



Universidade de Brasília

**Bifurcações na Interação de Dois Dipolos
Magnéticos na Presença de Um Campo
Magnético Externo**

Marina Costa Merch dos Santos

Orientador: Dr. Yuri Dumaresq Sobral

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestra em Matemática

Brasília, 03 de Fevereiro de 2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Bifurcações na Interação de Dois Dipolos Magnéticos na Presença de um Campo Magnético Externo

por

Marina Costa Merch dos Santos

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de
Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de*


MESTRA EM MATEMÁTICA

Brasília, 03 de fevereiro de 2023.

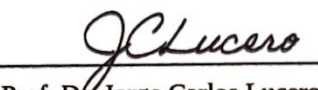
Comissão Examinadora:



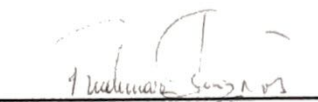
Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral- MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Lucas Conque Seco- MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Jorge Carlos Lucero- UnB (Membro)



Prof. Dr. Rudimar Luiz Nos – UTFPR (Membro)

Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus pais, Mario e Márcia, e minha irmã, Mariane, que sempre me apoiaram e me deram o suporte necessário. Aos meus amigos, que perto ou longe, sempre estiveram comigo de alguma forma. Aos meus professores da graduação, que me incentivaram a seguir na vida acadêmica, me ajudando sempre que possível. Ao meu orientador, Yuri Durmaresq, que tornou possível a elaboração deste trabalho, com todas as reuniões e estando sempre disponível e paciente para tirar qualquer dúvida.

Resumo

Consideramos dois dipolos magnéticos fixos no plano, livres para girar, separados por uma distância r , sujeitos a um campo magnético externo homogêneo aplicado com uma certa orientação. Esse sistema é um sistema dinâmico não-linear e o objetivo deste trabalho é determinar e classificar seus pontos de equilíbrio e as bifurcações causadas por variações do campo aplicado, sejam de intensidade ou de orientação. As equações do movimento dos dipolos são obtidas a partir da segunda lei de Newton em termos angulares e dos torques que cada um dos dipolos sofre devido à presença do outro e devido ao atrito de rotação. Mostramos que, dos pontos de equilíbrio obtidos na ausência de um campo magnético externo, apenas dois são estáveis. As bacias de atração dos pontos estáveis foram construídas com auxílio do método Runge-Kutta. À medida em que a intensidade e a orientação do campo externo aplicado variam, o sistema pode sofrer cinco tipos diferentes de bifurcações que podem destruir, criar e mudar a estabilidade destes pontos de equilíbrio. Para altas intensidades, observamos que apenas quatro pontos de equilíbrio são observados, dos quais apenas um é estável. Apresentamos, igualmente, alguns resultados preliminares da análise das bifurcações causadas pela orientação do campo. Os resultados desta análise foram obtidos a partir da aplicação de uma combinação do Método da Continuação, do Método Newton-Raphson e do Método Runge-Kutta.

Palavras-chaves: dipolos magnéticos, pontos de equilíbrio, bifurcações, sistemas dinâmicos.

Abstract

Consider two magnetic dipoles fixed in the plane, free to spin, separated by a distance r , subjected to a homogenous external magnetic field applied with a certain orientation. This system is a non-linear dynamical system and the goal of this work is to determine and classify its equilibrium points and the bifurcations suffered caused by changes of the applied field. The equations of the motion of the dipoles are obtained from Newton's second law of motion in angular terms considering the torques that each of the dipoles undergoes due to the presence of the other dipole and due to rotational friction. We show that only two of the eight equilibrium points, obtained in the absence of an external magnetic field, are stable. Their basins of attraction of the equilibria were built using the Runge-Kutta method. As the intensity and orientation of the applied external field are varied, the system can undergo five different types of bifurcations that can destroy, create and change the stability of these equilibrium points. For high intensities, we observe that only four equilibrium points remain, and only one is stable. In addition, we present preliminary results of the bifurcations caused by external magnetic field orientation. The results of this analysis were obtained from the application of a combination of the Continuation Method, the Newton-Raphson Method and the Runge-Kutta Method.

Keywords: magnetic dipoles, equilibrium points, bifurcations, dynamical systems.

Conteúdo

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xviii
1 Introdução	1
1.1 Revisão bibliográfica	1
1.2 Objetivos gerais	6
1.3 Objetivos específicos	6
2 Fundamentos Teóricos	8
2.1 Conceitos físicos	8
2.1.1 Dipolos e campo magnético	8
2.1.2 Força de Lorentz e equações de Maxwell	10
2.1.3 Leis básicas do movimento	11
2.2 Noções elementares sobre sistemas dinâmicos	12
2.2.1 Sistemas lineares e não-lineares	12
2.2.2 Bifurcações	16
2.3 Métodos numéricos	22
2.3.1 Método Runge-Kutta de 4ª Ordem	22
2.3.2 Método Newton-Raphson	24
2.3.3 Método da Descida Mais Íngreme	25
2.3.4 Método da Continuação	28
3 Casos Elementares de Interação Entre Um Dipolo e Um Campo Externo	32
3.1 Bússola e analogia com um pêndulo simples	32
3.1.1 Sistema amortecido: uma bússola mais realista	37
3.1.2 Diferenças entre a interação de um dipolo com um campo externo homogêneo e com outro dipolo	38
3.2 Dois dipolos na ausência de um campo externo	40

3.2.1	Formulação matemática	41
3.2.2	Adimensionalização	43
3.2.3	Pontos de equilíbrio	45
3.2.4	Bacias de atração	48
4	Dois Dipolos na Presença de Um Campo Externo	50
4.1	O problema	50
4.2	Evolução para os pontos de equilíbrio	52
4.3	Bifurcações	57
4.3.1	Bifurcações causadas pela intensidade do campo externo	57
4.3.2	Bifurcações causadas pela orientação do campo externo: resultados preliminares	71
4.3.3	Conjectura	75
	Conclusão	77
	Bibliografia	79

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de configurações obtido para diferentes quantidades de agulhas imantadas boiando em água, sob efeito de de um ímã superposto ao plano da água. Extraído de [10].	2
1.2	Diagrama de bifurcação da componente x normalizada da magnetização total, M_x/M_s , como uma função de h para $m/(d^3H_0) = 1$ e $J/(mH_0) = 1$. Detalhes e identificação dos parâmetros em [7]. Extraído de [7].	4
1.3	(a) Visão esquemática 2D da interação de dois ímãs estudada no artigo. (b) Esquema da configuração experimental [15]. Extraído de [15].	5
2.1	Campo de um dipolo magnético, em que S representa o polo sul e N o polo norte [4]. Extraído de [4].	10
2.2	Alguns exemplos de estruturas de pontos fixos do sistema (2.20). Na primeira imagem, temos o ponto fixo do tipo nó. Na segunda imagem, o ponto fixo do tipo nó degenerado. Na terceira imagem, o ponto fixo do tipo espiral. Extraído de [19].	15
2.3	Alguns exemplos de estruturas de pontos fixos do sistema (2.20). Na primeira imagem, temos o ponto fixo do tipo estrela. Na segunda imagem, o ponto fixo do tipo centro. Extraído de [19].	16
2.4	Plano de fase do sistema (2.25) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo sela-nó. Extraído de [19].	17
2.5	Diagrama da bifurcação sela-nó do sistema (2.25), onde o <i>eixo</i> x representa o parâmetro r e o <i>eixo</i> y a variável x . O ramo contínuo representa o ponto fixo estável e o ramo tracejado o ponto instável. Extraído de [19].	17
2.6	Plano de fase do sistema (2.26) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo transcítica. Extraído de [19].	18
2.7	Diagrama da bifurcação transcítica do sistema (2.26), onde o <i>eixo</i> x representa o parâmetro r e o <i>eixo</i> y o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].	18

2.8	Plano de fase do sistema (2.27) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo tridente super crítica [19].	19
2.9	Diagrama da bifurcação tridente supercrítica do sistema (2.27), onde o <i>eixo</i> x representa o parâmetro r e o <i>eixo</i> y o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].	20
2.10	Diagrama da bifurcação tridente subcrítica do sistema (2.28), onde o <i>eixo</i> x representa o parâmetro r e o <i>eixo</i> y a variável o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].	20
3.1	As duas imagens mostram o plano de fase do sistema (3.11), onde é possível ver seus pontos de equilíbrio do tipo centro (centro das trajetórias fechadas) e selas (zoom na Figura da direita).	35
3.2	A imagem representa o plano de Fase cilíndrico do sistema (3.11).	36
3.3	A imagem representa o plano de Fase cilíndrico do sistema (3.11).	36
3.4	Trajetórias para diferentes condições iniciais no sistema (3.11). O eixo x representa o tempo e o eixo y a orientação θ	37
3.5	Influência do campo magnético externo e um dipolo fixo com orientação $\theta^* = \frac{\pi}{4}$ sobre um dipolo livre para girar, com a mesma condição inicial. . .	39
3.6	Influência do campo magnético externo e um dipolo fixo com orientação $\theta^* = \pi$ sobre um dipolo livre para girar, com a mesma condição inicial. . .	40
3.7	Dois dipolos magnéticos com momentos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 separados a uma distância r , onde \hat{r} é o vetor posição unitário e θ_1 e θ_2 são respectivamente os ângulos de rotação do dipolo 1 e 2. Figura extraída de [17].	41
3.8	Pontos de equilíbrio do sistema (3.52) representados pela intersecção das equações $\dot{v}_1 = f(x, y) = 0$ e $\dot{v}_2 = g(x, y) = 0$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é ilustradas pela cor dos pontos.	46
3.9	Bacia de atração do sistema (3.52), onde $\mathcal{P}_{(0,0)}$ é o ponto de equilíbrio 1 e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ o ponto de equilíbrio 2.	48
3.10	Quantidade de condições iniciais que convergem para os pontos de equilíbrio, sendo $\mathcal{P}_{(0,0)}$ o Ponto 1 e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ o Ponto 2.	49
4.1	Dois dipolos magnéticos com momentos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 com ângulos de rotação θ_1 e θ_2 , respectivamente, separados a uma distância r , onde \hat{r} é o vetor posição unitário, na presença de um campo externo \mathbf{B} com direção θ^* [17].	50
4.2	Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 0.5$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	53

4.3	Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 0.9$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	53
4.4	Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 1.2$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	54
4.5	Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 2.01$. Onde o Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	54
4.6	Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.3$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	54
4.7	Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.5$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	54
4.8	Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.9$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	55
4.9	Campo magnético externo de intensidade $\gamma_c^* = 1.2$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	55
4.10	Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.6$ e $\theta^* = \pi/2$	56
4.11	Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma_c^* = 1.8$ e $\theta^* = \pi/2$	56
4.12	Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.5$ e $\theta^* = \pi/10$	56
4.13	Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.9$ e $\theta^* = \pi/10$	56
4.14	A imagem à esquerda mostra o diagrama de bifurcação do sistema, com $\theta^* = 0$, em relação ao ângulo θ_1 , onde o eixo x representa γ^* e o eixo y representa θ_1 . As imagens superior direita e inferiores são o diagrama de bifurcação do sistema em três dimensões em diferentes perspectivas, onde o eixo x, eixo da direita, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2	60
4.15	Bifurcação tridente subcrítica em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = 0$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 1$	60
4.16	Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = 0$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 3$	61

- 4.17 Bifurcação tridente subcrítica em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = \pi$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 1$ 61
- 4.18 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = \pi$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 3$ 62
- 4.19 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = 3\pi/2$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 1$ 63
- 4.20 Bifurcação tridente supercrítica em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = 3\pi/2$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 3$ 63
- 4.21 Bifurcações tridente instável (imagens superiores à esquerda e à direita) e sela-nó (imagens inferiores à esquerda e à direita), em $\gamma_c^* = 1.34$ e $\gamma_c^* = 1.65$ respectivamente, com $\theta^* = \pi/6$. Nestes gráficos, o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem superior à esquerda $\gamma^* = 1.30$, na imagem superior à direita $\gamma^* = 1.40$, na imagem inferior à esquerda $\gamma^* = 1.50$ e na imagem inferior à direita $\gamma^* = 1.60$ 64
- 4.22 Diagrama da bifurcação sela-nó em $\gamma_c^* = 1.6$ com $\theta^* = \pi/6$. Na primeira imagem, o eixo x representa γ^* e o eixo y representa o ângulo θ_1 . Na segunda imagem, o eixo x representa o ângulo θ_1 , o eixo y, eixo da direita, representa o ângulo θ_2 e o eixo z representa γ^* 65
- 4.23 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 1.18$ com $\theta^* = \pi/4$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 65
- 4.24 Bifurcação sela-nó em $\gamma_c^* = 1.51$, com $\theta^* = \pi/4$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 66
- 4.25 Bifurcação tridente instável com $\theta^* = \pi/20$. O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em relação a θ_1 , o eixo y representa θ_1 e o eixo x representa γ^* . O segundo gráfico representa do diagrama de bifurcação onde o eixo x, eixo da direita, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2 67

- 4.26 Diagrama de bifurcação com $\theta^* = \pi/20$. O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa γ^* , o eixo y representa θ_1 . O segundo gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa γ^* e o eixo y representa θ_2 67
- 4.27 Bifurcações com $\theta^* = \pi/20$. O gráfico representa o diagrama de bifurcação. O eixo x, eixo da esquerda, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2 68
- 4.28 Diagrama de bifurcação com $\theta^* = \pi/10$. O eixo y representa θ_1 no primeiro gráfico e θ_2 no segundo gráfico e eixo x representa γ^* , em ambos os gráficos. 69
- 4.29 Bifurcação tridente subcrítica em intensidade fixa $\gamma^* = 1$ na orientação $\theta^* = \pi$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na primeira imagem, $\theta^* = 0.8\pi$; na segunda imagem, $\theta^* = 0.95\pi$, e na terceira imagem, $\theta^* = \pi$ 73
- 4.30 Bifurcação tridente subcrítica em intensidade fixa $\gamma^* = 1$ na orientação $\theta^* = 0$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na primeira imagem, $\theta^* = 6.2$; na segunda imagem, $\theta^* = 0$, e na terceira imagem, $\theta^* = 0.1$ 73
- 4.31 Bifurcações com $\gamma^* = 1$. O gráfico representa do diagrama de bifurcação em que o eixo x representa θ^* e o eixo y representa θ_2 74
- 4.32 Conjectura do diagrama das bifurcações com $\gamma^* = 1$. No gráfico, o eixo x representa θ^* e o eixo y representa θ_2 75

Lista de Tabelas

3.1	Notação para representar os pontos de equilíbrio do sistema (3.52).	46
3.2	Classificação dos pontos fixos de (3.52) de acordo com os autovalores da matriz jacobiana (3.54) e o estudo da estabilidade feito por [17].	47
4.1	Bifurcação Tridente Subcrítica	69
4.2	Bifurcação Tridente Supercrítica	70
4.3	Bifurcação Sela-nó Instável	70
4.4	Bifurcação Sela-nó	70
4.5	Bifurcação Tridente Instável	71

Capítulo 1

Introdução

Os gregos, desde aproximadamente 600 a.C., tinham conhecimento alguns fenômenos magnéticos e elétricos, mas o desenvolvimento desse conhecimento se deu apenas por volta de 1600 [1]. William Gilbert (1540-1603) publicou em 1600 o livro *de Magnete* onde ele descreve sua descoberta de que a Terra pode ser vista como um ímã [1]. A partir deste trabalho, se desenvolveram vários trabalhos a respeito desses fenômenos por Charles Du Fay (1698-1739) em 1733-1734, Benjamin Franklin (1706-1790) em 1747, Joseph Priestley (1733-1804) em 1767, Charles de Coulomb (1736-1806) em 1785, John Michell (1724-1793) em 1750, entre outros [1].

No entanto, a conexão entre os fenômenos elétricos e magnéticos foi descoberta apenas em 1820 pelo físico Hans Christian Oersted (1777–1851) [1]. Após esse trabalho, outros trabalhos importantes foram feitos por André-Marie Ampère (1775–1836), Michael Faraday (1791-1867), James Clerk Maxwell (1831–1879), Jean Baptiste Biot (1774–1862) e Félix Savart (1791– 1841) [1, 17]. Estes trabalhos foram responsáveis por fundamentar o que conhecemos como eletromagnetismo clássico [1].

1.1 Revisão bibliográfica

Neste trabalho, temos interesse em materiais magnéticos (ímãs) e como eles reagem na presença de um campo magnético externo. Um trabalho interessante nessa linha é o

de Alfred Marshall Mayer (1836–1897) publicado em 1878 [10]. Em seu trabalho, Mayer estudou configurações de equilíbrio e estabilidade de agulhas imantadas presas a cortiças, boiando em água, sob o efeito de um ímã [17]. No experimento, a quantidade de agulhas é variada de 2 a 20, como podemos ver na Figura (1.1). Mayer registou as configurações de equilíbrio encontradas a fim de comparar as combinações.

Após os experimentos, o autor constatou que, para cada número de agulhas pode haver duas ou mais configurações em diferentes níveis de equilíbrio [10]. Como, por exemplo, a configuração 5b na Figura (1.1): após algum tipo de vibração, rearranja-se na configuração 5a. O mesmo ocorre com as configurações 6b e 6a [10]. Deste modo, o autor percebe que a interação entre ímãs possui diferentes dinâmicas de equilíbrio, notando que algumas formas são estáveis e outras instáveis e, além disso, que formas instáveis, ao sofrerem algum tipo de vibração, são rearranjadas para uma forma estável [11].

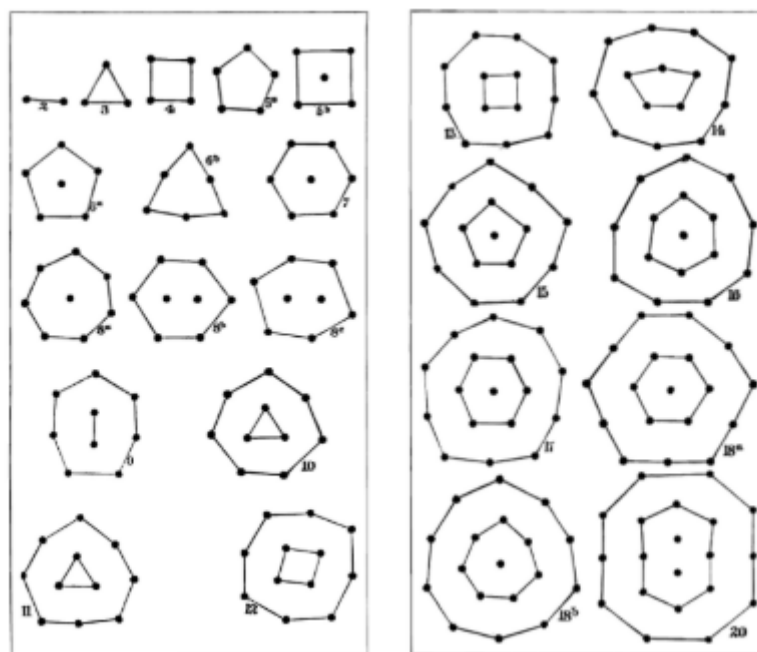


Figura 1.1 Diagrama de configurações obtido para diferentes quantidades de agulhas imantadas boiando em água, sob efeito de de um ímã superposto ao plano da água. Extraído de [10].

Como o objetivo do nosso trabalho é a interação de dipolos sob a influência de um campo magnético aplicado, temos alguns trabalhos mais recentes sobre esse assunto. Dentre eles, o trabalho de Laroze et al. [9] no qual foi estudada a dinâmica de interação de

duas partículas magnéticas anisotrópicas, via interação dipolo-dipolo, sob a presença de um campo aplicado. Para a análise do comportamento magnético foram considerados diferentes regimes do espaço de parâmetros, sendo eles a constante de anisotropia e a constante de amortecimento. Para modelar a evolução temporal do sistema foram utilizadas as equações de Landau-Lifshitz, definidas para um sistema de N partículas magnéticas como [9]:

$$\frac{d\mathbf{m}^i}{dx} = -\gamma\mathbf{m}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\gamma\lambda}{m^i}\mathbf{m}^i \times (\mathbf{m}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i), \quad (1.1)$$

onde \mathbf{m}^i é o momento magnético individual de cada partícula com $i = \{1, \dots, N\}$, γ é a razão giromagnética e λ é o coeficiente de amortecimento.

Neste trabalho, os autores analisaram as situações não-dissipativa e dissipativa, concluindo que há uma diferença significativa entre os dois casos. No caso não-dissipativo, nota-se que o módulo total da magnetização do sistema é sempre uma função que flutua no tempo [9]. A magnetização é definida como o campo magnético gerado no interior dos materiais magnéticos. De maneira simplificada, a magnetização pode ser calculada como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2, \quad (1.2)$$

onde \mathbf{M} é a magnetização total do sistema e \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 são os momentos magnéticos das partículas 1 e 2, respectivamente. Já no caso dissipativo, o momento magnético total evolui durante um tempo crítico quando atinge o valor de saturação, e esse tempo depende dos parâmetros de controle do sistema [9].

Nesta mesma linha, temos o trabalho de Laroze e Vargas [8] sobre a dinâmica de um sistema, sem dissipação, da interação de duas nanopartículas magnéticas sob a influência de um campo magnético aplicado. Assim como o trabalho citado anteriormente [9], a evolução temporal do sistema foi modelada utilizando as equações de Landau-Lifshitz. Laroze e Vargas [8] mostram que, assim como em [9], a magnetização total do sistema não é estacionária e sim, uma função que flutua no tempo.

Laroze e Perez [7] estudaram a dinâmica das interações magnéticas de quatro partículas magnéticas dispostas em um círculo na presença de um campo magnético aplicado. Esse

sistema foi modelado pelas equações de Landau-Lifshitz, sem o termo de dissipação. Foi explorado pelos autores o espaço de parâmetros a fim de calcular diagramas de bifurcação, como o visto na Figura (1.2). O diagrama apresentado é similar aos diagramas de duplicação de períodos nas oscilações da magnetização [7] e, por isso, os autores sugerem que o sistema pode ter um comportamento caótico.

