



Universidade de Brasília
Instituto de Humanidades
Departamento de Economia

Pós-graduação em Economia

**Modelando Descontinuidades em
Finanças usando Distribuições
Hiperbólicas Generalizadas**

Aquiles Rocha de Farias

Tese de Doutorado

Brasília
04 de dezembro de 2006

Universidade de Brasília
Instituto de Humanidades
Departamento de Economia

Aquiles Rocha de Farias

Modelando Descontinuidades em Finanças usando Distribuições Hiperbólicas Generalizadas

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Economia do Departamento de Economia da Universi-
dade de Brasília como requisito parcial para obtenção do
grau de Doutor em Economia.*

Orientador: *Prof. PhD Paulo César Coutinho*

Brasília
04 de dezembro de 2006

à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Minha lista de agradecimentos é bastante extensa, mostrando que os árduos trabalhos somente podem ser executados com o apoio de vários amigos e colaboradores.

Agradeço inicialmente a Deus pela vida e por tudo que a concerne.

Agradeço ao meu orientador Prof. Paulo César Coutinho inicialmente pelo esforço que me garantiu a oportunidade de fazer o Doutorado, e também pelo apoio à conclusão da tese.

Agradeço à atenção e amizade dispensadas pelo meu amigo Prof. José Santiago Fajardo Barbachan, que ajudou muito com o tema desde a conclusão do meu Mestrado até o momento, compartilhando de algumas biritas necessárias à conclusão da Tese.

Agradeço aos membros da Banca, Prof. José Guilherme, Prof. Eduardo, Prof. e amigo DJ Mardilson pelos comentários relevantes que foram incorporados ao trabalho.

Agradeço especialmente à minha esposa Andréia e à minha filha maravilhosa Luana, pelo companheirismo e compreensão em meus momentos de ausência.

Agradeço a meus pais Antonio e Marlene, pois afinal de contas, sou obra intelectual e espiritual deles, que sempre me apoiaram em meus desafios.

Agradeço ao meu irmão Daniel e sua esposa Ana Paula, bem como ao meu irmão Alison principalmente nos momentos finais da tese, me ajudando a não ficar neurótico com a defesa da Tese.

Agradeço aos meus companheiros de estudo Lipp e Petit, por facilitar minha vida durante as traumáticas disciplinas que cursei durante o período.

Agradeço ao Banco Central do Brasil que patrocinou meu Doutorado, aportando recursos que espero poder retribuir sob a forma de muito trabalho.

Agradeço aos meus professores Rodriguinho, Madu, Robertão, Joaquim, Kátia e todos aqueles que de alguma forma contribuíram para meus conhecimentos durante o curso.

Agradeço à grande Márcia Nalu, que sempre me ajudou, sempre que possível me surpreendendo, nos momentos mais difíceis dentro da UnB.

Agradeço aos meus amigos da UnB, Milene, Roberta, Sérgio Lago, Fabão, Flávia, Ângelo e todos aqueles que por lapso não referenciei aqui, pelos momentos nem sempre felizes, mas melhores por eles existirem.

Agradeço aos meus amigos Marcelo, Veruska, Euler, Rogério, Zé Renato, Aninha, Henriqueta, Sílvia, Morais, Regina, Deodoro, Little, Littla e todos aqueles que de uma forma ou de outra me ajudaram a passar por essa pedra no caminho.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma ajudaram, direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente, no cumprimento desta tarefa.

Resumo

Nesta tese utilizamos distribuições hiperbólicas generalizadas, que geram processos de Lévy descontínuos, para modelar ativos brasileiros e apreçar derivativos. Depois apresentamos as distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas Afins e também a utilizamos para modelar ativos brasileiros e apreçar derivativos. São utilizados dados de ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, Taxa de Câmbio de Reais por Dólar e Índices de Ações internacionais. No final, utilizando medidas de qualidade de ajuste, mostramos que as distribuições aqui apresentadas são melhores para se modelar ativos e que também proporcionam uma melhora no apreçamento de derivativos.

Palavras-chave: Distribuições Hiperbólicas Generalizadas, Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas Afins, Apreçamento de Derivativos, Transformada de Esscher.

Abstract

In this thesis we use generalized hyperbolic distributions, that are laws of Lévy processes with jumps, to model Brazilian assets and price derivatives. Then we present the Multivariate Affine Generalized Hyperbolic distributions and also use it to model Brazilian assets and price derivatives. We use data from stocks traded at Bolsa de Valores de São Paulo, Exchange Rate of Reais by Dólar and international Stock Indexes. At last, using goodness of fit measures, we show that the distributions presented here are better in asset modeling and in derivative pricing.

Keywords: Generalized Hyperbolic Distributions, Multivariate Affine Generalized Hyperbolic Distributions, Derivative Pricing, Esscher Transforms.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Processos de Lévy | 5 |
| 2.1 | Introdução | 5 |
| 2.2 | Processos de Lévy | 5 |
| 2.3 | Processos Infinitamente Divisíveis | 6 |
| 2.4 | Representação de Lévy-Khintchine | 8 |
| 2.5 | Decomposição de Lévy-Itô | 10 |
| 2.6 | Medida de Lévy | 12 |
| 2.7 | Outras propriedades dos processos de Lévy | 12 |
| 2.8 | Movimento Browniano | 14 |
| 2.9 | Processo de Poisson | 18 |
| 2.10 | Processos de Lévy α -estáveis | 21 |
| 2.11 | Conclusão | 25 |
| 3 | Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado | 26 |
| 3.1 | Introdução | 26 |
| 3.2 | Distribuições Hiperbólicas Generalizadas | 26 |
| 3.2.1 | Subclasses e Distribuições Limites | 28 |
| 3.2.2 | Propriedades das Distribuições GH | 29 |
| 3.2.3 | Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado | 30 |
| 3.2.4 | Movimento de Lévy Geométrico | 31 |
| 3.3 | Amostra | 32 |
| 3.4 | Algoritmo de Estimação | 33 |
| 3.5 | Resultados Empíricos | 34 |
| 3.5.1 | Observação sobre a Estimação | 36 |
| 3.5.2 | Verificando a Precisão do Algoritmo de Estimação | 37 |
| 3.6 | Testando o Ajuste aos Dados | 37 |
| 3.6.1 | Teste χ^2 | 39 |
| 3.6.2 | Distância de Kolmogorov | 39 |
| 3.6.3 | Distância de Kuiper | 40 |
| 3.6.4 | Distância Anderson & Darling | 40 |
| 3.7 | Conclusão | 40 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Apreçamento de Derivativos Unidimensionais usando Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado | 42 |
| 4.1 | Introdução | 42 |
| 4.2 | Apreçamento de Derivativos Unidimensionais | 42 |
| 4.2.1 | Derivativos | 42 |
| 4.2.2 | Antecedentes | 43 |
| 4.2.3 | Conceitos Básicos de Cálculo Estocástico | 44 |
| 4.2.4 | Apreçamento de Derivativos | 46 |
| 4.3 | Convolução das Distribuições Hiperbólicas Generalizadas | 49 |
| 4.4 | Apreçamento de Opções Utilizando Transformações de Esscher | 50 |
| 4.5 | Conclusão | 56 |
| 5 | O movimento exponencial MAGH de Lévy | 58 |
| 5.1 | Introdução | 58 |
| 5.2 | Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins | 58 |
| 5.3 | Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins Multivariadas | 59 |
| 5.3.1 | Propriedades das Distribuições MAGH | 59 |
| 5.3.2 | Movimento Geométrico MAGH | 62 |
| 5.4 | Amostra | 62 |
| 5.5 | Algoritmo de Estimação | 64 |
| 5.5.1 | Distribuição AGH | 64 |
| 5.5.2 | Distribuição MAGH | 65 |
| 5.6 | Resultados Empíricos | 66 |
| 5.6.1 | Estimação Unidimensional | 66 |
| 5.6.2 | Qualidade do Ajuste Unidimensional | 68 |
| 5.6.3 | Estimação da Distribuição MAGH 2-Dimensional | 69 |
| 5.6.4 | Qualidade de Ajuste da MAGH de 2-Dimensões | 70 |
| 5.6.5 | Estimação da MAGH 6-Dimensional | 71 |
| 5.6.6 | Qualidade de Ajuste da Distribuição MAGH 6-Dimensional | 75 |
| 5.7 | Conclusão | 77 |
| 6 | Apreçamento de Derivativos Multidimensionais Utilizando o Movimento Geométrico MAGH | 78 |
| 6.1 | Introdução | 78 |
| 6.2 | Apreçamento de Derivativos Multidimensionais | 78 |
| 6.2.1 | Exemplos de Derivativos Multidimensionais | 78 |
| 6.2.2 | Metodologia de Apreçamento | 80 |
| 6.3 | Modelo de Mercado | 81 |
| 6.4 | Convolução das Distribuições MAGH | 82 |
| 6.5 | Transformadas de Esscher para distribuições MAGH | 84 |
| 6.6 | Apreçamento de Spread Options usando o MGMAGH | 84 |
| 6.7 | Apreçamento de Swaps usando o MGMAGH | 86 |
| 6.8 | Resultados Empíricos | 87 |
| 6.8.1 | Opção de Troca de Telemar ON por Telemar PN | 87 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.8.2 | Swap Dólar x Ibovespa | 94 |
| 6.9 | Conclusão | 99 |
| A | Aspectos Computacionais | 100 |
| B | Derivadas da Função de Log-Verossimilhança | 102 |
| C | Função Modificada de Bessel | 104 |
| | Propriedades Básicas | 104 |
| | Representação em Séries | 104 |
| | Derivadas | 104 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Medida de Lévy | 31 |
| 3.2 | Densidade da Petrobrás: Empírica x Estimadas. | 36 |
| 3.3 | Log-densidade da Petrobrás: Empírica x Estimadas. | 36 |
| 3.4 | Densidade do Ibovespa: Empírica x Estimadas. | 36 |
| 3.5 | Log-densidade do Ibovespa: Empírica x Estimadas. | 36 |
| 4.1 | Preços de uma opção de compra de Vale do Rio Doce com $S_0 = 50$ e taxa de juros livre de risco de 19% utilizando distribuição Hiperbólica Generalizada. | 51 |
| 4.2 | Preço Black and Scholes menos Preço GH de opção de compra de Vale do Rio Doce para diversos vencimentos e preços de exercício. | 52 |
| 4.3 | Smile de Volatilidade do Modelo GH | 56 |
| 5.1 | Densidade da MAGH simétrica | 60 |
| 5.2 | Densidade Estimada x Empírica de NIKK | 68 |
| 5.3 | Densidade Estimada x Empírica de BVSP | 69 |
| 5.4 | BVSP x NIKK PDF. $\rho=0.11$ | 72 |
| 5.5 | CAC x DAX PDF. $\rho=0.79$ | 72 |
| 5.6 | PDF da margem BVSP. | 76 |
| 5.7 | PDF da margem CAC. | 76 |
| 5.8 | PDF da margem DAX. | 76 |
| 5.9 | PDF da margem FTSE. | 76 |
| 5.10 | PDF da margem NIKK. | 76 |
| 5.11 | PDF da margem SP500. | 76 |
| 6.1 | Densidade de Tnlp3 x Tnlp4 | 90 |
| 6.2 | Curvas de Nível de Tnlp3 x Tnlp4 | 91 |
| 6.3 | Densidade Neutra ao Risco - Densidade Estimada | 91 |
| 6.4 | Preços de uma Opção de Troca de Tnlp4 por Tnlp3 com vencimento em 10 dias. | 92 |
| 6.5 | Preços de uma Opção de Troca de Tnlp4 por Tnlp3 com vencimento em 10 dias - Método de Margrabe. | 92 |
| 6.6 | Preços de uma Opção de Spread de Tnlp4 por Tnlp3 para diversos preços de exercício. | 93 |
| 6.7 | Densidade de Taxa de Câmbio R\$ por US\$ x Ibovespa | 96 |
| 6.8 | Curvas de Nível de Taxa de Câmbio R\$ por US\$ x Ibovespa | 97 |
| 6.9 | Densidade Neutra ao Risco - Densidade Estimada | 97 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.10 | Preços de um Swap Dólar X Ibovespa com vencimento em 10 dias. | 98 |
| 6.11 | Preços de um Swap Dólar X Ibovespa para diversas taxas de juros e vencimentos. | 98 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|---|----|
| 3.1 | Amostra | 33 |
| 3.2 | Estatística Descritiva | 34 |
| 3.3 | Parâmetros estimados da Distribuição Hiperbólica Generalizada e suas principais subclasses. | 35 |
| 3.4 | Teste de Log Likelihood Ratio. | 37 |
| 3.5 | Resultados da Simulação de Monte Carlo. | 38 |
| 3.6 | Teste χ^2 . | 39 |
| 3.7 | Distâncias de Kolmogorov. | 39 |
| 3.8 | Distâncias de Kuiper. | 40 |
| 3.9 | Distâncias de Anderson & Darling. | 41 |
| 4.1 | Parâmetros de Esscher Estimados. | 52 |
| 4.2 | Preços das Opções de Compra de Telemar com Vencimento em 15/05/2006. | 53 |
| 4.3 | Preço de Mercado - Preço Estimado por Black and Scholes. | 54 |
| 4.4 | Preço de Mercado - Preço Estimado por Modelo GH. | 55 |
| 4.5 | Estatísticas descritivas das volatilidades implícitas calculadas. | 57 |
| 5.1 | Amostra | 63 |
| 5.2 | Estatísticas Descritivas (%) | 64 |
| 5.3 | Matriz de Correlações (%) | 64 |
| 5.4 | Parâmetros estimados das distribuições AGH e suas subclasses. | 67 |
| 5.5 | Teste de <i>Log-likelihood ratio</i> | 68 |
| 5.6 | Testes de Kolmogorov-Smirnov. | 69 |
| 5.7 | Distâncias Anderson-Darling. | 70 |
| 5.8 | Parâmetros Estimados da MAGH e suas subclasses | 70 |
| 5.9 | Testes de Log-Likelihood ratio. | 71 |
| 5.10 | Distâncias de Kolmogorov para Estimações bidimensionais. | 73 |
| 5.11 | Estimações da MAGH 6-dimensional. | 73 |
| 5.12 | Estimações da MANig 6-dimensional. | 74 |
| 5.13 | Estimações da MAHyp 6-dimensional. | 74 |
| 5.14 | Testes de Log-Likelihood Ratio. | 75 |
| 5.15 | Distância de Kolmogorov em 6 Dimensões. | 75 |
| 6.1 | Estatísticas Descritivas (%) | 87 |
| 6.2 | Parâmetros Estimados para a MAGH e suas subclasses | 88 |
| 6.3 | Correlação e Pseudo Correlação | 89 |

| | | |
|-----|--|----|
| 6.4 | Parâmetros de Esscher | 89 |
| 6.5 | Estatísticas Descritivas (%) | 94 |
| 6.6 | Parâmetros Estimados para a MAGH e suas subclasses | 94 |
| 6.7 | Correlação e Pseudo Correlação | 95 |
| 6.8 | Parâmetros de Esscher | 95 |

Introdução

Desde que foram criados os mercados de ações têm-se tentado elaborar modelos que explicassem o comportamento desses mercados. Bachelier (1900) sugeriu a aplicação do movimento Browniano, sendo o primeiro a tentar modelar matematicamente essa variação de preços. Seu modelo considerava que os incrementos nos preços dos ativos seguia uma distribuição normal.

Em seguida viu-se que esse modelo não era adequado porque permitia a existência de preços negativos. Como alternativa, Osborne (1959) refinou o modelo original através da utilização de uma exponencial não estocástica de um movimento Browniano, formalmente apresentada como modelo de apreçamento de ações por Samuelson (1965), na verdade estabelecendo que os incrementos nos logaritmos dos preços¹ seguiam uma distribuição Normal.

As hipóteses embutidas na modelagem de Bachelier e Samuelson implicam que as trajetórias amostrais do processo estocástico em questão sejam contínuas quase certamente² o que por sua vez implicaria que não há saltos no processo.

O modelo mostrou-se então não-realista, pois a observação empírica era de preços se movendo em saltos, principalmente se observado no intradia. As variações grandes aconteciam muito mais freqüentemente do que o possível para distribuições normais, por conta de as distribuições empíricas serem mais leptocúrticas do que a Normal.

Mandelbrot (1963) foi o primeiro a apresentar uma alternativa à modelagem de Bachelier e Samuelson. Em seu trabalho, usando dados do mercado americano de algodão ele modela os retornos logaritmos usando uma distribuição estável³ com índice de estabilidade menor que 2. Mesmo sem essa denominação à época, ele modelou os ativos como seguindo um processo de Lévy de salto puro. Infelizmente essas distribuições possuem variância infinita e foram posteriormente refutadas pela evidência empírica.

A partir deste trabalho de Mandelbrot diversos autores tentaram modelar o retorno dos ativos usando distribuições com caudas grossas⁴ ou ainda combinações de processos estocásticos que pudessem modelar os saltos observados nos preços.

Press (1967) modelou os logaritmos dos preços dos ativos através de um processo de Lévy que não derivava de uma distribuição estável, mas que era resultante de um

¹Na verdade os incrementos nos logaritmos dos preços são os retornos logaritmos dos ativos.

²Entende-se nesse contexto por quase certamente que o evento tem probabilidade 1, ou seja, ele é verdadeiro a menos de um conjunto de medida nula. Para maiores detalhes ver Billingsley (1986).

³Nos capítulos seguintes detalhes sobre distribuições e processos estáveis são abordados.

⁴Entende-se por distribuição de cauda grossa aquela que possui as caudas mais grossas do que a da distribuição Normal

movimento Browniano combinado com um processo de Poisson composto com saldos distribuídos normalmente.

Madan & Seneta (1987) por sua vez, baseados nos dados de ações australianas, modelaram os preços em logaritmo dos ativos financeiros usando um processo de Lévy com os incrementos distribuídos de acordo com uma variância-gama. Da mesma forma que as distribuições α -estáveis, as distribuições variância-gama geram um processo de Lévy de saltos puros. Sua vantagem, com relação às distribuições estáveis, é que possui, para algumas escolhas de parâmetros, função geradora de momentos, o que facilita a modelagem, principalmente no que concerne o apereçamento de derivativos.

Mais recentemente uma classe de distribuições denominadas Distribuições Hiperbólicas Generalizadas (GH) foi utilizada para modelar dados financeiros. O desenvolvimento dessas distribuições deve-se a Barndorff-Nielsen (1977). Ele aplicou a subclasse Hiperbólica (Hyp) para modelar a distribuição de grãos de areia do Deserto do Saara submetidos a um vento contínuo.

Em seguida, em Barndorff-Nielsen (1978) o conceito foi generalizado para as Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas (MGH). Desde seu desenvolvimento, MGHs foram utilizadas em diferentes campos de conhecimento, como física, biologia⁵ e agronomia.

Eberlein & Keller (1995) foram os primeiros a utilizarem as distribuições Hiperbólicas para modelar dados financeiros. Eles utilizaram a distribuição unidimensional para verificar seu ajuste a dados alemães, mostrando que nesse caso a hipótese de que a distribuição dos ativos seria a Hiperbólica não poderia ser rejeitada.

Keller (1997) desenvolveu expressões para apereçamento de derivativos e Prause (1999) estendeu Eberlein & Keller (1995) e aplicou GH univariada e simplificações de MGH para modelar dados financeiros, usando dados de ações alemãs e índices americanos. Ele também trabalhou apereçamento de derivativos e medidas de *Value at Risk*.

No início dos anos 90, Blæsild & Sørensen (1992) desenvolveram um programa de computador chamado Hyp que foi utilizado para estimar os parâmetros subclasse Hiperbólica unidimensional, bidimensional e tridimensional. Prause (1999) em sua tese desenvolveu um programa para estimar os parâmetros da MGH, mas a estrutura desses programas não está disponível gratuitamente.

Schmidt *et al.* (2005) na tentativa de melhorar a estimativa de modelos multivariados sugeriu a adoção da distribuição Hiperbólica Afim Generalizada Multivariada (MAGH). Sua principal contribuição é desenvolver uma distribuição multivariada que possui caudas grossas e assimetria, mas que demanda muito menos esforço computacional para ser estimada. Eles exploram as características de dependência e comparam os resultados empíricos e analíticos com MGH, testando com os índices alemão, francês, o Dow Jones americano e o Nikkei japonês.

Neste mesmo trabalho os autores não relacionam a distribuição MAGH com processos de Lévy nem sequer fazem apereçamento de derivativos ou aplicações a *Value at Risk*.

Algumas aplicações para o mercado brasileiro foram feitas de forma a analisar se essas distribuições se ajustariam bem aos dados. Usando o software Hyp, Fajardo *et al.*

⁵Para aplicações a outros campos de conhecimento sugerimos Blæsild & Sørensen (1992)

(2001) analisaram o ajuste de distribuições Hiperbólicas (subclasse das GH) univariadas a algumas ações e ao índice Ibovespa.). Fajardo & Farias (2004) e Fajardo *et al.* (2005) verificaram o ajuste de distribuições GH univariadas a diversos ativos brasileiros e testaram também apreçamento de derivativos e medidas de risco. Fajardo & Ornelas (2003) utilizaram essas distribuições para apreçar opções de Índice de Depósito Interbancário (IDI) instrumento negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). Mendes & Jr (1999), Issler (1999), Mazuchelli & Migon (1999) e Pereira *et al.* (1999) usam o modelo GARCH para estudar dados brasileiros.

Nesta tese são feitas as seguintes contribuições:

- Estimação da Distribuição Hiperbólica Generalizada para dados Brasileiros (Capítulo 3).
- Utilização da Distribuição Hiperbólica Generalizada para apreçamento de derivativos nacionais (Capítulo 4).
- Caracterização da Distribuição Hiperbólica Generalizada Multivariada Afim como distribuição geradora de processo de Lévy (Capítulo 5).
- Estimação da Distribuição Hiperbólica Generalizada Multivariada Afim para dados Brasileiros.
- Desenvolvimento de metodologia para obtenção da convolução das distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas Afins (Capítulo 6).
- Criação de um modelo de apreçamento de derivativos multidimensionais com base em Movimentos de Lévy geométricos e distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas Afins (Capítulo 6).
- Apreçamento de Opções de *Spread* e de *Swaps* utilizando o modelo desenvolvido (Capítulo 6).

Desta forma, apresentamos a seguir a disposição dos capítulos da tese: No capítulo 2, que pode ser saltado pelo leitor familiar com processos de Lévy, apresentamos definições básicas, algumas propriedades e características dos processos de Lévy Uni e Multivariados.

No capítulo 3 apresentamos a distribuição Hiperbólica Generalizada (GH) e estimamos seus parâmetros para ativos brasileiros, fazendo um análise do ajuste da distribuição GH e suas subclasses aos dados.

O capítulo 4 refere-se ao apreçamento de derivativos utilizando as distribuições GH para dados brasileiros. No início do capítulo fazemos uma breve revisão sobre apreçamento de derivativos e no final comparamos as estimações com o modelo de Black & Scholes.

No capítulo 5 apresentamos as distribuições Hiperbólicas Generalizadas Multivariadas afins (MAGH), as caracterizamos como distribuições infinitamente divisíveis e portanto passíveis de serem geradoras de processos de Lévy, estimamos seus parâmetros e fazemos algumas considerações sobre o ajuste a dados de índices de diversos países.

Por fim, no capítulo 6 construímos uma forma de obtermos a convolução das distribuições MAGH, desenvolvemos fórmulas de apuração de derivativos multivariados (mais especificamente de opções de Spread e de Swaps) e por fim aplicamos o modelo ora desenvolvido para o apuração de Opções de Spread de Telemar On x Telemar Pn e para Swaps Dólar x Ibovespa, sendo este último negociado em mercado de balcão na Bolsa de Mercadorias e Futuros.

Processos de Lévy

2.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos necessários ao entendimento de modelagem através de processos de Lévy. A grande parte dos teoremas e proposições segue o livro de Sato (1999). Um leitor mais familiarizado com os conceitos concernentes aos Processos de Lévy deve saltar este capítulo.

2.2 Processos de Lévy

Definição 2.1. *Um processo estocástico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ com valores em \mathbb{R}^d é um processo de Lévy se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $X_0 = 0$ quase certamente.
2. X possui incrementos independentes, ou seja, $X_t - X_s$ é independente de \mathcal{F}_s para qualquer $0 \leq s < t < \infty$.
3. X possui incrementos estacionários, ou seja, para qualquer $s, t > 0$ a distribuição de $X_{t+s} - X_t$ não depende de t .
4. X é estocasticamente contínuo, ou seja, para todo $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$: $\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$
5. Sua trajetória amostral é contínua à direita e limitada à esquerda quase certamente.

De fato, o item (4) é implicado pelos outros itens (ver Protter (1995)).

Deve-se notar que a condição (4) não representa que a trajetória amostral seja contínua, pois isso de fato somente ocorre se o processo for Gaussiano¹, mas que se estamos no tempo t , a probabilidade de um salto no tempo t é 0 uma vez que não há incerteza no presente.

A condição (5), conforme Sato (1999) não necessita ser imposta, pois decorre das condições (1) a (4).

¹Para uma demonstração de que o processo Gaussiano é o único com trajetórias amostrais contínuas, sugerimos Sato (1999), Matsuda (2005) e Applebaum (2004)

Definição 2.2 (Processo estocástico Càdlàg). *Um processo estocástico $(X_{t \in [0, \infty)})$ real, num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é chamado de processo estocástico contínuo à direita e limitado à esquerda (Càdlàg) se $\forall t \in [0, T]$:*

1. *O limite direito do processo à medida que s se aproxima de t por cima existe, ou seja, $\lim_{s \rightarrow t, s > t} X_s = X_{t+}$. O limite esquerdo do processo à medida que s se aproxima de t por baixo existe, ou seja, $\lim_{s \rightarrow t, s < t} X_s = X_{t-}$.*
2. $X_{t+} = X_t$.

De fato, essa definição permite que ocorram saltos, pois não exige que o processo seja contínuo à direita, apenas que tenha limite. Como exemplo de processo de Lévy que não possui saltos (ou seja, possui trajetórias amostrais contínuas) temos o movimento Browniano e como exemplo de processos de Lévy com saltos temos o processo de Poisson, o processo de Poisson Composto e o processo Hiperbólico Generalizado².

Definição 2.3 (Salto de um processo estocástico). *Um salto de um processo estocástico no tempo t é definido como:*

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}. \quad (2.1)$$

Um processo estocástico Càdlàg pode ter um número finito de saltos grandes³ e um número contável de saltos pequenos.

2.3 Processos Infinitamente Divisíveis

Os processos de Lévy são gerados por distribuições infinitamente divisíveis, que são definidas da seguinte forma:

Definição 2.4 (Variável Aleatória Infinitamente Divisível). *Uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade $P(x)$ é dita infinitamente divisível se, $\forall n \in \mathbb{N}$ existem n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas X_1, X_2, \dots, X_n que satisfazem:*

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n. \quad (2.2)$$

Da mesma forma, $P(x)$ é chamada de distribuição infinitamente divisível.

Como exemplos de distribuições infinitamente divisíveis temos as distribuições Hiperbólicas Generalizadas (Barndorff-Nielsen 1977, 1978; Prause 1999), a distribuição de Poisson (Sato 1999), a distribuição Gamma (Matsuda 2005) e a distribuição Normal. Como exemplo de distribuições que não o são temos: distribuição Uniforme e Binomial (Sato 1999).

Pode-se definir uma distribuição infinitamente divisível através de funções características.

²Nos capítulos seguintes mostraremos que a distribuição Hiperbólica Generalizada gera um processo de Lévy.

³A definição de salto grande é arbitrária, sendo comumente estipulado como saltos maiores que 1. Para maiores detalhes, ver Matsuda (2005), Sato (1999) e Applebaum (2004).

Proposição 2.1. *Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $P(x)$ e função característica $\phi_X(u)$, ela é infinitamente divisível se $\forall n \in \mathbb{N}$ existem n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) X_1, X_2, \dots, X_n , cada uma com a função característica $\phi_{X_1}(u)$, que satisfazem:*

$$\phi_X(u) = (\phi_{X_1}(u))^n. \quad (2.3)$$

Demonstração. Suponha que $X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$, onde X_1, X_2, \dots, X_n são iid. Representando as variáveis aleatórias por suas funções de distribuição (Billingsley 1986), temos:

$$P_X(x) = P_{X_1+X_2+\dots+X_n}(x). \quad (2.4)$$

Aplicando a correspondência entre distribuição de probabilidade e função característica:

$$\phi_X(u) = \phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(u). \quad (2.5)$$

Como as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, a função característica da soma é a multiplicação das funções características (Billingsley 1986):

$$\phi_X(u) = \phi_{X_1}(u) \times \phi_{X_2}(u) \times \dots \times \phi_{X_n}(u) \quad (2.6)$$

. Como as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n são identicamente distribuídas, a função característica delas possui o mesmo formato (Billingsley 1986):

$$\phi_X(u) = (\phi_{X_1}(u))^n. \quad (2.7)$$

■

Cabe aqui a observação de que as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n não precisam ter a mesma distribuição que X , tanto que como exemplo temos a distribuição Gama que é infinitamente divisível com distribuições exponenciais de X_1, X_2, \dots, X_n .

Proposição 2.2. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy real num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$, então, X_t tem uma distribuição infinitamente divisível $\forall t \in [0, T]$.*

Demonstração. Considere uma realização X_t no tempo t . Particione o tempo t em $n \in \mathbb{N}$ intervalos usando $t_i = i(t/n)$. Uma realização X_t pode ser considerada como a soma de $n \in \mathbb{N}$ incrementos:

$$X_t = (X_{t_1} - X_{t_0}) + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \dots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}). \quad (2.8)$$

Como $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo de Lévy, os incrementos são iid. Logo a função característica de X_t pode ser escrita como:

$$\phi_{X_t}(u) = (\phi_{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}(u))^n. \quad (2.9)$$

Logo, a distribuição de X_t é infinitamente divisível. ■

Analogamente, se tivermos uma distribuição infinitamente divisível (P) , podemos gerar um processo de Lévy cuja distribuição dos incrementos siga P . Para maiores detalhes, veja Sato (1999).

2.4 Representação de Lévy-Khintchine

Teorema 2.1 (Representação de Lévy-Khintchine). *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy em \mathbb{R}^d , então sua função característica pode ser escrita como:*

$$\phi_{X_t} = E[\exp(i\langle z, X_t \rangle)] = \exp(t\Psi(z)), \quad z \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{com } \Psi(z) = -\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (\exp(i\langle z, x \rangle) - 1 - i\langle z, x \rangle 1_{|x| \leq 1}) \ell(dx).$$

onde A é uma matriz simétrica definida não-negativa $d \times d$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ e ℓ é uma medida de Lévy, que é uma medida positiva em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(|x|^2, 1) \ell(dx) < \infty$$

Corolário 2.1. *Se $E[|X_1|] < \infty$, ou equivalentemente, $\int_{|x| \leq 1} |x| \ell(dx) < \infty$ temos que:*

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2}\langle z, Az \rangle + i\langle \gamma_0, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (\exp(i\langle z, x \rangle) - 1) \ell(dx)$$

onde o vetor γ_0 , nesse caso, chamado de *drift* do processo X é dado por:

$$\gamma_0 = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} x 1_{|x| \leq 1} \ell(dx)$$

Demonstração: Ver Sato (1999) e Applebaum (2004).

Um caso particular do teorema anterior, especificando para o caso unidimensional é:

Teorema 2.2 (Representação Lévy-Khintchine dos processos de Lévy). *Seja $P(x)$ uma distribuição infinitamente divisível Real. Então, sua função característica $\phi_X(u)$ é dada, $\forall u \in \mathbb{R}$, por:*

$$\phi_X(u) = \exp(t\psi_X(u)), \quad (2.10)$$

onde $\psi_X(u)$, chamado de *expoente característico*, ou ainda, *função log-característica*, é dado por:

$$\psi_X(u) = -\frac{Au^2}{2} + i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) - 1 - iux 1_D \ell(dx), \quad (2.11)$$

onde $D = \{x : |x| \leq 1\}$, A é uma constante única não negativa, γ é uma constante única em \mathbb{R} e ℓ é uma medida única em \mathbb{R} satisfazendo:

$$\ell(\{0\}) = 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|^2, 1\} \ell(dx) < \infty. \quad (2.12)$$

Demonstração. Veja Sato (1999). ■

Teorema 2.3. [Representação Lévy-Khintchine dos processos de Lévy] Considere uma função característica $\phi_X(u)$ de uma distribuição de probabilidade $P(x)$. Se existir uma única constante não negativa A , uma única constante real γ , e uma única medida Real ℓ satisfazendo:

$$\ell(\{0\}) = 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|^2, 1\} \ell(dx) < \infty, \quad (2.13)$$

que resulta numa função característica da forma:

$$\phi_X(u) = \exp(t\psi_X(u)), \quad (2.14)$$

onde:

$$\psi_X(u) = -\frac{Au^2}{2} + i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux1_D) \ell(dx), \quad (2.15)$$

então, $P(x)$ é infinitamente divisível, e portanto, gera um processo de Lévy.

Demonstração. Veja Sato (1999). ■

Logo, podemos ver que todo processo de Lévy, e conseqüentemente toda função de distribuição infinitamente divisível, pode ser plenamente definido através de três parâmetros. A essa terna denominamos terna de Lévy.

Definição 2.5 (Terna de Lévy). *Um processo de Lévy é unicamente definido por uma terna (A, γ, ℓ) onde A é uma matriz simétrica definida não-negativa $d \times d$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ e ℓ é uma medida de Lévy, que é uma medida positiva em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ satisfazendo:*

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(|x|^2, 1) \ell(dx) < \infty,$$

também chamada de medida de Lévy.

Um caso importante de processos de Lévy multivariados acontece quando as coordenadas do processo $(X_{t \in [0, \infty)}) \in \mathbb{R}^d$ são processos independentes, ou seja, as margens da distribuição multivariada que governa o processo são independentes. Nesse caso, Sato (1999) mostra que:

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^d \Psi_k(z_k)$$

onde Ψ_k é o expoente característico da coordenada k de X_t , dado por:

$$\Psi_k(z_k) = -\frac{1}{2} z_k^2 A_{kk} + i\gamma_k z_k + \int_{\mathbb{R}} (\exp(iz_k x) - 1 - iz_k x 1_{|x| \leq 1}) \ell_k(dx).$$

onde $\ell_k(T) = \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : y_k \in T\}} \ell(dy)$.

Isso ocorre se e somente se A é uma matriz diagonal e a medida ℓ possui suporte no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : \prod_{k=1}^d x_k = 0\}$ (Sato 1999).

No caso unidimensional, a terna reduz-se a:

Definição 2.6 (Terna de Lévy). *Um processo de Lévy é unicamente definido por uma terna (A, γ, ℓ) onde, A é uma constante não negativa também chamada de variância Gaussiana; γ é uma constante real sem valor intrínseco, ℓ é uma medida Real satisfazendo:*

$$\ell(\{0\}) = 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|^2, 1\} \ell(dx) < \infty, \quad (2.16)$$

também chamada de medida de Lévy.

A medida de Lévy procura medir o número esperado de saltos do processo, logo se tivermos um movimento Browniano, cujas trajetórias amostrais são contínuas, a terna de Lévy se resume a $(A, 0, \gamma)$.

Teorema 2.4. *Toda distribuição infinitamente divisível pode ser obtida como um limite fraco de uma seqüência de distribuições de Poisson compostas. Isso significa que todo processo de Lévy pode ser obtido como um limite fraco de uma seqüência de variáveis aleatórias Poisson compostas.*

Demonstração: Ver Sato (1999).

2.5 Decomposição de Lévy-Itô

Teorema 2.5 (Decomposição de Lévy-Itô). *Seja um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ Real com terna de Lévy (A, ℓ, γ) definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. A decomposição de Lévy-Itô diz que:*

1. *Seja $J_X \equiv J(A, \omega)$ a medida de saltos aleatórios no tempo t de um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ que contém a informação do momento e do tamanho dos saltos, e que o tamanho dos saltos pertençam ao conjunto de Borelianos. Então, J_X tem uma distribuição de Poisson com média $\ell(dx)dt$.*
2. *Toda trajetória amostral de um processo de Lévy pode ser representado como uma soma de um processo de Lévy contínuo (processo de Wiener) e um processo de Lévy descontínuo:*

$$X_t(\omega) = X_t^C(\omega) + X_t^D(\omega). \quad (2.17)$$

3. *A parte contínua do processo possui terna de Lévy $(A, 0, \gamma)$. Isso significa que a parte contínua é um movimento Browniano com drift:*

$$X_t^C(\omega) = \gamma t + \sqrt{A}B_t = \gamma t + \sigma B_t, \quad (2.18)$$

,

onde $\text{Var}[X_t^C(u)] = At = \sigma^2 t$, vindo daí o nome de variância Gaussiana para o parâmetro A .

4. A parte descontínua $X_t^D(\omega)$ é um processo de Lévy com terna $(0, \ell < \infty, 0)$ que é a definição de um processo de Poisson composto. A parte descontínua $X_t^D(\omega)$ pode ser decompostas em uma parte com saltos grandes $X_t^L(\omega)$ e uma parte limite à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ de saltos pequenos compensados $\tilde{X}_t^S(\omega)$.

