



**ESCOAMENTOS MONOFÁSICOS E BIFÁSICOS DE  
LÍQUIDOS IMISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS COM  
EFEITO MAGNETOHIDRODINÂMICO**

**Érick Marcelino Miranda**

**Dissertação de Mestrado  
Ciências Mecânicas**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESCOAMENTOS MONOFÁSICOS E BIFÁSICOS DE  
LÍQUIDOS IMISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS COM EFEITO  
MAGNETOHIDRODINÂMICO

Érick Marcelino Miranda

Orientador: Prof. Dr. Francisco Ricardo da Cunha

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Gabler Gontijo

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BRASÍLIA/DF

2024

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Escoamentos monofásicos e bifásicos de líquidos imiscíveis em  
meios porosos com efeito magnetohidrodinâmico

Érick Marcelino Miranda

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PAR-  
CIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
MECÂNICAS.

APROVADA POR:

---

Prof. Dr. Francisco Ricardo da Cunha  
Orientador (ENM-UnB)

---

Dr. Filipe Henrique de Sousa Evangelista  
Examinador Externo (CU Boulder)

---

Prof. Dr. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues  
Examinador Externo ao Programa (ENM-UnB)

BRASÍLIA/DF, 16 DE AGOSTO DE 2024.

## FICHA CATALOGRÁFICA

M672e      Miranda, Érick Marcelino  
Escoamentos monofásicos e bifásicos de líquidos  
imiscíveis em meios porosos com efeito magnetohidrodinâmico  
/ Érick Marcelino Miranda; orientador Francisco Ricardo  
Cunha; coorientador Rafael Gabler Gontijo. -- Brasília,  
2024.  
149 p.

Dissertação (Mestrado em Ciências Mecânicas) --  
Universidade de Brasília, 2024.

1. Instabilidade de Saffman-Taylor. 2. Célula de  
Hele-Shaw. 3. Meio poroso. 4. Magnetohidrodinâmica. 5.  
Simulação Numérica. I. Cunha, Francisco Ricardo, orient.  
II. Gontijo, Rafael Gabler, coorient. III. Título.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MIRANDA, É. M(2024). Escoamentos monofásicos e bifásicos de líquidos imiscíveis em meios porosos com efeito magnetohidrodinâmico. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, 149p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Érick Marcelino Miranda.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:** Escoamentos monofásicos e bifásicos de líquidos imiscíveis em meios porosos com efeito magnetohidrodinâmico.

**GRAU / ANO:** MESTRE / 2024

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Érick Marcelino Miranda

*À minha mãe, Ediane, minha eterna incentivadora, e ao meu irmão, Ícaro, meu braço direito.*

# Agradecimentos

À minha mãe, Ediane, e ao meu irmão, Ícaro, por todo o apoio que me deram e por sempre acreditarem nos meus sonhos. À minha mãe, agradeço por todo o amor e carinho que generosamente me dedica diariamente. Ao meu irmão, gostaria de agradecer por toda a paciência e pelos conselhos que me ajudaram a fazer boas escolhas.

Agradeço a Fernanda Carvalho, por ter tido a paciência e a compreensão nos momentos em que estive distante durante a execução deste trabalho. Agradeço por toda a sua dedicação e amor.

Agradeço ao Prof. Francisco Ricardo da Cunha (FRC) pela orientação, conselhos e ensinamentos valiosos que conduziram este trabalho. Agradeço também ao Prof. Rafael Gabler Gontijo pela indicação da utilização do OpenFOAM e pelo apoio na parte numérica deste trabalho.

Aos integrantes do Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos (VORTEX), ao Leonardo Inácio (Leozin), por toda a ajuda e pelas notas de aula mais bonitas e organizadas que já vi. Ao Matheus Araújo (Matheusão), por todo o apoio e pelas conversas aleatórias e engraçadas que amenizaram o estresse e a ansiedade em momentos de pressão. E, em especial, gostaria de agradecer ao Igor Dal Osto (Igorzão), que desde o primeiro momento em que entrei no VORTEX foi um amigo apoiador e incentivador. Agradeço por todas as discussões acadêmicas que melhoraram a qualidade deste trabalho e o meu entendimento sobre a mecânica dos fluidos, bem como pelas conversas descontraídas e os treinos na I9.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

*“A vida é uma constante oscilação entre a ânsia de ter e o tédio de possuir.”*

**Arthur Schopenhauer**

# Abstract

In this study, an analysis of flows in porous media is performed with the aim of examining and understanding in greater depth the physical phenomena involved in the interface between two immiscible liquids of different viscosities, in which a fluid with a lower viscosity displaces a fluid with a higher viscosity inside a Hele-Shaw cell or porous-matrix. Different configurations and physical conditions of flows are explored, also aiming to develop strategies that minimize the formation of so-called Saffman-Taylor instabilities at the liquid-liquid interface as well as increase the displacement speed of the same interface. These viscous finger-type instabilities can significantly reduce the efficiency of the oil extraction process in natural reservoirs. Flow analyses are considered from the pore scale to the porous matrix scale, in addition to investigating the influence of magnetic effects on single-phase flows in porous media as well as interfacial effects on the two-phase flow of immiscible fluids. It delves into the study of the instabilities generated at the interface between the two fluids by controlling the ratio between viscous forces and interfacial tension forces, denoted by the capillarity number, as well as by controlling the porosity of the porous matrix and, consequently, the associated permeability. Furthermore, the influence of inertial effects on the flow in porous media is verified, modeled by the Forchheimer inertial term as a function of the flow's Reynolds number. The flows related to the Hele-Shaw cell are studied both through analytical solutions and also through numerical simulations in more complex flow regimes, using the finite-volume method in the OpenFOAM software. The simulation results are validated by exact or asymptotic solutions in limiting cases of the flows explored. A good agreement was observed between the results predicted by the simulations and the analytical solutions, showing excellent accuracy of the computational code and the efficiency of the numerical methodology implemented. From the results obtained regarding the investigations of the interfacial instabilities of fingers, it appears that the transition phenomenon of the configuration of long viscous fingers, penetrating the more viscous fluid from the interface, can transition to multi-finger regimes in which the surface tension effects become comparable to or greater than the viscous effects on this scale of capillary fingers. The observed finger configurations are significantly influenced by the capillarity number and the porosity of the medium, as also observed experimentally. In addition, it appears that a decrease in the permeability of the porous medium causes an effect equivalent to flow deceleration, which can be produced by magnetohydrodynamic

(MHD) effects by controlling the transverse magnetic field applied to an interfacial flow involving a fluid on one side electrically conductive like salt water and other oil. The magnetohydrodynamic effect in the flows explored in the present work could serve as a mechanism to attenuate the observed finger-type instabilities.

**Keywords:** Saffman-Taylor Instability; Hele-Shaw Cell; Porous Medium; Magnetohydrodynamics; Numerical Simulation.

# Resumo

Neste estudo, realiza-se uma análise de escoamentos em meios porosos com objetivo de se examinar e entender com maior profundidade fenômenos físicos envolvidos na interface entre dois líquidos imiscíveis de diferentes viscosidades, no qual um fluido de menor viscosidade desloca o de maior viscosidade no interior de uma célula de Hele-Shaw ou matriz porosa. Exploram-se diferentes configurações e condições físicas de escoamentos visando também, o desenvolvimento de estratégias que minimizem a formação das chamadas instabilidades de Saffman-Taylor na interface líquido-líquido, bem como o aumento da velocidade de deslocamento da mesma interface. Essas instabilidades, tipo *fingers* viscosos podem diminuir de maneira significativa a eficiência do processo de extração de petróleo em reservatórios naturais. Efetuam-se análises de escoamentos desde a escala dos poros até a escala da matriz porosa, além de se investigar a influência de efeitos magnéticos em escoamentos monofásicos em meios porosos como também efeitos interfaciais no escoamento bifásico de fluidos imiscíveis. Aprofunda-se no estudo das instabilidades geradas na interface entre os dois fluidos pelo controle da razão entre forças viscosas e forças de tensões interfaciais, denotada por número de capilaridade, bem como pelo controle da porosidade da matriz porosa e, conseqüentemente, da permeabilidade associada. Ademais, verifica-se a influência de efeitos inerciais no escoamento em meios porosos, modelados pelo termo inercial de Forchheimer, função do número de Reynolds do escoamento. Os escoamentos referentes a célula de Hele-Shaw são estudados tanto por meio de soluções analíticas como também por simulações numéricas em regimes mais complexos do escoamento, usando-se o método dos volumes finitos no *software* OpenFOAM. Os resultados das simulações são validados por soluções exatas ou assintóticas em casos-limite dos escoamentos explorados. Observa-se uma boa concordância entre os resultados preditos pelas simulações e as soluções analíticas, mostrando uma excelente acurácia do código computacional e a eficiência da metodologia numérica implementada. Dos resultados obtidos referentes às investigações das instabilidades interfaciais de *fingers*, verifica-se que o fenômeno de transição da configuração de longos *fingers* viscosos, penetrando o fluido mais viscoso a partir da interface, pode transicionar para regimes multi-*fingers*, em que os efeitos de tensão interfacial passam a ser comparáveis ou maiores do que os efeitos viscosos nesse escala de *fingers* capilares. As configurações de *fingers* observadas são influenciadas de forma significativa pelo número de capilaridade e pela porosidade do meio poroso, conforme

também já observado experimentalmente. Em adição, verifica-se que uma diminuição da permeabilidade do meio poroso causa um efeito equivalente a desaceleração do escoamento que pode ser produzida por efeitos magnetohidrodinâmicos (MHD) controlando-se o campo magnético transversal aplicado a um escoamento interfacial envolvendo de um lado um fluido eletricamente condutor como a água salgada e do outro lado, óleo. O efeito magnetohidrodinâmico nos escoamentos explorados no presente trabalho pode servir como um mecanismo atenuador das instabilidades tipo *fingers* observadas.

**Palavras-chaves:** Instabilidade de Saffman-Taylor; Célula de Hele-Shaw; Meio poroso; Magnetohidrodinâmica; Simulação Numérica.

# Lista de Acrônimos

**APE** *Absolute Percentage Error*

**MHD** Magnetohidrodinâmica

**VoF** Volume of Fluid

**MVF** Método dos Volumes Finitos

**VC** Volume de Controle

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
1.1	Motivação	2
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Objetivos	4
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>6</b>
2.1	Parâmetros Adimensionais	6
2.2	Escoamento em Meios Porosos	7
2.2.1	Escalas no Meio Poroso	7
2.3	Análise de Escala em Meios Porosos	9
2.3.1	Lei de Darcy	10
2.3.1.1	Global	10
2.3.1.2	Local	11
2.3.2	Célula de Hele-Shaw	11
2.3.3	Equação de Brinkman	13
2.3.4	Efeitos Não Lineares em Meios Porosos	15
2.3.4.1	Equação de Ergun	16
2.3.5	Equação de Carman-Kozeny	16
2.4	Instabilidade de Saffman–Taylor	19
2.5	Viscosidade de Parede	22
2.6	Escoamento Magnetohidrodinâmico	23
2.6.1	Eletrodinâmica	23
2.6.1.1	Força de Lorentz	23
2.6.1.2	Lei de Ohm	24
2.6.1.3	Lei de Ampère	25
2.6.1.4	Equações de Maxwell	25
2.6.2	Equações MHD	28
2.7	Escoamentos Multifásicos	30
2.7.1	<i>Volume of Fluid (VOF) Method</i>	30

<b>3</b>	<b>ESCOAMENTO DE UM FLUIDO ELETRICAMENTE CONDUTOR EM UM MICRO-CANAL COM PAREDE POROSA SUJEITO À AÇÃO DE UM CAMPO MAGNÉTICO: SOLUÇÕES EXATAS E ASSINTÓTICAS . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Caso Hidrodinâmico . . . . .</b>	<b>34</b>
3.1.1	Equações Governantes . . . . .	35
<b>3.2</b>	<b>Caso Magnetohidrodinâmico . . . . .</b>	<b>36</b>
3.2.1	Solução das Equações Governantes . . . . .	38
3.2.1.1	Campo de Velocidade e Vazão . . . . .	39
3.2.2	Densidade de Fluxo Magnético Induzido . . . . .	39
3.2.3	Campo de Pressão . . . . .	39
3.2.3.1	Campo Elétrico . . . . .	40
<b>3.3</b>	<b>Solução Assintótica . . . . .</b>	<b>40</b>
3.3.1	Viscosidade Efetiva . . . . .	43
<b>3.4</b>	<b>Resultados e Discussão . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>MODELAGEM NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Método dos Volumes Finitos . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>OpenFOAM . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>4.3</b>	<b>Objeto de Estudo . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>4.4</b>	<b>Malha . . . . .</b>	<b>55</b>
4.4.1	Qualidade da Malha . . . . .	56
4.4.1.1	<i>Skewness</i> . . . . .	56
4.4.1.2	Razão de Aspecto . . . . .	57
4.4.1.3	Não-ortogonalidade . . . . .	58
<b>4.5</b>	<b>Condições de Contorno . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>4.6</b>	<b><i>Solver</i> . . . . .</b>	<b>60</b>
4.6.1	heleshawFoam e ergunFoam . . . . .	60
4.6.2	mhdheleshawFoam e mhdergunFoam . . . . .	61
4.6.3	interheleshawFoam e interergunFoam . . . . .	62
4.6.4	forchheimerFoam . . . . .	63
<b>5</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.1</b>	<b>Escoamento em uma célula de Hele-Shaw . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1.1	Malha . . . . .	65
5.1.2	Análise dos Resultados . . . . .	66
<b>5.2</b>	<b>Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw . . . . .</b>	<b>69</b>
5.2.1	Malha . . . . .	69
5.2.2	Análise dos Resultados . . . . .	70
<b>5.3</b>	<b>Escoamento em um Meio Poroso . . . . .</b>	<b>73</b>
5.3.1	Malha . . . . .	73

5.3.2	Análise dos Resultados . . . . .	73
<b>5.4</b>	<b>Escoamento MHD em um Meio Poroso . . . . .</b>	<b>76</b>
5.4.1	Malha . . . . .	76
5.4.2	Análise dos Resultados . . . . .	78
<b>5.5</b>	<b>Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy-Forchheimer . . . . .</b>	<b>85</b>
5.5.1	Malha . . . . .	85
5.5.2	Análise dos Resultados . . . . .	86
<b>5.6</b>	<b>Escoamento Bifásico em uma Célula de Hele-Shaw . . . . .</b>	<b>87</b>
5.6.1	Malha . . . . .	88
5.6.2	Análise dos Resultados . . . . .	88
5.6.3	Número de Capilaridade Crítico: Transição de Multi- <i>fingers</i> para um <i>Finger</i> Único . . . . .	95
<b>5.7</b>	<b>Escoamento Bifásico em um Meio Poroso . . . . .</b>	<b>95</b>
5.7.1	Comparação entre <i>Fingers</i> no Meio Poroso . . . . .	97
<b>6</b>	<b>COMENTÁRIOS FINAIS . . . . .</b>	<b>100</b>
6.1	Conclusões . . . . .	100
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	100
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>106</b>
	<b>APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>A.1</b>	<b>Lei de Darcy . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>A.2</b>	<b>Adimensionalização da Equação de Navier-Stokes . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>A.3</b>	<b>Equação de Navier-Stokes em uma célula de Hele-Shaw . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>A.4</b>	<b>Adimensionalização da Equação de Darcy-Forchheimer . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>A.5</b>	<b>Viscosidade de Parede e Fator de Atrito . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>A.6</b>	<b>Soluções Exatas: Meios Porosos e Expansões Assintóticas Regulares . . . . .</b>	<b>111</b>
A.6.1	Campo de Velocidade . . . . .	112
A.6.2	Velocidade de Deslizamento . . . . .	112
A.6.3	Vazão . . . . .	112
A.6.4	Densidade de Fluxo Magnético Induzido . . . . .	113
A.6.5	Campo Elétrico . . . . .	113
<b>A.7</b>	<b>Discretização dos Operadores Matemáticos e Critérios do Algoritmo para Solução dos Sistemas Lineares . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>A.8</b>	<b>Solução dos Sistemas Lineares . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>A.9</b>	<b>Esquemas Numéricos Utilizados . . . . .</b>	<b>116</b>

A.9.1	Escoamento em uma Célula de Hele-Shaw . . . . .	116
A.9.2	Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw . . . . .	117
A.9.3	Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy- Forchheimer . . . . .	118
<b>A.10</b>	<b>Malhas . . . . .</b>	<b>118</b>
A.10.1	Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw . . . . .	119
A.10.2	Escoamento em um Meio Poroso . . . . .	120
A.10.3	Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy- Forchheimer . . . . .	121
A.10.4	Escoamentos Bifásicos . . . . .	122

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Visualização de um reservatório de petróleo com a utilização do método de injeção de água. O <i>Bypassed oil</i> ocorre quando parte do óleo permanece no reservatório mesmo após técnicas de recuperação convencionais terem sido aplicadas. . . . .	3
Figura 2.1 – Escoamento em um meio poroso de rochas consolidadas. . . . .	8
Figura 2.2 – Representação das escalas de comprimento em meios porosos. . . . .	8
Figura 2.3 – Esquema representativo da Lei de Darcy. A vazão é representada por $Q$ e a área de entrada por $S$ . . . . .	11
Figura 2.4 – Escoamento em uma célula de Hele-Shaw com comprimento $l$ e espessura $b$ . . . . .	12
Figura 2.5 – Representação do estudo realizado por Brinkman para um escoamento em um meio poroso de esferas de pequenas dimensões. O raio de uma esfera é representado por $a$ e $F_{pt}$ é a força da partícula sobre o fluido. . . . .	13
Figura 2.6 – Representação da instabilidade de Saffman-Taylor ocorrida na interface entre dois fluidos com viscosidades distintas. . . . .	19
Figura 2.7 – Escoamento bifásico com a formação de um único <i>finger</i> avançando em uma célula de Hele-Shaw. . . . .	21
Figura 2.8 – Perfis de <i>fingers</i> para $\lambda_L = 0, 2, 0, 5$ e $0, 8$ . Adaptada de (SAFFMAN; TAYLOR, 1958). . . . .	22
Figura 2.9 – Escoamento em uma célula de Hele-Shaw com dois fluidos imiscíveis. . . . .	22
Figura 2.10 – Representação de um escoamento MHD típico. . . . .	28
Figura 3.1 – Representação do escoamento MHD analisado. . . . .	34
Figura 3.2 – Viscosidade efetiva adimensional em relação ao número de Hartmann, utilizando a solução assintótica. $\varepsilon = 0.5$ , $\sigma = \sqrt{2}$ , $\mu = 1$ . . . . .	44
Figura 3.3 – Perfis de velocidades adimensionais em relação ao número de Hartmann (solução exata). $\varepsilon = 0.5$ , $\sigma = \sqrt{2}$ . . . . .	45
Figura 3.4 – Velocidade máxima adimensional em relação a $Ha$ , variando de 0 a 0.8, para $\varepsilon = 0.5$ e $\sigma = \sqrt{2}$ . Neste gráfico, são comparadas a solução exata (—) com a solução assintótica (---). . . . .	45

Figura 3.5 – Velocidade interfacial adimensional em relação ao número de Hartmann. A --- é a solução assintótica. $\varepsilon = 0.5$ e $\sigma = \sqrt{2}$ . $\circ$ - são os dados da solução exata. . . . .	46
Figura 3.6 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido em relação a $y^*$ . As curvas representam $B_x$ para diferentes números de Hartmann (solução exata). O encarte mostra a variação do valor máximo de $B_x$ à medida que $Ha$ aumenta. $Re_m = 1$ , $\varepsilon = 0.5$ , $\sigma = \sqrt{2}$ . A — no encarte representa a solução exata, e a --- é a solução assintótica. . . . .	46
Figura 3.7 – Vazão adimensional em relação ao número de Hartmann. Neste gráfico, são comparadas a solução exata (—) e a solução assintótica (---) para $\varepsilon = 0.5$ e $\sigma = \sqrt{2}$ . . . . .	47
Figura 3.8 – Perfis de velocidade adimensionais calculados usando a solução exata, como função de $\sigma$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	47
Figura 3.9 – $\star$ – Velocidade adimensional na interface com o meio poroso em relação a $\sigma$ , sendo $\varepsilon = 0.5$ e $Ha = 0.3$ . $\circ$ - Velocidade adimensional na interface em relação a $\sigma$ para o caso puramente hidrodinâmico. $\varepsilon = 0.5$ e $Ha = 0$ . . . . .	48
Figura 3.10 – Relação entre a velocidade na interface ( $u_i$ ) e a velocidade média do meio poroso ( $u_m$ ) para três valores característicos de $\sigma$ . . . . .	48
Figura 4.1 – Fluxograma da metodologia utilizada para a realização do trabalho. . . . .	50
Figura 4.2 – Visualização de uma malha computacional em um cubo, destacando a ampliação de um volume de controle dentro do domínio de estudo. . . . .	51
Figura 4.3 – Estrutura de um caso no OpenFOAM. Os diretórios e sub-diretórios apresentados são necessários para o funcionamento da simulação. . . . .	54
Figura 4.4 – Representação da geometria. . . . .	55
Figura 4.5 – Representação de um escoamento em uma célula de Hele-Shaw, na qual a repetição do escoamento é observável em um plano paralelo ao definido pelos eixos $xy$ . . . . .	55
Figura 4.6 – Visualização da métrica de qualidade da <i>skewness</i> da malha. A célula da esquerda é um elemento equilátero, enquanto o elemento da direita tem um alto grau de deformação. . . . .	56
Figura 4.7 – Comparação entre dois elementos: à esquerda, um elemento com baixa razão de aspecto, e à direita, um elemento com alta razão de aspecto. . . . .	57
Figura 4.8 – Representação da métrica de não-ortogonalidade da malha. À esquerda, um elemento com não-ortogonalidade = 0, e à direita, um elemento com não-ortogonalidade > 0. . . . .	58
Figura 4.9 – Localização das condições de contorno do problema estudado. . . . .	59
Figura 5.1 – Vazão dimensional, $Q$ em relação ao número de elementos utilizados na malha computacional. A linha — representa a vazão da teoria de Hele-Shaw, $\circ$ representa os valores da vazão calculados numericamente. $G = 36.84 Pa/m$ . . . . .	66
Figura 5.2 – Perfis de velocidade em relação ao gradiente de pressão. . . . .	67

Figura 5.3 – Representação dos perfis de velocidade adimensionais da Figura 5.2. . . . .	67
Figura 5.4 – Relação entre a vazão e o gradiente de pressão $G$ variando de 0 a 92.11. A linha — representa a vazão da teoria de Hele-Shaw, $\circ$ representa os valores da vazão calculados numericamente. O encarte representa a adimensionalização dos escoamentos. . . . .	68
Figura 5.5 – Relação entre o gradiente de pressão adimensional $G^*$ e a permeabilidade adimensional $k^*$ . A escala típica de comprimento utilizada para a adimensionalização foi o $l$ . A linha — representa a curva descrita pela teoria de Hele-Shaw e $\circ$ representa os valores calculados numericamente. . . . .	68
Figura 5.6 – Perfil de velocidade adimensionalizado pela velocidade média do escoamento para $Ha = 5$ . . . . .	69
Figura 5.7 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.6. O valor médio obtido foi de 0.0398%. . . . .	69
Figura 5.8 – Perfil de densidade de fluxo magnético induzido para $Ha = 5$ . . . . .	70
Figura 5.9 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.8. O valor médio obtido foi de 0.1844%. . . . .	70
Figura 5.10–Perfis de velocidade adimensionais para $Ha$ variando de 0 até 10. A — (vermelha) representa $Ha = 0$ , a --- representa $Ha = 0.1$ , — representa $Ha = 5$ e ..... representa $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima dos escoamentos em função do número de Hartmann. . . . .	71
Figura 5.11–Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a $Ha$ . . . . .	71
Figura 5.12–Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido máxima em relação a $Ha$ . . . . .	71
Figura 5.13–Viscosidade de parede em relação ao número de Hartmann para um escoamento MHD em uma célula de Hele-Shaw. A linha — representa o valor teórico e o $\circ$ os valores numéricos. . . . .	72
Figura 5.14–Perfil de velocidade adimensional para $\varepsilon = 0.75$ . . . . .	74
Figura 5.15–APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.14. O valor médio obtido foi de 0.0121%. . . . .	74
Figura 5.16–Perfis de velocidade adimensionais para $\varepsilon$ variando de 0.55 até 0.8. A --- representa $\varepsilon = 0.55$ , — representa $\varepsilon = 0.7$ , ..... representa $\varepsilon = 0.75$ , e -.-.- representa $\varepsilon = 0.8$ . . . . .	74
Figura 5.17–Gráfico da vazão dimensional, $Q$ em relação a $\varepsilon$ . A linha — representa a vazão da teoria de Ergun, $\circ$ representa os valores da vazão calculados numericamente. . . . .	75
Figura 5.18–Viscosidade de parede no meio poroso em relação a $\varepsilon$ . . . . .	75
Figura 5.19–Perfis de velocidade do escoamento. A linha — representa um diâmetro de esfera $d = 0.0003\text{ m}$ . A linha --- representa $d = 0.00035\text{ m}$ e a linha ..... representa $d = 0.0004\text{ m}$ . . . . .	76
Figura 5.20–Perfil de velocidade adimensional para $\varepsilon = 0.7$ , e $Ha = 10$ . . . . .	77

Figura 5.21–APE entre os valores teórico e numéricos da Figura 5.20. O valor médio obtido foi de 0.0079%. . . . .	77
Figura 5.22–Perfil de densidade de fluxo magnético induzido adimensional para $\varepsilon = 0.7$ e $Ha = 10$ . . . . .	77
Figura 5.23–APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.22. O valor médio obtido foi de 0.1284%. . . . .	77
Figura 5.24–Perfis de velocidade do escoamento em relação a $Ha$ para $\varepsilon = 0.8$ . A --- representa $Ha = 10$ , — representa $Ha = 50$ , e a ..... representa $Ha = 100$ . . . . .	78
Figura 5.25–Perfis de velocidade do escoamento em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.75$ . A --- representa $Ha = 10$ , — representa $Ha = 50$ , e a ..... representa $Ha = 100$ . . . . .	79
Figura 5.26–Perfis de velocidade do escoamento em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.7$ . A --- representa $Ha = 10$ , — representa $Ha = 50$ , e a ..... representa $Ha = 100$ . . . . .	79
Figura 5.27–Perfis de velocidade do escoamento em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.55$ . A --- representa $Ha = 10$ , — representa $Ha = 50$ , e a ..... representa $Ha = 100$ . . . . .	80
Figura 5.28–Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.8$ . . . . .	80
Figura 5.29–Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a $Ha$ . . . . .	80
Figura 5.30–Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais para $Ha$ com $\varepsilon = 0.75$ . . . . .	81
Figura 5.31–Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a $Ha$ . . . . .	81
Figura 5.32–Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.7$ . . . . .	81
Figura 5.33–Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a $Ha$ . . . . .	81
Figura 5.34–Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a $Ha$ com $\varepsilon = 0.55$ . . . . .	82
Figura 5.35–Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a $Ha$ . . . . .	82
Figura 5.36–Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com $\varepsilon = 0.55$ . A linha — representa os valores teóricos e $\circ$ os valores numéricos. . . . .	83
Figura 5.37–Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com $\varepsilon = 0.7$ . A linha — representa os valores teóricos e $\circ$ os valores numéricos. . . . .	83
Figura 5.38–Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com $\varepsilon = 0.75$ . . . . .	84

Figura 5.39–Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com $\varepsilon = 0.8$ . . . . .	84
Figura 5.40–Velocidade média do escoamento em relação ao número de elementos da malha. . . . .	85
Figura 5.41–Vazão em relação ao gradiente de pressão para $Re$ variando de 0.33717 a 5.3948. A linha — representa a equação de Darcy teórica com permeabilidade de Ergun e os $\circ$ representam os resultados numéricos obtidos pela equação de Darcy-Forchheimer. . . . .	86
Figura 5.42–Vazão em relação a $\beta$ para um $Re$ variando de 0.5691 a 7.8063. O $\circ$ representa os valores calculados numericamente. . . . .	87
Figura 5.43–Fator de atrito em relação a $\beta$ para um $Re$ variando de 0.5691 a 7.8063. O $\circ$ representa os valores calculados numericamente. . . . .	87
Figura 5.44–Desenvolvimento da interface entre água (azul) e óleo Shell Diala (preto) ao longo do tempo até a formação de um <i>finger</i> único. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.003$ s, $t_2 = 0.004$ s, $t_3 = 0.005$ s, $t_4 = 0.01$ s e $t_5 = 0.073$ s todos para um $Ca = 0.001$ . Para $t_5$ foi obtido $\lambda_C = 0.0023$ e $\lambda_L = 0.8463$ . . . . .	89
Figura 5.45– <i>Finger</i> de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.0002$ s, $t_2 = 0.00036$ s, $t_3 = 0.00152$ s, $t_4 = 0.00251$ s e $t_5 = 0.01501$ s todos para um $Ca = 0.05$ . Para $t_5$ foi obtido $\lambda_C = 0.017$ e $\lambda_L = 0.626$ . . . . .	90
Figura 5.46– <i>Finger</i> de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.0001$ s, $t_2 = 0.0002$ s, $t_3 = 0.00025$ s, $t_4 = 0.0003$ s, $t_5 = 0.001$ s, $t_6 = 0.002$ s e $t_7 = 0.08$ s todos para um $Ca = 0.1$ . Para $t_7$ foi obtido $\lambda_C = 0.1835$ e $\lambda_L = 0.564$ . . . . .	91
Figura 5.47– <i>Finger</i> de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.0000425$ s, $t_2 = 0.0001275$ s, $t_3 = 0.00025$ s, $t_4 = 0.001$ s, $t_5 = 0.027$ s todos para um $Ca = 0.35$ . Para $t_5$ foi obtido $\lambda_C = 0.2165$ e $\lambda_L = 0.554$ . . . . .	92
Figura 5.48– $\lambda_L$ em relação a $Ca$ . Os valores calculados teoricamente por Saffman e Taylor (1958) são representados por —, enquanto os valores experimentais, obtidos por medidas fotográficas, são indicados por $\Delta$ . Os $\circ$ mostram os valores calculados numericamente neste trabalho. Os encartes apresentam topologias características dos <i>fingers</i> para cada $Ca$ . . . . .	93
Figura 5.49–Parâmetro de deformação de Taylor em relação ao $Ca$ . Os $\circ$ apresentam os valores numéricos e a linha — a curva obtida pela interpolação piecewise cúbica. Os encartes apresentam topologias características dos <i>fingers</i> para cada $Ca$ . . . . .	94
Figura 5.50–Escoamento bifásico em uma célula de Hele-Shaw com $Ca_c = 0.0006$ e $t = 0.485$ s. . . . .	95

Figura 5.51–Escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.001$ s, $t_2 = 0.002$ s, $t_3 = 0.003$ s, $t_4 = 0.004$ s, $t_5 = 0.006$ s e $t_6 = 0.092$ s todos para um $Ca = 0.05$ . . . . .	96
Figura 5.52–Escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.001$ s, $t_2 = 0.002$ s, $t_3 = 0.003$ s, $t_4 = 0.004$ s e $t_5 = 0.005$ s todos para um $Ca = 0.1$ . . . . .	96
Figura 5.53–Escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram $t_1 = 0.0002$ s, $t_2 = 0.0004$ s, $t_3 = 0.0008$ s, $t_4 = 0.001$ s, $t_5 = 0.0012$ s, $t_6 = 0.0013$ s, $t_7 = 0.0014$ s e $t_8 = 0.0015$ s todos para um $Ca = 0.35$ . . . . .	97
Figura 5.54–Comparação entre <i>fingers</i> no meio poroso com duas porosidades distintas para $Ca = 0.05$ em $t = 0.092$ s. . . . .	98
Figura 5.55–Comparação entre <i>fingers</i> no meio poroso com duas porosidades distintas para $Ca = 0.1$ em $t = 0.005$ s. . . . .	98
Figura 5.56–Comparação entre <i>fingers</i> em um meio poroso com duas porosidades, $\varepsilon = 0.55$ e $\varepsilon = 0.7$ , para $Ca = 0.35$ no instante de tempo $t = 0.0015$ s. . . . .	99
Figura A.1–Região completa para geração da malha. $b = 0.0009$ m . . . . .	119
Figura A.2–Região central da malha . . . . .	119
Figura A.3–Região próxima a parede da malha . . . . .	119
Figura A.4–Região central da malha. O canal completo possui $b = 0.0009$ m e $l = 0.38$ m. . . . .	120
Figura A.5–Região da malha próxima à parede. . . . .	120
Figura A.6–Parte central da malha. . . . .	121
Figura A.7–Região da malha próxima à parede. . . . .	121
Figura A.8–Região completa para geração da malha. $b = 0.0008$ m . . . . .	122
Figura A.9–Parte central da malha. . . . .	122
Figura A.10–Região próxima da parede. . . . .	122

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros físicos adimensionais que regem escoamentos na mecânica dos fluidos. Aqui, $\nu$ denota o coeficiente de difusão hidrodinâmico, frequentemente referido como viscosidade cinemática, representado por $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , razão entre a viscosidade dinâmica e a massa específica do fluido e $\nu_m$ representa o coeficiente de difusão magnética. Além disso, $u_c$ representa uma velocidade característica, $l_c$ é um comprimento característico, $B_c$ é uma densidade de fluxo magnético característica e $t_c$ um tempo característico. . . . .	6
Tabela 2 – Relação entre equações e escalas do meio poroso. A escala de comprimento que está sendo analisada é representada por $r$ . . . . .	15
Tabela 3 – Propriedades típicas do escoamento e escalas usadas para adimensionar as equações governantes. . . . .	34
Tabela 4 – Relação entre o valor do <i>skewness</i> e a qualidade das células. . . . .	57
Tabela 5 – Condições de contorno para velocidade (u), pressão (p) e fração de água (alpha.water) no OpenFOAM. . . . .	60
Tabela 6 – Relação entre o número de elementos da malha computacional e a vazão numérica dimensional ( $Q_{num}$ ), bem como o erro em relação a vazão dimensional da teoria de Hele-Shaw ( $Q_{teo}$ ). Note que $Q_{num} \times 10^{-7}$ equivale ao valor da vazão multiplicado por $10^{-7}$ . Essa é a convenção adotada para todos os gráficos e tabelas. . . . .	66
Tabela 7 – Erro percentual absoluto máximo e médio de $v_x^*$ entre os valores teóricos e numéricos para diferentes $Ha$ . . . . .	77
Tabela 8 – Erro percentual absoluto máximo e médio do $B_x^*$ entre os valores teóricos e numéricos para diferentes $Ha$ . . . . .	78
Tabela 9 – Redução de $u^*$ e $B_x^*$ de $Ha = 0.1$ até $Ha = 100$ para diferentes porosidades. . . . .	80
Tabela 10 – Discretização dos operadores matemáticos. . . . .	116
Tabela 11 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares. . . . .	116
Tabela 12 – Discretização dos Operadores Matemáticos. . . . .	117
Tabela 13 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares. . . . .	117

Tabela 14 – Discretização dos Operadores Matemáticos. . . . .	118
Tabela 15 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares. . . . .	118

# Nomenclatura

## Notação Matemática

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>
$b$	Distância entre paredes
$\mathbf{B}$	Campo de densidade de fluxo magnético
$\mathbf{f}_b$	Força de corpo por unidade de massa
$\mathbf{f}_\sigma$	Força de tensão interfacial
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente elétrica
$\mathbf{T}$	Tensor de tensões
$\mathbf{u}$	Campo de velocidades
$S$	Superfície
$\Delta p$	Diferença de pressão
$\Lambda$	Pequeno parâmetro
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
$Ha$	Número de Hartmann
$k$	Permeabilidade do meio poroso
$\kappa$	Curvatura da superfície livre
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_e$	Viscosidade efetiva
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo
$\nu$	Coefficiente de difusão hidrodinâmico
$\nu_m$	Coefficiente de difusão magnética

$\rho$	Massa específica
$\rho_e$	Densidade de carga elétrica
$\sigma$	Coeficiente de tensão interfacial
$\varepsilon$	Porosidade do meio poroso
$\gamma$	Função de fase
$\nabla$	Operador de gradiente
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material ou lagrangiana
$Re_m$	Número de Reynolds magnético
$t$	Variável paramétrica do tempo
$St$	Número de Stokes
$Re$	Número de Reynolds
$p$	Pressão modificada
$l_c$	Comprimento característico
$u_c$	Velocidade característica
$\mathbf{S}_m$	Termo de fonte
$D_g$	Diâmetro do grão
$\tau_c$	Tortuosidade da rocha consolidada
$\phi$	Fração volumétrica de sólido
$\xi$	Variável genérica, vetorial ou escalar
$N_{faces}$	Número de faces
$V$	Volume
$B_c$	Densidade de fluxo magnético característica
$skew_m$	<i>Skewness</i> da malha
$skew_p$	<i>Skewness</i> no modelo Panda-Lake
$W$	Localização do centro da face de uma célula da malha
$W'$	Ponto onde o vetor que une os centros das células adjacentes cruza a face
$\mathbf{d}_c$	Distância entre os centros das células adjacentes

$Q_{AR}$	Razão de aspecto da malha
$\zeta$	Pequeno distúrbio na interface entre dois fluidos
$\beta$	Constante de arrasto de forma adimensional
$\mathcal{C}$	Configuração do meio poroso
$\mathbf{v}$	Velocidade intersticial
$p_{final}$	Pressão no ponto final
$p_{inicial}$	Pressão no ponto inicial
$v_c$	Velocidade característica no meio poroso
$\delta$	Escala microscópica do meio poroso
$L_t$	Escala macroscópica do meio poroso
$\lambda$	Escala mesoscópica do meio poroso
$F_i$	Forças inerciais
$F_v$	Forças viscosas
$Re_p$	Reynolds da matriz porosa
$V_p$	Volume dos poros
$V_t$	Volume total do meio poroso
$V_s$	Volume de sólido
$A_s$	Área da superfície intersticial dos poros
$M_s$	Superfície específica de área por unidade de volume de material sólido
$M_b$	Superfície específica de área do material poroso por unidade de volume total
$c_0$	Coefficiente de Kozeny
$c$	Coefficiente de Carman-Kozeny do material poroso
$\mathbf{f}_d$	Força média das partículas sobre o fluido
$V_{pt}$	Volume da partícula
$\tau_u$	Tortuosidade da rocha não consolidada
$s$	Variância
$C$	Razão de aspecto

$\varepsilon_u$	Porosidade de rochas não consolidadas
$\varepsilon_c$	Porosidade de rochas consolidadas
$\phi_i$	Fração volumétrica de um cimento $i$
$N_{cimento}$	Número de diferentes materiais cimentantes
$A$	Parâmetro do modelo Panda-Lake
$R$	Parâmetro do modelo Panda-Lake
$a_i$	Área de superfície específica do tipo de cimento $i$
$\mathbf{d}_{ct}$	Vetor de conexão dos centroides de duas células adjacentes
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor normal a uma dada superfície
$\iota$	Força eletromotriz
$\Omega$	Varição do fluxo magnético
$\sigma_e$	Condutividade elétrica
$Ca$	Número de capilaridade
$Ca_c$	Número de capilaridade crítico
$d_{frac}$	Dimensão fractal

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

No contexto da crescente demanda energética global e dos desafios associados à sustentabilidade, a recuperação eficiente de óleo em reservatórios de petróleo é fundamental para atender as necessidades atuais. A produção de petróleo é dividida em três estágios: primário, secundário e terciário (ou especiais). Os estágios secundário e terciário visam aumentar a eficiência da extração do óleo, um aspecto vital para a economia de energia e a redução de impactos ambientais. Um método muito utilizado é o da injeção de água, em que água é injetada no reservatório com o intuito de empurrar o óleo para fora (GREEN; WILLHITE, 1998). O problema nesse processo é que a água escoar por caminhos preferenciais devido às características permoporosas do reservatório. A menor viscosidade da água, ao penetrar o óleo, resulta na formação dos chamados *fingers*, que se assemelham a dedos e são criados na interface água-óleo, reduzindo a eficiência do processo (SAFFMAN; TAYLOR, 1958). Esse fenômeno pode ser visualizado na Figura 1.1.

Um dos problemas específicos que surgem na recuperação de petróleo, particularmente na injeção de água, é exatamente a formação dos *fingers*. Para uma compreensão aprofundada desse fenômeno e a consequente elaboração de estratégias de mitigação, é comum que pesquisadores se voltem para modelos simplificados. Estes frequentemente englobam escoamentos em células de Hele-Shaw ou em configurações de placas paralelas. Em suas abordagens, os estudos frequentemente empregam equações de meios porosos para a representação dos reservatórios. Adicionalmente, alguns autores tem estudado a introdução de um campo magnético externo como uma técnica para atenuar os efeitos da instabilidade na interface. O trabalho de Saffman e Taylor (1958), pioneiros no estudo da instabilidade interfacial, estudou o escoamento de dois fluidos imiscíveis em uma célula de Hele-Shaw, que pode ser analogamente visto como um escoamento bidimensional em um meio poroso homogêneo. A dinâmica dessa célula será explorada em capítulos subsequentes. Eles notaram que, ao injetar um fluido menos viscoso em outro mais viscoso, surgem distúrbios que crescem e levam para o predomínio de um padrão de um único *finger* com o aumento do número de capilaridade ( $Ca$ ).

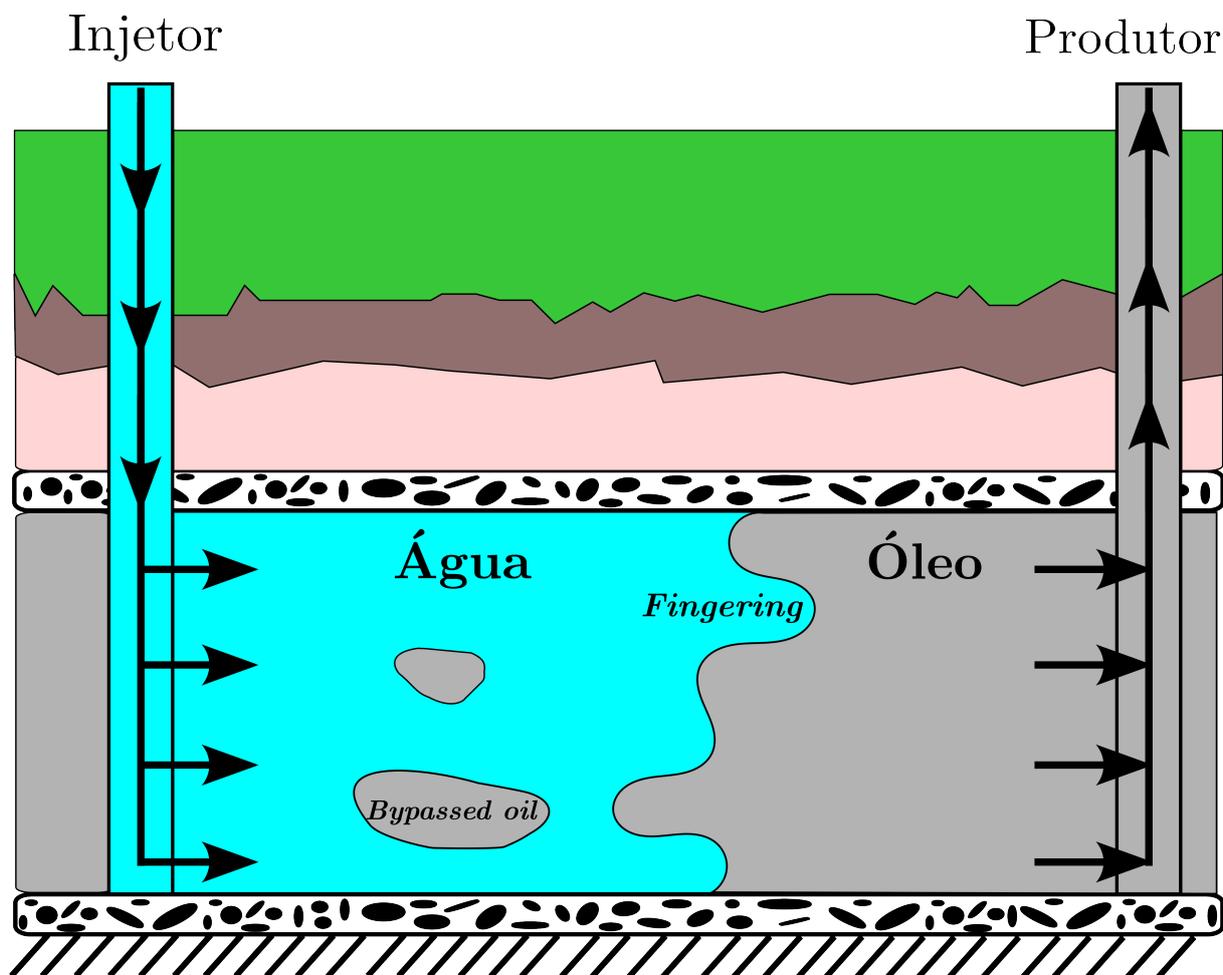


Figura 1.1 – Visualização de um reservatório de petróleo com a utilização do método de injeção de água. O *Bypassed oil* ocorre quando parte do óleo permanece no reservatório mesmo após técnicas de recuperação convencionais terem sido aplicadas.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Nesta seção, são discutidos de forma resumida escoamentos em meios porosos sob diversas condições. Artigos relevantes e relacionados a esse tema são citados e analisados.

Srivastava e Deo (2013), examinaram o escoamento de um fluido incompressível, viscoso, e eletricamente condutor em um canal preenchido com meio poroso de permeabilidade variável, com a aplicação de um campo magnético transversal. A pesquisa abordou o escoamento de Poiseuille e Couette.

Hriberšek, Jecl e Škerget (2002) e Zaytoon et al. (2016), por sua vez, concentraram-se em escoamentos em canais parcialmente preenchidos com material poroso, com e sem efeitos magnetohidrodinâmicos (MHD), respectivamente. Zaytoon et al. (2016), em particular, dividiu o escoamento em três partes. Uma central regida pela equação de Brinkman e duas camadas laterais, regidas pela equação de Darcy, limitadas por paredes sólidas e impermeáveis. Dessa forma ele mostrou como as distribuições de permeabilidade afetam os perfis de velocidade nas camadas do escoamento.

Adicionalmente, Hosseini et al. (2012) exploraram um escoamento incompressível com efeitos MHD. Porém, em canais com geometrias divergentes e convergentes, enfatizando a influência do número de Hartmann ( $Ha$ ) (parâmetro adimensional utilizado em escoamentos em que um fluido condutor interage com um campo magnético) como um parâmetro crucial em escoamentos com interações magnéticas.

Mostaghimi, Ashouri e Ebrahimi (2016) estudaram a interação de dois fluidos imiscíveis em uma célula de Hele-Shaw, com um deles sendo eletricamente condutor, sob influência de um campo magnético externo. A pesquisa identificou a presença da instabilidade de Saffman-Taylor e destacou que a variação do número de Hartmann, que caracteriza a força magnética pode atenuar a formação dos *fingers*, servindo como um mecanismo estabilizador e até mesmo inibidor. Em um contexto relacionado, Sinzato e Cunha (2019) investigaram o escoamento de dois fluidos imiscíveis, sendo um deles magnético, também influenciado por um campo magnético externo. Seus resultados corroboraram a supressão da instabilidade de Saffman-Taylor mediante a aplicação da força magnética.

Estudos recentes oferecem diversas abordagens no campo de escoamentos entre placas paralelas. Agarwal, Kumar e Verma (2020) exploraram o escoamento de dois fluidos incompressíveis e imiscíveis eletricamente condutores, juntamente com a transferência de calor em um canal que foi dividido em duas regiões distintas, sendo a primeira delas um meio poroso de permeabilidade variável regida pela equação de Darcy e a outra pela equação de Navier-Stokes. As condições de contorno nas paredes eram de temperatura constante. Os resultados destacaram diversas dependências, entre elas, a diminuição da velocidade com o aumento do número de Hartmann e o aumento da velocidade com a diminuição da condutividade elétrica e da razão de viscosidade entre os fluidos.

