UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre Versões Assintóticas dos Problemas A e C de Mahler

por

Ricardo Francisco da Silva

Brasília

2023

Ricardo Francisco da Silva

Sobre Versões Assintóticas dos Problemas A e C de Mahler

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira.

Brasília

2023

Aos meus pais, Neide e Ginaldo
e aos meus irmãos, Rafael e Raquel.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus pela vida, saúde e pelos dons concedidos conforme sua Graça e Sabedoria.

Agradeço à minha família pelo amor e carinho, ensinamentos sobre a vida, pelo bom exemplo de caráter e honestidade e pelo incentivo contínuo aos meus estudos.

Ao meu orientador, professor Diego Marques pelo suporte, conselhos, sugestões que vieram a melhorar esse trabalho e por me fazer conhecer a fascinante área da teoria dos números transcendentes.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de jornada, Diego Alves, Bruna, Luiz Gustavo, Marcelo, Pedro, Geovane, Manoel, Jesus, Rodolfo e tantos outros que tive o prazer de conhecer e conviver, pelo apoio, conversas e momentos, que tornaram os meus estudos no doutorado mais aprazíveis.

Aos professores do Departamento de Matemática que me ajudaram a enriquecer meus conhecimentos e contribuíram na minha formação profissional.

Aos professores Hemar Godinho, Ana Paula Chaves e Victor Neumann por aceitarem participar da avaliação deste trabalho e por todas as sugestões dadas.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

“O matemático puro, tal como o músico, é um criador livre do seu mundo de beleza ordenada.”

Bertrand Russell

Resumo

A natureza aritmética de um número que é imagem de um número algébrico por uma função transcendente é um tema estudado por vários matemáticos desde o século XIX. Um dos principais interessados nesse tipo de problema foi Mahler, que propôs questões de grande interesse em Teoria dos Números Transcendentes. Uma dessas questões trata da existência de uma função transcendente com coeficientes inteiros e limitados que assume valores algébricos em pontos algébricos. O primeiro objetivo deste trabalho é mostrar a existência de uma tal função, porém com quase todos os coeficientes limitados.

Mostraremos ainda a existência de uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com quase todos os coeficientes limitados tal que f e todas as suas derivadas levam algébricos em algébricos.

Um outro problema proposto por Mahler questiona se existem funções transcendentes com um conjunto excepcional prescrito. Relacionado a esse problema, mostramos que certos subconjuntos de números algébricos são conjuntos excepcionais de alguma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com quase todos os coeficientes limitados.

Palavras-chave: Funções transcendentes. Problemas de Mahler. Conjuntos excepcionais. Densidade assintótica.

Abstract

The arithmetic nature of a number given as an image of an algebraic number by a transcendental function is a subject studied by several mathematicians since the 19th century. One of the main interested in this type of problem was Mahler, who proposed questions of great interest in Transcendental Number Theory. One of these questions deals with the existence of a transcendental function with integer and bounded coefficients that assumes algebraic values at algebraic points. The first goal of this work is to show the existence of such a function, but with almost all bounded coefficients.

We will also show the existence of a transcendental function $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ with almost all bounded coefficients such that f and all its derivatives take algebraic values in algebraic points.

Another problem proposed by Mahler asks whether there are transcendental functions with a prescribed exceptional set. Related to this problem, we show that certain subsets of algebraic numbers are exceptional sets of some transcendental function $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ with almost all bounded coefficients.

Keywords: Transcendental functions. Mahler's problems. Exceptional sets. Asymptotic density.

Sumário

Introdução

Uma função f é dita *transcendente* se não existe polinômio não nulo complexo P que satisfaz $P(z, f(z)) = 0$, para todo z em seu domínio. A classe mais interessante de números transcendentes são aqueles obtidos como valores de funções transcendentes em pontos algébricos. O interesse em estudar a natureza aritmética de números da forma $f(\alpha)$, com α algébrico, surgiu no século XIX, após Lindemann mostrar a transcendência de e^{α}, para um algébrico não nulo α. De fato, em 1886, Strauss tentou provar que não existia uma função analítica transcendente que mapeia $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$. Entretanto, Weierstrass o surpreendeu apresentando um contraexemplo.

Além disso, Weierstrass começou a investigar o conjunto de números algébricos para os quais uma função inteira transcendente assume valores algébricos. Esse conjunto foi denominado de *conjunto excepcional*. Daí, ele levantou duas questões:

(1) Seja $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos números algébricos. Existe uma função inteira transcendente f tal que
$$f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}?$$

(2) Quais os possíveis subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são conjuntos excepcionais de funções inteiras transcendentes?

Em 1895, Stäckel [26] provou que para todo conjunto enumerável $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ e todo conjunto denso $T \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função inteira transcendente f tal que $f(\Sigma) \subseteq T$, respondendo assim a questão (1) de Weierstrass ($\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$).

A resposta para a questão (2) veio em 2010, quando Huang, Marques e Mereb [7] mostraram que dado $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, existe uma função inteira transcendente f tal que $S_{f^{(s)}} = S$, para todo $s \geq 0$ (onde $S_{f^{(s)}}$ denota o conjunto excepcional de $f^{(s)}$).

Um outro matemático que investigou o comportamento aritmético de funções transcendentes foi Mahler. Em 1965, ele mostrou que se S é fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$ (ou seja, se $\alpha \in S$ então todos os seus conjugados algébricos pertencem a S), então existe uma função f transcendente tal que $S_f = S$. Em um de seus livros [12], Mahler sugeriu três problemas relacionados a esse tópico e os chamou de problemas A, B e C. No que segue, $\mathbb{Z}\{z\}$ é o conjunto das séries de potências analíticas em $B(0,1)$ com coeficientes inteiros.

Problema A. *Existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com coeficientes limitados tal que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?*

Mahler mostrou que a resposta é negativa para funções fortemente lacunárias. Por isso, ele conjecturou que a resposta do Problema A seria negativa. No entanto, o problema ainda está em aberto. Recentemente, Marques e Moreira [16] mostraram a existência de uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$, tais que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ e seus coeficientes têm apenas 2 e 3 como divisores primos.

Nesse contexto, levantamos a seguinte questão, que chamamos de versão assintótica do Problema A de Mahler:

> *Existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com quase todos os coeficientes limitados tal que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?*

A expressão "quase todos limitados" significa que a densidade assintótica dos inteiros não negativos para os quais os coeficientes correspondentes são limitados é igual a um.

No Capítulo 2 desta tese, mostraremos que a resposta para essa pergunta é afirmativa. Essa parte do capítulo está baseada em nosso trabalho em [2]. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema A. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos infinitos de inteiros não negativos e defina $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$. Então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Para ver que esse resultado responde a nossa questão basta tomar $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{N}_0^2$, pois o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ é um conjunto de densidade zero.

Uma outra forma interessante que encontramos de responder à nossa questão foi obtida utilizando o teorema abaixo e um resultado recente de Tao e Ziegler [27].

Teorema B. *Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, a_1 < a_2 < \cdots$, e $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}, b_1 < b_2 < \cdots$, conjuntos infinitos de números naturais e seja*

$$\mathcal{S} := \{a_i + b_j \in \mathcal{A} + \mathcal{B}; 1 \leq i < j\}.$$

Então existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} c_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Tao e Ziegler mostraram que existem dois conjuntos infinitos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}, \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ tais que $a_i + b_j$ é primo para $1 \leq i < j$. Com isso, podemos mostrar a existência de uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{P}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Em 1902, Stäckel [25] construiu uma função inteira f cujas derivadas $f^{(t)}$, para $t = 0, 1, \ldots$, mapeiam $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$. Além disso, Faber refinou esse resultado em $f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}(i)$, para todo $t \geq 0$. Em 1968, Van der Poorten [28] construiu uma função inteira transcendente f, tal que $f^{(t)}(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, para todos $t \geq 0$ e $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Nesse sentido, no Capítulo 3, mostraremos o resultado a seguir.

Teorema C. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos infinitos de inteiros não negativos e defina $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$. Então existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que*

$$f^{(m)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \quad m \geq 0.$$

O Problema C de Mahler trata dos possíveis conjuntos excepcionais de funções transcendentes com coeficientes racionais.

Problema C. *Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real. Existe para qualquer escolha de $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$) uma função analítica com coeficientes racionais e raio de convergência ρ tal que $S_f = S$?*

Esse problema foi resolvido por Marques e Ramirez [17], para o caso $\rho = \infty$ e por Marques e Moreira [14] para qualquer $\rho \in (0, \infty]$.

Em 2020, Marques e Moreira [15] mostraram que qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, fechado para conjugação complexa e que contém o elemento 0, é conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$.

Relacionado a conjuntos excepcionais, levantamos a seguinte pergunta que chamamos de versão assintótica do Problema C de Mahler:

> *Dado $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ fechado para conjugação complexa e com $0 \in S$ existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com quase todos os coeficientes limitados tal que $S_f = S$?*

No Capítulo 4, provaremos resultados parciais com o intuito de responder essa questão.

Teorema D. *Sejam $\rho \in (0, 1]$ e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ um conjunto fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$ tal que $0 \in S$. Então existem uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{Z}$$

e uma constante $M \geq 0$, tais que

$$\delta(L(f, M)) = 1$$

e com $\rho_f = \rho$ *e* $S_f = S$.

Aqui, δ denota a densidade assintótica e $L(f, M) := \{n \in \mathbb{N}_0; |a_n| \leq M\}$.

Teorema E. *Sejam* $\ell \geq 2$ *um número inteiro,* $\{\zeta_1 := 1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\ell\}$ *o conjunto das* ℓ*-ésimas raízes da unidade e* $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ *um conjunto fechado para conjugação complexa contendo* 0 *e com a seguinte propriedade:*

$$\textit{se } \alpha \in S \textit{ então } \zeta_k \alpha \in S, \textit{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $\psi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ *e uma constante* $M \geq 0$*, tais que*

$$\underline{\delta}(L(\psi, M)) \geq 1 - \frac{1}{\ell}$$

e $S_\psi = S$.

Aqui, $\underline{\delta}$ denota a densidade assintótica inferior.

Como consequência do Teorema E, obtivemos que qualquer subconjunto S de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, fechado para conjugação complexa, contendo 0 e que tem a propriedade:

$$\text{se } \alpha \in S \text{ então} - \alpha \in S,$$

é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções transcendentes pares. A conclusão é a mesma para funções transcendentes ímpares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo desse trabalho.

1.1 Densidade assintótica

Seja $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos inteiros não negativos. Dados $A \subseteq \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A(n) := A \cap [0, n].$$

Definição 1.1. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}_0$. A* ***densidade assintótica inferior*** *e a* ***densidade assintótica superior*** *de A são dadas por*

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n} \quad e \quad \overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n},$$

respectivamente. Aqui, $\#A(n)$ indica a cardinalidade do conjunto $A(n)$. Dizemos que A tem ***densidade assintótica*** *$\delta(A)$ se $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$. Nesse caso,*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n}.$$

Seja

$$A = \{m \in \mathbb{N}_0; m \text{ tem a propriedade P}\}.$$

Dizemos que **quase todos os inteiros não negativos têm a propriedade P** se

$$\delta(A) = 1.$$

Proposição 1.2. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$. Se $A \subseteq B$, então*

$$\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B) \quad e \quad \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B).$$

Demonstração. Como $A \subseteq B$, segue que $A(n) \subseteq B(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que

$$\#A(n) \leq \#B(n) \Longrightarrow \frac{\#A(n)}{n} \leq \frac{\#B(n)}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\#B(n)}{n} \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\#B(n)}{n},$$

ou seja, $\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$ e $\overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$. □

Proposição 1.3. *Sejam A e B dois conjuntos de inteiros disjuntos e seja $C := A \cup B$. Se dois dos conjuntos A, B e C possuem densidade assintótica, então o terceiro conjunto também possui e*

$$\delta(C) = \delta(A) + \delta(B).$$

Demonstração. Suponha que $\delta(A)$ e $\delta(B)$ existem. Como A e B são disjuntos, tem-se que

$$\frac{\#C(n)}{n} = \frac{\#A(n)}{n} + \frac{\#B(n)}{n},$$

e como $\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{\#B(n)}{n}$ existem, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\#C(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\#A(n)}{n} + \frac{\#B(n)}{n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\#B(n)}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, $\delta(C)$ existe e

$$\delta(C) = \delta(A) + \delta(B).$$

Para mostrar o resultado quando $\delta(B)$ e $\delta(C)$ existem ou quando $\delta(A)$ e $\delta(C)$ existem, procede-se da mesma forma. □

Corolário 1.4. *Se $\delta(A)$ existe, então $\delta(\mathbb{N}_0 \backslash A)$ existe e é igual a $1 - \delta(A)$.*

Demonstração. Na Proposição 1.3, substitua C por $\mathbb{N}_0$ e B por $\mathbb{N}_0 \backslash A$. Já que

$$\mathbb{N}_0 = A \cup (\mathbb{N}_0 \backslash A) \text{ e } A \cap (\mathbb{N}_0 \backslash A) = \emptyset,$$

segue que $\delta(\mathbb{N}_0 \backslash A)$ existe e

$$\delta(\mathbb{N}_0 \backslash A) = \delta(\mathbb{N}_0) - \delta(A) = 1 - \delta(A).$$

□

Proposição 1.5. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}_0$ um conjunto com densidade assintótica δ. Defina $A_1 := A \cup B$ e $A_2 := A \backslash B$ onde $B \subset \mathbb{N}_0$ é um conjunto de densidade assintótica zero. Então*

$$\delta(A_1) = \delta(A_2) = \delta.$$

Demonstração. Podemos escrever A_1 como uma união disjunta da seguinte forma:

$$A_1 = A_2 \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B).$$

Pela Proposição 1.3,

$$\delta(A_1) = \delta(A_2) + \delta(B \backslash A) + \delta(A \cap B).$$

Como $B \backslash A$ e $A \cap B$ são subconjuntos de B, segue da Proposição 1.2 que $\delta(A_1) = \delta(A_2)$. Daí, e de $A_2 \subseteq A \subseteq A_1$, segue que

$$\delta(A_1) = \delta(A_2) = \delta.$$

□

Proposição 1.6. *Seja A uma sequência de números naturais $a_1 < a_2 < \cdots$. Então A tem densidade δ se e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \delta.$$

Demonstração. Suponha que A tenha densidade assintótica δ. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A(n)}{n} = \delta.$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\#A(a_n) = n$. Dessa forma, pondo $m := a_n$ temos

$$\frac{n}{a_n} = \frac{\#A(m)}{m}.$$

Ou seja, $\left(\frac{n}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ é uma subsequência de $\left(\frac{\#A(m)}{m}\right)_{m\geq 1}$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \delta.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \delta.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Se $\ell = \liminf_{m\to\infty} \frac{\#A(m)}{m}$, então existe uma subsequência

$\left(\dfrac{\#A(m_k)}{m_k}\right)_{k\geq 1}$ (ver [3], p.176) tal que

$$\frac{\#A(m_k)}{m_k} < \ell + \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $k \geq 1$. Para cada $m_k \geq a_1$, seja $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k - 1} \leq m_k < a_{n_k}$. Com isso, temos

$$\frac{n_k}{a_{n_k}} - \frac{\#A(m_k)}{m_k} = \frac{n_k}{a_{n_k}} - \frac{n_k - 1}{m_k} < \frac{n_k}{m_k} - \frac{n_k - 1}{m_k} = \frac{1}{m_k}.$$

Agora, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \frac{1}{m_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $k \geq k_0$, tem-se que

$$\frac{n_k}{a_{n_k}} < \frac{\#A(m_k)}{m_k} + \frac{1}{m_k} < \ell + \varepsilon,$$

donde segue que $\delta \leq \ell + \varepsilon$. Como ε é arbitrário, obtemos $\delta \leq \ell$. Por outro lado, como $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ é uma subsequência de $\left(\dfrac{\#A(m)}{m}\right)_{m\geq 1}$, segue que

$$\delta = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} \geq \liminf_{m\to\infty} \frac{\#A(m)}{m} = \ell.$$

Portanto, $\delta = \ell$.

