

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UnB
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE – FACE
DEPARTAMENTO DE CONTABILIDADE E AUTUARIAIS - CCA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS - PPGCONT

LUCAS OLIVEIRA BEZERRA

**O MÉTODO DEA E AS ABORDAGENS TRADICIONAIS NA SELEÇÃO DE
FUNDOS BRASILEIROS DE AÇÕES**

Brasília-DF/2023

LUCAS OLIVEIRA BEZERRA

**O MÉTODO DEA E AS ABORDAGENS TRADICIONAIS NA SELEÇÃO DE
FUNDOS BRASILEIROS DE AÇÕES**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Ciências Contábeis, da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de Brasília, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Ciências Contábeis.

Linha de Pesquisa: Contabilidade e Mercado Financeiro

Orientador(a): Prof. Carlos Rosano-Peña

Brasília-DF/2023

Professora Doutora Márcia Abrahão Moura
Reitora da Universidade de Brasília

Professor Doutor Enrique Huelva Unternbäumen
Vice-Reitor da Universidade de Brasília

Professor Doutor Lúcio Remuzat Rennó Junior
Decano de Pós-graduação

Professor Doutor José Márcio Carvalho
**Diretor da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de
Políticas Públicas**

Professor Doutor Sérgio Ricardo Miranda Nazaré
Chefe do Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais

Professor Doutor Jomar Miranda Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ciências Contábeis da UnB

LUCAS OLIVEIRA BEZERRA

**O MÉTODO DEA E AS ABORDAGENS TRADICIONAIS NA SELEÇÃO DE
FUNDOS BRASILEIROS DE AÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis (PPGCont) da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de Brasília (UnB) como requisito para a obtenção de Título de Mestre em Ciências Contábeis.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Rosano Peña
Presidente – Universidade de Brasília (PPGCont/UnB)

Prof. Dr. Paulo Augusto Pettenuzzo De Britto
Examinador Interno – Universidade de Brasília (PPGCont/UnB)

José Eustáquio Ribeiro Vieira Filho
Examinador Externo – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)

Prof. Dr. Marcelo Driemeyer Wilbert
Suplente Interno – Universidade de Brasília (PPGCont/UnB)

Brasília, 31 de agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradecer a Deus pela oportunidade e proteção ao longo de toda a caminhada, em especial, pela conclusão deste mestrado acadêmico.

Aos meus pais, Jailson Bezerra da Silva e Sônia Maria Oliveira Bezerra, pelo apoio e amor incondicional, pelo suporte e paciência e esforço que fizeram para onde estarmos agora. Aos meus irmãos, Jailson e Mateus, pelo apoio e carinho e pelos momentos de descontrações durante esta trajetória. Obrigado por toda a preocupação dispendida a mim e por sempre estarem ao meu lado.

Ao meu orientador, Prof. Carlos Rosano, pelo apoio, dedicação, sinceridade e pela oportunidade de conversas muito proveitosas e de grande aprendizado. Agradeço pela paciência ao ter me orientado, não somente em meus estudos para esta dissertação, com também nas diversas fases deste mestrado, propiciando o meu amadurecimento acadêmico.

À equipe de professores e funcionários da FACE e do Programa de Pós-Graduação, pela atenção, ensino, paciência e acompanhamento neste percurso.

Aos amigos e colegas que fiz nesta jornada do mestrado, parceiros de orientações e reuniões, por ajudarem com esclarecimentos de dúvidas e pela companhia, mesmo no período que passamos de quarentena durante a pandemia.

À UnB, por ter me recebido e pela oportunidade de participar deste programa de pós-graduação e pelo que vem fazendo pelos participantes.

E a todos que, direta e indiretamente, contribuíram para o êxito desta pesquisa. Muito obrigado a todos!

RESUMO

BEZERRA, Lucas Oliveira. *O método DEA e as abordagens tradicionais na seleção de fundos brasileiros de ações*. 2023. 89f. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis) – Universidade de Brasília, Brasília, 2023.

Este estudo objetiva avaliar se carteiras montadas com os fundos de ações de índice ativo por meio dos métodos Análise Envoltória de Dados (DEA) apresentam um melhor desempenho que os obtidos com os métodos tradicionais. Para isso, realizou-se uma análise com o método DEA, com Retornos Variáveis de Escala (VRS) e Retornos Constantes de Escala (CRS), além de orientação aos produtos em sua forma clássica, bem como em conjunto com a ferramenta *Bootstrap* para maior robustez dos resultados. Posteriormente, buscou-se a realização da otimização de Markowitz, tendo ocorrido a análise em três estágios distintos. Primeiramente, verificaram-se os coeficientes de eficiência para os modelos DEA clássicos e para o modelo DEA com o *bootstrap*. Em seguida, realizou-se a formação da carteira eficiente projetada a partir dos fundos eficientes pelos modelos DEA. Então, efetuou-se a otimização de Markowitz para as carteiras eficientes projetadas e uma carteira clássica. A base de dados compreendeu o período entre 2012 e 2021 com a extração dos dados da base do Economática®. Entre os principais resultados, foi identificado que a otimização da carteira clássica obteve melhores resultados que aquelas estimadas pelos modelos DEA. Verificou-se também que os fatores exógenos, como o período de recessão e a pandemia ocasionada pelo Covid, influenciaram os resultados.

Palavras-chave: Eficiência. Fundos de Investimento. Markowitz. DEA. *Bootstrap*.

ABSTRACT

BEZERRA, Lucas Oliveira. The DEA method and the traditional approaches in the selection of Brazilian stock funds. 2023. 89f. Dissertation (Master's degree in Accounting Sciences) – University of Brasília, Brasília, 2023.

This study aims to evaluate portfolios assembled with stock funds with active index, using DEA methods, obtaining better performance than those obtained with traditional methods. For this, an analysis was carried out using Data Envelopment Analysis (DEA) method, with Variable Returns to Scale (VRS) and Constant Returns to Scale (CRS) and product orientation, in its classic form, as well as in together with the Bootstrap tool for more robust results. Subsequently, Markowitz optimization was carried out. There was the adoption of the analysis in three distinct stages. First, the efficiency coefficients for the classic DEA models and for the DEA model with bootstrap were verified. In sequence, the formation of the efficient portfolio projected from the efficient funds by the DEA models was carried out. Then, Markowitz optimization was performed for the projected efficient portfolios and a classical portfolio. The database comprised the period between 2012 and 2021, with data extracted from the Economática®. Among the main results, it was identified that the optimization of the classical portfolio obtained better results than those estimated by the DEA models. It is also verified that exogenous factors such as the recession period and the pandemic caused by Covid influenced the results.

Keywords: Efficiency. Investment Funds. Markowitz. DEA. *Bootstrap*.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2012.....	50
Gráfico 2 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2013.....	77
Gráfico 3 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2014.....	78
Gráfico 4 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2015.....	79
Gráfico 5 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2016.....	80
Gráfico 6 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2017.....	81
Gráfico 7 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2018.....	82
Gráfico 8 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2019.....	83
Gráfico 9 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2020.....	84
Gráfico 10 – Verificação de <i>Outliers</i> em 2021.....	85

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Patrimônio Líquido dos Fundos de Ações para o período de 1972 a 2020 em R\$ milhões constante em agosto de 2021 deflacionado pelo IGP-DI.....	24
Figura 2 – Conjunto de Possibilidades de Investimento e Fronteira de Eficiência com um Insumo e um Produto.....	26
Figura 3 – Conjunto de Possibilidades de Investimento e Fronteira de Eficiência com dois Insumos para um dado nível de Produto.....	27
Figura 4 – Etapas da Pesquisa.....	35

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Apresentação das Variáveis para Mensuração de Eficiência.....	36
Quadro 2 – Fundo de Ações Índice Ativo.....	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatística Descritiva das Variáveis Utilizadas na Análise.....	47
Tabela 2 – DMUs Supereficientes da amostra no período de 2012-2021.....	48
Tabela 3 – <i>Outliers</i> para o ano de 2012.....	49
Tabela 4 – <i>Outliers</i> identificados no período de 2013-2021.....	51
Tabela 5 – Teste de Hipóteses de Escolha do Modelo de Retorno de Escala.....	51
Tabela 6 – Eficiência para modelos DEA clássicos orientados ao produto.....	52
Tabela 7 – Índice de Eficiência Corrigido pelo Viés Orientado ao Produto.....	54
Tabela 8 – Fundos Selecionados para Compôr as Carteiras Eficientes do Modelo DEA Clássico no período de 2012-2021.....	55
Tabela 9 – Fundos Selecionados para Compôr as Carteiras Eficientes do Modelo DEA com <i>Bootstrap</i> no período de 2012-2021.....	56
Tabela 10 – Otimização da Carteira Clássica.....	57
Tabela 11 – Otimização da Carteira DEA Clássicos.....	58
Tabela 12 – Otimização para Carteira DEA com <i>Bootstrap</i>	58
Tabela 13 – Retornos Esperados para Maximização e a Razão Retorno e Risco.....	59
Tabela 14 – Supereficiência para modelo VRS orientado ao produto.....	75
Tabela 15 – Supereficiência para modelo CRS orientado ao produto.....	76
Tabela 16 – <i>Outliers</i> para o ano de 2013.....	77
Tabela 17 – <i>Outliers</i> para o ano de 2014.....	77
Tabela 18 – <i>Outliers</i> para o ano de 2015.....	78
Tabela 19 – <i>Outliers</i> para o ano de 2016.....	79
Tabela 20 – <i>Outliers</i> para o ano de 2017.....	80
Tabela 21 – <i>Outliers</i> para o ano de 2018.....	81
Tabela 22 – <i>Outliers</i> para o ano de 2019.....	82
Tabela 23 – <i>Outliers</i> para o ano de 2020.....	83
Tabela 24 – <i>Outliers</i> para o ano de 2021.....	84
Tabela 25 – Viés para o modelo CRS e VRS.....	86
Tabela 26 – Composição da Carteira Clássica Otimizada.....	87
Tabela 27 – Composição da Carteira DEA Clássica Otimizada.....	88
Tabela 28 – Composição da Carteira DEA com <i>Bootstrap</i> Otimizada.....	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANBIMA - Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
BCC – Banker, Charnes e Cooper
CAPM – *Capital Asset Pricing Model*\ Modelo de Precificação de Ativo Financeiros
CCR – Charnes, Cooper e Rhodes
CRS – *Constant Returns to Scale*\ Retornos Constantes de Escala
CML – *Capital Market Line*\ Linha de Mercado de Capitais
CVM – Comissão de Valores Mobiliários
DARA - Diminuição a Aversão ao Risco Absoluto
DEA – *Data Envelopment Analysis*\ Análise Envoltória de Dados
DMU – *Decision Making Units*\ Unidades Tomadoras de Decisão
ETP - Eficiência Técnica Pura
ET – Eficiência Técnica
GDP – *Generation Data Process*\ Processo de Geração de Dados
MTP – *Modern Theory of Portfolio*\ Teoria Moderna de Portfolio
PNB – Produto Nacional Bruto
SFA – *Stochastic Frontier Analysis*\ Análise de Fronteiras Estocásticas
VRS - *Variable Returns to Scale*\ Retornos Variáveis de Escala

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1 Problema de Pesquisa.....	18
1.2 Objetivos.....	19
1.3 Relevância.....	20
2. REVISÃO DA LITERATURA	21
2.1 Fundos de Investimento.....	21
2.1.1 Fundo de investimento em ações.....	23
2.2 Conceito e medida da eficiência	25
2.2.1 Medida da eficiência com a Análise Envoltória de Dados (DEA).....	27
2.3 Otimização da Carteira de Markowitz	31
2.4 Estudos Anteriores	32
3. METODOLOGIA DE PESQUISA	34
4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	47
4.1 Análise Descritiva e Detecção de Casos Atípicos	47
4.2 Análise dos resultados dos Modelos Análise Envoltória de Dados.....	51
4.2.1 Modelos DEA Clássicos.....	52
4.2.2 Modelo DEA em conjunto com o <i>bootstrap</i>	53
4.3.3 – Resumo dos Fundos Eficientes pelos Modelos DEA	55
4.3 – Otimização das Carteiras Eficientes com os fundos selecionados	56
4.3.1 Otimização das Carteiras Clássicas.....	57
4.3.2 Otimização da Carteira DEA clássico.....	57
4.3.3 Otimização da Carteira DEA com <i>bootstrap</i>	58
4.3.4 Comparação das otimizações das carteiras eficientes projetadas	59
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS.....	64

APÊNDICE A.....	74
APÊNDICE B.....	75
APÊNDICE C	77
APÊNDICE D	86
APÊNDICE E.....	87

1. INTRODUÇÃO

Os investidores, ao decidirem aplicar recursos, precisam de informações sobre o desempenho dos fundos de investimento. Conseqüentemente, eles precisam analisar se o retorno do fundo escolhido foi suficientemente alto para remunerar o risco incorrido e, também, verificar o desempenho das aplicações em comparação a outros fundos de mesma classe. Com isso, os investidores buscam a combinação ótima de ativos de um fundo que maximiza o retorno para um dado nível de risco ou que minimiza o risco para um dado nível de retorno.

Para auxiliar a tomada de decisão dos investidores na escolha de ativos financeiros, foram desenvolvidos diversos métodos e teorias. Desde a década de 1950, os desenvolvimentos se focaram na aplicação e alocação de ativos de investimento para a obtenção de um melhor desempenho e minimização dos riscos. Nesse sentido, destacam-se a teoria de Markowitz, a diversificação com ativo livre de risco proposta por Tobin, o modelo de precificação de ativos (CAPM) e o modelo de precificação por arbitragem (APT), entre outros.

A Teoria de Portfólio foi desenvolvida por Markowitz no artigo *Portfolio Selection* (1952). Para o autor, a atenção do investidor volta-se aos retornos esperados (que é a soma ponderada dos rendimentos de cada ativo na carteira) e à estimação do risco da carteira (usando-se as variâncias e covariâncias dos retornos de cada ativo) (MARKOWITZ, 1952). Com isso, busca-se minimizar a variância da carteira e maximizar o retorno esperado por meio de um modelo de programação quadrática para que os investidores racionais encontrem carteiras eficientes em média e variância. Isso deu ao modelo de Markowitz o nome de modelo de média-variância (FAMA e FRENCH, 2007).

A partir disso, calcula-se a carteira ótima diversificada de ativos com os pesos dos ativos que proporcionam um retorno máximo em função do risco desejado. Isso possibilita estabelecer uma fronteira eficiente, uma curva que, para cada nível de risco, tem-se um conjunto de carteiras com o melhor retorno (MARKOWITZ, 1952). Antes do desenvolvimento da Teoria de Portfólios, o desempenho dos fundos era mensurado exclusivamente por meio do retorno obtido pela carteira no período analisado. A teoria tornou evidente a importância de se considerar o risco inerente aos

ativos na avaliação dos investimentos e os benefícios da diversificação para redução do risco (MELO e MACEDO, 2012).

Anos depois, Tobin (1958), em seu artigo *Liquidity preference as behavior towards risk*, estende o modelo de Markowitz, adicionando o ativo livre de risco (com retorno esperado maior que 0 e variância zero) na seleção do portfólio de ativos. Isso foi um avanço em relação à teoria de Markowitz, já que este somente considerava ativos com risco. Dessa forma, mostrava-se que o investidor, ao escolher ativos para o portfólio, poderia selecionar ativos considerados livre de risco, além de um único portfólio composto apenas por ativos arriscados. Isso é demonstrado no “teorema da separação” de Tobin (1958) e implica que a combinação entre um ativo livre de risco e uma carteira com risco deve estar contida em uma linha reta entre os dois componentes, o que determina a chamada linha de mercado de capitais (Capital Market Line - CML) formada por combinações de ativos que dominam a fronteira eficiente de Markowitz. A linha de mercado de capitais inclui também a possibilidade de aplicação de recursos de empréstimos a taxa de juros livre de risco. Assim, qualquer combinação que não esteja contida na reta ou não é factível ou é ineficiente.

Baseado nessas duas teorias de alocação de ativos em portfólios, outras ferramentas que calculam o desempenho de ativos foram criadas. Uma das mais largamente utilizadas em aplicações é o modelo de precificação de ativos de capital (mais conhecido pela sigla em inglês CAPM - *Capital Asset Pricing Model*) desenvolvido por William Sharpe (1964) e John Lintner (1965), que marcaram o nascimento da teoria do custo do capital próprio.

O CAPM determina a taxa de retorno teórica de um determinado ativo em relação a uma carteira de mercado perfeitamente diversificada que elimina, por meio do mix ótimo, o risco não sistemático (ficando apenas o risco que não pode ser reduzido a partir da diversificação, que é chamado de risco sistêmico ou risco de mercado). O modelo também leva em consideração a sensibilidade do ativo ao risco não diversificável, que é representado pela variável conhecida como índice beta (β). Assim, para CAPM, o retorno exigido é formado pela remuneração de um ativo livre de risco mais um prêmio pelo risco de mercado ajustado pelo risco do ativo avaliado.

O índice β_i do ativo i representa o coeficiente angular da reta de regressão entre os retornos históricos do título i e os retornos históricos da carteira de mercado, sendo estimado pela covariância do retorno de i e do retorno do mercado dividida pela

variância do retorno do mercado. O risco do ativo avaliado (β) é utilizado para estimar o índice de Treynor (1965) e o índice de Sharpe (1966). Além disso, o coeficiente linear da reta de regressão é usado para estimar o alfa de Jensen (1968). Esses três índices são conhecidos como índices de desempenho de investimentos.

Nessa linha, ainda se destacam os modelos multifatoriais. O mais popular é a *arbitrage pricing theory* - APT (Teoria de precificação por arbitragem) proposta por Ross (1976). A diferença do CAPM para a APT é que o retorno de um ativo não deriva apenas do beta do ativo e do retorno livre de risco, mas de outros fatores econômicos e financeiros, tais como, crescimento do PNB – Produto Nacional Bruto, taxa de inflação, dinâmica da economia mundial e outros fatores de risco sistêmico. Assim, o retorno esperado de um ativo financeiro pode ser modelado com uma função linear de vários fatores econômicos, de modo que a sensibilidade às mudanças em cada fator é representada por um coeficiente específico, não apenas um coeficiente beta. A taxa de retorno derivada do modelo de regressão pode ser usada para estimar o preço do ativo, que deve ser igual ao preço esperado no final do período descontado à taxa fornecida pelo modelo. Se o preço diverge, a arbitragem deve ajustá-lo ao preço adequado.

Essas medidas de performance, embora sejam ferramentas úteis, são alvo de críticas por partes de alguns pesquisadores. A primeira alega, segundo Basso e Funari (2001), que essas medidas, desde a teoria de Markowitz, não consideram diretamente a liquidez, os custos e as taxas arcadas pelos investidores, o que afeta o retorno do investimento, sendo importante incluir medidas alternativas que atribuam múltiplas entradas e saídas e não apenas o risco e o retorno, ou seja, não consideram os custos de transação. Nessa linha, Fama e French (2007) afirmam que o modelo CAPM é inconsistente ao analisar o prêmio de risco na relação entre beta e retorno médio, sendo menos inclinada do que prevê o CAPM, o que implica em um menor rendimento excedente esperado do mercado. Pode existir também o viés sistemático, que é entendido como capaz de produzir resultados que diferem sistematicamente da realidade. Esse viés pode ser explicado devido à incapacidade de estimar o “verdadeiro” período de retenção do ativo/investimento (cálculo dos índices para horizonte de um ano ou um mês), já que isso pode ser relativo para cada investidor (ANG e CHUA, 1979). Adicionalmente, Roll (1978), em sua análise sobre índices relativos de desempenho, verifica que a avaliação de performance é sensível à escolha do

benchmark de comparação (à carteira de mercado), o que pode levar a um condicionamento dos resultados devido à ineficiência da referência.

Em razão dessas críticas, pesquisas surgiram, nas últimas duas décadas, buscando medidas alternativas e complementares aos métodos clássicos de construção de carteiras. Uma dessas abordagens é a resultante da utilização do método de análise envoltória de dados (DEA do inglês *Data Envelopment Analysis*), inicialmente desenvolvida para análise da eficiência de programas públicos por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), mas também aplicada ao mercado financeiro.

1.1 Problema de Pesquisa

Na busca de novas abordagens alternativas, surge a utilização da medida não paramétrica DEA para avaliação da eficiência de fundos de investimentos. Assim, Murthi, Choi e Desai (1997) propuseram uma medida alternativa com base na análise de eficiência do portfólio com aplicação do modelo de análise envoltória de dados (chamado de *DEA Portfolio Efficiency Index - DPEI*). O modelo tem o retorno do fundo como *output* e, como *inputs*, o risco e os custos de transação do investidor. Esses custos não são tratados pelos índices clássicos de performance, porém essas despesas estão relacionadas com a eficiência ou a ineficiência dos fundos.

Seguindo o mesmo pensamento, Basso e Funari (2001) propuseram dois modelos de análise envoltória de dados (DEA) para avaliação da eficiência de fundos mútuos, sendo o primeiro com medidas de riscos e custos como *inputs* e o retorno esperado, como *output* do fundo. O segundo acrescenta um indicador de dominância estocástica baseado na diminuição da aversão ao risco absoluto (DARA), computando-se a preferência do investidor e os retornos dos fundos que não dominam outros fundos nos subperíodos.

O DEA tem suas vantagens para analisar a performance de fundos de investimento. A primeira é que esse instrumental constrói a fronteira eficiente de carteiras de forma mais intuitiva a partir das melhores práticas, dispensando uma relação funcional, a priori definida, entre os resultados e os recursos e seus riscos. Dessa forma, sendo não paramétrico, esse método fica livre dos possíveis erros de especificação das relações funcionais usada na avaliação da relação entre retorno e risco de ativos. A segunda vantagem é sua flexibilidade quanto à escolha dos *inputs*

e *outputs* do modelo de avaliação, não se restringindo apenas aos retornos esperados e aos riscos. A terceira e última possibilita ao modelo discutir a importância ou pesos dos insumos, já que a alocação ideal dos insumos pode gerar um retorno superior (MURTHI, CHOI e DESAI, 1997; BASSO e FUNARI, 2001). No entanto, é importante lembrar que o DEA não leva em conta fatores importantes na construção de carteiras de investimentos, como a diversificação, a correlação entre ativos, entre outros.

Outras pesquisas realizaram comparações entre os métodos DEA e os tradicionais, como, por exemplo, Chen, Chiu e Li (2011). Há também estudos de comparação com os métodos clássicos paramétricos, teoria da otimização de carteira Markowitz e o modelo Carhart (um exemplo multifatorial) a fim de verificar as limitações dos modelos tradicionais (FONSECA, FERNANDES, CUNHA e IQUIAPAZA, 2018; LOPES, CARNEIRO e SCHNEIDER, 2010; BACH, SILVA, KUDLAWICZ e MARQUES, 2015).

Diante desse contexto, os testes da utilização dos modelos DEA para avaliação da performance dos fundos de investimentos, bem como a comparação de seus resultados com os obtidos nos modelos de análise de carteira ditos tradicionais, exigem responder a seguinte problemática: as carteiras montadas com os fundos eficientes, por meio dos métodos DEA, têm um melhor desempenho que o obtido com os métodos tradicionais? Em torno dessa questão, tem-se o problema central que norteia esta pesquisa e faz emergir a seguinte hipótese a ser testada: a utilização dos fundos eficientes determinados pelo DEA permitem construir carteiras com melhor desempenho que a carteira clássica.