### 1.3 Objetivos

O presente estudo busca examinar diferentes condições de escoamento com foco particular na instabilidade de Saffman-Taylor (ou *viscous fingering*), um fenômeno com implicações práticas importantes, especialmente na indústria de extração de petróleo. Este trabalho tem como objetivo realizar uma investigação sistemática de escoamentos em meio poroso e em uma célula de Hele-Shaw. O estudo começa com um escoamento em uma célula de Hele-Shaw em que a permeabilidade é constante, sem influências externas, e posteriormente examina esse mesmo escoamento com um fluido eletricamente condutor sob a aplicação de um campo magnético externo. Em seguida são feitas análises semelhantes porém em um escoamento em meio poroso com permeabilidade de Ergun, com e sem a aplicação do campo magnético externo. A análise se estende para um escoamento bifásico, incompressível e imiscível. Inicialmente para água e óleo com a permeabilidade da célula de Hele-Shaw e posteriormente para essa mesma configuração de escoamento, porém em um meio poroso. Dessa forma, o propósito desta pesquisa é explorar escoamentos em meios

porosos sob diversas condições, entre elas, variações de porosidade, aplicação de campos magnéticos e efeitos não lineares para entender, utilizando a fluidodinâmica computacional, como os escoamentos respondem e interagem a esses estímulos.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Parâmetros Adimensionais

Os escoamentos são regidos por parâmetros físicos adimensionais. Ao longo deste trabalho, serão utilizados parâmetros adimensionais pertinentes aos escoamentos analisados. A Tabela 1 apresenta esses parâmetros adimensionais.

Tabela 1 – Parâmetros físicos adimensionais que regem escoamentos na mecânica dos fluidos. Aqui,  $\nu$  denota o coeficiente de difusão hidrodinâmico, frequentemente referido como viscosidade cinemática, representado por  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , razão entre a viscosidade dinâmica e a massa específica do fluido e  $\nu_m$  representa o coeficiente de difusão magnética. Além disso,  $u_c$  representa uma velocidade característica,  $l_c$  é um comprimento característico,  $B_c$  é uma densidade de fluxo magnético característica e  $t_c$  um tempo característico.

Parâmetros Físicos Adimensionais		
Parâmetro	Equação	Implicações físicas
Número de Reynolds	$Re = u_c l_c / \nu$	Razão entre forças inerciais e viscosas
Número de Strouhal	$St = t_c^{-1} (l_c / u_c)$	Razão entre a oscilação e velocidade média
Número de Hartmann	$Ha = B_c l_c \sqrt{\sigma_e / \rho \nu}$	Razão entre força de Lorentz e força viscosa
Número de Reynolds Magnético	$Re_m = u_c l_c / \nu_m$	Razão entre tempo de difusão e advecção de $\mathbf{B}$
Número de Capilaridade	$Ca = \mu u_c / \sigma$	Razão entre forças viscosas e forças de tensão interfacial

Dessa forma, pode-se definir as grandezas adimensionais da seguinte forma:

$$y^* = \frac{y}{l_c}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_c}, \quad (2.2)$$

$$p^* = \frac{p l_c}{\mu u_c}, \quad (2.3)$$

$$E_0^* = \frac{E_0}{u_c B_c}, \quad (2.4)$$

$$B_x^* = \frac{B_x}{B_c}, \quad (2.5)$$

$$k^* = \frac{k}{l_c^2}. \quad (2.6)$$

$$\nabla^* = \nabla l_c \quad (2.7)$$

Note que foi apresentada uma escala viscosa para a pressão devido ao fato de que esse trabalho irá abordar na maioria dos casos, escoamentos sem efeitos inerciais, ou seja, puramente viscosos.

## 2.2 Escoamento em Meios Porosos

### 2.2.1 Escalas no Meio Poroso

Um poro pode ser definido como uma estrutura com múltiplas ramificações, as quais têm potencial para estabelecer interconexões com outros poros. Para que haja um escoamento efetivo através de um material poroso, é imprescindível que exista uma interconexão entre pelo menos alguns destes poros (HENDERSON; BRÊTTAS; SACCO, 2010; COLLINS, 1976). A Figura 2.1 ilustra um escoamento em um meio poroso de rochas consolidadas. Nessa representação, é possível observar a água percorrendo os poros, que são caminhos formados pelos espaços intersticiais na matriz sólida da rocha.

Nesse contexto, o estudo de escoamentos em meios porosos exige uma compreensão das diversas escalas envolvidas. As análises podem se estender desde escalas de comprimento na ordem de quilômetros, típicas de estruturas geológicas como reservatórios de petróleo, até abordagens mais refinadas no nível microscópico, como a avaliação dos espaços intermoleculares presentes na argila. A escala microscópica ( $\delta$ ) (dimensão média do poro) está intrinsecamente relacionada à estrutura individual dos poros. A escala mesoscópica ( $\lambda$ ) abrange agrupamentos de poros, possibilitando a identificação de características heterogêneas e anisotrópicas. Por outro lado, a escala macroscópica ( $L_t$ ) contempla o meio poroso em uma perspectiva ampla, evidenciando propriedades médias e padrões de comportamento em larga escala. A Figura 2.2 apresenta um escoamento em meio poroso sob a perspectiva dessas escalas.

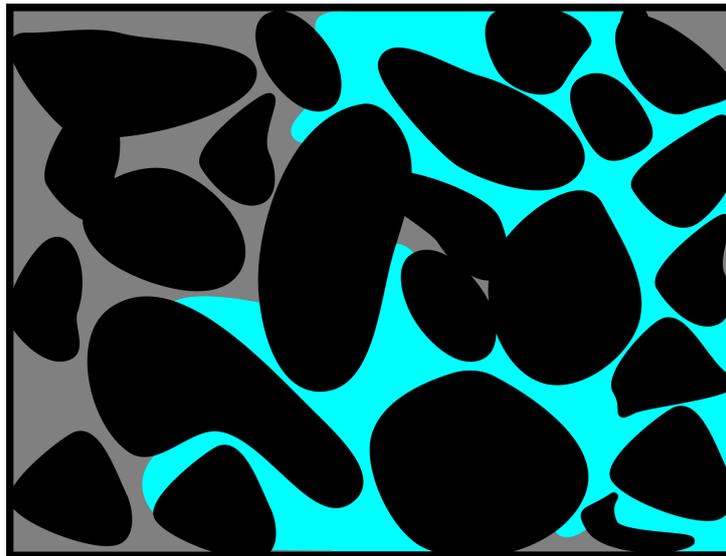


Figura 2.1 – Escoamento em um meio poroso de rochas consolidadas.

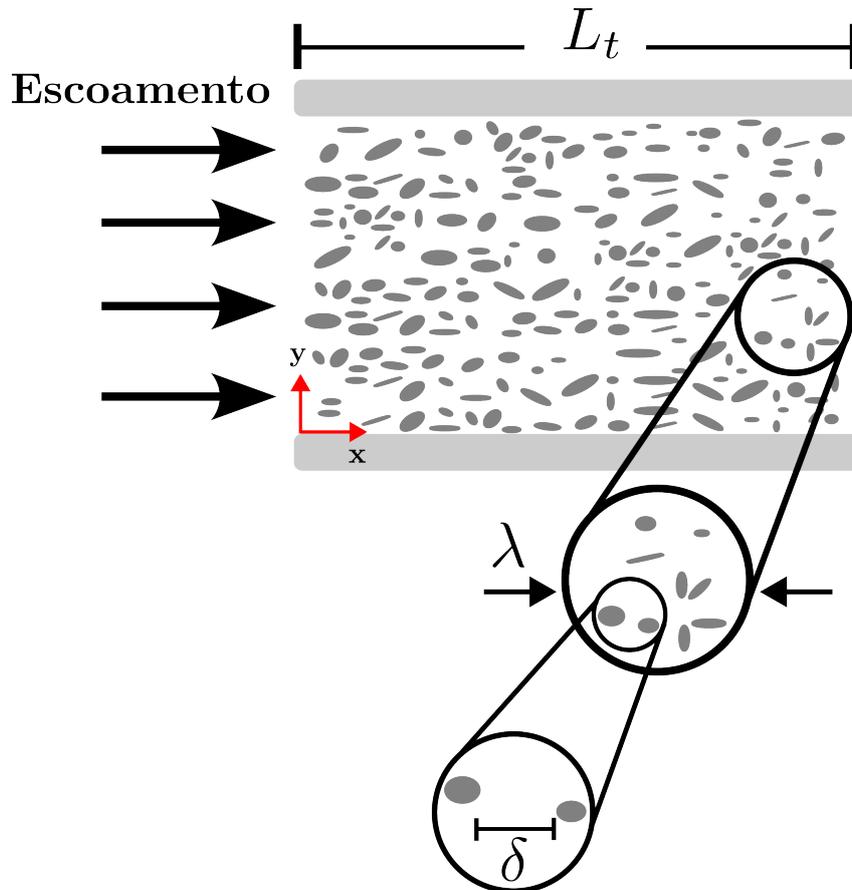


Figura 2.2 – Representação das escalas de comprimento em meios porosos.

## 2.3 Análise de Escala em Meios Porosos

A equação de Navier-Stokes em sua forma dimensional, sem forças de corpo e considerando regime permanente, é dada por:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.8)$$

em que a velocidade intersticial é definida por  $\mathbf{v}$ , através da relação  $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\varepsilon$ . Aqui,  $\mathbf{u}$  refere-se ao campo de velocidades na escala macroscópica do meio poroso, enquanto  $\varepsilon$  denota a porosidade do mesmo que é representada matematicamente pelo volume dos poros ( $V_p$ ) dividido pelo volume total do meio poroso ( $V_t$ ). Os termos da equação têm significados físicos distintos:  $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  corresponde às forças inerciais ( $F_i$ ), enquanto  $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$  representa as forças viscosas ( $F_v$ ). A análise de escala desses termos é apresentada a seguir:

$$\begin{cases} F_i \sim \rho \frac{v_c^2}{\delta}, & (2.9) \\ F_v \sim \mu \frac{v_c}{\delta^2} = \frac{\mu u_c}{\varepsilon \delta^2}, & (2.10) \end{cases}$$

em que  $v_c$  é uma velocidade característica intersticial. Em meios porosos, é amplamente reconhecido que as forças inerciais são geralmente dominadas pelas forças viscosas. Isso pode ser expresso como:

$$\rho \frac{v_c^2}{\delta} \ll \mu \frac{v_c}{\delta^2}. \quad (2.11)$$

A relação acima pode ser rearranjada para formar a definição do número de Reynolds na escala do poro:

$$Re_p = \frac{\delta v_c \rho}{\mu} = \frac{\delta u_c \rho}{\varepsilon \mu} \ll 1. \quad (2.12)$$

Considerando que  $Re_p \ll 1$ , a Equação (2.8) é simplificada para:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.13)$$

com a seguinte análise dimensional (note que  $\nabla \sim 1/l_c$ ) (CUNHA, 2023):

$$-\frac{\Delta p}{l_c} \sim \frac{\mu u_c}{\varepsilon \delta^2}. \quad (2.14)$$

A variação de pressão entre o ponto final e o ponto inicial é definida como  $\Delta p$ . Matematicamente, essa variação é expressa pela relação:  $\Delta p = p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}}$ . Assim, a equação de Navier-Stokes na escala do poro, no regime dominado pela viscosidade torna-se:

$$-\nabla p = \left( \frac{\mu}{\varepsilon \delta^2} \right) \mathbf{u}. \quad (2.15)$$

Note que:

$$k = \varepsilon \delta^2 = f(\varepsilon, \mathcal{C}). \quad (2.16)$$

A configuração do meio poroso é denotada por  $\mathcal{C}$ , referindo-se especificamente à distribuição deste meio. A permeabilidade do meio poroso é dada por  $k(\varepsilon, \mathcal{C})$  e quantifica a capacidade do material poroso de permitir o escoamento de um fluido através de sua estrutura. Note que nas próximas aparições de  $k(\varepsilon, \mathcal{C})$ , a dependência de  $\mathcal{C}$  será ocultada. Esta consideração é adotada uma vez que, em geral, a configuração dos poros é uniforme. Será feito o mesmo com  $\varepsilon$ , porém somente com o intuito de aliviar a notação.

A Equação (2.16) mostra que a permeabilidade será sempre a multiplicação de uma escala de comprimento ao quadrado por uma função da permeabilidade. Esse é o fundamento principal da equação de Carman-Kozeny, que será discutida no decorrer desse trabalho. Desta relação, é obtido que:

$$\delta = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}} \Rightarrow k^{\frac{1}{2}} = \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Consequentemente a escala da permeabilidade é uma escala contínua e macroscópica para o meio poroso que é dada por  $k^{\frac{1}{2}}$  (lembre-se que a permeabilidade tem unidade de comprimento ao quadrado). Com essa informação, é possível definir o número de Reynolds da matriz porosa, ou seja, na escala de Darcy, como sendo:

$$Re_k = \frac{k^{1/2} \rho u_c}{\mu}, \quad (2.18)$$

em que  $u_c$  é uma velocidade característica do escoamento, que geralmente é usada como sendo a velocidade média ( $U$ ).

## 2.3.1 Lei de Darcy

### 2.3.1.1 Global

A lei de Darcy global é utilizada para modelar escoamentos na escala macroscópica. Ela leva em consideração que o meio poroso é homogêneo e isotrópico. A Figura 2.3 apresenta um caso de aplicação. Essa lei afirma que a velocidade do escoamento mantém uma relação de proporcionalidade com o gradiente de pressão.

$$U = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (2.19)$$

Na forma adimensional, a velocidade média do escoamento será igual a 1. Logo, lembrando que  $k^* = k/l_c^2$  a Equação (2.19) em sua forma adimensional será:

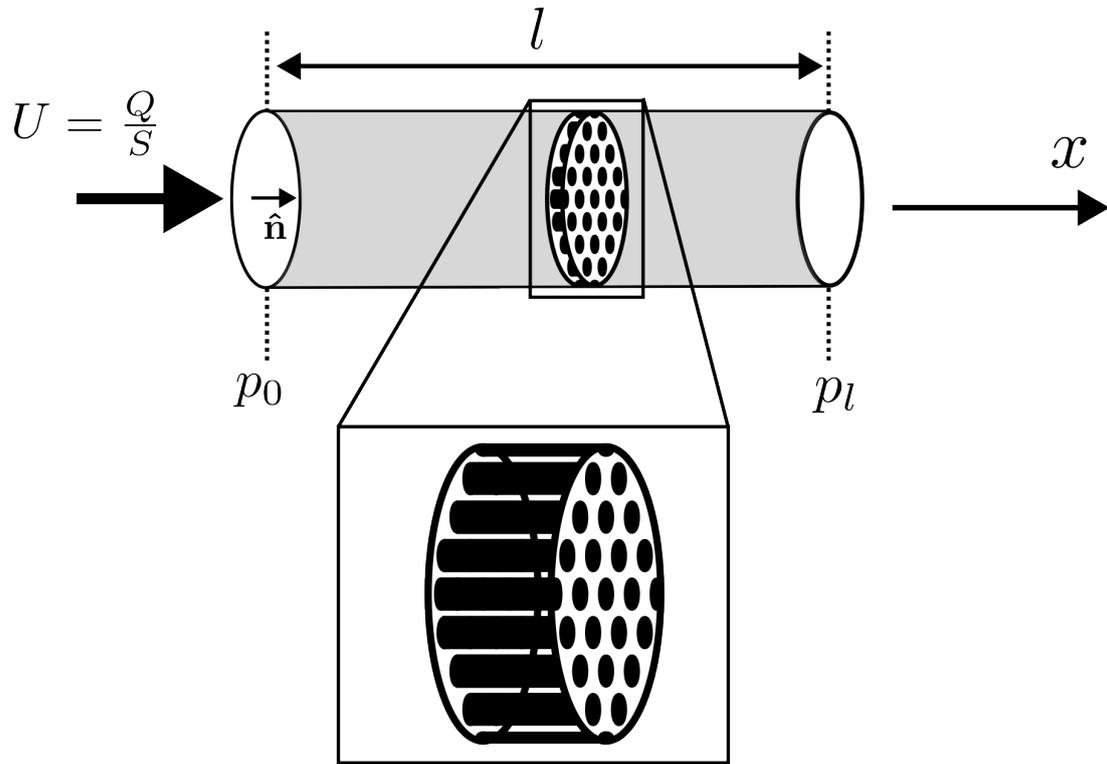


Figura 2.3 – Esquema representativo da Lei de Darcy. A vazão é representada por  $Q$  e a área de entrada por  $S$ .

$$\nabla^* p^* = -\frac{1}{k^*} \quad (2.20)$$

### 2.3.1.2 Local

A Lei de Darcy local é usada para modelar o escoamento em meios porosos em uma escala microscópica e mesoscópica. A lei de Darcy local é representada pela Equação (2.21):

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (2.21)$$

Na forma adimensional essa equação é representada por:

$$\mathbf{u}^* = -k^* \nabla^* p^* \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Célula de Hele-Shaw

A célula de Hele-Shaw é um dispositivo que consiste em duas placas planas e paralelas, separadas por um pequeno espaço, através do qual um fluido é conduzido. Um ponto importante desse tipo de escoamento é que ele é análogo matematicamente a um escoamento bidimensional em um meio poroso (SAFFMAN, 1986; SAFFMAN;

TAYLOR, 1958). Inicialmente, a equação completa de Navier-Stokes será considerada, sendo apresentada pela Equação (2.23).

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.23)$$

Em um contexto adimensional e usando o conceito da pressão modificada (vide Apêndice A.2), a equação pode ser reescrita como:

$$ReSt \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{u}^*. \quad (2.24)$$

Todo o processo detalhado para encontrar a Equação (2.24) pode ser visualizado no Apêndice A.2. A partir desse momento, será analisado o escoamento apresentado na Figura 2.4, que está sendo considerado sob o contexto da aproximação de lubrificação, ou seja, a relação (2.25) é válida.

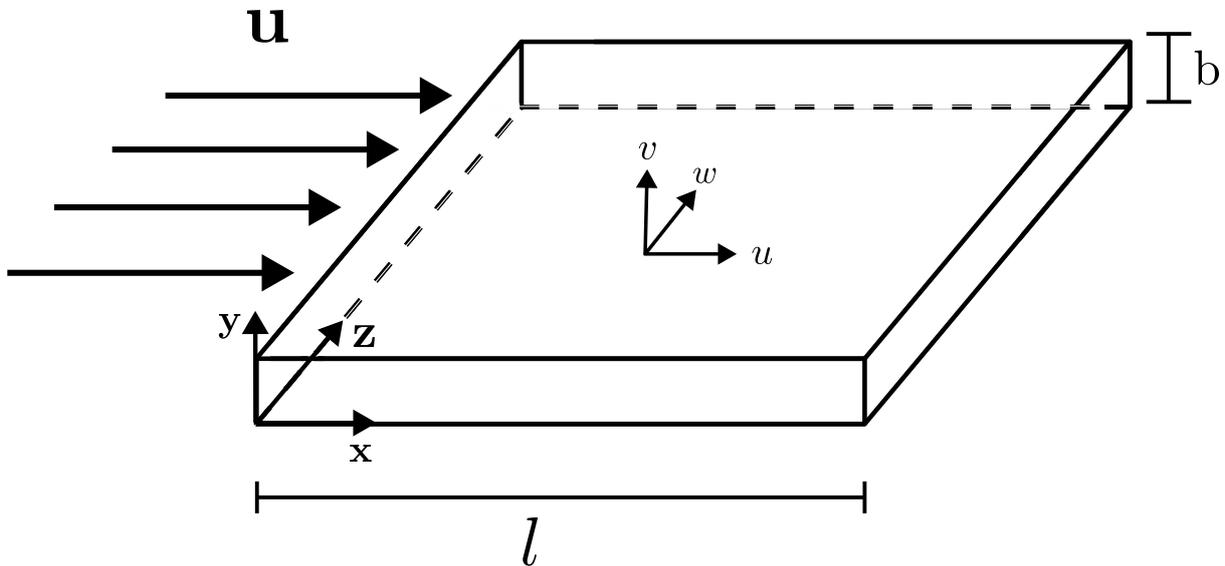


Figura 2.4 – Escoamento em uma célula de Hele-Shaw com comprimento  $l$  e espessura  $b$ .

$$Re \left( \frac{b}{l} \right) \ll 1, \quad (2.25)$$

em que  $b$  é a espessura e  $l$  o comprimento da célula de Hele-Shaw, respectivamente. Observe que a Equação de Navier-Stokes para o problema sem simplificações é dada pela Equação (2.23). Entretanto, ao desprezar as forças de corpo e considerar regime estacionário com a aproximação de lubrificação válida, o modelo pode ser significativamente simplificado. Consequentemente, será utilizada a equação de Stokes, uma vez que o número de Reynolds e o número de Strouhal são aproximadamente zero, conforme demonstrado acima. Este resultado oferece um marco importante na análise, já que permite focar nas dinâmicas de baixa velocidade, também conhecidas como *creeping flows*, em que as forças inerciais são extremamente menores em relação às forças viscosas. Com isso, os efeitos inerciais podem ser desprezados (CUNHA, 2023; PANTON, 2013). Dessa forma, a equação governante do problema e suas condições de contorno são, respectivamente:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} y = 0, & u = w = 0, \\ y = b, & u = w = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

A partir das análises realizadas na seção A.3, a solução obtida é:

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(b-y), \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} w = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(b-y), \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} U = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Ao comparar a Equação (2.31) com a equação de Darcy, observa-se que a célula de Hele-Shaw pode ser descrita como um meio poroso com permeabilidade  $k = \frac{b^2}{12}$ .

### 2.3.3 Equação de Brinkman

Como discutido anteriormente, em estudos envolvendo meios porosos, é fundamental reconhecer a natureza multi-escalar desses sistemas. Uma abordagem clássica, proposta por Brinkman, é a consideração de um meio poroso constituído por esferas fixas de pequenas dimensões em um regime diluído (porosidade tendendo a 1 e fração de esferas tendendo a 0). Neste contexto, duas escalas predominantes surgem: a escala do poro, frequentemente referida como escala de Stokes, e a escala da matriz porosa, expressa como  $k^{\frac{1}{2}}$ , comumente identificada como a escala de Darcy. A Figura 2.5 representa o estudo feito por Brinkman (BRINKMAN, 1949; CUNHA, 2023).

#### Escoamento

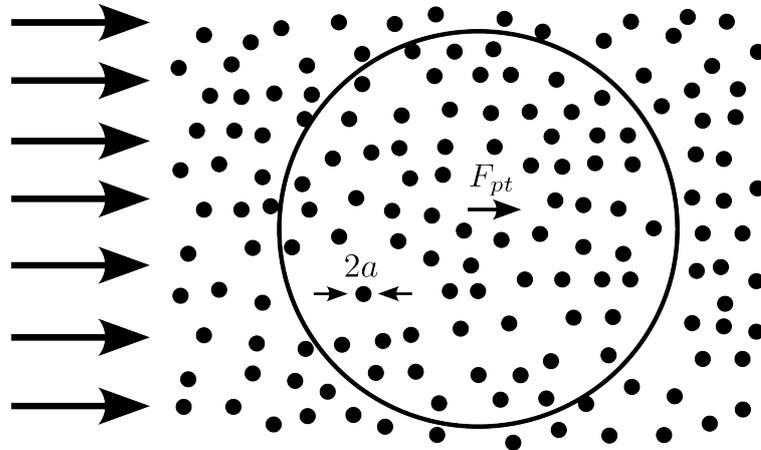


Figura 2.5 – Representação do estudo realizado por Brinkman para um escoamento em um meio poroso de esferas de pequenas dimensões. O raio de uma esfera é representado por  $a$  e  $F_{pt}$  é a força da partícula sobre o fluido.

A força que uma única esfera de raio  $a$  exerce sobre o fluido é dada por:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{pt}} = -6\pi\mu a \mathbf{u}^\infty, \quad (2.32)$$

em que  $-6\pi\mu a$  é definido como a mobilidade, enquanto  $\mathbf{u}^\infty$  denota a velocidade do escoamento distante da influência do meio poroso. Dessa forma, é possível calcular a força média das partículas sobre o fluido como sendo:

$$\mathbf{f}_d = -n\overline{F_{pt}} = n\frac{1}{N} \sum^N 6\pi\mu a \mathbf{u}^\infty. \quad (2.33)$$

A força média de apenas uma partícula sobre o fluido é representada por  $\overline{F_{pt}}$ . O número de densidade é representado por  $n$  e  $N$  indica o número de partículas. Outra relação importante é dada por  $n = N/V_{pt}$ , em que  $V_{pt}$  é o volume de uma partícula. Dessa forma, pode-se fazer as seguintes manipulações na Equação (2.33):

$$\mathbf{f}_d = -n\frac{1}{N} \sum \frac{V_{pt}}{V_{pt}} 6\pi\mu a \mathbf{u}^\infty \quad (2.34)$$

$$= -n\frac{1}{N} V_{pt} \sum \frac{3}{4a^3\pi} 6\pi\mu a \mathbf{u}^\infty \quad (2.35)$$

$$= -\phi \frac{9}{2} \frac{\mathbf{u}^\infty}{a^2} \mu, \quad (2.36)$$

em que  $\phi$  é a fração volumétrica de sólido que também pode ser entendida como a razão entre o volume de sólido ( $V_s$ ) e o volume total. Esta é definida em relação à porosidade  $\varepsilon$  como  $\phi = 1 - \varepsilon$ . Dessa forma, Brinkman propõe a seguinte equação para o fluido:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

em que  $\mathbf{f}$  representa a densidade de força por unidade de volume, que nesse caso, é igual a  $\mathbf{f}_d$ .

A equação de Brinkman é uma alternativa à equação de Darcy. Ela trabalha em uma escala mesoscópica e inclui um termo de viscosidade. Esse termo é usado para representar os efeitos de resistência ao escoamento no interior dos poros. Como discutido anteriormente, esse é um modelo de meio poroso diluído de esferas fixas sendo representado por (CUNHA, 2023):

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{9}{2a^2} \phi \mu \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Note que ao comparar a Equação (2.38) com a lei de Darcy, a seguinte generalização pode ser feita:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

com

$$k = \frac{2a^2}{9\phi}. \quad (2.40)$$

A Equação (2.39) também é chamada de equação de Darcy-Brinkman. É importante notar que o termo  $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$  está associado à escala de Stokes e que o termo  $\frac{\mu}{k(\epsilon)} \mathbf{u}$  tem relação com a escala de Darcy. Portanto, dependendo da escala em estudo, é possível se situar entre as equações de Darcy-Brinkman, Stokes e Darcy, conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Relação entre equações e escalas do meio poroso. A escala de comprimento que está sendo analisada é representada por  $r$ .

Equação	Escala	Descrição
$-\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} = \mathbf{0}$	$r \sim k^{1/2}$	Escala da matriz porosa (Darcy)
$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{k(\epsilon)} \mathbf{u} = \mathbf{0}$	$a \leq r \leq k^{1/2}$	Escala mesoscópica (intermediária)
$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$	$r \sim a$	Escala de Stokes (Poro)

### 2.3.4 Efeitos Não Lineares em Meios Porosos

Os efeitos não lineares em meios porosos devido aos efeitos inerciais originários da expansão de Forchheimer podem ser levados em consideração em meios porosos. Para isso, a equação de Darcy é reescrita da seguinte forma (PH, 1901; CUNHA, 2023):

$$\nabla p = - \left( \frac{\mu}{k} \right) \mathbf{u} f(Re_k, \epsilon). \quad (2.41)$$

Note que, para  $Re_k = 0$ , isto é,  $f(0, \epsilon) = 1$ , recupera-se a equação de Darcy. Uma pequena perturbação de  $Re_k$  (algum primeiro efeito de inércia) resulta em:

$$f(Re_k, \epsilon) = f(0, \epsilon) + Re_k \left. \frac{\partial f}{\partial Re_k} \right|_{Re_k=0} + \mathcal{O}(Re_k^2) \quad (2.42)$$

$$= 1 + \frac{\rho |\mathbf{u}| k^{1/2}}{\mu} \beta. \quad (2.43)$$

Aqui  $\beta = \left. \frac{\partial f}{\partial Re_k} \right|_{Re_k=0}$  representa uma constante adimensional de arrasto, também chamada de coeficiente de inércia de Forchheimer. Substituindo a Equação (2.43) na Equação (2.41), obtém-se a equação de Darcy com o termo de Forchheimer (também conhecida como equação de Darcy-Forchheimer), dada por:

$$\nabla p = - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} - \rho \beta k^{-1/2} \mathbf{u} |\mathbf{u}|. \quad (2.44)$$

Nesta expressão, a contribuição viscosa  $-\frac{\mu}{k} \mathbf{u}$  é de ordem  $\mathcal{O}(u)$ , enquanto o termo  $\rho \beta k^{-1/2} \mathbf{u} |\mathbf{u}|$ , representa a contribuição devido aos efeitos inerciais ( $Re \mathcal{O}(1)$ ), é  $\mathcal{O}(u^2)$ .

### 2.3.4.1 Equação de Ergun

A Equação de Ergun, que modela um meio poroso composto por esferas fixas, assemelha-se ao modelo de Brinkman. No entanto, uma diferença crucial é que, no modelo de Ergun, não existem limitações relacionadas à porosidade, ou seja, à concentração das esferas no meio poroso (ERGUN, 1952). Trata-se de um método empírico para definir os parâmetros da correção de Forchheimer (CUNHA, 2023). Para definir o modelo de Ergun, a análise de escala da Equação (2.45) será utilizada.

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\Delta p}{l_c} \sim \mu \frac{U}{l_c^2} + \rho \frac{U^2}{l_c}. \quad (2.46)$$

A equação de Ergun é baseada nessa análise de escala, sendo dada pela Equação (2.47).

$$\frac{\Delta p}{L} = -\alpha_1(\varepsilon) \mu \frac{u}{d^2} - \alpha_2(\varepsilon) \rho \frac{u^2}{d}, \quad (2.47)$$

em que  $d$  é o diâmetro médio das partículas e  $\alpha_1(\varepsilon)$  e  $\alpha_2(\varepsilon)$  são constantes empíricas, representadas, respectivamente por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(\varepsilon) = \frac{150(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}, \\ \alpha_2(\varepsilon) = \frac{7(1-\varepsilon)}{5\varepsilon^3}. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(\varepsilon) = \frac{150(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}, \\ \alpha_2(\varepsilon) = \frac{7(1-\varepsilon)}{5\varepsilon^3}. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

A partir do primeiro termo no lado direito da Equação (2.47), pode-se fazer uma breve comparação com a equação de Darcy, resultando em  $k = \frac{d^2}{\alpha_1(\varepsilon)}$ . Note ainda que é possível comparar as Equações (2.47) e (2.44) e obter a seguinte relação:

$$\beta = \frac{\alpha_2(\varepsilon) k^{1/2}}{d}. \quad (2.50)$$

Dessa forma, pode-se utilizar a equação de Ergun para encontrar, por similaridade as constantes da equação de Darcy-Forchheimer, que são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{k} = \alpha_1(\varepsilon) \frac{\mu}{d^2} \Rightarrow k = \frac{d^2}{\alpha_1(\varepsilon)}, \\ k = \frac{\varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2} d^2, \\ \beta = \frac{7(1-\varepsilon)}{5d\varepsilon^3} k^{1/2} = \frac{7}{5\sqrt{150}} \varepsilon^{-3/2}. \end{array} \right. \quad (2.51)$$

### 2.3.5 Equação de Carman-Kozeny

No desenvolvimento original da Lei de Darcy, assumiu-se que a permeabilidade era constante. No entanto, à medida que se reconheceu a necessidade de considerar meios

porosos heterogêneos, surgiram abordagens alternativas. Dessa forma, Kozeny, em 1927, introduziu uma equação para a permeabilidade variável com a forma (KOZENY, 1927; HENDERSON; BRÊTTAS; SACCO, 2010):

$$k = f(\varepsilon). \quad (2.52)$$

As considerações feitas por Kozeny assumiram um meio poroso com tubos capilares de mesmo comprimento com escoamento laminar. O fluido é considerado newtoniano e incompressível, e as equações de Navier-Stokes são aplicadas simultaneamente para todos os canais em uma seção transversal normal ao escoamento. Contudo, a formulação frequentemente referida como a equação de Kozeny é dada por (CARMAN, 1937; HENDERSON; BRÊTTAS; SACCO, 2010):

$$k = \frac{c_0 \varepsilon^3}{M_b^2}, \quad (2.53)$$

em que  $c_0$  é um parâmetro numérico denominado coeficiente de Kozeny. Esse coeficiente varia conforme a forma geométrica dos canais individuais no conjunto de tubos capilares. Por outro lado, a superfície específica de área do material poroso por unidade de volume total ( $M_b$ ) é determinada pela razão entre a área da superfície intersticial dos poros ( $A_s$ ) e o volume total do meio poroso ( $V_t$ ), sendo expressa por  $M_b = \frac{A_s}{V_t}$ . Note que como dito anteriormente, a permeabilidade sempre será uma função de  $\varepsilon$  multiplicada por uma dimensão ao quadrado. Nesse caso,  $1/M_b^2$  é a escala ao quadrado e  $c_0 \varepsilon^3$ , a função. A Equação (2.53) pode ser reescrita em uma forma alternativa utilizando a relação  $M_b = (1 - \varepsilon)M_s$ , em que  $M_s = A_s/V_s$  representa a superfície específica de área por unidade de volume de material sólido. Assim, a equação se torna:

$$k = c_0 \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2 M_s^2}. \quad (2.54)$$

Em 1937, Carman usou essa equação com  $c_0 = \frac{1}{5}$ , que ficou conhecida como a equação de Carman-Kozeny. Essa formulação é comumente escrita na forma:

$$\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}} = c \left( \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right), \quad (2.55)$$

em que o coeficiente de Carman-Kozeny do material poroso é  $c = \frac{\sqrt{c_0}}{M_s}$ . O coeficiente  $c$  pode variar ao longo do meio poroso. Dessa forma, essa equação também pode caracterizar meios porosos heterogêneos (HENDERSON; BRÊTTAS; SACCO, 2010).

A equação de Carman-Kozeny é essencial para determinar a permeabilidade de meios porosos, e é fundamentada nas características geométricas dos poros. Muitos modelos estatísticos e empíricos derivam desta equação, na qual um termo proporcional ao quadrado do comprimento é intrinsecamente relacionado por uma função da porosidade. Dessa forma, é possível observar a diversidade dos meios porosos: desde uma célula de Hele-Shaw, com

$k$  constante, passando pelo modelo de partículas esféricas diluídas (modelo de Brinkman), até abordagens empíricas ou semi-empíricas, que são casos particulares da equação de Carman-Kozeny. Um caso particular é o modelo Panda-Lake que é fundamentado na equação de Carman-Kozeny. Esse é um dos modelos utilizados para quantificar a relação entre porosidade e permeabilidade em rochas consolidadas, levando em consideração fatores como mineralogia, tortuosidade e a distribuição estatística do tamanho das partículas. Ele ajusta o modelo de Carman-Kozeny para considerar o impacto dos cimentos, que entre outros, podem preencher ( $\phi_f$ ), revestir ( $\phi_l$ ) ou conectar ( $\phi_b$ ) poros das rochas consolidadas. O cimento nesse contexto é o material natural que pode afetar a permeabilidade da rocha ao ocupar espaço nos poros ou alterar a estrutura do poro. O modelo de Panda-Lake define a permeabilidade como sendo (PANDA; LAKE, 1995; CIVAN, 2007):

$$k = \frac{\overline{D}_g^2 \varepsilon_c^3 A^2}{72\tau(1 - \varepsilon_c)^2 \left[ (1 + C_p^2) \left( \frac{1 - \varepsilon_u}{1 - \varepsilon_c} \right) + AR\overline{D}_g \right]^2}, \quad (2.56)$$

em que  $\varepsilon_c$  é a porosidade das rochas consolidadas e  $\varepsilon_u$  a porosidade das rochas não consolidadas. Essas porosidades podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_c + \sum_{i=1}^{N_{cimento}} \phi_i, \quad (2.57)$$

em que  $N_{cimento}$  é o número de diferentes materiais cimentantes. A fração volumétrica,  $\phi_i$ , de um dado cimento tipo  $i$ , refere-se à sua proporção no volume total da rocha. O diâmetro médio do grão é definido como sendo  $\overline{D}_g$ :

$$\overline{D}_g = \int_0^{\infty} D_g f(D_g) dD_g, \quad (2.58)$$

em que  $f(D_g)$  é a distribuição do tamanho de partícula e  $D_g$  é o diâmetro do grão.

No modelo de Panda-Lake, o coeficiente de variação ( $C_p$ ), a variância ( $s^2$ ) e a assimetria (*skewness*) ( $Skew_p$ ) são parâmetros que caracterizam a distribuição do tamanho de partículas, e são representados, respectivamente, por:

$$C_p = \frac{s}{\overline{D}_g}, \quad (2.59)$$

$$s^2 = \int_0^{\infty} (D_g - \overline{D}_g)^2 f(D_g) dD_g, \quad (2.60)$$

$$Skew_p = \frac{1}{s^3} \int_0^{\infty} (D_g - \overline{D}_g)^3 f(D_g) dD_g. \quad (2.61)$$

Os parâmetros  $A$  e  $R$  do modelo Panda-Lake são definidos por:

$$A = 1 + 3C_p^2 + Skew_p C_p^3, \quad (2.62)$$

$$R = \sum_{i=1}^M \frac{a_i \phi_i}{1 - \varepsilon_u}, \quad (2.63)$$

em que  $a_i$  se refere à área de superfície específica do tipo de cimento identificado pelo índice  $i$ . Para o fechamento do modelo, a tortuosidade da rocha consolidada pode ser definida como:

$$\tau_c = \tau_u(1 + C_p) \left( 1 + \left( \frac{C\phi_b}{\varepsilon_u - \phi_b} \right) \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{2\phi_f}{(\varepsilon_u - \phi_f)\varepsilon_u^{1/3}} \right) \right]^2, \quad (2.64)$$

em que  $C$  é uma constante chamada razão de aspecto, expressando a proporção entre a largura da base e a espessura do cristal de cimento, e  $\tau_u$  é a tortuosidade da rocha não consolidada.

## 2.4 Instabilidade de Saffman–Taylor

A instabilidade de Saffman-Taylor (ou *viscous fingering*) ocorre na interface entre dois fluidos com viscosidades distintas. O fluido menos viscoso forma dedos (mais conhecidos como *fingers*) com pontas arredondadas que penetram o fluido com maior viscosidade criando assim uma interface instável. Note que se fosse o contrário, ou seja, um fluido de maior viscosidade empurrando um fluido de menor viscosidade, a interface seria estável (SAFFMAN; TAYLOR, 1958). Os *fingers* podem ser intensificados ou amenizados por alguns parâmetros físicos, como o número de capilaridade e a razão das viscosidades dos fluidos envolvidos. Dessa forma, podendo modificar o formato da interface (GLAND; PISARENKO, 2003).

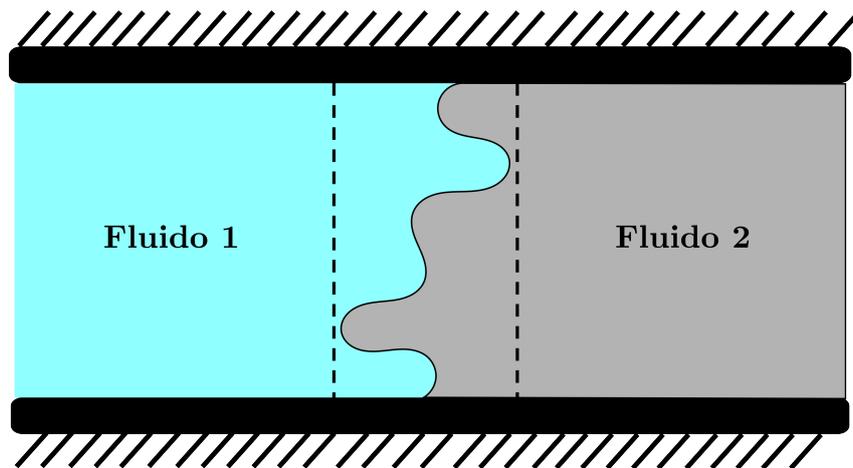


Figura 2.6 – Representação da instabilidade de Saffman-Taylor ocorrida na interface entre dois fluidos com viscosidades distintas.

Conforme descrito por Gland e Pisarenko (2003), a instabilidade de Saffman-Taylor resulta da interação entre dois mecanismos físicos distintos: desestabilização e estabilização. O primeiro se manifesta no crescimento das perturbações na interface, e é potencializado

pelo aumento do gradiente de pressão nas regiões próximas às áreas de injeção do fluido. Já o segundo mecanismo, responsável pela estabilização, advém do alisamento da interface, um fenômeno ocasionado pela tensão interfacial. A instabilidade na interface não é uma condição ininterrupta ao longo dos fluidos, ao contrário, ocorre apenas dentro de um espectro específico de comprimentos de onda de perturbação. Esta gama de comprimentos de onda é determinada principalmente por dois fatores: a razão entre as viscosidades dos dois fluidos envolvidos e a taxa de injeção do fluido (GLAND; PISARENKO, 2003).

A instabilidade de Saffman-Taylor, conforme discutido por Homsy (1987), pode resultar em padrões complexos. Uma das possíveis configurações ocorre quando um fluido de maior viscosidade é deslocado por um de menor viscosidade, sendo ambos plenamente miscíveis. Outra situação interessante é quando um fluido menos denso e menos viscoso infiltra-se em um fluido mais denso e mais viscoso, também miscível. Uma terceira configuração notável é observada quando um fluido newtoniano de baixa viscosidade é injetado em uma célula de Hele-Shaw contendo um fluido fortemente não newtoniano, porém miscível. É importante ressaltar que a instabilidade de Saffman-Taylor é um fenômeno altamente dinâmico, cujo comportamento é fortemente influenciado por uma diversidade de parâmetros e configurações do escoamento.

Saffman e Taylor (1958), investigaram o fenômeno de *fingers* viscosos em escoamentos bidimensionais em células de Hele-Shaw e constataram que, é possível chegar na formação de um *finger* único que ocupa cerca da metade da largura do canal, caracterizado por um  $\lambda_L$  de  $1/2$ , conforme mostrado na Figura 2.7. Este parâmetro  $\lambda_L$  é definido como a razão entre a largura do *finger* ( $L_f$ ) e a largura do canal ( $L_{canal}$ ) e varia em função do regime de escoamento. Em condições de *creeping flow* (baixas velocidades),  $\lambda_L$  tende a ser maior, podendo se aproximar ao limite superior de 1, o que corresponderia a uma situação de escoamento estagnado. Os autores também correlacionaram a largura do *finger* com o número de capilaridade,  $Ca = \mu u_c / \sigma$ , em que  $\sigma$  é o coeficiente de tensão interfacial. Isso evidenciou que para valores menores de  $Ca$ , em que o  $\lambda_L$  se aproxima de 1, o fluido menos viscoso tende a deslocar o mais viscoso completamente. À medida que  $Ca$  aumenta, o  $\lambda_L$  tende a  $1/2$ , indicando que o *finger* avança preenchendo metade do canal (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; ZACHAROUDIYOU, 2012). A Figura 2.7 mostra visualmente os comprimentos característicos dos *fingers*. Dela é possível observar dois dentre vários parâmetros utilizados para caracterizar os *fingers* que são representados pelas Equações (2.65) e (2.66):

$$\lambda_L = \frac{L_f}{L_{canal}}, \quad (2.65)$$

$$\lambda_C = \frac{C_f}{C_{canal}}. \quad (2.66)$$

É possível ainda caracterizar a topologia dos *fingers* pelo parâmetro de deformação de Taylor, dado por:

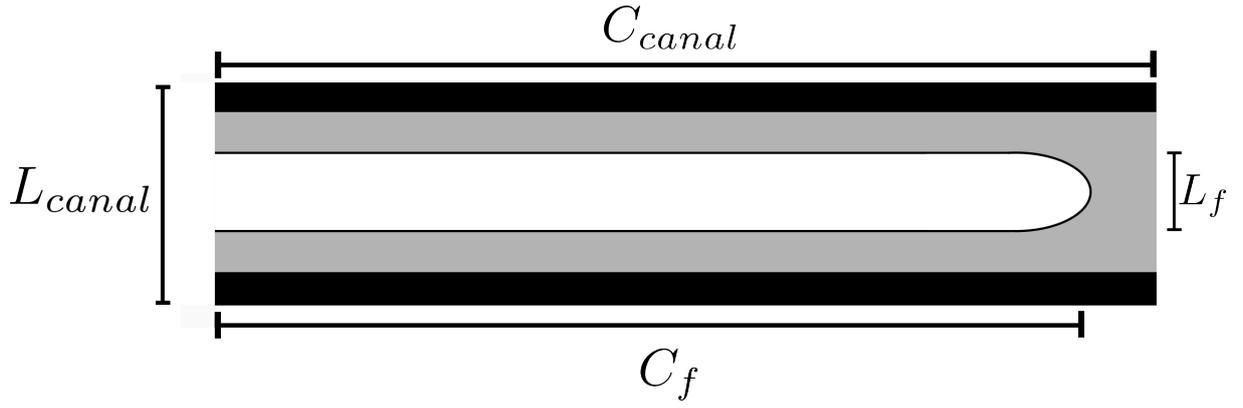


Figura 2.7 – Escoamento bifásico com a formação de um único *finger* avançando em uma célula de Hele-Shaw.

$$D_{Taylor} = \frac{C_f - L_f}{C_f + L_f} \quad (2.67)$$

Por fim, outra maneira de caracterizar ocorre quando há vários *fingers* na interface, utilizando a dimensão fractal (FEDER, 1988), dada pela Equação (2.68).

$$d_{frac} = \frac{\ln(N_f)}{\ln\left(\frac{C_{f_{med}}}{L_{f_{med}}}\right)}, \quad (2.68)$$

em que  $d_{frac}$  é a dimensão fractal (dimensão não inteira),  $L_{f_{med}}$  é a largura média dos *fingers*,  $C_{f_{med}}$  é o comprimento médio dos *fingers* e  $N_f$  é a quantidade de *fingers* presentes na interface.

Saffman e Taylor (1958) ainda calcularam o formato do *finger* em função de  $\lambda_L$ , que é dado pela Equação (2.69):

$$x' = \left( \frac{1 - \lambda_L}{\pi} \right) \ln \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi y'}{\lambda_L} \right) \right) \right], \quad (2.69)$$

em que  $x'$  e  $y'$  medem a distância da ponta do *finger* em unidades de metade da largura do canal ( $y' \in [-1, 1]$ ). Eles afirmaram que essa aproximação desvia dos valores reais, mas que para  $\lambda_L = 1/2$  foi obtido um resultado satisfatório. Perfis de  $\lambda_L$  calculados pela Equação (2.69) podem ser observados na Figura 2.8.

Um escoamento com dois fluidos incompressíveis e imiscíveis mostrando a instabilidade de Saffman-Taylor pode ser visualizado pela Figura 2.9. Ela apresenta uma configuração semelhante a da Figura 2.4. A interface entre esses dois fluidos varia com a posição e o tempo. Sendo representada pela Equação (2.70).

$$x_i = \zeta(z, t), \quad (2.70)$$

em que  $\zeta(z, t)$  é um pequeno distúrbio (SINZATO; CUNHA, 2019).

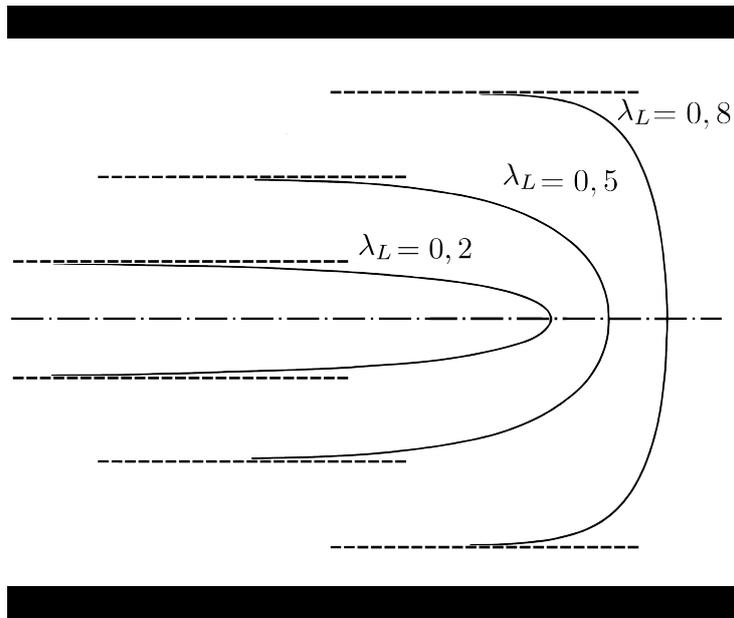


Figura 2.8 – Perfis de *fingers* para  $\lambda_L = 0, 2, 0, 5$  e  $0, 8$ . Adaptada de (SAFFMAN; TAYLOR, 1958).