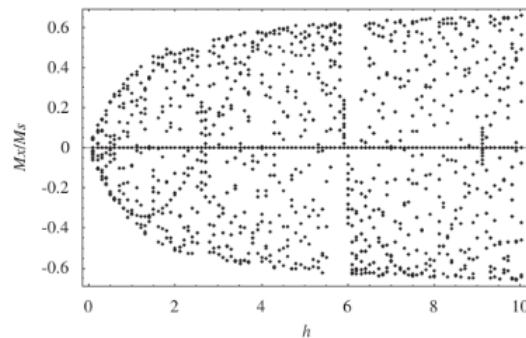


Figura 1.2 Diagrama de bifurcação da componente x normalizada da magnetização total, M_x/M_s , como uma função de h para $m/(d^3H_0) = 1$ e $J/(mH_0) = 1$. Detalhes e identificação dos parâmetros em [7]. Extraído de [7].

De uma maneira um pouco diferente do que iremos fazer nesse trabalho, Plihon et al. [15], em um trabalho mais recente, estudaram a dinâmica de dois dipolos magnéticos acoplados através de um experimento que envolve dois discos magnéticos coplanares livres para girar em eixos paralelos fixos, separados por uma distância d , com o eixo de cada ímã sendo perpendicular ao vetor do seu momento dipolo. Além disso, um torque externo pode ser aplicado a um dos dipolos sem afetar o outro [15]. O esquema do experimento pode ser visto na Figura (1.3). Procuraram estudar a influência dos parâmetros de um torque motor na dinâmica do sistema acoplado. Os autores, através do experimento e da análise da energia potencial do sistema, observaram dois comportamentos: os dipolos flutuam em volta do ponto fixo estável ou exibem reversões estocásticas entre pontos fixos estáveis [15].

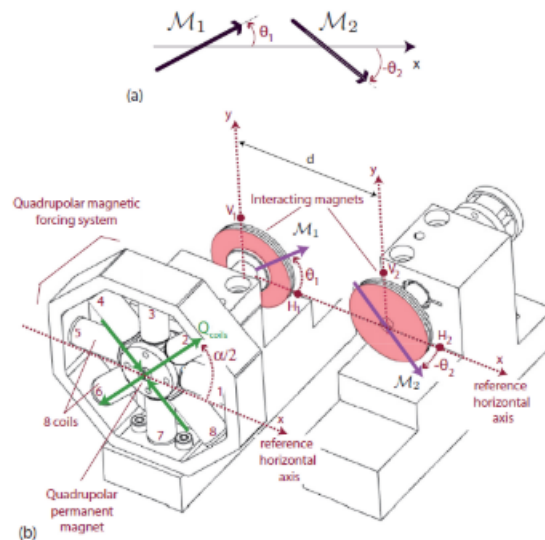


Figura 1.3 (a) Visão esquemática 2D da interação de dois ímãs estudada no artigo. (b) Esquema da configuração experimental [15]. Extraído de [15].

Em um trabalho também experimental, Sarafian [18] propõe um experimento prático para a interpretação da interação entre dois dipolos magnéticos. O problema consiste em dois ímãs posicionados ao longo de eixo axial comum e seus momentos magnéticos orientados de modo que eles estejam antiparalelamente [18]. Solta-se um dos ímãs verticalmente no topo do segundo ímã, que permanece estacionário. É selecionado um conjunto de características adequadas para os ímãs, de modo que o balanço entre o peso do ímã em queda e a força magnética entre os dois ímãs resulte em oscilações [18]. O autor conclui que, quando os ímãs estão mais afastados um do outro, a gravidade potencial em relação ao ímã base está em seu máximo e a energia potencial magnética está no seu mínimo [18]. No final da queda, quando os ímãs estão no mínimo de distância um do outro, a energia potencial magnética atinge seu mínimo enquanto a gravidade está no máximo [18]. Através do software *Mathematica*, o autor interpretou os dados do experimento, propondo um modelo teórico semi-empírico [18].

Rosa, Cunha e Ceniceros [16] estudaram as configurações de equilíbrio de partículas magnéticas com e sem um campo magnético aplicado, utilizando simulações do tipo Monte-Carlo. Sem o campo magnético aplicado, provaram que os pontos de equilíbrio correspondem a uma configuração de momentos tangenciais à circunferência que contém os centros das

partículas [2]. Ao introduzir o campo magnético externo, há uma alteração nas configurações de equilíbrio. Além disso, é encontrado um campo crítico que corresponde a uma rápida mudança da configuração do momento magnético e sinaliza uma transição topológica [16].

Este trabalho é uma continuação do trabalho "*Dinâmica e Estabilidade da Interação de Dois Dipolos Magnéticos*" de Santos [17]. Em seu trabalho, Santos [17] estudou a interação entre dois dipolos magnéticos na ausência de um campo magnético externo. Para este caso, resolveu o sistema analiticamente e, além disso, analisou e caracterizou dinâmica dos equilíbrios do caso de sistema conservativo e amortecido. Em nosso trabalho, utilizamos alguns dos resultados sobre a interação de dois dipolos na ausência de um campo externo obtidos por Santos [17], como a estabilidade dos pontos de equilíbrio que foram obtidas analiticamente e a eficiência da malha de 81×81 com tolerância de 10^{-3} para construção das bacias de atração.

1.2 Objetivos gerais

Este trabalho visa compreender, do ponto de vista matemático, a interação entre dois dipolos magnéticos e as alterações causadas na estrutura desse sistema com a aplicação de um campo magnético externo através de técnicas computacionais aplicadas a sistemas dinâmicos.

1.3 Objetivos específicos

1. Formular matematicamente da interação de dois dipolos magnéticos planos na ausência e na presença de um campo magnético externo;
2. Identificar e classificar os pontos de equilíbrio do sistema na ausência do campo magnético externo;
3. Identificar a influência do campo magnético externo no sistema, isto é, identificar mudanças nos pontos de equilíbrio e nas bacias de atração para diferentes campos aplicados;

4. Caracterizar e classificar as bifurcações nos pontos de equilíbrio causadas pelo campo magnético externo;
5. Aplicar diferentes métodos e técnicas numéricas para a análise de sistemas dinâmicos.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1 Conceitos físicos

Para compreendermos melhor o problema que iremos estudar neste trabalho e sua formulação matemática, iremos apresentar alguns conceitos e definições do eletromagnetismo. Eletromagnetismo é a ciência que estuda, de um ponto de vista unificado, a interação entre cargas elétricas, materiais magnéticos, correntes elétricas e radiações eletromagnéticas [1].

2.1.1 Dipolos e campo magnético

Em 1785, a fim de descrever a interação magnética entre ímãs (ou a interação magnética entre um ímã e a Terra), Charles de Coulomb propôs uma expressão para descrever a força entre polos magnéticos pontuais (polo Norte e polo Sul) [2]. Por convenção, o polo Norte é considerado como o polo positivo e, o polo Sul, como o polo negativo. Este conceito de polo magnético é uma idealização, já que não há como isolar um polo magnético e trabalhamos, então, com a estrutura magnética chamada dipolo magnético, com a qual se pode fazer medidas [2].

Primeiramente Biot e Savart (1820) e depois Ampère (1820), estabeleceram a lei da força entre dois fios condutores por onde passa uma corrente [6]. Sejam $d\mathbf{l}$ o elemento vetorial de linha (apontando na direção do fluxo da corrente), I a corrente elétrica do fio e r a

distância de um ponto de observação P a $d\mathbf{l}$. Definimos a densidade do fluxo magnético $d\mathbf{B}$ no ponto P como [6]:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.1)$$

Por integração em todo comprimento do fio, temos a equação do campo magnético \mathbf{B} gerado por uma corrente pertencente a fios metálicos, conhecida como lei de Biot-Savart [1]:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (2.2)$$

onde C é o circuito e μ_0 é a constante de permeabilidade magnética do vácuo. Da equação (2.2), desenvolvida para uma uma espira circular como dipolo magnético, podemos obter o campo de um dipolo magnético [17], representado na Figura (2.1), a equação mais importante deste trabalho:

$$\mathbf{B}_{dip} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{m}}{3} \right], \quad (2.3)$$

onde \mathbf{m} é chamado de momento de dipolo magnético, definido por:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad (2.4)$$

em que S é a área orientada compreendida pelo circuito [17]. Através do torque magnético exercido por um campo externo \mathbf{B}_{ext} , dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}_{ext}, \quad (2.5)$$

é possível mensurar seu momento de dipolo magnético [4].

Finalmente, considerando então dois dipolos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 , pela lei de interação eletromagnética entre dipolos magnéticos, temos que o torque que o dipolo \mathbf{m}_2 causa no dipolo \mathbf{m}_1 [4] é:

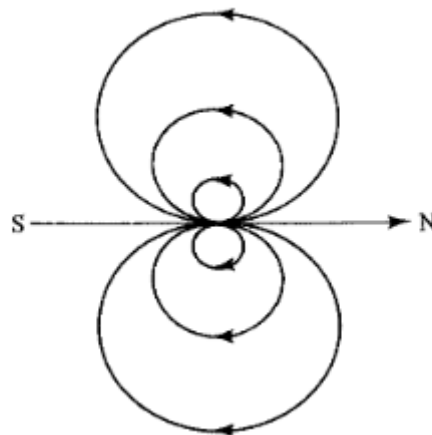


Figura 2.1 Campo de um dipolo magnético, em que S representa o polo sul e N o polo norte [4]. Extraído de [4].

$$\begin{aligned} \tau_{mag} &= \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_{21}, \\ &= \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{r})(\mathbf{m}_2 \times \hat{r}) - \frac{\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2}{3} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.2 Força de Lorentz e equações de Maxwell

Embora neste trabalho não haja grandezas elétricas, no eletromagnetismo clássico há outros conceitos que também são importantes para entender como campos magnéticos são gerados e afetados por cargas e campos elétricos, sendo a base para o eletromagnetismo clássico. Chamamos atenção para a Força de Lorentz e as Equações de Maxwell.

A força eletromagnética agindo em uma partícula carregada eletricamente é conhecida como força de Lorentz, que inclui os campos elétrico e magnético [1]

$$\mathbf{F} = q_0(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}), \quad (2.7)$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} o campo magnético e \mathbf{v}_0 é a velocidade da partícula.

As equações de Maxwell determinam como obter os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} gerados a partir de uma carga e uma distribuição de corrente dadas [1]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

onde a constante c é a velocidade de propagação da luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (2.12)$$

sendo ρ a densidade da carga elétrica, \mathbf{J} a densidade da corrente elétrica, ϵ_0 a constante de permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a constante de permeabilidade magnética do vácuo.

2.1.3 Leis básicas do movimento

A mecânica é a área do conhecimento que estuda o equilíbrio e o movimento dos corpos. Esta área tem como base o livro *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (1687) de Isaac Newton [2]. Neste livro, Newton publicou três leis (ou axiomas) do movimento para descrever o movimento de corpos sobre a influência de forças [1], sendo elas [12]:

Lei 1. Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele;

Lei 2. A mudança de movimento é proporcional a força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida;

Lei 3. A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.

As três leis podem ser escritas matematicamente. Consideramos \mathbf{F}_R a força resultante agindo no corpo de massa m , \mathbf{v} a velocidade do corpo relativa ao espaço absoluto, \mathbf{a} a

aceleração do corpo e \mathbf{F}_{AB} a força do corpo A agindo no corpo B (análogo para \mathbf{F}_{BA}) [1]. A *primeira lei* diz que se $\mathbf{F}_R = 0$ então o corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme [1]. A *segunda lei* é dada por

$$\mathbf{F}_R = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}, \quad (2.13)$$

e a *terceira lei* pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}. \quad (2.14)$$

A versão para o movimento angular de um corpo, equivalente à equação (2.13), é dada por

$$\tau_R = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha, \quad (2.15)$$

onde I é o momento de inércia do corpo e α é a aceleração angular.

2.2 Noções elementares sobre sistemas dinâmicos

Dois dipolos interagindo na presença de um campo magnético externo formam um sistema dinâmico. Assim, para estudar a dinâmica do sistema se faz necessário o estudo de conceitos básicos de sistemas dinâmicos, que apresentaremos a seguir, na forma de uma breve introdução. Leitores interessados em conceitos mais avançados podem consultar [19] e [14].

2.2.1 Sistemas lineares e não-lineares

Consideraremos, agora o caso de um sistema dinâmico não-linear,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y). \end{cases} \quad (2.16)$$

As soluções desse sistema podem ser vistas como trajetórias, onde o sistema "se move" ao longo delas no plano xy , chamado de plano de fase [19]. Definiremos, a seguir, os conceitos mais importantes de um sistema dinâmico.

Definição 2.1. O **plano de fase** do sistema de equações diferenciais (2.20) com $x \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto de todas as trajetórias (soluções) de (2.20) no espaço \mathbb{R}^2 (análogo para sistema n -dimensional) [14].

Definição 2.2. Pontos de equilíbrio, ou pontos fixos, são os pontos onde \dot{x} e \dot{y} se anulam. Podem ser: **estáveis**, se todas as suficientemente pequenas perturbações da solução amortecem com o tempo; **Instáveis**, se as perturbações aumentam com o tempo. Além disso, em um sistema linear homogêneo, como em (2.20), o único ponto fixo é a origem.

Em particular, em sistemas bidimensionais, podemos diferenciar os pontos fixos estáveis como pontos fixos atrativos e globalmente atrativos e também, de acordo com seu tipo e estabilidade.

Definição 2.3. Se $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$, então x^* é um ponto fixo atrativo [19].

Definição 2.4. Se todas as trajetórias são atraídas para x^* dizemos que o ponto fixo é globalmente atrativo [19].

Definição 2.5. O ponto fixo é **estável no sentido de Lyapanov** quando todas as trajetórias que começam perto do ponto fixo continuam perto do ponto, todo o tempo. O ponto fixo **neutramente estável** é um ponto estável no sentido de Lyapanov, mas não é atrativo. **Estável ou assintoticamente estável** é um ponto estável no sentido de Lyapanov, e atrativo. Um ponto fixo **instável** não é um ponto estável no sentido de Lyapanov e não é atrativo. [19].

Podemos utilizar as definições e classificações de sistemas dinâmicos lineares para o caso de sistemas dinâmicos não-lineares.

Definição 2.6. Seja um sistema dinâmico não-linear dado por (2.16). Considerando $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ pequenas perturbações em torno do ponto fixo, e usando a expansão em série de Taylor, obtemos que:

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*), \quad (2.17)$$

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*). \quad (2.18)$$

Logo, o novo sistema pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Jac(x^*, y^*) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

chamado de **sistema linearizado**, onde Jac é a matriz jacobiana no ponto fixo (x^*, y^*) [19].

Antes de continuar esta discussão, precisamos da classificação dos pontos fixos como hiperbólicos ou não-hiperbólicos, para sabermos mais sobre a utilização da linearização para classificar os pontos de equilíbrio.

Definição 2.7. Um ponto de equilíbrio é chamado **hiperbólico** se nenhum dos autovalores da matriz $Jac(x^*, y^*)$ tem parte real nula. Um ponto de equilíbrio é chamado **não-hiperbólico** se algum dos autovalores da matriz $Jac(x^*, y^*)$ é puramente complexos [14].

O Teorema de Hartman-Grobman garante que se um ponto fixo de (2.16) é um ponto hiperbólico, então o comportamento local do sistema não-linear (2.16) é equivalente topologicamente ao comportamento local do sistema linearizado [14]. Os pontos hiperbólicos não têm sua estrutura topológica afetada por pequenos termos não lineares. Os pontos não-hiperbólicos são mais frágeis em relação a isso e, assim, o sistema dinâmico em suas vizinhanças não tem comportamento topologicamente equivalente ao do sistema linearizado. [19].

Consideramos um sistema linear bidimensional da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \quad (2.20)$$

onde a, b, c, d são parâmetros. De forma matricial, podemos escrevê-lo como

$$\dot{X} = AX, \quad (2.21)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

e

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

A partir dos autovalores da matriz A do sistema (2.20) podemos classificar ainda de outra maneira os pontos fixos do sistema. Definimos Δ e τ , em um sistema bidimensional, o determinante e o traço de A respectivamente, como

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \quad e \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (2.24)$$

sendo λ_1, λ_2 os autovalores de A . A classificação da estrutura pontos fixos de um sistema linear, como os pontos representados na Figura (2.3), pode ser feita a partir da análise de Δ e τ , como exposto em [19].

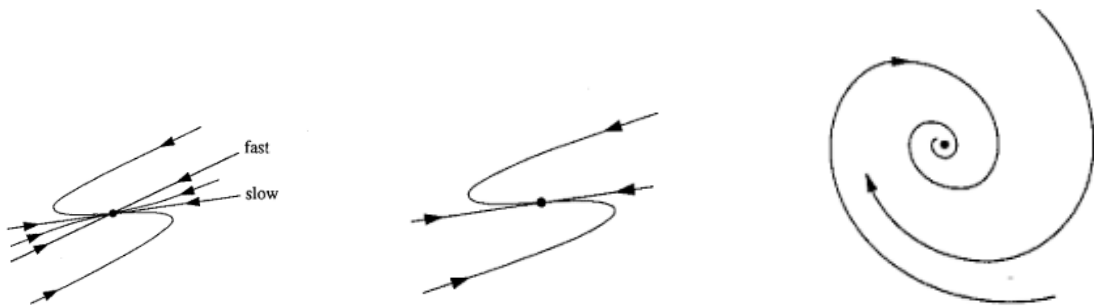


Figura 2.2 Alguns exemplos de estruturas de pontos fixos do sistema (2.20). Na primeira imagem, temos o ponto fixo do tipo nó. Na segunda imagem, o ponto fixo do tipo nó degenerado. Na terceira imagem, o ponto fixo do tipo espiral. Extraído de [19].

Desta forma:

- Se $\Delta < 0$, os autovalores são reais e têm sinais opostos. Logo o ponto fixo é um ponto sela;
- Se $\Delta > 0$, os autovalores são reais e têm o mesmo sinal (nós) ou são complexos conjugados (espirais e centros). Os nós satisfazem $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e os espirais $\tau^2 - 4\Delta <$



Figura 2.3 Alguns exemplos de estruturas de pontos fixos do sistema (2.20). Na primeira imagem, temos o ponto fixo do tipo estrela. Na segunda imagem, o ponto fixo do tipo centro. Extraído de [19].

0. Caso $\tau^2 - 4\Delta = 0$, temos nós, estrela e nós degenerados. A estabilidade depende do sinal de τ . Para τ estritamente positivo, o ponto fixo é estável. Para τ estritamente negativo, o ponto fixo (espiral ou nó) é instável. Para $\tau = 0$, temos centro neutramente estável;

- Se $\Delta = 0$, a origem não é um ponto fixo isolado: ou temos uma linha de pontos fixos, ou todo plano é feito de pontos fixos (caso $A \equiv 0$).

2.2.2 Bifurcações

Em um sistema dinâmico, dependendo da variação dos parâmetros, pontos fixos podem ser criados, destruídos ou ter sua estabilidade alterada. Chamamos essas alterações de bifurcações e os valores dos parâmetros em que elas ocorrem de pontos de bifurcação [19]. Em particular, para sistemas unidimensionais ocorrem três tipos mais simples de bifurcações: tridente, sela-nó e transcritical [14].

Bifurcação Sela-Nó

Nesse tipo de bifurcação, os pontos fixos são criados e destruídos. Os pontos fixos colidem e se aniquilam mutuamente, à medida em que o parâmetro muda, criando um ponto

fixo híbrido no valor crítico do parâmetro de bifurcação [19]. A forma normal da bifurcação sela-nó é dada pelo sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = r + x^2, \quad (2.25)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

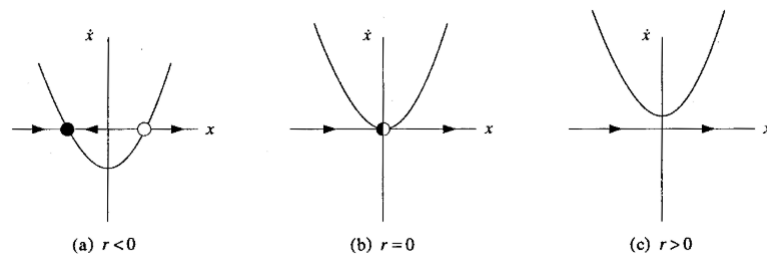


Figura 2.4 Plano de fase do sistema (2.25) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo sela-nó. Extraído de [19].

Para $r < 0$, temos dois pontos fixos: um estável e um instável. À medida que $r \rightarrow 0$, os pontos fixos se movem em direção um ao outro e, quando $r = 0$, os pontos fixos colidem e é criado um ponto fixo híbrido, ou meio estável, o ponto fixo for estável por um lado e instável pelo outro. À medida que r aumenta ($r > 0$) o sistema não tem mais pontos fixos [19], como podemos observar nos planos de fase na Figura (2.4). O diagrama de bifurcação é representado na Figura (2.5).

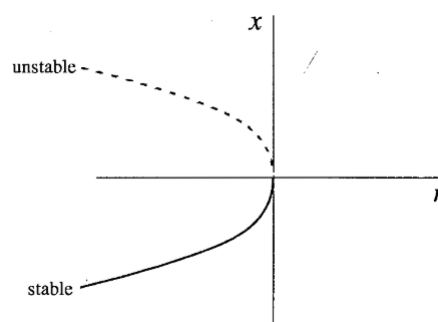


Figura 2.5 Diagrama da bifurcação sela-nó do sistema (2.25), onde o *eixo* x representa o parâmetro r e o *eixo* y a variável x . O ramo contínuo representa o ponto fixo estável e o ramo tracejado o ponto instável. Extraído de [19].

Bifurcação Transcrítica

Na bifurcação transcritical, os pontos fixos existem para todos os valores dos parâmetros e não podem ser criados ou destruídos, no entanto podem mudar sua estabilidade [19]. A forma normal dessa bifurcação é dada pelo sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = rx - x^2, \quad (2.26)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

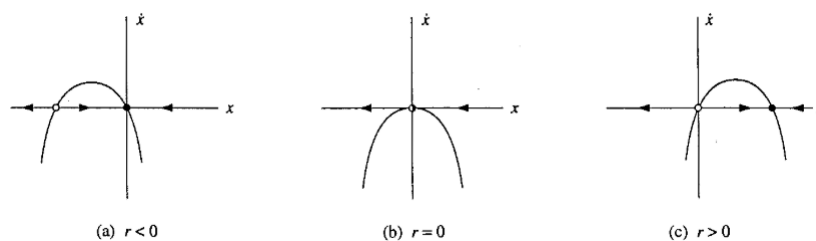


Figura 2.6 Plano de fase do sistema (2.26) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo transcritical. Extraído de [19].