Agora seja $L := \limsup\limits_{m\to\infty} \dfrac{\#A(m)}{m}$. Temos que $L \geq \ell = \delta$, assim, resta-nos mostrar que $L \leq \delta$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma subsequência $\left(\dfrac{\#A(m_k)}{m_k}\right)_{k\geq 1}$ tal que

$$\frac{\#A(m_k)}{m_k} > L - \varepsilon,$$

para todo $k \geq 1$. Para cada $k \geq 1$, seja $n_k := \#A(m_k)$. Dessa forma temos $a_{n_k} \leq m_k < a_{n_k+1}$ e

$$\frac{n_k}{a_{n_k}} = \frac{\#A(m_k)}{a_{n_k}} \geq \frac{\#A(m_k)}{m_k} > L - \varepsilon,$$

o que implica que $\delta \geq L - \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que $\delta \geq L$.

Portanto, $L = \ell = \delta$, ou seja, $\delta(A)$ existe e é igual a δ. $\square$

Exemplo 1.7. *Considere a progressão aritmética $A = \{ak + b; k \in \mathbb{N}_0\}$, com $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$. Pela Proposição 1.6, temos*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a}.$$

Exemplo 1.8. *O conjunto A dos quadrados perfeitos tem densidade 0. De fato, escrevendo $a_n = n^2$, temos pela Proposição 1.6*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemplo 1.9. *O conjunto de todos os primos $\mathbb{P}$ tem densidade 0. De fato, sabemos pelo teorema dos números primos que*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n},$$

onde $\pi(n)$ denota a quantidade de números primos menores do que ou iguais a n. Assim,

$$\delta(\mathbb{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi(n)}{n/\ln n}}{\frac{n}{n/\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

A seguir, daremos um exemplo de um conjunto que não possui densidade assintótica.

Exemplo 1.10. *Considere o conjunto A dos inteiros que começam com o dígito 1, ou seja,*

$$A = \bigcup_{k\geq 0} \{n \in \mathbb{N}; 10^k \leq n < 2\cdot 10^k\}.$$

Temos

$$\#A(10^m - 1) = \sum_{0\leq k<m} 10^k = \frac{1}{9}(10^m - 1)$$

e

$$\#A(2\cdot 10^m - 1) = \frac{1}{9}(10^m - 1) + 10^m = \frac{5}{9}(2\cdot 10^m - 1) + \frac{4}{9}.$$

Assim,

$$\underline{\delta}(A) \leq \frac{1}{9} < \frac{5}{9} \leq \overline{\delta}(A).$$

Portanto, A não possui densidade assintótica.

O próximo resultado estabelece qual a densidade assintótica do conjunto dos naturais que podem ser escritos como soma de dois quadrados.

Teorema 1.11. *O conjunto*

$$\mathbb{N}_0^2 + \mathbb{N}_0^2 = \{m^2 + n^2; m, n \in \mathbb{N}_0\}$$

tem densidade assintótica zero.

Demonstração. Ver [9], Vol. II, p. 261, Teorema 7.28 ou [8] p. 24. □

1.2 Números algébricos e transcendentes

Apresentaremos nessa seção definições e resultados relacionados aos números algébricos e transcendentes para melhor entendimento do trabalho.

Definição 1.12. *Sejam L e K dois corpos. Dizemos que L é uma* ***extensão*** *de K, denotada por L/K, quando K for um subcorpo de L.*

Seja L/K uma extensão de corpos. Dizemos que $\alpha \in L$ é **algébrico** sobre K, quando existe $P \in K[x]$ não nulo, tal que $P(\alpha) = 0$. Caso contrário, α é dito **transcendente** sobre K.

Uma extensão L/K onde todo elemento $\alpha \in L$ é algébrico sobre K é chamada de extensão **algébrica**.

Dizemos simplesmente que um número complexo é **algébrico**, quando for algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Números não algébricos são chamados **transcendentes**.

Exemplo 1.13. *Todo número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ é algébrico, pois é raiz do polinômio $P(x) = qx - p$.*

Exemplo 1.14. *$\sqrt{2}$, i e $\frac{1+i}{\sqrt{3}}$ são números algébricos, pois são raízes de $x^2 - 2$, $x^2 + 1$ e $9x^4 + 4$, respectivamente.*

Denotamos o conjunto dos números algébricos por $\overline{\mathbb{Q}}$. Dois fatos conhecidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ que serão utilizados nesse trabalho são:

- $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável e
- $\overline{\mathbb{Q}}$ é um corpo.

Se L/K é uma extensão de corpos, podemos considerar L como um espaço vetorial sobre K.

Definição 1.15. *O* ***grau*** *de uma extensão L/K, denotado por $[L : K]$ é a dimensão de L como um espaço vetorial sobre K.*

Quando $[L : K] < \infty$, dizemos que a extensão L/K é **finita**.

Proposição 1.16. *Seja L/K uma extensão finita. Então L/K é algébrica.*

Demonstração. Ver [19], p. 9. □

Proposição 1.17. *Sejam $F \subseteq K \subseteq L$ corpos. Então*

$$[L : F] = [L : K] \cdot [K : F].$$

Se um dos lados da equação é infinito, então o outro lado também é.

Demonstração. Ver [19], p. 9. □

Definição 1.18. *Sejam L/K uma extensão e $\alpha \in L$ algébrico sobre K. O* ***polinômio minimal*** *de α sobre K, denotado por $\operatorname{irr}_K(\alpha)$, é o polinômio mônico de menor grau com coeficientes em K que tem α como raiz. Nesse caso, o grau de α é definido como o grau de seu polinômio minimal.*

Observe que $\operatorname{irr}_K(\alpha)$ é um polinômio irredutível em $K[x]$. De fato, se ele fosse redutível, existiriam polinômios $P \in K[x]$ e $Q \in K[x]$, com $\deg P \geq 1$ e $\deg Q \geq 1$, tais que

$$\operatorname{irr}_K(\alpha) = P(x)Q(x). \tag{1.1}$$

Dessa forma,

$$\deg(\operatorname{irr}_K(\alpha)) = \deg P + \deg Q > \max\{\deg P, \deg Q\}. \tag{1.2}$$

Já que α é raiz de $\operatorname{irr}_K(\alpha)$, segue de (1.1) que $P(\alpha)Q(\alpha) = 0$, o que implica $P(\alpha) = 0$ ou $Q(\alpha) = 0$. Suponha sem perda de generalidade que $P(\alpha) = 0$. De (1.2), temos que $\deg P < \deg(\operatorname{irr}_K(\alpha))$, o que é impossível, pela definição de polinômio minimal.

Exemplo 1.19. *O número $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ é raiz de $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e de $x^2 - \sqrt{2}x + 1 \in K[x]$, onde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Como $x^4 + 1$ é mônico e irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ e $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ é mônico e irredutível em $K[x]$, segue que*

$$\operatorname{irr}_{\mathbb{Q}}(\alpha) = x^4 + 1 \quad e \quad \operatorname{irr}_K(\alpha) = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$$

O polinômio minimal de um número algébrico α sobre $\mathbb{Z}$ é definido como o polinômio primitivo $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de menor grau, tal que $P(\alpha) = 0$. Lembramos que um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$ é chamado **primitivo** se seus coeficientes são primos entre si.

Por exemplo, o polinômio minimal de $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ sobre $\mathbb{Z}$ é $5x^3 - 8$.

Considere agora $L = \mathbb{C}$.

Definição 1.20. *Seja K um subcorpo de $\mathbb{C}$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um algébrico sobre K. Os* ***conjugados*** *de α sobre K são as raízes em $\mathbb{C}$ de $\operatorname{irr}_K \alpha$.*

Os conjugados de α sobre $\mathbb{Q}$ são simplesmente chamados de **conjugados**.

Um número complexo é dito ser um **inteiro algébrico** se for raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros.

Exemplo 1.21. *Os números $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, i e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ são inteiros algébricos pois são raízes de $x^2 - x - 1, x^2 + 1$ e $x^4 - 10x^2 + 1$, respectivamente.*

Proposição 1.22. *Todo número algébrico é da forma a/b, onde a é um inteiro algébrico e $b \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja α um número algébrico. Então existem $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0. \tag{1.3}$$

Seja b o mínimo múltiplo comum dos denominadores de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Assim, $b \in \mathbb{N}$ e $ba_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. De (1.3) segue que

$$(b\alpha)^n + (ba_{n-1})(b\alpha)^{n-1} + \cdots + (b^{n-1}a_1)(b\alpha) + b^n a_0 = 0.$$

Isso mostra que $b\alpha$ é uma raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Assim, $a := b\alpha$ é um inteiro algébrico, de modo que

$$\alpha = \frac{a}{b},$$

onde a é um inteiro algébrico e $b \in \mathbb{Z}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 1.23. *Se α é um inteiro algébrico, então*

$$\mathrm{irr}_{\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}[x].$$

Demonstração. Ver [1], p. 92. $\square$

Definição 1.24. *Sejam L/K uma extensão e $\alpha \in L$. Seja*

$$K(\alpha) := \bigcap_{\substack{F \\ \alpha \in F \\ K \subseteq F \subseteq L}} F,$$

onde a interseção é tomada sobre todos os subcorpos F de L que contêm K e α.

Observe que essa interseção é não vazia, pois L é um tal corpo. Além disso, como a interseção de subcorpos de L é um subcorpo de L, $K(\alpha)$ é o menor corpo que contém K e α.

Sejam L/K uma extensão e $\alpha \in L$ algébrico sobre K. Pode-se mostrar que se $\deg(\mathrm{irr}_K(\alpha)) = n$, então os elementos $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ formam uma base de $K(\alpha)$ sobre K. Desse modo,

$$K(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}; a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K\}$$

e $[K(\alpha) : K] = n$ (veja [19], p.7).

Da mesma forma, se L/K é uma extensão de corpos, então dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, n \geq 2$, elementos de L, denotamos por $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ como o menor subcorpo de L que contém K e os elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Proposição 1.25. *Seja L/K uma extensão de corpos. Se cada $\alpha_i \in L$ é algébrico sobre K, então $[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K] < \infty$ com*

$$[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K] \leq \prod_{i=1}^{n} [K(\alpha_i) : K].$$

Demonstração. Ver [19], p. 10. $\square$

Corolário 1.26. *Se L/K é uma extensão, então $\alpha \in L$ é algébrico sobre K se e somente se $[K(\alpha) : K] < \infty$.*

No que diz respeito à teoria dos números transcendentes, ela teve sua origem no trabalho de Liouville em 1844, no qual obteve, pela primeira vez, uma classe de números que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros.

A ideia de Liouville para construir números transcendentes usa o seguinte teorema.

Teorema 1.27 (Liouville)**.** *Dado um número algébrico real α de grau $n > 1$, existe uma constante $c = c(\alpha)$ tal que para todos os números racionais p/q com $mdc(p,q) = 1, q > 0$ tem-se que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^n}.$$

Demonstração. Ver [21], p. 1 ou [13], p.81. $\square$

Exemplo 1.28. *O número*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

é transcendente.

Sejam $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ e

$$\frac{p_k}{q_k} := \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Temos

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} < \frac{1}{10^{(k+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) < \frac{2}{10^{(k+1)!}}.$$

Se α fosse um número algébrico, digamos de grau m, então pelo Teorema de Liouville, existiria uma constante $c(\alpha)$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c(\alpha)}{q_k^m} = \frac{c(\alpha)}{10^{k!m}},$$

o que para k suficientemente grande é uma contradição.

Em 1873, Cantor mostrou que $\overline{\mathbb{Q}}$ é um conjunto enumerável e que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Portanto, o conjunto dos números transcendentes é não enumerável. Entretanto, decidir se um dado número é transcendente não é uma tarefa fácil. Como exemplos, temos as constantes e e π.

Teorema 1.29 (Hermite, 1873 [6])**.** *e é transcendente.*

Teorema 1.30 (Lindemann, 1882 [10])**.** *π é transcendente.*

Os dois Teoremas acima são casos especiais de um resultado mais geral que Lindemann esboçou em seu trabalho de 1882 e foi provado rigorosamente por Weierstrass em 1885.