1.2 Objetivos

Para responder à questão proposta, o presente trabalho tem o objetivo de comparar o desempenho, no período de 2012 a 2021, de três tipos de carteiras de fundos de ações de índice ativo. A primeira carteira foi formada com a utilização do modelo de Markowitz. As outras duas foram formadas, adotando-se o seguinte procedimento: inicialmente, usaram-se os métodos DEA, com múltiplas entradas e saídas, para pré-selecionar os fundos eficientes que, posteriormente, foram otimizados, seguindo o mesmo modelo de ajuste de pesos do Markowitz. Essas carteiras DEA utilizaram os modelos clássicos CCR (Charnes, Cooper e Rhodes) e

BCC (Banker, Charnes e Cooper), bem como uma modelagem DEA com simulação *bootstrap*. Posteriormente, procedeu-se à aplicação do índice de Sharpe.

Para atingir o objetivo, o estudo pretende, especificamente:

- a) analisar o desempenho dos fundos a serem selecionados;
- b) definir variáveis de entrada (I) e de saídas (O) para os modelos DEA;
- c) identificar os casos atípicos, usando as técnicas nuvens de dados multivariada e supereficiência;
- d) realizar teste de significância de retorno de escala para escolha do tipo de fronteira adequado; e
- e) construir e estimar o desempenho da carteira tradicional formada pelos fundos selecionados e das duas carteiras DEA geradas com os fundos considerados eficientes.

1.3 Relevância

O presente trabalho é relevante por contribuir com a análise da performance dos fundos de investimentos brasileiros, em específico, do fundo de ações índice ativo, em contraste com pesquisas realizadas anteriormente que buscaram verificar outras categorias de fundos de ações, como fundo de ações livres (BISSO, CALDEIRA, SAMANEZ e TELLES, 2016, e CHEN, CHIU e LI, 2011).

A relevância do trabalho também se dá na aplicação do método *bootstrap* para fundo de ações brasileiras. O estudo de Lamb e Tee (2012) buscou analisar a consistência do método DEA a partir da aplicação do método *bootstrap* aos fundos de *hedge*. No entanto, a construção de portfólios para avaliar a eficiência de fundos de investimento com o método DEA com *bootstrap* como etapa preliminar é ainda incipiente.

A pesquisa também evolui na questão de quantidade das medidas comparadas. Enquanto os estudos anteriormente realizados propuseram identificar e classificar, por ordem de eficiência, apenas dois métodos comparativos, (CHEN, CHIU e LI, 2011; LOPES, CARNEIRO e SCHNEIDER, 2010; BACH, SILVA, KUDLAWICZ e MARQUES, 2015; FONSECA, FERNANDES, CUNHA e IQUIAPAZA, 2018), a presente pesquisa busca a comparação de três métodos.

Em relação à literatura nacional, a relevância da pesquisa se verifica na aplicação da metodologia DEA. O modelo de avaliação de eficiência dos fundos de ações, até onde se sabe, não foi aplicado ainda em pesquisas nos programas de pós-graduação em Ciências Contábeis (GAZANEO, 2006; SILVA, 2007; OLIVEIRA FILHO, 2008; LAES, 2010; FONSECA JUNIOR, 2011; OLIVEIRA FILHO, 2011; FERNANDES, 2017; FONSECA, 2018). No entanto, existem aplicações da metodologia em outras áreas de ensino (SALOMON, 2015).

O período de análise, de 2012 a 2021, também se mostra relevante por considerar duas grandes crises observadas no Brasil: a primeira é a chamada de crise de recessão (a crise de 2012 de origem política interna) e a segunda, em decorrência da pandemia do coronavírus. Em períodos de crise, ocorre a desvalorização das bolsas de valores, o que ocasiona impactos na composição de ótimas carteiras construídas em função dos retornos esperados e riscos do passado.

A presente dissertação se divide em seções. Além da parte introdutória, têm-se um capítulo para a revisão bibliográfica e outro para explicação dos procedimentos metodológicos adotados. Em seguida, tem-se a apresentação da análise dos resultados. Por fim, seguem as considerações finais.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, pretende-se realizar a revisão bibliográfica que possa fundamentar o referencial teórico sobre o tema discutido. Busca-se ainda avaliar o entendimento acerca dos fundos de investimento no Brasil e das bases conceituais dos métodos a serem utilizadas. Com isso, o capítulo está dividido em quatro seções: i) fundos de investimento; ii) conceito e medida da eficiência; iii) teoria da carteira de Markowitz; e iv) estudos anteriores.

2.1 Fundos de Investimento

Os fundos são aplicações financeiras em diversos ativos com o objetivo de obter rendimentos e lucros. Sua ação se volta para uma coletividade (chamada de cotistas) e podem ser entendidos como um condomínio de investidores. O fundo de investimento também pode ser entendido como um conjunto de recursos monetários

formado por cotistas, que é destinado à aplicação coletiva em carteira de títulos e valores mobiliários (ASSAF NETO, 2018).

O fundo de investimento tem um papel importante para a aplicação de excedentes e realização de investimento, provendo liquidez para o financiamento de aplicações produtivas, tanto públicas quanto privadas, e, nesse último caso, para a capitalização de empresas por intermédio do mercado de capitais. Além disso, o fundo é um dos grandes motores do crescimento econômico, já que gera produto, emprego e renda que se revertem em consumo e, portanto, forma um círculo virtuoso de expansão econômica.

Os fundos de investimento, para Filgueira e Cidades (2015), atraem um crescente número de novos investidores. Esse tipo de aplicação é considerado uma boa alternativa para pequenos investidores, dentre outros tipos de investimentos, encontrados no mercado. A atratividade é vista na coletividade pelo que o fundo de investimento traz, possibilitando a realização de investimentos com aportes modestos.

Na formação dos fundos de investimento, participam administradores, gestores, custodiantes e auditor independente. O administrador constitui o fundo e o representa em todos os seus atos sem que haja a necessidade de que aquele esteja vinculado à instituição financeira. O gestor analisa oportunidades de investimento e administra a carteira do fundo, bem como decide que ativos devem ser comprados ou vendidos, bem como em que momento farão isso. O custodiante é o responsável pela guarda dos ativos da carteira do fundo. Por último, o auditor independente é o encarregado em auditar os relatórios financeiros do fundo (PINHEIRO, 2019).

Os fundos de investimento necessitam de recursos para a sua gerência. Diante disso, os administradores cobram certas taxas aos cotistas, ou seja, um percentual do patrimônio da carteira. Além das taxas de administração, cobram-se taxas de performance e entrada e/ou saída. A taxa de administração remunera o gestor pelo exercício da análise e alocação de ativos financeiros. A taxa de performance é um prêmio pela boa gestão dos recursos, não sendo cobrada quando for excedido o indicador previamente definido. Já as taxas de entrada e/ou saída são cobradas no momento da entrada e saída do cotista, sendo utilizadas como forma de inibir um resgate antes do tempo estabelecido (PINHEIRO, 2019).

Dessa forma, os principais elementos que compõem um fundo são o condomínio, as cotas e o patrimônio líquido (PINHEIRO, 2019). O condomínio é

formado pelos cotistas. Por sua vez, as cotas formam o patrimônio líquido (deduzido da taxa de administração e custos operacionais e impostos). Esse valor não é fixo, já que o patrimônio líquido pode se valorizar ou se depreciar, dependendo da performance dos ativos que constituem a carteira do fundo.

Os fundos podem ser classificados a depender dos ativos que fazem parte da carteira. Os fundos são classificados, conforme a Instrução n. 555 (2014), como: fundo de renda fixa, fundo de ações, fundo multimercado e fundo cambial, podendo também serem subdivididos em dois grupos: renda fixa ou variável. Fazem parte do primeiro grupo os fundos de renda fixa, os de renda fixada referenciados, os não referenciados e os fundos genéricos, assim como os de derivativos e de multimercado. Já o segundo grupo de ações (fundos variáveis) podem ser subdivididos em: fundo passivo, que busca replicar o índice de referência; fundo ativo, o qual busca superar a rentabilidade do índice de referência; e o fundo setorial, que conta com investimento em empresas de setores específicos (ASSAF NETO, 2018).

2.1.1 Fundo de investimento em ações

O fundo de ações é um fundo de investimentos com algumas características específicas devido à composição de ativos de investimento na carteira do fundo. Conforme a Instrução n. 555 (2014), a composição do fundo de ações deve conter:

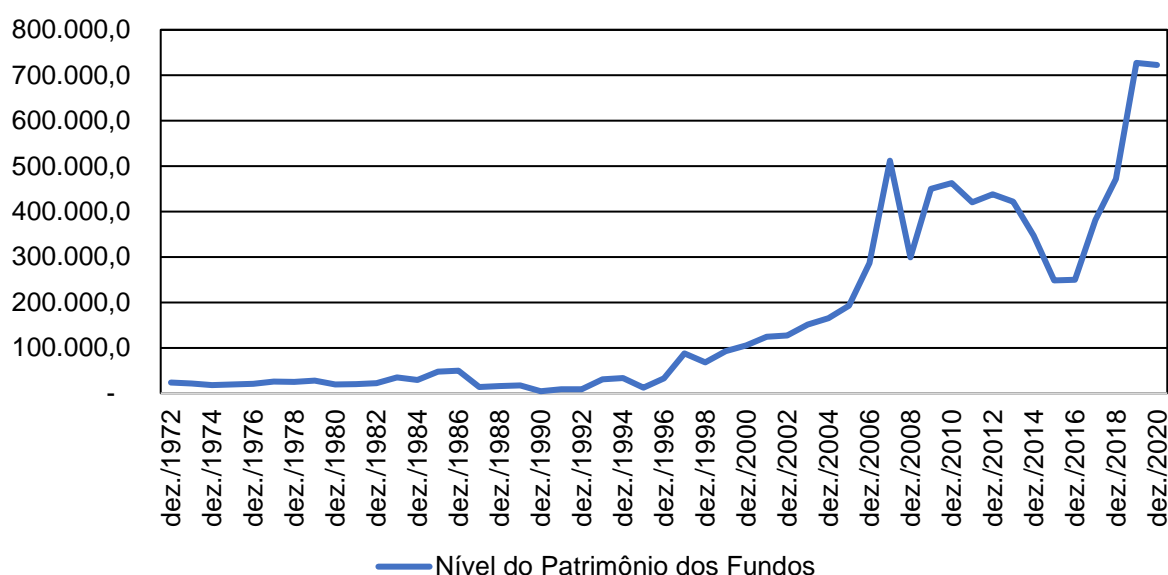
- I – 67% (sessenta e sete por cento), no mínimo, de seu patrimônio líquido devem ser compostos pelos seguintes ativos financeiros:
 - a) ações administradas à negociação em mercado organizado;
 - b) bônus ou recibos de subscrição e certificados de depósito de ações admitidas à negociação nas entidades referidas na alínea “a”;
 - c) cotas de fundos de ações e cotas dos fundos de índice de ações negociadas nas entidades referidas na alínea “a”; e
 - d) *Brazilian Depositary Receipts* classificados como nível II e III.
- II – Os recursos excedentes da carteira podem ser aplicados em quaisquer outras modalidades de ativos financeiros, observados os limites de concentração previstos no art. 103 (INSTRUÇÃO N. 555, 2014).

Como visto, os fundos de ações são considerados de renda variável e podem ser subdivididos em passivos, ativos ou setoriais. Os fundos passivos são aplicações que buscam replicar o desempenho de índices de referência, como Ibovespa. Os fundos ativos são aqueles em que o gestor, a partir de carteiras que seguem uma estratégia, atua intensivamente para superar a rentabilidade dos índices de referência

no mercado (*benchmark*) com o objetivo de obter um retorno excedente. Já os fundos setoriais são direcionados para investimento em empresas de setores econômicos específicos (ASSAF NETO, 2018).

No cenário geral, o patrimônio líquido dos fundos de investimento em ações cresceu desde o início de sua série histórica. No período de 2002 até o ano de 2015, esse patrimônio cresceu quatro vezes em termos nominais, de R\$ 700 milhões para o valor de R\$ 2,8 bilhões (FILGUEIRA e CIDADES, 2015). Em termos reais, a preços constantes, é possível notar, na Figura 1, que sua tendência segue um crescimento exponencial.

Figura 1 – Patrimônio Líquido dos Fundos de Ações para o período de 1972 a 2020 em R\$ milhões constante a preços de agosto de 2021 deflacionado pelo IGP-DI



Fonte: Anbima (2021)

Nota-se que, após a estabilidade no período de 1972 a 1994, com a adoção do Plano Real e o crescimento da economia brasileira, houve um crescimento no patrimônio dos fundos até o ano de 2005. Entretanto, nos anos de 2007 e 2008, observa-se uma queda no montante do patrimônio líquido e, a partir desse recorte, ocorre uma nova retomada de crescimento. É importante ressaltar que a queda entre 2011 e 2015 refletiu a crise política iniciada em 2012. No entanto, a partir de 2016, tem-se a retomada do crescimento com a superação da referida crise. Apesar disso,

o Brasil e o mundo, no ano de 2020, atravessaram a crise decorrida da pandemia originada pelo Covid-2019.

2.2 Conceito e medida da eficiência

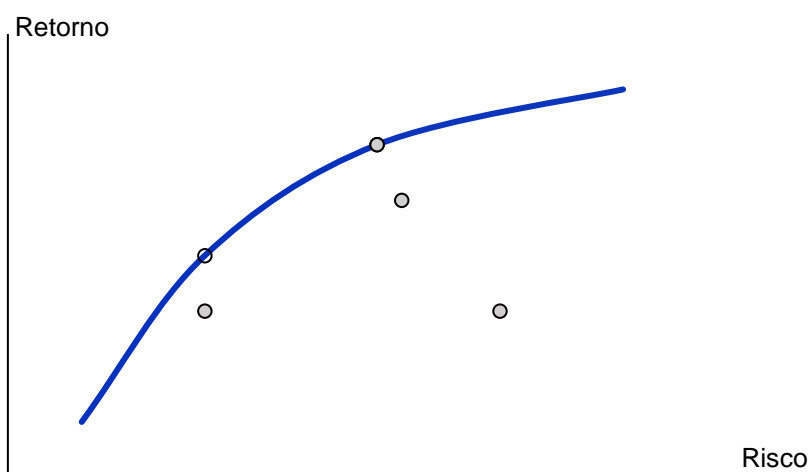
A melhor combinação de ativos para um fundo de investimento que possibilite maximizar o retorno para um dado nível de risco perpassa pelo entendimento do conceito de eficiência. Para medir a eficiência, é necessário também que se entenda o conceito de conjunto de possibilidades de aplicações de investimento e a fronteira de eficiência.

A eficiência está relacionada com o conceito da produção. A produção, em um contexto de aplicações financeira, pode ser definida como a utilização de recursos para se obter um conjunto de resultados financeiros. A relação entre as entradas e as saídas indica a produtividade, isto é, a razão de benefício/custo do investimento. Já a eficiência, seguindo Farrell (1957), deve ser entendida como a capacidade em gerar a máxima rentabilidade dada uma quantidade de insumos. Assim, a eficiência pode ser entendida como a produtividade alcançada por um fundo em relação ao máximo desempenho. Portanto, cada fundo de investimento tem uma relação retorno e risco, porém nem todos são eficientes. Em outras palavras, um fundo eficiente é aquele que maximiza resultados para um dado nível de custo e risco.

A eficiência pode ser dividida em eficiência técnica e eficiência alocativa. A eficiência técnica diz respeito a produzir o máximo com a tecnologia e os insumos disponíveis. Segundo Farrell (1957), são utilizadas duas medidas radiais de eficiência técnica: i) a orientação ao insumo, que foca na minimização equiproporcional dos insumos, mantendo a produção constante; e ii) a orientação ao produto, que foca na maximização equiproporcional dos produtos, mantendo os insumos constantes (FARRELL, 1957). Já a eficiência alocativa se refere à melhor combinação de produtos e insumos dados os preços presentes, sendo também orientada aos *inputs* ou aos *outputs* (FRIED, LOVELL e SCHMIDT, 2008). No entanto, a aplicação DEA neste trabalho tem seu foco apenas na eficiência técnica, já que a alocação dos ativos mais eficientes será analisada na segunda etapa, seguindo o modelo de ajuste de pesos do Markowitz.

O entendimento da eficiência fundamenta-se no conceito de conjunto de possibilidades de investimento e na fronteira de eficiência. A Figura 2 representa o conjunto que é formado pelas carteiras factíveis representadas, de forma simples, por uma entrada (X = risco) e uma saída (Y = retorno). O risco, apesar de ser um produto da aplicação, deve ser minimizado, diferentemente do retorno. Portanto, o conjunto de *inputs* e *outputs* determina a fronteira eficiente do conjunto de possibilidade de investimento. Essa fronteira representa as carteiras que maximizam o retorno para cada nível de risco. Assim, as combinações de ativos (carteiras) que se colocam abaixo da fronteira são ineficientes, já que não estão maximizando o retorno dado um nível de risco.

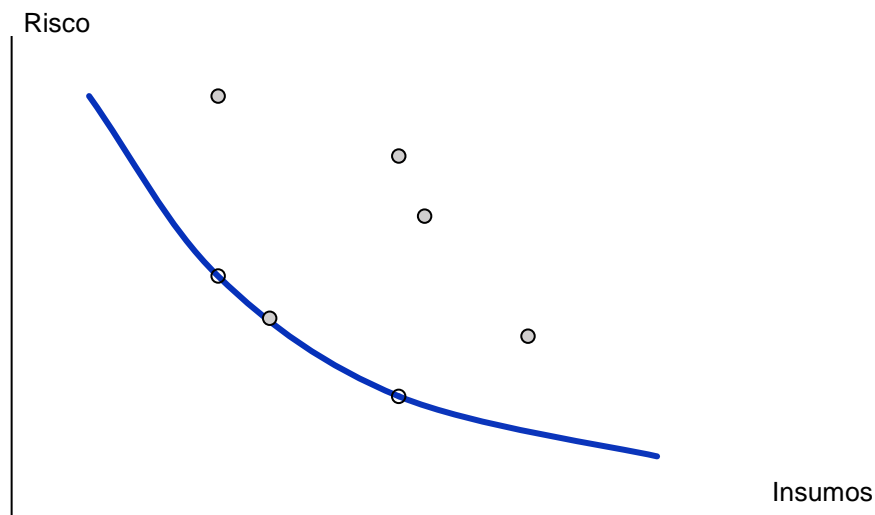
Figura 2 – Conjunto de Possibilidades de Investimento e Fronteira de Eficiência com um Insumo e um Produto



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando dois *inputs* e um *output* são considerados, o conjunto de possibilidade de investimento pode ser representado pela Figura 3, sendo formado pelo X_1 = risco e X_2 = custos de transações para um determinado retorno Y . A curva representa as várias carteiras que, combinando as duas entradas diferentemente, são eficientes, isto é, formam a fronteira eficiente do conjunto de possibilidade de investimento que minimiza os custos. Assim, as combinações de ativos que se colocam acima da fronteira são ineficientes, já que não estão minimizando os *inputs* para um dado nível de retorno.

Figura 3 – Conjunto de Possibilidades de Investimento e Fronteira de Eficiência com dois Insumos para um dado nível de Produto



Fonte: Elaborado pelo autor

As técnicas de mensuração da eficiência podem ser divididas em dois tipos: a abordagem econométrica e as de programação matemática. A abordagem econométrica produz uma fronteira estocástica e paramétrica com a utilização de regressões, ou seja, uma relação funcional entre insumo e produto com adição de um erro aleatório. A abordagem de programação linear produz uma fronteira eficiente e não paramétrica sem a necessidade de definir previamente uma função de produção, ou seja, os próprios dados definem a fronteira. Esse último método aplica basicamente a análise envoltória de dados (DEA). Ambas as técnicas apresentam pontos fortes e fracos, mas nenhuma é claramente superior à outra. Isso explica a discricionariedade na escolha do método e justifica a preferência pelo método DEA neste trabalho.

2.2.1 Medida da eficiência com a Análise Envoltória de Dados (DEA)

A popularidade do modelo DEA sobre os modelos econométricos recai na flexibilização de adição de múltiplas entradas e saídas sem a necessidade de suposição, *a priori*, de uma relação funcional entre as entradas e as saídas (CHARLES e KUMAR, 2012). Além disso, o DEA inclui diferentes extensões para lidar com processos produtivos complexos, o que esclarece a preferência pela utilização da DEA em detrimento da SFA nas mais diversas áreas, como agricultura, finanças,

cadeia de suprimentos, setor público, entre outros (EMROUZNEJAD e YANG, 2018; LIU, LU, LU, e LIN, 2013).

O método da DEA parte da geração de fronteiras empíricas de eficiência máxima com as melhores práticas a partir de um conjunto de variáveis classificadas como insumos (*inputs*) ou produtos (*outputs*). Posteriormente, o desempenho de cada unidade produtiva, fundo de investimento (chamado de DMU - *decision making unit* - unidade tomadora de decisão), é comparado com a fronteira eficiente e calculada a eficiência por meio da distância relativa de cada DMU com essa fronteira. Muitos estudos que utilizaram o DEA como abordagem revelaram diversos pontos de ineficiência em empresas com lucratividade, muitas dessas empresas servindo de referência para cálculos de métricas (COOPER, SEIFORD e TONE, 1999).

O método DEA pode ser entendido como determinístico e não estocástico. Para Lovell (1993), existem dois modelos clássicos que não consideram os ruídos estatísticos para a mensuração da eficiência. O primeiro foi desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e é conhecido pelas iniciais dos autores, ou seja, modelo CCR. O segundo foi desenvolvido como aprimoramento do primeiro por Banker, Charnes e Cooper (1984), sendo também conhecido pelas iniciais dos seus autores, modelo BCC.

O método de CCR foi utilizado inicialmente para análise da eficiência de escolas públicas norte-americanas. Essas escolas são subentendidas no modelo como DMU que utiliza entradas para gerar saídas (CHARNES, COOPER e RHODES, 1978).

O modelo de CCR pode ser calculado sobre a orientação insumo ou produto, considerando um processo produtivo com retornos constantes de escala (CRS), ou seja, um processo produtivo em que o *output* muda na mesma proporção que o *input* mudar. O CCR sobre a orientação insumo estima a eficiência de cada DMU, maximizando a razão das somas ponderadas dos produtos pela soma ponderada dos insumos, estando sujeito a que as razões de cada DMU da amostra sejam menores ou iguais à unidade (CHARNES, COOPER e RHODES, 1978).

Segundo Cook e Seiford (2009), o modelo CCR é baseado em um problema de programação linear (PPL) e define dois tipos de cálculos. O primeiro é chamado modelo de multiplicadores ou primal, que estima o conjunto de pesos que indicam a importância relativa de cada insumo e produto na maximização da eficiência de cada

DMU. Assim, o modelo permite que cada unidade tenha os pesos que lhe for mais conveniente, considerando que cada DMU escolhe o mix de insumos e produtos que lhe pareçam mais adequados.

Ainda conforme Zhou, Ang e Poh (2008), a partir do modelo PPL primal, é possível desenvolver o dual, conhecido como modelo envelope. Pelo teorema da dualidade da programação linear, ele apresentará o mesmo valor para a função objetivo do problema primal e estimará os valores de λ que otimize a eficiência, sendo λ a contribuição (peso) das melhores práticas na formação do alvo da unidade avaliada, ou seja, as DMUs com λ não nulo são os *benchmarks* da DMU avaliada.

