



**ANÁLISE TERMOMECÂNICA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS
DE CASCA ISOPARAMÉTRICOS**

Pedro Filipe de Luna Cunha

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE TERMOMECÂNICA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS
DE CASCA ISOPARAMÉTRICOS**

Pedro Filipe de Luna Cunha

ORIENTADOR: Raúl Darío Durand Farfán

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO:

BRASÍLIA/DF: JUNHO - 2024.

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE TERMOMECÂNICA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS
DE CASCA ISOPARAMÉTRICOS**

PEDRO FILIPE DE LUNA CUNHA

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

APROVADO POR:

**Prof. Raúl Darío Durand Farfán, PhD. (ENC-UnB)
(Orientador)**

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, DSc. (UFPE)
(Examinador Externo)**

**Prof. Zenón José Guzmán Del Prado, PhD. (UFG)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, JUNHO DE 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

CUNHA, PEDRO FILIPE DE LUNA

Análise Termomecânica Utilizando Elementos Finitos de Casca Isoparamétricos [Distrito Federal] 2024.

xxiii, 147p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2024).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método dos Elementos Finitos

2.Análise termomecânica

3.Elementos de casca

4.Plasticidade

I.ENC/FT/UnB

II.Título (Doutor)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CUNHA, P. F. L. (2024). Análise Termomecânica Utilizando Elementos Finitos de Casca Isoparamétricos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-03A/24, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 147p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Pedro Filipe de Luna Cunha.

TÍTULO: Análise Termomecânica Utilizando Elementos Finitos de Casca Isoparamétricos.

GRAU: Doutor

ANO: 2024

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Pedro Filipe de Luna Cunha
SQN 210 Bloco B Apt. 224
70.862-020 Brasília – DF – Brasil.
pedro_flc@hotmail.com

AGRADECIMENTOS

Ao concluir esta jornada, gostaria de expressar minha gratidão aos que estiveram ao meu lado durante a elaboração desta tese de doutorado.

A Deus, por me dar refúgio nos momentos em que mais precisei.

Ao meu orientador professor Raúl Darío Durand Fárfan, pelo apoio incondicional que me permitiu obter um crescimento acadêmico relevante. Sua dedicação como orientador é algo incrível, e nossas conversas sempre trouxeram algo positivo para vida dentro e fora da UnB.

Ao Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da UnB e ao CNPq, por me possibilitar realizar meu doutorado. Aos professores do programa que ajudaram com seus conhecimentos dentro e fora da sala de aula.

À minha família, em especial aos meus pais Conceição e Luiz Carlos. A minha esposa Vitória, pelo amor, carinho e paciência. Aos meus amigos que me acompanharam em algum momento nessa jornada.

ANÁLISE TERMOMECÂNICA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS DE CASCA ISOPARAMÉTRICOS

Autor: Pedro Filipe de Luna Cunha

Orientador: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil

Brasília, junho de 2024

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia acoplada para a análise termomecânica, aplicando elementos finitos isoparamétricos específicos para cascas. Esses elementos são desenvolvidos por meio da formulação isoparamétrica direta, destinada a elementos de cascas planas e curvas, fundamentados na teoria de sólidos degenerados. O modelo constitutivo utilizado é baseado nas equações de plasticidade de von Mises, utilizando a notação de Mandel para facilitar a implementação eficaz das equações constitutivas tensoriais. As formulações desenvolvidas são detalhadas, visando uma compreensão aprofundada e sua aplicabilidade em futuras pesquisas. A validação do elemento finito proposto é realizada por meio de quatro exemplos da literatura com soluções analíticas. Para a abordagem termomecânica acoplada, a validação e comparação são feitas com outros quatro exemplos, dos quais dois possuem solução analítica e dois são modelados utilizando o software Abaqus. A verificação do modelo constitutivo é conduzida através de quatro exemplos adicionais: os dois primeiros baseados em resultados literários e os dois últimos modelados no software Amaru. Em todos os cenários, os resultados demonstram boa concordância com as soluções analíticas e com os dados obtidos por meio de softwares de elementos finitos. Finalizando, três estudos de caso são apresentados. O primeiro simula numericamente os resultados experimentais de temperatura e tensão para um vaso de pressão. O segundo aborda uma simulação hipotética para examinar uma seção de flare, considerando o efeito termomecânico aliado à não linearidade material (plasticidade), incluindo a verificação da tensão de von Mises ao longo do comprimento da estrutura sob diferentes níveis de temperatura. Finalmente, o último estudo de caso analisa um pilar submetido a incêndio, comparando os resultados obtidos pela modelagem computacional e os contidos na literatura. Conclui-se que a metodologia proposta, validada por meio de exemplos analíticos e estudos de caso, demonstrou ser eficaz na representação precisa de tensões e deformações sob condições de carga mecânica e térmica. O tratamento do efeito de drilling foi eficiente para os exemplos apresentados. A