Teorema 1.31 (Lindemann-Weierstrass, 1885)**.** *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Ver [21], p.15 ou [13], p.165. □

Para mostrar que e é transcendente usando o último teorema, tome $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$. E para mostrar que π é transcendente, tome $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = i\pi$.

Além disso, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.32 (Teorema de Hermite-Lindemann)**.** *Se $\alpha \neq 0$ é algébrico, então e^{α} é transcendente.*

De fato, basta tomar $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$ no Teorema 1.31.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas. O sétimo problema de Hilbert pergunta se o número α^{β}, onde α é um algébrico (diferente de zero) e β é um algébrico (não racional), é transcendente. Esse problema foi resolvido independentemente por A. O. Gelfond (em 1934) e T. Schneider (em 1935).

Teorema 1.33 (Gelfond-Schneider)**.** *Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1\}$ e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \mathbb{Q}$. Então α^{β} é transcendente.*

Demonstração. Ver [13], p.177. □

Exemplo 1.34. *Os números $2^{\sqrt{2}}, i^i, (\sqrt[3]{5} + 1)^{\sqrt{7}}$ são transcendentes.*

Exemplo 1.35. *e^{π} é transcendente.*

De fato, como $e^{i\pi} = -1$, então

$$e^{\pi} = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}.$$

Portanto, pelo Teorema de Gelfond-Schneider e^{π} é transcendente.

Segue abaixo mais uma outra consequência interessante do Teorema de Gelfond-Schneider.

Corolário 1.36. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ números algébricos, não nulos, com $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0.$$

Demonstração. Ver [13], p. 120. □

Uma questão natural a se fazer é se é possível obter um resultado similar para uma quantidade arbitrária de logaritmos de números algébricos. A resposta para essa questão é afirmativa e foi obtida por Baker em 1966.

Teorema 1.37 (Baker, 1966). *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos não nulos tais que $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então*

$$1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$$

são linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Demonstração. Ver [13], p. 191. □

Corolário 1.38. *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m$ são algébricos, onde os α_i's são não nulos, então*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m$$

é zero ou transcendente.

Demonstração. Ver [21], p. 101 ou [13], p. 127. □

O próximo corolário é uma vasta generalização do Teorema de Gelfond-Schneider.

Corolário 1.39. *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ são algébricos não nulos, então*

$$e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_m^{\beta_m}$$

é transcendente.

Demonstração. Suponha por absurdo que $e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_m^{\beta_m}$ seja algébrico e denote-o por α_{m+1}. Assim,

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m - \log \alpha_{m+1} = -\beta_0 \neq 0,$$

o que contradiz o corolário anterior. □

Exemplo 1.40. *O número $e^{2i} \cdot 5^{\sqrt{10}}$ é transcendente.*

1.3 Séries e funções analíticas

Os números cuja natureza algébrica ou transcendente se deseja decidir são frequentemente dados como os valores $\beta = f(\alpha)$ de funções analíticas f em uma variável z em pontos algébricos $z = \alpha$.

Lembremos que uma **função analítica** é uma função f a valores complexos definida em um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ que é diferenciável (no sentido complexo) em todo ponto de D. Dizemos ainda que f é **analítica em um ponto** $z_0 \in D$ se existe uma vizinhança $U \subseteq D$ de z_0 tal que f é analítica em U.

Como veremos a seguir, qualquer função analítica pode ser localmente expandida em uma série de potências. Por isso, nesta seção, veremos conceitos básicos de sequências e séries que serão utilizadas nas demonstrações dos nossos resultados.

Definição 1.41. *Diz-se que uma sequência $z_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ de números complexos **converge** a um número complexo z_0 se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N tal que*

$$n \geq N \quad \textit{implica que} \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

*Diz-se que uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de números complexos **converge** para w e escrevemos*

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

se a sequência das somas parciais definidas por $w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge para w.

Exemplo 1.42.

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \quad \textit{para} \quad |z| < 1.$$

Se $z = 0$, a sequência converge trivialmente. Suponha agora $z \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n \geq N$ implica que

$$\left(\frac{1}{|z|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

pois a sequência $\left((\frac{1}{|z|})^n\right)_{n\geq 1}$ é crescente e ilimitada. Assim, para $n \geq N$, temos $|z^n| = |z|^n < \varepsilon$.

Exemplo 1.43. *A série geométrica converge para todo $z \in B(0,1) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.*

Nesse caso temos

$$w_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Daí e do exemplo anterior segue que

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{1 - z},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

Definição 1.44. *Diz-se que uma série complexa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge absolutamente** se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

converge.

Pode-se provar que toda série absolutamente convergente é convergente (veja por exemplo [18], p. 185 e p. 193). Esse fato é importante, uma vez que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ é uma série real e por isso os testes conhecidos para séries reais podem ser aplicados (ver [18], p. 186).

Como vimos no início desta seção, estamos interessados em funções analíticas, portanto, veremos a seguir as definições de convergência pontual e convergência uniforme de uma sequência de funções.

Definição 1.45. *Diz-se que uma sequência $f_n : D \to \mathbb{C}$ de funções definidas em um conjunto D **converge pontualmente** se para cada $z \in D$, a sequência $(f_n(z))_{n\geq 1}$ converge. O limite define uma nova função em D.*

Definição 1.46. *Diz-se que uma sequência $f_n : D \to \mathbb{C}$ de funções definidas em um conjunto D **converge uniformemente** para a função f se, para cada $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n \geq N$ implica que*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \text{ para todo } z \in D.$$

*Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ **converge pontualmente** se as somas parciais correspondentes $w_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)$ convergem pontualmente. Além disso, dizemos que essa série **converge uniformemente** se a sequência de funções $(w_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.*

Definição 1.47. *Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ **converge absolutamente em** D se $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(z)|$ é convergente para cada $z \in D$.*

Uma das ferramentas mais úteis para mostrar que uma série de funções converge uniformemente é o Teste M de Weierstrass, que enunciamos a seguir.

Teorema 1.48 (Teste M de Weierstrass)**.** *Seja $(g_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções definidas em um conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponha que exista uma sequência de constantes reais não negativas $(M_n)_{n\geq 1}$, tal que as seguintes condições são válidas:*

(i) $|g_n(z)| \leq M_n$ *para todo* $z \in D$*;*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

Então $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absoluta e uniformemente em D.

Demonstração. Ver [18], p.189. □

Exemplo 1.49. *Considere a série $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Afirmamos que essa série converge uniformemente em cada um dos conjuntos $D_r := \overline{B}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$, onde $0 \leq r < 1$.*

Seja $g_n(z) = z^n/n$. Como $|z| \leq r$, temos $|g_n(z)| = |z|^n/n \leq r^n/n$. Pondo $M_n = r^n/n$, temos $0 \leq M_n \leq r^n$. Daí segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge pela comparação com a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ que é convergente. Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge uniformemente em D_r.

O próximo resultado foi formulado por Weierstrass em 1860 aproximadamente e é um dos principais teoremas referentes à convergência de funções analíticas.

Teorema 1.50 (Weierstrass)**.** *Se $(g_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções analíticas definidas em um aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente em todo disco fechado de D, então g é uma função analítica em D e $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(z)$ pontualmente em D e também uniformemente em todo disco fechado contido em D.*

Demonstração. Ver [18], p.191. □

Veremos agora um tipo especial de série chamado de série de potências.

Definição 1.51. *Uma **série de potências** é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

onde os a_n e z_0 são números complexos fixados.

Lembramos a seguir que o domínio apropriado de analiticidade de uma série de potências é um disco centrado em z_0.

Teorema 1.52. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências. Existe um único número real $\rho \geq 0$, possivelmente $+\infty$, chamado raio de convergência, tal que se $|z - z_0| < \rho$, a série converge, e se $|z - z_0| > \rho$ a série diverge. Além disso, a convergência é uniforme e absoluta em todo disco fechado em $D = B(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \rho\}$. E nenhuma afirmação pode ser feita quando $|z - z_0| = \rho$.*

O círculo $|z - z_0| = \rho$ é chamado de **círculo de convergência**.

Demonstração. Ver [18] p. 204 e p. 205. □

Combinando os Teoremas 1.50 e 1.52 podemos deduzir o seguinte teorema.

Teorema 1.53. *Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é uma função analítica dentro de seu círculo de convergência.*

Vimos também no Teorema 1.50 que podemos derivar séries convergentes de funções analíticas termo a termo. Isso nos leva ao próximo teorema.

Teorema 1.54. *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a função analítica definida dentro do círculo de convergência da série de potências dada. Então $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, e essa série de potências tem o mesmo círculo de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Além disso, os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Demonstração. Ver [18] p. 205. □

Existem alguns métodos práticos para encontrar o raio de convergência de uma série de potências, como o teste da razão e o teste da raiz.

Proposição 1.55. *Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.*

(i) ***Teste da razão:*** *Se*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existe, então é igual a ρ, o raio de convergência da série.

(ii) ***Teste da raiz****: Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, então*

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

é o raio de convergência (ponha $\rho = \infty$ se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$).

Demonstração. Ver [18] p. 207. □

Existe uma fórmula mais geral para encontrar o raio de convergência de qualquer série de potências. Trata-se da **fórmula de Cauchy-Hadamard** dada por

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.4}$$

Finalmente, veremos que qualquer função analítica pode ser localmente expandida em uma série de potências.

Teorema 1.56. *Seja f uma função analítica em um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$. Seja $z_0 \in D$ e seja $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subseteq D$ (geralmente o maior disco aberto possível é usado: se $r = \infty, B(z_0, r) = D = \mathbb{C}$). Então para todo $z \in B(z_0, r)$, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge em $B(z_0, r)$, (isto é, tem um raio de convergência $\rho \geq r$) e temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Demonstração. Ver [18] p. 208 e p. 209. □

1.4 Funções transcendentes

Como vimos na seção anterior, estamos interessados em investigar a natureza aritmética de números que são valores de certas funções analíticas em pontos algébricos. Além de serem analíticas, queremos que essas funções sejam transcendentes, por isso, iremos abordar sobre esse tema nessa seção.

Definição 1.57. *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é* ***algébrica*** *se existe um polinômio $P \in \mathbb{C}[x, y]$, não nulo, tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \ \textit{para todo } z \in \Omega.$$

Caso contrário, dizemos que f é ***transcendente****.*

Exemplo 1.58. *As funções e^z e $\log z$ são transcendentes. As funções trigonométricas e suas inversas também são funções transcendentes.*

Exemplo 1.59. *Os polinômios e as funções racionais são exemplos de funções algébricas.*

O resultado a seguir pode ser encontrado em [12]. Porém, a demonstração dada a seguir é mais simples e é devida a Marques e Moreira [15].

Teorema 1.60. *Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ uma série de potências com raio de convergência positivo e coeficientes racionais. Se existe um polinômio não nulo $P \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau n tal que $P(x, f(x))$ é identicamente 0, então existe um polinômio $Q \in \mathbb{Q}[x, y]$ de grau no máximo n tal que $Q(x, f(x))$ é identicamente 0.*

Demonstração. Já que existe um polinômio não nulo $P \in \mathbb{C}[x, y]$ que satisfaz

$$P(x, f(x)) \equiv 0,$$

as séries de potências $x^r f(x)^s$, $r, s \in \mathbb{N}_0, r + s \leq n$, são linearmente dependentes. Para cada $N \in \mathbb{N}_0$, seja

$$\begin{aligned} \pi_N \colon \mathbb{C}[[x]] &\to \mathbb{C}[x] \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &\mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k x^k. \end{aligned}$$

a projeção natural sobre o espaço vetorial dos polinômios com grau no máximo N. Seja $E < \mathbb{C}[[x]]$ o espaço vetorial gerado pelas séries $x^r f(x)^s, r, s \in \mathbb{N}_0, r+s \leq n$ e para cada $N \in \mathbb{N}$ seja

$$E_N := \pi_N(E).$$

Uma vez que o número de soluções não negativas da inequação $r+s \leq n$ é

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{n+1}{1} = 1+2+3+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

temos

$$0 \leq \dim E_N \leq \dim E \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}_0.$$

Além disso, $\dim E_N \leq \dim E_{N+1}$, para todo $N \in \mathbb{N}_0$. Dessa forma existem $d, N_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\dim E_N = d$ para todo $N \geq N_0$. Sejam $(r_1, s_1), \ldots, (r_d, s_d)$ tais que $r_i + s_i \leq n$, para todo $i \leq d$ e

$$\pi_{N_0}(x^{r_i} f(x)^{s_i}), 1 \leq i \leq d$$

formem uma base para E_{N_0}. Afirmamos que

$$\pi_N(x^{r_i} f(x)^{s_i}), 1 \leq i \leq d$$

formam uma base para E_N, para todo $N \geq N_0$. De fato, temos

(i) $\dim E_N = d$ e

(ii) $\pi_N(x^{r_i} f(x)^{s_i}), 1 \leq i \leq d$ são linearmente independentes, pois do contrário teríamos

$$\pi_{N_0}(x^{r_i} f(x)^{s_i}) = \pi_{N_0}(\pi_N((x^{r_i} f(x)^{s_i}))), 1 \leq i \leq d,$$

linearmente dependentes, o que é uma contradição.