Diferentemente do CCR, o modelo BCC muda o pressuposto de retornos constante de escala e parte do princípio de que o acréscimo de insumos pode desencadear uma variação não proporcional nos produtos, podendo ser essa variação tanto crescente quanto decrescente. Em outras palavras, o modelo pressupõe que as DMUs avaliadas apresentem retornos variáveis de escala (VRS). Esse modelo mede a eficiência técnica pura (ETP), enquanto a CCR mensura a eficiência técnica (ET). Essa distinção permite separar na ET a eficiência técnica pura (ETP) e a ineficiência de escala (EE) por meio de $EE=ET/ETP$. Dessa forma, para medir os diferentes tipos de eficiência (ET, ETP e EE), deve ser calculado tanto o modelo CCR quanto o BCC (BANKER, CHARNES E COOPER, 1984).

Com o avanço dos métodos DEA nas últimas duas décadas, surgiram outras medidas alternativas para suprir deficiências e superar as críticas acerca das abordagens clássicas. Os modelos clássicos, como visto, são chamados de determinísticos, já que estimam valores pontuais de eficiência relativos sem discutir a incerteza em torno dessa estimativa. No entanto, para Lovell (1993), a complementação da análise de eficiência DEA com procedimentos de inferência estatística é desejada para detecção de ruídos estatísticos. Os ditos procedimentos possibilitam detectar *outliers*, realizar testes de significâncias, corroborar a confiabilidade e a aceitação dos modelos DEA, bem como comparar a eficiência entre DMUs.

Diante disso, surge a complementação da abordagem DEA com o modelo computacional *bootstrap*. Para Dario e Simar (2007) e Simar e Wilson (1998), essa inovadora abordagem permite computar as incertezas relativas à variação na amostra com a adição do erro aleatório da abordagem de estocástica. A técnica de *bootstrap*

é aplicada quando se busca fazer inferências estatísticas, analisar os vieses das estimativas e estimar o intervalo de confiança (EFRON e TIBSHIRANI, 1993).

Na abordagem da DEA estocástica, parte-se de que a real fronteira eficiente é desconhecida. As DMUs que formam essa fronteira são apenas um subconjunto de práticas, não sendo necessariamente as melhores, com valores de *inputs*, *outputs* e distúrbios estatísticos que os gestores dos fundos de investimento não podem controlar. Com isso, tanto os *inputs* quanto os *outputs*, assim como os estimadores de eficiência, são variáveis aleatórias e consequentes de um oculto processo de gerador de dados (GDP) e uma função de densidade subjacente que torna possível diferentes resultados decorrentes da formação de diversas amostras aleatórias. Como resultado, presume-se a existência de um viés entre a tecnologia T dita verdadeira, desconhecida e não observável e a tecnologia estimada \hat{T} . No entanto, quando o número de DMUs tender ao infinito, o viés tende a zero, devendo o estimador do DEA ($\hat{\theta}$) ser similar ao estimador verdadeiro do DEA (θ), tornando-se, assim, consistente (KOROSTELEV, SIMAR E TSYBAKOV, 1995).

O *bootstrap* é uma técnica de reamostragem com reposição. A partir de uma amostra aleatória original com vetores de dados de tamanho n, busca-se gerar b amostras pseudoaleatórias com reposição e de mesmo tamanho, de modo que cada valor do vetor é sorteado e repostado à amostra aleatória original (EFRON, 1979). O processo de seleção de amostras pseudoaleatórias é realizado b vezes. A essência do *bootstrap* é gerar uma distribuição fictícia de uma variável que permita estimar seu valor real.

O *bootstrap* aplicado ao DEA tem dois modelos mais conhecidos: o *naive bootstrap* e o *smooth bootstrap*, podendo a aplicação desses dois métodos também ser realizada quando se olha a análise de medidas de eficiência. O *naive bootstrap*, para Kneip, Simar e Wilson (2011), é inconsistente, já que a nova fronteira de eficiência pede algumas propriedades. O *smooth bootstrap*, segundo Kneip, Simar e Wilson (2008), adiciona um erro aleatório a cada escolha de observação no processo de reamostragem, construindo uma amostra com a estimação da densidade de Kernel.

2.3 Otimização da Carteira de Markowitz

Na busca pela maximização da eficiência na escolha da carteira ótima, tem-se em conta a relação retorno e risco. A maior preocupação em situação de incertezas é a de expressar o que o investidor prefere devido ao dilema entre o retorno e o risco na escolha de alternativas de investimento, haja vista que o nível de tolerância ao risco é pessoal de cada investidor que pode ser classificado em relação à tolerância ao risco como conservador, moderado ou arrojado.

Além disso, o risco decorre de vários fatores, podendo ser inerente à natureza política, econômica e social do macroambiente ou ser própria do ativo. Esse risco se refletirá nas variações de preços ou taxas, por exemplo (ASSAF NETO, 2018). Portanto, o investidor necessita considerar esses riscos e escolher os ativos de investimento em função de seu perfil.

No processo de seleção de um portfólio, identificam-se duas etapas. A primeira é a análise do risco e da performance futura (esperada) dos ativos disponíveis no mercado financeiro que formam o conjunto de possibilidades do investidor. Quanto à segunda, com base nas perspectivas de performance do investidor, definem-se os percentuais dos ativos na carteira para alocar e formar a carteira eficiente (MARKOWITZ, 1952).

Assim, no modelo de Markowitz, surge a diversificação como principal instrumento para a redução do risco global de um portfólio de investimentos. Markowitz (1952) mostra que não se deve investir em apenas um tipo de ativo, mas, sim, em múltiplos. Conforme o autor, calculando-se um problema de otimização quadrático para vários níveis de retorno, cria-se a denominada curva de investimentos eficientes, que determina a fronteira para a qual as diferentes combinações de proporções de ativos de uma carteira promovem os maiores retornos com os menores riscos possíveis. Markowitz deixa claro ainda que o risco de uma carteira não se dá pela soma simples ponderada do risco dos ativos individuais.

Assim, para encontrar a carteira ótima e calcular o risco, é preciso considerar a variância e a covariância entre os ativos escolhidos. Se os ativos tiverem correlação negativa perfeita, a diversificação do portfólio poderia eliminar todo o risco. No entanto, como os retornos dos ativos não são perfeitamente correlacionados, a diversificação pode reduzir, mas não eliminar totalmente o risco. Isso contraria a ideia

de que a melhor opção para a composição da carteira consiste apenas na concentração de investimentos em ativos que ofereçam os maiores retornos e menor risco. Para Markowitz, é possível obter combinações mais eficientes de alocação de recursos por meio da avaliação e da compensação do risco dos ativos com comportamento assimétricos.

Para Zannini e Figueiredo (2005), o conceito de diversificação preconiza que os preços dos ativos não se movem de igual modo ao longo do tempo, já que eles apresentam correlações imperfeitas. Dessa forma, a composição da carteira com diversos tipos de ativos produz uma redução da variância total da carteira, pois, quando um ativo varia no preço, um outro ativo pode compensar essa variação (ZANNINI e FIGUEIREDO, 2005).

Bruni, Fuentes e Famá (1998) mostram que os riscos podem ser reduzidos com a realização de uma boa diversificação de investimento. Entretanto, no processo de diversificação da carteira, pode-se encontrar correlações (covariâncias ou variância conjunta) entre as carteiras. Caso isso ocorra, as várias carteiras formam uma nova carteira que pode ter um risco menor. Esse pensamento contradiz a fala de que a diversificação é, simplesmente, alocar vários tipos de investimentos diferentes e que, quanto maior for o número de carteiras, maior será a segurança do investimento (BRUNI, FUENTES e FAMÁ, 1998).

Diante desse cenário de escolha da carteira ótima, o investidor deve otimizar seu investimento. Essa otimização visa combinar ativos que maximizem a taxa de retorno dado um risco assumido (ASSAF NETO, 2018). O processo de otimização da carteira está sujeito a duas restrições. A primeira aponta que, dado o nível de risco, não existe outra carteira com maior retorno. A segunda denota que, dado o nível de retorno, não existe outra carteira com menor risco (BRUNI, FUENTES e FAMÁ, 1998). Portanto, nesse processo de otimização, é possível formar um conjunto de carteiras eficientes.

2.4 Estudos Anteriores

Nesta seção do capítulo de referencial teórico, foi feita uma revisão bibliográfica sobre pesquisas que envolvem o tema fundos de investimentos em ações. Ela é composta por pesquisas nacionais e internacionais que aplicaram o método DEA.

Para a construção de uma carteira de investimento em ações, Lopes, Carneiro e Scheneider (2010) utilizaram a aplicação da otimização da carteira de Markowitz para ativos eficientes estimados com a análise envoltória de dados (DEA). O total de carteiras construídas foi de 72 para análise no período de janeiro de 2006 a dezembro de 2008. As entradas foram preço sobre lucro, beta, volatilidade e as saídas os retornos em 1, 2 e 3 anos e o lucro por ação. Os resultados da pesquisa mostraram que a utilização do modelo de ajuste de pesos do Markowitz apresenta melhor eficiência em comparação com o modelo tradicional do DEA baseado no BCC.

Na pesquisa de Babalos, Caporale e Philippas (2012), ocorreu a avaliação de eficiência dos fundos de ações gregos com a utilização do modelo DEA em conjunto com o índice de Malmquist, que é o complemento do método DEA para análise intertemporal. A amostra utilizada na pesquisa foi composta por 31 fundos de ações gregas no período de 2003 a 2009. Os inputs escolhidos foram patrimônio líquido, despesas e riscos e a saída e retorno do fundo. Os resultados da pesquisa durante o período de análise mostraram que o ano de 2008 apresentou o maior número de fundos eficientes (8) e a aplicação do índice de Malmquist indicou que nenhum fundo teve um crescimento de eficiência técnica.

O estudo de Bisso, Caldeira, Samanez e Telles (2016) buscou analisar a eficiência de fundos de investimentos brasileiros de ações livres, calculando-se o índice Malmquist. A amostra foi composta pelos 50 maiores fundos de ações livres para o período de 2012 a 2014, tendo sido o BCC o modelo DEA utilizado. Já as variáveis de entrada foram patrimônio líquido médio das DMUs, taxas de administração média e risco médio para cada fundo e, como saída, foi utilizada a rentabilidade média. Os resultados da pesquisa mostram que 15 fundos foram eficientes em pelo menos um ano, tendo 80% desses fundos menores valores de patrimônio líquido médio. Para o índice Malmquist, apenas 7 fundos tiveram ganho de produtividade no período.

Fonseca, Fernandes, Cunha e Iquiapaza (2018) realizaram uma comparação entre métodos tradicionais e não paramétricos para cálculo da eficiência com a utilização do modelo DEA-BCC e o modelo de Carhart para fundos de ações livres e ativos. A amostra foi composta por 893 fundos para o período de 2002 a 2016, tendo como entradas a volatilidade, o patrimônio líquido, a taxa de administração e a performance do fundo e, como saída, o retorno agregado. Os resultados em

comparação mostraram que o modelo de Carhart tem poder mais explicativo para o retorno agregado do que o modelo DEA, sendo os scores mensais de eficiência média para o período de 77%.

Por fim, a pesquisa de Lin e Li (2020) buscou analisar a supereficiência de 56 fundos mútuos americanos com base no DEA ajustados para função de distância direcional para o ano de 2017. Os resultados da pesquisa demonstram que o modelo aplicado foi capaz de distinguir quais fundos eram mais eficientes, mostrando-se a diversificação do modelo de supereficiência útil para o portfólio selecionado, sendo os cinco fundos de ações americanos com maiores eficiências.

3. METODOLOGIA DE PESQUISA

O método adotado pode ser classificado como empírico por sua natureza aplicada e por buscar a comprovação prática da melhor aplicação financeira. Quanto aos procedimentos e abordagem, o estudo é identificado como uma pesquisa quantitativa e, por seus objetivos, é classificado como descritivo.

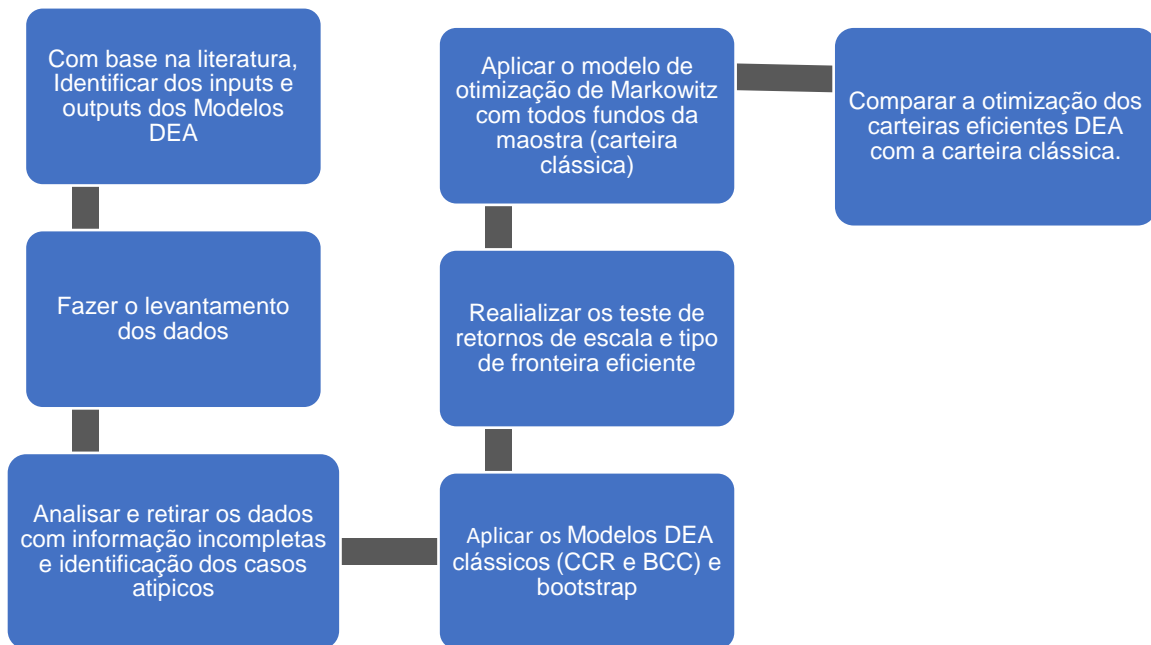
A natureza aplicada da pesquisa, conforme Gil (2018), corresponde a pesquisas voltadas para obter o conhecimento de uma situação específica. A situação abordada no estudo concentra-se nos fundos de ações brasileiros, já que a análise fica direcionada à avaliação da sua eficiência. Segundo Gil (2018), a pesquisa descritiva procura determinar características de uma amostra ou população específica. Dentro dessa abordagem, encontra-se a utilização das variáveis de entradas e de saídas para o entendimento da eficiência dos fundos.

Conforme Marconi e Lakatos (2018), a pesquisa quantitativa se caracteriza pela verificação dos dados com base em análise estatística. Nesta pesquisa, foram utilizados modelos quantitativos, baseados na revisão da literatura, para análise das eficiências dos fundos de ações com os modelos de DEA e a otimização da carteira pela teoria de Markowitz.

Para Gil (2018), a pesquisa bibliográfica considera a revisão de livros, revistas, teses e dissertações com o intuito de oferecer uma fundamentação teórica à pesquisa. Nesse sentido, foram realizados estudos a fim de estruturar o referencial teórico para melhor conhecimento acerca do tema.

Explicada a caracterização da pesquisa, os próximos tópicos tratam os passos a seguir para atingir os objetivos do trabalho. A Figura 4 os descreve.

Figura 4 – Etapas da Pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor

- Identificação dos *inputs* e *outputs* dos Modelos DEA

Com base na revisão da literatura, determinou-se o conjunto de indicadores de entrada e saída (*inputs* e *outputs*) a serem utilizados na análise de eficiência DEA e na formação da carteira de Markowitz. Conforme Quadro 1, foram identificadas as seguintes variáveis.

Quadro 1 – Apresentação das Variáveis para Mensuração de Eficiência

Classificação	Variáveis	Descrição	Autores
Inputs	Taxa de Administração	Quantia paga para custear a administração do fundo.	Fonseca, Fernandes, Cunha e Iquiapaza (2018)
	Patrimônio Líquido Médio	Composto pelos valores dos ativos investidos no fundo, bem como suas rentabilidades.	
	Volatilidade	Cálculo da variação de cotação das ações no fechamento.	
Output	Retorno do Fechamento	Resultado do investimento realizado no fundo.	Babalos, Caporale e Philippas (2012)

Fonte: Elaborado pelo autor

A volatilidade e a taxa de retorno seguem a metodologia do Economática®, sendo a volatilidade das cotações no fechamento calculada da seguinte forma:

$$V = \sqrt{\left(\frac{\sum(S_i - S_m)^2}{n \cdot \text{PPA}}\right)} \quad (1)$$

onde:

PPA= período por ano;

n = ano;

S_i= logaritmo neperiano de cotação (fec [h]/fec [h-1]);

S_m= média de S₁, S₂, S₃, ..., S_i.

A taxa de retorno é calculada pela diferença entre o fechamento atual menos o fechamento anterior, como demonstra a Equação 2:

$$R = 100(1 - (\text{fec [h]}/\text{fec [h-1]})) \quad (2)$$

onde:

R= taxa de retorno;

h= cotação período presente;

h-1= cotação período anterior.

O método da DEA aceita apenas valores positivos. Com isso, foi utilizada a abordagem de Cook e Zhu (2008), que realiza um reescalonamento dos valores a partir do menor valor negativo.

- Levantamento dos dados

A coleta de dados sobre informações dos fundos de ações índice de ativo com base na classificação da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima) foi retirada do Economática®. A população da pesquisa foi composta por 87 fundos de ações para índice ativo existentes na base de dados com informações do período de 2012 a 2021.

- Procedimentos para adequação da base de dados.

Conhecidas e levantadas as variáveis dos fundos, o próximo passo foi retirar as informações incompletas e identificar os casos atípicos. Para ter uma visão geral dos dados desses fundos, foram estimadas as principais estatísticas descritivas e a presença de *outliers*, usando o método nuvem de dados multivariados (*Data Cloud*) disponível no pacote FEAR do *software* R. Feito isso, a amostra da pesquisa foi reduzida e passou a ser composta por 44 fundos, como pode ser visto no Apêndice A.

Para identificar os fundos com *outliers*, conforme explica Bogetoft e Otto (2010), os dados de *inputs* e *outputs* são utilizados para construir uma matriz combinada [XY] (X – *inputs* e Y – *outputs*). As diferentes linhas da matriz podem ser vistas como uma nuvem de pontos no espaço, de modo que cada ponto representa uma DMU. O volume dessa nuvem (D) é proporcional ao determinante da matriz combinada [XY' [XY].

Caso uma DMU seja removida da matriz combinada, o volume da nuvem de dados pode ficar inalterado, indicando que essa DMU não é um *outlier*. Se, por outro lado, a DMU estiver na fronteira, o volume da nova nuvem será muito menor e se obtém uma indicação de que a DMU é um *outlier*.

Para procurar um ou mais casos atípicos, pode-se observar como o volume da nuvem muda quando se removem uma ou mais observações. Dessa forma, pode-se calcular a razão entre o novo volume da nuvem de dados e o volume inicial para as retiradas das observações:

$$R^i = D_i/D \quad (3)$$

Assim, se a DMU_i não for um *outlier*, então, D_i não mudará muito e R_i será próximo de 1. Caso contrário, quando a DMU_i é um *outlier* significativo, será observado R_i próximo de zero.

Com isso, para encontrar os casos atípicos, é necessário encontrar o menor valor de $R^{(i)}$. Para obter uma visão gráfica desse procedimento, constrói-se um gráfico com os pares ordenados, conforme a Equação 4:

$$\left(r, \log \left(\frac{R^{(r)}}{R_{\min}^{(r)}} \right) \right) \quad (4)$$

onde:

r = número de fundos deletados;

$R^{(r)}$ = valor da razão das determinantes;

$R^{(r)\min}$ = menor valor da razão das determinantes.

Encontrados os *outliers*, foi realizada uma análise complementar com o modelo de supereficiência DEA (SE-DEA). O método da supereficiência, proposto por Andersen e Petersen (1993), compara uma dada DMU com a combinação linear de todas as outras $DMUs$, ou seja, excluindo da construção da fronteira a DMU avaliada. Isso permite obter índices diferenciados e estabelecer um *ranking* entre as $DMUs$ eficientes, o que pode ser usado na identificação de observações influentes (*outliers*) (WILSON, 1995).

Os modelos SE-BCC orientados ao produto (Equação 5), conforme Seiford e Zhu (1999), são:

$$\phi_k^{SE*} = \max \phi_k^{SE} \quad (5)$$

Sujeito a

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} u_j \leq X_{ik} \quad i=1, \dots, m \quad (5.1)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} u_j \geq \phi_k^{SE} Y_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (5.2)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j = 1 \quad (5.3)$$

$$u_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n. \quad (5.4)$$

$$\phi_k^{SE*} \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

O problema de programação linear 5 estima o valor ótimo (Φ^{se}) da supereficiência da DMU_k. A equação 5.1 é a primeira restrição, comparando a soma ponderada dos insumos de todas as DMU (dada pela multiplicação da matriz X por seus respectivos pesos v) com o vetor insumo x da DMU_k. A equação 5.2 é a segunda restrição, que compara a soma ponderada dos produtos de todas as DMU (dada pelo produto da matriz Y e seus pesos, v) com o vetor produto y da DMU_k ponderado por ϕ_k^{SE} . A equação 5.3 traz a terceira restrição, determinando a fronteira para o modelo retorno variáveis de escala. A equação 5.4 traz a quarta restrição, determinando que os pesos (v e u) devem ser maiores ou iguais a zero. A equação 5.5 traz a última restrição, indicando que o valor ótimo da supereficiência pertence ao conjunto dos valores reais positivos.

O modelo SE-CCR orientado ao produto (Equação 6) para supereficiência, conforme Seiford e Zhu (1999), é:

$$\phi_k^{SE*} = \max \phi_k^{SE} \quad (6)$$

Sujeito a

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} u_j \leq X_{ik} \quad i=1, \dots, m \quad (6.1)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} u_j \geq \phi_k^{SE} Y_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (6.2)$$

$$u_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n. \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

$$\phi_k^{SE^*} \in \mathbb{R}$$

O problema de programação linear DEA 6 é construído, seguindo a mesma lógica e as mesmas variáveis e não inclui apenas a restrição do item 5.3 por se tratar de um modelo com retornos constantes de escala.

O modelo de nuvens de dados identifica também os fundos superineficientes, os quais não causam um impacto na fronteira eficiente do DEA e não afetam os índices estimados dos fundos. Já os supereficientes influenciam a formação da fronteira eficiente que determina os índices de todos os fundos. Dessa forma, foram excluídos apenas os fundos detectados como *outliers* pelo método nuvem de dados e considerados supereficientes.

