \neq j$, que

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{N}(e_j) \rangle_1 &= L_i^i L_j^i + L_i^j L_j^j + \sum_{k \neq i, j} L_i^k L_j^k + L_i^3 L_j^3 - q_i q_j \\
&= -Z_i L_i^i L_j^3 - Z_j L_j^j L_i^3 + \sum_{k \neq i, j} (Z_k)^2 L_i^3 L_j^3 + L_i^3 L_j^3 - h^2 L_i^3 L_j^3 \\
&= \left[(Z_i)^2 + (Z_j)^2 - 2 \frac{\Delta - h^2 + 1}{2} \right] L_i^3 L_j^3 + \sum_{k \neq i, j} (Z_k)^2 L_i^3 L_j^3 + L_i^3 L_j^3 - h^2 L_i^3 L_j^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, com a igualdade acima e as relações (2.1.11) e (2.1.20), vemos, para $i \neq j$, que

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 &= \langle d\tilde{N}(e_i), (1 + h\lambda_j)e_j + dh(e_j)N \rangle_1 \\
&= L_i^j (1 + h\lambda_j) + L_i^3 dh(e_j) = (1 + h\lambda_j)(L_i^j + L_i^3 Z_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por fim, quando $i \neq j$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 &= (1 + h\lambda_i) \langle e_i, d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 + dh(e_i) \langle N, d\tilde{X}(e_j) \rangle_1 \\
&= -(1 + h\lambda_i) [dh(e_j)b_i + hL_j^i] + dh(e_i) [dh(e_j)(1 - b_3) - hL_j^3] \\
&= -(1 + h\lambda_i) [dh(e_j)Z_i(1 - b_3) - hZ_i L_j^3 - Z_i(1 - b_3)dh(e_j) + Z_i hL_j^3] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Definimos então a aplicação $\psi : X(U) \rightarrow \tilde{X}(U)$ dada por

$$X(p) \mapsto \tilde{X}(p).$$

Já vimos que os itens (i) e (iii) da Definição 2.4 são satisfeitos.

Agora, mostraremos que o item (ii) também vale. Seja $X^0 = (X + hN) \cosh \phi$. Assim,

$$dX^0(e_i) = [(1 + h\lambda_i) \cosh \phi] e_i + (N + (X + hN) \sinh \phi \cosh \phi) \cosh \phi dh(e_i).$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
|dX^0(e_i)|^2 &= [(\cosh \phi + h \sinh \phi \cosh^2 \phi)^2 + \sinh^2 \phi \cosh^4 \phi] (dh(e_i))^2 + (1 + h\lambda_i)^2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\{\cosh(\phi(X(p)))X(p) + \sinh(\phi(X(p)))N(p); p \in U\}$ é de fato uma subvariedade bidimensional. O que finaliza a prova de que \tilde{M} está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 . \square

A equação diferencial (2.1.4) é não-linear e de segunda ordem. Apesar disso, a proposição a seguir nos mostra como o problema de se obter a função h pode ser linearizado.

Proposição 2.1 ([27]). *Se h é uma solução de (2.1.4), que não se anula em um domínio simplesmente conexo, então $h = \frac{\Omega}{W}$, onde W é uma função não nula e as funções Ω , W e Ω_i , $i = 1, 2$, satisfazem o seguinte sistema*

$$\begin{cases} d\Omega_i(e_j) = \Omega_j \omega_{ij}(e_j), & i \neq j, \\ d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \\ dW = - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \lambda_i \omega_i. \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Reciprocamente, se o sistema (2.1.30) está satisfeito para as funções Ω , Ω_i e W , com $W \neq 0$, então $h = \frac{\Omega}{W}$ é uma solução de (2.1.4).

Demonstração. Seja h uma solução que não se anula de (2.1.4), afirmamos que a 1-forma

$$\psi = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 Z_k \omega_k$$

é fechada. De fato, tomando a derivada exterior de ψ e usando as equações em (2.1.3) e (2.1.4), vemos que

$$\begin{aligned} d\psi &= d\left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 Z_k \omega_k\right) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{dZ_k h - Z_k dh}{h^2} \wedge \omega_k + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 Z_k d\omega_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \frac{1}{h} dZ_i(e_j) \omega_j - \frac{dh(e_j)}{h^2} \omega_j \right] \wedge \omega_i + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_k \omega_{ki}(e_j) \omega_j \wedge \omega_i \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{1}{h} dZ_i(e_j) - \frac{dh(e_j)}{h^2} \right] \omega_j \wedge \omega_i + \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 Z_k \omega_{ki}(e_j) \right] \omega_j \wedge \omega_i \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{1}{h} dZ_i(e_j) - \frac{dh(e_j)}{h^2} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{h} Z_k \omega_{ki}(e_j) \right] \omega_j \wedge \omega_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo ψ uma 1-forma fechada sobre um domínio simplesmente conexo, segue-se que ψ é exata. Logo, existe uma função diferenciável Ω tal que $d(\log \Omega) = \psi$. Consequentemente,

$$\frac{d\Omega(e_i)}{\Omega} = \psi(e_i),$$

isto é,

$$d\Omega(e_i) = \frac{\Omega}{h} \left[\sum_{k=1}^2 Z_k \omega_k(e_i) \right] = \frac{\Omega}{h} Z_i.$$

Como h é uma solução que não se anula de (2.1.4), então podemos considerar Ω como visto acima e definir

$$\Omega_i = d\Omega(e_i) \quad \text{e} \quad W = \frac{\Omega}{h}. \quad (2.1.31)$$

Daí, obtemos

$$dh(e_i) = \frac{\Omega_i}{W} \left(1 + \frac{\Omega \lambda_i}{W} \right), \quad 1 + h\lambda_i = 1 + \frac{\Omega \lambda_i}{W}, \quad (2.1.32)$$

$$\Delta = \frac{1}{W^2} \sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2, \quad Z_i = \frac{\Omega_i}{W}. \quad (2.1.33)$$

Com isso, as equações diferenciais em (2.1.4) são reescritas como no sistema (2.1.30):

$$d\Omega_i(e_j) = \Omega_j \omega_{ij}(e_j), \quad i \neq j, \quad (2.1.34)$$

$$d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \quad (2.1.35)$$

$$dW = - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \lambda_i \omega_i, \quad (2.1.36)$$

$$h = \frac{\Omega}{W}. \quad (2.1.37)$$

Reciprocamente, se (2.1.30) é satisfeito, tomando $Z_i = \frac{\Omega_i}{W}$, obtemos o sistema (2.1.4). Definindo ainda $h = \frac{\Omega}{W}$, concluímos que $dh(e_i) = Z_i(1 + h\lambda_i)$. □

Tendo em vista o estudo que faremos no Capítulo 3, reescreveremos o Teorema 2.1 na forma seguinte:

Teorema 2.2 ([27]). *Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície orientável parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. Suponha que e_1, e_2 sejam direções principais ortonormais e N um campo vetorial normal unitário em M tal que $dN(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq 2$. Uma superfície \tilde{M} está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 se, e somente se, para todo $p \in \tilde{M}$, existem um subconjunto aberto $V \subset U$, funções diferenciáveis não-nulas $W, \Omega, \Omega_i : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ que são soluções do sistema (2.1.30), satisfazendo*

$$WS(W + \lambda_i \Omega)(S - \Omega T_i) \neq 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq 2,$$

com

$$S = \sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 - \Omega^2 + W^2 \quad (2.1.38)$$

e $\tilde{X} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{M}$ uma parametrização de \tilde{M} dada por

$$\tilde{X} = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right).$$

Além disso, a aplicação normal de \tilde{X} é dada por

$$\tilde{N} = N + \frac{2W}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN - \Omega X\right), \quad (2.1.39)$$

e as curvaturas principais, $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq 2$, de \tilde{X} , são dadas por

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{WT_i + \lambda_i S}{S - \Omega T_i}, \quad (2.1.40)$$

sendo

$$T_i = 2 \left(d\Omega_i(e_i) + \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - W\lambda_i - \Omega \right). \quad (2.1.41)$$

Demonstração. Por meio das equações (2.1.7), (2.1.13), (2.1.14) e (2.1.15), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \sum_{i=1}^2 b_i e_i + b_3 N + \mu X \\ &= \sum_{i=1}^2 Z_i (1 - b_3) e_i + b_3 N + (b_3 - 1) hX \\ &= (1 - b_3) \left(\sum_{i=1}^2 Z_i e_i - hX \right) + b_3 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} \left(\sum_{i=1}^2 Z_i e_i - hX \right) + \frac{\Delta - h^2 - 1}{\Delta - h^2 + 1} N \\
&= \frac{1}{\Delta - h^2 + 1} \left[2 \sum_{i=1}^2 Z_i e_i - 2hX + (\Delta - h^2 - 1)N \right].
\end{aligned}$$

Seja $S = \sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2 - \Omega^2 + W^2$. De posse da relação descrita anteriormente, substituindo na

mesma as expressões $\Delta = \frac{1}{W^2} \sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2$, $Z_i = \frac{\Omega_i}{W}$ e $h = \frac{\Omega}{W}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \frac{W^2}{\sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2 - \Omega^2 + W^2} \left[\sum_{i=1}^2 2 \frac{\Omega_i}{W} e_i - \frac{2\Omega}{W} X + \frac{\sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2 - \Omega^2 - W^2}{W^2} N \right] \\
&= \frac{W}{S} \left[2 \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - 2\Omega X + \frac{S - 2W^2}{W} N \right] \\
&= N + \frac{2W}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - \Omega X - WN \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= X - h(\tilde{N} - N) \\
&= X - \frac{\Omega}{W} \left[N + \frac{2W}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - \Omega X - WN \right) - N \right] \\
&= \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S} \right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN \right).
\end{aligned}$$

Sejam X e \tilde{X} parametrizações de M e \tilde{M} . Temos que

$$d\tilde{X} = dX + dh(N - \tilde{N}) + h(dN - d\tilde{N}), \quad (2.1.42)$$

onde $h = \frac{\Omega}{W}$ e \tilde{N} é da forma (2.1.7). As curvaturas principais de \tilde{M} são dadas por

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1}{\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1}. \quad (2.1.43)$$

Como $d\tilde{N}(e_i) = \lambda_i d\tilde{X}(e_i)$, $dN(e_i) = \lambda_i dX(e_i)$, obtemos de (2.1.42) que

$$(1 + h\tilde{\lambda}_i)d\tilde{X}(e_i) = (1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}). \quad (2.1.44)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} (1 + h\tilde{\lambda}_i)^2 \langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1 &= \langle (1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}), (1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)(N - \tilde{N}) \rangle_1 \\ &= (1 + h\lambda_i)^2 + 2(1 + h\lambda_i)dh(e_i)\langle e_i, N - \tilde{N} \rangle_1 \\ &\quad + (dh(e_i))^2 \langle N - \tilde{N}, N - \tilde{N} \rangle_1 \\ &= (1 + h\lambda_i)^2 - 2(1 + h\lambda_i)dh(e_i)\langle e_i, \tilde{N} \rangle_1 + 2(dh(e_i))^2(1 - \langle N, \tilde{N} \rangle_1) \\ &= (1 + h\lambda_i)^2 - 2(1 + h\lambda_i)dh(e_i)Z_i(1 - b_3) + 2(dh(e_i))^2(1 - b_3) \\ &= (1 + h\lambda_i)^2 + 2dh(e_i)(1 - b_3)[-(1 + h\lambda_i)Z_i + dh(e_i)] \\ &= (1 + h\lambda_i)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1 = \frac{(1 + h\lambda_i)^2}{(1 + h\tilde{\lambda}_i)^2}. \quad (2.1.45)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1 &= \left\langle \sum_{k=1}^2 L_i^k e_k + L_i^3 N + q_i X, \frac{1}{1 + h\tilde{\lambda}_i} ((1 + h\lambda_i)e_i + dh(e_i)N) \right\rangle_1 \\ &= \frac{1}{1 + h\tilde{\lambda}_i} ((1 + h\lambda_i)L_i^i + dh(e_i)L_i^3) \\ &= \frac{1 + h\lambda_i}{1 + h\tilde{\lambda}_i} (L_i^i + Z_i L_i^3). \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

Supondo $\Omega_i \neq 0$, temos $dh(e_i) \neq 0$, então, concluímos a partir de (2.1.29) que

$$L_i^i + Z_i L_i^3 = \frac{\Delta - h^2 + 1}{2Z_i} L_i^3,$$

e, por consequência, obtemos

$$\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{N}(e_i) \rangle_1 = \frac{(1 + h\lambda_i)(\Delta - h^2 + 1)}{2(1 + h\tilde{\lambda}_i)Z_i} L_i^3.$$

Combinando (2.1.43), (2.1.45) e a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= \frac{\langle d\tilde{N}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1}{\langle d\tilde{X}(e_i), d\tilde{X}(e_i) \rangle_1} = \frac{(1+h\lambda_i)(\Delta-h^2+1)}{2(1+h\tilde{\lambda}_i)Z_i} L_i^3 \frac{(1+h\tilde{\lambda}_i)^2}{(1+h\lambda_i)^2} \\ &= \frac{(1+h\tilde{\lambda}_i)(\Delta-h^2+1)}{2Z_i(1+h\lambda_i)} L_i^3.\end{aligned}$$

Como $S - \Omega T_i \neq 0$, então

$$2dh(e_i) - h(\Delta - h^2 + 1)L_i^3 \neq 0.$$

Portanto,

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{(\Delta - h^2 + 1)L_i^3}{2dh(e_i) - h(\Delta - h^2 + 1)L_i^3}, \quad (2.1.47)$$

onde L_i^3 é dada por (2.1.27).

Usando (2.1.33), (2.1.37) e (2.1.38), observamos que

$$\begin{aligned}\Delta - h^2 + 1 &= \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 - \frac{\Omega^2}{W^2} + 1 \\ &= \frac{1}{W^2} \left(\sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 - \Omega^2 + W^2 \right) \\ &= \frac{S}{W^2}.\end{aligned}$$

A observação acima junto às expressões de L_i^3 , Z_i , dW e h em (2.1.27), (2.1.33), (2.1.36) e (2.1.37), respectivamente, permitem verificar que

$$\begin{aligned}(\Delta - h^2 + 1)L_i^3 &= \frac{2d\Delta(e_i)}{\Delta - h^2 + 1} - \frac{2[2hZ_i + (\Delta + h^2 + 1)\lambda_i Z_i]}{\Delta - h^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} [d\Delta(e_i) - 2hZ_i - (\Delta + 2h^2 - h^2 + 1)\lambda_i Z_i] \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} [d\Delta(e_i) - 2hZ_i - 2h^2\lambda_i Z_i - (\Delta - h^2 + 1)\lambda_i Z_i] \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} [d\Delta(e_i) - 2hZ_i(1 + h\lambda_i) - (\Delta - h^2 + 1)\lambda_i Z_i] \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} [d\Delta(e_i) - 2hdh(e_i) - (\Delta - h^2 + 1)\lambda_i Z_i] \\ &= \frac{2}{\Delta - h^2 + 1} [d(\Delta - h^2 + 1)(e_i) - (\Delta - h^2 + 1)\lambda_i Z_i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2d[\log(\Delta - h^2 + 1)](e_i) - 2\lambda_i \frac{\Omega_i}{W}, \\
&= 2d \left[\log \left(\frac{S}{W^2} \right) \right] (e_i) + 2 \frac{dW(e_i)}{W} \\
&= 2 \frac{W^2}{S} \left(\frac{dS(e_i)W^2 - 2WdW(e_i)S}{W^4} \right) + 2 \frac{dW(e_i)}{W} \\
&= 2 \frac{dS(e_i)}{S} - 4 \frac{dW(e_i)}{W} + 2 \frac{dW(e_i)}{W} \\
&= 2 \frac{dS(e_i)}{S} - 2 \frac{dW(e_i)}{W}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
2dh(e_i) - h(\Delta - h^2 + 1)L_i^3 &= 2 \frac{\Omega_i}{W} \left(1 + \frac{\Omega\lambda_i}{W} \right) - 2 \frac{\Omega}{W} \left(\frac{dS(e_i)}{S} - \frac{dW(e_i)}{W} \right) \\
&= 2 \frac{\Omega_i}{W} + 2 \frac{\Omega_i}{W^2} \Omega\lambda_i - 2 \frac{\Omega dS(e_i)}{WS} + 2 \frac{\Omega}{W^2} dW(e_i) \\
&= 2 \frac{\Omega_i}{W} - 2 \frac{\Omega dS(e_i)}{WS}.
\end{aligned} \tag{2.1.48}$$

Por hipótese, $WS \neq 0$, portanto, podemos deduzir de (2.1.47), que

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_i &= \frac{2[WdS(e_i) - SdW(e_i)]}{WS} \cdot \frac{WS}{2(S\Omega_i - \Omega dS(e_i))} \\
&= \frac{dS(e_i)W + \Omega_i\lambda_i S}{\Omega_i S - \Omega dS(e_i)}, \quad \text{se } \Omega_i \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.1.49}$$

Afirmamos ainda que

$$dS(e_i) = \Omega_i T_i, \tag{2.1.50}$$

onde

$$T_i = 2(d\Omega_i(e_i) + \Omega_j \omega_{ji}(e_i) - W\lambda_i - \Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
dS(e_i) &= d \left[\frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 - \Omega^2 + W^2 \right] = 2 \left(\sum_{k=1}^2 \Omega_k d\Omega_k - \Omega d\Omega + W dW \right) (e_i) \\
&= 2 (\Omega_i d\Omega_i(e_i) + \Omega_j d\Omega_j(e_i) - \Omega d\Omega(e_i) + W dW(e_i)) \\
&= 2 (\Omega_i d\Omega_i(e_i) + \Omega_j \Omega_i \omega_{ji}(e_i) - \Omega \Omega_i - W \lambda_i \Omega_i)
\end{aligned}$$

$$= 2\Omega_i (d\Omega_i(e_i) + \Omega_j \omega_{ji}(e_i) - \Omega - W\lambda_i) = \Omega_i T_i.$$

Assim, de (2.1.49) e (2.1.50), vemos que as curvaturas principais de \tilde{M} são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \frac{dS(e_i)W + \Omega_i \lambda_i S}{\Omega_i S - \Omega dS(e_i)} = \frac{\Omega_i T_i W + \Omega_i \lambda_i S}{\Omega_i S - \Omega \Omega_i T_i} \\ &= \frac{WT_i + \lambda_i S}{S - \Omega T_i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{se } \Omega_i \neq 0. \end{aligned}$$

Se $\Omega_i \equiv 0$, isto é, $dh(e_i) \equiv 0$, então $Z_i \equiv 0$. Decorre daí e de (2.1.26), que

$$\begin{aligned} L_i^i &= \frac{1}{\Delta - h^2 + 1} \left[\sum_{k=1}^2 2Z_k \omega_{ki}(e_i) - 2h + (\Delta - h^2 - 1)\lambda_i \right] \\ &= \frac{W^2}{S} \left[2 \sum_{k=1}^2 \frac{\Omega_k}{W} \omega_{ki}(e_i) - 2\frac{\Omega}{W} + \frac{S - 2W^2}{W^2} \lambda_i \right] \\ &= \frac{2W}{S} \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{ki}(e_i) - 2\frac{W\Omega}{S} + \lambda_i - 2\frac{W^2}{S} \lambda_i \\ &= \frac{W}{S} 2(\Omega_j \omega_{ji}(e_i) - \Omega - W\lambda_i + d\Omega_i(e_i)) + \lambda_i \\ &= \frac{W}{S} T_i + \lambda_i \\ &= \frac{WT_i + \lambda_i S}{S}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L_i^i = \frac{WT_i + \lambda_i S}{S}. \quad (2.1.51)$$

Logo, segue de (2.1.43), (2.1.45), (2.1.46) e $Z_i \equiv 0$, que

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1 + h\tilde{\lambda}_i}{1 + h\lambda_i} L_i^i.$$

Lembrando que, por hipótese, $W \neq 0$. Finalmente, se $\Omega_i \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \frac{L_i^i}{1 + h\lambda_i - hL_i^i} = \frac{WT_i + \lambda_i S}{S} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Omega}{W} \left(\lambda_i - \frac{WT_i + \lambda_i S}{S} \right)} \\ &= \frac{WT_i + \lambda_i S}{S} \cdot \frac{WS}{WS + \Omega S \lambda_i - \Omega(WT_i + \lambda_i S)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(WT_i + \lambda_i S)W}{W(S - \Omega T_i)} \\
&= \frac{WT_i + \lambda_i S}{S - \Omega T_i}.
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do Teorema 2.2. □

No trabalho [6] prova-se que, para hipersuperfícies M^n do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} que admitem campos vetoriais principais ortonormais, e_i , $i = 1, 2, \dots, n$, um aberto de \mathbb{R}^{n+1} ou de uma esfera \mathbb{S}^n está localmente associado a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_i , $i = 1, 2, \dots, n$. No próximo teorema, forneceremos um resultado análogo para superfícies em \mathbb{H}^3 com base em [27].

Teorema 2.3. *Seja M uma superfície de \mathbb{H}^3 , que admite dois campos vetoriais principais ortonormais e_1, e_2 e N é um campo vetorial normal unitário de M , $dN(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq 2$. Suponha que o quociente $\frac{\Omega}{S}$ não é constante ao longo das linhas de curvatura. Então, o sistema (2.1.30) com a condição algébrica adicional $S = 2b_0\Omega + 2b_1W$, onde S está definida por (2.1.38), é integrável para constantes reais $b_1 \neq 0$ e b_0 . Além disso, a superfície \tilde{M} que está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 , é um subconjunto totalmente umbílico de \mathbb{H}^3 .*

Demonstração. Perceba inicialmente que, para mostrar a integrabilidade do sistema (2.1.30) junto à condição algébrica adicional $S = 2b_0\Omega + 2b_1W$, é suficiente mostrar que o sistema de equações (2.1.35), (2.1.36) e

$$d\Omega_i = \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{ik} + (b_0 + \Omega)\omega_i + (b_1 - W)\omega_{i3} \quad (2.1.52)$$

é integrável. De fato, neste caso, temos

$$d \left(\sum_{k=1}^2 (\Omega_k)^2 - \Omega^2 + W^2 - (2b_0\Omega + 2b_1W) \right) = 0,$$

e, portanto, escolhendo a condição inicial num ponto p_0 tal que $[S - (2b_0\Omega + 2b_1W)](p_0) = 0$, sabemos que $S \equiv 2b_0\Omega + 2b_1W$ num domínio conexo.

Agora, consideramos pois o ideal \mathcal{I} gerado pelas 1-formas

$$\alpha = d\Omega - \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_k,$$

$$\beta = dW - \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{k3},$$

$$\theta_i = d\Omega_i - \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{ik} - (b_0 + \Omega) \omega_i - (b_1 - W) \omega_{i3}.$$

Então,

$$\begin{aligned} d\alpha &= - \sum_{i=1}^2 (d\Omega_i \wedge \omega_i + \Omega_i d\omega_i) = - \sum_{j=1}^2 d\Omega_j \wedge \omega_j - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= - \sum_{j=1}^2 \left(d\Omega_j + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{ij} \right) \wedge \omega_j = - \sum_{j=1}^2 \theta_j \wedge \omega_j, \\ d\beta &= - \sum_{i=1}^2 (d\Omega_i \wedge \omega_{i3} + \Omega_i d\omega_{i3}) = - \sum_{j=1}^2 d\Omega_j \wedge \omega_{j3} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Omega_i \omega_{ij} \wedge \omega_{j3} \\ &= - \sum_{j=1}^2 \left(d\Omega_j - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{ji} \right) \wedge \omega_{j3} = - \sum_{j=1}^2 \theta_j \wedge \omega_{j3}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d\theta_j &= - \sum_{i=1}^2 (d\Omega_i \wedge \omega_{ji} + \Omega_i d\omega_{ji}) - d\Omega \wedge \omega_j \\ &\quad - (b_0 + \Omega) d\omega_j + dW \wedge \omega_{j3} - (b_1 - W) d\omega_{j3} \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left[\theta_i + \sum_{k=1}^2 \Omega_k \omega_{ik} + (b_0 + \Omega) \omega_i + (b_1 - W) \omega_{i3} \right] \wedge \omega_{ji} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \left(\sum_{k=1}^2 \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{j3} \wedge \omega_{3i} + \omega_j \wedge \omega_i \right) \\ &\quad - \left(\alpha + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i \right) \wedge \omega_j - (b_0 + \Omega) \sum_{k=1}^2 \omega_{jk} \wedge \omega_k \\ &\quad + \left(\beta + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3} \right) \wedge \omega_{j3} - (b_1 - W) \sum_{k=1}^2 \omega_{jk} \wedge \omega_{k3} \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left[\theta_i \wedge \omega_{ji} - \sum_{k=1}^2 (\Omega_k \omega_{ik} \wedge \omega_{ji} + \Omega_k \omega_{ji} \wedge \omega_{ik}) - \Omega_i \omega_{j3} \wedge \omega_{3i} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_j \wedge \omega_i - \alpha \wedge \omega_j - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i \wedge \omega_j + \beta \wedge \omega_{j3} + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3} \wedge \omega_{j3} \\ &= - \sum_{i=1}^2 \theta_i \wedge \omega_{ji} - \alpha \wedge \omega_j + \beta \wedge \omega_{j3}. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{I} é fechado sob diferenciação exterior e o sistema (2.1.35), (2.1.36) e (2.1.52) é integrável pelo Teorema de Fröbenius.

A segunda parte consiste em mostrar que a superfície \tilde{M} que está localmente associada a M por essa transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 , tem curvaturas principais constantes e iguais e, portanto, ela é um subconjunto aberto totalmente umbílico de \mathbb{H}^3 . De $S = 2(b_0\Omega + b_1W)$ e (2.1.50), obtemos

$$\Omega_i T_i = dS(e_i) = 2(b_0\Omega_i + b_1 dW(e_i)) = 2b_0\Omega_i - 2b_1\lambda_i\Omega_i.$$

Como $\frac{\Omega}{S}$ não é constante ao longo das linhas de curvatura, segue-se que

$$\begin{aligned} 0 \neq d\left(\frac{\Omega}{S}\right) &= \frac{S\Omega_i - \Omega dS(e_i)}{S^2} \\ &= \frac{\Omega_i(S - \Omega T_i)}{S^2}, \end{aligned}$$

o que implica em $\Omega_i \neq 0$. Logo,

$$T_i = 2b_0 - 2b_1\lambda_i,$$

e, portanto, por (2.1.40), temos

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{W(2b_0 - 2b_1\lambda_i) + 2\lambda_i(b_0\Omega + b_1W)}{2(b_0\Omega + b_1W) - 2\Omega(b_0 - b_1\lambda_i)} = \frac{b_0}{b_1}.$$

Portanto, \tilde{M} é totalmente umbílica. □

A teoria observada até aqui será usada na próxima seção no caso particular em que a superfície M é linear-Weingarten.

2.2 Transformações de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten

Nesta seção, iremos expor os principais resultados acerca da transformação de Ribaucour aplicadas às superfícies linear-Weingarten, não trataremos das demonstrações, apenas discutiremos cada resultado. Ao leitor interessado nas provas, recomendamos [6], [7], [8] e, principalmente, [27].

Uma superfície é dita de Weingarten se existe uma função diferenciável relacionando as suas curvaturas média e gaussiana. Dizemos que M é uma superfície *linear-Weingarten* em \mathbb{H}^3 se as suas curvaturas média H e gaussiana K satisfazem a relação linear

$$\alpha + \beta H + \gamma(K + 1) = 0, \quad (2.2.1)$$

onde α, β, γ são constantes reais, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$, $H = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ e $K = \lambda_1\lambda_2 - 1$.

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para que a transformação de Ribaucour de uma superfície linear-Weingarten no espaço \mathbb{H}^3 seja uma outra superfície deste mesmo tipo. Denotaremos por c a chamada *constante de Ribaucour*.

Teorema 2.4 ([27]). *Seja M uma superfície em \mathbb{H}^3 que admite campos vetoriais principais ortonormais e_1, e_2 . Tome \tilde{M} uma superfície regular associada a M por uma transformação de Ribaucour. Suponha que as funções $\Omega_i \neq 0$, Ω e W satisfaçam a relação algébrica*

$$S = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2), \quad (2.2.2)$$

onde

$$S = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - \Omega^2, \quad (2.2.3)$$

com $c \neq 0$ e α, β e γ constantes tais que $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Então, \tilde{M} é uma superfície linear-Weingarten satisfazendo $\alpha + \beta\tilde{H} + \gamma(\tilde{K} + 1) = 0$ se, e somente se, $\alpha + \beta H + \gamma(K + 1) = 0$ vale para a superfície M , onde K, \tilde{K} e H, \tilde{H} são as curvaturas gaussianas e média de M e \tilde{M} , respectivamente. Além disso, \tilde{M} não tem pontos umbílicos se, e somente se, M não tem pontos umbílicos.

Vimos também há pouco que uma superfície \tilde{M} está localmente associada a M com respeito a um conjunto de campos vetoriais principais ortonormais $\{e_i\}_{i=1}^2$ de M se existirem funções $\Omega_i, i = 1, 2, \Omega$ e W localmente definidas satisfazendo o sistema de equações (2.1.30). Adicionando a condição (2.2.2) ao sistema (2.1.30), vemos que o mesmo é sempre integrável quando começamos com uma superfície linear-Weingarten em \mathbb{H}^3 . Veja:

Teorema 2.5 ([27]). *Seja M uma superfície linear-Weingarten em \mathbb{H}^3 satisfazendo $\alpha + \beta H + \gamma(K + 1) = 0$ e admitindo campos vetoriais principais ortonormais. Então, para qualquer*

constante de Ribaucour $c \neq 0$, o sistema de equações

$$\begin{cases} d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \\ dW = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \\ d\Omega_i = -\Omega_j \omega_{ij} + [(2c\alpha + 1)\Omega - \beta cW] \omega_i - [c\beta\Omega + (2c\gamma - 1)W] \omega_{i3}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

é integrável e a solução é unicamente determinada em um domínio simplesmente conexo U por qualquer condição inicial satisfazendo (2.2.2).

Em notação clássica, caso $M \subset \mathbb{H}^3$ seja uma superfície plana parametrizada por linhas de curvatura ortogonais $X(u_1, u_2)$, então o sistema de equações diferenciais (2.2.4) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = a_i \Omega_i, \\ \frac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda_i a_i \Omega_i, \\ \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \Omega_j, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} = -\frac{1}{a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \Omega_j + 2c(\alpha - \beta \lambda_i) a_i \Omega + [2c\beta + (1 - 2c\gamma) \lambda_i] a_i W, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

onde $i, j = 1, 2$, $a_i = |X_{u_i}|$, $-\lambda_i$ são as curvaturas principais de M e c é uma constante real não nula (a constante de Ribaucour).