Já que $x^r f(x)^s, r, s \in \mathbb{N}_0, r+s \leq n$ são linearmente dependentes em $\mathbb{C}[[x]]$, aplicando π_N a uma combinação linear não trivial que é igual a zero, concluímos que para qualquer $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\pi_N(x^r f(x)^s), r, s \in \mathbb{N}_0, r+s \leq n$$

são linearmente dependentes em $\mathbb{C}[x]$. Assim,

$$d < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

e existe (r, s) com $r, s \in \mathbb{N}_0, r+s \leq n$ tal que

$$(r, s) \neq (r_i, s_i)$$

para todo $1 \leq i \leq d$. Uma vez que $\pi_{N_0}(x_i^r f(x)^{s_i}), 1 \leq i \leq d$ formam uma base de E_{N_0} e $\pi_N(x^r f(x)^s) \in \mathbb{Q}[x]$, para todo $N \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_0, r+s \leq n$, existem $c_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq d$, unicamente determinados, tais que

$$\pi_{N_0}(x^r f(x)^s) = \sum_{i=1}^{d} c_i \pi_{N_0}(x^{r_i} f(x)^{s_i}).$$

Isso implica que para todo $N \geq N_0$,

$$\pi_N(x^r f(x)^s) = \sum_{i=1}^{d} c_i \pi_N(x^{r_i} f(x)^{s_i}).$$

De fato, dado $N \geq N_0$, existem $\tilde{c}_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq d$ tais que

$$\pi_N(x^r f(x)^s) = \sum_{i=1}^{d} \tilde{c}_i \pi_N(x^{r_i} f(x)^{s_i}).$$

Aplicando π_{N_0}, obtemos

$$\pi_{N_0}(x^r f(x)^s) = \sum_{i=1}^{d} \tilde{c}_i \pi_{N_0}(x^{r_i} f(x)^{s_i}).$$

Logo, por unicidade obtemos $\tilde{c}_i = c_i$ para $1 \leq i \leq d$. Agora, já que

$$\pi_N(x^r f(x)^s) = \sum_{i=1}^{d} c_i \pi_N(x^{r_i} f(x)^{s_i}),$$

para todo $N \geq N_0$, segue que

$$x^r f(x)^s = \sum_{i=1}^{d} c_i x^{r_i} f(x)^{s_i}$$

em $\mathbb{C}[[x]]$, e obtemos o resultado com

$$Q(x,y) = x^r y^s - \sum_{i=1}^{d} c_i x^{r_i} y^{s_i} \in \mathbb{Q}[x,y].$$

□

O próximo resultado é bastante útil para a construção de funções transcendentes.

Corolário 1.61. *O conjunto das séries de potências com raio de convergência positivo e coeficientes racionais que são funções algébricas é enumerável.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.60, dada uma série de potências algébrica f com coeficientes racionais, existe um polinômio não nulo $Q \in \mathbb{Q}[x,y]$ tal que $Q(x, f(x)) \equiv 0$. Uma vez que $\mathbb{Q}[x,y]$ é enumerável e o número de ramos em $x=0$ de qualquer curva algébrica determinada por um polinômio em $\mathbb{C}[x,y]\backslash\{0\}$ é finito, segue que o conjunto das séries de potências com raio positivo e coeficientes racionais é enumerável. $\square$

Lema 1.62. *Se $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}\{z\}$ são funções algébricas, então $f_1 \pm f_2$ também é uma função algébrica.*

Demonstração. Como f_1 e f_2 são algébricas, segue do Teorema 1.60 que existem polinômios não nulos $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[X,Y]$, tais que $P_1(z, f_1(z)) = 0$ e $P_2(z, f_2(z)) = 0$, para todo $z \in B(0,1)$. Dessa forma, f_1 e f_2 são elementos algébricos sobre o corpo das funções racionais $\mathbb{Q}(z)$ e, por isso, $[\mathbb{Q}(z)(f_1, f_2) : \mathbb{Q}(z)] < \infty$ (veja a Proposição 1.25). Já que $\mathbb{Q}(z)(f_1 + f_2) \subset \mathbb{Q}(z)(f_1, f_2)$, segue que $[\mathbb{Q}(z)(f_1 + f_2) : \mathbb{Q}(z)] < \infty$. Portanto, pelo Corolário 1.26, existe um polinômio não nulo $P_0 \in \mathbb{Q}(z)[y]$ tal que $P_0(f_1 + f_2) = 0$. Multiplicando esse polinômio pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, encontramos um polinômio não nulo $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tal que

$$P(z, f_1(z) + f_2(z)) = 0, \quad \text{para todo } z \in B(0,1),$$

o que mostra que $f_1 + f_2$ é algébrica. Similarmente, mostramos que $f_1 - f_2$ é algébrica. $\square$

Corolário 1.63. *Se $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ é algébrica e $g \in \mathbb{Z}\{z\}$ é transcendente, então $f+g$ é transcendente.*

1.5 Séries de potências lacunárias e fortemente lacunárias

Nessa seção iremos definir uma classe especial de funções analíticas transcendentes que serão fundamentais nas demonstrações dos nossos resultados.

Definição 1.64. *Diz-se que uma série de potências $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ é **lacunária** (resp. **fortemente lacunária**) se existem duas sequências de inteiros $\{r_1, r_2, \ldots\}$ e $\{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$, tais que*

1. $0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \ldots,$
2. $\lim_{n\to\infty} (s_n - r_n) = \infty \quad \left[\text{resp. } \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = \infty\right],$
3. $a_{r_n} \neq 0, a_{s_n} \neq 0$ *e* $a_k = 0$, *para* $r_n < k < s_n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Exemplo 1.65. *A função $f(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2^k}$ é lacunária com*

$$s_0 = 0, r_1 = 1 \text{ e } s_n = r_{n+1} = 2^n, n \geq 1.$$

Exemplo 1.66. *A função* $f(z) = \sum_{k \geq 0} z^{k!}$ *é fortemente lacunária com*

$$s_0 = 0, r_1 = 1 \text{ e } s_n = r_{n+1} = (n+1)!, n \geq 1.$$

Observe que uma série fortemente lacunária é lacunária. De fato, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{s_n}{r_n} > M + 1.$$

De $\frac{s_n}{r_n} > M + 1$, segue que

$$s_n - r_n > M r_n \geq M$$

para $n \geq n_0$. Assim,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{r_n} = \infty \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} (s_n - r_n) = \infty.$$

O motivo de apresentarmos a definição de série fortemente lacunária aqui, é que em certos problemas, o fato de ser lacunária não é suficiente para controlar o crescimento da cauda de uma série.

O resultado a seguir estabelece a transcendência das séries lacunárias.

Teorema 1.67. *Toda série lacunária define uma função transcendente.*

Demonstração. Ver [12] p. 42. □

Capítulo 2

Funções Transcendentes com Coeficientes Inteiros e o Problema A de Mahler

Neste capítulo abordaremos o tema de funções analíticas transcendentes que assumem valores algébricos em pontos algébricos.

Weierstrass foi quem começou a investigar o conjunto de números algébricos para os quais uma função transcendente dada assume valores algébricos. Em 1886, em uma carta para Strauss, ele conjecturou sobre a existência de uma função inteira transcendente f satisfazendo

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}},$$

onde $\overline{\mathbb{Q}}$ denota o corpo dos números algébricos. Essa conjectura foi provada em 1895 por Stäckel [26], que estabeleceu o seguinte resultado mais geral: *Para cada subconjunto enumerável $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ e cada subconjunto denso $T \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função inteira transcendente f tal que*

$$f(\Sigma) \subseteq T.$$

A afirmação de Weierstrass é obtida no caso especial

$$\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}.$$

Em [12], no Capítulo 3, Mahler sugeriu três problemas sobre o comportamento aritmético de funções transcendentes. Ele os denominou de Problemas A, B e C. Daremos destaque aqui nesse capítulo ao Problema A de Mahler.

2.1 O Problema A de Mahler

Seja $\mathbb{Z}\{z\}$ o conjunto das séries de potências analíticas em $B(0,1)$ com coeficientes inteiros.

Problema A. Existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com coeficientes limitados tal que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

O Problema A até esse momento está em aberto. Mahler conjecturou que a resposta para esse problema é negativa. Ele mesmo mostrou isso no caso em que f é uma função fortemente lacunária (veja [11]). Em sua tese de doutorado [23], Ramirez, usando o Teorema do Subespaço de Schlickewei, mostrou que para funções lacunárias satisfazendo $\frac{s_n}{r_n} = 1 + \delta, \delta > 0$, a resposta continua sendo negativa.

Em [16], Marques e Moreira mostraram que existem funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ cujos coeficientes têm somente 2 e 3 como divisores primos e tais que

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

O problema A de Mahler está relacionado com expansões em uma base g de números algébricos irracionais, que é um tópico ainda bastante misterioso. Isso nos dá uma ideia da dificuldade em resolver o problema A. Vejamos a seguir mais precisamente essa relação.

Conjectura 2.1. *Sejam x um número algébrico real irracional, $g \geq 3$ um inteiro positivo e a um inteiro no intervalo $0 \leq a \leq g-1$. Então o dígito a ocorre pelo menos uma vez na expansão de x na base g.*

Supondo que essa conjectura é verdadeira, Marques e Moreira provaram o seguinte resultado.

Proposição 2.2 (Marques, Moreira, [16])**.** *Se a Conjectura 2.1 é verdadeira, então o Problema A de Mahler tem resposta negativa.*

Antes de apresentar a demonstração da Proposição 2.2, vamos definir o que é uma sequência ultimamente periódica.

Definição 2.3. *Seja R um anel. Uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}, a_n \in R$, é dita ser* ***ultimamente periódica*** *se existem $r, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_{n+r} = a_n$ para todo $n \geq n_0$. O número r é chamado de* ***período*** *da sequência.*

Lema 2.4. *Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \in R$, uma série de potências. Se a sequência dos coeficientes $(a_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência ultimamente periódica, então f é uma função racional.*

Demonstração. Como $(a_n)_{n\geq 0}$ é ultimamente periódica, existem $r, n_0 \in \mathbb{N}$, tais que $a_{n+r} =$

a_n, para todo $n \geq n_0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{j\geq 0}(a_{n_0}x^{n_0} + \cdots + a_{n_0+r-1}x^{n_0+r-1})x^{jr} \\ &= p(x) + q(x)\sum_{j\geq 0} x^{jr} \\ &= p(x) + q(x)\frac{1}{1-x^r}, \end{aligned}$$

onde $p(x) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n$ e $q(x) = a_{n_0}x^{n_0} + \cdots + a_{n_0+r-1}x^{n_0+r-1}$. Portanto, f é uma função racional como queríamos demonstrar. □

Demonstração da Proposição 2.2. Seja $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ uma função transcendente com coeficientes limitados, digamos $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 0$ (onde M é um inteiro positivo). Mostraremos que se a Conjectura 2.1 é verdadeira, então $f(1/10^s)$ é transcendente para todo inteiro $s > \log(2M+1)/\log 10$. Seja

$$\beta := f(1/10^s) + \sum_{n\geq 0}\frac{M+1}{(10^s)^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n + M + 1}{(10^s)^n}.$$

Já que $0 < a_n + M + 1 < 2M + 1 < 10^s$, então $\sum_{n\geq 0}(a_n + M + 1)/(10^s)^n$ é a expansão de β na base 10^s. Assumindo a veracidade da Conjectura 2.1, concluímos que β é racional ou transcendente, uma vez que 0 não aparece na expansão de β na base 10^s. Se β fosse racional, então sua expansão na base 10^s seria ultimamente periódica. Com isso, teríamos $(a_n)_n$ ultimamente periódica (já que $M+1$ é constante) e por isso, pelo Lema 2.4, f seria uma função racional, contradizendo o fato dela ser transcendente. Logo, β é transcendente. Daí e de

$$\sum_{n\geq 0}\frac{M+1}{(10^s)^n} = \frac{(M+1)\cdot 10^s}{10^s - 1} \in \mathbb{Q},$$

segue que $f(1/10^s)$ é transcendente, como desejado (em particular, $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \not\subseteq \overline{\mathbb{Q}}$) o que completa a demonstração. □

2.2 Uma versão assintótica do Problema A de Mahler

Nessa seção apresentaremos os nossos resultados relacionados ao Problema A de Mahler.

Sejam $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ uma série de potências e $M \geq 0$ uma constante. Denotamos por $L(f, M)$ o conjunto de índices $n \geq 0$ para os quais $|a_n| \leq M$, ou seja,

$$L(f, M) = \{n \in \mathbb{N}_0; |a_n| \leq M\}.$$

Com isso, podemos reescrever o problema A de Mahler da seguinte forma.

Problema A*. Existem uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ e um inteiro $M \geq 0$ tais que $L(f, M) = \mathbb{N}_0$ e $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

Nesse contexto surge a seguinte pergunta: e quanto ao problema A de Mahler para $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tendo quase todos os coeficientes limitados? Ou seja,

Versão assintótica do Problema A. Existem uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ e um inteiro $M \geq 0$ tais que $\delta(L(f, M)) = 1$ e $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?

Mostraremos a seguir que a resposta para essa pergunta é afirmativa. Na verdade, mostraremos o seguinte resultado mais geral.