- Modelos DEA

Como retratado no referencial teórico, existem dois modelos clássicos de DEA: o modelo CCR e o modelo BCC. A outra modelagem é a DEA *bootstrap*, que é construída a partir das limitações dos modelos DEA clássicos. Os três modelos foram utilizados com a orientação ao produto, pois os investidores buscam, basicamente, maximizar o retorno de seus investimentos, predefinindo o nível de risco que estariam dispostos a assumir. O modelo de programação linear DEA CCR, conforme Equação 7 calcula a orientação ao produto:

$$\text{Min } z_0 = \sum_{r=1}^m v_r X_{r0} \quad (7)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n u_i y_{i0} = 1 \quad (7.1)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i y_{ij} \leq \sum_{r=1}^m v_r X_{ij} \quad j=1, \dots, 0, \dots, N \quad (7.2)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad r=1, \dots, m; \quad i=1, \dots, n. \quad (7.3)$$

onde:

z_0 = eficiência da DMU₀ em análise, que deve ser maior ou igual à unidade indicando que quanto maior o índice z maior a ineficiência;

r = números de insumos;

i = número de produtos;

j = número de fundos de investimentos (DMU_j);

X = entradas;

Y = saídas;

u, v = pesos.

O problema de programação linear da Equação 7 estima os índices de eficiências dos fundos orientados ao produto, considerando uma fronteira com retornos constantes de escala.

Os modelos DEA BCC orientados aos produtos são estimados com a Equação 8:

$$\text{Min } \delta_0 = \sum_{r=1}^m v_r x_{r0} + v_o \quad (8)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n u_i y_{i0} = 1 \quad (8.1)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i y_{ij} - \sum_{r=1}^m v_r x_{ij} + v_o \leq 0; j=1, \dots, 0, \dots, N \quad (8.2)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad r=1, \dots, m; \quad i=1, \dots, n. \quad (8.3)$$

onde:

δ_0 = eficiência da DMU₀ em análise;

X = entradas;

Y = saídas;

r = números de insumos;

i = números de produtos;

j = fundos de investimentos (DMU_j);

u, v = pesos;

v_o = variáveis de fatores de escala.

- Modelo DEA com o *Bootstrap*

Os modelos DEA acima especificados são determinísticos. Com eles, calculam-se valores pontuais de eficiência sem debater o erro amostral, o ruído estocástico e a incerteza em torno dessa estimativa. Todavia, seria de grande importância se a eficiência estimada fosse complementada com técnicas de inferência estatística que permitam estimar intervalos de confiança e fazer testes de hipóteses. Isso pode evidenciar a confiabilidade e aceitação dos escores dos modelos DEA e ajuda a qualificar comparações de eficiência entre os fundos. Para fazer essa complementação e obter indicadores de eficiência mais robustos, foi desenvolvida a DEA semiparamétrica alicerçada em técnicas de *bootstrap*.

Para tanto, o método DEA com *bootstrap* conta com o seguinte passo a passo, conforme Bogetoft e Otto (2010):

Passo 1 – Para cada DMU pertencente à amostra original, estimar a eficiência com o modelo DEA ($\hat{\theta}_i$).

Passo 2 – Gerar uma nova amostra com reposição para a obter a eficiência com *bootstrap* de tamanho n ($\hat{\theta}_i^*, \dots, \hat{\theta}_n^*$) a partir de um alisamento de Kernel da distribuição empírica da eficiência original. O procedimento de alisamento é feito da seguinte forma:

Passo 2.1 – Extrair uma amostra com reposição a partir de $\hat{\theta}_i, \dots, \hat{\theta}_n$ e chamar os resultados de β_i, \dots, β_n .

Passo 2.2 – Gerar números aleatórios independentes de uma distribuição normal padrão $\epsilon_i, \dots, \epsilon_n$.

Passo 2.3 – Calcular:

$$\tilde{\theta}_i = \begin{cases} \beta_i + h\epsilon_i & \beta_i + h\epsilon_i \leq 1 \\ 2 - (\beta_i + h\epsilon_i) & \beta_i + h\epsilon_i > 1 \end{cases}, \text{ com isso } \tilde{\theta}_i \leq 1 \quad (9)$$

onde: h representa a largura de banda (*bandwidth*).

É mister ressaltar a importância da escolha de h , que foi encontrada com a utilização da fórmula proposta por Silverman (1986).

$$h=1,06\sigma^{-1/5} \quad (9.1)$$

onde: σ é o desvio padrão do DEA estimado.

Passo 2.4 – Ajustar $\tilde{\theta}_i$ para obter os parâmetros com a variância assintótica correta, calculando-se:

$$\hat{\theta}_i^* = \bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{1 + h^2/\hat{\sigma}^2}} (\tilde{\theta}_i - \tilde{\beta}) \quad (9.2)$$

$$\text{onde: } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2 \text{ e } \tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$$

Passo 3 – Extrair uma nova amostra com elementos $Y^*(y_1^*, \dots, y_n^*)$ e $X^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ dados por $y_i^* = y_i \frac{\hat{\theta}_i^*}{\hat{\theta}_i}$ e $x_i^* = x_i$. Com isso, o y_i^* irá continuar no mesmo raio de y_i .

Passo 4 – Calcular novamente as eficiências com DEA para estimar as eficiências das amostras *bootstraps* $\hat{\theta}_i^b = (x_i^b, y_i^b)$.

Passo 5 – Repetir os passos de 2 a 4 B vezes para estimar o conjunto de B valores de estimativas das eficiências de cada fundo de ações. O valor B aplicado na pesquisa será de 2.000, conforme orientam Lamb e Tee (2012).

Passo 6 - Realizar o cálculo do viés da correção dos índices de eficiência e de seu intervalo de confiança. A pesquisa utiliza os métodos propostos por Simar e Wilson (2000).

Passo 6.1 – Calcular o viés:

$$\widehat{\text{bias}}_B [\hat{\theta}_{\text{DEA}}(x,y)] = B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_{\text{DEA},b}^*(x,y) - \hat{\theta}_{\text{DEA}}(x,y) \quad (10)$$

Passo 6.2 - Corrigir os índices de eficiência:

$$\hat{\theta}_{DEA}(x,y) = \hat{\theta}_{DEA}(x,y) - bias_B[\hat{\theta}_{DEA}(x,y)] = 2\hat{\theta}_{DEA}(x,y) - B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_{DEA,b}^*(x,y) \quad (11)$$

Passo 6.3 - Estimar o intervalo de confiança:

$$\hat{\theta}_{DEA}(x,y) + a_{\alpha}^* \leq \theta_{DEA}(x,y) \leq \hat{\theta}_{DEA}(x,y) + b_{\alpha}^* \quad (12)$$

Passo 6.4 Estimar a variância:

$$Ratio = \frac{(\widehat{bias}_B [\hat{\theta}_{DEA}(x,y)])^2}{3(\sigma)^2} \quad (13)$$

Além de permitir estimar os índices corrigidos e intervalos de confiança da eficiência, o DEA *bootstrap* pode ser utilizado para testar a hipótese sobre o tipo de retornos de escala. Esse teste é importante porque a discricionariedade na escolha de um modelo (CCR ou BCC) ou a adoção dos dois modelos simultaneamente podem não ser adequadas.

A distribuição dos índices corrigidos permitem testar a escolha adequada da fronteira DEA CCR ou BBC. Para isso, pode-se aplicar o teste de hipótese com *bootstrap*. Conforme Bogetoft e Otto (2010), o teste busca analisar se a fronteira eficiente indicada pelas observações apresenta retorno constante de escala, o que é dado pela estatística S:

$$S = \frac{\sum_{k=1}^K E_{CRS}^k}{\sum_{k=1}^K E_{VRS}^k} \quad (14)$$

onde:

K = número de fundos;

E = eficiência estimada.

Simar e Wilson (2000) formalizam o teste com um par de hipóteses: a hipótese nula (H₀): a fronteira é CCR; ou a hipótese alternativa (H₁): a fronteira é BCC. Se o valor de S for próximo de 1, a hipótese H₀ é verdadeira, caso contrário (S menor que 1), a hipótese H₀ deve ser rejeitada e aceita a H₁. Assim, estimam-se os valores críticos de S - c_α de acordo com um nível de significância e, se a estatística S for menor do que o valor crítico c_α, é rejeitada a hipótese nula.

$$S < c_{\alpha} \quad (15)$$

$$\Pr(S < c_{\alpha} | H_0) = \alpha \quad (15.1)$$

onde: α é o nível de significância do teste, 5% (α=0,05). Para o cálculo do valor crítico, é utilizada a distribuição dos índices de eficiência *bootstrap*.

- Otimização dos Fundos com Modelo Markowitz

A aplicação do método DEA em conjunto com o modelo de otimização da carteira de Markowitz segue o procedimento utilizado por Lopes, Carneiro e Schneider (2010). Os autores utilizaram o modelo de otimização de Markowitz para carteiras selecionadas por meio da DEA. Entretanto, neste trabalho, são utilizados fundos ativos ao invés da carteira de ações de empresas de capital aberto da Bolsa de Valores de São Paulo – BOVESPA.

A partir da aplicação dos modelos DEA clássicos e DEA com *bootstrap*, os fundos que forem mais eficientes de cada método, bem como índice de eficiência maior ou igual a 0.75, formaram a amostra para estimar uma carteira ótima a cada ano. As carteiras ótimas foram formadas, utilizando-se o método de otimização da carteira de Markowitz. Esse método utiliza o seguinte problema de otimização quadrática:

$$\text{Min } f(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{ cov}_{ij} \quad (16)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^j x_i E(r_i) = E^* \quad (16.1)$$

$$\sum_{i=1}^j x_i = 1 \quad (16.2)$$

Onde, neste caso:

x_i e x_j = participação percentual do ativo i e do ativo j na carteira eficiente;

$E(r_i)$ = retorno esperado para o ativo i ;

E^* = retorno esperado da carteira eficiente.

- Índice Sharpe

Com a realização da otimização das carteiras ótimas pré-selecionadas pelo modelo DEA e da carteira clássica foi realizada uma comparação em dois estágios. O primeiro estágio, uma comparação entre os métodos entre as carteiras ótimas otimizadas pelo método de Markowitz. Posteriormente, o segundo estágio, com a aplicação e comparação entre os índices de Sharpe, das três carteiras ótimas otimizadas, conforme Sharpe (1994), adaptado para valores absolutos, retirando o fator de ativo livre de risco:

$$I_{\text{Sharpe}} = \frac{R_{jt}}{\text{Var}_{jt}} \quad (17)$$

onde:

R_{jt} – Retorno da carteira ótima j no ano t ;

Var_{jt} – Risco da carteira ótima j no ano t ;

- Comparação dos métodos de eficiência

A partir da realização do cálculo com os métodos de eficiência retromencionados, foi realizada uma análise comparativa em dois estágios. O primeiro estágio apresenta uma comparação entre os métodos de estimação da eficiência

orientado ao produto com os dois métodos: DEA clássico e o método DEA com *bootstrap*.

Com a eficiência calculada pelo DEA, foram utilizadas o seguinte critério para seleção de fundos de investimento. Para a formação da carteira estimada pelos DEA clássicos, foi usado o critério da eficiência igual a 1. Para a carteira estimada pelo DEA *bootstrap*, foi utilizado como critério o 1º quartil (25,0%), já que esse não produz estimativas de eficiência igual a 1. Por fim, foi realizado o mesmo processo para a formação da carteira clássica composta pelos fundos retirados os casos atípicos. Nesse caso, foi utilizado o pacote Fportfolio do *software* R para a realização da otimização das carteiras.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na sequência, reportam-se os resultados obtidos. Inicialmente, analisa-se a estatística descritiva das variáveis e a detecção de casos atípicos. Em seguida, debatem-se os resultados da eficiência dos modelos DEA clássicos e de *bootstrap*, bem como as soluções do Modelo Markowitz.

4.1 Análise Descritiva e Detecção de Casos Atípicos

A fim de conhecer as características da amostra (44 fundos), foi realizado o cálculo das principais estatísticas descritivas para os insumos e os produtos, como pode ser visto na Tabela 1.

Tabela 1 – Estatística Descritiva das Variáveis Utilizadas na Análise

	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
	Taxa de Administração em porcentagem (insumo)									
Min.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1 Quart.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000
Mediana	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,250	1,000	1,000	1,000
Média	1,406	1,406	1,406	1,406	1,431	1,311	1,255	1,124	1,069	1,111
3 Quart.	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	1,998	2,000
Max.	5,990	5,990	5,990	5,990	5,990	3,990	3,990	3,999	3,445	3,445
	Volatilidade no ano em porcentagem (insumo)									
Min.	8,670	8,810	9,73	9,490	12,13	10,52	14,42	12,31	31,63	18,27
1 Quart.	15,00	13,73	20,05	18,15	22,52	17,47	20,74	16,84	44,03	20,25
Mediana	17,02	15,65	22,35	20,27	24,11	18,54	21,41	17,41	44,63	20,66
Média	16,84	15,26	21,52	19,41	23,27	18,54	21,50	17,45	44,81	21,23
3 Quart.	18,61	16,78	23,47	20,82	24,94	19,55	21,95	17,74	45,46	21,29
Max.	22,93	24,83	35,41	32,57	37,10	25,28	31,15	25,39	55,83	34,60

Patrimônio Líquido Médio em milhões de reais no ano (insumo)										
Min.	7.03	8.89	1.39	6.93	1.36	2.19	3.15	2.56	1.82	1.07
1 Quart.	207.5	149.7	14.35	105.6	11.64	14.40	16.68	29.44	62.77	23.82
Mediana	661.4	519.3	42.27	246.4	39.27	46.99	55.18	98.65	131.5	114.3
Média	1674.	1484.	115.4	699.7	85.76	121.3	149.8	280.4	314.9	240.0
3 Quart.	1838.	1825.	136.4	849.4	88.90	153.2	208.7	389.7	386.8	283.7
Max.	14815.	11202.	763.5	43999.	643.7	782.0	783.8	1853.	2657.	243.0
Retorno do Fechamento no ano em porcentagem (produto)										
Min.	1,722	0,000	0,000	0,000	8,636	11,13	0,000	18,13	0,000	0,000
1 Quart.	9,724	7,202	12,37	7,130	26,29	22,94	16,20	29,51	16,86	14,36
Mediana	12,85	13,37	15,43	8,749	32,48	25,52	17,53	32,23	19,53	15,84
Média	13,90	12,47	14,57	12,25	32,90	25,64	18,88	32,47	18,74	15,82
3 Quart.	17,16	16,86	16,78	11,79	36,58	27,54	22,62	35,04	21,35	18,11
Max.	36,56	23,27	42,32	20,63	68,69	40,18	30,53	41,66	35,19	34,91

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da Tabela 1 demonstra uma grande dispersão das observações, haja vista que os valores mínimos estão abaixo do primeiro quartil e os valores máximos estão acima do terceiro quartil. um sinal da presença de heterogeneidade nos dados com indícios de observações extremas (*outliers*).

A presença de *outliers* e de heterogeneidade dos dados pode indicar a existência de erros e omissões, inclusive aqueles decorrentes do sistema Económica®. Esses problemas podem afetar os índices de eficiência, subestimando seus valores. Portanto, é necessária a correção desse possível problema, caso se deseje elevar a confiabilidade dos resultados.

Para isso, empregaram-se o método de supereficiência e o método de detecção de *outliers*, *data cloud*. A supereficiência foi calculada para os modelos clássicos com orientação ao produto. Nas Tabelas 14 e 15 do Apêndice B, registram-se os níveis de supereficiência da amostra. Já a Tabela 2 mostra um resumo desse cálculo para os modelos DEA clássicos com orientação ao produto.

Tabela 2 – DMUs Superficientes da amostra no período de 2012-2021

Anos	CRS	VRS
	Orientado ao Produto	Orientado ao Produto
2012	15,21,34,43 e 44	8,13,15,19,21,34,43 e 43
2013	4,13,25,27,28 e 44	4,8,13,15,24,25,27,28,34 e 44
2014	11,19,24,34 e 43	7,11,19,24,28,34 e 43
2015	13,15,34,36 e 43	13,15,34,36 e 43
2016	15,19,21,29,31,34 e 43	15,19,21,29,31,34 e 43
2017	13,14,15,27,29,34,36 e 43	13,14,15,27,29,34,36 e 43
2018	8,14,17,19,27,29 e 34	8,15,17,19,27,29 e 34
2019	21,24,27,28 e 36	21,24,27,28 e 36
2020	15,17,20,21 e 43	15,17,20,21 e 43
2021	5,27,28,32,33,34 e 43	5,27,28,32,33,34 e 43

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 2, nota-se que, em cada período, o número de fundos supereficientes com o modelo VSR é maior e inclui os fundos supereficientes do modelo CRS. Isso se explica porque o modelo CRS é menos benevolente. Observa-se ainda a permanência de diversos fundos supereficientes em vários anos. Para o modelo de retornos constantes de escala (CRS), o fundo 43 aparece em 6 dos 10 anos e, para o modelo de retornos variáveis de escala (VRS), o fundo 15 aparece em 7 anos.

Ainda, utilizou-se o procedimento *Data Cloud*, explicado na seção metodologia, com ajuda da rotina desenvolvida por Wilson (2008) no pacote FEAR 2.01 para a linguagem de programação R. Esse procedimento foi reproduzido para grupos de 4 fundos ($r=4$), que é um tamanho aceitável para uma amostra de 44 fundos, pois, geralmente, recomenda-se um valor correspondente a 10% da amostra. A identificação dos *outliers* foi feita para os 10 períodos. A Tabela 3 apresenta a matriz de *outliers* para o ano de 2012.

Tabela 3 – *Outliers* para o ano de 2012

Quant.	Fundos Deletados				R(i)
1	21				0,6616
2	26	21			0,4141
3	26	15	21		0,2597
4	41	26	15	21	0,1643

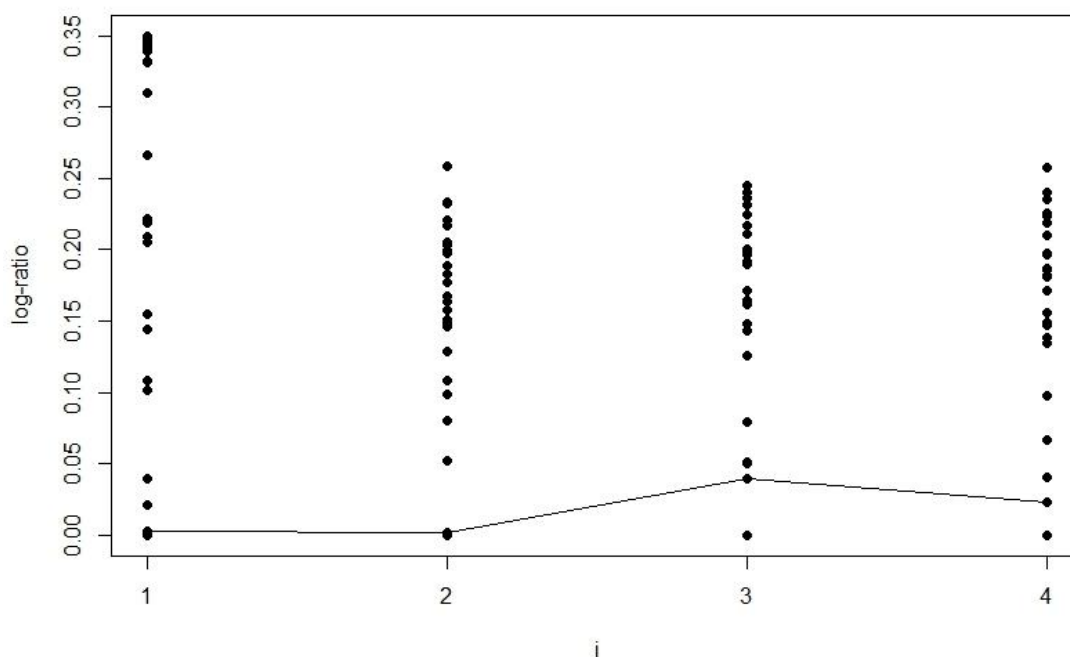
Fonte: Elaborado pelo autor

As linhas da Tabela 3 mostram os valores mínimos $R^{(i)}$ (a razão entre o novo volume da nuvem de dados resultantes da exclusão dos fundos e o volume inicial). Dessa forma, a primeira linha da Tabela 3, para $i=1$, mostra que a exclusão do fundo 21 gera um valor mínimo $R^{(i)} = 0,6616$, ou seja, reduz o volume da nuvem de pontos em 33,84%. A segunda linha, para $i=2$, mostra que, ao excluir os fundos 21 e 26 da amostra, foi gerado um valor mínimo de $R^{(i)} = 0,4141$. O mesmo entendimento segue para as demais linhas.

Complementando a análise da Tabela 3, o Gráfico 1 representa uma linha que conecta os segundos valores mais baixos para cada i , ilustrando a separação entre as razões logarítmicas (\log) mais baixas para cada valor de i . Nesse gráfico, identificam-se os *outliers* quando há um intervalo (um salto) relativamente grande

entre os pontos acima de 0 e o ponto em 0. Assim, para $i = 3$, observa-se o maior salto, indicando 3 fundos candidatos a *outliers*: 15, 21 e 26.

Gráfico 1 – Verificação de *Outliers* em 2012



Fonte: Elaborado pelo autor com ajuda do pacote FEAR 2.01

Analisando as DMUs candidatas a *outliers*, nota-se que esses fundos (com exceção do 21) formam a fronteira superior da nuvem de pontos e são supereficientes como se pode observar no Apêndice B. Logo, os índices de eficiência das outras DMUs (fundos) são afetados. Apenas o fundo 21 não é supereficiente e forma a fronteira inferior da nuvem de pontos, não enviesando os índices de eficiência das outras DMUs. Portanto, decidiu-se por retirar apenas os fundos 15 e 26 da amostra pela influência causada na fronteira eficiente.

O mesmo procedimento para análise de *outliers* foi utilizado para os demais anos do período em análise. As matrizes, bem como os gráficos utilizados para análise, podem ser vistas no Apêndice C. A Tabela 4 traz o resumo das observações de *outliers* para os demais anos. Nota-se que dois fundos se destacam como *outliers* durante todo o período de análise: os fundos 15 e 19.

Tabela 4 – *Outliers* identificados no período de 2013-2021

Anos	<i>Outliers</i>
2013	Nenhum
2014	15* e 19
2015	15 e 19*
2016	15 e 21
2017	15 e 30*
2018	15,19,21* e 36*
2019	15*,19*,21 e 36
2020	15 e 21
2021	Nenhum

Legenda: (*) – apenas para o modelo DEA-VRS

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos registros da Tabela 4, realizou-se a exclusão desses fundos por entender que eles devem enviesar a análise de eficiência. Dessa forma, uma nova amostra foi utilizada para aplicar os modelos DEA para análise da eficiência.

4.2 Análise dos resultados dos Modelos Análise Envoltória de Dados

A partir da nova amostra, realizou-se o teste do tipo de fronteira de retornos de escala, já que a escolha do tipo de fronteira é uma questão fundamental e, se decidida sem seguir normas e nem regras, pode-se chegar a resultados inconvenientes. Como explicado na metodologia, esse teste foi realizado, usando os escores de eficiência CCR e BCC com o procedimento de *bootstrap* de 2000 replicações. A hipótese nula aponta para a prevalência da uma fronteira com retornos constantes de escala (RCS ou CCR), a qual deve ser rejeitada se a estatística estimada S for menor que o valor crítico a um nível de significância de 5% obtido da distribuição empírica dos estimadores *bootstrap*.

Os testes foram realizados para os 10 períodos e seus resultados estão registrados na Tabela 5. Destarte, sugere-se a não rejeição da tecnologia CCR para as observações dos anos 2013 e 2014. Portanto, pode-se assumir que, nesses 2 períodos, os fundos operam com retornos constantes de escala, não existindo ineficiência relativa de escala. Nos períodos 2012, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021, evidenciam-se retornos variáveis de escala (RVS ou BCC).