utilização do modelo de plasticidade de von Mises, em conjunto com a notação de Mandel, facilitou a implementação computacional, permitindo simulações complexas com precisão e eficiência. Os resultados dos estudos de caso confirmaram a aplicabilidade da abordagem em diversos cenários, ressaltando sua utilidade para análises estruturais em ambientes severos.

Palavras chave: Elementos Finitos, análise termomecânica, elementos de casca, plasticidade.

THERMOMECHANICAL ANALYSIS USING ISOPARAMETRIC SHELL FINITE ELEMENTS

Author: Pedro Filipe de Luna Cunha

Supervisor: Raúl Darío Durand Farfán

Programa de Pós-graduação em Estrutura e Construção Civil

Brasília, June of 2024

ABSTRACT

This work introduces an integrated methodology for thermomechanical analysis, applying specific isoparametric finite elements for shells. These elements are developed through direct isoparametric formulation, aimed at both flat and curved shell elements, and are based on the theory of degenerated solids. The constitutive model used for these elements is founded on the von Mises plasticity equations, utilizing Mandel notation to facilitate the effective implementation of tensorial constitutive equations. The developed formulations are detailed extensively, aiming for deep understanding and applicability in future research. The validation of the proposed finite element is conducted through four examples from the literature that have analytical solutions. For the coupled thermomechanical approach, validation and comparison are done with another four examples, of which two have analytical solutions and two are modeled using Abaqus software. The verification of the constitutive model is conducted through four additional examples: the first two are based on literature results, while the last two are modeled in Amaru software. In all scenarios, the results demonstrate good agreement with the analytical solutions and with the data obtained through finite element software. In conclusion, three case studies are presented. The first numerically simulates experimental results of temperature and stress for a pressure vessel. The second addresses a hypothetical simulation to examine a flare section, considering the thermomechanical effect combined with material nonlinearity (plasticity), including the verification of von Mises stress along the length of the structure under different temperature levels. Finally, the last case study analyzes a pillar subjected to fire, comparing the results obtained through computational modeling with those found in the literature. It is concluded that the proposed methodology, validated through analytical examples and case studies, proved effective in accurately representing stresses and deformations under mechanical and thermal loads. The treatment of the drilling effect was efficient for the presented examples. The use of the von Mises plasticity model, combined with

Mandel notation, facilitated computational implementation, allowing complex simulations with precision and efficiency. The case study results confirmed the approach's applicability in various scenarios, highlighting its usefulness for structural analyses in severe environments.

Keywords: Finite Elements, thermomechanical analysis, shell elements, plasticity.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE FIGURAS	xvi
LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES	xvii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo Geral	3
1.2 Abrangência e Limitações	3
1.3 Metodologia	4
1.4 Organização do trabalho	4
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1 Estado da arte - Análises termomecânicas em cascas	6
2.2 Estado da arte - Formulação degenerada em cascas	8
2.3 Estado da arte - Produções do PECC	9
2.4 Definições Gerais e Classificação das Cascas	11
2.4.1 Superfície de curvatura gaussiana	11
2.4.2 Superfície planificável ou não planificável	12
2.4.3 Geometria de superfície	13
2.4.4 Superfície combinada	15
2.4.5 Placas dobradas	15
2.5 Comportamento Estrutural das Cascas	16
2.6 Teoria de Cascas	17
2.6.1 Teoria Clássica de Casca	17
2.6.2 Teoria de Membrana	19
2.6.3 Teoria de Flexão	20
2.6.4 Teoria de Sanders-Koiter	24
2.6.5 Teoria de Donnel-Mushrati-Vlasov (DMVT)	26
2.6.6 Teoria de Casca de Primeira Ordem (FSDT)	27
2.6.7 Teoria de Casca de Alta Ordem (HSDT)	29
2.7 Modelos Constitutivos Para o Aço	31
2.7.1 Modelo elastoplástico perfeito	32
2.7.2 Modelo Elasto-viscoplástico	33
2.7.3 Modelo Viscoelástico	36
2.8 Efeitos Térmicos em Estruturas do Tipo Casca	38