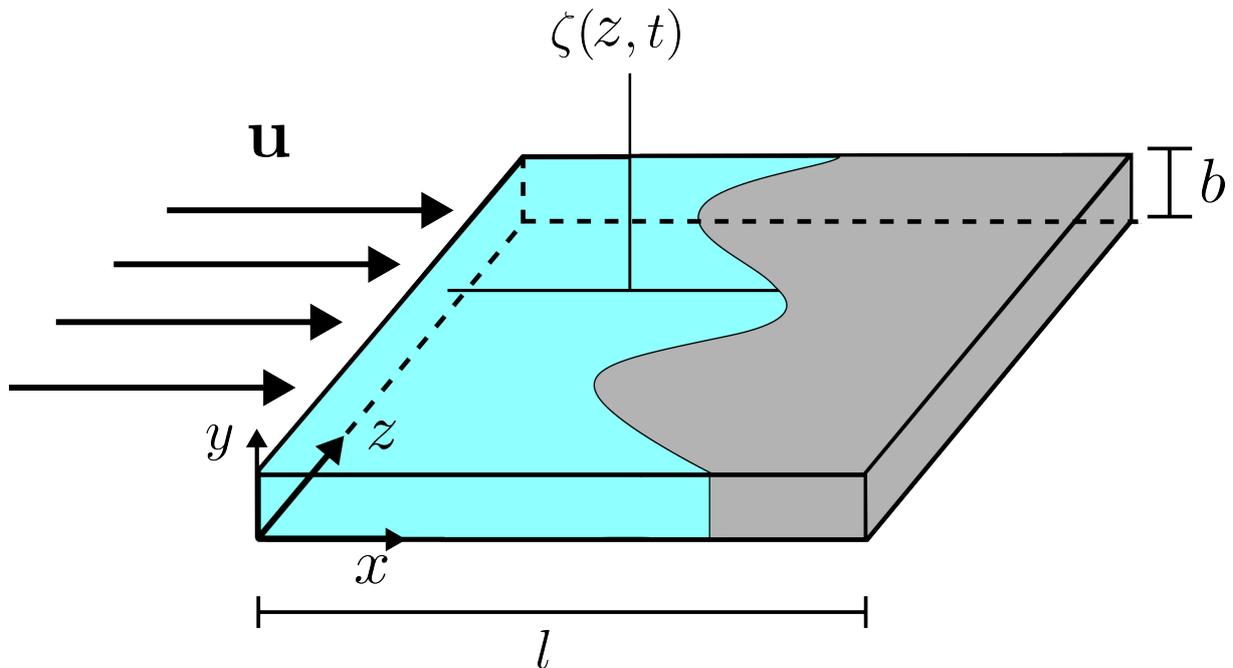


Figura 2.9 – Escoamento em uma célula de Hele-Shaw com dois fluidos imiscíveis.

## 2.5 Viscosidade de Parede

A viscosidade de parede representa a resistência ao escoamento de um fluido devido à fricção em uma superfície sólida. Ela pode ser interpretada como uma medida de como o fluido adere e interage com as paredes que delimitam o escoamento, influenciando o perfil de velocidade e a dissipação de energia no escoamento. A viscosidade de parede ( $\mu_w$ ) é representada pela Equação (2.71).

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}, \quad (2.71)$$

em que  $\tau_w$  e  $\dot{\gamma}_w$  são a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento avaliadas na parede. Note que o subscrito  $w$  indica que os termos estão sendo avaliados na parede. Por *scaling*, a viscosidade de parede adimensional pode ser encontrada pela seguinte relação:

$$\mu_w^* = f_w Re, \quad (2.72)$$

em que  $f_w$  é o fator de atrito. Uma análise mais detalhada sobre esse assunto é descrita no Apêndice A.5.

## 2.6 Escoamento Magnetohidrodinâmico

A Magnetohidrodinâmica (MHD) estuda a interação entre um campo magnético e um fluido eletricamente condutor, que deve ser não magnético. As equações governantes da MHD são derivadas das equações de Navier-Stokes com a força de Lorentz e as equações de Maxwell (DAVIDSON, 2016; CUNHA; INÁCIO, 2024).

### 2.6.1 Eletrodinâmica

No campo da eletrodinâmica, o foco está no estudo do movimento das cargas elétricas. Quando se considera escoamentos com velocidades muito menores do que as velocidades típicas de elétrons em condutores, isto é, em um cenário magnetohidrodinâmico não relativístico, é possível simplificar as equações da eletrodinâmica ao negligenciar certos termos (INÁCIO, 2022). As equações da eletrodinâmica e suas simplificações serão apresentadas a seguir.

#### 2.6.1.1 Força de Lorentz

Um corpo condutor em movimento, deslocando-se a uma velocidade  $\mathbf{u}$ , experimenta a influência de diversas forças quando submetido a um campo eletromagnético:

$$\mathbf{F}_L = q_e \mathbf{E}_e + q_e \mathbf{E}_i + q_e (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.73)$$

A força total atuando em uma carga elétrica em movimento é a soma de três componentes principais. A força eletrostática ou força de Coulomb representada por  $q_e \mathbf{E}_e$ , em que  $\mathbf{E}_e$  é o campo eletrostático e origina-se da mútua interação (repulsão ou atração) entre cargas elétricas. A força exercida na carga devido à presença de um campo magnético, dado por  $q_e \mathbf{E}_i$ , em que  $\mathbf{E}_i$  representa o campo elétrico induzido devido a variação do campo magnético. A força de Lorentz, que surge do movimento das cargas através de um

campo magnético, é descrita por  $q_e(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ . Neste contexto,  $q_e$  denota a carga elétrica,  $\mathbf{u}$  a velocidade da carga, e  $\mathbf{B}$  o campo magnético (também chamado de campo de densidade de fluxo magnético). Define-se o campo elétrico total  $\mathbf{E}$  como a soma do campo elétrico induzido e do campo eletrostático:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_i$ . Dessa forma:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.74)$$

No contexto MHD, o principal interesse reside na força aplicada a um volume específico de fluido, ao invés do foco em cargas individuais (DAVIDSON, 2016; AGUILAR, 2022). Portanto, o somatório da Equação (2.74) ao longo de todo o volume resulta em:

$$\sum q = \rho_e, \quad (2.75)$$

$$\sum q\mathbf{u} = \mathbf{J}. \quad (2.76)$$

Isso implica que a acumulação de cargas dentro do volume nos proporciona a densidade de carga elétrica  $\rho_e$ , enquanto a somatória dos produtos da carga pela sua velocidade resulta na densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}$ . Dessa forma, a expressão para força de Lorentz por unidade de volume é dada por:

$$\mathbf{f}_L = \rho_e\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.77)$$

Dentro do domínio da magnetohidrodinâmica, a densidade de carga elétrica, tende a ser baixa no interior do condutor, levando a um campo elétrico associado, que é relativamente fraco. Como consequência, o termo  $\rho_e\mathbf{E}$  pode ser considerado desprezível frente à contribuição magnética (INÁCIO, 2022). Assim, a equação é reduzida a:

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.78)$$

### 2.6.1.2 Lei de Ohm

O campo de densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  caracteriza o fluxo de carga elétrica em um meio contínuo, sendo profundamente influenciado pelas propriedades materiais e estrutura molecular do meio. Para descrever o comportamento das cargas elétricas no meio,  $\mathbf{J}$  deve ser definido por uma relação constitutiva que leve em conta a natureza específica do material (INÁCIO, 2022). A movimentação das cargas, e conseqüentemente a existência de uma corrente elétrica, depende da presença de uma força motriz, geralmente a força eletromagnética. Dessa forma, é possível estabelecer a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{F}_L. \quad (2.79)$$

Experimentalmente, a Equação (2.79) é satisfeita para a maioria dos materiais condutores. Alternativamente, sabendo que campos eletromagnéticos podem ser compreendidos como

manifestações relativísticas dos campos elétricos, ao utilizar um referencial onde o condutor está em repouso (BARUT, 1980; INÁCIO, 2022), resulta na seguinte relação:

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{E}_r, \quad (2.80)$$

em que  $\mathbf{E}_r$  é proporcional a força eletromagnética e representa o campo elétrico em um sistema de referência no qual o condutor permanece estático. Esta relação pode ser formalizada através de um tensor de segunda ordem, o tensor de condutividade elétrica  $\boldsymbol{\sigma}_e$ , resultando na lei de Ohm na sua forma mais geral:

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \mathbf{E}_r. \quad (2.81)$$

Para materiais homogêneos e isotrópicos,  $\boldsymbol{\sigma}_e$  é reduzido a uma constante escalar, simplificando a relação para  $\mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E}_r$ , que é a lei de Ohm. Ao considerar fluidos eletricamente condutores em movimento, realiza-se uma transformação de Lorentz para um referencial que se move com a velocidade local do fluido (INÁCIO, 2022). Sob a condição de que  $|\mathbf{u}| \ll c$  (velocidade da luz), a lei de Ohm adaptada para um fluido eletricamente condutor toma a forma:

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.82)$$

### 2.6.1.3 Lei de Ampère

A Lei de Ampère estabelece a relação entre a corrente elétrica e o campo magnético induzido. Quando uma corrente atravessa uma superfície  $S$ , ela gera um campo magnético que circunda essa área (INÁCIO, 2022; GRIFFITHS, 2017). Definindo  $C$  como o contorno fechado de  $S$ , tem-se a expressão integral da Lei de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (2.83)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. A aplicação do teorema de Stokes transforma essa relação integral na seguinte expressão diferencial da Lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.84)$$

### 2.6.1.4 Equações de Maxwell

As Equações de Maxwell formam a base teórica para entender a dinâmica dos campos eletromagnéticos. Elas são representadas por um conjunto de quatro equações fundamentais: a Lei de Gauss, a solenoidalidade do campo magnético, a Lei de Faraday e a Lei de Ampère-Maxwell.

A Lei de Gauss elétrica é a primeira equação de Maxwell, representada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.85)$$

em que  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo. A Equação (2.85) pode ser integrada sobre um volume  $V$ , e utilizando-se do teorema da divergência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV \\ &= \frac{Q_e}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

em que  $Q_e$  é a carga elétrica total contida dentro do volume  $V$ .

Através da aplicação do teorema da divergência, é possível transformar a integral volumétrica em uma integral de superfície, resultando na forma integral da lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.87)$$

com  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  representando o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada  $S$ . Esta relação fundamental estabelece que o fluxo elétrico é proporcional à carga elétrica envolvida pela superfície.

A Lei de Gauss do Magnetismo é a segunda equação de Maxwell que surge devido ao caráter solenoidal do campo de densidade de fluxo magnético. E pode ser representada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.88)$$

Essa equação informa que o campo magnético é solenoidal por natureza, indicando que suas linhas de campo são continuamente fechadas sem início ou término definidos. Diferentemente das linhas de campo elétrico que emanam ou convergem para cargas elétricas, as linhas de campo magnético formam laços fechados, reiterando a ausência de monopólos magnéticos na natureza (AGUILAR, 2022). Para observar essa propriedade, aplica-se o teorema de Gauss ao campo magnético, integrando a Equação (2.88) sobre um volume  $V$  arbitrário, fechado por uma superfície  $S$ , resultando em:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.89)$$

A Equação (2.89) confirma que o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é zero, em concordância a proposição de que não existem fontes ou sumidouros isolados de campo magnético, sendo essa uma distinção fundamental quando comparada com o comportamento do campo elétrico cujo fluxo é proporcional à carga elétrica total contida pela superfície em consideração (INÁCIO, 2022; AGUILAR, 2022).

A terceira equação de Maxwell, também conhecida como Lei de Faraday descreve como variações temporais no campo magnético resultam na indução de um campo elétrico. A forma diferencial dessa lei é definida por:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.90)$$

No regime eletrostático, em que os campos não variam com o tempo, a lei de Faraday pode ser simplificada para:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.91)$$

Isso indica que o campo eletrostático é irrotacional, sendo caracterizado como conservativo com integrais de linha independentes do caminho percorrido (AGUILAR, 2022). Em cenários dinâmicos, em que os campos variam no tempo, surge a não conservatividade dos campos, em que é necessário definir uma força eletromotriz em um circuito fechado:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iota, \quad (2.92)$$

em que  $l$  é o comprimento de arco. A variação do campo magnético induz uma força eletromotriz ( $\iota$ ) em um circuito fechado  $c$ , definida por:

$$\iota = -\frac{d\Omega}{dt}, \quad (2.93)$$

em que  $\Omega$  é o fluxo magnético, determinado por:

$$\Omega = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.94)$$

Combinando as expressões pertinentes, obtém-se a forma integral da lei de Faraday:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.95)$$

Esta expressão integral revela que a força eletromotriz induzida em um circuito fechado é diretamente proporcional e oposta à taxa de variação do fluxo magnético que o atravessa, fundamentando assim a geração de corrente elétrica por indução eletromagnética (AGUILAR, 2022).

Finalmente, a quarta equação de Maxwell, mais comumente chamada de Lei de Ampère-Maxwell descreve como as correntes elétricas, bem como variações temporais em campos elétricos, contribuem para a geração de campos magnéticos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (2.96)$$

Integrando a equação (2.96) em uma superfície  $S$  e utilizando o teorema de Stokes, tem-se a forma integral da Lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.97)$$

Em um contexto magnetohidrodinâmico, a Equação (2.96) pode ser simplificada para:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.98)$$

Isso ocorre devido ao tempo de relaxação da carga ser muito pequeno. Essa afirmação pode ser visualizada por meio de uma análise de escala (INÁCIO, 2022):

$$\left| \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}|. \quad (2.99)$$

Dessa forma, esse conjunto de equações forma os fundamentos da teoria do eletromagnetismo.

## 2.6.2 Equações MHD

Será analisado um escoamento MHD incompressível e laminar sob a influência de um campo magnético, representado por:

$$\mathbf{B} = B_x(y)\hat{\mathbf{e}}_x + B_0\hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.100)$$

em que  $B_x$  denota a componente induzida do campo magnético, e  $B_0$  é a componente transversal constante do campo magnético externo aplicado. Esse escoamento pode ser visualizado pela Figura 2.10.

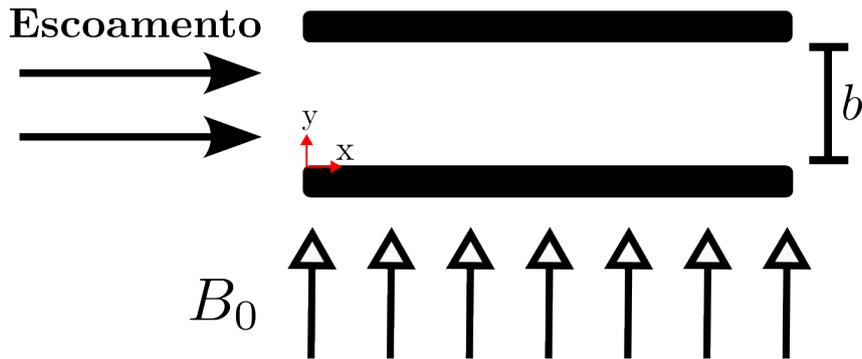


Figura 2.10 – Representação de um escoamento MHD típico.

A influência magnética no escoamento, originada da interação entre o campo e o escoamento de um fluido eletricamente condutor, é incorporada nas equações de Navier-Stokes por meio de um termo fonte adicional:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.101)$$

Neste contexto, o termo  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  representa o efeito do arrasto eletromagnético, conforme discutido em Tassone (2016). A contribuição do termo inercial é desconsiderada devido à teoria de lubrificação. Dessa forma, a Equação (2.101) se transforma em:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.102)$$

respeitando a condição de incompressibilidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.103)$$

Para completar o conjunto de equações da MHD, inclui-se a equação de transporte para a densidade de fluxo magnético, uma relação evolutiva para  $\mathbf{B}$ . Essa equação em específico será desenvolvida em sua forma mais geral e simplificada ao final do desenvolvimento. Dito isso, a equação de densidade de fluxo magnético pode ser desenvolvida. Inicialmente, utiliza-se a Lei de Faraday, seguida pela substituição de  $\mathbf{E}$  usando a lei de Ohm e de  $\mathbf{J}$  usando a lei de Ampère.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_e} \nabla \times \mathbf{B} \right), \quad (2.104)$$

podendo ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.105)$$

em que o coeficiente de difusão magnética é  $\nu_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}$ . Essa equação é utilizada para calcular a distribuição de campo magnético que deve satisfazer a lei de Gauss para o magnetismo. Note ainda que essa equação faz o acoplamento não linear entre campo magnético e velocidade (TASSONE, 2016; INÁCIO, 2022). Aplicando a identidade vetorial ao termo  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ <sup>1</sup> e considerando a solenoidade de  $\mathbf{B}$ , é obtido que:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.106)$$

Finalmente, simplificando essa equação para o contexto de um escoamento incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), tem-se que:

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.107)$$

---

<sup>1</sup>  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

## 2.7 Escoamentos Multifásicos

### 2.7.1 *Volume of Fluid (VOF) Method*

O método de volume de fluidos (mais conhecido como Volume of Fluid (VOF)) é amplamente utilizado em simulações de escoamentos multifásicos. Neste método, uma função específica, denominada função de fase ( $\gamma$ ) é designada para sinalizar uma de três condições possíveis: se uma célula da malha de simulação for preenchida inteiramente por um fluido, esta é atribuída o valor de 1. Por outro lado, se estiver ocupada exclusivamente por um segundo fluido, lhe é atribuído o valor 0. Em casos onde a célula apresenta uma combinação dos dois fluidos (região da interface), a função assume um valor intermediário entre 0 e 1. Esse método foi proposto por Hirt e Nichols (1981) e tem várias possibilidades de implementação. Uma descrição do método VOF utilizado no OpenFOAM será apresentada abaixo (DAMIAN, 2012; SALAJEGHE et al., 2023).

Serão analisados dois fluidos imiscíveis e incompressíveis. Dessa forma, as equações governantes para as duas fases serão as equações da continuidade (2.108) e do momento (2.109), bem como a equação da função indicadora de fase (2.110), representando a fração de volume de uma fase. Essas equações são, respectivamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{f}_b, \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\gamma) + \nabla \cdot [\mathbf{u}_r\gamma(1 - \gamma)] = 0. \quad (2.110)$$

Nas equações acima,  $\mathbf{f}_b$  representa as forças de corpo por unidade de massa e  $\mathbf{T}$  é o tensor das tensões. A diferença de velocidade entre as duas fases é descrita por  $\mathbf{u}_r$  (DAMIAN, 2012). Mais especificamente,  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  designa a velocidade relativa entre a fase 1, denotada pelo subscrito 1, e a fase 2, representada pelo subscrito 2.

O termo de compressão (último termo do lado esquerdo da Equação (2.110)) não existe no método VOF convencional. Porém, ele é adicionado na formulação do OpenFoam para fazer uma compressão adicional na interface, para que ela seja mais nítida. Em simulações numéricas, o termo compressivo desempenha um papel fundamental devido aos erros associados à difusão numérica, os quais surgem durante a discretização dos termos convectivos. Entretanto, por meio da discretização do termo de compressão, é possível controlar e minimizar os efeitos da difusão numérica, resultando em uma representação mais precisa da interface (DAMIAN, 2012). Quando trata-se de dois líquidos imiscíveis, é possível considerá-los como um único fluido efetivo ao longo de todo o domínio. As propriedades físicas desses fluidos são calculadas como médias ponderadas com base na

fração volumétrica de cada um. Em suas respectivas regiões ocupadas, estas propriedades correspondem exatamente às dos líquidos individuais e, contudo, variam apenas na interface entre eles (DAMIAN, 2012). Dessa forma, baseado no campo de  $\gamma$ , a massa específica, a viscosidade e o campo de velocidade do domínio são calculadas, respectivamente como:

$$\rho = \rho_1\gamma + \rho_2(1 - \gamma), \quad (2.111)$$

$$\mu = \mu_1\gamma + \mu_2(1 - \gamma), \quad (2.112)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1\gamma + \mathbf{u}_2(1 - \gamma). \quad (2.113)$$

Agora iremos usar o Modelo de Superfície Contínua (MSC), para considerar os efeitos da tensão na interface dos dois fluidos. Esse modelo permite tratar a tensão superficial como uma força por unidade de volume que atua ao longo da interface fluida, ao invés de simplesmente como uma força superficial. A presença da tensão superficial resulta em um gradiente de pressão adicional, modelado matematicamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma\kappa\nabla\gamma, \quad (2.114)$$

em que  $\kappa$  é a curvatura da superfície livre que é dada por:

$$\kappa = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla\gamma}{|\nabla\gamma|} \right), \quad (2.115)$$

em que  $\left( \frac{\nabla\gamma}{|\nabla\gamma|} \right) = \hat{\mathbf{n}}$ . Para o fechamento das equações, ainda é necessário definir o tensor de tensões. Como serão analisados dois fluidos newtonianos, o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  é dado por:

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{S}_d. \quad (2.116)$$

Para um fluido incompressível, o tensor taxa de deformação é expresso por:

$$\mathbf{S}_d = \frac{1}{2} \left( \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \right). \quad (2.117)$$

Logo:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot (\mu\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u}) \cdot \nabla\mu. \quad (2.118)$$

Dessa forma, inserindo as Equações (2.118) e (2.114) na Equação (2.109), resulta em:

$$\rho \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \mu\nabla^2\mathbf{u} = -\nabla p + \rho\sigma\kappa\nabla\gamma. \quad (2.119)$$

Note que o segundo termo da Equação (2.118) não foi considerado, pois, como serão utilizados dois fluidos newtonianos, não haverá variação espacial de viscosidade nos fluidos. Observe ainda que, no contexto em que a aproximação de lubrificação é válida, o termo inercial é desprezado e o termo viscoso é considerado.

# 3 Escoamento de um Fluido Eletricamente Condutor em um Micro-canal com Parede Porosa Sujeito à Ação de um Campo Magnético: Soluções Exatas e Assintóticas

Este capítulo apresenta um estudo realizado durante o desenvolvimento desse trabalho, já publicado nos anais do congresso FFHMT 2024 (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024a) e aceito para publicação (no prelo) na revista JFFHMT (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024b).

Nesta seção, será apresentada a formulação de um escoamento MHD em um microcanal com uma parede superior impenetrável e uma parede inferior penetrável (porosa). As condições referem-se à condição de contorno de não deslizamento na parede superior, à velocidade de deslizamento na interface porosa e à condição de contorno de Beavers-Joseph (BJBC) na parede inferior, que é porosa (BEAVERS; JOSEPH, 1967). O fluido está sob a influência de um campo magnético transversal e uniforme. Vale ressaltar que o escoamento laminar em um canal com parede porosa sem efeitos MHD foi estudado experimentalmente por Beavers e Joseph (1967) e analiticamente usando uma extensão da lei de Darcy com um termo quadrático na velocidade por Cunha (1991).

O problema descrito aqui pode ser visualizado na Figura 3.1. A pequena distância entre as paredes do microcanal é  $b$ , e  $B_0$  é o campo magnético externo uniforme e transversal aplicado ao escoamento, (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024a). Como já mencionado anteriormente, a densidade de fluxo magnético é dada por:

$$\mathbf{B} = B_x(y)\hat{\mathbf{e}}_x + B_0\hat{\mathbf{e}}_y. \quad (3.1)$$

A Figura 3.1 representa o problema descrito.

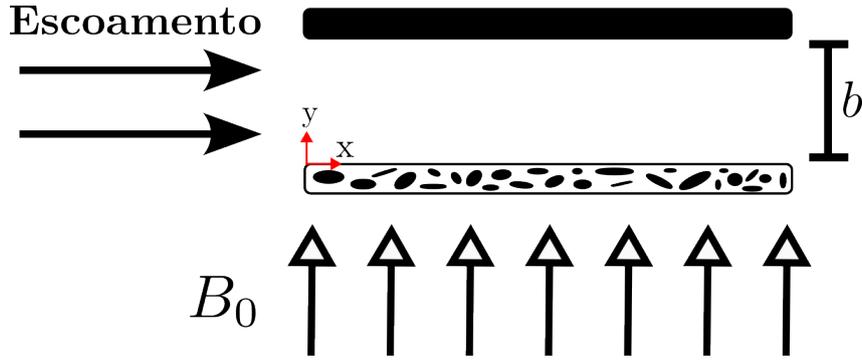


Figura 3.1 – Representação do escoamento MHD analisado.

Para esse problema, as escalas típicas usadas para a adimensionalização das equações são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades típicas do escoamento e escalas usadas para adimensionalizar as equações governantes.

Propriedade	Escala típica
Comprimento	$b$
Pressão	$\mu u_m / b$
Velocidade	$u_m$
Campo elétrico	$u_m B_0$
Densidade de fluxo magnético	$B_0$

Portanto, as quantidades adimensionais são dadas por:

$$y^* = \frac{y}{b}, \quad u^* = \frac{u}{u_m}, \quad p^* = \frac{pb}{\eta u_m}, \quad E_0^* = \frac{E_0}{u_m B_0}, \quad B_x^* = \frac{B_x}{B_0}. \quad (3.2)$$

O escoamento descrito será analisado sob três abordagens distintas: (1) Em uma perspectiva puramente hidrodinâmica, ignorando completamente a influência do campo magnético. (2) Conforme já descrito, será examinado dentro do contexto da magnetohidrodinâmica. (3) Será estudado através de um método de expansões assintóticas regulares, aplicando esta técnica às equações, é possível separar os efeitos hidrodinâmicos dos magnéticos.

### 3.1 Caso Hidrodinâmico

Será analisado agora o caso (1), ou seja, o escoamento descrito sem a aplicação do campo magnético externo.

### 3.1.1 Equações Governantes

O problema descrito utiliza as equações de Navier-Stokes incompressíveis adaptadas para a condição de lubrificação. Isso implica em um escoamento unidirecional livre de inércia. As equações governantes são:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.4)$$

A Equação (3.3) é uma forma simplificada das equações de Navier-Stokes (NS) para escoamento puramente viscoso. Consideram-se condições de estado estacionário, com viscosidade constante e sem efeitos de forças de corpo, uma vez que o efeito líquido da influência hidrostática da gravidade está incluído no termo de pressão. Dessa forma, é possível escrever as equações de NS nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que são, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0, \quad \frac{du}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}(u_{ih} - u_m), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = b, \quad u = 0. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Note que para calcular  $u_{ih}$ , utiliza-se a seguinte condição de contorno:

$$y = 0, \quad u = u_{ih}, \quad (3.10)$$

em que  $u_{ih}$  é a velocidade de deslizamento na interface porosa, a quantidade adimensional  $\varepsilon$  é chamada de porosidade do meio poroso (igual ao volume de poros/volume total do meio poroso). O termo  $\sigma$ , também adimensional, é representado por  $\sigma = b/\sqrt{k}$  e  $u_m$  é a velocidade de filme no meio poroso, que para escoamentos em números de Reynolds baixos em meio porosos é calculada pela lei de Darcy:

$$u_m = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.11)$$

Dessa forma, a solução para esse escoamento puramente hidrodinâmico é dada por:

$$u(y) = u_{ih} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} y \right) + \frac{1}{2\mu} \left( y^2 + 2\varepsilon\sqrt{k}y \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) ilustra a relação da velocidade do escoamento na direção  $x$  em função de  $y$ . A velocidade de deslizamento na interface porosa  $u_{ih}$  é obtida através da condição de contorno expressa na Equação (3.10).

$$u_{ih} = -\frac{k}{2\mu} \left( \frac{\sigma^2 + 2\varepsilon\sigma}{1 + \varepsilon\sigma} \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Na forma adimensional, a Equação (3.12), resulta em:

$$u^*(y^*) = u_{ih}^*(1 + \varepsilon\sigma y^*) - \frac{1}{2} [y^{*2}\sigma^2 + 2\varepsilon\sigma y^*], \quad (3.14)$$

em que  $u_{ih}^*$  em sua forma adimensional é dado por:

$$u_{ih}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2 + 2\varepsilon\sigma}{1 + \varepsilon\sigma} \right). \quad (3.15)$$

## 3.2 Caso Magnetohidrodinâmico

Para o caso (2), será analisado o escoamento apresentado na Figura 3.1. A densidade de corrente é avaliada pela lei de Ohm (DAVIDSON, 2016):

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.16)$$

Considerando a configuração do escoamento analisado, observa-se que as componentes de velocidade nas direções  $y$  e  $z$  são nulas. Além disso, verifica-se a ausência de campo magnético na direção  $z$ . Devido a isso a Equação (3.16), pode ser expressa da seguinte forma:

$$J_z = \sigma_e (E_z + (uB_0)). \quad (3.17)$$

Deve-se observar que, conforme estabelecido pela lei de Faraday, quando aplicada a um escoamento em regime permanente, verifica-se que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

Logo, a Equação (3.18) resulta que  $E_z$  é um escalar ( $E_0$ ) para qualquer  $y$ . Consequentemente:

$$J_z = \sigma_e (E_0 + (uB_0)). \quad (3.19)$$

Além disso, a densidade de corrente também pode ser expressa usando a lei de Ampère com  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , que resulta em:

$$J_z = (\nabla \times \mathbf{H})_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy}. \quad (3.20)$$

Note que no contexto da MHD, o vetor de magnetização é considerado nulo porque ele está associado a materiais não condutores. Agora, combinando a Equação (3.19) e a Equação (3.20), define-se a derivada de  $B_x$  em relação a  $y$  como sendo:

$$\frac{dB_x}{dy} = \sigma_e \mu_0 E_0 + \sigma_e \mu_0 u B_0. \quad (3.21)$$

Dessa forma, calcula-se a força de Lorentz a partir da lei de Ohm (Equação (3.19)) e da Equação (3.1), resultando em:

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma_e (E_0 + u B_0) (-B_0 \hat{\mathbf{e}}_x + B_x \hat{\mathbf{e}}_y). \quad (3.22)$$

É possível substituir a Equação (3.22) na equação de Navier-Stokes com efeitos magnéticos e obter:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \sigma_e (E_0 + u B_0) (-B_0 \hat{\mathbf{e}}_x + B_x \hat{\mathbf{e}}_y) = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Em termos das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a Equação (3.23) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - \sigma_e E_0 B_0 - \sigma_e u B_0^2 = 0, & (3.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma_e E_0 B_x + \sigma_e u B_0 B_x = 0, & (3.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. & (3.26) \end{cases}$$

Para completar a formulação do escoamento MHD, é necessário incluir no grupo das equações governantes a equação de indução magnética (ou transporte magnético) dada por (DAVIDSON, 2016):

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0 \sigma_e} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.27)$$

em que o coeficiente de difusão magnética é dado por  $\nu_m = 1/(\mu_0 \sigma_e)$ . Note que, sob a condição de escoamento unidirecional, o transporte do campo de indução magnética por convecção é nulo, ou seja:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left( u \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

Por outro lado, o *stretching* da indução magnética pode ser calculado da seguinte forma:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) u \hat{\mathbf{e}}_x = B_0 \frac{du}{dy} \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (3.29)$$

Quando aplicadas estas duas condições, a Equação (3.27) pode ser simplificada para:

$$B_0 \frac{du}{dy} + \nu_m \frac{d^2 B_x}{dy^2} = 0. \quad (3.30)$$

As equações governantes (3.24), (3.25) e (3.30) são agora reformuladas em termos adimensionais (com as escalas apresentadas na Tabela 3), respectivamente conforme descrito a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 + \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - Ha^2 E_0^* - Ha^2 u^* = 0, \\ -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Ha^2 B_x^* (E_0^* + u^*) = 0, \\ \frac{d^2 B_x^*}{dy^{*2}} + Re_m \frac{du^*}{dy^*} = 0. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 + \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - Ha^2 E_0^* - Ha^2 u^* = 0, \\ -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Ha^2 B_x^* (E_0^* + u^*) = 0, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 B_x^*}{dy^{*2}} + Re_m \frac{du^*}{dy^*} = 0. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = 0, \quad \frac{du^*}{dy^*} = \varepsilon \sigma (u_i - 1), \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = 0, \quad B_x^* = 0, \quad u^* = u_i^*, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = 1, \quad u^* = 0, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = 1, \quad B_x^* = 0, \end{array} \right. \quad (3.37)$$

note que  $u^*$  está intrinsecamente ligado a  $B_x^*$ . Dessa forma, assim como a velocidade é nula nas paredes do escoamento, a densidade de fluxo magnético induzido também é nula.

As soluções exatas das Equações (3.31), (3.32) e (3.33) foram obtidas usando o recurso de resolução simbólica para equações diferenciais ordinárias do *software* MATLAB. Dessa forma, o campo de velocidade, a densidade de fluxo magnético, o campo de pressão, a vazão e o campo elétrico induzido são determinadas e apresentadas no Apêndice A.6. No entanto, essas equações não são apresentadas neste trabalho, pois são muito longas e tediosas, mesmo para serem incluídas como Apêndice no trabalho. Faremos as grandes expressões das soluções exatas disponíveis aos leitores como material suplementar. Contudo, em substituição às expressões exatas, fornecemos uma solução assintótica suficiente para explorar em detalhes o problema de escoamento aqui examinado. Embora mais simples, as soluções assintóticas oferecem as mesmas percepções físicas do escoamento para  $Ha < 1$ .

### 3.2.1 Solução das Equações Governantes

Nesta seção, será descrito o método para determinar as principais quantidades do escoamento MHD. Este passo será utilizado na seção 3.3, em que é apresentada uma solução assintótica regular para encontrar expressões  $\mathcal{O}(Ha^2)$  para as quantidades do escoamento.

### 3.2.1.1 Campo de Velocidade e Vazão

O campo de velocidade do escoamento pode ser determinado resolvendo a Equação (3.31), que é uma equação diferencial ordinária. Note que as condições de contorno serão aplicadas na solução, de maneira análoga ao caso hidrodinâmico. Integrando o campo de velocidades, é possível obter a vazão adimensional no canal, conforme descrito pela equação:

$$Q^* = \int_0^1 u^* dy^*. \quad (3.38)$$

### 3.2.2 Densidade de Fluxo Magnético Induzido

A densidade de fluxo magnético induzido pode ser determinada realizando duas integrações em relação a  $y$  na Equação (3.33), da seguinte forma:

$$B_x^*(y^*) = -Re_m \int u^* dy^* + C_1 y^* + C_2. \quad (3.39)$$

Para calcular as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ , é necessário aplicar duas condições de contorno magnéticas específicas do problema. Estas são definidas por  $B_x^*(y^* = 0) = B_x^*(y^* = 1) = 0$ .

### 3.2.3 Campo de Pressão

O gradiente de pressão é constante ao longo do eixo  $x$  e é dado por:

$$\frac{dp^*}{dx^*} = -\sigma^2. \quad (3.40)$$

Após integrar a Equação (3.40), obtém-se:

$$p^*(x^*, y^*) = -\sigma^2 x^* + f(y^*), \quad (3.41)$$

em que  $f(y^*)$  é uma função resultante da integração em relação a  $x$ . Dessa forma, tem-se que:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \frac{df(y^*)}{dy^*}. \quad (3.42)$$

Agora, a substituição da Equação (3.32) na Equação (3.42), resulta em:

$$\frac{df(y^*)}{dy^*} = Ha^2 B_x^* (E_0^* + u^*). \quad (3.43)$$

Dessa forma, o campo de pressão é encontrado resolvendo a Equação (3.43), resultando no  $f(y^*)$ . Em seguida, substitui-se na Equação (3.41).

### 3.2.3.1 Campo Elétrico

Para determinar o campo elétrico, integra-se a Equação (3.30):

$$B_0 u(y) + \nu_m \frac{\partial B_x}{\partial y} = C_3, \quad (3.44)$$

em que  $C_3$  representa uma constante de integração. Substituindo a Equação (3.21) na Equação (3.44), obtém-se:

$$B_0 u(y) + \nu_m \sigma_e \mu_0 E_0 + \sigma_e \mu_0 u(y) B_0 = C_3. \quad (3.45)$$

Aplicando as condições de contorno  $y = b \Rightarrow u = 0$ , conclui-se que  $E_0 = C_3$ . Assim, a Equação (3.44) pode ser reescrita como:

$$B_0 u(y) + \nu_m \frac{\partial B_x}{\partial y} = E_0. \quad (3.46)$$

Ao adimensionalizar a Equação (3.46) e avaliá-la na parede, é possível determinar  $E_0$  devido a ele ser uma constante. Assim, ao determinar  $E_0$  mediante a avaliação da equação na parede, é possível eliminar o perfil de velocidade. Isso leva à formulação da equação para o campo elétrico adimensional, que é dada por:

$$E_0^* = \frac{1}{Re_m} \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=1}. \quad (3.47)$$

## 3.3 Solução Assintótica

A solução exata para a Equação (3.31), resolvida usando o software MATLAB, possui muitos termos, além de tornar inviável qualquer análise física do fenômeno. Uma análise assintótica do escoamento torna-se útil para dividir a solução do problema em duas contribuições principais: uma puramente hidrodinâmica  $\mathcal{O}(1)$ , que é a contribuição de ordem principal, e uma correção pelos efeitos magnéticos como  $Ha \ll 1$ , especificamente na ordem de  $\mathcal{O}(0.1)$  ou menos. Tal abordagem de solução tem a vantagem de dividir as soluções como a soma das duas contribuições (efeito hidrodinâmico e magnético) e, conseqüentemente, a interpretação do mecanismo físico envolvido no escoamento pode ser melhor compreendida e discutida (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024a). Usando o método de perturbações regulares descrito em Hinch (1991), Logan (2013), o campo de velocidade pode ser expresso como:

$$u_x^*(y^*) = u_0^*(y^*) + \Lambda u_1^*(y^*) + \mathcal{O}(\Lambda^2). \quad (3.48)$$

Neste problema, o pequeno parâmetro  $\Lambda = Ha^2$ . Substituindo a Equação (3.48) na Equação (3.31) e, após algumas manipulações algébricas, encontra-se o seguinte sistema de EDO para diferentes ordens de  $\Lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_0^*}{dy^{*2}} = -\sigma^2, & \mathcal{O}(\Lambda^0), \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1^*}{dy^{*2}} - u_0^* = E_0^*, & \mathcal{O}(\Lambda^1), \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_2^*}{dy^{*2}} = u_1^*, & \mathcal{O}(\Lambda^2). \end{cases} \quad (3.51)$$

Se a solução do campo de velocidade for dada pela expansão assintótica, deve-se notar que a velocidade na interface com o meio poroso também será uma série em termos de ordens de  $\Lambda$ :

$$u^*(0) = u_i^* = u_{i0}^* + \Lambda u_{i1}^* + \mathcal{O}(\Lambda^2) \quad (3.52)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} y^* = 0, & \frac{du_0^*(0)}{dy^*} = \varepsilon\sigma(u_{i0} - 1), & \frac{du_1^*(0)}{dy^*} = \varepsilon\sigma u_{i1}, \dots \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{cases} y^* = 0, & u_0^* = u_{i0}, & u_1^* = u_{i1}, \dots \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} y^* = 1, & u_0^* = u_1^* = u_2^* = \dots = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Nota-se que a Equação (3.49) constitui o problema hidrodinâmico, já que  $-\sigma^2$  é definido como o gradiente de pressão, como expressado na Equação (3.40). Por outro lado, a Equação (3.50) e a Equação (3.51) são a contribuição MHD. Assim, finalmente, pode-se escrever o campo de velocidades como:

$$u_x^*(y^*) = u_0^*(y^*) + Ha^2 u_1^*(y^*) + \mathcal{O}(Ha^4), \quad (3.56)$$

em que,  $u_0^*$  é dado pela Equação (3.14) e  $u_1^*$  é dado por:

$$u_1^*(y^*) = \frac{E_0^*}{2}(y^{*2} - 1) + u_{ih}^* \left[ \frac{1}{2}(y^{*2} - 1) + \frac{\varepsilon\sigma}{6}(y^{*3} - 1) \right] + \frac{\varepsilon\sigma}{6}(1 - y^{*3}) + \frac{\sigma^2}{24}(1 - y^{*4}). \quad (3.57)$$

Agora, se  $Ha < 1$ , isso significa que  $\Lambda \ll 1$  (pequeno parâmetro), então o método fornece uma solução altamente precisa nesse regime. À medida que  $Ha$  aumenta, a solução assintótica diverge da solução exata da Equação (3.1), como pode ser observado na Figura 3.4. Isso significa que os termos de ordem superior não podem ser negligenciados nesse regime, pois o número de Hartmann não é mais pequeno (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024a).

Resolver a terceira condição de contorno determina a velocidade na interface com o meio poroso. Uma vez resolvida usando o método de perturbação, a velocidade na interface também será expressa como uma expansão assintótica em termos do número de Hartmann, de acordo com a Equação (3.58). Novamente, é possível detectar na solução a contribuição hidrodinâmica e a contribuição MHD, que escalam com ordens do número de Hartmann. Se o número de Hartmann for muito pequeno, aproximando-se de zero, a

velocidade na interface com o meio poroso recupera a velocidade da interface obtida no problema puramente hidrodinâmico.

$$u_i^* = u_{ih}^* + Ha^2 \left( -\frac{E_0}{2} - u_{ih}^* \left( \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon\sigma}{6} \right) + \frac{\varepsilon\sigma}{6} + \frac{\sigma^2}{24} \right) + \mathcal{O}(Ha^4). \quad (3.58)$$

Usando essa solução assintótica para o campo de velocidade na Equação (3.56), é possível calcular uma solução aproximada para o campo magnético na direção  $x$  resolvendo a Equação (3.39):

$$\begin{aligned} B_x^*(y^*) = & Re_m \left[ u_i^* \varepsilon \sigma \frac{(y^* - y^{*2})}{2} + \varepsilon \sigma \frac{(y^{*2} - y^*)}{2} + \sigma^2 \frac{(y^{*3} - y^*)}{6} \right] + \\ & + Re_m Ha^2 \left\{ E_0^* \frac{(y^* - y^{*3})}{6} + u_i^* \left[ \frac{(y^* - y^{*3})}{6} + \varepsilon \sigma \frac{(y^* - y^{*4})}{24} \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon \sigma \frac{(y^{*4} - y^*)}{24} + \sigma^2 \frac{(y^{*5} - y^*)}{120} \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que  $E_0^*$  pode ser determinado através da Equação (3.47) e é dado por

$$\begin{aligned} E_0^* = & \left( \frac{Ha^2}{2} + 1 \right)^{-1} \left\{ \frac{\sigma^2}{3} + \varepsilon \sigma \frac{(1 - u_i^*)}{2} + Ha^2 \left[ \frac{\varepsilon\sigma}{8} + \frac{\sigma^2}{30} - u_{ih}^* \left( \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon\sigma}{8} \right) \right] \right\} \\ & + \mathcal{O}(Ha^4). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pela Equação (3.38) (*leading order*), é possível determinar a vazão em uma contribuição puramente hidrodinâmica e outra MHD dada pelas ordens de Hartmann, como segue

$$Q^* = \int_0^1 u_0^* dy^* + Ha^2 \int_0^1 u_1^* dy^* + \mathcal{O}(Ha^4). \quad (3.61)$$

Resolvendo a Equação (3.61), a solução é:

$$\begin{aligned} Q^* = & \frac{\sigma^2 (4 + \varepsilon\sigma)}{12(1 + \varepsilon\sigma)} + \frac{\varepsilon\sigma}{2(1 + \varepsilon\sigma)} + Ha^2 \left[ \frac{-E_0^*}{3} - \sigma^2 \frac{(32 + 7\varepsilon\sigma)}{240(1 + \varepsilon\sigma)} - \frac{50\varepsilon\sigma}{240(1 + \varepsilon\sigma)} \right] + \\ & + \mathcal{O}(Ha^4). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Finalmente, uma solução assintótica para o campo de pressão pode ser encontrada resolvendo a Equação (3.43) para o gradiente de pressão adimensional na direção  $y$  e substituindo a solução na Equação (3.41). Assim, o campo de pressão neste problema é

dado por:

$$\begin{aligned}
p^*(x^*, y^*) = & -\sigma^2 x^* + p_0^* + E_0^* Ha^2 Re_m \left[ \frac{u_{ih}^* \varepsilon \sigma}{2} \left( \frac{y^{*2}}{2} - \frac{y^{*3}}{3} \right) + \frac{\varepsilon \sigma}{2} \left( \frac{y^{*3}}{3} - \frac{y^{*2}}{2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\sigma^2}{6} \left( \frac{y^{*4}}{4} - \frac{y^{*2}}{2} \right) \right] + Ha^2 Re_m \left[ \frac{u_{ih}^{*2} \varepsilon \sigma}{2} \left( \frac{y^{*2}}{2} + \frac{\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} - \frac{y^{*3}}{3} - \frac{\varepsilon \sigma y^{*4}}{4} \right) - \right. \\
& - \frac{u_{ih}^* \varepsilon \sigma}{4} \left( \frac{\sigma^2 y^{*4}}{4} + \frac{2\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} - \frac{\sigma^2 y^{*5}}{5} - \frac{2\varepsilon \sigma y^{*4}}{4} \right) + \frac{u_{ih}^* \varepsilon \sigma}{2} \left( \frac{y^{*3}}{3} + \frac{\varepsilon \sigma y^{*4}}{4} - \frac{y^{*2}}{2} - \frac{\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} \right) - \\
& - \frac{\varepsilon \sigma}{4} \left( \frac{\sigma^2 y^{*5}}{5} + \frac{2\varepsilon \sigma y^{*4}}{4} - \frac{\sigma^2 y^{*4}}{4} - \frac{2\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} \right) + \frac{u_{ih}^* \sigma^2}{6} \left( \frac{y^{*4}}{4} + \frac{\varepsilon \sigma y^{*5}}{5} - \frac{y^{*2}}{2} - \frac{\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} \right) - \\
& \left. - \frac{\sigma^2}{12} \left( \frac{\sigma^2 y^{*6}}{6} + \frac{2\varepsilon \sigma y^{*5}}{5} - \frac{\sigma^2 y^{*4}}{4} - \frac{2\varepsilon \sigma y^{*3}}{3} \right) \right] + \mathcal{O}(Ha^4).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

### 3.3.1 Viscosidade Efetiva

Outra quantidade importante do escoamento é a viscosidade efetiva, que mede o aumento na dissipação do fluido produzido pelos efeitos MHD. A viscosidade efetiva é definida como aquela em que o fluido eletricamente condutor deveria ter para se comportar como um fluido newtoniano que não é eletricamente condutor sujeito ao mesmo gradiente de pressão. Assim, a viscosidade efetiva dependerá naturalmente de  $Ha$ . No contexto do fluxo sanguíneo, essa quantidade é chamada de viscosidade intrínseca ou equivalente do escoamento, frequentemente utilizada em aplicações práticas da hemorreologia (POPEL; JOHNSON, 2005; ROURE; CUNHA, 2022). Devido à desaceleração no escoamento produzida pelos efeitos MHD quando um campo magnético transversal é aplicado ao fluido, é possível associar essa dissipação extra a um aumento na viscosidade do fluido. Portanto, a viscosidade efetiva pode ser calculada comparando a lei de Poiseuille equivalente do escoamento no canal para um fluido newtoniano que não é eletricamente condutor:

$$Q = \frac{Gb^3}{12\mu_e} \left[ \frac{\varepsilon\sigma + 4 + 6\varepsilon/\sigma}{(1 + \varepsilon\sigma)} \right], \tag{3.64}$$

em que,  $\mu_e$  é a viscosidade efetiva dada, neste escoamento, por:

$$\mu_e = \mu \left[ \frac{6 + Ha^2}{3(2 + Ha^2)} - Ha^2 \frac{(32 + 7\varepsilon\sigma + 50\varepsilon/\sigma)}{(\varepsilon\sigma + 4 + 6\varepsilon/\sigma)} \right]^{-1} + \mathcal{O}(Ha^4). \tag{3.65}$$

## 3.4 Resultados e Discussão

À medida que o número de Hartmann aumenta, os efeitos das forças magnéticas dominam as forças viscosas e o escoamento desacelera. Isso indica que o efeito MHD introduz uma dissipação extra no escoamento, o que pode ser interpretado como um

aumento na viscosidade efetiva à medida que  $Ha$  aumenta. Pela Figura 3.2, observa-se que a viscosidade efetiva aumenta com o número de Hartmann, como se os efeitos MHD tornassem o fluido mais viscoso.