Teorema 2.6 ([27]). *Seja M uma superfície linear-Weingarten em \mathbb{H}^3 com $\alpha + \beta H + \gamma(K + 1) = 0$, que admite campos vetoriais principais ortonormais e_1, e_2 . Suponha que M está localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{H}^3$. Sendo assim, qualquer superfície parametrizada linear-Weingarten em \mathbb{H}^3 , localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1 e e_2 , como no Teorema 2.4, é dada por*

$$\tilde{X} = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right), \quad (2.2.6)$$

onde Ω , Ω_i , $i = 1, 2$, e W são soluções do sistema (2.2.4) e (2.2.2). Além disto, \tilde{X} está definida em

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U; T^2 + 2TQH + Q^2(K + 1) \neq 0\} \quad (2.2.7)$$

onde $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2$.

Para uso posterior, fixaremos o resultado da primeira forma fundamental e as curvaturas principais de uma superfície linear-Weingarten \tilde{M} obtida, por meio de uma transformação de Ribaucour, de uma outra superfície linear-Weingarten M .

Proposição 2.2 ([20]). *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície linear-Weingarten satisfazendo $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$. Se \tilde{M} está associada a M por uma transformação de Ribaucour como no Teorema 2.6, então a primeira forma fundamental de \tilde{M} é dada por $\tilde{I} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$, onde*

$$\tilde{\omega}_i = \pm \frac{(\gamma - \alpha h^2) + (2\beta h^2 + 2\gamma h)\lambda_i}{\alpha h^2 + 2\beta h + \gamma} \omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.8)$$

com $h = \frac{\Omega}{W}$, e as suas curvaturas principais, $-\lambda_i$, são dadas por

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{2\alpha\Omega W + \beta W^2 + \lambda_i(\alpha\Omega^2 - \gamma W^2)}{2\gamma\Omega W + \beta\Omega^2} \lambda_i - (\alpha\Omega^2 - \gamma W^2), \quad i = 1, 2. \quad (2.2.9)$$

2.3 Transformações de Ribaucour para superfícies planas

A fim de estudarmos uma teoria para a transformação de Ribaucour de superfícies planas do espaço hiperbólico tridimensional, consideraremos M uma superfície plana em \mathbb{H}^3 parametrizada por linhas de curvatura e cuja parametrização, $X(u_1, u_2)$, seja regular na vizinhança de todo ponto não-umbílico. As horosferas são superfícies planas de \mathbb{H}^3 cujos pontos umbílicos não são isolados. Por este motivo, elas serão desconsideradas da nossa análise

O resultado seguinte afirma que em uma vizinhança de um ponto não-umbílico sempre existe uma parametrização por linhas de curvatura onde a primeira e a segunda formas fundamentais são dadas em termos de uma função harmônica ϕ , i.e., $\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0$.

Proposição 2.3 ([10]). *Uma superfície plana M em \mathbb{H}^3 admite, longe dos pontos umbílicos, uma parametrização por linhas de curvatura, $X(u_1, u_2)$, com primeira e segunda formas fundamentais dadas por*

$$I = \cosh^2 \phi(u_1, u_2) du_1^2 + \sinh^2 \phi(u_1, u_2) du_2^2, \quad II = \pm \frac{1}{2} \sinh(2\phi(u_1, u_2)) (du_1^2 + du_2^2),$$

onde $\phi(u_1, u_2)$ é uma função harmônica positiva.

Demonstração. A prova segue o mesmo roteiro apresentado no livro-texto [26], página 8, Teorema 2.4 e página 15, Corolário 2.7. \square

Os exemplos mais simples de superfícies planas em \mathbb{H}^3 são aquelas associadas às funções harmônicas lineares $\phi = b$, com $b \neq 0$, $\phi = bu_1$ e $\phi = bu_2$ com $b \neq 0, 1$. Observamos que quando $\phi = u_2$, a superfície plana de \mathbb{H}^3 correspondente não é de rotação e chama-se *frente de pêssago* (veja [17], [21]).

O teorema a seguir sintetiza a teoria apresentada na seção anterior sobre a transformação de Ribaucour aplicada às superfícies linear-Weingarten, aplicando-a, neste caso, às superfícies planas do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Com isso, restringiremo-nos ao caso em que $\alpha = -\gamma = 1$, $\beta = 0$.

Teorema 2.7 ([10], [27]). *Seja M uma superfície plana em \mathbb{H}^3 , que admite campos vetoriais principais ortonormais e_1 e e_2 . Então, para qualquer constante $c \notin \{0, 1\}$, o sistema de equações*

$$\begin{cases} d\Omega = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \\ dW = \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \\ d\Omega_i = \Omega_j \omega_{ij} + c\Omega \omega_i - cW \omega_{i3}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

é integrável. Além disso, qualquer solução do sistema acima, em um domínio simplesmente conexo, cuja condição inicial satisfaz

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2), \quad (2.3.2)$$

também satisfaz (2.3.2) identicamente. Se M é localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, e as funções Ω, W são uma solução não trivial do sistema (2.3.1) satisfazendo (2.3.2), então, cada superfície da família

$$\tilde{X} = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S} \right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN \right), \quad (2.3.3)$$

onde

$$S = (c - 1)(\Omega^2 - W^2), \quad (2.3.4)$$

é uma superfície plana. Além disso, \tilde{X} está localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour e é regular sob o seguinte conjunto

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U; (W^2 - \Omega^2)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_1 \Omega W)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_2 \Omega W) \neq 0\}, \quad (2.3.5)$$

onde $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$ são as curvaturas principais de M .

Demonstração. Em primeiro lugar, vamos provar que o sistema (2.3.1) é integrável e a solução é unicamente determinada em um domínio simplesmente conexo por qualquer condição inicial satisfazendo (2.3.4). Consideramos o ideal \mathcal{I} gerado pelas 1-formas:

$$\begin{aligned}\theta &= d\Omega - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i, \\ \mu &= dW - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3}, \\ \theta_i &= d\Omega_i - \Omega_j \omega_{ij} - c\Omega \omega_i + cW \omega_{i3}, \quad i \neq j.\end{aligned}$$

Temos que

$$d\theta = -\sum_{i=1}^2 \theta_i \wedge \omega_i \quad \text{e} \quad d\mu = -\sum_{i=1}^2 \theta_i \wedge \omega_{i3}.$$

Para $i \neq j$ e com auxílio das equações (1.2.4), (1.2.5), (2.0.1), (2.0.2), vemos que

$$\begin{aligned}d\theta_i &= d(d\Omega_i - \Omega_j \omega_{ij} - c\Omega \omega_i + cW \omega_{i3}) \\ &= -(d\Omega_j \wedge \omega_{ij} + \Omega_j d\omega_{ij}) - c(d\Omega \wedge \omega_i + \Omega d\omega_i) + c(dW \wedge \omega_{i3} + W d\omega_{i3}) \\ &= -(\theta_j + \Omega_i \omega_{ji} + c\Omega \omega_j - cW \omega_{j3}) \wedge \omega_{ij} - \Omega_j (\omega_{i3} \wedge \omega_{3j} + \omega_i \wedge \omega_j) \\ &\quad - c \left(\theta + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i \right) \wedge \omega_i - c\Omega d\omega_i + c \left(\mu + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3} \right) \wedge \omega_{i3} + cW d\omega_{i3} \\ &= -\theta_j \wedge \omega_{ij} - c\Omega \omega_j \wedge \omega_{ij} + cW \omega_{j3} \wedge \omega_{ij} - \Omega_j \omega_{i3} \wedge \omega_{3j} - \Omega_j \omega_i \wedge \omega_j \\ &\quad - c\theta \wedge \omega_i - c\Omega_j \omega_j \wedge \omega_i - c\Omega \omega_j \wedge \omega_{ji} + c\mu \wedge \omega_{i3} + c\Omega_j \omega_{j3} \wedge \omega_{i3} + cW \omega_{ij} \wedge \omega_{j3} \\ &= -\theta_j \wedge \omega_{ij} - c\omega_{i3} \wedge \mu + c\omega_i \wedge \theta - \Omega_j \omega_{i3} \wedge \omega_{3j} \\ &\quad + c\Omega_j \omega_{i3} \wedge \omega_{3j} - \Omega_j \omega_i \wedge \omega_j + c\Omega_j \omega_i \wedge \omega_j \\ &= -\theta_j \wedge \omega_{ij} - c\omega_{i3} \wedge \mu + c\omega_i \wedge \theta + (c-1)\Omega_j (\omega_{i3} \wedge \omega_{3j} + \omega_i \wedge \omega_j) \\ &= -\theta_j \wedge \omega_{ij} - c\omega_{i3} \wedge \mu + c\omega_i \wedge \theta + (c-1)\Omega_j (-\lambda_i \omega_i \wedge \lambda_j \omega_j + \omega_i \wedge \omega_j) \\ &= -\theta_j \wedge \omega_{ij} - c\omega_{i3} \wedge \mu + c\omega_i \wedge \theta,\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, pois M é uma superfície plana de \mathbb{H}^3 . Segue-se que ideal \mathcal{I} é fechado sob a diferenciação exterior, o que implica na integrabilidade do sistema (2.3.1). Além disso, se o sistema (2.3.1) é satisfeito, então $d[S - (c-1)P] = 0$. Consequentemente, $S - (c-1)P$ é uma função constante, onde S está definida por (2.3.4) e

P por

$$P := \Omega^2 - W^2. \quad (2.3.6)$$

Pela definição de S em (2.3.4) e pela relação adicional (2.3.2), vemos que

$$S = (c-1)(\Omega^2 - W^2) = c(\Omega^2 - W^2) - (\Omega^2 - W^2) = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 - \Omega^2.$$

Utilizando as expressões do sistema (2.3.1), obtemos, de fato,

$$\begin{aligned} d[S - (c-1)]P &= dS - (c-1)dP \\ &= 2\Omega_1 d\Omega_1 + 2\Omega_2 d\Omega_2 + 2WdW - 2\Omega d\Omega - (c-1)(2\Omega d\Omega - 2WdW) \\ &= 2\Omega_1 d\Omega_1 + 2\Omega_2 d\Omega_2 + 2WdW - 2\Omega d\Omega - c2\Omega d\Omega + c2WdW \\ &\quad + 2\Omega d\Omega - 2WdW \\ &= 2\Omega_1 d\Omega_1 + 2\Omega_2 d\Omega_2 - 2c\Omega d\Omega + 2cWdW \\ &= 2\Omega_1(\Omega_2\omega_{12} + c\Omega\omega_1 - cW\omega_{13}) + 2\Omega_2(\Omega_1\omega_{21} + c\Omega\omega_2 \\ &\quad - cW\omega_{23}) - 2c\Omega(\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\omega_2) + 2cW(\Omega_1\omega_{13} + \Omega_2\omega_{23}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Considerando a condição inicial no ponto p_0 tal que $[S - (c-1)P](p_0) = 0$, segue-se que a igualdade de funções $S = (c-1)P$ vale identicamente, desde que o domínio das funções Ω_1 , Ω_2 , Ω e W seja simplesmente conexo. O que implica, finalmente, que a relação algébrica adicional (2.3.2) é satisfeita para todos os pontos de um domínio simplesmente conexo.

Agora, vamos à segunda parte da demonstração. Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície plana parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. Vamos assumir que e_1, e_2 são campos vetoriais principais ortonormais sobre M e N é um campo vetorial normal unitário de M , $dN(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq 2$. Pelos Teoremas 2.1 e 2.2, uma superfície \tilde{M} está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour com respeito a e_1, e_2 se, e somente se, para todo $p \in \tilde{M}$, existe uma parametrização $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{M} \subset \mathbb{H}^3$ de uma vizinhança de p e uma função diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, que não se anula, tal que

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}), \quad (2.3.7)$$

onde X é uma parametrização de um subconjunto aberto de M , N é um campo vetorial unitário de M e o campo vetorial unitário \tilde{N} de \tilde{M} é dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta - h^2 + 1} \left[\sum_{i=1}^2 2Z_i e_i + (\Delta - h^2 - 1)N - 2hX \right]$$

$$= N + \frac{2W}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN - \Omega X \right),$$

onde $S = \sum_{i=1}^2 (\Omega_i)^2 - \Omega^2 + W^2$. Daí, verifica-se a equação (2.3.3), isto é,

$$\tilde{X} = X - h(\tilde{N} - N) = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S} \right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN \right).$$

Por último, utilizando o Teorema 2.2, cuja demonstração baseia-se essencialmente nos argumentos contidos em [6] e [27], é suficiente mostrar que \tilde{X} , definida em $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ dado em (2.3.5), é uma parametrização regular de \tilde{M} em \mathbb{H}^3 . Por hipótese $c \notin \{0, 1\}$. Como

$$S = (c-1)P = (c-1)(\Omega^2 - W^2), \quad (2.3.8)$$

temos, usando (2.3.1), que

$$\begin{aligned} dS &= 2(c-1)(\Omega d\Omega - W dW) \\ &= 2(c-1) \sum_{i=1}^2 (\Omega \Omega_i \omega_i - W \Omega_i \omega_{i3}) \\ &= 2(c-1) \sum_{i=1}^2 (\Omega \omega_i - W \omega_{i3}) \Omega_i. \\ d\left(\frac{\Omega}{S}\right) &= \frac{d\Omega S - \Omega dS}{S^2} = \frac{d\Omega}{S} - \frac{\Omega dS}{S^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i}{(c-1)P} - \frac{2(c-1) \sum_{i=1}^2 (\Omega^2 \omega_i - \Omega W \omega_{i3}) \Omega_i}{(c-1)^2 P^2} \\ &= \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 [(\Omega^2 - W^2) \Omega_i \omega_i - 2(\Omega^2 \omega_i - \Omega W \omega_{i3}) \Omega_i] \\ &= \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 [2\Omega W \omega_{i3} - (\Omega^2 + W^2) \omega_i] \Omega_i \\ &= \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \Omega_i \eta_i, \end{aligned}$$

onde η_i , $i = 1, 2$, são 1-formas definidas por

$$\eta_i = 2\Omega W \omega_{i3} - (\Omega^2 + W^2) \omega_i.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{\Omega^2}{S}\right) &= \frac{2\Omega d\Omega S - \Omega^2 dS}{S^2} = \frac{2\Omega d\Omega}{S} - \frac{\Omega^2 dS}{S^2} \\
 &= \frac{2\Omega \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i}{(c-1)P} - \frac{2 \sum_{i=1}^2 \Omega^2 (\Omega \omega_i - W \omega_{i3}) \Omega_i}{(c-1)P^2} \\
 &= \frac{2\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 [P\Omega_i \omega_i - (\Omega^2 \omega_i - \Omega W \omega_{i3}) \Omega_i] \\
 &= \frac{2\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 (\Omega W \omega_{i3} - W^2 \omega_i) \Omega_i.
 \end{aligned}$$

Tomando a diferencial de X e usando as equações do sistema (2.3.1):

$$\begin{aligned}
 d\tilde{X} &= d\left[\left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right)X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right)\right] \\
 &= d\left(\frac{2\Omega^2}{S}\right)X + dX \cdot \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right) - d\left(\frac{2\Omega}{S}\right)\left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right) \\
 &\quad - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^2 d\Omega_i e_i + \sum_{i=1}^2 \Omega_i de_i - dW \cdot N - W dN\right) \\
 &= \frac{4\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 (\Omega W \omega_{i3} - W^2 \omega_i) \Omega_i X + \left(1 + \frac{2\Omega^2}{(c-1)P}\right) \sum_{i=1}^2 \omega_i e_i \\
 &\quad - \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{j=1}^2 \Omega_j \eta_j \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right) - \frac{2\Omega}{(c-1)P} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Omega_j \omega_{ij} e_i\right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 c\Omega \omega_i e_i - \sum_{i=1}^2 cW \omega_{i3} e_i + \sum_{i=1}^2 \Omega_i \left(\sum_{j=1}^2 \omega_{ij} e_j + \omega_{i3} N + \omega_i X\right)\right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_{i3} N - W \sum_{i=1}^2 \omega_{3i} e_i\right] \\
 &= \left[\frac{4\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 (\Omega W \omega_{i3} - W^2 \omega_i) \Omega_i - \frac{2\Omega}{(c-1)P} \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i\right] X \\
 &\quad + \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \left[\left((c-1)P^2 + 2\Omega^2 P\right) \omega_i - \left(\sum_{j=1}^2 \Omega_j \eta_j\right) \Omega_i\right. \\
 &\quad \left. - 2\Omega^2 P c \omega_i + 2\Omega P (c-1) W \omega_{i3}\right] e_i + \frac{1}{(c-1)P^2} \left(\sum_{j=1}^2 \Omega_j \eta_j W\right) N \\
 &= \left[\frac{2\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \Omega_i (2\Omega W \omega_{i3} - 2W^2 \omega_i - P \omega_i)\right] X
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \left[((c-1)P^2 + 2\Omega^2 P) \omega_i - \left(\sum_{j=1}^2 \Omega_j \eta_j \right) \Omega_i \right. \\
& \quad \left. - 2\Omega^2 P c \omega_i + 2\Omega P (c-1) W \omega_{i3} \right] e_i + \frac{1}{(c-1)P^2} \left(\sum_{j=1}^2 \Omega_j \eta_j W \right) N \\
& = \frac{2\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \Omega_i \eta_i X + \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \left[(1-c)(\Omega^2 + W^2) P \omega_i \right. \\
& \quad \left. - (1-c) 2\Omega P W \omega_{i3} - \sum_{k=1}^2 \Omega_k \eta_k \Omega_i \right] e_i + \frac{1}{(c-1)P^2} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i \eta_i W \right) N \\
& = \frac{2\Omega}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 \eta_i \Omega_i X - \frac{1}{(c-1)P^2} \sum_{i=1}^2 [\eta_i P (1-c) - (\Omega_1 \eta_1 + \Omega_2 \eta_2) \Omega_i] e_i \\
& \quad + \frac{1}{(c-1)P^2} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i \eta_i W \right) N \\
& = \frac{1}{(c-1)P^2} \{ [2\Omega \Omega_1 X - (1-c) P e_1 - \Omega_1^2 e_1 - \Omega_1 \Omega_2 e_2 + \Omega_1 W N] \eta_1 \\
& \quad + [2\Omega \Omega_2 X - (1-c) P e_2 - \Omega_2^2 e_2 - \Omega_2 \Omega_1 e_1 + \Omega_2 W N] \eta_2 \} \\
& = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^2 \eta_i \tilde{e}_i,
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{(c-1)P} (2\Omega \Omega_1 X + ((c-1)P - \Omega_1^2) e_1 - \Omega_1 \Omega_2 e_2 + \Omega_1 W N), \quad (2.3.9)$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{(c-1)P} (2\Omega \Omega_2 X + ((c-1)P - \Omega_2^2) e_2 - \Omega_2 \Omega_1 e_1 + \Omega_2 W N). \quad (2.3.10)$$

Um cálculo simples mostra que \tilde{e}_1 e \tilde{e}_2 são ortonormais. Com isso, \tilde{X} é uma imersão quando $\eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$. Ou seja, \tilde{X} é uma imersão sobre o conjunto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ dado por (2.3.5). De fato,

$$\begin{aligned}
\eta_1 \wedge \eta_2 & = [2\Omega W \omega_{13} - (\Omega^2 + W^2) \omega_1] \wedge [2\Omega W \omega_{23} - (\Omega^2 + W^2) \omega_2] \\
& = 4\Omega^2 W^2 \omega_{13} \wedge \omega_{23} - 2\Omega W (\Omega^2 + W^2) (\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23}) + (\Omega^2 + W^2)^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \\
& = 4\Omega^2 W^2 \lambda_1 \omega_1 \wedge \lambda_2 \omega_2 - 2\Omega W (\Omega^2 + W^2) (-\lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_2 - \lambda_2 \omega_1 \wedge \omega_2) \\
& \quad + (\Omega^2 + W^2)^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \\
& = 4\Omega^2 W^2 \lambda_1 \lambda_2 \omega_1 \wedge \omega_2 - 2(-\lambda_1 - \lambda_2) \Omega W (\Omega^2 + W^2) \omega_1 \wedge \omega_2 + (\Omega^2 + W^2)^2 \omega_1 \wedge \omega_2 \\
& = [4\Omega^2 W^2 - 4H \Omega W (\Omega^2 + W^2) + (\Omega^2 + W^2)^2] \omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Portanto, vemos que $\eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$ se, e somente se,

$$(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_1\Omega W)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_2\Omega W) \neq 0.$$

Uma condição suficiente para que uma transformação de Ribaucour transforme uma superfície plana em outra superfície do mesmo tipo é dada em (2.3.2). Ou seja, se as funções Ω_i , Ω e W satisfazem a condição algébrica (2.3.2),

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2),$$

então a transformação de Ribaucour transmuta a superfície plana M em uma superfície plana \tilde{M} . Com efeito, sabemos por (2.3.6) e (2.3.1) que

$$\begin{aligned} dS &= 2(c-1) \left(\Omega \sum_{i=1}^2 \Omega_i \omega_i + W \sum_{i=1}^2 \Omega_i \lambda_i \omega_i \right) \\ &= 2(c-1) \sum_{i=1}^2 (\Omega + W \lambda_i) \Omega_i \omega_i. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} WdS(e_i) + S\Omega_i\lambda_i &= (c-1)[2W(\Omega + W\lambda_i)\Omega_i + P\Omega_i\lambda_i] \\ &= (c-1)\Omega_i[2W(\Omega + W\lambda_i) + P\lambda_i], \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

e

$$\begin{aligned} S\Omega_i - \Omega dS(e_i) &= (c-1)[P\Omega_i - 2\Omega(\Omega + W\lambda_i)\Omega_i] \\ &= (c-1)\Omega_i[P - 2\Omega(\Omega + W\lambda_i)]. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Supondo que $\frac{S}{\Omega}$ não é constante ao longo das linhas de curvatura, então

$$0 \neq d\left(\frac{S}{\Omega}\right)(e_i) = \frac{\Omega dS(e_i) - Sd\Omega(e_i)}{\Omega^2} = \frac{\Omega dS(e_i) - S\Omega_i}{\Omega^2}.$$

Por (2.3.11) e (2.3.12), temos que $\Omega_i \neq 0$. Logo, usando as relações (2.1.49), (2.3.6), (2.3.11) e (2.3.12), deduzimos as curvaturas principais de \tilde{M} :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{dS(e_i)W + \Omega_i\lambda_iS}{\Omega_iS - \Omega dS(e_i)} = \frac{(c-1)\Omega_i[2W(\Omega + W\lambda_i) + P\lambda_i]}{(c-1)\Omega_i[P - 2\Omega(\Omega + W\lambda_i)]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2W(\Omega + W\lambda_i) + P\lambda_i}{P - 2\Omega(\Omega + W\lambda_i)} = \frac{2W\Omega + 2W^2\lambda_i + \Omega^2\lambda_i - W^2\lambda_i}{\Omega^2 - W^2 - 2\Omega^2 - 2\Omega W\lambda_i} \\
&= \frac{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_i}{-\Omega^2 - W^2 - 2\Omega W\lambda_i} = -\frac{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_i}{\Omega^2 + W^2 + 2\Omega W\lambda_i}.
\end{aligned}$$

A curvatura gaussiana de \tilde{M} é dada por

$$\tilde{K} = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - 1.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= \left(\frac{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_1}{\Omega^2 + W^2 + 2\Omega W\lambda_1} \right) \left(\frac{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_2}{\Omega^2 + W^2 + 2\Omega W\lambda_2} \right) - 1 \\
&= \frac{4\Omega^2 W^2 + 2\Omega W(W^2 + \Omega^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + (W^2 + \Omega^2)^2 \lambda_1 \lambda_2}{(\Omega^2 + W^2)^2 + 2\Omega W(\Omega^2 + W^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 4\Omega^2 W^2 \lambda_1 \lambda_2} - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como M é uma superfície plana de \mathbb{H}^3 , então $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Donde segue, usando a última igualdade, que $\tilde{K} = 0$. Portanto, \tilde{M} é uma superfície plana de \mathbb{H}^3 . \square

Observação 2.1. Veja que, pelo Teorema 2.2, para cada superfície \tilde{M} descrita por \tilde{X} , a primeira forma fundamental é dada por $\tilde{I} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$, sendo

$$\tilde{\omega}_i = \frac{W^2 + \Omega^2 + 2W\Omega\lambda_i}{W^2 - \Omega^2} \omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.13)$$

e as curvaturas principais, $-\lambda_i$, são

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{2\Omega W + \lambda_i(W^2 + \Omega^2)}{2\Omega W\lambda_i + W^2 + \Omega^2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.14)$$

Além disso, o sistema (2.2.5) torna-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = a_i \Omega_i, \\ \frac{\partial W}{\partial u_i} = -\lambda_i a_i \Omega_i, \\ \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \Omega_j, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i} = -\frac{1}{a_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j} \Omega_j + c(\Omega + W\lambda_i) a_i, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

com a condição inicial satisfazendo (2.3.2), $i, j = 1, 2$, $a_i = |X_{u_i}|$, $-\lambda_i$ as curvaturas principais de M e c uma constante real não nula (a constante de Ribaucour).

Observação 2.2. Seja \tilde{M} uma superfície plana em \mathbb{H}^3 localmente associada a M (e não-congruente) por uma transformação de Ribaucour, parametrizada por $X(u_1, u_2)$, cujo domínio é um conjunto aberto simplesmente conexo $U \in \mathbb{R}^2$, como no Teorema 2.7. Como Ω e W são soluções do sistema (2.3.15), então Ω e W não se anulam simultaneamente. Caso contrário, existiria um ponto $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in U$ tal que $\Omega(u^0) = W(u^0) = 0$, donde, pela condição algébrica (2.3.2), teríamos $\Omega_1(u^0) = \Omega_2(u^0) = 0$. Como o sistema (2.3.15) é integrável, dada esta condição inicial no ponto $u^0 \in U$, as únicas soluções possíveis para o sistema seriam as funções identicamente nulas $\Omega = W \equiv 0$, o que não define uma superfície \tilde{M} .

2.4 Fins e curvas singulares em superfícies planas

Nesta seção, começaremos definindo e tecendo alguns comentários sobre as *aplicações de Gauss hiperbólicas*. Seja $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão de uma superfície plana. O vetor normal unitário N de X é uma aplicação de M no *espaço de De Sitter*

$$\mathbb{S}_1^3 = \{x \in \mathbb{L}^4; \langle x, x \rangle_1 = 1\}$$

de tal maneira que se u_1, u_2 são parâmetros de M , então $\{X, X_{u_1}, X_{u_2}, N\}$ é uma base orientada de \mathbb{L}^4 . A aplicação $X + N : M \rightarrow \mathbb{L}^4$ toma valores no *cone de luz positivo*

$$\mathbb{N}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4; \langle x, x \rangle_1 = 0, x_0 > 0\}.$$

Ao projetar \mathbb{N}^3 no quociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$, obtem-se uma aplicação $G = [X + N] : M \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$, que é chamada *aplicação de Gauss hiperbólica* de X . A interpretação geométrica de G é a seguinte: para cada ponto (u_1, u_2) de M , a geodésica normal orientada partindo de $X(u_1, u_2)$ encontra a fronteira ideal $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ de \mathbb{H}^3 em $G(u_1, u_2)$ (veja [20]).

Ou, em outras palavras, considerando uma superfície orientável M imersa em \mathbb{H}^3 , um ponto $p \in M$ e uma geodésica orientada γ de \mathbb{H}^3 passando por p e ortogonal à superfície M , vemos que a curva γ possui dois pontos limites na fronteira ideal $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Para cada ponto $p \in M$ podemos associar o ponto limite inicial e o ponto limite final da geodésica γ ortogonal a M . Ao fixarmos uma orientação para γ , temos duas aplicações definidas sobre M (veja Roitman [23]).

Ora, a escolha de uma orientação para M determina uma orientação para a geodésica γ ortogonal a M . Sendo assim, fixada uma orientação, denotamos por $G_+ : M \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ (respec., $G_- : M \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$) a aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ o ponto limite final (respec.,

o ponto limite inicial) de γ . Tais aplicações configuram as chamadas *aplicações de Gauss hiperbólicas*.

À luz das ideias desenvolvidas por Bryant [5], usando o referencial móvel $e_0 = X$, $e_1 = X_{u_1}$, $e_2 = X_{u_2}$, $e_3 = N$ adaptado à superfície M , escrevemos as aplicações de Gauss hiperbólicas como $G_+ = [e_0 + e_3]$ e $G_- = [e_0 - e_3]$, onde os colchetes indicam a classe de equivalência pertencente ao quociente entre o cone de luz positivo \mathbb{N}^3 de \mathbb{L}^4 e a semi-reta \mathbb{R}^+ . Usualmente, identificamos a fronteira ideal de \mathbb{H}^3 , $\partial_\infty \mathbb{H}^3$, com o quociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$.

Dadas as superfícies X e \tilde{X} associadas por uma transformação de Ribaucour, S como no Teorema 2.7 e p_0 um ponto tal que $S(p_0) = 0$, queremos determinar o comportamento de \tilde{X} em uma vizinhança de p_0 . No artigo [7], mostra-se que, para superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , vale:

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \tilde{N}(p) = N(p_0).$$

Além disso, cada ponto p_0 gera um fim planar mergulhado na superfície \tilde{X} . No caso do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , M. Lemes, P. Roitman, K. Tenenblat e R. Tribuzy [20] mostraram um comportamento semelhante para superfícies *cmc1* ao trocar o vetor normal unitário pela aplicação de Gauss hiperbólica. Os autores também provaram que p_0 produz fins do tipo horosfera mergulhados. Em outras palavras, as transformações de Ribaucour para superfícies mínimas *cmc1* produzem fins que são assintóticos a horosferas.

No próximo resultado, veremos também que as transformações de Ribaucour para superfícies planas em \mathbb{H}^3 produzem fins do tipo horosfera, mergulhados e completos.

Teorema 2.8 ([10]). *Seja $\tilde{X} : D \setminus \{p_0\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ uma superfície plana localmente associada por uma transformação de Ribaucour à uma superfície plana, sem pontos umbílicos, $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, tal que as funções Ω_i , Ω e W estão definidas em D . Sejam \tilde{G}_\pm e G_\pm as aplicações de Gauss hiperbólicas de \tilde{X} e X , respectivamente. Se $S(p_0) = 0$ (i.e., $(W^2 - \Omega^2)(p_0) = 0$) e $S(p) \neq 0$ para todo $p \in D \setminus \{p_0\}$, então*

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \tilde{G}_+(p) = G_+(p_0) \quad \left(\text{resp. } \lim_{p \rightarrow p_0} \tilde{G}_-(p) = G_-(p_0) \right),$$

quando $W(p_0) = \Omega(p_0)$ (resp. $W(p_0) = -\Omega(p_0)$). Além disso, a superfície plana \tilde{X} possui um fim do tipo horosfera, mergulhado e completo em p_0 .

Demonstração. Tomamos a superfície plana $X(u_1, u_2)$, localmente parametrizada por linhas de curvatura, como na Proposição 2.3. A primeira forma fundamental de X é dada por $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$, onde $\omega_i = a_i du_i$, $i = 1, 2$, sendo $a_1 = \cosh \phi$, $a_2 = \sinh \phi$, ϕ uma função harmônica positiva e as curvaturas principais são $-\lambda_1 = \tanh \phi$ e $-\lambda_2 = \coth \phi$.