3	EMBASAMENTO TEÓRICO	40
3.1	Formulações em Elementos Finitos Para Placas e Cascas	40
3.1.1	Elementos de Placa	41
3.1.2	Elementos Planos Para Cascas Com Esforço Cortante Imposto	46
3.1.3	Elementos Curvos	51
4	METODOLOGIA	54
4.1	Análise Termomecânica Acoplada	54
4.1.1	Equilíbrio Mecânico	54
4.1.2	Relações de tensão, temperatura, deslocamento e deformação	55
4.1.3	Elementos finitos na equação do equilíbrio mecânico	57
4.1.4	Conservação de energia térmica	57
4.1.5	Elementos Finitos na equação da conservação de energia térmica	58
4.1.6	Forças e energia internas	59
4.1.7	Integração no tempo	60
4.2	Formulação para cascas curvas isoparamétricas	60
4.2.1	Coordenadas Locais	61
4.2.2	Componentes de Deformação	63
4.2.3	Controle do <i>drilling</i>	66
4.2.4	Matriz de rigidez	68
4.3	Plasticidade de Von Mises para elementos de casca	69
4.3.1	Tensor constitutivo elastoplástico	69
4.3.2	Atualização da tensão	70
4.3.3	Equações matriz-vetor usando a notação de Mandel	71
4.3.4	Equações matriciais para o elemento de casca isoparamétrico	72
4.4	Relação entre a temperatura e as Propriedades Mecânica do Aço	74
4.5	Ferramentas Utilizadas	76
5	VALIDAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PROPOSTAS	77
5.1	Validação da Elemento de Casca Curvo Isoparamétrico	77
5.1.1	Coberta Cilíndrica sob Força Concentrada	77
5.1.2	Coberta de Scordelis-Lo	80
5.1.3	Cúpula esférica sob pressão perpendicular à superfície	83
5.1.4	Anel comprimido	85
5.2	Validação da Formulação Termomecânica Acoplada	88
5.2.1	Fluxo Unidimensional de Temperatura	88
5.2.2	Fluxo Radial de Temperatura	93
5.2.3	Placa Sob Várias Condições de Contorno	97
5.2.4	Coberta Cilíndrica Sob Efeito da Temperatura	105
5.3	Validação da formulação de Von mises para elementos de casca	109

5.3.1	Viga elastoplástica em balanço	109
5.3.2	Placa perfurada	111
5.3.3	Tubo sob deslocamentos prescritos	114
5.3.4	Tubo sob temperatura prescrita	117
6	ESTUDOS DE CASO	121
6.1	Análise da tensão térmica transiente de um vaso de pressão	121
6.2	Simulação Termomecânica de uma estrutura do tipo Flare	126
6.3	Análise termomecânica de um pilar submetido a incêndio	131
7	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	136
7.1	CONCLUSÕES	136
7.1.1	Com relação ao elementos de casca isoparamétrico	136
7.1.2	Com relação a formulação termomecânica acoplada	137
7.1.3	Com relação ao modelo de plasticidade de von Mises para o aço	138
7.1.4	Com relação aos estudos de caso	139
7.2	RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	140
	REFERÊNCIAS	147