Teorema A. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos infinitos de inteiros não negativos e defina $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$. Então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Como consequência imediata, temos que a resposta para a versão assintótica do Problema A é afirmativa (para $M = 0$). De fato, podemos escolher $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{N}_0^2$, já que $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{m^2 + n^2; m, n \in \mathbb{N}_0\}$ tem densidade assintótica zero (veja Teorema 1.11). Para demonstrar o Teorema A, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.5. *Seja $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ um polinômio de grau $d \geq 1$ e $\mathcal{S}$ um conjunto infinito de inteiros não negativos. Então existe um polinômio não nulo $Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$ com grau m tal que o produto $PQ \in \mathbb{Z}[z]$ é um polinômio da forma*

$$\sum_{n \in \mathcal{S}(d+m)} a_n z^n.$$

Demonstração. Escrevamos

$$Q(z) := \sum_{i=0}^{L} q_i z^i,$$

onde L e os coeficientes q_i serão determinados posteriormente. Com isso, o polinômio PQ tem grau no máximo $L + d$ e seus coeficientes são formas lineares em $q_0, \ldots, q_L$. Gostaríamos de eliminar os termos z^n para os quais $n \notin \mathcal{S}$ e $0 \leq n \leq L + d$. Existem

$$L + d + 1 - \#\mathcal{S}(L + d)$$

desses termos. Se igualarmos os coeficientes correspondentes a zero, obtemos um sistema de $L + d + 1 - \#\mathcal{S}(L + d)$ equações lineares homogêneas nas $L + 1$ incógnitas q_i. Da Álgebra Linear, esse sistema tem solução não trivial inteira desde que tenhamos

$$L + 1 > L + d + 1 - \#\mathcal{S}(L + d),$$

ou seja, $\#\mathcal{S}(L+d) > d$. Como $\mathcal{S}$ é infinito, essa desigualdade é válida para todo L suficientemente grande. Escrevendo $m := \max\{i \le L; q_i \ne 0\}$, temos que

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{m} q_i z^i \in \mathbb{Z}[z]$$

é o polinômio procurado e PQ tem a forma requerida. $\square$

Demonstração do Teorema A. Sejam $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ uma enumeração de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ e $P_i(z)$ o polinômio minimal (sobre $\mathbb{Z}$) de α_i com grau d_i. Agora, vamos aplicar o Lema 2.5 aos polinômios

$$P_1(z), P_1(z)P_2(z), P_1(z)P_2(z)P_3(z), \ldots.$$

Para isso, já que $\mathcal{B}$ é um conjunto infinito, o Lema 2.5 garante, para cada $k \ge 1$, a existência de um polinômio não nulo $Q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ de grau m_k tal que

$$Q_k(z)P_1(z)\cdots P_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{B}(m_k + D_k)} a_{k,n} z^n,$$

onde $D_k := \sum_{i=1}^{k} d_i$. Agora vamos definir recursivamente a sequência $(t_k)_{k \ge 1}$ por

(i) $t_1 = \min \mathcal{A}$;

(ii) e $t_{k+1} \in \mathcal{A}$ satisfazendo

$$t_{k+1} \ge \max\{k(t_k + D_k + m_k) + 1, L(Q_{k+1}P_1 \cdots P_{k+1}) + (k+1)\}.$$

Essa escolha é possível, pois $\mathcal{A}$ é um conjunto infinito de inteiros não negativos. Aqui, $L(P)$ denota o **comprimento** de um polinômio P (ou seja, a soma dos valores absolutos de seus coeficientes).

Afirmamos que a função

$$f(z) := \sum_{k \ge 1} z^{t_k} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z) \tag{2.1}$$

satisfaz as condições do enunciado. De fato, primeiramente note que por construção $f(z)$ pode ser escrita como $\sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n$ (onde usamos $t_{k+1} > (t_k + D_k + m_k)$). Também temos que f é uma função analítica na bola unitária. De fato, seja $z \in \overline{B}(0,R), R \in (0,1)$. Como $t_k \ge L(Q_k P_1 \cdots P_k) + k$, $R < 1$ e $|P(z)| \le L(P)$ para $|z| \le 1$, temos

$$\begin{aligned} \left| z^{t_k} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z) \right| &\le R^{t_k} L(Q_k P_1 \cdots P_k) \\ &\le R^{L(Q_k P_1 \cdots P_k) + k} L(Q_k P_1 \cdots P_k). \end{aligned}$$

Observe agora que o valor máximo da função $x \mapsto xR^x, 0 < R < 1$, para valores positivos de x, é atingido em $x = 1/|\log R|$, e é igual a $e^{-1}/|\log R|$. Isso implica que

$$R^{L(Q_k P_1 \cdots P_k)+k} L(Q_k P_1 \cdots P_k) \leq \frac{e^{-1}}{|\log R|} R^k.$$

Em suma, obtemos

$$\left| z^{t_k} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z) \right| \leq \frac{e^{-1}}{|\log R|} R^k =: M_k,$$

para todo $z \in \overline{B}(0, R)$. Como $\sum_{k \geq 1} M_k$ converge, pelo Teste M de Weierstrass (ver Teorema 1.48), a série $\sum_{k \geq 1} z^{t_k} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z)$ converge absoluta e uniformemente em $\overline{B}(0, R)$, para qualquer $R \in (0, 1)$. Portanto, essa série define uma função analítica (a saber, $f(z)$) na bola unitária $B(0, 1)$ (ver Teorema 1.50).

Temos ainda que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, 1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. De fato, para qualquer $i \geq 1$, tem-se que

$$f(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_i^{t_k} Q_k(\alpha_i) P_1(\alpha_i) \ldots P_k(\alpha_i) \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Além disso, já que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k + D_k + m_k} = \infty,$$

então f é uma série fortemente lacunária e, por isso, é uma função transcendente (ver Teorema 1.67).

Para terminar, vamos mostrar que existe uma quantidade não enumerável dessas funções. Para ver isso, observe primeiramente que uma vez escolhidos $t_1, \ldots t_{n-1}$, diferentes escolhas de t_n (temos uma infinidade de possibilidades) fornecem valores diferentes de $f(\alpha_{n+1})$, que não depende dos valores de t_k para $k > n$ e, por isso, obtemos funções diferentes. Agora, se $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma enumeração dessas funções com

$$f_j(z) = \sum_{k \geq 1} z^{t_{j,k}} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z) \quad \text{e} \quad t_{j,1} = \min \mathcal{A} \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

associamos a cada f_j, uma sequência

$$s_j = (t_{j,1}, t_{j,2}, \ldots, t_{j,j}, \ldots).$$

Daí, definimos uma sequência

$$s := (t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots),$$

com $(t_j)_{j \geq 1}$ satisfazendo (i) e (ii) e $t_j \neq t_{j-1,j}$, para todo $j \geq 2$. Dessa forma, s difere de cada s_n e, por conseguinte, a função associada

$$f(z) = \sum_{k\geq 1} z^{t_k} Q_k(z) P_1(z) \cdots P_k(z)$$

é diferente de todas as f_j, uma contradição. Portanto, existe uma quantidade não enumerável de funções (2.1). $\square$

Como vimos anteriormente, uma consequência desse teorema é a existência de uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ que satisfaz

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{e} \quad \delta(L(f, M)) = 1,$$

com $M = 0$. A partir dessa função f, podemos construir outra função onde os coeficientes limitados são não nulos. De fato, seja $P \in \mathbb{Z}[z]$ um polinômio com $\deg P \geq 0$ com coeficientes não nulos e defina a função racional

$$r(z) := \frac{P(z)}{1 - z^{\deg P + 1}}.$$

A função

$$g(z) := r(z) + f(z) \in \mathbb{Z}\{z\}$$

é uma função transcendente, pelo Corolário 1.63. Além disso, ela satisfaz

$$g(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}},$$

pois $r(z)$ é uma função racional. Por fim, temos

$$\delta(L(g, M)) = 1,$$

com $M = H(P)$, onde $H(P)$ é a **altura** do polinômio P (isto é, o máximo dos valores absolutos de seus coeficientes).

Destacamos que existem conjuntos que não contêm uma soma de dois conjuntos infinitos. Senão vejamos:

Exemplo 2.6. *O conjunto*

$$\mathcal{S} = \{2^k; k \geq 0\}$$

não contém uma soma de dois conjuntos infinitos.

Para ver isso, note primeiramente que as diferenças de pares de elementos de $\mathcal{S}$ são distintas. De fato, suponha que

$$2^{k_1} - 2^{k_2} = 2^{k_3} - 2^{k_4},$$

com $k_1 \geq k_2$ e $k_3 \geq k_4$. Suponha ainda que $\min\{k_1, k_2, , k_3, k_4\} = \min\{k_2, k_4\} = k_4$ (o caso em que $\min\{k_2, k_4\} = k_2$ é análogo). Assim,

$$2^{k_4}(2^{k_1-k_4} - 2^{k_2-k_4}) = 2^{k_4}(2^{k_3-k_4} - 1) \Longrightarrow 2^{k_1-k_4} - 2^{k_2-k_4} = 2^{k_3-k_4} - 1.$$

Se $k_3 > k_4$, então $2^{k_3-k_4} - 1$ é ímpar e, portanto, $2^{k_1-k_4} - 2^{k_2-k_4}$ também deve ser ímpar. Isso ocorre desde que $k_1 > k_4$ e $k_2 = k_4$. Dessa forma, obtemos

$$2^{k_1-k_4} - 1 = 2^{k_3-k_4} - 1 \Longrightarrow k_1 = k_3.$$

Se $k_3 = k_4$, então $2^{k_1} = 2^{k_2}$, o que implica $k_1 = k_2$. Concluímos que se k_1, k_2, k_3, k_4 são todos distintos, então $2^{k_1} - 2^{k_2} \neq 2^{k_3} - 2^{k_4}$.

Agora, suponha que existam dois conjuntos infinitos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$. Se $b_1 \neq b_2 \in \mathcal{B}$, então para todo $a \in \mathcal{A}$, tem-se que

$$(a + b_2) - (a + b_1) = b_2 - b_1,$$

ou seja, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ contém uma quantidade infinita de pares cuja diferença é $b_2 - b_1$. Logo, $\mathcal{S}$ não pode conter uma tal soma pela observação acima.

Exemplo 2.7. *Um argumento similar pode ser usado para mostrar que o conjunto* $\mathcal{S} = \{n^2; n \in \mathbb{N}_0\}$ *não contém uma soma de dois conjuntos infinitos.*

Com efeito, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, a equação diofantina

$$x^2 - y^2 = m,$$

tem uma quantidade finita de soluções em inteiros positivos. Assim, pelo que vimos no exemplo anterior, a afirmação segue.

Exemplo 2.8. *O conjunto* $\mathbb{P}$ *de todos os primos não pode ser escrito como uma soma de dois conjuntos infinitos.*

Suponha por contradição que existam conjuntos infinitos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a_1 < a_2 <, \ldots$ e $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}, b_1 < b_2 <, \ldots$ de inteiros não negativos satisfazendo

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathbb{P}.$$

Assumindo $a_1 \geq b_1$, temos

- $a_1 = 2$ e $b_1 = 0$ ou
- $a_1 = b_1 = 1$.

No primeiro caso, $a_2 + 0$ deve ser primo. Dessa forma $b_2 > 0$ deve ser par para que $a_2 + b_2$ seja ímpar. Mas isso implica que $a_1 + b_2 > 2$ é par e, portanto, não pode ser primo. No segundo caso, temos $a_1 + b_1 = 2$. A fim de que $a_1 + b_2 > 1 + b_1 = 2$ seja primo, b_2 deve ser par. Similarmente, a_2 deve ser par, para que $a_2 + b_1$ seja ímpar. Assim, $a_2 + b_2 > a_1 + b_1 = 2$ é par e, por isso, não é um número primo. Portanto, $\mathbb{P}$ não pode ser escrito como soma de dois conjuntos infinitos de inteiros não negativos.

Note que os conjuntos, nos três exemplos acima, têm densidade assintótica zero. Para conjuntos de densidade positiva tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.9 (Moreira, Richter, Robertson, 2019, [20])**.** *Se $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ tem densidade assintótica superior positiva então existem conjuntos infinitos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ tais que $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$.*

Usando esse teorema e procedendo como na demonstração do Teorema A, podemos mostrar o corolário a seguir.

Corolário A. *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ um conjunto com $\delta(\mathcal{S}) > 0$. Então existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.*

Vimos no Exemplo 2.8 que o conjunto de todos os primos não pode ser escrito como uma soma de dois conjuntos infinitos. Entretanto, o problema de encontrar dois conjuntos infinitos de números naturais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{A} + \mathcal{B} \subset \mathbb{P}$ ainda é um problema em aberto. Em [4], Granville resolveu esse problema assumindo a veracidade da conjectura de Hardy-Littlewood para k-tuplas primas. Mais recentemente, Tao e Ziegler [27] mostraram que existem dois conjuntos infinitos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}, a_1 < a_2 < \cdots$ e $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}, b_1 < b_2 < \cdots$ tais que $a_i + b_j \in \mathbb{P}$ quando $1 \leq i < j$.

Isso nos levou ao seguinte resultado.

Teorema B. *Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, a_1 < a_2 < \cdots$, e $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}, b_1 < b_2 < \cdots$, conjuntos infinitos de números naturais e seja*

$$\mathcal{S} := \{a_i + b_j \in \mathcal{A} + \mathcal{B}; 1 \leq i < j\}.$$

Então existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} c_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Demonstração. Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ uma enumeração de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ e seja $P_i(z)$ o polinômio minimal de α_i (sobre $\mathbb{Z}$). Agora, aplicamos o Lema 2.5 aos polinômios

$$P_1(z), P_1(z)P_2(z), P_1(z)P_2(z)P_3(z), \ldots.$$

Já que $\mathcal{A}$ é um conjunto infinito, o Lema 2.5 garante a existência (para todo $k \geq 1$) de um polinômio de grau m_k, $Q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tal que

$$Q_k(z)P_1(z)\cdots P_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{A}(m_k+D_k)} c_{k,n} z^n,$$

onde D_k é o grau de $P_1(z)\cdots P_k(z)$.

Seja $N_k := \#\mathcal{A}(m_k + D_k)$. Vamos definir recursivamente uma sequência $(t_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{B}$ da seguinte forma:

- $t_1 := b_{N_1+1}$ e
- $t_{k+1} := \max\{b_{\min J_k}, b_{N_{k+1}+1}\}$, onde

$$J_k := \{j \in \mathbb{N}; b_j \geq \max\{k(t_k + D_k + m_k) + 1, L(Q_{k+1}P_1\cdots P_{k+1}) + (k+1)\}\}.$$

Com isso, definimos

$$f(z) := \sum_{k\geq 1} z^{t_k} Q_k(z)P_1(z)\dots P_k(z).$$

Observe que f é da forma

$$f(z) = \sum_{n\in\mathcal{S}} c_n z^n.$$

Para mostrar que f é uma função analítica, transcendente e que assume valores algébricos em pontos algébricos procedemos como na demonstração do Teorema A. Para cada $k \geq 1$, podemos ter ao menos duas possibilidades para t_{k+1}. De fato,

- se $\max\{b_{\min J_k}, b_{N_{k+1}+1}\} = b_{\min J_k}$, podemos tomar $t_{k+1} \in \{b_{\min J_k}, b_{\min J_k+1}\}$ e
- se $\max\{b_{\min J_k}, b_{N_{k+1}+1}\} = b_{N_{k+1}+1}$, podemos tomar $t_{k+1} \in \{b_{N_{k+1}+1}, b_{N_{k+1}+2}\}$.