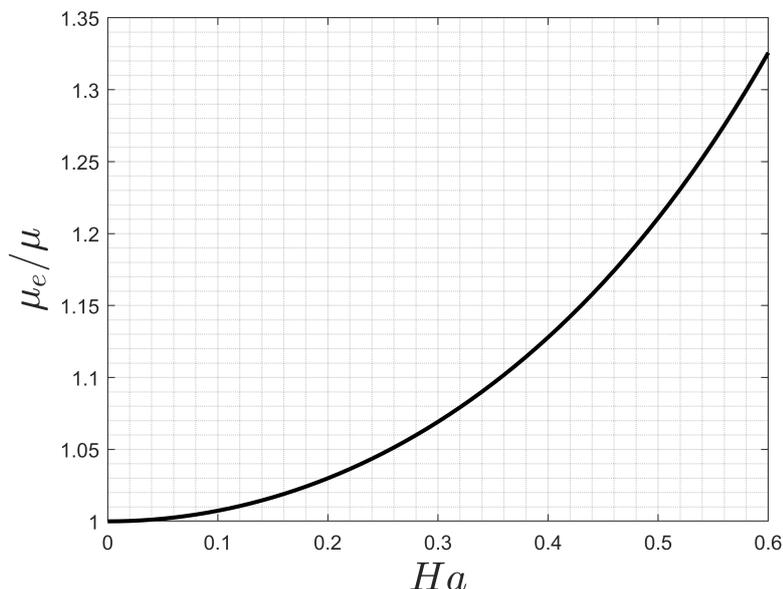


Figura 3.2 – Viscosidade efetiva adimensional em relação ao número de Hartmann, utilizando a solução assintótica.  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\sigma = \sqrt{2}$ ,  $\mu = 1$ .

Os perfis de velocidades na Figura 3.3 se torna mais plano à medida que  $Ha$  aumenta no escoamento. Além disso, é enfatizado que, quando o número de Hartmann se aproxima de zero, o escoamento MHD tende ao limite da solução de um fluido newtoniano que não é eletricamente condutor sob o mesmo gradiente de pressão ( $Ha = 0$ ). Essa convergência da solução no limite de  $Ha \rightarrow 0$  é claramente vista na Figura 3.3, se o perfil de velocidade para  $Ha = 0$  for comparado com o de  $Ha = 0.1$ . O resultado na Figura 3.5 apresenta o efeito MHD na velocidade adimensional na interface do meio poroso. Como observado anteriormente, os efeitos magnéticos competem com os efeitos hidrodinâmicos, gerando um efeito de "frenagem" no escoamento. Portanto, é natural que a velocidade na interface diminua com o aumento do número de Hartmann, o que se traduz no crescimento dos efeitos magnéticos no escoamento. Nota-se que, para um  $Ha = 0$ , a velocidade adimensional na interface recupera o caso puramente hidrodinâmico, que é igual a 1 para as condições de  $\sigma = \sqrt{2}$  (velocidade na interface igual à velocidade média do meio poroso). Os pontos que indicam a solução exata do problema validam novamente a solução assintótica do problema para números de Hartmann menores que 1.

A Figura 3.6 mostra o acoplamento intrínseco entre a densidade de fluxo magnético induzido e a velocidade. À medida que o número de Hartmann aumenta, os efeitos da força de Lorentz desaceleram o escoamento, tornando o módulo da densidade de fluxo magnético menor.

A Figura 3.7 mostra a relação entre a vazão e o número de Hartmann. Se o efeito da força de Lorentz é alto, a vazão diminui. Devido a esse efeito, a vazão decai com o

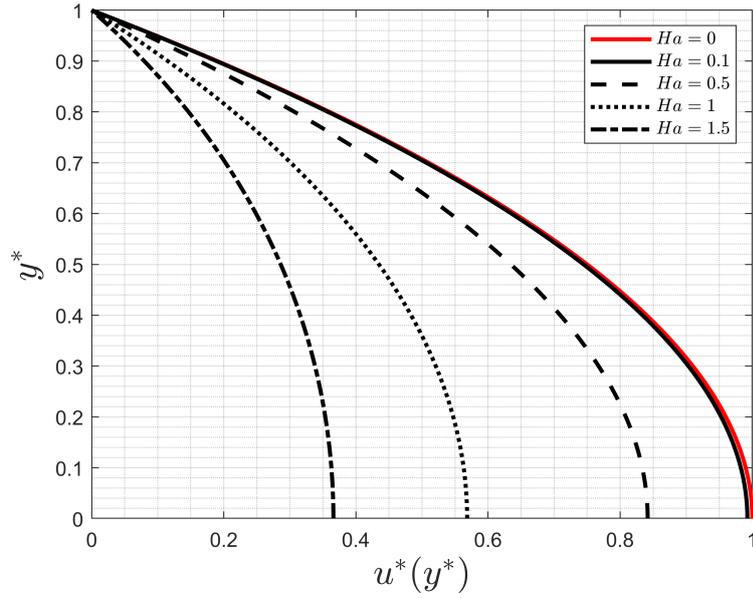


Figura 3.3 – Perfis de velocidades adimensionais em relação ao número de Hartmann (solução exata).  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\sigma = \sqrt{2}$ .

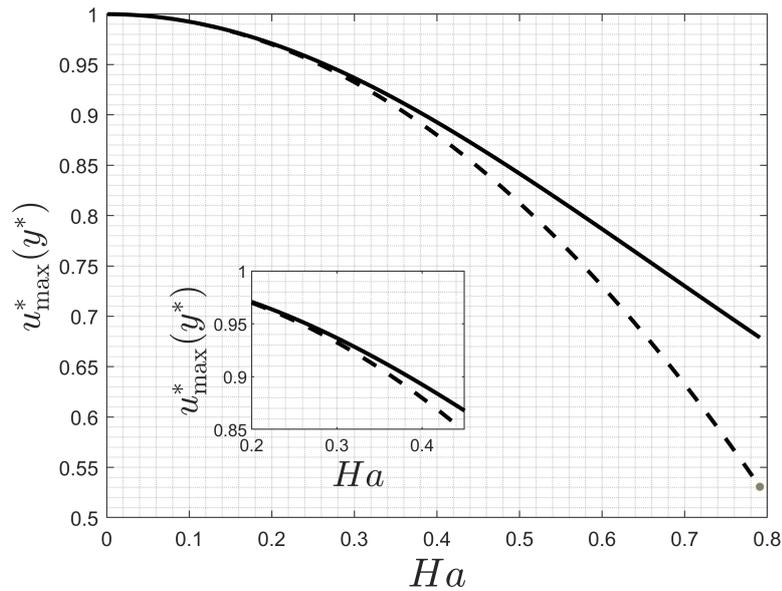


Figura 3.4 – Velocidade máxima adimensional em relação a  $Ha$ , variando de 0 a 0.8, para  $\varepsilon = 0.5$  e  $\sigma = \sqrt{2}$ . Neste gráfico, são comparadas a solução exata (—) com a solução assintótica (---).

aumento de  $Ha$  (MIRANDA; FILHO; CUNHA, 2024a).

A Figura 3.8 ilustra que os perfis de velocidade adimensionais aceleram à medida que  $\sigma$  aumenta. Isso ocorre porque se torna mais fácil para o escoamento fluir, confirmado pelo aumento na velocidade interfacial com  $\sigma$ , conforme mostrado na Figura 3.9. Nesta figura, a velocidade adimensional na interface do meio poroso está relacionada ao parâmetro  $\sigma$  para o caso puramente hidrodinâmico ( $\circ$ ) e para a condição de número de Hartmann não nulo ( $\star$ ). Para o caso hidrodinâmico,  $\sigma < \sqrt{2}$  indica alta permeabilidade do meio

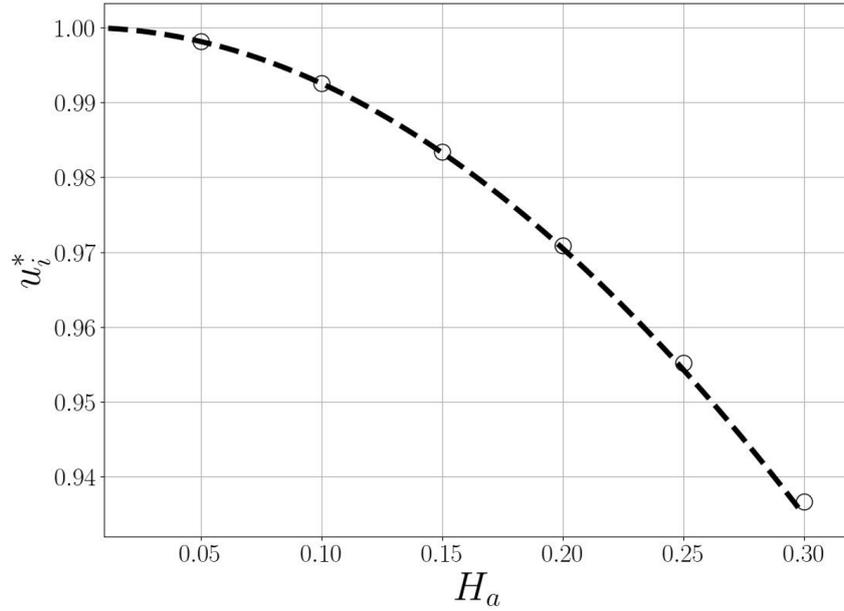


Figura 3.5 – Velocidade interfacial adimensional em relação ao número de Hartmann. A --- é a solução assintótica.  $\varepsilon = 0.5$  e  $\sigma = \sqrt{2}$ .  $\circ$  - são os dados da solução exata.

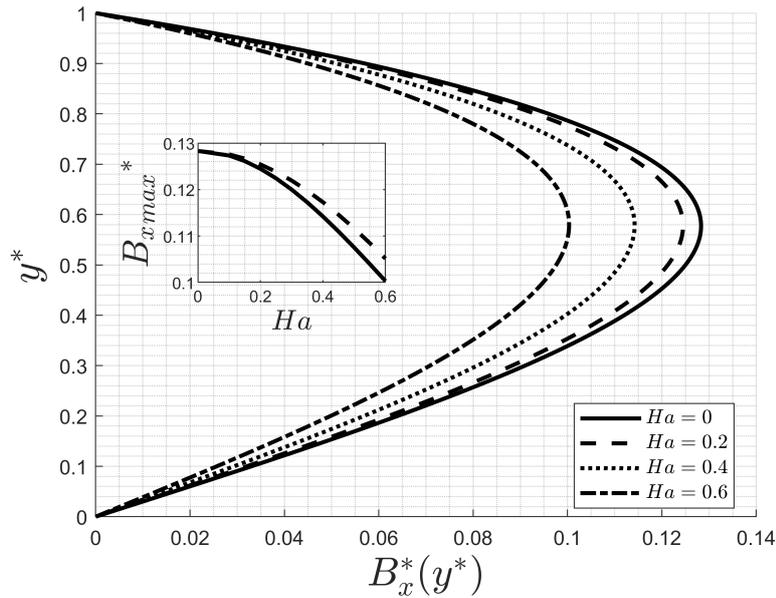


Figura 3.6 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido em relação a  $y^*$ . As curvas representam  $B_x$  para diferentes números de Hartmann (solução exata). O encarte mostra a variação do valor máximo de  $B_x$  à medida que  $Ha$  aumenta.  $Re_m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\sigma = \sqrt{2}$ . A — no encarte representa a solução exata, e a --- é a solução assintótica.

poroso, resultando na velocidade média sendo maior do que a velocidade na interface. Caso contrário,  $\sigma > \sqrt{2}$  a permeabilidade diminui e a velocidade no meio poroso é menor que a velocidade na interface.

A relação entre a velocidade interfacial adimensional e  $\sigma$  é ilustrada na Figura 3.10. No contexto MHD, o valor no qual essas velocidades são iguais é deslocado para a

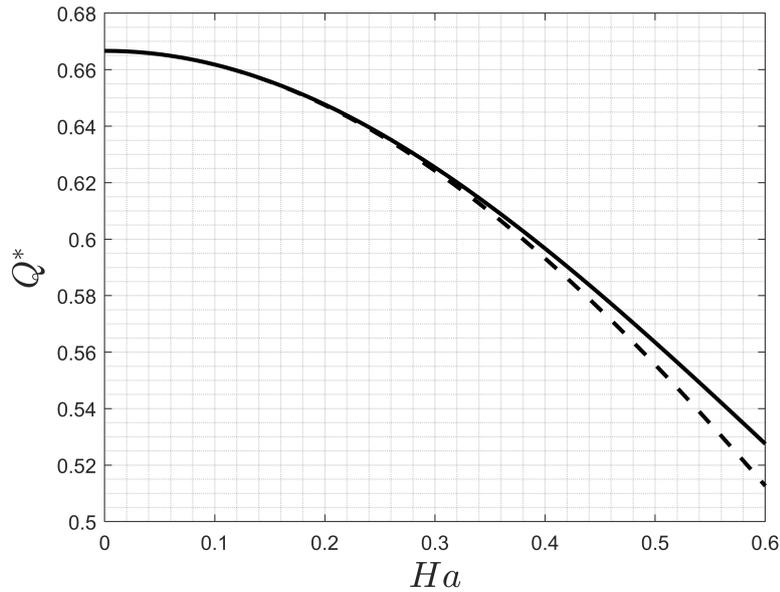


Figura 3.7 – Vazão adimensional em relação ao número de Hartmann. Neste gráfico, são comparadas a solução exata (—) e a solução assintótica (---) para  $\varepsilon = 0.5$  e  $\sigma = \sqrt{2}$ .

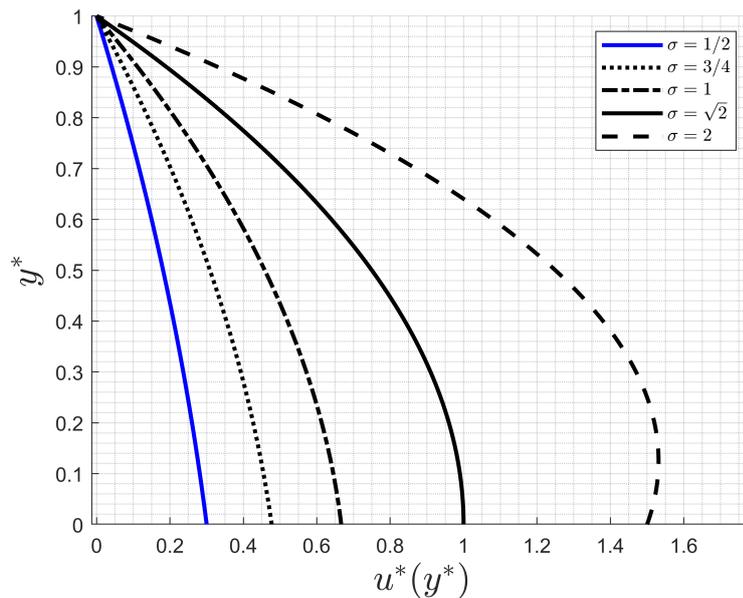


Figura 3.8 – Perfis de velocidade adimensionais calculados usando a solução exata, como função de  $\sigma$  para  $\varepsilon = 0.5$ .

direita (precisamente para  $\sigma = 1.49$ ), e observa-se que a velocidade adimensional é menor do que no caso puramente hidrodinâmico, conforme já observado no resultado da Figura 3.9. Devido a esse efeito de desaceleração no escoamento causado pelo campo magnético transversal, isso pode ser interpretado como um aumento global na permeabilidade do meio poroso, como se fosse possível alterar essa permeabilidade (que é um aspecto mais estrutural) simplesmente aumentando a intensidade do campo magnético externo. Esse efeito é uma aplicação relevante do efeito MHD no contexto de meios porosos.

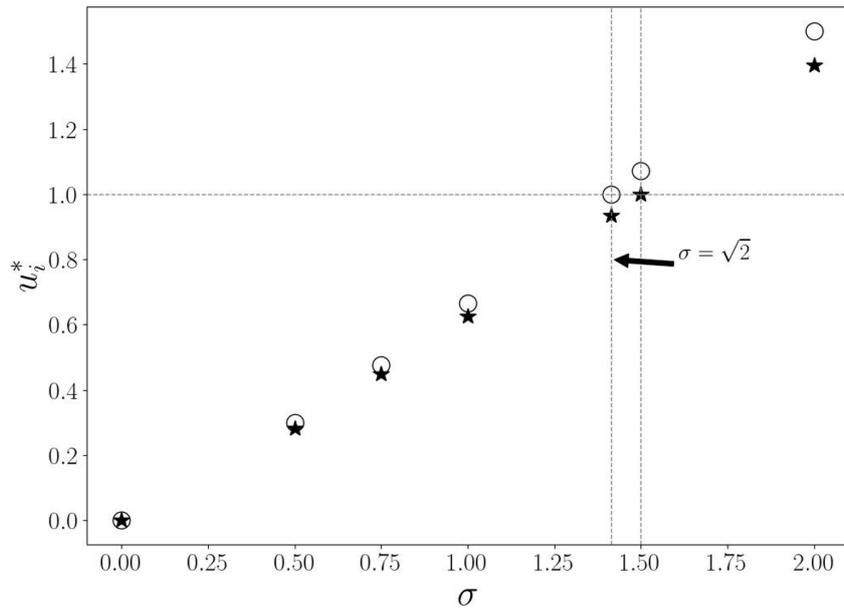


Figura 3.9 – ★ – Velocidade adimensional na interface com o meio poroso em relação a  $\sigma$ , sendo  $\varepsilon = 0.5$  e  $Ha = 0.3$ . ○ - Velocidade adimensional na interface em relação a  $\sigma$  para o caso puramente hidrodinâmico.  $\varepsilon = 0.5$  e  $Ha = 0$ .

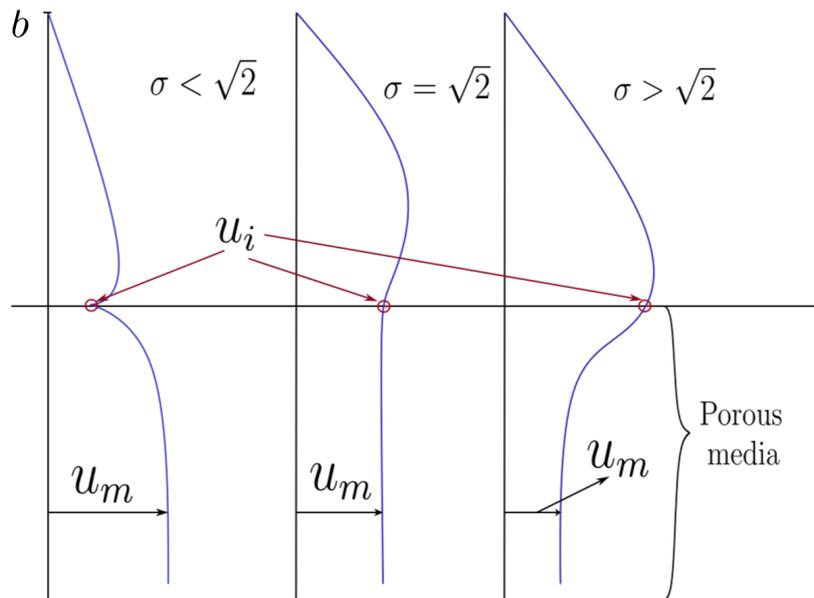


Figura 3.10 – Relação entre a velocidade na interface ( $u_i$ ) e a velocidade média do meio poroso ( $u_m$ ) para três valores característicos de  $\sigma$ .

## 4 Modelagem Numérica

A modelagem da simulação numérica é dividida em três etapas principais: pré-processamento, processamento e pós-processamento. No pré-processamento, a representação geométrica e a malha computacional são definidas utilizando o utilitário *blockMesh* do OpenFOAM. As malhas são criadas levando em consideração os critérios de qualidade. Dois critérios são considerados nessa avaliação: assimetria (*skewness*) e a razão de aspecto (*aspect ratio*). A aprovação em todos os critérios não é necessariamente obrigatória, pois nem sempre, isso inviabiliza a simulação, dependerá de alguns fatores, como a localização na malha desses elementos com menor qualidade. Se uma malha é reprovada, ela é modificada e gerada novamente. Este processo é repetido até que a qualidade da malha seja aceitável.

Na fase de processamento, as malhas foram transferidas para o OpenFOAM, um ambiente dedicado à simulação numérica. Aqui, foram definidas tanto as condições iniciais e de contorno quanto outros parâmetros essenciais. As simulações foram iniciadas, e os resultados avaliados em comparação com a solução teórica. Se o erro for menor que 5% (para a maioria dos escoamento proposto), idealmente abaixo de 1%, a malha é considerada aceitável para as simulações. Nas regiões próximas a parede, esse valor pode ser mais elevado devido a necessidade de uma malha muito refinada na região, que não poderá ser tão explorada devido a limitações de tempo e computacionais. Se esses critérios não forem alcançados, a malha é refinada e o processo repetido. Em casos específicos ou em situações sem uma solução teórica realizada ou disponível para o escoamento, variáveis específicas da simulação são monitoradas, como a vazão, para analisar o impacto da malha nos resultados e selecionar aquela com o melhor custo-benefício. Este procedimento, preferencialmente adotado em escoamentos com soluções teóricas complexas, enfatiza o custo-benefício da malha como critério chave na seleção. Esse processo é chamado de análise de convergência de malha. Ele assegura a precisão dos resultados finais, reduzindo a influência da malha sobre os mesmos.

Na etapa final, pós-processamento, os resultados da simulação são exportados. O *software* ParaView foi utilizado para visualizar e interpretar esses resultados. Nessa fase, são observados aspectos importantes da dinâmica dos fluidos, como pressão e velocidade. Além disso, o fator de atrito ou a viscosidade de parede são calculados. Assim, são extraídos dados quantitativos que proporcionam uma visão completa do comportamento do escoamento.

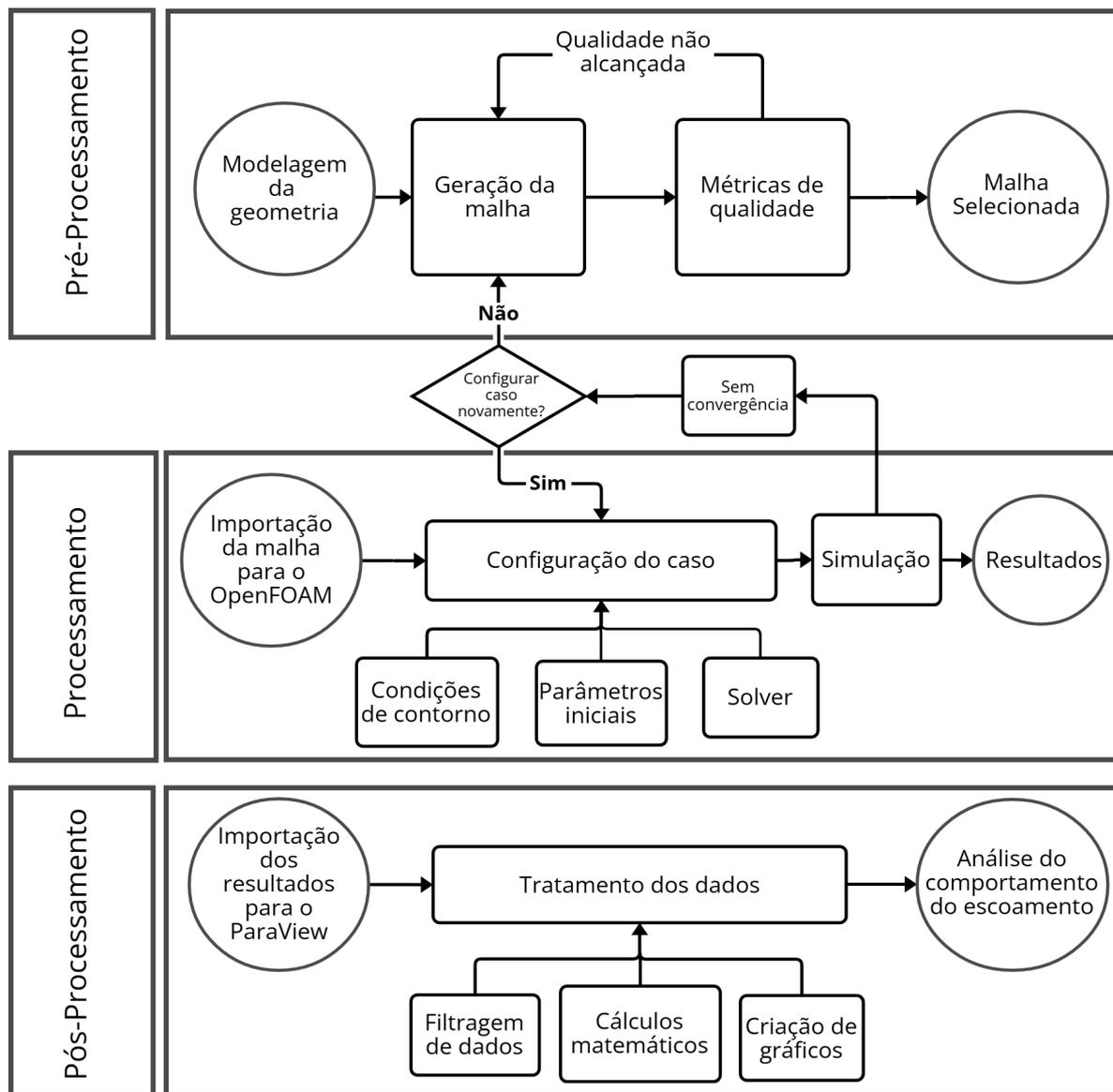


Figura 4.1 – Fluxograma da metodologia utilizada para a realização do trabalho.

## 4.1 Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos (MVF) tem sido um método muito utilizado por cientistas e engenheiros que trabalham na área da fluidodinâmica computacional. Entretanto, esse método também é utilizado em outras áreas, como na transferência de calor e no eletromagnetismo. De forma geral, ele pode ser dividido em quatro etapas:

- Decomposição do domínio;
- Formulação das equações integrais nos volumes de controle;
- Aproximação numérica das integrais;
- Resolução do sistema de equações.

A decomposição do domínio em pequenos volumes de controle é o ponto inicial do método dos volumes finitos. A junção desses volumes cria uma malha computacional, exemplificada na Figura 4.2. Geralmente a informação principal de cada volume de controle (VC) é armazenada em seu centroide. No entanto, essa não é a única opção. A informação também pode ser armazenada em outros locais, como nos centroides das faces ou nos vértices.

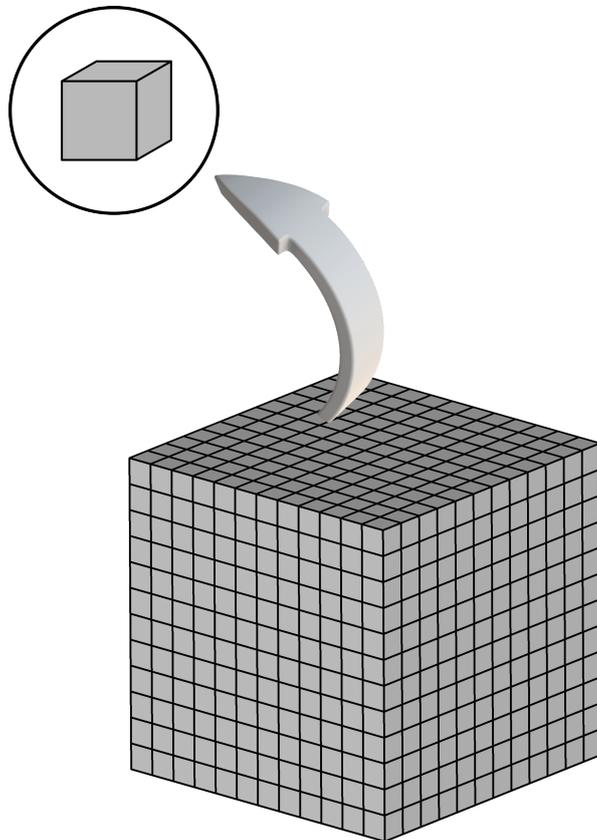


Figura 4.2 – Visualização de uma malha computacional em um cubo, destacando a ampliação de um volume de controle dentro do domínio de estudo.

Na etapa de formulação das equações integrais, as equações governantes são descritas em sua forma integral em cada VC. Após isso, nas integrais de volume aplicáveis (convecção e difusão), o teorema da divergência de Gauss é utilizado para transformar essas integrais de volume, em integrais de superfície. Para exemplificar essa etapa, observe a Equação (4.1), que representa uma equação diferencial parcial genérica para conservação de uma propriedade:

$$\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\xi\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\xi) + S_\xi, \quad (4.1)$$

em que  $\xi$  é uma variável genérica (vetorial ou escalar) transportada através de um meio de massa específica  $\rho$  com velocidade  $\mathbf{u}$ , termo fonte  $S_\xi$  e constante de difusividade  $\Gamma$ . Integrando a Equação (4.1) em um volume de controle:

$$\int_{V_{VC}} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} dV + \int_{V_{VC}} \nabla \cdot (\rho\xi\mathbf{u}) dV = \int_{V_{VC}} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\xi) dV + \int_{V_{VC}} S_\xi dV. \quad (4.2)$$

Aplicando o teorema de Gauss nos termos de convecção e difusão na Equação (4.2):

$$\int_{V_{VC}} \frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} dV + \int_{S_{VC}} \mathbf{n} \cdot (\rho\xi\mathbf{u}) dS = \int_{S_{VC}} \mathbf{n} \cdot (\Gamma\nabla\xi) dS + \int_{V_{VC}} S_\xi dV, \quad (4.3)$$

que também pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} V_{VC} + \sum_f^{N_{faces}} \mathbf{n} \cdot (\rho_f \xi_f \mathbf{u}_f) S_{VCf} = \sum_f^{N_{faces}} \mathbf{n} \cdot (\Gamma_f \nabla \xi_f) S_{VCf} + S_\xi V_{VC}. \quad (4.4)$$

A terceira etapa envolve a aproximação numérica na derivação final do sistema de equações algébricas, em que as integrais são aproximadas usando métodos numéricos. As integrais volumétricas são calculadas com base nos valores das variáveis nos centros dos volumes de controle (variáveis nodais). As integrais de superfície são aproximadas realizando um balanço dos fluxos que entram e saem de cada volume de controle. Durante este processo, os valores das variáveis e seus gradientes nas faces dos volumes de controle são estimados usando esquemas de interpolação baseados nos valores nodais. Nesta etapa, ocorre a discretização dos operadores. Para o gradiente, métodos como o Gauss linear ou o Gauss linear limitado<sup>1</sup> são comumente utilizados. A derivada temporal pode ser discretizada usando esquemas como o Euler implícito, o Crank-Nicolson ou o Euler explícito, dependendo das necessidades específicas do problema em questão. Para o operador de divergência, esquemas como upwind, linear upwind, QUICK ou vanLeer podem ser aplicados. A escolha do método de discretização geralmente é uma questão de equilibrar precisão, estabilidade numérica e complexidade computacional.

A quarta e última etapa envolve a resolução do sistema de equações algébricas derivadas das aproximações e discretizações anteriores. A escolha do método de resolução depende das características específicas do problema, podendo variar entre métodos segregados (baseados em pressão) ou acoplados. Nos métodos acoplados, todas as variáveis como por exemplo a velocidade  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , pressão e temperatura são resolvidas simultaneamente no mesmo passo de tempo, através de uma única matriz. Em contraste, os métodos segregados resolvem cada variável em seu próprio sistema linear, separadamente. O diferencial do método segregado reside na necessidade de selecionar uma equação para calcular cada variável e na implementação de um algoritmo de acoplamento pressão-velocidade. Este algoritmo transforma a equação de conservação da massa em uma equação de pressão. Por outro lado, nos métodos acoplados, tal acoplamento não é necessário, pois a pressão é contabilizada na mesma matriz das demais variáveis. Entre os métodos segregados, é possível citar o PISO e o PRIME, bem como o SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLEST, que são mais comumente chamados de métodos SIMPLE-like. Depois que a equação da pressão é encontrada em um método segregado, é possível resolvê-lo como sendo um método acoplado. Outro método relevante para a resolução das equações é o *Density-Based Solver*,

<sup>1</sup> do inglês “Gauss linear limited”

no qual as variáveis são resolvidas sempre de forma simultânea, mantendo a equação de conservação da massa em sua forma original. Este método é comumente empregado para escoamentos compressíveis.

Uma explicação mais detalhada, bem como os métodos utilizados neste trabalho, são apresentados no Apêndice A.7.

## 4.2 OpenFOAM

O OpenFOAM, inicialmente tinha o nome de FOAM, criado por Henry Weller em 1989. Seu lançamento como um código aberto, e então chamado de OpenFOAM ocorreu em 2004, pela OpenCFD, fundada por Henry Weller, Chris Greenshields e Mattijs Janssens (OPENCFD, 2023; DIRECT, 2023). O OpenFOAM é um *software* gratuito de código aberto com funcionalidades CFD com o método dos volumes finitos. Outro ponto importante é que seu desenvolvimento constante e ativo o equiparam a códigos comerciais. Entre suas funcionalidades, é possível usar *solvers* padrões que resolvem vários tipos de equações da mecânica dos fluidos, bem como manipular ou criar um solver próprio, sendo possível utilizá-lo para problemas não tradicionais encontrados na indústria e na pesquisa.

O OpenFOAM apresenta uma configuração de diretórios essencial e básica para a resolução de uma simulação. Essa estrutura pode ser visualizada pela Figura 4.3.

O diretório *0* contempla os arquivos de condições iniciais e de contorno das propriedades, como, por exemplo, velocidade ( $U$ ) e pressão ( $p$ ). O diretório *system* apresenta os arquivos necessários para os procedimentos de solução, ou seja, controlar a simulação. Esse diretório deve incluir obrigatoriamente 3 arquivos: o *controlDict*, controlando funcionalidades como o tempo e execução da simulação, bem como o intervalo de gravação dos dados; o *fvSchemes*, contendo os esquemas de discretização usados nos termos das equações; e, por fim, o *fvSolution*, responsável por definir os métodos de solução dos sistemas de equações lineares e os parâmetros para o algoritmo de solução do campo de escoamento. É nesse arquivo que estão os parâmetros relacionados ao *solver* utilizado. De forma geral, a pasta *system* define as condições para execução da simulação, configura as operações essenciais e controla como as soluções são calculadas e otimizadas para cada caso específico. O diretório *constant* contempla os arquivos que serão constantes durante a simulação, como, por exemplo, as propriedades físicas de transporte, e as escolhas do modelo de turbulência e modelo do fluido. O diretório *polyMesh*, sub-diretório do *constant*, inclui os arquivos da geometria e da malha, provenientes do arquivo *BlockMeshDict* ou de outros softwares geradores de malha. Por fim, o diretório *time directories*, aparecendo somente depois que a simulação é executada, contém os dados resolvidos para os campos simulados, como, por exemplo, velocidade, temperatura e pressão para cada passo de tempo. O nome de cada uma dessas pastas se refere ao instante de tempo simulado para o qual os dados são escritos (configurado no *controlDict*). Essa é a configuração padrão de um caso no

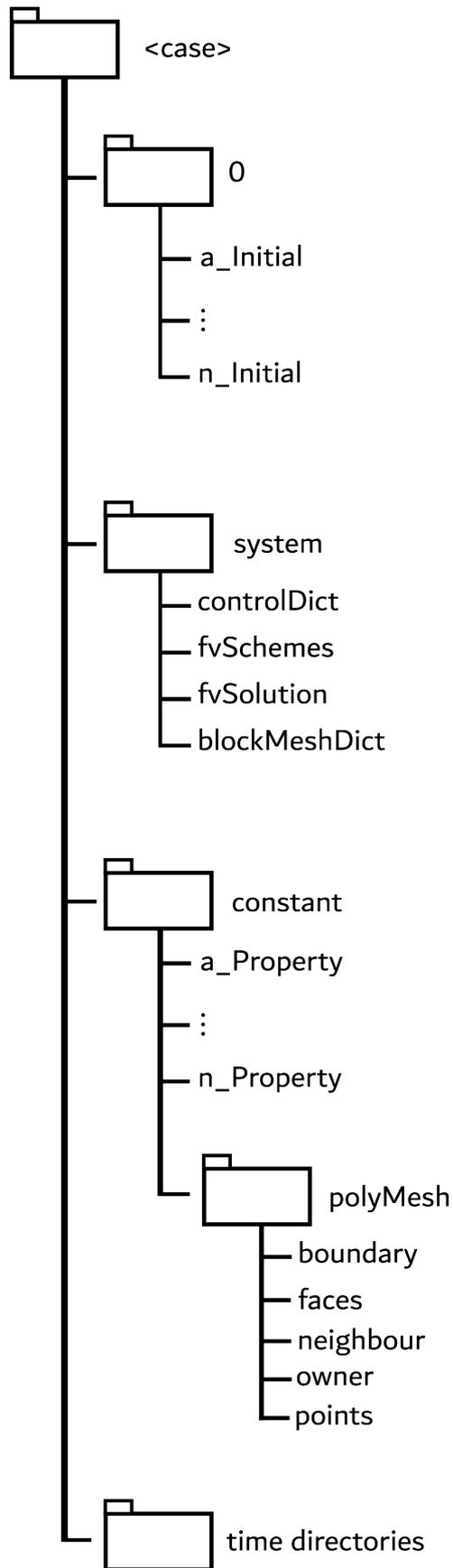


Figura 4.3 – Estrutura de um caso no OpenFOAM. Os diretórios e sub-diretórios apresentados são necessários para o funcionamento da simulação.

OpenFOAM. Entretanto, podem ocorrer pequenas mudanças dependendo da simulação.

Um exemplo seria para malhas geradas em outros *softwares* e importadas no OpenFOAM, em que o arquivo `blockMeshDict` do diretório *system* não seria mais necessário.

### 4.3 Objeto de Estudo

O objeto a ser estudado é uma célula de Hele-Shaw com espessura,  $b$  e comprimento  $l$  que teve como base o trabalho de Saffman e Taylor (1958). A geometria a ser simulada é apresentada na Figura 4.4.

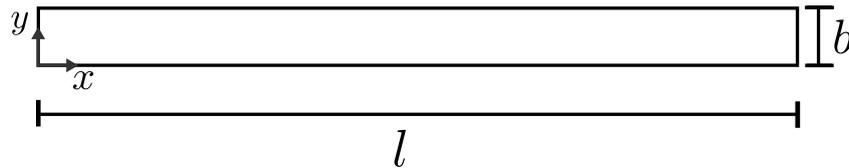


Figura 4.4 – Representação da geometria.

Note que a célula foi modelada para uma simulação bidimensional. Dessa forma, a simulação ocorre no plano  $yx$ , pois as paredes em  $z$  são muito espaçadas de modo a não interferirem no escoamento. Observe pela Figura 4.5 que o plano do escoamento se repete ao longo do eixo  $z$ . Essa modelagem, conseqüentemente, é responsável por diminuir o custo computacional da simulação.

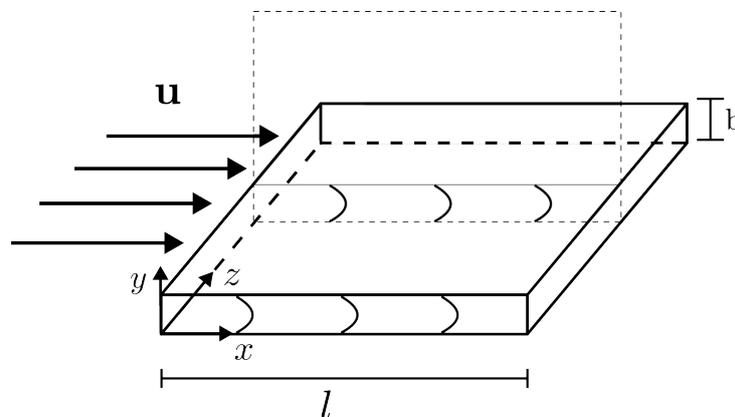


Figura 4.5 – Representação de um escoamento em uma célula de Hele-Shaw, na qual a repetição do escoamento é observável em um plano paralelo ao definido pelos eixos  $xy$ .

### 4.4 Malha

A geração da malha é um processo fundamental para a simulação numérica. Uma malha que respeita as métricas de qualidade e possui um refinamento adequado, contribui significativamente para a precisão dos resultados da simulação.

### 4.4.1 Qualidade da Malha

Nesse trabalho, serão utilizados dois parâmetros para verificar e garantir uma qualidade de malha adequada, a assimetria (*skewness*) e a razão de aspecto (*aspect ratio*), mas também será discutida a não-ortogonalidade (*non-orthogonality*).

#### 4.4.1.1 *Skewness*

A *skewness* da malha computacional é usada para medir o quanto as células da malha são assimétricas. Vários *softwares* de geração de malha podem calcular o valor da *skewness* por métodos diferentes. Valores da *skewness* que excedem padrões razoáveis podem intensificar a difusão numérica (DARWISH; MOUKALLED, 2016). Observe na Figura 4.6 em que a *skewness* ocorre devido a uma diferença entre a localização esperada do centro da face em células perfeitamente alinhadas e a localização real do centro em células com assimetria. Em condições ideais, em que não há assimetria, o centro da face é representado por  $W$ , posicionado no vetor que une os centroides das células adjacentes,  $P_1$  e  $P_3$ . No entanto, em uma configuração real, em que a célula adjacente pode apresentar um valor maior da *skewness*, este centro real é deslocado para  $W'$ , que é o ponto onde o vetor que une  $P_1$  e  $P_2$  cruza a face, refletindo a influência da *skewness*, que é calculada por:

$$Skew_m = \frac{|W - W'|}{|d_c|}, \quad (4.5)$$

em que,  $|W - W'|$  representa a distância entre a localização atual do centro da face e o ponto de encontro do vetor que liga os centros reais das células, e  $|d_c|$  é a distância entre os centros das células adjacentes. Note que a *skewness* é zero quando o centro da face está exatamente na metade do caminho entre os centros das células vizinhas. No OpenFOAM, o limite aceitável para a *skewness* da face interna é geralmente definido como 4 e para a fronteira é 20 (LTD, 2023). Valores que ultrapassem este limite podem resultar em erros numéricos significativos, afetando a precisão dos resultados da simulação.

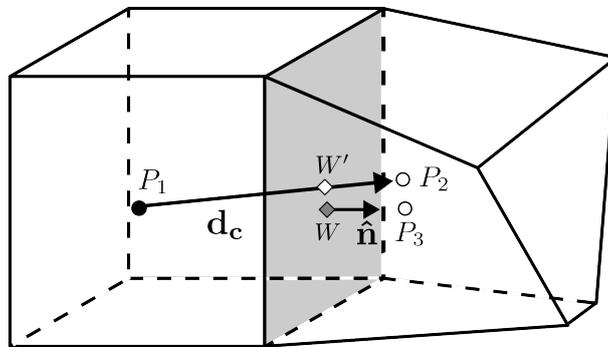


Figura 4.6 – Visualização da métrica de qualidade da *skewness* da malha. A célula da esquerda é um elemento equilátero, enquanto o elemento da direita tem um alto grau de deformação.

Uma derivação da *skewness* é o EquiAngle Skew ( $Q_{EAS}$ ) que é uma medida normalizada da *skewness* podendo variar de 0, uma célula equilátera até o valor de 1, uma célula totalmente degenerada (CUNHA, 2005). A Tabela 4 apresenta o valor ou a faixa de valores do *skewness* em relação a qualidade das células da malha. Essa faixa de valores pode variar ligeiramente dependendo do *software* utilizado.

Tabela 4 – Relação entre o valor do *skewness* e a qualidade das células.

<i>Skewness</i>	Qualidade da Célula
1	Degenerado
[0,9; 1,0)	Ruim
[0,75; 0,9)	Pobre
[0,5; 0,75)	Razoável
[0,25; 0,5)	Bom
(0; 0,25)	Excelente
0	Equilátero

Fonte: Adaptado de Fluent et al. (2008), Miranda (2022).

#### 4.4.1.2 Razão de Aspecto

Assim como na *skewness*, a razão de aspecto,  $Q_{AR}$ , pode ser calculada de diversas maneiras, dependendo das características específicas da malha em estudo. Em geral, a razão de aspecto é definida como a razão entre certas dimensões características da célula da malha. Frequentemente, essas dimensões são representadas pelas distâncias entre o centroide da célula e os centroides das faces. Contudo, outros parâmetros dimensionais, como comprimento das arestas, área das faces ou o volume das células, podem ser usados para definir a razão de aspecto, conforme o contexto específico e as propriedades da malha (MIRANDA, 2022). O valor ideal da razão de aspecto é 1. O OpenFOAM coloca um limite aceitável de 1000. Entretanto, valores maiores podem causar difusão numérica, principalmente em regiões de grandes gradientes ou onde ocorram fortes variações no escoamento.

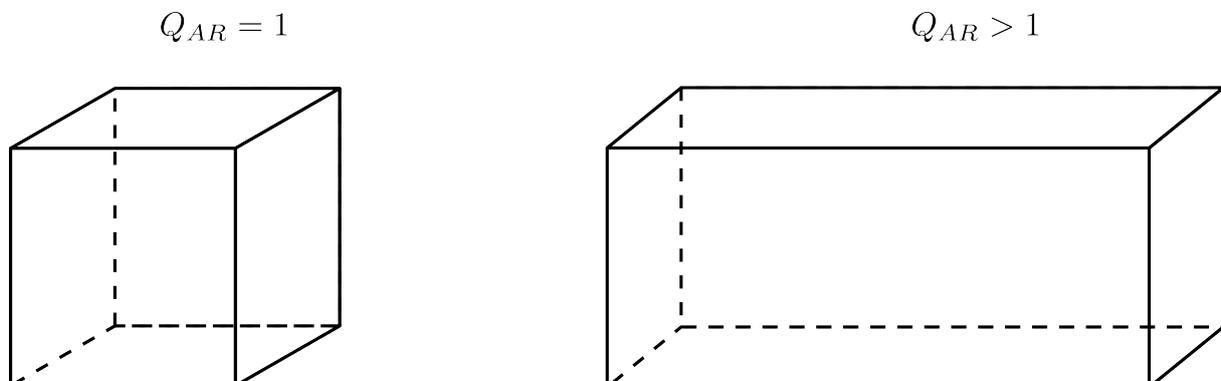


Figura 4.7 – Comparação entre dois elementos: à esquerda, um elemento com baixa razão de aspecto, e à direita, um elemento com alta razão de aspecto.

#### 4.4.1.3 Não-ortogonalidade

A não-ortogonalidade é definida pelo ângulo entre o vetor de conexão dos centroides de duas células adjacentes ( $\mathbf{d}_{ct}$ ) e o vetor normal ( $\hat{\mathbf{n}}$ ) da face compartilhada por estas células. A não-ortogonalidade varia entre 0 para uma malha ortogonal (ideal) e 90 para o pior caso. Observe na Figura 4.8 que dois hexaedros perfeitos e alinhados entre si possuem uma não-ortogonalidade igual a 0. Valores de não-ortogonalidade maiores do que 65 para o OpenFOAM podem causar instabilidade numérica (LTD, 2023). Dessa forma podendo exigir mais tempo para convergir ou dependendo do caso, até mesmo divergir.

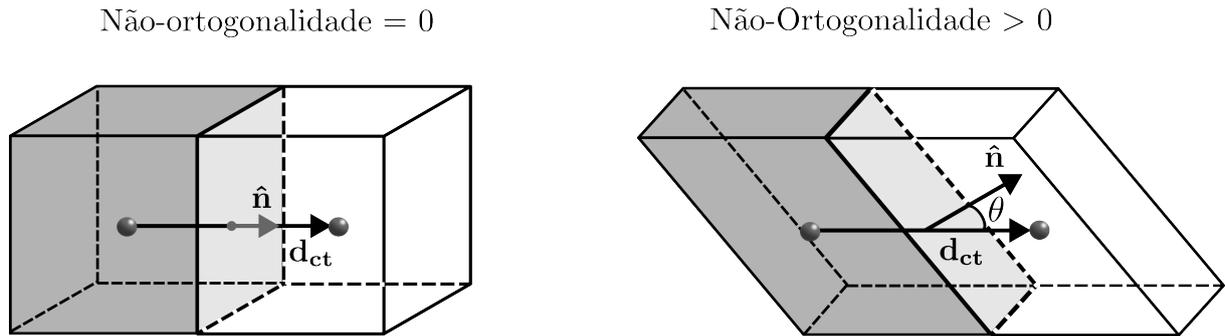


Figura 4.8 – Representação da métrica de não-ortogonalidade da malha. À esquerda, um elemento com não-ortogonalidade = 0, e à direita, um elemento com não-ortogonalidade > 0.

## 4.5 Condições de Contorno

As condições de contorno representam limitações (restrições) para a resolução de um problema de valor de contorno. Essas condições são empregadas com o objetivo de estabelecer o comportamento de uma equação diferencial (ou conjunto de equações diferenciais) nas fronteiras (contorno) de um domínio determinado. Existem vários tipos de condições de contorno, e cada uma delas é definida de acordo com o problema a ser resolvido. As condições de contorno podem ser:

- **Condição de Contorno de Dirichlet (Tipo I):** Especifica os valores que uma função desconhecida deve assumir na fronteira do domínio.
- **Condição de Contorno de Neumann (Tipo II):** Define o valor das derivadas da solução na fronteira do domínio.
- **Condição de Contorno de Robin (*Impedance condition*)(Tipo III):** Esta condição representa uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann. Nela, uma única expressão matemática combina tanto a função quanto a sua derivada na fronteira, o que significa que apenas uma restrição é necessária para aplicar essa combinação.