Tabela 5 – Teste de Hipóteses de Escolha do Modelo de Retorno de Escala

Descrição	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
S	0,689	0,665	0,703	0,778	0,792	0,916	0,774	0,858	0,422	0,800

Valor Crítico	0,691	0,488	0,404	0,791	0,914	0,917	0,913	0,960	0,536	0,802
Tipo Erro 1	0,047	0,195	0,260	0,043	0,000	0,049	0,000	0,000	0,021	0,049
Hipótese	VRS	CRS	CRS	VRS	VRS	VRS	VRS	VRS	VRS	VRS

Fonte: Elaborado pelo autor

Adotando as correspondentes tecnologias (fronteiras) nos anos estudados, estimaram-se os valores de eficiência, comparando os resultados dos modelos determinísticos (clássicos) e semiparamétricos (com *bootstrap*).

4.2.1 Modelos DEA Clássicos

Os resultados da aplicação dos modelos clássicos DEA orientados aos produtos para cada ano estão lançados na Tabela 6. A orientação ao produto mostra-se mais prudente pelo fato de os investidores buscarem, basicamente, maximizar o retorno (produto) para um dado nível de risco insumo (incluindo o risco medido pela volatilidade).

Tabela 6 – Eficiência para modelos DEA clássicos orientados ao produto.

<u>F</u>	<u>2012</u> <u>VRS</u>	<u>2013</u> <u>CRS</u>	<u>2014</u> <u>CRS</u>	<u>2015</u> <u>VRS</u>	<u>2016</u> <u>VRS</u>	<u>2017</u> <u>VRS</u>	<u>2018</u> <u>VRS</u>	<u>2019</u> <u>VRS</u>	<u>2020</u> <u>VRS</u>	<u>2021</u> <u>VRS</u>
1	2,161	9,290	6,993	1,779	1,773	1,501	1,000	1,348	3,169	2,023
2	2,863	2,710	1,330	1,421	1,172	1,000	1,000	1,000	1,000	1,201
3	3,229	4,484	36,323	2,301	2,044	1,580	1,771	1,412	4,054	1,176
4	1,254	1,000	15,211	1,000	1,000	1,059	1,012	1,216	25,175	1,382
5	3,932	9,744	19516,45	2,322	1,863	1,659	1,700	1,317	1,257	1,000
6	1,827	3,008	6,286	1,757	1,826	1,326	1,531	1,307	3,286	1,122
7	1,000	1,053	1,000	1,205	1,280	1,112	1,003	1,253	10,479	1,794
8	1,000	1,008	1,072	1,015	1,436	1,056	1,000	1,160	1,055	1,272
9	1,429	1,226	1,534	1,479	1,394	1,017	1,176	1,183	3,586	1,351
10	2,609	1,458	1,544	1,865	1,342	1,219	1,946	1,501	8,988	1,074
11	1,831	2,616	1,287	1,150	1,199	1,000	1,094	1,241	1,342	1,283
12	1,204	1,356	1,133	1,052	1,237	1,039	1,091	1,236	1,050	1,279
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,288	1,000	1,106	1,000	1,000	1,275
14	2,071	1,137	6,107	1,137	1,000	1,000	1,589	1,063	4,319	1,971
15	-	7,613	1,628	-	-	-	-	-	-	1,000
16	2,351	1,142	1,440	2,037	1,080	1,298	1,649	1,585	2,949	1,399
17	7,742	1,176	2,738	1,723	1,048	1,027	1,000	1,000	1,000	1,149
18	1,208	10,971	10,779	1,572	1,681	1,300	1,000	1,500	1,659	1,274
19	1,000	1,803	-	-	1,000	1,000	-	-	1718,659	1,730
20	1,475	1,377	1,319	1,467	1,357	1,000	1,172	1,141	1,000	1,291
21	-	1,402	11,661	1,108	-	1,000	-	-	-	1,000
22	1,000	2,322	14,656	1,000	1,000	1,288	1,431	1,377	7,653	1,111
23	1,416	1,207	1,089	1,165	1,296	1,435	1,234	1,161	4,095	1,089
24	14,246	5,055	1,000	1,314	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,769
25	1,294	1,000	1,172	1,527	1,000	1,225	1,371	1,317	1,380	1,562
26	1,128	1,062	1,097	1,236	1,245	1,236	1,382	1,184	9,126	1,585
27	1,030	1,000	1,029	1,158	1,259	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

28	1,368	1,000	1,000	1,000	1,000	1,127	1,000	1,000	1,912	1,000
29	4,379	1,572	4,107	1,956	1,000	1,000	1,000	1,062	1,942	4,430
30	4,272	3,611	7,205	2,168	1,463	-	1,254	1,215	4,137	3,418
31	1,909	2,039	3,087	1,679	1,000	1,288	1,042	1,396	4,178	1,069
32	1,997	2,551	4,568	1,971	1,122	1,232	1,085	1,470	1,074	1,000
33	1,210	20,737	1,350	1,504	1,000	1,000	1,227	1,175	11,566	1,000
34	1,000	1382,638	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,619	1,804	1,000
35	1,145	1,095	1,115	1,002	1,198	1,084	1,617	1,226	3,543	1,117
36	2,065	1,466	1,265	1,000	1,000	1,000	-	-	6,916	2127,482
37	3,678	4,822	2,045	1,934	1,623	1,311	2,497	1,370	2,351	1,451
38	7,169	15,969	4,770	2,840	2,001	1,440	3,497	1,510	1,958	1,710
39	2,080	3,253	1,422	1,414	1,411	1,133	2,029	1,242	1,823	1,245
40	3,380	1,729	2,408	1,458	1,867	1,277	1,625	1,000	4,122	1,413
41	1,964	17,633	1,452	1,865	1,372	1,301	1,099	1,286	3,340	1,427
42	1,293	1,267	1,175	1,170	1,295	1,073	1,660	1,367	3,086	1,030
43	1,000	35,070	1,000	1,000	1,000	1,000	1,243	1,000	1,000	1,000
44	1,000	1,000	1,117	1,005	1,210	1,000	1,532	1,349	2,361	1,133
\bar{X}	<u>2,440</u>	<u>35,811</u>	<u>457,836</u>	<u>1,470</u>	<u>1,295</u>	<u>1,158</u>	<u>1,367</u>	<u>1,245</u>	<u>44,676</u>	<u>49,729</u>
σ	<u>2,445</u>	<u>207,869</u>	<u>2975,618</u>	<u>0,457</u>	<u>0,307</u>	<u>0,181</u>	<u>0,493</u>	<u>0,178</u>	<u>264,637</u>	<u>320,518</u>

Observação: o símbolo “-” corresponde aos fundos excluídos por serem *outliers*.

Legenda: os símbolos “ \bar{X} ” e “ σ ” correspondem, respectivamente, à média aritmética e ao desvio padrão.

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 6, fica demonstrado que os fundos com resultados iguais a 1 são eficientes e formam a fronteira. Nota-se também que os fundos 13, 34 e 43 são eficientes em quase todos os anos estudados. O índice médio e o desvio padrão dos fundos para cada período é evidenciado nas últimas linhas, indicando uma alta heterogeneidade nos escores. A menor média dos índices de eficiência observa-se no ano 2017: 1,158. Isso demonstra a possibilidade de os fundos de 2017, na média, aumentarem o retorno em 15,80%, tendo como referência as melhores práticas (os fundos *benchmarks*) e mantendo em níveis constantes os insumos contemplados.

4.2.2 Modelo DEA em conjunto com o *bootstrap*

Complementando a análise do DEA clássico, foi utilizado o método DEA-*Bootstrap* para cada ano do período de análise. Isso é necessário para se obter os índices de eficiência corrigidos diante da possível existência de vieses inerentes aos dados. O viés representa a diferença entre o índice determinístico e o índice corrigido por *bootstrap*. Portanto, o viés possibilita determinar o índice corrigido, como registrado na Tabela 7. Na Tabela 25 do Apêndice D, avista-se o viés dos índices de eficiência dos fundos para o período analisado.

Tabela 7 – Índice de eficiente corrigido pelo viés orientado ao produto

F	2012 VRS	2013 CRS	2014 CRS	2015 VRS	2016 VRS	2017 VRS	2018 VRS	2019 VRS	2020 VRS	2021 VRS
1	2,502	9,799	7,797	1,914	1,871	1,556	1,092	1,400	3,836	2,080
2	3,442	3,112	1,517	1,634	1,294	1,141	1,242	1,188	1,565	1,285
3	3,609	4,836	38,384	2,449	2,168	1,653	1,879	1,466	4,921	1,216
4	1,512	1,182	15,975	1,290	1,210	1,129	1,138	1,300	30,149	1,496
5	4,295	10,592	21431,7	2,414	1,986	1,709	1,794	1,369	1,780	1,244
6	2,002	3,308	6,688	1,898	1,935	1,392	1,665	1,351	3,986	1,159
7	1,441	1,183	1,076	1,331	1,417	1,197	1,120	1,321	13,206	1,857
8	1,434	1,139	1,169	1,179	1,542	1,110	1,235	1,289	1,367	1,360
9	1,670	1,368	1,649	1,602	1,478	1,063	1,293	1,244	4,544	1,405
10	2,908	1,587	1,677	2,127	1,471	1,294	2,138	1,617	11,386	1,153
11	2,082	2,927	1,382	1,235	1,248	1,050	1,150	1,317	1,723	1,342
12	1,481	1,616	1,309	1,222	1,330	1,102	1,180	1,393	1,477	1,439
13	1,440	1,172	1,212	1,291	1,448	1,059	1,206	1,184	1,307	1,341
14	2,329	1,223	6,646	1,332	1,216	1,141	1,756	1,131	5,060	2,143
15	-	8,223	1,746	-	-	-	-	-	-	1,239
16	2,637	1,220	1,533	2,204	1,143	1,360	1,810	1,651	3,557	1,466
17	10,142	1,276	3,048	1,930	1,161	1,106	1,223	1,188	1,349	1,242
18	1,341	12,241	11,308	1,766	1,794	1,351	1,062	1,496	1,916	1,428
19	1,320	2,280	-	-	1,209	1,117	-	-	2226,8	1,870
20	1,653	1,534	1,407	1,554	1,436	1,071	1,226	1,178	1,558	1,338
21	-	1,645	12,538	1,298	-	1,139	-	-	-	1,238
22	1,442	2,482	15,816	1,286	1,214	1,397	1,607	1,459	9,498	1,172
23	1,693	1,372	1,237	1,338	1,440	1,536	1,308	1,204	4,959	1,135
24	17,562	5,347	1,142	1,557	1,126	1,139	1,244	1,184	1,566	1,868
25	1,515	1,096	1,235	1,732	1,088	1,294	1,484	1,377	1,616	1,664
26	1,293	1,184	1,172	1,337	1,365	1,323	1,520	1,243	10,670	1,661
27	1,224	1,115	1,101	1,270	1,332	1,138	1,236	1,189	1,567	1,245
28	1,585	1,199	1,084	1,287	1,214	1,218	1,240	1,183	2,548	1,234
29	4,905	1,716	4,443	2,075	1,153	1,116	1,235	1,137	2,349	4,671
30	4,753	3,827	7,799	2,346	1,595	-	1,313	1,246	4,608	3,560
31	2,275	2,228	3,644	1,956	1,198	1,385	1,176	1,525	5,193	1,184
32	2,346	2,765	5,327	2,177	1,259	1,308	1,217	1,622	1,433	1,237
33	1,349	23,959	1,453	1,588	1,107	1,127	1,335	1,244	13,180	1,073
34	1,414	1780,7	1,392	1,283	1,208	1,136	1,238	1,802	2,521	1,176
35	1,356	1,250	1,232	1,114	1,266	1,170	1,764	1,378	4,625	1,161
36	2,543	1,671	1,421	1,291	1,210	1,136	-	-	8,097	2179,1
37	4,117	5,187	2,157	2,059	1,710	1,365	2,644	1,410	2,654	1,529
38	7,877	17,143	5,073	2,980	2,106	1,514	3,759	1,646	2,534	1,762
39	2,277	3,664	1,501	1,548	1,474	1,185	2,160	1,278	2,163	1,278
40	3,720	1,830	2,662	1,587	2,020	1,361	1,828	1,060	5,005	1,510
41	2,145	20,347	1,574	1,957	1,445	1,373	1,172	1,332	3,813	1,480
42	1,499	1,425	1,277	1,261	1,372	1,119	1,754	1,440	3,951	1,072
43	1,448	44,377	1,318	1,281	1,211	1,141	1,414	1,184	1,569	1,240
44	1,448	1,474	1,188	1,085	1,265	1,137	1,626	1,444	3,149	1,249
\bar{X}	2,882	45,473	502,698	1,644	1,422	1,247	1,512	1,342	57,637	51,014
σ	2,932	267,799	3267,641	0,442	0,292	0,169	0,505	0,168	342,911	328,283

Observação: o símbolo “-” corresponde aos fundos excluídos por serem *outliers*.

Legenda: os símbolos “ \bar{X} ” e “ σ ” correspondem, respectivamente, à média aritmética e ao desvio padrão.

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando a Tabela 7, observa-se que a eficiência corrigida orientada aos *outputs* não toma os valores iguais a um, ou seja, adotam-se valores maiores que um.

Isso significa que os índices estimados contêm tanto um componente sistemático previsível pelos *inputs* e *outputs* utilizados como um componente não observado e imprevisível decorrente de fatores exógenos. A incorporação do componente aleatório transforma o modelo DEA determinístico em um modelo estocástico e cria uma fronteira estocástica que dá a base para estimar índices mais robustos.

4.3.3 – Resumo dos Fundos Eficientes pelos Modelos DEA

Comparando as médias e a variância dos resultados dos modelos clássicos e *bootstrap*, nota-se que, nesse último, esses valores são menores, já que considera os índices corrigidos pelo viés. Nesse sentido, os índices corrigidos são mais consistentes, indicando a possibilidade de os fundos menos eficientes aumentarem seus rendimentos, mantendo em níveis constantes os insumos de forma mais confiável.

Com base nos resultados dos modelos DEA, foram selecionados os fundos mais eficientes para calcular a combinação de fundos, seguindo a teoria de otimização de portfólio de investimentos de Markowitz. O critério utilizado para o modelo DEA clássico foi a escolha dos fundos eficientes, os quais apresentavam estimadores iguais a 1. Para a escolha dos fundos para DEA com *bootstrap*, considerou-se o primeiro quartil, ou seja, os 25% dos fundos mais eficientes. A Tabelas 8 apresenta os fundos para o modelo DEA clássico.

Tabela 8 – Fundos Selecionados para Compôr as Carteiras Eficientes do Modelo DEA Clássico no período de 2012-2021

Anos	<u>CRS Clássico</u> Orientado ao Produto	<u>VRS Clássico</u> Orientado ao Produto
2012	-	7,8,13,19,22,34,43 e 44
2013	4,13,25,27,28 e 44	-
2014	7,13,24,28,34 e 43	-
2015	-	4,13,22,28,34,36 e 43
2016	-	4,14,19,22,24,25,28,29,31,33,34,36 e 43
2017	-	2,11,13,14,19,20,21,24,27,29,33,34,36, 43 e 44
2018	-	1,2,8,17,18,24,27,28,29 e 34
2019	-	2,13,17,24,27,28,40 e 43
2020	-	2,13,17,20,24,27 e 43
2021	-	5,15,21,27,28,32,33,34 e 43

Fonte: Elaborado pelo autor

Com os resultados obtidos para os modelos DEA clássicos, foram selecionados os fundos participantes da carteira eficiente projetada. Nota-se que, na maioria dos anos, os fundos 13 e 34 apareceram sete vezes e o fundo 43 apareceu oito vezes.

A seleção também foi realizada para o para o modelo DEA com *bootstrap*, como é visto na Tabela 9.

Tabela 9 – Fundos Selecionados para Compôr as Carteiras Eficientes do Modelo DEA com *Bootstrap* no período de 2012-2021

Anos	Quartil	CRS <i>bootstrap</i> Orientado ao Produto	VRS <i>bootstrap</i> Orientado ao Produto
2012	1,443	-	7,8,13,18,19,22,26,27,33,34 e 35
2013	1,270	4,7,8,13,14,16,25,26,27,28 e 35	-
2014	1,257	7,8,13,23,24,25,26,27,28,35 e 44	-
2015	1,288	-	8,11,12,22,27,28,34,35,42,43 e 44
2016	1,211	-	4,16,17,19,24,25,29,31,33,34 e 36
2017	1,127	-	8,9,11,12,13,17,19,20,29 e 42
2018	1,222	-	1,4,7,11,12,13,18,31,32 e 42
2019	1,189	-	2,13,14,17,20,24,28,29,40 e 43
2020	1,643	-	2,8,12,13,17,20,24,25,27,32 e 43
2021	1,236	-	3,6,10,22,23,28,31,34,35 e 42

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados obtidos para o quartil foram utilizados para a delimitação da escolha dos fundos. É possível notar que o fundo 13 apareceu sete vezes e o fundo 8 apareceu seis vezes. A próxima seção apresenta o resultado da otimização das carteiras eficientes projetadas.

4.3 – Otimização das Carteiras Eficientes com os fundos selecionados

Tendo o conhecimento dos fundos mais eficientes estimados pelos modelos DEA, o próximo passo foi a determinação dos pesos desses ativos no portfólio ótimo com a utilização do modelo de Markowitz. Isso foi realizado para cada um dos 10 anos do período em análise, o que buscou maximizar o retorno esperado dado um nível de risco. Como contrapartida, a carteira clássica foi utilizada para os 10 anos com os 44 fundos estudados, menos os *outliers*, para que fosse possível comparar seus resultados com as carteiras eficientes projetadas pelos modelos DEA. A composição das carteiras otimizadas pode ser vista no Apêndice E.

4.3.1 Otimização das Carteiras Clássicas

A otimização das carteiras clássicas por Markowitz para cada ano da análise traz os retornos máximos esperados para cada nível de risco, bem como os níveis de risco para cada possível retorno máximo esperado. A Tabela 10 mostra o resultado da otimização por Markowitz para a carteira clássica e a relação retorno - risco.

Tabela 10 – Otimização da Carteira Clássica

Anos	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Retorno	43,11	6,52	5,90	8,61	13,93	18,03	31,14	25,8	7,32	43,11
Risco	31,80	2,66	6,08	8,23	12,38	5,29	7,07	6,38	10,93	31,80
Ret./Ris	1,36	2,45	0,97	1,05	1,13	3,41	4,40	4,04	0,67	1,36

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 10, registram-se semelhanças entre alguns resultados. Os anos em que se obteve o melhor retorno máximo, por exemplo, foi de 2012 e 2021, com 43,11%. Esse alto desempenho está vinculado a maiores riscos, já que se obteve o pior retorno máximo em 2014, com 5,90%, refletindo, em parte, o começo da crise econômica e política no país no segundo mandato da presidente Dilma, com o PIB *per capita* encolhendo mais de 9% entre 2014 e 2016. Nota-se também a queda do retorno e o aumento do risco em 2020 como consequência da pandemia da Covid-19. Por outro lado, observa-se a recuperação em 2021 com um retorno máximo mais arriscado. Assim, analisando a relação retorno – risco, os anos com a melhor relação foram 2017, 2018 e 2019, mais especificamente, antes da notificação dos primeiros casos de Covid-19 em dezembro de 2019.

A relação retorno-risco é o coeficiente de Sharpe. Quanto mais alto esse coeficiente, há uma propensão de uma relação retorno-risco mais favorável, enquanto um coeficiente mais baixo indica uma relação menos favorável. Em geral, os investidores procuram maximizar o coeficiente de Sharpe de suas carteiras, pois isso significa que estão obtendo um retorno maior para cada unidade de risco assumido.

4.3.2 Otimização da Carteira DEA clássico

Na sequência, têm-se os valores da otimização da carteira com modelo DEA clássico, bem como o nível de risco para cada possível retorno máximo esperado. A

Tabela 11 mostra o resultado da otimização por Markowitz para o DEA clássico e a relação retorno - risco.

Tabela 11 – Otimização da Carteira DEA Clássico

Anos	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Retorno	10,05	4,52	3,95	8,61	12,99	18,03	31,14	25,8	7,32	23,45
Risco	8,46	3,37	7,84	8,23	12,38	5,29	7,07	6,38	10,93	22,80
Ret./Ris	1,19	1,34	0,50	1,05	1,05	3,41	4,40	4,04	0,67	1,03

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 11, é possível perceber os resultados no período. O ano em que se observou o pior retorno máximo foi em 2014, com 3,95%. Por outro lado, ao analisar o risco da carteira no ano de 2021, obteve-se um retorno máximo mais arriscado, com 22,80% e, no ano de 2013, um retorno máximo menos arriscado, com 3,37%. Nota-se que os resultados, incluindo a relação retorno – risco, seguiram a mesma tendência das carteiras clássicas de Markowitz.

4.3.3 Otimização da Carteira DEA com *bootstrap*

Com a otimização da carteira clássica e da carteira com os fundos pré-selecionados pelo DEA clássico, a última otimização foi feita para os fundos pré-selecionados pelo DEA-*bootstrap*. O nível de risco para cada possível retorno máximo esperado também foi calculado. A Tabela 12 mostra o resultado da otimização por Markowitz para os ativos mais eficientes com o DEA-*bootstrap*.

Tabela 12 – Otimização para Carteira DEA com *Bootstrap*

Anos	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Retorno	10,05	4,52	3,95	8,61	12,99	27,65	24,06	25,8	7,32	22,84
Risco	8,46	3,37	7,84	8,23	15,02	11,62	6,71	6,38	10,93	23,92
Ret./Ris	1,19	1,34	0,50	1,05	0,86	2,38	3,59	4,04	0,67	0,95

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se pode observar na Tabela 12, assim como nos modelos retromencionados, ocorreram variações ao longo do período. O ano com o melhor retorno máximo foi em 2017, com 27,65%. Já o ano com o pior retorno máximo foi em 2014, com 3,95%, sendo esse resultado semelhante para o mesmo ano com o modelo DEA clássico, vide Tabela 11. Por outro lado, ao analisar o risco da carteira, obteve-

se, no ano de 2021, um retorno máximo mais arriscado, com 23,92%, e, no ano de 2013, um retorno máximo menos arriscado, com 3,37%, o qual também foi similar com resultado obtido para o mesmo ano com o modelo de ativos pré-selecionados pelo DEA clássico. Nota-se, também, que os anos com a melhor relação retorno - risco foram 2017, 2018 e 2019.

Particularmente, os resultados da otimização com *bootstrap* se aproximam em muito com os resultados da otimização com DEA clássico. Além disso, também se observam alguns anos mais arriscados com superação do retorno esperado pelo risco e, por consequência, resultados inferiores aos encontrados pelo modelo clássico com otimização. Desse modo, a próxima seção evidencia uma comparação direta entre os modelos utilizados para otimização.

4.3.4 Comparação das otimizações das carteiras eficientes projetadas

Com o cálculo das eficiências pelos modelos DEA e, conseqüentemente, a formação das carteiras com os fundos eficiente, tem-se agora o resultado da otimização de Markowitz. A Tabela 13 mostra os retornos máximos esperados das carteiras eficientes projetadas.