Note que no plano de fase na Figura (2.6), para qualquer valor de r o ponto fixo $x^* = 0$ existe. Para $r < 0$, há um ponto fixo instável em $x^* = r$ e um ponto fixo estável em $x^* = 0$. À medida que $r \rightarrow 0$, o ponto instável se aproxima de $x^* = 0$, e quando $r = 0$, $x^* = 0$ se torna um ponto fixo meio instável. E para $r > 0$, a origem se torna instável e $x^* = r$ se torna estável [19]. O diagrama de bifurcação é representado na Figura (2.7).

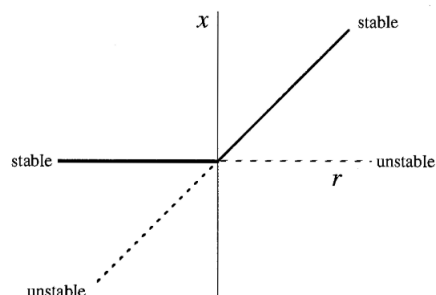


Figura 2.7 Diagrama da bifurcação transcritical do sistema (2.26), onde o *eixo* x representa o parâmetro r e o *eixo* y o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].

Bifurcação Tridente

A bifurcação tridente é comum em problemas físicos que possuem simetria. Nesse tipo de bifurcação os pontos fixos tendem a aparecer e desaparecer em pares simétricos [19]. Há dois tipos de bifurcação tridente: supercrítica e subcrítica.

- Supercrítica

Sua forma normal é

$$\dot{x} = rx - x^3, \quad (2.27)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Esse tipo de equação é invariável à mudança de variável $x \rightarrow -x$ e essa é a expressão matemática para a simetria do problema.

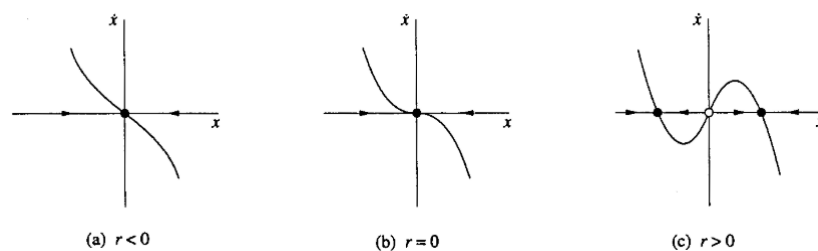


Figura 2.8 Plano de fase do sistema (2.27) para diferentes condições de r . Observa-se uma bifurcação do tipo tridente super crítica [19].

Observe na Figura (2.8), quando $r < 0$, temos um ponto fixo $x^* = 0$ estável. Em $r = 0$, ainda temos apenas um ponto fixo $x^* = 0$ estável, pois agora as soluções não decaem mais exponencialmente e sim, de maneira mais lenta (desaceleração crítica) [19]. Em $r > 0$, temos 3 pontos fixos: $x^* = 0$ se torna instável e aparecem mais dois pontos fixos $x^* = \pm\sqrt{r}$ estáveis, simetricamente à origem. Dizemos que o termo cúbico crítico estabiliza a equação. Seu diagrama de bifurcação é representado na Figura (2.9).

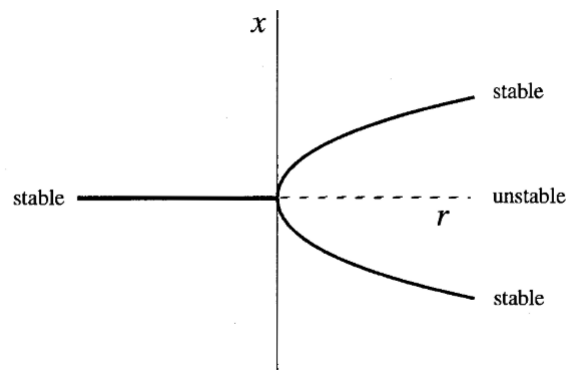


Figura 2.9 Diagrama da bifurcação tridente supercrítica do sistema (2.27), onde o *eixo x* representa o parâmetro r e o *eixo y* o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].

- Subcrítica

Sua forma normal é

$$\dot{x} = rx + x^3, \quad (2.28)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Diferente do caso anterior, o termo cúbico crítico aqui desestabiliza a equação [19]. Agora os pontos fixos $x^* = \pm\sqrt{r}$ são instáveis. Além disso, existem abaixo da bifurcação, e $x^* = 0$ torna-se estável [19]. O diagrama de bifurcação é representado na Figura (2.10).

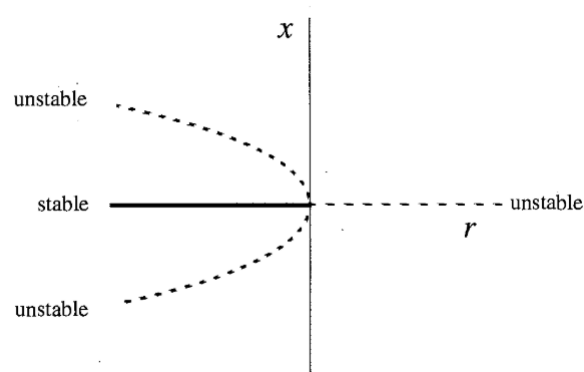


Figura 2.10 Diagrama da bifurcação tridente subcrítica do sistema (2.28), onde o *eixo x* representa o parâmetro r e o *eixo y* a variável o ponto de equilíbrio. Extraído de [19].

Bifurcações em Sistemas Bidimensionais

Assim como para o caso unidimensional, temos essas mesmas bifurcações para todas as dimensões. Em um sistema dinâmico bidimensional as formas canônicas dessas bifurcações são:

- **Sela-nó**

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2; \\ \dot{y} = -y \end{cases}; \quad (2.29)$$

- **Transcrítica**

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2; \\ \dot{y} = -y \end{cases}; \quad (2.30)$$

- **Tridente Supercrítica**

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3; \\ \dot{y} = -y \end{cases}; \quad (2.31)$$

- **Tridente Subcrítica**

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3, \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad (2.32)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

Essas bifurcações ocorrem quando algum autovalor da matriz jacobiana do sistema se anula e esses tipos de bifurcações têm como característica a colisão de pontos de equilíbrio [19] e causando a destruição e/ou mudança de estabilidade. Esses três tipos de bifurcações são os mais comuns e tradicionais, porém existem muito mais tipos de bifurcações, especialmente em dimensões superiores.

2.3 Métodos numéricos

Embora haja como resolver sistemas não-lineares e também equações diferenciais analiticamente, a maior parte dos problemas que modelam fenômenos reais, neste caso físico, não admite solução analítica ou é extremamente trabalhoso chegar até ela. São nesses casos que os métodos numéricos se fazem necessários. Apontaremos os métodos numéricos utilizados neste trabalho. Todos os métodos foram implementados utilizando a linguagem Fortran e apresentaremos nesse trabalho apenas os pseudocódigos.

2.3.1 Método Runge-Kutta de 4ª Ordem

Criado por Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta [13], os métodos Runge-Kuttas são os mais utilizados para se obter soluções aproximadas de problemas de valor inicial de sistemas de equações diferenciais ordinárias, pois é mais preciso do que outros métodos como Euler Explícito e Euler Implícito. Para resolver problemas de valor inicial (PVI) da forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}, \quad (2.33)$$

em geral os métodos Runge-Kutta explícitos têm a forma,

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m k_i f(t_{i,n}, y_{i,n}), \quad (2.34)$$

onde m é o número de estágios do método, cada $t_{i,n}$ denota um ponto na malha, $y_{i,n}$ é a aproximação da solução no ponto $t_{i,n}$ e k_i são coeficientes do método [13]. Desses métodos, o mais utilizado é o Método Runge-Kutta de 4ª ordem e 4 estágios, ou seja, o seu erro global é $O(h^4)$. Este foi o método utilizado neste trabalho.

Considere o problema de valor inicial (2.33). Aplicando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios, temos que:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha; \\ k_1 &= hf(t_i, w_i); \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right);$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right);$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3);$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.36}$$

para $i = 0, 1, \dots, N-1$, onde w_{i+1} é a solução aproximada do PVI.

A seguir, apresentaremos um pseudocódigo do método:

INPUT: número de interações N , t tempo de integração e o sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$.

OUTPUT: a solução \mathbf{y} da EDO $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$.

`h=t/N`

`do k=1,N`

`t= ih`

`k1= hF(t, y)`

`k2= hF(t+h/2, y+hk1/2)`

`k3= hF(t+h/2, y+hk2/2)`

`k4= hF(t+h, y+hk3)`

`y = y + (1/6)*(k1+2k2+2k3+k4)`

`end do`

`write y`

2.3.2 Método Newton-Rapshon

O método de Newton-Rapshon possibilita determinar as raízes de um sistema ou equação não-lineares e é o método numérico conhecido mais eficaz para esse propósito [3]. Para uma equação do tipo $f(x) = 0$, temos o seguinte processo iterativo, partindo de uma aproximação inicial x_0 , para a solução do sistema:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.37)$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Podemos generalizar o método de Newton-Rapshon para um sistemas de equações do tipo $\mathbf{F}(x) = 0$ dado por:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}. \quad (2.38)$$

Reescrevemos o processo iterativo de maneira similar ao unidimensional,

$$x_{n+1} = x_n - \text{Jac}_F^{-1}(x_n)\mathbf{F}(x_n), \quad (2.39)$$

sendo $\text{Jac}_F(x_n)$ sendo a matriz jacobiana da função $\mathbf{F}(x)$ em x_n e não-singular no ponto fixo x^* e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.1. Seja \mathbf{x}^* uma solução para o sistema não linear $\mathbf{F}(x) = 0$. Então, dado x_0 suficientemente próximo a \mathbf{x}^* , o método de Newton-Rapshon converge no mínimo quadraticamente para a solução $x_0 \rightarrow x^*$ [13].

O algoritmo utilizado é baseado no algoritmo apresentado por [3].

INPUT: x_0 como aproximação inicial e o tamanho N do vetor \mathbf{x} , o sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ e a matriz jacobiana $\text{Jac}(\mathbf{x})$

OUTPUT: a solução \mathbf{x} do sistema não linear $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$.

```

A= Jac(x(k))
b= F(x(k))
do m = 1, 100
  do i=1,N
    soma = 0
    do j=1,N
      if(j/=i) then
        soma = soma + a(i,j)*x(j)
      end if
    end do
    y(i) = (b(i)-soma)/a(i,i)
  end do
  do
    x(k+1)= x(k) - y(k)
  end do
write x

```

2.3.3 Método da Descida Mais Íngrime

Diferente do método de Newton-Rapshon, o método Steepest Descent (ou descida mais íngrime) converge linearmente, ou seja, leva mais iterações para convergir à solução do problema. No entanto, irá convergir mesmo com um aproximação inicial fraco [3]. O método determina o mínimo de uma função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de múltiplas variáveis, e podemos utilizá-lo para resolver sistemas não lineares [3], definindo a função g como

$$g(x) = \sum_{i=0}^n [f_i(x)]^2 \quad (2.40)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e f_i é cada uma das funções que definem o sistema $\mathbf{F}(x) = 0$.

Definição 2.8. (Vetor Gradiente) Seja g uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Definimos de gradiente de g no ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ como sendo

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right).$$

Por definição, a direção de maior decaimento de uma função em um ponto x é na direção oposta do seu vetor gradiente. Dado x_0 , queremos determinar x_1 ao longo do caminho em que $g(x)$ tenha o maior decaimento possível. Assim:

$$x_1 = x_0 - \alpha \nabla g(x_0) \quad (2.41)$$

para $\alpha > 0$ constante [3]. A escolha de um α para que $g(x^{(1)}) < g(x^{(0)})$ é feita a definindo a função

$$h(\alpha) = x_0 - \alpha \nabla g(x_0) \quad (2.42)$$

e escolhendo um α que a minimize [3]. Para um menor custo computacional, escolhemos $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ que esperamos estar próximo de onde o mínimo de $h(\alpha)$ ocorra. Consideramos o polinômio quadrático $P(\alpha)$ que interpola a função $h(\alpha)$ nos pontos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Definimos $\alpha^* \in [\alpha_1, \alpha_3]$ tal que $P(\alpha^*)$ seja mínimo em $[\alpha_1, \alpha_3]$ e usamos $P(\alpha)$ para aproximar o valor mínimo de $h(\alpha)$ [3]. Então, α^* é usado para determinar a nova iteração para o valor mínimo de g

$$x_1 = x_0 - \alpha^* \nabla g(x_0). \quad (2.43)$$

Como sabemos o valor de $g(x_0)$, para diminuir o custo computacional escolhemos primeiro $\alpha_1 = 0$. Determinamos α_3 tal que $h(\alpha_3) < h(\alpha_1)$ e $\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{2}$ [3].

O algoritmo utilizado é baseado no algoritmo apresentado por [3].

INPUT: x_0 como aproximação inicial, função $g(x)$, gradiente $grad(g(x))$ da função $g(x)$, N número de iterações, $n_{tamanho}$ tamanho do vetor \mathbf{x} e TOL tolerância.

OUTPUT: o mínimo \mathbf{x} da função g .

k=1

do k =1, N

```
g1=g(x(k))
z= grad(g(x(k)))
z0=||z||
  if (z0=0) then
    print 'gradiente zero'
    stop
  else
    print x,g1
    stop
  end if
z=z/z0
alpha1=0
alpha3=1
g3= g(x-alpha3*z)
  while (g3 >= g1) do
    alpha3= alpha3/2
    g3=g(x-alpha3*z)
    if (alpha3 < TOL/2) then
      print x,g1
    end if
  end while
alpha2=alpha3/2
g2= g(x-alpha2*z)
h1= (g2-g1)/alpha2
h2=(g3-g2)/(alpha3-alpha2)
h3= (h2-h1)/alpha3
alpha0=0.5*(alpha2-h1/h3)
g0=g(x-alpha0*z)
if (g1>g3) then
  g=g3
  alpha=alpha3
else
```

```

    g=g1
    alpha=alpha1
end if
x= x-alpha*z
if (|g-g1| < TOL) then
    print x, g
    stop
end if
end do

```

2.3.4 Método da Continuação

O método da continuação é um método numérico usado para resolver sistemas de equações não-lineares. Ele é especialmente usado para problemas que envolvem um parâmetro que pode variar e alterar a solução do sistema. Este será o principal caso a ser considerado neste trabalho. Consideramos um sistema não-linear da forma:

$$\mathbf{F}(\lambda, x) = 0, \quad (2.44)$$

sendo λ é um parâmetro. Vamos assumir que x_0 é a solução para λ_0 [5]. Se as funções $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ e \mathbf{F} forem diferenciáveis então podemos derivar (2.44) em função de λ , obtendo:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x(\lambda)) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(\lambda, x(\lambda))x'(\lambda) \Rightarrow \quad (2.45)$$

$$x'(\lambda) = - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(\lambda, x(\lambda)) \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x(\lambda)) \quad (2.46)$$

em que $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ é a matriz jacobiana do sistema (2.44). Portanto, obtemos uma EDO para as novas soluções do sistema em termos do parâmetro λ , que agora se torna a variável independente da equação (2.46). Caso $Jac_F(x)$ seja singular para algum valor λ^* do parâmetro dizemos que ocorrem uma bifurcação em λ^* e, neste ponto, não é mais possível avançar a continuação.

De forma geral, um sistema de equações diferenciais que precisa ser resolvido por este método é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\lambda} = \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{d\lambda} = \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{d\lambda} = \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.47)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = -Jac(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Resolvemos esse sistema utilizando Método Runge-Kutta 4ª Ordem, escolhendo um inteiro $N > 0$ e $h = \frac{1}{N}$. Vamos denotar w_{ij} para cada $i, j = 0, 1, \dots, n$ para denotar a aproximação $x_i(\lambda_j)$ para as condições iniciais, isto é,

$$w_{1,0} = x_1(0), w_{2,0}, \dots, w_{n,0} = x_n(0). \quad (2.49)$$

Assim, obtemos a seguinte construção para o método de Runge-Kutta:

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= h\phi_i(\lambda_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}) \\ k_{2,i} &= h\phi_i(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} k_{3,i} &= h\phi_i(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}) \\ k_{4,i} &= h\phi_i(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{3,n}) \end{aligned}$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \quad (2.51)$$

em que as constantes podem ser reescritas em uma forma vetorial:

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ \vdots \\ k_{1,n} \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ \vdots \\ k_{2,n} \end{bmatrix}, k_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ \vdots \\ k_{3,n} \end{bmatrix}, k_4 = \begin{bmatrix} k_{4,1} \\ k_{4,2} \\ \vdots \\ k_{4,n} \end{bmatrix}, w_j = \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n,j} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Com a forma vetorial e pela equação (2.48) que nos dá $x(0) = x(\lambda_0) = w_0$ reescrevemos,

$$k_1 = -h [Jac(w_j + \lambda_j)]^{-1} F(w_j \lambda_j);$$

$$k_2 = -h \left[Jac \left(w_j + \frac{1}{2} k_1, \lambda_j + \frac{1}{2} k_1 \right) \right]^{-1} F \left(w_j + \frac{1}{2} k_1, \lambda_j + \frac{1}{2} k_1 \right); \quad (2.53)$$

$$k_3 = -h \left[Jac \left(w_j + \frac{1}{2} k_2, \lambda_j + \frac{1}{2} k_2 \right) \right]^{-1} F \left(w_j + \frac{1}{2} k_2, \lambda_j + \frac{1}{2} k_2 \right);$$

$$k_4 = -h [Jac(w_j + k_3, \lambda_j + k_3)]^{-1} F(w_j + k_3, \lambda_j + k_3);$$

e

$$x(\lambda_{j+1}) = w_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.54)$$

onde $x(\lambda_n)$ é a nossa aproximação para x^* [3].

A seguir iremos apresentar um pseudocódigo que é uma versão modificada do apresentado por [3], pois como não temos uma homotopia precisávamos que o parâmetro γ atualizasse o valor a cada iteração. Cada sistema linear $Ab = k_i$, com $1 \leq k \leq 4$, apresentado é resolvido por algum método para resolver sistemas lineares, como SOR, Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel [3].

INPUT: número de interações N, t tempo do integração, aproximação inicial $y(0)$ e o parâmetro inicial γ_0 , o sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ e a matriz jacobiana $\mathbf{Jac}(\mathbf{x})$

OUTPUT: a solução \mathbf{y} da EDO. $\mathbf{F}(\mathbf{x})=0$.

```
h=t/N
do k=1,N
  A=jac(y, gamma)
  b= -hdf(y, gamma)
  Ab=k1

  A=jac(y+k1/2, gamma+h/2)
  b= -hdf(y+k1/2, gamma+h/2)
  Ab=k2

  A=jac(y+k2/2, gamma+h/2)
  b= -hdf(y+k2/2, beta, ksi, ang, gamma+h/2)
  Ab=k3

  A=jac(y+k3, beta, ksi, ang, gamma+h)
  b= -hdf(y+k3, gamma+h)
  Ab=k4

  gamma= h*i
  y = y + (1/6)*(k1+2k2+2k3+k4)
end do
write y
```

Capítulo 3

Casos Elementares de Interação Entre Um Dipolo e Um Campo Externo

3.1 Bússola e analogia com um pêndulo simples

O físico Hans Christian Oersted escreveu em 1820 um artigo sobre a deflexão de uma bússola devido à presença, em suas proximidades, de um longo fio pelo qual passava corrente constante. Este trabalho deu início a ciência do eletromagnetismo [2]. Uma bússola interagindo com o campo eletromagnético da Terra é o caso mais conhecido de um problema de interação de um objeto magnético com um campo magnético externo, e é, também, o que mais se aproxima do problema de um dipolo na presença de um campo externo. Vamos considerar uma bússola plana como sendo um dipolo que interage com um campo magnético externo através de um torque magnético [4],

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{mag}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{m} = (m \cos \theta, m \sin \theta)$ é o momento de dipolo da agulha e $\mathbf{B} = (B \cos \theta^*, B \sin \theta^*)$ é o campo externo. Aqui, θ representa a orientação da bússola e θ^* é a orientação do campo

magnético. Deste modo, o torque magnético é dado por

$$\tau_{\text{mag}} = -mB \sin(\theta - \theta^*), \quad (3.2)$$

onde m é o momento de dipolo e B é a intensidade do campo magnético. De acordo com a Segunda Lei de Newton para o movimento angular (2.15), restrita ao movimento no plano, temos que:

$$\sum \tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (3.3)$$

onde I é o momento de inércia do dipolo.

Deste modo, obtemos a equação que modela esse problema é dada por

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mB \sin(\theta - \theta^*) = 0. \quad (3.4)$$

Note que este é um problema conservativo, sem perda de energia, pois não há nenhum torque que resista ao movimento da bússola.

A equação (3.4) também pode ser vista como uma equação do pêndulo. A equação do pêndulo é uma das equações não-lineares mais conhecidas, sendo dada por [19]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (3.5)$$

onde θ é o ângulo com a vertical, g é a aceleração devido à gravidade e L é o comprimento do pêndulo. Fazendo a adimensionalização dos parâmetros, considerando a frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (3.6)$$

e

$$\tilde{t} = \omega t \quad (3.7)$$

como o tempo adimensionalizado, reescrevemos a equação (3.5) como

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (3.8)$$

Agora, vamos adimensionalizar a equação (3.4), isto é, a equação que modela um dipolo sob a influência de um campo externo. Escolhemos

$$T = \sqrt{\frac{I}{mB}} \quad (3.9)$$

como escala de tempo característica, e obtemos a equação adimensionalizada

$$\ddot{\theta} + \sin(\theta - \theta^*) = 0. \quad (3.10)$$

Se considerarmos $\theta^* = 0$, a equação da bússola se iguala a equação do pêndulo.