Suponha $S(p_0) = 0$. Então, partir de (2.3.4) vemos que $W(p_0) = \pm\Omega(p_0)$. Assuma que $W(p_0) = \Omega(p_0)$. Segue-se da Observação 2.2 que $W(p_0) + \Omega(p_0) \neq 0$ e, de (2.3.2), temos que $\Omega_1(p_0) = \Omega_2(p_0) = 0$. Além disso, de (2.3.3), (2.3.4) e (2.1.39), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{X} + \tilde{N} &= \left[\frac{W - \Omega}{(1-c)(W + \Omega)} - \frac{c}{1-c} \right] X + \left[-\frac{W - \Omega}{(1-c)(W + \Omega)} - \frac{c}{1-c} \right] N \\ &\quad + \frac{2}{(1-c)(W + \Omega)} \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i, \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{(u_1, u_2) \rightarrow p_0} (\tilde{X} + \tilde{N})(u_1, u_2) = -\frac{c}{1-c} (X + N)(p_0).$$

Portanto,

$$\lim_{(u_1, u_2) \rightarrow p_0} \tilde{G}_+(u_1, u_2) = G_+(p_0).$$

Analogamente, considerando $W(p_0) = -\Omega(p_0)$, como $W(p_0) - \Omega(p_0) \neq 0$, provamos que

$$\lim_{(u_1, u_2) \rightarrow p_0} \tilde{G}_-(u_1, u_2) = G_-(p_0).$$

Agora, mostraremos que o ponto p_0 é um fim do tipo horosfera mergulhado. Suponha que $W(p_0) = \pm\Omega(p_0)$, então, segue-se de (2.3.2) e (2.3.15) que, para todo $1 \leq i \neq j \leq 2$,

$$\begin{aligned} \Omega_1(p_0) = \Omega_2(p_0) = 0, & \quad \frac{\partial W}{\partial u_i}(p_0) = 0, \\ \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i}(p_0) = c[\Omega(1 \pm \lambda_i)a_i](p_0), & \quad \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j}(p_0) = 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_i^2}(p_0) = c[\Omega(1 \pm \lambda_i)a_i^2](p_0), & \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_j \partial u_i}(p_0) = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2}(p_0) = -c[\Omega(1 \pm \lambda_i)\lambda_i a_i^2](p_0), & \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}(p_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

A fim de mostrar que p_0 é um fim do tipo horosfera mergulhado, consideramos \tilde{X} dada por (2.3.3) no modelo do semi-espaco superior, a saber,

$$Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right),$$

onde \tilde{X}^j denota a j -ésima função coordenada de \tilde{X} . Definimos

$$V = S\tilde{X} = (S + 2\Omega^2)X - 2\Omega \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN \right). \quad (2.4.2)$$

Então $Z^j = \frac{V^j}{V^0 - V^3}$, $j = 1, 2$, e $Z^3 = \frac{S}{V^0 - V^3}$, onde V^j denota a j -ésima coordenada de V . Definimos $\chi_{\pm} = X \pm N$. Temos, como consequência de (2.4.1), as seguintes equações

$$V(p_0) = 2\Omega^2(p_0)\chi_{\pm}(p_0), \quad \frac{\partial V}{\partial u_j}(p_0) = 2(1-c)\Omega^2(p_0) \frac{\partial \chi_{\pm}}{\partial u_j}(p_0),$$

onde $\frac{\partial \chi_{\pm}}{\partial u_i} = a_i(1 \pm \lambda_i)e_i$. Portanto, $Z^j(p_0) = \frac{\chi_{\pm}^j}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3}(p_0)$, $Z^3(p_0) = 0$, e ainda

$$\frac{\partial Z^j}{\partial u_i}(p_0) = (1-c) \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\chi_{\pm}^j}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3} \right)(p_0), \quad \frac{\partial Z^3}{\partial u_i}(p_0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

As aplicações de Gauss hiperbólicas no modelo do semi-espço superior são dadas por

$$G_{\pm} = \frac{\chi_{\pm}^1 + \chi_{\pm}^2 i}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3}. \quad (2.4.3)$$

Tais aplicações são meromorfas. Consequentemente,

$$\frac{\partial Z^1}{\partial u_1}(p_0) = \frac{\partial Z^2}{\partial u_2}(p_0) \quad \frac{\partial Z^2}{\partial u_1}(p_0) = -\frac{\partial Z^1}{\partial u_2}(p_0).$$

Além disso, segue-se de (2.3.4) e (2.4.1) que

$$\frac{\partial^2 Z^3}{\partial u_i^2}(p_0) = \frac{-c(1-c)a_i^2(1 \pm \lambda_i)^2}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3}(p_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 Z^3}{\partial u_2 \partial u_1}(p_0) = 0.$$

Assim, obtemos as seguintes relações

$$\frac{\partial Z^1}{\partial u_1}(p_0) = \frac{\partial Z^2}{\partial u_2}(p_0) = (1-c)A \quad \text{e} \quad \frac{\partial Z^2}{\partial u_1}(p_0) = -\frac{\partial Z^1}{\partial u_2}(p_0) = (1-c)B,$$

onde $A = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\chi_{\pm}^1}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3} \right) (p_0)$ e $B = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\chi_{\pm}^1}{\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3} \right) (p_0)$. Além disso,

$$\frac{\partial Z^3}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 Z^3}{\partial u_2 \partial u_1} (p_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 Z^3}{\partial u_i^2} (p_0) = -c(1-c)l_{\pm},$$

onde $l_{\pm} = \frac{(\cosh \phi \mp \sinh \phi)^2}{(\chi_{\pm}^0 - \chi_{\pm}^3)} (p_0)$.

Agora, considerando a expansão em série de Taylor de $Z(u_1, u_2)$ em torno do ponto $p_0 = (u_1^0, u_2^0)$, e efetuando a mudança de variáveis

$$x = \frac{A(u_1 - u_1^0) + B(u_2 - u_2^0)}{A^2 + B^2}, \quad y = \frac{-B(u_1 - u_1^0) + A(u_2 - u_2^0)}{A^2 + B^2},$$

concluimos que

$$Z(x, y) = Z(p_0) + (1-c)(A^2 + B^2)(x, y, 0) + (x^2 + y^2) \left(0, 0, \frac{-c(1-c)l_{\pm}}{2} \right) + R(x, y),$$

onde $\lim_{(x,y) \rightarrow p_0} \frac{R(x,y)}{x^2 + y^2}$ finito. Logo, o ponto p_0 é um fim do tipo horosfera mergulhado. □

A completude do fim também pode ser provada diretamente. Para isso, precisamos da expansão em série de Taylor da função $W^2 - \Omega^2$ numa vizinhança de p_0 . De (2.4.1) e usando o fato de que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = a_1 \Omega_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = a_2 \Omega_2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (W^2 - \Omega^2)(p_0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u_i} (W^2 - \Omega^2)(p_0) &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_i} (W^2 - \Omega^2)(p_0) &= 0, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} (W^2 - \Omega^2)(p_0) &= -2c[\Omega^2(1 \pm \lambda_i)^2 a_i^2](p_0), \end{aligned}$$

onde a última equação segue de $W(p_0) = \pm\Omega(p_0)$. Portanto,

$$(W^2 - \Omega^2)(u) = -c\Omega^2(p_0) \sum_{i=1}^2 [(1 \pm \lambda_i)^2 a_i^2](p_0)(u_i - u_i^0)^2 + R(u),$$

onde $\lim_{u \rightarrow p_0} \frac{R(u)}{|u - p_0|^2} = 0$.

Observe que, para qualquer vetor $v = (v_1, v_2)$, o comprimento é dado por

$$l(v) = \sum_{i=1}^2 \frac{(W^2 + \Omega^2 + 2\Omega W \lambda_i)^2 a_i^2 v_i^2}{(W^2 - \Omega^2)^2}.$$

Também temos

$$\lim_{u \rightarrow p_0} (W^2 + \Omega^2 + 2\Omega W \lambda_i)^2 a_i^2 = 4\Omega^4(p_0)h_i(p_0), \quad (2.4.4)$$

onde $h_i^2(p_0) = [(1 \pm \lambda_i)^2 a_i^2](p_0)$. Pela expansão em série de Taylor, obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{|W^2 - \Omega^2|}{|u - p_0|^2}(u) \leq |c|\Omega^2(p_0)h^2 + \frac{R(u)}{|u - p_0|^2}, \quad (2.4.5)$$

onde $h^2 = \max\{h_1^2(p_0), h_2^2(p_0)\}$.

Agora, considerando uma curva $\alpha(t) = \tilde{X}(u_1(t), u_2(t))$, $t \in (0, a)$, tal que $u(0) = p_0$. Segue-se, de (2.4.4) e (2.4.5), que o comprimento de α é dado por

$$\begin{aligned} \int_0^a |\alpha'(t)| dt &= \int_0^a \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (W^2 + \Omega^2 + 2\Omega W \lambda_i)^2 a_i^2 (u_i')^2}}{|w^2 - \Omega^2|} dt \\ &\geq \int_{t_0}^a \frac{|u - p_0|^2}{|W^2 - \Omega^2|} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^2 (W^2 + \Omega^2 + 2\Omega W \lambda_i)^2 a_i^2 (u_i')^2}}{|u - p_0|^2} dt \\ &\geq \beta \int_{t_0}^a \frac{|u'(t)|}{|u(t) - p_0|^2} dt, \end{aligned}$$

onde $t_0 \in (0, a)$ é suficientemente pequeno e β é uma constante positiva cuja existência segue-se de (2.4.4) e (2.4.5). Passando a última desigualdade ao limite quando t_0 tende para zero, $t_0 \rightarrow 0$, concluímos que a curva α tem comprimento infinito, isto é, p_0 é um fim completo.

O próximo teorema descreve as singularidades das superfícies planas do espaço hiperbólico obtidas por transformações de Ribaucour. Mostra-se que as curvas de singularidades, que são genericamente arestas cuspidais, não intersectam os fins gerados pelas transformações de Ribaucour.

Teorema 2.9 ([10]). *Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície plana sem pontos umbílicos, com parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, cujas direções principais são $-\lambda_i$, $i = 1, 2$. Considere uma superfície plana \tilde{X} localmente associada (não-congruente) a X por uma transformação de Ribaucour, como no Teorema 2.7. Então, os pares (u_1, u_2) que satisfazem*

$$F(u_1, u_2) = W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_i \Omega W = 0, \quad (2.4.6)$$

geram pontos de singularidades sempre que $|\lambda_i| > 1$, para cada $i = 1, 2$. As curvas de singularidades $F(u_1, u_2) = 0$ não intersectam os fins dados por $(W^2 - \Omega^2)(u_1, u_2) = 0$. Além disso, um ponto de singularidade p é não-degenerado se, e somente se, o gradiente de F não se anula no ponto p . Por último, a superfície \tilde{X} em um ponto de singularidade não-degenerado é localmente difeomorfa a uma aresta cuspidal.

Demonstração. Pelo Teorema 2.7, a superfície \tilde{X} , obtida via transformação de Ribaucour para a superfície X , é regular sobre o conjunto \tilde{U} . Além disso, através das equações (2.3.3) e (2.3.4), vemos que os fins de \tilde{X} são, de fato, os pontos (u_1, u_2) nos quais $W^2 - \Omega^2 = 0$.

Como M é uma superfície plana em \mathbb{H}^3 , segue que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Perceba, inicialmente, que para $0 < |\lambda_i| < 1$, com $i = 1, 2$, são válidas as seguintes desigualdades

$$W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_i \Omega W \geq (1 - |\lambda_i|)(W^2 + \Omega^2) > 0$$

sendo a primeira delas trivial, e a última proveniente do fato exposto na Observação 2.2. O caso $|\lambda_i| = 1$ está descartado, pois, por hipótese, a superfície M não possui pontos umbílicos. Consequentemente, os pontos singulares são determinados por

$$W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_i \Omega W = 0, \quad i = 1, 2,$$

para $|\lambda_i| > 1$.

Suponha, por contradição, a existência de um ponto que esteja em uma curva singular e que seja, ao mesmo tempo, um fim. Isto é, a existência de um ponto p_0 tal que $(W^2 - \Omega^2)(p_0) = 0$, ou seja, $\Omega(p_0) = \pm W(p_0)$ e ainda $(W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_i \Omega W)(p_0) = 0$. Então, segue-se que $\Omega(p_0) = W(p_0) = 0$, o que contradiz a Observação 2.2. Portanto, as curvas singulares não intersectam os fins determinados por $W^2 - \Omega^2 = 0$.

Por definição, um ponto singular p é não-degenerado se a matriz jacobiana de $d\tilde{X}$ tem posto igual a 1 em p (veja [17]). A derivada de $V := \tilde{X}_{u_1} \times \tilde{X}_{u_2} \times X$ com respeito a u_1 e u_2 fornece

$$\frac{\partial V}{\partial u_1} = (\tilde{\Gamma}_{11}^1 + \tilde{\Gamma}_{12}^2) \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{N} - \tilde{\lambda}_1 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2 \tilde{e}_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = (\tilde{\Gamma}_{12}^1 + \tilde{\Gamma}_{22}^2)\tilde{a}_1\tilde{a}_2 \tilde{N} + \tilde{\lambda}_2\tilde{a}_1\tilde{a}_2^2 \tilde{e}_2,$$

onde $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel da superfície \tilde{X} , $\tilde{e}_i = \frac{\tilde{X}_{u_i}}{|\tilde{X}_{u_i}|}$ e $\tilde{a}_i = |X_{u_i}|$ para $i = 1, 2$. Calculando os símbolos de Christoffel e usando as equações (2.3.13) e (2.3.14), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial u_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial u_1} \tilde{a}_2 + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial u_1} \tilde{a}_1 \right) \tilde{N} + \frac{a_1 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2^2}{\lambda_2 a_2} \tilde{e}_1, \\ \frac{\partial V}{\partial u_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial u_2} \tilde{a}_2 + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial u_2} \tilde{a}_1 \right) \tilde{N} - \frac{a_2 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2}{\lambda_1 a_1} \tilde{e}_2.\end{aligned}$$

Observe que $\tilde{a}_i = 0$ e $\tilde{a}_j \neq 0$ para $i \neq j$, uma vez que, nos pontos singulares, temos $F = W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_i \Omega W = 0$, para $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2$. Com isso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial u_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_1} \tilde{a}_j \right) \tilde{N} = \frac{1}{2(W^2 - \Omega^2)} \frac{\partial F}{\partial u_1} \tilde{a}_j \tilde{N}, \\ \frac{\partial V}{\partial u_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_2} \tilde{a}_j \right) \tilde{N} = \frac{1}{2(W^2 - \Omega^2)} \frac{\partial F}{\partial u_2} \tilde{a}_j \tilde{N}.\end{aligned}$$

Donde concluímos que, um ponto singular p é não-degenerado se, e somente se, o gradiente de F não se anula em p .

Em um ponto singular não-degenerado, a direção nula é $(1, 0)$ se $i = 1$, ou $(0, 1)$ se $i = 2$, e o vetor tangente à curva é $\left(-\frac{\partial F}{\partial u_2}, \frac{\partial F}{\partial u_1} \right)$. Logo, genericamente, estes dois vetores não são proporcionais e, conseqüentemente, a superfície \tilde{X} é localmente difeomorfa a uma aresta cuspidal (veja [17]). \square

No próximo capítulo, vamos obter novas famílias de superfícies planas em \mathbb{H}^3 por meio da aplicação da transformação de Ribaucour às superfícies planas rotacionais. Em outras palavras, encontraremos todas as soluções do sistema (2.3.15) que satisfazem a condição (2.3.2), a partir de uma superfície plana rotacional em \mathbb{H}^3 , que é parametrizada por linhas de curvatura. É importante ressaltar que essa transformação não gera novas superfícies planas quando aplicada a uma horosfera.

Capítulo 3

Famílias de superfícies planas em \mathbb{H}^3

Neste capítulo, aplicaremos as transformações de Ribaucour para superfícies planas de rotação no espaço hiperbólico tridimensional, \mathbb{H}^3 , fornecendo novas famílias explícitas de superfícies planas em \mathbb{H}^3 que são determinadas por vários parâmetros. Ao escolhermos certos parâmetros de forma especial, é possível obter superfícies que exibem periodicidade em relação a uma variável e também superfícies que possuem um número par arbitrário de fins do tipo horosfera mergulhados, ou até mesmo um número infinito de tais fins.

Na Seção 3.1, a transformação de Ribaucour é aplicada ao cilindro hiperbólico e, posteriormente, na Seção 3.2, analisaremos as superfícies planas de rotação do espaço hiperbólico que não apresentam singularidades isoladas. Um estudo análogo é desenvolvido na Seção 3.3 para as superfícies planas de rotação com singularidades isoladas. Em cada caso, determinaremos as características dos fins do tipo horosfera bem como as curvas de singularidades das superfícies.

Para enriquecer nossa análise, iremos ilustrar algumas dessas superfícies por meio de representações gráficas.

3.1 Transformação de Ribaucour para o cilindro

Aplicando a teoria desenvolvida no capítulo anterior ao cilindro no espaço hiperbólico (Exemplo 1.1), obtemos o próximo teorema que fornece famílias a 1-parâmetro de superfícies planas em \mathbb{H}^3 .

Teorema 3.1. *Considere o cilindro em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ parametrizado por*

$$X(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha u_2), \frac{1}{\beta} \cos(\beta u_1), \frac{1}{\beta} \sin(\beta u_1), \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha u_2) \right), \quad (3.1.1)$$

com primeira forma fundamental $I = du_1^2 + du_2^2$ e campo normal unitário dado por

$$N(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\beta} \cosh(\alpha u_2), \frac{1}{\alpha} \cos(\beta u_1), \frac{1}{\alpha} \sen(\beta u_1), \frac{1}{\beta} \sinh(\alpha u_2) \right), \quad (3.1.2)$$

onde $\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = -1$ com $\alpha, \beta > 0$. Então, as superfícies planas em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, não-congruentes ao cilindro e associadas a X por uma transformação de Ribaucour são dadas por

$$\tilde{X} = X + \frac{2(f+g)}{(1-c)(\beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2)} \left[(f+g)X - f'X_{u_1} - g'X_{u_2} - \left(\frac{\beta}{\alpha} f + \frac{\alpha}{\beta} g \right) N \right], \quad (3.1.3)$$

onde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e as funções f e g são

$$f(u_1) = \begin{cases} \sen(\beta \sqrt{c} u_1), & \text{se } c > 0, c \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta} \cosh(\beta \sqrt{|c|} u_1), & \text{se } c < 0, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

e

$$g(u_2) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \cosh(\alpha \sqrt{c} u_2), & \text{se } c > 0, c \neq 1, \\ \sen(\alpha \sqrt{|c|} u_2), & \text{se } c < 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Além disto, \tilde{X} é regular sobre o conjunto

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; (\beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2)[(f+g)^2 - \alpha^2 g^2] \neq 0\}. \quad (3.1.6)$$

Demonstração. A fim de obtermos uma nova família a 1-parâmetro de superfícies planas em \mathbb{H}^3 , localmente associadas a M por uma transformação de Ribaucour, iremos resolver o sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, proveniente do sistema (2.3.15), onde $a_1 = a_2 = 1$, e as curvaturas principais são $\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ e $\lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta}$.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \Omega_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \Omega_2, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -\frac{\beta}{\alpha} \Omega_1, \quad \frac{\partial W}{\partial u_2} = -\frac{\alpha}{\beta} \Omega_2, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = 0, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = c \left(\Omega + W \frac{\beta}{\alpha} \right), \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = c \left(\Omega + W \frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (3.1.10)$$

As soluções do sistema, Ω_1 , Ω_2 , Ω e W , devem também satisfazer a condição algébrica adicional dada em (2.3.2). Isto é,

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2).$$

para qualquer constante $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

De (3.1.7) e (3.1.9), obtemos $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$. Como as derivadas parciais de segunda ordem estão definidas em um domínio aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, segue que

$$\Omega = f(u_1) + g(u_2). \quad (3.1.11)$$

onde f e g são funções de u_1 e u_2 , respectivamente. As equações em (3.1.7) e a expressão (3.1.11) implicam

$$\Omega_1 = f'(u_1) \quad \text{e} \quad \Omega_2 = g'(u_2). \quad (3.1.12)$$

Com isso,

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = f''(u_1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = g''(u_2). \quad (3.1.13)$$

Usando as equações de (3.1.8) e as relações de (3.1.12), vemos o seguinte

$$\begin{aligned} W &= \int \left(\frac{\partial W}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial W}{\partial u_2} du_2 \right) = \int \left(-\frac{\beta}{\alpha} f'(u_1) du_1 - \frac{\alpha}{\beta} g'(u_2) du_2 \right) \\ &= -\frac{\beta}{\alpha} f(u_1) - \frac{\alpha}{\beta} g(u_2) + L. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

onde $L \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Agora, através de (3.1.10), obtemos que

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = c \left(\Omega + W \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

isto é,

$$f'' = c \left[f + g + \left(-\frac{\beta}{\alpha} f - \frac{\alpha}{\beta} g + L \right) \frac{\beta}{\alpha} \right] = c \left[\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) f + \frac{\beta}{\alpha} L \right].$$

Mas, por hipótese, $1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\beta^2$. Portanto,

$$f''(u_1) + c\beta^2 f(u_1) - c\frac{\beta}{\alpha}L = 0. \quad (3.1.15)$$

Ainda por (3.1.10), temos

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = c \left(\Omega + W \frac{\alpha}{\beta} \right),$$

isto é,

$$g'' = c \left[f + g + \left(-\frac{\beta}{\alpha}f - \frac{\alpha}{\beta}g + L \right) \frac{\alpha}{\beta} \right] = c \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) + \frac{\alpha}{\beta}L \right].$$

Por hipótese, $1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^2$. Portanto,

$$g''(u_2) - c\alpha^2 g(u_2) + c\frac{\alpha}{\beta}L = 0. \quad (3.1.16)$$

Perceba que as equações diferenciais ordinárias (3.1.15) e (3.1.16) são lineares e de 2ª ordem e, além disso, $c\beta^2\alpha^2 \neq 0$. Para obter as soluções explícitas de cada uma das EDO's, temos que considerar os dois seguintes casos: quando $c > 0$ e quando $c < 0$.

Quando $c > 0$, um cálculo simples nos permite verificar que as soluções das equações diferenciais supracitadas, (3.1.15) e (3.1.16), são dadas por

$$f(u_1) = a_1 \cos(\beta\sqrt{c}u_1) + b_1 \sin(\beta\sqrt{c}u_1) + \frac{L}{\alpha\beta}, \quad (3.1.17)$$

$$g(u_2) = a_2 \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2) + b_2 \sinh(\alpha\sqrt{c}u_2) - \frac{L}{\alpha\beta}. \quad (3.1.18)$$

Agora, observando que as funções Ω e W independem de L , então, podemos supor, sem perda de generalidade, que $L = 0$. Além disso, a condição algébrica adicional (3.2.31) nos dá

$$[f'(u_1)]^2 + [g'(u_2)]^2 = c \left[(f(u_1) + g(u_2))^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}f(u_1) - \frac{\alpha}{\beta}g(u_2) + L \right)^2 \right], \quad (3.1.19)$$

e as derivadas de f e g são

$$\begin{aligned} f'(u_1) &= -a_1\beta\sqrt{c}\sin(\beta\sqrt{c}u_1) + b_1\beta\sqrt{c}\cos(\beta\sqrt{c}u_1), \\ g'(u_2) &= a_2\alpha\sqrt{c}\sinh(\alpha\sqrt{c}u_2) + b_2\alpha\sqrt{c}\cosh(\alpha\sqrt{c}u_2). \end{aligned}$$

Em particular, de (3.1.19), obtemos que

$$\begin{aligned} c(b_1^2\beta^2 + b_2^2\alpha^2) &= c \left[(a_1 + a_2)^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}a_1 - \frac{\alpha}{\beta}a_2 \right)^2 \right] \\ b_1^2\beta^2 + b_2^2\alpha^2 &= a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 - \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}a_1^2 + 2a_1a_2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}a_2^2 \right) \\ \beta^2b_1^2 + \alpha^2b_2^2 &= \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) a_1^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) a_2^2 \\ \beta^2b_1^2 + \alpha^2b_2^2 &= -\beta^2a_1^2 + \alpha^2a_2^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta^2(b_1^2 + a_1^2) = \alpha^2(a_2^2 - b_2^2). \quad (3.1.20)$$

Afirmção. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então a superfície \tilde{X} é congruente a X .

Demonstração da Afirmção. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então $a_1 = b_1 = 0$. Pela condição (3.1.20), temos que $b_2 = \pm a_2$. Substituindo em (3.1.17) e (3.1.18), obtemos

$$\begin{aligned} f &\equiv 0 \\ g(u_2) &= a_2 \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2) \pm a_2 \sinh(\alpha\sqrt{c}u_2) \\ &= a_2 \left(\frac{e^{\alpha\sqrt{c}u_2} + e^{-\alpha\sqrt{c}u_2}}{2} \pm \frac{e^{\alpha\sqrt{c}u_2} - e^{-\alpha\sqrt{c}u_2}}{2} \right) \\ &= a_2 e^{\pm\alpha\sqrt{c}u_2}. \end{aligned}$$

Usando as expressões conhecidas da Observação 2.1 para o cálculo das formas duais $\tilde{\omega}_i$ e das curvaturas principais $-\tilde{\lambda}_i$, com $i = 1, 2$, verifica-se facilmente que $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = -\omega_2$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$ e $\tilde{\lambda}_2 = -\lambda_2$. Portanto, $\tilde{I} = I$ e $\tilde{II} = II$, o que mostra o resultado desejado. \square

Supondo $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, é claro que $a_1^2 + b_1^2 > 0$, além disso, $\beta^2 > 0$ pois $\beta > 0$, daí $\beta^2(b_1^2 + a_1^2) > 0$. Como $\alpha^2 > 0$, segue-se então, pela condição (3.1.20), que $a_2^2 - b_2^2 > 0$.

A partir de (3.1.17), obtemos

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos(\beta\sqrt{c}u_1) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \sin(\beta\sqrt{c}u_1) \right] \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} [\text{sen}A \cos(\beta\sqrt{c}u_1) + \cos A \text{sen}(\beta\sqrt{c}u_1)] \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{sen}(\beta\sqrt{c}u_1 + A). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

E de (3.1.18) e (3.1.20), obtemos também

$$\begin{aligned}
g(u_2) &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \left[\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2) + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \sinh(\alpha\sqrt{c}u_2) \right] \\
&= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} [\cosh B \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2) + \sinh B \sinh(\alpha\sqrt{c}u_2)] \\
&= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2 + B) \\
&= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \frac{\beta}{\alpha} \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2 + B).
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Com A e B constantes reais tais que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, & \operatorname{cos} A &= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\
\operatorname{cosh} B &= \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}, & \operatorname{sinh} B &= \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que as aplicações W , Ω , Ω_1 e Ω_2 possuem $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ como fator comum e, por consequência, a expressão de S , dada por (2.3.4), tem como fator o número $a_1^2 + b_1^2$. Substituindo W , Ω , Ω_1 , Ω_2 e S em (2.3.3), vemos que $a_1^2 + b_1^2$ e $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ desaparecem da expressão de \tilde{X} por meio das operações presentes na própria expressão. Sendo assim, de (3.1.21) e (3.1.22), consideramos simplesmente

$$f(u_1) = \operatorname{sen}(\beta\sqrt{c}u_1 + A), \tag{3.1.23}$$

$$g(u_2) = \frac{\beta}{\alpha} \cosh(\alpha\sqrt{c}u_2 + B). \tag{3.1.24}$$

A primeira e a segunda formas fundamentais da superfície \tilde{X} são invariantes por uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1 - \frac{A}{\beta\sqrt{c}}, u_2 - \frac{B}{\alpha\sqrt{c}}\right)$. Portanto, podemos supor $A = B = 0$ e as expressões em (3.1.23) (3.1.23) tornam-se iguais a da primeira linha de (3.1.4) e a da primeira linha de (3.1.5), respectivamente. Para o caso $c < 0$, argumentos análogos mostram que f e g são dadas pela segunda linha de (3.1.4) e pela segunda linha de (3.1.5), respectivamente.