Dessa forma, podemos construir uma quantidade não enumerável dessas funções. □

Usando o Teorema B e o Teorema de Tao-Ziegler mencionado acima podemos mostrar o seguinte corolário, respondendo novamente de forma afirmativa a versão assintótica do Problema A de Mahler.

Corolário B. *Existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{P}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ *tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Tao-Ziegler, existem conjuntos infinitos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_1 < a_2 < \cdots$ e $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$, $b_1 < b_2 < \cdots$ tais que $a_i + b_j \in \mathbb{P}$ para $1 \leq i < j$. Aplicando o Teorema B a esses conjuntos, obtemos uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{P}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

$\square$

Observação 2.10. *Note que se o conjunto $\mathcal{S}$ no Teorema B tem densidade positiva, o resultado segue do Corolário A. Entretanto, a vantagem do Teorema B é que ele nos permite obter uma versão do Corolário A para o conjunto dos números primos, que é um conjunto de densidade zero.*

Capítulo 3

Funções Transcendentes e suas Derivadas

Abordaremos neste capítulo funções transcendentes que tanto ela quanto suas derivadas assumem valores algébricos em pontos algébricos.

Em 1902, Stäckel [25] construiu uma função inteira f cujas derivadas $f^{(t)}$, para $t = 0, 1, \ldots$, mapeiam $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$. Além disso, Faber refinou esse resultado em $f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}(i)$, para todo $t \geq 0$. Em 1968, Van der Poorten [28] construiu uma função inteira transcendente f, tal que $f^{(t)}(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, para todos $t \geq 0$ e $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

3.1 Comportamento aritmético de funções transcendentes e de suas derivadas

Apresentaremos a seguir alguns resultados relacionados ao comportamento aritmético de funções transcendentes e de suas derivadas.

Teorema 3.1. *Existe uma função inteira transcendente*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

com coeficientes racionais tal que

$$f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Teorema 3.2. *Existe uma função transcendente*

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$$

tal que

$$g^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demonstração dos teoremas 3.1 e 3.2. Considere as duas séries de potências

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n \quad \text{e} \quad G(z) = \sum_{n \geq 0} G_n z^n,$$

com coeficientes positivos, onde F converge para todo $z \in \mathbb{C}$ e G converge para todo $z \in B(0,1)$, com coeficientes satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} G_n = \infty.$$

Seja $z, P_1(z), P_2(z), P_3(z), \ldots$ a sequência de todos os polinômios irredutíveis com coeficientes inteiros e defina

$$B_k(z) := [P_1(z) \cdots P_k(z)]^k, k = 1, 2, \ldots.$$

Seja $d_k := \deg(B_k)$ e suponha que a forma explícita de B_k é dada por

$$B_k(z) = \sum_{j=0}^{d_k} b_{kj} z^j,$$

onde $b_{k0} \neq 0$ e $b_{kd_k} \neq 0$ pois B_k não é divisível por z.

Considere agora $\{c_1, c_2, \ldots\}$, $\{r_1, r_2, \ldots\}$ e $\{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ três sequências de inteiros. Para as duas últimas sequências suponha que

$$r_k = s_{k-1} + d_k, \text{ para } k = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

$$0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \ldots \tag{3.2}$$

$$\lim_{k \to \infty} (s_k - r_k) = \infty. \tag{3.3}$$

Com isso, os polinômios

$$z^{s_{k-1}} B_k(z) = b_{k0} z^{s_{k-1}} + b_{k1} z^{s_{k-1}+1} + \cdots + b_{kd_k} z^{r_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

envolvem potências diferentes de z.

Agora, pondo

$$f(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{s_{k-1}} B_k(z)}{c_k},$$

onde os inteiros c_k são escolhidos de modo que

$$|a_n| \leq F_n,$$

para todo $n \geq 0$. Logo, da convergência de F, segue que f converge para todo $z \in \mathbb{C}$, mostrando que f é inteira. Além disso, f é uma função lacunária e, portanto, transcendente.

Analogamente, pondo

$$g(z) := \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{k \geq 1} z^{s_{k-1}} B_k(z),$$

onde assumimos que os inteiros s_k crescem rapidamente de modo que $|b_n| \leq G_n$, para todo $n \geq s_1$. Da convergência de G, segue que g converge para todo $z \in B(0,1)$. Além disso, g é transcendente por ser lacunária.

Ambas as séries f e g podem ser derivadas termo a termo qualquer número de vezes (ver Teorema 1.50). Para cada $n \geq 0$ e para $k \geq n+1$, temos

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{s_{k-1}} B_k(z)] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{d^{n-j}}{dz^{n-j}}(z^{s_{k-1}}) B_k^{(j)}(z).$$

Assim, para cada $i \geq 1$ e $n \geq 0$ os polinômios

$$B_k^{(j)}(z), 0 \leq j \leq m, k \geq n+1$$

são divisíveis por $P_i(z)$. Portanto, quando α_i é um número algébrico que anula P_i, $f^{(n)}(z)$ e $g^{(n)}(z)$ em $z = \alpha_i$ consistem de, no máximo, uma quantidade finita de termos, e estes termos são polinômios em α_i com coeficientes racionais, o que completa a demonstração. □

3.2 Uma versão assintótica do Teorema 3.2

Os resultados acima juntamente com o Teorema A nos levaram a estabelecer o seguinte teorema.

Teorema C. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos infinitos de inteiros não negativos e defina $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b; a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$. Então existem uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que*

$$f^{(m)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \quad \textit{para todo } m \geq 0.$$

Demonstração. Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ uma enumeração de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ e seja $P_i(z)$ o polinômio minimal de α_i (sobre $\mathbb{Z}$). Agora, aplicamos o Lema 2.5 aos polinômios

$$P_1(z), (P_1(z)P_2(z))^2, (P_1(z)P_2(z)P_3(z))^3, \dots.$$

Ponha $B_k(z) := (P_1(z) \cdots P_k(z))^k$. Já que $\mathcal{B}$ é um conjunto infinito, o Lema 2.5 garante a existência (para todo $k \geq 1$) de um polinômio de grau m_k, $Q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tal que

$$Q_k(z)B_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{B}(m_k + D_k)} a_{k,n} z^n,$$

onde D_k é o grau de B_k. Agora, definimos recursivamente a sequência $(t_k)_{k\geq 1}$ por $t_1 = \min \mathcal{A}$ e $t_{k+1} \in \mathcal{A}$ satisfazendo

$$t_{k+1} \geq \max\{k(t_k + D_k + m_k) + 1, L(Q_{k+1}B_{k+1}) + (k+1)\}.$$

Como na demonstração do Teorema A, a série $f(z) := \sum_{k\geq 1} z^{t_k} Q_k(z)B_k(z)$ é uma função analítica transcendente que tem a forma

$$f(z) = \sum_{n \in \mathcal{S}} a_n z^n.$$

Além disso, essa série pode ser derivada termo a termo qualquer número de vezes e como nas demonstrações dos teoremas 3.1 e 3.2, $f^{(m)}(\alpha_i)$ consiste de, no máximo, uma quantidade finita de termos, e estes termos são polinômios em α_i com coeficientes inteiros. Logo,

$$f^{(m)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } m \geq 0.$$

Por fim, como nos Teoremas A e B, podemos construir uma quantidade não enumerável de tais funções e a demonstração está completa. □

Corolário C. *Existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que*

$$f^{(m)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \quad e \quad \delta(L(f^{(m)}, 0)) = 1, \text{ para todo } m \geq 0.$$

Demonstração. No Teorema C, ponha $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{N}_0^2$. Assim, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tais que

$$f^{(m)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

e de modo que

$$n \notin \mathbb{N}_0^2 + \mathbb{N}_0^2 \Longrightarrow a_n = 0.$$

Além disso, derivando f termo a termo m vezes, obtemos

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n! a_n z^{n-m}.$$

Já que $\delta(L(f,0)) = 1$ e

$$\begin{aligned} L(f^{(m)},0) &= \{n \geq m; n!a_n = 0\} \\ &= \{n \geq m; a_n = 0\} \\ &= L(f,0)\backslash\{0 \leq n \leq m-1; a_n = 0\}, \end{aligned}$$

segue da Proposição 1.5 que $\delta(L(f^{(m)},0)) = 1$ para cada $m \geq 0$. $\square$

Capítulo 4

Conjuntos Excepcionais de Funções Transcendentes e o Problema C de Mahler

No fim do século XIX, após os trabalhos de Hermite e Lindemann sobre a transcendência de e^{α} para um algébrico não nulo α, levantou-se uma questão:

> *Uma função analítica transcendente assume, em geral, valores transcendentes em pontos algébricos?*

No exemplo da função e^z, a expressão "em geral" na questão acima significa evitar a exceção $\alpha = 0$. Weierstrass descobriu que uma resposta afirmativa para essa questão pode valer somente para classes restritas de funções. De fato, ele construiu uma função inteira transcendente que leva racionais em racionais. Além disso, como já sabemos, ele conjecturou a existência de uma função inteira transcendente que leva algébricos em algébricos, o que foi provado posteriormente por Stäckel.

Assim, iniciou-se o estudo dos conjuntos excepcionais S_f, ou seja, conjuntos de números algébricos para os quais uma função transcendente f assume valores algébricos.

4.1 Exemplos de conjuntos excepcionais

Vejamos alguns exemplos de conjuntos excepcionais de algumas funções.

Exemplo 4.1. *Se f é um polinômio com coeficientes algébricos, então $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$.*

Exemplo 4.2. *Seja $f(z) = e^z$. O Teorema de Hermite-Lindemann estabelece que se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}$ então $f(\alpha)$ é transcendente. Dessa forma, o conjunto excepcional de f é $S_f = \{0\}$.*

Mais geralmente, se $f(z) = e^{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_k)}$*, onde os* α_i'*s são números algébricos, então*

$$S_f = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}.$$

Exemplo 4.3. *Seja* $f(z) = e^z + e^{z+1}$*. O conjunto excepcional de* f *é* $S_f = \emptyset$*.*

Primeiramente, temos $f(0) = 1 + e$ que é transcendente. Agora, seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\backslash\{0\}$. Se $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, teríamos

$$e^\alpha + e^{\alpha+1} - f(\alpha) = 0,$$

o que é uma contradição, uma vez que $1 = e^0, e^\alpha$ e $e^{\alpha+1}$ são linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ pelo Teorema de Lindemann-Weierstrass (ver Teorema 1.31).

Exemplo 4.4. *A função* $f(z) = e^{\pi z+1}$ *tem conjunto excepcional* $S_f = \emptyset$*.*

Temos $f(0) = e \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. Se α é um algébrico não nulo, temos

$$f(\alpha) = e^{\pi\alpha+1} = e \cdot (-1)^{-i\alpha}$$

que é um número transcendente pelo Teorema de Baker (ver Teorema 1.37 e Corolário 1.39).

Exemplo 4.5. *As funções* $f(z) = 2^z$ *e* $g(z) = e^{i\pi z}$ *têm conjuntos excepcionais iguais a* $\mathbb{Q}$*.*

Isso segue do Teorema de Gelfond-Schneider (ver Teorema 1.33).

4.2 Existência de funções transcendentes com conjunto excepcional prescrito

Em 1886, Weierstrass levantou a seguinte questão sobre conjuntos excepcionais:

> Quais possíveis subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}}$ são conjuntos excepcionais de alguma função inteira transcendente?

Essa pergunta foi respondida em [7], por Huang, Marques e Mereb.

Teorema 4.6 (Huang, Marques, Mereb, 2010)**.** *Se* $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$*, então existe uma função inteira transcendente* f *tal que*

$$S_{f^{(s)}} = A$$

para todo $s \geq 0$*.*

Destacamos que nenhuma informação sobre a natureza aritmética sobre os coeficientes da série de Taylor da função f é obtida em sua construção.

No capítulo 3 de seu livro, Mahler [12] investigou os possíveis conjuntos excepcionais de funções transcendentes tendo coeficientes racionais em sua série de Taylor em torno do zero e com raio de convergência $\rho \in (0, \infty]$, fazendo com que ele levantasse a seguinte questão:

Problema C: Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real. Existe para qualquer escolha de $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$), uma função analítica com coeficientes racionais e raio de convergência ρ tal que $S_f = S$?

Observamos que as sentenças em parênteses não aparecem na questão original de Mahler. No entanto, elas são necessárias, pois para qualquer função f cujos coeficientes da sua série de Taylor são racionais tem-se

$$\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha}) \quad \text{e} \quad f(0) \in \mathbb{Q}.$$

Marques e Ramirez [17] resolveram o Problema C para $\rho = \infty$ e Marques e Moreira [14] para qualquer $\rho \in (0, \infty]$.

Em 1965, Mahler [11] investigou o conjunto excepcional de funções com coeficientes inteiros. Antes de apresentar os resultados de Mahler, precisamos introduzir algumas definições e resultados auxiliares.

Como antes, se $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ é um polinômio arbitrário, sejam

$$H(P) := \max_{0 \le i \le n} |a_i| \text{ e } L(P) := \sum_{i=0}^{n} |a_i|,$$

a altura e o comprimento de P, respectivamente. São válidas as seguintes desigualdades:

$$H(PQ) \le H(P)L(Q) \text{ e } L(PQ) \le L(P)L(Q). \tag{4.1}$$

Lema 4.7. *Seja α um número algébrico que é raiz do polinômio irredutível*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d \in \mathbb{Z}[z] \quad (a_d \neq 0).$$

Se

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \in \mathbb{Z}[z]$$

é um segundo polinômio, então

$$Q(\alpha) = 0$$

ou

$$|Q(\alpha)| \ge (L(Q)^{d-1} L(P)^m)^{-1}.$$

Demonstração. Ver [5]. □

Seja $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ uma série de potências fortemente lacunária com coeficientes inteiros e com raio de convergência $\rho_f \in (0,1]$ e considere os polinômios

$$F_n(z) = \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} a_k z^k, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.2}$$

Em termos desses polinômios podemos escrever f como

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} F_n(z).$$

Com isso, podemos estabelecer o seguinte critério de transcendência.