Para estudar o problema da bússola, vamos reescrever a equação (3.10) na forma de um sistema de equações de primeira ordem. Deste modo, temos o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin(\theta - \theta^*) \end{cases}, \quad (3.11)$$

onde v é a velocidade angular da bússola. Para $\theta^* = 0$, procuramos a solução $(\tilde{\theta}, \tilde{v})$, ou seja, os pontos de equilíbrio, do sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v = 0 \\ \dot{v} = -\sin(\theta) = 0 \end{cases}. \quad (3.12)$$

Temos, resolvendo este sistema analiticamente, que os pontos de equilíbrio são $(k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois o sistema é periódico de período 2π . Restringiremos o domínio a $\theta \in [0, 2\pi)$ e, assim, tomaremos $k = 0$ e $k = 1$. Logo, os dois pontos de equilíbrio no intervalo de interesse são $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, respectivamente [19].

Para classificarmos os pontos de equilíbrio desse sistema, precisamos calcular a sua matriz jacobiana tal como vimos na seção 2.2. Assim, a matriz jacobiana do sistema é

$$\text{Jac}(\theta, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

No ponto $(0,0)$, a matriz jacobiana vale

$$\text{Jac}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

e seus autovalores são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Pela classificação de pontos de equilíbrio de sistemas lineares [19], temos que $(0,0)$ é um centro e, além disso, é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico. No ponto $(\pi,0)$,

$$\text{Jac}(\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

a matriz $\text{Jac}(\pi,0)$ tem autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e, pela classificação de pontos de equilíbrio de sistemas lineares, o ponto $(\pi,0)$ é uma sela e é hiperbólico [19]. O plano de fase do sistema (3.11) é representado na Figura (3.1), onde traçamos as trajetórias em um domínio um pouco maior que o necessário para facilitar a visualização.

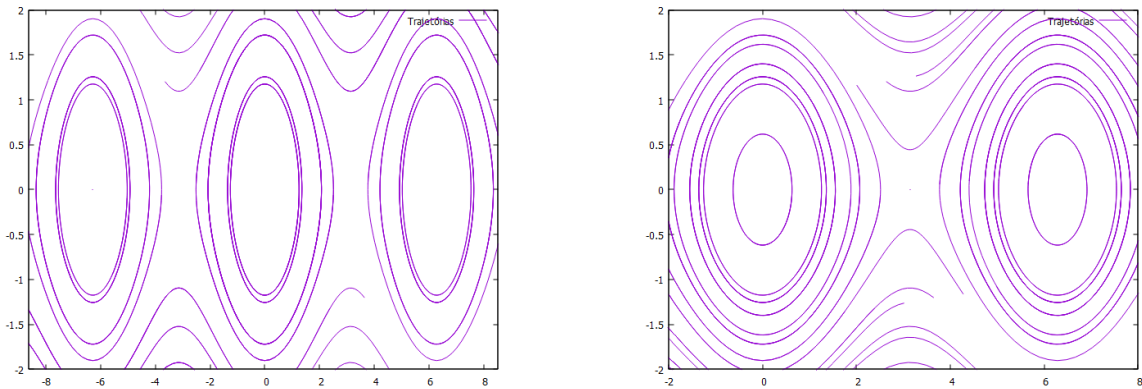


Figura 3.1 As duas imagens mostram o plano de fase do sistema (3.11), onde é possível ver seus pontos de equilíbrio do tipo centro (centro das trajetórias fechadas) e selas (zoom na Figura da direita).

No entanto, a melhor forma de representar o plano de fase de (3.11) é através do plano de fase cilíndrico [19]. Este plano de fase, ilustrado nas Figuras (3.2) e (3.3), mostra a diferença geométrica fundamental do sistema: a velocidade angular v é um número sem

periodicidade e a orientação θ é um ângulo (de período 2π) [19]. Além disso, conseguimos observar de maneira natural a periodicidade do sistema.

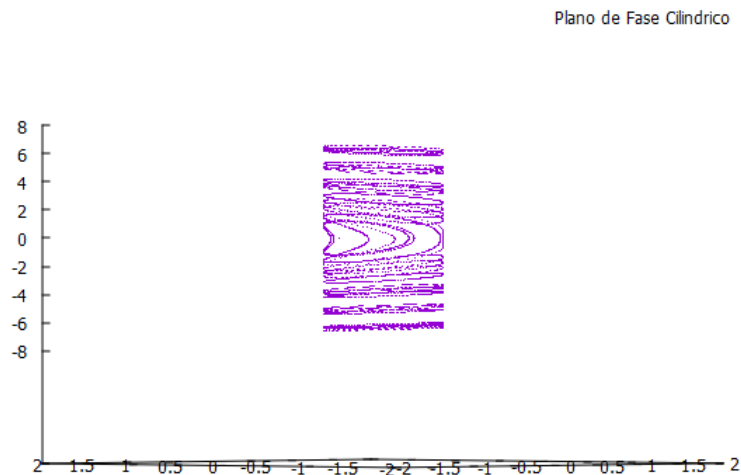


Figura 3.2 A imagem representa o plano de Fase cilíndrico do sistema (3.11).

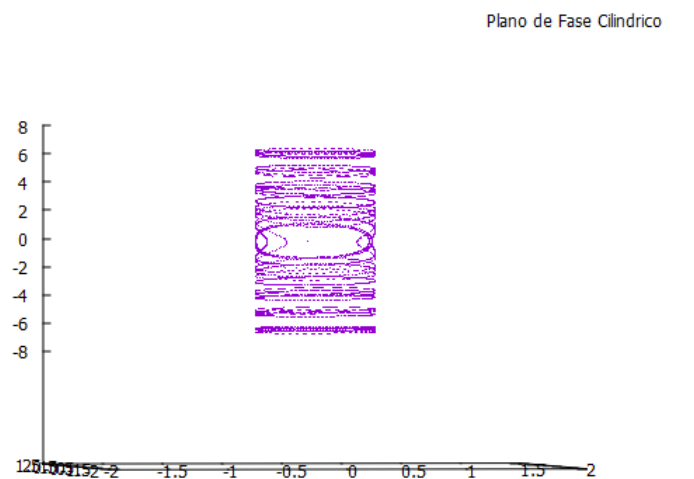


Figura 3.3 A imagem representa o plano de Fase cilíndrico do sistema (3.11).

Note que no sistema anterior (3.11) não há amortecimento, isto é, a partir do momento em que a bússola começa a oscilar ela não irá parar de oscilar, como podemos notar nas trajetórias na Figura 3.1. Além disso note que o sistema só estará no equilíbrio se já estiver no ponto de equilíbrio inicialmente. Estas características não correspondem ao que conhecemos das bússolas: elas se alinham estaticamente na direção do campo aplicado. Observe também, na Figura (3.4), que a mudança das condições iniciais muda a amplitude e frequência das trajetórias, evidenciando a não linearidade do sistema.

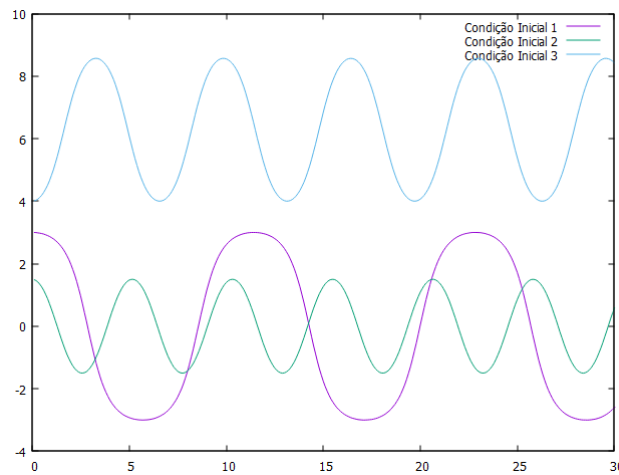


Figura 3.4 Trajetórias para diferentes condições iniciais no sistema (3.11). O eixo x representa o tempo e o eixo y a orientação θ .

3.1.1 Sistema amortecido: uma bússola mais realista

Para modelar uma bússola mais realista, vamos considerar um amortecimento viscoso linear, proporcional à velocidade de rotação da bússola, em que ξ é a constante de amortecimento. Este amortecimento causará um torque na bússola dado por:

$$\tau_{amort} = -\xi \dot{\theta} \quad (3.16)$$

Desta forma, a equação (3.10) aplicada a este sistema é reescrita como:

$$\ddot{\theta} + \xi \dot{\theta} + \sin(\theta - \theta^*) = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) pode ser reescrita como um sistema de 1^a ordem:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin(\theta - \theta^*) - \xi v \end{cases} \quad (3.18)$$

Para $\theta^* = 0$, ainda temos os mesmos pontos de equilíbrio $(\pi, 0)$ e $(0, 0)$ no intervalo $[0, 2\pi)$. Com o amortecimento, o ponto $(0, 0)$ torna-se um espiral estável, embora o determinante da matriz jacobiana continue o mesmo obtido quando $\xi = 0$. Essa mudança acontece pois $(0, 0)$ é um ponto não-hiperbólico. Esse comportamento é diferente do comportamento do ponto $(\pi, 0)$ que continua sendo uma sela, pois nenhum dos autovalores da matriz jacobiana nesse ponto tem parte real zero.

3.1.2 Diferenças entre a interação de um dipolo com um campo externo homogêneo e com outro dipolo

Suponha os dois seguintes casos:

1. Um dipolo livre para girar na presença de um campo externo;
2. Um dipolo livre para girar na presença de um outro dipolo fixo.

Na Figura (3.5), para a mesma condição inicial, traçamos a evolução de um dipolo móvel na presença de um dipolo fixo e de um campo externo, ambos com a mesma orientação θ^* . No primeiro caso, o dipolo sofre um torque do campo externo dado por [4]

$$\boldsymbol{\tau}_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{B} = (b \cos \theta^*, b \sin \theta^*) \quad (3.20)$$

é o campo externo e

$$\mathbf{m} = (m \cos \theta, m \sin \theta) \quad (3.21)$$

o momento magnético do dipolo livre para girar. No segundo caso, o dipolo livre para girar sofre o torque magnético do dipolo fixo definido por [4]

$$\boldsymbol{\tau}_{mag} = \mathbf{m}_f \times \mathbf{B}_{dip}, \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{B}_{dip} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \left[(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{m}}{3} \right] \quad (3.23)$$

é o campo magnético do dipolo fixo e \mathbf{m} o momento magnético do dipolo fixo. Como os campos magnéticos são diferentes, o sistema resulta em trajetórias diferentes, embora a condição inicial e a orientação do campo externo e do dipolo fixo sejam as mesmas.

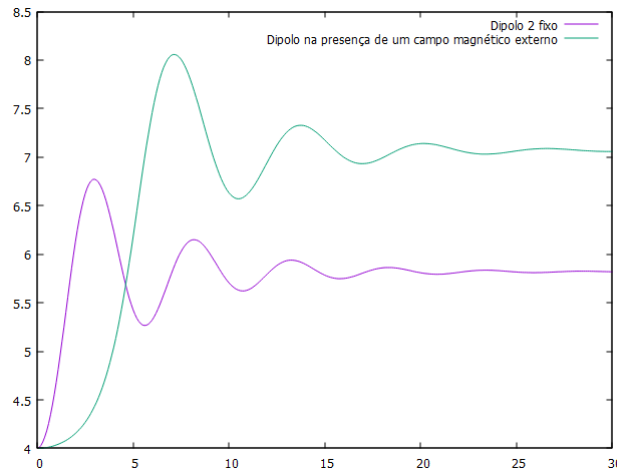


Figura 3.5 Influência do campo magnético externo e um dipolo fixo com orientação $\theta^* = \frac{\pi}{4}$ sobre um dipolo livre para girar, com a mesma condição inicial.

Contudo, para alguns ângulos tais como $\theta^* = \pi$, essas trajetórias coincidem, como podemos observar na Figura (3.6). Isso acontece pois os vetores dos campos tornam-se paralelos. Note que, considerando $\hat{\mathbf{r}} = (1, 0)$ e r , temos

$$\mathbf{B}_{dip} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left[((m \cos \pi, m \sin \pi) \cdot (1, 0))(1, 0) - \frac{1}{3}(m \cos \pi, m \sin \pi) \right], \quad (3.24)$$

isto é,

$$\mathbf{B}_{dip} = \left(-\frac{\mu_0 m}{2\pi}, 0 \right). \quad (3.25)$$

Por outro lado,

$$\mathbf{B} = (b \cos \pi, b \sin \pi) = (-b, 0). \quad (3.26)$$

Para algum K constante teremos

$$-\frac{\mu_0 m}{2\pi} = Kb. \quad (3.27)$$

Logo os vetores são paralelos e, nessa situação, o dipolo livre para girar alinha-se com o mesmo ângulo em ambos os casos, como podemos observar na Figura (3.6).

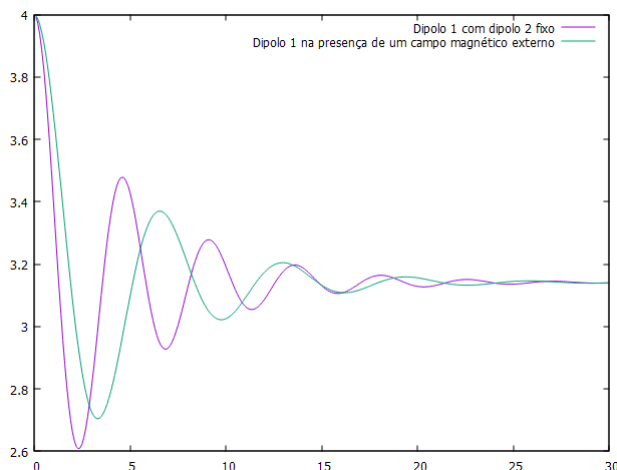


Figura 3.6 Influência do campo magnético externo e um dipolo fixo com orientação $\theta^* = \pi$ sobre um dipolo livre para girar, com a mesma condição inicial.

3.2 Dois dipolos na ausência de um campo externo

Consideramos, agora, dois dipolos livres para girar, restritos ao plano, com o dipolo 1 localizado na origem O do sistema de coordenadas. A reta que une os dipolos 1 e 2 é o eixo x , e o vetor \hat{r} é o vetor posição unitário, tal como visto na Figura (3.7). Os ângulos θ_1 e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de rotação dos dipolos 1 e 2 em relação ao eixo x do sistema de coordenadas. O sistema tem um amortecimento ξ proporcional à velocidade angular dos dipolos, isto é, existe uma resistência ao movimento de rotação dos dipolos causada, por

exemplo, pelo meio em que os dipolos estão imersos ou apoiados. Esta resistência causa um torque que afeta o movimento de rotação dos dipolos, como vimos na seção 3.1.

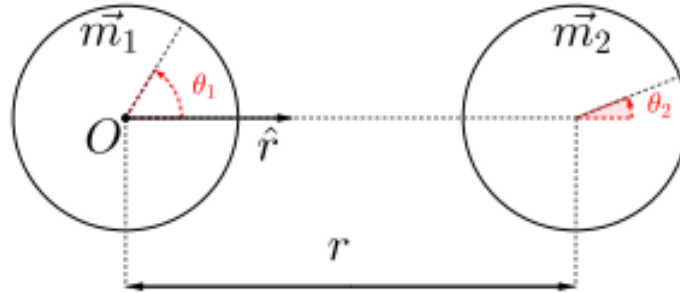


Figura 3.7 Dois dipolos magnéticos com momentos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 separados a uma distância r , onde \hat{r} é o vetor posição unitário e θ_1 e θ_2 são respectivamente os ângulos de rotação do dipolo 1 e 2. Figura extraída de [17].

3.2.1 Formulação matemática

Como exposto anteriormente, utilizamos a equação (2.3) para descrever o campo magnético de um dipolo. Seja então \mathbf{B}_{12} o campo magnético do dipolo 1 interagindo com o dipolo 2 e \mathbf{B}_{21} o campo magnético do dipolo 2 interagindo com o dipolo 1. Desta forma, temos as seguintes relações:

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^2} \left[(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{r}) - \frac{\mathbf{m}_1}{3} \right], \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^2} \left[(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{r}) - \frac{\mathbf{m}_2}{3} \right]. \quad (3.29)$$

Consideramos que os momentos magnéticos dos dipolos 1 e 2 são, respectivamente:

$$\mathbf{m}_1 = (m_1 \cos \theta_1, m_1 \sin \theta_1), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{m}_2 = (m_2 \cos \theta_2, m_2 \sin \theta_2). \quad (3.31)$$

Utilizando a lei de Biot-Savot como lei de interação eletromagnética entre dipolos magnéticos [17], obtemos as seguintes relações para o torque [4]:

$$\boldsymbol{\tau}_{mag}^1 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{B}_{21}, \quad (3.32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{mag}^2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_{12}. \quad (3.33)$$

As relações são, respectivamente, o torque magnético $\boldsymbol{\tau}_{mag}^1$ referente ao torque do dipolo 2 no dipolo 1 e, analogamente, $\boldsymbol{\tau}_{mag}^2$ é o torque magnético do dipolo 1 no dipolo 2. Além disso, como o sistema não é conservativo, temos o torque de atrito em cada dipolo definido por

$$\tau_{atr}^1 = -\xi \dot{\theta}_1, \quad (3.34)$$

$$\tau_{atr}^2 = -\xi \dot{\theta}_2. \quad (3.35)$$

Utilizando a segunda Lei de Newton para o momento angular, o sistema é descrito como

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum \tau_i, \quad (3.36)$$

para $i \in \{1, 2\}$, em que τ_i denota o torque agindo no dipolo i . Deste modo, o balanço dos torques do sistema para cada dipolo i é

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum \tau_i = \boldsymbol{\tau}_{mag}^i + \tau_{atr}^i = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}_{ij} - \xi \dot{\theta}_i. \quad (3.37)$$

Para o dipolo 1 (análogo para o dipolo 2), temos que

$$\boldsymbol{\tau}_{mag}^1 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{B}_{12} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^2} \left[(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{r}) - \frac{1}{3} \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \right], \quad (3.38)$$

de onde obtemos que

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^2} (2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) - \xi_1 \dot{\theta}_1. \quad (3.39)$$

A equação para o dipolo 2 é análoga à equação (3.39). Desta forma, obtemos o sistema não linear acoplado para o movimento dos dipolos:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^2} (2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) - \xi_1 \dot{\theta}_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^2} (2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) - \xi_2 \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.40)$$

Definimos

$$\alpha = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^2} \quad (3.41)$$

como o parâmetro de interação dipolo-dipolo,

$$\beta_i = \frac{\alpha}{I_i} \quad (3.42)$$

como o parâmetro normalizado de interação dipolo-dipolo e

$$\xi_i = \frac{\xi}{I_i} \quad (3.43)$$

como o coeficiente de dissipação de energia, para $i \in \{1, 2\}$.

3.2.2 Adimensionalização

Para simplificarmos a análise do problema, foi feita uma adimensionalização do sistema (3.40). Temos o objetivo de adimensionalizar a variável do tempo t , pois as variáveis θ_i , para $i \in \{1, 2\}$, já são adimensionais. Escolhendo uma escala característica de tempo T , definimos

$$\ddot{\theta}_i = \frac{d^2}{d(tT)^2}, \quad (3.44)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{d}{d(tT)}.$$

Escrevendo, então, as equações do sistema (3.40), na variável adimensionais, obtemos:

$$\frac{1}{T^2}\ddot{\theta}_i + \beta_i(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + \frac{\xi_i}{T}\dot{\theta}_i = 0, \quad (3.45)$$

$$\ddot{\theta}_i + T^2\beta_i(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + T\xi_i\dot{\theta}_i = 0. \quad (3.46)$$

É necessário fazer uma análise dimensional dos parâmetros β_i e ξ_i . Deste modo, obtemos que

$$[\beta_i] = \left[\frac{\alpha}{I_i} \right] = \left[\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3 I_i} \right] = \frac{1}{s^2}, \quad (3.47)$$

$$[\xi_i] = \left[\frac{\xi}{I_i} \right] = \frac{1}{m^2},$$

Após a análise, escolhemos a escala de tempo característica $[T]$, de tal forma que o parâmetro β_i adimensionalizado seja unitário, isto é:

$$\beta_1^* = T^2\beta_1 = 1, \quad (3.48)$$

onde T é definido por

$$T = \sqrt{\frac{1}{\beta_i}} = \sqrt{\frac{\alpha}{I_i}}. \quad (3.49)$$

Assim, o parâmetro ξ_i adimensionalizado é

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{I_1} \sqrt{\frac{\alpha}{I_1}} = \frac{\xi_1}{I_1} \sqrt{\frac{1}{\beta_1}}, \quad (3.50)$$

para $i \in \{1, 2\}$. Reescrevemos as equações que descrevem o sistema (3.40) como:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + \xi_1^* \dot{\theta}_1 & = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \beta_2^* (2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \xi_2^* \dot{\theta}_2 & = 0 \end{cases}. \quad (3.51)$$

Neste trabalho, consideramos apenas dipolos idênticos logo, $\beta_2^* = 1$, $\xi_1^* = \xi_2^*$ e $I_1 = I_2$.

3.2.3 Pontos de equilíbrio

Ao trabalharmos com sistemas dinâmicos, preferimos trabalhar com sistemas de 1ª ordem. Desta forma, podemos escrever o sistema (3.51) como um sistema de quatro equações:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = v_1 \\ \dot{\theta}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = -(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) - \xi^* v_1 \\ \dot{v}_2 = -(2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) - \xi^* v_2 \end{cases}, \quad (3.52)$$

onde v_i é a velocidade angular do dipolo i , para $i \in \{1, 2\}$.

Dada a definição de ponto de equilíbrio, procuramos as soluções estacionárias do sistema (3.52). Os pontos de equilíbrio podem ser descritos, também, como as interseções das equações $\dot{v}_1 = 0$ e $\dot{v}_2 = 0$, representadas na Figura (3.8). Note que no equilíbrio, $\dot{v}_1, \dot{v}_2 = 0$, pois o sistema é amortecido. Restringimos nosso espaço de configurações a $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ devido à periodicidade do problema, pois cada coordenada θ_1 e θ_2 tem período 2π .