- **Condição de Contorno Mista:** Inclui diferentes tipos de condições de contorno em diferentes partes da fronteira.
- **Condição de Contorno de Cauchy:** Esta condição é uma combinação das condições de Dirichlet e Neumann em que são necessárias duas restrições separadas: uma para a condição de Dirichlet e outra para a condição de Neumann.

Para o problema proposto, a localização das condições de contorno é apresentada na Figura 4.9. Observa-se que todas as condições de contorno utilizadas serão do tipo Dirichlet.

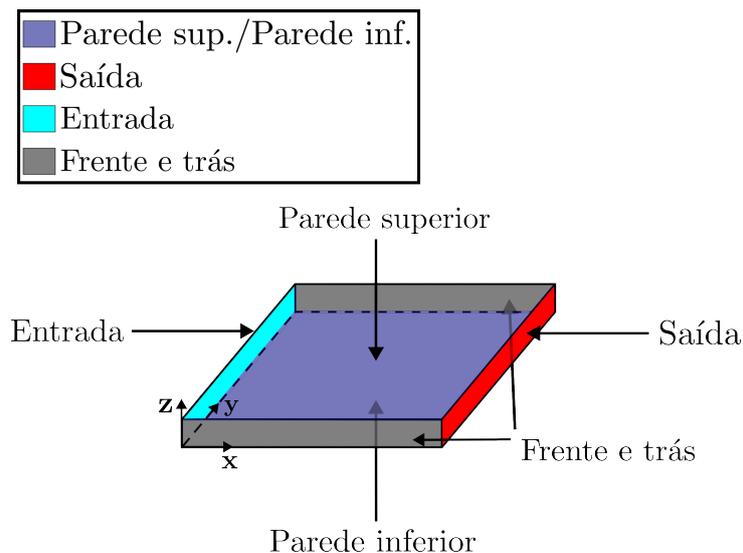


Figura 4.9 – Localização das condições de contorno do problema estudado.

As condições de contorno da Figura 4.9 foram dispostas na Tabela 5, apresentando a configuração dessas condições de contorno no OpenFOAM. Os escoamentos simulados nesse trabalho são todos movidos pela pressão (valores constantes para o gradiente de pressão). Dessa forma, com exceção dos escoamentos bifásicos, as condições de contorno para a velocidade, tanto na saída quanto na entrada, foram definidas como gradiente nulo (*zeroGradient*), pois a velocidade será calculada a partir da diferença de pressão. Para o arquivo *alpha.water*, que define a fração volumétrica de água no domínio, foram aplicadas as seguintes condições de contorno: na entrada, foi especificado um valor fixo de 1 para garantir que a entrada seja composta exclusivamente por água, mantendo a fração de água constante ao entrar no sistema. Nas demais superfícies, foi utilizado um gradiente nulo (*zeroGradient*), permitindo que a fração de água se ajuste conforme as interações definidas pelos outros arquivos de configuração. O importante é ela estar presente em sua devida proporção no início da simulação. Para todos os arquivos, foram usadas condições do tipo vazio para as paredes *Front and Back* pois as simulações são bidimensionais. Para as simulações dos escoamentos bifásicos, foi especificado um valor de velocidade e de pressão na saída. A pressão na entrada foi definida como *zeroGradient*.

Tabela 5 – Condições de contorno para velocidade ( $u$ ), pressão ( $p$ ) e fração de água ( $\alpha.\text{water}$ ) no OpenFOAM.

	$u$	$p$	$\alpha.\text{water}$
Entrada	Gradiente nulo	Valor especificado	Valor especificado
Saída	Gradiente nulo	Valor especificado	Gradiente nulo
Paredes	$u \cdot n = 0$	Gradiente nulo	Gradiente nulo
Front and Back	Empty	Empty	Empty

## 4.6 Solver

Serão utilizados três *solvers* padrões do OpenFOAM: simpleFOAM, interFOAM e mhdFOAM. Para garantir a conformidade com as equações adotadas, esses *solvers* serão adaptados quando necessário.

### 4.6.1 heleshawFoam e ergunFoam

Os *solvers* heleshawFoam e ergunFoam são ambos criados a partir do simpleFoam para solucionar escoamentos incompressíveis em regime estacionário. O heleshawFoam resolve o escoamento em uma célula de Hele-Shaw, representada pela Equação (2.26) e o ergunFoam resolve a Equação de Darcy-Brinkman com a permeabilidade de Ergun dada pelas Equações (2.39) e (2.51). Esses solvers empregam o algoritmo SIMPLE para resolver as equações da continuidade e de momento linear. A estrutura do diretório desse *solver* contém os seguintes arquivos:

```

solver simpleFoam
├── createFields.H
├── Make
│   ├── files
│   └── options
├── pEqn.H
├── heleshawFoam.C/ergunFoam.C
└── UEqn.H

```

Para esses dois *solvers*, o conjunto de arquivos fonte principal é composto por heleshawFoam.C ou ergunFoam.C e createFields.H. O arquivo createFields.H é fundamental para a configuração inicial dos campos de simulação, como velocidade e pressão. A pasta Make contém os arquivos files e options, que são utilizados para especificar as fontes e as opções de compilação necessárias para o solver. O arquivo pEqn.H lida com a solução da equação da pressão. Por fim, o arquivo UEqn.H é responsável pela resolução da equação do momento. O arquivo heleshawFoam.C ou brinkmanFoam.C (dependendo do *solver* a ser utilizado) faz o controle ou seja, a coordenação da resolução das equações, por meio do gerenciamento do processo de simulação.

## 4.6.2 mhdheleshawFoam e mhdergunFoam

Esses *solvers* foram desenvolvidos a partir de modificações no *solver* padrão mhdFoam. São desenvolvidos para a solução de escoamentos MHD e utilizam o algoritmo PISO para o acoplamento pressão-velocidade e o algoritmo B-PISO para garantir a divergência nula de  $\mathbf{B}$ . Sendo utilizado para escoamento laminar, incompressível com um fluido eletricamente condutor sob a influência de um campo magnético. O *solver* mhdheleshawFoam soluciona a Equação (2.102) e o *solver* mhdergunFoam soluciona a Equação (2.102) com o termo de Darcy. Ambos esses *solvers* solucionam também a Equação (2.107). A estrutura do diretório desse *solver* contém os seguintes arquivos:

```
|_ createControl.H
|_ createFields.H
|_ createPhiB.H
|_ magneticFieldErr.H
|_ Make
|   |_ files
|   |_ options
|_ mhdheleshawFoam.C/mhdergunFoam
|_ readBPISOCcontrols.H
```

O conjunto de arquivos fonte principal é composto por `mhdFoam.C` e `createFields.H`. Adicionalmente, o arquivo `createPhiB.H` está vinculado ao *loop* B-PISO e é responsável pela geração do fluxo do campo magnético, denotado por  $\phi_B$ . Os arquivos `readBPISOCcontrols.H` e `magneticFieldErr.H` contribuem para a análise do sistema ao imprimir o desvio da divergência do campo magnético em relação a um valor nulo, uma métrica necessária para a verificação da precisão numérica. Além disso, o arquivo `createControl.H` é fundamental para estabelecer a inicialização dos *loops* PISO e B-PISO (TASSONE, 2016). É possível observar o arquivo `mhdergunFoam.C` para compreender melhor a implementação numérica desse modelo.

```
1 #include "CourantNo.H"
2 {
3     fvVectorMatrix UEqn
4     (
5         fvm::ddt(U)
6         - fvc::div(phiB, 2.0*DBU*B)
7         - fvm::laplacian(mu, U)
8         + ergun*U
9         + fvc::grad(DBU*magSqr(B))
10    );
```

```

11
12     if ( piso.momentumPredictor() )
13     {
14         solve(UEqn == -fvc::grad(p));
15     }
16 }

```

Em que:

$$\text{fvc::grad}(\text{DBU} * \text{magSqr}(\mathbf{B})) = \frac{1}{2\mu_0} \nabla \mathbf{B}^2$$

$$\text{fvc::div}(\text{phiB}, 2.0 * \text{DBU} * \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Em que a definição dos escalares DBU e DB podem ser encontradas no arquivo `createFields.H`:

```
dimensionedScalar DB = 1.0/(muo*sigmae); DB.name() = "DB";
```

```
dimensionedScalar DBU = 1.0/(2.0*muo); DBU.name() = "DBU";
```

Note que o `*` está indicando explicitamente uma multiplicação entre os termos.

Por fim, observe que o termo Ergun, representa  $mu/k$ , e sua definição é feita diretamente no arquivo `transportProperties`.

### 4.6.3 interheleshawFoam e interergunFoam

Para a criação desses *solvers*, o `interFoam`, um solucionador padrão do OpenFOAM designado para simulações de escoamento envolvendo dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e isotérmicos, foi modificado. Este solucionador adota uma abordagem fundamentada no método VoF em sua forma modificada, incorporando um termo de fluxo de compressão interfacial com o intuito de atenuar os efeitos de espalhamento numérico (*numerical smearing*) na interface. Esse espalhamento numérico pode ocasionar distorções na interface (DESPANDE; ANUMOLU; TRUJILLO, 2012; KURBANALIEV et al., 2019). A estrutura do diretório desse *solver* contém os seguintes arquivos:

```

├─ alphaSuSp.H
├─ correctPhi.H
├─ createFields.H
├─ initCorrectPhi.H
├─ interheleshawFoam/interergunFoam.C
├─ Make
│   └─ files
│       └─ options
├─ pEqn.H
└─ rhofs.H

```

```

└─ UEqn.H

```

O arquivo principal é o `interFoam.C`, acompanhado por `createFields.H` para a inicialização dos campos. Os arquivos `alphaSuSp.H`, `correctPhi.H` e `InitCorrectPhi.H` gerenciam a superfície livre e a conservação do fluxo de massa, enquanto `pEqn.H` e `UEqn.H` resolvem as equações de pressão e momento, respectivamente. `rhofs.h` define as propriedades da massa específica dos fluidos. A interação desses arquivos é necessária para capturar a complexa interação entre as fases. As modificações feitas no *solver* padrão envolveram a retirada do termo inercial e a consideração do termo viscoso no caso do `interheleshawFoam`. No caso do `interergunFoam`, além dessas alterações, ainda é considerado o termo de Darcy.

#### 4.6.4 forchheimerFoam

Esse *solver* foi criado com base no *solver* padrão `icoFoam` (feito para escoamento incompressível e laminar). O `forchheimerFoam` foi desenvolvido para resolver a Equação (2.44).

A estrutura do diretório desse *solver* contém os seguintes arquivos:

```

└─ createFields.H
└─ forchheimerFoam.C
└─ Make
    └─ files
    └─ options

```

Uma parte do arquivo `forchheimerFoam.C` é detalhado para uma melhor compreensão da implementação numérica desse modelo.

```

1 #include "CourantNo.H"
2
3     // Momentum predictor
4
5     volScalarField      modU = mag(U);
6
7     fvVectorMatrix UEqn
8     (
9         fvm::ddt(rho,U)
10        + ( mu/k ) * U
11        + ( rho * beta * (pow(k, -1.0/2.0)) ) * U * modU
12        );
13

```

```
14         if (piso.momentumPredictor())
15         {
16             solve(UEqn == -fvc::grad(p));
17         }
```

Observe que o termo temporal aparece nesse código. Ele foi mantido para evitar a necessidade de alterar a estrutura do *solver*. Vale ressaltar que isso não é considerado um problema para a simulação, já que foi aguardado até que ela atingisse o estado estacionário.

## 5 Resultados

Neste capítulo, são apresentadas as diferentes configurações de escoamentos sob a influência de diversos efeitos. Para todos os escoamentos, foi utilizada a velocidade média e a distância entre as paredes para adimensionalizar a velocidade e o comprimento, respectivamente. A única exceção é na escala típica de comprimento, em que, para a seção 5.1, foi utilizado o comprimento do canal. Outra informação importante é que, quando forem analisados escoamentos hidrodinâmicos, foi utilizada como fluido de trabalho a água, com  $\rho = 998.2072 \text{ kg/m}^3$  e  $\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Para escoamentos com fluido eletricamente condutor, foi utilizada água salgada, com  $\rho = 1024.8103 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.077 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  e  $\sigma_e = 4.8 \text{ S/m}$ . Para esses escoamentos também será utilizado  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ .

As malhas utilizadas nas simulações para cada seção bem como a escolha de discretização dos operadores matemáticos e critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares podem ser visualizados nos Apêndices A.10 e A.7.

### 5.1 Escoamento em uma célula de Hele-Shaw

O primeiro escoamento a ser estudado numericamente será o escoamento em uma célula de Hele-Shaw. A geometria utilizada é apresentada na Figura 4.4 com  $l = 0.38 \text{ m}$  e  $b$  variando de acordo com o caso analisado.

#### 5.1.1 Malha

A Figura 5.1 e a Tabela 6 apresentam o estudo de convergência de malha realizado. Dessa forma, observa-se que a malha de 50000 elementos apresenta um ponto de equilíbrio ideal entre precisão numérica e custo computacional em relação a vazão. Ao avaliar malhas com refino menor, variando de 2000 a 30000 elementos, nota-se que o erro associado a essas malhas em relação ao valor da vazão teórica é significativamente maior ( $\approx 2.23$  vezes) em comparação à malha de 50000 elementos. É possível avaliar a malha de 150000 elementos, que apresenta um erro ainda menor, porém isso ocorre a um custo computacional de 3 vezes mais elementos. Portanto, a malha de 50000 elementos já proporciona um erro inferior a 0.1% em relação a vazão teórica, o que garante resultados com precisão competitiva. Entretanto, qualquer malha a partir de 50000 elementos pode ser usada, e o aumento

desses elementos garantirá resultados mais próximos aos teóricos, mas com um baixo custo-benefício. Para esse escoamento, foi utilizada a malha de 150000 elementos, pois, dada a simplicidade desse escoamento, é possível obter resultados mais próximos do teórico sem que o tempo de simulação se torne um fator limitante.

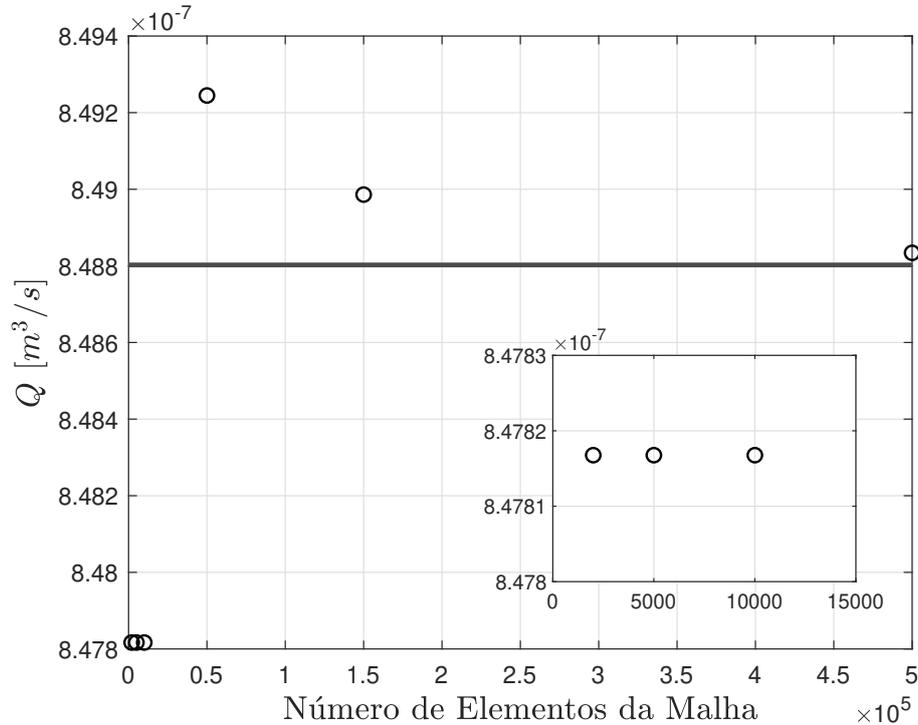


Figura 5.1 – Vazão dimensional,  $Q$  em relação ao número de elementos utilizados na malha computacional. A linha — representa a vazão da teoria de Hele-Shaw,  $\circ$  representa os valores da vazão calculados numericamente.  $G = 36.84 \text{ Pa/m}$ .

Tabela 6 – Relação entre o número de elementos da malha computacional e a vazão numérica dimensional ( $Q_{num}$ ), bem como o erro em relação a vazão dimensional da teoria de Hele-Shaw ( $Q_{teo}$ ). Note que  $Q_{num} \times 10^{-7}$  equivale ao valor da vazão multiplicado por  $10^{-7}$ . Essa é a convenção adotada para todos os gráficos e tabelas.

N	$Q_{num} \times 10^{-7} [m^3/s]$	Erro em relação a $Q_{teo}$ (%)
2000	8.478	0.116
5000	8.478	0.116
10000	8.478	0.116
50000	8.492	0.052
150000	8.490	0.022
500000	8.488	0.004

### 5.1.2 Análise dos Resultados

A Figura 5.2, mostra os perfis de velocidade parabólicos criados pelo escoamento devido a variação de  $G$ . Nota-se, que quanto maior for o valor do  $G$ , maior será a velocidade do escoamento. Pela Figura 5.3 observa-se que todas as curvas dimensionais possuem a

mesma curva no espaço adimensional devido a adimensionalização pela velocidade média de cada escoamento.

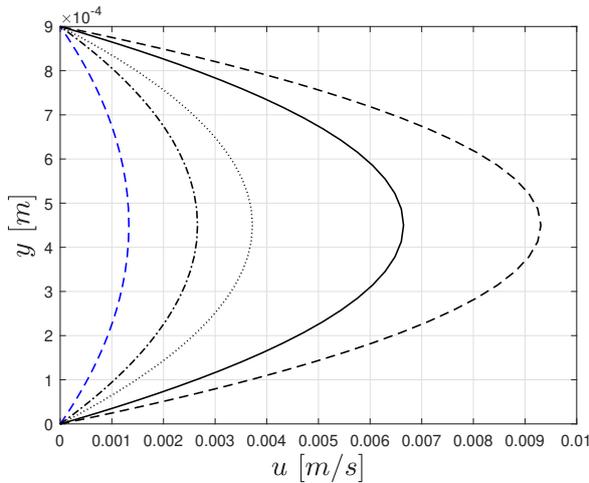


Figura 5.2 – Perfis de velocidade em relação ao gradiente de pressão.

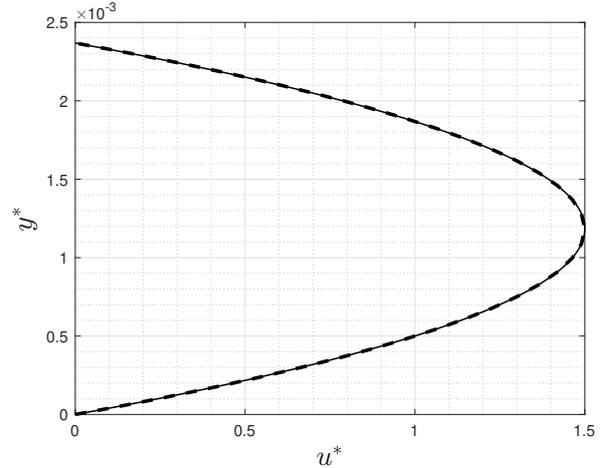


Figura 5.3 – Representação dos perfis de velocidade adimensionais da Figura 5.2.

Para a Figura 5.2, a linha --- (azul) representa  $G = 13.16 \text{ Pa/m}$ , a - - - representa  $G = 26.32 \text{ Pa/m}$ , a ..... representa  $G = 36.84 \text{ Pa/m}$ , a — representa  $G = 65.79 \text{ Pa/m}$ , e a - . - . - representa  $G = 92.10 \text{ Pa/m}$ .

A Figura 5.4 mostra a correlação entre  $Q$  e  $G$ . Observa-se um aumento da vazão com o aumento de  $G$ , esse é um comportamento característico dos escoamentos movidos pela pressão. No espaço adimensional, verifica-se uma convergência dos dados dos escoamentos para um ponto único, como discutido anteriormente.

A Figura 5.5 apresenta a relação não-linear entre o gradiente de pressão e a permeabilidade, ambos adimensionais. Na equação de  $G^*$ , o  $G^*$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as paredes que delimitam o escoamento, ou seja, um aumento nessa distância resulta em uma diminuição em  $G^*$ . Isso ocorre porque é como se as paredes que delimitam o escoamento estivessem sendo separadas, ou seja, indicando uma maior queda de pressão por unidade de comprimento, ocasionando uma maior permeabilidade (menor resistência do fluido ao escoar). Essa menor resistência também pode ser observada com a análise da equação de  $k^*$ , que mostra que o aumento na distância entre as paredes gera um aumento de  $k^*$ .

A viscosidade de parede teórica para esse escoamento resulta em um valor constante e igual a 12. Isso acontece porque esse escoamento acontece em condições de número de Reynolds muito baixos (*creeping flow*). Ou seja, o escoamento é dominado quase que exclusivamente pelas forças viscosas. Os valores calculados numericamente tiveram um valor médio de 12.008, mostrando a proximidade da solução teórica com a numérica.

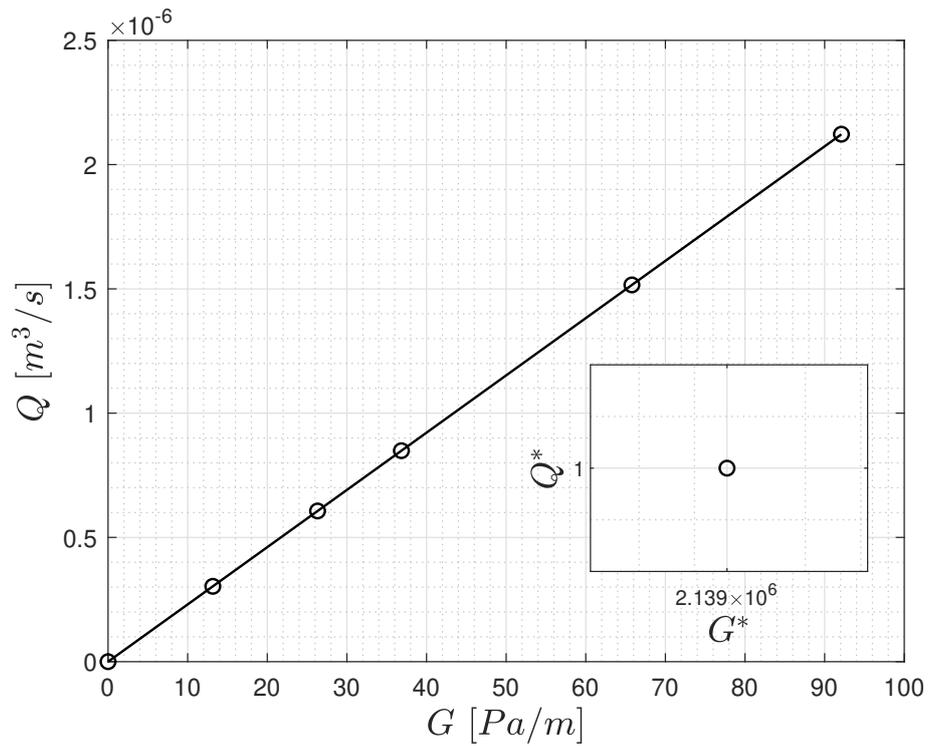


Figura 5.4 – Relação entre a vazão e o gradiente de pressão  $G$  variando de 0 a 92.11. A linha — representa a vazão da teoria de Hele-Shaw,  $\circ$  representa os valores da vazão calculados numericamente. O encarte representa a adimensionalização dos escoamentos.

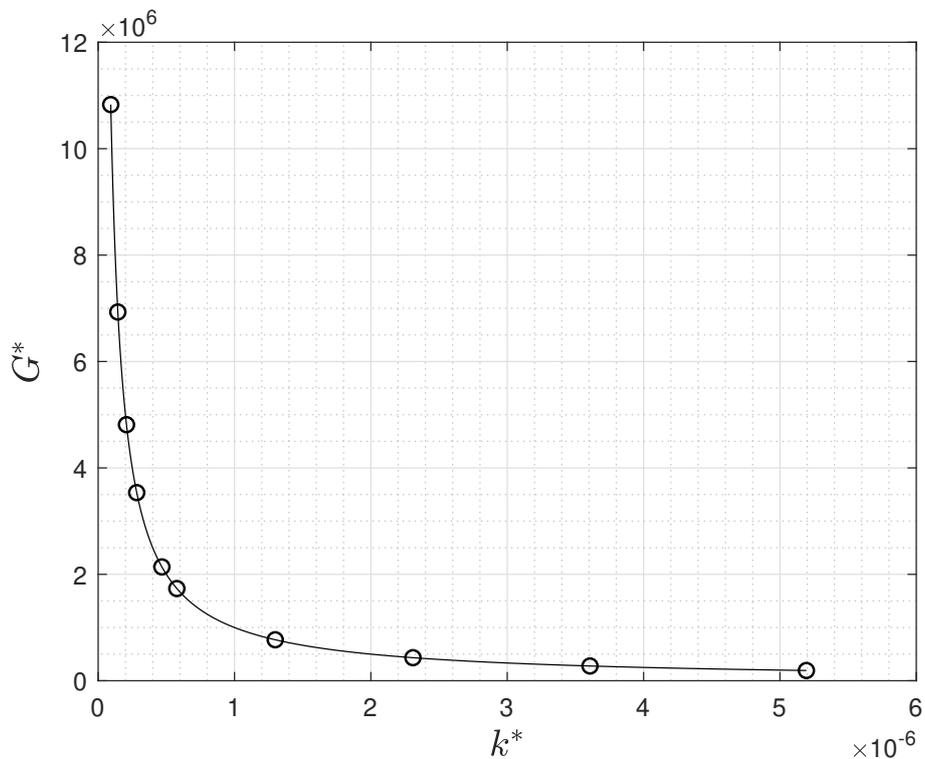


Figura 5.5 – Relação entre o gradiente de pressão adimensional  $G^*$  e a permeabilidade adimensional  $k^*$ . A escala típica de comprimento utilizada para a adimensionalização foi o  $l$ . A linha — representa a curva descrita pela teoria de Hele-Shaw e  $\circ$  representa os valores calculados numericamente.

## 5.2 Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw

Agora, analisa-se numericamente o escoamento em uma célula de Hele-Shaw, conforme descrito na seção 5.1, com a adição de um campo magnético externo transversal ao escoamento (vide Figura 2.10).

### 5.2.1 Malha

Em relação as métricas de qualidade, a malha teve uma *skewness* máxima e média de  $2.4104 \times 10^{-11}$  e  $3.1973 \times 10^{-12}$ , respectivamente. Para a razão de aspecto, foi obtido um valor máximo e médio de 12.1762 e 5.6802, respectivamente. As Figuras 5.6 e 5.8 ilustram os resultados obtidos para o perfil de velocidade e a densidade de fluxo magnético induzido, respectivamente, atuando como validação das simulações computacionais realizadas. Adicionalmente, o erro percentual absoluto (*Absolute Percentage Error (APE)*) entre os valores teóricos e numéricos são apresentados nas Figuras 5.7 e 5.9, permitindo uma avaliação quantitativa da precisão das simulações. Observa-se que, para os resultados obtidos, há uma convergência entre os resultados numéricos e teóricos. É importante destacar que os maiores desvios foram identificados nas proximidades das paredes do canal, regiões estas que são caracterizadas por altos gradientes de velocidade. Este comportamento é esperado pois nos escoamentos, as paredes são regiões de singularidade devido a aplicação das condições de não deslizamento. A diminuição desses erros ocorre em direção ao centro do canal, ou seja, conforme o escoamento está mais distante das paredes.

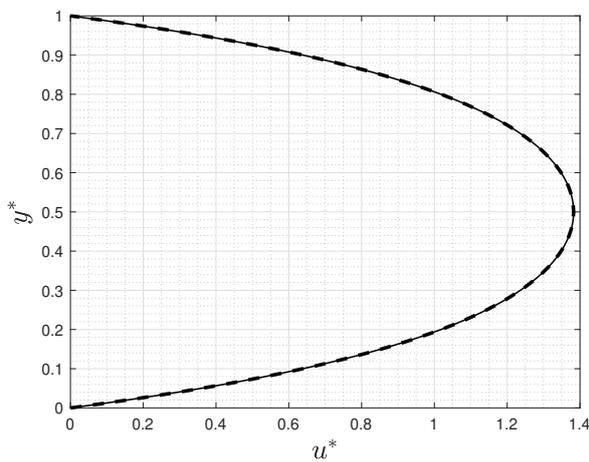


Figura 5.6 – Perfil de velocidade adimensionalizado pela velocidade média do escoamento para  $Ha = 5$ .

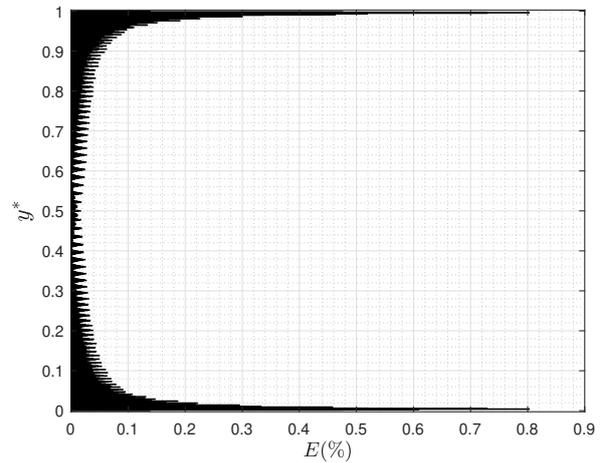


Figura 5.7 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.6. O valor médio obtido foi de 0.0398%.

Para a Figura 5.6, a linha — representa os valores teóricos e a --- os valores numéricos.

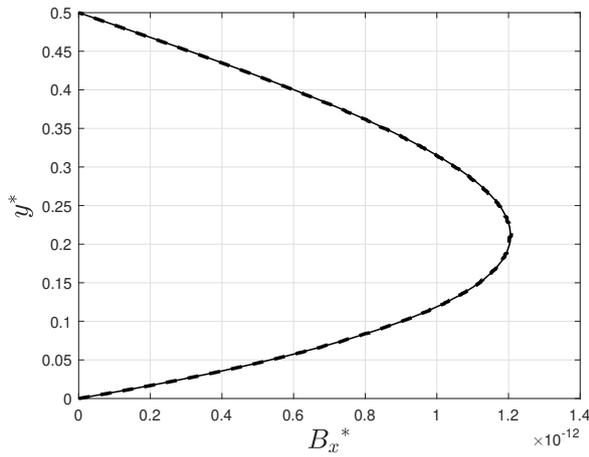


Figura 5.8 – Perfil de densidade de fluxo magnético induzido para  $Ha = 5$ .

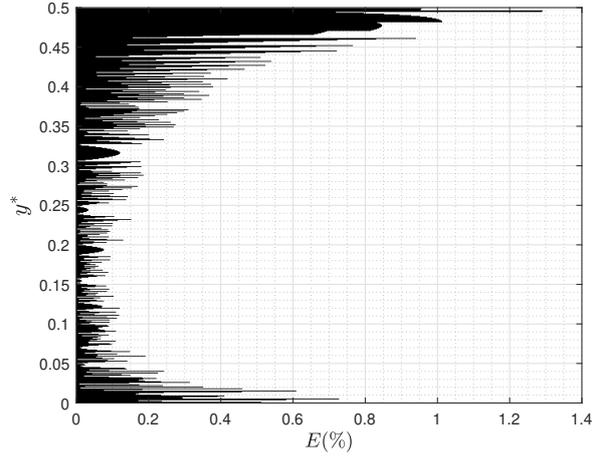


Figura 5.9 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.8. O valor médio obtido foi de 0.1844%.

Para a Figura 5.8, a linha — representa os valores teóricos e a --- os valores numéricos.

## 5.2.2 Análise dos Resultados

As Figura 5.10 e 5.11 apresentam os resultados para os perfis de velocidade e para os perfis de densidade de fluxo magnético induzido para o escoamento obtidos numericamente. É possível observar que o aumento do número de Hartmann, ou seja, dos efeitos magnéticos resultam na desaceleração do escoamento. Esse efeito pode ser visualizado na Figura 5.10, em que observa-se uma drástica desaceleração a medida que o  $Ha$  é aumentado de 0.1 até 10. É importante notar que para essa variação de  $Ha$  foi obtida uma desaceleração da velocidade máxima do escoamento de aproximadamente 18%.

Na Figura 5.11 é apresentada a relação entre a densidade de fluxo magnético induzido e a velocidade do escoamento. O módulo da densidade de fluxo magnético induzido diminui a medida que o escoamento é desacelerado devido ao aumento do número de Hartmann. Note que esse comportamento acontece pois o  $B_x$  está intrinsecamente ligado ao  $u$ , e como existe uma diminuição da velocidade do escoamento com o aumento do  $Ha$ , essa interação fica mais fraca. É importante notar também pela Figura 5.12 que de  $Ha = 0.1$  até  $Ha = 10$  foi obtido um decaimento da densidade de fluxo magnético induzido máxima de aproximadamente 70%.

A Figura 5.13 mostra que a viscosidade de parede do fluido aumenta com  $Ha$ . Isso significa que os efeitos magnéticos fazem com que o fluido apresente uma viscosidade aparente maior próximo às paredes. O aumento do número de  $Ha$  promove uma desaceleração no fluido, que se manifesta como um aumento na viscosidade. Esse aumento é evidenciado na viscosidade de parede, que também aumenta com o aumento de  $Ha$ , já que a viscosidade *bulk* do fluido aumenta. Além disso, vale lembrar que  $\mu_w^*$  é exatamente o fator de atrito para esse escoamento e, como a viscosidade do fluido aumenta, o fator de atrito também deve aumentar, resultando em uma maior dissipação de energia por ação

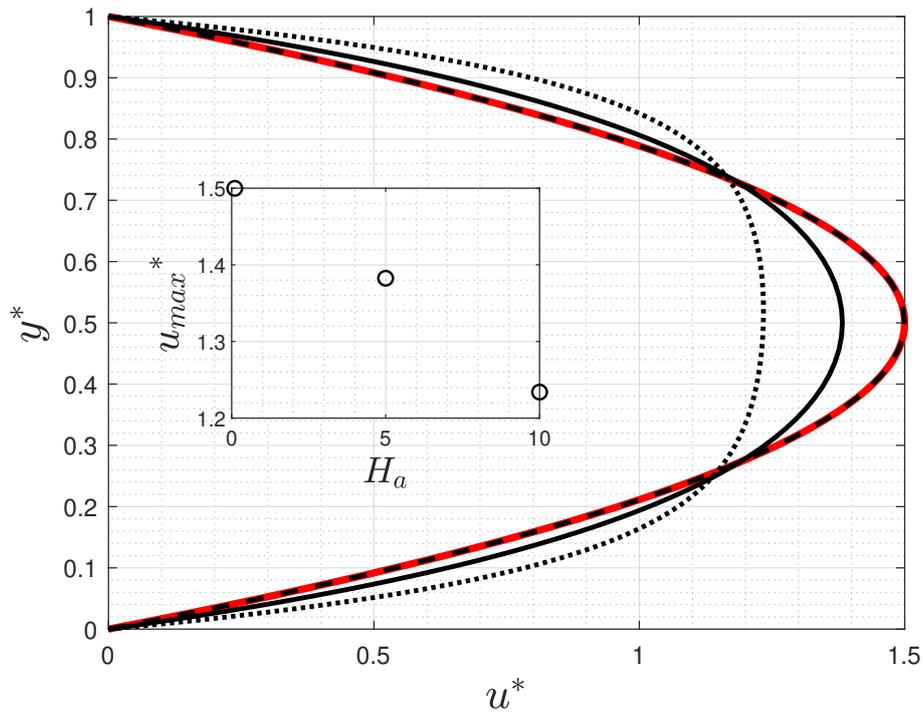


Figura 5.10 – Perfis de velocidade adimensionais para  $Ha$  variando de 0 até 10. A — (vermelha) representa  $Ha = 0$ , a --- representa  $Ha = 0.1$ , — representa  $Ha = 5$  e ..... representa  $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima dos escoamentos em função do número de Hartmann.

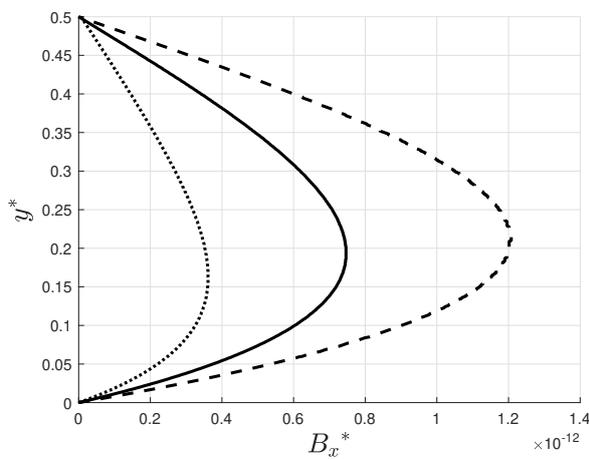


Figura 5.11 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a  $Ha$ .

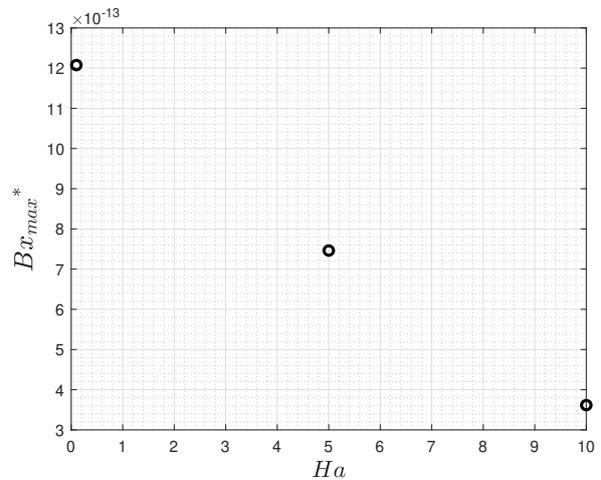


Figura 5.12 – Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido máxima em relação a  $Ha$ .

Para a Figura 5.11 a linha --- representa  $Ha = 0.1$ , — representa  $Ha = 5$  e a ..... representa  $Ha = 10$ .

da viscosidade.

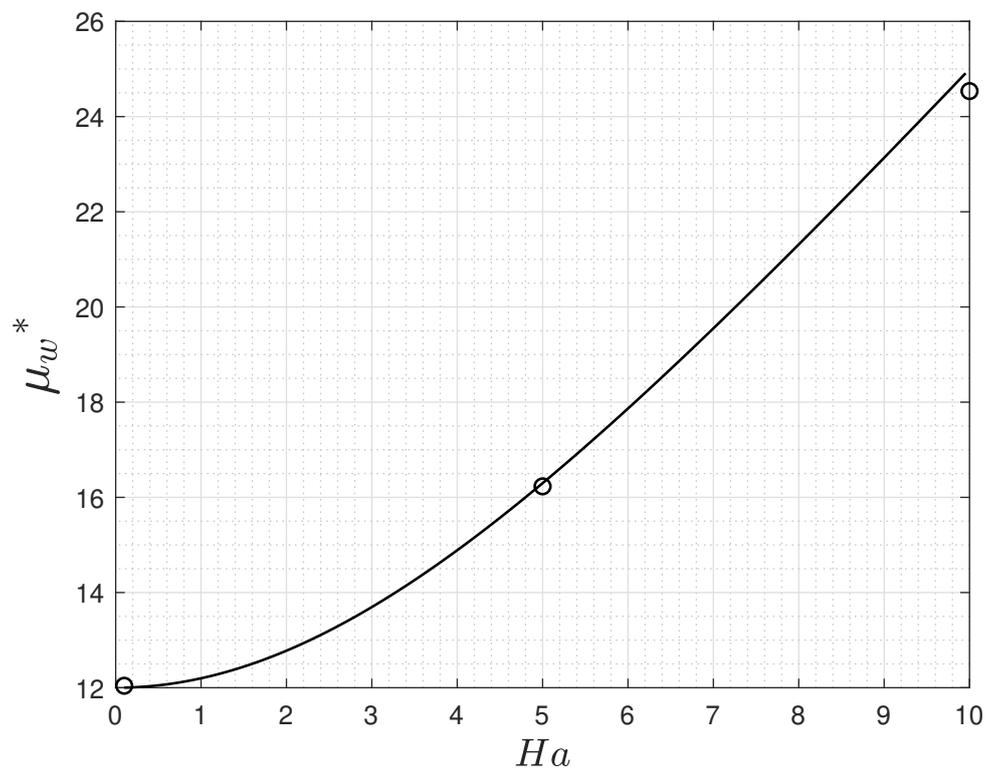


Figura 5.13 – Viscosidade de parede em relação ao número de Hartmann para um escoamento MHD em uma célula de Hele-Shaw. A linha — representa o valor teórico e o  $\circ$  os valores numéricos.

## 5.3 Escoamento em um Meio Poroso

Agora será analisado um escoamento em meio poroso utilizando a equação de Darcy generalizada com a permeabilidade de Ergun, sem a aplicação de campo magnético externo, em uma configuração geométrica semelhante à utilizada no escoamento em uma célula de Hele-Shaw, porém com um  $b$  fixo para todas as simulações. A grande diferença entre esses casos, é a permeabilidade. Como visto anteriormente, a permeabilidade em uma célula de Hele-Shaw varia apenas com  $b$  e, para Ergun, depende da porosidade e do diâmetro das esferas. Para todos os escoamentos em meio poroso neste trabalho, o diâmetro das esferas foi considerado como sendo  $d = 0.0003 \text{ m}$ .

### 5.3.1 Malha

A malha para solucionar esses escoamentos teve um total de 800000 elementos com uma razão de aspecto máxima de 8.4395 e média de 4.2173. Os valores máximos ficaram situados nas regiões próximas as paredes, pois foram concentrados a maior parte dos elementos para poder captar os efeitos da parede sob o escoamento. A segunda métrica avaliada foi a *skewness*, que teve um valor máximo de  $1.44 \times 10^{-11}$  e médio de  $1.89 \times 10^{-12}$ . Esses valores mostram uma alta qualidade dos elementos, uma vez que eles estão muito próximos de 0.

A comparação entre os resultados do campo de velocidade obtidos pela simulação numérica e os valores teóricos, utilizando  $\varepsilon = 0.75$  (vide Figura 5.14) foi utilizada para validar as simulações. A análise de erro, apresentada na Figura 5.15, demonstra que, em cada ponto ao longo do eixo  $y$ , o erro na velocidade é inferior a 1%. Esta comparação destaca a precisão da simulação em replicar os comportamentos esperados de acordo com a teoria.

### 5.3.2 Análise dos Resultados

Na Figura 5.16, é possível observar que uma diminuição no valor de  $\varepsilon$  resulta em uma diminuição na velocidade do escoamento. Este comportamento é esperado, considerando que a porosidade é a medida de espaços vazios dentro do meio poroso. Note que  $\varepsilon = 0.55$  indica que 55% do volume total do meio consiste em espaços vazios, contribuindo para a porosidade. Uma redução de 0.8 para 0.55 no valor de  $\varepsilon$  resulta em uma redução de aproximadamente 16% da velocidade máxima do escoamento. Note que esse efeito de desaceleração do escoamento quando a porosidade é reduzida é semelhante ao efeito do aumento do número de Hartmann em um escoamento MHD.

Na Figura 5.17, foi observado que um aumento na porosidade resulta em um aumento da vazão. Este aumento pode ser fisicamente interpretado como uma consequência

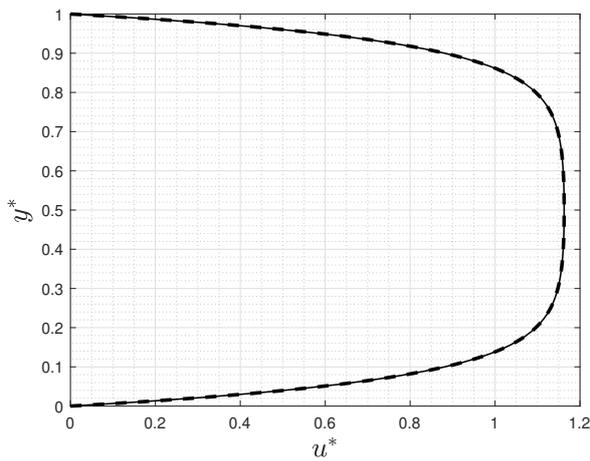


Figura 5.14 – Perfil de velocidade adimensional para  $\varepsilon = 0.75$ .

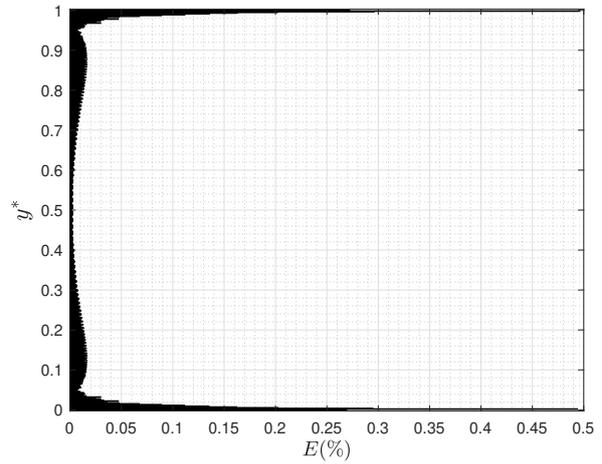


Figura 5.15 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.14. O valor médio obtido foi de 0.0121%.

Para a Figura 5.14, a linha — representa os valores teóricos e a --- os valores calculados numericamente.

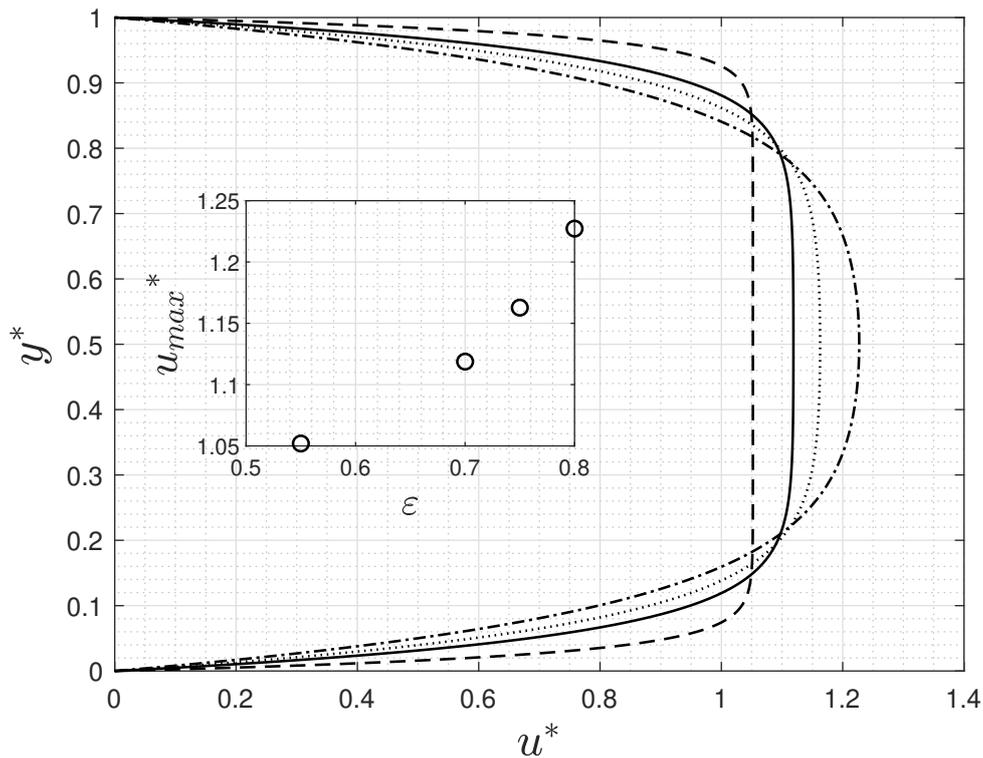


Figura 5.16 – Perfis de velocidade adimensionais para  $\varepsilon$  variando de 0.55 até 0.8. A --- representa  $\varepsilon = 0.55$ , — representa  $\varepsilon = 0.7$ , ..... representa  $\varepsilon = 0.75$ , e -·-·- representa  $\varepsilon = 0.8$ .

de poros maiores ou mais interconectados no meio, o que facilita a passagem do fluido.