LISTA DE TABELAS

2.1	Alguns estudos de elementos de casca isoparamétricos degenerados.	8
5.1	Propriedades geométricas e do material para cobertura cilíndrica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger e Flügge.	78
5.2	Propriedades geométricas e do material para cobertura de Scordelis-Lo.	81
5.3	Propriedades geométricas e do material da calota esférica.	84
5.4	Propriedades geométricas e do material do anel comprimido.	86
5.5	Propriedades geométricas e do material da placa em estudo.	91
5.6	Propriedades geométricas e do material do cilindro em estudo.	94
5.7	Propriedades geométricas e do material para análise da placa sob várias condições de contorno.	97
5.8	Propriedades geométricas e do material da cobertura de Scordelis-Lo com campo de temperatura aplicado.	106
5.9	Propriedades geométricas e mecânicas da viga elastoplástica em balanço. . . .	110
5.10	Propriedades geométricas e mecânicas da placa perfurada.	113
5.11	Propriedades geométricas e mecânicas para análise do tubo sob deslocamentos prescritos.	115
5.12	Propriedades geométricas e do material para o tubo sob temperatura prescrita. .	118
6.1	Dimensões e propriedades utilizadas para análise do cilindro de aço inoxidável.	123
6.2	Dimensões e propriedades utilizadas para análise do flare.	128
6.3	Propriedades utilizadas para análise do pilar submetido a incêndio.	133

LISTA DE FIGURAS

2.1	Superfície gaussiana.	12
2.2	Superfície planificável (a) e não planificável (b).	13
2.3	Superfície de revolução.	14
2.4	Superfície de translação.	14
2.5	Superfícies normatizadas.	15
2.6	Superfície combinada.	15
2.7	Placas dobradas.	16
2.8	Elemento infinitesimal definido por dois pares de planos normais a superfície média da casca.	20
2.9	Deformação do elemento de casca.	22
2.10	Superfície de escoamento de Von Mises.	33
2.11	Teste de tensão uniaxial em barras metálicas sujeitas a elevadas temperaturas. Adaptada de De Souza Neto et al. (2008).	34
2.12	Comportamento da tensão e deformação ao longo do tempo sob o efeito da fluência e recuperação.	37
2.13	Comportamento da tensão e deformação ao longo do tempo sob o efeito da relaxação e recuperação.	38
3.1	Deformação da placa e campo de deslocamento. Adaptada de Oñate (2013).	42
3.2	Deformação da placa e campo de deslocamento considerando a Teoria de Reissner-Mindlin. Adaptada de Oñate (2013).	45
3.3	Campos de deslocamentos para um elemento no plano médio deformado. Adaptada de Oñate (2013).	47
3.4	Aplicação de elementos curvos em diferentes superfícies de cascas.	51
3.5	Campo de deslocamentos para o elemento de casca. Adaptada de Solheiro (2017).	52
3.6	Cascas com espessuras uniforme e variáveis. Adaptada de Solheiro (2017).	52
3.7	Tipos usuais de elementos finitos curvos de casca. Adaptada de Solheiro (2017).	53
4.1	Elementos de casca com 8, 9 e 12 nós, respectivamente, incluindo os graus de liberdade locais e globais.	61
4.2	Campo de deslocamentos para casca isoparamétrica.	63
4.3	Variação da tensão-deformação para diferentes níveis de temperatura no aço. Adaptada de Poh (2001).	74
5.1	Coberta cilíndrica.	78
5.2	Validação do elemento de casca (coberta cilíndrica).	79

5.3	Coberta cilíndrica deformada (malha 32x32).	80
5.4	Coberta de Scordelis-Lo.	80
5.5	Resultados obtidos para Coberta de Scordelis-Lo.	82
5.6	Estrutura deformada - Coberta de Scordelis-Lo.	82
5.7	Comparação do parâmetro de penalidade do drilling $\bar{\kappa}$ para o exemplo de Scordelis-Lo.	83
5.8	Calota esférica.	84
5.9	Calota esférica - Resultados.	85
5.10	Calota esférica - Campo de deslocamentos da estrutura deformada.	85
5.11	Anel comprimido.	86
5.12	Anel comprimido - Domínio utilizado na modelagem.	87
5.13	Anel comprimido - Deslocamento vertical do ponto A.	87
5.14	Anel comprimido - Campo de deslocamentos da estrutura deformada.	88
5.15	Problema termomecânico unidimensional.	89
5.16	Discretização da malha. Adaptada de Carter e Booker (1989).	90
5.17	Campo de temperatura da placa para $t = 13547,80$ segundos.	91
5.18	Isocronas de temperatura para o fluxo unidimensional. Reposta analítica x numérica.	92
5.19	Comparação do deslocamento vertical da superfície livre em função do tempo. Reposta analítica x numérica.	92
5.20	Problema termomecânico em um cilindro. Adaptada de Carter e Booker (1989).	93
5.21	Discretização da malha para o exemplo do cilindro. Adaptada de Carter e Booker (1989).	95
5.22	Isocronas de temperatura para o fluxo em 1/4 de cilindro. Reposta analítica x numérica.	95
5.23	Comparação do deslocamento radial em função do tempo. Reposta analítica x numérica.	96
5.24	Campo de temperatura na estrutura deformada - 1/4 do cilindro.	96
5.25	Análise termomecânica acoplada para placa sob várias condições de contorno.	98
5.26	Placa deformada com campo de temperatura para um tempo final de 20.000 segundos.	98
5.27	Comparação dos valores para o deslocamento horizontal ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	99
5.28	Comparação dos valores para o deslocamento vertical ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	100