Por inspeção obtemos que os pontos de equilíbrio do sistema (3.52) são:

$$(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi), (3\pi/2, 3\pi/2), (3\pi/2, \pi/2), (\pi/2, \pi/2), (\pi/2, 3\pi/2). \quad (3.53)$$

Para verificação, utilizamos os métodos numéricos de Runge-Kutta de 4ª Ordem, Newton-Raphson e Descida Mais Íngreme, expostos no Capítulo 2 nas seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, respectivamente.

Neste caso específico, para conseguirmos a convergência do método Newton-Raphson ao resolvermos o sistema linear, pois devida a matriz jacobiana o método Gauss-Seidel divergia em alguns casos, resolvemos o sistema linear resultante analiticamente e não numericamente. Utilizaremos a notação representada na Tabela (3.1) para nos referir aos pontos de equilíbrio específicos. Estes pontos aparecem na Figura (3.8) marcados nas interseções das curvas que definem \dot{v}_1 e \dot{v}_2

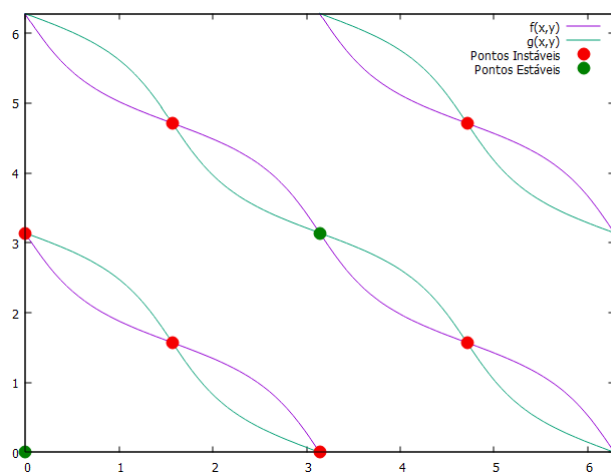


Figura 3.8 Pontos de equilíbrio do sistema (3.52) representados pela intersecção das equações $\dot{v}_1 = f(x,y) = 0$ e $\dot{v}_2 = g(x,y) = 0$. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é ilustrada pela cor dos pontos.

Tabela 3.1 Notação para representar os pontos de equilíbrio do sistema (3.52).

Notação	Ponto de Equilíbrio
$\mathcal{P}_{(0,0)}$	$(0, 0)$
$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	(π, π)
$\mathcal{P}_{(\pi,0)}$	$(\pi, 0)$
$\mathcal{P}_{(0,\pi)}$	$(0, \pi)$
$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$(\pi/2, \pi/2)$
$\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$	$(\pi/2, 3\pi/2)$
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$	$(3\pi/2, \pi/2)$
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$(3\pi/2, 3\pi/2)$

Feita a linearização do sistema, como descrito na definição (2.6), calculamos a matriz jacobiana do sistema (3.52), obtendo

$$Jac(\theta_1, \theta_2, v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & -1 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
 A_{32} &= 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\
 A_{42} &= 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\
 A_{41} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Calculando os autovalores nos pontos de equilíbrio, obtemos que apenas dois dos oito pontos são hiperbólicos. As características de cada ponto de equilíbrio são apresentadas na Tabela (3.2). Na segunda coluna desta tabela, $\mathbb{R}_-^* i$ significa que o autovalor é um número puramente complexo com parte complexa multiplicada por um número real negativo e diferente de zero, $\mathbb{R}_+^* i$ um número puramente complexo com parte complexa multiplicada por um número real positivo e diferente de zero, \mathbb{R}_+^* um número real positivo e diferente zero e \mathbb{R}_-^* número real negativo e diferente zero. Portanto, não é possível utilizar a classificação de estabilidade dos pontos de equilíbrio de sistemas lineares para seis pontos. De acordo com o trabalho de [17], $(0,0)$ e (π,π) são os únicos pontos estáveis do sistema e, através do método Runge-Kutta, com qual conseguimos achar apenas os pontos estáveis do mesmo a partir de condições iniciais quaisquer. Estabelecemos, de fato, apenas esses dois pontos como pontos de equilíbrio estáveis.

Tabela 3.2 Classificação dos pontos fixos de (3.52) de acordo com os autovalores da matriz jacobiana (3.54) e o estudo da estabilidade feito por [17].

Ponto Fixo	Autovalores	Classificação	Estabilidade
$\mathcal{P}_{(0,0)}$	$\mathbb{R}_-^* i, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Estável
$\mathcal{P}_{(0,\pi)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	Hiperbólico	Instável
$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	$\mathbb{R}_-^* i, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Estável
$\mathcal{P}_{(\pi,0)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	Hiperbólico	Instável
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Instável
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Instável
$\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Instável
$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^* i, \mathbb{R}_-^* i$	Não hiperbólico	Instável

3.2.4 Bacias de atração

Com o objetivo de caracterizar a dinâmica da interação entre os dipolos, começaremos estudando as bacias de atração do sistema. Desta forma, poderemos obter a distribuição das condições iniciais que levam para cada ponto de equilíbrio.

Definição 3.1. A bacia de atração do ponto de equilíbrio (θ_1^*, θ_2^*) é o conjunto de condições iniciais $(\theta_{10}, \theta_{20})$ tal que $(\theta_{10}, \theta_{20}) \rightarrow (\theta_1^*, \theta_2^*)$ quando $t \rightarrow \infty$ [19].

Para construirmos numericamente a bacia de atração do sistema (3.51) utilizamos uma malha de 81×81 (6561) pontos na região $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. De acordo com [17], os pontos $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ são os pontos estáveis do sistema, sendo os demais instáveis. Isso é uma das razões pelas quais a bacia de atração é referente apenas a esses dois pontos, como podemos observar na Figura (3.9), e de fato, não conseguimos identificar pontos que converjam para os pontos instáveis. Estes pontos, por serem instáveis, são em geral inacessíveis em todo o plano de configurações iniciais, mas podem ser acessíveis por uma direção específica do plano de configurações, como no caso dos pontos de equilíbrio tipo sela [17]. Desta forma, seria possível encontrar condições iniciais que pertencem às direções estáveis das selas do problema, tal como no trabalho de [17]. Porém, não conseguimos reproduzir estes resultados neste trabalho.

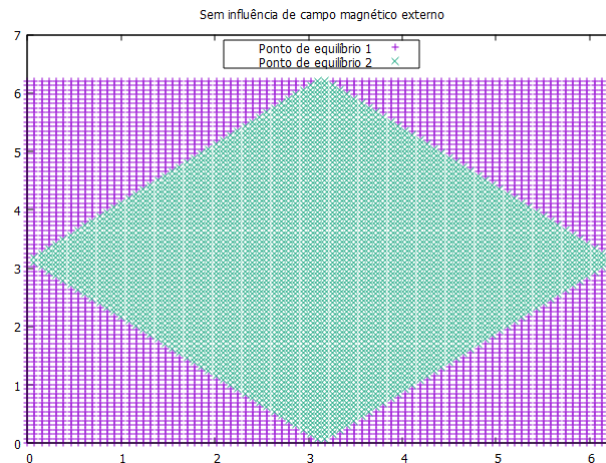


Figura 3.9 Bacia de atração do sistema (3.52), onde $\mathcal{P}_{(0,0)}$ é o ponto de equilíbrio 1 e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ o ponto de equilíbrio 2.

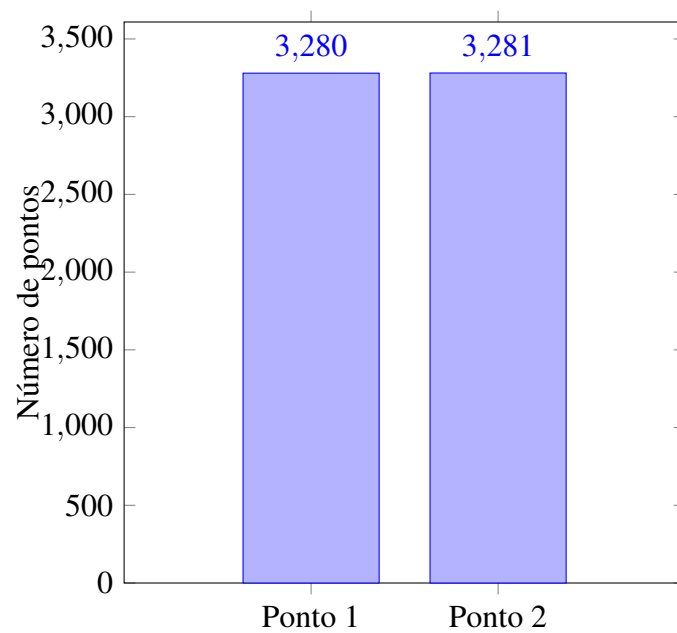


Figura 3.10 Quantidade de condições iniciais que convergem para os pontos de equilíbrio, sendo $\mathcal{P}_{(0,0)}$ o Ponto 1 e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ o Ponto 2.

A distribuição dos pontos que compõem a bacia de atração é similar para os pontos de equilíbrio, tal como exposto na Figura (3.10), na qual observamos que 3280 das condições iniciais da malha vão para $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e 3281 vão para $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$.

Capítulo 4

Dois Dipolos na Presença de Um Campo Externo

4.1 O problema

Suponhamos que o sistema (3.52), descrito no capítulo anterior, esteja sujeito a um campo externo homogêneo \mathbf{B} , como representado na Figura (4.1), aplicado com uma orientação θ^* , isto é,

$$\mathbf{B} = (b \cos \theta^*, b \sin \theta^*). \quad (4.1)$$

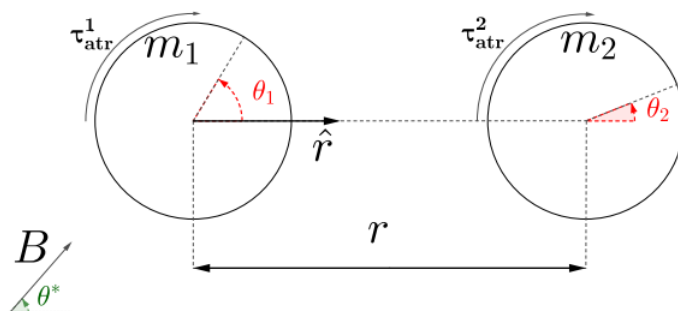


Figura 4.1 Dois dipolos magnéticos com momentos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 com ângulos de rotação θ_1 e θ_2 , respectivamente, separados a uma distância r , onde \hat{r} é o vetor posição unitário, na presença de um campo externo \mathbf{B} com direção θ^* [17].

Cada dipolo está sujeito a um torque externo vindo da ação do campo externo. Os dipolos sofrem um torque magnético do campo externo dado por

$$\tau_{mag}^{ext} = |\mathbf{m}_i \times \mathbf{B}| = m_i b \sin(\theta^* - \theta_i). \quad (4.2)$$

Deste modo, o balanço dos torques do sistema para cada dipolo i é

$$\begin{aligned} I_i \ddot{\theta} &= \sum \tau_i = \tau_{mag}^i + \tau_{mag}^{ext} + \tau_{atr}^i \\ &= \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{m}_i \times \mathbf{B} - \xi \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde τ_{mag}^{ext} é o torque magnético externo do campo em cada dipolo, τ_{atr}^i é o torque de atrito e τ_{mag}^i é torque de interação entre os dipolos, com $i \in \{1, 2\}$.

Seguindo o mesmo procedimento para dedução da equação do movimento dos dipolos calculado no capítulo anterior, determinamos

$$\gamma_i = \frac{m_i b}{I_i} \quad (4.4)$$

de parâmetro de intensidade do campo externo. Assim como feito para o sistema na ausência do campo externo, precisamos incluir esse parâmetro na adimensionalização. Fazendo a análise dimensional de γ_i ,

$$\gamma_i = \left[\frac{m_i b}{I_i} \right] = \frac{1}{s^2}. \quad (4.5)$$

Utilizando a escala de tempo característica (3.49),

$$[T] = \sqrt{1/\beta_i}, \quad (4.6)$$

temos que o parâmetro adimensionalizado γ_i^* é

$$\gamma_i^* = \frac{\gamma_i}{\beta_i}. \quad (4.7)$$

Como os dipolos são idênticos, $\gamma_1^* = \gamma_2^*$, denominaremos a intensidade do campo apenas de γ^* .

Desta forma, o novo sistema de equações governantes é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = & v_1 \\ \dot{\theta}_2 = & v_2 \\ \dot{v}_1 = & -(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + \gamma^* \sin(\theta^* - \theta_1) - \xi^* v_1 \\ \dot{v}_2 = & -(2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \gamma^* \sin(\theta^* - \theta_2) - \xi^* v_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

A presença do campo externo homogêneo \mathbf{B} no sistema (3.52) faz com que ocorram bifurcações. Inicialmente, para o sistema sem o campo externo aplicado (3.52), ou seja, $\gamma^* = 0$, temos a existência de oito pontos de equilíbrio. Neste trabalho, procuramos entender as bifurcações que ocorrem nesse novo sistema (4.8) à medida em que variamos os parâmetros θ^* e γ^* , isto é, a orientação e a intensidade do campo externo, respectivamente.

4.2 Evolução para os pontos de equilíbrio

Utilizando o método Runge-Kutta de 4ª Ordem, descrito na seção 2.3.1, para determinar os equilíbrios estáveis, construímos as bacias de atração em uma malha de 81×81 (6561) pontos na região $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, para diferentes orientações e intensidades do campo. Com isso, compreenderemos o comportamento dos pontos de equilíbrios na presença do campo.

Para a construção das bacias de atração, consideramos três casos:

1. Orientação θ^* do campo igual à orientação dos dipolos em um ponto estável na ausência de campo, ou seja, $\theta^* = 0$ ou $\theta^* = \pi$;
2. Orientação θ^* do campo igual à orientação dos dipolos em um ponto instável na ausência de campo, ou seja, $\theta^* = \pi/2$ ou $\theta^* = 3\pi/2$;
3. Orientação θ^* em um ângulo qualquer, diferentemente dos anteriores.

No primeiro caso, consideramos $\theta^* = 0$ e as intensidades $\gamma^* = 0.3$, $\gamma^* = 0.5$ (Figura 4.2), $\gamma^* = 0.9$ (Figura 4.3), $\gamma^* = 1.2$ (Figura 4.4), e $\gamma^* = 2.01$ (Figura 4.5). A distribuição da bacia de atração é ilustrada na Figura (4.6) para $\gamma^* = 0.3$, na Figura (4.7) para $\gamma^* = 0.5$, na Figura (4.8) para $\gamma^* = 0.9$ e na Figura (4.9) para $\gamma^* = 1.2$. À medida em que aumentamos a intensidade do campo externo, as condições iniciais que iam para o Ponto de Equilíbrio 2, neste caso $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, começam a ir para o Ponto de Equilíbrio 1, $\mathcal{P}_{(0,0)}$, até que o ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ não é mais estável e, portanto, não é mais possível obter pelo método Runge-Kutta. Note que, quando isto acontece, todas as 6561 condições iniciais testadas tendem para o ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$.

Na intensidade $\gamma^* = 0.9$, podemos observar na Figura (4.3) uma mudança significativa na forma da bacia de atração e, também, que ela ocorre de maneira simétrica. Na intensidade $\gamma^* = 1.2$, ilustrada na Figura (4.4), apenas 30 pontos das configurações iniciais convergem para o ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ e estes pontos estão na reta $\theta_1 = \theta_2$.

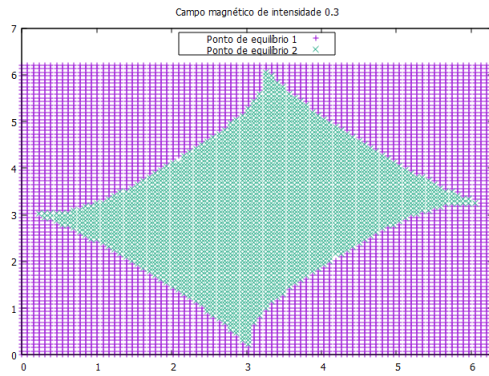


Figura 4.2 Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 0.5$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$.

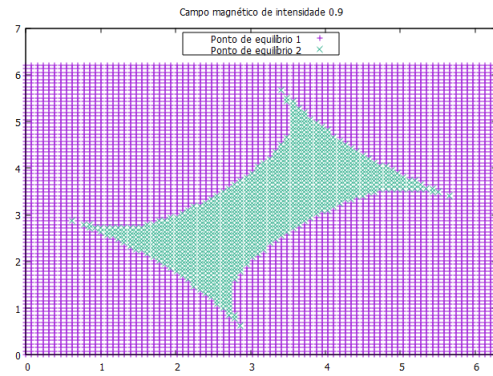


Figura 4.3 Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 0.9$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$.

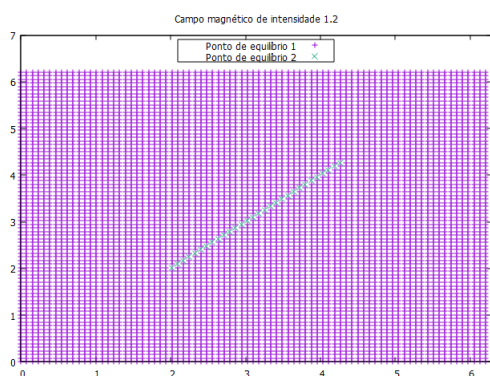


Figura 4.4 Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 1.2$. O Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$.

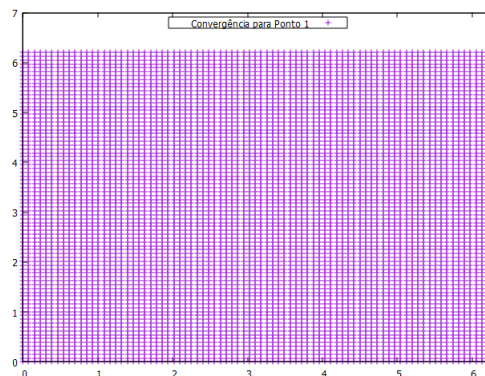


Figura 4.5 Bacia de atração do sistema (4.8) com $\theta^* = 0$ e $\gamma^* = 2.01$. Onde o Ponto de Equilíbrio 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto de Equilíbrio 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$.

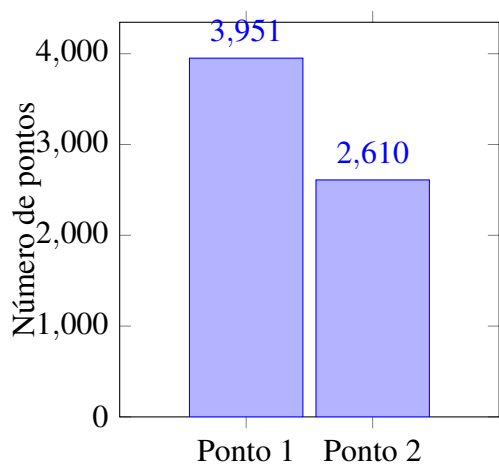


Figura 4.6 Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.3$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$

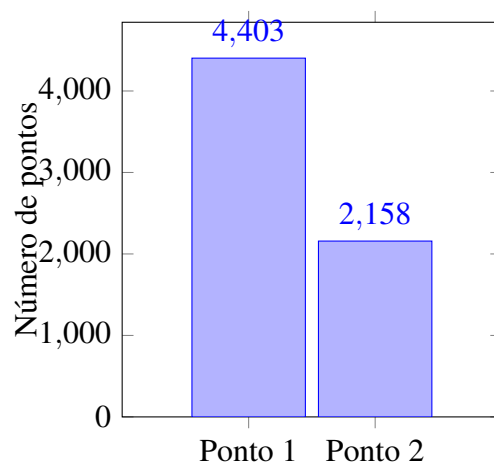


Figura 4.7 Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.5$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$

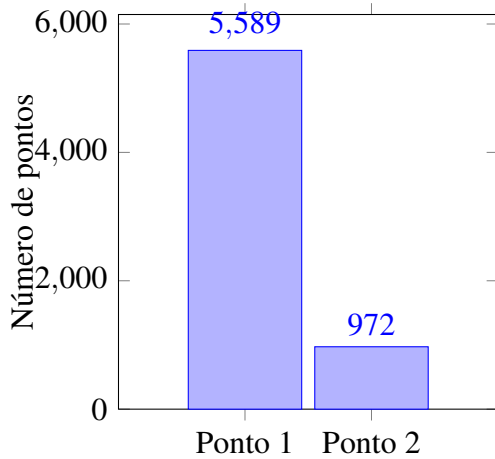


Figura 4.8 Campo magnético externo de intensidade $\gamma^* = 0.9$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$

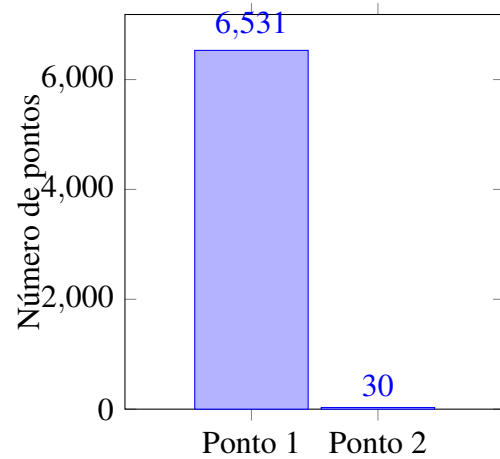


Figura 4.9 Campo magnético externo de intensidade $\gamma_c^{**} = 1.2$. O Ponto 1 é $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e o Ponto 2 é $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$

Nos próximos casos que analisamos, à medida em que aumentamos γ^* , os pontos de equilíbrio também mudam. Por esta razão, nomearemos de Ponto A e Ponto B os novos pontos de equilíbrio derivados de $(0,0)$ e (π,π) respectivamente, ou como na notação descrita na Tabela (3.1), $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, respectivamente. Além disso, como estes novos pontos de equilíbrio foram encontrados numericamente, utilizaremos apenas três algarismos significativos para apresentá-los. Contudo, todas os cálculos foram realizados com precisão dupla.