Teorema 4.8 (Mahler, 1965)**.** *Sejam f uma função fortemente lacunária com coeficientes inteiros e $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho_f)$. O valor $f(\alpha)$ é algébrico se e somente se existe um inteiro positivo $N = N(\alpha)$ tal que*

$$F_n(\alpha) = 0 \text{ para } n \geq N.$$

Demonstração. Se $F_n(\alpha) = 0$ para todo $n \geq N$, então

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Suponha agora que $\beta := f(\alpha) = \sum_{k\geq 0} a_k \alpha^k$ é um número algébrico de grau D. Sejam $\beta_0 := \beta, \beta_1, \ldots, \beta_{D-1}$ os conjugados de β, $\overline{|\beta|} = \max_{0\leq\lambda\leq D-1} |\beta_\lambda|$ e c_0 um inteiro positivo tal que os produtos $c_0\beta_0, c_0\beta_1, \ldots, c_0\beta_{D-1}$ são inteiros algébricos (ver Proposição 1.22).

Seja c_1 uma constante tal que

$$|\alpha| < \frac{1}{c_1} < \rho_f.$$

Com isso,

$$c_1 > 1 \quad \text{e} \quad |c_1\alpha| < 1. \tag{4.3}$$

Além disso, temos a convergência de $\sum_{k\geq 0} a_k (1/c_1)^k$, o que implica a existência de uma constante c_2 tal que $\left|a_k (1/c_1)^k\right| \leq c_2$, para todo $k \geq 0$, ou seja,

$$|a_k| \leq c_2 c_1^k, \text{ para todo } k \geq 0. \tag{4.4}$$

Defina os polinômios

$$p_{n\lambda}(z) = -\beta_\lambda + \sum_{k=0}^{r_n} a_k z^k \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, D-1) \tag{4.5}$$

e

$$p_n(z) = c_0^D \prod_{\lambda=0}^{D-1} p_{n\lambda}(z).$$

Os números $c_0\beta_0, \ldots, c_0\beta_{D-1}$ são conjugados (veja [1], p. 115), onde o polinômio minimal é

$$q(z) := \prod_{\lambda=0}^{D-1} (z - c_0\beta_\lambda).$$

Como $c_0 \in \mathbb{N}$, o polinômio minimal de um inteiro algébrico tem coeficientes inteiros (ver Proposição 1.23) e

$$p_n(z) = q\left(c_0 \sum_{k=0}^{r_n} a_k z^k\right),$$

segue que p_n é um polinômio em z, de grau Dr_n e com coeficientes inteiros.

Da segunda desigualdade em (4.1), temos

$$L(p_n) \leq c_0^D \prod_{\lambda=0}^{D-1} L(p_{n\lambda}).$$

Agora de (4.3) e (4.4)

$$\begin{aligned} L(p_{n\lambda}) &\leq |\beta_\lambda| + \sum_{k=0}^{r_n} |a_k| \\ &\leq |\beta_\lambda| + c_2 \sum_{k=0}^{r_n} c_1^k \\ &\leq \overline{|\beta|} + \frac{c_1 c_2}{c_1 - 1} \cdot c_1^{r_n} \\ &\leq \left(\overline{|\beta|} + \frac{c_1 c_2}{c_1 - 1}\right) \cdot c_1^{r_n} = c_3 c_1^{r_n}, \end{aligned}$$

onde

$$c_3 := \overline{|\beta|} + \frac{c_1 c_2}{c_1 - 1}.$$

Daí,

$$L(p_n) \leq c_0^D \prod_{\lambda=0}^{D-1} (c_3 c_1^{r_n}) = (c_0 c_3)^D c_1^{Dr_n} = c_4 c_1^{Dr_n}, \tag{4.6}$$

com $c_4 := (c_0 c_3)^D$.

Como α é um número algébrico, então ele é raiz de um polinômio irredutível $P \in \mathbb{Z}[z]$, digamos, de grau d. Assim, aplicando o Lema 4.7 com $Q(z) = p_n(z)$, deduzimos de (4.6) que $p_n(\alpha) = 0$ ou

$$|p_n(\alpha)| \geq [(c_4 c_1^{Dr_n})^{d-1} L(P)^{Dr_n}]^{-1} \geq [(c_4^{d-1} c_1^{d-1} L(P))^{Dr_n}]^{-1} = c_5^{-Dr_n}, \tag{4.7}$$

onde $c_5 := c_4^{d-1} c_1^{d-1} L(P)$.

Mas esta desigualdade não é válida se n for suficientemente grande. De fato, pela definição de β_0 e pelas equações (4.4) e (4.5), tem-se que

$$\begin{aligned}
|p_{n0}(\alpha)| &= \left|\sum_{k=s_n}^{\infty} a_k\alpha^k\right| \\
&\leq c_2|c_1\alpha|^{s_n}(1+|c_1\alpha|+|c_1\alpha|^2+\cdots) \\
&= c_6|c_1\alpha|^{s_n},
\end{aligned}$$

onde $c_6 := c_2(1+|c_1\alpha|+|c_1\alpha|^2+\cdots)$. Além disso, para $\lambda = 1,2,\ldots,D-1$, temos

$$\begin{aligned}
|p_{n\lambda}(\alpha)| &\leq |\beta_\lambda| + \sum_{k=0}^{r_n} |a_k||\alpha|^k \\
&\leq \overline{|\beta|} + \sum_{k\geq 0} |a_k||\alpha|^k =: c_7.
\end{aligned}$$

Combinando essas estimativas, obtemos

$$|p_n(\alpha)| \leq c_0^D c_6 |c_1\alpha|^{s_n} c_7^{D-1}.$$

Como $|c_1\alpha| < 1$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{r_n} = \infty$, segue que,

$$\lim_{n\to\infty} (c_0^D c_6 c_7^{D-1})^{\frac{1}{r_n}} |c_1\alpha|^{\frac{s_n}{r_n}} = 0.$$

Em outras palavras, para n suficientemente grande, temos

$$(c_0^D c_6 c_7^{D-1})^{\frac{1}{r_n}} |c_1\alpha|^{\frac{s_n}{r_n}} < c_5^{-D},$$

ou seja,

$$|p_n(\alpha)| \leq c_0^D c_6 c_7^{D-1} |c_1\alpha|^{s_n} < c_5^{-Dr_n}.$$

Assim, existe N_0 tal que

$$p_n(\alpha) = 0, \text{ para todo } n \geq N_0.$$

Isso significa que para cada $n \geq N_0$ existe um índice $\lambda_n \in \{0,1,2,\ldots,D-1\}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{r_n} a_k\alpha^k = \beta_{\lambda_n}.$$

Portanto,

$$F_n(\alpha) = \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} a_k\alpha^k = \sum_{k=0}^{r_{n+1}} a_k\alpha^k - \sum_{k=0}^{r_n} a_k\alpha^k = \beta_{\lambda_{n+1}} - \beta_{\lambda_n}, \quad \text{se } n \geq N_0. \tag{4.8}$$

Agora, já que $f(\alpha)$ é uma série convergente,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha) = 0.$$

Por outro lado, os D conjugados de β são distintos, por isso, existe $N \geq N_0$ tal que

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \text{ se } n \geq N.$$

Por (4.8), isso implica que

$$F_n(\alpha) = 0 \text{ se } n \geq N,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Sejam $\rho \in (0, \infty]$ e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$. Denotamos por $\overline{S}^{\text{alg.}}$ o conjunto dos conjugados algébricos dos elementos de S.

Definição 4.9. *Sejam $\rho \in (0, \infty]$ e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$. Dizemos que S é* ***fechado em relação*** *a $\overline{\mathbb{Q}}$ se*

$$\overline{S}^{\text{alg.}} \cap B(0, \rho) = S.$$

Observação 4.10. *Uma vez que $S \subseteq \overline{S}^{\text{alg.}}$, para mostrar que S é fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$ basta mostrar que*

$$\overline{S}^{\text{alg.}} \cap B(0, \rho) \subseteq S.$$

Exemplo 4.11. *O conjunto excepcional de $f(z) = 2^z$ é fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Exemplo 4.12. *O conjunto excepcional de $f(z) = e^{(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{3})}$ não é fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$, pois*

$$S_f = \{-\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \text{ e } \overline{S_f}^{\text{alg.}} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}.$$

Proposição 4.13. *Seja f uma função fortemente lacunária com coeficientes inteiros. Então, o conjunto excepcional de f é fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Sejam ρ_f e S_f o raio de convergência e o conjunto excepcional de f, respectivamente. Queremos mostrar que

$$\overline{S_f}^{\text{alg.}} \cap B(0, \rho_f) = S_f.$$

Sejam $\alpha \in S_f$ e P seu polinômio minimal sobre $\mathbb{Z}$. Pelo Teorema 4.8, existe um inteiro positivo $N = N(\alpha)$ tal que

$$F_n(\alpha) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq N,$$

e, por isso, F_n é divisível por P para todo $n \geq N$. Assim, cada conjugado de α é raiz de F_n, para todo $n \geq N$. Logo, pelo Teorema 4.8, cada conjugado de α em $B(0, \rho_f)$ pertence a S_f, ou seja,

$$\overline{S_f}^{\text{alg.}} \cap B(0, \rho_f) \subseteq S_f.$$

□

O resultado de Mahler a seguir estabelece quais os subconjuntos de números algébricos são conjuntos excepcionais de uma função fortemente lacunária com coeficientes inteiros.

Teorema 4.14 (Mahler, 1965)**.** *Sejam $\rho \in (0,1]$ e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,\rho)$ um conjunto fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$ tal que $0 \in S$. Então existe uma série fortemente lacunária com coeficientes inteiros f tal que*

$$\rho_f = \rho \text{ e } S_f = S.$$

Demonstração. Ver [11]. □

Em [15], Marques e Moreira resolveram a versão do Problema C de Mahler para funções com coeficientes inteiros.

Teorema 4.15 (Marques, Moreira)**.** *Todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, fechado para conjugação complexa e que contém o elemento 0, é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$.*

Generalizando o teorema acima em sua tese de doutorado [24, Corolário 3.12], Silva mostrou o teorema abaixo.

Teorema 4.16. *Se $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ é fechado para conjugação complexa e $0 \in S$, então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$ tais que $S_{f^{(t)}} = S$, para todo $t \geq 0$.*

4.3 Versões assintóticas do Problema C de Mahler

Nesta seção, mostraremos nossos resultados relacionados a conjuntos excepcionais de funções transcendentes. Mais precisamente, eles tentam responder a seguinte questão:

Versão Assintótica do Problema C. Dado $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, fechado para conjugação complexa e com $0 \in S$, existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com quase todos os coeficientes limitados tal que $S_f = S$?

Ainda não temos a resposta para conjuntos gerais S. No entanto, apresentaremos resultados para duas classes especiais de conjuntos S.

Teorema D. *Sejam $\rho \in (0,1]$ e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,\rho)$ um conjunto fechado em relação a $\overline{\mathbb{Q}}$ tal que $0 \in S$. Então existem uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, a_n \in \mathbb{Z}$$

e uma constante $M \geq 0$, tais que

$$\delta(L(f, M)) = 1$$

e com $\rho_f = \rho$ e $S_f = S$.

Demonstração. Como $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$, ele é enumerável. Dessa forma, podemos definir uma sequência infinita de polinômios

$$P_1(z), P_2(z), \ldots$$

da seguinte forma:

(i) Se $S = \{0\}$, pomos $P_k(z) := 1$ para todo $k \geq 1$.

(ii) Se S é finito, digamos, $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, tomamos, para $1 \leq k \leq m$, P_k sendo o polinômio minimal de α_k (sobre $\mathbb{Z}$) de grau d_k e, para $k \geq m+1$, tomamos $P_k(z) := 1$.

(iii) Se $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ é um conjunto infinito, escolhemos P_k para ser o polinômio minimal de α_k (sobre $\mathbb{Z}$) de grau d_k.

Seja $D_k := \sum_{i=1}^{k} d_i$. Agora vamos definir recursivamente a sequência $(t_k)_{k\geq 1}$ por $t_1 = 0$ e $t_{k+1} \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$t_{k+1} \geq \max\{k(t_k + D_k) + 1, L(P_1 \cdots P_{k+1}) + (k+1), (k+1)\left((k+1) + \sum_{i=1}^{k+1} D_i\right) - D_{k+1}\}.$$

Como $L(P) \geq H(P)$ para qualquer polinômio P, segue que

$$1 \leq H(P_1 \cdots P_k)^{1/t_k} \leq t_k^{1/t_k},$$

e por isso,

$$\lim_{k\to\infty} H(P_1 \cdots P_k)^{1/t_k} = 1. \tag{4.9}$$

Por fim, seja $(c_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de inteiros positivos tal que

$$\lim_{k\to\infty} c_k^{1/t_k} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.10}$$

Afirmamos que a função

$$f(z) := \sum_{k\geq 1} c_k z^{t_k} P_1(z) \cdots P_k(z) = \sum_{k\geq 1} F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

satisfaz as condições do enunciado. De fato, o raio de convergência de f é positivo, pois

$$\frac{1}{\rho_f} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{\substack{t_k \le n \le t_k + D_k \\ k\to\infty}} |a_n|^{1/t_k}$$

e

$$|a_n| \le c_k H(P_1 \cdots P_k) \quad \text{para} \quad t_k \le n \le t_k + D_k$$

com igualdade no mínimo para um índice n nesse intervalo. Daí, de (4.9) e de (4.10), segue que

$$\frac{1}{\rho_f} = \limsup_{k\to\infty} (c_k H(P_1 \cdots P_k))^{1/t_k} = \frac{1}{\rho},$$

o que nos dá $\rho_f = \rho > 0$.

Como antes, essa série é fortemente lacunária, já que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k + D_k} = \infty,$$

e, por isso, f é transcendente. Além disso, para cada $k \ge 2$, t_k pode ser escolhido de infinitas maneiras e cada uma dessas escolhas nos dá uma função diferente. Assim, construímos uma quantidade não enumerável dessas funções.