Definimos saltos grandes aqueles cujo tamanho absoluto seja maior que 1 e saltos pequenos aqueles com tamanho absoluto entre $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e 1.

A parte de saltos grande $X_t^L(\omega)$ é uma soma de saltos grandes durante o intervalo $(0, t]$ e $X_t^L(\omega)$ é finito quase certamente porque processos de Lévy possuem número finitos de saltos grandes, pela definição de medida de Lévy:

$$P(X_t^L(\omega) < \infty) = P\left(\sum_{0 \leq r \leq t} \Delta X_r^L(\omega) < \infty\right) = 1 \quad (2.19)$$

A parte de pequenos saltos compensados tem o requisito de serem saltos **compensados** devido ao fato de saltos não compensados não convergirem (Sato 1999). Logo, se $X_t^S(\omega)$ é um processo de Poisson não compensado:

$$X_t^S(\omega) = \sum_{0 \leq r \leq t} \Delta X_r^S(\omega) = \int_{s \in (0, t], \varepsilon < \Delta|x| < 1} x J_x(ds \times dx, \omega) \quad (2.20)$$

Devemos compensá-lo pela sua média $\ell(dx)ds$:

$$\tilde{X}_t^S(\omega) \equiv X_t^S(\omega) - \ell(\varepsilon < dx < 1)dt, \quad (2.21)$$

que faz $\tilde{X}_t^S(\omega)$ tornar-se um martingal⁴, e o processo convergir quando $\varepsilon \rightarrow 0$, sendo o novo processo uma soma compensada de pequenos saltos no intervalo $(0, t]$:

$$\tilde{X}_t^S(\omega) = \sum_{0 \leq r \leq t} \Delta \tilde{X}_r^S(\omega) = \int_{s \in (0, t], \varepsilon < \Delta|x| < 1} x J_x(ds \times dx, \omega) - x\ell(dx)ds \quad (2.22)$$

que converge quase certamente.

5. Os processos contínuo (Browniano com drift) e descontínuo (Poisson composto) são independentes.

Demonstração: Ver Sato (1999).

⁴Para maiores detalhes sobre Martingais, sugerimos Ross (1983) e Kannaan (1979).

2.6 Medida de Lévy

Definição 2.7 (Medida de Lévy). *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy com terna (A, ℓ, γ) definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. A medida de Lévy ℓ é definida como uma única medida positiva em \mathbb{R} que mede (conta) o número esperado de saltos de tamanho S por unidade de tempo:*

$$\ell(S) = E[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t = X_t - X_{t-} \neq 0, \Delta X_t \in S\}]. \quad (2.23)$$

Essa medida de Lévy mede o número de saltos esperados, sejam eles pequenos ou grandes. Por definição, a medida de Lévy satisfaz as seguintes condições:

1. $\ell(\{0\}) = 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{|x|^2, 1\} \ell(dx) < \infty$

De fato a condição (2) pode ser dividida em duas partes:

$$\int_{|x|>1} \ell(dx) < \infty, \quad (2.24)$$

que determina que o número de saltos grandes seja finito⁵ e na condição:

$$\int_{|x|<1} |x|^2 \ell(dx) < \infty, \quad (2.25)$$

que significa que uma medida de Lévy precisa ser quadrado-integrável ao redor da origem, isso também implica que é possível se ter um processo de Lévy com número esperado de saltos pequenos por unidade de tempo infinito.

Se a medida de Lévy é 0, temos um movimento Browniano, pois as trajetórias amostrais não possuirão saltos e serão contínuas.

Caso a medida de Lévy tenha uma integral finita, dizemos que o processo de Lévy é do tipo Atividade Finita, e tanto o número esperado por unidade de tempo de saltos pequenos como de saltos grandes será finito.

Caso a medida de Lévy tenha integral infinita, o processo de Lévy é dito de Atividade Infinita, representando que o número esperado de saltos pequenos por unidade de tempo é infinito e o de saltos grandes finito.

2.7 Outras propriedades dos processos de Lévy

Definição 2.8 (Processo de Lévy Simétrico). *Um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é dito simétrico, se ele satisfaz:*

$$(X_t) \stackrel{d}{=} (-X_t). \quad (2.26)$$

⁵Perceba que a arbitragem de 1 como separado de saltos pequenos e grandes não afeta os resultados

Teorema 2.6. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então a função de transição (distribuição) dos processos de Lévy satisfazem, para $0 \leq t \leq u \leq v < \infty$:*

$$P_{t,v}(x, B) = P_{0,v-t}(0, B - x), \quad (2.27)$$

ou seja, os processos de Lévy são uma subclasse de processos de Markov com funções de transição homogêneas no tempo e no espaço. O contrário também é verdade.

Demonstração. Veja Sato (1999). ■

Uma propriedade importante dos processos de Lévy, diz respeito a transformações lineares de um processo de Lévy.

Teorema 2.7. *Considere um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ com terna (A, ℓ, γ) . Seja c uma constante em \mathbb{R} . Então uma transformação linear do processo original $(cX_{t \in [0, T]})$ é também um processo de Lévy cuja terna (A_c, ℓ_c, γ_c) é dada por:*

$$\begin{aligned} A_c &= c^2 A \\ \ell_c &= \left[\frac{\ell}{c} \right]_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \\ b_c &= cb + \int_{-\infty}^{+\infty} cx (cx \mathbf{1}_{|x| \leq 1} - x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \ell(dx) \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Sato (1999). ■

Em alguns momentos, é importante se trabalhar com processos de Lévy independentes, e o teorema abaixo trata disso.

Teorema 2.8 (Independência de processos de Lévy). *Considere um processo de Lévy não Gaussiano⁶ bidimensional $(X_{t \in [0, T]}, Y_{t \in [0, T]})$ num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ onde a terna de Lévy é $(0, \ell, \gamma)$. Então X_t e Y_t são independentes se e somente se o conjunto $\{(x, y) : xy = 0\}$ contém o suporte da medida de Lévy ℓ . Ou seja, eles são independentes se não saltam conjuntamente.*

Demonstração. Ver Sato (1999). ■

Além disso, podemos definir como funciona a soma de processos de Lévy independentes. De acordo com Cont & Tankov (2004), um processo resultante da soma de dois processos de Lévy independentes também é um processo de Lévy. Isso facilita quando precisamos fazer o apreçamento de ativos.

⁶Entende-se por processo não Gaussiano aquele processo de Lévy que possui terna $(A = 0, \ell, \gamma)$

2.8 Movimento Browniano

Um dos mais importantes processos de Lévy conhecidos é o chamado movimento Browniano. Inicialmente definiremos um movimento Browniano padrão, em termos de processos de Lévy.

Definição 2.9 (Movimento Browniano Padrão). *Um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é denominado um movimento Browniano padrão se a função de distribuição que governa o processo é uma distribuição Normal $(0, t)$. Ou seja, os incrementos do processo seguem uma distribuição Normal $(0, t)$.*

O movimento Browniano também é chamado de processo de Wiener. Esse processo é estocasticamente contínuo e sua trajetória amostral é contínua quase certamente (Karlin & Taylor 1975).

Definição 2.10 (Movimento Browniano com Drift). *Seja $(B_{t \in [0, \infty)})$ um movimento Browniano padrão num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então um movimento Browniano com drift é um processo estocástico Real definido como:*

$$(X_{t \in [0, \infty)}) \equiv (\mu t + \sigma B_{t \in [0, \infty)}), \quad (2.28)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ é chamado de drift (tendência) e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ é chamado de parâmetro de difusão (volatilidade).

A distribuição que governa o movimento Browniano com drift é uma Normal $(\mu t, \sigma^2 t)$. Suas trajetórias amostrais são contínuas quase certamente (Karlin & Taylor 1975). Conforme explicado anteriormente, um movimento Browniano (com ou sem drift) possui terna de Lévy $(\sigma^2, 0, \mu)$, uma vez que não possui saltos na trajetória amostral (é contínuo com probabilidade 1).

As trajetórias amostrais do movimento Browniano com drift possuem variação infinita em qualquer intervalo finito $[0, t]$, isto é:

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |X(t_i) - X(t_{i-1})| = \infty \right) = 1. \quad (2.29)$$

De maneira intuitiva, a propriedade de variação infinita significa que as trajetórias amostrais são muito oscilatórias.

Outra propriedade das trajetórias amostrais do movimento Browniano com drift é que elas possuem variações quadráticas finitas em $[0, t]$ e convergindo para $\sigma^2 t$ com probabilidade 1:

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |X(t_i) - X(t_{i-1})|^2 = \sigma^2 t < \infty \right) = 1. \quad (2.30)$$

Para demonstrações dessas propriedades ver Sato (1999), Karatzas & Shreve (1991) e Rogers & Williams (2000).

A função característica do movimento Browniano pode ser calculada utilizando-se duas abordagens. A primeira consiste em calcular a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\phi_{X_t}(u) &= \mathcal{F}[P(x)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} P(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dx \\
&= \exp\left(i\mu t u - \frac{\sigma^2 t u^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

A segunda forma consiste em utilizar a representação de Lévy-Khintchine. Lembrando que o movimento Browniano com drift possui terna de Lévy ($A = \sigma^2, \ell = 0, \gamma = \mu$), seu expoente característico é dado por:

$$\begin{aligned}
\psi_X(u) &= -\frac{Au^2}{2} + i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux1_D)\ell(dx) \\
&= -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\mu u,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

logo a função característica é expressa como:

$$\phi_{X_t}(u) = \exp(t\psi_X(u)) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t u^2}{2} + i\mu t u\right). \tag{2.33}$$

Teorema 2.9. *Seja $(B_{t \in [0, \infty)})$ um movimento Browniano padrão definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então, um movimento Browniano com drift $(X_{t \in [0, \infty)}) \equiv (\mu t + \sigma B_{t \in [0, \infty)})$ não é um martingal⁷ contínuo com relação ao filtro $\mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}$ e a medida de probabilidade P .*

Demonstração. Por definição, $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo não-antecipado com média finita $E[X_t] = E[\mu t + \sigma B_t] = \mu t < \infty$ para $\forall t \in [0, \infty)$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Temos também que:

$$X_u = X_t + \int_t^u dX_v. \tag{2.34}$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
E[X_u | \mathcal{F}_t] &= E\left[X_t + \int_t^u dX_v \middle| \mathcal{F}_t\right] = E[X_t | \mathcal{F}_t] + E\left[\int_t^u dX_v \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= E[X_u | \mathcal{F}_t] = X_t + \mu(u-t).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

■

⁷A definição formal de Martingais está na definição 4.5

Corolário 2.2. *Um movimento Browniano padrão é um Martingal contínuo.*

Demonstração. Um movimento Browniano padrão tem $\mu = 0$, logo, da demonstração do teorema, temos que:

$$E[X_u | \mathcal{F}_t] = X_t + \mu(u - t) = X_t. \quad (2.36)$$

■

Corolário 2.3. *Um movimento Browniano com drift corrigido pela tendência é um Martingal contínuo.*

Demonstração. A esperança condicional ao tempo t de um movimento Browniano com drift corrigido pela tendência é:

$$E[X_u - \mu u | \mathcal{F}_t] = E[X_u | \mathcal{F}_t] - \mu u = X_t + \mu(u - t) - \mu u = X_t - \mu t. \quad (2.37)$$

■

Proposição 2.3. *Se $X \sim Normal(\mu t, \sigma^2 t)$, então, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, temos que:*

$$E[\exp(\theta X)] = \exp\left(\theta \mu t + \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 t\right). \quad (2.38)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[\exp(\theta X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\theta X) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(X - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{-\theta X 2\sigma^2 t + X^2 - 2X\mu t + \mu^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(X - (\theta\sigma^2 t + \mu t))^2 - (\theta\sigma^2 t + \mu t)^2 + \mu^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dX \\ &= \exp\left(\frac{(\theta\sigma^2 t + \mu t)^2 - \mu^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(X - (\theta\sigma^2 t + \mu t))^2}{2\sigma^2 t}\right) dX \\ &= \exp\left(\frac{(\theta\sigma^2 t + \mu t)^2 - \mu^2 t^2}{2\sigma^2 t}\right) = \exp\left(\theta \mu t + \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 t\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

■

Essa proposição ajuda a demonstrar o teorema a seguir:

Teorema 2.10. *Seja $(B_{t \in [0, \infty)})$ um movimento Browniano padrão definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a exponencial de um movimento Browniano definido como:*

$$Z_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \quad (2.40)$$

é um martingal contínuo com relação ao filtro $\mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}$ e à medida de probabilidade P .

Demonstração. Inicialmente percebe-se que $(Z_{t \in [0, \infty)})$ é não antecipado porque o movimento Browniano $(B_{t \in [0, \infty)})$ é não antecipado. Em segundo lugar, sua média é finita:

$$\begin{aligned} E[Z_t] &= E\left[\exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\right] \\ &= E\left[\exp(\theta B_t) \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t\right) E[\exp(\theta B_t)]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando a proposição anterior, temos que:

$$E[Z_t] = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t\right) \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right) = 1. \quad (2.42)$$

Pela definição de Z_t , temos que $\forall 0 \leq t \leq t+h < \infty$:

$$E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] = E\left[\exp\left(\theta B_{t+h} - \frac{1}{2}\theta^2(t+h)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \quad (2.43)$$

Agora vamos multiplicar $\exp(\theta B_t - \theta B_t) = 1$ dentro do operador de esperança:

$$\begin{aligned} E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] &= E\left[\exp(\theta B_t - \theta B_t) \exp\left(\theta B_{t+h} - \frac{1}{2}\theta^2(t+h)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[e^{\theta B_t} e^{-\theta B_t} e^{\theta B_{t+h}} \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 t\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 h\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \exp\left(\theta(B_{t+h} - B_t) - \frac{1}{2}\theta^2 h\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pela independência dos incrementos do movimento Browniano:

$$E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] = E\left[\exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] E\left[\exp\left(\theta(B_{t+h} - B_t) - \frac{1}{2}\theta^2 h\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \quad (2.45)$$

Como B_t é \mathcal{F}_t -adaptado:

$$E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) E\left[\exp\left(\theta(B_{t+h} - B_t) - \frac{1}{2}\theta^2 h\right)\right]. \quad (2.46)$$

Pela definição de Z_t :

$$\begin{aligned} E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] &= Z_t E \left[\exp(\theta(B_{t+h} - B_t)) \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 h\right) \right] \\ &= Z_t \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 h\right) E[\exp(\theta(B_{t+h} - B_t))]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como $B_{t+h} - B_t \sim \text{Normal}(0, h)$:

$$E[Z_{t+h} | \mathcal{F}_t] = Z_t \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 h\right) \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 h\right) = Z_t. \quad (2.48)$$

■

2.9 Processo de Poisson

Outro importante tipo de processo de Lévy é o chamado Processo de Poisson:

Definição 2.11 (Processo de Poisson). *Um processo Poisson $(N_{t \in [0, \infty)})$ com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$ definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é um processo de Lévy satisfazendo:*

1. N_t segue uma distribuição de Poisson com intensidade λt
2. Suas trajetórias são funções escada Càdlàg não decrescentes com saltos de tamanho 1 com probabilidade 1.

A condição (1) implica a condição (2).

Definição 2.12. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy real com terna (A, ℓ, γ) definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então, $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se ele satisfaz as seguintes condições:*

1. $A = 0$.
2. $\gamma = 0$.
3. Sua medida de Lévy é dada por:

$$\ell(x) = \lambda \delta(x - 1), \quad (2.49)$$

onde $\delta(x - 1)$ é uma função delta de Dirac satisfazendo:

$$\delta(x - 1) = \begin{cases} \delta(0) & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.50)$$

$\delta(x-1)$ é um pulso com altura ilimitada e largura 0, com integral 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)dx = 1. \quad (2.51)$$

A função delta de Dirac é a função de densidade de probabilidade de tamanhos de saltos para processos de Poisson porque eles apenas têm um tipo de salto, que são os saltos de tamanho 1. Como a medida de Lévy mede a taxa média de chegada de saltos, ela somente é definida para $X = 1$ pois a medida de qualquer outro tamanho de saltos é 0. Como num processo de Poisson a taxa média de chegada dos saltos é λ , multiplicamos a função delta de Dirac pelo λ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \delta(x-1)dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)dx = \lambda < \infty. \quad (2.52)$$

A função característica do processo de Poisson pode ser obtida através do uso da representação de Lévy-Khintchine:

$$\Psi_X(u) = -\frac{Au^2}{2} + i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux1_D)\ell(dx), \quad (2.53)$$

como a função apenas possui saltos de tamanho 1, a parte de saltos pequenos pode ser desprezada apenas mudando o ponto de truncagem. Logo, temos que:

$$\Psi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1)\lambda \delta(x-1)dx = \lambda(e^{iu} - 1). \quad (2.54)$$

Para ver o último passo, basta lembrar que a função $\delta(x-1)$ somente está definida para $x = 1$ e portanto neste ponto ela integra 1 e a exponencial vira e^{iu} . Portanto, a função característica pode ser expressa como:

$$\phi_{X_t}(u) = \exp(t\lambda(e^{iu} - 1)). \quad (2.55)$$

Teorema 2.11. *Um processo de Poisson $(X_{t \in [0, \infty)})$ com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$ definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ não é um Martingal.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[X_u | \mathcal{F}_t] &= E[X_t + X_{u-t} | \mathcal{F}_t] = E[X_t | \mathcal{F}_t] + E[X_{u-t} | \mathcal{F}_t] \\ &= X_t + E[X_{u-t} | \mathcal{F}_t] = X_t + \lambda(u-t) \neq X_t. \end{aligned} \quad (2.56)$$

■

Teorema 2.12. *Um processo de Poisson compensado $(\tilde{X}_{t \in [0, \infty)}) \equiv (X_{t \in [0, \infty)} - \lambda t)$ com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$ definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é um Martingal.*

Demonstração.

$$E[|\tilde{X}_t|] = E[X_t - \lambda t] = E[X_t] - \lambda t = 0 < \infty. \quad (2.57)$$

Logo, temos que, $\forall 0 \leq t \leq u < \infty$:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{X}_u | \mathcal{F}_t] &= E[\tilde{X}_t + \tilde{X}_{u-t} | \mathcal{F}_t] = E[\tilde{X}_t | \mathcal{F}_t] + E[\tilde{X}_{u-t} | \mathcal{F}_t] \\
&= \tilde{X}_t + E[\tilde{X}_{u-t} | \mathcal{F}_t] = \tilde{X}_t + E[X_{u-t} - \lambda(u-t) | \mathcal{F}_t] \\
&= \tilde{X}_t + \lambda(u-t) - \lambda(u-t) = \tilde{X}_t.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

■

Definição 2.13 (Processo de Poisson Composto). *Um processo de Poisson composto $(X_{t \in [0, \infty)}) \equiv \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \right)$ com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é um processo de Lévy que satisfaz:*

1. O contador N_t segue uma distribuição de Poisson com intensidade λt
2. Os tamanhos dos saltos são variáveis aleatórias iid com densidade $f(x)$
3. Suas trajetórias amostrais são funções escada Càdlàg

A condição (3) é implicada pelas condições (1) e (2).

Definição 2.14. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo de Lévy real com terna (A, ℓ, γ) definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. Então $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo de Poisson composto com intensidade $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se satisfaz as seguintes condições:*

1. $A = 0$.
2. $\gamma = 0$.
3. Sua medida de Lévy é dada por:

$$\ell(x) = \lambda f(x), \tag{2.59}$$

onde $f(x)$ é uma densidade de tamanho de saltos satisfazendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \tag{2.60}$$

Podemos calcular a função característica de um processo de Poisson composto utilizando a representação de Lévy-Khintchine, lembrando que o processo de Poisson composto é de variação finita:

$$\begin{aligned}
\Psi_X(u) &= -\frac{Au^2}{2} + i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux1_D) \ell(dx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1) \lambda f(x) dx \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \exp(iux) - f(x)) dx \\
&= \lambda (\phi_f(u) - 1).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

onde ϕ_f representa a função característica da distribuição f . O segundo passo é possível porque o processo de Poisson é de variação finita, logo o termo $-iux1_D$ passa a compor o γ , que continua sendo 0. Agora, temos que:

$$\phi_X(u) = \exp(t\Psi_X(u)) = \exp(t\lambda(\phi_f(u) - 1)). \quad (2.62)$$

2.10 Processos de Lévy α -estáveis

Uma classe de distribuições muito importantes que definem uma subclasse de processos de Lévy é a de distribuições estáveis, que geram processos estáveis.

Definição 2.15 (Distribuição estritamente estável). *Seja X uma variável aleatória infinitamente divisível em \mathbb{R} e $\phi_X(u)$ sua função característica. Então diz-se que X possui uma distribuição estritamente estável se sua função característica satisfaz, $\forall a > 0$, $\forall b(a) > 0$ e $\forall u \in \mathbb{R}$:*

$$\phi_X(u)^a = \phi_X(ub(a)). \quad (2.63)$$

Definição 2.16 (Distribuição estável). *Seja X uma variável aleatória infinitamente divisível em \mathbb{R} e $\phi_X(u)$ sua função característica. Então diz-se que X possui uma distribuição estável se sua função característica satisfaz, $\forall a > 0$, $\forall b(a) > 0$, $\forall c(a) \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}$:*

$$\phi_X(u)^a = \phi_X(ub(a)) \exp(ic(a)u). \quad (2.64)$$

Como exemplos de distribuições estáveis e estritamente estáveis temos:

Proposição 2.4. *A distribuição Normal é uma distribuição estável. A distribuição Normal com média 0 é estritamente estável.*

Demonstração. A função característica de uma variável aleatória Normal Y é:

$$\phi_Y(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right). \quad (2.65)$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \phi_Y(u)^a &= \left(\exp\left(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)\right)^a = \exp\left(i\mu u a - \frac{\sigma^2 u^2 a}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\mu u a - \frac{\sigma^2 u^2 a}{2}\right) \exp(i\mu u \sqrt{a} - i\mu u \sqrt{a}) \\ &= \exp\left(i\mu u \sqrt{a} - \frac{\sigma^2 (u\sqrt{a})^2}{2}\right) \exp(i\mu u a - i\mu u \sqrt{a}) \\ &= \phi_X(u\sqrt{a}) \exp(i(a - \sqrt{a})\mu u). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Fazendo $b(a) = \sqrt{a}$ e $c(a) = (a - \sqrt{a})\mu$ mostramos que a distribuição Normal é estável. Fazendo, agora, $\mu = 0$ temos que:

$$\phi_Y(u)^a = \phi_X(u\sqrt{a}). \quad (2.67)$$

Fazendo $b(a) = \sqrt{a}$ mostramos que a distribuição Normal com média 0 é estritamente estável. ■

Podemos agora extrapolando o conceito de estabilidade para processos de Lévy:

Definição 2.17 (Processo de Lévy Estável). *Um processo de Lévy $(X_{t \in [0, \infty)})$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é dito (estritamente) estável se a distribuição de seus incrementos é (estritamente) estável.*

Definição 2.18 (Processo estocástico autosimilar). *Um processo estocástico Real $(X_{t \in [0, \infty)})$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é dito autosimilar se $\forall a \in \mathbb{R}^+$ e $\forall b \in \mathbb{R}^+$ o processo satisfaz:*

$$(X_{at \in [0, \infty)}) \stackrel{d}{=} (bX_{t \in [0, \infty)}). \quad (2.68)$$

Ou seja, uma mudança no domínio do tempo é equivalente a uma mudança no domínio espacial em termos da propriedade da distribuição.

Definição 2.19 (Processo estocástico autosimilar num sentido amplo). *Um processo estocástico Real $(X_{t \in [0, \infty)})$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é dito autosimilar num sentido amplo se $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\forall b \in \mathbb{R}^+$ e $c(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o processo satisfaz:*

$$(X_{at \in [0, \infty)}) \stackrel{d}{=} (bX_{t \in [0, \infty)} + c(t)). \quad (2.69)$$

Existe uma relação entre a estabilidade de um processo estocástico e sua autosimilaridade. De fato, de acordo com Sato (1999) temos que:

| | | |
|-------------------------------|-------------------|--|
| Processo estritamente estável | \Leftrightarrow | Processo autosimilar |
| Processo estável | \Leftrightarrow | Processo autosimilar num sentido amplo |

Podemos agora ver o movimento Browniano padrão $(B_{t \in [0, \infty)})$ como um processo autosimilar e portanto estritamente estável:

$$B_t \sim \text{Normal}(0, t) \quad (2.70)$$

$$B_{at} \sim \text{Normal}(0, at) \quad (2.71)$$

$$\sqrt{a}B_t \sim \text{Normal}(0, at). \quad (2.72)$$

Logo :

$$(B_{at \in [0, \infty)}) \stackrel{d}{=} (\sqrt{a}B_{t \in [0, \infty)}). \quad (2.73)$$

De forma análoga temos que o movimento Browniano com drift $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo autosimilar num sentido amplo e, conseqüentemente, estável:

$$X_t \sim \text{Normal}(\mu t, \sigma^2 t) \quad (2.74)$$

$$X_{at} \sim \text{Normal}(\mu at, \sigma^2 at) \quad (2.75)$$

$$\sigma \sqrt{a} X_t \sim \text{Normal}(\mu t \sigma \sqrt{a}, \sigma^2 at). \quad (2.76)$$

Logo :

$$(X_{at \in [0, \infty)}) \stackrel{d}{=} (\sigma \sqrt{a} X_{t \in [0, \infty)} - \mu t \sigma \sqrt{a} + \mu at). \quad (2.77)$$

As distribuições estáveis podem ser caracterizadas pelo índice α :

Teorema 2.13 (Índice de Estabilidade α).

1. Para toda distribuição estável, existe uma constante chamada de índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$ onde $b(a) = a^{1/\alpha}$, ou seja:

$$\phi_X(u)^a = \phi_X\left(ua^{1/\alpha}\right) \exp(ic(a)u). \quad (2.78)$$

Uma distribuição estável com índice de estabilidade α é chamada de distribuição α -estável.

2. Para todo processo estável $(X_{t \in [0, \infty)})$, existe uma constante chamada de índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$ onde $b(a) = a^{1/\alpha}$, ou seja:

$$(X_{at \in [0, \infty)}) \stackrel{d}{=} (a^{1/\alpha} X_{t \in [0, \infty)} = c(t)). \quad (2.79)$$

Um processo estável com índice de estabilidade α é chamado de processo α -estável.

Demonstração. Veja Sato (1999). ■

De acordo com o visto anteriormente, podemos estabelecer que a distribuição Normal é uma distribuição 2-estável e o movimento Browniano, conseqüentemente, é um processo 2-estável.

Matsuda (2005) também mostra que a distribuição de Cauchy, cuja densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d^2 + (x-c)^2}, \quad (2.80)$$

é uma distribuição 1-estável.

A única outra fórmula de uma distribuição α -estável conhecida é a distribuição de Lévy, que é 1/2-estável e possui densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{2\pi}} (x-\mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{c^2}{2(x-\mu)}\right\} & \text{se } x > \mu \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}. \quad (2.81)$$

Teorema 2.14. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo estável Real com índice de estabilidade $0 < \alpha < 2$ (isso exclui o movimento Browniano com drift). Seja (A, ℓ, γ) a terna de Lévy. Então $(X_{t \in [0, \infty)})$ tem as seguintes propriedades:*

1. $(X_{t \in [0, \infty)})$ é um processo de Lévy (por definição).
2. $A = 0$. Isso significa que são processos puramente de saltos.
3. Sua medida de Lévy $\ell(x)$ é absolutamente contínua e é dada por, para $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 > 0$:

$$\ell(x) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} 1_{x>0} + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} 1_{x<0}. \quad (2.82)$$

4. A massa total da medida de Lévy é infinita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) dx = \infty. \quad (2.83)$$

Ou seja, todos os processos estáveis com índice de estabilidade $0 < \alpha < 2$ são processos de Lévy com atividade infinita que possuem um número finito de saltos grandes e infinito de saltos pequenos.

5. À medida que o índice de estabilidade se aproxima de 0, a medida de Lévy fica menos concentrada no zero e suas caudas ficam mais grossas, o que significa que a frequência de chegada de saltos grandes aumenta. Nesse caso os saltos grandes governam o processo.

À medida que o índice de estabilidade se aproxima de 2, a medida de Lévy fica mais concentrada no zero e suas caudas ficam mais finas, o que significa que a frequência de chegada de saltos grandes diminui. Nesse caso os saltos pequenos governam o processo.

6. Se $c_1 = c_2$ dizemos que a medida de Lévy é simétrica.

Demonstração. Ver Sato (1999). ■

A função característica de processos estáveis possui uma forma comum:

Teorema 2.15. *Seja $(X_{t \in [0, \infty)})$ um processo estável Real com índice de estabilidade $0 < \alpha \leq 2$. Então, para qualquer $u \in \mathbb{R}$ a função característica $\phi_X(u)$ de $(X_{t \in [0, \infty)})$ pode ser expressa como:*

$$\phi_X(u) = \exp(t\Psi_X(u)), \quad (2.84)$$

onde:

$$\Psi_X(u) = \begin{cases} i\tau u - c|u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn} u \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) & , \text{ quando } \alpha \neq 1 \\ i\tau u - c|u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} u \ln |u|\right) & , \text{ quando } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (2.85)$$

onde $c > 0$, $\beta \in [0, 1]$ and $\tau \in \mathbb{R}$. O parâmetro τ é chamado de parâmetro de mudança⁸. o parâmetro c é um parâmetro de escala e o parâmetro β determina a assimetria da medida de Lévy $\ell(x)$. Costuma-se utilizar a notação compacta $S_\alpha(c, \beta, \tau)$ para representar uma distribuição estável com índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$. Nessa notação a distribuição Normal seria representada por $S_2(\sigma^2, 0, \mu)$.

Demonstração. Veja Sato (1999). ■

O parâmetro β que indica a assimetria da medida de Lévy tem uma interpretação bastante intuitiva. Se $\beta = 0$ dizemos que a medida de Lévy é simétrica, ou seja, há igual concentração de saltos negativos e positivos. Caso $\beta = 1$ o processo não possui saltos negativos e, de maneira análoga, se $\beta = -1$ o processo não possui saltos positivos (Sato 1999).

Definição 2.20 (Distribuição estável simétrica). *Uma distribuição estável Real $S_\alpha(c, \beta, \tau)$ com índice de estabilidade $0 < \alpha \leq 2$ é chamada de distribuição estável simétrica se $S_\alpha(c, \beta, \tau)$ satisfaz as seguintes condições:*

1. $\beta = 0$.
2. $\tau = 0$.

Isso implica que a função característica de uma distribuição estável simétrica possui a seguinte forma:

$$\phi_X(u) = \exp(-c|u|^\alpha). \quad (2.86)$$

Sato (1999) também demonstra que uma distribuição estável $S_\alpha(c, \beta, \tau)$ com $\alpha \in (0, 2)$ somente admite primeiro momento, que é igual a 0, se $\alpha > 1$ e nunca admite momentos de ordem dois ou superior. Essa propriedade é fundamental para justificar o fracasso da modelagem de ativos utilizando distribuições α -estáveis, como por exemplo as utilizadas em Mandelbrot (1963), pois elas possuem variância infinita, contrariando as evidências empíricas.

2.11 Conclusão

Apresentamos aqui conceitos básicos sobre processos de Lévy, que serão importantes para o entendimento dos capítulos subsequentes.

⁸Esse parâmetro, quando $0 < \alpha < 1$ equivale ao drift γ_0 da representação de Lévy-Khintchine quando o processo possui variação finita

Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado

3.1 Introdução

Neste capítulo revisitaremos o artigo de Fajardo & Farias (2004) atualizando as análises feitas sobre o ajuste das distribuições Hiperbólicas Generalizadas e complementando as análises correspondentes ao processo de Lévy e suas características.

3.2 Distribuições Hiperbólicas Generalizadas

Definição 3.1. A função de densidade de probabilidade da distribuição GH unidimensional é:

$$gh(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{(\lambda - \frac{1}{2})}{2}} K(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu), \quad (3.1)$$

onde μ é um parâmetro de localização, δ é um fator de escala comparado com o σ da distribuição Normal (Eberlein 2000), α e β determinam o formato da distribuição e λ define a espessura das caudas (Barndorff-Nielsen & Blæsild 1981), e as subclasses da GH, e

$$K(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp(\beta(x - \mu)), \quad (3.2)$$

onde,

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{(\lambda - \frac{1}{2})} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad (3.3)$$

é um fator de normalização de forma que a área da curva totalize 1 e

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x(y + y^{-1})\right) dy, \quad (3.4)$$

é a função modificada de Bessel¹ do terceiro tipo com índice λ .

¹Para maiores detalhes sobre funções de Bessel, veja Abramowitz & Stegun (1968) e também o apêndice C.

Os domínios dos parâmetros são:

$$\begin{aligned}\mu, \lambda &\in \mathbb{R} \\ -\alpha &< \beta < \alpha \\ \delta, \alpha &> 0.\end{aligned}$$

Diversas formas de alteração nos parâmetros da distribuição de forma a que ela fique invariante de escala foram propostos pela literatura:

$$\zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad \rho = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.5)$$

$$\xi = (1 + \zeta)^{-\frac{1}{2}} \quad \chi = \xi \rho \quad (3.6)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha \delta \quad \bar{\beta} = \beta \delta, \quad (3.7)$$

podemos também reescrever os parâmetros, de forma que a distribuição possa ser escrita como uma transformação afim de uma forma canônica:

Proposição 3.1. *Podemos escrever qualquer $GH(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda)$ como uma transformação afim de uma $GH(x; \omega, 1, 0)$ canônica, onde ω é $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \lambda)$.*

Demonstração. Seja X uma distribuição $GH(x; \omega, \delta^2, \mu)$. Definamos Y da seguinte forma:

$$Y \stackrel{d}{=} \frac{X - \mu}{\delta}. \quad (3.8)$$

Logo temos que:

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{X - \mu}{\delta} \leq y\right) = P(X \leq \delta y + \mu). \quad (3.9)$$

Portanto:

$$F_Y(y) = F_X(\delta y + \mu). \quad (3.10)$$

Derivando ambos os lados por y , temos:

$$f_Y(y) = f_X(\delta y + \mu) \delta. \quad (3.11)$$

Utilizando a definição da função densidade da distribuição GH, temos que:

$$f_Y(y) = \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2} (\delta^2 + (\delta y)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (\delta y)^2} \right) e^{\beta \delta y} \right] \delta. \quad (3.12)$$

Agora fazemos uma transformação de parâmetros:

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\delta} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta}}{\delta}. \quad (3.13)$$

Substituindo 3.13 em 3.12, obtemos:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\left(\frac{\tilde{\alpha}^2}{\delta^2} - \frac{\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^2}{\delta^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} (\delta^2 + \delta^2 y^2)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\delta}\right)^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda \left(\delta \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2}{\delta^2} - \frac{\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}^2}{\delta^2}}\right)} K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\delta} \sqrt{\delta^2 + \delta^2 y^2}\right) e^{\frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\delta y}{\delta}} \delta \\
&= \frac{\delta (\tilde{\alpha}^2(1-\tilde{\beta}^2))^{\frac{\lambda}{2}} \delta^{-\lambda} (1+y^2)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2} \delta^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \tilde{\alpha}^{\lambda-\frac{1}{2}} \delta^{-\lambda+\frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda \left(\delta \sqrt{(\tilde{\alpha}^2(1-\tilde{\beta}^2))\delta^{-2}}\right)} \\
&\quad \times K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\tilde{\alpha} \delta^{-1} \sqrt{\delta^2(1+y^2)}\right) e^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}y} \\
&= \frac{\delta \tilde{\alpha}^\lambda (1-\tilde{\beta}^2)^{\frac{\lambda}{2}} \delta^{-\lambda} (1+y^2)^{(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})} \delta^{\lambda-1/2}}{\sqrt{2\pi} \tilde{\alpha}^{\lambda-1/2} \delta^{-\lambda+1/2} \delta^\lambda K_\lambda \left(\tilde{\alpha} \sqrt{1-\tilde{\beta}^2}\right)} K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\tilde{\alpha} \sqrt{1+y^2}\right) e^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}y} \\
&= \frac{\tilde{\alpha}^{1/2} (1-\tilde{\beta}^2)^{\frac{\lambda}{2}} (1+y^2)^{(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})}}{\sqrt{2\pi} K_\lambda \left(\tilde{\alpha} \sqrt{1-\tilde{\beta}^2}\right)} K_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\tilde{\alpha} \sqrt{1+y^2}\right) e^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}y}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Essa expressão é equivalente à de Schmidt *et al.* (2005) e será bastante utilizada quando tratarmos das distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins Multivariadas (MAGH). ■

As distribuições GH possuem caudas semi-grossas, pois possuem caudas mais grossas que a distribuição Normal, mas possuem variância finita. Essa propriedade pode ser observada pela seguinte aproximação (Barndorff-Nielsen & Blæsild 1981):

$$gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta) \sim |x|^{\lambda-1} \exp((\mp\alpha + \beta)x) \text{ as } x \rightarrow \pm\infty. \tag{3.15}$$

3.2.1 Subclasses e Distribuições Limites

Muitas distribuições podem ser obtidas como subclasses² ou distribuições limite da GH.