No segundo caso, consideramos $\theta^* = \pi/2$. Neste caso, os dipolos se alinham ao campo, tornando o ponto $(\pi/2, \pi/2)$ o único ponto de equilíbrio estável à medida que a intensidade do campo aumenta. Na Figura (4.10) temos a dinâmica de atração para $\gamma^* = 0.6$, como os novos pontos de equilíbrio $A=(0.20, 0.20)$ e $B=(2.94, 2.94)$. Na Figura (4.11), temos a bacia de atração para $\gamma^* = 1.8$, com os novos pontos de equilíbrio, $A=(0.64, 0.64)$ e $B=(2.49, 2.49)$.

No terceiro caso, consideramos uma orientação qualquer, $\theta^* = \pi/10$. Para $\gamma^* = 0.5$, os novos pontos de equilíbrio estáveis são o $A=(0.04, 0.04)$ e o $B=(3.08, 3.08)$, cuja dinâmica de atração está representada na Figura (4.12). Em $\gamma^* = 0.9$, os novos pontos de equilíbrio estáveis são o $A=(0.07, 0.07)$ e o $B=(3.01, 3.01)$ e a bacia de atração é representada na Figura (4.13). Assim como no primeiro caso, à medida em que aumentamos a intensidade do campo, o ponto A tende a se tornar o único ponto de equilíbrio estável do sistema.

Diferentemente das bacias de atração apresentadas no primeiro caso, para o segundo e terceiro casos temos uma complexidade maior. Em ambos os casos, as bacias de atração são assimétricas, podendo ser facilmente observado quando $\theta^* = \pi/2$ nas Figuras (4.10) e (4.11). Nota-se que obtemos formas totalmente diferentes do que tínhamos para a bacia de atração com $\gamma^* = 0$ e nas bacias de atração com orientação $\theta^* = 0$. Com $\theta^* = \pi/10$, a forma da bacia ainda é mais parecida com a bacia de atração com $\gamma^* = 0$ e nas bacias de atração com orientação $\theta^* = 0$, porém há perda simetria.

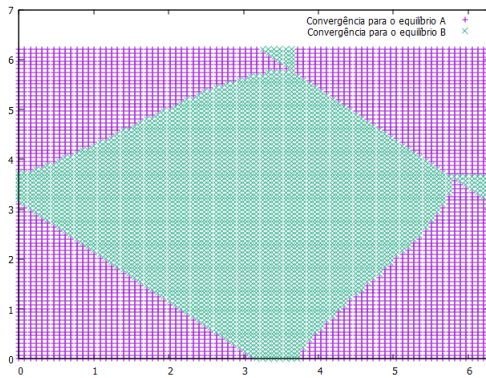


Figura 4.10 Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.6$ e $\theta^* = \pi/2$.

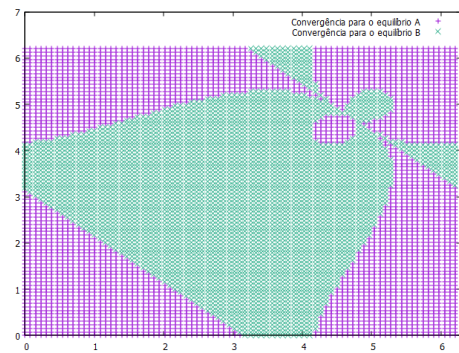


Figura 4.11 Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma_c^* = 1.8$ e $\theta^* = \pi/2$.

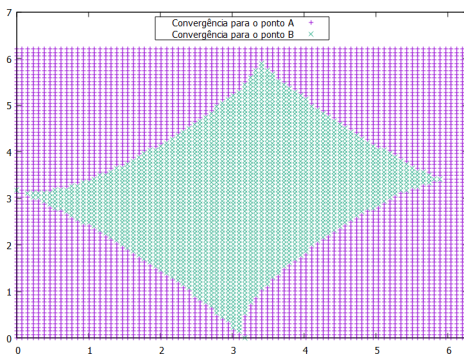


Figura 4.12 Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.5$ e $\theta^* = \pi/10$.

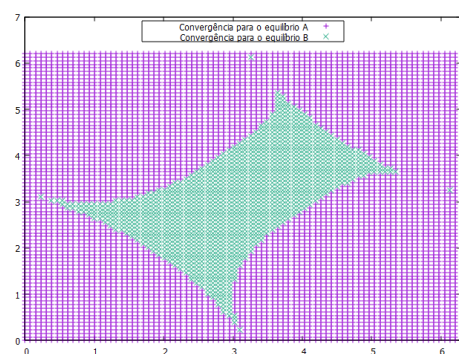


Figura 4.13 Bacia de atração do sistema (4.8) para os pontos de equilíbrio A e B em $\gamma^* = 0.9$ e $\theta^* = \pi/10$.

4.3 Bifurcações

Para encontrarmos as bifurcações que o sistema sofre à medida em que alteramos os parâmetros γ^* e θ^* , vamos usar o Método da Continuação descrito no Capítulo 2 na subseção 2.3.4. Com este método, podemos encontrar os valores críticos γ_c^* e θ_c^* nos quais as bifurcações acontecem. Além disso, com este método, podemos construir o diagrama de bifurcação do sistema. Esta tarefa, porém, não é fácil. Para construirmos os diagramas de bifurcação, apenas o Método de Continuação não é suficiente, pois quando a bifurcação acontece, a matriz jacobiana do sistema é singular e a continuação não pode ser levada adiante. Assim para a construção desses gráficos utilizamos três métodos numéricos. O primeiro é o Método da Continuação para determinar o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\gamma^* = 0$ até a primeira bifurcação. O segundo método é o Método Runge-Kutta de 4ª Ordem, utilizado para verificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados, isto é, para cada configuração do sistema, simulamos sua evolução temporal para diversas condições iniciais e verificamos para onde o sistema evoluiu. Finalmente, o Método de Newton–Raphson é usado para determinar o primeiro ponto de equilíbrio depois de alguma bifurcação, para que possamos aplicar novamente o Método da Continuação até uma nova bifurcação. Nos diagramas de bifurcação, indicamos por linha cheia os pontos estáveis e por linha tracejada os pontos instáveis. Além disso, utilizamos o gráfico das interseções das equações \dot{v}_1 e \dot{v}_2 para verificação dos resultados. Utilizamos os dados gerados através da implementação dos métodos numéricos e o software *gnuplot* para elaboração dos gráficos.

4.3.1 Bifurcações causadas pela intensidade do campo externo

A partir das bacias de atração dos três casos citados na seção anterior, já constatamos que há bifurcações causadas pela intensidade γ^* do campo externo, pois observa-se a mudança de estabilidade de alguns pontos de equilíbrio. Assim, como no estudo das bacias de atração, abordaremos os mesmos três casos. Nos casos estudados, encontramos e classificamos seis tipos de bifurcações, sendo três delas diferentes das bifurcações convencionais mencionadas no Capítulo 2.

Nos dois primeiros casos, em que o campo externo é aplicado com orientações que são as mesmas do ponto de equilíbrio do caso $\gamma^* = 0$ (ausência de campo externo), conseguimos encontrar analiticamente os pontos de bifurcação através dos autovalores da matriz jacobiana do sistema (4.8), dada por:

$$Jac(\theta_1, \theta_2, v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & -1 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_{31} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \theta^* \cos(\theta_1 - \theta^*), \\ A_{32} &= 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ A_{42} &= 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ A_{41} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \theta^* \cos(\theta_1 - \theta^*), \end{aligned} \quad (4.10)$$

e de sua condição de singularidade.

Nesses casos, é possível resolver as equações de maneira simples. Para outros casos, as bifurcações são calculadas a partir do Método da Continuação, e os valores γ_c^* serão apresentados com três algarismos significativos. Além disso, utilizaremos a notação de ponto de equilíbrio do sistema sem o campo externo (3.1) ao nos referimos aos pontos que derivam desses pontos.

Caso 1: Orientação θ^* do campo igual à orientação dos dipolos em um ponto estável na ausência de campo

Na primeira configuração do campo externo, consideramos $\theta^* = 0$ e $\theta^* = \pi$. Para ambas orientações ocorrem três bifurcações no sistema: uma em $\gamma_c^* = 1$, outra em $\gamma_c^* = 2.10$ e outra em $\gamma_c^* = 3$. Em $\gamma_c^* = 1$ e $\gamma_c^* = 3$ ocorre a destruição de pontos de equilíbrio. No entanto, em $\gamma_c^* = 2.10$, como foi citado na seção 3.2, $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(0, 0)}$ têm sua estabilidade mudada, em $\theta^* = 0$ e $\theta^* = \pi$, respectivamente, sem a destruição ou criação de novos pontos.

Para $\theta^* = 0$, essas bifurcações ocorrem no ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, como mostrado na Figura (4.14). Nesta figura, observa-se o diagrama de bifurcação dos pontos de equilíbrio que têm $\theta = \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$ quando $\gamma^* = 0$. Quando $\gamma_c^* = 1$, os pontos de equilíbrio instáveis $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$ migram na direção ao ponto de equilíbrio estável $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$. De fato, isto pode ser melhor visualizado na Figura (4.15). No ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, a primeira bifurcação que acontece é uma bifurcação tridente subcrítica, em que os dois pontos instáveis desaparecem e o ponto de equilíbrio estável se torna instável. Através da análise das bacias de atração, observadas nas Figuras (4.4) e (4.5), $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ se torna uma sela, com a única direção estável sendo a reta $\theta_1 = \theta_2$.

A segunda bifurcação acontece em $\gamma_c^* = 2.10$. O ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ deixa de ser uma sela, com uma direção estável, e passa a ser um ponto totalmente instável. Os pontos de equilíbrio $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ migram em direção do ponto de equilíbrio instável $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$. Em $\gamma_c^* = 3$, os pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ desaparecem e o ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ permanece instável, como pode ser observado nas Figuras (4.16). Esta bifurcação é muito parecida com a bifurcação do tridente, mas não é dos tipos subcrítica ou supercrítica. Batizamos esta bifurcação de tridente instável.

Para intensidades $\gamma_c^* > 3$, o sistema permanece com apenas 4 pontos de equilíbrio. Além do ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, os pontos $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ são instáveis e $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$, que não sofrem nenhuma bifurcação e continuam no mesmo ponto, independentemente da mudança da intensidade do campo externo. O mesmo acontece com o único ponto estável o ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$, como podemos ver no diagrama de bifurcações do sistema em três dimensões na Figura (4.14).

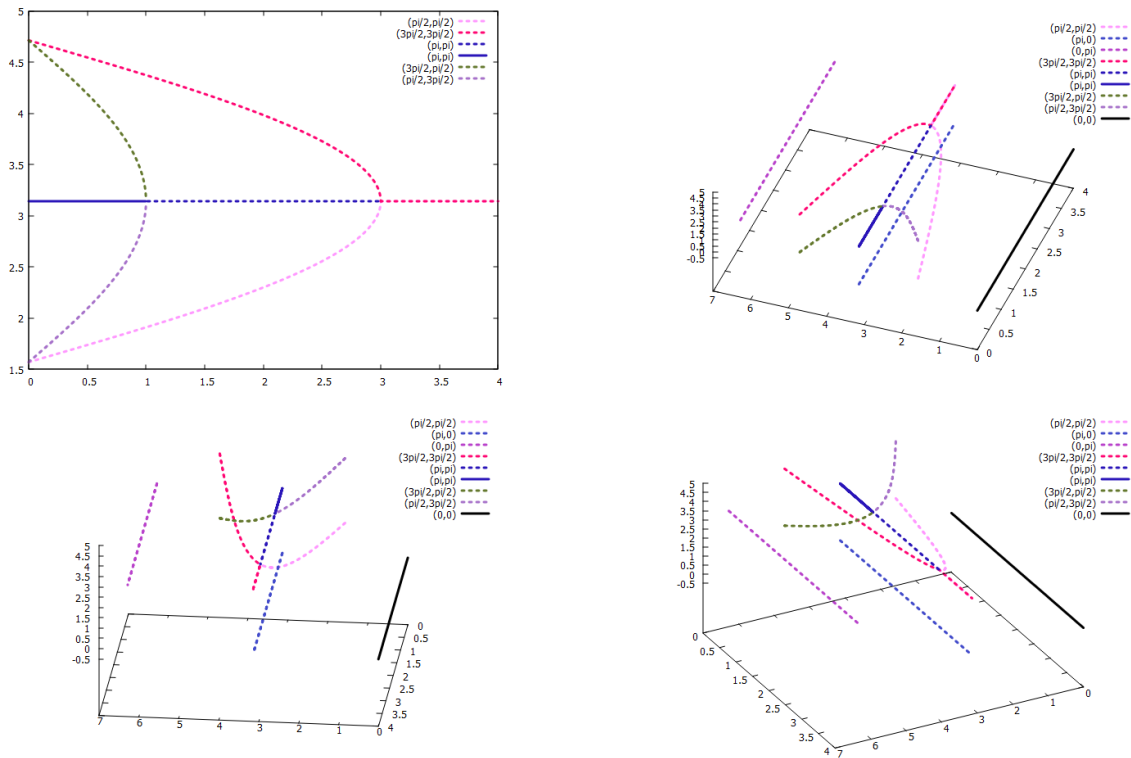


Figura 4.14 A imagem à esquerda mostra o diagrama de bifurcação do sistema, com $\theta^* = 0$, em relação ao ângulo θ_1 , onde o eixo x representa γ^* e o eixo y representa θ_1 . As imagens superior direita e inferiores são o diagrama de bifurcação do sistema em três dimensões em diferentes perspectivas, onde o eixo x, eixo da direita, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2 .

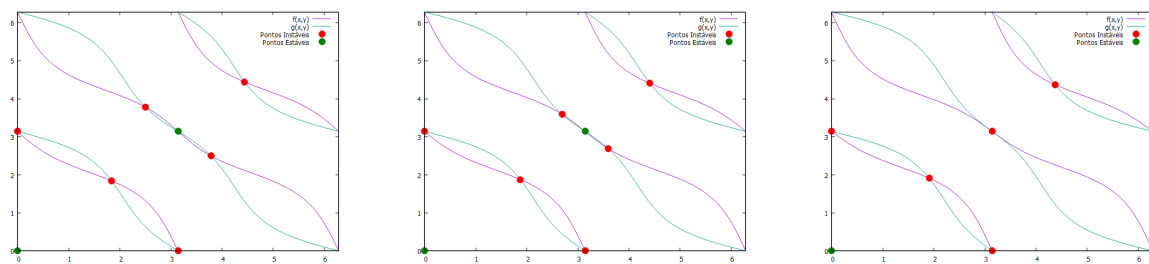


Figura 4.15 Bifurcação tridente subcrítica em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = 0$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma^* = 1$.

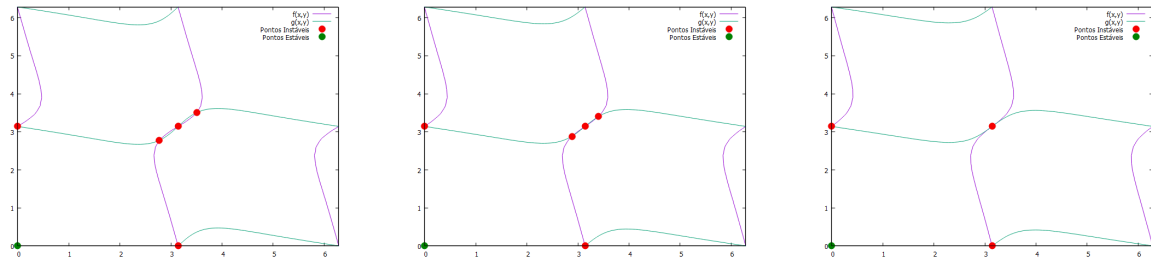


Figura 4.16 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = 0$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 3$.

Para $\theta^* = \pi$, as três bifurcações descritas anteriormente ocorrem no ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$. Em $\gamma_c^* = 1$, temos a bifurcação tipo tridente subcrítica, como visto na Figura (4.17). O ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$ colide com os pontos derivados dos pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$, tornando-se instável, e estes pontos são destruídos. Através da análise das bacias de atração, $\mathcal{P}_{(0,0)}$ se torna uma sela, com a única direção estável sendo a reta $\theta_1 = \theta_2$. Posteriormente, quando γ^* aumenta até 2.1, $\mathcal{P}_{(0,0)}$ torna-se totalmente instável. Em $\gamma_c^* = 3$, a terceira bifurcação também ocorre no ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$, onde há a colisão de 3 pontos instáveis, desaparecendo 2 deles e permanecendo $\mathcal{P}_{(0,0)}$ (instável), ocorrendo novamente a bifurcação que nomeamos de tridente instável, como ilustra na Figura (4.18). A partir dessa intensidade, o sistema permanece com apenas 4 pontos de equilíbrio, sendo o único ponto estável $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$.

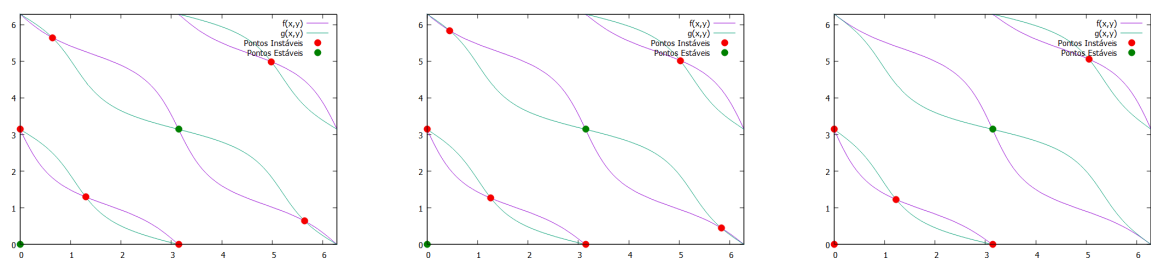


Figura 4.17 Bifurcação tridente subcrítica em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = \pi$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma_c^* = 1$.

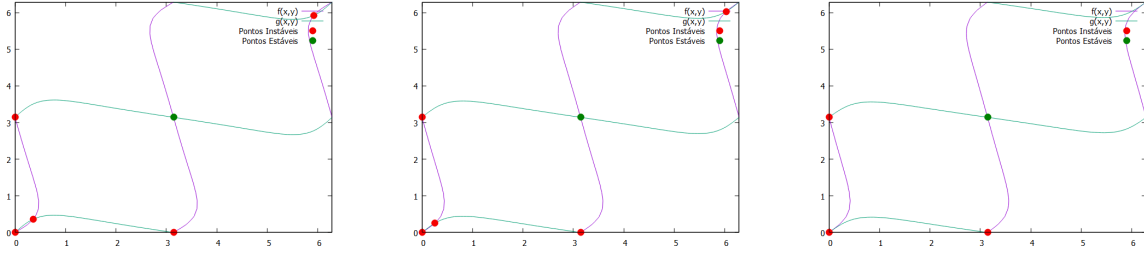


Figura 4.18 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = \pi$, onde o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma^* = 3$.

Caso 2: Orientação θ^* do campo igual à orientação dos dipolos em um ponto instável na ausência de campo

No segunda configuração de orientação do campo externo, consideramos $\theta^* = \pi/2$ e $\theta^* = 3\pi/2$. Neste caso, ocorrem duas bifurcações, uma em $\gamma_c^* = 1$ e outra em $\gamma_c^* = 3$, porém nos pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$.

Para $\theta^* = \pi/2$, em $\gamma_c^* = 1$ temos a bifurcação tridente instável, envolvendo 3 pontos instáveis, $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$, $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$. À medida em que a intensidade aumenta, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$ e $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ migram em direção ao ponto instável $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$. E em $\gamma_c^* = 1$, os três pontos colidem, restando apenas o ponto instável $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$.

Em $\gamma_c^* = 3$, temos a bifurcação tridente supercrítica, envolvendo os dois pontos estáveis do sistema, $\mathcal{P}_{(0, 0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$, e o ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$. Os pontos estáveis $\mathcal{P}_{(0, 0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$, à medida em que a intensidade aumenta, migram para o ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$. Em $\gamma_c^* = 3$, os três pontos colidem, restando apenas $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$, que deixa de ser instável e passa a ser estável.

Para $\theta^* = 3\pi/2$, em $\gamma_c^* = 1$, na Figura (4.19), temos uma bifurcação do tipo tridente instável envolvendo três os pontos instáveis: $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$, $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$. Ao aumentarmos a intensidade do campo externo, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$ e $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ se movem em direção ao ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$. Então, em $\gamma_c^* = 1$, os três pontos colidem, restando apenas o ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$.

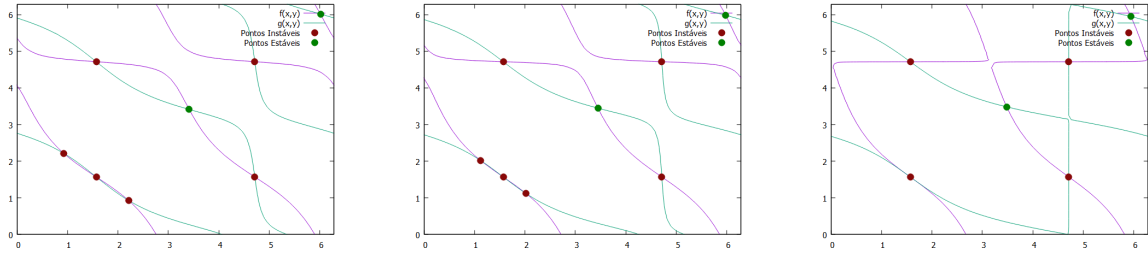


Figura 4.19 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 1$ com campo externo na orientação $\theta^* = 3\pi/2$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 0.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 0.90$ e na imagem à direita, $\gamma^* = 1$.

Em $\gamma_c^* = 3$, como pode ser observado na Figura (4.20), temos a bifurcação tridente supercrítica envolvendo os dois pontos estáveis do sistema, $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, e o ponto instável $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$. Os pontos estáveis $\mathcal{P}_{(0,0)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, à medida em que a intensidade aumenta, migram para o ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$. Em $\gamma_c^* = 3$, os três pontos colidem, restando apenas $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ que deixa de ser instável e passa a ser estável.