A Figura 5.18 ilustra o impacto do aumento da porosidade, representado pelo incremento de  $\varepsilon$ , na viscosidade de parede. Observe que  $\mu_w^*$  apresenta valores mais elevados quando a porosidade é menor. Isso se deve ao fato de que, com menor porosidade, a resistência ao escoamento se intensifica devido aos caminhos mais estreitos e à maior

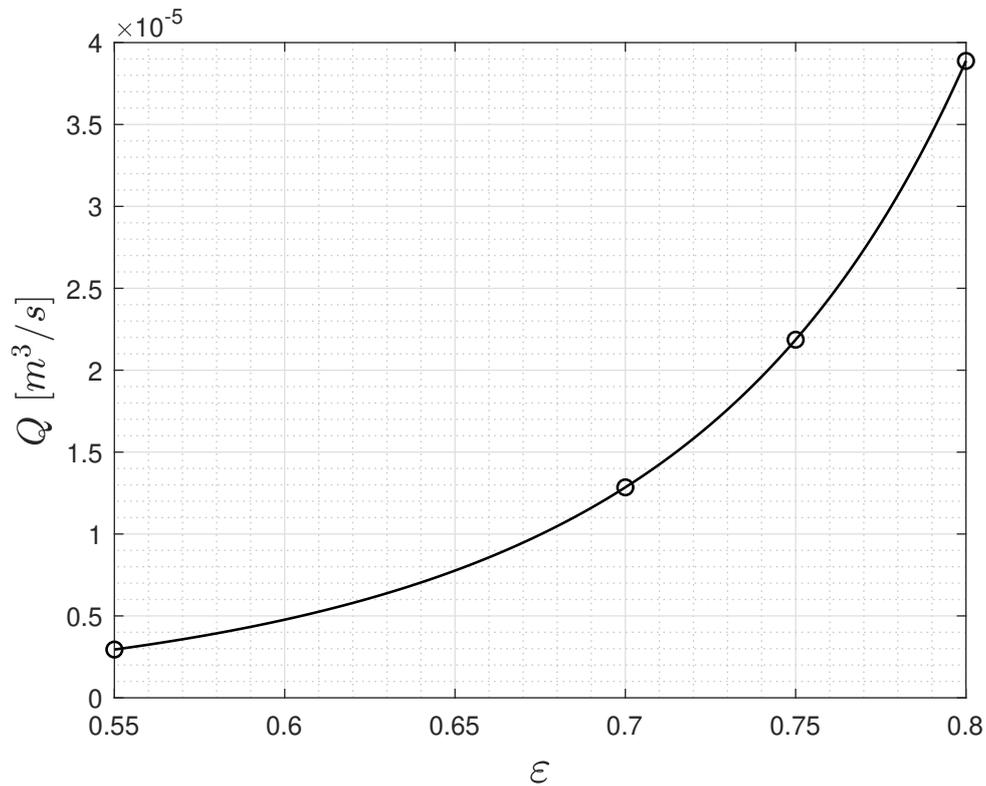


Figura 5.17 – Gráfico da vazão dimensional,  $Q$  em relação a  $\varepsilon$ . A linha — representa a vazão da teoria de Ergun, ○ representa os valores da vazão calculados numericamente.

interação entre o fluido e a matriz sólida, resultando em uma viscosidade de parede  $\mu_w^*$  mais alta.

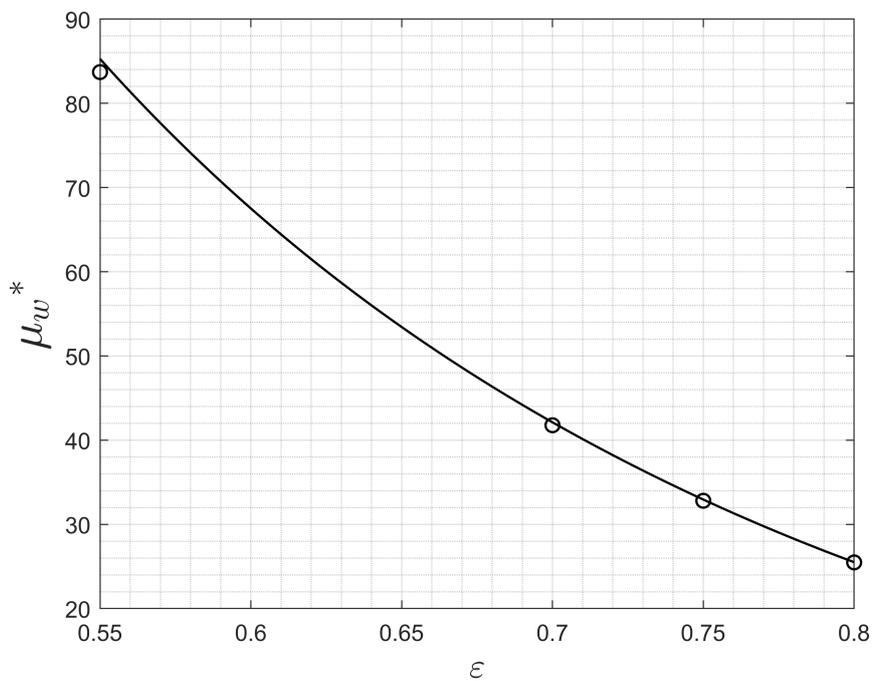


Figura 5.18 – Viscosidade de parede no meio poroso em relação a  $\varepsilon$ .

A Figura 5.19 mostra que a diminuição do diâmetro das esferas que constituem o

meio poroso, e conseqüentemente a diminuição do tamanho dos poros, causa um efeito de desaceleração no escoamento, bem como os efeitos do aumento do número de Hartmann e da diminuição da porosidade.

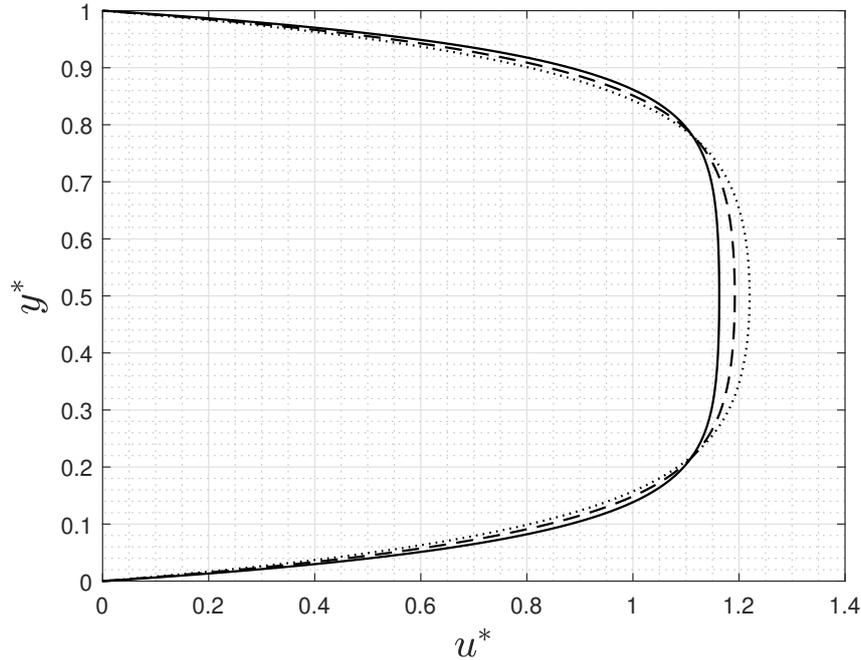


Figura 5.19 – Perfis de velocidade do escoamento. A linha — representa um diâmetro de esfera  $d = 0.0003 \text{ m}$ . A linha --- representa  $d = 0.00035 \text{ m}$  e a linha ..... representa  $d = 0.0004 \text{ m}$ .

## 5.4 Escoamento MHD em um Meio Poroso

Agora será analisado o mesmo escoamento da seção anterior, porém com um campo magnético externo aplicado. A malha utilizada nessas simulações foi a mesma da Seção 5.2.

### 5.4.1 Malha

As Figuras 5.20 e 5.22 mostram a validação do escoamento MHD em meio poroso. É possível observar que os resultados se assemelham aos obtidos para o escoamento MHD na célula de Hele-Shaw, em que o erro é mais alto próximo as paredes e diminui a medida que se aproxima do meio do canal (vide Figuras 5.21 e 5.23).

As Tabelas 7 e 8 mostram como o APE da simulação é influenciado pela variação do  $Ha$ . Todos os parâmetros foram mantidos constantes, com exceção do  $Ha$ . Essas simulações foram realizadas até o mesmo tempo.

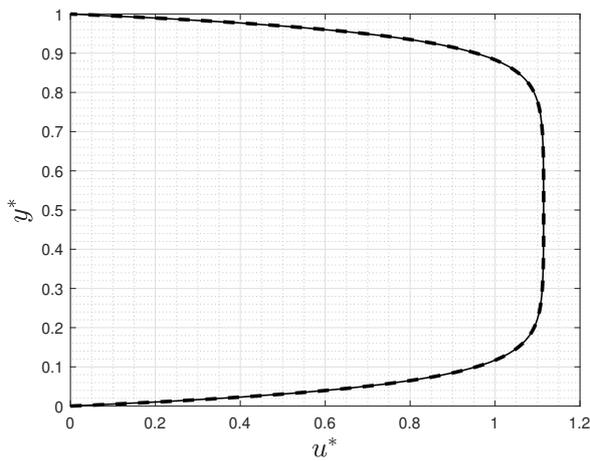


Figura 5.20 – Perfil de velocidade adimensional para  $\varepsilon = 0.7$ , e  $Ha = 10$ .

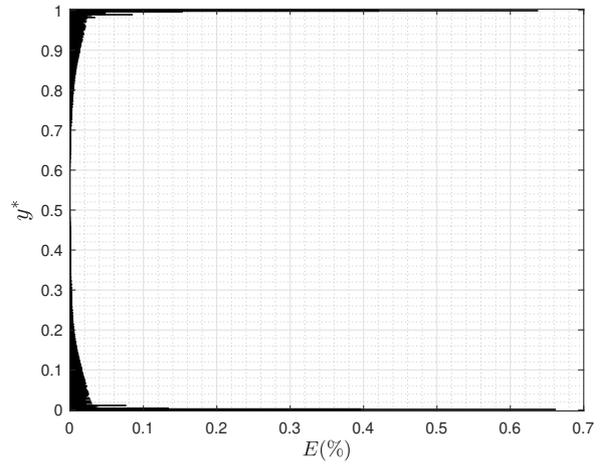


Figura 5.21 – APE entre os valores teórico e numéricos da Figura 5.20. O valor médio obtido foi de 0.0079%.

Para a Figura 5.20, a linha — representa os valores teóricos e a --- os valores calculados numericamente.

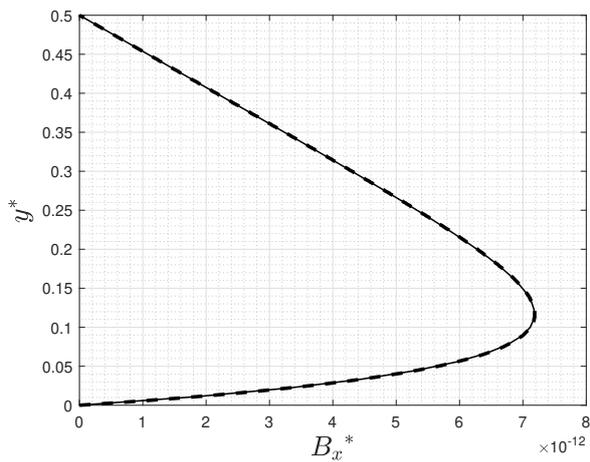


Figura 5.22 – Perfil de densidade de fluxo magnético induzido adimensional para  $\varepsilon = 0.7$  e  $Ha = 10$ .

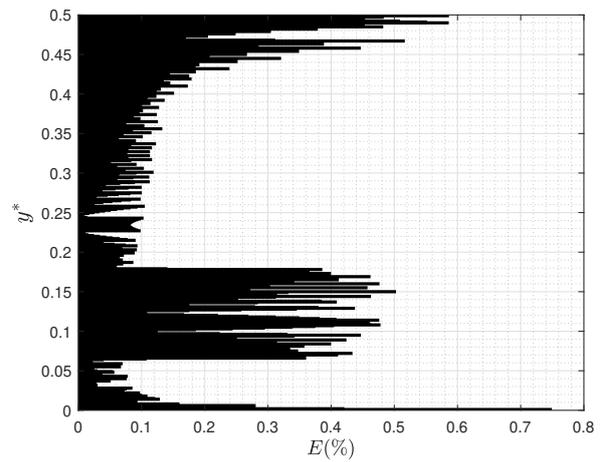


Figura 5.23 – APE entre os valores teóricos e numéricos da Figura 5.22. O valor médio obtido foi de 0.1284%.

Para a Figura 5.22, a linha — representa os valores teóricos e a --- os valores calculados numericamente.

Tabela 7 – Erro percentual absoluto máximo e médio de  $v_x^*$  entre os valores teóricos e numéricos para diferentes  $Ha$ .

$\varepsilon$	<b>Ha = 10</b>		<b>Ha = 50</b>		<b>Ha = 100</b>	
	Máx. (%)	Méd. (%)	Máx. (%)	Méd. (%)	Máx. (%)	Méd. (%)
0.55	1.7934	0.0156	2.9092	0.0184	4.8995	0.0280
0.7	0.6620	0.0079	2.2991	0.0154	4.5548	0.0266
0.75	0.8765	0.0124	2.2159	0.0148	4.5170	0.0235
0.8	0.6813	0.0297	2.1624	0.0145	4.5152	0.0390

Tabela 8 – Erro percentual absoluto máximo e médio do  $B_x^*$  entre os valores teóricos e numéricos para diferentes  $Ha$ .

$\varepsilon$	Ha = 10		Ha = 50		Ha = 100	
	Máx. (%)	Méd. (%)	Máx. (%)	Méd. (%)	Máx. (%)	Méd. (%)
0.55	1.775	0.1848	6.2050	0.1917	4.9135	0.1748
0.7	0.7493	0.1284	2.1878	0.1520	5.9776	0.2000
0.75	1.0185	0.1381	2.4059	0.1409	5.4245	0.1764
0.8	0.8953	0.1186	2.3959	0.1253	6.662	1.6307

## 5.4.2 Análise dos Resultados

É possível observar nas Figuras 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 que assim como no caso do escoamento MHD em uma célula de Hele-Shaw, com o aumento do número de Hartmann, ocorre uma desaceleração no escoamento. Esse é na verdade um comportamento padrão para essas configurações de escoamento MHD. Outro ponto interessante a se notar, é que a diminuição do valor de  $\varepsilon$  (vide Figura 5.16) causa um efeito análogo a desaceleração no escoamento causada pelo aumento do número de Hartmann.

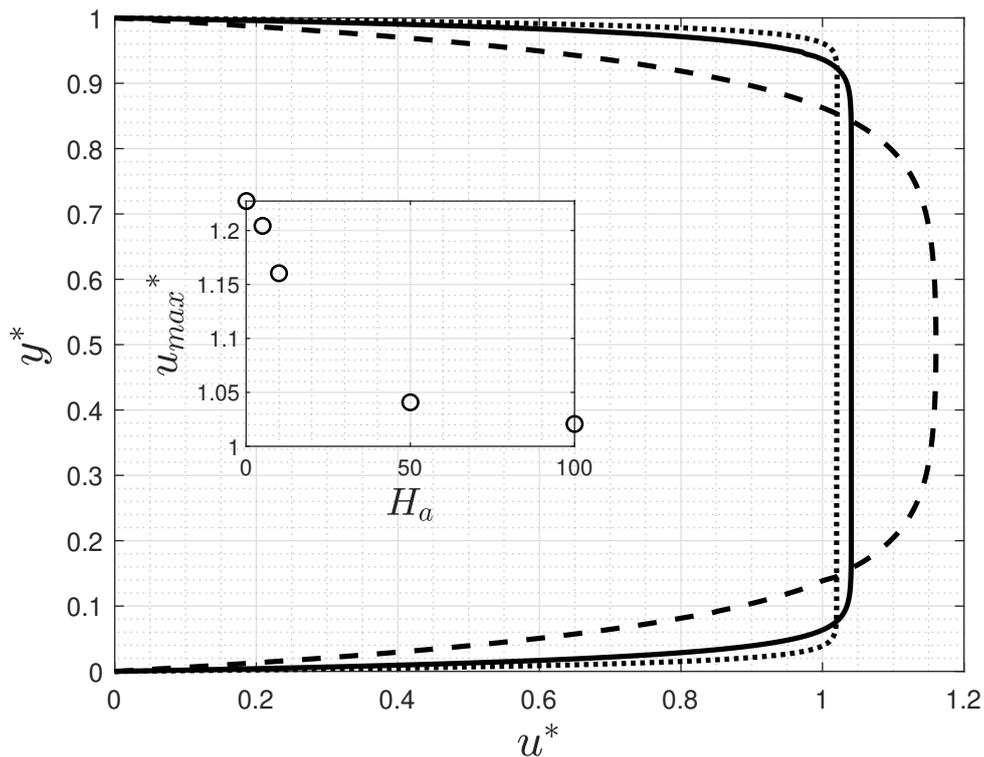


Figura 5.24 – Perfis de velocidade do escoamento em relação a  $Ha$  para  $\varepsilon = 0.8$ . A --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$ , e a ..... representa  $Ha = 100$ .

Os perfis de densidade de fluxo magnético induzido em relação a  $\varepsilon$  podem ser observados nas Figuras 5.28, 5.30, 5.32, 5.34.

A Tabela 9 apresenta a redução percentual máxima da velocidade e da densidade de fluxo magnético induzido para os escoamentos MHD em meio poroso em relação a  $\varepsilon$ .

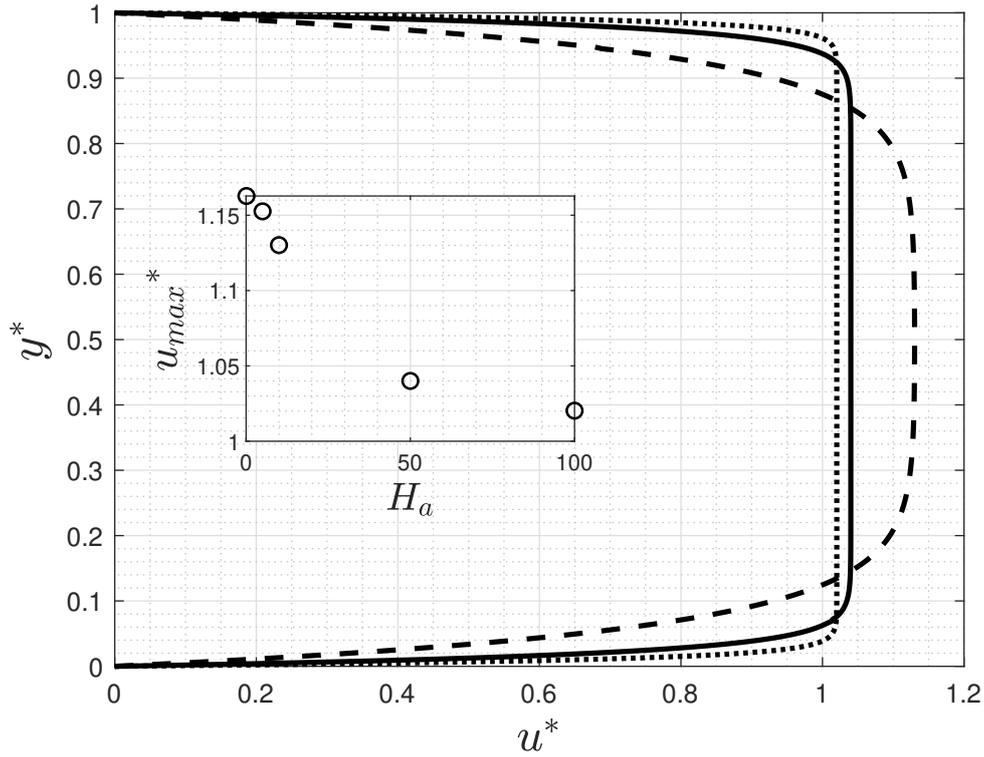


Figura 5.25 – Perfis de velocidade do escoamento em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.75$ . A --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$ , e a ..... representa  $Ha = 100$ .

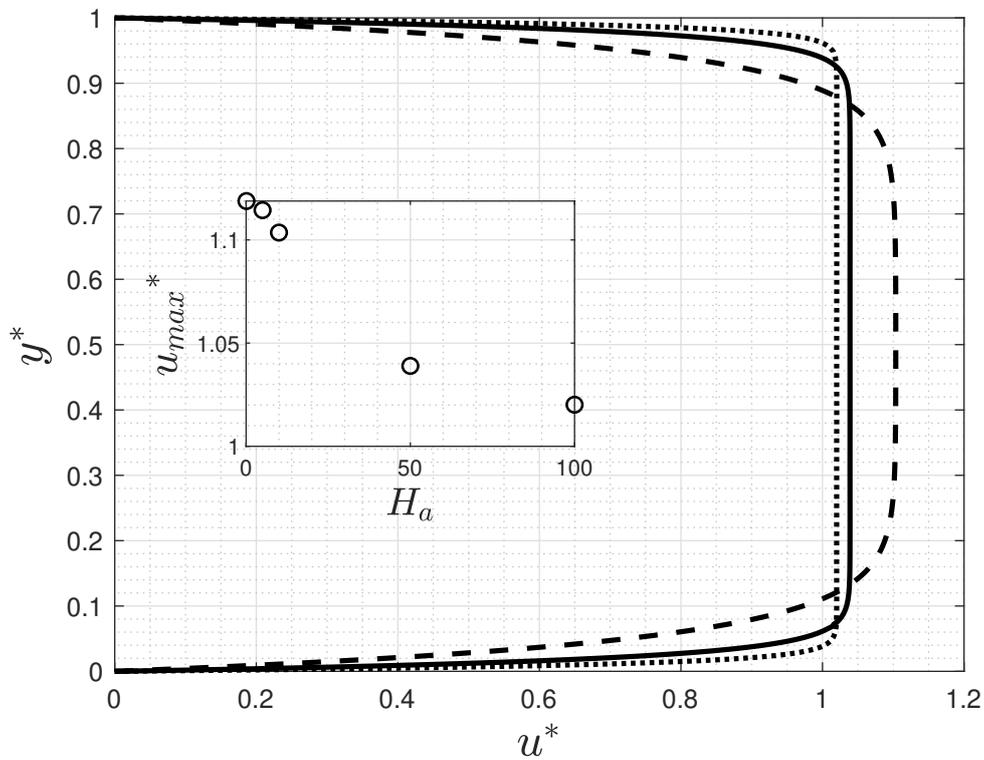


Figura 5.26 – Perfis de velocidade do escoamento em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.7$ . A --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$ , e a ..... representa  $Ha = 100$ .

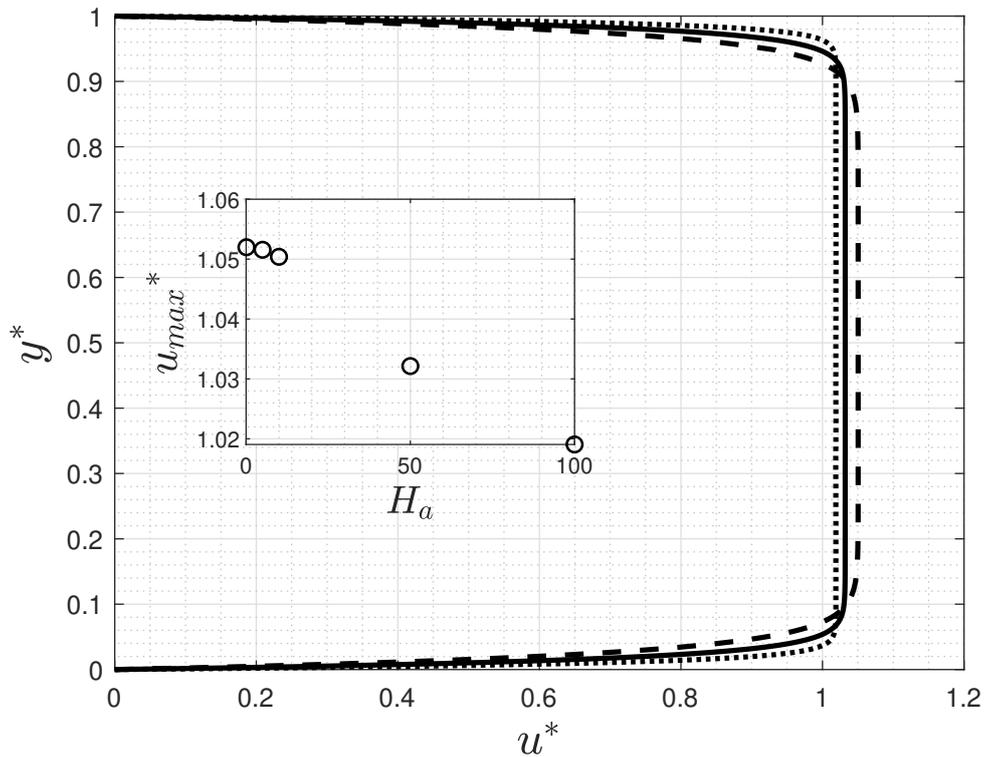


Figura 5.27 – Perfis de velocidade do escoamento em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.55$ . A --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$ , e a ..... representa  $Ha = 100$ .

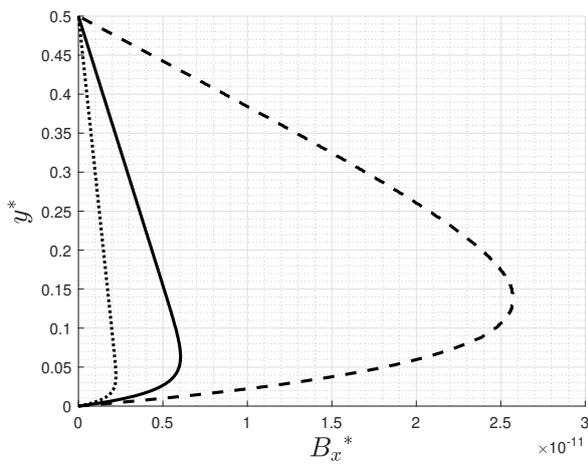


Figura 5.28 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.8$ .

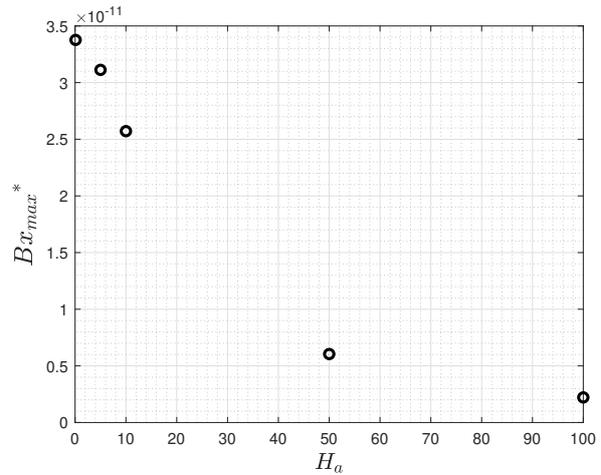


Figura 5.29 – Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a  $Ha$ .

Para a Figura 5.28, a linha --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$  e ..... representa  $Ha = 100$ .

Tabela 9 – Redução de  $u^*$  e  $B_x^*$  de  $Ha = 0.1$  até  $Ha = 100$  para diferentes porosidades.

$\varepsilon$	Redução $u^*$ máx. (%)	Redução $B_x^*$ máx. (%)
0.55	3.13	61.78
0.7	8.82	83.57
0.75	12.25	89.1
0.8	16.83	93.43

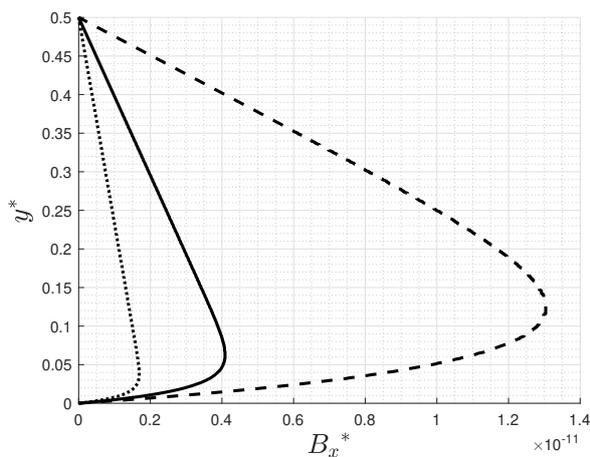


Figura 5.30 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais para  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.75$ .

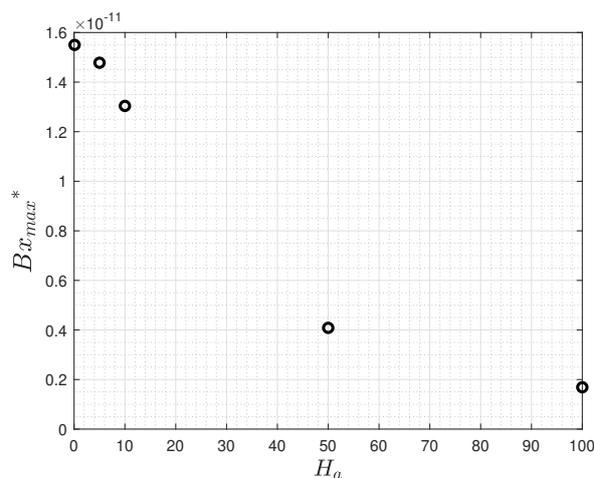


Figura 5.31 – Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a  $Ha$ .

Para a Figura 5.30, a linha --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$  e a ..... representa  $Ha = 100$ .

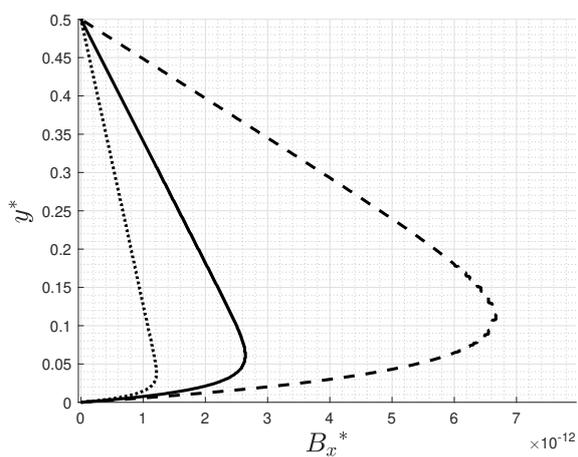


Figura 5.32 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.7$ .

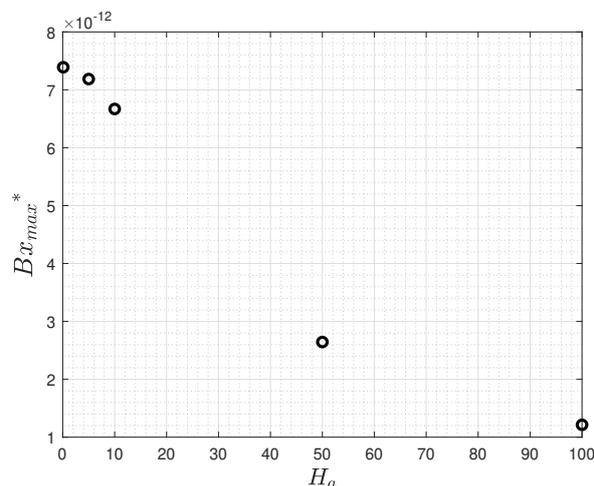


Figura 5.33 – Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a  $Ha$ .

Para a Figura 5.32, a linha --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$  e a ..... representa  $Ha = 100$ .

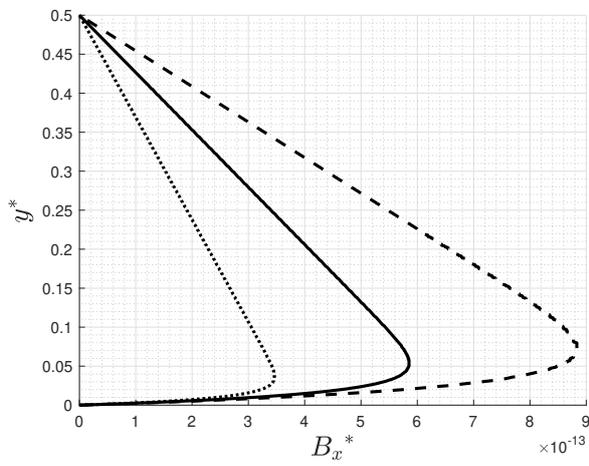


Figura 5.34 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido adimensionais em relação a  $Ha$  com  $\varepsilon = 0.55$ .

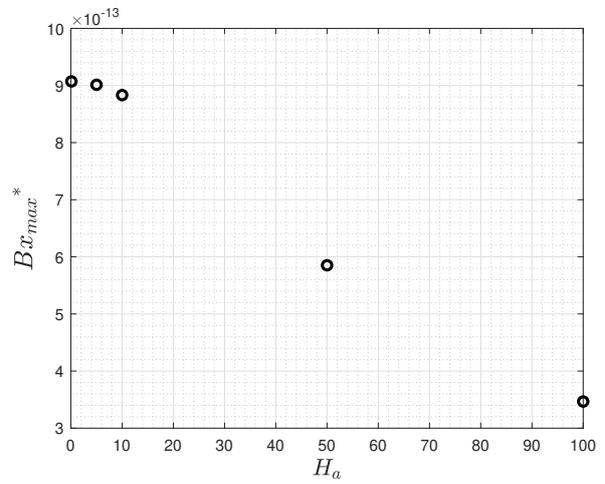


Figura 5.35 – Relação entre a densidade de fluxo magnético induzido adimensional máxima em relação a  $Ha$ .

Para a Figura 5.34, a linha --- representa  $Ha = 10$ , — representa  $Ha = 50$  e a ..... representa  $Ha = 100$ .

As Figuras 5.36, 5.37, 5.38 e 5.39 mostram a viscosidade de parede adimensional em relação a  $Ha$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ , que, como esperado, aumenta com a elevação de  $Ha$ . Note também que, quanto maior o número de Hartmann e menor a porosidade, mais os valores numéricos se distanciam dos teóricos. Por fim, observe que, conforme discutido anteriormente,  $\mu_w^*$  tem valores mais altos quando a porosidade é menor.

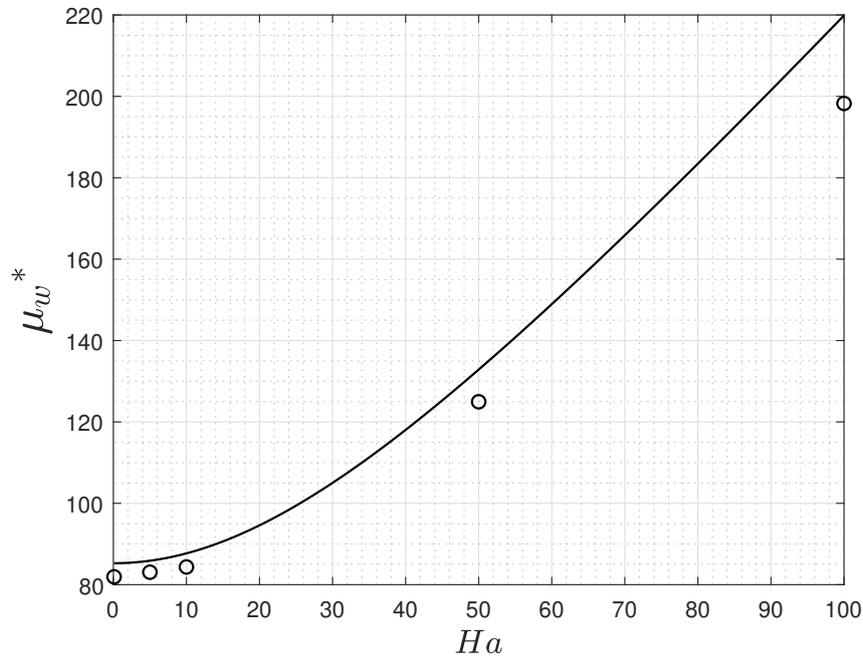


Figura 5.36 – Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com  $\varepsilon = 0.55$ . A linha — representa os valores teóricos e  $\circ$  os valores numéricos.

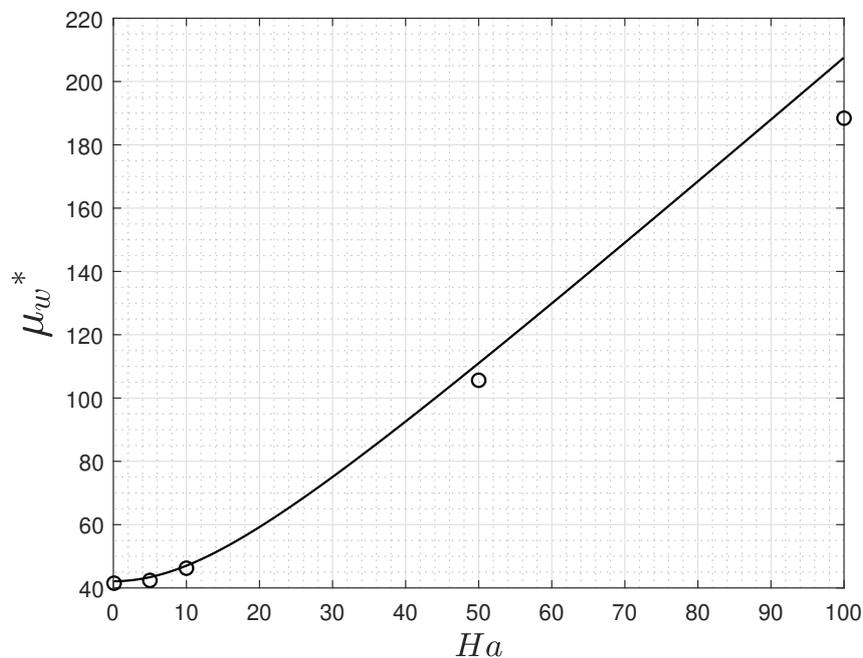


Figura 5.37 – Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com  $\varepsilon = 0.7$ . A linha — representa os valores teóricos e  $\circ$  os valores numéricos.

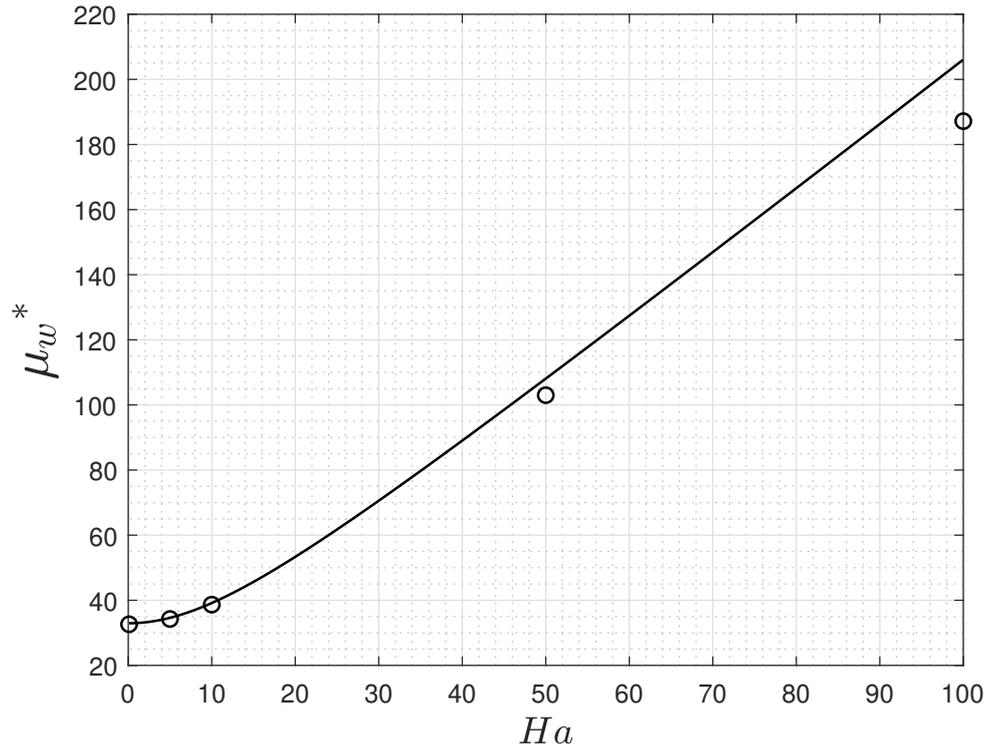


Figura 5.38 – Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com  $\varepsilon = 0.75$ .

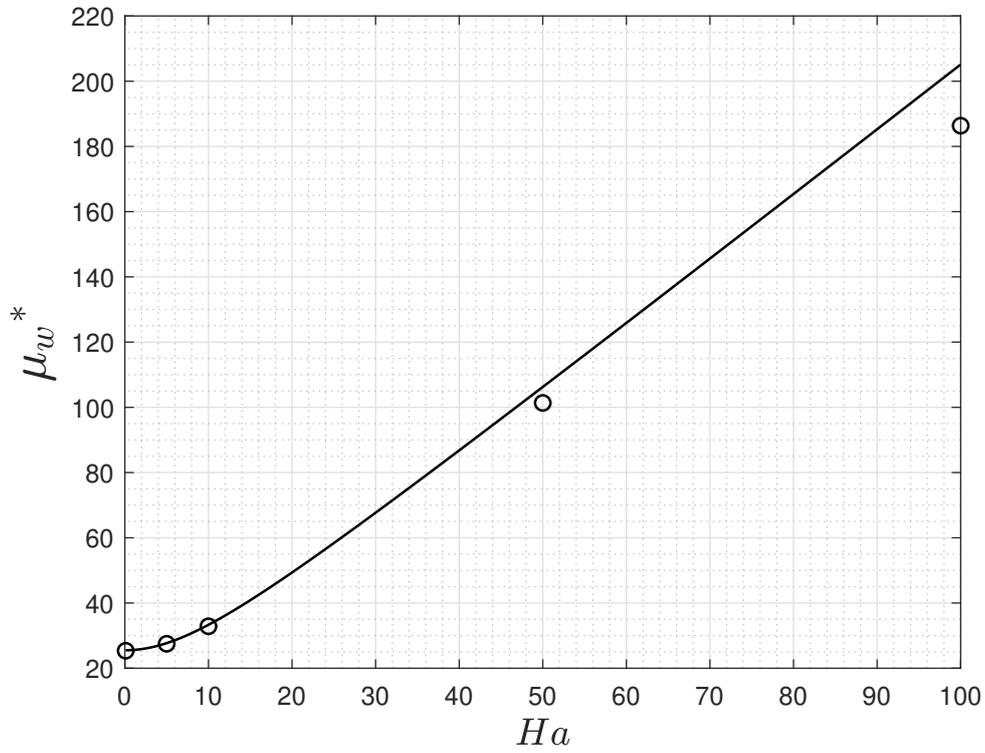


Figura 5.39 – Viscosidade de parede em um escoamento MHD no meio poroso com  $\varepsilon = 0.8$ .

## 5.5 Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy-Forchheimer

Nesta seção, será analisado um escoamento em um meio poroso com permeabilidade de Ergun com pequenos efeitos inerciais, ou seja, usando a equação de Darcy-Forchheimer.

### 5.5.1 Malha

Para selecionar a malha mais adequada para a simulação, foi monitorado o comportamento da velocidade média do escoamento à medida em que o refinamento da malha aumentava. A Figura 5.40 ilustra os resultados obtidos com malhas contendo 400000, 800000, 1400000 e 2640000 elementos. A análise indicou que a malha de 400000 elementos foi insuficiente para capturar adequadamente a física do escoamento. Por outro lado, a malha de 800000 elementos demonstrou ser a mais vantajosa em termos de custo-benefício entre as malhas analisadas. Foi observado que a variação na velocidade média foi de apenas aproximadamente 0.1% quando comparada à malha de 1400000 elementos e de 0.27% em relação à malha de 2640000 elementos, indicando uma estabilização da solução com o aumento do número de elementos.

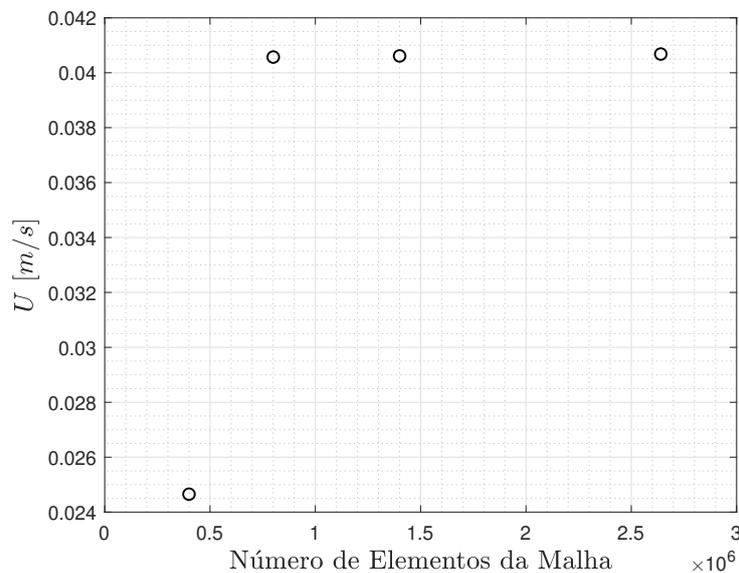


Figura 5.40 – Velocidade média do escoamento em relação ao número de elementos da malha.

A malha escolhida foi a de 800000 elementos e possui uma *skewness* máxima e média de  $1.4607 \times 10^{-11}$  e  $1.8692 \times 10^{-12}$ , respectivamente. Para a razão de aspecto, foi obtido um valor máximo e médio de 8.4395 e 4.2173, respectivamente.

## 5.5.2 Análise dos Resultados

A Figura 5.41 ilustra que, para a equação de Darcy (—), um aumento no gradiente de pressão resulta em uma vazão maior. No entanto, ao incorporar os efeitos inerciais com o termo de Forchheimer (○), foi observado uma perda da linearidade e uma redução na vazão com o aumento do gradiente de pressão em relação a equação de Darcy. Isso ocorre porque o termo quadrático presente na equação de Darcy-Forchheimer representa as perdas de energia devido aos efeitos inerciais, resultando em uma relação não linear entre a vazão e o gradiente de pressão que é intensificada com o aumento do número de Reynolds. Conforme ilustrado na Figura 5.42, ocorre uma redução da vazão à medida que  $\beta$  aumenta. O aumento desse parâmetro está diretamente relacionado aos efeitos inerciais no escoamento através do meio poroso. Esses efeitos surgem devido às flutuações no escoamento, que são causadas por variações na estrutura do meio poroso. Essas flutuações, especialmente as transversais ao escoamento, resultam em perdas de energia, o que explica a redução na vazão.

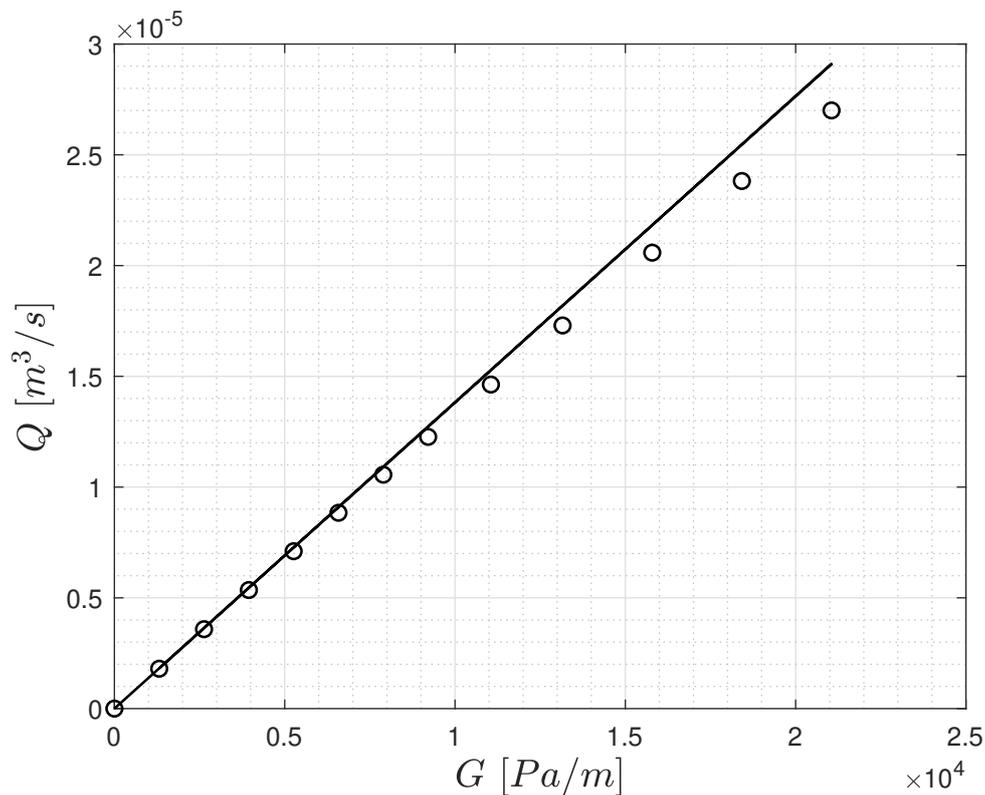


Figura 5.41 – Vazão em relação ao gradiente de pressão para  $Re$  variando de 0.33717 a 5.3948. A linha — representa a equação de Darcy teórica com permeabilidade de Ergun e os ○ representam os resultados numéricos obtidos pela equação de Darcy-Forchheimer.