5.29	Comparação dos valores para a temperatura ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	101
5.30	Comparação dos valores para o deslocamento horizontal ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	102
5.31	Comparação dos valores para o deslocamento vertical ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	102
5.32	Comparação dos valores para a temperatura ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.	103
5.33	Comparação dos resultados do deslocamento horizontal do nó central x tempo.	104
5.34	Comparação dos resultados do deslocamento vertical do nó central x tempo. . .	104
5.35	Comparação dos resultados da temperatura do nó central x tempo.	105
5.36	Coberta de Scordelis-Lo com campo de temperatura aplicado.	106
5.37	Coberta de Scordelis-Lo - Resultados com campo de temperatura aplicado. . .	107
5.38	Coberta de Scordelis-Lo - Estrutura deformada.	108
5.39	Coberta de Scordelis-Lo - Campo de temperatura.	108
5.40	Viga elastoplástica em balanço.	109
5.41	Viga elastoplástica em balanço - Estudo do desempenho de elementos de casca utilizando a plasticidade de von Mises.	111
5.42	Placa perfurada.	112
5.43	Placa perfurada - Deslocamento vertical ao longo do eixo z	113
5.44	Placa perfurada - Tensão de von Mises ao longo do eixo x	114
5.45	Placa perfurada - Distribuição da tensão de von Mises para um quarto da placa.	114
5.46	Tubo sob deslocamentos prescritos.	115
5.47	Tubo sob deslocamentos prescritos - Campo de tensões de von Mises.	116
5.48	Tubo sob deslocamentos prescritos - Tensão de von Mises nos pontos de integração da extremidade à direita.	116
5.49	Tubo sob temperatura prescrita.	117
5.50	Função da temperatura.	117
5.51	Tensão de von Mises (σ_{VM}) ao longo do comprimento do tubo.	119
5.52	Tubo sob temperatura prescrita: Campo de tensão de von Mises.	119
5.53	Temperatura ao longo do comprimento do tubo.	120
5.54	Tubo sob temperatura prescrita: Campo de temperatura (u_t) no tempo final da análise.	120
6.1	Imagem gerada de um vaso de pressão cilíndrico em ambiente industrial. . . .	121

6.2	Estudo de caso proposto - Ensaio experimental de um cilindro de paredes finas. Adaptada de Júnior et al. (2023).	122
6.3	Discretização da malha para elementos de casca e sólidos, respectivamente.	124
6.4	Variação da temperatura na parede externa do cilindro ao longo do tempo.	125
6.5	Análise transiente da tensão de von Mises na parede externa do tubo para uma temperatura de $70^{\circ}C$.	126
6.6	Imagem gerada de um flare - Estudo de caso proposto.	127
6.7	Variação da condutividade térmica do aço inoxidável 310 ao longo da temperatura.	128
6.8	Condições de contorno para o estudo do flare.	129
6.9	Tensão de von Mises ao longo do comprimento L para três níveis de temperatura.	130
6.10	Campo de tensão de von Mises para $u_t = 1000 + 0,1t$.	130
6.11	Campo de temperatura para $u_t = 1000 + 0,1t$.	131
6.12	Esquema do pilar ensaiado. Fonte: Costa (2013).	132
6.13	Dimensões do pilar ensaiado. Adaptado de Costa (2013).	132
6.14	Curva de incêndio padrão pela ISO 834 (2014) e a obtida por Costa (2013).	133
6.15	Distribuição da temperatura para um tempo de análise de 450 segundos, utilizando a curva padrão de incêndio.	134
6.16	Resultados do deslocamento axial em função do tempo para o pilar submetido a incêndio.	134