□

A seguinte proposição analisa os fins do tipo horosfera e as curvas de singularidades da superfície plana \tilde{X} fornecida no teorema anterior,

Proposição 3.1. *As superfícies planas \tilde{X} obtidas no Teorema 3.1 têm fins do tipo horosfera mergulhados e completos nos pontos correspondentes a*

$$\left(\frac{\pi}{\beta\sqrt{c}} \left(j + \frac{1}{2} \right), 0 \right), \quad \text{se } c > 0, \quad \text{e} \quad \left(0, \frac{\pi}{\alpha\sqrt{|c|}} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right), \quad \text{se } c < 0, \quad (3.1.25)$$

onde j é um número inteiro qualquer. Além disso, as superfícies planas \tilde{X} possuem curvas de singularidades correspondentes a

$$f + (1 - \alpha)g = 0, \quad \text{se } c > 0, \quad \text{e} \quad f + (1 + \alpha)g = 0, \quad \text{se } c < 0. \quad (3.1.26)$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.9, os fins do tipo horosfera mergulhados completos são os pontos $(u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ tais que $(W^2 - \Omega^2)(u_1, u_2) = 0$. Substituindo nesta última equação as expressões já conhecidas de Ω e W , dadas por (3.1.11) e (3.1.14), obtemos em (u_1, u_2)

$$\begin{aligned} 0 &= W^2 - \Omega^2 \\ &= \left(-\frac{\beta}{\alpha}f - \frac{\alpha}{\beta}g \right)^2 - (f + g)^2 \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2}f^2 + 2fg + \frac{\alpha^2}{\beta^2}g^2 - f^2 - 2fg - g^2 \\ &= \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) f^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right) g^2 \\ &= \beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\alpha, \beta > 0$. Então, para $c > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2 \\ &= \beta^2 \sin^2(\beta\sqrt{c}u_1) - \alpha^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cosh^2(\alpha\sqrt{c}u_2) \\ &= \beta^2 [\sin^2(\beta\sqrt{c}u_1) - \cosh^2(\alpha\sqrt{c}u_2)], \end{aligned}$$

isto é,

$$\sin^2(\beta\sqrt{c}u_1) - \cosh^2(\alpha\sqrt{c}u_2) = 0. \quad (3.1.27)$$

É simples constatar que tal equação trigonométrica tem como solução os pontos (u_1^0, u_2^0) da forma

$$u_1^0 = \frac{\pi}{\beta\sqrt{c}} \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad u_2^0 = 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Novamente, por hipótese, $\alpha, \beta > 0$. Então, para $c < 0$, vemos que

$$\begin{aligned}\beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2 &= \beta^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cosh^2(\beta \sqrt{|c|} u_1) - \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\alpha \sqrt{|c|} u_2) \\ &= \alpha^2 [\cosh^2(\beta \sqrt{|c|} u_1) - \operatorname{sen}^2(\alpha \sqrt{|c|} u_2)] = 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\cosh^2(\beta \sqrt{|c|} u_1) - \operatorname{sen}^2(\alpha \sqrt{|c|} u_2) = 0. \quad (3.1.28)$$

Os pontos (u_1^0, u_2^0) que satisfazem esta equação são da forma

$$u_1^0 = 0, \quad \text{e} \quad u_2^0 = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{|c|}} \left(j + \frac{1}{2} \right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que $\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = -1$, $\alpha, \beta > 0$ e $\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ implicam em $1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\beta^2$, i.e., $1 + \beta^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, ou seja, $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \beta^2 > 1$, logo $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 + \beta^2} > 1$, i.e., $|\lambda_1| > 1$. Então, sob as hipóteses do Teorema 2.9, concluímos que as curvas singulares de \tilde{X} são dadas por

$$\begin{aligned}0 &= W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_1 \Omega W \\ &= \left(-\frac{\beta}{\alpha} f - \frac{\alpha}{\beta} g \right)^2 + (f + g)^2 + 2\frac{\beta}{\alpha} (f + g) \left(-\frac{\beta}{\alpha} f - \frac{\alpha}{\beta} g \right) \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} f^2 + 2fg + \frac{\alpha^2}{\beta^2} g^2 + f^2 + 2fg + g^2 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} f^2 - 2fg - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} gf - 2g^2 \\ &= \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) f^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right) g^2 + 2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) fg \\ &= -\beta^2 f^2 - \alpha^2 g^2 - 2\beta^2 fg \\ &= -\beta^2 (f^2 + 2fg) - \beta^2 g^2 + \beta^2 g^2 - \alpha^2 g^2 \\ &= -\beta^2 (f + g)^2 + \beta^2 g^2 - \alpha^2 g^2 \\ &= -\beta^2 (f + g)^2 + g^2 (\beta^2 - \alpha^2) \\ &= -\beta^2 (f + g)^2 + g^2 (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\beta^2 \alpha^2}{\beta^2 \alpha^2} \\ &= -\beta^2 (f + g)^2 + \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \beta^2 \alpha^2 g^2 \\ &= -\beta^2 (f + g)^2 + \beta^2 \alpha^2 g^2 \\ &= -\beta^2 [(f + g)^2 - \alpha^2 g^2],\end{aligned}$$

ou seja,

$$(f + g)^2 - \alpha^2 g^2 = 0, \quad (3.1.29)$$

que equivale a

$$[(f + g) - \alpha g][(f + g) + \alpha g] = 0, \quad (3.1.30)$$

se, e somente se, $(f + g) - \alpha g = 0$ ou $(f + g) + \alpha g = 0$. Isto é:

1. $f + (1 - \alpha)g = 0$, onde

$$f + (1 - \alpha)g = \begin{cases} \text{sen}(\beta\sqrt{c}u_1) + (1 - \alpha)\frac{\beta}{\alpha}\cosh(\alpha\sqrt{c}u_2), & \text{se } c > 0, c \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta}\cosh(\beta\sqrt{|c|}u_1) + (1 - \alpha)\text{sen}(\alpha\sqrt{|c|}u_2), & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

2. $f + (1 + \alpha)g = 0$, onde

$$f + (1 + \alpha)g = \begin{cases} \text{sen}(\beta\sqrt{c}u_1) + (1 + \alpha)\frac{\beta}{\alpha}\cosh(\alpha\sqrt{c}u_2), & \text{se } c > 0, c \neq 1, \\ \frac{\alpha}{\beta}\cosh(\beta\sqrt{|c|}u_1) + (1 + \alpha)\text{sen}(\alpha\sqrt{|c|}u_2), & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

□

Como podemos observar, o Teorema 3.1 fornece uma família a 1-parâmetro de superfícies planas no espaço hiperbólico, obtidas por uma transformação de Ribaucour. O próximo resultado garante que esta família contém uma classe de superfícies que são periódicas em uma de suas variáveis e completas no infinito.

Proposição 3.2. *Considere a família de superfícies planas em \mathbb{H}^3 dada pelo Teorema 3.1. Se $c > 0$ e*

$$c = \frac{n^2}{m^2} \quad \text{com} \quad \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} \quad \text{irredutível}, \quad (3.1.31)$$

então:

i) a superfície é periódica na variável u_1 , com período $\frac{2m\pi}{\beta}$;

ii) existem $2n$ fins do tipo horosfera mergulhados e completos;

iii) as curvas de singularidades descritas por (3.1.26) estão contidas em um conjunto compacto;

iv) existem dois fins completos de índice geométrico m dados por limites quando $u_2 \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. Seja \tilde{X} a parametrização da família de superfícies dada por (3.1.3), com $c = \frac{n^2}{m^2}$, onde as funções f e g são dadas por (3.1.4) e (3.1.5), respectivamente. Pelo Teorema 2.8 e pela Proposição 3.1, verifica-se as propriedades *i*) e *ii*). Com relação à propriedade *iii*), segue-se das expressões das funções f e g e do fato de \tilde{X} ser periódica na variável u_1 .

Agora, provaremos que as superfícies \tilde{X} possui dois fins completos quando u_2 tende a $\pm\infty$. Ora, considerando a superfície no modelo do semi-espaço de \mathbb{H}^3 ,

$$Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right), \quad (3.1.32)$$

é possível mostrar que

$$\lim_{u_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} = \infty, \quad \lim_{u_2 \rightarrow -\infty} \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} = 0. \quad (3.1.33)$$

De fato, a partir da equação (2.3.3), temos que

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S} \right) (X^0 - X^3) - \frac{2\Omega\Omega_2}{S} (X_{u_2}^0 - X_{u_2}^3) + \frac{2\Omega W}{S} (N^0 - N^3),$$

onde X , Ω_2 , Ω , W , S são dadas por (3.1.1), (3.1.12), (3.1.11), (3.1.14) e (2.3.4), respectivamente, com $L = 0$. Consequentemente,

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = e^{-\alpha u_2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\Omega^2}{\alpha S} + \frac{2\Omega\Omega_2}{S} + \frac{2\Omega W}{\beta S} \right).$$

Uma conta simples nos permite concluir que

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{\Omega^2}{S} = \frac{1}{(c-1)\alpha^2}, \quad \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{\Omega\Omega_2}{S} = \pm \frac{\sqrt{c}}{(c-1)\alpha}, \quad \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{\Omega W}{S} = -\frac{1}{(c-1)\alpha\beta}.$$

Portanto,

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} (\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3) = h^\pm \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} e^{-\alpha u_2},$$

onde h^\pm é um número real não-nulo. Com isso, são válidos os limites em (3.1.33) e, conseqüentemente, os fins correspondentes a $u_2 \rightarrow \pm\infty$ são completos.

Para provar que estes fins têm índice geométrico m , observamos, antes, de (2.3.3) e de (3.1.1), que

$$\tilde{X}^1 = P \cos(\beta u_1) + Q \sin(\beta u_1), \quad \tilde{X}^2 = -Q \cos(\beta u_1) + P \sin(\beta u_1),$$

onde

$$P = \frac{1}{\beta} - \frac{2\Omega\beta f}{S} \quad \text{e} \quad Q = \frac{2\Omega^2}{S}.$$

Além disso, $\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} P = \frac{1}{\beta}$ e $q := \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} Q = \frac{2}{(c-1)(2+\alpha^2)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right) = \\ & \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\alpha u_2}}{h^\pm} \left(\frac{1}{\beta} \cos(\beta u_1) + q \cos(\beta u_1), -q \cos(\beta u_1) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta u_1) \right). \end{aligned}$$

Como $0 \leq u_2 \leq \frac{2m\pi}{\beta}$, concluímos que os fins correspondentes a $u_2 \rightarrow \pm\infty$ tem índice m . Observando o modelo da bola de Poincaré, o fim correspondente a $u_2 \rightarrow \infty$ vai para $(0, 0, 1)$ e o fim correspondente a $u_2 \rightarrow -\infty$ vai para $(0, 0, 0)$.

□

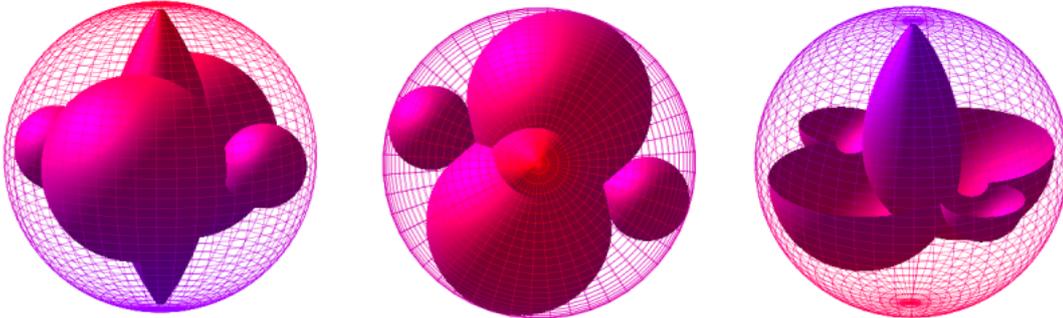


Figura 3.1 Perspectiva, Superior e Interna para $\alpha = \frac{4}{5}$, $n = 2$, $m = 1$.

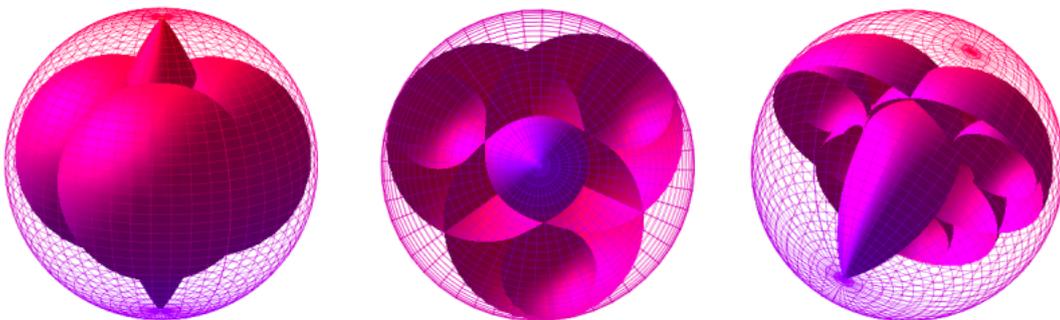


Figura 3.2 Perspectiva, Superior e Interna para $\alpha = \frac{4}{5}$, $n = 3$, $m = 1$.

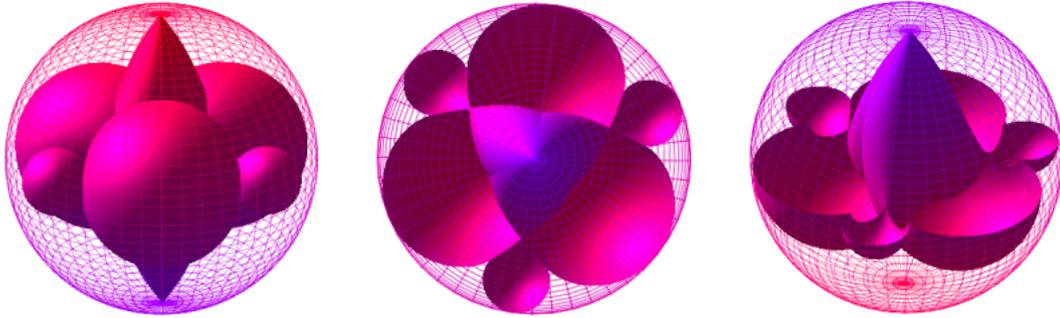


Figura 3.3 Perspectiva, Superior e Interna para $\alpha = \frac{4}{5}$, $n = 3$, $m = 2$

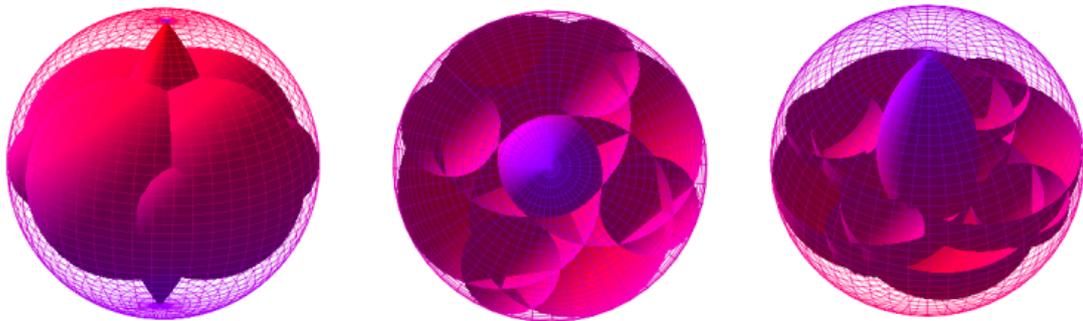


Figura 3.4 Perspectiva, Superior e Interna para $\alpha = \frac{4}{5}$, $n = 4$, $m = 1$

As figuras acima são uma representação gráfica das transformadas obtidas a partir do cilindro no modelo da bola de Poincaré para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 . Mais especificamente, a Figura 3.1 fornece uma superfície plana de \mathbb{H}^3 com as suas vistas superior e interna, associada ao cilindro por uma transformação de Ribaucour, periódica em uma variável e parametrizada por (3.1.3) com $\alpha = 4/5$, $n = 2$ e $m = 1$. Tal superfície possui seis fins mergulhados, dos quais quatro são do tipo horosfera.

A Figura 3.2 exhibe uma superfície plana de \mathbb{H}^3 com as suas vistas superior e interna, obtidas por uma transformação de Ribaucour para $\alpha = 4/5$. Observe ainda que, pela Proposição 3.2, escolhendo-se a constante de Ribaucour na forma $c = n^2/m^2$, com $n = 3$ e $m = 1$, a superfície em questão apresenta periodicidade na variável u_1 .

A Figura 3.3 também apresenta uma superfície plana de \mathbb{H}^3 com as suas vistas superior e interna, obtidas por uma transformação de Ribaucour para $\alpha = 4/5$, $n = 3$ e $m = 2$, sendo também periódica em uma de suas variáveis. Observe a mudança da Figura 3.2 para a Figura 3.3 com a alteração do índice geométrico m . Ambas as superfícies apresentam oito fins mergulhados, sendo seis deles do tipo horosfera.

A Figura 3.4 apresenta uma superfície plana de \mathbb{H}^3 obtida por uma transformação de Ribaucour para o cilindro em \mathbb{H}^3 , bem como as suas vistas superior e interna. Ela é periódica em uma variável e parametrizada por (3.1.3), com $\alpha = 4/5$, $n = 4$ e $m = 1$. Tem-se dez fins mergulhados, dos quais oito são do tipo horosfera.

Observamos ainda que, em geral, para valores de c diferentes da forma expressa em (3.1.31), a superfície obtida não é periódica em uma de suas variáveis e possui infinitos fins mergulhados do tipo horosfera (veja Proposição 3.1).

3.2 Transformação de Ribaucour para superfícies planas de rotação sem singularidades isoladas

Nesta seção, consideramos inicialmente superfícies planas de rotação em \mathbb{H}^3 sem singularidades isoladas, conforme o Exemplo 1.2. Além disso, observamos que tais superfícies são parametrizadas por linhas de curvatura. Estudaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Considere M uma superfície plana de rotação sem singularidades isoladas em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, parametrizada por linhas de curvatura,*

$$X(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{a\alpha} \cosh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \cos \frac{\alpha u_1}{2}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \sin \frac{\alpha u_1}{2}, -\frac{1}{a\alpha} \sinh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) \right), \quad (3.2.1)$$

com primeira forma fundamental dada, segundo a Proposição 2.3, por $I = \cosh^2 \phi du_1^2 + \sinh^2 \phi du_2^2$. Considere ainda o vetor normal unitário de M dado por

$$N(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{a\alpha} \sinh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \cos \frac{\alpha u_1}{2}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \sin \frac{\alpha u_1}{2}, -\frac{1}{a\alpha} \cosh(\varepsilon au_2 - \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{\varepsilon u_2}{a} + \beta\right) \right), \quad (3.2.2)$$

onde

$$\alpha = \frac{\varepsilon(1-a^2)}{a}, \quad \phi = \frac{\varepsilon(1+a^2)}{2a} u_2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{com} \quad \varepsilon(1-a^2) > 0, \quad (3.2.3)$$

e, sem perda de generalidade, consideramos $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo

$$\beta = \frac{1}{1+a^2} [(1-a^2) \log(\varepsilon(1-a^2)) + 2a^2 \log a].$$

Então, a família de superfícies planas em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ (não-congruentes a M) associada a X por uma transformação de Ribaucour, como no Teorema 2.7, é dada por

$$\tilde{X} = X + \frac{2c(T \cosh \phi - g' \sinh \phi)}{(c-1)[T^2 - (g')^2]} \left[\Omega X + WN - \frac{f'}{\cosh \phi} X_{u_1} - \frac{bf+g}{\sinh \phi} X_{u_2} \right], \quad (3.2.4)$$

onde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $b = \frac{\varepsilon(1+a^2)}{2a}$, $\varepsilon = \pm 1$ com $\varepsilon(1-a^2) > 0$, $\phi = bu_2$,

$$\Omega = \frac{1}{c}(T \cosh \phi - g' \sinh \phi), \quad W = \frac{1}{c}(-T \sinh \phi + g' \cosh \phi), \quad T = cf + bg + L \quad (3.2.5)$$

e as funções $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são dadas por:

i) se $b^2 - c = 0$, então $L \neq 0$ e

$$f(u_1) = L \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0, \quad g(u_2) = bL \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3, \quad (3.2.6)$$

com

$$b^2 c_1^2 + c_2^2 - L[L + 2b(bc_0 + c_3)] = 0; \quad (3.2.7)$$

ii) se $b^2 - c > 0$, então $L = 0$ e

$$f(u_1) = \text{sen}(\sqrt{b^2 - c} u_1), \quad (3.2.8)$$

$$g(u_2) = \begin{cases} \sqrt{c} \cosh(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B), & \text{se } c > 0, \\ \sqrt{-c} \sinh(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B), & \text{se } c < 0, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

onde B é uma constante real;

iii) se $b^2 - c < 0$, então $L = 0$ e

$$f(u_1) = \cosh(\sqrt{|b^2 - c|} u_1), \quad g(u_2) = \sqrt{c} \text{sen}(\sqrt{|b^2 - c|} u_2 + B), \quad (3.2.10)$$

onde B é uma constante real.

Além disto, a superfície \tilde{X} é regular sobre o seguinte conjunto

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_2 > 0, [T^2 - (g')^2]\{[T^2 + (g')^2] \sinh \phi - 2Tg' \cosh \phi\} \neq 0\}. \quad (3.2.11)$$

Demonstração. Seja M uma superfície plana de rotação parametrizada por linhas de curvatura tal como em (3.2.1), cujas primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (veja Proposição 2.3):

$$\begin{aligned} I &= \cosh^2 \phi(u_1, u_2) du_1^2 + \sinh^2 \phi(u_1, u_2) du_2^2, \\ II &= \pm \sinh(2\phi(u_1, u_2)) (du_1^2 + du_2^2), \end{aligned}$$

onde $\phi(u_1, u_2)$ é a função harmônica associada à superfície dada em (3.2.3).

A fim de obtermos novas superfícies planas de \mathbb{H}^3 localmente associadas a M por uma transformação de Ribaucour, iremos resolver o sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, proveniente do sistema (2.3.15), onde $a_1 = \cosh \phi$, $a_2 = \sinh \phi$, e as curvaturas principais são $\lambda_1 = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi}$ e $\lambda_2 = \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi}$, ou seja:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \cosh \phi \Omega_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \sinh \phi \Omega_2, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -\sinh \phi \Omega_1, \quad \frac{\partial W}{\partial u_2} = -\cosh \phi \Omega_2, \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1}(\sinh \phi) \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2, \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_2}(\cosh \phi) \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1, \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = -\frac{1}{\sinh \phi} \frac{\partial}{\partial u_2}(\cosh \phi) \Omega_2 + c \left(\Omega + W \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \right) \cosh \phi, \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{\cosh \phi} \frac{\partial}{\partial u_1}(\sinh \phi) \Omega_1 + c \left(\Omega + W \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} \right) \sinh \phi. \quad (3.2.17)$$

As soluções do sistema, Ω_1 , Ω_2 , Ω e W , satisfazem também a condição algébrica adicional dada por (2.3.2), isto é,

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2),$$

para qualquer constante $c \notin \{0, 1\}$.

Observe inicialmente que, como $\phi(u_1, u_2) = bu_2$, temos $\phi_{u_1}(u_1, u_2) = 0$ e $\phi_{u_2}(u_1, u_2) = b$. A equação (3.2.14) fornece

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1}(\sinh \phi) \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2 = \cosh \phi \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2 = 0.$$

Enquanto a equação (3.2.15) fica

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_2} (\cosh \phi) \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1 = \sinh \phi \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1 = b \Omega_1.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = b \Omega_1. \quad (3.2.18)$$

Integrando estas duas últimas equações, obtemos que, existem funções reais diferenciáveis $f(u_1)$ e $g(u_2)$ tais que

$$\Omega_1(u_1, u_2) = f'(u_1) \quad \text{e} \quad \Omega_2(u_1, u_2) = b f(u_1) + g(u_2). \quad (3.2.19)$$

Substituindo as expressões de Ω_1 e Ω_2 nas equações (3.2.16) e (3.2.17), obtemos as seguintes EDO's:

$$f''(u_1) = -[b f(u_1) + g(u_2)] b + c(\Omega \cosh \phi + W \sinh \phi), \quad (3.2.20)$$

$$g''(u_2) = c(\Omega \sinh \phi + W \cosh \phi). \quad (3.2.21)$$

Como $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, temos $[f'' + b(bf + g)] \frac{1}{c} = \Omega \cosh \phi + W \sinh \phi$. Multiplicando ambos os lados por $\cosh \phi$, obtemos

$$\frac{1}{c} [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi = \Omega \cosh^2 \phi + W \sinh \phi \cosh \phi. \quad (3.2.22)$$

Mas, de (3.2.21), temos que $W \cosh \phi = \frac{1}{c} g' - \Omega \sinh \phi$. Substituindo em (3.2.22), vemos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi &= \Omega \cosh^2 \phi + \left(\frac{1}{c} g' - \Omega \sinh \phi \right) \sinh \phi \\ &= \Omega \cosh^2 \phi + \frac{1}{c} g' \sinh \phi - \Omega \sinh^2 \phi \\ &= \Omega (\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi) + \frac{1}{c} g' \sinh \phi \\ &= \Omega + \frac{1}{c} g' \sinh \phi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Omega = \frac{1}{c} \{ [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi - g' \sinh \phi \}. \quad (3.2.23)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2.20) por $\sinh \phi$, vemos que

$$[f'' + b(bf + g)] \sinh \phi = c(\Omega \cosh \phi \sinh \phi + W \sinh^2 \phi). \quad (3.2.24)$$

Como, por (3.2.21),

$$c\Omega \sinh \phi = g' - cW \cosh \phi.$$

Substituindo na equação (3.2.24), obtemos

$$\begin{aligned} [f'' + b(bf + g)] \sinh \phi &= (g' - cW \cosh \phi) \cosh \phi + cW \sinh^2 \phi \\ &= g' \cosh \phi + cW(\sinh^2 \phi - \cosh^2 \phi) \\ &= g' \cosh \phi - cW. \end{aligned}$$

Daí,

$$W = \frac{1}{c} \{ -[f'' + b(bf + g)] \sinh \phi + g' \cosh \phi \}. \quad (3.2.25)$$

Usando (3.2.23), podemos derivar a expressão de Ω , vista em (3.2.23), com relação a u_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{c} \{ [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi - g' \sinh \phi \} \right) \\ &= \frac{1}{c} \{ [f''' + b(bf')] \cosh \phi + \phi_{u_1} \sinh \phi [f'' + b(bf + g)] - g' \phi_{u_1} \sinh \phi \} \\ &= \frac{1}{c} (f''' + b^2 f') \cosh \phi. \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação diferencial em (3.2.12) também nos mostra que $\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \cosh \phi \Omega_1 = \cosh \phi f'$. Com isso, vale a igualdade $\frac{1}{c} (f''' + b^2 f') \cosh \phi = \cosh \phi f'$. Ou seja, $f''' = -(b^2 - c)f'$. Integrando esta última igualdade com relação a u_1 , encontramos a EDO linear de segunda ordem

$$f''(u_1) + (b^2 - c)f(u_1) = L, \quad (3.2.26)$$

onde $L \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

Similarmente, podemos usar (3.2.12) e derivar Ω , dada por (3.2.23), com relação a u_2 , para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{c} \{ [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi - g' \sinh \phi \} \right) \\ &= \frac{1}{c} (bg' \cosh \phi + \phi_{u_2} \sinh \phi [f'' + b(bf + g)] - g'' \sinh \phi - \phi_{u_2} \cosh \phi g') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [b^2(bf + g) \sinh \phi + b \sinh \phi f'' - g'' \sinh \phi] \\
 &= \frac{1}{c} [b^2(bf + g) + bf'' - g''] \sinh \phi.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, $\frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \sinh \phi \Omega_2 = \sinh \phi (bf + g)$. Daí, $\frac{1}{c} [b^2(bf + g) + bf'' - g''] \sinh \phi = \sinh \phi (bf + g)$. Donde, $\frac{1}{c} (bf'' - g'') = \left(1 - \frac{b^2}{c}\right) (bf + g)$. Logo, $g'' = bf'' - (c - b^2)(bf + g)$. Equivalentemente, $b[f'' + (b^2 - c)f] = g'' + (c - b^2)g = g'' - (b^2 - c)g$. Usando (3.2.26), concluímos que

$$g''(u_2) - (b^2 - c)g(u_2) = bL. \quad (3.2.27)$$

Além disso, as equações de (3.2.13) são trivialmente satisfeitas. De fato, pois, para a primeira equação, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{c} [f'' + b(bf + g)] \sinh \phi + g' \cosh \phi \right) \\
 &= \frac{1}{c} (-[f''' + b^2 f'] \sinh \phi - \phi_{u_1} \cosh \phi [f'' + b(bf + g)] + \phi_{u_1} \sinh \phi g') \\
 &= -\frac{1}{c} [f''' + b^2 f'] \sinh \phi \\
 &= -\frac{1}{c} c f' \sinh \phi, \quad (\text{usamos (3.2.26)}) \\
 &= -f' \sinh \phi \\
 &= -\Omega_1 \sinh \phi,
 \end{aligned}$$

Quanto à segunda equação de (3.2.13), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial u_2} &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{c} [f'' + b(bf + g)] \sinh \phi + g' \cosh \phi \right) \\
 &= \frac{1}{c} (-bg' \sinh \phi - \phi_{u_2} \cosh \phi [f'' + b(bf + g)] + g'' \cosh \phi + \phi_{u_2} g' \sinh \phi) \\
 &= \frac{1}{c} (-bf'' \cosh \phi - b^2(bf + g) \cosh \phi + g'' \cosh \phi) \\
 &= \frac{1}{c} (-bf'' \cosh \phi - b^3 f \cosh \phi - b^2 g \cosh \phi + g'' \cosh \phi) \\
 &= -\frac{1}{c} \cosh \phi [b(f'' + b^2 f) + b^2 g - g''] \\
 &= -\frac{1}{c} \cosh \phi [b(L + cf) + b^2 g - bL - (b^2 - c)g] \\
 &= -\frac{1}{c} \cosh \phi [c(bf + g)]
 \end{aligned}$$

$$= -\Omega_2 \cosh \phi.$$

Com relação à condição adicional (2.3.2), $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2)$, podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$(f')^2 + (bf + g)^2 = c \left[\frac{1}{c^2} \{ [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi - g' \sinh \phi \}^2 - \frac{1}{c^2} \{ -[f'' + b(bf + g)] \sinh \phi + g' \cosh \phi \}^2 \right]. \quad (3.2.28)$$

Vamos, agora, calcular as parcelas do lado direito da equação (3.2.28). O primeiro quadrado fica

$$\begin{aligned} & \{ [f'' + b(bf + g)] \cosh \phi - g' \sinh \phi \}^2 = \\ & = [f'' + b(bf + g)]^2 \cosh^2 \phi - 2[f'' + b(bf + g)] \cosh \phi g' \sinh \phi + (g')^2 \sinh^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

O segundo quadrado fica

$$\begin{aligned} & \{ -[f'' + b(bf + g)] \sinh \phi + g' \cosh \phi \}^2 = \\ & = [f'' + b(bf + g)]^2 \sinh^2 \phi - 2[f'' + b(bf + g)] \sinh \phi g' \cosh \phi + (g')^2 \cosh^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Tomando a diferença entre (3.2.29) e (3.2.30), chegamos a

$$\begin{aligned} (f')^2 + (bf + g)^2 &= c \frac{1}{c^2} \{ [f'' + b(bf + g)]^2 (\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi) + (g')^2 (\sinh^2 \phi - \cosh^2 \phi) \} \\ &= \frac{1}{c} \{ [f'' + b(bf + g)]^2 - (g')^2 \}. \end{aligned}$$

Relembremo-nos ainda que $f'' + b(bf + g) = L + cf + bg$. Por conseguinte, a condição adicional fica

$$c(f')^2 + (g')^2 + c(bf + g)^2 - (cf + bg + L)^2 = 0. \quad (3.2.31)$$

Definindo $T = cf + bg + L$, verificamos que as funções Ω e W são dadas por (3.2.5). Com isso, temos também a seguinte relação

$$\Omega^2 - W^2 = \frac{1}{c^2} [T^2 - (g')^2]. \quad (3.2.32)$$

Segue do Teorema 2.7 que a superfície \tilde{X} é dada pela expressão em (3.2.4). De fato, basta substituir $\Omega_1, \Omega_2, \Omega, W$ e S na equação (2.3.3). Veja:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right)X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right) \\ &= X + \frac{2\Omega}{S} \left[\Omega X - \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i + WN\right] \\ &= X + \frac{2c(T \cosh \phi - g' \cosh \phi)}{(c-1)[T^2 - (g')^2]} \left[\Omega X + WN - \frac{f'}{\cosh \phi} X_{u_1} - \frac{bf+g}{\sinh \phi} X_{u_2}\right],\end{aligned}$$

pois $\left\{e_1 = \frac{X_{u_1}}{\cosh \phi}, e_2 = \frac{X_{u_2}}{\sinh \phi}\right\}$ é o referencial móvel ortonormal tangente a M e $\{\omega_1 = \cosh \phi du_1, \omega_2 = \sinh \phi du_2\}$ é o correferencial correspondente de M . A primeira forma fundamental de \tilde{M} é dada por $\tilde{I} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$. Pela Observação 2.1, o referencial dual é expresso por

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_1 \Omega W}{W^2 - \Omega^2} \omega_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_2 \Omega W}{W^2 - \Omega^2} \omega_2. \quad (3.2.33)$$