Como exemplo de distribuições limites, temos a distribuição Normal³, a T de Student (Blæsild 1999), entre outras. Como exemplos de subclasses, temos a Hiperbólica ($\lambda = 1$) e a Normal Inversa Gaussiana ($\lambda = -1/2$).

Definição 3.2. Fazendo $\lambda = 1$ temos a subclasse Hiperbólica (*Hyp*), cuja densidade é descrita por:

$$hyp(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\delta\alpha K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\right). \tag{3.16}$$

²Uma subclasse da distribuição Hiperbólica Generalizada pode ser obtida através da fixação do parâmetro λ .

³Para obtê-la, faça $\delta \rightarrow \infty$ e $\delta/\alpha \rightarrow \sigma^2$ (Barndorff-Nielsen 1978)

A simplificação da função de Bessel sempre que seu índice é $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$ permite que as densidades de certas subclasses sejam mais simples. No caso da Hiperbólica, conforme mostrado em (3.16), a função de Bessel aparece apenas no fator de normalização (a), o que faz com que a estimação por máxima verossimilhança demande menor esforço computacional, porém essa subclasse não é fechada sobre convolução, o que dificulta o apreçamento de derivativos.

Definição 3.3. Fazendo $\lambda = -0.5$, e utilizando as propriedades da função de Bessel, temos a distribuição Normal Inversa Gaussiana (NIG), cuja densidade é dada por:

$$nig(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}. \quad (3.17)$$

Esse nome é devido ao fato de que ela pode ser representada como uma mistura de uma Inversa Gaussiana com uma distribuição Normal. Mais detalhes sobre essas distribuições podem ser encontradas em Rydberg (1997), Keller (1997), Barndorff-Nielsen (1997) e Barndorff-Nielsen (1998). Essa subclasse tem a propriedade de ser fechada sobre convolução, ou seja, a convolução de duas distribuições NIG é uma outra distribuição NIG:

$$nig^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = nig(x; \alpha, \beta, t\delta, t\mu); \quad (3.18)$$

O operador $*$ é o operador de convolução, logo nig^{*t} é a densidade da distribuição do processo no tempo t . Esse fato faz com que a subclasse NIG seja mais adequada para apreçamento de derivativos, uma vez que necessitamos da distribuição do processo de preços no vencimento, como veremos no capítulo 4.

3.2.2 Propriedades das Distribuições GH

Na equação 3.19 temos a função geradora de momentos da GH, para detalhes ver Prause (1999), trabalho em que as distribuições GH são detalhadas com relação a seus momentos.

Utilizando a mesma equação pode-se demonstrar (ver Prause (1999)) que as equações 3.20 e 3.21 representam respectivamente a média e a variância das GH.

$$M(u) = e^{u\mu} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, |\beta + u| < \alpha. \quad (3.19)$$

$$E[X] = \mu + \frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)}. \quad (3.20)$$

$$Var[X] = \delta^2 \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{\zeta K_\lambda(\zeta)} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} \right)^2 \right] \right). \quad (3.21)$$

Outra função derivada da função densidade de probabilidade da GH é a função característica (equação 3.22) que é obtida através de uma transformada de Fourier (Raible (2000)).

$$\varphi(u) = e^{i\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}. \quad (3.22)$$

3.2.3 Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado

Para definirmos que a distribuição Hiperbólica Generalizada, nos termos da definição 2.1, é uma possível geradora de um processo de Lévy, precisamos inicialmente mostrar que ela é uma distribuição infinitamente divisível. Para apresentar a demonstração, antes iremos utilizar de alguns resultados prévios:

Definição 3.4. *A distribuição Gaussiana inversa generalizada (GIG) é dada pela seguinte distribuição:*

$$\text{gig}(x; \lambda, \chi, \psi) = \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\psi\chi})} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right), \quad x > 0, \quad (3.23)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\chi, \psi \in \mathbb{R}_+$.

Em Barndorff-Nielsen & Shephard (2000) são apresentadas as distribuições GH como misturas de variância-média de distribuições Gaussianas inversas generalizadas com distribuições Normais. Podemos, devido a isso, escrever a densidade da GH com a seguinte representação:

$$gh(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \int_0^\infty N(x; \mu + \beta\omega, \omega) \text{gig}(\omega; \lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2) d\omega, \quad (3.24)$$

onde N é a função densidade da distribuição Normal.

Proposição 3.2. *A distribuição Hiperbólica Generalizada é infinitamente divisível e portanto existe um processo de Lévy cuja distribuição dos incrementos é dada por ela.*

Demonstração. A distribuição GH pode ser escrita como uma mistura de uma distribuição Normal e uma Gaussiana inversa Generalizada. Barndorff-Nielsen & Halgreen (1977) mostraram que uma distribuição GIG é infinitamente divisível, logo uma mistura de distribuições normais e GIGs são igualmente infinitamente divisíveis, permitindo assim, conforme a definição 2.1 que processos de Lévy sejam construídos com base nessa distribuição. ■

O movimento de Lévy GH é um processo estocástico de salto puro (Prause 1999). Portanto sua terna de Lévy é dada por $(0, \mu, \ell)$. Prause (1999) para o caso de $\lambda \geq 0$ e Wiesendorfer (1999) para o caso geral mostram que a densidade da medida de Lévy é dada por:

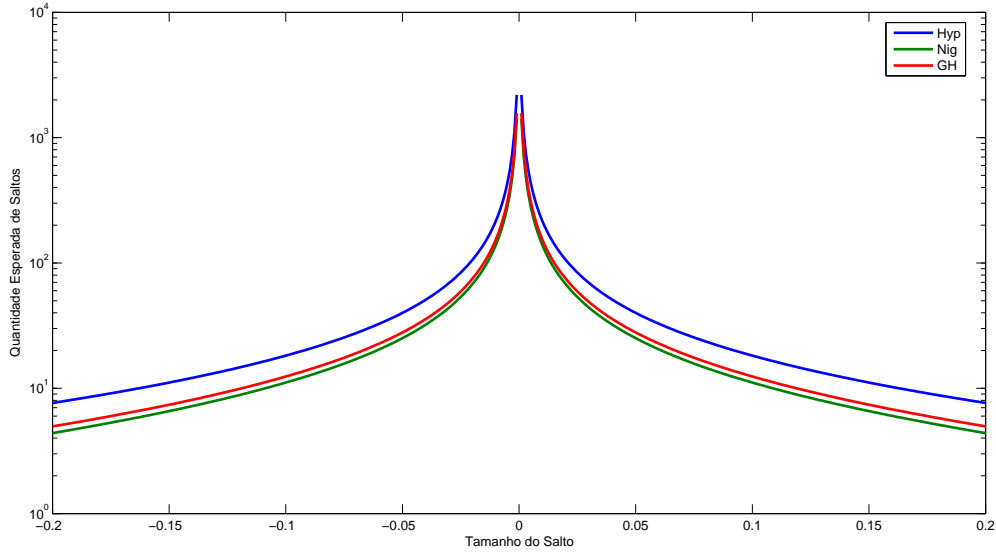


Figura 3.1 Medida de Lévy

$$\frac{d\ell(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{e^{\beta x}}{|x|} \left(\int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2|x|})}{\pi^2 y (J_\lambda^2(\delta\sqrt{2y} + Y_\lambda^2(\delta\sqrt{2y}))} dy + \lambda e^{-\alpha|x|} \right), & \lambda \geq 0 \\ \frac{e^{\beta x}}{|x|} \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2|x|})}{\pi^2 y (J_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y} + Y_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y}))} dy, & \lambda < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Logo, podemos escrever a representação Lévy-Khintchine segundo o teorema 2.3:

$$\phi_X(u) = \exp(t\psi_X(u)), \quad (3.26)$$

onde:

$$\psi_X(u) = i\gamma u + \int_{-\infty}^\infty (\exp(iux) - 1 - iux)\ell(dx). \quad (3.27)$$

A figura mostra o comportamento do logaritmo⁴ da medida de Lévy da distribuição GH. Nela são consideradas as distribuições $gh(x; 1, 0, 1, 0, 0)$, $hyp(x; 1, 0, 1, 0)$ e $nig(x; 1, 0, 1, 0)$. Percebe-se o efeito do λ nas caudas. Conforme definição da medida de Lévy, ela não é definida em 0.

3.2.4 Movimento de Lévy Geométrico

Inicialmente consideraremos um mercado com dois ativos que seguem processos estocásticos definidos num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$. O primeiro ativo é

⁴a utilização da escala logarítmica favorece a visualização da densidade nas caudas.

um ativo livre de risco $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ que evolui de acordo com:

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, & 0 \leq t \leq T \\ B_0 = 1, \end{cases} \quad (3.28)$$

pois não possui parte estocástica. O segundo ativo é uma ação $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ que evolui de acordo com um processo de Lévy exponencial:

$$S_t = S_0 \exp(X_t). \quad (3.29)$$

Onde X_t é um processo de Lévy tradicional, definido de acordo com a definição 2.1. A utilização do modelo exponencial é mais adequada já que evita a possibilidade de ocorrência de preços negativos, pois mesmo que $X_t \rightarrow -\infty$ teríamos que $S_t = 0$. Se aplicarmos o logaritmo a ambos os lados da equação temos:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0 \exp(X_t)) = \ln(S_0) + X_t \Rightarrow \quad (3.30)$$

$$R_t = X_t. \quad (3.31)$$

Onde R_t representa o retorno logaritmo. Dessa forma, segundo esse modelo temos que os retornos dos ativos devem seguir uma distribuição Hiperbólica Generalizada. Nas seções seguintes iremos apresentar os resultados empíricos.

3.3 Amostra

A avaliação empírica utilizou, até mesmo para servir de fonte de comparação, os mesmos ativos analisados por Fajardo & Farias (2004). Devido à adesão do Banco do Brasil ao Novo Mercado⁵ e à saída da bolsa de valores da Petrobrás Distribuidora e da Tele Nordeste Celular, essas três ações não puderam ser utilizadas no atual estudo. Desta forma, a amostra consiste de 11 ações e o índice Ibovespa. As ações são representativas de diversos setores da economia e possuem diferentes graus de liquidez. Para modelá-las foram calculados os retornos logarítmicos diários, de forma que possamos ter um movimento geométrico de Lévy:

$$R_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right). \quad (3.32)$$

O processo de preços $\{P_{i,t}\}$ de cada ação i foi ajustado de acordo com seus direitos, tais como dividendos, splits e grupamentos. As amostras com seus períodos respectivos estão na tabela 3.1. Perceba que quando a data inicial da amostra não é 01/07/1994, temos os ativos resultantes da cisão da Telebrás.

Na tabela 3.2 temos as estatísticas descritivas da amostra utilizada. Destacam-se, principalmente, dois pontos:

⁵Mercado criado pela Bolsa de Valores de São Paulo que abrange empresas que cumprem determinados pré-requisitos de governança corporativa. Para maiores detalhes veja www.bovespa.com.br.

Tabela 3.1 Amostra

| <i>Ação</i> | <i>Ticker</i> | <i>Início</i> | <i>Fim</i> |
|-------------------------------|---------------|---------------|------------|
| Banco Itaú - PN | Itau4 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Bradesco - PN | Bbdc4 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Cemig - PN | Cmig4 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Cia Siderúrgica Nacional - ON | Csna3 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Eletróbrás - PNB | Elet6 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Embratel Participações - PN | Ebtp4 | 21/09/1998 | 30/05/2006 |
| Ibovespa | Ibvsp | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Petrobrás - PN | Petr4 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Tele Celular Sul - PN | Tcsl4 | 21/09/1998 | 30/05/2006 |
| Telemar - PN | Tnlp4 | 22/09/1998 | 30/05/2006 |
| Telesp - PN | Tlpp4 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |
| Vale do Rio Doce - PNA | Vale5 | 01/07/1994 | 30/05/2006 |

- A grande curtose dos dados, pois sob a hipótese de normalidade dos retornos deveríamos ter curtoses próximas a 3⁶, e no entanto a menor curtose observada na amostra foi da Csna3, que é 5,578, ou seja, quase o dobro da distribuição Normal. Já a maior curtose observada foi da Tlpp4 que foi de 30,393 aproximadamente 10 vezes maior do que a da distribuição Normal.
- A grande volatilidade dos dados, representada pelo desvio padrão, considerado alto comparado com os trabalhos que utilizam amostras de países desenvolvidos (ver, por exemplo, Prause (1999) e Schmidt *et al.* (2005)), e também pela grande amplitude dos retornos, onde temos o retorno de Ebtp4 que possui amplitude de aproximadamente 73%.

3.4 Algoritmo de Estimação

Para estimação dos parâmetros, desenvolvemos um programa MatLab que usa máxima verossimilhança para estimar os parâmetros da GH, porque Prause (1999) mostrou que esse método de estimação é o único não-viesado, dentre uma abrangente classe de métodos utilizados na literatura. De fato, ele mostra em seu trabalho que a máxima-verossimilhança, dentre os métodos testados, é o único método que consegue capturar bem a assimetria e a curtose das distribuições empíricas. Este método também foi utilizado por Blæsild & Sørensen (1992) em seu programa Hyp, que estimava apenas os parâmetros da sub-classe Hiperbólica ($\lambda = 1$). Os parâmetros de máxima verossimilhança são aqueles que maximizam a seguinte função:

$$L = \sum_{i=1}^n \ln(gh(x_i; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda)). \quad (3.33)$$

⁶A curtose de uma distribuição Normal é 3. Para maiores detalhes, sugerimos Meyer (1983)

Tabela 3.2 Estatística Descritiva

| | Média | Desvio Padrão | Assimetria | Curtose | Mínimo | Máximo |
|-------|--------|---------------|------------|---------|---------|--------|
| Bbdc4 | 0,111 | 2,750 | 0,163 | 10,788 | -21,700 | 28,559 |
| Cmig4 | 0,080 | 3,257 | 0,252 | 9,815 | -27,749 | 26,399 |
| Csna3 | 0,128 | 2,942 | 0,077 | 5,578 | -17,225 | 15,297 |
| Ebtp4 | -0,033 | 4,322 | 0,348 | 12,299 | -29,206 | 44,204 |
| Elet6 | 0,054 | 3,644 | 0,568 | 9,546 | -19,063 | 32,565 |
| Ibov | 0,079 | 2,456 | 0,517 | 15,800 | -17,229 | 28,818 |
| Itau4 | 0,129 | 2,606 | 0,099 | 5,730 | -15,600 | 15,008 |
| Petr4 | 0,112 | 2,942 | -0,074 | 9,723 | -21,099 | 21,131 |
| Tcsl4 | 0,062 | 3,823 | -0,484 | 12,855 | -42,444 | 22,406 |
| Tlpp4 | 0,064 | 2,806 | 1,462 | 30,393 | -20,628 | 41,268 |
| Tnlp4 | 0,060 | 3,060 | 1,074 | 18,661 | -15,563 | 38,977 |
| Vale5 | 0,121 | 2,744 | 1,153 | 19,014 | -13,353 | 38,524 |

A estimação consiste num procedimento de otimização numérica. Utilizamos o método de otimização global estocástico, que consiste na utilização de conjuntos de valores iniciais sorteados de alguma distribuição de probabilidade (para maiores detalhes sugerimos Baritompal & Hendrix (2005), Björkman & Holmström (1999), Hart (1994) e Iwaarden (1996)). No caso utilizamos valores distribuídos de acordo com a distribuição Uniforme. Para cada parâmetro foi escolhido uma amplitude que não permitisse valores muito fora da possibilidade. Para avaliar essas amplitudes utilizamos os momentos da distribuição empírica e os momentos de uma distribuição GH (ou de suas subclasses) simétrica e centrada.

Para a busca local, no caso das subclasses Hiperbólica e Normal inversa Gaussiana foram implementados métodos utilizando derivadas, mas para o caso GH, devido à complexidade da derivada com relação ao parâmetro λ , foi utilizado o Downhill Simplex Method que não utiliza derivadas, desenvolvido por Nelder & Mead (1965), com algumas modificações (devido a restrições nos parâmetros).

Nas otimizações numéricas referentes a este capítulo definimos a tolerância da busca, e decidimos usar 1×10^{-10} . Essa tolerância foi aplicada para a avaliação da função e para a variação da soma dos parâmetros. A estimação por máxima verossimilhança não possui convergência demonstrada analiticamente, mas utilizando diferentes valores iniciais ela mostrou ser robusta na convergência empírica (Prause 1999).

3.5 Resultados Empíricos

Nesta seção apresentamos os resultados das estimações de cada subclasse.

Na tabela 3.3 temos os parâmetros estimados e o valor da log-verossimilhança (LLH).

As figuras 3.2 e 3.4 mostram a distribuição Hiperbólica Generalizada (GH) e algumas de suas subclasses (Hyp e NIG) comparadas com a Normal estimada e com a distribuição empírica da Petrobrás (Petr4) e do Ibovespa (Ibov) respectivamente. Visualmente

Tabela 3.3 Parâmetros estimados da Distribuição Hiperbólica Generalizada e suas principais subclasses.

| Ativo | Subclasse | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | λ | δ | μ | α | β | Like |
|--------|-----------|------------------|-----------------|-----------|----------|---------|----------|---------|--------|
| Bbdc4 | GH | 0,4050 | 0,2092 | -1,7449 | 0,0364 | -0,0006 | 11,1286 | 2,3276 | 6630,5 |
| | NIG | 0,8422 | 0,0826 | -0,5000 | 0,0248 | -0,0009 | 34,0259 | 2,8102 | 6628,1 |
| | HYP | 0,4436 | 0,0565 | 1,0000 | 0,0079 | -0,0012 | 56,0122 | 3,1663 | 6622,1 |
| Cmig4 | GH | 0,0811 | 0,9996 | -2,5789 | 0,0570 | -0,0007 | 1,4228 | 1,4223 | 6080,5 |
| | NIG | 1,3187 | 0,0462 | -0,5000 | 0,0366 | -0,0009 | 35,9907 | 1,6624 | 6072,6 |
| | HYP | 1,0772 | 0,0335 | 1,0000 | 0,0205 | -0,0010 | 52,4466 | 1,7550 | 6066,9 |
| Csna3 | GH | 0,0000 | 0,0833 | 0,2208 | 0,0000 | 0,0000 | 15,2576 | 1,2717 | 7113,2 |
| | NIG | 1,1455 | 0,0618 | -0,5000 | 0,0314 | -0,0007 | 36,4310 | 2,2515 | 6314,2 |
| | HYP | 0,5132 | 0,0427 | 1,0000 | 0,0100 | -0,0006 | 51,2647 | 2,1889 | 6317,5 |
| Ebtpt4 | GH | 0,0565 | 0,9997 | -2,3162 | 0,0687 | -0,0018 | 0,8227 | 0,8224 | 3431,1 |
| | NIG | 1,1235 | 0,0433 | -0,5000 | 0,0445 | -0,0023 | 25,2455 | 1,0929 | 3423,4 |
| | HYP | 0,9401 | 0,0318 | 1,0000 | 0,0240 | -0,0025 | 39,1378 | 1,2445 | 3416,7 |
| Elet6 | GH | 0,0897 | 0,9995 | -2,4961 | 0,0619 | -0,0013 | 1,4500 | 1,4493 | 5770,1 |
| | NIG | 1,3004 | 0,0594 | -0,5000 | 0,0405 | -0,0019 | 32,0873 | 1,9064 | 5759,1 |
| | HYP | 1,1588 | 0,0485 | 1,0000 | 0,0242 | -0,0024 | 47,8309 | 2,3208 | 5750,5 |
| Ibov | GH | 0,7744 | -0,1102 | -1,0181 | 0,0259 | 0,0026 | 29,8996 | -3,2944 | 7044,2 |
| | NIG | 0,8977 | -0,0879 | -0,5000 | 0,0223 | 0,0028 | 40,1759 | -3,5297 | 7031,4 |
| | HYP | 0,7168 | -0,0595 | 1,0000 | 0,0106 | 0,0030 | 67,5016 | -4,0177 | 7015,4 |
| Itau4 | GH | 0,0000 | 0,0323 | 1,1611 | 0,0000 | 0,0000 | 57,9608 | 1,8698 | 6664,7 |
| | NIG | 1,0594 | 0,0778 | -0,5000 | 0,0267 | -0,0008 | 39,6274 | 3,0841 | 6658,8 |
| | HYP | 0,5541 | 0,0471 | 1,0000 | 0,0094 | -0,0006 | 58,6820 | 2,7652 | 6660,7 |
| Petr4 | GH | 0,1863 | -0,0160 | -1,7205 | 0,0368 | 0,0012 | 5,0578 | -0,0807 | 6490,9 |
| | NIG | 0,7229 | -0,0047 | -0,5000 | 0,0245 | 0,0012 | 29,4792 | -0,1395 | 6484,3 |
| | HYP | 0,4879 | -0,0005 | 1,0000 | 0,0091 | 0,0011 | 53,4252 | -0,0244 | 6468,4 |
| Tcsl4 | GH | 0,0491 | 0,9958 | -2,5739 | 0,0666 | -0,0004 | 0,7369 | 0,7338 | 3636,7 |
| | NIG | 1,3217 | 0,0174 | -0,5000 | 0,0430 | -0,0001 | 30,7594 | 0,5347 | 3631,1 |
| | HYP | 1,1097 | 0,0065 | 1,0000 | 0,0246 | 0,0002 | 45,0292 | 0,2926 | 3627,0 |
| Tlpp4 | GH | 0,1601 | 1,0000 | -2,3002 | 0,0430 | -0,0021 | 3,7237 | 3,7237 | 4311,1 |
| | NIG | 1,0641 | 0,1177 | -0,5000 | 0,0273 | -0,0026 | 38,9880 | 4,5877 | 4301,9 |
| | HYP | 0,8799 | 0,0847 | 1,0000 | 0,0143 | -0,0029 | 61,5631 | 5,2142 | 4293,8 |
| Tnlp4 | GH | 0,0596 | 0,9988 | -2,0605 | 0,0441 | -0,0006 | 1,3513 | 1,3497 | 4108,8 |
| | NIG | 0,9031 | 0,0536 | -0,5000 | 0,0282 | -0,0009 | 31,9832 | 1,7147 | 4105,0 |
| | HYP | 0,6292 | 0,0421 | 1,0000 | 0,0120 | -0,0013 | 52,6370 | 2,2161 | 4099,2 |
| Vale5 | GH | 0,2277 | 0,3619 | -1,8872 | 0,0372 | -0,0004 | 6,1221 | 2,2153 | 6680,1 |
| | NIG | 0,8223 | 0,0742 | -0,5000 | 0,0242 | -0,0006 | 33,9667 | 2,5194 | 6677,0 |
| | HYP | 0,4966 | 0,0491 | 1,0000 | 0,0087 | -0,0007 | 57,2995 | 2,8143 | 6669,2 |

podemos perceber que as distribuições hiperbólicas conseguem um ajuste melhor, principalmente no que concerne ao aspecto leptocúrtico da curva. Já as figuras 3.3 e 3.5 mostram, através da log-densidade, que as distribuições hiperbólicas também se ajustam melhor às caudas da distribuição empírica.

As distribuições GH são obtidas através da variação dos cinco parâmetros e por isso algumas pessoas reportam problema de superparametrização. Quem primeiro a testou empiricamente para dados financeiros foi Prause (1999), tendo em seguida Raible (2000) alertado sobre a grande dificuldade de estimação quando os parâmetros δ and μ tendem simultaneamente a zero. A solução numérica para esse problema foi utilizar tratamentos específicos para o caso, baseado em Hanselman & Littlefield (2001) e Abramowitz & Stegun (1968).

Como seria de se esperar, as estimações das distribuições GH possuem maior verossimilhança que suas subclasses. A maioria das amostras tiveram como estimação um λ

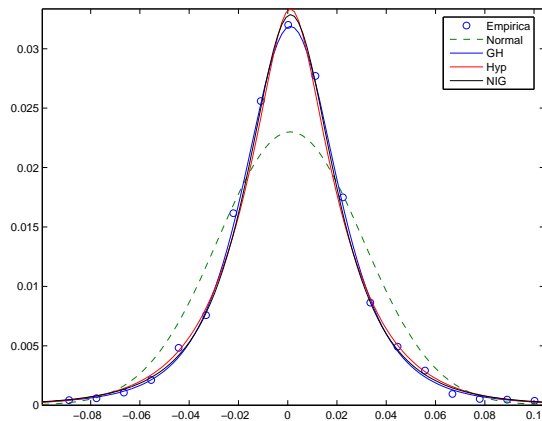


Figura 3.2 Densidade da Petrobrás: Empírica x Estimadas.

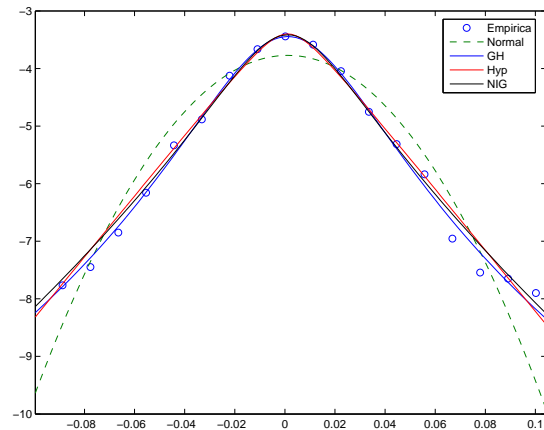


Figura 3.3 Log-densidade da Petrobrás: Empírica x Estimadas.

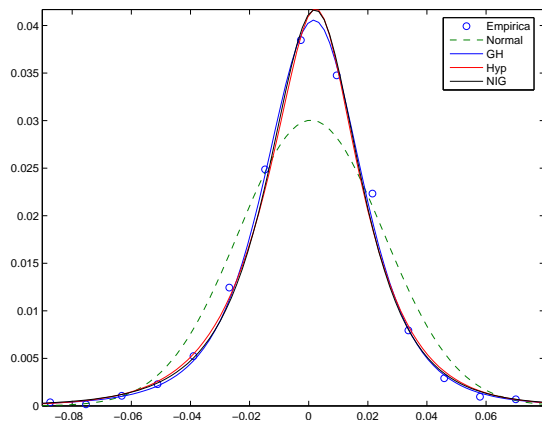


Figura 3.4 Densidade do Ibovespa: Empírica x Estimadas.

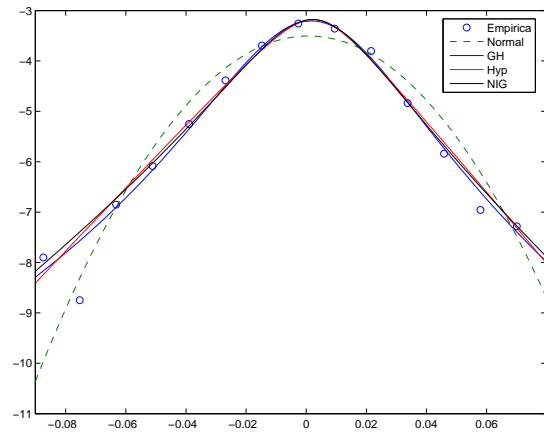


Figura 3.5 Log-densidade do Ibovespa: Empírica x Estimadas.

entre -1.72 e -2.58, que é similar aos resultados encontrados por Prause (1999) e Fajardo & Farias (2004).

Apesar da percepção do ajuste visual, fizemos testes mais formais para verificar esse grau de ajuste, como veremos na seção 3.6.

3.5.1 Observação sobre a Estimação

Apesar de haver uma aparente superparametrização, em muitos casos as restrições $\lambda = 1$ e $\lambda = -0,5$ podem ser facilmente rejeitadas, conforme mostra a tabela abaixo. Na verdade apenas Bradesco e Vale do Rio Doce não são rejeitadas para a NIG (a 1%) e Cia Siderúrgica Nacional não pode ser rejeitada para a Hyp (a 1%).

Tabela 3.4 Teste de Log Likelihood Ratio.

| | NIG | | Hyp | |
|-------|---------|---------------|---------|---------------|
| | Stats | P-Value | Stats | P-Value |
| Bbdc4 | 4,8191 | 0,0281 | 16,7760 | 4,21E-05 |
| Cmig4 | 15,8190 | 6,97E-05 | 27,2280 | 1,81E-07 |
| Csna3 | 10,6900 | 0,0011 | 4,0304 | 0,0447 |
| Ebtp4 | 15,3180 | 9,08E-05 | 28,7640 | 8,18E-08 |
| Elet6 | 21,9680 | 2,77E-06 | 39,0690 | 4,09E-10 |
| Ibov | 25,6860 | 4,02E-07 | 57,6980 | 3,05E-14 |
| Itau4 | 11,7790 | 0,0006 | 8,0798 | 0,0045 |
| Petr4 | 13,0890 | 0,0003 | 44,8710 | 2,10E-11 |
| Tcsl4 | 11,2860 | 0,0008 | 19,5190 | 9,96E-06 |
| Tlpp4 | 18,3870 | 1,80E-05 | 34,6710 | 3,90E-09 |
| Tnlp4 | 7,6356 | 0,0057 | 19,3290 | 1,10E-05 |
| Vale5 | 6,1657 | 0,0130 | 21,8440 | 2,96E-06 |

3.5.2 Verificando a Precisão do Algoritmo de Estimação

Para verificarmos se o algoritmo consegue fazer uma boa estimação dos parâmetros utilizamos a mesma abordagem já utilizada por Prause (1999), que fez simulações de Monte Carlo e mostrou que o algoritmo de estimação, para uma quantidade de dados acima de 1000, possuía bastante estabilidade.

Nossa simulação de Monte Carlo utilizou os parâmetros estimados para o Ibovespa e compreendeu a geração de 10.000 amostras aleatórias, baseadas numa distribuição GH (e suas subclasses), cada uma com 3.000 números⁷. Em seguida foi rodado o algoritmo de estimação para cada uma das 10.000 amostras e os resultados estão na tabela 3.5.

Ao olhar a tabela, percebemos que há uma boa precisão do algoritmo de estimação, não havendo grande Coeficiente de Variação para nenhuma das subclasses e nenhum parâmetro. Este resultado está de acordo com o obtido por Prause (1999).

3.6 Testando o Ajuste aos Dados

Nesta seção testamos o ajuste dos dados, e para isso utilizaremos os seguintes testes e distâncias:

- Teste χ^2 : este teste foi utilizado por Eberlein & Keller (1995) e Fajardo *et al.* (2001). Ele não é recomendável para se avaliar distribuições contínuas (veja Press *et al.* (1992)). Por outro lado, apesar de que o teste χ^2 tende a rejeitar a hipótese nula para amostras grandes, nossos testes não retratam isso (tabela 3.6).

⁷Foram utilizados 3.000 números aleatórios em cada amostra por que a maioria das séries possui 2.948 dados.

Tabela 3.5 Resultados da Simulação de Monte Carlo.

| | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | λ | δ | μ |
|--------------------------|------------------|-----------------|-----------|----------|---------|
| GH Univariada | | | | | |
| Parâmetros Base | 0,77440 | -0,11020 | -1,01810 | 0,02590 | 0,00260 |
| Média | 0,80747 | -0,09816 | -0,72486 | 0,02354 | 0,00268 |
| Mediana | 0,80003 | -0,09684 | -0,99997 | 0,02496 | 0,00268 |
| Desvio Padrão | 0,03094 | 0,01134 | 0,10714 | 0,00096 | 0,00017 |
| Coefficiente de Variação | 0,03832 | 0,11555 | 0,14780 | 0,04060 | 0,06323 |
| Hyp Univariada | | | | | |
| Parâmetros Base | 0,71680 | -0,05952 | 1 | 0,01062 | 0,00296 |
| Média | 0,74048 | -0,05903 | 1 | 0,01084 | 0,00295 |
| Mediana | 0,72224 | -0,05864 | 1 | 0,01072 | 0,00296 |
| Desvio Padrão | 0,03996 | 0,00604 | 0,0 | 0,00049 | 0,00019 |
| Coefficiente de Variação | 0,05397 | 0,10235 | 0,0 | 0,04537 | 0,06473 |
| NIG Univariada | | | | | |
| Parâmetros Base | 0,89769 | -0,08786 | -0,5 | 0,02234 | 0,00276 |
| Média | 0,89715 | -0,08965 | -0,5 | 0,02229 | 0,00279 |
| Mediana | 0,88172 | -0,09084 | -0,5 | 0,02213 | 0,00275 |
| Desvio Padrão | 0,02757 | 0,00905 | 0,0 | 0,00029 | 0,00018 |
| Coefficiente de Variação | 0,03073 | 0,10092 | 0,0 | 0,01304 | 0,06330 |

- Distância de Kolmogorov: este teste é mais adequado do que o teste χ^2 para distribuições contínuas. Seu cálculo é dado por:

$$KS = \max_{x \in \mathbb{R}} |F_{emp}(x) - F_{est}(x)|, \quad (3.34)$$

onde F_{emp} significa a função de distribuição acumulada empírica, e F_{est} a função distribuição acumulada estimada.

- Distância de Kuiper: esta é uma outra forma de se avaliar distâncias entre distribuições contínuas. A principal diferença entre as distâncias de Kuiper e de Kolmogorov é que a primeira considera as distâncias “para cima” e “para baixo” diferentes, enquanto que na última todas as distâncias são consideradas igualmente. A fórmula da distância de Kuiper é:

$$KP = \max_{x \in \mathbb{R}} \{F_{emp}(x) - F_{est}(x)\} + \max_{x \in \mathbb{R}} \{F_{est}(x) - F_{emp}(x)\}. \quad (3.35)$$

- Distância de Anderson & Darling: A principal diferença entre essa distância e a distância de Kolmogorov é que a primeira presta mais atenção às distâncias nas caudas da distribuição (Hurst *et al.* 1995).

$$AD = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|F_{emp}(x) - F_{est}(x)|}{\sqrt{F_{est}(x)(1 - F_{est}(x))}}. \quad (3.36)$$

Em seguida apresentamos os resultados obtidos:

3.6.1 Teste χ^2

Da tabela 3.6 percebemos que ao nível de significância de 1% não podemos rejeitar a hipótese nula de que a distribuição empírica é do tipo GH para Bbdc4, Ebt4, Elet6, Ibov, Tcsl4, Tlpp4, Tnlp4 e Vale5, perfazendo um total de 8 em 12 ativos selecionados. Nos casos das subclasses NIG e Hyp, as Elet6 e Ibov passam a ser rejeitadas, sobrando 6 em 12 ativos. Como seria de esperar, a hipótese de que seguem uma distribuição Normal é rejeitada para todos os ativos em questão.

Tabela 3.6 Teste χ^2 .

| | Normal | | | GH | | | NIG | | | Hyp | | |
|-------|--------|--------|----|-------|---------------|----|-------|---------------|----|-------|---------------|----|
| | Stat | pValue | DF | Stat | pValue | DF | Stat | pValue | DF | Stat | pValue | DF |
| Bbdc4 | 273,49 | 0,0000 | 14 | 21,25 | 0,2182 | 16 | 20,77 | 0,2422 | 16 | 26,57 | 0,0537 | 16 |
| Cmig4 | 180,42 | 0,0000 | 16 | 33,76 | 0,0041 | 16 | 35,71 | 0,0018 | 16 | 37,69 | 0,0007 | 16 |
| Csna3 | 257,35 | 0,0000 | 25 | 65,99 | 2,41E-06 | 26 | 70,20 | 2,98E-07 | 26 | 60,30 | 3,32E-05 | 26 |
| Ebt4 | 120,22 | 0,0000 | 15 | 10,42 | 0,8027 | 14 | 16,07 | 0,3965 | 14 | 20,49 | 0,1494 | 14 |
| Elet6 | 226,33 | 0,0000 | 20 | 32,82 | 0,0260 | 19 | 46,09 | 0,0003 | 20 | 50,87 | 1,34E-05 | 19 |
| Ibov | 275,85 | 0,0000 | 14 | 19,91 | 0,2282 | 15 | 31,70 | 0,0052 | 15 | 53,11 | 5,23E-08 | 15 |
| Itau4 | 297,64 | 0,0000 | 24 | 46,46 | 0,0026 | 24 | 52,04 | 0,0003 | 24 | 46,49 | 0,0026 | 24 |
| Petr4 | 419,10 | 0,0000 | 19 | 43,76 | 0,0008 | 20 | 50,24 | 4,18E-05 | 20 | 72,40 | 1,29E-10 | 20 |
| Tcsl4 | 113,14 | 0,0000 | 15 | 19,15 | 0,2089 | 14 | 22,25 | 0,1291 | 15 | 24,60 | 0,0438 | 14 |
| Tlpp4 | 139,44 | 0,0000 | 11 | 8,44 | 0,6986 | 10 | 10,91 | 0,5649 | 11 | 11,49 | 0,4268 | 10 |
| Tnlp4 | 151,15 | 0,0000 | 14 | 12,41 | 0,5991 | 13 | 13,99 | 0,6226 | 15 | 19,20 | 0,2065 | 14 |
| Vale5 | 262,50 | 0,0000 | 13 | 18,48 | 0,3080 | 15 | 16,80 | 0,4184 | 15 | 22,85 | 0,1099 | 15 |

3.6.2 Distância de Kolmogorov

Na tabela 3.7 apresentamos as distâncias de Kolmogorov e os respectivos p-values do teste, que, no caso, possui como hipótese nula: “Distribuição Empírica segue a Distribuição Teórica”. A tabela mostra os resultados considerando como possíveis distribuições empíricas a Normal, a GH e suas principais subclasses (NIG e Hyp). Ao analisarmos a tabela, percebemos que a 1% somente podemos rejeitar a hipótese nula para a GH e suas subclasses para Bbdc4, Csna3 e Itau4, enquanto que no caso da Normal a hipótese nula pode ser rejeitada para TODOS os ativos.