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

Abreviaturas

AISI American Iron and Steel Institute

ANDES Assumed Natural Deviatoric Strain

API American Petroleum Institute

ASME American Society of Mechanical Engineers

CSSE Consistent Simetrizable Self-equilibrated

CST Constant Strain Triangle

DKT Elemento triangular baseado na Discrete Kirchhoff Theory

DMVT Teoria de Donnell-Mushtari

FSDT Teoria de Casca de Primeira Ordem

Hex20 Elemento hexaédrico de 20 nós

HSDT Teoria de Casca de Alta Ordem

ISO International Organization for Standardization

LBB Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi

MEF Método dos Elementos Finitos

MZC Elemento de placa de Melosh, Zienkiewicz e Cheung

NBR Norma Brasileira

PECC Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

QLQL Elemento quadrilateral de 16 nós

QLLL Elemento quadrilateral de 4 nós e um campo de cisalhamento linear

Quad4 Elemento quadrilateral de 4 nós

Quad8 Elemento quadrilateral de 8 nós

RTD Detector de Temperatura por Resistência

TLQL Elemento triangular de placa Reissner-Mindlin Quadrático/Linear

Tri3 Elemento triangular de 3 nós

Tri6 Elemento triangular de 6 nós

Símbolos do alfabeto grego

α Coeficiente de dilatação térmica

α_s Fator de correção do cisalhamento

β Tensão térmica

$\delta \mathbf{a}^i^{(e)}$ Vetor de deslocamentos virtuais

δ Delta de Kronecker

ϵ_e Componente elástica do vetor de deformação

ϵ_p Componente plástica do vetor de deformação

ϵ_s Taxa de sensibilidade

ϵ_v Deformação volumétrica

ϵ_x Deformação axial na direção x

ϵ_{x0} Deformação unitária na superfície média

$\epsilon_{x'}, \epsilon_{y'}, \epsilon_{z'}$ Componentes de deformação normal em coordenadas locais

$\epsilon_{x'y'}, \epsilon_{x'z'}, \epsilon_{y'z'}$ Componentes de deformação de cisalhamento em coordenadas locais

ϵ_y Deformação axial na direção y

ϵ_θ Deformação circunferencial

$\boldsymbol{\epsilon}$ Vetor de deformação

$\boldsymbol{\xi}$ Tensor de deformação de segunda ordem

ζ Coordenadas paramétricas

η Coordenadas paramétricas

θ_d Grau de liberdade do drilling

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ Rotações ao redor dos eixos x , y , e z

$\theta_{x'}, \theta_{y'}$	Rotações ao redor dos eixos x' e y'
$\bar{\kappa}$	Parâmetro de controle do grau de liberdade do drilling
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico
μ	Parâmetro de viscosidade
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coordenadas paramétricas
ρ	Densidade do material
$\sigma_{x'}$	Componente de tensões normal na direção x'
$\sigma_{y'}$	Componente de tensões normal na direção y'
$\sigma_{x'z'}, \sigma_{y'z'}, \sigma_{z'}$	Componentes de tensões de cisalhamento
σ_x	Tensão normal na direção x
σ_y	Tensão normal na direção y
σ_z	Tensão normal ao plano médio
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano xy
τ_{yz}	Tensão de cisalhamento no plano yz
ϕ_x	Rotação da seção transversal em torno do eixo y
ϕ_y	Rotação da seção transversal em torno do eixo x
χ_x	Variação da curvatura da superfície média
χ_y	Torção da superfície média