Tabela 13 – Retornos Esperados para Maximização e a Razão Retorno e Risco

Ano	DEA		Bootstrap		Clássica	
	Máximo retorno	Retorno/risco	Máximo retorno	Retorno/risco	Máximo retorno	Retorno/risco
2012	10,05	1,19	10,05	1,19	<u>43,11</u>	1,36
2013	4,52	1,34	4,52	1,34	<u>6,52</u>	2,45
2014	3,95	0,50	3,95	0,50	<u>5,90</u>	0,97
2015	<u>8,61</u>	1,05	<u>8,61</u>	1,05	<u>8,61</u>	1,05
2016	12,99	1,05	12,99	0,86	<u>13,93</u>	1,13
2017	18,03	3,41	27,65	2,38	<u>18,03</u>	3,41
2018	31,14	4,40	24,06	3,59	<u>31,14</u>	4,40
2019	<u>25,80</u>	4,04	<u>25,80</u>	4,04	<u>25,80</u>	4,04
2020	<u>7,32</u>	0,67	<u>7,32</u>	0,67	<u>7,32</u>	0,67
2021	23,45	1,03	22,84	0,95	<u>43,11</u>	1,36

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados da Tabela 13 mostram-se favoráveis para as carteiras otimizadas com os fundos sem a pré-seleção DEA (chamadas de clássicas). Porém, nos anos de 2015, 2019 e 2020, todas as carteiras otimizadas apresentavam iguais razões para o retorno-risco. Isso indica que as carteiras mais eficientes formam as carteiras

clássicas, não se vislumbrando o benefício em relação às carteiras eficientes pelos métodos DEA. Com isso, do ponto de vista da relação retorno-risco das carteiras, a carteira clássica otimizada torna-se uma melhor opção para o investidor.

Sendo assim, com a superioridade da carteira clássica em relação aos modelos DEAs, a pesquisa apresentou certa similaridade quanto aos resultados de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2005), visto que os modelos propostos DEA não superaram a carteira ingênua que tem pesos iguais para os fundos pertencentes à carteira. Para o presente caso, a carteira clássica se encontra no lugar da carteira ingênua.

No mesmo sentido, a pesquisa de Lopes, Carneiro e Scheneider (2010) mostrou que o modelo de Markowitz estimou resultados melhores em detrimento dos modelos DEA, em especial, do modelo com retornos constantes e variáveis. Os resultados da pesquisa mostram que a utilização do modelo de ajuste de pesos do Markowitz tem melhor eficiência. Portanto, é salutar mencionar que simplesmente pré-selecionar fundos eficientes pelo modelo DEA pode não garantir resultados melhores que pelo modelo clássico.

Há que se destacar que a superioridade da carteira clássica se dá pela diversificação. Por conseguinte, com a utilização do mesmo período de análise e os mesmos retornos para os fundos de investimento, a aplicação daqueles fundos ditos eficientes pelos modelos DEAs não consegue proporcionar as melhores relações retorno-risco, já que não inclui a covariância dos fundos. Então, com a diminuição dos fundos de investimento na composição da carteira eficiente, a otimização pela carteira clássica torna-se melhor por considerar uma maior quantidade de fundos e abarcar os ganhos com a diversificação e compensação do risco.

Todavia, como visto, existem diferentes tipos de investidores em relação ao risco, podendo suas preferências de investimentos variarem de acordo com seus objetivos financeiros, tolerância à incerteza e horizonte de investimento. Assim, os anos de 2012 e 2021 produzem um retorno maior, porém incorrem em mais risco, caso siga a carteira formada pelo modelo clássico. Se são menos propensos ao risco, os investidores, nesses anos, podem optar pelas carteiras dos modelos DEA. Nos anos de 2016 e 2018, a carteira clássica produz resultados semelhantes com a carteira formada pelo modelo DEA clássico, no entanto, como pode ser visto na seção anterior, o modelo DEA clássico despense um processo de escolha mais elaborado, haja vista a necessidade de aplicação de um método de análise de eficiência para a

escolha dos fundos eficientes em uma determinada amostra do que apenas a aplicação do método de Markowitz nessa amostra. Já nos anos de 2015, 2017 e 2019, a carteira clássica produz um retorno maior e com menor risco do que as carteiras dos modelos DEA em diversos pontos ao longo da fronteira eficiente.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fundos de investimento são aplicações feitas por pessoas físicas e/ou jurídicas, consistindo os investimentos na aplicação de recursos financeiros em conjunto de ativos. As vantagens desse tipo de investimento são a facilidade na entrada de investidores iniciantes com poucos recursos, a facilidade na aplicação dos recursos financeiros e a diversificação dos ativos compostos pela carteira.

A análise do desempenho dos fundos de investimento se configura com uma boa ferramenta de avaliação para investidores e para a seleção dos melhores ativos a serem investidos. Com isso, é possível a análise de desempenho, podendo os investidores se municiarem de informações para uma eficiente tomada de decisão.

As formas de mensuração do desempenho de fundos de ações são diversas e adaptaram-se ao longo do tempo. Existem modelos paramétricos tradicionais, como o alfa de Jensen, índice de Sharpe e índice de Treynor, e modelos não paramétricos, como a abordagem de análise envoltória de dados (DEA) utilizada na análise da eficiência de fundos de ações. Contudo, com o transcorrer do tempo, são necessários modelos alternativos aos tradicionais.

- Contribuições da Pesquisa

A pesquisa contribui com a literatura ao avaliar a otimização de fundos de investimento, visto que apresenta e utiliza duas abordagens distintas para avaliação de desempenho: a otimização de Markowitz, a metodologia DEA clássica e a DEA com *bootstrap*. Existe na literatura, até onde se sabe, apenas a pesquisa de Lamb e Tee (2012), que aplicaram o método DEA em conjunto com o *bootstrap* para análise de fundos de investimento.

Os trabalhos identificados limitavam-se à escolha arbitrária do tipo de modelo DEA (DEA-CRS e/ou DEA-VRS) para análise dos estimadores de eficiência das

aplicações. Poucas pesquisas realizaram testes de hipóteses para escolha entre os modelos DEA. Adicionalmente, esta pesquisa realizou a identificação e a retirada das observações de *outliers* ao aplicar o método *DataCloud* e a supereficiência DEA para a seleção dos fundos de investimento que seguem a tendência central.

O período analisado compreende os anos de 2012 a 2021, que corresponde ao tempo entre duas crises que causaram prejuízos de ordens financeiras no Brasil: a crise de recessão e a crise resultante da pandemia do Covid-19.

Além disso, seguindo a literatura, as variáveis utilizadas nos modelos DEA foram: retorno, volatilidade, patrimônio líquido e a taxa de administração.

Como é visto na discussão e nos resultados, o modelo DEA possibilita maior flexibilização na escolha das variáveis para estimar a eficiência dos fundos de investimento. Os indicadores financeiros tradicionais tornavam a estimação da eficiência, por vezes, enviesada ao definirem arbitrariamente *benchmarkings* para comparação, assim como a escolha de diferentes ativos livre de risco. A vantagem da modelagem DEA é sua capacidade em definir um conjunto de fundos de investimento de referência dentro dos analisados (amostra), não necessitando da escolha arbitrária de um ativo, em tese, livre de risco.

Além disso, a abordagem DEA com *bootstrap* foi capaz de mensurar a presença de viés e estimar índices de eficiência corrigidos e intervalos de confiança que refletem a incerteza.

Dessa forma, a presente pesquisa responde o objetivo geral e o problema central: as carteiras montadas com os fundos eficientes, por meio dos métodos DEA, têm um melhor desempenho que o obtido com os métodos tradicionais? Mostra-se e conclui-se, utilizando-se o índice de Sharpe, que as carteiras formadas pela pré-seleção com os métodos DEA não tiveram um melhor desempenho que a carteira clássica. Dessa forma, rejeita-se a hipótese inicial de que a utilização dos fundos eficientes determinados pelo DEA permite construir carteiras com melhor desempenho que o da carteira clássica. Ou seja, os fundos ditos eficientes pelos estimadores DEA quando são utilizados para seleção da carteira eficiente pelo método de Markowitz não se mostraram serem mais vantajosos. Isso se deve à capacidade de o método de otimização de Markowitz contar com dois fatores-chaves: i) a diversificação e ii) a covariância dos ativos capazes de realizar a compensação entre os riscos na composição de uma carteira ótima de investimento.

Esse resultado é corroborado em outras pesquisas. A superioridade da carteira clássica em relação aos modelos DEAs já foi constatada no trabalho de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2005). No mesmo sentido, a pesquisa de Lopes, Carneiro e Scheneider (2010) mostrou que o modelo de Markowitz estimou resultados melhores em detrimento dos modelos DEA, em especial, do modelo com retornos constantes e retornos variáveis. Porém, ambas as pesquisas não utilizaram o DEA com *bootstrap* na análise. Neste trabalho, mostra-se também que os fundos pré-selecionados pelo DEA com *bootstrap* não levam a melhores resultados.

- Limitações da Pesquisa

As limitações da pesquisa giram em torno de diversos fatores. A amostra dos fundos de investimento é uma dessas limitações. A análise se restringiu apenas aos fundos de ações índice ativo, haja vista a existência de outros tipos de fundos de ações, bem como outras categorias de fundos de investimento.

Uma outra limitação diz respeito às variáveis utilizadas para o cálculo da eficiência pela metodologia DEA, sendo possível adicionar e testar outras adicionais. A limitação também é decorrente do período analisado. Embora tenham sido analisados 10 anos, um período mais amplo produziria melhores aferições. Outra limitação é que as variáveis analisadas pelos modelos DEA foram anuais.

- Sugestão de Pesquisas Futuras

As pesquisas futuras podem explorar outros indicadores para estimação da eficiência proporcionada pela metodologia DEA, bem como utilizar outras metodologias DEA, como, por exemplo, a metodologia DEA com função de distância direcional, que busca a influência de bons *outputs* e maus *outputs* para estimar a eficiência. E, com isso, verificar a influência dessas novas medidas para a seleção de fundos na formação da carteira de investimento.

Para a comparação com as medidas tradicionais, pesquisas futuras poderiam utilizar o alfa de Jensen e o índice de Treynor, tendo em vista que essas medidas também podem ser utilizadas na avaliação da seleção de portfólios.

Além disso, novos estudos podem utilizar outras medidas de otimizações derivadas de Markowitz, como a utilização do modelo com desvio absoluto com relação à média (MAD) e o modelo mínimo/máximo ponderado (MP).

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIROS (ANBIMA). **Consolidado histórico de fundos de investimento**, out./2021. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/estatisticas/fundos-de-investimento/fi-consolidado-historico.htm. Acesso em: 24 nov. 2021.

ANDERSEN, P.; PETERSEN, N, C. A procedure for raking efficient units in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 39, n, 10, p. 1261-1264, out./1993. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2632964>. Acesso em: 24 ago. 2022.

ANG, J, S.; CHUA, J, H. Composite measures for the evaluation of investment performance. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Cambridge, v. 14, n. 2, p. 361-384, jun./1979. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2330509>. Acesso em: 26 jun. 2020.

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**. 14, ed. São Paulo: Atlas, 2018.

BABALOS, V.; CAPORALE, G, M.; PHILIPPAS, N. Efficiency evaluation of Greek equity funds. **Research in International Business and Finance**, v. 26, n. 2, p. 317-333, maio/2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2012.01.003>. Acesso em: 19 jul. 2021.

BACH, T, M.; SILVA, W, V.; KUDLAWICZ, C.; MARQUES, S. Eficiência das companhias abertas e o risco *versus* retorno das carteiras de ações a partir do modelo de Markowitz. **Revista Evidenciação Contábil e Finanças**, João Pessoa, v. 3, n. 1, p. 34-53, jan./abr. 2015. DOI: 10,18405/recfin20150103. Acesso em: 18 jun. 2020.

BANKER, R, D.; CHARNES, A.; COOPER, W, W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, set./1984. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>. Acesso em: 04 abr. 2021.

BASSO, A.; FUNARI, S. A data envelopment analysis approach to measure the mutual fund performance. **European Journal of Operational Research**, [s, l,], v. 135, n. 3, p. 447-492, dez./2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00311-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00311-8). Acesso em: 22 jun. 2020.

BISSO, C, S.; CALDEIRA, J, F.; SAMANEZ, C, P.; TELLES, G, R. Produtividade e eficiência no mercado de fundos de investimento no Brasil: uma abordagem comparativa. **Revista Brasileira de Finanças**, Rio de Janeiro, v. 14, n. 3, p. 323-352, jul./ 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.12660/rbfin.v14n3.2016.58913>. Acesso em: 22 jun. 2020.

BOGETOFT, P.; OTTO, L. **Benchmark with DEA, SFA, and R**. Vol. 157. New York: Springer Science & Business Media, 2010.

BRUNI, A, L.; FUENTES, J.; FAMÁ, R. A moderna teoria de portfólios e a contribuição dos mercados latinos na otimização da relação risco versus retorno de carteiras internacionais: evidências empíricas recentes (1996-1997). III SemeAd, 1998. Disponível em: <http://sistema.semead.com.br/3semead/pdf/Finan%E7as/Art038.PDF>. Acesso em: 20 ago. 2021.

CHARLES, V.; KUMAR, M. **Data envelopment analysis and its applications to management**. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2012.

CHARNES, A.; COOPER, W, W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 6, p. 429-444, nov./1978. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8). Acesso em: 04 abr. 2021.

CHEN, Y, C.; CHIU, Y, H.; LI, M, C. Mutual fund performance evaluation: application of system bcc model. **South African Journal of Economics**, v. 79, n. 1, p. 1-16, mar./2011. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1813-6982.2011.01263.x>. Acesso em: 20 dez. 2020.

COOK, W, D.; SEIFORD, L, M. Data envelopment analysis (DEA) – thirty years on. **European Journal of Operational Research**, v. 1, n. 1, p. 1-17, jan./2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.01.032>. Acesso em: 10 abr. 2021.

COOK, W.; ZHU, J. **Data envelopment analysis: modeling operational processes and measuring productivity**. Worcester: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2008.

COOPER, W, W.; SEIFORD, L, M.; TONE, K. **Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and dea-solver software**. New York: Springer, 1999.

DARIO, C.; SIMAR, L. **Advanced robust and nonparametric methods in efficiency analysis: methodology and applications**. New York: Springer, 2007.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. How inefficient are simple asset-allocation strategies? **PAPERS SSRN**, 2005. DOI: <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.676997>. Acesso em: 20 mar. 2023.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, v. 7, n. 1, p. 1-26, jan./1979. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2958830>. Acesso em: 3 jul. 2021.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R, J. **An introduction to the bootstrap**. Boca Raton: Chapman & Hall, 1993.

EMROUZNEJAD, A.; YANG, G, L. A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. **Social-Economic Planning Sciences**, v. 61,

p. 4-8, março/2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2017.01.008>. Acesso em: 15 dez. 2021.

FAMA, E, F.; FRENCH, K, R. O modelo de precificação de ativos de capital: teoria e evidências. **Revista de Administração de Empresas**, v. 47, n. 2, p. 103-118, abr./jun. 2007. Disponível em: <http://www.fgv.br/rae/artigos/revista-rae-vol-47-num-2-ano-2007-nid-44800>. Acesso em: 02 dez. 2020.

FARRELL, M, J. The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 120, n. 3, p. 253-290, mar./1957. DOI: <https://doi.org/10.2307/2343100>. Acesso em: 20 set. 2021.

FERNANDES, A, R, J. **Análise comparativa de modelos de mensuração de desempenho e sua influência na captação líquida de fundos de investimento em ações no Brasil**, 2017, 148f. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUBD-ANYQTQ>. Acesso em: 22 nov. 2020.

FILGUEIRA, A.; CIDADE, M. **Inovar e crescer num ambiente em mudança**. Rio de Janeiro: ANBIMA, Texto para Discussão, 8º Congresso ANBIMA de Fundos de Investimentos, 2015. Disponível em: https://www.anbima.com.br/data/files/4E/01/8A/F3/9EB675106582A275862C16A8/Inovar-e-crescer-num-ambiente-em-mudanca_3_.pdf. Acesso em: 7 mar. 2021.

FONSECA, S, E. **Performance e eficiência de fundos de investimento: uma aplicação de indicadores tradicionais e DEA e SFA como estratégias de seleção de fundos**, 2018, 203f. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-B3FM8X>. Acesso em: 22 nov. 2020.

FONSECA, S, E.; FERNANDES, A, R.; CUNHA, C, L.; IQUIAPAZA, R, A. Fundos de investimento: performance aplicando modelo carhart e análise envoltória de dados. **Revista de Administração Contemporânea**, Rio de Janeiro, v. 22, n. 3, p. 355-379,

maio/jun. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2018170174>. Acesso em: 18 jun. 2020.

FONSECA JUNIOR, E, A. **Análise de eficiência para o mercado de fundos de investimento em ações no Brasil**, 2011, 33f. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/5752>. Acesso em: 22 nov. 2020.

FRIED, H, O.; LOVELL, C, A, K.; SCHMIDT, S, S. **The measurement of productive efficiency and productivity growth**. New York: Oxford University Press, 2008.

GAZANEO, G, L, V. **Influência do volume na performance dos fundos de investimento em ações no Brasil**, 2006, 36f. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia Empresarial), Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/6561>. Acesso em: 22 nov. 2020.

GIL, A, C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6, ed. São Paulo: Atlas, 2018.

INSTRUÇÃO CVM nº 555, de 17 de dezembro de 2014. *Dispões sobre a constituição, a administração, o funcionamento e a divulgação de informações dos fundos de investimento*, Comissão de Valores Mobiliários, Brasília, Brasil. Disponível em <http://www.cvm.gov.br/legislacao/instrucoes/inst555.html>. Acesso em: 9 mar. 2021.

JENSEN, M, C. The performance of mutual funds in the period 1965-1964. **The Journal of Finance**, [s, l.], v. 23, n. 2, p. 389-416, maio/1968. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00815.x>. Acesso em: 25 jun. 2020.

KNEIP, A.; SIMAR, L.; WILSON, P, W. Assymptotics and consistent bootstraps for DEA estimators in nonparametric frontier models. **Econometric Theory**, v. 24, n. 6, p. 1663-1697, dez./2008. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/20142561>. Acesso em: 08 jul. 2021.

_____. A computationally efficient, consistent bootstrap for inference with non-parametric DEA estimators. **Computational Economics**, v. 38, p. 483-515, nov./2011. DOI: <https://doi-org.ez54.periodicos.capes.gov.br/10.1007/s10614-010-9217-z>. Acesso em: 06 jul. 2021.

KOROSTELEV, A.; SIMAR, L.; TSYBAKOV, A. Efficient estimation of monotone boundaries. **The Annals of Statistics**, v. 23, n. 2, p. 476-489, abril/1995. DOI: <https://doi.org/10.1214/aos/1176324531>. Acesso em: 15 dez. 2021.

LAES, M, A. **Análise da performance dos fundos de investimentos em ações no Brasil**, 2010, 82f. Dissertação (Mestrado em Economia). Universidade de São Paulo, São Paulo. DOI: 10,11606/D,12,2010,tde,20122010-131658. Acesso em: 22 nov. 2020.

LAMB, J, D.; TEE, K, T. Resampling DEA estimates of investment fund performance. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 3, p. 834-841, dez./2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.07.015>. Acesso em: 6 dez. 2020.

LIN, R.; LI, Z. Directional distance based diversification super-efficiency DEA models for mutual funds. **Omega**, v. 97, p. 1-15, dez./2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.08.003>. Acesso em: 20 mar. 2021.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The Review of Economics and Statistics**, v. 47, n. 1, p. 13-37, fev./1965. DOI: <https://doi.org/10.2307/1924119>. Acesso em: 10 dez. 2020.

LIU, J.; LU, L.; LU, W-M.; LIN, B. A survey of DEA applications. **Omega**, v. 41, n. 5, p. 893-902, out./2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2012.11.004>. Acesso em: 15 dez. 2021.

LOPES, A, L, M.; CARNEIRO, M, L.; SCHEINDER, A, B. Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por data envelopment analysis – DEA. **Revista Gestão e**

Sociedade, v. 4, n. 9, p. 640-656, set./dez. 2010. DOI:
<https://doi.org/10.21171/ges.v4i9.794>. Acesso em: 15 dez. 2020.

LOVELL, C, A. **Production frontiers and productive efficiency**. In: Fried, H.; Lovell, C.; Schimdt, S. The measurement of productive efficiency: techniques and applications. New York: Oxford University Press, 1993.

MARCONI, M, A.; LAKATOS, E, M. **Metodologia científica**. 7, ed. São Paulo: Atlas, 2018.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, [s, l.], v. 7, n. 1, p. 77-91, mar./1952. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2975974>. Acesso em: 30 jun. 2020.

MELO, R, A.; MACEDO, M, A, S. Desempenho das carteiras de ações de fundos de investimento multimercado macro no Brasil no período de 2005 a 2010: uma análise focada na seletividade e no índice de eficiência da DEA. **Revista Finanças Aplicadas**, v. 1, p. 1- 21, jul./2012. Disponível em:
<http://www.financasaplicadas.net/index.php/financasaplicadas/article/view/49/66>. Acesso em: 19 dez. 2020.

MURTHI, B, P, S.; CHOI, Y, K.; DESAI, P. Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement: a non-parametric approach. **European Journal of Operational Research**, [s, l.], v. 98, n. 2, p. 408-418, abr./1997. DOI:
[https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00356-6](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00356-6). Acesso em: 22 jun. 2020.

OLIVEIRA FILHO, E, C. **Desempenho de fundos de investimento em ações brasileiros**, 2008, 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Administração de Empresas), Fundação Getúlio Vargas, São Paulo. Disponível em:
<http://hdl.handle.net/10438/2358>. Acesso em: 22 nov. 2020.

OLIVEIRA FILHO, B, G. **Fundos de investimento em ações no Brasil: métricas para avaliação de desempenho**, 2011, 161f. Tese (Doutorado em Administração),

Universidade de São Paulo, São Paulo. DOI: 10,11606/T,12,2012,tde-14052012-195614. Acesso em: 22 nov. 2020.

PINHEIRO, J, L. **Mercado de capitais**. 9, ed. São Paulo: Atlas, 2019.

ROLL, R. Ambiguity when performance is measured by the securities market line. **The Journal of Finance**, [s, l.], v. 33, n. 4, p. 1051-1069, set./1978. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2326939>. Acesso em: 26 jun. 2020.

ROSS, S, A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v. 13, n. 3, p. 341-360, dez./1976. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6). Acesso em: 20 dez. 2020.

SALOMON, F, L, R. **Avaliação da eficiência dos fundos de investimento em ações através da análise envoltória de dados (DEA) no mercado brasileiro**, 2015, 96f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá. Disponível em: <http://repositorio.unifei.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/229>. Acesso em: 22 nov. 2020.

SEIFORD, L, M.; ZHU, J. Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models. **INFOR: Information Systems and Operational Research**, v. 37, n. 2, p. 174-187, maio/1999. DOI: <https://doi.org/10.1080/03155986.1999.11732379>. Acesso em: 26 ago. 2022.

SHARPE, W, F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, set./1964. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>. Acesso em: 02 jan. 2021.

_____. Mutual fund performance. **The Journal of Business**, Chicago, v. 39, n. 1, p. 119-138, jan./1966. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2351741>. Acesso em: 25 jun. 2020.

_____. The sharpe ratio. **Journal of Portfolio Management**, v. 21, n. 1, p. 49-58, 1994. DOI: <https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501>. Acesso em: 02 fev. 2021.