Tabela 3.7 Distâncias de Kolmogorov.

| | Normal | | GH | | NIG | | Hyp | |
|-------|--------|----------|--------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
| | KS | pValue | KS | pValue | KS | pValue | KS | pValue |
| Bbdc4 | 0,0562 | 1,53E-08 | 0,0412 | 0,0001 | 0,0392 | 0,0002 | 0,0372 | 0,0006 |
| Cmig4 | 0,0449 | 1,34E-05 | 0,0216 | 0,1265 | 0,0207 | 0,1583 | 0,0205 | 0,1671 |
| Csna3 | 0,0583 | 3,83E-09 | 0,0530 | 1,24E-07 | 0,0535 | 9,01E-08 | 0,0524 | 1,84E-07 |
| Ebt4 | 0,0464 | 5,14E-04 | 0,0164 | 0,6796 | 0,0183 | 0,5404 | 0,0176 | 0,5894 |
| Elet6 | 0,0447 | 1,43E-05 | 0,0195 | 0,2100 | 0,0175 | 0,3220 | 0,0164 | 0,4063 |
| Ibov | 0,0612 | 4,69E-10 | 0,0123 | 0,7611 | 0,0147 | 0,5460 | 0,0144 | 0,5754 |
| Itau4 | 0,0559 | 2,12E-08 | 0,0361 | 0,0009 | 0,0378 | 0,0005 | 0,0369 | 0,0007 |
| Petr4 | 0,0659 | 1,38E-11 | 0,0216 | 0,1262 | 0,0224 | 0,1039 | 0,0219 | 0,1160 |
| Tcsl4 | 0,0465 | 5,03E-04 | 0,0158 | 0,7231 | 0,0144 | 0,8208 | 0,0144 | 0,8245 |
| Tlpp4 | 0,0608 | 1,41E-06 | 0,0182 | 0,5463 | 0,0207 | 0,3811 | 0,0217 | 0,3274 |
| Tnlp4 | 0,0569 | 8,17E-06 | 0,0143 | 0,8287 | 0,0127 | 0,9174 | 0,0142 | 0,8345 |
| Vale5 | 0,0630 | 1,27E-10 | 0,0239 | 0,0689 | 0,0228 | 0,0933 | 0,0217 | 0,1218 |

3.6.3 Distância de Kuiper

Na tabela 3.8, temos as distâncias de Kuiper. A hipótese nula do teste associado à distância de Kuiper, da mesma forma que o da distância de Kolmogorov, é que a distribuição empírica segue uma determinada distribuição teórica. Mais uma vez a performance das distribuições GH e suas subclasses se sobressaem com relação à Normal. A hipótese nula quando a distribuição teórica é a GH ou uma de suas subclasses não pode ser rejeitada para Ebtp4, Elet6, Ibov, Petr4, Tcsl4, Tlpp4 e Tnlp4, ou seja, 7 em 12 ativos. Além disso, mesmo quando a hipótese nula é rejeitada a distância avaliada para a GH e suas subclasses é menor do que a da distribuição Normal, cuja hipótese é rejeitada para TODOS os ativos mais uma vez.

Tabela 3.8 Distâncias de Kuiper.

| | Normal | | GH | | NIG | | Hyp | |
|-------|--------|----------|--------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|
| | KP | pValue | KP | pValue | KP | pValue | KP | pValue |
| Bbdc4 | 0,1097 | 3,16E-29 | 0,0618 | 1,32E-08 | 0,0615 | 1,64E-08 | 0,0610 | 2,36E-08 |
| Cmig4 | 0,0831 | 2,80E-16 | 0,0427 | 0,0008 | 0,0427 | 0,0009 | 0,0426 | 0,0009 |
| Csna3 | 0,1015 | 8,52E-25 | 0,1004 | 3,17E-24 | 0,1004 | 2,89E-24 | 0,1001 | 4,55E-24 |
| Ebtp4 | 0,0919 | 1,06E-12 | 0,0331 | 0,2193 | 0,0367 | 0,1058 | 0,0365 | 0,1105 |
| Elet6 | 0,0882 | 1,69E-18 | 0,0314 | 0,0623 | 0,0283 | 0,1485 | 0,0265 | 0,2272 |
| Ibov | 0,1194 | 6,16E-35 | 0,0223 | 0,5120 | 0,0270 | 0,2043 | 0,0283 | 0,1466 |
| Itau4 | 0,0987 | 2,84E-23 | 0,0627 | 8,18E-09 | 0,0642 | 2,72E-09 | 0,0635 | 4,53E-09 |
| Petr4 | 0,1248 | 3,03E-38 | 0,0339 | 0,0276 | 0,0337 | 0,0295 | 0,0336 | 0,0305 |
| Tcsl4 | 0,0815 | 8,09E-10 | 0,0407 | 0,0404 | 0,0421 | 0,0276 | 0,0407 | 0,0409 |
| Tlpp4 | 0,1192 | 4,08E-22 | 0,0330 | 0,2239 | 0,0366 | 0,1085 | 0,0363 | 0,1159 |
| Tnlp4 | 0,1116 | 3,24E-19 | 0,0209 | 0,9101 | 0,0228 | 0,8207 | 0,0243 | 0,7365 |
| Vale5 | 0,1164 | 4,06E-33 | 0,0446 | 0,0003 | 0,0444 | 0,0004 | 0,0442 | 0,0004 |

3.6.4 Distância Anderson & Darling

A última distância avaliada, mas não menos importante é a distância de Anderson & Darling. Seus resultados estão na tabela 3.9. A diferença primordial desta distância, conforme já dito anteriormente, é que ela dá maior peso às caudas da distribuição. Podemos perceber que a distribuição Normal possui péssimo desempenho, isso devido ao fato estilizado de que os retornos dos ativos segue uma distribuição com caudas mais grossas do que a da Normal. Além disso, com os 5 parâmetros das distribuições do tipo GH, a modelagem nas caudas fica mais configurável, o que permite um melhor ajuste também.

3.7 Conclusão

Neste capítulo caracterizamos o Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado (MGHG) e suas subclasses e exploramos algumas de suas características. Foi demonstrado que ele é um processo de Lévy e algumas de suas propriedades. Em seguida, verificamos empiricamente se o modelo apresentado se ajusta aos dados de ações brasileiras. O resultado obtido é que, segundo métricas tradicionais como distância de Kolmogorov, de Kuiper e

Tabela 3.9 Distâncias de Anderson & Darling.

| | | | | |
|-------|-----------|---------------|---------------|---------------|
| Bbdc4 | 61.329 | 0,0825 | 0,1225 | 0,3032 |
| Cmig4 | 1.000.200 | 0,0940 | 0,3205 | 0,7434 |
| Csna3 | 22 | 0,1061 | 0,1071 | 0,1048 |
| Ebtp4 | 19.172 | 0,0722 | 0,1330 | 0,2472 |
| Elet6 | 27.540 | 0,0497 | 0,1134 | 0,1873 |
| Ibov | 47.442 | 0,0416 | 0,0946 | 0,3154 |
| Itau4 | 36 | 0,0723 | 0,0756 | 0,0738 |
| Petr4 | 2.898 | 0,0433 | 0,0909 | 0,2530 |
| Tcsl4 | 1.540.800 | 0,3057 | 2,4821 | 9,4093 |
| Tlpp4 | 32.157 | 0,1075 | 0,2512 | 0,6188 |
| Tnlp4 | 29.471 | 0,0494 | 0,0666 | 0,1074 |
| Vale5 | 26.996 | 0,0477 | 0,0455 | 0,0855 |

de Anderson & Darling, o movimento geométrico Hiperbólico Generalizado se mostrou mais adequado do que o Movimento Browniano Geométrico. Além das métricas citadas, foi apresentada uma avaliação visual, mostrando que a distribuição subjacente ao MGHG se ajusta melhor às caudas grossas da distribuição dos retornos logarítmicos dos ativos, conseqüentemente, capturando melhor a leptocurticidade também.

Apreçamento de Derivativos Unidimensionais usando Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado

4.1 Introdução

Desde Black & Scholes (1973), fórmulas fechadas para opções de compra européias têm sido estudadas, mas muitos desses modelos assumem que os preços seguem um movimento geométrico Browniano, ou seja, a distribuição dos retornos logarítmicos dos ativos é uma Normal. Mais recentemente Prause (1999) e Raible (2000) apresentaram o processo de Lévy Hiperbólico Generalizado, onde eles assumem que os retornos logarítmicos dos ativos seguem uma distribuição Hiperbólica Generalizada (GH) ou uma de suas subclasses.

Fajardo & Farias (2004) mostraram de forma simplificada o apreçamento de derivativos brasileiros utilizando o até então recém utilizado Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado (MGHG).

O bom ajuste dos dados no capítulo anterior, bem como o pouco explorado assunto utilizando dados brasileiros foram duas grandes motivações para a elaboração deste capítulo.

4.2 Apreçamento de Derivativos Unidimensionais

Nesta seção discutiremos sobre alguns conceitos básicos a cerca de derivativos, mais notadamente opções, e também mostraremos como fazer o apreçamento de derivativos em que apenas um fator é estocástico.

4.2.1 Derivativos

Segundo Hull (2003) podemos definir um derivativo como:

Definição 4.1 (Derivativo). *É um instrumento financeiro cujo valor deriva dos valores de outras variáveis básicas que o referenciam.*

Os derivativos são também conhecidos como títulos contingentes e em geral as variáveis que referenciam derivativos são os preços de títulos negociados.

Um dos tipos mais usuais de derivativos é a opção, cujas variantes mais conhecidas são a *Call* ou opção de venda e a *Put* ou opção de venda.

Definição 4.2 (Opção). *Opção é um contrato que dá a seu detentor, ou comprador um direito sobre algo, mas não uma obrigação*

No caso então, uma opção de compra dá o direito a seu detentor de comprar algo, e uma opção de venda dá ao seu detentor o direito de vender algo.

Tradicionalmente uma opção possui os seguinte elementos:

- Preço de Exercício: Diz respeito ao preço pelo qual o direito pode ser exercido, ou seja, quanto o titular deve pagar (opção de compra) ou receber (opção de venda) ao lançador.
- Vencimento: Também chamado de maturidade, representa o prazo no qual o direito existe. No caso de opções do tipo americana, representa todo o período em que o direito pode ser exercido; no caso de opções do tipo européia, representa a data na qual o direito pode ser exercido.
- Ativo Objeto: É o ativo sob o qual existe o direito de compra ou de venda.
- Prêmio: É o valor do direito. O preço da opção. O titular paga ao lançador o prêmio para ter a opção.

4.2.2 Antecedentes

Inicialmente, os primeiros a relacionar a existência de uma única medida Martingal equivalente à existência de mercados completos foi Cox & Ross (1976), onde eles utilizaram a idéia da neutralidade ao risco.

Esse conceito foi formalizado por Dybvig & Ross (1987), que apresentaram o Teorema Fundamental do *Asset Pricing* (versão para espaços de estados finitos):

Teorema (Dybvig e Ross) 1: As seguintes condições nos preços P e retornos X são equivalentes:

1. Ausência de Arbitragem;
2. Existe uma regra de apreçamento linear positiva (preços de estado);
3. Algum agente com utilidade estritamente crescente está maximizando utilidade.

Eles também apresentam o seguinte Teorema de Representação da Regra de Apreçamento:

Teorema (Dybvig e Ross) 2: Seja um direito contingente com retornos iguais a (x_1, x_2, \dots, x_S) em cada possível estado da natureza do período seguinte. A Regra de Apreçamento linear positiva pode ser representada equivalentemente usando:

1. Um funcional linear $L(x)$ que é positivo: $c > 0 \Rightarrow L(c) > 0$;
2. Preços de estado $p \gg 0 : L(x) = \sum_{s=1}^S p_s x_s$;

3. Probabilidades neutras ao risco $q^* \gg 0, \sum_s q_s^* = 1$ com taxa livre de risco associada r : $L(x) = \frac{1}{1+r} E^*(x) \equiv \frac{1}{1+r} \sum_s q_s^* x_s$.
4. Uma densidade de preços de estado $\rho \gg 0$: $L(x) = E(\rho x) \equiv \sum_s q_s \rho_s x_s$.

Resumindo temos:

1. Ausência de Arbitragem
2. Existência de demanda ótima de algum agente que prefere mais a menos
3. Existência de Regra de Apreçamento Linear
4. Existência de Probabilidade Neutra ao Risco
5. Existência de Densidade de preços de Estado

Quando o espaço de estados é infinito temos (Harrison & Kreps (1979b) e Harrison & Kreps (1979a)) e:

- (2) a (5) são equivalentes, supondo que o agente pode escolher riqueza negativa e ilimitada e tem utilidade contínua em relação a L^2 .
- É sabido que, com bastante generalidade (5) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) também é válido.
- Back & Pliska (1991): Exemplo onde (1) e (2) são válidos, mas (3), (4) e (5) não.

Depois desse trabalho diversos autores estenderam os teoremas para casos com mercados em que existem fricções.

4.2.3 Conceitos Básicos de Cálculo Estocástico

Definição 4.3 (Processo de Itô). *Uma variável x segue o processo de Itô se seu processo de difusão pode ser escrito da seguinte forma:*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \quad (4.1)$$

Onde dz é o processo de Wiener e a e b são funções de x e t . A variável x possui tendência de a e taxa de variância de b^2 .

Definição 4.4 (Medida Equivalente). *Uma medida de probabilidade Q em (Ω, \mathcal{F}) é dita uma medida equivalente a P se para todo evento A , $Q(A) > 0$ se e somente se $P(A) > 0$*

Definição 4.5 (Martingal). *Um processo estocástico $(X_t)_{t>0}$ definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_{t \in [0, \infty)}, P)$ é chamado de Martingal com relação a \mathcal{F}_t se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. X_t é \mathcal{F}_t -mensurável e $E|X_t| < \infty \forall t \geq 0$.

$$2. E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ q.t.p. } \forall s \leq t$$

Teorema 4.1 (Radon-Nikodym). *Seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidade. Se Q é uma medida finita em F , e se $P(A) = 0$ implica $Q(A) = 0$ para todo $A \in F$, então existe uma única variável aleatória integrável e positiva tal que $Q(A) = E[1_A X]$. Denotamos esta nova variável por $X = \frac{dQ}{dP}$. (X é única q.t.p.)*

Demonstração. Veja Billingsley (1986). ■

Definição 4.6 (Medida Martingal Equivalente). *Uma medida de probabilidade equivalente Q é dita uma medida martingal equivalente para X se X for uma martingal relativamente a Q e se a derivada de Radon-Nikodym dQ/dP tiver variância finita.*

Definição 4.7 (Transformada de Esscher). *Seja L um processo de Lévy em algum espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$. Chamamos uma transformada de Esscher qualquer mudança de P para uma medida localmente equivalente Q com processo $Z_t = \frac{dQ}{dP}|_{F_t}$ da forma:*

$$Z_t = \frac{\exp(\theta L_t)}{mgf(\theta)^t}, \quad (4.2)$$

onde mgf representa a função geradora de momentos.

Lema 4.1. *Seja o processo de preços dado por (1), com as hipóteses 1 e 2 satisfeitas. Então a medida de probabilidade P é localmente equivalente à medida Q tal que o processo $\exp(-rt)S_t = S_0 \exp(L_t)$ é um Q -martingal. Um processo de densidade que leva a tal medida Q é dado pela transformada de Esscher (Equação 4). O valor de θ é unicamente determinado como a solução de :*

$$mgf(\theta) = mgf(\theta + 1), \theta \in (a, b).$$

Teorema 4.2 (Girsanov). *Seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidade e $(B_t)_{t > 0}$ um Movimento Browniano em relação a P e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in L^2$, definimos a seguinte variável aleatória:*

$$\eta_t(\theta) = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s \cdot \theta_s ds\right)$$

Se $E[\exp(\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s \cdot \theta_s ds)] < \infty$, temos que $E(\eta_t(\theta)) = 1$ para todo t e $\eta_t(\theta) > 0$ q.t.p. e podemos definir uma nova probabilidade:

$$Q(A) = E^P(1_A \eta_t(\theta))$$

ou

$$\frac{dQ}{dP}|_{F_t} = \eta_t(\theta)$$

Nesse caso temos que $B_t^\theta = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ é um movimento browniano sob Q .

Demonstração. Veja Applebaum (2004), Karatzas & Shreve (1991) ou Protter (1995). ■

Teorema 4.3 (Lema de Itô). *Suponha que o valor de uma variável x siga o processo de Itô:*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

O lema de Itô mostra que uma função G , de x e t segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

onde dz é o mesmo processo de Wiener da equação anterior. Logo G também segue o processo de Itô.

Demonstração. Veja Applebaum (2004), Karatzas & Shreve (1991) ou Protter (1995). ■

Definição 4.8 (Densidade de Preços de Estado). *Seja o seguinte problema: Escolher consumos $C \equiv \{c_0, c_1, \dots, c_\Omega\}$ de forma a maximizar a utilidade $U(C)$ sujeito à restrição orçamentária:*

$$c_0 + \sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega c_\omega = W$$

No caso de preferências separáveis no tempo (von Neumann-Morgenstern) temos $U(C) = v(c_0) + \sum_{\omega} \pi_\omega u(c_\omega)$, onde π_ω é a probabilidade do estado ω . Nesse caso as condições de primeira ordem são:

$$v'(c_0) = \lambda,$$

e para todo $\omega = 1, 2, \dots, \Omega$,

$$u'(c_\omega) = \lambda \rho_\omega,$$

onde $\rho_\omega \equiv p_\omega / \pi_\omega$ é a densidade de preços de estado, também chamado de fator de desconto estocástico ou ainda “pricing kernel”.

4.2.4 Apreçamento de Derivativos

Os derivativos, segundo a própria definição, dependem do preço dos ativos objetos, e portanto um modelo de apreçamento de derivativos necessita anteriormente da modelagem do processo estocástico de preços do ativo objeto correspondente.

O modelo de Black & Scholes (1973) parte do princípio de que os preços seguem um movimento Browniano Geométrico¹ e portanto seguem o seguinte processo de difusão:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{4.3}$$

¹No capítulo 2 apresentamos o movimento Browniano Geométrico e algumas de suas propriedades.

onde S é o preço do ativo; μ e σ são respectivamente a média e o desvio padrão do processo; dS é a variação no nível do preço do ativo durante um intervalo de tempo dt e dz é um processo de Wiener. Podemos reescrever a equação acima em termos de retornos, obtendo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \quad (4.4)$$

Dessa forma o retorno de um ativo pode ser decomposto em duas partes, uma determinística e uma aleatória.

Com base no lema de Itô, podemos calcular o processo de um título contingente cujo preço derive do preço de um ativo objeto que segue o processo de Itô. Temos então que, se $C(t, S)$ é um direito contingente que depende do tempo e do preço do ativo S que segue um processo de Itô, temos que:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} \mu S + \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} \sigma S \right) dz. \quad (4.5)$$

O grande pulo, necessário para a obtenção da fórmula de Black and Scholes é que como temos um processo de Itô, os componentes de risco do direito contingente é o mesmo do ativo objeto, permitindo que façamos uma carteira sem risco e portanto possamos apreçar o direito contingente. Consideremos, então, uma carteira composta por uma posição vendida em uma *call* e comprada em uma fração do respectivo ativo-objeto:

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S. \quad (4.6)$$

Temos então que o processo que governa as variações de preço pode ser escrito como:

$$dP = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS. \quad (4.7)$$

Utilizando o lema de Itô e substituindo os processos de variações de preços, podemos cancelar o componente estocástico:

$$dP = - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt. \quad (4.8)$$

Com isso, consegue-se construir uma carteira sem risco, que deve ter a mesma remuneração de um ativo livre de risco², nos permitindo encontrar a equação diferencial parcial de Black and Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0. \quad (4.9)$$

Essa equação é válida independentemente da estrutura do *pay-off* de C . Podemos trabalhar também, utilizando a abordagem da neutralidade ao risco. Nesse caso, teríamos

²Desde o primeiro instante várias hipóteses estão subjacentes ao modelo, sendo uma das mais importantes, a ausência de arbitragem.

que o preço de um derivativo seria apenas o valor esperado de seu pay-off descontado para valor presente. Esse valor esperado seria tomado numa medida de probabilidade neutra ao risco.

$$C = E_t^* \left[e^{-\int_t^T r_u du} \text{pay-off}(C) \right]. \quad (4.10)$$

No caso de uma call europeia com pay-off:

$$C_T = \max(0, S_T - K), \quad (4.11)$$

e com taxa de juros constante ao longo do tempo, temos (ver Hull (2003) e Clewlow & Strickland (1998)):

$$C = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(0, S_T - K) g(S_T) dS_T, \quad (4.12)$$

onde K é o preço de exercício, S_T é o preço do ativo-objeto no vencimento, $g(S_T)$ é a distribuição de probabilidade do preço do ativo objeto no vencimento e r é a taxa de juros.

Da equação 4.3 e fazendo $x = \ln(S)$, usando o Lema de Itô, temos o processo de preços para $\ln(S)$:

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz. \quad (4.13)$$

Temos então que $d(\ln S)$ é normalmente distribuído com média $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$ e variância $\sigma^2 dt$. Daí:

$$\ln S_T - \ln S \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma \sqrt{T-t} \right], \quad (4.14)$$

onde N representa a distribuição Normal. Usando as propriedades da distribuição Normal e isolando $\ln S_T$ temos que:

$$\ln S_T \sim N \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma \sqrt{T-t} \right]. \quad (4.15)$$

Fazendo $\mu = r$ (avaliação neutra ao risco) e resolvendo com base na equação 4.12 obtemos a fórmula fechada de Black and Scholes:

$$c = SN(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (4.16)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

e $N(x)$ representa a distribuição acumulada de uma Normal com média 0 e desvio-padrão 1. Podemos escrever 4.16 também da seguinte forma:

$$c = e^{-r(T-t)}[SN(d_1)e^{r(T-t)} - XN(d_2)], \tag{4.17}$$

que fornece uma interpretação coerente com a abordagem neutra ao risco, pois temos que o preço da call nada mais é do que o valor esperado do *pay-off*, mas utilizando-se uma mudança na densidade dos retornos dos ativos, que é a chamada medida martingal equivalente.

De uma forma geral, o processo de apreçamento de derivativos está firmado na idéia de se encontrar uma medida martingal equivalente e calcular o valor esperado presente do pay-off.

4.3 Convolução das Distribuições Hiperbólicas Generalizadas

O primeiro passo para o apreçamento de derivativos é calcular a convolução da distribuição GH, exceto para a subclasse NIG, uma vez que ela possui a propriedade de ser fechada sob convolução³ que é calculada de acordo com a fórmula abaixo:

$$nig^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = nig(x; \alpha, \beta, t\delta, t\mu). \tag{4.18}$$

Para resolver o problema da convolução usando outras subclasses, utilizamos transformadas de Fourier⁴. A função característica de uma distribuição é obtida utilizando-se uma transformação de Fourier, além disso a multiplicação das características é equivalente à convolução das distribuições (ver Billingsley (1986)). Então, para obtermos a convolução das distribuições GH temos que fazer:

1. Aplicar a transformada de Fourier na densidade estimada da distribuição GH.
2. Multiplicamos essa transformada tantas vezes quantas convoluções necessitamos.
3. Aplicamos a transformada inversa de Fourier para obtermos a t-convolução da GH.

Para simplificar os cálculos utilizamos uma distribuição simétrica e centralizada ($\beta, \mu = 0$) para garantirmos que as funções sejam reais (Press *et al.* 1992). Desta forma, seguimos Prause (1999) e encontramos uma distribuição GH como função de uma GH simétrica e centralizada. Essa função é dada por:

$$GH^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = \frac{e^{\beta x}}{M_0^t(\beta)} gh^{*t}(x - \mu t; \lambda, \alpha, 0, \delta, 0), \tag{4.19}$$

³Se uma distribuição é fechada sob convolução, temos que a convolução de uma distribuição é uma outra distribuição pertencente à mesma classe. O Exemplo mais comum é o da distribuição Normal.

⁴Para maiores detalhes sobre as possíveis aplicações de transformadas de Fourier, sugerimos Brigham (1988).

onde $M'_0(\beta)$ representa a função geradora de momentos para uma distribuição simétrica, elevada à potência t . Em seguida aplicamos a transformada de Fourier na GH simétrica e centralizada obtendo (4.20). Por fim aplicamos a transformada inversa de Fourier, mas isso não nos leva a uma solução analítica.

$$GH^{*t}(x; \alpha, 0, \delta, 0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(ux) \varphi(u; \alpha, \delta \lambda)^t du. \quad (4.20)$$

Para resolvermos esse problema, utilizamos o algoritmo criado por Cooley & Tukey (1965) chamado de Fast Fourier Transformation (FFT). Para maiores detalhes sobre o algoritmo e também sobre suas aplicações, recomendamos Brigham (1988) e Press *et al.* (1992). O algoritmo FFT calcula a transformada de Fourier e também sua inversa de forma eficiente. A principal preocupação aqui é relacionada a transformações de variáveis do domínio da frequência para o tempo⁵. Após a aplicação do FFT temos a densidade da GH simétrica e centralizada com t convoluções. Para obtermos a densidade desejada, usamos (4.19).

4.4 Apreçamento de Opções Utilizando Transformações de Esscher

Para o apreçamento de opções com ativos subjacentes que seguem difusões governadas por processos de Lévy, precisamos encontrar uma medida martingal equivalente. No caso de um processo de Lévy contínuo, essa medida é única (ver Chan (1999) e Kannaan (1979)), mas para os demais casos, Esscher (1932) apresentou uma transformação que foi utilizada por Gerber & Shiu (1994) para o apreçamento de derivativos. No caso das distribuições GH, essa transformação para o mundo neutro ao risco é dada por:

$$GH^{*t, \vartheta}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda) = \frac{e^{\vartheta x}}{M^t(\vartheta)} GH^{*t}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda). \quad (4.21)$$

Para encontrarmos o parâmetro ϑ temos que resolver:

$$r = \ln \frac{M(\vartheta + 1)}{M(\vartheta)}. \quad (4.22)$$

Onde r é a taxa de juros livre de risco no mesmo período dos dados estimados e M é a função geradora de momentos. A solução para essa equação é obtida através de otimização numérica. O último passo é a obtenção dos preços de uma opção de compra do tipo européia. Para isso, seguimos Keller (1997).

$$C_{GH} = S_0 \int_{\ln \frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*t, \vartheta+1}(x) dx - e^{-rt} K \int_{\ln \frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*t, \vartheta}(x) dx, \quad (4.23)$$

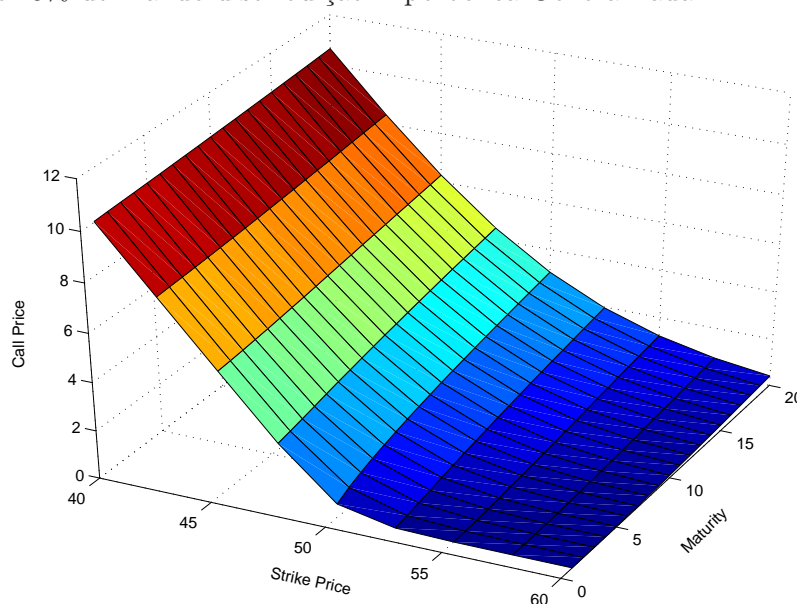
⁵Para detalhes sobre a transformação da variável e um exemplo em Matlab, veja Hanselman & Littlefield (2001).

onde K é o preço de exercício e S_0 é o preço atual do ativo subjacente. Nesse caso, a paridade Put-Call é válida:

$$P_{GH} = C_{GH} - S_0 + e^{-rt} K. \quad (4.24)$$

Temos, na figura 4.1 gráfico com o comportamento de uma opção de compra de Vale do Rio Doce quando mudamos alguns parâmetros e, conforme esperado, a maior sensibilidade do preço de Calls GH são quando estão *in the money*. Quando comparamos os preços de Calls GH e preços de Calls obtidas através do modelo Black & Scholes (1973) obtemos a figura 4.2 que contém a diferença entre os preços. Podemos ver o desejado *W-Shape*. A mesma análise pode ser feita com as subclasses Hyp e NIG.

Figura 4.1 Preços de uma opção de compra de Vale do Rio Doce com $S_0 = 50$ e taxa de juros livre de risco de 19% utilizando distribuição Hiperbólica Generalizada.



Para verificarmos o melhor apreçamento através do uso da distribuição GH fizemos dois ensaios. O primeiro consistiu em se calcular o preço pelo modelo Black and Scholes e GH e compará-los com o preço de mercado efetivo da opção, e o segundo ensaio consistiu em achar os *smiles* de volatilidade pelo método Black and Scholes e pelo GH.

Foi utilizada a amostra de Telemar (Tnlp4) porque suas opções de compra são as mais líquidas do mercado. Calculamos os preços para as opções de compra com vencimento em 15/05/2006, e calculamos os preços estimados a partir de 13/04/2006, que nos dá 20 dias úteis até o vencimento. Inicialmente mostramos, na tabela 4.1, os parâmetros de Esscher estimados para cada um dos dias.

Em seguida, na tabela 4.2 temos os preços de mercado no fechamento⁶ para os dias escolhidos e para os preços de exercício disponíveis, além dos preços da Telemar.

⁶Quando a opção tinha poucos negócios foi utilizado o preço médio entre a melhor oferta de compra

Figura 4.2 Preço Black and Scholes menos Preço GH de opção de compra de Vale do Rio Doce para diversos vencimentos e preços de exercício.

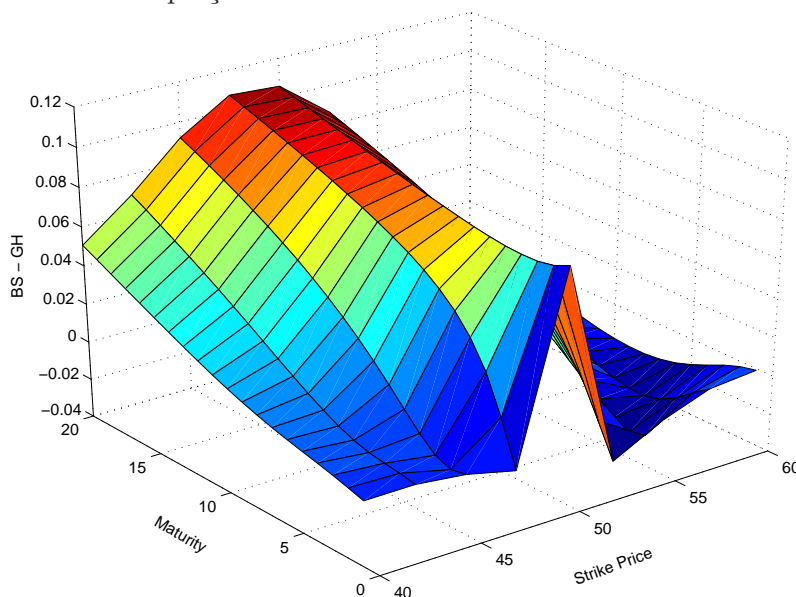


Tabela 4.1 Parâmetros de Esscher Estimados.

| Data | θ | Data | θ | Data | θ | Data | θ |
|-----------|----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| 13/4/2006 | -0,8588 | 24/4/2006 | -0,8635 | 2/5/2006 | -0,8860 | 9/5/2006 | -0,8847 |
| 17/4/2006 | -0,8452 | 25/4/2006 | -0,8559 | 3/5/2006 | -0,8719 | 10/5/2006 | -0,8984 |
| 18/4/2006 | -0,8770 | 26/4/2006 | -0,8499 | 4/5/2006 | -0,8805 | 11/5/2006 | -0,9030 |
| 19/4/2006 | -0,8776 | 27/4/2006 | -0,8849 | 5/5/2006 | -0,8806 | 12/5/2006 | -0,8644 |
| 20/4/2006 | -0,8797 | 28/4/2006 | -0,8773 | 8/5/2006 | -0,8922 | Média | -0,8676 |

Ao se analisar a tabela com os preços fica bem aparente que as opções mais *out-of-the-money* são menos líquidas não tendo negócios em vários dias.

Para ver o ajuste, calculamos os preços pelo Modelo Black and Scholes e GH e calculamos as diferenças para cada preço. As tabelas com esses resultados são as 4.3 e 4.4 respectivamente.

Ao analisarmos essas tabelas vemos que o modelo GH, em média possui menor erro que o Black and Scholes principalmente nas opções mais líquidas. A análise fica prejudicada nas menos líquidas devido ao pouco representativo preço de mercado. Com isso mostramos que o preço GH é melhor do que o de Black and Scholes, pois se aproxima mais do preço de mercado.

Por fim, verificamos o *smile* de volatilidade para os dois modelos. Eliminando-se as menos líquidas, devido à pouca informação carregada por elas, temos na figura 4.3 o *smile* de volatilidade observado através do modelo GH. E para possibilitar uma análise mais direta, na tabela 4.5 as estatísticas descritivas dos *smiles* de volatilidade de ambos os

e melhor oferta de venda no encerramento do pregão.

Tabela 4.2 Preços das Opções de Compra de Telemar com Vencimento em 15/05/2006.

| Data | Tnlp4 | Opção de Compra com Preço de Exercício | | | | | | | | | | | |
|-----------|-------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 28,49 | 30,49 | 32,49 | 34,49 | 36,49 | 38,49 | 40,49 | 42,49 | 44,49 | 46,49 | 48,49 | 50,49 |
| 13/4/2006 | 35,02 | 7,31 | 4,8 | 3,25 | 1,82 | 0,9 | 0,35 | 0,15 | 0,04 | 0,02 | | | |
| 17/4/2006 | 37 | 8,75 | | 4,8 | 3,02 | 1,75 | 0,94 | 0,48 | 0,25 | 0,12 | 0,05 | 0,02 | 0,02 |
| 18/4/2006 | 37,05 | | | 4,9 | 3,05 | 1,7 | 0,8 | 0,32 | 0,14 | 0,07 | 0,04 | 0,02 | 0,02 |
| 19/4/2006 | 37,19 | | 6,41 | 5,3 | 3,25 | 1,86 | 0,81 | 0,35 | 0,12 | 0,06 | 0,02 | 0,01 | |
| 20/4/2006 | 36,23 | | | 4,41 | 2,89 | 1,38 | 0,61 | 0,25 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | | |
| 24/4/2006 | 35,8 | | | 3,64 | 2 | 0,96 | 0,39 | 0,14 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | | |
| 25/4/2006 | 35,47 | | | 3,11 | 1,65 | 0,71 | 0,26 | 0,09 | 0,04 | 0,02 | | | |
| 26/4/2006 | 37,7 | | | 5,7 | 3,9 | 2,2 | 1,06 | 0,45 | 0,15 | 0,05 | 0,02 | | |
| 27/4/2006 | 37,25 | | | 5,5 | 3,4 | 1,78 | 0,77 | 0,28 | 0,09 | 0,04 | 0,01 | | |
| 28/4/2006 | 37,8 | | | 5,55 | 4,16 | 2,26 | 1,1 | 0,47 | 0,13 | 0,05 | 0,02 | | |
| 2/5/2006 | 36,95 | | | 4,95 | 2,89 | 1,46 | 0,62 | 0,2 | 0,06 | 0,03 | 0,02 | | |
| 3/5/2006 | 37,49 | | | 4,95 | 3,2 | 1,8 | 0,81 | 0,27 | 0,07 | 0,02 | | | |
| 4/5/2006 | 37,51 | | 7,51 | 4,92 | 3,05 | 1,63 | 0,78 | 0,25 | 0,07 | 0,02 | | | |
| 5/5/2006 | 38,25 | | | 6 | 3,84 | 2,6 | 1,3 | 0,57 | 0,18 | 0,06 | 0,02 | | |
| 8/5/2006 | 37,8 | | 7,31 | 5,5 | 3,3 | 1,8 | 0,93 | 0,41 | 0,16 | 0,05 | 0,01 | | |
| 9/5/2006 | 38,69 | 10,39 | 8,19 | 6,4 | 4,3 | 2,6 | 1,35 | 0,58 | 0,26 | 0,08 | 0,03 | | |
| 10/5/2006 | 38,99 | | | 5,99 | 4,15 | 2,5 | 1,63 | 0,39 | 0,1 | 0,03 | | | |
| 11/5/2006 | 36,6 | 8,01 | 6,21 | 3,73 | 1,86 | 0,52 | 0,13 | 0,03 | 0,02 | | | | |
| 12/5/2006 | 35,84 | | | 3,19 | 1,23 | 0,14 | 0,03 | | | | | | |

Tabela 4.3 Preço de Mercado - Preço Estimado por Black and Scholes.