Símbolos do alfabeto latino minúsculo

a, b	Vetores tangentes à superfície da casca
$\dot{\mathbf{b}}$	Taxa de forças de corpo
c_v	Calor específico
dS	Diferencial de área
dV	Diferencial de volume

f	Função de escoamento
f_u	Tensão de ruptura
f_y	Resistência ao escoamento do material
k	Condutividade térmica do material
\mathbf{k}_{bij}	Matriz de rigidez dos esforços de flexão
\mathbf{k}_{sij}	Matriz de rigidez dos esforços cortantes
$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$	Vetores de cossenos diretores
l_x, l_y, l_z	Componentes do vetor \mathbf{l}
m_x, m_y, m_z	Componentes do vetor \mathbf{m}
n_x, n_y, n_z	Componentes do vetor \mathbf{n}
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície
n_{ip}	Número de pontos de integração
r_x	Raio de curvatura principal no plano xz
r_y	Raio de curvatura principal no plano yz
q	Tensão equivalente de von Mises
$\mathbf{q}_i^{(e)}$	Vetor de forças externas
q_x	Carga distribuída na direção x
q_y	Carga distribuída na direção y
q_z	Carga distribuída na direção z
\mathbf{s}	Vetor de tensões desviadoras
\mathbf{s}	Tensor de tensões desviadoras
th	Espessura da casca
\mathbf{t}	Superfície tracionada
\mathbf{u}^*	Vetor com as componentes dos deslocamentos virtuais
u_x, u_y, u_z	Deslocamentos nas direções x, y, e z

$u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ Deslocamentos nas direções x' , y' , e z'
 \mathbf{u}'_r Vetor de deslocamentos relativo à superfície neutra da casca
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ Vetores alinhados às coordenadas x' , y' , e z'
 w Deslocamento vertical dos pontos no plano médio
 w_i Peso no ponto de Gauss i
 x, y, z Coordenadas globais
 \mathbf{x} Vetor ponto em coordenadas globais
 \mathbf{x}_0 Ponto de referência arbitrário
 \mathbf{x}'_0 Ponto de referência arbitrário em coordenadas nodais
 x', y', z' Coordenadas locais

Símbolos do alfabeto latino maiúsculo

\mathbf{B} Matriz deformação-deslocamento em coordenadas globais
 \mathbf{B}' Matriz deformação-deslocamento em coordenadas locais
 \mathbf{B}'_i Submatriz de \mathbf{B}' com componentes relativos ao nó i
 \mathbf{B}_{bi} Matriz deformação-deslocamento para os esforços de flexão
 \mathbf{B}_{si} Matriz deformação-deslocamento para os esforços cortantes
 \mathbf{B}_θ Matriz térmica de deformação-deslocamento
 D Rigidez à flexão
 \mathbf{D} Matriz constitutiva
 $\underline{\mathbf{D}}$ Tensor constitutivo
 $\hat{\mathbf{D}}$ Matriz constitutiva para materiais homogêneos
 \mathbf{D}_e Matriz constitutiva elástica
 \mathbf{D}_{ep} Matriz constitutiva elastoplástica
 $\underline{\mathbf{D}}_{ep}$ Tensor constitutivo elastoplástico
 $\hat{\mathbf{D}}_b$ Matriz constitutiva para os componentes de flexão

$\hat{\mathbf{D}}_s$	Matriz constitutiva para os componentes de cisalhamento
E	Módulo de elasticidade ou Módulo de Young
G	Módulo de elasticidade transversal
H	Modelo de endurecimento
$H(t)$	Função degral unitária
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{I}_2	Matriz de identidade quadrada 2x2
$\mathbf{I}^{(4)}$	Tensor identidade de quarta ordem
J	Inverso do módulo de elasticidade
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana para a transformação do sistema xyz para o sistema $\xi\eta$
\mathbf{J}'	Matriz Jacobiana para a transformação do sistema $x'y'z'$ para o sistema $\xi\eta\zeta$
J_2	Tensor desviador
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez do drilling
M_x	Momento fletor na direção x
M_{xy}	Momento torçor no plano xy
M_y	Momento fletor na direção y
M_{yx}	Momento torçor no plano yx
\mathbf{N}	Vetor das funções de forma
N_x	Força normal por unidade de comprimento na direção x
N_{xy}	Força de cisalhamento por unidade de comprimento no plano xy
N_y	Força normal por unidade de comprimento na direção y
N_{yx}	Força de cisalhamento por unidade de comprimento no plano yx
\mathbf{N}	Vetor com valores das funções de forma
\mathbf{Pd}	Matriz de projeção deviadora