Ainda é possível analisar o fator de atrito com o aumento de  $\beta$ , conforme ilustrado na Figura 5.43. Essa tendência está de acordo com os resultados discutidos anteriormente, uma vez que o fator de atrito mais elevado está associada com o aumento dos efeitos inerciais no escoamento.

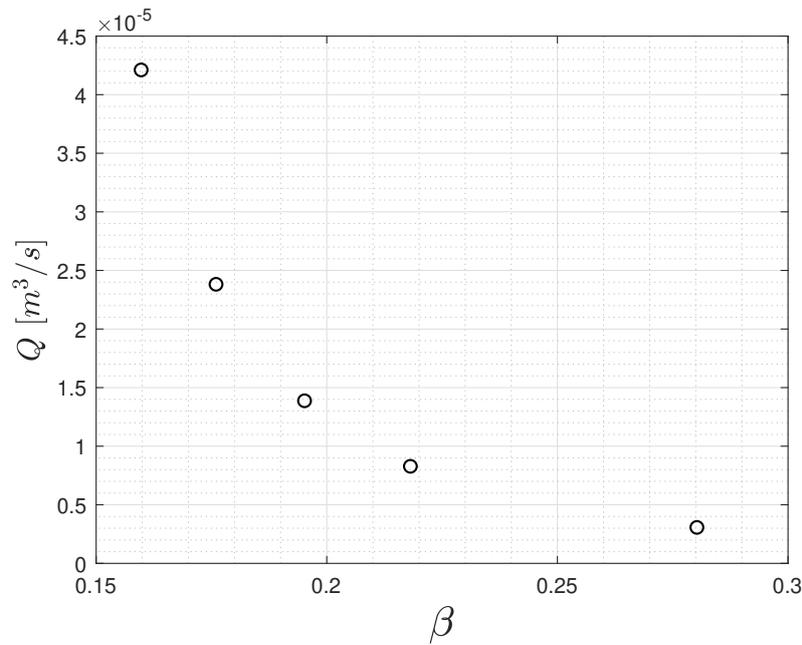


Figura 5.42 – Vazão em relação a  $\beta$  para um  $Re$  variando de 0.5691 a 7.8063. O  $\circ$  representa os valores calculados numericamente.

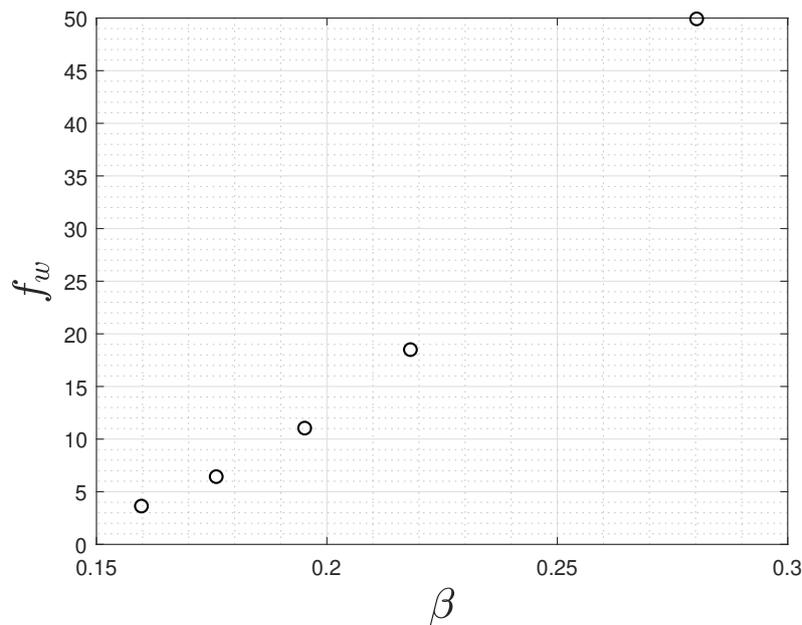


Figura 5.43 – Fator de atrito em relação a  $\beta$  para um  $Re$  variando de 0.5691 a 7.8063. O  $\circ$  representa os valores calculados numericamente.

## 5.6 escoamento Bifásico em uma Célula de Hele-Shaw

Neste caso de estudo, foi analisado um escoamento bifásico em uma célula de Hele-Shaw com um comprimento de  $l = 0.91 \text{ m}$ .

Para todas as simulações bifásicas (tanto na célula de Hele-Shaw quanto no meio poroso), para a primeira fase foi utilizada a água ( $\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  e  $\rho = 998.2072 \text{ kg/m}^3$ ) e para a segunda fase, o óleo Shell Diala ( $\mu = 0.03 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  e  $\rho = 875 \text{ kg/m}^3$ ). O coeficiente de tensão interfacial entre esses dois fluidos é  $\sigma = 0.01425 \text{ N/m}$ . As simulações

numéricas foram feitas com base nos experimentos realizados no trabalho de Saffman e Taylor (1958).

### 5.6.1 Malha

A malha utilizada tem 1120000 elementos. Em relação as métricas de qualidade essa malha possui uma *skewness* máxima e média de  $1.9305 \times 10^{-11}$  e  $3.1351 \times 10^{-12}$ , respectivamente. Para a razão de aspecto, foi obtido um valor máximo e médio de 9.9647 e 5.1911, respectivamente.

### 5.6.2 Análise dos Resultados

As Figuras 5.44, 5.45, 5.46 e 5.47 mostram a evolução dos *fingers* ao longo do tempo para  $Ca = 0.001$ ,  $Ca = 0.05$ ,  $Ca = 0.1$  e  $Ca = 0.35$ .

Os resultados reafirmaram a correlação entre o parâmetro  $\lambda_L$  e o  $Ca$ . Foi observado que valores menores de  $Ca$ , associados a velocidades baixas do escoamento, conduzem a um aumento do  $\lambda_L$ . Isso indica uma relação direta entre a velocidade do escoamento e a estabilidade da interface entre os dois fluidos: maiores velocidades resultam em um incremento em  $Ca$ , ocasionando uma amplificação da instabilidade interfacial. Consequentemente, um aumento em  $\lambda_L$  potencializa a condução do segundo fluido. À medida que a velocidade do escoamento é elevada, a interface exhibe uma maior instabilidade, aumentando a possibilidade da água perfurar o óleo, diminuindo a eficiência de deslocamento entre os fluidos. Note que essa eficiência é uma medida da capacidade da água retirar o óleo do domínio.

Os resultados obtidos pelas simulações foram comparados com o trabalho do (SAFFMAN; TAYLOR, 1958). Para essa comparação, a Figura 14 do estudo do (SAFFMAN; TAYLOR, 1958) foi digitalizada. Essa comparação é apresentada na Figura 5.48.

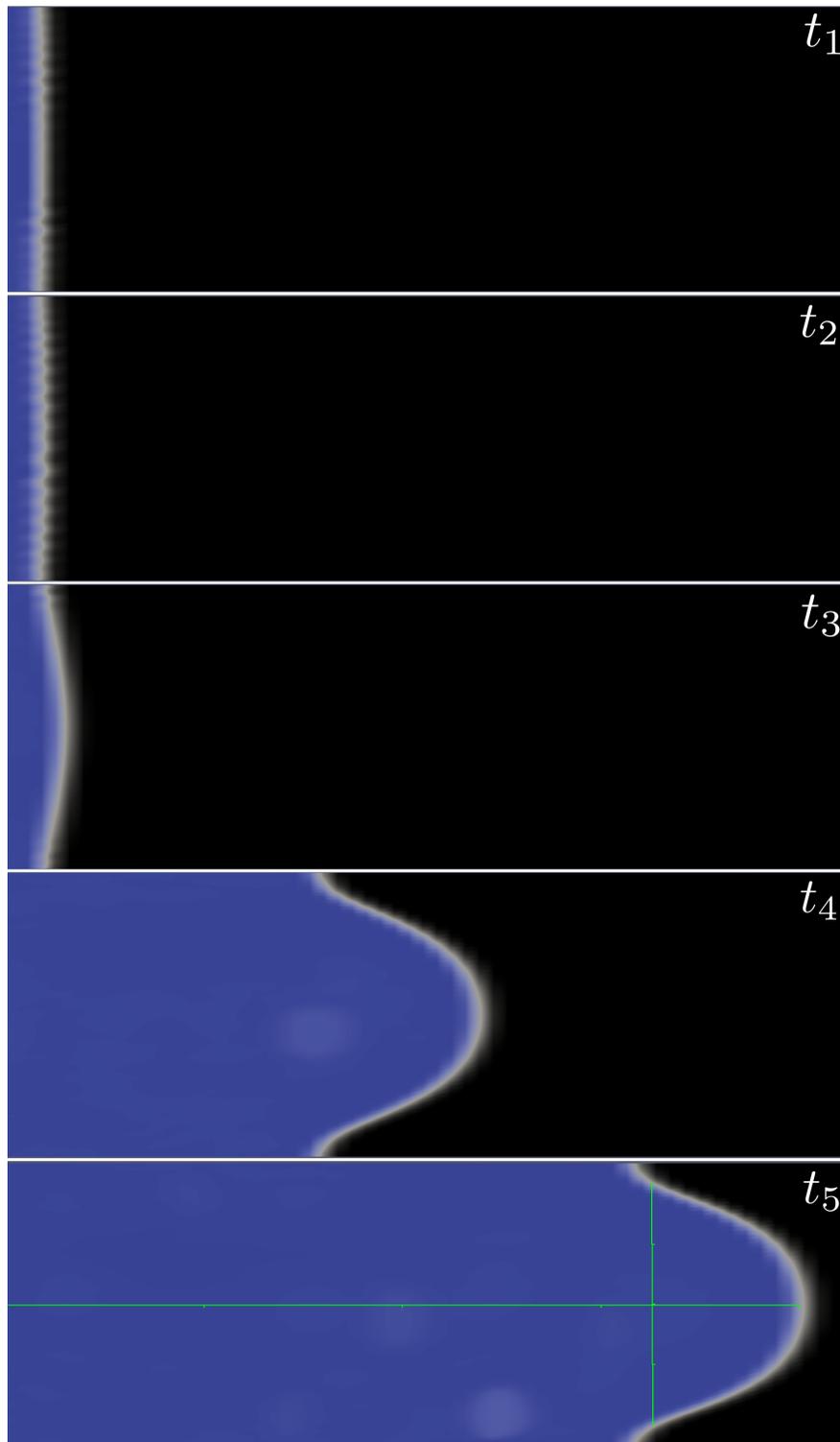


Figura 5.44 – Desenvolvimento da interface entre água (azul) e óleo Shell Diala (preto) ao longo do tempo até a formação de um *finger* único. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.003$  s,  $t_2 = 0.004$  s,  $t_3 = 0.005$  s,  $t_4 = 0.01$  s e  $t_5 = 0.073$  s todos para um  $Ca = 0.001$ . Para  $t_5$  foi obtido  $\lambda_C = 0.0023$  e  $\lambda_L = 0.8463$ .

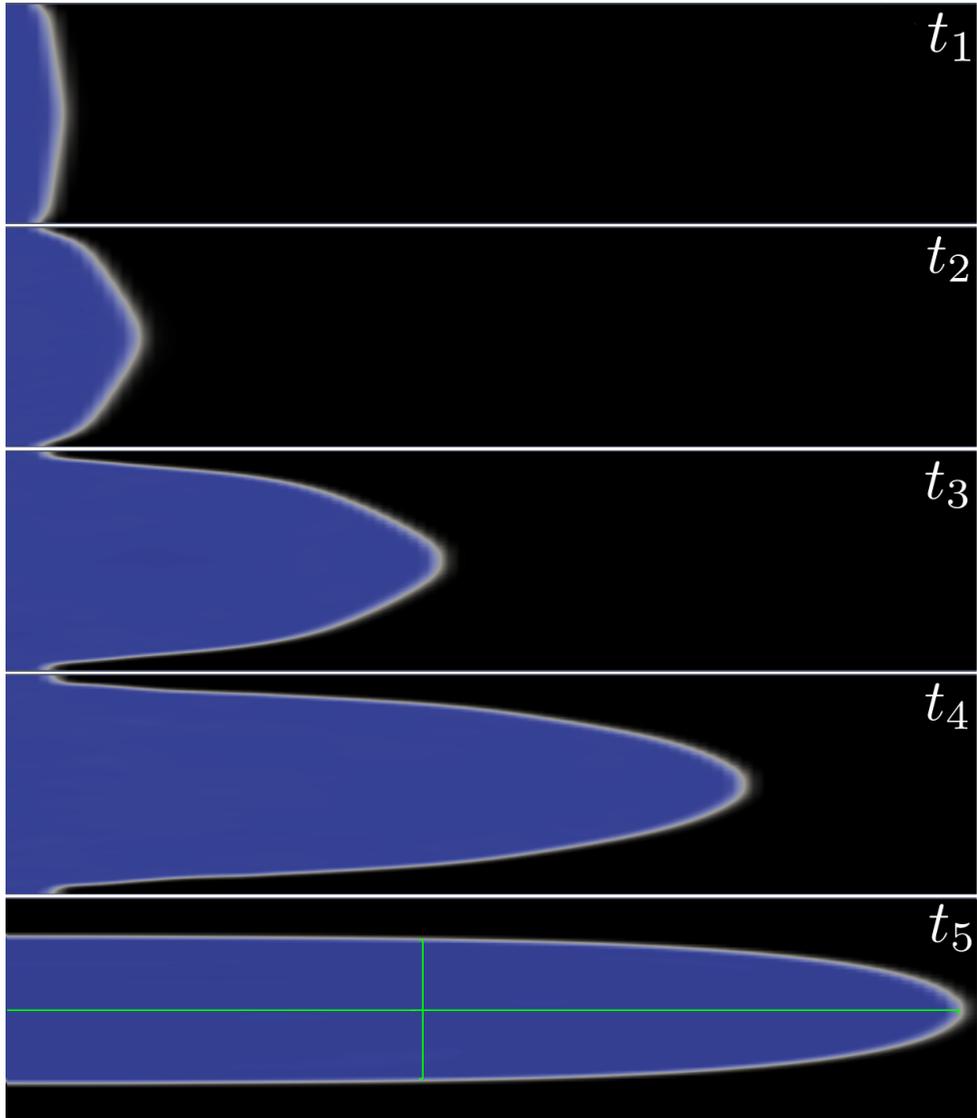


Figura 5.45 – *Finger* de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.0002$  s,  $t_2 = 0.00036$  s,  $t_3 = 0.00152$  s,  $t_4 = 0.00251$  s e  $t_5 = 0.01501$  s todos para um  $Ca = 0.05$ . Para  $t_5$  foi obtido  $\lambda_C = 0.017$  e  $\lambda_L = 0.626$ .

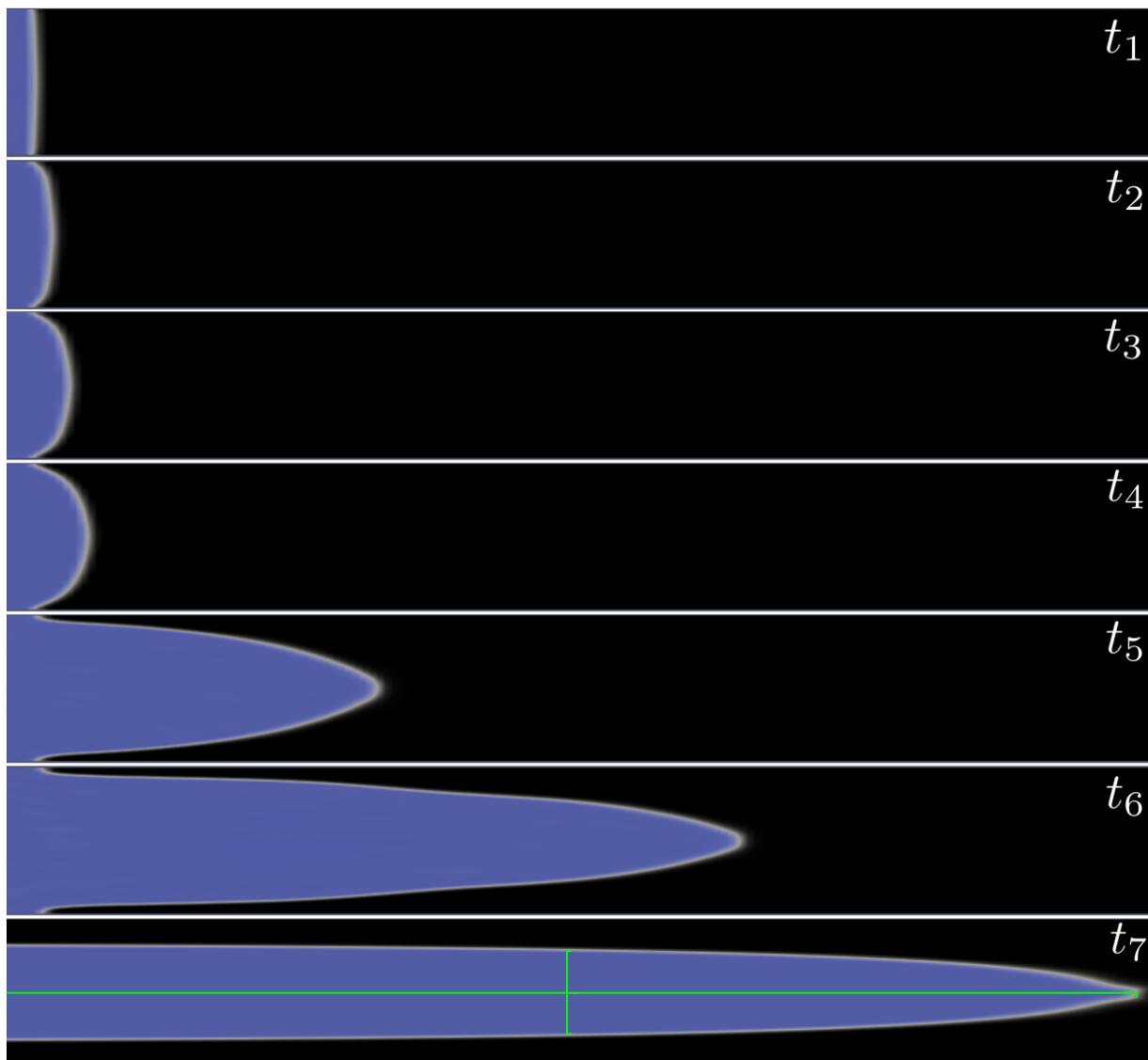


Figura 5.46 – *Finger* de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.0001$  s,  $t_2 = 0.0002$  s,  $t_3 = 0.00025$  s,  $t_4 = 0.0003$  s,  $t_5 = 0.001$  s,  $t_6 = 0.002$  s e  $t_7 = 0.08$  s todos para um  $Ca = 0.1$ . Para  $t_7$  foi obtido  $\lambda_C = 0.1835$  e  $\lambda_L = 0.564$ .

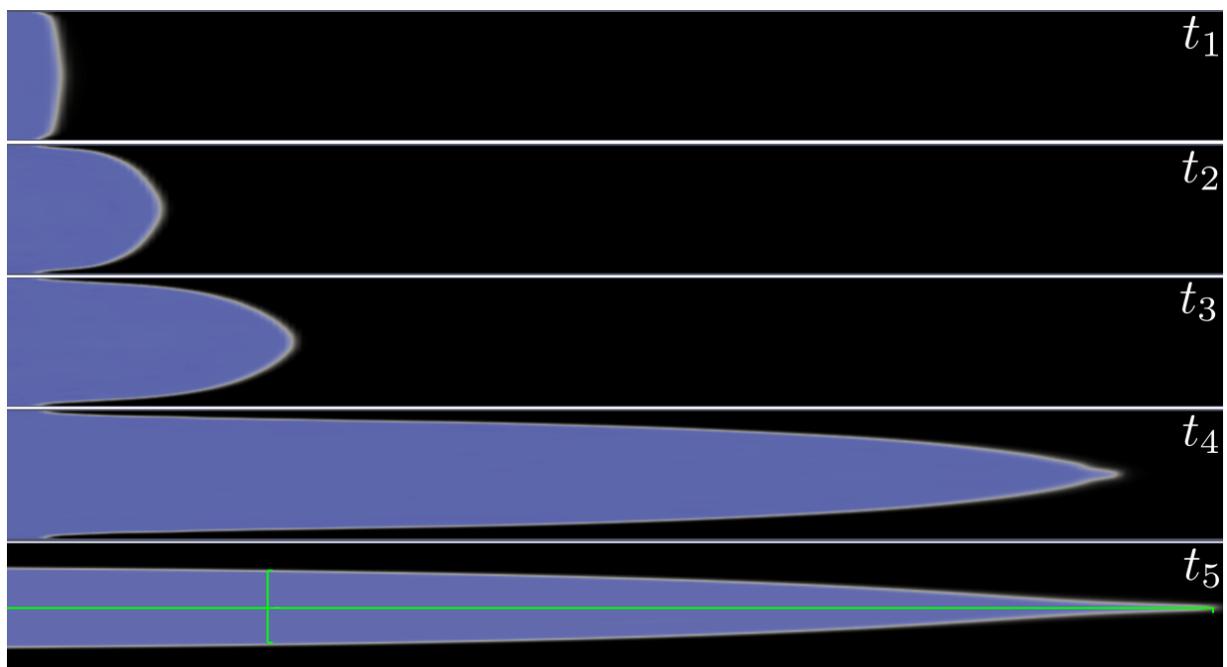


Figura 5.47 – *Finger* de água perfurando o óleo Shell Diala. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.0000425$  s,  $t_2 = 0.0001275$  s,  $t_3 = 0.00025$  s,  $t_4 = 0.001$  s,  $t_5 = 0.027$  s todos para um  $Ca = 0.35$ . Para  $t_5$  foi obtido  $\lambda_C = 0.2165$  e  $\lambda_L = 0.554$ .

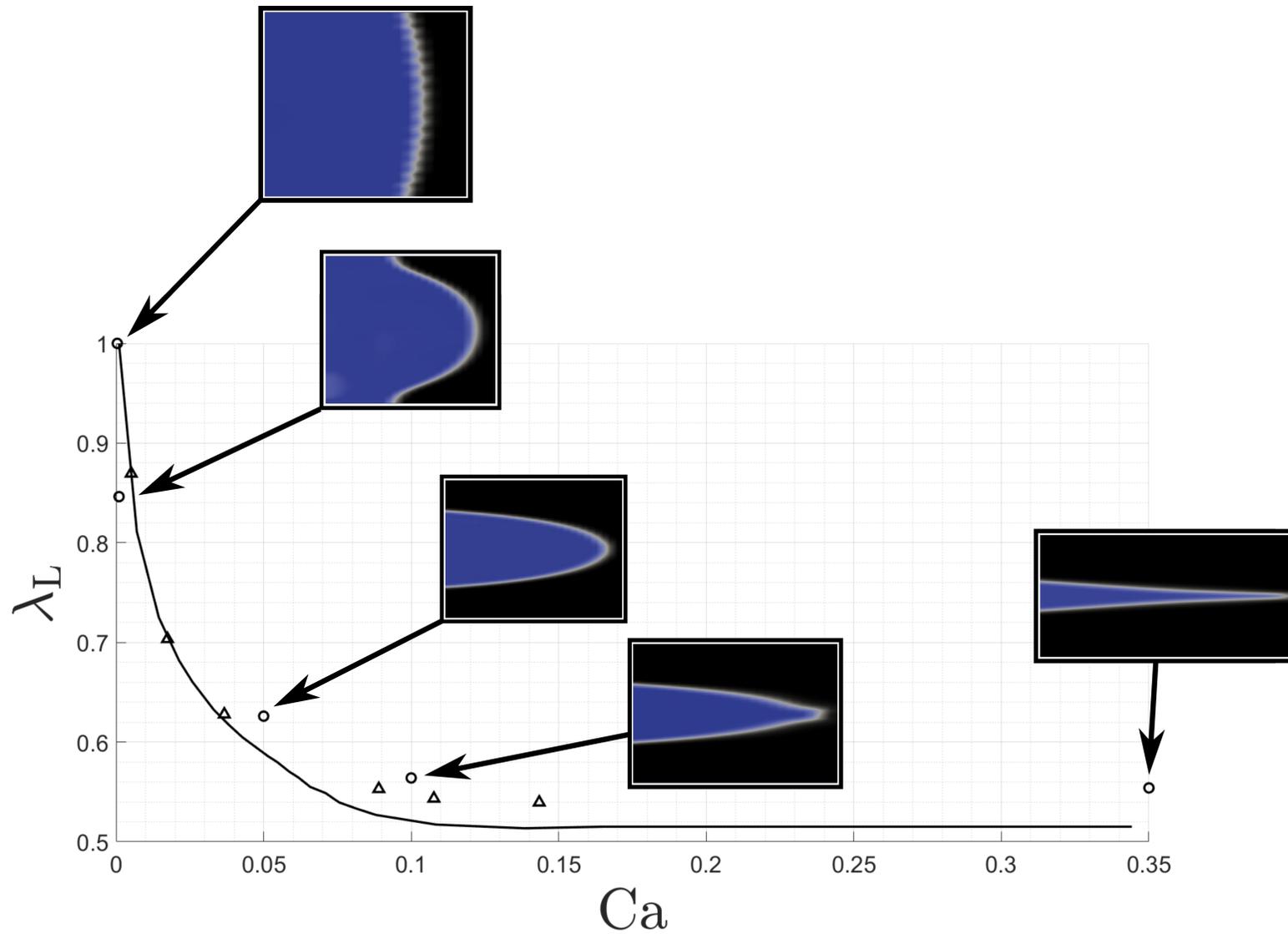


Figura 5.48 –  $\lambda_L$  em relação a  $Ca$ . Os valores calculados teoricamente por Saffman e Taylor (1958) são representados por —, enquanto os valores experimentais, obtidos por medidas fotográficas, são indicados por  $\Delta$ . Os  $\circ$  mostram os valores calculados numericamente neste trabalho. Os encartes apresentam topologias características dos *fingers* para cada  $Ca$ .

Pela Figura 5.48, foi observado que os resultados obtidos pela simulação seguem a mesma tendência das curvas obtidas por Saffman e Taylor (1958). Os dados obtidos nesse trabalho se aproximam mais das medições fotográficas realizadas por eles. É importante notar que as informações exatas sobre onde Saffman e Taylor (1958) fizeram as medições da largura do *finger* não são disponibilizadas. Portanto, se as medições fossem realizadas em diferentes partes do *finger*, seria possível obter valores ainda mais próximos aos deles. Essa análise é interessante não apenas pela precisão dos resultados, mas também porque serve como uma validação, evidenciando o mesmo comportamento observado no estudo original. Para o primeiro ponto do gráfico, em que  $Ca = 0.0004$ , foi observado uma configuração com múltiplos *fingers*. Para caracterizar essa configuração, foi utilizado o conceito de dimensão fractal, que oferece uma maneira quantitativa de descrever a complexidade e a irregularidade dessas estruturas, uma vez que não se enquadram nem em uma dimensão bidimensional (2D) nem tridimensional (3D). Para esse valor de  $Ca$ , a dimensão fractal obtida é  $d_{frac} = 2.5213$ , indicando um alto grau de complexidade na interface entre os dois fluidos.

Os *fingers* também foram caracterizados pelo parâmetro de deformação de Taylor. Quando o comprimento do *finger* é muito maior do que sua espessura, o  $D_{Taylor}$  tende a 1, indicando que o *finger* se torna cada vez mais anisotrópico. A figura 5.49 mostra o parâmetro de deformação de Taylor em relação a  $Ca$ .

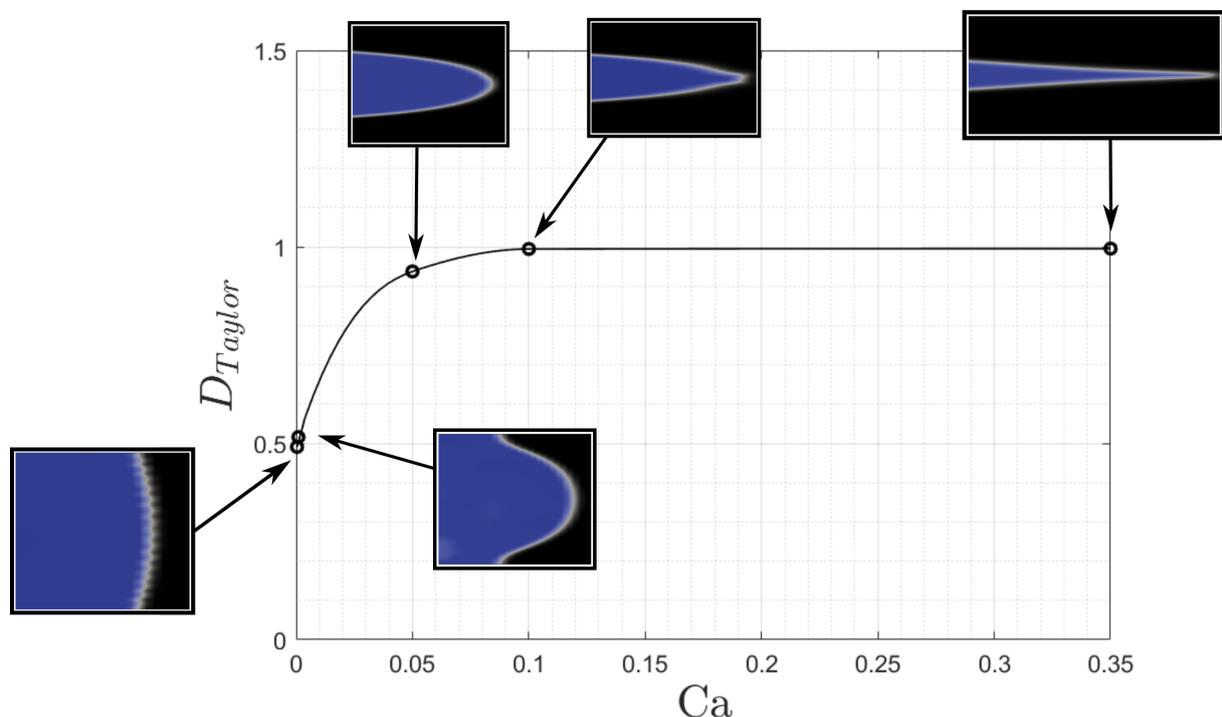


Figura 5.49 – Parâmetro de deformação de Taylor em relação ao  $Ca$ . Os  $\circ$  apresentam os valores numéricos e a linha — a curva obtida pela interpolação piecewise cúbica. Os encartes apresentam topologias características dos *fingers* para cada  $Ca$ .

### 5.6.3 Número de Capilaridade Crítico: Transição de Multi-*fingers* para um *Finger* Único

A transição de um único *finger* para uma distribuição de múltiplos *fingers* em uma célula de Hele-Shaw pode ocorrer em função de um número de capilaridade crítico ( $Ca_c$ ). Este número é um ponto de transição em que o comportamento do escoamento muda de um regime dominado por um único grande *finger* no canal para um padrão mais complexo de pequenos múltiplos *fingers* na interface. Quando  $Ca$  é suficientemente pequeno, as forças viscosas não conseguem manter a topologia desse único grande *finger*, resultando na formação dos múltiplos *fingers*. Isso ocorre porque os efeitos de tensão superficial passam a ser comparáveis ou maiores do que os efeitos viscosos nessa escala de *fingers* capilares.

Na Figura 5.50, observa-se um escoamento com  $Ca = 0.0006$ , que corresponde ao  $Ca_c$ . Essa hipótese é evidenciada pelo início da formação de um único *finger*. Note que não existem pequenos *fingers* espaçados por toda a interface, mas somente pequenos *fingers* na ponta do *finger* principal, indicando o final da transição.

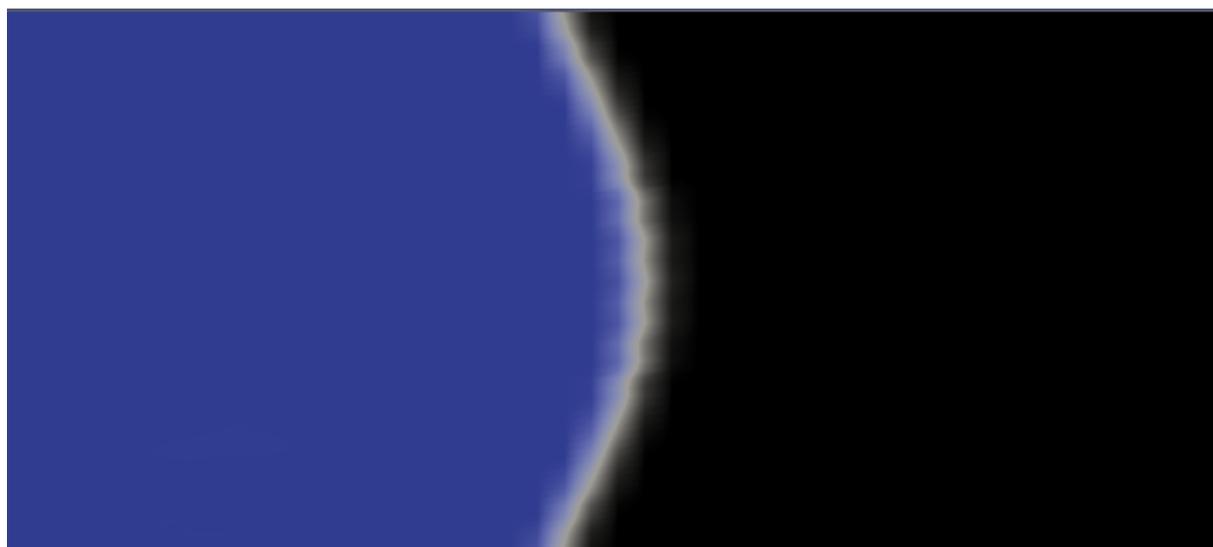


Figura 5.50 – Escoamento bifásico em uma célula de Hele-Shaw com  $Ca_c = 0.0006$  e  $t = 0.485$  s.

## 5.7 Escoamento Bifásico em um Meio Poroso

As Figuras 5.51, 5.52 e 5.53 apresentam o desenvolvimento dos escoamentos em um meio poroso com  $\varepsilon = 0.55$  para diferentes  $Ca$ . Foi observado que para valores de  $Ca$  baixos, o escoamento tende a ser mais estável. Para valores de  $Ca$  maiores, o escoamento tende a se tornar completamente instável.

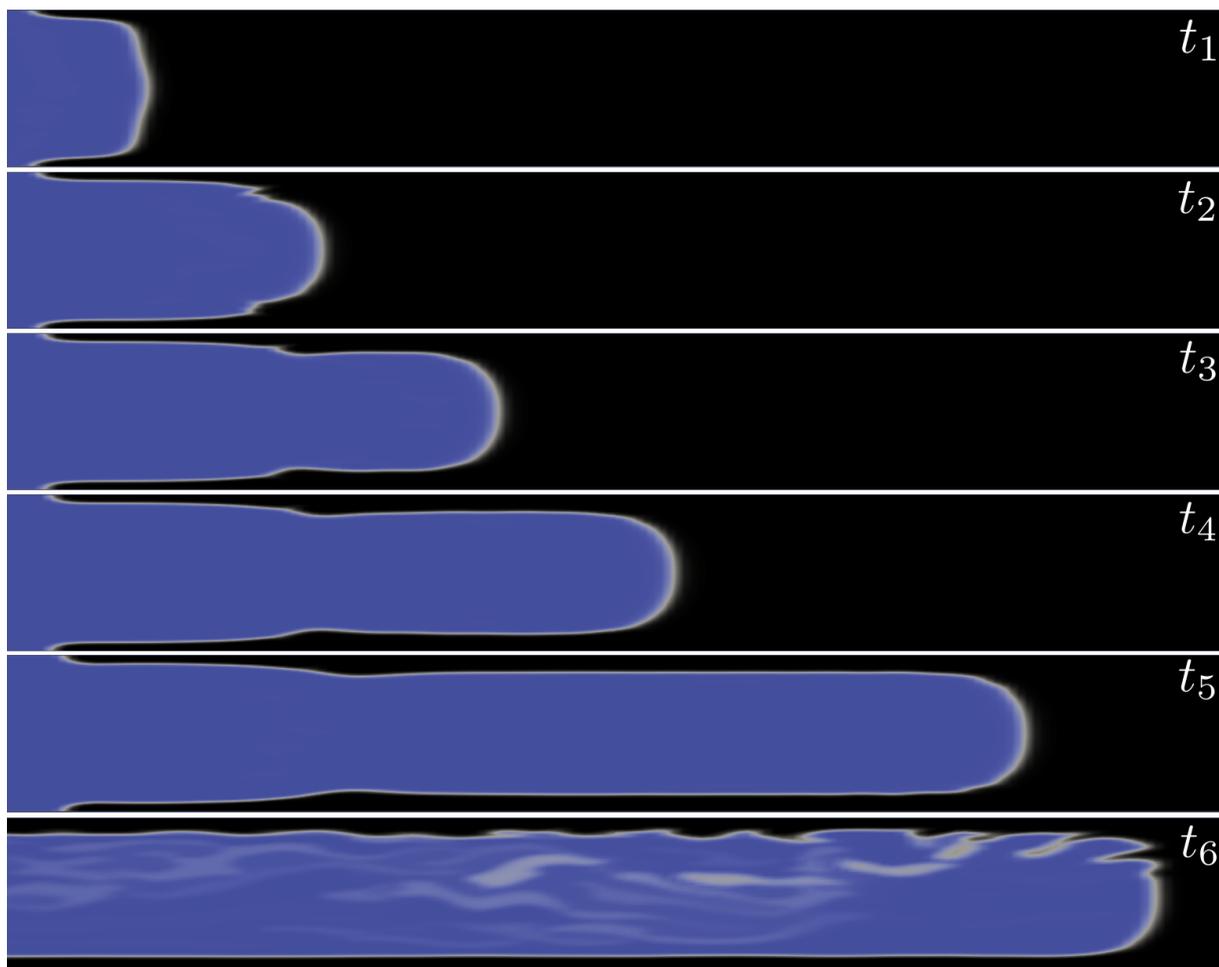


Figura 5.51 – Escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.001$  s,  $t_2 = 0.002$  s,  $t_3 = 0.003$  s,  $t_4 = 0.004$  s,  $t_5 = 0.006$  s e  $t_6 = 0.092$  s todos para um  $Ca = 0.05$ .

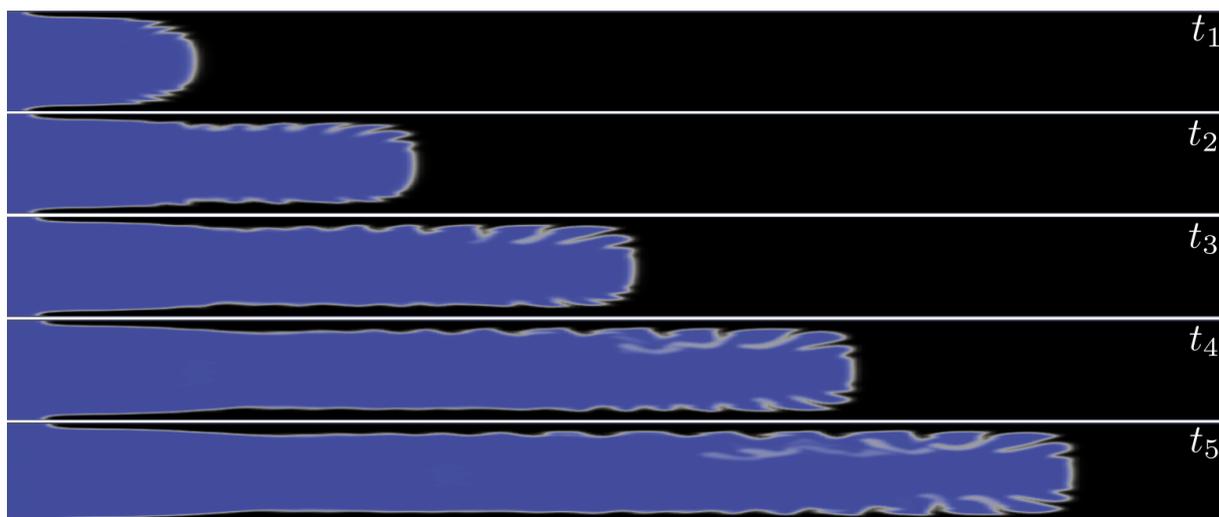


Figura 5.52 – Escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.001$  s,  $t_2 = 0.002$  s,  $t_3 = 0.003$  s,  $t_4 = 0.004$  s e  $t_5 = 0.005$  s todos para um  $Ca = 0.1$ .

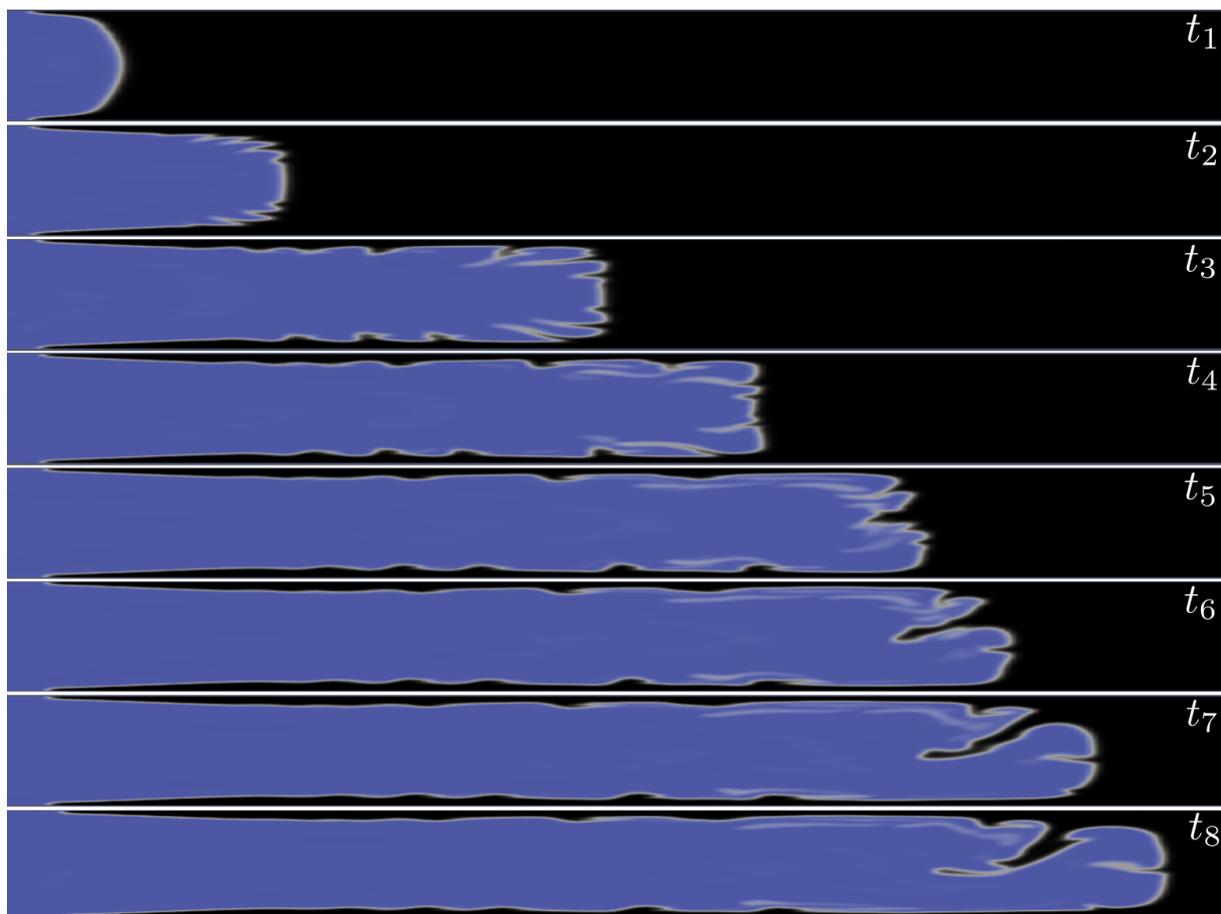
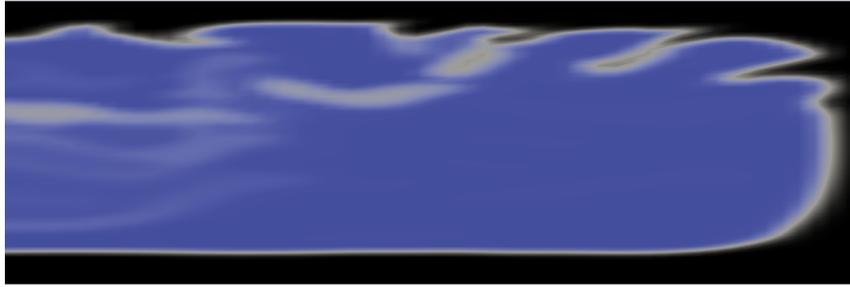


Figura 5.53 – escoamento bifásico entre água e óleo no meio poroso. Os tempos analisados foram  $t_1 = 0.0002$  s,  $t_2 = 0.0004$  s,  $t_3 = 0.0008$  s,  $t_4 = 0.001$  s,  $t_5 = 0.0012$  s,  $t_6 = 0.0013$  s,  $t_7 = 0.0014$  s e  $t_8 = 0.0015$  s todos para um  $Ca = 0.35$ .

### 5.7.1 Comparação entre *Fingers* no Meio Poroso

Por fim, será comparada a formação dos *fingers* no meio poroso para  $\varepsilon = 0.55$  e  $\varepsilon = 0.7$  para diferentes valores de  $Ca$  (vide Figuras 5.54, 5.55 e 5.56). Para  $\varepsilon = 0.55$ , foi observado que com  $Ca = 0.05$  surgem alguns *capillary fingers* (*fingers* de menor escala) ao redor de um *finger* principal. Quando o número de capilaridade aumenta para  $Ca = 0.1$ , surgem vários *capillary fingers* no escoamento, mas ainda é possível observar que existe um *finger* único. Com  $Ca = 0.35$ , o escoamento se torna completamente anisotrópico, e dessa forma perde-se completamente a definição de *finger*. Para  $\varepsilon = 0.7$ , nota-se que tanto com  $Ca = 0.05$  quanto com  $Ca = 0.1$ , a topologia de um único *finger* permanece bem estabelecida. No entanto, com  $Ca = 0.35$ , começa a surgir a formação dos *capillary fingers*. Isso indica que, em um meio poroso com maior porosidade, é necessário um número de capilaridade significativamente mais alto para observar efeitos semelhantes aos que ocorrem em um meio poroso com porosidade mais baixa.

$$\varepsilon = 0.55$$

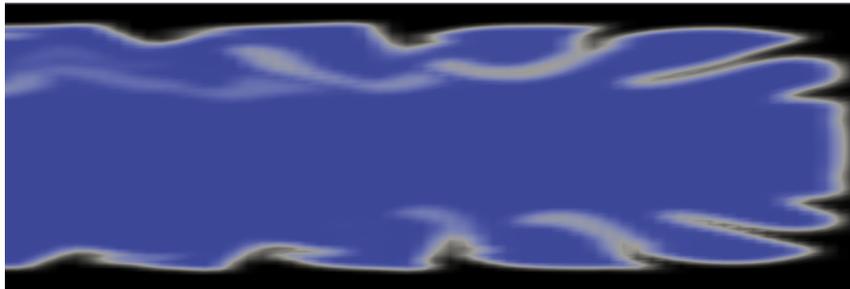


$$\varepsilon = 0.7$$



Figura 5.54 – Comparação entre *fingers* no meio poroso com duas porosidades distintas para  $Ca = 0.05$  em  $t = 0.092$  s.

$$\varepsilon = 0.55$$



$$\varepsilon = 0.7$$



Figura 5.55 – Comparação entre *fingers* no meio poroso com duas porosidades distintas para  $Ca = 0.1$  em  $t = 0.005$  s.