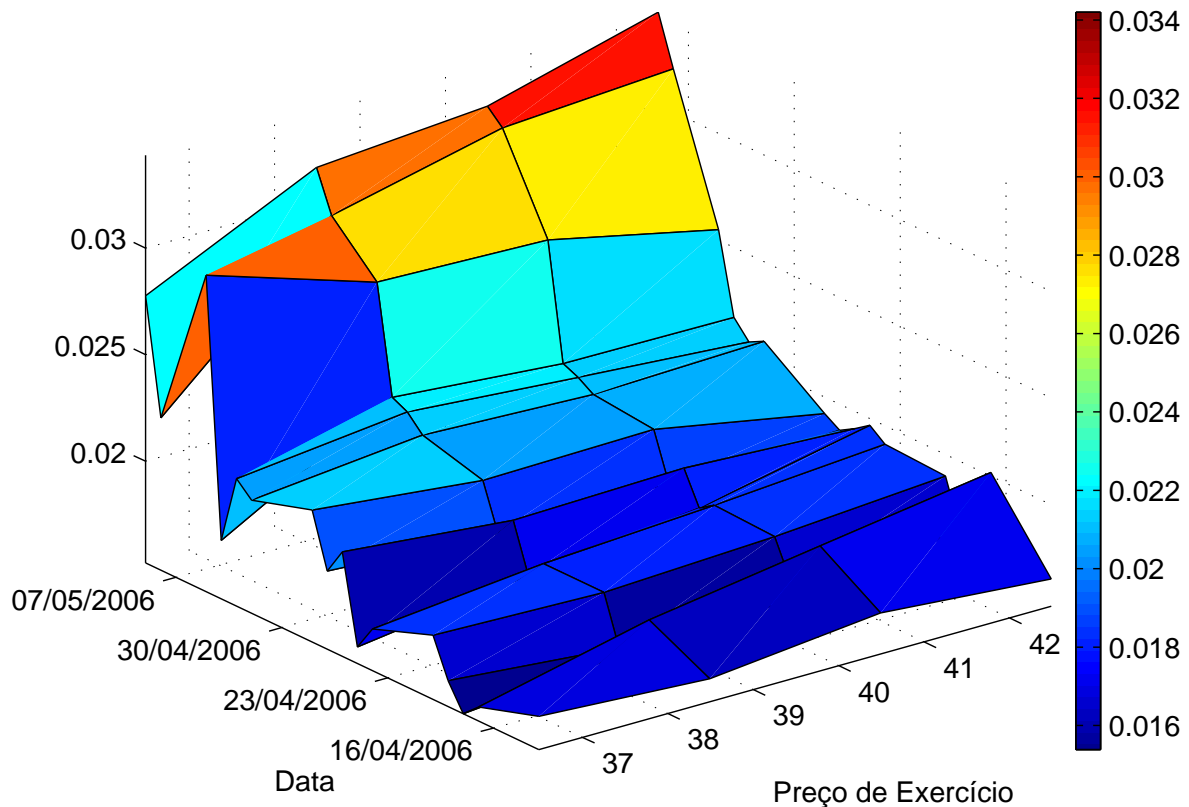
| Data | Opção de Compra com Preço de Exercício | | | | | | | | | | | |
|-----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 28,49 | 30,49 | 32,49 | 34,49 | 36,49 | 38,49 | 40,49 | 42,49 | 44,49 | 46,49 | 48,49 | 50,49 |
| 13/4/2006 | 0,17 | -0,6914 | -0,8108 | -1,0645 | -1,0694 | -0,9444 | -0,6709 | -0,46374 | -0,27996 | | | |
| 17/4/2006 | -0,1602 | | -0,645 | -0,9903 | -1,0821 | -0,978 | -0,7673 | -0,53065 | -0,35141 | -0,22546 | -0,13621 | -0,06621 |
| 18/4/2006 | | | -0,5506 | -0,9527 | -1,1139 | -1,0938 | -0,9017 | -0,61713 | -0,38197 | -0,22067 | -0,12568 | -0,05913 |
| 19/4/2006 | | -0,8083 | -0,2309 | -0,8089 | -0,9872 | -1,0986 | -0,8741 | -0,63273 | -0,38503 | -0,23373 | -0,12995 | |
| 20/4/2006 | | | -0,2917 | -0,4437 | -0,8682 | -0,8326 | -0,63234 | -0,41587 | -0,23926 | -0,13611 | | |
| 24/4/2006 | | | -0,5522 | -0,8485 | -0,8575 | -0,6991 | -0,4743 | -0,27731 | -0,13545 | -0,06971 | | |
| 25/4/2006 | | | -0,7784 | -0,934 | -0,8943 | -0,67092 | -0,41618 | -0,21895 | -0,10524 | | | |
| 26/4/2006 | | | -0,0196 | -0,2157 | -0,5865 | -0,71 | -0,6047 | -0,44065 | -0,26191 | -0,13595 | | |
| 27/4/2006 | | | 0,2145 | -0,3193 | -0,6679 | -0,7327 | -0,58052 | -0,37079 | -0,19163 | -0,09981 | | |
| 28/4/2006 | | | -0,1904 | 0,0618 | -0,4748 | -0,5986 | -0,51113 | -0,39789 | -0,21551 | -0,10541 | | |
| 2/5/2006 | | | 0,1218 | -0,3296 | -0,4904 | -0,4459 | -0,32474 | -0,17342 | -0,06436 | -0,01491 | | |
| 3/5/2006 | | | -0,3341 | -0,389 | -0,4105 | -0,4122 | -0,33434 | -0,19772 | -0,08681 | | | |
| 4/5/2006 | | 0,3403 | -0,3487 | -0,4999 | -0,5215 | -0,3782 | -0,30104 | -0,16203 | -0,06695 | | | |
| 5/5/2006 | | | 0,0592 | -0,286 | 0,0186 | -0,1295 | -0,12419 | -0,11512 | -0,05029 | -0,01651 | | |
| 8/5/2006 | | -0,0836 | 0,0732 | -0,2765 | -0,2288 | -0,02684 | 0,04187 | 0,04489 | 0,02054 | 0,003748 | | |
| 9/5/2006 | 0,125 | -0,0796 | 0,1183 | -0,047 | -0,0129 | 0,0499 | 0,06228 | 0,09731 | 0,039575 | 0,021964 | | |
| 10/5/2006 | | | -0,574 | -0,4489 | -0,2844 | 0,2643 | -0,12579 | -0,0463 | -0,00111 | | | |
| 11/5/2006 | -0,1431 | 0,0532 | -0,4482 | -0,4839 | -0,45492 | -0,14566 | -0,02103 | 0,013794 | | | | |
| 12/5/2006 | | | -0,2182 | -0,4046 | -0,35747 | -0,05471 | | | | | | |
| Média | -0,00208 | -0,21157 | -0,28452 | -0,50954 | -0,59706 | -0,50724 | -0,42001 | -0,27246 | -0,16216 | -0,10271 | -0,13061 | -0,06267 |

Tabela 4.4 Preço de Mercado - Preço Estimado por Modelo GH.

| Data | Opção de Compra com Preço de Exercício (GH) | | | | | | | | | | | |
|-----------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 28,49 | 30,49 | 32,49 | 34,49 | 36,49 | 38,49 | 40,49 | 42,49 | 44,49 | 46,49 | 48,49 | 50,49 |
| 13/4/2006 | 0,1243 | -0,7083 | -0,7993 | -1,0324 | -1,0276 | -0,9044 | -0,63889 | -0,44159 | -0,2673 | | | |
| 17/4/2006 | -0,2323 | | -0,665 | -0,9804 | -1,0509 | -0,9373 | -0,7286 | -0,50085 | -0,33208 | -0,21547 | -0,13263 | -0,06646 |
| 18/4/2006 | | | -0,5729 | -0,945 | -1,0836 | -1,0545 | -0,8644 | -0,58813 | -0,36412 | -0,21162 | -0,12311 | -0,05993 |
| 19/4/2006 | | -0,8636 | -0,2568 | -0,8042 | -0,9594 | -1,0602 | -0,8372 | -0,6048 | -0,3678 | -0,2257 | -0,12801 | |
| 20/4/2006 | | | -0,3054 | -0,4287 | -0,835 | -0,7958 | -0,60195 | -0,39589 | -0,22959 | -0,13335 | | |
| 24/4/2006 | | | -0,5658 | -0,8326 | -0,8262 | -0,6676 | -0,45254 | -0,26711 | -0,13353 | -0,07215 | | |
| 25/4/2006 | | | -0,789 | -0,9159 | -0,8633 | -0,64265 | -0,39885 | -0,21263 | -0,1059 | | | |
| 26/4/2006 | | | -0,0678 | -0,23 | -0,5702 | -0,6788 | -0,5746 | -0,42062 | -0,25388 | -0,13584 | | |
| 27/4/2006 | | | 0,1706 | -0,3283 | -0,648 | -0,7019 | -0,55441 | -0,35613 | -0,18813 | -0,10243 | | |
| 28/4/2006 | | | -0,2453 | 0,0415 | -0,4623 | -0,5697 | -0,48355 | -0,3813 | -0,21056 | -0,10797 | | |
| 2/5/2006 | | | 0,0689 | -0,344 | -0,4723 | -0,4202 | -0,30949 | -0,17127 | -0,06994 | -0,02168 | | |
| 3/5/2006 | | | -0,3987 | -0,4168 | -0,4003 | -0,387 | -0,31694 | -0,19446 | -0,09233 | | | |
| 4/5/2006 | | 0,2549 | -0,4164 | -0,5312 | -0,5134 | -0,3535 | -0,28515 | -0,16121 | -0,07399 | | | |
| 5/5/2006 | | | -0,0203 | -0,3359 | 0,0119 | -0,1074 | -0,10402 | -0,11122 | -0,05703 | -0,02527 | | |
| 8/5/2006 | | -0,1722 | -0,0096 | -0,332 | -0,2342 | -0,00551 | 0,05013 | 0,03682 | 0,010007 | -0,00293 | | |
| 9/5/2006 | 0,031 | -0,1711 | 0,0289 | -0,1239 | -0,0459 | 0,065 | 0,07762 | 0,09158 | 0,027427 | 0,01368 | | |
| 10/5/2006 | | | -0,0043 | -0,2265 | -0,3327 | 0,2741 | -0,10902 | -0,05331 | -0,01396 | | | |
| 11/5/2006 | -0,2287 | -0,0308 | -0,2332 | -0,1343 | -0,44059 | -0,13964 | -0,03402 | 0,004674 | | | | |
| 12/5/2006 | | | -0,2971 | -0,4337 | -0,33952 | -0,06549 | | | | | | |
| Média | -0,07643 | -0,28185 | -0,28308 | -0,49128 | -0,58387 | -0,48171 | -0,3981 | -0,26264 | -0,16016 | -0,10339 | -0,12792 | -0,06319 |

modelos.

Figura 4.3 Smile de Volatilidade do Modelo GH



Verificamos, ao analisar a tabela, que o modelo GH consistente mente, para os dias analisados, apresentou menor coeficiente de variação do que o modelo Black and Scholes, o que significa que há um menor efeito *smile* de volatilidade, conforme anteriormente falado. Não utilizamos todos os dias para a análise porque para alguns dias os modelos não foram capazes de encontrar a volatilidade implícita, logo esses dias foram retirados da amostra.

4.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos o apreçamento de derivativos cujos ativos subjacentes seguem um movimento geométrico hiperbólico generalizado. Mostramos que as distribuições GH melhoram o apreçamento de derivativos bem como diminui o *smile* de volatilidade.

Tabela 4.5 Estatísticas descritivas das volatilidades implícitas calculadas.

| Data | Hiperbólica Generalizada | | | Black and Scholes | | | $CV_{BS} - CV_{GH}$ |
|-----------|--------------------------|---------|------------|-------------------|---------|------------|---------------------|
| | Média | Desvio | Coef. Var. | Média | Desvio | Coef. Var. | |
| 13/4/2006 | 0,01670 | 0,00037 | 0,02192 | 0,01689 | 0,00039 | 0,02311 | 0,00119 |
| 17/4/2006 | 0,01819 | 0,00088 | 0,04817 | 0,01843 | 0,00181 | 0,09806 | 0,04989 |
| 18/4/2006 | 0,01625 | 0,00092 | 0,05683 | 0,01646 | 0,00097 | 0,05912 | 0,00228 |
| 19/4/2006 | 0,01640 | 0,00046 | 0,02781 | 0,01668 | 0,00053 | 0,03188 | 0,00407 |
| 20/4/2006 | 0,01841 | 0,00042 | 0,02278 | 0,01872 | 0,00049 | 0,02630 | 0,00352 |
| 24/4/2006 | 0,01821 | 0,00083 | 0,04532 | 0,01860 | 0,00098 | 0,05286 | 0,00755 |
| 25/4/2006 | 0,01771 | 0,00155 | 0,08770 | 0,01816 | 0,00179 | 0,09839 | 0,01069 |
| 26/4/2006 | 0,01957 | 0,00041 | 0,02091 | 0,02001 | 0,00055 | 0,02766 | 0,00674 |
| 27/4/2006 | 0,01866 | 0,00022 | 0,01162 | 0,01909 | 0,00035 | 0,01812 | 0,00650 |
| 28/4/2006 | 0,02048 | 0,00092 | 0,04470 | 0,02098 | 0,00101 | 0,04795 | 0,00326 |
| 2/5/2006 | 0,02104 | 0,00037 | 0,01741 | 0,02164 | 0,00045 | 0,02078 | 0,00336 |
| 3/5/2006 | 0,02142 | 0,00025 | 0,01173 | 0,02206 | 0,00029 | 0,01334 | 0,00161 |
| 4/5/2006 | 0,02098 | 0,00120 | 0,05736 | 0,02171 | 0,00181 | 0,08322 | 0,02585 |
| 5/5/2006 | 0,02758 | 0,00189 | 0,06839 | 0,02820 | 0,00201 | 0,07131 | 0,00293 |
| 8/5/2006 | 0,02888 | 0,00384 | 0,13300 | 0,02973 | 0,00416 | 0,14009 | 0,00708 |
| 9/5/2006 | 0,03146 | 0,00203 | 0,06445 | 0,03241 | 0,00215 | 0,06625 | 0,00180 |

O movimento exponencial MAGH de Lévy

5.1 Introdução

Apesar de que os ativos individualmente são bem modelados utilizando-se as distribuições GH, há a necessidade de se avaliar carteiras de ativos (para cálculos mais precisos de Valor em Risco, por exemplo) ou ainda de se apreçar derivativos multidimensionais (ver capítulo 6). Logo se faz necessária a expansão do modelo unidimensional para um ambiente multidimensional.

A primeira utilização de distribuições multivariadas hiperbólicas generalizadas (MGH) para ajuste a dados financeiros foi feita por Prause (1999), e em seu trabalho diversas deficiências ficam latentes, dentre elas, temos que as distribuições MGH não são capazes de modelar dependência nas caudas da distribuição (ver Schmidt *et al.* (2005)) e também emergem imensas dificuldades na estimação dos parâmetros, pois todos devem ser estimados simultaneamente.

Em Schmidt *et al.* (2005) são apresentadas as distribuições hiperbólicas generalizadas multivariadas afins (MAGH) que superam os problemas acima mencionados de forma simples, pois ela é uma transformação afim aplicada a um vetor de distribuições GH univariadas.

Desta forma, como as distribuições GH apresentaram bom ajuste aos dados brasileiros e dada a importância da modelagem multivariada, neste capítulo introduziremos as distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins Multivariadas (MAGH), aplicando-as a dados brasileiros. As grandes contribuições deste capítulo referem-se à formalização das distribuições MAGH como processos de Lévy multivariados, diversas proposições que ajudarão no capítulo de apreçamento de derivativos multivariados e ajuste dessa distribuição a dados brasileiros.

5.2 Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins

Podemos, conforme demonstrado no capítulo 3 escrever a densidade da distribuição GH como uma transformação afim de uma forma canônica com escala 1 e posição 0. No contexto deste capítulo utilizaremos essa forma de densidade, que definiremos como:

Definição 5.1. *Uma variável aleatória $X \sim AGH(x; \omega, \delta^2, \mu)$, com $\omega = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda)$ é dita ter uma distribuição de probabilidade Hiperbólica Generalizada Afim (AGH) se temos:*

1. *A variável X pode ser escrita como uma transformação afim da variável Y , onde*

$Y \sim AGH(x; \omega, 1, 0)$:

$$X \stackrel{d}{=} \delta Y + \mu. \quad (5.1)$$

2. A distribuição Afim possui uma correspondência de um pra um com uma distribuição Hiperbólica Generalizada, onde:

$$AGH(x; \omega, \delta^2, \mu) \stackrel{d}{=} GH(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda), \quad (5.2)$$

com $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\delta}$ and $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\delta}$.

O parâmetro δ^2 é chamado de escala e o parâmetro μ é um parâmetro de localização.

5.3 Distribuições Hiperbólicas Generalizadas Afins Multivariadas

Nesta seção apresentaremos as distribuições MAGH, que são uma extensão das AGH.

Definição 5.2. Uma variável aleatória d -dimensional $X \sim MAGH(x; \omega, \Sigma, M)$, com $\omega = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda)$ é dita ter uma distribuição de probabilidade Hiperbólica Generalizada Afim Multivariada (MAGH) se temos:

1. A variável X pode ser escrita como uma transformação afim da variável Y

$$X \stackrel{d}{=} A'Y + M. \quad (5.3)$$

2. O vetor $Y \in \mathbb{R}^d$ é um vetor de distribuições $AGH(x_i; \omega_i, 1, 0)$ independentes, ou seja, $Y \sim MAGH(x; \omega, I, 0)$.
3. A é uma matriz triangular superior em $\mathbb{R}^{d \times d}$ tal que $A'A = \Sigma$ é uma matriz definida positiva.

O parâmetro Σ é o parâmetro de escala e o parâmetro M é o de localização. A grande vantagem dessa distribuição, é que o processo de otimização para estimação de parâmetros pode ser bastante simplificado.

As figuras 5.1(a) e 5.1(b) mostram o formato da distribuição bidimensional e seu gráfico de contorno (curvas de nível). Similarmente à distribuição GH para o caso unidimensional, a MAGH permite a modelagem de séries mais leptocúrticas do que a Normal Multivariada, bem como possui caudas semi-grossas.

5.3.1 Propriedades das Distribuições MAGH

Proposição 5.1. A média de uma variável $X \sim MAGH(\omega, \Sigma, M)$ é

$$E[X] = A'E[Y] + M, \quad (5.4)$$

onde $E[Y]$ é um vetor contendo em cada linha a média da distribuição univariada.

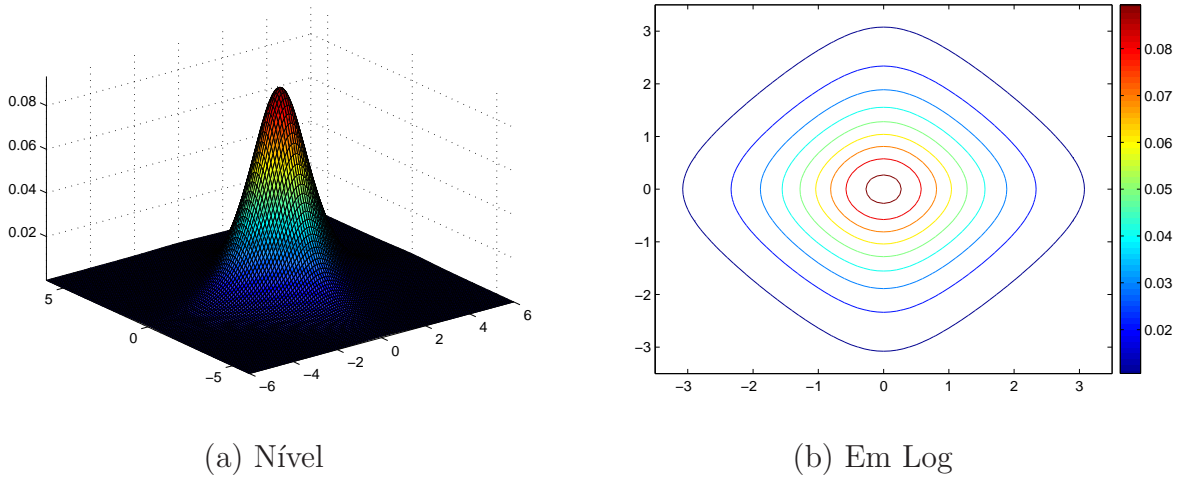


Figura 5.1 Densidade da MAGH simétrica

Demonstração. Como $X \sim \text{MAGH}(\omega, \Sigma, M)$, temos que $X \stackrel{d}{=} A'Y + M$, portanto:

$$E[X] = E[A'Y + M] = A'E[Y] + M$$

onde Y , por independência, é uma vetor contendo em cada linha i a média da distribuição $\text{AGH}(\omega_i, 1, 0)$ correspondente. ■

Proposição 5.2 (Variância da Distribuição MAGH). *A variância de uma variável $X \sim \text{MAGH}(\omega, \Sigma, M)$ é*

$$\text{VAR}[X] = \Sigma \text{VAR}[Y], \tag{5.5}$$

onde $\text{VAR}[Y]$ é um vetor contendo em cada linha a variância da distribuição univariada.

Demonstração. Como $X \sim \text{MAGH}(\omega, \Sigma, M)$, temos que $X \stackrel{d}{=} A'Y + M$, portanto:

$$\text{VAR}[X] = \text{VAR}[A'Y + M] = \Sigma \text{VAR}[Y]$$

onde Y , por independência, é uma vetor contendo em cada linha i a variância da distribuição $\text{AGH}(\omega_i, 1, 0)$ correspondente. ■

Proposição 5.3. *A função geradora de momentos multivariada de uma variável aleatória MAGH $X \stackrel{d}{=} A'Y + M$ é dada por:*

$$M_X(z) = e^{z'M} \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(\tilde{z}_i). \tag{5.6}$$

Onde $M_{Y_i}(\tilde{z}_i)$ representa a função geradora de momentos da variável Y_i .

Demonstração. Por hipótese temos que:

$$X \stackrel{d}{=} A'Y + M$$

Então, a função geradora de momentos é:

$$\begin{aligned} M_X(z) &= E \left[e^{z'X} \right] = E \left[e^{z'[A'Y+M]} \right] \\ &= E \left[e^{(Az)'Y+z'M} \right] \end{aligned}$$

A segunda parte da exponencial não é aleatória, logo:

$$M_X(z) = e^{z'M} E \left[e^{(Az)'Y} \right] = e^{z'M} M_Y(Az)$$

Vamos entender o que isso realmente significa. Primeiro vamos explorar a dimensão das matrizes. A expressão $z'M$ resulta num escalar um vez que z é $n \times 1$, z' é $1 \times n$ e M é $n \times 1$.

A expressão Az é $n \times 1$ já que A é $n \times n$ e z conforme visto anteriormente, é $n \times 1$. Se fizermos $\tilde{z} = (Az)$ e considerando a independência dos Y_i s:

$$M_X(z) = e^{z'M} \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(\tilde{z}_i)$$

■

Proposição 5.4. *A função característica de uma distribuição MAGH é dada por:*

$$\phi_X(t) = e^{it'M} \prod_{i=1}^n \phi_{Y_i}(\tilde{t}_i), \quad (5.7)$$

onde $\phi_{Y_i}(\tilde{t}_i)$ é a função característica de cada Y_i .

Demonstração. Por definição temos que:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E \left[e^{it'X} \right] = E \left[e^{it'[A'Y+M]} \right] \\ &= E \left[e^{i[(At)'Y+t'M]} \right] = e^{it'M} E \left[e^{i(At)'Y} \right] \\ &= e^{it'M} \phi_Y(At) \end{aligned}$$

Fazendo $At = \tilde{t}$ e usando a independência de Y :

$$\phi_X(t) = e^{it'M} \prod_{i=1}^n \phi_{Y_i}(\tilde{t}_i)$$

■

5.3.2 Movimento Geométrico MAGH

Proposição 5.5. *MAGH é uma distribuição infinitamente divisível, logo pode gerar um processo de Lévy.*

Demonstração. Por definição, se $X \sim \text{MAGH}(\alpha, \beta, \lambda, \Sigma, M)$ é uma variável aleatória d -dimensional, temos que $X \stackrel{d}{=} A'Y + M$, onde Y é um vetor composto por d variáveis *AGH* univariadas independentes, i.e. $Y_i \sim \text{AGH}(\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, 1, 0)$.

Pela proposição 3.1 existe uma correspondência biunívoca entre a distribuição *AGH* e a *GH*, bastando apenas operar a transformação de parâmetros dada pela equação 3.13.

Na proposição 3.2 vimos que as distribuições *GH*, e por conseguinte, as *AGH* são distribuições infinitamente divisíveis (Barndorff-Nielsen 1977). Então, temos que $\forall n$ existem $Y_i^{1/n}$ independentes tais que:

$$Y_i \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n Y_{ij}^{1/n}. \quad (5.8)$$

Chamemos então de $Y_{1/n}$ o vetor em que cada linha i é composta pela variável $Y_{i1/n}$. Então:

$$X \stackrel{d}{=} A' \left(\sum_{j=1}^n Y_j^{1/n} \right) + M \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n A' Y_j^{1/n} + n \times \frac{1}{n} M \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n A' Y_j^{1/n} + \frac{1}{n} M. \quad (5.9)$$

Faça então $X_{1/n} = A' Y_{1/n} + \frac{1}{n} M$, obtendo:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n X_j^{1/n}. \quad (5.10)$$

■

Essa distribuição é extremamente flexível pois os parâmetros λ and α podem ser definidos para cada margem, aumentando o poder de ajuste mesmo que as margens possuam caudas com diferentes pesos. Além disso, se Σ for uma matriz diagonal as margens são independentes, o que é importante em alguns cenários.

A facilidade na estimação se deve a um simples procedimento que permite, ao invés da estimação simultânea dos $d \times 5 + (d - 1)!/2$ parâmetros, estimamos d distribuições unidimensionais, onde d representa o número de dimensões.

5.4 Amostra

A avaliação empírica foi feita utilizando-se os índices Ibovespa, CAC 40, Dax 100, FTSE 100, Nikkei 225 e Standard and Poors 500. Os dados representam retornos logarítmicos calculados de acordo com:

$$R_{i,t} = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right). \quad (5.11)$$

Os períodos de amostra e os códigos dos índices utilizados estão na tabela 5.1. A data inicial foi escolhida, similarmente às estimações univariadas, pela data em que o Brasil implantou o Plano Real (01/07/1994), que trouxe alguma estabilidade para os preços, evitando mudanças de moedas. Uma vez que estamos tratando com países diferentes, os dados foram interpolados linearmente¹ quando alguma data não era dia de negócio em algum país. De forma a verificar o modelo e sua aderência inclusive a eventos extremos (caudas grossas), não excluímos nenhuma data da amostra, nem mesmo o dia 11 de setembro de 2001.

Tabela 5.1 Amostra

| <i>Asset</i> | <i>Ticker</i> | <i>Início</i> | <i>Fim</i> |
|--------------------|---------------|---------------|------------|
| Bovespa | BVSP | 01/08/1994 | 30/05/2006 |
| Cac40 | CAC | 01/08/1994 | 30/05/2006 |
| Dax | DAX | 01/08/1994 | 30/05/2006 |
| FTSE | FTSE | 01/08/1994 | 30/05/2006 |
| Nikkei | NIKK | 01/08/1994 | 30/05/2006 |
| Standard and Poors | SP500 | 01/08/1994 | 30/05/2006 |

Na tabela 5.2 temos as estatísticas descritivas dos dados e na tabela 5.3 temos a matriz de correlação dos dados. Usando essas duas tabelas podemos ver características interessantes desse banco de dados:

- Todos os índices são correlacionados (valor crítico = ∓ 0.0166);
- Temos alguns índices muito correlacionados. Como exemplo temos a correlação entre CAC e DAX de 0.7902. Em geral os mercados da Europa são bastante correlacionados, sendo o menor coeficiente entre eles 0.7215, que é a correlação entre FTSE e DAX;
- Alguns índices são quase não correlacionados. Podemos ver a correlação entre BVSP e NIKK que é de 0.1136;
- BVSP possui uma amplitude muito maior do que os outros, pois possui um mínimo de -17.2290 e um máximo de 28.8183.
- Todos os dados possuem uma curtose alta², principalmente o BVSP que possui curtose de 15.8004, implicando que a distribuição da cauda é bem mais grossa do que a de uma distribuição normal.

¹Para maiores detalhes sobre interpolação, sugerimos Press *et al.* (1992).

²Por curtose alta se entende aquela variável que possui curtose maior do que a de uma variável que possui distribuição normal, que possui valor 3.

Tabela 5.2 Estatísticas Descritivas (%)

| <i>Índice</i> | <i>Média</i> | <i>D. Padrão</i> | <i>Assimetria</i> | <i>Curtose</i> | <i>Min</i> | <i>Max</i> |
|---------------|--------------|------------------|-------------------|----------------|------------|------------|
| BVSP | 0.0793 | 2.4560 | 0.5173 | 15.8004 | -17.2290 | 28.8183 |
| CAC | 0.0256 | 1.3766 | -0.0988 | 5.7326 | -7.6781 | 7.0023 |
| DAX | 0.0277 | 1.4967 | -0.1415 | 5.6244 | -6.4999 | 7.5527 |
| FTSE | 0.0174 | 1.0680 | -0.1238 | 5.9075 | -5.5888 | 5.9038 |
| NIKK | -0.0147 | 1.3625 | -0.0997 | 5.1872 | -7.2340 | 7.6553 |
| SP500 | 0.0322 | 1.0737 | -0.1002 | 6.4608 | -7.1127 | 5.5744 |

Tabela 5.3 Matriz de Correlações (%)

| | BVSP | CAC | DAX | FTSE | NIKK | SP500 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| BVSP | 1.0000 | 0.2682 | 0.2756 | 0.2735 | 0.1136 | 0.4277 |
| CAC | 0.2682 | 1.0000 | 0.7902 | 0.7875 | 0.2434 | 0.4366 |
| DAX | 0.2756 | 0.7902 | 1.0000 | 0.7215 | 0.2315 | 0.4983 |
| FTSE | 0.2735 | 0.7875 | 0.7215 | 1.0000 | 0.2551 | 0.4311 |
| NIKK | 0.1136 | 0.2434 | 0.2315 | 0.2551 | 1.0000 | 0.1138 |
| SP500 | 0.4277 | 0.4366 | 0.4983 | 0.4311 | 0.1138 | 1.0000 |

5.5 Algoritmo de Estimação

5.5.1 Distribuição AGH

Para estimar os parâmetros da distribuição AGH (e posteriormente as margens da MAGH) usamos uma pequena modificação no algoritmo usado por Fajardo & Farias (2004), pois seu algoritmo estimava as distribuições GH. O algoritmo foi implementado no Matlab e usa a maximização da função de máxima verossimilhança.

Freund (2004); Lagarias *et al.* (1998); Neumaier (2004) apresentam formas e propriedades de otimização restrita e Baritompal & Hendrix (2005); Björkman & Holmström (1999); Hart (1994); Iwaarden (1996); Mendivii *et al.* (1999); Stützle & Hrycej (2002a) discutem, além disso, métodos e formas de se fazer otimização global. Baseado neles, para melhorar a performance e termos estimativas mais confiáveis, transformamos os parâmetros que possuíam restrições de forma que eles se tornasse parâmetros sem restrições, e portanto, pudéssemos utilizar a otimização irrestrita. As transformações executadas foram:

$$\tilde{\alpha}_u = \ln(\tilde{\alpha}) \quad (5.12)$$

$$\tilde{\delta}_u = \ln(\tilde{\delta}) \quad (5.13)$$

$$\tilde{\beta} = (1 - \exp(-\tilde{\beta}_u \times \text{sign}(\tilde{\beta}_u))) \times \text{sign}(\tilde{\beta}_u), \quad (5.14)$$

onde o subscrito u identifica a variável irrestrita.

5.5.2 Distribuição MAGH

Para estimarmos os parâmetros da MAGH, fizemos uso das seguintes proposições, de forma a facilitar o processo e ganhar eficiência na estimação. Esta abordagem foi utilizada por Schmidt *et al.* (2005), Stützle & Hrycej (2001), Stützle & Hrycej (2002a), Stützle & Hrycej (2002b) e Stützle & Hrycej (2005), aplicada em diversos tipos de distribuição e à MAGH no primeiro.

Proposição 5.6. *Se $X \sim \text{MAGH}_d(\omega, \Sigma, M)$ então $W = BX$ é um conjunto de d distribuições $\text{AGH}(\omega, \delta, \mu)$, onde B é a inversa da decomposição de Cholesky ³ aplicada à matriz de covariância de X .*

Demonstração. Por definição, se $X \sim \text{MAGH}_n(\omega, \Sigma, M)$ então podemos dizer que:

$$X \stackrel{d}{=} A'Y + M, \quad (5.15)$$

para alguma matriz triangular superior A de forma que $A'A = \Sigma$ é definida positiva e o vetor aleatório $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$ consiste de variáveis aleatórias mutuamente independentes $Y_i \sim \text{MGH}_1(\omega_i, 1, 0)$.

Logo, a estrutura de dependência da *MAGH* é devida à matriz A , uma vez que as Y_i são independentes (ver capítulo 2). Seja então S a matriz de covariância de X , então podemos usar a decomposição de Cholesky para obter $S = \tilde{B}'\tilde{B}$.

Aplicando a inversa, temos::

$$S^{-1} = \tilde{B}^{-1}(\tilde{B}^{-1})', \quad (5.16)$$

fazendo $(\tilde{B}^{-1})' = B$, temos que $S^{-1} = B'B$. Então, façamos:

$$W = BX. \quad (5.17)$$

No caso, transformamos a variável correlacionada X em uma não correlacionada W (Horn & Johnson. 1985; Press *et al.* 1992). A questão é: $W \in \text{MAGH}$?

$$W = BX = B(A'Y + M) = BA'Y + BM, \quad (5.18)$$

$BA'AB'$ é claramente definida positiva, então $W \in \text{MAGH}$ e é um conjunto de distribuições $\text{AGH}(\omega, \delta, \mu)$ independentes. ■

Proposição 5.7. *Podemos estimar $X \sim \text{MAGH}(\omega, \Sigma, M)$ por um procedimento composto de três passos, sendo o primeiro a transformação da variável X numa variável Y decorrelacionada, estimar as margens da variável Y e transformar seus parâmetros para obtermos os parâmetros de X*

³Para mais detalhes sobre a decomposição de Cholesky recomendamos Horn & Johnson. (1985) e Hamilton (1994)

Demonstração. Na proposição 5.6 mostramos que $W = BX$ é um vetor de distribuições AGH independentes, de forma que podemos estimar W através da estimação de suas distribuições marginais W_i .

Após estimarmos todos os parâmetros dos W_i podemos recuperar os parâmetros originais de X :

Cada W_i pode ser escrito como $W_i \stackrel{d}{=} \delta Y_i + \mu_i$, então:

$$W = BX \rightarrow (W_1, W_2, \dots, W_n)' = BX \rightarrow X = B^{-1}W. \quad (5.19)$$

Conforme dito antes, $B^{-1}W \sim MAGH(\omega, \Sigma, M)$, então: $A'Y + M = B^{-1}(DY + \mu)$

Logo:

$$A' = B^{-1}D \quad \text{e} \quad M = B^{-1}\mu. \quad (5.20)$$

Onde D é uma matriz diagonal contendo os δ_i das distribuições marginais, e μ é o vetor de μ_i . ■

Então, para estimar os parâmetros das distribuições MAGH, utilizamos os seguintes passos:

1. Achamos B através da decomposição de Cholesky da inversa da matriz de covariância amostral.
2. Fazemos $W = BX$, que é um conjunto de distribuições independentes $AGH(\omega_i, \delta^2, \mu)$.
3. Estimamos os parâmetros das distribuições AGH univariadas (W).
4. Transformamos os parâmetros univariados nos parâmetros multivariados de acordo com a proposição 5.7.

Esse procedimento leva a um menor esforço computacional, uma vez que consiste de d estimações univariadas, estimando 5 parâmetros em cada, ao invés de 1 estimação multivariada que obtém $4n + n(n+1)/2$ parâmetros de uma vez só.

5.6 Resultados Empíricos

5.6.1 Estimação Unidimensional

A tabela 5.4 apresenta os resultados da estimação unidimensional das distribuições AGH e das subclasses⁴ Normal Inversa Gaussiana Afim (ANIG) e Hiperbólica Afim (AHyp). A estimação da AGH é a que deve ser feita com muito cuidado, pois como não conseguimos fazer uso (de maneira prática) das derivadas da função de máxima verossimilhança⁵ e a presença do λ variando livremente pode prejudicar bastante o algoritmo de otimização (Raible 2000).

⁴Conforme apresentado no capítulo 3 para obtermos uma subclasse das distribuições GH basta fixarmos o parâmetro λ . O mesmo conceito foi aplicado à transformação aqui chamada de AGH.