SIMAR, L, S.; WILSON, P, W. Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models. **Management Science**, v. 44, n. 1, p. 49-61, jan./1998. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.44.1.49>. Acesso em: 25 jul. 2021.

_____. A general methodology for bootstrapping in non-parametric frontier models. **Journal of Applied Statistics**, v. 27, n. 6, p. 779-802, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1080/02664760050081951>. 25 jul. 2021.

SILVA, M, V, O. **A hipótese de eficiência de mercado e a performance dos fundos de ações brasileiros**, 2007, 179f. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia), Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4425>. Acesso em: 22 nov. 2020.

SILVERMAN, B, W. **Density estimation for statistics and data analysis**. London: Chapman and Hall, 1986.

TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, v. 25, n. 2, p. 65-86, fev./1958. Disponível em: <http://www.jstor.com/stable/2296205>. Acesso em: 30 jun. 2020.

TREYNOR, J, L. How to rate management of investment funds. **Harvard Business Review**, [s, l.], v. 43, n. 1, p. 63-75, jan./fev. 1965. Disponível em: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edb&AN=3866364&lang=pt-br&site=eds-live>. Acesso em: 25 jun. 2020.

WILSON, P., W. Detecting influential observations in data envelopment analysis. **Journal of Productivity Analysis**, v. 6, p. 27-45, abr./1995. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01073493>. Acesso em: 24 ago. 2022.

_____. FEAR: a software package for frontier efficiency analysis with R. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 42, n. 4, p. 247-254, dez./2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2007.02.001>. Acesso em: 20 jul. 2022.

ZANNINI, F, A, M.; FIGUEIREDO, A, C. As teorias de carteira de Markowitz e de sharpe: uma aplicação no mercado brasileiro de ações entre julho/95 e junho/2000. **Revista de Administração Mackenzie**, v. 6, n. 2, p. 38-64, abr./jun. 2005. DOI: <https://doi.org/10.1590/1678-69712005/administracao.v6n2p38-64>. Acesso em: 20 jun. 2021.

ZHOU, P.; ANG, B, W.; POH, K, L. A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies. **European Journal of Operational Research**, v. 189, n. 1, p. 1-18, ago./2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.04.042>. 01 jun. 2021.

APÊNDICE A

Quadro 2 – Fundo de Ações Índice Ativo

Código	Nome do Fundo
F1	Bahia Am II FIA
F2	Banrisul Índice FIA
F3	BB Acoes Ibovespa Ativo FICFI
F4	BB Acoes Multigestor Private Fc FI
F5	BB Cap Acoes FI
F6	BB Top Acoes Ibovespa Ativo FI
F7	Brad H Fc FIA Ibovespa Regimes de Prev
F8	Bradesco FIA Ibrx Multipatrocinado
F9	Bradesco FIA Salubre
F10	Bradesco H FI em Pibb - Acoes Ibrx-50
F11	Bram FIA
F12	Bram FIA Ibovespa Ativo
F13	Bram FIA Ibrx Ativo
F14	BTG Pactual Andromeda FIA
F15	CSHG Rio Ob FIA
F16	CSHG Verde Am Strategy II Fc FIA
F17	Elite FIA
F18	Fcopel FIA II
F19	FI Syagrus de Acoes
F20	FIA Aruba
F21	FIA Ip Selecao
F22	Geral Asset Long Term FIA
F23	Icatu Vanguarda Acoes Ibx FI
F24	Inter Selection Acoes Fc FIA
F25	Itau Acoes Sel Multifundos Fc
F26	Itau Fof Rpi Acoes Ibovespa Ativo Fc
F27	Itau Previdencia Ibrx FIA
F28	Itau Private Mult Acoes FICFI
F29	Mapfre FIA
F30	Meta Valor FIA
F31	Mirae Asset Ibov Ativo Gold FIA
F32	Mirae Asset Ibovespa Ativo FIA
F33	Oceana Valor Fc FIA
F34	Planner Advanced FIA
F35	Previ Gm FIA I
F36	Safra Lagrange I Fc FIA Bdr-Nivel I
F37	Sant Acoes Ibovespa Ativo Supremo Fc FI
F38	Santander Fc FI Onix Acoes
F39	Santander FI Ibovespa Ativo Instit Acoes
F40	Schroder Ibovespa Plus Fc FIA
F41	Sharp Ibovespa Ativo Feeder Fc FIA
F42	Telos Ibrx50 FIA
F43	Verde Am Strategy II Master FIA
F44	Wa Prev Ibrx Ativo Acoes FI

Fonte: Economática®

APÊNDICE B

Tabela 14 – Supereficiência para modelo VRS orientado ao produto

F	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	2,771	8,172	6,392	1,779	2,063	1,576	1,204	1,348	3,169	2,023
2	4,161	2,335	2,154	1,440	1,380	-Inf	-Inf	1,202	3,900	1,201
3	3,934	3,648	38,420	2,301	2,260	1,644	1,776	1,419	4,238	1,178
4	1,971	0,682	15,044	1,106	1,809	1,197	1,801	1,216	26,630	1,382
5	4,798	7,477	17415,9	2,322	1,967	1,797	1,706	1,317	1,257	-Inf
6	2,789	2,449	7,417	1,757	2,039	1,341	1,541	1,307	3,445	1,122
7	1,567	1,013	0,943	1,205	1,900	1,303	1,549	1,253	10,479	1,794
8	-Inf	0,998	1,056	1,015	1,436	1,056	-Inf	1,160	1,055	1,272
9	1,925	1,122	1,733	1,479	1,553	1,042	1,177	1,183	3,586	1,351
10	3,530	1,193	1,857	1,865	1,511	1,227	1,946	1,501	8,988	1,074
11	1,831	2,167	1,191	1,150	1,199	0,991	1,094	1,241	1,342	1,283
12	1,204	1,297	1,092	1,052	1,237	1,039	1,091	1,236	1,050	1,279
13	-Inf	-Inf	0,930	-Inf	1,288	0,977	1,106	-Inf	0,834	1,275
14	2,827	1,121	7,465	1,137	1,141	-Inf	1,589	1,063	4,319	1,971
15	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
16	2,982	1,007	1,512	2,037	1,285	1,345	1,650	1,585	2,949	1,400
17	10,120	1,089	2,985	1,723	1,254	1,028	0,744	1,301	0,778	1,149
18	1,679	10,817	11,704	1,572	1,952	1,357	1,008	1,450	1,659	1,274
19	0,983	1,186	-Inf	-Inf	-Inf	0,886	-Inf	-Inf	1718,7	1,730
20	1,796	1,214	1,441	1,467	1,462	0,973	1,188	1,141	-Inf	1,291
21	0,895	1,180	11,114	1,136	0,834	2,396	-Inf	-Inf	0,955	-Inf
22	1,417	1,906	17,714	0,835	4,626	1,361	1,431	1,377	8,366	1,111
23	1,738	1,128	1,230	1,172	1,457	1,441	1,252	1,161	4,095	1,090
24	19,029	-Inf	0,690	1,314	2,921	1,305	-Inf	0,898	2,479	1,769
25	1,799	0,845	1,312	1,527	1,573	1,306	1,871	1,317	1,380	1,563
26	1,756	1,013	1,148	1,236	1,753	1,236	1,647	1,184	9,179	1,585
27	1,030	0,976	0,986	1,158	1,259	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
28	1,981	0,756	0,977	1,053	1,725	1,408	1,625	-Inf	1,912	-Inf
29	5,484	1,466	4,243	1,956	0,903	0,880	-Inf	1,062	1,942	4,430
30	5,201	3,284	7,275	2,168	1,503	0,823	1,290	1,215	4,137	3,418
31	2,325	1,990	3,380	1,679	0,705	1,288	1,042	1,396	4,178	1,069
32	2,432	2,510	4,456	1,971	1,122	1,242	1,085	1,470	1,074	-Inf
33	1,594	16,399	1,321	1,504	1,186	0,917	1,409	1,175	11,566	0,919
34	0,523	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	1,619	1,812	0,891
35	1,145	1,009	1,068	1,002	1,198	1,084	1,617	1,271	3,544	1,117
36	3,238	1,178	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0,960	-Inf	6,916	2127,4
37	4,479	4,101	2,158	1,934	1,779	1,388	2,500	1,370	2,351	1,451
38	8,730	13,359	4,703	2,840	2,187	1,473	3,499	1,510	1,958	1,710
39	2,929	2,600	1,635	1,414	1,609	1,139	2,039	1,242	1,823	1,245
40	4,149	1,662	2,285	1,458	2,423	1,294	1,669	0,986	4,768	1,413
41	2,719	13,590	1,317	1,865	1,592	1,323	1,128	1,286	3,340	1,427
42	1,394	1,139	1,261	1,170	1,334	1,074	1,689	1,367	3,086	1,030
43	-Inf	34,646	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	1,243	-Inf	-Inf	-Inf
44	-Inf	-Inf	1,086	1,005	1,210	-Inf	1,532	1,349	2,361	1,133

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 15 – Supereficiência para modelo CRS orientado ao produto

F	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	4,481	9,290	6,993	3,001	2,787	2,206	1,327	1,717	3,213	2,146
2	5,025	2,710	2,211	1,625	1,394	1,204	1,429	1,249	3,994	1,208
3	7,877	4,484	40,101	4,011	3,139	2,296	2,013	1,684	4,241	1,258
4	2,198	0,896	17,032	1,283	1,906	1,331	1,876	1,401	26,653	1,386
5	9,076	9,744	19516,5	4,277	2,778	2,321	1,933	1,584	1,478	0,533
6	3,546	3,008	7,515	2,441	2,291	1,670	1,659	1,551	3,447	1,198
7	1,699	1,053	1,069	1,470	2,035	1,473	1,625	1,440	10,704	1,942
8	1,006	1,008	1,072	1,040	1,467	1,070	0,976	1,170	1,744	1,361
9	2,194	1,226	1,907	1,860	1,583	1,152	1,218	1,292	3,620	1,420
10	5,772	1,458	1,892	2,406	1,539	1,367	1,971	1,744	9,004	1,097
11	2,224	2,616	1,287	1,321	1,260	1,008	1,138	1,281	1,854	1,393
12	1,377	1,356	1,133	1,111	1,294	1,103	1,123	1,276	1,724	1,330
13	1,080	0,952	0,937	0,847	1,295	0,994	1,118	1,135	1,496	1,365
14	4,464	1,137	7,531	1,244	1,449	0,870	1,616	1,255	4,434	1,983
15	0,508	7,613	1,750	0,808	0,673	0,737	0,897	1,173	0,999	1,221
16	5,106	1,142	1,568	3,415	1,770	1,719	1,843	1,906	3,135	1,409
17	11,886	1,176	3,016	2,075	1,273	1,061	0,771	1,307	0,919	1,163
18	2,558	10,971	11,710	2,053	2,402	1,691	1,184	1,849	1,719	1,396
19	1,228	1,804	0,318	1398,6	0,575	1,103	0,808	1,246	2067,7	2,586
20	2,118	1,377	1,636	1,776	1,486	1,117	1,244	1,393	0,159	1,357
21	0,978	1,402	11,688	1,376	0,901	2,464	2,416	0,810	0,956	1,205
22	1,638	2,322	17,727	1,059	4,679	1,465	1,439	1,654	8,397	1,202
23	1,943	1,207	1,417	1,281	1,473	1,603	1,321	1,309	4,220	1,144
24	27,062	5,055	0,849	1,553	3,021	1,535	2404,8	0,922	2,483	1,793
25	2,705	0,923	1,316	2,078	2,038	1,610	2,045	1,515	1,395	1,588
26	1,989	1,062	1,196	1,516	1,934	1,459	1,789	1,452	9,561	1,615
27	1,067	0,994	1,030	1,227	1,301	0,522	0,613	0,765	4,390	0,789
28	2,793	0,864	1,003	1,262	1,901	1,580	1,700	0,595	1,931	0,937
29	9,559	1,572	4,520	3,749	0,965	0,929	0,857	1,260	1,987	4,808
30	9,818	3,611	7,753	3,376	2,203	1,354	1,586	1,634	5,053	3,912
31	3,659	2,039	3,412	1,840	0,741	1,421	1,057	1,701	4,327	1,120
32	3,753	2,551	4,568	2,383	1,145	1,560	1,193	1,800	1,128	0,574
33	2,570	20,737	1,366	2,567	1,529	1,096	1,538	1,344	11,920	0,961
34	0,535	1382,6	0,199	0,610	0,885	0,725	0,962	2,189	1,813	0,903
35	1,252	1,095	1,115	1,081	1,254	1,085	1,650	1,310	3,674	1,355
36	3,704	1,467	1,970	0,651	1,013	0,828	1,204	0,638	7,986	3708,
37	8,915	4,822	2,249	3,328	2,462	1,749	2,807	1,673	2,444	1,495
38	17,312	15,969	5,022	5,183	3,050	1,844	3,911	1,588	1,979	1,772
39	3,658	3,253	1,721	1,866	1,681	1,271	2,159	1,616	1,865	1,323
40	7,661	1,729	2,501	2,106	2,631	1,446	1,672	1,150	4,773	1,421
41	4,260	17,634	1,452	3,204	2,146	1,627	1,252	1,515	3,419	1,473
42	1,566	1,267	1,519	1,299	1,342	1,104	1,743	1,531	3,099	1,141
43	0,857	35,070	0,638	0,863	0,679	0,922	1,247	1,140	0,191	0,453
44	0,024	0,012	1,117	1,089	1,261	1,088	1,571	1,389	2,958	1,190

Fonte: Elaborado pelo autor

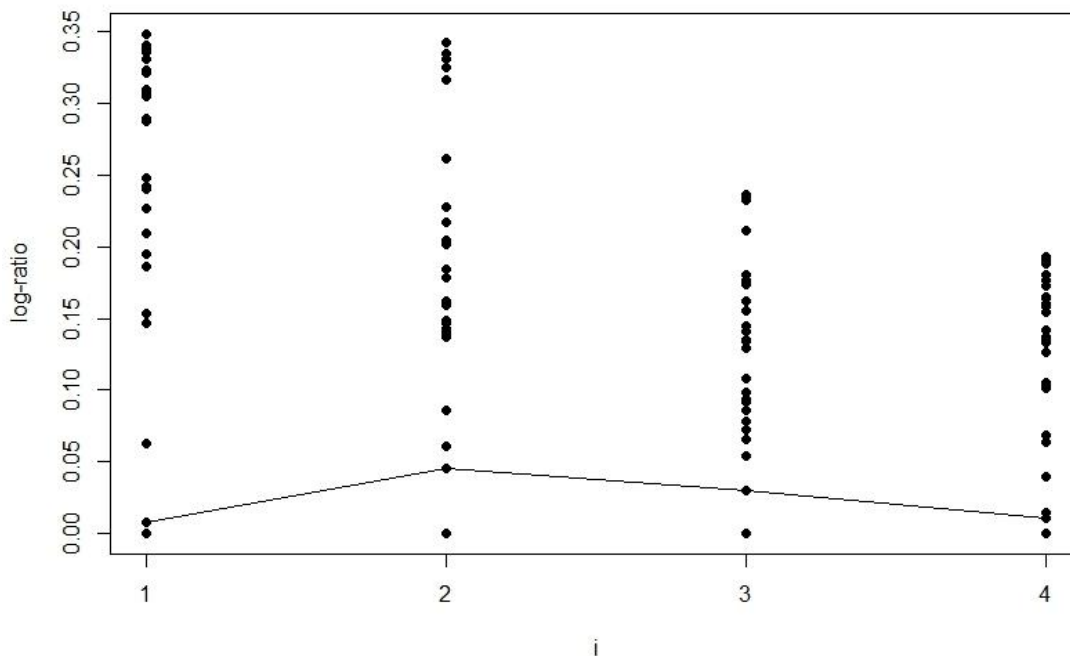
APÊNDICE C

Tabela 16 – *Outliers* para o ano de 2013

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	1			0,6576	
2	26	1		0,4357	
3	19	26	1	0,3016	
4	24	15	19	1	0,2053

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 2 – Verificação de *Outliers* em 2013



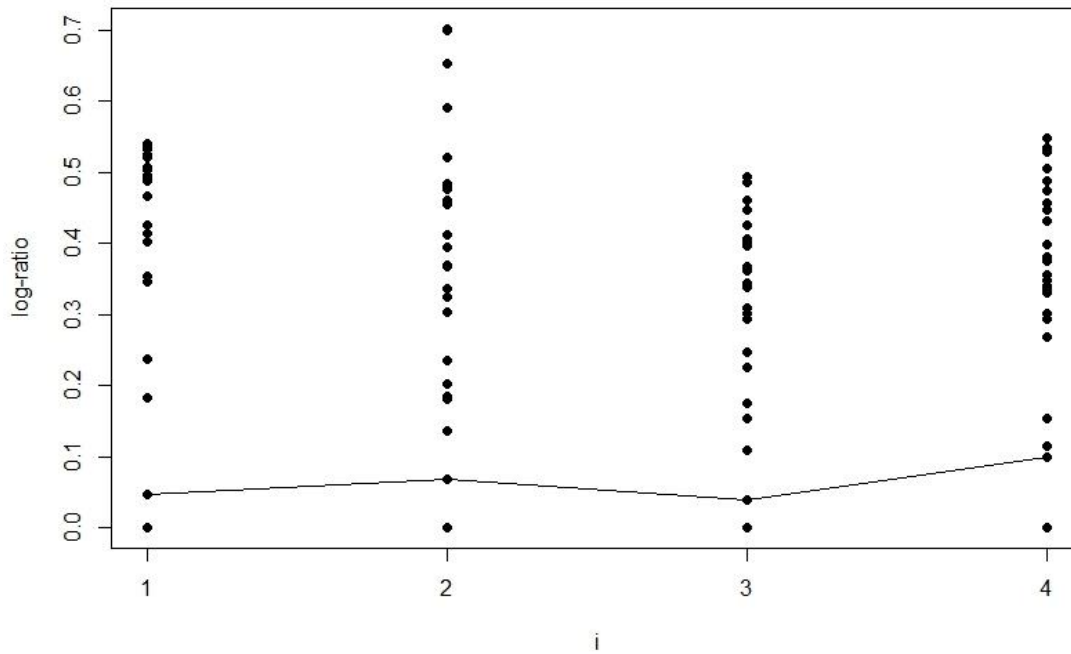
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 17 – *Outliers* para o ano de 2014

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	44			0,5708	
2	21	44		0,3702	
3	15	19	44	0,2178	
4	21	15	19	44	0,1263

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 3 – Verificação de *Outliers* em 2014



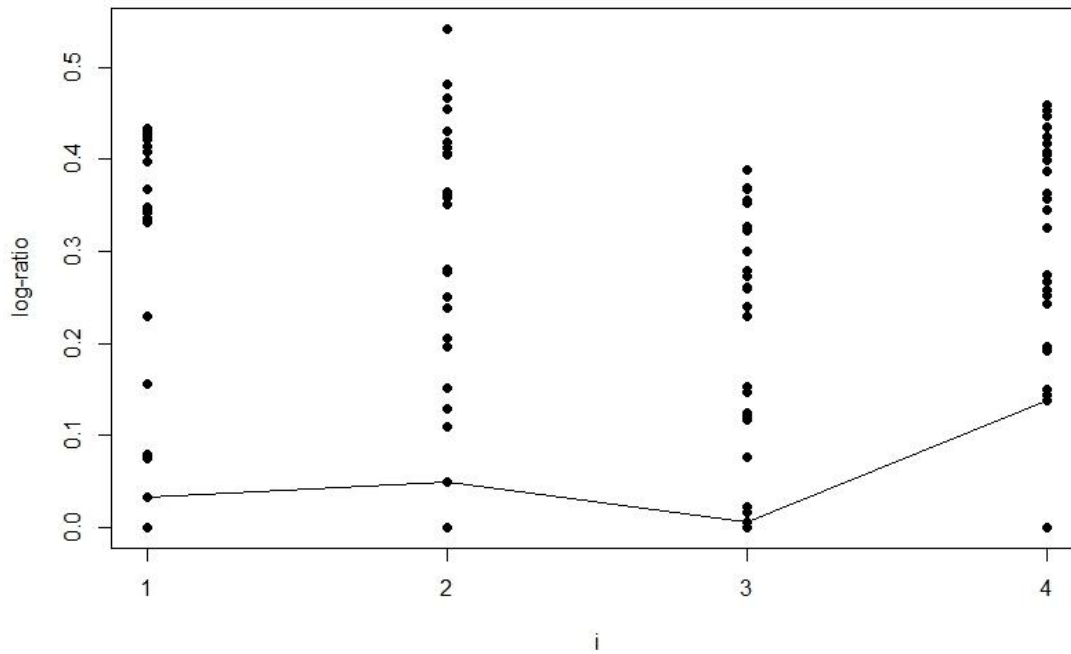
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 18 – *Outliers* para o ano de 2015

Quant,	Fundos Deletados				R(i)
1	15				0,6011
2	19	15			0,3434
3	26	21	19		0,2135
4	26	21	19	15	0,1173

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 4 – Verificação de *Outliers* em 2015



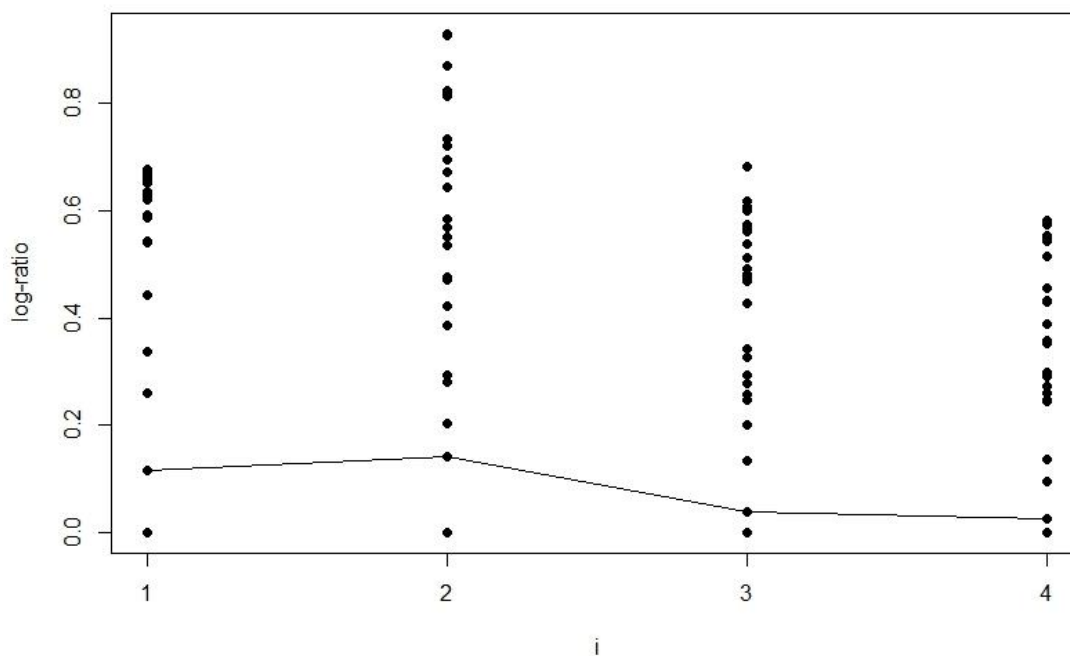
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 19 – *Outliers* para o ano de 2016