Reescreveremos estas 1-formas em termos das funções f e g usando as relações (3.2.23) e (3.2.25). Temos, inicialmente, que

$$\begin{aligned}W^2 + \Omega^2 &= \frac{1}{c^2} [(-T \sinh \phi + g' \cosh \phi)^2 + (T \cosh \phi - g' \sinh \phi)^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [T^2 \sinh^2 \phi - 2Tg' \sinh \phi \cosh \phi + (g')^2 \cosh^2 \phi \\ &\quad + T^2 \cosh^2 \phi - 2Tg' \cosh \phi \sinh \phi + (g')^2 \sinh^2 \phi] \\ &= \frac{1}{c^2} \{(\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi)[T^2 + (g')^2] - 4Tg' \sinh \phi \cosh \phi\}. \\ 2\lambda_1 \Omega W &= \frac{2}{c^2} \lambda_1 (T \cosh \phi - g' \sinh \phi)(-T \sinh \phi + g' \cosh \phi) \\ &= \frac{2}{c^2} \lambda_1 (-T^2 \cosh \phi \sinh \phi + Tg' \cosh^2 \phi + g'T \sinh^2 \phi - (g')^2 \sinh \phi \cosh \phi) \\ &= \frac{2}{c^2} \lambda_1 [-\sinh \phi \cosh \phi (T^2 + (g')^2) + Tg'(\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi)].\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_1 \Omega W &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2](\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4Tg' \sinh \phi \cosh \phi \right. \\
 &\quad \left. - 2\sinh^2 \phi [T^2 + (g')^2] + 2Tg' \sinh \phi \cosh \phi + 2Tg' \frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2](\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi - 2\sinh^2 \phi) \right. \\
 &\quad \left. - 2Tg' \left(\frac{\sinh \phi \cosh^2 \phi}{\cosh \phi} - \frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2] - 2Tg' \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} [T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg'].
 \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Como sabemos que $W^2 - \Omega^2 = \frac{1}{c^2} [(g')^2 - T^2]$. Portanto,

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg'}{T^2 - (g')^2} \omega_1. \tag{3.2.35}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_2 \Omega W &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2](\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4Tg' \sinh \phi \cosh \phi \right. \\
 &\quad \left. - 2\cosh^2 \phi [T^2 + (g')^2] + 2Tg' \cosh \phi \sinh \phi + 2Tg' \frac{\cosh^3 \phi}{\sinh \phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2](\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi - 2\cosh^2 \phi) \right. \\
 &\quad \left. - 2Tg' \left(\frac{\sinh^2 \phi \cosh \phi}{\sinh \phi} - \frac{\cosh^3 \phi}{\sinh \phi} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} \left\{ -[T^2 + (g')^2] + 2Tg' \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} \right\} \\
 &= -\frac{1}{c^2} [T^2 + (g')^2 - 2\lambda_2 Tg'].
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_2 Tg'}{T^2 - (g')^2} \omega_2. \tag{3.2.36}$$

Agora, vamos calcular as curvaturas principais, $-\tilde{\lambda}_1$ e $-\tilde{\lambda}_2$, de \tilde{M} . No capítulo anterior, Observação 2.1, vimos que

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{2\Omega W + \lambda_i(W^2 + \Omega^2)}{2\Omega W \lambda_i + W^2 + \Omega^2}, \quad i = 1, 2.$$

Como $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, segue também que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_2 &= -\frac{2\Omega W + \lambda_2(W^2 + \Omega^2)}{2\Omega W \lambda_2 + W^2 + \Omega^2} \\ &= -\frac{2\Omega W \lambda_1 + W^2 + \Omega^2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_1} \\ &= -\frac{2\Omega W \lambda_1 + W^2 + \Omega^2}{2\Omega W + (W^2 + \Omega^2)\lambda_1} \\ &= \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Já conhecemos de (3.2.34) a relação

$$2\lambda_1 \Omega W + W^2 + \Omega^2 = \frac{1}{c^2} [T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 T g'].$$

Além do mais,

$$\begin{aligned} 2\Omega W + \lambda_1(W^2 + \Omega^2) &= \frac{1}{c^2} \{ -2 \sinh \phi \cosh \phi [T^2 + (g')^2] + 2T g' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) \\ &\quad + \lambda_1 [T^2 + (g')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4\lambda_1 T g' \sinh \phi \cosh \phi \} \\ &= \frac{1}{c^2} \{ -2 \sinh \phi \cosh \phi [T^2 + (g')^2] + 2T g' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) \\ &\quad + [T^2 + (g')^2] \left(\frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} + \sinh \phi \cosh \phi \right) - 4T g' \sinh^2 \phi T g' \} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (g')^2] \left(\frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} + \sinh \phi \cosh \phi - 2 \sinh \phi \cosh \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + 2T g' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi - 2 \sinh^2 \phi) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ -[T^2 + (g')^2] \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} + 2T g' \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \{ -[T^2 + (g')^2] \lambda_1 + 2T g' \}. \end{aligned}$$

De posse da relação fornecida em (3.2.37), concluímos que

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{[T^2 + (g')^2]\lambda_1 - 2Tg'}{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg'} \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg'}{[T^2 + (g')^2]\lambda_1 - 2Tg'}. \quad (3.2.38)$$

Pelo Teorema 2.7, a superfície \tilde{X} , localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour, é regular sobre o conjunto $\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U; (W^2 - \Omega^2)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_1 \Omega W)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_2 \Omega W) \neq 0\}$. Substituindo as expressões Ω_1 , Ω_2 , Ω e W , vistas em (3.2.19), (3.2.23) e (3.2.25), respectivamente, escrevemos o conjunto sobre o qual \tilde{X} é regular da seguinte forma:

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_2 > 0, [T^2 - (g')^2][(T^2 + (g')^2) \sinh \phi - 2Tg' \cosh \phi] \neq 0\},$$

que é a expressão dada por (3.2.11).

Voltando às equações diferenciais ordinárias (3.2.26) e (3.2.27), exibiremos agora as suas soluções analisando os três seguintes casos: quando $b^2 - c = 0$; quando $b^2 - c > 0$; e quando $b^2 - c < 0$.

Caso I. Quando $b^2 - c = 0$.

Neste caso, temos $f''(u_1) = L$ e $g''(u_2) = bL$. Integrando a primeira equação com respeito a u_1 , obtemos

$$f'(u_1) = L u_1 + c_1.$$

Integrando novamente, obtemos a função $f(u_1)$ de (3.2.6). Isto é,

$$f(u_1) = L \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0,$$

sendo c_0, c_1 constantes de integração.

Analogamente, integrando a segunda equação diferencial dada inicialmente, obtemos $g(u_2)$ de (3.2.6). Isto é,

$$g(u_2) = bL \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3,$$

com $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ constantes. Com isso, podemos reescrever a condição algébrica adicional (3.2.31) da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 &= c(f')^2 + (g')^2 + c(bf + g)^2 - (cf + bg + L)^2 \\ &= c(Lu_1 + c_1)^2 + (bLu_2 + c_2)^2 + c \left(bL \frac{u_1^2}{2} + bc_1 u_1 + bc_0 + bL \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3 \right)^2 \end{aligned}$$

$$- \left(cL \frac{u_1^2}{2} + cc_1 u_1 + cc_0 + b^2 L \frac{u_2^2}{2} + bc_2 u_2 + bc_3 + L \right)^2.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} 0 &= cc_1^2 + c_2^2 + c(bc_0 + c_3)^2 - (cc_0 + bc_3 + L)^2 \\ &= cc_1^2 + c_2^2 + c(b^2 c_0^2 + 2bc_0 c_3 + c_3^2) - (c^2 c_0^2 + 2cc_0(bc_3 + L) + (bc_3 + L)^2) \\ &= cc_1^2 + c_2^2 + cb^2 c_0^2 + 2bcc_0 c_3 + cc_3^2 - c^2 c_0^2 - 2cc_0 bc_3 - 2cc_0 L - b^2 c_3^2 - 2bc_3 L - L^2 \\ &= cc_1^2 + c_2^2 + cc_0^2(b^2 - c) - 2cc_0 L + c_3^2(c - b^2) - 2bc_3 L - L^2 \\ &= cc_1^2 + c_2^2 - L[L + 2b(bc_0 + c_3)] = b^2 c_1^2 + c_2^2 - L[L + 2b(bc_0 + c_3)], \end{aligned}$$

o que verifica (3.2.7).

Afirmção 1. *Se $b^2 - c = 0$ e $L = 0$, então a superfície \tilde{X} associada a X , via transformação de Ribaucour, é congruente a X .*

Demonstração da Afirmção 1. De fato, se $L = 0$, então a equação (3.2.7) que relaciona as constantes de integração reduz-se a $b^2 c_1^2 + c_2^2 = 0$. Como $b \neq 0$, segue que $c_1 = c_2 = 0$. Com isso, as funções f e g são constantes iguais a c_0 e c_3 , respectivamente. Por (3.2.35), (3.2.36) e (3.2.38), vemos que $\tilde{\omega}_1 = -\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$ e $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2$. Portanto, $\tilde{I} = I$ e $\tilde{II} = II$, onde \tilde{I} e \tilde{II} , I e II indicam as primeiras e segundas formas fundamentais de \tilde{X} e X , respectivamente. Isto prova a Afirmção 1.

Caso II. *Quando $b^2 - c > 0$.*

Neste caso, as soluções das equações diferenciais (3.2.26) e (3.2.27) são dadas por

$$f(u_1) = a_1 \cos(\sqrt{b^2 - c} u_1) + b_1 \sin(\sqrt{b^2 - c} u_1) + \frac{L}{b^2 - c}, \quad (3.2.39)$$

$$g(u_2) = a_2 \cosh(\sqrt{b^2 - c} u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{b^2 - c} u_2) - \frac{bL}{b^2 - c}, \quad (3.2.40)$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Afirmção 2. *Se $b^2 - c > 0$, então, sem perda de generalidade, consideramos $L = 0$.*

Demonstração da Afirmção 2. Por (3.2.5), temos $T(u_1, u_2) = cf(u_1, u_2) + bg(u_1, u_2) + L$, que não depende de L . Consequentemente, as funções Ω e W também não dependem de L . Observando as expressões de (3.2.19), concluímos o mesmo para as aplicações Ω_1 e Ω_2 . Portanto, \tilde{X} não depende de L . Sendo assim, podemos considerar, sem perda de generalidade, $L = 0$. Isto prova a Afirmção 2.

Agora, veremos como fica a condição algébrica adicional dada em (3.2.31):

$$\begin{aligned}
 f'(u_1) &= \sqrt{b^2 - c} [-a_1 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) + b_1 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1})], \\
 g'(u_2) &= \sqrt{b^2 - c} [a_2 \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) + b_2 \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2})], \\
 c(f')^2 &= (b^2 - c)[ca_1^2 \operatorname{sen}^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) - 2ca_1b_1 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \\
 &\quad + cb_1^2 \operatorname{cos}^2(\sqrt{b^2 - cu_1})], \\
 (g')^2 &= (b^2 - c)[a_2^2 \operatorname{senh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) + 2a_2b_2 \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_2^2 \operatorname{cosh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2})]. \\
 c(bf + g)^2 &= c(b^2 f^2 + 2bfg + g^2) = cb^2(a_1^2 \operatorname{cos}^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) \\
 &\quad + 2a_1b_1 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) + b_1^2 \operatorname{sen}^2(\sqrt{b^2 - cu_1})) \\
 &\quad + 2bc[a_1a_2 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + a_1b_2 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_1a_2 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_1b_2 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2})] \\
 &\quad + c[a_2^2 \operatorname{cosh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) + 2a_2b_2 \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_2^2 \operatorname{senh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2})], \\
 (cf + bg)^2 &= c^2 f^2 + 2cbfg + b^2 g^2 = c^2(a_1^2 \operatorname{cos}^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) \\
 &\quad + 2a_1b_1 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) + b_1^2 \operatorname{sen}^2(\sqrt{b^2 - cu_1})) \\
 &\quad + 2cb[a_1a_2 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + a_1b_2 \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_1a_2 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_1b_2 \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2})] \\
 &\quad + b^2[a_2^2 \operatorname{cosh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) + 2a_2b_2 \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \\
 &\quad + b_2^2 \operatorname{senh}^2(\sqrt{b^2 - cu_2})].
 \end{aligned}$$

Assim, somando os termos supracitados e observando que $L = 0$, deparamo-nos com as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 0 &= c(f')^2 + (g')^2 + c(bf + g)^2 - (cf + bg)^2 \\
 &= \operatorname{sen}^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) \underbrace{[ca_1^2(b^2 - c) + cb^2b_1^2 - c^2b_1^2]}_{c(b^2 - c)(a_1^2 + b_1^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) \underbrace{[cb_1^2(b^2 - c) + cb^2a_1^2 - c^2a_1^2]}_{c(b^2-c)(b_1^2+a_1^2)} \\
 & + \sin(\sqrt{b^2 - cu_1}) \cos(\sqrt{b^2 - cu_1}) \underbrace{[-2ca_1b_1(b^2 - c) + 2cb^2a_1b_1 - 2c^2a_1b_1]}_{(b^2-c)[-2ca_1b_1+2ca_1b_1]=0} \\
 & + \sinh^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) \underbrace{[a_2^2(b^2 - c) + cb_2^2 - b^2b_2^2]}_{(b^2-c)(a_2^2-b_2^2)} \\
 & + \cosh^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) \underbrace{[b_2^2(b^2 - c) + ca_2^2 - b^2a_2^2]}_{(b^2-c)(b_2^2-a_2^2)} \\
 & + \sinh(\sqrt{b^2 - cu_2}) \cosh(\sqrt{b^2 - cu_2}) \underbrace{[2a_2b_2(b^2 - c) + 2ca_2b_2 - 2b^2a_2b_2]}_{(b^2-c)[2a_2b_2-2a_2b_2]=0} \\
 & = c(b^2 - c)(a_1^2 + b_1^2)[\sin^2(\sqrt{b^2 - cu_1}) + \cos^2(\sqrt{b^2 - cu_1})] \\
 & \quad + (b^2 - c)(b_2^2 - a_2^2)[\cosh^2(\sqrt{b^2 - cu_2}) - \sinh^2(\sqrt{b^2 - cu_2})] \\
 & = (b^2 - c)[(a_1^2 + b_1^2)c + (b_2^2 - a_2^2)].
 \end{aligned}$$

Por fim, como $b^2 - c > 0$ e $c \neq 0$, a condição algébrica (3.2.31) torna-se

$$a_1^2 + b_1^2 - \frac{1}{c}(a_2^2 - b_2^2) = 0. \quad (3.2.41)$$

Afirmção 3. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então as superfícies \tilde{X} e X são congruentes.

Demonstração da Afirmção 3. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então $a_1 = b_1 = 0$ e $a_2 = \pm b_2$. Consequentemente,

$$f \equiv 0 \quad \text{e} \quad g = a_2[\cosh(\sqrt{b^2 - cu_2}) \pm \sinh(\sqrt{b^2 - cu_2})] = a_2 e^{\pm\sqrt{b^2 - cu_2}}.$$

Usando (3.2.35), (3.2.36) e (3.2.38), vemos que

$$\begin{aligned}
 T^2 & = (cf + bg)^2 = b^2g^2 = b^2a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}, \\
 g' & = \pm\sqrt{b^2 - ca_2} e^{\pm\sqrt{b^2 - cu_2}}, \quad (g')^2 = (b^2 - c)a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}, \\
 2Tg' & = 2bgg' = \pm 2ba_2^2\sqrt{b^2 - c} e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}, \\
 T^2 - (g')^2 & = a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}(b^2 - b^2 + c) = ca_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg' = b^2a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} + (b^2 - c)a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}$$

$$\begin{aligned} & \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b a_2^2 \sqrt{b^2 - c} e^{\pm 2\sqrt{b^2 - c} u_2} \\ & = a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - c} u_2} \left(2b^2 - c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 - c} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 & = -\frac{1}{c} \left(2b^2 - c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 - c} \right) \omega_1 \\ & = -\frac{1}{c} \left(2b^2 - c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 - c} \right) \cosh \phi \, du_1 \\ & = -\frac{1}{c} \left[(2b^2 - c) \cosh \phi \mp 2b \sqrt{b^2 - c} \sinh \phi \right] du_1. \end{aligned}$$

Lembrando que, por definição, $\phi = bu_2$. Podemos ainda tomar $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cosh \delta = \frac{2b^2 - c}{|c|} \quad \text{e} \quad \sinh \delta = \frac{2b\sqrt{b^2 - c}}{|c|}.$$

O que nos dá

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 & = -\frac{|c|}{c} \left(\frac{2b^2 - c}{|c|} \cosh \phi \mp \frac{2b\sqrt{b^2 - c}}{|c|} \sinh \phi \right) du_1 \\ & = -\frac{|c|}{c} (\cosh \delta \cosh \phi \mp \sinh \delta \sinh \phi) du_1 \\ & = -\frac{|c|}{c} \cosh(\phi \mp \delta) du_1 \\ & = -\frac{|c|}{c} \cosh(bu_2 \mp \delta) du_1. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 & = (-1)^2 \frac{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_2 T g'}{T^2 - (g')^2} \omega_2 \\ & = \frac{a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - c} u_2} \left(2b^2 - c \mp 2 \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} b \sqrt{b^2 - c} \right)}{c a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - c} u_2}} \sinh \phi \, du_2 \\ & = \frac{|c|}{c} \left(\frac{2b^2 - c}{|c|} \sinh \phi \mp \frac{2b\sqrt{b^2 - c}}{|c|} \cosh \phi \right) du_2 \\ & = \frac{|c|}{c} (\cosh \delta \sinh \phi \mp \sinh \delta \cosh \phi) du_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|c|}{c} \sinh(\phi \mp \delta) du_2 \\ &= \frac{|c|}{c} \sinh(bu_2 \mp \delta) du_2. \end{aligned}$$

Com relação às curvaturas principais, calculando inicialmente o numerador da expressão de $\tilde{\lambda}_1$, dada por (3.2.38), obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} [T^2 + (g')^2]\lambda_1 - 2Tg' &= \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} (2b^2 - c)a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} \mp 2b\sqrt{b^2 - c}a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} \\ &= \frac{1}{\cosh \phi} [(2b^2 - c) \sinh \phi \mp 2b\sqrt{b^2 - c} \cosh \phi] a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} \\ &= \frac{1}{\cosh \phi} |c| \underbrace{[\cosh \delta \sinh \phi \mp \sinh \delta \cosh \phi]}_{\sinh(\phi \mp \delta)} a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}}. \end{aligned}$$

O denominador fica

$$\begin{aligned} T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg' &= a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} \frac{1}{\cosh \phi} [(2b^2 - c) \cosh \phi \mp 2b\sqrt{b^2 - c} \sinh \phi] \\ &= a_2^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 - cu_2}} \frac{1}{\cosh \phi} |c| \underbrace{[\cosh \delta \cosh \phi \mp \sinh \delta \sinh \phi]}_{\cosh(\phi \mp \delta)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{[T^2 + (g')^2]\lambda_1 - 2Tg'}{T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 Tg'} = \frac{\sinh(\phi \mp \delta)}{\cosh(\phi \mp \delta)} = \operatorname{tgh}(\phi \mp \delta).$$

Como $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}$, segue que $\tilde{\lambda}_2 = \operatorname{cotgh}(\phi \mp \delta)$. Efetuando uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1, u_2 - \frac{\delta}{b}\right)$, concluímos que as primeiras e segundas formas fundamentais de X e \tilde{X} são iguais. Portanto, as superfícies X e \tilde{X} são congruentes, como queríamos provar.

Agora, consideraremos o caso em que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Como, por (3.2.41), $a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{c}(a_2^2 - b_2^2)$, segue que $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$. Observe também que $a_2^2 - b_2^2$ possui o mesmo de sinal da constante c , pois $a_1^2 + b_1^2 > 0$. Voltando às expressões das funções f e g dadas por (3.2.39) e (3.2.40), respectivamente, constatamos que é possível reescrevê-las da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos(\sqrt{b^2 - cu_1}) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \right] \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left[\operatorname{sen} A \cos(\sqrt{b^2 - cu_1}) + \cos A \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \right] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1} + A),$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é tal que $\operatorname{sen} A = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$ e $\operatorname{cos} A = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$.

Quanto à expressão de g , para $c > 0$, temos $a_2^2 - b_2^2 > 0$. Consequentemente, podemos expressar

$$\begin{aligned} g(u_2) &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \left[\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_2}) + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \left[\operatorname{cosh} B \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) + \operatorname{senh} B \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \\ &= \sqrt{c} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B). \end{aligned}$$

Para $c < 0$, temos $b_2^2 - a_2^2 > 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} g(u_2) &= \sqrt{b_2^2 - a_2^2} \left[\frac{a_2}{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}} \operatorname{cos}(\sqrt{b^2 - cu_2}) + \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{b_2^2 - a_2^2} \left[\operatorname{senh} \bar{B} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) + \operatorname{cosh} \bar{B} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{b_2^2 - a_2^2} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + \bar{B}) \\ &= \sqrt{-c} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + \bar{B}). \end{aligned}$$

É fácil ver que de fato existem constantes reais B e \bar{B} tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} B &= \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} B = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}, \\ \operatorname{cosh} \bar{B} &= \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} \bar{B} = \frac{a_2}{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}. \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Em resumo,

$$g(u_2) = \begin{cases} \sqrt{c} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B), & \text{se } c > 0, \\ \sqrt{-c} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + \bar{B}), & \text{se } c < 0, \end{cases}$$

com $B, \bar{B} \in \mathbb{R}$ dados por (3.2.42).

Agora, observe, através de (3.2.5) e (3.2.19), que as aplicações W, Ω, Ω_1 e Ω_2 possuem $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ como fator comum e, por consequência, a expressão de S , dada por (2.3.4), tem como fator o número $a_1^2 + b_1^2$. Substituindo $W, \Omega, \Omega_1, \Omega_2$ e S em (2.3.3), vemos que $a_1^2 + b_1^2$ e $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ desaparecem da expressão de \tilde{X} por meio das operações presentes na própria expressão. Sendo assim, consideramos simplesmente

$$f(u_1) = \text{sen}(\sqrt{b^2 - c}u_1 + A),$$

$$g(u_2) = \begin{cases} \sqrt{c} \cosh(\sqrt{b^2 - c}u_2 + B), & \text{se } c > 0, \\ \sqrt{-c} \sinh(\sqrt{b^2 - c}u_2 + B), & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Com $B \in \mathbb{R}$. Efetuando uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1 - \frac{A}{\sqrt{b^2 - c}}, u_2\right)$, as primeira e segunda formas fundamentais de \tilde{X} permanecem inalteradas. Então, por simplicidade, tomamos $A = 0$. Assim, f e g são dadas como em (3.2.8) e (3.2.9), respectivamente.

Caso III. Quando $b^2 - c < 0$.

Neste caso, as soluções das equações diferenciais em (3.2.26) e (3.2.27) são dadas por

$$f(u_1) = a_1 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + b_1 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + \frac{L}{b^2 - c}, \quad (3.2.43)$$

$$g(u_2) = a_2 \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + b_2 \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) - \frac{bL}{b^2 - c}. \quad (3.2.44)$$

Afirmção 4. Se $b^2 - c < 0$, então consideramos, sem perda de generalidade, $L = 0$.

Demonstração da Afirmção 4. Por (3.2.5), temos $T(u_1, u_2) = cf(u_1, u_2) + bg(u_1, u_2) + L$, que não depende de L . Consequentemente, as funções Ω e W também não dependem de L . Observando as expressões de (3.2.19), concluímos o mesmo para as aplicações Ω_1 e Ω_2 . Portanto, \tilde{X} não depende de L . Sendo assim, podemos considerar, sem perda de generalidade, $L = 0$. Isto prova a Afirmção 4.

Agora, veremos como fica a condição algébrica adicional (3.2.31) em termos dos coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 . Inicialmente, temos

$$f'(u_1) = a_1 \sqrt{|b^2 - c|} \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + b_1 \sqrt{|b^2 - c|} \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1),$$

$$g'(u_2) = -a_2 \sqrt{|b^2 - c|} \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + b_2 \sqrt{|b^2 - c|} \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2).$$

Daí,

$$c(f')^2 = |b^2 - c|[ca_1^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) - 2ca_1b_1 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + cb_1^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1)],$$

$$(g')^2 = |b^2 - c|[a_2^2 \sin^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) - 2a_2b_2 \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + b_2^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2)],$$

$$\begin{aligned} c(bf + g)^2 &= c(b^2 f^2 + 2bfg + g^2) = cb^2(a_1^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \\ &+ 2a_1b_1 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + b_1^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1)) \\ &+ 2cb[a_1a_2 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ a_1b_2 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_1a_2 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_1b_2 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2)] \\ &+ c[a_2^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + 2a_2b_2 \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_2^2 \sin^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (cf + bg)^2 &= c^2 f^2 + 2cbfg + b^2 g^2 = c^2(a_1^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \\ &+ 2a_1b_1 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + b_1^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1)) \\ &+ 2cb[a_1a_2 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ a_1b_2 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_1a_2 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_1b_2 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2)] \\ &+ b^2[a_2^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + 2a_2b_2 \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \\ &+ b_2^2 \sin^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2)]. \end{aligned}$$

Como $b^2 - c < 0$, $|b^2 - c| = c - b^2$. Assim, somando os termos supracitados e observando que $L = 0$, deparamo-nos com as seguintes expressões

$$0 = c(f')^2 + (g')^2 + c(bf + g)^2 - (cf + bg)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sinh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \underbrace{(ca_1^2|b^2 - c| + cb^2b_1^2 - c^2b_1^2)}_{ca_1^2(c-b^2) - cb_1^2(c-b^2) = c(c-b^2)(a_1^2 - b_1^2)} \\
 &+ \cosh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \underbrace{(cb_1^2|b^2 - c| + cb^2a_1^2 - c^2a_1^2)}_{cb_1^2(c-b^2) - ca_1^2(c-b^2) = c(c-b^2)(b_1^2 - a_1^2)} \\
 &+ \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \underbrace{(2ca_1b_1|b^2 - c| + 2cb^2a_1b_1 - 2c^2a_1b_1)}_{(c-b^2)[2ca_1b_1 - 2ca_1b_1] = 0} \\
 &+ \sinh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \underbrace{(a_2^2|b^2 - c| + cb_2^2 - b^2b_2^2)}_{(c-b^2)a_2^2 + (c-b^2)b_2^2 = (c-b^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
 &+ \cosh^2(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \underbrace{(b_2^2|b^2 - c| + ca_2^2 - b^2a_2^2)}_{(c-b^2)b_2^2 + (c-b^2)a_2^2 = (c-b^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
 &+ \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \underbrace{[-2a_2b_2|b^2 - c| + 2ca_2b_2 - 2b^2a_2b_2]}_{(c-b^2)[2a_2b_2 - 2a_2b_2] = 0} \\
 &= (c - b^2)[c(b_1^2 - a_1^2) + (a_2^2 + b_2^2)].
 \end{aligned}$$

Por fim, como $b^2 - c > 0$ e $c \neq 0$, a condição algébrica (3.2.31) reduz-se a

$$a_1^2 - b_1^2 - \frac{1}{c}(a_2^2 + b_2^2) = 0. \quad (3.2.45)$$

Afirmção 5. *Se $a_2^2 + b_2^2 = 0$, então as superfícies \tilde{X} e X são congruentes.*

Demonstração da Afirmção 5. Como $a_2^2 + b_2^2 = 0$, segue que $a_2 = b_2 = 0$, daí $g \equiv 0$. Pela condição (3.2.45), $a_1^2 - b_1^2 = 0$, logo $b_1 = \pm a_1$ e, conseqüentemente, $f(u_1) = a_1 \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \pm a_1 \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) = a_1 e^{\pm \sqrt{|b^2 - c|}u_1}$. Usando as equações (3.2.35), (3.2.36) e (3.2.38), obtemos

$$\tilde{\omega}_i = (-1)^i \omega_i, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2.$$

Logo, $\tilde{I} = I$ e $\tilde{II} = II$, o que finaliza a prova da Afirmção 5.

Consideremos o caso em que $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Como $c > b^2 > 0$ e $a_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{c}(a_2^2 + b_2^2)$, segue-se que $a_1^2 - b_1^2 > 0$. Com relação às expressões das funções f e g , neste caso, podemos escrevê-las da seguinte forma:

$$f(u_1) = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \left[\cosh A \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + \sinh A \sinh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) \right] \\ &= \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1 + A), \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é tal que $\cosh A = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$ e $\sinh A = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$.

Quanto à expressão de g , temos

$$\begin{aligned} g(u_2) &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left[\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left[\sin B \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) + \cos B \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B) \\ &= \sqrt{c} \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B), \end{aligned}$$

onde $B \in \mathbb{R}$ é tal que $\sin B = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ e $\cos B = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Novamente, através de (3.2.5) e (3.2.19), vemos que as aplicações W , Ω , Ω_1 e Ω_2 têm o mesmo fator, $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, e a expressão de S , dada por (2.3.4), tem como fator $a_1^2 - b_1^2$. Substituindo W , Ω , Ω_1 , Ω_2 e S em (2.3.3), vemos que $a_1^2 - b_1^2$ e $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ desaparecem da expressão de \tilde{X} . Por estes motivos, consideramos f e g como

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1 + A), \\ g(u_2) &= \sqrt{c} \sin(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B), \end{aligned}$$

onde A, B são constantes reais. Note que as primeira e segunda formas fundamentais são invariantes por uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1 - \frac{A}{\sqrt{|b^2 - c|}}, u_2\right)$. Portanto, as funções f e g são dadas por (3.2.10), Ω e W por (3.2.5), com $L = 0$. □

A seguir, descreveremos os fins e as curvas singulares das superfícies planas obtidas no teorema anterior.

Proposição 3.3. *Cada superfície plana \tilde{X} , descrita pelo Teorema 3.2, possui fins do tipo horosfera mergulhados e completos determinados pelos pontos (u_1^0, u_2^0) da seguinte forma:*

i) Se $b^2 - c = 0$, então

$$u_1^0 = -\frac{c_1}{L}, \quad u_2^0 = \frac{-c_2 \pm L}{bL}. \quad (3.2.46)$$

ii) Se $b^2 - c > 0$, então

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - c}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad u_2^0 = \frac{\pm\gamma - B}{\sqrt{b^2 - c}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } c > 0, \quad (3.2.47)$$

onde γ é tal que $\cosh \gamma = \frac{b}{\sqrt{c}}$ e $\sinh \gamma = \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{c}}$.

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - c}} \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad u_2^0 = \frac{\pm\beta + B}{\sqrt{b^2 - c}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } c < 0, \quad (3.2.48)$$

onde β é tal que $\cosh \beta = \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{|c|}}$ e $\sinh \beta = \frac{b}{\sqrt{|c|}}$.

iii) Se $b^2 - c < 0$, então

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = \frac{-B \pm \theta - \frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{|b^2 - c|}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.49)$$

onde θ é tal que $\cos \theta = b\sqrt{c}$ e $\sin \theta = \frac{\sqrt{|b^2 - c|}}{\sqrt{c}}$.