⁵Isso se deve à complexidade da derivada com relação ao argumento λ . Para maiores detalhes, consultar o apêndice C.

Tabela 5.4 Parâmetros estimados das distribuições AGH e suas subclasses.

| Índice | | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | λ | δ | μ | LogLike |
|--------|-----|------------------|-----------------|-----------|----------|---------|---------|
| BVSP | GH | 0.7744 | -0.1102 | -1.0181 | 2.5911 | 0.2631 | -6387.0 |
| | NIG | 0.8977 | -0.0879 | -0.5000 | 2.2312 | 0.2814 | -6392.8 |
| | HYP | 0.7168 | -0.0595 | 1.0000 | 1.0645 | 0.2976 | -6408.0 |
| CAC | GH | 1.0065 | -0.0819 | -0.9964 | 1.6317 | 0.1194 | -4919.8 |
| | NIG | 1.0410 | -0.0091 | -0.5000 | 1.3874 | 0.0520 | -4920.6 |
| | HYP | 1.0511 | -0.0041 | 1.0000 | 0.8504 | 0.0372 | -4927.0 |
| DAX | GH | 0.9814 | -0.0863 | -0.0100 | 1.2092 | 0.1776 | -5141.6 |
| | NIG | 0.9726 | -0.1003 | -0.5000 | 1.4476 | 0.1733 | -5142.2 |
| | HYP | 1.0531 | -0.0057 | 1.0000 | 0.9167 | 0.0454 | -5153.9 |
| FTSE | GH | 0.9851 | -0.0804 | -0.4989 | 1.0388 | 0.0975 | -4153.2 |
| | NIG | 0.9851 | -0.0804 | -0.5000 | 1.0388 | 0.0975 | -4153.2 |
| | HYP | 1.0543 | -0.0075 | 1.0000 | 0.6541 | 0.0318 | -4163.7 |
| NIKK | GH | 1.0405 | -0.0055 | 0.5046 | 0.9902 | 0.0056 | -4935.9 |
| | NIG | 1.0376 | 0.0000 | -0.5000 | 1.4066 | -0.0067 | -4937.7 |
| | HYP | 1.0470 | 0.0000 | 1.0000 | 0.8489 | -0.0085 | -4936.8 |
| SP500 | GH | 1.0444 | -0.0075 | 0.0026 | 0.9030 | 0.0471 | -4180.3 |
| | NIG | 1.0414 | -0.0076 | -0.5000 | 1.0751 | 0.0477 | -4180.4 |
| | HYP | 1.0529 | -0.0053 | 1.0000 | 0.6600 | 0.0424 | -4186.7 |

As subclasses AHyp e ANIG são especialmente importantes porque a primeira é mais fácil de ser estimada, pois a função de Bessel somente é avaliada uma vez por avaliação da função objetivo e a segunda é fechada sob convolução o que facilita o apreçamento de derivativos. Remetemos o leitor aos capítulos 3 e 4 para uma maior exploração dessas propriedades. Perceba que para o caso do Ibovespa, também estimado no capítulo 3 os parâmetros δ e μ são diferentes por conta da escala da estimação, que no capítulo atual foi feita considerando retornos em percentuais enquanto que no outro capítulo foram feitas em retornos unitários. Consistente com a utilização de uma estimação com parâmetros invariantes de escala, a diferença é que δ e μ estão simplesmente reescalados.

Devido à importância das subclasses, fizemos testes de *likelihood ratio* para vermos a possibilidade de restringir os parâmetros da AGH para suas subclasses ANIG e AHyp. As estatísticas de teste e os respectivos *p-values* estão na tabela 5.5.

Os dados na tabela 5.5 mostram que os índices dos países desenvolvidos podem ser modelados utilizando-se a ANIG ao invés da AGH, o que não é verdade para o índice Brasileiro. Isso se deve à alta curtose e conseqüente grande peso na cauda do índice Bovespa, característica já bastante explorada em Fajardo & Farias (2004).

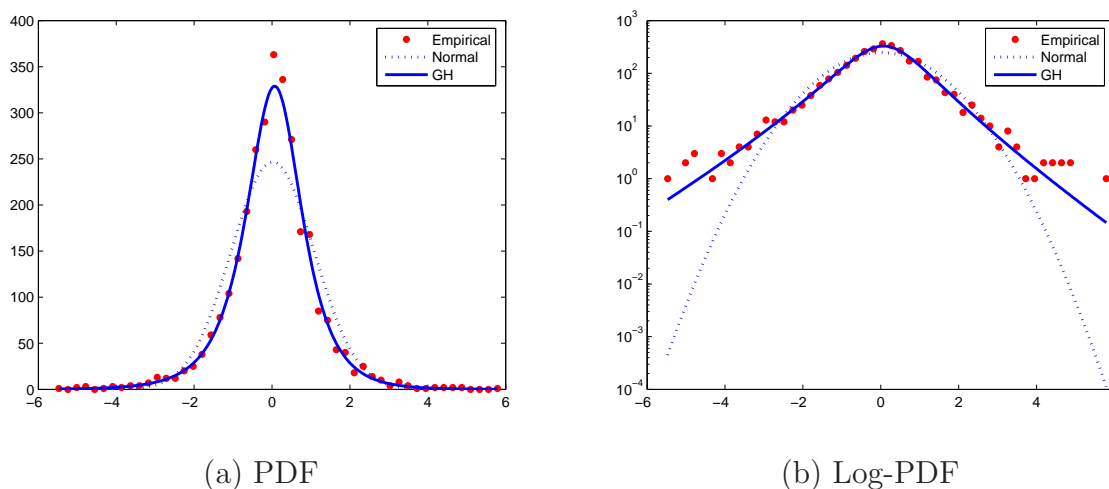
A mesma tabela mostra que o índice NIKK é o único que pode ser restrito à subclasse AHyp, sendo a hipótese nula rejeitada para todos os outros índices.

Tabela 5.5 Teste de *Log-likelihood ratio*

| Índice | NIG | | Hyp | |
|--------|---------|----------|---------|----------|
| | Stats | P-Value | Stats | P-Value |
| BVSP | 11.5260 | 6.86E-04 | 41.9750 | 9.24E-11 |
| CAC | 1.7523 | 0.1856 | 14.4540 | 1.44E-04 |
| DAX | 1.2142 | 0.2705 | 24.4810 | 7.50E-07 |
| FTSE | 0.0005 | 0.9820 | 20.9120 | 4.81E-06 |
| NIKK | 3.7139 | 0.0540 | 1.9122 | 0.1667 |
| SP500 | 0.2018 | 0.6533 | 12.7990 | 3.47E-04 |

5.6.2 Qualidade do Ajuste Unidimensional

De forma a avaliar a qualidade do ajuste da distribuição aos dados empíricos, inicialmente mostramos algumas figuras e distâncias calculadas. As figuras 5.2(a) e 5.2(b) mostram as distribuições empíricas e estimadas do índice NIKK, enquanto que as figuras 5.3(a) e 5.3(b) fazem o mesmo para BVSP. Podemos ver nos gráficos das funções densidade de probabilidade que as distribuições AGH se ajustam melhor à curtose da distribuição, reforçado pelo gráfico da log-densidade, que mostra que as caudas possuem melhor ajuste também.

**Figura 5.2** Densidade Estimada x Empírica de NIKK

A tabela 5.6 lista as distâncias de Kolmogorov e o respectivos *p-values* (para detalhes veja Fajardo & Farias (2004)). Para os casos das distribuições AGH e ANIG a hipótese nula de que a distribuição empírica segue as distribuições AGH/ANIG não é rejeitada. Já no caso da AHyp, apenas a distância calculada para o índice DAX rejeita a hipótese nula. Além disso, quando calculamos a distância para ver se as distribuições empíricas são normalmente distribuídas, a hipótese nula é rejeitada, conforme esperado. Isso se deve à baixa habilidade da distribuição Normal em modelar caudas grossas.

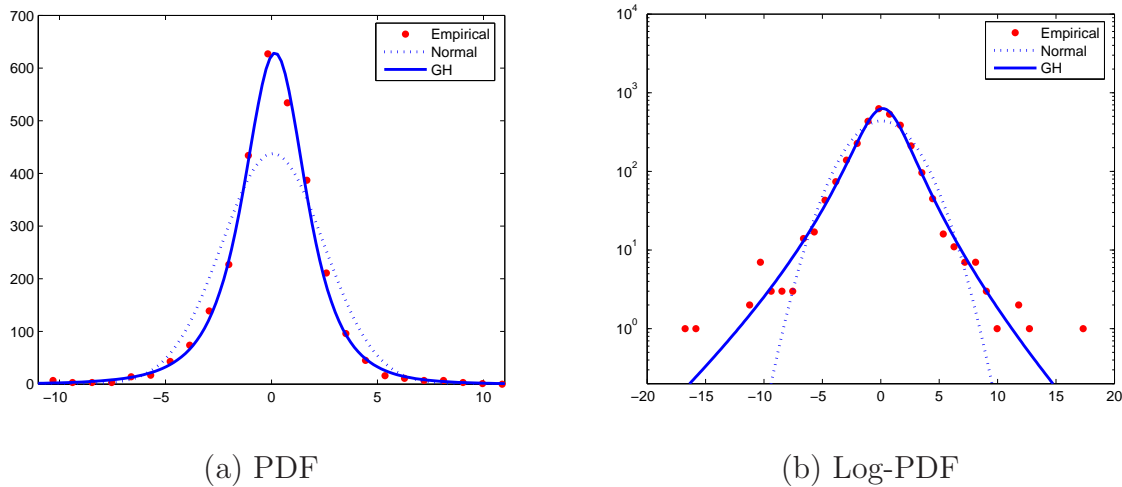


Figura 5.3 Densidade Estimada x Empírica de BVSP

Tabela 5.6 Testes de Kolmogorov-Smirnov.

| Índice | Normal | | GH | | NIG | | Hyp | |
|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | KS | pValue | KS | pValue | KS | pValue | KS | pValue |
| BVSP | 0.0683 | 2.7E-12 | 0.0129 | 0.7134 | 0.0115 | 0.8318 | 0.0141 | 0.6049 |
| CAC | 0.0525 | 1.9E-07 | 0.0098 | 0.9414 | 0.0085 | 0.9841 | 0.0139 | 0.6244 |
| DAX | 0.0680 | 3.4E-12 | 0.0167 | 0.3871 | 0.0173 | 0.3413 | 0.0307 | 0.0080 |
| FTSE | 0.0571 | 9.9E-09 | 0.0143 | 0.5875 | 0.0142 | 0.5917 | 0.0219 | 0.1199 |
| NIKK | 0.0486 | 2.0E-06 | 0.0112 | 0.8576 | 0.0107 | 0.8902 | 0.0122 | 0.7744 |
| SP500 | 0.0549 | 4.2E-08 | 0.0149 | 0.5360 | 0.0144 | 0.5731 | 0.0200 | 0.1924 |

Apenas como um exercício de comparação, para demonstrar essa qualidade de ajuste na cauda, na tabela 5.7 temos as distâncias de Anderson & Darling (ver capítulo 3). Essa distância mostra principalmente a diferença nas caudas da distribuição. No caso da distribuição Normal os valores são muito piores que as distribuições AGH, sendo a pior performance para o BVSP, com uma distância de 50077 contra 0.0339 da AGH e no melhor caso uma distância de 0.6159 contra 0.0288 da AGH.

5.6.3 Estimação da Distribuição MAGH 2-Dimensional

Apesar das estimativas da AGH apresentarem boas qualidades de ajuste, a correlação entre os ativos não é negligível (ver 5.3), então se quisermos modelar a distribuição conjunta dos ativos, por exemplo, para *Value at Risk* e apuração de derivativos, nós temos que considerar a modelagem de distribuições Multivariadas.

Agora apresentamos os resultados da estimação da MAGH. Para avaliar mais facilmente os resultados, inicialmente apresentamos a estimação de 2 a 2 combinações da amostra, em seguida apresentaremos para toda a amostra tratada como uma única distribuição multivariada.

Tabela 5.7 Distâncias Anderson-Darling.

| | Normal | GH | NIG | Hyp |
|---------|------------|--------|--------|--------|
| Bovespa | 50077.4824 | 0.0470 | 0.1080 | 0.3071 |
| CAC40 | 8.3298 | 0.0355 | 0.0530 | 0.0786 |
| Dax | 0.6159 | 0.0374 | 0.0375 | 0.0858 |
| FTSE | 2.8125 | 0.0416 | 0.0418 | 0.0868 |
| Nikkei | 3.2669 | 0.0388 | 0.0351 | 0.0563 |
| SP500 | 334.6462 | 0.1211 | 0.0991 | 0.2245 |

Tabela 5.8 Parâmetros Estimados da MAGH e suas subclasses

| Assets | | $\tilde{\alpha}$ | β | λ | M | Σ | | LogLike |
|--------|-----|------------------|----------|-----------|---------|----------|--------|---------|
| CAC | GH | 1,0441 | 0,0037 | -0,5036 | 0,1301 | 1,4936 | 1,0866 | -3939,5 |
| X | | 1,0028 | -0,0878 | -0,0100 | 0,1773 | 1,0866 | 1,4952 | -3965,0 |
| DAX | Nig | 1,0441 | 0,0037 | -0,5 | 0,1310 | 1,8239 | 1,5411 | -3939,5 |
| | | 0,9842 | -0,1058 | -0,5 | 0,1785 | 1,5411 | 2,1206 | -3965,4 |
| | Hyp | 1,0574 | 0,0024 | 1 | 0,1412 | 0,6857 | 0,5771 | -3949,4 |
| | | 1,0191 | -0,0699 | 1 | 0,1912 | 0,5771 | 0,7940 | -3972,8 |
| BVSP | GH | 1,0377 | -0,0157 | -1,0173 | 0,1208 | 7,3805 | 0,1977 | -3820,7 |
| X | | 1,0409 | -2E-05 | 0,5022 | -0,0011 | 0,1977 | 0,9834 | -4033,1 |
| NIKK | Nig | 1,0474 | -0,0151 | -0,5 | 0,1258 | 5,3607 | 0,3984 | -3823,1 |
| | | 1,0386 | -0,0056 | -0,5 | 0,0010 | 0,3984 | 1,9816 | -4034,6 |
| | Hyp | 1,0759 | -0,0077 | 1 | 0,0975 | 2,0753 | 0,1449 | -3844,8 |
| | | 1,0470 | -1,5E-07 | 1 | -0,0033 | 0,1449 | 0,7206 | -4033,8 |

A tabela 5.8 apresenta as estimativas dos dois ativos com maior correlação entre si (CAC and DAX) e os dois ativos com menor correlação (BVSP e NIKK).

Novamente, nós estamos interessados em subclasses particulares (MANig e MAHyp). A tabela 5.9 mostra as estimativas considerando a restrição da MAGH para alguma de suas principais subclasses. Os resultados são bastante similares ao caso univariado. Quando BVSP é uma das distribuições analisadas, apenas na combinação BVSP x CAC a restrição de MAGH para MANig pode ser feita, mas todas as outras combinações de índices podem ser restritas para MANig. Mais uma vez a alta volatilidade e curtose da distribuição de BVSP contribui para isso. No caso MAHyp, não podemos restringir nenhuma das amostras

5.6.4 Qualidade de Ajuste da MAGH de 2-Dimensões

Fizemos dois tipos de avaliações da qualidade de ajuste. Primeiramente mostramos graficamente o ajuste das distribuições multivariadas aos dados mais correlacionados (CACx-DAX) e os menos correlacionados (BVSPxNIKK), em seguida calculamos as distâncias

Tabela 5.9 Testes de Log-Likelihood ratio.

| Assets | NIG | | Hyp | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|
| | Stats | P-Value | Stats | P-Value |
| BVSP x CAC | 3.1351 | 0.2086 | 57.2950 | 0.0000 |
| BVSP x DAX | 25.1630 | 0.0000 | 86.1360 | 0.0000 |
| BVSP x FTSE | 5.4250 | 0.0664 | 73.2390 | 0.0000 |
| BVSP x NIKK | 7.8421 | 0.0198 | 49.7060 | 0.0000 |
| BVSP x SP500 | 7.9218 | 0.0190 | 59.6940 | 0.0000 |
| CAC x DAX | 0.8372 | 0.6580 | 35.4220 | 0.0000 |
| CAC x FTSE | 0.8429 | 0.6561 | 30.2700 | 0.0000 |
| CAC x NIKK | 3.0086 | 0.2222 | 12.1060 | 0.0024 |
| CAC x SP500 | 0.2348 | 0.8892 | 25.3790 | 0.0000 |
| DAX x FTSE | 0.8951 | 0.6392 | 29.7720 | 0.0000 |
| DAX x NIKK | 3.4144 | 0.1814 | 18.5980 | 0.0001 |
| DAX x SP500 | 0.4480 | 0.7993 | 16.9600 | 0.0002 |
| FTSE x NIKK | 3.0308 | 0.2197 | 16.3950 | 0.0003 |
| FTSE x SP500 | 0.2363 | 0.8886 | 34.0040 | 0.0000 |
| NIKK x SP500 | 3.3853 | 0.1840 | 14.8280 | 0.0006 |

de Kolmogorov para distribuições em 2 dimensões⁶.

As figuras 5.4 e 5.5 representam a distribuição empírica, a MAGH estimada e a Normal estimada para BVSP x NIKK (correlação = 0.1136) e para CAC x DAX (correlação = 0.7902). Mais uma vez a curtose das séries são melhores capturadas com as distribuições MAGH.

Em seguida necessitamos calcular a distância de Kolmogorov para o caso multidimensional. Nós usamos a abordagem de Fasano & Franceschini (1987) e Peacock (1983) que calcula a máxima distância em todas as possíveis direções (neste caso 4). O número de pontos amostrais utilizados no cálculo da distância foi de 100 para cada margem, totalizando 10000 pontos.

Os resultados da tabela 5.10 nos leva a concluir que a MAGH realmente proporciona melhor ajuste aos dados. Consistentemente as distribuições MAGH e suas subclasses possuem menor distância entre a distribuição teórica (ajustada) e a empírica.

5.6.5 Estimação da MAGH 6-Dimensional

Nesta seção apresentamos os resultados da estimação conjunta dos índices. As tabelas 5.11, 5.12 e 5.13 nos dão resultados respectivamente para as distribuições MAGH, MANig e MAHyp. O procedimento de estimação explicado na seção 5.5 torna essa estimação muito fácil de ser feita.

Seguindo nosso roteiro, mostramos na tabela 5.14 o resultado dos testes de *log-*

⁶Para maiores detalhes sobre cálculos de distâncias de Kolmogorov em 2 ou mais dimensões, remetemos o leitor para Fasano & Franceschini (1987), Narsky (2003) e Peacock (1983)

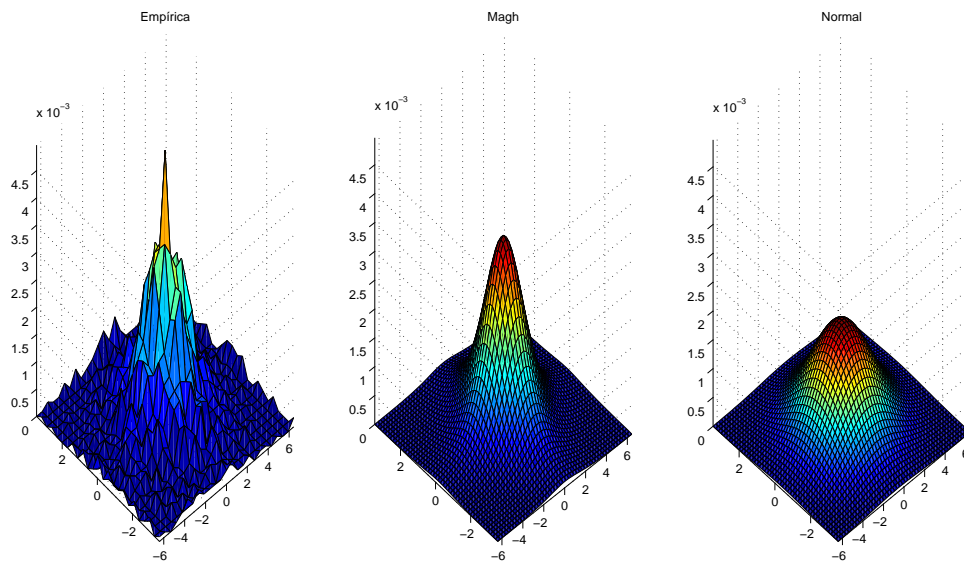
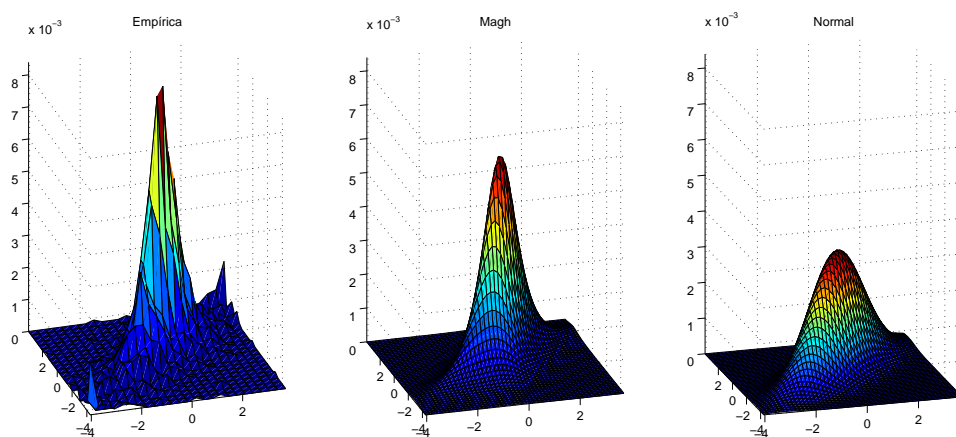
Figura 5.4 BVSP x NIKK PDF. $\rho=0.11$ Figura 5.5 CAC x DAX PDF. $\rho=0.79$ 

Tabela 5.10 Distâncias de Kolmogorov para Estimações bidimensionais.

| | Normal | GH | Nig | Hyp |
|--------------|--------|--------|--------|--------|
| BVSP x CAC | 0,0065 | 0,0016 | 0,0017 | 0,0022 |
| BVSP x DAX | 0,0072 | 0,0022 | 0,0024 | 0,0028 |
| BVSP x FTSE | 0,0054 | 0,0028 | 0,0011 | 0,0021 |
| BVSP x NIKK | 0,0062 | 0,0016 | 0,0017 | 0,0017 |
| BVSP x SP500 | 0,0059 | 0,0023 | 0,0028 | 0,0025 |
| CAC x DAX | 0,0023 | 0,0013 | 0,0008 | 0,0009 |
| CAC x FTSE | 0,0017 | 0,0010 | 0,0006 | 0,0006 |
| CAC x NIKK | 0,0018 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 |
| CAC x SP500 | 0,0017 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 |
| DAX x FTSE | 0,0019 | 0,0008 | 0,0006 | 0,0009 |
| DAX x NIKK | 0,0019 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0007 |
| DAX x SP500 | 0,0019 | 0,0007 | 0,0010 | 0,0012 |
| FTSE x NIKK | 0,0015 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| FTSE x SP500 | 0,0014 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 |
| NIKK x SP500 | 0,0016 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0005 |

Tabela 5.11 Estimações da MAGH 6-dimensional.

| | BVSP | CAC | DAX | FTSE | NIKK | SP500 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\tilde{\alpha}$ | 1.0420 | 1.0430 | 1.0423 | 1.0432 | 1.0419 | 1.0447 |
| $\tilde{\beta}$ | -0.0142 | 0.0017 | -0.0065 | -0.0066 | 0.0000 | -0.0079 |
| λ | -1.0157 | -0.5017 | -1.0146 | -0.4980 | 0.5028 | 0.0030 |
| M | 0.1304 | 0.0510 | 0.0634 | 0.0374 | 0.0011 | 0.0480 |
| Σ | 6.9439 | 0.6938 | 0.7598 | 0.5495 | 0.2256 | 0.7831 |
| | 0.6938 | 1.8567 | 1.6821 | 1.0513 | 0.2575 | 0.4564 |
| | 0.7598 | 1.6821 | 2.5637 | 1.0277 | 0.2697 | 0.5665 |
| | 0.5495 | 1.0513 | 1.0277 | 1.0582 | 0.2086 | 0.3496 |
| | 0.2256 | 0.2575 | 0.2697 | 0.2086 | 0.9832 | 0.1178 |
| Log-Like | -3846.8 | -3972.3 | -4041.2 | -3963.3 | -4028.8 | -3972.8 |

Tabela 5.12 Estimacões da MANig 6-dimensional.

| | BVSP | CAC | DAX | FTSE | NIKK | SP500 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\tilde{\alpha}$ | 1.0135 | 1.0430 | 1.0415 | 1.0432 | 1.0382 | 1.0417 |
| $\tilde{\beta}$ | -0.0727 | 0.0017 | -0.0070 | -0.0066 | 0.0000 | -0.0077 |
| $\tilde{\lambda}$ | -0.5000 | -0.5000 | -0.5000 | -0.5000 | -0.5000 | -0.5000 |
| M | 0.2329 | 0.0512 | 0.0637 | 0.0375 | 0.0012 | 0.0483 |
| Σ | 5.3897 | 0.8962 | 1.0013 | 0.7083 | 0.3862 | 1.1103 |
| | 0.8962 | 1.9261 | 1.6716 | 1.1646 | 0.4781 | 0.6472 |
| | 1.0013 | 1.6716 | 2.3335 | 1.1601 | 0.4933 | 0.8032 |
| | 0.7083 | 1.1646 | 1.1601 | 1.1469 | 0.3889 | 0.4958 |
| | 0.3862 | 0.4781 | 0.4933 | 0.3889 | 1.9640 | 0.1670 |
| | 1.1103 | 0.6472 | 0.8032 | 0.4958 | 0.1670 | 1.1563 |
| Log-Like | -3848.3 | -3972.3 | -4042.7 | -3963.3 | -4030.3 | -3972.9 |

Tabela 5.13 Estimacões da MAHyp 6-dimensional.

| | BVSP | CAC | DAX | FTSE | NIKK | SP500 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\tilde{\alpha}$ | 1.0726 | 0.5985 | 1.0451 | 1.0543 | 1.0470 | 1.0530 |
| $\tilde{\beta}$ | -0.0072 | -0.0013 | 0.0000 | -0.0047 | 0.0000 | -0.0060 |
| $\tilde{\lambda}$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| M | 0.1050 | 0.0460 | 0.0535 | 0.0311 | -0.0036 | 0.0433 |
| Σ | 2.1198 | 0.3279 | 0.3764 | 0.2664 | 0.1432 | 0.4181 |
| | 0.3279 | 0.5989 | 0.6220 | 0.4382 | 0.1762 | 0.2437 |
| | 0.3764 | 0.6220 | 0.8617 | 0.4365 | 0.1820 | 0.3025 |
| | 0.2664 | 0.4382 | 0.4365 | 0.4316 | 0.1433 | 0.1867 |
| | 0.1432 | 0.1762 | 0.1820 | 0.1433 | 0.7203 | 0.0629 |
| | 0.4181 | 0.2437 | 0.3025 | 0.1867 | 0.0629 | 0.4354 |
| Log-Like | -3867.9 | -3974.6 | -4041.4 | -3972.2 | -4029.8 | -3979.2 |

Tabela 5.14 Testes de Log-Likelihood Ratio.

| NIG | | Hyp | |
|--------|---------|--------|---------|
| Stats | P-Value | Stats | P-Value |
| 9,4108 | 0,1518 | 80,072 | 3,4E-15 |

Tabela 5.15 Distância de Kolmogorov em 6 Dimensões.

| Distribuição | Distância |
|--------------|-----------|
| Normal | 0.5394 |
| MAGH | 0.1773 |
| MANIG | 0.1742 |
| MAHyp | 0.2312 |

likelihood ratio para a restrição de subclasses. Os resultados mostram que podemos restringir à subclasse MANig, mas não para a subclasse MAHyp, reafirmando os resultados prévios com menos dimensões.

5.6.6 Qualidade de Ajuste da Distribuição MAGH 6-Dimensional

Um grande desafio na verificação da qualidade do ajuste das distribuições MAGH em 6 dimensões deve-se ao fato de que na literatura não há nenhuma menção a distâncias de Kolmogorov acima de 4 dimensões. A solução adotada foi utilizar o algoritmo que calcula a distância para 2 dimensões (ou mais) que consiste no cálculo da distância de Kolmogorov em todas as possíveis direções de acumulação.

Num problema com 6 dimensões, isso leva a $2^6 = 64$ possíveis direções. Dada a complexidade do problema, utilizamos apenas 20 pontos para avaliar o dado em cada marginal, eliminando-se os pontos em que mais de 4 dimensões não possuíam massa. Isso equivale à avaliação de 64,000,000 pontos em cada direção de acumulação, tornando o problema muito *computer demanding*. A tabela 5.15 mostra os resultados, e mais uma vez as distribuições MAGH obtiveram um melhor ajuste.

O tamanho das distâncias foi influenciado pelo número de pontos em cada marginal, mas os principais resultados (em termos de ordenação) continuam válidos. O leitor atento poderá perceber que a distância em seis dimensões da subclasse MANIG é ligeiramente menor do que a da MAGH, isso se deve a dois fatores: (1) Conforme mostrado no teste de razão de log-verossimilhança podemos restringir a distribuição MAGH para MANIG, indicando que não há perda significativa em fixar o parâmetro λ ; (2) A log-verossimilhança dá igual peso a todas as observações, o que não é verdade para o cálculo da distância de Kolmogorov, podendo gerar pequenas distorções com relação à máxima verossimilhança.

Outra forma de mostrar o bom ajuste dos dados é mostrando o comportamento do ajuste em cada marginal. As figuras 5.6-5.11 mostram o ajuste em cada uma das marginais, comparando com o ajuste da normal multivariada. Podemos ver mais uma vez que as distribuições MAGH proporcionam um melhor ajuste.

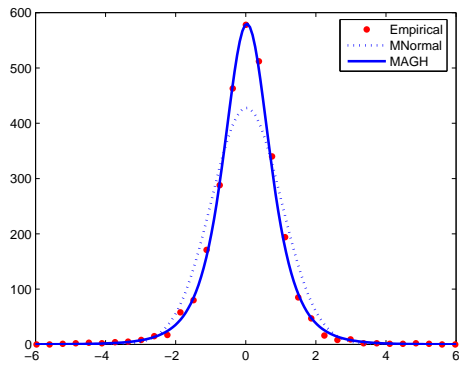


Figura 5.6 PDF da margem BVSP.

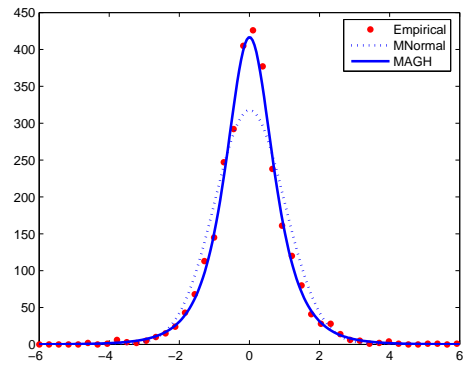


Figura 5.7 PDF da margem CAC.

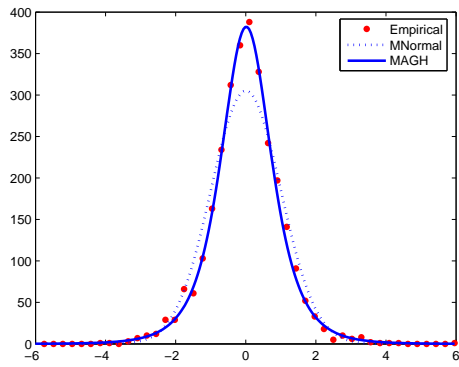


Figura 5.8 PDF da margem DAX.

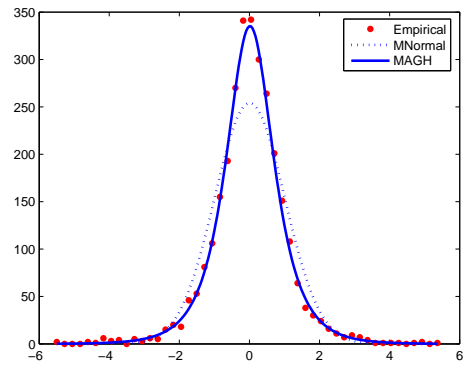


Figura 5.9 PDF da margem FTSE.

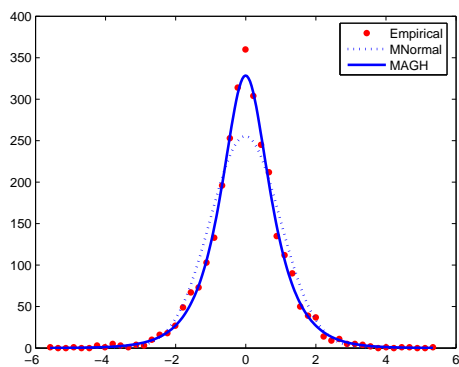


Figura 5.10 PDF da margem NIKK.

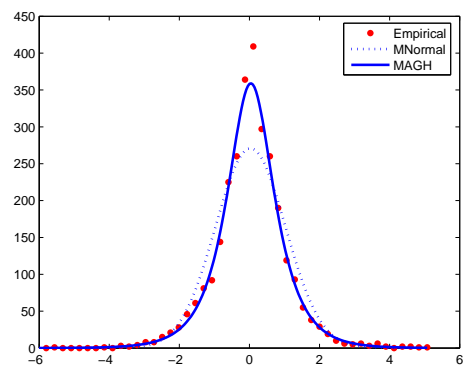


Figura 5.11 PDF da margem SP500.

5.7 Conclusão

Neste capítulo apresentamos o movimento geométrico MAGH, como um processo de Lévy multidimensional alternativo ao movimento geométrico Browniano multidimensional. Em seguida foram apresentadas evidências empíricas de que os retornos dos ativos são melhores descritos pelo movimento geométrico MAGH do que pelo respectivo movimento Browniano. Mostramos também a importância de considerarmos os ativos conjuntamente de forma a modelarmos também sua interdependência.

Uma grande limitação do modelo é o esforço computacional requerido para a estimação, mas que devido a um algoritmo simplificador, pode ser considerado mais reduzido do que de outras formas de modelagem multidimensional. O bom ajuste dos retornos dos ativos nos motiva a buscamos o apreçamento de derivativos multidimensionais utilizando esse processo de Lévy como o processo que governa os preços dos ativos subjacentes.

Outro ponto importante a ressaltar é que a estrutura de dependência obtida com a MAGH é uma simplificação e que uma análise mais rigorosa necessitaria ser feita de forma a modelar a verdadeira estrutura não-linear. Para maiores detalhes a cerca de cópulas sugerimos Sklar (1959), e no específico caso de cópulas de Lévy sugerimos ver Tankov (2004).

Apreçamento de Derivativos Multidimensionais Utilizando o Movimento Geométrico MAGH

6.1 Introdução

Apesar de ter sido utilizada para modelar retornos de ativos, a distribuição MAGH ainda não havia sido formalizada como geradora de um processo de Lévy (ver Capítulo 5) e conseqüentemente não existe na literatura sua utilização no apreçamento de derivativos multidimensionais. Como o caso unidimensional possui correspondência unívoca com o movimento geométrico Hiperbólico Generalizado (ver Capítulo 3), podemos dizer que o apreçamento de derivativos unidimensionais usando uma MAGH unidimensional já está bastante coberto (ver Capítulo 4).

Um grande resultado deste capítulo advém da construção da densidade resultante da convolução de distribuições MAGH, que não são fechadas sob convolução, de acordo com os resultados apresentados no capítulo 4. Essa construção está sintetizada na proposição 6.1.

Em seguida, outro resultado importante é a utilização das distribuições MAGH para apreçamento de derivativos multivariados.

6.2 Apreçamento de Derivativos Multidimensionais

Uma extensão natural dos modelos utilizados no capítulo 4 é quando temos um derivativo baseado em mais de um ativo objeto (por exemplo temos as opções de spread). Neste capítulo teremos uma breve resenha de como apreçar derivativos com essa característica.

6.2.1 Exemplos de Derivativos Multidimensionais

Diversos derivativos podem ser encontrados que derivam de dois ou mais ativos. Falaremos aqui dos mais comuns e remetemos o leitor para os trabalhos de Azevedo & Fajardo (2005) e Wilmott (1998).

Um dos derivativos multidimensionais mais comuns é a opção de *spread*, que possui o seguinte *pay-off* no caso de uma call:

$$PO_{spread} = \max(S_{2T} - S_{1T} - K, 0), \quad (6.1)$$

onde PO representa o *pay-off*, S_{1T} e S_{2T} são os preços dos ativos 1 e 2 no vencimento e K é o preço de exercício, representando o *spread* entre o ativo 2 e o ativo 1. No caso especial em que $K = 0$, temos a opção de troca, como por exemplo, a opção de troca de Telemar PN por Telemar ON.