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	21			0,4752	
2	15	21		0,2390	
3	26	15	21	0,1376	
4	26	19	15	21	0,0818

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 5 – Verificação de *Outliers* em 2016



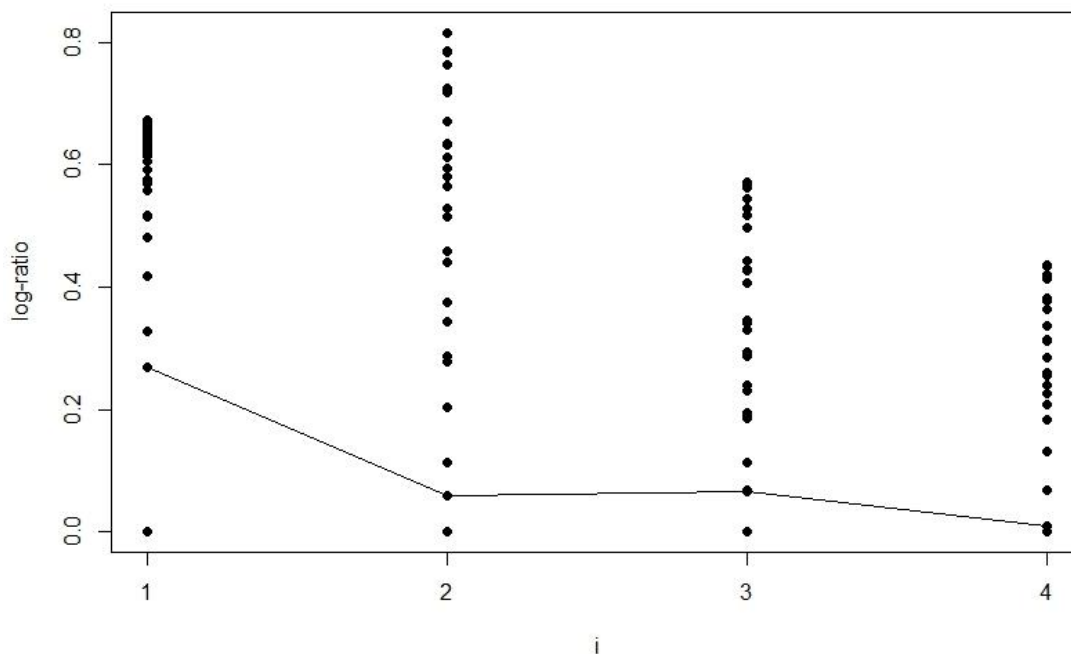
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 20 – *Outliers* para o ano de 2017

Quant,	Fundos Deletados				R(i)
1	21				0,4766
2	30	21			0,2804
3	30	15	21		0,1730
4	26	33	30	21	0,1115

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 6 – Verificação de *Outliers* em 2017



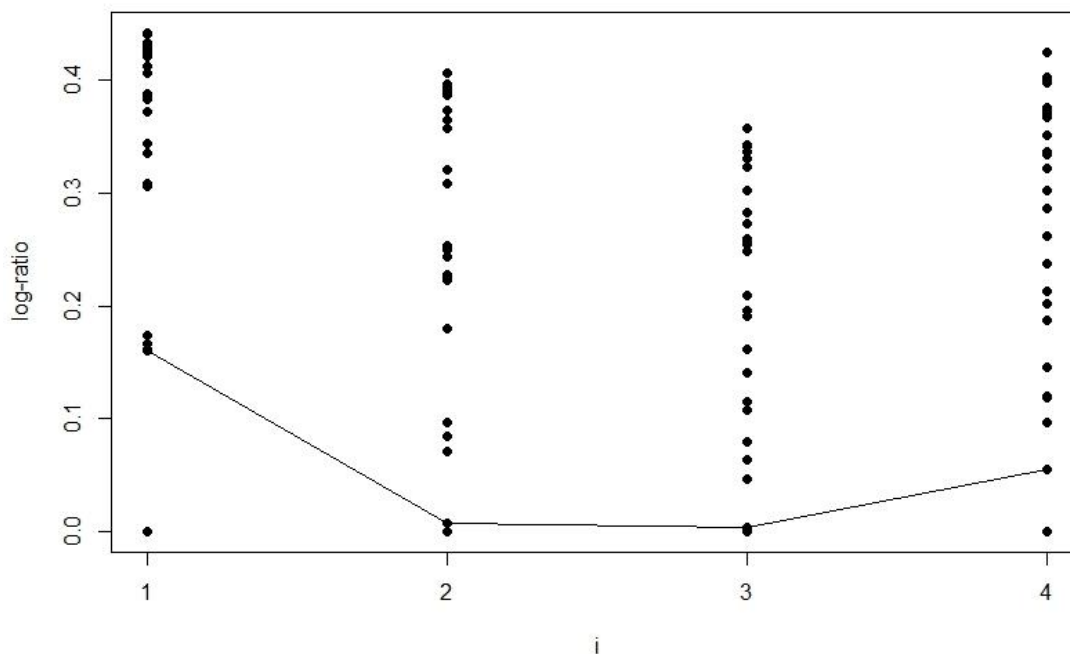
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 21 – *Outliers* para o ano de 2018

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	19			0,5939	
2	21	19		0,3804	
3	36	21	19	0,2368	
4	36	15	21	19	0,1363

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 7 – Verificação de *Outliers* em 2018



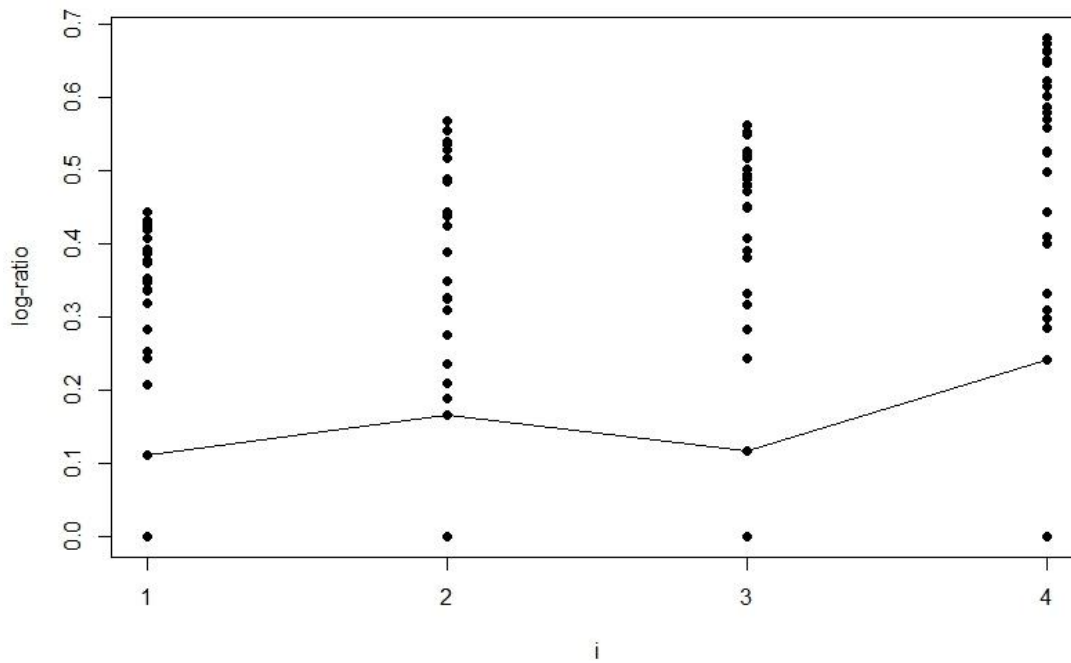
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 22 – *Outliers* para o ano de 2019

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	19			0,5950	
2	36	19		0,3560	
3	15	36	19	0,2111	
4	21	15	36	19	0,1251

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 8 – Verificação de *Outliers* em 2019



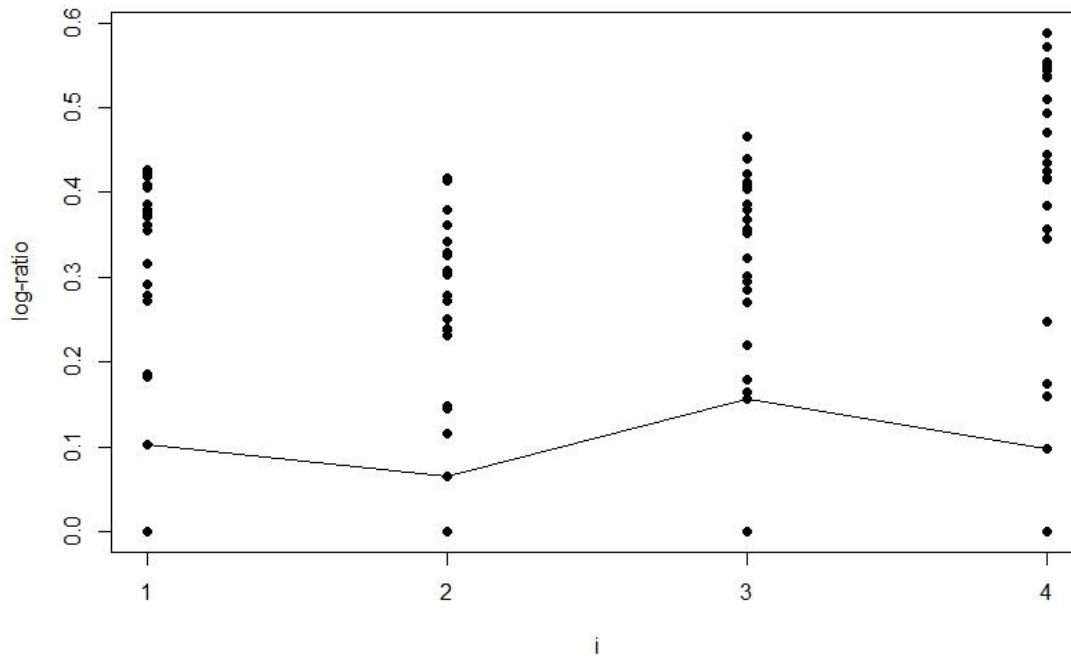
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 23 – *Outliers* para o ano de 2020

Quant,	Fundos Deletados				R(i)
1	21				0,6074
2	15	21			0,3836
3	19	15	21		0,2149
4	36	19	15	21	0,1167

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 9 – Verificação de *Outliers* em 2020



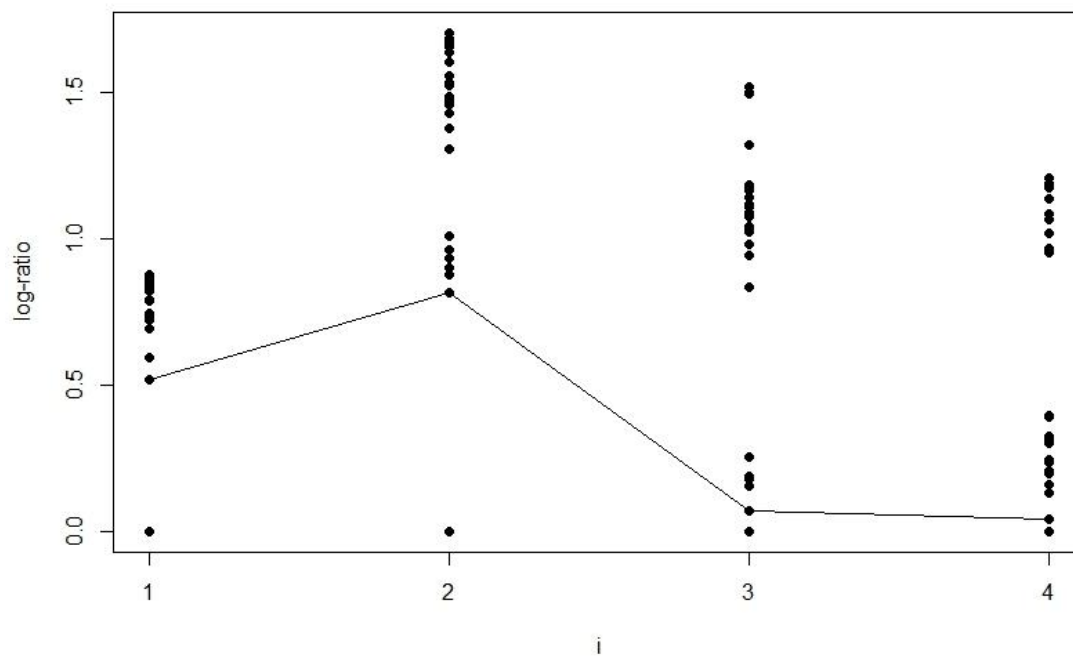
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 24 – *Outliers* para o ano de 2021

Quant,	Fundos Deletados			R(i)	
1	36			0,3848	
2	19	36		0,1187	
3	21	19	36	0,0772	
4	26	21	19	36	0,0509

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 10 – Verificação de *Outliers* em 2021



Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE D

Tabela 25 – Viés para o modelo CRS e VRS

<u>F</u>	<u>2012</u> <u>VRS</u>	<u>2013</u> <u>CRS</u>	<u>2014</u> <u>CRS</u>	<u>2015</u> <u>VRS</u>	<u>2016</u> <u>VRS</u>	<u>2017</u> <u>VRS</u>	<u>2018</u> <u>VRS</u>	<u>2019</u> <u>VRS</u>	<u>2020</u> <u>VRS</u>	<u>2021</u> <u>VRS</u>
1	-0,342	-0,509	-0,804	-0,135	-0,098	-0,055	-0,092	-0,052	-0,667	-0,057
2	-0,579	-0,401	-0,187	-0,214	-0,122	-0,141	-0,242	-0,188	-0,565	-0,085
3	-0,380	-0,352	-2,061	-0,148	-0,125	-0,073	-0,108	-0,047	-0,867	-0,038
4	-0,259	-0,182	-0,764	-0,290	-0,210	-0,069	-0,126	-0,084	-4,974	-0,114
5	-0,362	-0,848	-1915,	-0,091	-0,123	-0,050	-0,094	-0,052	-0,523	-0,244
6	-0,175	-0,299	-0,402	-0,141	-0,109	-0,065	-0,134	-0,044	-0,700	-0,037
7	-0,441	-0,130	-0,076	-0,126	-0,136	-0,085	-0,117	-0,068	-2,727	-0,063
8	-0,434	-0,131	-0,097	-0,165	-0,106	-0,054	-0,235	-0,128	-0,312	-0,088
9	-0,241	-0,142	-0,114	-0,123	-0,083	-0,045	-0,117	-0,061	-0,958	-0,054
10	-0,300	-0,130	-0,133	-0,262	-0,128	-0,075	-0,192	-0,116	-2,399	-0,079
11	-0,250	-0,311	-0,095	-0,085	-0,049	-0,050	-0,056	-0,076	-0,382	-0,059
12	-0,278	-0,260	-0,176	-0,170	-0,093	-0,063	-0,089	-0,157	-0,426	-0,160
13	-0,440	-0,172	-0,212	-0,291	-0,160	-0,059	-0,101	-0,184	-0,307	-0,066
14	-0,258	-0,086	-0,539	-0,195	-0,216	-0,141	-0,166	-0,068	-0,741	-0,172
15	-	-0,610	-0,118	-	-	-	-	-	-	-0,239
16	-0,286	-0,078	-0,093	-0,167	-0,064	-0,062	-0,161	-0,066	-0,609	-0,066
17	-2,399	-0,101	-0,310	-0,208	-0,112	-0,079	-0,223	-0,188	-0,349	-0,094
18	-0,133	-1,270	-0,529	-0,194	-0,113	-0,052	-0,062	-0,046	-0,257	-0,154
19	-0,320	-0,477	-	-	-0,209	-0,117	-	-	-508,2	-0,141
20	-0,178	-0,157	-0,087	-0,087	-0,079	-0,071	-0,053	-0,038	-0,558	-0,047
21	-	-0,243	-0,877	-0,190	-	-0,139	-	-	-	-0,238
22	-0,442	-0,161	-1,160	-0,286	-0,214	-0,109	-0,176	-0,081	-1,845	-0,061
23	-0,276	-0,165	-0,147	-0,173	-0,144	-0,101	-0,074	-0,042	-0,863	-0,046
24	-3,317	-0,292	-0,142	-0,242	-0,126	-0,139	-0,244	-0,184	-0,566	-0,099
25	-0,222	-0,096	-0,062	-0,204	-0,088	-0,070	-0,113	-0,060	-0,236	-0,102
26	-0,165	-0,122	-0,074	-0,100	-0,120	-0,087	-0,138	-0,059	-1,544	-0,075
27	-0,194	-0,115	-0,071	-0,113	-0,073	-0,138	-0,236	-0,189	-0,567	-0,245
28	-0,217	-0,199	-0,084	-0,287	-0,214	-0,091	-0,240	-0,183	-0,635	-0,234
29	-0,527	-0,144	-0,336	-0,120	-0,153	-0,116	-0,235	-0,075	-0,408	-0,240
30	-0,481	-0,215	-0,593	-0,178	-0,132	-	-0,059	-0,031	-0,472	-0,142
31	-0,366	-0,188	-0,557	-0,276	-0,198	-0,097	-0,134	-0,129	-1,015	-0,114
32	-0,350	-0,215	-0,758	-0,206	-0,138	-0,076	-0,132	-0,153	-0,359	-0,237
33	-0,139	-3,222	-0,103	-0,084	-0,107	-0,127	-0,107	-0,069	-1,614	-0,073
34	-0,414	-398,1	-0,392	-0,283	-0,208	-0,136	-0,238	-0,183	-0,717	-0,176
35	-0,211	-0,155	-0,117	-0,112	-0,068	-0,086	-0,147	-0,152	-1,081	-0,044
36	-0,477	-0,204	-0,156	-0,291	-0,210	-0,136	-	-	-1,182	-51,623
37	-0,439	-0,365	-0,112	-0,125	-0,087	-0,054	-0,146	-0,041	-0,303	-0,078
38	-0,707	-1,174	-0,302	-0,140	-0,104	-0,074	-0,262	-0,136	-0,576	-0,052
39	-0,198	-0,411	-0,079	-0,134	-0,063	-0,051	-0,131	-0,036	-0,340	-0,032
40	-0,341	-0,100	-0,254	-0,129	-0,154	-0,085	-0,202	-0,060	-0,884	-0,097
41	-0,182	-2,713	-0,122	-0,092	-0,073	-0,072	-0,073	-0,046	-0,473	-0,053
42	-0,206	-0,158	-0,101	-0,091	-0,077	-0,046	-0,094	-0,073	-0,864	-0,043
43	-0,448	-9,307	-0,318	-0,281	-0,211	-0,141	-0,171	-0,184	-0,569	-0,240
44	-0,448	-0,474	-0,071	-0,079	-0,055	-0,137	-0,094	-0,095	-0,788	-0,117

Observação: o símbolo “-“ corresponde aos fundos identificados como *outliers*

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE E

Tabela 26 – Composição da Carteira Clássica Otimizada

F	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	-	0,164	1,000	-	-	-	-	-	-	0,000
16	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
17	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	0,390	0,000
18	0,000	0,153	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
19	0,000	0,000	-	-	0,000	0,000	-	-	0,000	0,000
20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
21	-	0,140	0,000	0,000	-	0,070	-	-	-	0,000
22	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
24	0,000	0,543	0,000	0,000	0,000	0,930	0,000	0,000	0,610	0,000
25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
26	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
27	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
28	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
29	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000
30	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
31	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
32	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
33	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
34	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
35	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
36	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-	-	0,000	0,000
37	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
38	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
39	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
40	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
41	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
42	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
43	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
44	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
T	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Observação: o símbolo “-“ corresponde aos fundos identificados como *outliers*

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 27 – Composição da Carteira DEA Clássica Otimizada

F	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	-	-	-	-	-	-	0,000	-	-	-
2	-	-	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,000	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	0,000	-	0,000	0,000	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,000
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,814	-	0,000	-	-	-	-	-	-	-
8	0,000	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	0,000	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	0,000	0,000	0,000	0,000	-	0,000	-	0,000	0,000	-
14	-	-	-	-	0,000	0,000	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,000
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	1,000	1,000	0,390	-
18	-	-	-	-	-	-	0,000	-	-	-
19	0,000	-	-	-	0,000	0,000	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	0,000	-	-	0,000	-
21	-	-	-	-	-	0,070	-	-	-	0,000
22	0,186	-	-	1,000	0,000	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	0,000	-	0,000	0,930	0,000	0,000	0,610	-
25	-	0,000	-	-	0,000	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	0,000	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
28	-	1,000	1,000	0,000	1,000	-	0,000	0,000	-	0,000
29	-	-	-	-	0,000	0,000	0,000	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	0,000	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,000
33	-	-	-	-	0,000	0,000	-	-	-	0,000
34	0,000	-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-	-	0,000
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
36	-	-	-	0,000	0,000	-	-	-	-	-
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	0,000	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	0,000	-	0,000	0,000	0,000	0,000	-	0,000	0,000	0,000
44	0,000	0,000	-	-	-	0,000	-	-	-	-
T	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Observação: o símbolo “-” corresponde aos fundos não identificados como eficientes

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 28 – Composição da Carteira DEA com *Bootstrap* Otimizada

F	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
1	-	-	-	-	-	-	0,819	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	0,000	0,000	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,000
4	-	0,000	-	-	0,000	-	0,000	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,000
7	0,814	0,000	0,000	-	-	-	0,000	-	-	-
8	0,000	0,000	0,000	0,000	-	0,000	-	-	0,000	-
9	-	-	-	-	-	0,000	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,000
11	-	-	-	0,000	-	0,000	0,101	-	-	-
12	-	-	-	0,000	-	0,000	0,000	-	0,000	-
13	-	0,000	0,000	-	-	1,000	0,000	0,000	0,000	-
14	-	0,000	-	-	0,000	-	-	0,000	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	0,000	-	-	0,000	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	0,000	0,000	-	1,000	0,390	-
18	0,000	-	-	-	-	-	0,080	-	-	-
19	0,000	-	-	-	-	0,000	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	0,000	-	0,000	0,000	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	0,186	-	-	1,000	-	-	-	-	-	0,000
23	-	-	0,000	-	-	-	-	-	-	0,000
24	-	-	0,000	-	0,000	-	-	0,000	0,610	-
25	-	0,000	0,000	-	0,000	-	-	-	0,000	-
26	0,000	0,000	0,000	-	-	-	-	-	-	-
27	0,000	0,000	0,000	0,000	-	-	-	-	0,000	-
28	-	1,000	1,000	0,000	-	-	-	0,000	-	0,000
29	-	-	-	-	0,000	0,000	-	0,000	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	0,000	-	0,000	-	-	0,000
32	-	-	-	-	-	-	0,000	-	0,000	-
33	0,000	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	0,000	-	-	0,000	1,000	-	-	-	-	0,000
35	0,000	0,000	0,000	0,000	-	-	-	-	-	0,000
36	-	-	-	-	0,000	-	-	-	-	-
37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	-	-	-	-	-	-	-	0,000	-	-
41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
42	-	-	-	0,000	-	0,000	0,000	-	-	1,000
43	-	-	-	0,000	-	-	-	0,000	0,000	-
44	-	-	0,000	0,000	-	-	-	-	-	-
T	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>	<u>100%</u>

Observação: o símbolo “-” corresponde aos fundos não identificados como eficientes

Fonte: Elaborado pelo autor