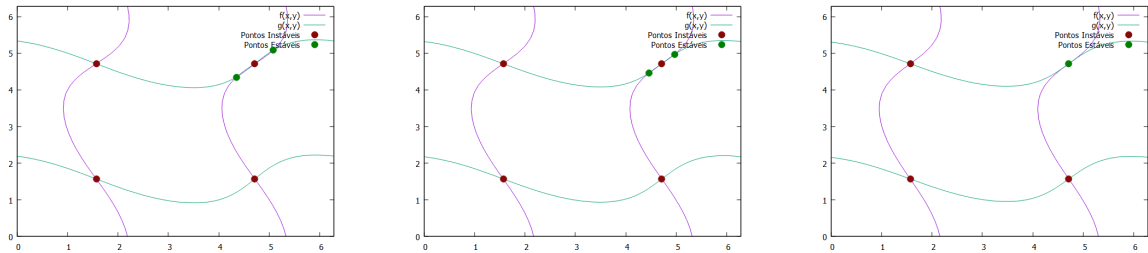


Figura 4.20 Bifurcação tridente supercrítica em $\gamma_c^* = 3$ com campo externo na orientação $\theta^* = 3\pi/2$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem à esquerda, $\gamma^* = 2.80$; na imagem do centro, $\gamma^* = 2.90$ e na imagem à direita, $\gamma^* = 3$.

Caso 3: Orientação θ^* em um ângulo qualquer

Nesta terceira configuração possível para a orientação do campo externo, θ^* pode ser qualquer ângulo não alinhado a nenhum dos pontos de equilíbrio obtidos para $\gamma^* = 0$. Agora, obtemos um tipo de bifurcação que não observamos nos casos anteriores.

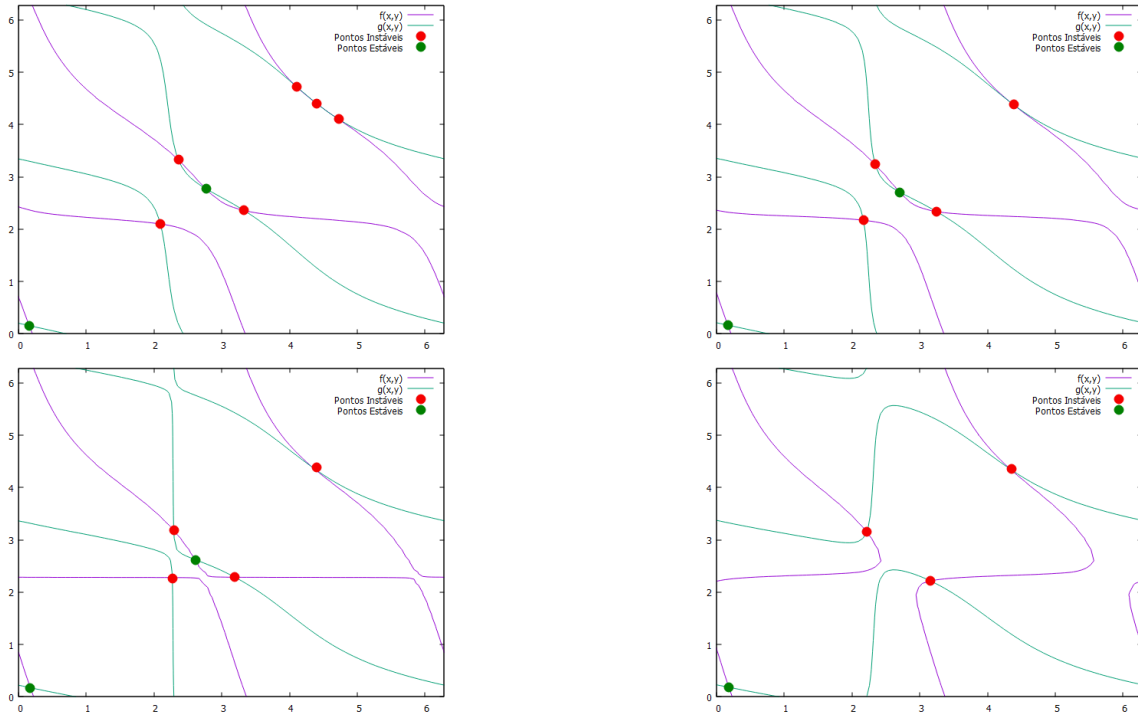


Figura 4.21 Bifurcações tridente instável (imagens superiores à esquerda e à direita) e sela-nó (imagens inferiores à esquerda e à direita), em $\gamma_c^* = 1.34$ e $\gamma_c^* = 1.65$ respectivamente, com $\theta^* = \pi/6$. Nestes gráficos, o eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na imagem superior à esquerda $\gamma^* = 1.30$, na imagem superior à direita $\gamma^* = 1.40$, na imagem inferior à esquerda $\gamma^* = 1.50$ e na imagem inferior à direita $\gamma^* = 1.60$.

Para $\theta^* = \pi/6$, por exemplo, a primeira bifurcação ocorre em $\gamma_c^* = 1.34$. Neste ponto, temos a colisão dos pontos de equilíbrio identificados como os pontos $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$, $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$, todos instáveis, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável. Esta bifurcação é do tipo tridente instável. Quando γ^* é aumentado para $\gamma_c^* = 1.65$, o ponto de equilíbrio estável originado de $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ colide com o ponto de equilíbrio instável originado de $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$. Nesta colisão, os dois pontos de equilíbrio deixam de existir. Isto é, portanto, uma bifurcação do tipo sela-nó, tal como apresentamos na seção 2.2.2 do Capítulo 2. Estas bifurcações podem ser vistas com mais detalhes nas Figuras (4.22) e (4.21).

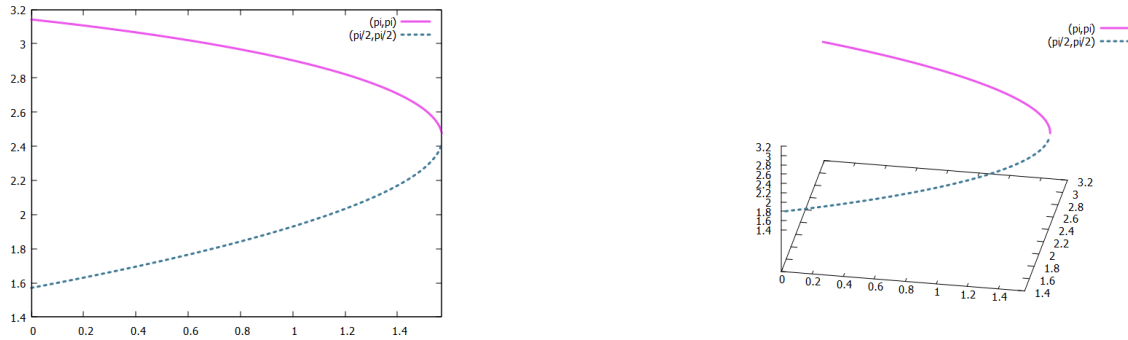


Figura 4.22 Diagrama da bifurcação sela-nó em $\gamma_c^* = 1.6$ com $\theta^* = \pi/6$. Na primeira imagem, o eixo x representa γ^* e o eixo y representa o ângulo θ_1 . Na segunda imagem, o eixo x representa o ângulo θ_1 , o eixo y, eixo da direita, representa o ângulo θ_2 e o eixo z representa γ^* .

Para $\theta^* = \pi/4$, as bifurcações ocorrem em $\gamma_c^* = 1.18$ e $\gamma_c^* = 1.51$, como visto nas Figuras (4.23) e (4.24). À medida em que a intensidade aumenta, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ e $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ migram em direção ao ponto instável $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$. E em $\gamma_c^* = 1.18$, temos uma bifurcação tridente instável. Os três pontos colidem e os pontos $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$, $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ são destruídos, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável. Quando γ^* é aumentado pra $\gamma_c^* = 1.51$, temos uma bifurcação sela-nó. O ponto estável $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ colide com o ponto instável $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$, e, conseqüentemente, há a destruição de ambos.

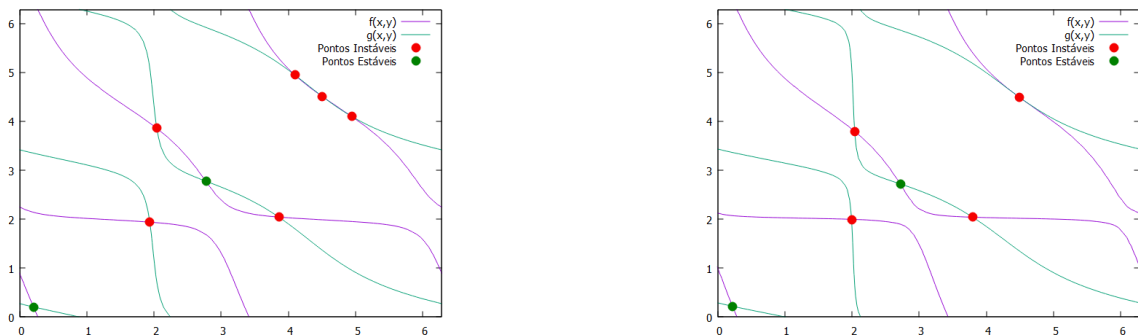


Figura 4.23 Bifurcação tridente instável em $\gamma_c^* = 1.18$ com $\theta^* = \pi/4$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 .

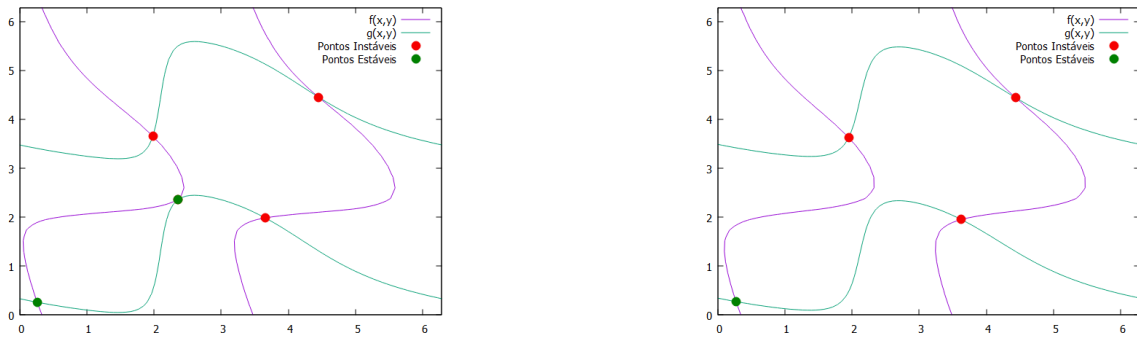


Figura 4.24 Bifurcação sela-nó em $\gamma_c^* = 1.51$, com $\theta^* = \pi/4$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 .

Um outro exemplo é obtido para $\theta^* = \pi/20$. Neste caso, ocorrem quatro bifurcações, ilustradas nas Figuras (4.25), (4.27) e (4.26). Uma delas é uma bifurcação sela-nó, que aparece agora de uma forma diferente, com a criação de dois pontos de equilíbrio.

A primeira bifurcação é uma tridente subcrítica, e ocorre em $\gamma_c^* = 1.02$ envolvendo três pontos, $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$. À medida que aumentamos a intensidade, os pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$ migram em direção ao ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$. Em $\gamma_c^* = 1.02$, os três pontos colidem e os pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$ são destruídos, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, que se torna instável. E assim, nessa intensidade, temos seis pontos de equilíbrio no sistema.

A segunda bifurcação é uma tridente instável, com diagrama de bifurcação representado na Figura (4.25), e ocorre em $\gamma_c^* = 1.60$. A bifurcação envolve três pontos instáveis $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ e $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$. À medida em que a intensidade aumenta, como podemos observar no diagrama de bifurcação na Figura (4.25), os pontos $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ se aproximam do ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$. Em $\gamma_c^* = 1.60$, três pontos colidem e os os pontos $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ são destruídos, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$, que permanece instável. Nesta intensidade, há quatro pontos de equilíbrio no sistema.

Em $\gamma_c^* = 1.78$ ocorre a bifurcação sela-nó, porém agora de maneira um pouco diferente, pois são criados dois novos pontos. Chamamos esses pontos de Ponto Novo 1 e Ponto Novo 2, representados nas Figuras (4.27) e (4.26). Deste modo, nessa intensidade, o sistema volta a ter seis pontos de equilíbrio. A última bifurcação, em $\gamma_c^* = 2.05$, é uma sela-nó instável na qual dois os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ colidem e ambos são destruídos. À

medida que a intensidade aumenta, esses dois pontos instáveis se movem um em direção ao outro e, em $\gamma_c^* = 2.05$, colidem e são ambos destruídos. A partir dessa intensidade, o sistema fica com quatro pontos de equilíbrio, sendo $\mathcal{P}_{(0,0)}$ o único estável.

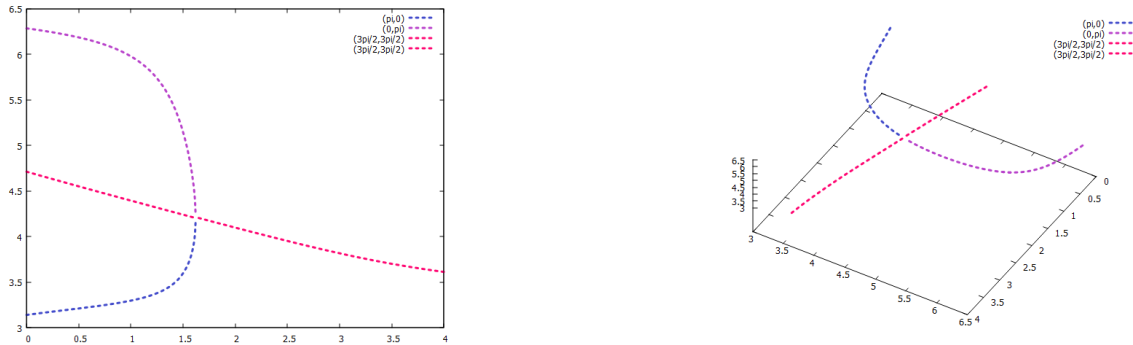


Figura 4.25 Bifurcação tridente instável com $\theta^* = \pi/20$. O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em relação a θ_1 , o eixo y representa θ_1 e o eixo x representa γ^* . O segundo gráfico representa do diagrama de bifurcação onde o eixo x, eixo da direita, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2 .

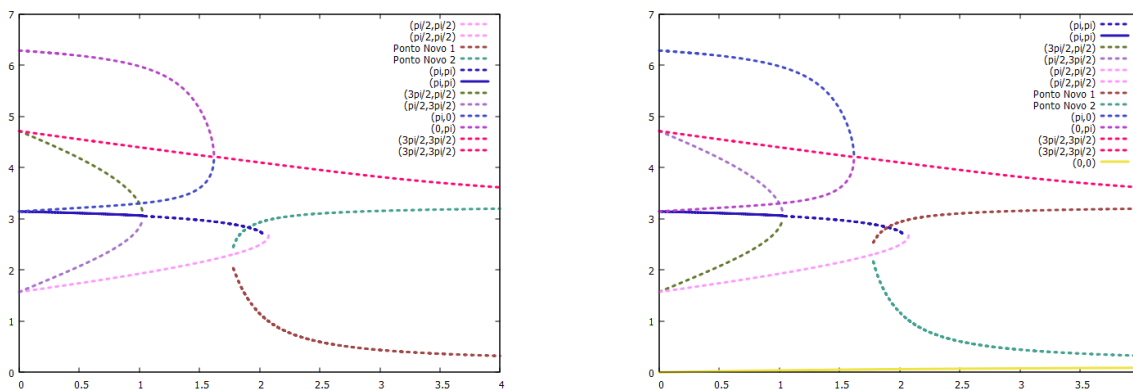


Figura 4.26 Diagrama de bifurcação com $\theta^* = \pi/20$. O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa γ^* , o eixo y representa θ_1 . O segundo gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa γ^* e o eixo y representa θ_2 .

É importante ressaltar que, na Figura (4.26), apesar de haver um cruzamento dos pontos $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ e Ponto Novo 1 e, também, dos pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ e Ponto Novo 2, esses cruzamentos não representam novas bifurcações. Esses cruzamentos se dão apenas por causa da projeção no plano do diagrama de bifurcação que é originalmente um gráfico tridimensional, como visto na Figura (4.27). Os pontos θ_1 correspondentes a estes pontos de cruzamento são

diferentes em cada um dos ramos e portanto, o cruzamento dos ramos não configura uma bifurcação.

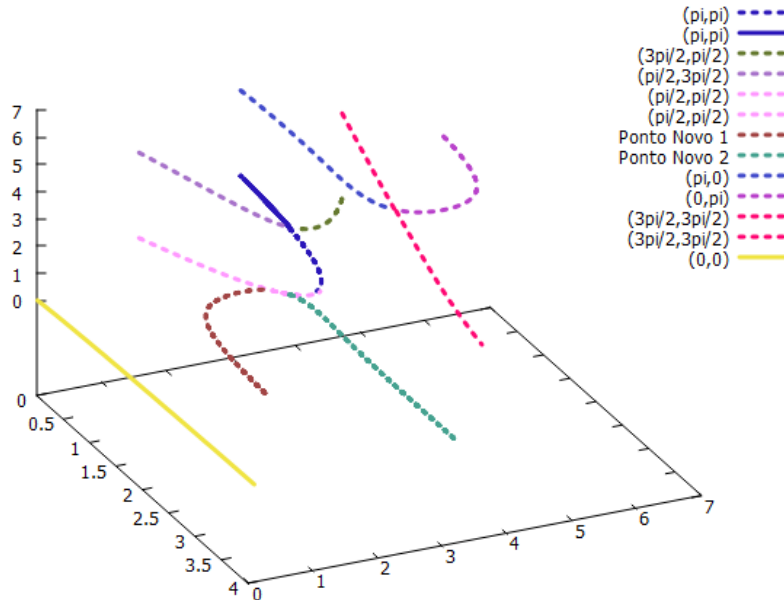


Figura 4.27 Bifurcações com $\theta^* = \pi/20$. O gráfico representa o diagrama de bifurcação. O eixo x, eixo da esquerda, representa γ^* , o eixo y representa θ_1 e o eixo z representa θ_2

Com a orientação $\theta^* = \pi/10$, temos uma situação similar à de $\theta^* = \pi/20$. Neste caso, também ocorrem quatro bifurcações mas, agora, em um mesmo γ_c^* ocorrem duas bifurcações. Em $\gamma_c^* = 1.14$, temos uma tridente subcrítica, envolvendo os pontos $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$. À medida que a intensidade aumenta, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ migram na direção do ponto estável $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$. Em $\gamma_c^* = 1.14$, os três pontos colidem, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$, que deixa de ser estável, tornando-se instável.

Em $\gamma_c^* = 1.49$, temos a bifurcação tridente instável envolvendo a colisão dos pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$, $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$. Os dois primeiros pontos são destruídos, restando apenas o ponto instável $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$.

Em $\gamma_c^* = 2.05$, ocorrem duas bifurcações: uma bifurcação sela-nó instável e uma bifurcação sela-nó. A bifurcação sela-nó instável envolve os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$, que colidem e ambos são destruídos. A sela-nó envolve a criação de dois novos

pontos, nomeados Ponto Novo 1 e Ponto Novo 2, representados na Figura (4.28). Esta complexa estrutura de bifurcação ainda precisa ser melhor investigada.

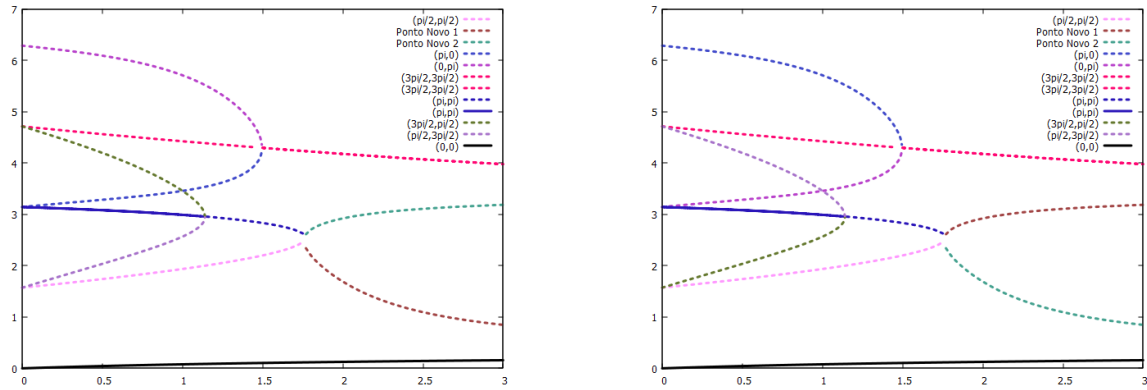


Figura 4.28 Diagrama de bifurcação com $\theta^* = \pi/10$. O eixo y representa θ_1 no primeiro gráfico e θ_2 no segundo gráfico e eixo x representa γ^* , em ambos os gráficos.

Tabelas

Pelas Tabelas (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) e (4.3) em que copilamos os resultados das bifurcações anteriores, podemos observar que as bifurcações ocorrem em conjuntos de pontos específicos como $\{\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}, \mathcal{P}_{(\pi, \pi)}\}$, $\{\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}, \mathcal{P}_{(\pi, \pi)}\}$ e $\{\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}, \mathcal{P}_{(0, \pi)}, \mathcal{P}_{(\pi, 0)}\}$. Além disso, a bifurcação mais frequente é a tridente instável, ocorrendo em todas as orientações escolhidas. Há também uma tendência do sistema ter após todas as bifurcações terem ocorrido, apenas quatro pontos de equilíbrio, sendo três instáveis e um estável.