Além disso, as curvas de singularidades são descritas por

$$\sinh \phi [T^2 + (g')^2] - 2Tg' \cosh \phi = 0, \quad (3.2.50)$$

onde $\phi = bu_2$, T é dado por (3.2.5), as funções f e g são dadas por (3.2.6) se $b^2 - c = 0$, por (3.2.8) e (3.2.9) se $b^2 - c > 0$ e por (3.2.10) se $b^2 - c < 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.8, os pontos nos quais $\Omega^2 - W^2 = 0$ determinam os fins do tipo horosfera mergulhados e completos. Já constatamos em (3.3.32) que

$$\Omega^2 - W^2 = \frac{1}{c^2} [T^2 - (g')^2].$$

Substituindo $T = cf + bg + L$ nesta expressão, obtemos $\Omega^2 - W^2 = \frac{1}{c^2} [(cf + bg + L)^2 - (g')^2]$. Sendo $\Omega^2 - W^2 = 0$, seque que $(cf + bg + L - g')(cf + bg + L + g') = 0$. Ou seja,

$$cf + bg + L \pm g' = 0. \quad (3.2.51)$$

- i) Quando $b^2 - c = 0$, as funções f e g são determinadas por (3.2.6) e (3.2.7), com $L \neq 0$. Consequentemente,

$$cf + bg + L \pm g' = c \left(L \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0 \right) + b \left(bL \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3 \right) + L \pm (bL u_2 + c_2) = 0.$$

Com algumas manipulações algébricas, nota-se sem dificuldades que a equação acima é equivalente a

$$\left(u_1 + \frac{c_1}{L} \right)^2 + \left(u_2 + \frac{c_2 \pm L}{bL} \right)^2 - \frac{1}{b^2 L^2} \{ b^2 c_1^2 + c_2^2 - L[L + b(2bc_0 + c_3)] \} = 0.$$

Usando (3.2.7), concluimos que

$$\left(u_1 + \frac{c_1}{L} \right)^2 + \left(u_2 + \frac{c_2 \pm L}{bL} \right)^2 = 0, \quad (3.2.52)$$

cujas soluções são dadas por (3.2.46).

- ii) Quando $b^2 - c > 0$, as funções f e g são dadas por (3.2.8) e (3.2.9), sendo B um número real e $L = 0$. Para $c > 0$, temos

$$cf + bg \pm g' = c \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - c} u_1) + b\sqrt{c} \cosh(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B) \pm \sqrt{c} \sqrt{b^2 - c} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B).$$

Portanto, a relação (3.2.51) se torna

$$\operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - c} u_1) + \frac{b}{\sqrt{c}} \cosh(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B) \pm \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{c}} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B) = 0.$$

Podemos tomar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\cosh \gamma = \frac{b}{\sqrt{c}}$ e $\operatorname{senh} \gamma = \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{c}}$. Com isso, a expressão acima fica

$$\operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - c} u_1) + \cosh(\sqrt{b^2 - c} u_2 + B \pm \gamma) = 0, \quad (3.2.53)$$

cujas soluções são dadas por (3.2.47). Isto é,

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - c}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad u_2^0 = \frac{\mp \gamma - B}{\sqrt{b^2 - c}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para $c < 0$, temos

$$\begin{aligned} cf + bg \pm g' &= c \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) + b\sqrt{-c} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \\ &\quad \pm \sqrt{-c} \sqrt{b^2 - c} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \\ &= \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) - \frac{b}{\sqrt{-c}} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \\ &\quad \mp \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{-c}} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B). \end{aligned}$$

Logo, de (3.2.51), vale que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) - \frac{b}{\sqrt{-c}} \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \mp \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{-c}} \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) = 0.$$

Naturalmente, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{cosh} \beta = \frac{\sqrt{b^2 - c}}{\sqrt{|c|}}$ e $\operatorname{senh} \beta = \frac{b}{\sqrt{|c|}}$. O que nos dá, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) - \operatorname{senh} \beta \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \mp \operatorname{cosh} \beta \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \\ &= \operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) - [\operatorname{senh} \beta \operatorname{senh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B) \pm \operatorname{cosh} \beta \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}(\sqrt{b^2 - cu_1}) \mp \operatorname{cosh}(\sqrt{b^2 - cu_2} + B \pm \beta) = 0. \quad (3.2.54)$$

Que tem como solução o conjunto dos pontos (u_1^0, u_2^0) tais que

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - c}} \left(\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad u_2^0 = \frac{\mp \beta - B}{\sqrt{b^2 - c}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

iii) Quando $b^2 - c < 0$, as funções f e g são dadas por (3.2.10) e $L = 0$. Através de (3.2.51), vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= cf + bg \pm g' \\ &= c \operatorname{cosh}(\sqrt{|b^2 - c|} u_1) + b\sqrt{c} \operatorname{sen}(\sqrt{|b^2 - c|} u_2 + B) \\ &\quad \pm \sqrt{c} \sqrt{|b^2 - c|} \operatorname{cos}(\sqrt{|b^2 - c|} u_2 + B). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + \frac{b}{\sqrt{c}} \operatorname{sen}(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B) \pm \frac{\sqrt{|b^2 - c|}}{\sqrt{c}} \cos(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B) = 0.$$

Porém, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{c}}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{|b^2 - c|}}{\sqrt{c}}$. Com isso, a equação acima fica

$$\cosh(\sqrt{|b^2 - c|}u_1) + \operatorname{sen}(\sqrt{|b^2 - c|}u_2 + B \pm \theta) = 0. \quad (3.2.55)$$

Os pontos (u_1^0, u_2^0) que satisfazem tal equação são dados por

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = \frac{\mp \theta - B - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{\sqrt{|b^2 - c|}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, como $|\lambda_2| \geq 1$, pelo Teorema 2.9, as curvas singulares de \tilde{X} ficam determinadas por $W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_2\Omega W = 0$. De maneira análoga ao que fizemos para obter (3.2.36), usando a equação (3.2.5), obtemos a equação diferencial que descreve as curvas singulares de \tilde{X} , isto é:

$$\operatorname{senh} \phi [T^2 + (g')^2] - 2Tg' \cosh \phi = 0.$$

□

O seguinte resultado descreve uma classe especial de superfícies contidas no Teorema 3.2, descritas por \tilde{X} , que são periódicas em uma variável quando $b^2 - c > 0$ e têm um número par de fins mergulhados do tipo horosfera.

Proposição 3.4. *Considere \tilde{X} a família de superfícies planas em \mathbb{H}^3 , como no Teorema 3.2. Para $b^2 - c > 0$ e $c \neq 0$ satisfazendo*

$$c = \frac{1}{4a^2} \left[(a^2 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2 \frac{n^2}{m^2} \right], \quad \text{com } \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} \text{ irredutível,} \quad (3.2.56)$$

temos que:

i) a superfície é periódica na variável u_1 , com período $\left| \frac{4a}{a^2 - 1} \right| m\pi$;

ii) existem $2n$ fins do tipo horosfera mergulhados e completos;

iii) as curvas de singularidades descritas por (3.2.50) estão contidas em um conjunto compacto;

iv) existem dois fins completos de índice geométrico m dados pelo limite quando $u_2 \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. Seja \tilde{X} a família de superfícies dada por (3.2.4), com a constante de Ribaucour c dada por (3.2.56), e as funções f e g dadas por (3.2.8) e (3.2.9), respectivamente. Pelo Teorema 2.8 e pela Proposição 3.3, podemos verificar a validade das propriedades *i*) e *ii*). Com relação à propriedade *iii*), sobre as suas singularidades, descritas por (3.2.50), estarem contidas em um conjunto compacto, a sua validade é verificada através das expressões de f e g e do fato de \tilde{X} ser periódica na variável u_1 , desde que c seja dado por (3.2.56).

Agora, provaremos que as superfícies \tilde{X} tem dois fins completos quando u_2 tende a $\pm\infty$. Considerando as superfícies no modelo do semi-espço de \mathbb{H}^3 ,

$$Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right), \quad (3.2.57)$$

mostraremos inicialmente que

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} = 0. \quad (3.2.58)$$

De fato, a partir da equação (2.3.3), temos

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S} \right) (X^0 - X^3) - \frac{2\Omega\Omega_2}{S \cosh \phi} (X_{u_2}^0 - X_{u_2}^3) + \frac{2\Omega W}{S} (N^0 - N^3),$$

onde X , Ω_1 , são dados por (3.2.1), (3.2.19), Ω , W e T são dadas por (3.2.5), ϕ e S são dados por (3.2.3) e (2.3.4), respectivamente, com $L = 0$. Consequentemente, temos que

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = \frac{e^{-\beta}}{\alpha} (e^{\varepsilon a u_2} P + e^{-\frac{\varepsilon u_2}{a}} Q),$$

onde

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{(c-1)a} + \frac{a(T-g')}{(c-1)(T+g')} - \frac{2\varepsilon\Omega\Omega_2}{S \sinh \phi},$$

$$Q = a + \frac{a}{c-1} + \frac{T+g'}{a(c-1)(T-g')} + \frac{2\varepsilon\Omega\Omega_2}{S \sinh \phi}.$$

Uma conta simples nos permite calcular os seguintes limites

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{2\varepsilon\Omega\Omega_2}{S \sinh \phi} = \pm \frac{2(b - \varepsilon\sqrt{b^2 - c})}{c-1}, \quad \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \frac{T-g'}{T+g'} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - c}}{b \pm \sqrt{b^2 - c}}.$$

Portanto,

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} P = h_1^\pm, \quad \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} Q = h_2^\pm,$$

onde h_1^\pm, h_2^\pm são números reais não-nulos. Com isso, vemos que (3.2.58) é válida. Consequentemente, os fins correspondentes a $u_2 \rightarrow \pm\infty$ são completos.

Agora, a fim de provar que estes fins têm índice geométrico m , observemos, antes, de (2.3.3) e de (3.2.1), que

$$\begin{aligned} \tilde{X}^1 &= 2 \cosh \phi \left(\tilde{P} \cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) - \tilde{Q} \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) \right), \\ \tilde{X}^2 &= 2 \cosh \phi \left(\tilde{P} \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) + \tilde{Q} \cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{P} = \frac{1}{\alpha} \left(-1 - \frac{2\Omega T}{cS \cosh \phi} + \frac{2b\Omega\Omega_2}{S \cosh \phi} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{Q} = \frac{\Omega\Omega_1}{S \cosh \phi}.$$

Além disso, $\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \tilde{P} = \tilde{h}^\pm$ e $\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \tilde{Q} = 0$, onde \tilde{h}^\pm é um número real não-nulo. Portanto,

$$\lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right) = \lim_{u_2 \rightarrow \pm\infty} V(u_2) \left(\cos \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right), \sin \left(\frac{\alpha u_1}{2} \right) \right),$$

onde

$$V(u_2) = \frac{2 \cosh \phi \alpha e^\beta \tilde{h}^\pm}{e^{\epsilon a u_2} h_1^\pm + e^{-\frac{\epsilon u_2}{a}} h_2^\pm}.$$

Como $0 \leq u_2 \leq \frac{2m\pi}{\beta}$, concluímos que os fins correspondentes a $u_2 \rightarrow \pm\infty$ têm índice m . Então, observando que $\lim_{u_2 \rightarrow \infty} V(u_2) = \infty$ e $\lim_{u_2 \rightarrow -\infty} V(u_2) = 0$, o modelo da bola de Poincaré nos permite concluir que o fim correspondente a $u_2 \rightarrow \infty$ vai para $(0, 0, 1)$ e o fim correspondente a $u_2 \rightarrow -\infty$ vai para $(0, 0, 0)$.

□

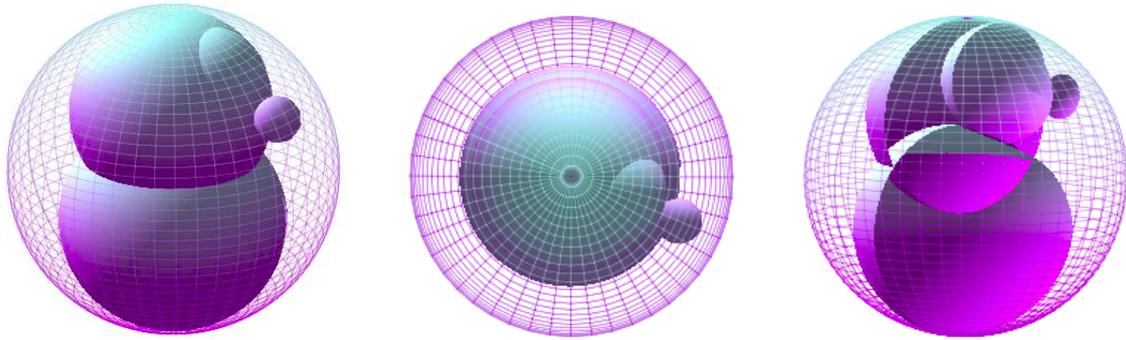


Figura 3.5 Vistas Perspectiva, Superior e Interna para $c_0 = c_1 = c_3 = 0, c_2 = L = 1$.

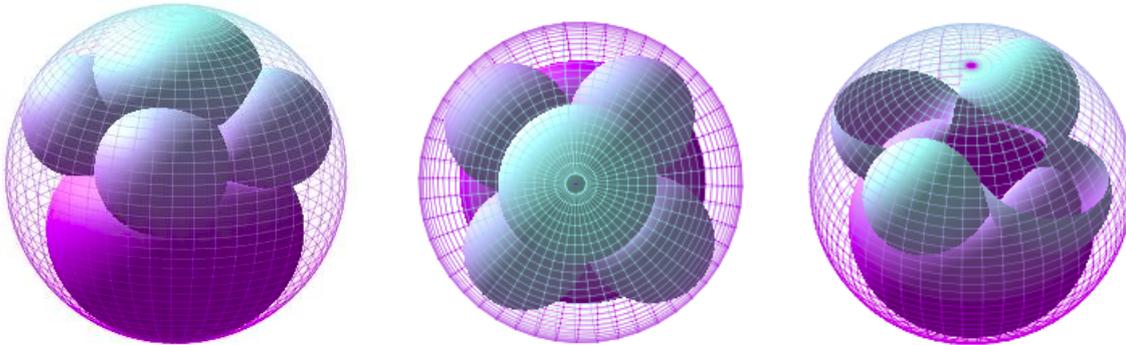


Figura 3.6 Vistas Perspectiva, Superior e Interna para $a = 2, n = 2, m = 1$.

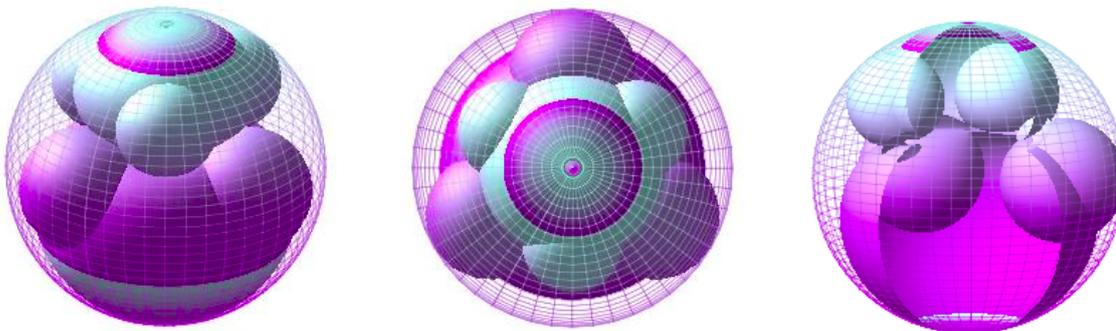


Figura 3.7 Vistas Perspectiva, Superior e Interna para $a = 2, n = 3, m = 1$.

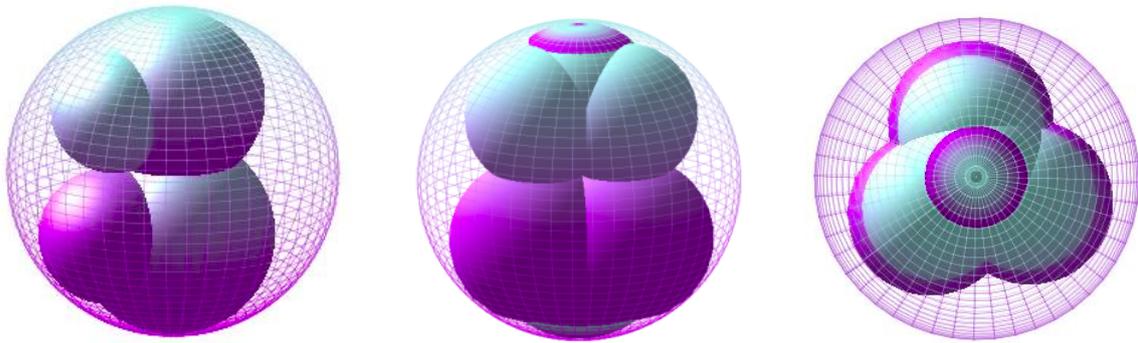


Figura 3.8 $a = 6, n = 1, m = 2$ (à esquerda); $a = 5, n = 3, m = 2$ (central) e sua vista superior (à direita).

Na Figura 3.5 exibimos as vistas superior e interna de uma superfície plana associada à superfície dada em (3.2.1) por uma transformação de Ribaucour. Tal transformada é parametrizada por (3.2.4) e as funções f e g são dadas como em (3.2.6) com $c_0 = c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = L = 1$ e $-9 \leq u_1 \leq 9$, $-4 \leq u_2 \leq 4$. Esta superfície não apresenta periodicidade. Possui três fins, dentro dos quais dois são mergulhados do tipo horosfera.

As Figuras 3.6 e 3.7 (à esquerda) exibem superfícies planas em \mathbb{H}^3 associadas por uma transformação de Ribaucour à superfície dada em (3.2.1) com $a = 2$. Elas são obtidas com a parametrização (3.2.4), escolhendo-se c como em (3.2.56) onde $n = 2$, $n = 3$ e $m = 1$. Elas têm $2n + 2$ fins mergulhados, dos quais $2n$ são do tipo horosfera. As Figuras 3.6 e 3.7 (à direita) mostram parte destas superfícies.

A superfície plana em Figura 3.8 (à esquerda), parametrizada por (3.2.4), onde $a = 6$ e o c foi escolhido como em (3.2.56), com $n = 1$ e $m = 2$, é periódica em uma variável, tem dois fins mergulhados do tipo horosfera e dois fins de índice geométrico igual a 2. A Figura 3.8 (central) mostra a superfície obtida escolhendo-se $a = 5, n = 3$ e $m = 2$, bem com a sua vista superior (à direita), ela apresenta seis fins mergulhados do tipo horosfera e dois fins de índice geométrico igual a 2.

Note que, se a constante de Ribaucour c não satisfaz (3.2.56), então a superfície dada por (3.2.4) não é, em geral, periódica em nenhuma de suas variáveis e apresenta uma quantidade infinita de fins mergulhados completos do tipo horosfera.

3.3 Transformação de Ribaucour para superfícies planas de rotação com singularidades isoladas

Nesta seção, consideramos superfícies planas de rotação em \mathbb{H}^3 com singularidades isoladas. Além disso, observamos que tais superfícies são parametrizadas por linhas de curvatura. Estudaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Considere M uma superfície plana de rotação em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, com singularidades isoladas, parametrizada por linhas de curvatura, como se segue:*

$$X(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{a\alpha} \cosh(au_1 + \beta) + \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right), -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \cos \frac{\alpha u_2}{2}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\alpha} \sinh \phi \sin \frac{\alpha u_2}{2}, \frac{1}{a\alpha} \sinh(au_1 + \beta) + \frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) \right). \quad (3.3.1)$$

A sua primeira forma fundamental é dada, segundo a Proposição 2.3, por $I = \cosh^2 \phi du_1^2 + \sinh^2 \phi du_2^2$. Considere também o vetor normal unitário de M :

$$N(u_1, u_2) = \left(\frac{a}{\alpha} \sinh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) - \frac{1}{a\alpha} \sinh(au_1 + \beta), -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \cos \frac{\alpha u_2}{2}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\alpha} \cosh \phi \sin \frac{\alpha u_2}{2}, \frac{a}{\alpha} \cosh\left(\frac{u_1}{a} + \beta\right) - \frac{1}{a\alpha} \cosh(au_1 + \beta) \right). \quad (3.3.2)$$

onde

$$\alpha = \frac{1+a^2}{a}, \quad \phi = \frac{1-a^2}{2a} u_1, \quad a^2 \neq 1, \quad a \neq 0, \quad (3.3.3)$$

e, sem perda de generalidade, consideramos $a > 0$ e

$$\beta = \frac{1}{1-a^2} [(1+a^2) \log(1+a^2) - 2a^2 \log a].$$

Então, a família de superfícies planas em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ (não-congruentes a M) associada a X por uma transformação de Ribaucour, como no Teorema 2.7, é dada por

$$\tilde{X} = X + \frac{2c(-T \sinh \phi - f' \cosh \phi)}{(c-1)[-T^2 + (f')^2]} \left[\Omega X + WN - \frac{f+bg}{\cosh \phi} X_{u_1} - \frac{g'}{\sinh \phi} X_{u_2} \right], \quad (3.3.4)$$

onde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $b = \frac{1-a^2}{2a}$, $\phi = bu_1$,

$$\Omega = \frac{1}{c} (-T \sinh \phi + f' \cosh \phi), \quad W = \frac{1}{c} (T \cosh \phi - f' \sinh \phi), \quad T = bf - cg + L \quad (3.3.5)$$

e as funções $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são dadas por:

i) se $b^2 + c = 0$, então $L \neq 0$ e

$$f(u_1) = bL \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0, \quad g(u_2) = L \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3, \quad (3.3.6)$$

com

$$b^2 c_2^2 + c_1^2 - L[L - 2b(c_0 - bc_3)] = 0; \quad (3.3.7)$$

ii) se $b^2 + c > 0$, então $L = 0$ e

$$f(u_1) = \begin{cases} \sqrt{c} \sinh(\sqrt{b^2 + c} u_1 + A), & \text{se } c > 0, \\ \sqrt{|c|} \cosh(\sqrt{b^2 + c} u_1 + A), & \text{se } c < 0, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

$$g(u_2) = \text{sen}(\sqrt{b^2 + c} u_2), \quad (3.3.9)$$

onde A é uma constante real;

iii) se $b^2 + c < 0$, então $L = 0$ e

$$f(u_1) = \sqrt{|c|} \text{sen}(\sqrt{|b^2 + c|} u_1 + A), \quad g(u_2) = \cosh(\sqrt{|b^2 + c|} u_2), \quad (3.3.10)$$

onde A é uma constante real.

Além disto, a superfície \tilde{X} é regular sobre o conjunto

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_2 > 0, [T^2 - (f')^2] \{ [T^2 + (f')^2] \text{senh } \phi - 2Tf' \cosh \phi \} \neq 0\}. \quad (3.3.11)$$

Demonstração. Dada uma superfície plana de rotação com singularidades isoladas M dada por (3.3.1), cujas primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (veja Proposição 2.3):

$$\begin{aligned} \text{I} &= \cosh^2 \phi(u_1, u_2) du_1^2 + \text{senh}^2 \phi(u_1, u_2) du_2^2, \\ \text{II} &= \pm \text{senh}(2\phi(u_1, u_2)) (du_1^2 + du_2^2). \end{aligned}$$

onde ϕ é a função harmônica associada à superfície dada, descrita em (3.2.3).

A fim de obtermos novas superfícies planas de \mathbb{H}^3 localmente associadas a M por uma transformação de Ribaucour, iremos resolver o sistema de equações diferenciais parciais

abaixo, proveniente do sistema (2.3.15), onde $a_1 = \cosh \phi$, $a_2 = \sinh \phi$, e as curvaturas principais, $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$, são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi}.$$

Temos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \cosh \phi \Omega_1, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \sinh \phi \Omega_2, \quad (3.3.12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = -\sinh \phi \Omega_1, \quad \frac{\partial W}{\partial u_2} = -\cosh \phi \Omega_2, \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1} (\sinh \phi) \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2, \quad (3.3.14)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_2} (\cosh \phi) \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1, \quad (3.3.15)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = -\frac{1}{\sinh \phi} \frac{\partial}{\partial u_2} (\cosh \phi) \Omega_2 + c \left(\Omega + W \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \right) \cosh \phi, \quad (3.3.16)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{\cosh \phi} \frac{\partial}{\partial u_1} (\sinh \phi) \Omega_1 + c \left(\Omega + W \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} \right) \sinh \phi. \quad (3.3.17)$$

As soluções do sistema, Ω_1 , Ω_2 , Ω e W , satisfazem também a condição algébrica adicional dada por (2.3.2), isto é,

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2).$$

para qualquer constante $c \notin \{0, 1\}$.

Observe inicialmente que, como $\phi(u_1, u_2) = bu_1$, então $\phi_{u_2}(u_1, u_2) = 0$ e $\phi_{u_1}(u_1, u_2) = b$. De (3.3.15), temos que

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_2} (\cosh \phi) \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1 = \sinh \phi \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \frac{1}{\sinh \phi} \Omega_1 = 0.$$

Logo, existe uma função real diferenciável $g = g(u_2)$ tal que

$$\Omega_2 = g'(u_2). \quad (3.3.18)$$

Além disso, de (3.3.14), vemos que

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1} (\sinh \phi) \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2 = \cosh \phi \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \frac{1}{\cosh \phi} \Omega_2 = b \Omega_2.$$

Portanto,

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = b\Omega_2. \quad (3.3.19)$$

Integrando esta última equação com relação à variável u_2 , concluímos que existe $f = f(u_1)$ diferenciável tal que

$$\Omega_1 = f(u_1) + bg(u_2). \quad (3.3.20)$$

Segue das duas últimas equações do sistema acima, (3.3.16) e (3.3.17), e das expressões de Ω_1 e Ω_2 , que

$$g''(u_2) = -(f + bg)b + c(\Omega \sinh \phi + W \cosh \phi), \quad (3.3.21)$$

$$f'(u_1) = c(\Omega \cosh \phi + W \sinh \phi). \quad (3.3.22)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.3.21) por $\cosh \phi$, obtemos

$$\cosh \phi g'' = -(f + bg)b \cosh \phi + c(\Omega \sinh \phi \cosh \phi + W \cosh^2 \phi). \quad (3.3.23)$$

Isolando $c\Omega \cosh \phi$ na equação (3.3.22),

$$c\Omega \cosh \phi = f' - cW \sinh \phi. \quad (3.3.24)$$

Substituindo (3.3.24) em (3.3.23), ficamos com

$$\begin{aligned} \cosh \phi g'' &= -(f + bg)b \cosh \phi + (f' - cW \sinh \phi) \sinh \phi + cW \cosh^2 \phi \\ &= -(f + bg)b \cosh \phi + f' \sinh \phi + cW(\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi). \end{aligned}$$

Como $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, então

$$W = \frac{1}{c} \{ [g'' + (f + bg)b] \cosh \phi - f' \sinh \phi \}. \quad (3.3.25)$$

Agora, multiplicando a equação (3.3.25) por $c \sinh \phi$, obtemos

$$cW \sinh \phi = [g'' + (f + bg)b] \cosh \phi \sinh \phi - f' \sinh^2 \phi.$$

Substituindo tal expressão em (3.3.22), ficamos com

$$(1 + \sinh^2 \phi) f' - [g'' + (f + bg)b] \cosh \phi \sinh \phi = c\Omega \cosh \phi.$$

Portanto,

$$\Omega = \frac{1}{c} \{ -[g'' + (f + bg)b] \sinh \phi + f' \cosh \phi \}. \quad (3.3.26)$$

Sendo assim, a derivada parcial de Ω com respeito a u_1 é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{c} \{ -[g'' + (f + bg)b] \sinh \phi + f' \cosh \phi \} \right) \\ &= \frac{1}{c} \{ -[bf' \sinh \phi + \phi_{u_1} \cosh \phi (g'' + b(f + bg))] + f'' \cosh \phi + f' \sinh \phi \phi_{u_1} \} \\ &= \frac{1}{c} \{ -b \cosh \phi g'' - b^2 f \cosh \phi - b^3 g \cosh \phi + f'' \cosh \phi \} \\ &= \frac{1}{c} (-bg'' - b^2 f - b^3 g + f'') \cosh \phi \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação diferencial em (3.3.12) também nos mostra que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \cosh \phi \Omega_1 = (f + bg) \cosh \phi.$$

Comparando as duas expressões acima para a derivada de Ω com relação a u_1 , obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} [cf + b^2 f - f''] (u_1) &= [-cbg - bg'' - b^3 g] (u_2) \\ \frac{1}{b} [f'' - (b^2 + c)f] (u_1) &= [g'' + (b^2 + c)g] (u_2). \end{aligned}$$

O que implica na existência de uma constante $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$f''(u_1) - (b^2 + c)f(u_1) = bL \quad \text{e} \quad g''(u_2) + (b^2 + c)g(u_2) = L. \quad (3.3.27)$$

Além disso, mostraremos agora que as equações em (3.3.13) são trivialmente satisfeitas. De fato, para a primeira equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_1} &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{c} [g'' + b(f + bg)] \cosh \phi - f' \sinh \phi \right) \\ &= \frac{1}{c} (bf' \cosh \phi + \sinh \phi \phi_{u_1} [g'' + (f + bg)b] - f'' \sinh \phi - f' \cosh \phi \phi_{u_1}) \\ &= \frac{1}{c} (bg'' \sinh \phi + b^2 f \sinh \phi + b^3 \sinh \phi g - f'' \sinh \phi) \\ &= \frac{1}{c} [b(g'' + b^2 g) + b^2 f - f''] \sinh \phi \\ &= \frac{1}{c} [b(L - cg) - cf - bL] \sinh \phi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c}[-c(bg + f)] \sinh \phi = -\Omega_1 \sinh \phi.$$

Na antepenúltima igualdade acima, utilizamos (3.3.27). Lembrando também que $\phi_{u_1} = b$. Quanto à segunda equação, usando a equação (3.3.27) e o fato de que $\phi_{u_2} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_2} &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{c}[g'' + b(f + bg)] \cosh \phi - f' \sinh \phi \right) \\ &= \frac{1}{c}([g''' + b^2 g'] \cosh \phi + \sinh \phi \phi_{u_2}[g'' + b(f + bg)] - f' \cosh \phi \phi_{u_2}) \\ &= \frac{1}{c}([g'' + b^2 g']' \cosh \phi) = \frac{1}{c}[L - cg]' \cosh \phi = -\Omega_2 \cosh \phi. \end{aligned}$$