Outro derivativo multidimensional comumente encontrado é o contrato de Swap, cujo *pay-off* é dado por:

$$PO_{swap} = S_{2T} - S_{1T}. \quad (6.2)$$

No Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros, principalmente, possui uma série de *swaps* negociáveis, podendo ser feito um contrato envolvendo quaisquer ativos subjacentes da relação abaixo:

- Taxa Prefixada
- Taxa de Depósitos Interfinanceiros de um dia
- Taxa de Câmbio de Dólar Comercial
- Taxa Referencial
- Variação do Preço do Ouro
- Taxa Selic
- Taxa Básica Financeira
- Taxa ANBID
- Índice Bovespa
- Taxa de Juro de Longo Prazo (TJLP)
- Valor de uma Carteira de Ações
- Taxa de Câmbio de Reais por Euro
- Índice Geral de Preços - Mercado
- Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna
- Índice de Preços ao Consumidor
- Índice Nacional de Preços ao Consumidor
- Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
- Taxa de Câmbio de Reais por Iene
- Índice Brasil-50

Na literatura existem outros tipos de derivativos multidimensionais, dentre os quais podemos citar a opção de máximo¹ ($PO_{max} = \max(S_{2T}, S_{1T})$), a opção de mínimo ($PO_{min} = \min(S_{2T}, S_{1T})$) e os Quantos².

Apesar da diversidade existente nos tipos de derivativos multidimensionais, o método de apreçamento é similar para todos eles, de forma que o que apresentaremos a seguir poderá ser utilizado para apreçar quaisquer derivativos multidimensionais.

6.2.2 Metodologia de Apreçamento

Partimos de um modelo de mercado com d ativos (S^1, S^2, \dots, S^d) , dados por:

$$S_t^1 = e^{X_t^1}, \quad S_t^2 = S_0^2 e^{X_t^2}, \dots, \quad S_t^d = S_0^d e^{X_t^d}, \quad (6.3)$$

onde (X^1, X^2, \dots, X^d) é um processo de Lévy multidimensional de acordo com a definição 2.1. O primeiro ativo é um título de renda fixa, e por isso, sem perda de generalidade fazemos $S_0^1 = 1$. Apesar de geralmente ele ser considerado não estocástico, sua aleatoriedade é importante quando temos que apreçar opções do tipo Quanto.

Podemos perceber que 6.3 implica que o retorno logaritmo dos ativos segue um processo de Lévy, pois de fato temos que:

$$\begin{aligned} \ln(S_t^2) &= \ln(S_0^2 e^{X_t^2}) \\ &= \ln(S_0^2) + X_t^2 \end{aligned}$$

donde, fazendo $t = 1$:

$$\ln(S_1^2/S_0^2) = X_1^2. \quad (6.4)$$

O que mostra que os retornos logarítmicos dos ativos assim representados seguem um processo de Lévy.

Coloquemos nesse mercado um derivativo com *pay-off* dado genericamente por:

$$PO_T = f(S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^d). \quad (6.5)$$

Desta forma, seguindo a abordagem da utilização de probabilidades neutras ao risco, temos que o preço hoje desse derivativo deve ser representado pelo valor presente esperado calculado com base numa medida neutra ao risco.

Desta forma, considerando que os preços relativos são P -martingais³, o problema de apreçamento de derivativos multidimensional se reduz a:

$$c = E^P \left[f(S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^d) \right], \quad (6.6)$$

¹Para maiores detalhes sobre essas opções sugerimos Wilmott (1998) e Hull (2003).

²As opções do tipo quanto são aplicadas quando há a aquisição de um ativo numa moeda diferente da moeda doméstica do comprador

³Isso é equivalente a dizer que P é uma medida martingal equivalente

onde c representa o preço do derivativo hoje. E ainda, considerando o caso mais comum em que a taxa de juros é determinística, o problema simplifica-se a:

$$c = e^{-rT} E^P \left[f(S_T^1, \dots, S_T^d) \right]. \quad (6.7)$$

Resumindo então os procedimentos para apreçamento, temos que a principal dificuldade é a obtenção da medida martingal equivalente para o processo. Para obtenção dessa medida utilizamos a transformada de Esscher (ver Gerber & Shiu (1994)), generalizada para o caso multivariado, resumida a seguir:

Seja uma medida de probabilidade Q e suponha que os preços relativos não sejam martingais sobre Q . Faça então:

$$M(z, t; \theta) = \frac{M(z + \theta, t)}{M(\theta, t)}, \quad (6.8)$$

onde $M(\theta, t) = E \left(e^{\theta X_t'} \right)$, ou seja é a função geradora de momentos. Em seguida devemos encontrar um vetor θ^* tal que a probabilidade

$$d\mathcal{Q}_t^{\theta^*} = \frac{e^{\theta^* X_t'}}{E(e^{\theta^* X_t'})}, \quad (6.9)$$

seja uma medida martingal equivalente. Para isso, suponha que $X_t^1 = rt$, como em Gerber & Shiu (1994), então basta mostrarmos que:

$$S_0^j = E^*(e^{-rt} S_t^j) \quad \forall j, \quad \forall t, \quad (6.10)$$

onde E^* é a esperança utilizando a medida de probabilidade \mathcal{Q}^{θ^*} . Faça agora $1_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, onde a coordenada j é a única com valor 1, então temos que:

$$r = \ln[M(1_j, 1; \theta^*)] = \ln \left[\frac{M(1_j + \theta^*, 1)}{M(\theta^*, 1)} \right]. \quad (6.11)$$

A solução para esse conjunto de equações, para cada j nos permite construir \mathcal{Q}^{θ^*} que por construção é uma medida martingal equivalente.

Para aplicações da transformada de Esscher em casos multivariados remetemos o leitor a Fajardo & Mordecki (2006a), Gerber & Shiu (1994) e Gerber & Shiu (1996).

6.3 Modelo de Mercado

Partimos de um modelo de mercado com d ativos (S^1, S^2, \dots, S^d) , dados por:

$$S_t^1 = e^{rt}, \quad S_t^2 = S_0^2 e^{X_t^2}, \dots, \quad S_t^d = S_0^d e^{X_t^d}, \quad (6.12)$$

onde (X^1, X^2, \dots, X^d) é um processo de Lévy multidimensional cujos incrementos seguem uma distribuição *MAGH*, ou seja,

$$X_t - X_{t-1} \stackrel{d}{=} X_1 \sim \text{MAGH}, \quad (6.13)$$

com $X_0 = 0$ sem perda de generalidade.

6.4 Convolução das Distribuições MAGH

Como veremos nas seções a seguir, um dos requerimentos básicos para chegarmos ao apreçamento de derivativos é termos a distribuição dos possíveis retornos dos ativos da data 0 até o vencimento do derivativo. Dessa forma, há a necessidade de termos a convolução da distribuição MAGH.

Para desenvolvimento utilizaremos abordagem semelhante à utilizada no capítulo 4. Suponha que X_t é um processo de Lévy multidimensional. Pela definição de um processo de Lévy, temos que a distribuição de $X_t - X_{t-1}$ é a mesma distribuição de X_1 . O que necessitamos para o apreçamento de derivativos multidimensionais que vencem em T é calcular a distribuição de:

$$X_T = \sum_{t=1}^T X_t - X_{t-1}. \quad (6.14)$$

Como os incrementos são independentes, e usando as propriedades da função característica, podemos escrever que:

$$\phi_{X_T}(u) = \prod_{t=1}^T \phi_{X_1}(u) = \phi_{X_1}^T(u). \quad (6.15)$$

Uma importante simplificação para o cálculo da convolução acontece se podermos fazê-la de forma que as funções características sejam Reais (Press *et al.* 1992). Para isso, basta termos distribuições simétricas e centradas. A próxima proposição nos diz como podemos obter a MAGH de uma MAGH simétrica e centrada.

Proposição 6.1. *Seja $X \sim \text{MAGH}(x; \omega, \Sigma, M)$, então a distribuição de*

$$X_T = \sum_{t=1}^T X_t - X_{t-1} = \sum_{t=1}^T X_1,$$

com $X_0 = 0$, representada por $\text{MAGH}^{*T}(x; \omega, \Sigma, M)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{MAGH}^{*T}(x; \omega, \Sigma, M) = |A|^{-1} \prod_{i=1}^d \frac{e^{\beta_i y_i}}{M_{0i}^T(\beta_i)} \text{GH}_i^{*T}(y_i; \alpha_i, 0, 1, 0, \lambda_i), \quad (6.16)$$

onde M_{0i}^T representa a função geradora de momentos para a distribuição GH simétrica da i -ésima margem elevada à potência T e $y = (A')^{-1}(x - TM)$.

Demonstração. Por definição temos que, se $X \sim \text{MAGH}(x; \omega, \Sigma, M)$, então $X \stackrel{d}{=} A'Y + M$, onde Y é um vetor de AGHs independentes. Logo:

$$X + X = A'Y + M + A'Y + M = A'(Y + Y) + 2M. \quad (6.17)$$

Portanto:

$$P(X + X < x) = P(A'(Y + Y) + 2M < x) = P((Y + Y) < (A')^{-1}(x - 2M)), \quad (6.18)$$

ou ainda:

$$F_X^{*2}(x) = F_Y^{*2}((A')^{-1}(x - 2M)). \quad (6.19)$$

Derivando dos dois lados, temos que:

$$f_X^{*2}(x) = f_Y^{*2}((A')^{-1}(x - 2M))|A|^{-1}. \quad (6.20)$$

Como a convolução de uma distribuição multivariada com margens independentes pode ser decomposta num vetor de convoluções das distribuições univariadas das margens (ver proposição 5.4) podemos então reescrever a equação acima com a seguinte representação:

$$f_X^{*2}(x) = \prod_{i=1}^d f_{Y_i}^{*2}(y_i)|A|^{-1} = |A|^{-1} \prod_{i=1}^d f_{Y_i}^{*2}(y_i), \quad (6.21)$$

onde i representa cada uma das margens e $y = (A')^{-1}(x - 2M)$.

De acordo com a proposição 3.1 e com a definição 5.1, temos:

$$AGH(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \delta^2, \mu) \stackrel{d}{=} GH(x; \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda), \quad (6.22)$$

ou, como no caso em questão:

$$AGH(y_i; (\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \lambda_i), 1, 0) \stackrel{d}{=} GH(y_i; \alpha_i, \beta_i, 1, 0, \lambda_i). \quad (6.23)$$

Daí podemos obter:

$$f_X^{*2}(x) = |A|^{-1} \prod_{i=1}^d AGH_i^{*2}(y_i; \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \lambda_i, 1, 0) \quad (6.24)$$

$$= |A|^{-1} \prod_{i=1}^d GH_i^{*2}(y_i; \alpha_i, \beta_i, 1, 0, \lambda_i). \quad (6.25)$$

Substituindo a equação 4.19:

$$f_X^{*2}(x) = |A|^{-1} \prod_{i=1}^d \frac{e^{\beta_i y_i}}{M_{0i}^2(\beta_i)} GH_i^{*2}(y_i; \alpha_i, 0, 1, 0, \lambda_i). \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

Facilmente percebe-se que o processo acima é válido para qualquer $T \in \mathbb{R}$, concluindo a demonstração. ■

Desta forma, a obtenção da distribuição MAGH convoluída T vezes, resume-se a uma função das distribuições GHs univariadas simétricas e centradas convoluídas, o que já foi resolvido no capítulo 4 através do uso de IFFT (para aplicações de FFT e IFFT em apreçamento de opções multivariadas, sugerimos Dempster & Hong (2002)).

6.5 Transformadas de Esscher para distribuições MAGH

Na seção 6.2, mais precisamente na equação 6.8, apresentamos a forma de obtermos o parâmetro θ da transformada de Esscher multivariada. Iremos agora desenvolver a transformada de Esscher propriamente dita aplicada a uma distribuição MAGH.

Proposição 6.2. *A densidade da $MAGH^{*T,\theta}(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \Sigma, M)$ é dada por:*

$$MAGH^{*T,\theta}(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \Sigma, M) = \frac{e^{\theta x'}}{M_{MAGH}^T(\theta)} |A|^{-1} \prod_{i=1}^d \frac{e^{\beta_i y_i}}{M_{0i}^T(\beta_i)} GH_i^{*T}(y_i; \alpha_i, 0, 1, 0, \lambda_i), \quad (6.28)$$

onde M_{0i}^T representa a função geradora de momentos para a distribuição GH simétrica da i -ésima margem elevada à potência T , $y = (A')^{-1}(x - TM)$ e M_{MAGH} é a função geradora de momentos da distribuição MAGH, dada pela equação 5.7.

Demonstração. Da equação 6.9, temos que a transformação a ser feita na densidade do mundo real para que se torne uma densidade neutra ao risco é:

$$d\mathcal{Q}_t^{\theta^*} = \frac{e^{\theta^* x'_t}}{E(e^{\theta^* x'_t})}. \quad (6.29)$$

Logo temos que:

$$MAGH^{*T,\theta}(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \Sigma, M) = \frac{e^{\theta x'}}{M_{MAGH}^T(\theta)} MAGH^{*T}(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \Sigma, M). \quad (6.30)$$

Substituindo a expressão derivada da proposição 6.1:

$$MAGH^{*T,\theta}(x; (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda), \Sigma, M) = \frac{e^{\theta x'}}{M_{MAGH}^T(\theta)} |A|^{-1} \prod_{i=1}^d \frac{e^{\beta_i y_i}}{M_{0i}^T(\beta_i)} GH_i^{*T}(y_i; \alpha_i, 0, 1, 0, \lambda_i). \quad (6.31)$$

O que conclui a demonstração ■

6.6 Apreçamento de Spread Options usando o MGMAGH

Tendo em vista o desenvolvimento de duas fundamentais ferramentas para o apreçamento de derivativos, iremos agora formalizar como realizar o apreçamento de Opções do tipo

Spread utilizando um Movimento Geométrico Hiperbólico Generalizado Afim Multivariado (MGMAGH).

No mercado definido na seção 6.3, introduzimos uma opção de compra de *Spread* do tipo européia, que possui o seguinte *pay-off*, representado por *PO*:

$$PO = \max(S_{3,T} - S_{2,T} - K, 0). \quad (6.32)$$

Onde K representa o preço de exercício⁴ e T o vencimento da opção.

De acordo com a seção 6.2, vimos que o problema de apreçamento de uma opção (que é um direito contingente) consiste no cálculo do valor esperado, calculado sobre uma medida neutra ao risco, do *pay-off* descontado para valor presente a uma taxa de juros livre de risco. Desta forma temos que:

$$c = e^{-rT} E_{\mathcal{Q}} [\max(S_{3,T} - S_{2,T} - K, 0)]. \quad (6.33)$$

Onde $E_{\mathcal{Q}}$ é a esperança calculada na medida \mathcal{Q} neutra ao risco e r é a taxa de juros livre de risco composta continuamente. Substituindo os valores de $S_{3,T}$ e $S_{2,T}$ obtemos:

$$c = e^{-rT} E_{\mathcal{Q}} [\max(S_{3,0}e^{X_{3,T}} - S_{2,0}e^{X_{2,T}} - K, 0)]. \quad (6.34)$$

Como quando $S_{3,T} \leq (S_{2,T} + K)$ não há exercício da opção, ou seja, seu *pay-off* é 0, escrevemos:

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{S_{3,0}e^{x_3} > (S_{2,0}e^{x_2} + K)\}}^{\infty} (S_{3,0}e^{x_3} - S_{2,0}e^{x_2} - K) \\ &\quad \times \text{MAGH}^{*T, \theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Ajustaremos então o limite de integração:

$$S_{3,0}e^{x_3} > (S_{2,0}e^{x_2} + K). \quad (6.36)$$

Aplicando o log, temos:

$$\ln(S_{3,0}) + x_3 > \ln(S_{2,0}e^{x_2} + K). \quad (6.37)$$

Isolando x_3 :

$$x_3 > \ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2} + K}{S_{3,0}}\right). \quad (6.38)$$

Substituindo 6.38 em 6.35:

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2} + K}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} (S_{3,0}e^{x_3} - S_{2,0}e^{x_2} - K) \\ &\quad \times \text{MAGH}^{*T, \theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

⁴Vale à pena lembrar que se K for zero, a opção se transforma numa opção de troca.

Por fim, separamos as integrais, obtendo:

$$\begin{aligned}
c &= e^{-rT} S_{3,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2+K}}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} e^{x_3} \text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2 \\
&\quad - e^{-rT} S_{2,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2+K}}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} e^{x_2} \text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2 \\
&\quad - e^{-rT} K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2+K}}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} \text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \quad (6.40)
\end{aligned}$$

Lembrando que $\text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M)$ pode ser obtido através da proposição 6.1, todos os termos são conhecidos e a integral é plenamente possível de ser avaliada numericamente.

No caso de opções de troca, necessitamos apenas fazer $K = 0$ obtendo:

$$\begin{aligned}
c &= e^{-rt} S_{3,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2}}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} e^{x_3} \text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2 \\
&\quad - e^{-rt} S_{2,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln\left(\frac{S_{2,0}e^{x_2}}{S_{3,0}}\right)}^{\infty} e^{x_2} \text{MAGH}^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \quad (6.41)
\end{aligned}$$

6.7 Apreçamento de Swaps usando o MGMAGH

O procedimento de apreçamento de Swaps é muito semelhante ao método utilizado para o apreçamento de opções de Spread e de Troca, vistos na seção anterior. Devido a isso alguns passos mais básicos serão omitidos.

No mercado definido na seção 6.3, introduzimos um Swap, que possui o seguinte *pay-off*, representado por PO :

$$PO = (S_{3,T} - S_{2,T}). \quad (6.42)$$

Onde T é o vencimento da opção. Perceba a diferença do Swap para a call da seção interior, porque o detentor do Swap não mais possui o direito de não exercer a opção caso não seja interessante para ele. Temos então que:

$$swap = e^{-rT} E_{\mathcal{Q}}[(S_{3,T} - S_{2,T})]. \quad (6.43)$$

Onde $E_{\mathcal{Q}}$ é a esperança calculada na medida \mathcal{Q} neutra ao risco e r é a taxa de juros livre de risco composta continuamente. Daí temos a grande diferença entre a opção acima referida e o Swap em questão:

$$swap = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (S_{3,0}e^{x_3} - S_{2,0}e^{x_2})MAGH^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \quad (6.44)$$

Donde, separando as integrais, obtemos:

$$\begin{aligned} swap &= e^{-rt} S_{3,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_3} MAGH^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2 \\ &\quad - e^{-rt} S_{2,0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2} MAGH^{*T,\theta}((x_2, x_3); \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \lambda, \Sigma, M) dx_3 dx_2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Desta forma, obtemos então o preço de um Swap conforme proposto inicialmente.

6.8 Resultados Empíricos

Nesta seção iremos avaliar empiricamente os modelos de apreçamento derivados nas seções anteriores. Inicialmente apresentaremos o apreçamento de uma suposta opção de troca de Telemar ON por Telemar PN. Depois apresentaremos o apreçamento de um Swap Dólar x Ibovespa, existente no mercado de balcão da BM&F e que não possui referencial de preços de mercado amplamente divulgados e líquidos. Além disso os ativos em questão possuem estruturas de dependência diferentes, sendo um com correlação positiva e outro com correlação negativa.

6.8.1 Opção de Troca de Telemar ON por Telemar PN

Para verificarmos os valores das opções de troca de Telemar ON por Telemar PN, utilizaremos o período amostral de 22/09/1998 a 30/05/2006, e a tabela 6.1 apresenta as estatísticas descritivas dos dados.

Tabela 6.1 Estatísticas Descritivas (%)

| | Tnlp3 | Tnlp4 |
|---------------|---------|---------|
| Média | 0,152 | 0,060 |
| Desvio Padrão | 3,498 | 3,060 |
| Assimetria | 0,422 | 1,074 |
| Curtose | 7,109 | 18,661 |
| Mínimo | -19,583 | -15,563 |
| Máximo | 24,512 | 38,977 |
| Matriz de | 1,000 | 0,618 |
| Correlações | 0,618 | 1,000 |

Para uniformização das estatísticas e podermos ter alguma confiança na correlação, os dados foram interpolados nos dias em que uma das duas ações não havia sido negociada. Desta forma a correlação foi calculada usando os retornos pareados.

O passo seguinte é a estimação dos parâmetros da distribuição MAGH e suas subclasses para os dois ativos. O algoritmo utilizado na estimação, bem como a precisão numérica utilizadas foram as mesmas utilizadas nos capítulos anteriores. O resultado dessa estimação está na tabela 6.2:

Tabela 6.2 Parâmetros Estimados para a MAGH e suas subclasses

| Ativos | | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | $\tilde{\lambda}$ | M | Σ | LL |
|--------|-----|------------------|-----------------|-------------------|---------|-----------------|---------|
| | GH | 0,0895 | 0,7979 | -1,3207 | -0,1239 | 17,0810 14,4360 | -1991,9 |
| Tnlp3 | | 0,4301 | 0,1774 | -1,8788 | -0,0951 | 14,4360 17,9440 | -2538,4 |
| X | Nig | 0,3401 | 0,1869 | -0,5 | -0,1518 | 7,4062 6,4008 | -2013,4 |
| Tnlp4 | | 0,9023 | 0,0552 | -0,5 | -0,0959 | 6,4008 7,9559 | -2541,8 |
| | Hyp | 0,0904 | 0,0949 | 1 | -0,2233 | 0,9509 1,1533 | -2072,3 |
| | | 0,6309 | 0,0433 | 1 | -0,1361 | 1,1533 1,4334 | -2547,7 |

Aproveitaremos e apresentaremos uma medida de forma a ajudar na interpretação do apreçamento dos ativos.

Definição 6.1 (Pseudo Correlação da MAGH). *Seja uma matriz $\Sigma_{d \times d}$, parâmetro de escala de uma distribuição MAGH, definida da seguinte forma:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

A matriz ρ^* , denominada de Matriz de Pseudo Correlações da MAGH, é então definida por:

$$\rho_{i,j}^* = \frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}, \quad (6.47)$$

onde $\rho_{i,j}^*$ representa o elemento da linha i e da coluna j da matriz ρ^* e, analogamente, $\sigma_{i,j}$ é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz Σ .

Perceba que a definição acima se confundiria com a definição de matriz de correlação se a matriz Σ fosse a matriz de variância e covariância.

No caso em questão, a pseudo correlação entre Tnlp3 e Tnlp4 para a distribuição GH e suas subclasses, bem como a correlação empírica, estão na tabela 6.3. A pseudo correlação não tenta estimar a correlação empírica, mas é uma razoável medida para a dependência linear entre as séries.

Em seguida calcularemos o vetor θ , parâmetro necessário para a transformada de Esscher. Sua obtenção vem através de uma solução numérica para a equação 6.8. Para essa solução também foram utilizados os métodos para estimação da MAGH, com a mesma precisão. Os resultados da estimação, para diversos valores possíveis para a taxa de juros livre de risco estão na tabela 6.4. Vale à pena ressaltar que o parâmetro r utilizado na otimização foi a taxa de juros composta da tabela em questão convertida

Tabela 6.3 Correlação e Pseudo Correlação

| Distribuição | ρ e ρ^* |
|--------------|-------------------|
| MAGH | 0,8246 |
| MANig | 0,8339 |
| MAHyp | 0,9879 |
| Empírica | 0,6178 |

para capitalização contínua e diária, uma vez que os parâmetros estimados se basearam em retornos diários. Sugerimos Fajardo & Mordecki (2006b) para uma relação entre o parâmetro de Esscher e a simetria do mercado.

Tabela 6.4 Parâmetros de Esscher

| | θ^* | | | | |
|-----------------------|------------|---------|---------|---------|---------|
| | 10%aa | 15%aa | 20%aa | 25%aa | 30%aa |
| GH | 1,1885 | 1,2172 | 1,2406 | 1,259 | 1,2724 |
| | -3,1714 | -3,1078 | -3,0434 | -2,9779 | -2,9111 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | -1,9829 | -1,8906 | -1,8028 | -1,7189 | -1,6387 |
| Nig | 1,7865 | 1,7895 | 1,7913 | 1,7938 | 1,7953 |
| | -4,3434 | -4,2539 | -4,1672 | -4,085 | -4,0051 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | -2,5569 | -2,4644 | -2,3759 | -2,2912 | -2,2098 |
| Hyp | 1,6908 | 1,6944 | 1,6978 | 1,7011 | 1,7042 |
| | -2,5216 | -2,5191 | -2,5166 | -2,5142 | -2,512 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | -0,8308 | -0,8247 | -0,8188 | -0,8131 | -0,8078 |

Em seguida, nas figuras 6.1(a) e 6.1(b) apresentamos respectivamente os gráficos da MAGH estimada e da densidade alterada pela transformada de Esscher. Em seguida nas figuras 6.2(a) e 6.2(b) mostramos as curvas de nível das mesmas distribuições, e por fim, nas figuras 6.3(a) e 6.3(b) mostramos o gráfico e as curvas de nível da diferença entre a densidade transformada para o mundo neutro ao risco e a densidade do mundo real.

Percebe-se nesse último gráfico (figura 6.3(b)), olhando as curvas de nível, que o efeito da transformada de Esscher é de dar maior peso aos eventos considerados “piores”, e menor peso aos eventos considerados “melhores”, como prevê a teoria. De fato os retornos mais positivos possuem menor peso na densidade neutra ao risco do que na real e os retornos mais negativos possuem maior peso na densidade neutra ao risco do que na real.

A implementação numérica para o cálculo dos preços das Calls deve ser feita com muito cuidado, principalmente devido ao fato de que o algoritmo chave para esse cálculo, o FFT⁵, necessita que as variáveis sejam igualmente espaçadas, o que no caso multivariado requer atenção uma vez que a transformada inversa deve ser aplicada na variável y transformada de acordo a proposição 6.1.

O software utilizado para a implementação numérica foi o Matlab[®] e utilizou os mesmos níveis de precisão utilizados nas demais otimizações numéricas. A integral foi

⁵Fast Fourier Transformation. Algoritmo desenvolvido por Cooley & Tukey (1965).

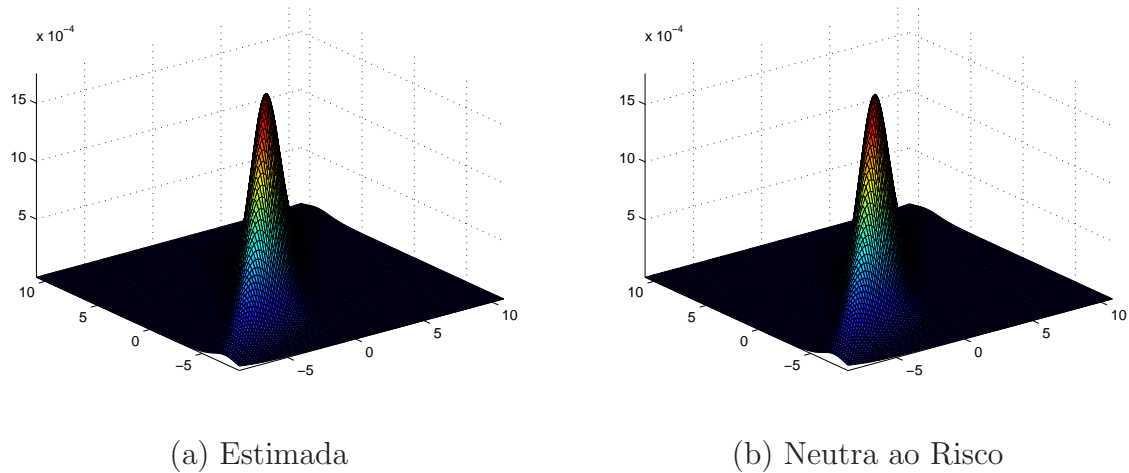


Figura 6.1 Densidade de $Tnlp3 \times Tnlp4$

avaliada pelo método trapezoidal com um grid de 1000×1000 pontos. O algoritmo de FFT foi utilizado com 2^{12} iterações.

Na figura 6.4 temos os preços de opções de troca ($K = 0$) com vencimento em $T = 10$ dias, com taxa de juros de 10% ao ano, para diversos preços iniciais dos ativos $Tnlp3$ e $Tnlp4$. De forma a fazer um comparativo, trazemos na figura 6.5 os gráficos dos preços das opções de troca calculados utilizando a distribuição MAGH menos os preços das opções de troca calculados pelo método de apreçamento de Margrabre⁶.

Outra análise importante é como variam os preços da opção de spread dada uma variação no preço de exercício e no seu prazo de vencimento. Os parâmetros utilizados foram, $S_{20} = S_{30} = 50$ e taxa de juros de 10% ao ano. O resultado da análise está na figura 6.6.

⁶Para maiores detalhes sobre o método de apreçamento de opções de troca desenvolvido por Margrabre, sugerimos Margrabre (1978) e Margrabre (1993), bem como Azevedo & Fajardo (2005) para uma aplicação do método a dados brasileiros.

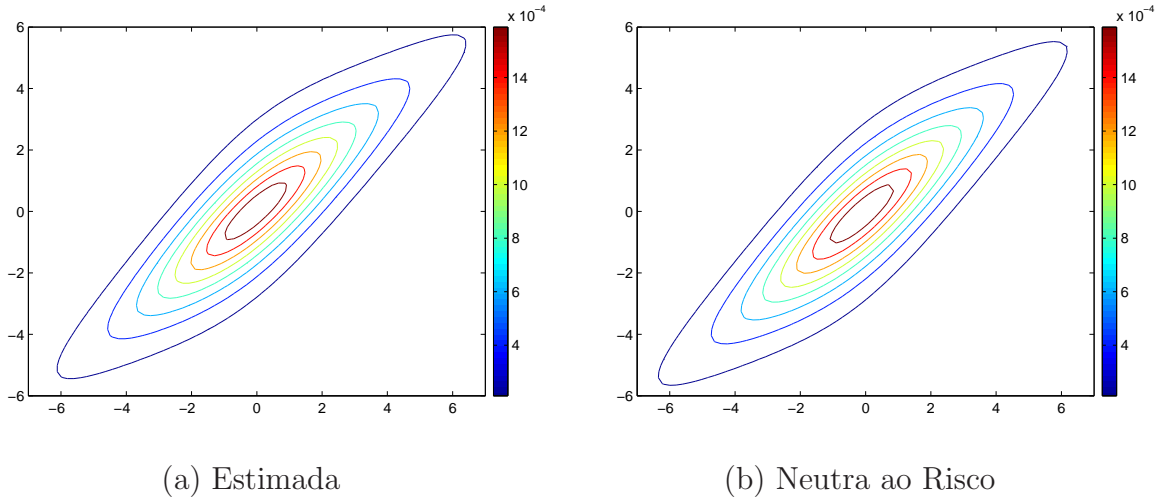


Figura 6.2 Curvas de Nível de Tnlp3 x Tnlp4

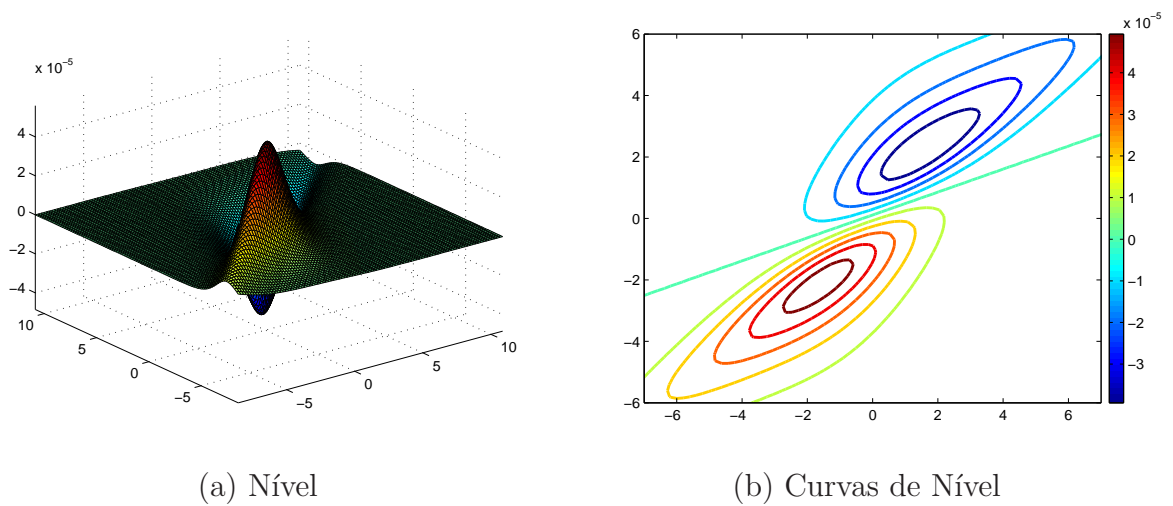


Figura 6.3 Densidade Neutra ao Risco - Densidade Estimada

Figura 6.4 Preços de uma Opção de Troca de Tnlp4 por Tnlp3 com vencimento em 10 dias.

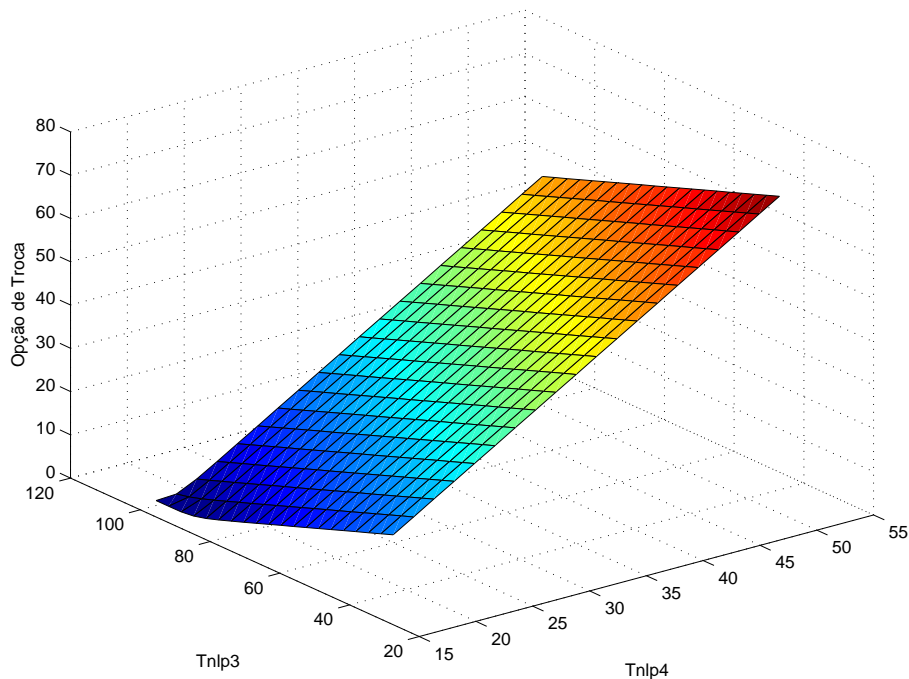


Figura 6.5 Preços de uma Opção de Troca de Tnlp4 por Tnlp3 com vencimento em 10 dias - Método de Margrabe.

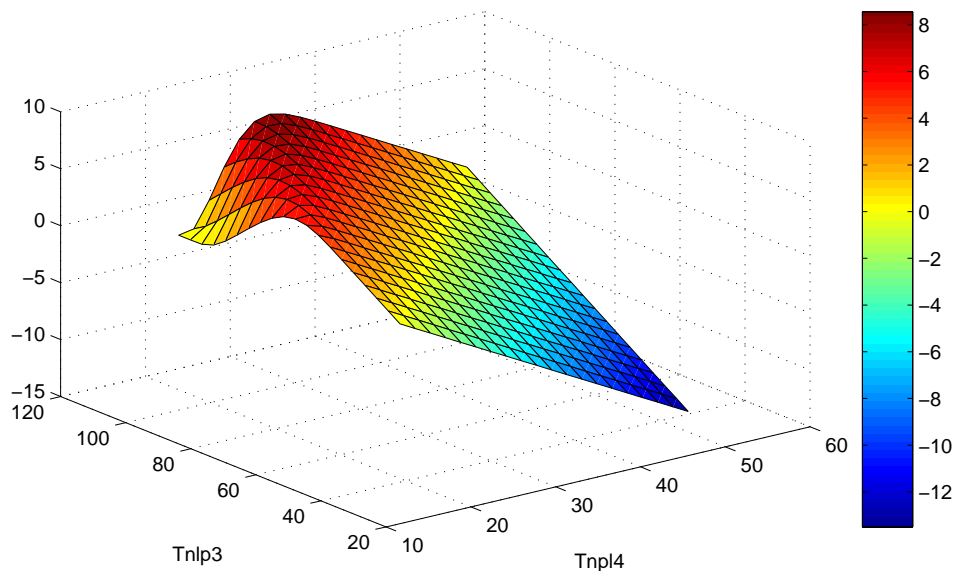
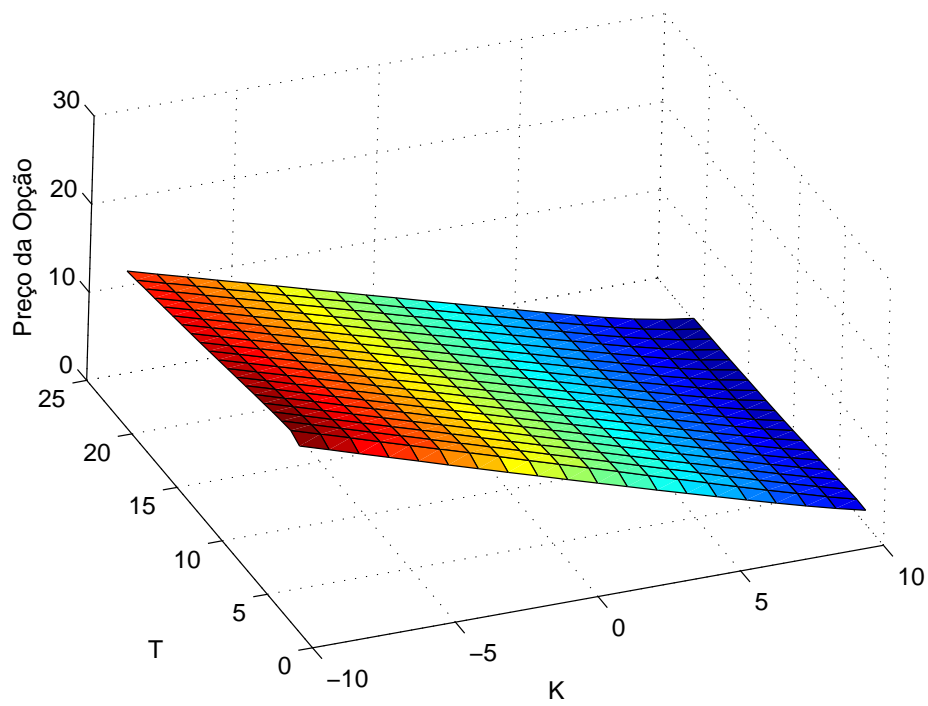


Figura 6.6 Preços de uma Opção de Spread de Tnlp4 por Tnlp3 para diversos preços de exercício.