Vamos mostrar agora que $S_f = S$. Por um lado temos que se $\alpha_i \in S$, então

$$f(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{i-1} F_k(\alpha_i) \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Por outro lado, se $\alpha \notin S$, então $F_k(\alpha) \ne 0$ para todo k e, por isso, $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$, pelo Teorema 4.8.

Finalmente, vamos mostrar que existe $M \ge 0$, tal que $\delta(L(f, M)) = 1$. Observe que se $a_n \ne 0$, então

$$n \in \mathcal{A} := \bigcup_{k\ge 1} \{t_k, t_k + 1, \ldots, t_k + D_k\}.$$

Da definição de t_k, temos

$$\#\mathcal{A}(t_k + D_k) = \sum_{i=1}^{k} (D_i + 1) = k + \sum_{i=1}^{k} D_i \le \frac{t_k + D_k}{k},$$

o que implica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(t_k + D_k)}{t_k + D_k} = 0. \tag{4.11}$$

Além disso,

$$\#\mathcal{A}(t_k) = 1 + (k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} D_i.$$

Já que $t_k > t_{k-1} + D_{k-1}$, segue que

$$\frac{\#\mathcal{A}(t_k)}{t_k} < \frac{1}{t_{k-1} + D_{k-1}} + \frac{(k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} D_i}{t_{k-1} + D_{k-1}} \leq \frac{1}{t_{k-1} + D_{k-1}} + \frac{1}{k-1}.$$

Logo,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\#\mathcal{A}(t_k)}{t_k} = 0. \tag{4.12}$$

Agora, vamos deduzir de (4.11) e (4.12) que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{n} = 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Existem, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$k \geq k_1 \Longrightarrow \frac{\#\mathcal{A}(t_k + D_k)}{t_k + D_k} < \varepsilon,$$

$$k \geq k_2 \Longrightarrow \frac{\#\mathcal{A}(t_k)}{t_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$k \geq k_3 \Longrightarrow \frac{1}{k-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam $k_0 := \max\{k_1, k_2, k_3\}$ e $N := t_{k_0} + D_{k_0}$. Para $n \geq N$, temos dois casos.

Caso 1: $n \notin \mathcal{A}$. Nesse caso temos que $t_k + D_k < n < t_{k+1}$, para algum $k \geq k_0$. Assim

$$\frac{\#\mathcal{A}(n)}{n} = \frac{\#\mathcal{A}(t_k + D_k)}{n} < \frac{\#\mathcal{A}(t_k + D_k)}{t_k + D_k} < \varepsilon.$$

Caso 2: $n \in \mathcal{A}$. Isso implica que $t_k \leq n \leq t_k + D_k$, para algum $k \geq k_0 + 1 > k_0$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{\#\mathcal{A}(n)}{n} &\leq \frac{\#\mathcal{A}(t_k) + D_k}{n} \leq \frac{\#\mathcal{A}(t_k) + D_k}{t_k} \\
&< \frac{\#\mathcal{A}(t_k)}{t_k} + \frac{1}{k-1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$t_k \geq k\left(k + \sum_{i=1}^{k} D_i\right) - D_k > (k-1)D_k.$$

Mostramos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{\#\mathcal{A}(n)}{n}\right| = \frac{\#\mathcal{A}(n)}{n} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\delta(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{n} = 0.$$

Portanto, como $\mathbb{N}_0 \backslash \mathcal{A} \subseteq L(f,0)$, segue que

$$1 = \delta(\mathbb{N}_0 \backslash \mathcal{A}) \leq \delta(L(f,0)) \leq 1 \Longrightarrow \delta(L(f,0)) = 1,$$

e obtemos o resultado com $M = 0$. $\square$

Observação 4.17. *Como antes, podemos construir a partir das funções obtidas no Teorema D, funções onde os coeficientes limitados são não nulos. De fato, seja $P \in \mathbb{Z}[z]$ um polinômio com $\deg P \geq 0$ com coeficientes não nulos e defina a função racional*

$$r(z) := \frac{P(z)}{1 - z^{\deg P + 1}}.$$

A função

$$g(z) := r(z) + f(z) \in \mathbb{Z}\{z\}$$

é uma função transcendente, pelo Corolário 1.63 e $S_g = S_f$.

Teorema E. *Sejam $\ell \geq 2$ um número inteiro, $\{\zeta_1 := 1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\ell\}$ o conjunto das ℓ-ésimas raízes da unidade e $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ um conjunto fechado para conjugação complexa contendo 0 e com a seguinte propriedade:*

$$\text{se } \alpha \in S \text{ então } \zeta_k \alpha \in S, \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $\psi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Z}\{z\}$ e uma constante $M \geq 0$, tais que

$$\underline{\delta}(L(\psi, M)) \geq 1 - \frac{1}{\ell}$$

e $S_\psi = S$.

Para mostrar esse teorema será necessário antes demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.18. *Sejam $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ uma função transcendente e $\ell \geq 2$ um número inteiro. Seja $\psi(z) := f(z^\ell)$. Então*

(a) $\psi \in \mathbb{Z}\{z\}$ é uma função transcendente;

(b) Se $\alpha \in S_\psi$, então $\zeta\alpha \in S_\psi$, onde ζ é uma ℓ-ésima raiz da unidade.

Demonstração. (a) Como f é transcendente, temos $[\mathbb{C}(z)(f) : \mathbb{C}(z)] = \infty$ (veja Corolário 1.26), onde $\mathbb{C}(z)$ denota o corpo da funções racionais em $\mathbb{C}$. Com isso, temos que

$$[\mathbb{C}(z^\ell)(\psi) : \mathbb{C}(z^\ell)] = \infty.$$

Por um lado,

$$[\mathbb{C}(z)(\psi):\mathbb{C}(z^\ell)] = [\mathbb{C}(z)(\psi):\mathbb{C}(z^\ell)(\psi)][\mathbb{C}(z^\ell)(\psi):\mathbb{C}(z^\ell)] = \infty.$$

Por outro lado,

$$[\mathbb{C}(z)(\psi):\mathbb{C}(z^\ell)] = [\mathbb{C}(z)(\psi):\mathbb{C}(z)][\mathbb{C}(z):\mathbb{C}(z^\ell)].$$

Já que $[\mathbb{C}(z):\mathbb{C}(z^\ell)] = \ell < \infty$, segue que

$$[\mathbb{C}(z)(\psi):\mathbb{C}(z)] = \infty,$$

o que mostra que ψ é transcendente.

(b) Se $\alpha \in S_\psi$, então $\psi(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Assim,

$$\psi(\zeta\alpha) = f((\zeta\alpha)^\ell) = f(\alpha^\ell) = \psi(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \zeta\alpha \in S_\psi.$$

□

Observação 4.19. *Como vimos anteriormente, $\mathbb{C}(z)(f)$ é o menor corpo que contém $\mathbb{C}(z)$ e f. Dessa forma, está subentendido que $\mathbb{C}(z)(f)$ está contido em uma extensão de $\mathbb{C}(z)$. De fato, trata-se do corpo das séries de Laurent g, com coeficientes em $\mathbb{C}$ que convergem em alguma bola $B(0,\rho)$, onde $\rho > 0$ pode depender de g. Esse corpo é denotado por $\mathbb{C}\{z\}$. Para mais detalhes, veja [12], p. 32.*

Demonstração do Teorema E. Escrevamos

$$S = \{0\} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\{\alpha_j, \zeta_2\alpha_j, \ldots, \zeta_\ell\alpha_j\} \cup \{\overline{\alpha_j}, \zeta_2\overline{\alpha_j}, \ldots, \zeta_\ell\overline{\alpha_j}\}).$$

Seja

$$S' := \{0\} \cup \{\alpha_1^\ell, \alpha_2^\ell, \ldots\} \cup \{\overline{\alpha_1}^\ell, \overline{\alpha_2}^\ell, \ldots\}.$$

Pelo Teorema 4.15, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que

$$S_f = S'.$$

Para cada $f \in \mathbb{Z}\{z\}$, defina $\psi_f = \psi$ por $\psi(z) = f(z^\ell)$. Pelo Lema 4.18 (a), ψ é transcendente. Observe ainda que se $f_1 \neq f_2$, então $\psi_1 \neq \psi_2$, onde $\psi_i(z) = f_i(z^\ell)$, $i = 1, 2$. Logo, temos uma quantidade não enumerável dessas funções. Agora, se $\alpha \in S$, então $\alpha^\ell \in S' = S_f$ e

$$\psi(\alpha) = f(\alpha^\ell) \in \overline{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \alpha \in S_\psi.$$

Por outro lado, se $\beta \notin S$, então $\beta \neq 0$ e

$$\beta \notin \{\alpha_j, \zeta_2\alpha_j, \ldots, \zeta_\ell\alpha_j\} \cup \{\overline{\alpha_j}, \zeta_2\overline{\alpha_j}, \ldots, \zeta_\ell\overline{\alpha_j}\}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\beta^\ell \notin \{\alpha_j^\ell, \overline{\alpha_j}^\ell\}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso, $\beta^\ell \notin S'$ e

$$\psi(\beta) = f(\beta^\ell) \notin \overline{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \beta \notin S_\psi.$$

Portanto, $S_\psi = S$. Por fim, temos que ψ é da forma

$$\psi(z) = \sum_{n\geq 0} b_{\ell n} z^{\ell n} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

ou seja, se $a_n \neq 0$ então n é um múltiplo de ℓ. Logo,

$$\begin{array}{rcl} \underline{\delta}(L(\psi, 0)) & = & \underline{\delta}(\mathbb{N}_0 \backslash \{n \in \mathbb{N}_0; a_n \neq 0\}) \\ & \geq & \underline{\delta}(\mathbb{N}_0 \backslash \{m \cdot \ell; m \in \mathbb{N}_0\}) \quad \text{(pela Proposição 1.2)} \\ & = & \delta(\mathbb{N}_0 \backslash \{m \cdot \ell; m \in \mathbb{N}_0\}) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\ell}. \end{array}$$

Isso conclui a demonstração tomando $M = 0$. □

Mais uma vez, para obter uma função com coeficientes limitados e não nulos, some uma função racional da forma

$$\frac{P(z)}{1 - z^{\deg P + 1}}$$

a uma função obtida no teorema anterior.

Corolário D. *Seja $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ um conjunto fechado para conjugação contendo 0 e com a seguinte propriedade:*

$$se\ \alpha \in S, \ então\ -\alpha \in S.$$

Então existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes pares (e ímpares) f tais que $S_f = S$.

Referências

[1] S. Alaca e K. S. Williams, *Introductory algebraic number theory.* Cambridge Univ. Press, 2003.

[2] R. Francisco e D. Marques, “A note on an asymptotic version of a problem of Mahler”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 107, n. 3, pp. 398–402, 2023.

[3] A. Gleason, *Fundamentals of abstract analysis.* CRC Press, 2018.

[4] A. Granville, “A note on sums of primes”, *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 33, n. 4, pp. 452–454, 1990.

[5] R. Güting, “Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers”, *Michigan Mathematical Journal*, v. 8, n. 2, pp. 149–159, 1961.

[6] C. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, 1874.

[7] J. Huang, D. Marques e M. Mereb, “Algebraic values of transcendental functions at algebraic points”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 82, n. 2, pp. 322–327, 2010.

[8] H. Iwaniec e E. Kowalski, *Analytic number theory.* American Mathematical Soc., 2021, vol. 53.

[9] W. J. LeVeque, *Topics in Number Theory, volumes I and II.* Courier Corporation, 2012.

[10] F. Lindemann, “Ueber die Zahl π*”, *Mathematische Annalen*, v. 20, pp. 213–225, 1882.

[11] K. Mahler, “Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 5, n. 1, pp. 56–64, 1965.

[12] K. Mahler, *Lectures on transcendental numbers.* Springer, 2006, vol. 546.

[13] D. Marques, *Teoria dos números transcendentes.* SBM, 2013.

[14] D. Marques e C. G. Moreira, “A note on a complete solution of a problem posed by K. Mahler”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 98, n. 1, pp. 60–63, 2018.

[15] D. Marques e C. G. Moreira, “On exceptional sets of transcendental functions with integer coefficients: solution of a problem of Mahler”, *Acta Arithmetica*, v. 192, pp. 313–327, 2020.

[16] D. Marques e C. G. Moreira, “On the exceptional set of transcendental functions with integer coefficients in a prescribed set: The Problems A and C of Mahler”, *Journal of Number Theory*, v. 218, pp. 272–287, 2021.

[17] D. Marques e J. Ramirez, “On exceptional sets: the solution of a problem posed by K. Mahler”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 94, n. 1, pp. 15–19, 2016.

[18] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, T. Marsden et al., *Basic complex analysis*. Macmillan, 1999.

[19] P. Morandi, *Field and Galois theory*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 167.

[20] J. Moreira, F. Richter e D. Robertson, “A proof of a sumset conjecture of Erdős”, *Annals of Mathematics*, v. 189, n. 2, pp. 605–652, 2019.

[21] M. R. Murty, P. Rath et al., *Transcendental numbers*. Springer, 2014.

[22] G. C. Pekara, *The asymptotic density of certain integer sequences*. Oklahoma State University, 1972.

[23] J. J. Ramirez Aguirre, “Sobre o comportamento aritmético de funções transcendentes”, 2016.

[24] E. C. d. S. Silva, “Alguns problemas de Mahler sobre funções transcendentes e resultados relacionados”, 2019.

[25] P. Stäckel, “Arithmetische Eigenschaften Analytischer Functionen”, *Acta Mathematica*, v. 25, n. 1, pp. 371–383, 1902.

[26] P. Stäckel, “Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen”, *Mathematische Annalen*, v. 46, n. 4, pp. 513–520, 1895.

[27] T. Tao e T. Ziegler, “Infinite partial sumsets in the primes”, *arXiv preprint arXiv:2301.10303*, 2023.

[28] A. Van der Poorten, “Transcendental entire functions mapping every algebraic number field into itself”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 8, n. 2, pp. 192–193, 1968.

[29] M. Waldschmidt, “Algebraic values of analytic functions”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 160, n. 1-2, pp. 323–333, 2003.