Com relação à condição adicional (2.3.2), $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = c(\Omega^2 - W^2)$, podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (f + bg)^2 + (g')^2 &= c \left[\frac{1}{c^2} \{ -[g'' + b(f + bg)] \sinh \phi + f' \cosh \phi \}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} \{ [g'' + b(f + bg)] \cosh \phi - f' \sinh \phi \}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Vamos, agora, calcular as parcelas do lado direito desta equação. O primeiro quadrado fica

$$\begin{aligned} &\{ -[g'' + b(f + bg)] \sinh \phi + f' \cosh \phi \}^2 = \\ &= [g'' + b(f + bg)]^2 \sinh^2 \phi - 2[g'' + b(f + bg)]f' \sinh \phi \cosh \phi + (f')^2 \cosh^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

O segundo quadrado fica

$$\begin{aligned} &\{ [g'' + b(f + bg)] \cosh \phi - f' \sinh \phi \}^2 = \\ &= [g'' + b(f + bg)]^2 \cosh^2 \phi - 2[g'' + b(f + bg)]f' \sinh \phi \cosh \phi + (f')^2 \sinh^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Tomando a diferença entre (3.3.29) e (3.3.30), chegamos a

$$\begin{aligned} (f + bg)^2 + (g')^2 &= c \frac{1}{c^2} \{ [g'' + b(f + bg)]^2 (\sinh^2 \phi - \cosh^2 \phi) + (f')^2 (\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi) \} \\ &= \frac{1}{c} \{ (f')^2 - [g'' + b(f + bg)]^2 \}. \end{aligned}$$

Relembremo-nos ainda que $g'' + b(f + bg) = L - cg + bf$. Por conseguinte, a condição algébrica adicional, (2.3.2), fica

$$(f')^2 - c(g')^2 - c(f + bg)^2 - (bf - cg + L)^2 = 0. \quad (3.3.31)$$

Pondo $T = bf - cg + L$, vemos que, de fato, as funções Ω e W são dadas por (3.3.5). Temos também a seguinte relação

$$\Omega^2 - W^2 = \frac{1}{c^2} [(f')^2 - T^2]. \quad (3.3.32)$$

Segue do Teorema 2.7 que a superfície \tilde{X} é dada pela expressão em (3.3.4). De fato, substituindo $\Omega_1, \Omega_2, \Omega, W$ e S em (2.3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right) X - \frac{2\Omega}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i - WN\right) \\ &= X + \frac{2\Omega}{S} \left[\Omega X - \sum_{i=1}^2 \Omega_i e_i + WN\right] \\ &= X + \frac{2c(-T \sinh \phi + f' \cosh \phi)}{(c-1)[(f')^2 - T^2]} \left[\Omega X + WN - \frac{f+bg}{\cosh \phi} X_{u_1} - \frac{g'}{\sinh \phi} X_{u_2}\right], \end{aligned}$$

onde $\left\{e_1 = \frac{X_{u_1}}{\cosh \phi}, e_2 = \frac{X_{u_2}}{\sinh \phi}\right\}$ é o referencial móvel ortonormal tangente a M e $\{\omega_1 = \cosh \phi du_1, \omega_2 = \sinh \phi du_2\}$ o correferencial de M . A primeira forma fundamental de \tilde{M} é dada por $\tilde{I} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$. A Observação 2.1 nos permite expressar o referencial dual da seguinte maneira:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_1 \Omega W}{W^2 - \Omega^2} \omega_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_2 \Omega W}{W^2 - \Omega^2} \omega_2. \quad (3.3.33)$$

Reescreveremos estas 1-formas em termos das funções f e g usando as relações (3.3.25) e (3.3.26). Temos,

$$\begin{aligned} W^2 + \Omega^2 &= \frac{1}{c^2} [(T \cosh \phi - f' \sinh \phi)^2 + (-T \sinh \phi + f' \cosh \phi)^2] \\ &= \frac{1}{c^2} [T^2 \cosh^2 \phi - 2T f' \cosh \phi \sinh \phi + (f')^2 \sinh^2 \phi \\ &\quad + T^2 \sinh^2 \phi - 2T f' \sinh \phi \cosh \phi + (f')^2 \cosh^2 \phi] \\ &= \frac{1}{c^2} \{(\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi)[T^2 + (f')^2] - 4T f' \sinh \phi \cosh \phi\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \Omega W &= \frac{2}{c^2} \lambda_1 (T \cosh \phi - f' \sinh \phi)(-T \sinh \phi + f' \cosh \phi) \\ &= \frac{2}{c^2} \lambda_1 (-T^2 \cosh \phi \sinh \phi + T f' \cosh^2 \phi + f' T \sinh^2 \phi - (f')^2 \sinh \phi \cosh \phi) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{c^2} \lambda_1 [-(T^2 + (f')^2) \sinh \phi \cosh \phi + T f' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_1 \Omega W &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4T f' \sinh \phi \cosh \phi \right. \\ &\quad \left. - 2 \sinh^2 \phi [T^2 + (f')^2] + 2T f' \sinh \phi \cosh \phi + 2T f' \frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi - 2 \sinh^2 \phi) \right. \\ &\quad \left. - 2T f' \left(\frac{\sinh \phi \cosh^2 \phi}{\cosh \phi} - \frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] - 2T f' \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} [T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f']. \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

E já sabemos que $W^2 - \Omega^2 = \frac{1}{c^2} [(f')^2 - T^2]$. Portanto,

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f'}{(f')^2 - T^2} \omega_1. \tag{3.3.35}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} W^2 + \Omega^2 + 2\lambda_2 \Omega W &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4T f' \sinh \phi \cosh \phi \right. \\ &\quad \left. - 2 \cosh^2 \phi [T^2 + (f')^2] + 2T f' \cosh \phi \sinh \phi + 2T f' \frac{\cosh^3 \phi}{\sinh \phi} \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi - 2 \cosh^2 \phi) \right. \\ &\quad \left. - 2T f' \left(\frac{\sinh^2 \phi \cosh \phi}{\sinh \phi} - \frac{\cosh^3 \phi}{\sinh \phi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ -[T^2 + (f')^2] + 2T f' \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} \right\} \\ &= -\frac{1}{c^2} [T^2 + (f')^2 - 2\lambda_2 T f']. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_2 T f'}{(f')^2 - T^2} \omega_2. \quad (3.3.36)$$

Agora, vamos calcular as curvaturas principais, $-\tilde{\lambda}_1$ e $-\tilde{\lambda}_2$, de \tilde{M} . No capítulo anterior, Observação 2.1, vimos que

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{2\Omega W + \lambda_i(W^2 + \Omega^2)}{2\Omega W \lambda_i + W^2 + \Omega^2}, \quad i = 1, 2.$$

Conhecemos de (3.3.34) a relação

$$2\lambda_1 \Omega W + W^2 + \Omega^2 = \frac{1}{c^2} [T^2 + (g')^2 - 2\lambda_1 T g'].$$

Além do mais, o denominador da expressão de curvatura principal é dado por

$$\begin{aligned} 2\Omega W + \lambda_1(W^2 + \Omega^2) &= \frac{1}{c^2} \{ -2 \sinh \phi \cosh \phi [T^2 + (f')^2] + 2T f' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) \\ &\quad + \lambda_1 [T^2 + (f')^2] (\sinh^2 \phi + \cosh^2 \phi) - 4\lambda_1 T f' \sinh \phi \cosh \phi \} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ -2 \sinh \phi \cosh \phi [T^2 + (f')^2] + 2T f' (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) \right. \\ &\quad \left. + [T^2 + (f')^2] \left(\frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} + \sinh \phi \cosh \phi \right) - 4T f' \sinh^2 \phi \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ [T^2 + (f')^2] \left(\frac{\sinh^3 \phi}{\cosh \phi} - \sinh \phi \cosh \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + 2T f' (\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ -[T^2 + (f')^2] \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} + 2T f' \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \{ -[T^2 + (f')^2] \lambda_1 + 2T f' \}. \end{aligned}$$

De posse da relação fornecida em (3.2.37), concluímos que

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{[T^2 + (f')^2] \lambda_1 - 2T f'}{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f'} \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f'}{[T^2 + (f')^2] \lambda_1 - 2T f'}. \quad (3.3.37)$$

Pelo Teorema 2.7, a superfície \tilde{X} , localmente associada a X pela transformação de Ribaucour, é regular sobre o conjunto $\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in U; (W^2 - \Omega^2)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_1 \Omega W)(\Omega^2 + W^2 + 2\lambda_2 \Omega W) \neq 0\}$. Substituindo as expressões Ω_1 , Ω_2 , Ω e W , dadas em (3.3.18), (3.3.20)

e (3.3.5), encontramos o conjunto no qual \tilde{X} é regular. Veja:

$$\tilde{U} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_2 > 0, [T^2 - (f')^2][(T^2 + (f')^2) \sinh \phi - 2Tf' \cosh \phi] \neq 0\}.$$

Voltando às equações diferenciais ordinárias (3.2.26) e (3.2.27), daremos agora as suas soluções de acordo com os seguintes casos: quando $b^2 + c = 0$; quando $b^2 + c > 0$; e quando $b^2 + c < 0$.

Caso I. Quando $b^2 + c = 0$.

Neste caso, segue-se de (3.3.27) que $f(u_1)$ e $g(u_2)$ são dadas por (3.3.6). De fato, as equações diferenciais em (3.3.27) se reduzem a $f'(u_1) = bL$ e $g''(u_2) = L$, onde $L \in \mathbb{R}$ é uma constante. Integrando a primeira equação com respeito a u_1 , obtemos

$$f'(u_1) = bLu_1 + c_1$$

Integrando novamente, encontramos a função $f(u_1)$ de (3.3.6). Isto é,

$$f(u_1) = bL \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0,$$

sendo c_0, c_1 constantes de integração.

Analogamente, integrando a segunda equação diferencial, dada inicialmente, com relação a u_2 , obtemos $g(u_2)$ como em (3.2.6). Isto é,

$$g(u_2) = L \frac{u_2^2}{2} + c_2 u_2 + c_3,$$

com $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ constantes.

Com isso, podemos reescrever a condição algébrica adicional (3.3.31) da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 &= (f')^2 - c(g')^2 - c(f + bg)^2 - (bf - cg + L)^2 \\ &= (bLu_1 + c_1)^2 - c(Lu_2 + c_2)^2 \\ &\quad - c \left(bL \frac{u_1^2}{2} + c_1 u_1 + c_0 + bL \frac{u_2^2}{2} + bc_2 u_2 + bc_3 \right)^2 \\ &\quad - \left(b^2 L \frac{u_1^2}{2} + bc_1 u_1 + bc_0 - cL \frac{u_2^2}{2} - cc_2 u_2 - cc_3 + L \right)^2. \end{aligned}$$

Em particular, vale a relação (3.3.7):

$$c_1^2 + b^2 c_2^2 - L[L + 2b(bc_3 - c_0)] = 0.$$

Afirmção 1. *Se $b^2 + c = 0$ e $L = 0$, então as superfícies \tilde{X} e X são congruentes.*

Demonstração da Afirmção 1. De fato, se $L = 0$, então a equação (3.3.7) que relaciona as constantes de integração reduz-se a $b^2 c_2^2 + c_1^2 = 0$. Como $b \neq 0$, segue que $c_1 = c_2 = 0$. Então, as funções f e g são constantes iguais a c_0 e c_3 , respectivamente. Por (3.3.35), (3.3.36) e (3.3.37), vemos que $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = -\omega_2$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$ e $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2$. Portanto, $\tilde{I} = I$ e $\tilde{II} = II$, onde \tilde{I} e \tilde{II} , I e II indicam as primeiras e segundas formas fundamentais de \tilde{X} e X , respectivamente. Isto finaliza a prova da Afirmção 1.

Caso II. *Quando $b^2 + c > 0$.*

Neste caso, as soluções das equações diferenciais em (3.3.27) são dadas por

$$f(u_1) = a_1 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + b_1 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) - \frac{bL}{b^2 + c}, \quad (3.3.38)$$

$$g(u_2) = a_2 \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) + b_2 \sin(\sqrt{b^2 + cu_2}) + \frac{L}{b^2 + c}, \quad (3.3.39)$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Afirmção 2. *Se $b^2 + c > 0$, então, sem perda de generalidade, consideramos $L = 0$.*

Demonstração da Afirmção 2. Por (3.3.5), temos que $T(u_1, u_2) = bf(u_1, u_2) - cg(u_1, u_2) + L$ não depende de L . Conseqüentemente, as funções Ω e W também não dependem de L . Observando as expressões em (3.3.18) e (3.3.20), concluímos o mesmo para as aplicações Ω_1 e Ω_2 . Portanto, \tilde{X} não depende de L . Sendo assim, podemos considerar, sem perda de generalidade, $L = 0$. Isto prova a Afirmção 2.

Agora, veremos como fica a condição algébrica adicional dada em (3.3.31). Com efeito, note que

$$\begin{aligned} f'(u_1) &= \sqrt{b^2 + c} [a_1 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + b_1 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1})], \\ g'(u_2) &= \sqrt{b^2 + c} [-a_2 \sin(\sqrt{b^2 + cu_2}) + b_2 \cos(\sqrt{b^2 + cu_2})], \\ (f')^2 &= (b^2 + c)[a_1^2 \sinh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) + 2a_1 b_1 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \\ &\quad + b_1^2 \cosh^2(\sqrt{b^2 + cu_1})], \\ c(g')^2 &= c(b^2 + c)[a_2^2 \sin^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) - 2a_2 b_2 \sin(\sqrt{b^2 + cu_2}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\ &\quad + b_2^2 \cos^2(\sqrt{b^2 + cu_2})], \\ c(f + bg)^2 &= c(f^2 + 2bfg + b^2 g^2) = c[a_1^2 \cosh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) \\ &\quad + 2a_1 b_1 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + b_1^2 \sinh^2(\sqrt{b^2 + cu_1})] \\ &\quad + 2bc[a_1 a_2 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + a_1 b_2 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_1 a_2 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_1 b_2 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2})] \\
 & + cb^2 [a_2^2 \cos^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) + 2a_2 b_2 \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_2^2 \sen^2(\sqrt{b^2 + cu_2})] \\
 (bf - cg)^2 & = b^2 f^2 - 2bcfg + c^2 g^2 = b^2 [a_1^2 \cosh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) \\
 & + 2a_1 b_1 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + b_1^2 \sinh^2(\sqrt{b^2 + cu_1})] \\
 & - 2bc [a_1 a_2 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + a_1 b_2 \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_1 a_2 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_1 b_2 \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2})] \\
 & + cb^2 [a_2^2 \cos^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) + 2a_2 b_2 \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \sen(\sqrt{b^2 + cu_2}) \\
 & + b_2^2 \sen^2(\sqrt{b^2 + cu_2})].
 \end{aligned}$$

Assim, somando os termos supracitados e observando que $L = 0$, deparamo-nos com as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 0 & = (f')^2 - c(g')^2 - c(f + bg)^2 - (bf - cg)^2 \\
 & = \sen^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) \underbrace{[-ca_2^2(b^2 + c) - cb^2 b_2^2 - c^2 b_2^2]}_{-c(b^2+c)(a_2^2+b_2^2)} \\
 & + \cos^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) \underbrace{[-cb_2^2(b^2 + c) - cb^2 a_2^2 - c^2 a_2^2]}_{-c(b^2+c)(b_2^2+a_2^2)} \\
 & + \sen(\sqrt{b^2 + cu_2}) \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) \underbrace{[2ca_2 b_2(b^2 + c) - 2cb^2 a_2 b_2 - 2c^2 a_2 b_2]}_{(b^2+c)[2ca_2 b_2 - 2ca_2 b_2]} \\
 & + \sinh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) \underbrace{[a_1^2(b^2 + c) - cb_1^2 - b^2 b_1^2]}_{(b^2+c)(a_1^2-b_1^2)} \\
 & + \cosh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) \underbrace{[b_1^2(b^2 + c) - ca_1^2 - b^2 a_1^2]}_{(b^2+c)(b_1^2-a_1^2)} \\
 & + \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \underbrace{[2a_1 b_1(b^2 + c) - 2ca_1 b_1 - 2b^2 a_1 b_1]}_{(b^2+c)[2a_1 b_1 - 2a_1 b_1]} \\
 & = -c(b^2 + c)(a_2^2 + b_2^2) [\sen^2(\sqrt{b^2 + cu_2}) + \cos^2(\sqrt{b^2 + cu_2})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (b^2 + c)(a_1^2 - b_1^2)[\sinh^2(\sqrt{b^2 + cu_1}) - \cosh^2(\sqrt{b^2 + cu_1})] \\ & = (b^2 + c)[-(a_1^2 - b_1^2) - c(a_2^2 + b_2^2)]. \end{aligned}$$

Por fim, como $b^2 + c > 0$, a condição algébrica (3.3.31) se reduz a

$$a_1^2 - b_1^2 + c(a_2^2 + b_2^2) = 0. \quad (3.3.40)$$

Afirmção 3. *Se $a_2^2 + b_2^2 = 0$, então as superfícies \tilde{X} e X são congruentes.*

Demonstração da Afirmção 3. Se $a_2^2 + b_2^2 = 0$, então $a_2 = b_2 = 0$ e $a_1 = \pm b_1$. Consequentemente,

$$g \equiv 0 \quad \text{e} \quad f = a_1[\cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \pm \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1})] = a_1 e^{\pm\sqrt{b^2 + cu_1}}.$$

Observemos agora as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} T^2 & = (bf - cg)^2 = b^2 f^2 = b^2 a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}}, \\ f' & = \pm \sqrt{b^2 + c} a_1 e^{\pm\sqrt{b^2 + cu_1}}, \quad (f')^2 = (b^2 + c) a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} \\ 2Tf' & = 2bf f' = \pm 2ba_1^2 \sqrt{b^2 + c} e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} \\ (f')^2 - T^2 & = a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} (b^2 + c - b^2) = ca_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f' & = b^2 a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} + (b^2 + c) a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} \\ & \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b a_1^2 \sqrt{b^2 + c} e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} \\ & = a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + cu_1}} \left(2b^2 + c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 + c} \right). \end{aligned}$$

Logo, usando (3.3.35), (3.3.36) e (3.3.37), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 & = -\frac{1}{c} \left(2b^2 + c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 + c} \right) \omega_1 \\ & = -\frac{1}{c} \left(2b^2 + c \mp 2 \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} b \sqrt{b^2 + c} \right) \cosh \phi \, du_1 \\ & = -\frac{1}{c} \left[(2b^2 + c) \cosh \phi \mp 2b \sqrt{b^2 + c} \sinh \phi \right] du_1. \end{aligned}$$

Lembrando que, por definição, $\phi = bu_1$, podemos ainda tomar um $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cosh \delta = \frac{2b^2 + c}{|c|} \quad \text{e} \quad \sinh \delta = \frac{2b\sqrt{b^2 + c}}{|c|},$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= -\frac{|c|}{c} \left(\frac{2b^2 + c}{|c|} \cosh \phi \mp \frac{2b\sqrt{b^2 + c}}{|c|} \sinh \phi \right) du_1 \\ &= -\frac{|c|}{c} (\cosh \delta \cosh \phi \mp \sinh \delta \sinh \phi) du_1 \\ &= -\frac{|c|}{c} \cosh(\phi \mp \delta) du_1 = -\frac{|c|}{c} \cosh(bu_1 \mp \delta) du_1. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 &= (-1)^2 \frac{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_2 T f'}{(f')^2 - T^2} \omega_2 \\ &= \frac{a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1} \left(2b^2 + c \mp 2 \frac{\cosh \phi}{\sinh \phi} b\sqrt{b^2 + c} \right)}{ca_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1}} \sinh \phi du_2 \\ &= \frac{|c|}{c} \left(\frac{2b^2 + c}{|c|} \sinh \phi \mp \frac{2b\sqrt{b^2 + c}}{|c|} \cosh \phi \right) du_2 \\ &= \frac{|c|}{c} (\cosh \delta \sinh \phi \mp \sinh \delta \cosh \phi) du_2 \\ &= \frac{|c|}{c} \sinh(\phi \mp \delta) du_2 = \frac{|c|}{c} \sinh(bu_1 \mp \delta) du_2. \end{aligned}$$

Com relação às curvaturas principais, calculando inicialmente o numerador da expressão de $\tilde{\lambda}_1$, dada por (3.3.37), obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} [T^2 + (f')^2]\lambda_1 - 2Tf' &= \\ &= \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} (2b^2 + c)a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1} \mp 2b\sqrt{b^2 + c}ca_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1} \\ &= \frac{1}{\cosh \phi} [(2b^2 + c) \sinh \phi \mp 2b\sqrt{b^2 + c} \cosh \phi] a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1} \\ &= \frac{1}{\cosh \phi} |c| \underbrace{[\cosh \delta \sinh \phi \mp \sinh \delta \cosh \phi]}_{\sinh(\phi \mp \delta)} a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2 + c}u_1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o denominador de (3.3.37) equivale a

$$\begin{aligned} T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f' &= a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2+cu_1}} \frac{1}{\cosh \phi} [(2b^2 + c) \cosh \phi \mp 2b\sqrt{b^2 + c} \sinh \phi] \\ &= a_1^2 e^{\pm 2\sqrt{b^2+cu_1}} \frac{1}{\cosh \phi} |c| \underbrace{[\cosh \delta \cosh \phi \mp \sinh \delta \sinh \phi]}_{\cosh(\phi \mp \delta)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{[T^2 + (f')^2]\lambda_1 - 2Tf'}{T^2 + (f')^2 - 2\lambda_1 T f'} = \frac{\sinh(\phi \mp \delta)}{\cosh(\phi \mp \delta)} = \operatorname{tgh}(\phi \mp \delta).$$

Como $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}$, segue que $\tilde{\lambda}_2 = \operatorname{cotgh}(\phi \mp \delta)$. Efetuando uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1 - \frac{\delta}{b}, u_2\right)$, concluímos que a primeira e a segunda formas fundamentais de X e \tilde{X} são iguais. Portanto, as superfícies X e \tilde{X} são congruentes, como queríamos provar

Agora, consideremos o caso em que $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Como, por (3.3.40), $a_1^2 - b_1^2 + c(a_2^2 + b_2^2) = 0$, segue que $a_1^2 - b_1^2 \neq 0$. Observe ainda que $a_1^2 - b_1^2$ possui sinal oposto ao da constante c , pois $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Voltando às expressões das funções f e g em (3.3.38) e (3.3.39), respectivamente, constatamos que é possível reescrever f e g da seguinte maneira: se $c > 0$, então, pela condição (3.3.40), temos $b_1^2 - a_1^2 > 0$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{b_1^2 - a_1^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \right] \\ &= \sqrt{b_1^2 - a_1^2} \left[\cosh \bar{A} \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + \sinh \bar{A} \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \right] \\ &= \sqrt{c} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1} + \bar{A}); \end{aligned}$$

se $c < 0$, ainda pela condição (3.3.40), temos $a_1^2 - b_1^2 > 0$, donde

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \right] \\ &= \sqrt{|c|} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left[\cosh A \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1}) + \sinh A \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1}) \right] \\ &= \sqrt{|c|} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1} + A), \end{aligned}$$

onde A e \bar{A} são tais que

$$\begin{aligned} \cosh A &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \quad \text{e} \quad \sinh A = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}, \\ \cosh \bar{A} &= \frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \quad \text{e} \quad \sinh \bar{A} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Finalmente, de (3.3.39), a função g corresponde a

$$\begin{aligned} g(u_2) &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left[\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \sin(\sqrt{b^2 + cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \left[\sin B \cos(\sqrt{b^2 + cu_2}) + \cos B \sin(\sqrt{b^2 + cu_2}) \right] \\ &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sin(\sqrt{b^2 + cu_2} + B), \end{aligned}$$

onde $\sin B = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ e $\cos B = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ para alguma constante $B \in \mathbb{R}$.

Agora, observe, através de (3.3.5), (3.3.18) e (3.3.20), que as soluções W , Ω , Ω_1 e Ω_2 possuem $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ como fator comum e, por consequência, a expressão de S , dada por (2.3.4), tem como fator o número $a_2^2 + b_2^2$. Substituindo W , Ω , Ω_1 , Ω_2 e S em (2.3.3), notamos que, tanto $a_2^2 + b_2^2$ quanto $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ não aparecem na expressão de \tilde{X} após os devidos cancelamentos. Sendo assim, consideramos simplesmente

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \begin{cases} \sqrt{c} \sinh(\sqrt{b^2 + cu_1} + A), & \text{se } c > 0, \\ \sqrt{|c|} \cosh(\sqrt{b^2 + cu_1} + A), & \text{se } c < 0, \end{cases} \\ g(u_2) &= \sin(\sqrt{b^2 + cu_2} + B), \end{aligned}$$

com $A, B \in \mathbb{R}$. Segue-se a partir de (3.3.35) e (3.3.36) que uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1, u_2 - \frac{B}{\sqrt{b^2 + c}}\right)$, não altera a primeira e a segunda formas fundamentais de \tilde{X} . Então, por simplicidade, tomamos $B = 0$. E então, f e g são dadas como em (3.3.8) e (3.3.9), respectivamente. Além disso, Ω e W são dadas por (3.3.5) com $L = 0$.

Caso III. Quando $b^2 + c < 0$.

Neste caso, as soluções das equações diferenciais em (3.3.27) são dadas por

$$f(u_1) = a_1 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + b_1 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) - \frac{bL}{|b^2 + c|}, \quad (3.3.42)$$

$$g(u_2) = a_2 \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + b_2 \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + \frac{L}{|b^2 + c|}. \quad (3.3.43)$$

Afirmção 4. *Se $b^2 + c < 0$, então consideramos, sem perda de generalidade, $L = 0$.*

Demonstração da Afirmção 4. Por (3.3.5), temos $T(u_1, u_2) = bf(u_1, u_2) - cg(u_1, u_2) + L$, que não depende de L . Consequentemente, as funções Ω e W também não dependem de L . Observando as expressões em (3.3.18) e (3.3.20), concluímos o mesmo para as aplicações Ω_1 e Ω_2 . Portanto, \tilde{X} não depende de L . Sendo assim, podemos considerar, sem perda de generalidade, $L = 0$. Isto prova a Afirmção 4.

Agora, veremos como fica a condição algébrica adicional (3.3.31) em termos dos coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 . Inicialmente, as derivadas de f e g são

$$f'(u_1) = \sqrt{|b^2 + c|}[-a_1 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + b_1 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1)],$$

$$g'(u_2) = \sqrt{|b^2 + c|}[a_2 \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + b_2 \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)].$$

Daí,

$$(f')^2 = |b^2 + c|[a_1^2 \sin^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) - 2a_1b_1 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + b_1^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1)],$$

$$c(g')^2 = c|b^2 + c|[a_2^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + 2a_2b_2 \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + b_2^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)],$$

$$c(f + bg)^2 = c(f^2 + 2bfg + b^2g^2) = c[a_1^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + 2a_1b_1 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + b_1^2 \sin^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1)]$$

$$+ 2bc[a_1a_2 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + a_1b_2 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + b_1a_2 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + b_1b_2 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)]$$

$$+ cb^2[a_2^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + 2a_2b_2 \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)].$$

$$\begin{aligned}
 & + b_2^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)] \\
 (bf - cg)^2 & = b^2 f^2 - 2bcfg + c^2 g^2 = b^2 [a_1^2 \cos^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \\
 & + 2a_1 b_1 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + b_1^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1)] \\
 & - 2bc[a_1 a_2 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \\
 & + a_1 b_2 \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \\
 & + b_1 a_2 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \\
 & + b_1 b_2 \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)] \\
 & + c^2 [a_2^2 \cosh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) + 2a_2 b_2 \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \\
 & + b_2^2 \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)].
 \end{aligned}$$

Como $b^2 + c < 0$, temos que $|b^2 + c| = -b^2 - c$. Assim, somando os termos calculados previamente e observando que $L = 0$, deparamo-nos com

$$\begin{aligned}
 0 & = (f')^2 - c(g')^2 - c(f + bg)^2 - (bf - cg)^2 \\
 & = \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \underbrace{(a_1^2 |b^2 + c| - cb_1^2 - b^2 b_1^2)}_{-(b^2+c)(a_1^2+b_1^2)} \\
 & + \cos^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \underbrace{(b_1^2 |b^2 + c| - ca_1^2 - b^2 a_1^2)}_{-(b^2+c)(b_1^2+a_1^2)} \\
 & + \sin(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \cos(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) \underbrace{(-2a_1 b_1 |b^2 + c| - 2ca_1 b_1 - 2b^2 a_1 b_1)}_{(b^2+c)[2a_1 b_1 - 2a_1 b_1]} \\
 & + \sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \underbrace{(-ca_2^2 |b^2 + c| - cb^2 b_2^2 - c^2 b_2^2)}_{c(b^2+c)(a_2^2-b_2^2)} \\
 & + \cosh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \underbrace{(-cb_2^2 |b^2 + c| - cb^2 a_2^2 - c^2 a_2^2)}_{c(b^2+c)(b_2^2-a_2^2)} \\
 & + \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \underbrace{[-2ca_2 b_2 |b^2 + c| - 2cb^2 a_2 b_2 - 2c^2 a_2 b_2]}_{(b^2+c)[2ca_2 b_2 - 2ca_2 b_2]} \\
 & = (b^2 + c) \{ -(a_1^2 + b_1^2) [\sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1) + \cos^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_1)] \\
 & + c(a_2^2 - b_2^2) [\sinh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) - \cosh^2(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)] \}
 \end{aligned}$$

$$= (b^2 + c)[-(a_1^2 + b_1^2) - c(a_2^2 - b_2^2)].$$

Equivalentemente, sendo $b^2 + c < 0$, a condição algébrica (3.3.31) reduz-se a

$$a_1^2 + b_1^2 + c(a_2^2 - b_2^2) = 0. \quad (3.3.44)$$

Afirmção 5. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então as superfícies \tilde{X} e X são congruentes.

Demonstração da Afirmção 5. Se $a_1^2 + b_1^2 = 0$, então $a_1 = b_1 = 0$. Consequentemente, $f \equiv 0$. Pela condição (3.3.44), temos $b_2 = \pm a_2$, daí $g(u_2) = a_2[\cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2) \pm \sinh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2)] = a_2 e^{\pm\sqrt{|b^2 + c|}u_2}$. Usando as equações (3.3.35), (3.3.36) e (3.3.37), obtemos

$$\tilde{\omega}_i = (-1)^{i+1} \omega_i, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2.$$

Portanto, $\tilde{I} = I$ e $\tilde{II} = II$, o que finaliza a prova da Afirmção 5.