6.8.2 Swap Dólar x Ibovespa

Uma aplicação importante é a utilização do modelo aqui exposto para colocar preço em contrato de Swap Dólar x Ibovespa negociados no mercado de balcão da BM% F. Como não há um mercado muito líquido, o preço do contrato necessita de uma base teórica de forma a subsidiar seus operadores na negociação. O período amostral utilizado, devido à mudança de regime cambial, foi de 1/2/1999 a 30/05/2006, e a tabela 6.5 apresenta as estatísticas descritivas dos dados. As estatísticas para o Ibovespa estão diferentes dos capítulos anteriores por conta da mudança de período de avaliação. Essa mudança foi necessária para parear os dados com a taxa de câmbio.

Uma pequena observação sobre a fonte de dados se faz necessária, pois no caso utilizamos a cotação de fechamento da taxa de câmbio Reais por Dólar do Banco Central. Apesar das críticas de que ela não reflete necessariamente os preços de mercado, pois é uma média de operações feitas no dia, decidimos por utilizá-la por conta de ser essa taxa de câmbio a utilizada pela Bolsa de Mercadorias e Futuros para realizar os ajustes de fluxo de caixa necessários.

Tabela 6.5 Estatísticas Descritivas (%)

| | Dólar | Ibov |
|---------------|--------|--------|
| Média | 0,008 | 0,079 |
| Desvio Padrão | 1,005 | 1,850 |
| Assimetria | -0,651 | -0,143 |
| Curtose | 13,543 | 4,021 |
| Mínimo | -9,360 | -9,634 |
| Máximo | 4,926 | 8,400 |
| Matriz de | 1,000 | -0,269 |
| Correlações | -0,269 | 1,000 |

Da mesma forma que no cálculo da opção de troca, os dados foram interpolados, pois nos feriados em São Paulo há negociação de Dólar mas não na Bovespa, causando um descasamento de datas. Os parâmetros estimados para esses ativos utilizando a distribuição MAGH e suas subclasses estão na tabela 6.6. Os parâmetros do índice Ibovespa estão diferentes dos capítulos anteriores devido ao período de estimação que mudou bastante.

Tabela 6.6 Parâmetros Estimados para a MAGH e suas subclasses

| Ativos | Subclasse | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | λ | M | Σ | LL | |
|---------------|-----------|------------------|-----------------|-----------|---------|----------|---------|---------|
| Dólar x Ibvsp | GH | 0,2396 | 0,0923 | -1,3910 | -0,0638 | 1,3125 | -2,2166 | -2355,6 |
| | | 4,0283 | -0,0950 | -1,0038 | 0,4115 | -2,2166 | 15,1710 | -2593,1 |
| | Nig | 0,5402 | 0,0448 | -0,5 | -0,0723 | 0,7670 | -2,0054 | -2360,3 |
| | | 4,0749 | -0,0901 | -0,5 | 0,4143 | -2,0054 | 13,7250 | -2593,2 |
| | Hyp | 0,3132 | 0,0229 | 1 | -0,0729 | 0,2415 | -1,3986 | -2377,7 |
| | | 3,9730 | -0,0792 | 1 | 0,4227 | -1,3986 | 9,5725 | -2593,4 |

A tabela 6.7 traz a pseudo correlação, apresentada na definição 6.1, calculada para a MAGH e suas subclasses, bem como a correlação empírica.

Tabela 6.7 Correlação e Pseudo Correlação

| Distribuição | ρ e ρ^* |
|--------------|-------------------|
| MAGH | -0,4967 |
| MANig | -0,6181 |
| MAHyp | -0,9198 |
| Empírica | -0,269 |

Os parâmetros de Esscher calculados para os ativos em questão, utilizando diversas taxas de juros livres de risco encontram-se na tabela 6.8. Percebe-se que diferentemente dos resultados da tabela 6.4 os parâmetros de Esscher possuem o mesmo sinal. Isso decorre do fato de que a distribuição de Tnlp3 x Tnlp4 possui correlação positiva, enquanto que no caso de Dólar x Ibovespa a correlação é negativa.

Tabela 6.8 Parâmetros de Esscher

| | θ^* | | | | |
|-----------------------|------------|----------|----------|----------|---------|
| | 10%aa | 15%aa | 20%aa | 25%aa | 30%aa |
| GH | 8,6926 | 13,133 | 17,329 | 21,339 | 25,15 |
| | 1,7292 | 3,5647 | 5,3179 | 6,9987 | 8,6094 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | 10,4218 | 16,6977 | 22,6469 | 28,3377 | 33,7594 |
| Nig | 16,403 | 25,539 | 34,281 | 42,653 | 50,675 |
| | 4,579 | 7,6106 | 10,515 | 13,3 | 15,971 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | 20,9820 | 33,1496 | 44,7960 | 55,9530 | 66,6460 |
| Hyp | -3,245 | -3,2488 | -3,2524 | -3,2558 | -3,259 |
| | -0,93696 | -0,92967 | -0,92268 | -0,91597 | -0,9095 |
| $\theta_1 + \theta_2$ | -4,1820 | -4,1785 | -4,1751 | -4,1718 | -4,1685 |

Em seguida, nas figuras 6.7(a) e 6.7(b) apresentamos respectivamente os gráficos da MAGH estimada e da densidade alterada pela transformada de Esscher. Já nas figuras 6.8(a) e 6.8(b) mostramos as curvas de nível das mesmas distribuições, e por fim, nas figuras 6.9(a) e 6.9(b) mostramos o gráfico e as curvas de nível da diferença entre a densidade transformada para o mundo neutro ao risco e a densidade do mundo real. O comportamento da densidade neutra ao risco é semelhante ao já relatado no caso da opção de spread entre Tnlp3 e Tnlp4.

Na figura 6.4 temos os preços dos Swaps com vencimento em $T = 10$ dias, com taxa de juros de 10% ao ano, para diversos preços iniciais para a Taxa de Câmbio e o Ibovespa (em termos relativos). Nos casos em que o preço é negativo significa que o detentor do Swap desejará receber para fazer o Swap. Isso é possível, por exemplo, se a expectativa de variação do Dólar é maior do que a expectativa de variação do Ibovespa, nesse caso, para trocar a rentabilidade do Dólar pela do Ibovespa o investidor exigirá receber um valor (preço negativo) para isso.

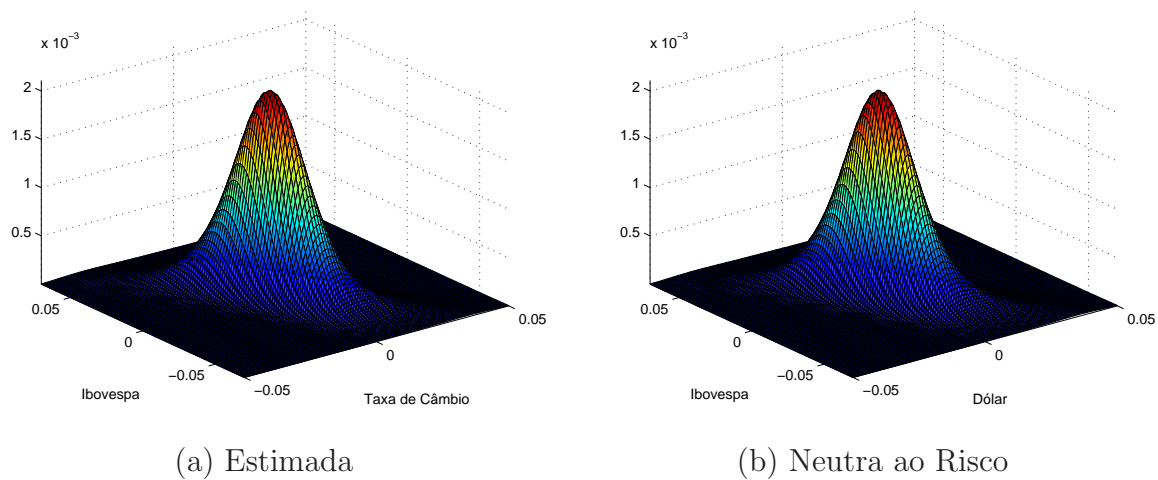
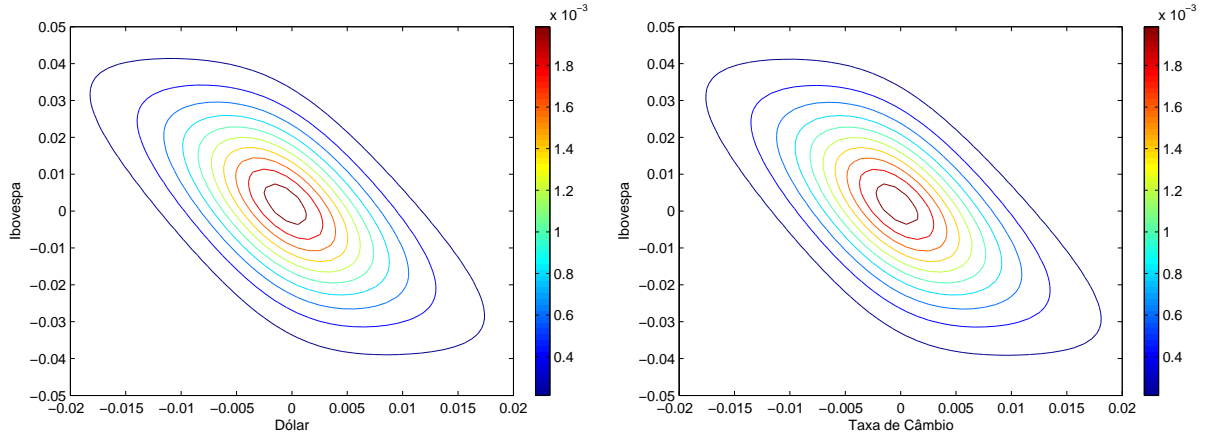


Figura 6.7 Densidade de Taxa de Câmbio R\$ por US\$ x Ibovespa

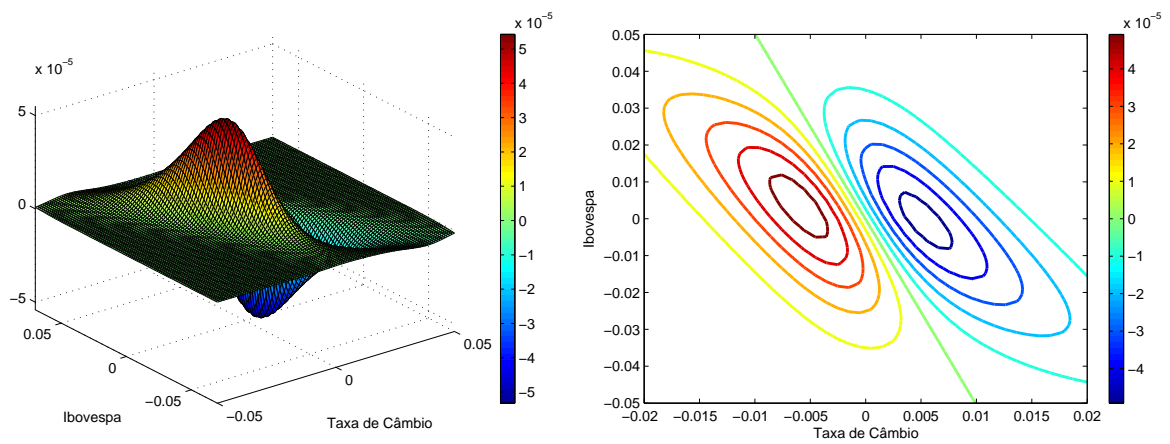
Outra análise importante é como variam os preços da opção de spread dada uma variação na taxa de juros e no seu prazo de vencimento. Os parâmetros utilizados foram, $S_{20} = S_{30} = 1$. O resultado da análise está na figura 6.11.



(a) Estimada

(b) Neutra ao Risco

Figura 6.8 Curvas de Nível de Taxa de Câmbio R\$ por US\$ x Ibovespa



(a) Nível

(b) Curvas de Nível

Figura 6.9 Densidade Neutra ao Risco - Densidade Estimada

Figura 6.10 Preços de um Swap Dólar X Ibovespa com vencimento em 10 dias.

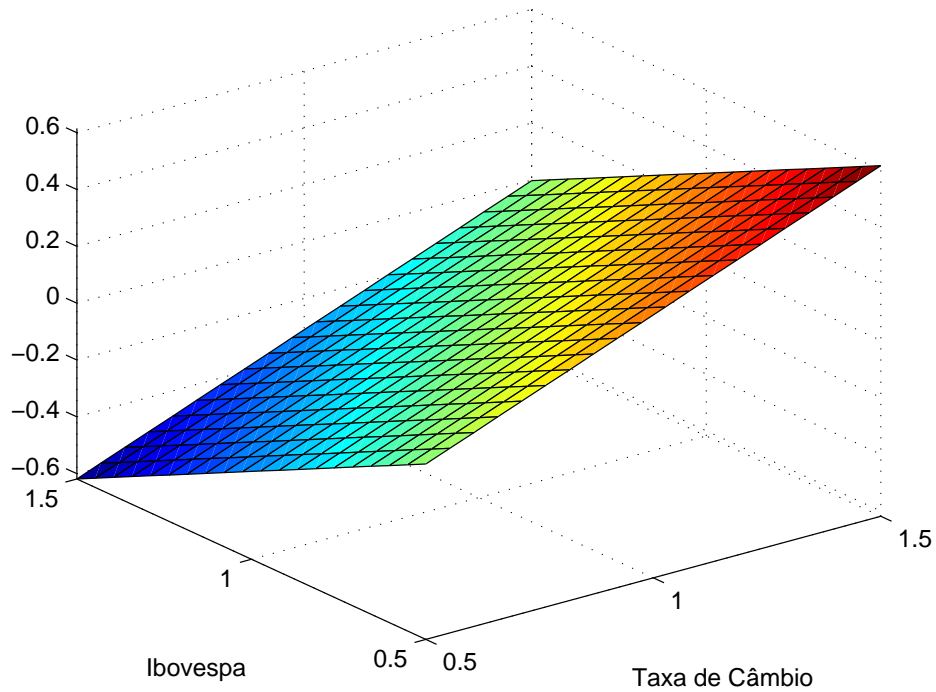
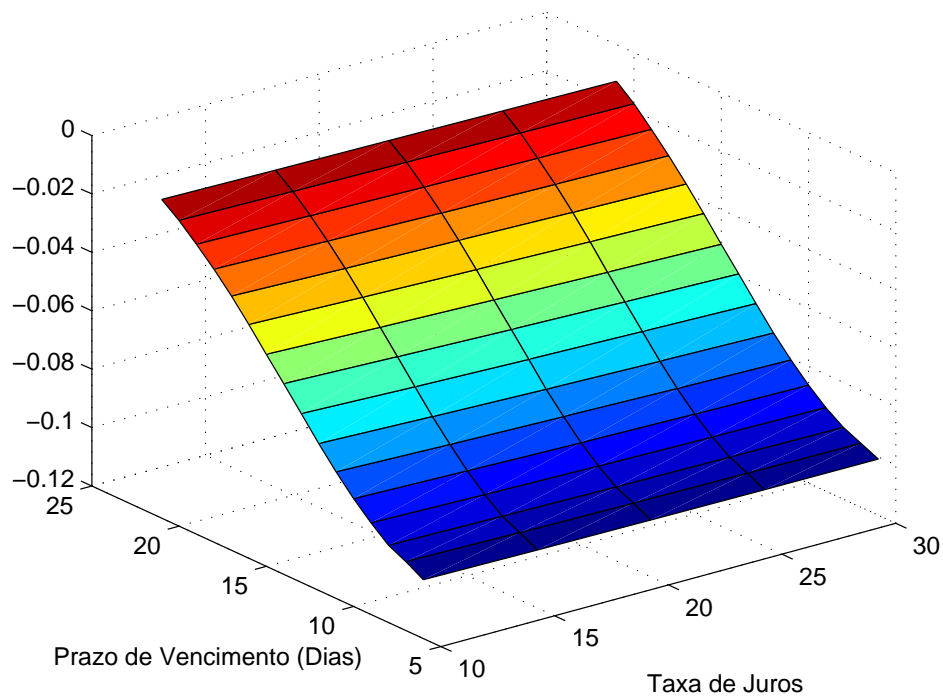


Figura 6.11 Preços de um Swap Dólar X Ibovespa para diversas taxas de juros e vencimentos.



6.9 Conclusão

Neste capítulo apresentamos um modelo para apreçarmos derivativos cujos ativos subjacentes seguem um movimento geométrico MAGH. Além de apresentarmos o modelo teórico de apreçamento fizemos alguns ensaios empíricos apreçando uma possível opção de spread ou uma opção de troca de Tnlp3 por Tnlp4 (Telemar On por Telemar PN) e também colocamos preço num Swap de Taxa de Câmbio por Ibovespa, disponível no mercado de balcão da Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo.

Aspectos Computacionais

Uma estratégia utilizada para facilitar as estimações dos parâmetros das distribuições, bem como os cálculos dos preços dos derivativos foi utilizar softwares disponíveis no mercado que facilitassem esses cálculos.

Após uma comparação entre o S-Plus[®], o SAS[®] e o Matlab[®] optou-se por utilizar o último que é fabricado pela empresa Mathworks.

Sua escolha deveu-se principalmente à facilidade de programação dos algoritmos tanto com relação à linguagem em si como com relação ao fato de ele já vir com muitas funções importantes disponíveis através de seus diversos componentes.

Para este trabalho, além do software principal foram utilizados componentes dos “toolboxes” de otimização, símbolos, finanças, estatística e algoritmos genéticos.

A capacidade gráfica do software também foi avaliada para subsidiar sua escolha, pois possui uma facilidade para tratamento de gráficos principalmente para os tridimensionais.

Por fim salientamos a capacidade do software de conversão dos algoritmos em programas C. Isso permite que no futuro disponibilizemos os algoritmos como parte de um software mais completo.

Para facilitar o tratamento dos dados optou-se por uma estratégia de modularização das funções, utilizando scripts para consolidá-las e executar as rotinas de uma forma automatizada.

Apesar de o Matlab[®] prover muitas facilidades, alguns cuidados devem ser observados quando de sua utilização.

- Utilização de Matrizes x Utilização de Loops

Uma das características fortes do Matlab[®] é a eficiência na manipulação de matrizes. Devido a isso deve-se evitar loops em favor da utilização das matrizes.

A diferença de tempo de execução é extremamente significativa principalmente quando são necessárias muitas operações. Como exemplo citamos o cálculo do preço de opções através de Fast Fourier Transformations, que com loops levava até 2 minutos por preço de opção, enquanto que utilizando matrizes o tempo reduzia para menos de 2 segundos.

- Precisão no cálculo da convolução através de Fast Fourier Transforms

Quando do cálculo da FFT o número de interações é bastante importante para determinar uma precisão do cálculo e também a velocidade de estimação. Deve-se analisar o “trade-off” entre velocidade e precisão de forma cuidadosa. Uma sugestão

é comparar a distribuição Normal Inversa Gaussiana convoluída através de FFT com a obtida através da fórmula fechada.

- Documentação das funções criadas e dos passos mais difíceis

Para execução deste trabalho foram criadas mais de 50 funções, o que pode provocar um esforço grande quando formos utilizá-las. Por isso é interessante documentar tanto as funções propriamente ditas quanto os passos mais difíceis, pois facilita alterações que se façam necessárias e também a correção de eventuais erros.

- Declaração das variáveis

O Matlab[®] permite que você crie variáveis em qualquer posição do algoritmo, além disso elas são “case sensitive”, ou seja, a variável “a” é diferente de “A”.

Para evitar dificuldades na depuração dos códigos, utilizamos como regra a definição de todas as variáveis utilizadas numa função no início dela, adotando uma padronização nos nomes de forma a não ter problemas de sensibilidade a maiúsculas e minúsculas.

Com a observação desses cuidados, uma boa revisão em todos os algoritmos, uma documentação precisa e um computador¹ com boa capacidade de processamento e de memória, as estimacões tornam-se tarefas simples e precisas.

¹Para execução deste trabalho foi utilizado um Pentium IV 3.04 Ghz com 1GB de memória

APÊNDICE B

Derivadas da Função de Log-Verossimilhança

A estimação de subclasses da distribuição hiperbólica permite que se utilize derivadas da função de log-verossimilhança para aumentar a velocidade de estimação.

A utilização de derivadas quando da estimação dos parâmetros da Generalizada Hiperbólica é complicada devido à dificuldade de implementação da derivada da função Bessel com relação à ordem (Apêndice C).

Já com as subclasses, como o λ já é dado, a utilização das derivadas proporciona um ganho no tempo de estimação.

Para simplificar a notação das equações utilizamos as seguintes igualdades:

$$k_\lambda(x) = \frac{\partial K_\lambda(x)}{\partial \lambda} \quad (\text{B.1})$$

$$R_\lambda(x) = \frac{K_{\lambda+1}(x)}{K_\lambda(x)} \quad (\text{B.2})$$

Com base nessas notações as derivadas da função de log-verossimilhança são (para maiores detalhes ver Prause (1999)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = n & \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha \delta} \right) - \frac{k_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \ln(\delta^2 + (x_i - \mu)^2) + \frac{k_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2})}{K_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = n & \frac{\delta \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} R_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = n \left[-\frac{\delta \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} R_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - \mu \right] + \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \delta} = n & \left[-\frac{2\lambda}{\delta} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} R_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(2\lambda - 1)\delta}{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} - \frac{\alpha \delta R_\lambda \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} \right)}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} = -n\beta & + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sqrt{\delta^2 + (\mu - x_i)^2}} \\ & \times \left[\frac{2\lambda - 1}{\sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}} - \alpha R_{\lambda-1/2} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

APÊNDICE C

Função Modificada de Bessel

Seguem abaixo diversas propriedades da função modificada de Bessel que foram utilizadas para obtenção dos resultados. Para maiores detalhes a cerca da obtenção destes resultados ver Abramowitz & Stegun (1968).

Propriedades Básicas

$$K_{\lambda}(x) = K_{-\lambda}(x) \quad (\text{C.1})$$

$$K_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x}K_{\lambda}(x) + K_{\lambda-1}(x) \quad (\text{C.2})$$

$$K_{\lambda+\varepsilon}(x) > K_{\lambda}(x) \text{ para } \lambda > 0, \varepsilon > 0, x > 0. \quad (\text{C.3})$$

Representação em Séries

Para valores de $\lambda = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$ temos as seguintes representações da função modificada de Bessel.

$$K_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{(n+i)!}{(n-i)!i!} (2x)^{-i} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$K_{-1/2}(x) = K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} \quad (\text{C.5})$$

$$K_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (\text{C.6})$$

Derivadas

As equações abaixo representam as derivadas da função Modificada Bessel. Conforme já relatamos a derivada com relação à ordem demanda uma carga extra de processamento devido à sua complexidade.

Nestas equações I representa a função modificada Bessel de primeira tipo.

$$\frac{\partial K_0(x)}{\partial x} = -K_1(x) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial K_\lambda(x)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{x}K_\lambda(x) - K_{\lambda-1}(x) \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial K_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\pi \csc(\lambda\pi) \left(\frac{\partial I_{-\lambda}(x)}{\partial x} - \frac{\partial I_\lambda(x)}{\partial x} \right) - \pi \cot(\lambda\pi)K_\lambda(x), \lambda \notin \mathbb{Z} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial K_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda! \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^k K_k(x)}{(\lambda-k)k!}, \lambda \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial I_\lambda(x)}{\partial \lambda} = I_\lambda(x) \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2}x\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!} \quad (\text{C.11})$$

onde Γ representa a função Gama e ψ representa a função Digama que é a derivada da função gama com relação a seu argumento.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M., & STEGUN, I. A. 1968. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publ.
- APPLEBAUM, D. 2004. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press.
- AZEVEDO, HUGO, & FAJARDO, JOSÉ. 2005. Apreçamento de derivativos bidimensionais. *Economia aplicada*, **9(3)**, 385–414.
- BACHELIER, L. 1900. *Théorie de la spéculation*. Ph.D. thesis, L'école normale supérieure.
- BACK, HERRY, & PLISKA, STANLEY. 1991. On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space. *Journal of mathematical economics*, **20**, 1–18.
- BARITOMPAL, BIL, & HENDRIX, ELIGIUS. 2005. On the investigation of stochastic global optimization algorithms. *Journal of global optimization*, **31(4)**, 567–578.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. 1977. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the royal society london a*, **353**, 401–419.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. 1978. Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian journal of statistics*, **5**, 151–157.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. 1998. Processes of normal inverse gaussian type. *Finance & stochastics*, **2**, 41–68.
- BARNDORFF-NIELSEN, O., & SHEPHARD, N. 2000. *Modelling by lévy processes for financial econometrics*. in O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S. Resnick (EDS.): Lévy Processes - Theory and Applications, Boston: Birkhäuser.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E., & BLÆSILD, P. 1981. *Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application*. In C. Taillie, G. Patil, and B. Baldessari (Eds.), *Statistical Distributions in Scientific Work*, Volume 4, pp. 19-44. Dordrecht: Reidel.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E., & HALGREEN, O. 1977. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions. *Zeitschrift für wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte gebiete*, **38**, 309–312.

- BARNDORFF-NIELSEN, OLE. 1997. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian journal of statistics*, **24**(1), 1–13.
- BILLINGSLEY, P. 1986. *Probability and measure*. second edn. New York: Wiley.
- BJÖRKMAN, MATTIAS, & HOLMSTRÖM, KENNETH. 1999. Global optimization using the direct algorithm in matlab. *Advanced modeling and optimization*, **1**(2).
- BLACK, F., & SCHOLES, M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, **81**(3), 637–654.
- BLÆSILD, P. 1999. *Generalized hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions*. Working paper. Univeristy of Aarhus.
- BLÆSILD, P., & SØRENSEN, M. 1992. 'hyp' a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution. Research Report 248. Department of Theoretical Statistics, Aarhus University.
- BRIGHAM, E. O. 1988. *The fast fourier transform and its applications*. New Jersey: Prentice Hall.
- CHAN, TERENCE. 1999. Pricing contingent claims on stocks driven by lévy processes. *The annals of applied probability 1999*, **9**(2), 504–528.
- CLEWLOW, LES, & STRICKLAND, CHRIS. 1998. *Implementing derivatives models*. John Wiley & Sons.
- CONT, RAMA, & TANKOV, PETER. 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. *Journal of computational finance*, **7**, 1–49.
- COOLEY, J., & TUKEY, J. 1965. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computations*, **19**(90), 297–301.
- COX, JOHN, & ROSS, STEPHEN. 1976. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, **3**, 145–166.
- DEMPSTER, M., & HONG, S. 2002. Spread option valuation and the fast fourier transform. *Pages 203–220 of: GERMAN, H., MADAN, D., PLISKA, S., & VORST, T. (eds), Mathematical finance-bachelier congress 2000*. Springer Verlag.
- DYBVIIG, PHILIP, & ROSS, STEPHEN. 1987. Arbitrage. *Pages 100–106 of: EATWELL, J., MILGATE, M., & NEUMAN, P. (eds), The new palgrave: a dictionary of economics*. London: Macmillan.
- EBERLEIN, E. 2000. *Mastering risk*. Prentice Hall.
- EBERLEIN, E., & KELLER, U. 1995. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 281–299.

- ESSCHER, F. 1932. On the probability function in the collective theory of risk. *Skandinavisk aktuarietidskrift*, 175–195.
- FAJARDO, J., & FARIAS, AQUILES. 2004. Generalized hyperbolic distributions and brazilian data. *Brazilian review of econometrics*, **24**(2), 249–271.
- FAJARDO, J., & ORNELAS, JOSÉ RENATO HAAS. 2003. Apreçamento de opções de idi usando distribuições hiperbólicas generalizadas. *Revista de economia aplicada*, **7**(4), 767–794.
- FAJARDO, J., SCHUSCHNY, A., & SILVA, A. 2001. Lévy processes and brazilian market. *Brazilian review of econometrics*, **21**(2), 263–289.
- FAJARDO, J., FARIAS, AQUILES, & ORNELAS, JOSÉ. 2005. Analyzing the use of generalized hyperbolic distributions to value at risk calculations. *Economia aplicada*, **9**(1), 25–38.
- FAJARDO, JOSÉ, & MORDECKI, ERNESTO. 2006a. Pricing derivatives on two dimensional lévy processes. *International journal of theoretical and applied finance*, **9**(2), 185–197.
- FAJARDO, JOSÉ, & MORDECKI, ERNESTO. 2006b. Symmetry and duality in lévy markets. *Quantitative finance*, **6**(3), 219–227.
- FASANO, G., & FRANCESCHINI, A. 1987. A multidimensional version of the kolmogorov-smirnov test. *Mon. not. r. astr. soc.*, **225**, 155–170.
- FREUND, ROBERT. 2004. *Penalty and barrier methods for constrained optimization*. Lecture Notes, Massachusetts Institute of Technology.
- GERBER, HANS, & SHIU, ELIAS. 1994. Option pricing by esscher transforms. *Transactions of the society of actuaries*, **46**, 99–191. With discussion.
- GERBER, HANS, & SHIU, ELIAS. 1996. Martingale approach to pricing perpetual american options on two stocks. *Mathematical finance*, **6**(3), 303–322.
- HAMILTON, J. 1994. *Time series analysis*. First edn. E-Princeton.
- HANSELMAN, DUANE C., & LITTLEFIELD, BRUCE. 2001. *Mastering matlab 6 - a comprehensive tutorial and reference*. Prentice Hall.
- HARRISON, J., & KREPS, D. 1979a. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of economic theory*, **20**, 381–408.
- HARRISON, J., & KREPS, DAVID. 1979b. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of economic theory*, **20**, 381–408.
- HART, WILLIAM. 1994. *Adaptive global optimization with local search*. Ph.D. thesis, University of California, San Diego.

- HORN, ROGER A., & JOHNSON., CHARLES R. 1985. *Matrix analysis*. Cambridge University Press.
- HULL, JOHN. 2003. *Opções, futuros e outros derivativos*. BM&F.
- HURST, S. R., PLATEN, E., & RACHEV, S. T. 1995. Option pricing for asset returns driven by subordinated processes. *Working paper, the australian national university*.
- ISSLER, J . V. 1999. Estimating and forecasting the volatility of brazilian finance series using arch models. *Brazilian review of econometrics*, **19**(1), 5–56.
- IWAARDEN, RONALD. 1996. *An improved unconstrained global optimization algorithm*. Ph.D. thesis, University of Colorado at Denver.
- KANNAAN, D. 1979. *An introduction to stochastic processes*. Elsevier, USA.
- KARATZAS, I., & SHREVE, S. E. 1991. *Brownian motion and stochastic calculus*. 2 edn. Springer.
- KARLIN, S., & TAYLOR, H. M. 1975. *A first course in stochastic processes*. Second edn. New York, NY: Academic Press.
- KELLER, U. 1997. *Realistic modelling of financial derivatives*. Doctoral thesis, University of Freiburg.
- LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H., & WRIGHT, P. E. 1998. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *Siam journal of optimization*, **9**(1), 112–147.
- MADAN, D., & SENETA, E. 1987. Chebyshev polynomial approximations and characteristic function estimation. *Journal of the royal statistical society series b*, **49**(2), 163–169.
- MANDELBROT, B. B. 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of business*, 394–419.
- MARGRABE, W. 1978. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of finance*, **33**, 177–186.
- MARGRABE, W. 1993. Triangular equilibrium and arbitrage in the market for options to exchange one asset for another. *Journal of derivatives*, **1**, 60–69.
- MATSUDA, KAZUHISA. 2005. *Introduction to the mathematics of lévy processes*. Working Paper.
- MAZUCHELLI, J., & MIGON, H. S. 1999. Modelos garch bayesianos: Métodos aproximados e aplicações. *Brazilian review of econometrics*, **19**(1), 111–138.

- MENDES, B. V. M., & JR, A. M. DUARTE. 1999. Robust estimation for arch models. *Brazilian review of econometrics*, **19**(1).
- MENDIVII, FRANKLIN, SHONKWILER, R., & SPRUILL, M. 1999. *Optimization by stochastic methods*. Working Paper.
- MEYER, P. 1983. *Probabilidade - aplicações à estatística*. Segunda edn. LTC.
- NARSKY, ILYA. 2003. *Estimation of goodness-of-fit in multidimensional analysis using distance to nearest neighbor*. Working paper. California Institute of Technology.
- NELDER, J., & MEAD, R. 1965. A simplex method for function minimization. *Computer journal*, **7**, 308–313.
- NEUMAIER, ARNOLD. 2004. *Acta numerica*. Cambridge University Press. Chap. Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction, pages 271–369.
- OSBORNE, M. 1959. Brownian motion in the stock market. *Operations research*, 145–173.
- PEACOCK, J. A. 1983. Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy. *Mon. not. r. astr. soc.*, **202**, 615–627.
- PEREIRA, P. L. V., HOTTA, L. K., SOUZA, L. A. R., & ALMEIDA, N. M. C. G. 1999. Alternative models to extract asset volatility: A comparative study'. *Brazilian review of econometrics*, **19**(1), 57–109.
- PRAUSE, K. 1999. *The generalized hyperbolic model: Estimation, financial derivatives, and risk measures*. Doctoral thesis, University of Freiburg.
- PRESS, S. 1967. A compound events model for security prices. *Journal of business*, 317–335.
- PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W., & FLANNERY, B. 1992. *Numerical recipes in c*. Cambridge: Cambridge University Press.
- PROTTER, P. 1995. *Stochastic integration and differential equations*. 3 edn. Springer.
- RAIBLE, S. 2000. *Lévy processes in finance: Theory, numerics, and empirical facts*. Doctoral thesis, University of Freiburg.
- ROGERS, L.C.G., & WILLIAMS, D. 2000. *Diffusions, markov processes, and martingales*. Second edn. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- ROSS, S. 1983. *Stochastic processes*. John Wiley and Sons, USA.
- RYDBERG, T. 1997. *Why financial data are interesting to statisticians*. Working Paper 5. Centre for Analytical Finance.

- SAMUELSON, P. 1965. Rational theory of warrant pricing. *Industrial management review*, 13–32.
- SATO, K. 1999. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press.
- SCHMIDT, RAFAEL, HRYCEJ, TOMAS, & STÜTZLE, ERIC. 2005. Multivariate distribution models with generalized hyperbolic margins. *Computational statistics and data analysis*, **50**, 2065–2096.
- SKLAR, A. 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'institut de statistique de l'université de paris*, **8**, 229–231.
- STÜTZLE, ERIC, & HRYCEJ, TOMAS. 2001. Forecasting of conditional distributions - an application to the spare parts demand forecast. *In: Proceedings of the 2001 iasted international conference on artificial intelligence and soft computing, cancon, méxico*.
- STÜTZLE, ERIC, & HRYCEJ, TOMAS. 2002a. Estimating multivariate conditional distributions via neural networks and global optimization. *In: Proceedings of the 2002 ieee international joint conference on neural networks, honolulu, hawaii*.
- STÜTZLE, ERIC, & HRYCEJ, TOMAS. 2002b. Modelling future demand by estimating the multivariate conditional distribution via the maximum likelihood principle and neural networks. *In: Proceedings of the 2002 iasted international conference on modelling, identification and control, innsbruck, austria*.
- STÜTZLE, ERIC, & HRYCEJ, TOMAS. 2005. Numerical method for estimating multivariate conditional distributions. *Computational statistics*, **20**(1), 151–176.
- TANKOV, PETER. 2004. *Lévy processes in finance: Inverse problems and dependence modelling*. Ph.D. thesis, L'Ecole Polytechnique.
- WIESENDORFER, M. 1999. *Simulation von lévy-prozessen*. Ph.D. thesis, Universität Freiburg.
- WILMOTT, PAUL. 1998. *Derivatives*. John Wiley & Sons.