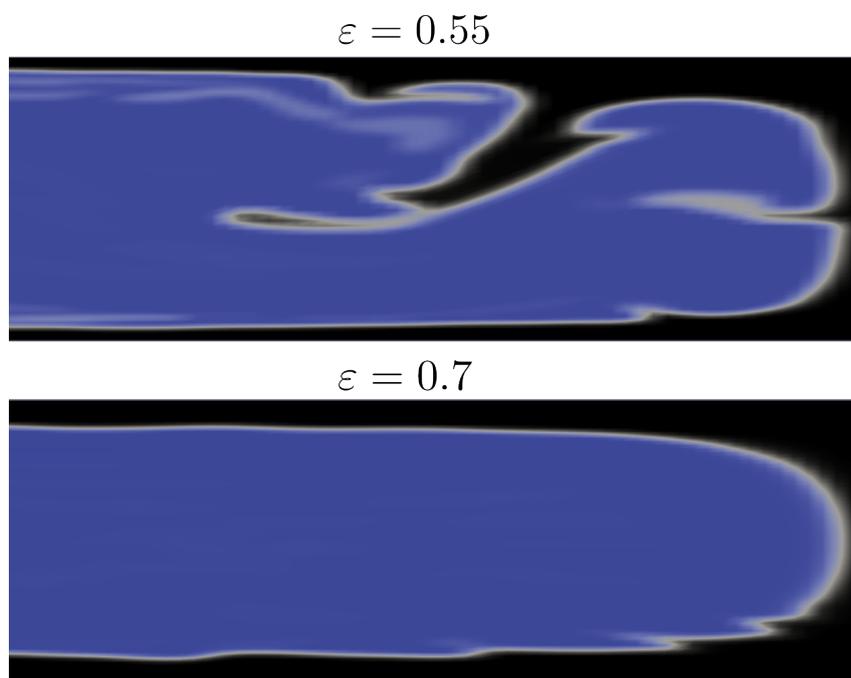


Figura 5.56 – Comparação entre *fingers* em um meio poroso com duas porosidades,  $\varepsilon = 0.55$  e  $\varepsilon = 0.7$ , para  $Ca = 0.35$  no instante de tempo  $t = 0.0015$  s.

# 6 Comentários Finais

## 6.1 Conclusões

Neste trabalho, foi observado que a aplicação de um campo magnético transversal ao escoamento de um fluido eletricamente condutor causa um efeito semelhante a redução da permeabilidade em um meio poroso. Verificou-se também que, para que os efeitos do número de Hartmann sejam significativos em condições de porosidade muito baixa, é necessário que a intensidade do campo magnético seja muito elevada. As simulações realizadas mostraram-se sensíveis às mudanças nos parâmetros que controlam a física do escoamento, destacando a importância do controle da estabilidade da simulação ao alterar a intensidade desses parâmetros físicos.

Foi constatado que diferentes características dos meios porosos resultam em alterações na topologia dos *fingers* formados durante o escoamento bifásico. Observa-se que essa topologia é completamente influenciada pelo número de capilaridade e variações na porosidade do meio poroso. Dessa forma, a tentativa de estabilizar a interface é um fenômeno complexo que deve levar em consideração todas as peculiaridades presentes no escoamento.

A simulação do escoamento bifásico em uma célula de Hele-Shaw, permitiu um aprofundamento na compreensão da instabilidade de Saffman-Taylor. Foi observado que a aplicação do campo magnético pode ser uma técnica promissora para controlar a formação de *fingers* na interface água-óleo devido a desaceleração causada no escoamento, potencialmente melhorando a eficiência da recuperação de petróleo em reservatórios naturais.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se:

- Utilizar uma malha mais refinada para a simulação dos escoamentos bifásicos. Alternativamente, pode-se empregar uma malha adaptativa que mantenha um alto refino na região da interface entre os fluidos a cada iteração.

- Analisar o efeito de  $Ha$  sobre os escoamentos bifásicos na célula de Hele-Shaw e em um meio poroso, com o objetivo de observar como os efeitos magnéticos influenciam na forma, amplitude e distribuição dos *fingers* na interface entre os dois fluidos imiscíveis. Observar esses efeitos principalmente em relação ao  $Ca_c$ .
- Realizar estudos em meios porosos com permeabilidade real sob uma abordagem CFD para outros modelos de meios porosos, como, por exemplo, o modelo Panda-Lake.
- Analisar a eficiência de deslocamento (entre água e óleo) para diferentes condições do escoamento bifásico. Essas condições podem incluir diferentes porosidades e intensidades de  $Ha$ .
- Explorar a influência da saturação e das permeabilidades relativas nos escoamentos bifásicos. Estudos podem focar em como as diferentes distribuições iniciais de saturação e as curvas de permeabilidade relativa impactam a dinâmica de deslocamento dos fluidos.

# Referências

- AGARWAL, M. et al. Mhd flow and heat transfer in a channel filled with variable permeability porous layers. *Journal of National Academy of Mathematics India*, v. 34, n. 01, p. 1–14, 2020. Citado na página 4.
- AGUILAR, M. A. Estudo magnetohidrodinâmico da camada limite de um fluido condutor. *Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) — Universidade de Brasília, Brasília*, p. 66 f., il., 2022. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26, and 27.
- BARUT, A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles*. New York: Courier Corporation, 1980. Citado na página 25.
- BEAVERS, G. S.; JOSEPH, D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 30, n. 1, p. 197–207, 1967. Citado na página 33.
- BRINKMAN, H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, Springer, v. 1, n. 1, p. 27–34, 1949. Citado na página 13.
- CARMAN, P. C. Fluid flow through granular beds. *Trans. Inst. Chem. Eng. London*, v. 15, p. 150–156, 1937. Citado na página 17.
- CIVAN, F. Reservoir formation damage: Fundamentals, modeling. *Assessment, and Mitigation*, Gulf Professional Publishing Oxford, v. 2, n. 0, 2007. Citado na página 18.
- COLLINS, R. E. Flow of fluids through porous materials. Petroleum Publishing Co., Tulsa, OK, 1976. Citado na página 7.
- CUNHA, F. A. Análise experimental e simulação numérica da combustão de serragem em um combustor ciclônico. Universidade Federal do Pará, 2005. Citado na página 57.
- CUNHA, F. R. Nonlinear effects in porous media flow with permeable interface. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, v. 2, p. 107–135, 1991. Citado na página 33.
- CUNHA, F. R. Notas do curso de escoamentos multifásico. Programa de Ciência Mecânicas, Universidade de Brasília, p. 1–110, 2023. Citado 6 vezes nas páginas 9, 12, 13, 14, 15, and 16.
- CUNHA, F. R.; INÁCIO, L. A. S. A theoretical study on the bulk viscosity in a compressible flow of an electrically conducting gas in the presence of magnetoacoustic waves. *Physics of Fluids*, v. 36, n. 4, p. 046124, 04 2024. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0201632>>. Citado na página 23.

- DAMIAN, S. M. Description and utilization of interfoam multiphase solver. *International Center for Computational Methods in Engineering*, p. 1–64, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 30 and 31.
- DARWISH, M.; MOUKALLED, F. The finite volume method in computational fluid dynamics: An advanced introduction with openfoam® and matlab®. Springer, New York, 2016. Citado na página 56.
- DAVIDSON, P. A. *Introduction to Magnetohydrodynamics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 36, and 37.
- DESHPANDE, S. S. et al. Evaluating the performance of the two-phase flow solver interfoam. *Computational Science and Discovery*, IOP Publishing, v. 5, n. 1, p. 014016, nov 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1749-4699/5/1/014016>>. Citado na página 62.
- DIRECT, C. *About OpenFOAM*. 2023. Acessado em: 2023-07-17. Disponível em: <<https://cfd.direct/openfoam/about/>>. Citado na página 53.
- ERGUN, S. Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, v. 48, p. 89–94, 1952. Citado na página 16.
- FEDER, J. *Fractals*. 1. ed. New York: Springer New York, NY, 1988. XXVI, 284 p. (Physics of Solids and Liquids). ISBN 978-0-306-42851-7. Citado na página 21.
- FLUENT, A. et al. Tgrid 5.0 user’s guide. *ANSYS Inc., USA*, v. 5, 2008. Citado na página 57.
- GLAND, N.; PISARENKO, D. Pressure Oscillation Effects on the Saffman–Taylor Instability. *Pure and Applied Geophysics*, v. 160, n. 5-6, p. 977–988, maio 2003. Citado 2 vezes nas páginas 19 and 20.
- GREEN, D.; WILLHITE, G. *Enhanced Oil Recovery*. Richardson, TX: Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 1998. (SPE textbook series). ISBN 9781555630775. Citado na página 2.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 4th. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 25.
- HENDERSON, N. et al. A three-parameter kozeny–carman generalized equation for fractal porous media. *Chemical Engineering Science*, v. 65, n. 15, p. 4432–4442, 2010. ISSN 0009-2509. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000925091000223X>>. Citado 2 vezes nas páginas 7 and 17.
- HINCH, E. J. *Perturbation methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Citado na página 40.
- HIRT, C.; NICHOLS, B. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999181901455>>. Citado na página 30.
- HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.19.010187.001415>>. Citado na página 20.

- HOSSEINI, R. et al. Mhd flow of an incompressible viscous fluid through convergent or divergent channels in presence of a high magnetic field. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2012, 2012. Citado na página 4.
- HRIBERŠEK, M. et al. *Fluid flow in a channel partially filled with porous material*. Southampton, UK: WIT Press, 2002. v. 36. Citado na página 3.
- INÁCIO, L. A. S. Magnetohidrodinâmica incompressível de fluidos condutores em escoamentos laminares internos. 2022. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 28, and 29.
- KOZENY, J. Ueber kapillare leitung des wassers im boden. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, v. 136, p. 271, 1927. Citado na página 17.
- KURBANALIEV, A. et al. Using openfoam multiphase solver interfoam for large scale modeling. In: *Proceeding of The World Congress on Engineering and Computer Science*. San Francisco, USA: Newswood Limited, 2019. p. 22–24. Citado na página 62.
- LOGAN, J. D. *Applied Mathematics*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 40.
- LTD, O. *Mesh Quality: Openfoam: User guide v2112 the open source cfd toolbox*. 2023. Acessado em: 30 de agosto de 2024. Disponível em: <<https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-meshing-snappyhexmesh-meshquality.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 and 58.
- MIRANDA, É. M. *Simulação de escoamento turbulento em um motor de foguete com o modelo de grandes escalas (LES)*. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Aeroespacial) — Universidade de Brasília, Brasília. Citado na página 57.
- MIRANDA, É. M. et al. *Bounded Pressure-Driven Flow of an Incompressible Electrically Conducting Fluid: Porous Medium and Lubrication Applications*. Toronto, Canada, 2024. Citado 4 vezes nas páginas 33, 40, 41, and 45.
- MIRANDA, É. M. et al. A theoretical study of a micro-channel pressure-driven flow of electrically conducting liquids in the presence of a transversal magnetic field. *Journal of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer (JFFHMT)*, Avestia Publishing, Toronto, Canada, 2024. Citado na página 33.
- MOSTAGHIMI, P. et al. Hydrodynamics of fingering instability in the presence of a magnetic field. *Fluid Dynamics Research*, IOP Publishing, v. 48, n. 5, p. 055504, 2016. Citado na página 4.
- OPENCDFD. *OpenFOAM: History*. 2023. Acessado em: 2023-07-17. Disponível em: <<https://www.openfoam.com/news/history>>. Citado na página 53.
- OPENFOAM. Openfoam v6 user guide: 4.4 numerical schemes. OpenFOAM Foundation London, 2018. Citado na página 114.
- PANDA, M. N.; LAKE, L. W. A physical model of cementation and its effects on single-phase permeability. *AAPG bulletin*, American Association of Petroleum Geologists, v. 79, n. 3, p. 431–443, 1995. Citado na página 18.
- PANTON, R. L. *Lubrication Approximation*. Hoboken, NJ: John Wiley Sons, Ltd, 2013. 650-668 p. ISBN 9781118713075. Citado na página 12.

PH, F. Wasserbewegung durch boden. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, v. 45, n. 50, p. 1781–1788, 1901. Citado na página 15.

POPEL, A. S.; JOHNSON, P. C. Microcirculation and hemorrheology. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Annual Reviews, v. 37, n. 1, p. 43–69, 2005. Citado na página 43.

ROURE, G.; CUNHA, F. R. Modeling of unidirectional blood flow in microvessels with effects of shear-induced dispersion and particle migration. *Applied Mathematics and Mechanics*, Springer, v. 43, n. 10, p. 1585–1600, 2022. Citado na página 43.

SAFFMAN, P. G. Viscous fingering in hele-shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 173, p. 73–94, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 11 and 12.

SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. In: PELCÉ, P. (Ed.). *Dynamics of Curved Fronts*. San Diego: Academic Press, 1958. p. 155–174. ISBN 978-0-12-550355-6. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080925233500174>>. Citado 13 vezes nas páginas xvi, xx, 2, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 55, 88, 93, and 94.

SALAJEGHE, R. et al. Numerical modeling of part sedimentation during volumetric additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, v. 66, p. 103459, 2023. ISSN 2214-8604. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214860423000726>>. Citado na página 30.

SINZATO, Y. Z.; CUNHA, F. R. Stability analysis of an interface between immiscible liquids in hele-shaw flow in the presence of a magnetic field. *Applied Mathematical Modelling*, v. 75, p. 572–588, 2019. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X19303464>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 and 21.

SRIVASTAVA, B. G.; DEO, S. Effect of magnetic field on the viscous fluid flow in a channel filled with porous medium of variable permeability. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 219, n. 17, p. 8959–8964, 2013. Citado na página 3.

TASSONE, A. Magnetic induction and electric potential solvers for incompressible mhd flows. *CFD with OpenSource Software*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 and 61.

ZACHAROUDIQU, I. *Viscous fingering and liquid crystals in confinement*. 2012. Tese (Doutorado) — University of Oxford. Citado na página 20.

ZAYTOON, M. A. et al. Flow through a variable permeability brinkman porous core. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 04, p. 766, 2016. Citado na página 3.

# Apêndices

# A Desenvolvimento Matemático

## A.1 Lei de Darcy

$$\begin{aligned} US &= \int \int_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= - \int \int_S \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= - \frac{k}{\mu} \int \int_S \frac{\partial p}{\partial x} dS \\ &= - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int \int_S dS. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dessa forma, a velocidade média do escoamento é dada por:

$$U = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{A.2}$$

## A.2 Adimensionalização da Equação de Navier-Stokes

A Equação de Navier-Stokes em sua forma mais geral em um contexto hidrodinâmico é dada por:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p' + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \tag{A.3}$$

Nesse trabalho é utilizado o conceito da pressão modificada. Isso porque a gravidade somente apresenta um efeito estático devido a configuração dos escoamentos analisados. Para isso observe a Equação A.4.

$$\rho g \hat{\mathbf{e}}_z = -\rho g \nabla z = -\nabla(\rho g z) = \nabla(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}), \tag{A.4}$$

em que  $(\rho g z)$  é o potencial gravitacional. Dessa forma, a pressão modificada é dada por:

$$p = p' - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}. \tag{A.5}$$

Com isso, a Equação A.3 pode ser simplificada para:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando o processo de adimensionalização na Equação A.6:

$$\frac{\rho u_c}{t_c} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho u_c^2}{l_c} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\frac{\mu u_c}{l_c^2} \nabla^* p^* + \frac{\mu u_c}{l_c^2} \nabla^{2*} \mathbf{u}^*. \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando a equação anterior por  $\frac{l_c}{\rho u_c^2}$ .

$$\frac{l_c \dot{\gamma}}{u_c} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\frac{\mu}{l_c \rho u_c} \nabla^* p^* + \frac{\mu}{l_c \rho u_c} \nabla^{2*} \mathbf{u}^*. \quad (\text{A.8})$$

$$St \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\frac{1}{Re} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \mathbf{u}^*. \quad (\text{A.9})$$

Ou ainda:

$$ReSt \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^*) = -\nabla^* p^* + \nabla^{2*} \mathbf{u}^*. \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Equação de Navier-Stokes em uma célula de Hele-Shaw

Iniciando com a Equação de Navier-Stokes para *creeping flow*:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{A.11})$$

Desenvolvendo a Equação (A.11) na direção  $x$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{A.13})$$

Desenvolvendo a Equação (A.11) na direção  $z$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (\text{A.15})$$

Desenvolvendo a Equação (A.11) na direção  $y$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Integrando a Equação (A.13) duas vezes em relação a  $y$ , obtém-se:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1, \quad (\text{A.18})$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (\text{A.19})$$

Da mesma forma, integrando a Equação (A.15):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \mu \frac{\partial p}{\partial z} y + C_3, \quad (\text{A.20})$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4. \quad (\text{A.21})$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0, & u = w = 0, \\ y = b, & u = w = 0, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$\quad (\text{A.23})$$

e então determina-se:

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} b, \quad (\text{A.24})$$

$$C_2 = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$C_3 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} b, \quad (\text{A.26})$$

$$C_4 = 0. \quad (\text{A.27})$$

Substituindo essas constantes em (A.19) e (A.21), obtém-se:

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(b - y), \quad (\text{A.28})$$

$$w(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(b - y). \quad (\text{A.29})$$

A velocidade média do escoamento pode ser calculada por:

$$U = \frac{1}{S} \int \int \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{1}{bl} \int_0^l \int_0^b (u\hat{\mathbf{e}}_x + w\hat{\mathbf{e}}_z) \cdot dzdy \quad (\text{A.31})$$

$$(\text{A.32})$$

Como o interesse é na vazão no plano  $yz$ , tem-se que  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = u$ :

$$U = \frac{1}{bl} \int_0^l \int_0^b \left( -\frac{1}{2\mu} y(b-y) \frac{\partial p}{\partial x} \right) dzdy \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{1}{b} \int_0^b -\frac{1}{2\mu} y(b-y) \frac{\partial p}{\partial x} dy \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{b} \left( -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{y^2 b}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b \quad (\text{A.35})$$

$$= -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{A.36})$$

## A.4 Adimensionalização da Equação de Darcy-Forchheimer

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{u} - \rho \beta k^{-1/2} \mathbf{u} |\mathbf{u}|. \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\mu u_c}{b^2} \nabla^* p^* = -\frac{\mu u_c}{b^2} \frac{\mathbf{u}^*}{k^*} - \frac{\rho \beta u_c^2}{b} k^{*-1/2} \mathbf{u}^* |\mathbf{u}^*|. \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla^* p^* = -\frac{\mathbf{u}^*}{k^*} - \frac{\rho \beta b u_c}{\mu} k^{*-1/2} \mathbf{u}^* |\mathbf{u}^*| \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla^* p^* = -\frac{\mathbf{u}^*}{k^*} - \beta Re k^{*-1/2} \mathbf{u}^* |\mathbf{u}^*| \quad (\text{A.40})$$

## A.5 Viscosidade de Parede e Fator de Atrito

A viscosidade de parede e o fator de atrito são apresentados pelas Equações (A.41) e (A.42), respectivamente.

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}, \quad (\text{A.41})$$

$$f_w = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}, \quad (\text{A.42})$$

em que  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$ . Mas note que  $\tau_w$  também pode ser calculado por um balanço global na célula (vide Figura 2.4) da seguinte forma:

$$\tau_w(2l + 2b)l = -bl\Delta p, \quad (\text{A.43})$$

resultando em:

$$\tau_w = -\frac{\Delta p b}{(2l + 2b)}. \quad (\text{A.44})$$

Como as geometrias em que  $l \gg b$  estão sendo trabalhadas, a equação pode ser reduzida para:

$$\tau_w = -\frac{b \Delta p}{2l} = \frac{bG}{2}. \quad (\text{A.45})$$

Dessa forma, é possível calcular a viscosidade de parede como:

$$\mu_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = \frac{b}{2} \frac{G}{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w}. \quad (\text{A.46})$$

Note ainda que:

$$f_w = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{bG}{\rho U^2} = \frac{1}{Re} \frac{b^2 G}{\mu U}, \quad (\text{A.47})$$

$$f_w Re = \frac{b^2 G}{\mu U}. \quad (\text{A.48})$$

Dessa forma, é obtido que:

$$\mu_w^* = f_w Re. \quad (\text{A.49})$$

## A.6 Soluções Exatas: Meios Porosos e Expansões Assintóticas Regulares

Esta seção apresenta as equações para as soluções exatas desenvolvidas na seção 3.3 usando o recurso de resolução simbólica para equações diferenciais ordinárias do *software* MATLAB.

### A.6.1 Campo de Velocidade

$$\begin{aligned}
v_x^*(y^*) = & - \left[ e^{-\text{Ha} y^*} \left( e^{\text{Ha} y^*} - e^{\text{Ha}} \right) \left( 2 \sigma^2 e^{\text{Ha} (y^*+1)} + 2 E_0^* \text{Ha}^2 \right. \right. \\
& - 2 \alpha \sigma^3 - 2 \sigma^2 - 2 E_0^* \text{Ha}^2 e^{\text{Ha} (y^*+1)} + 2 \alpha \sigma^3 e^{\text{Ha} (y^*+1)} \\
& + 2 \text{Ha} \alpha \sigma e^{\text{Ha} y^*} + 2 E_0^* \text{Ha}^2 \alpha \sigma + 2 \text{Ha} \alpha \sigma e^{\text{Ha}} \\
& \left. \left. - \text{Ha} \alpha \sigma^3 e^{\text{Ha} y^*} - \text{Ha} \alpha \sigma^3 e^{\text{Ha}} - 2 E_0^* \text{Ha}^2 \alpha \sigma e^{\text{Ha} (y^*+1)} \right) \right] \div \\
& \left( 2 \text{Ha}^2 \left( e^{2\text{Ha}} + 1 \right) (\alpha \sigma + 1) \right). \tag{A.50}
\end{aligned}$$

### A.6.2 Velocidade de Deslizamento

$$\begin{aligned}
u_i^* = & \sigma \left( e^{\text{Ha}} - 1 \right) \left( 2 \alpha - \sigma + 2 \text{Ha} \alpha - 2 \alpha e^{\text{Ha}} \right. \\
& + \sigma e^{\text{Ha}} - 2 \alpha \sigma^2 + 2 \alpha \sigma^2 e^{\text{Ha}} \\
& \left. + 2 \text{Ha} \alpha e^{\text{Ha}} - \text{Ha} \alpha \sigma^2 - \text{Ha} \alpha \sigma^2 e^{\text{Ha}} \right) \div \\
& \left[ \text{Ha} (\alpha \sigma + 1) \left( 2 \text{Ha} - e^{2\text{Ha}} + 2 \text{Ha} e^{2\text{Ha}} + 1 \right) \right]. \tag{A.51}
\end{aligned}$$

### A.6.3 Vazão

$$\begin{aligned}
Q^* = & \left[ 2 \text{Ha} \sigma^2 - 2 E_0^* \text{Ha}^2 - 2 E_0^* \text{Ha}^3 - 2 \sigma^2 e^{2\text{Ha}} \right. \\
& + 2 \alpha \sigma^3 + 2 \sigma^2 + 2 E_0^* \text{Ha}^2 e^{2\text{Ha}} \\
& - 2 E_0^* \text{Ha}^3 e^{2\text{Ha}} + 2 \text{Ha} \alpha \sigma \\
& + 2 \text{Ha} \sigma^2 e^{2\text{Ha}} - 2 \alpha \sigma^3 e^{2\text{Ha}} + \text{Ha} \alpha \sigma^3 \\
& - 2 E_0^* \text{Ha}^2 \alpha \sigma - 2 E_0^* \text{Ha}^3 \alpha \sigma - 4 \text{Ha} \alpha \sigma e^{\text{Ha}} \\
& + 2 \text{Ha} \alpha \sigma e^{2\text{Ha}} + 2 \text{Ha} \alpha \sigma^3 e^{\text{Ha}} + \text{Ha} \alpha \sigma^3 e^{2\text{Ha}} \\
& \left. + 2 E_0^* \text{Ha}^2 \alpha \sigma e^{2\text{Ha}} - 2 E_0^* \text{Ha}^3 \alpha \sigma e^{2\text{Ha}} \right] \div \\
& \left[ 2 \text{Ha}^3 \left( e^{2\text{Ha}} + 1 \right) (\alpha \sigma + 1) \right]. \tag{A.52}
\end{aligned}$$

#### A.6.4 Densidade de Fluxo Magnético Induzido

$$\begin{aligned}
B_x^*(y^*) = & \left[ \text{Re}_m \left( 2\sigma^2 e^{\text{Ha}(2y^*+1)} - 2\sigma^2 e^{\text{Ha}} + 2\sigma^2 y^* e^{\text{Ha}y^*} \right. \right. \\
& - 2\alpha\sigma^3 e^{\text{Ha}} - 2\sigma^2 y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} - 2E_0^* \text{Ha}^2 e^{\text{Ha}(2y^*+1)} \\
& + 2\alpha\sigma^3 e^{\text{Ha}(2y^*+1)} + 2E_0^* \text{Ha}^2 e^{\text{Ha}} - 2\text{Ha}\alpha\sigma e^{\text{Ha}y^*} \\
& + 2\text{Ha}\alpha\sigma e^{2\text{Ha}y^*} - 2E_0^* \text{Ha}^2 y^* e^{\text{Ha}y^*} - 2\text{Ha}\alpha\sigma e^{\text{Ha}(y^*+2)} \\
& + \text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{\text{Ha}y^*} - \text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{2\text{Ha}y^*} + 2\text{Ha}\alpha\sigma e^{2\text{Ha}} \\
& + 2\alpha\sigma^3 y^* e^{\text{Ha}y^*} + 2E_0^* \text{Ha}^2 y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} + \text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{\text{Ha}(y^*+2)} \\
& - \text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{2\text{Ha}} - 2\alpha\sigma^3 y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} + 2\text{Ha}\alpha\sigma^3 y^* e^{\text{Ha}(y^*+1)} \\
& - \text{Ha}\alpha\sigma^3 y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} - 2E_0^* \text{Ha}^2 \alpha\sigma e^{\text{Ha}(2y^*+1)} \\
& + 2\text{Ha}\alpha\sigma y^* e^{\text{Ha}y^*} + 2E_0^* \text{Ha}^2 \alpha\sigma e^{\text{Ha}} \\
& - 4\text{Ha}\alpha\sigma y^* e^{\text{Ha}(y^*+1)} + 2\text{Ha}\alpha\sigma y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} \\
& - \text{Ha}\alpha\sigma^3 y^* e^{\text{Ha}y^*} - 2E_0^* \text{Ha}^2 \alpha\sigma y^* e^{\text{Ha}y^*} \\
& \left. \left. + 2E_0^* \text{Ha}^2 \alpha\sigma y^* e^{\text{Ha}(y^*+2)} \right) \right] \div \\
& \left[ 2\text{Ha}^3 (\alpha\sigma + 1) (e^{\text{Ha}y^*} + e^{\text{Ha}(y^*+2)}) \right]. \tag{A.53}
\end{aligned}$$

#### A.6.5 Campo Elétrico

$$\begin{aligned}
E_0^* = & \left[ 2\text{Ha}\sigma^2 - 2\sigma^2 e^{2\text{Ha}} + 2\alpha\sigma^3 + 2\sigma^2 + 2\text{Ha}\alpha\sigma \right. \\
& + \text{Ha}\sigma^2 e^{2\text{Ha}} - 2\alpha\sigma^3 e^{2\text{Ha}} + \text{Ha}\alpha\sigma^3 \\
& - 4\text{Ha}\alpha\sigma e^{\text{Ha}} + 2\text{Ha}\alpha\sigma e^{2\text{Ha}} + 2\text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{\text{Ha}} \\
& \left. + \text{Ha}\alpha\sigma^3 e^{2\text{Ha}} \right] \div \\
& \left[ 4\text{Ha}^3 e^{2\text{Ha}} - 2\text{Ha}^2 e^{2\text{Ha}} + 2\text{Ha}^2 + 4\text{Ha}^3 \right. \\
& \left. + 2\text{Ha}^2 \alpha\sigma + 4\text{Ha}^3 \alpha\sigma - 2\text{Ha}^2 \alpha\sigma e^{2\text{Ha}} + 4\text{Ha}^3 \alpha\sigma e^{2\text{Ha}} \right]. \tag{A.54}
\end{aligned}$$

## A.7 Discretização dos Operadores Matemáticos e Critérios do Algoritmo para Solução dos Sistemas Lineares

É possível definir os esquemas numéricos para os termos das equações governantes, como por exemplo, as derivadas que são calculadas numericamente. Esses esquemas numéricos são especificados no dicionário *fvSchemes* do OpenFoam. Os esquemas numéricos são subdivididos da seguinte maneira (OPENFOAM, 2018):

- **ddtScheme**: Derivadas temporais de primeira e segunda ordem ( $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ).
- **gradSchemes**: Gradiente ( $\nabla$ ).
- **divSchemes**: Divergência ( $\nabla \cdot$ ).
- **laplacianSchemes**: Laplaciano ( $\nabla^2$ ).
- **interpolationSchemes**: Interpolação de valores da célula para face.
- **snGradSchemes**: Componente do gradiente normal à face de uma célula.
- **wallDist**: Cálculo da distância até a parede.

O OpenFOAM disponibiliza esquemas de discretização pré-programados para diferentes tipos de termos em equações diferenciais. Os esquemas mais comuns para cada tipo de termo incluem:

- **Derivadas Temporais**: Euler, steadyState, backward, CrankNicolson.
- **Gradientes**: Gauss linear, leastSquares, cellLimited.
- **Divergência**: linear, linearUpwind, upwind.
- **Gradientes Normais à Superfície**: corrected, uncorrected, limited.
- **Laplaciano**: Gauss linear corrected, Gauss linear limited corrected.
- **Interpolação**: linear.

Neste trabalho, para as derivadas temporais (quando necessário devido a estrutura do *solver*), utilizou-se o esquema de Euler para simulações transientes devido à sua estabilidade. Este esquema é implícito de primeira ordem. Esquemas de segunda ordem geralmente são mais precisos, mas podem apresentar menos estabilidade. Já para simulações em estado estacionário, em que as variáveis não mudam com o tempo, foi utilizado o esquema *steadyState*.

Nos gradientes, o esquema Gauss linear foi empregado. Este esquema utiliza a integração Gaussiana e é de segunda ordem, sendo utilizado para a maioria das aplicações. Ele oferece uma boa combinação entre precisão e estabilidade, principalmente quando os critérios de qualidade da malha são respeitados.

Para o Laplaciano, o esquema Gauss linear uncorrected foi utilizado devido a ortogonalidade das malhas, proporcionando precisão sem a necessidade de correção adicional na malha. Este esquema é simples e eficaz para malhas bem estruturadas.

Na interpolação, o esquema linear foi empregado como padrão de interpolação de segunda ordem para interpolar valores de célula para face, sendo adequado para a maioria dos casos.

## A.8 Solução dos Sistemas Lineares

Os *solvers* são algoritmos que resolvem sistemas de equações lineares iterativamente. Eles aplicam métodos numéricos para encontrar a solução de matrizes esparsas que surgem das discretizações das equações diferenciais parciais.

- **GAMG (Geometric Agglomerated Algebraic Multigrid Solver)**: Um solver multigrid algébrico que utiliza ciclos multigrid para acelerar a convergência. Ideal para malhas grandes e complexas.
- **PCG (Preconditioned Conjugate Gradient Solver)**: Um solver de gradiente conjugado condicionado, adequado para matrizes simétricas.
- **smoothSolver**: Um solver iterativo que utiliza smoothers para resolver matrizes simétricas e assimétricas. Baseia-se em condicionadores para melhorar a eficiência.

Os condicionadores são utilizados para transformar o sistema de equações de forma a melhorar a taxa de convergência dos solvers iterativos. Eles modificam o sistema original para torná-lo mais fácil de resolver. Um tipo comum de condicionador é o DICPreconditioner (Diagonal Incomplete Cholesky Preconditioner) que utiliza uma versão incompleta da decomposição de Cholesky para matrizes simétricas, melhorando a convergência.

Os smoothers são usados para reduzir os erros de alta frequência nas soluções iterativas, melhorando a estabilidade e a taxa de convergência dos solvers. Eles são aplicados entre as iterações dos solvers para suavizar a solução. Alguns smoothers comuns são:

- **DIC (Diagonal Incomplete Cholesky Smoother)**: Um smoother baseado na decomposição incompleta de Cholesky para matrizes simétricas.

- **symGaussSeidel**: O método Gauss-Seidel é aplicado tanto para matrizes simétricas quanto assimétricas, sendo um método clássico para suavização de soluções iterativas.

Os *solvers* são os algoritmos principais que aplicam métodos numéricos específicos para resolver os sistemas. Os preconditionadores transformam o sistema para acelerar a convergência dos *solvers*, tornando os problemas mais simples de resolver por técnicas iterativas. Os *smoothers* reduzem os erros de alta frequência, estabilizando e acelerando a convergência dos *solvers*. Essas categorias trabalham juntas para resolver sistemas complexos de forma eficiente e estável.

## A.9 Esquemas Numéricos Utilizados

No desenvolvimento das simulações numéricas, foram utilizados esquemas numéricos, *solvers*, preconditionadores e *smoothers* baseados em casos padrões semelhantes do OpenFOAM que já foram simulados e validados. Essas escolhas serão detalhadas a seguir.

### A.9.1 Escoamento em uma Célula de Hele-Shaw

Para as simulações do escoamento em células de Hele-Shaw e do escoamento em um meio poroso com permeabilidade de Ergun, foram adotados os esquemas de discretização especificados na Tabela 10. Os critérios para a solução dos sistemas lineares são detalhados na Tabela 11.

Tabela 10 – Discretização dos operadores matemáticos.

<b>Operador</b>	<b>Método de discretização</b>
ddtSchemes	steadyState
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	none
laplacianSchemes	Gauss linear uncorrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	uncorrected
wallDist	meshWave

Tabela 11 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares.

<b>Parâmetro</b>	<b>Especificação</b>
<b>solver para p</b>	GAMG
tolerance	1e-8
relTol	0.1
<b>solver para U</b>	smoothSolver
smoother	symGaussSeidel
tolerance	1e-08
relTol	0.1

## A.9.2 Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw

Para todos os casos MHD nesse trabalho foram adotados os esquemas de discretização especificados na Tabela 12. Os critérios para a solução dos sistemas lineares são detalhados na Tabela 13.

Tabela 12 – Discretização dos Operadores Matemáticos.

<b>Operador</b>	<b>Método</b>
ddtSchemes	Euler
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	Gauss linear
laplacianSchemes	Gauss linear uncorrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	uncorrected

Tabela 13 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares.

<b>Parâmetro</b>	<b>Atribuição</b>
<b>solver para p</b>	PCG
preconditioner	DIC
tolerance	1e-6
relTol	0.05
<b>solver para U/B</b>	smoothSolver
smoother	symGaussSeidel
tolerance	1e-05
relTol	0

### A.9.3 Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy-Forchheimer

Para as simulações foram adotados os esquemas de discretização especificados na Tabela 14. Os critérios para a solução dos sistemas lineares são detalhados na Tabela 15.

Tabela 14 – Discretização dos Operadores Matemáticos.

<b>Operador</b>	<b>Método</b>
ddtSchemes	Euler
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	none
laplacianSchemes	Gauss linear uncorrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	uncorrected

Tabela 15 – Critérios do algoritmo para solução dos sistemas lineares.

<b>Parâmetro</b>	<b>Atribuição</b>
<b>solver para p</b>	PCG
preconditioner	DIC
tolerance	1e-6
relTol	0.05
<b>solver para U</b>	smoothSolver
smoother	symGaussSeidel
tolerance	1e-05
relTol	0

## A.10 Malhas

As malhas computacionais utilizadas nesse trabalho são integralmente compostas por elementos do tipo hexaédricos devido as características da geometria e suas vantagens por comporem uma malha estruturada. Para os escoamentos simulados com a equação de Darcy-Forchheimer, realiza-se uma análise de convergência de malha, consistindo na criação de múltiplas malhas com variados graus de refinamento, com o objetivo de identificar aquela que oferece o melhor equilíbrio entre custo-benefício. Para tal, foram comparados resultados de um parâmetro específico da simulação para essas malhas. Em outros casos, as comparações foram realizadas entre os resultados simulados com os teóricos, obtidos por meio do auxílio computacional da biblioteca simbólica do MATLAB. Nos casos dos escoamentos bifásicos, os resultados foram comparado com dados experimentais, quando possível. Com isso, avaliou-se qual malha demonstra maior competitividade em termos de eficiência, custo computacional e precisão.

### A.10.1 Escoamento MHD em uma Célula de Hele-Shaw

A malha utilizada nessas simulações pode ser visualizada nas Figuras A.1, A.2 e A.3.

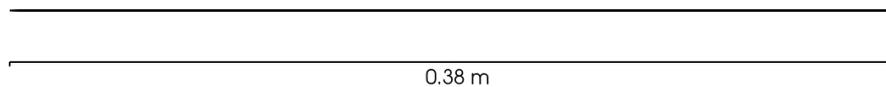


Figura A.1 – Região completa para geração da malha.  $b = 0.0009\text{ m}$

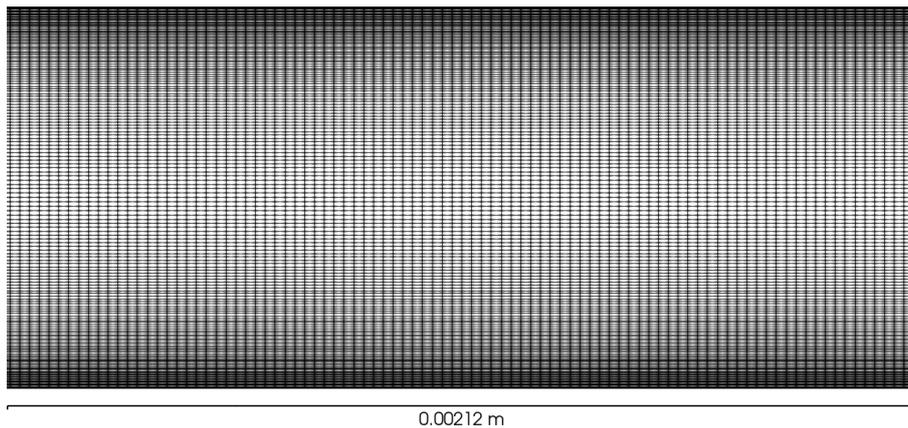


Figura A.2 – Região central da malha

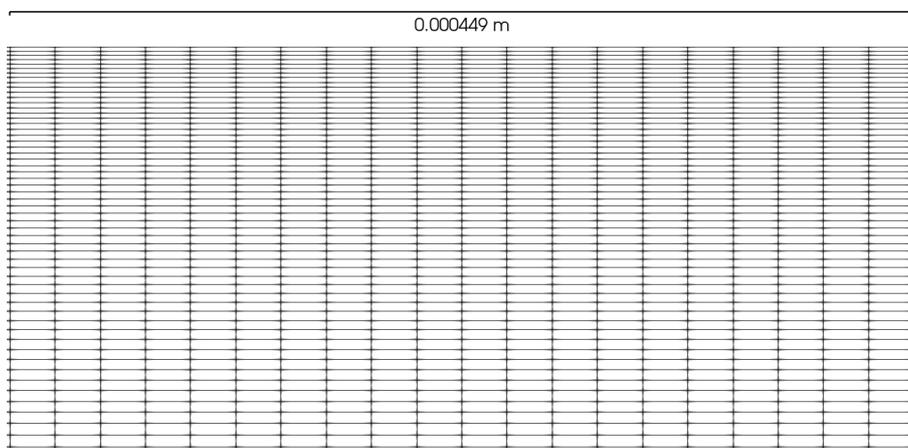


Figura A.3 – Região próxima a parede da malha

## A.10.2 Escoamento em um Meio Poroso

A malha utilizada para a realização dos escoamentos no meio poroso pode ser visualizada nas Figuras A.4 e A.5.

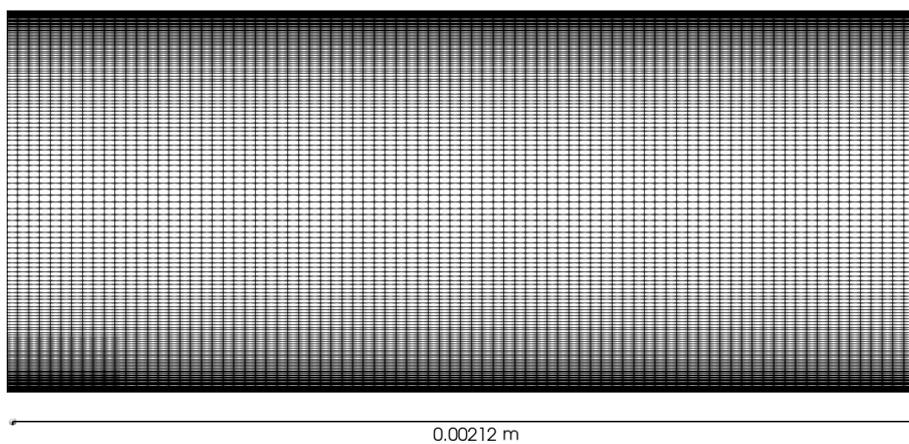


Figura A.4 – Região central da malha. O canal completo possui  $b = 0.0009 \text{ m}$  e  $l = 0.38 \text{ m}$ .

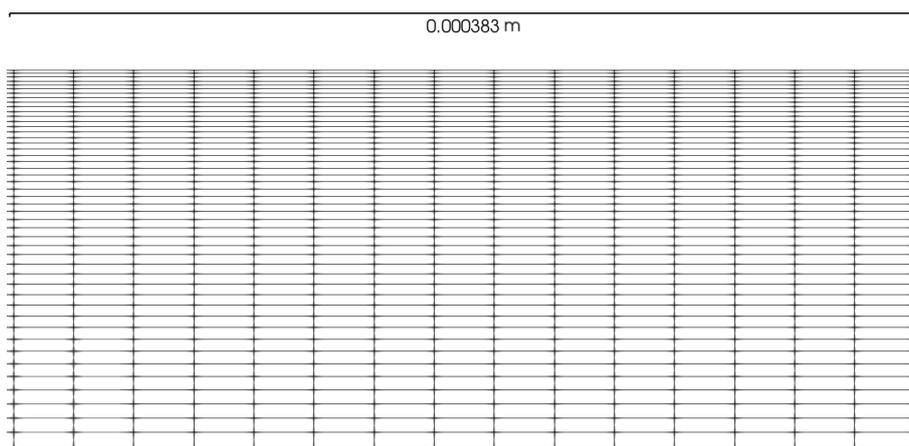


Figura A.5 – Região da malha próxima à parede.

### A.10.3 Escoamento com Pequenos Efeitos Inerciais: a Equação de Darcy-Forchheimer

A malha utilizada para a realização dos escoamentos no meio poroso com pequenos efeitos inerciais pode ser visualizada nas Figuras A.6 e A.7.

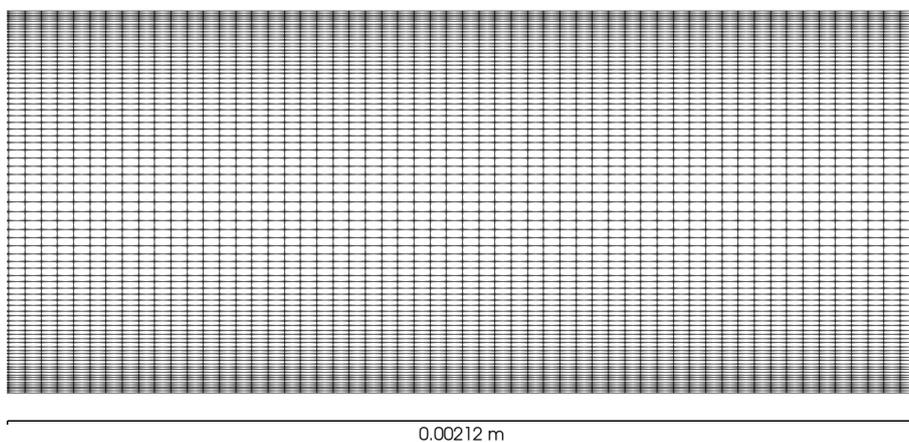


Figura A.6 – Parte central da malha.

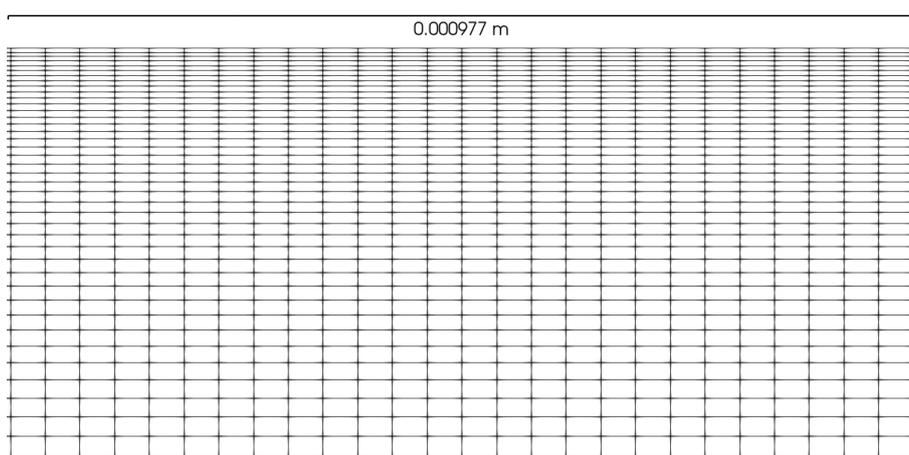


Figura A.7 – Região da malha próxima à parede.

#### A.10.4 Escoamentos Bifásicos

A malha utilizada para a realização dos escoamentos bifásicos pode ser visualizada nas Figuras A.8 e A.9 e A.10.

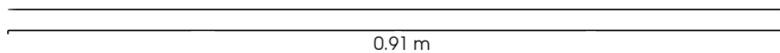


Figura A.8 – Região completa para geração da malha.  $b = 0.0008 \text{ m}$

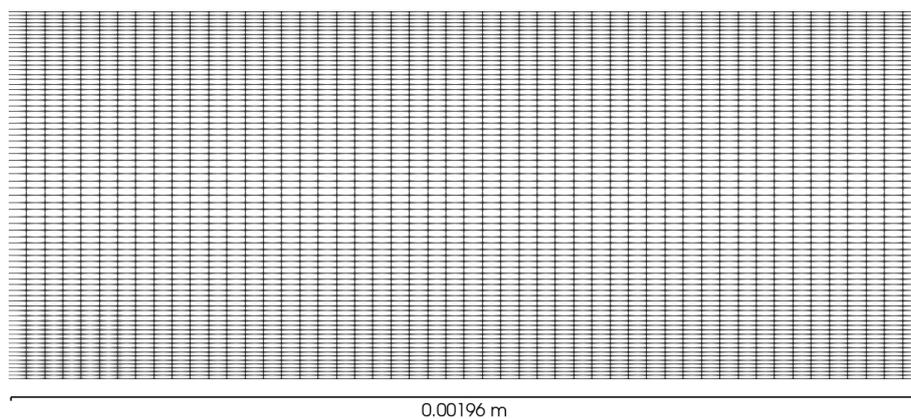


Figura A.9 – Parte central da malha.

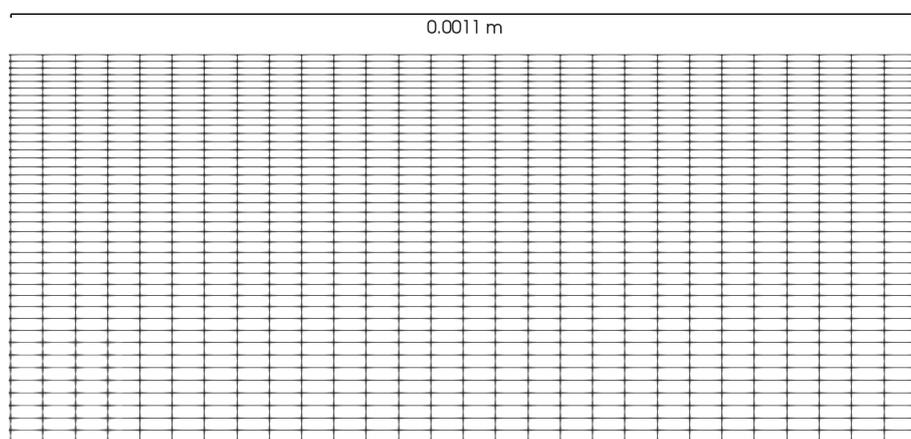


Figura A.10 – Região próxima da parede.