Caso contrário, se considerarmos $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Como $b^2 + c < 0$, ou seja, $c < -b^2$, então $c < 0$. Por (3.3.44), temos $a_2^2 - b_2^2 > 0$. Com isso, podemos escever f e g como se segue:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{|c|} \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \operatorname{sen}(\sqrt{|b^2 + c|}u_1 + A), \\ g(u_2) &= \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2 + B), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad \text{e} \quad \cos A = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ \cosh B &= \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \quad \text{e} \quad \sinh B = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Novamente, através de (3.3.5), (3.3.18) e (3.3.20), vemos que as aplicações W , Ω , Ω_1 e Ω_2 têm o mesmo fator, $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$, e a expressão de S , dada por (2.3.4), tem como fator $a_2^2 - b_2^2$. Substituindo W , Ω , Ω_1 , Ω_2 e S em (2.3.3), verificamos que os números $a_2^2 - b_2^2$ e $\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ não aparecem na expressão de \tilde{X} após as devidas simplificações. Sendo assim, consideramos f e g como

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \sqrt{|c|} \operatorname{sen}(\sqrt{|b^2 + c|}u_1 + A), \\ g(u_2) &= \cosh(\sqrt{|b^2 + c|}u_2 + B), \end{aligned}$$

onde A, B são constantes reais definidas por (3.3.45). A primeira e a segunda formas fundamentais são invariantes por uma mudança de coordenadas de (u_1, u_2) para $\left(u_1, u_2 - \frac{B}{\sqrt{|b^2 + c|}}\right)$. Portanto, podemos considerar $B = 0$ e, assim, as funções f e g são como em (3.3.10). Para estas funções, consideramos Ω e W como em (3.3.5), com $L = 0$. O que conclui a demonstração do teorema. □

A seguinte proposição descreve os fins e as curvas singulares das superfícies obtidas no teorema anterior. A sua demonstração é análoga à da Proposição 3.3.

Proposição 3.5. *Cada superfície plana \tilde{X} , descrita pelo Teorema 3.3, possui fins do tipo horosfera mergulhados e completos determinados pelos pontos (u_1^0, u_2^0) da seguinte forma:*

i) Se $b^2 + c = 0$, então

$$u_1^0 = -\frac{1}{b} \left(\frac{c_1}{L} \pm 1 \right), \quad u_2^0 = -\frac{c_2}{L}. \quad (3.3.46)$$

ii) Se $b^2 + c > 0$, então

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c}}(-A + \gamma), \quad u_2^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } c > 0, \quad (3.3.47)$$

onde γ é tal que $\cosh \gamma = \frac{\sqrt{b^2 + c}}{\sqrt{c}}$ e $\sinh \gamma = \frac{b}{\sqrt{c}}$, ou,

$$u_1^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c}}(-A \mp \beta), \quad u_2^0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c}} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } c < 0, \quad (3.3.48)$$

onde β é tal que $\cosh \beta = \frac{b}{|c|}$ e $\sinh \beta = \frac{\sqrt{b^2 + c}}{\sqrt{|c|}}$.

iii) Se $b^2 + c < 0$, então

$$u_1^0 = \frac{-A \mp \gamma - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}{\sqrt{|b^2 + c|}}, \quad u_2^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.49)$$

onde γ é tal que $\cos \gamma = b\sqrt{|c|}$ e $\sin \gamma = \frac{\sqrt{|b^2 + c|}}{\sqrt{|c|}}$.

Além disso, as curvas de singularidades são descritas por

$$\sinh \phi [T^2 + (f')^2] - 2Tf' \cosh \phi = 0, \quad (3.3.50)$$

onde $\phi = bu_1$, T é dado por (3.3.5), as funções f e g são dadas por (3.3.6) se $b^2 + c = 0$, por (3.3.8) e (3.3.9) se $b^2 + c > 0$ e por (3.3.10) se $b^2 + c < 0$.

O seguinte resultado descreve uma classe especial de superfícies contidas no Teorema 3.3, descritas por \tilde{X} , que são periódicas em uma variável quando $b^2 + c > 0$.

Proposição 3.6. *Considere \tilde{X} a família de superfícies planas em \mathbb{H}^3 , como no Teorema 3.3. Para $b^2 + c > 0$ e $c \neq 0$ satisfazendo*

$$c = \frac{1}{4a^2} \left[(a^2 + 1)^2 \frac{n^2}{m^2} - (a^2 - 1)^2 \right], \quad \text{com } \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} \text{ irredutível}, \quad (3.3.51)$$

temos que:

- i) a superfície é periódica na variável u_2 , com período $\frac{4a}{a^2 + 1}m\pi$;
- ii) existem $2n$ fins do tipo horosfera mergulhados e completos;
- iii) as curvas de singularidades descritas por (3.3.50) estão contidas em um conjunto compacto;
- iv) existem dois fins completos de índice geométrico m dados pelo limite quando $u_1 \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. Seja \tilde{X} a família de superfícies dada por (3.3.4), com a constante de Ribaucour c dada por (3.3.51), e as funções f e g dadas por (3.3.8) e (3.3.9), respectivamente. Pelo Teorema 2.8 e pela Proposição 3.5, podemos verificar a validade das propriedades i) e ii). Com relação à propriedade iii), que diz que as singularidades descritas por (3.3.50) estão contidas em um conjunto compacto, a sua validade é verificada através das expressões de f e g e do fato de que \tilde{X} é periódica na variável u_1 , desde que a constante de Ribaucour c seja como na hipótese da proposição.

Agora, provaremos que as superfícies \tilde{X} tem dois fins completos quando u_1 tende a $\pm\infty$. Considerando as superfícies no modelo do semi-espaco de \mathbb{H}^3 ,

$$Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right). \quad (3.3.52)$$

Veremos então que

$$\lim_{u_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} = \infty, \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} \frac{1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} = 0. \quad (3.3.53)$$

De fato, a partir da equação (2.3.3), temos

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = \left(1 + \frac{2\Omega^2}{S}\right)(X^0 - X^3) - \frac{2\Omega\Omega_1}{S \cosh \phi}(X_{u_1}^0 - X_{u_1}^3) + \frac{2\Omega W}{S}(N^0 - N^3),$$

onde X e Ω_1 são dados por (3.3.1), (3.3.20), Ω , W e T são dadas por (3.3.5), ϕ e S são dados por (3.3.3) e (2.3.4), respectivamente, com $L = 0$. Conseqüentemente, temos que

$$\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3 = \frac{e^{-\beta}}{\alpha}(e^{-\frac{u_1}{a}}P + e^{-au_1}Q),$$

onde

$$P = a + \frac{a}{c-1} + \frac{T+f'}{a(c-1)(f'-T)} + \frac{2\Omega\Omega_1}{S \cosh \phi},$$

$$Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{(c-1)a} - \frac{a(T-f')}{(c-1)(T+f')} + \frac{2\Omega\Omega_1}{S \cosh \phi}.$$

Uma conta simples nos permite checar os seguintes limites

$$\lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} \frac{2\Omega\Omega_1}{S \cosh \phi} = \pm \frac{2(-b + \sqrt{b^2 + c})}{c-1}, \quad \lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} \frac{T+f'}{f'-T} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + c}}{-b \pm \sqrt{b^2 + c}}.$$

Portanto,

$$\lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} P = h_1^\pm, \quad \lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} Q = h_2^\pm,$$

onde h_1^\pm, h_2^\pm são números reais não-nulos. Com isso, vemos que as equações em (3.3.53) se verificam. Conseqüentemente, os fins correspondentes a $u_1 \rightarrow \pm\infty$ são completos.

Agora, a fim de provar que estes fins têm índice geométrico m , observemos, antes, de (2.3.3) e (3.3.1), que

$$\tilde{X}^1 = 2 \sinh \phi \left(\tilde{P} \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) - \tilde{Q} \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) \right),$$

$$\tilde{X}^2 = 2 \sinh \phi \left(\tilde{P} \sin \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) + \tilde{Q} \cos \left(\frac{\alpha u_2}{2} \right) \right),$$

onde

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{2\Omega T}{cS \sinh \phi} + \frac{2b\Omega\Omega_1}{S \sinh \phi} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{Q} = \frac{\Omega\Omega_2}{S \sinh \phi}.$$

Além disso, $\lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} \tilde{P} = \tilde{h}^\pm$ e $\lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} \tilde{Q} = 0$, onde \tilde{h}^\pm é um número real não-nulo. Portanto,

$$\lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\tilde{X}^1}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3}, \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^0 - \tilde{X}^3} \right) = \lim_{u_1 \rightarrow \pm\infty} V(u_1) \left(\cos\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha u_2}{2}\right) \right),$$

onde

$$V(u_1) = \frac{2 \sinh \phi \alpha e^\beta \tilde{h}^\pm}{e^{-\frac{u_1}{a}} h_1^\pm + e^{-au_1} h_2^\pm},$$

Como $0 \leq u_1 \leq \frac{2m\pi}{\beta}$, concluímos que os fins correspondentes a $u_1 \rightarrow \pm\infty$ tem índice m . Então, observando que $\lim_{u_1 \rightarrow \infty} V(u_1) = \infty$ e $\lim_{u_1 \rightarrow -\infty} V(u_1) = 0$, o modelo da bola de Poincaré nos permite concluir que o fim correspondente a $u_1 \rightarrow \infty$ vai para $(0, 0, 1)$ e o fim correspondente a $u_1 \rightarrow -\infty$ vai para $(0, 0, 0)$.

□

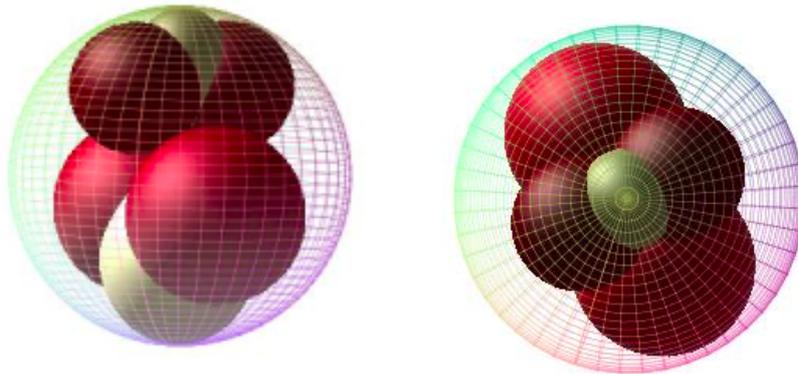


Figura 3.9 $a = 4, n = 2, m = 1$

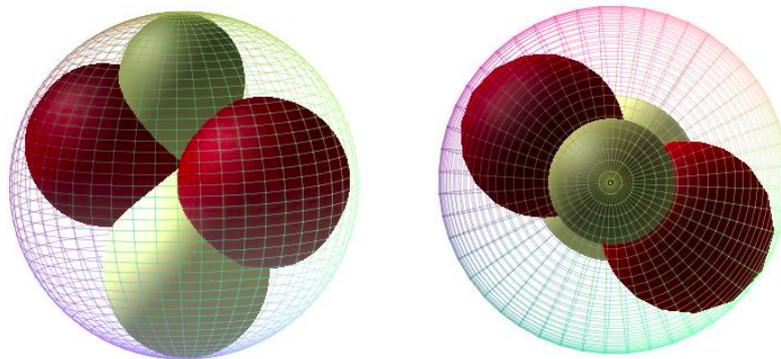


Figura 3.10 $a = 5, n = 1, m = 2$

A superfície em Figura 3.9 (à esquerda) e sua respectiva vista superior (à direita) representam graficamente a transformada de Ribaucour para uma superfície plana com uma singularidade isolada parametrizada por (3.3.1), com $a = 4$. A parametrização da transformada é dada em (3.3.4), escolhendo-se c como em (3.3.51) onde $n = 2$ e $m = 1$. Observe que tal superfície é periódica em uma variável e possui $2n + 2$ fins mergulhados, dentre os quais $2n$ são do tipo horosfera.

Enquanto a superfície em Figura 3.10 (à esquerda) e sua respectiva vista superior (à direita) representam graficamente a transformada de Ribaucour para uma superfície plana com uma singularidade isolada parametrizada por (3.3.1), com $a = 5$. A parametrização da transformada é dada em (3.3.4), escolhendo-se c como em (3.3.51) onde $n = 1$ e $m = 2$. Tal superfície é periódica em uma variável e possui 2 fins mergulhados do tipo horosfera e 2 fins de índice geométrico igual a 2.

Bibliografia

- [1] ALEDO, J., CHAVES, R., AND GÁLVEZ, J. The Cauchy problem for improper affine spheres and the hessian one equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 4183–4208.
- [2] ALEDO, J., MARTÍNEZ, A., AND MILÁN, F. The affine Cauchy problem. *J. Math. Anal. Appl.* **351**, 1 (2009), 70–83.
- [3] BIANCHI, L. *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema generale di permutabilità.* *Ann. Mat.*, (3), 27 (1918), 183–253 e (3), 28 (1919), 187–233.
- [4] BIANCHI, L. *Lezioni de Geometria Differenziale*, vol. II. Nicola Zanichelli Editore, Bologna, (1927).
- [5] BRYANT, R. L. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space.* *Astérisque*, tome 154-155, p. 321-347, (1987).
- [6] CORRO, A., FERREIRA, W., AND TENENBLAT, K. On Ribaucour transformations for hypersurfaces. *Mat. Contemp.* **17** (1999), 137–160.
- [7] CORRO, A., FERREIRA, W., AND TENENBLAT, K. Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformations. *Geom. Dedicata* **96** (2003), 117–150.
- [8] CORRO, A., FERREIRA, W., AND TENENBLAT, K. Ribaucour transformations for constant mean curvature and linear Weingarten surfaces. *Pacific J. Math.* **212** (2003), 265–296.
- [9] CORRO, A., MARTÍNEZ, A., AND MILÁN, F. Complete flat surfaces with two isolated singularities in hyperbolic 3-space. *J. Math. Anal. Appl.* **366** (2010), 583–592.
- [10] CORRO, A., MARTÍNEZ, A., AND TENENBLAT, K. Ribaucour transformations for flat surfaces in the hyperbolic 3-space. *J. Math. Anal. Appl.* **412** (2014), 720–743.
- [11] DE LIMA, L., AND ROSSMAN, W. On the index of constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space. *Indiana Univ. Math.* **47** (1998), 685–723.
- [12] DO CARMO, M. P. O método do referencial móvel. *Publicações Matemáticas, IMPA* (2009), 130 pages.
- [13] EARP, R., AND TOUBIANA, E. On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space. *Illinois J. Math.* **45** (2001), 371–401.

- [14] GROßE-BRAUCKMANN, K. New surfaces of constant mean curvature. *Math. Zeit.* **214** (1993), 527–565.
- [15] GÁLVEZ, J., MARTÍNEZ, A., AND MILÁN, F. Flat surfaces in the hyperbolic 3-space. *Math. Ann.* **316** (2000), 419–435.
- [16] GÁLVEZ, J., AND MIRA, P. Embedded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space. *Calc. Var.* **24** (2005), 239–260.
- [17] KOKUBU, M., ROSSMAN, W., SAJI, K., UMEHARA, M., AND YAMADA, K. Singularities of flat fronts in hyperbolic space. *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
- [18] KOKUBU, M., ROSSMAN, W., UMEHARA, M., AND YAMADA, K. Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics. *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 265–299.
- [19] KOKUBU, M., UMEHARA, M., AND YAMADA, K. Flat fronts in hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.* **216**, 1 (2004), 149–175.
- [20] LEMES, M., ROITMAN, P., TENENBLAT, K., AND TRIBUZY, R. Lawson correspondence and Ribaucour transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **364**, 12 (2012), 6229–6258.
- [21] MARTÍNEZ, A., DOS SANTOS, J., AND TENENBLAT, K. Helicoidal flat surfaces in the hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.* **264**, 1 (2013), 195–211.
- [22] MILÁN, F. Singularities of improper affine maps and their Hessian equation. *J. Math. Anal. Appl.* **405**, 1 (2013), 183–190.
- [23] ROITMAN, P. Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics. *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 21–37.
- [24] SIEVERT, H. Über die zentraflächen der enneperschen flächen konstanten krümmungsmasses. *Diss. Tübingen* (1886).
- [25] STERLING, I., AND WENTE, H. C. Existence and classification of *cmc* multibubbleton of finite and infinite type. *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 1239–1266.
- [26] TENENBLAT, K. *Transformations of Manifolds and Application to Differential Equations*. Longman Sci. and Tech., 1998.
- [27] TENENBLAT, K., AND WANG, Q. Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms. *Ann. Global Anal. Geom.* **29** (2006), 157–185.
- [28] UMEHARA, M., AND YAMADA, K. Complete surfaces of constant mean curvature one in the hyperbolic 3-space. *Ann. of Math.* **137** (1993), 611–638.

APÊNDICE

Apêndice A

Comando para uma figura realizada em *software* MAPLE®

Apresentamos os comandos realizados no programa computacional MAPLE a fim de obter uma superfície associada ao cilindro via transformação de Ribaucour em \mathbb{H}^3 . Tomamos como exemplo a Figura 3.3 (vista interna) e observamos que todas as figuras da dissertação podem ser reproduzidas de forma análoga, apenas ajustando-se os comandos de acordo com os teoremas e proposições do Capítulo 3.

```

> # Plotando uma superfície parametrizada de  $H^3$  no modelo da bola de Poincaré
> # Primeiro: utilize os pacotes PLOTS e STUDENT
> with(plots) :
> with(Student);
[Basics, Calculus1, LinearAlgebra, MultivariateCalculus, NumericalAnalysis, Precalculus, SetColors,
SetDefault, SetDefaults, Statistics, VectorCalculus]

```

```

> # Segundo: escreva as funções coordenadas da superfície  $X(u, v) = (x0(u, v), x1(u, v), x2(u, v), x3(u, v))$  :

```

```

> x0(u, v) := 1/a * cosh(a*v)
x0 := (u, v) -> cosh(a*v)/a

```

```

> x1(u, v) := 1/b * cos(b*u)
x1 := (u, v) -> cos(b*u)/b

```

```

> x2(u, v) := 1/b * sin(b*u)
x2 := (u, v) -> sin(b*u)/b

```

```

> x3(u, v) := 1/a * sinh(a*v)
x3 := (u, v) -> sinh(a*v)/a

```

```

> # Escolha as constantes a e b:

```

```

> a := 4/5
a := 4/5

```

```

> solve({1/b^2 - 1/a^2 + 1 = 0}, {b});
{b = -4/3}, {b = 4/3}

```

```

> b := 4/3
b := 4/3

```

```

> # Calcule as derivadas parciais de  $X(u, v) = (x0(u, v), x1(u, v), x2(u, v), x3(u, v))$  com relação a u e v:

```

```

> x0_u(u, v) := diff(x0(u, v), u)
x0_u := (u, v) -> 0

```

```

> eval(x0_u(u, v))
0

```

```

> x0_v(u, v) := diff(x0(u, v), v)
x0_v := (u, v) -> cosh(a*v)

```

```

> eval(x0_v(u, v))
sinh(4*v/5)

```

```

> x1_u(u, v) := diff(x1(u, v), u)
x1_u := (u, v) -> -sin(b*u)

```

```

> eval(x1_u(u, v))
-sin(4*u/3)

```

```

> x1_v(u, v) := diff(x1(u, v), v)

```

$$x1_v := (u, v) \rightarrow \frac{\partial}{\partial v} x1(u, v) \quad (15)$$

$$\text{eval}(x1_v(u, v)) \quad 0 \quad (16)$$

$$x2_u(u, v) := \text{diff}(x2(u, v), u) \quad x2_u := (u, v) \rightarrow \frac{\partial}{\partial u} x2(u, v) \quad (17)$$

$$\text{eval}(x2_u(u, v)) \quad \cos\left(\frac{4u}{3}\right) \quad (18)$$

$$x2_v(u, v) := \text{diff}(x2(u, v), v) \quad x2_v := (u, v) \rightarrow \frac{\partial}{\partial v} x2(u, v) \quad (19)$$

$$\text{eval}(x2_v(u, v)) \quad 0 \quad (20)$$

$$x3_u(u, v) := \text{diff}(x3(u, v), u) \quad x3_u := (u, v) \rightarrow \frac{\partial}{\partial u} x3(u, v) \quad (21)$$

$$\text{eval}(x3_u(u, v)) \quad 0 \quad (22)$$

$$x3_v(u, v) := \text{diff}(x3(u, v), v) \quad x3_v := (u, v) \rightarrow \frac{\partial}{\partial v} x3(u, v) \quad (23)$$

$$\text{eval}(x3_v(u, v)) \quad \cosh\left(\frac{4v}{5}\right) \quad (24)$$

Aplicando o Teorema 3.1 e a Proposição 3.2.

Definina a Constante de Ribaucour:

$$n := 3 \quad n := 3 \quad (25)$$

$$m := 2 \quad m := 2 \quad (26)$$

$$c := \frac{n^2}{m^2} \quad c := \frac{9}{4} \quad (27)$$

$$\text{eval}(c) \quad \frac{9}{4} \quad (28)$$

Definina as funções f e g:

$$f(u) := \sin(b \cdot \text{sqrt}(c) \cdot u) \quad f := u \mapsto \sin(b\sqrt{c} u) \quad (29)$$

$$\text{eval}(f(u)); \quad \sin(2u) \quad (30)$$

$$g(v) := \frac{b}{a} \cosh(a \cdot \text{sqrt}(c) \cdot v) \quad g := v \mapsto \frac{b \cosh(a\sqrt{c} v)}{a} \quad (31)$$

$$\text{eval}(g(v)); \quad \frac{5 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)}{3} \quad (32)$$

As derivadas de f e g são dadas por:

$$\text{flinha}(u) := \text{diff}(f(u), u) \quad \text{flinha} := u \rightarrow \frac{d}{du} f(u) \quad (33)$$

$$\text{eval}(\text{flinha}(u)); \quad 2 \cos(2u) \quad (34)$$

$$\text{glinha}(v) := \text{diff}(g(v), v) \quad \text{glinha} := v \rightarrow \frac{d}{dv} g(v) \quad (35)$$

$$\text{eval}(\text{glinha}(v)) \quad 2 \sinh\left(\frac{6v}{5}\right) \quad (36)$$

O vetor normal unitário N de X é dado por:

$$N0(u, v) := \frac{1}{b} \cosh(av) \quad N0 := (u, v) \mapsto \frac{\cosh(av)}{b} \quad (37)$$

$$\text{eval}(N0(u, v)); \quad \frac{3 \cosh\left(\frac{4v}{5}\right)}{4} \quad (38)$$

$$N1(u, v) := \frac{1}{a} \cos(b \cdot u) \quad N1 := (u, v) \mapsto \frac{\cos(bu)}{a} \quad (39)$$

$$\text{eval}(N1(u, v)); \quad \frac{5 \cos\left(\frac{4u}{3}\right)}{4} \quad (40)$$

$$N2(u, v) := \frac{1}{a} \sin(b \cdot u) \quad N2 := (u, v) \mapsto \frac{\sin(bu)}{a} \quad (41)$$

$$\text{eval}(N2(u, v)); \quad \frac{5 \sin\left(\frac{4u}{3}\right)}{4} \quad (42)$$

$$N3(u, v) := \frac{1}{b} \sinh(av) \quad N3 := (u, v) \mapsto \frac{\sinh(av)}{b} \quad (43)$$

$$\text{eval}(N3(u, v)); \quad \frac{3 \sinh\left(\frac{4v}{5}\right)}{4} \quad (44)$$

Calculando as componentes da transformada Xtil(u, v) = (xtil0(u, v), xtil1(u, v), xtil2(u, v), xtil3(u, v)) :

$$\text{xtil0}(u, v) := x0(u, v) + \frac{2 \cdot (f(u) + g(v))}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot (f(u))^2 - a^2 \cdot (g(v))^2)} \cdot \left((f(u) + g(v)) \cdot x0(u, v) - \text{flinha}(u) \cdot x0_u(u, v) - \text{glinha}(v) \cdot x0_v(u, v) - \left(\frac{b}{a} \cdot f(u) + \frac{a}{b} \cdot g(v) \right) \cdot N0(u, v) \right)$$

$$\text{xtil0} := (u, v) \mapsto x0(u, v) + \frac{1}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot f(u)^2 - a^2 \cdot g(v)^2)} \left((2f(u) + 2g(v)) \cdot \left((f(u) + g(v)) \cdot x0(u, v) - \text{flinha}(u) \cdot x0_u(u, v) - \text{glinha}(v) \cdot x0_v(u, v) - \left(\frac{bf(u)}{a} + \frac{ag(v)}{b} \right) \cdot N0(u, v) \right) \right) \quad (45)$$

$$\text{simplify}(\text{eval}(\text{xtil0}(u, v))) \quad \frac{1}{20 \sin(2u)^2 - 20 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2} \left(\left(25 \sin(2u)^2 - 24 \sin(2u) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right) - 65 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 \right) \cosh\left(\frac{4v}{5}\right) \right) \quad (46)$$

$$+ 36 \sinh\left(\frac{4v}{5}\right) \left(\sin(2u) + \frac{5 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)}{3} \right) \sinh\left(\frac{6v}{5}\right)$$

$$\text{> } x1l1(u, v) := x1(u, v) + \frac{2 \cdot (f(u) + g(v))}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot (f(u))^2 - a^2 \cdot (g(v))^2)} \cdot \left((f(u) + g(v)) \cdot x1(u, v) - \text{flinha}(u) \cdot x1_u(u, v) \right. \\ \left. - \text{glinha}(v) \cdot x1_v(u, v) - \left(\frac{b}{a} \cdot f(u) + \frac{a}{b} \cdot g(v) \right) \cdot N1(u, v) \right)$$

$$x1l1 := (u, v) \mapsto x1(u, v) + \frac{1}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot f(u)^2 - a^2 \cdot g(v)^2)} \left((2f(u) + 2g(v)) \cdot (f(u) + g(v)) \cdot x1(u, v) \right. \\ \left. - \text{flinha}(u) \cdot x1_u(u, v) - \text{glinha}(v) \cdot x1_v(u, v) - \left(\frac{bf(u)}{a} + \frac{ag(v)}{b} \right) \cdot N1(u, v) \right) \quad (47)$$

> simplify(eval(x1l1(u, v)))

$$\frac{1}{20 \cos(2u)^2 + 20 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 - 20} \left(\left(39 \cos(2u)^2 - 40 \sin(2u) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right) + 15 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 39 \right) \cos\left(\frac{4u}{3}\right) + 36 \sin\left(\frac{4u}{3}\right) \left(\sin(2u) + \frac{5 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)}{3} \right) \cos(2u) \right) \quad (48)$$

$$\text{> } x1l2(u, v) := x2(u, v) + \frac{2 \cdot (f(u) + g(v))}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot (f(u))^2 - a^2 \cdot (g(v))^2)} \cdot \left((f(u) + g(v)) \cdot x2(u, v) - \text{flinha}(u) \cdot x2_u(u, v) \right. \\ \left. - \text{glinha}(v) \cdot x2_v(u, v) - \left(\frac{b}{a} \cdot f(u) + \frac{a}{b} \cdot g(v) \right) \cdot N2(u, v) \right)$$

$$x1l2 := (u, v) \mapsto x2(u, v) + \frac{1}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot f(u)^2 - a^2 \cdot g(v)^2)} \left((2f(u) + 2g(v)) \cdot (f(u) + g(v)) \cdot x2(u, v) \right. \\ \left. - \text{flinha}(u) \cdot x2_u(u, v) - \text{glinha}(v) \cdot x2_v(u, v) - \left(\frac{bf(u)}{a} + \frac{ag(v)}{b} \right) \cdot N2(u, v) \right) \quad (49)$$

> simplify(eval(x1l2(u, v)))

$$\frac{1}{20 \cos(2u)^2 + 20 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 - 20} \left(\left(39 \cos(2u)^2 - 40 \sin(2u) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right) + 15 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 - 39 \right) \sin\left(\frac{4u}{3}\right) \right. \\ \left. - 36 \cos\left(\frac{4u}{3}\right) \cos(2u) \left(\sin(2u) + \frac{5 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)}{3} \right) \right) \quad (50)$$

$$\text{> } x1l3(u, v) := x3(u, v) + \frac{2 \cdot (f(u) + g(v))}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot (f(u))^2 - a^2 \cdot (g(v))^2)} \cdot \left((f(u) + g(v)) \cdot x3(u, v) - \text{flinha}(u) \cdot x3_u(u, v) \right. \\ \left. - \text{glinha}(v) \cdot x3_v(u, v) - \left(\frac{b}{a} \cdot f(u) + \frac{a}{b} \cdot g(v) \right) \cdot N3(u, v) \right)$$

$$x1l3 := (u, v) \mapsto x3(u, v) + \frac{1}{(1-c) \cdot (b^2 \cdot f(u)^2 - a^2 \cdot g(v)^2)} \left((2f(u) + 2g(v)) \cdot (f(u) + g(v)) \cdot x3(u, v) \right. \\ \left. - \text{flinha}(u) \cdot x3_u(u, v) - \text{glinha}(v) \cdot x3_v(u, v) - \left(\frac{bf(u)}{a} + \frac{ag(v)}{b} \right) \cdot N3(u, v) \right) \quad (51)$$

> simplify(eval(x1l3(u, v)))

$$\frac{1}{20 \sin(2u)^2 - 20 \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2} \left(36 \cosh\left(\frac{4v}{5}\right) \sin(2u) \sinh\left(\frac{6v}{5}\right) + 60 \cosh\left(\frac{4v}{5}\right) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right) \sinh\left(\frac{6v}{5}\right) \right. \\ \left. + 25 \sinh\left(\frac{4v}{5}\right) \sin(2u)^2 - 24 \sinh\left(\frac{4v}{5}\right) \sin(2u) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right) - 65 \sinh\left(\frac{4v}{5}\right) \cosh\left(\frac{6v}{5}\right)^2 \right) \quad (52)$$

> # **A projeção estereográfica no modelo da bola de Poincaré para H^3 :** $Y(u, v) = \left(\frac{x1(u, v)}{1 + x0(u, v)}, \frac{x2(u, v)}{1 + x0(u, v)}, \right.$

$$\left. \frac{x3(u, v)}{1 + x0(u, v)} \right)$$

> $y1(u, v) := \frac{x1l1(u, v)}{1 + x1l0(u, v)}$

$$y1 := (u, v) \mapsto \frac{xtil1(u, v)}{1 + xtil0(u, v)} \quad (53)$$

$$> y2(u, v) := \frac{xtil2(u, v)}{1 + xtil0(u, v)}$$

$$y2 := (u, v) \mapsto \frac{xtil2(u, v)}{1 + xtil0(u, v)} \quad (54)$$

$$> y3(u, v) := \frac{xtil3(u, v)}{1 + xtil0(u, v)}$$

$$y3 := (u, v) \mapsto \frac{xtil3(u, v)}{1 + xtil0(u, v)} \quad (55)$$

> # Por fim, escreva:

> *transfribaucour* := *plot3d*([*y1*(*u*, *v*), *y2*(*u*, *v*), *y3*(*u*, *v*)], *u* = - $\frac{3}{2}$ Pi.. $\frac{3}{2}$ Pi, *v* = - $\frac{5}{2}$ Pi..0, *numpoints* = 200000, *axes* = *none*)

> *esfera* := *plot3d*(1, *u* = 0.. $2 \cdot$ Pi, *v* = 0..Pi, *coords* = *spherical*, *scaling* = *constrained*, *style* = *wireframe*, *axes* = *none*)

> *with*(*plots*, *intersectplot*):

> *plots*[*display*](*transfribaucour*, *esfera*);