Tabela 4.1 Bifurcação Tridente Subcrítica

θ^*	γ_c^*	Pontos Envolvidos	Final
π	1	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(0,0)}$ instável
0	1	$\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ instável
$\pi/10$	1.14	$\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ instável

Tabela 4.2 Bifurcação Tridente Supercrítica

θ^*	γ_c^*	Pontos Envolvidos	Final
$\pi/2$	3	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(0,0)} \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ estável
$3\pi/2$	3	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(0,0)} \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ estável

Tabela 4.3 Bifurcação Sela-nó Instável

θ^*	γ_c^*	Pontos Envolvidos	Final
$\pi/10$	1.75	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos destruídos
$\pi/20$	2.05	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos destruídos

Tabela 4.4 Bifurcação Sela-nó

θ^*	γ_c^*	Pontos Envolvidos	Final
$\pi/6$	1.65	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$\pi/4$	1.51	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$3\pi/4$	1.50	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$5\pi/4$	1.50	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$2\pi/3$	1.59	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(0,0)}$	Ambos são destruídos
$5\pi/6$	1.57	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$7\pi/6$	1.57	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$4\pi/3$	1.57	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$11\pi/6$	1.57	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$5\pi/3$	1.57	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$\pi/5$	1.52	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$3\pi/10$	1.51	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Ambos são destruídos
$\pi/10$	1.49	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Dois novos pontos
$\pi/20$	1.78	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	Dois novos pontos

Tabela 4.5 Bifurcação Tridente Instável

θ^*	γ_c^*	Pontos Envolvidos	Final
$\pi/2$	1	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$3\pi/2$	1	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
π	3	$\mathcal{P}_{(0,0)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(0,0)}$ instável
0	3	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ instável
$\pi/6$	1.34	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$\pi/4$	1.18	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$3\pi/4$	1.18	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$5\pi/4$	1.18	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
$2\pi/3$	1.07	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$5\pi/6$	1.34	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$7\pi/6$	1.34	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
$4\pi/3$	1.07	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
$11\pi/6$	1.34	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
$5\pi/3$	1.07	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ instável
$\pi/20$	1.6	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$\pi/10$	1.49	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$\pi/5$	1.27	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável
$3\pi/10$	1.11	$\mathcal{P}_{(\pi,0)}, \mathcal{P}_{(0,\pi)}, \mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ instável

4.3.2 Bifurcações causadas pela orientação do campo externo: resultados preliminares

Além das bifurcações causadas pela variação da intensidade γ^* do campo externo, também analisamos as bifurcações causadas pela orientação θ^* do mesmo. Diferentemente do caso da intensidade, como θ^* é um ângulo, os seus valores estão restritos ao domínio $[0, 2\pi)$. Isto se deve ao fato do sistema ser periódico de período 2π . Assim, como veremos,

pontos de equilíbrio que por ventura sejam destruídos à medida que θ^* aumenta a partir de 0, devem ser recriados para algum valor de $\theta^* < 2\pi$.

Para a análise das bifurcações em θ^* , escolhemos fixar a intensidade do campo externo após analisar as Tabelas (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) e (4.3). O valor escolhido foi $\gamma^* = 1$. Fixada a intensidade em $\gamma^* = 1$, que foi um dos únicos γ_c^* encontrados analiticamente, encontramos as bifurcações, que mostramos na subseção anterior. Temos uma bifurcação em $\mathcal{P}_{(0,0)}$, ocorrendo em $\theta_c^* = \pi$, como mostra a Figura (4.29), do tipo tridente subcrítica com a colisão dos pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(0,0)}$, com a destruição dos dois primeiros pontos e restando apenas $\mathcal{P}_{(0,0)}$ instável. De fato, a Figura (4.29) representa a evolução da bifurcação: os três pontos envolvidos $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(0,0)}$ parecem estar longe um dos outros porém, por causa da periodicidade do sistema, eles estão relativamente próximos e interagem entre si. O ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$ tende, de fato, ao ponto (0,0) à medida em que θ^* se aproxima de π . O ponto $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ se aproxima, pela parte superior, do ponto $(0, 2\pi)$, que é idêntico ao ponto (0,0). Similarmente, o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$ se aproxima do ponto $(2\pi, 0)$ que também é idêntico ao ponto (0,0). Desta forma, esses três pontos interagem, quando $\theta^* = \pi$ em uma bifurcação tridente subcrítica, restando apenas o ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$.

Chamamos atenção para o fato de que, na Figura (4.30), a bifurcação acontece no ponto $\theta_c^* = 0$. Para valores à esquerda ou à direita de 0, ou seja, próximos a 2π e logo após 0, a estrutura inicial da bifurcação é percebida, ou seja, os três pontos de equilíbrio originais voltam a existir. Parece haver duas bifurcações tridentes subcríticas consecutivas: a primeira quando θ^* varia de 2π para 0 e a segunda quando $\theta^* > 0$. Em ambas, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$, $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$, e o ponto estável $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ estão envolvidos. Na primeira bifurcação, em $\theta_c^* = 0$, ocorre a bifurcação do tipo tridente subcrítica com a colisão dos pontos $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$, restando $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ instável. Na segunda bifurcação neste ponto, os pontos instáveis $\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$ voltam a existir e o ponto $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ volta a ser estável.

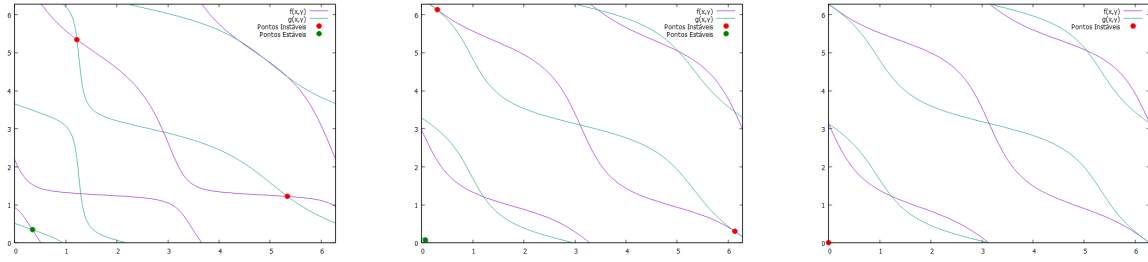


Figura 4.29 Bifurcação tridente subcrítica em intensidade fixa $\gamma^* = 1$ na orientação $\theta^* = \pi$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na primeira imagem, $\theta^* = 0.8\pi$; na segunda imagem, $\theta^* = 0.95\pi$, e na terceira imagem, $\theta^* = \pi$.

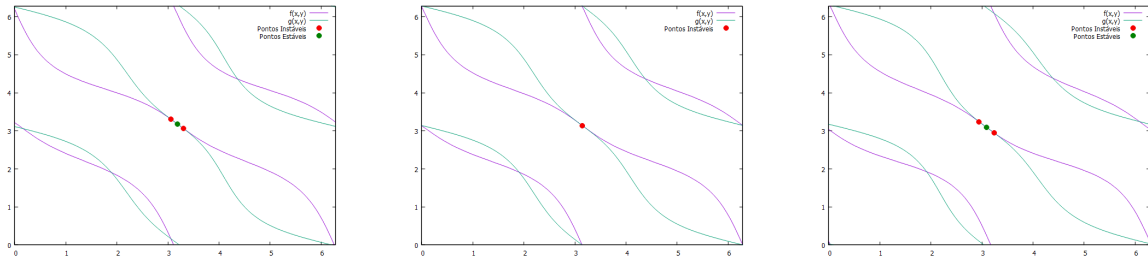


Figura 4.30 Bifurcação tridente subcrítica em intensidade fixa $\gamma^* = 1$ na orientação $\theta^* = 0$. O eixo x representa o ângulo θ_1 e o eixo y representa o ângulo θ_2 . Na primeira imagem, $\theta^* = 6.2$; na segunda imagem, $\theta^* = 0$, e na terceira imagem, $\theta^* = 0.1$.

A terceira bifurcação ocorre em $\theta_c^* = \pi/2$, onde temos uma bifurcação tridente instável envolvendo os pontos $\mathcal{P}(\pi,0)$, $\mathcal{P}(0,\pi)$ e $\mathcal{P}(3\pi/2,3\pi/2)$, restando $\mathcal{P}(3\pi/2,3\pi/2)$ instável. Finalmente, a quarta bifurcação em $\theta_c^* = 3\pi/2$, envolve $\mathcal{P}(\pi,0)$, $\mathcal{P}(0,\pi)$ e $\mathcal{P}(\pi/2,\pi/2)$, restando apenas $\mathcal{P}(\pi/2,\pi/2)$ instável. Ambas bifurcações estão representadas no diagrama de bifurcação na Figura (4.31).

A Figura (4.31) mostra as bifurcações que os pontos de equilíbrio sofrem à medida em que θ^* aumenta. Note que, em $\theta^* = 0$, temos seis pontos de equilíbrio já conhecidos, pois, neste ponto, há para $\gamma_c^* = 1$, uma bifurcação tridente subcrítica, tal como descrito na seção anterior e, em particular, na Figura (4.15). À medida que aumentamos θ^* , percebemos que há uma primeira bifurcação em $\theta_c^* = \pi/2$, envolvendo os pontos de equilíbrio $\mathcal{P}(\pi,0)$, $\mathcal{P}(0,\pi)$ e $\mathcal{P}(3\pi/2,3\pi/2)$. Esta bifurcação não pode ser totalmente caracterizada pois, como pode ser visto na Figura (4.31), não foi possível continuar os resultados do ponto $\mathcal{P}(3\pi/2,3\pi/2)$ para além desta bifurcação devido à um problema no método numérico para encontrar o próximo ponto após esta bifurcação. Esta análise ainda está em curso.

Quando θ^* aumenta para $\theta_c^* = \pi$, há uma bifurcação que ocorre no ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$, que se torna instável, como visto na Figura (4.15). Note que, a partir de $\theta^* = \pi$ não conseguimos evoluir a continuação do ponto $\mathcal{P}_{(0,0)}$. Observe também que neste ponto, também há o cruzamento dos pontos $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$. Como explicado anteriormente, originalmente o diagrama de bifurcação é um gráfico tridimensional e o diagrama de bifurcação apresentado na Figura (4.31) é uma projeção no plano desse gráfico e, por esta razão podem haver sobreposições de ramos que não são bifurcações.

Finalmente, ao aumentarmos θ^* até o valor $\theta_c^* = 3\pi/2$, há uma nova bifurcação envolvendo os pontos $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$, $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$. Não conseguimos continuar nenhum desses pontos para além de $\theta_c^* = 3\pi/2$ e, portanto, não temos até o momento como caracterizar esta bifurcação.

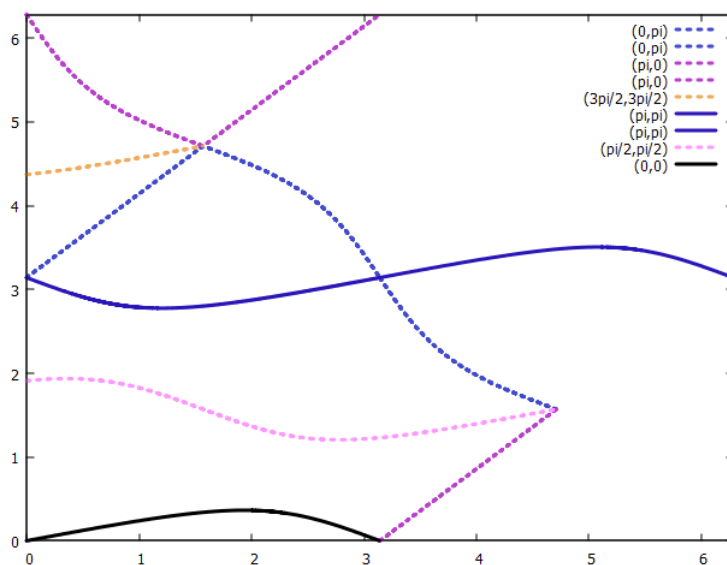


Figura 4.31 Bifurcações com $\gamma^* = 1$. O gráfico representa do diagrama de bifurcação em que o eixo x representa θ^* e o eixo y representa θ_2 .

4.3.3 Conjectura

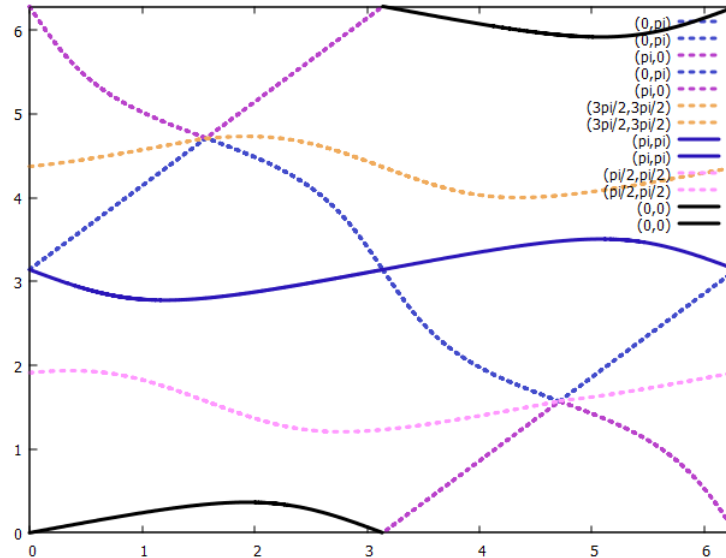


Figura 4.32 Conjectura do diagrama das bifurcações com $\gamma^* = 1$. No gráfico, o eixo x representa θ^* e o eixo y representa θ_2 .

Na Figura (4.32) mostramos uma conjectura do diagrama de bifurcação para intensidade fixa $\gamma^* = 1$ com os seis pontos de equilíbrio, $\mathcal{P}_{(0,0)}$, $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$, $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$, $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$, $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ e $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ para $\theta^* \in [0, 2\pi)$, pois observamos que há uma simetria nos diagramas obtidos e a periodicidade em θ^* deve ser respeitada. O gráfico na Figura (4.32) mostra o diagrama de bifurcação em relação ao θ_2 . Aqui, representamos $(0, \pi)$ como $(2\pi, \pi)$ para melhor visualização da bifurcação.

Como foi dito anteriormente, não conseguimos encontrar a continuação de alguns pontos depois de uma bifurcação, pois nesse ponto a matriz jacobiana do sistema é singular. Para prosseguirmos com a continuação, precisaríamos do próximo ponto em que o determinante não se anularia, para a partir desse ponto prosseguir. No entanto, nenhum método se mostrou eficaz em encontrar esse próximo ponto, o que impossibilitou a conclusão do diagrama de bifurcação.

A partir da continuação ilustrada na Figura (4.31), utilizamos as simetrias do sistema para construir transformações que geram um resultado que parece ser compatível com o esperado para este sistema. Comparando este resultado com o diagrama apresentado na

Figura (4.14), podemos observar a continuação do ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ após a bifurcação em $\theta^* = \pi/2$. Não está claro que tipo de bifurcação o sistema sofre neste ponto. Provavelmente, é uma bifurcação transcítica clássica, onde há uma "troca" de ponto de equilíbrio, mas agora envolvendo três pontos. Note que um desses pontos, precisamente o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ sai ileso dessa bifurcação. Por fim, em $\theta^* = 3\pi/2$, temos uma nova estrutura similar à descrita no parágrafo anterior, mas agora envolvendo $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$, $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ e $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$.

Para o ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$, utilizamos a continuação do ponto $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$, com $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + 0.89\pi$ e $\theta^* = \theta^* + \pi/2$. Para o ponto $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$, utilizamos a continuação do ponto $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ com $\theta_2 \rightarrow \theta_2 - 0.89\pi$ e $\theta^* = \theta^* + 3\pi/2$. Para continuação de $\mathcal{P}_{(0, 0)}$ a partir de $\theta^* = \pi$, utilizamos essa mesma continuação porém com $\theta_2 \rightarrow -\theta_2 + 2\pi$ e $\theta^* = \theta^* + \pi$. Para $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ utilizamos a continuação do mesmo ponto com $\theta_2 \rightarrow \theta_2 - \pi/2$ e $\theta^* = \theta^* + 3\pi/2$. Para $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$ utilizamos a continuação do mesmo ponto com $\theta_2 \rightarrow -\theta_2$ e $\theta^* = -\theta^* + 2\pi$.

A complexidade das bifurcações observadas quando θ^* é o parâmetro de bifurcação é muito superior às observadas quando γ^* era o parâmetro de bifurcação. Ainda estamos trabalhando na melhoria dos métodos numéricos que devemos utilizar para capturar perfeitamente as continuações de todos os pontos de equilíbrio desse sistema. Somente assim podemos testar nossa conjectura e construir o diagrama de bifurcação correto desse sistema. Esta é uma das próximas tarefas a serem levadas a cabo neste trabalho.

Conclusão

Neste trabalho, estudamos a dinâmica da interação entre dois dipolos magnéticos planos, separados a uma distância fixa e livres para girar. Nestas condições, a dinâmica é não-linear e as oscilações dos dipolos levam o sistema para uma de duas configurações possíveis: os dois dipolos orientados na direção 0 radianos ou na direção π radianos. Estas duas configurações correspondem aos dois pontos de equilíbrio estáveis do sistema dentre os oito pontos de equilíbrio que identificamos para o sistema. Uma investigação das bacias de atração de cada um destes pontos mostrou que eles são igualmente prováveis dentro de um conjunto de 6561 condições iniciais testadas.

Posteriormente, estudamos a configuração em que um campo magnético externo foi aplicado no sistema, de maneira que foi possível controlar sua intensidade e sua orientação. Ao alterarmos essas propriedades, observamos que os pontos de equilíbrio do sistema mudavam: novas configurações de equilíbrio são obtidas para as orientações dos dipolos. Porém, associadas estas mudanças, foram identificadas bifurcações que mudam propriedades e a quantidade dos pontos de equilíbrio.

Identificamos cinco tipos de bifurcações que ocorrem em valores críticos de intensidade e de orientação do campo aplicado. Neste ponto, o determinante da matriz jacobiana do sistema é nulo. Três dessas bifurcações são dos tipos convencionais (Sela-Nó, Tridente Supercrítica e Tridente Subcrítica) e as outras duas nomeamos de Sela-Nó Instável e Tridente Instável. Observamos que, ao aumentarmos a intensidade do campo magnético externo, o sistema tende a permanecer com quatro pontos de equilíbrio, sendo apenas um estável. Utilizando uma combinação do Método da Continuação, do Método Newton-Raphson e do Método Runge-Kutta de 4ª Ordem, construímos os diagramas de bifurcação para classificar

as bifurcações encontradas. O procedimento utilizado nesse trabalho mostrou-se bastante eficaz para identificar as bifurcações causadas pelo aumento da intensidade do campo aplicado. Porém, as bifurcações causadas por mudanças na orientação são mais complicadas e encontramos dificuldades para determinar a continuação de alguns pontos instáveis, impossibilitando a obtenção do diagrama de bifurcação completo. Propomos uma conjectura de como achamos que deva ser o diagrama completo e é possível que tenhamos bifurcações similares à bifurcação transcítica nesse sistema.

Para trabalhos futuro, é necessário estruturar métodos numéricos mais robustos para obter a continuação de todos os pontos de equilíbrio e verificar a consistência da conjectura apresentada. Além disso, um outro problema que podemos estudar a partir deste é a interação entre três dipolos livres para girar na presença de um campo magnético externo. Antevemos uma dinâmica ainda mais complexa para este caso.

Bibliografia

- [1] A. K. T. ASSIS, *Weber's electrodynamics*, in *Weber's Electrodynamics*, Springer, 1994, pp. 47–77.
- [2] A. K. T. ASSIS, *Mecânica Relacional: Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*, C. Roy Keys, Incorporated, 2013.
- [3] R. L. BURDEN, J. D. FAIRES, AND A. M. BURDEN, *Numerical analysis*, Cengage learning, 2015.
- [4] B. D. CULLITY AND C. D. GRAHAM, *Introduction to magnetic materials*, John Wiley & Sons, 2011.
- [5] E. HINCH, *Numerical Methods: Think before You Compute: A Prelude to Computational Fluid Dynamics*, vol. 61, Cambridge University Press, 2020.
- [6] J. D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, Wiley New York, 3rd ed., 1977.
- [7] D. LAROZE AND L. PEREZ, *Classical spin dynamics of four interacting magnetic particles on a ring*, *Physica B: Condensed Matter*, 403 (2008), pp. 473–477.
- [8] D. LAROZE AND P. VARGAS, *Dynamical behavior of two interacting magnetic nanoparticles*, *Physica B: Condensed Matter*, 372 (2006), pp. 332–336.
- [9] D. LAROZE, P. VARGAS, C. CORTES, AND G. GUTIERREZ, *Dynamics of two interacting dipoles*, *Journal of magnetism and magnetic materials*, 320 (2008), pp. 1440–1448.
- [10] A. M. MAYER, *Art. xl.—a note on experiments with floating magnets; showing the motions and arrangements in a plane of freely moving bodies, acted on by forces of attraction and repulsion; and serving in the study of the directions and motions of the lines of magnetic force*, *American Journal of Science and Arts (1820-1879)*, 15 (1878), p. 276.
- [11] —, *Floating magnets*, *Nature*, 18 (1878), pp. 258–260.
- [12] I. NEWTON, *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural*, Edusp, 2008.
- [13] P. J. OLVER, *Numerical analysis lecture notes*, Retrieved on, 18 (2008), p. 2017.
- [14] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7, Springer Science & Business Media, 2013.

-
- [15] N. PLIHON, S. MIRALLES, M. BOURGOIN, AND J.-F. PINTON, *Stochastic reversal dynamics of two interacting magnetic dipoles: A simple model experiment*, *Physical Review E*, 94 (2016), p. 012224.
- [16] A. P. ROSA, F. R. CUNHA, AND H. D. CENICEROS, *On minimal energy dipole moment distributions in regular polygonal agglomerates*, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 421 (2017), pp. 269–282.
- [17] C. H. M. SANTOS, *Dinâmica e estabilidade da interação de dois dipolos magnéticos*, Master's thesis, Departamento de Matemática, UnB, 2019.
- [18] H. SARAFIAN, *Dynamic dipole-dipole magnetic interaction and damped nonlinear oscillations*, *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*, 2009 (2009).
- [19] S. H. STROGATZ, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, New York, 1994.