$\underline{\mathbf{P}}_d$	Tensor de projeção deviadora
\mathbf{R}	Matriz de rotação do sistema xyz para o sistema $x'y'z'$
\mathbf{R}_θ	Matriz de rotação para deslocamentos e rotações
$\bar{\mathbf{R}}_\theta$	Matriz de rotação para o drilling
Q_x	Esforço cortante na direção x
Q_y	Esforço cortante na direção y
T	Temperatura atual
T_0	Temperatura inicial
\mathbf{U}^*	Vetor de deslocamentos virtuais
\mathbf{X}	Matriz de coordenadas de um elemento

1 - INTRODUÇÃO

Devido à sua eficiência estrutural e economia de material, estruturas laminares curvas (com espessura muito pequena em relação às dimensões restantes) são amplamente utilizadas em uma variedade de aplicações de engenharia. Essas estruturas são comumente encontradas nas indústrias aeroespacial, naval, automobilística e de energia, onde frequentemente são expostas a condições extremas, incluindo altas temperaturas. Quando sujeitas a temperaturas elevadas, as propriedades dos materiais dessas estruturas podem ser significativamente alteradas, resultando em mudanças no comportamento mecânico, como dilatação térmica, redução da rigidez e resistência, e potencial início de plastificação. Tais efeitos podem comprometer a integridade estrutural e a segurança, tornando essencial uma análise precisa para prever o desempenho dessas estruturas sob condições térmicas adversas.

Para abordar esse desafio, a aplicação de métodos de elementos finitos (MEF) torna-se uma ferramenta importante para lidar com esse problema. O MEF permite a modelagem detalhada do comportamento das estruturas de casca quando expostas a cargas mecânicas e a variações térmicas, considerando fatores como a distribuição de temperatura, gradientes térmicos e a interação entre o campo térmico e as tensões mecânicas. Além do mais, destacam-se de outras soluções estruturais pela sua capacidade de equilibrar carregamentos primordialmente através de esforços no próprio plano, denominados esforços de membrana. Os elementos finitos de casca, como o Quad8, são particularmente eficazes para essas análises devido à sua capacidade de representar com precisão a geometria e as condições de contorno das estruturas delgadas e complexas.

Ao empregar o MEF, é possível simular inúmeros cenários de carga térmica e avaliar os efeitos resultantes no campo de tensões e deformações. Isso inclui a identificação de regiões críticas sujeitas à plastificação ou outros modos de falha. Portanto, o uso de elementos finitos é uma ferramenta robusta para a análise e o projeto seguro de estruturas do tipo casca submetidas a altas temperaturas, proporcionando uma compreensão detalhada do comportamento estrutural e garantindo a confiabilidade e segurança das aplicações industriais.

No contexto de elementos de casca, uma das formulações de elementos mais conhecidas é referida como a formulação de elemento degenerado (Bathe e Dvorkin (1983), Yuan e Liang (1989), Koziy e Mirza (1997), Bucalem e Nóbrega (2000)). Esta formulação representa um elemento quadrático de oito nós como uma versão simplificada de um hexaedro quadrático, embora existam outras versões. é baseada em elementos isoparamétricos e oferece vantagens significativas, pois se alinha perfeitamente com a estrutura tradicional de elementos finitos, utilizando as mesmas funções de forma para ambos os campos de geometria e deslocamento. No entanto, vale ressaltar que os trabalhos existentes sobre elementos de casca isoparamétricos

frequentemente apresentam formulações longas e intrincadas para expressar as equações de elementos finitos. Essas formulações complexas podem representar desafios de implementação, especialmente para indivíduos novos no método de elementos finitos. As complexidades nessas formulações decorrem de vários fatores específicos para elementos de casca curvos, por exemplo, a) Geometria: a presença de curvatura introduz complexidades adicionais na descrição da geometria e deformação. b) Transformação de deslocamentos e rotações: sistemas de coordenadas curvos no espaço local são introduzidos para transição do espaço global para o local. c) Combinação de tensões de membrana e flexão: Frequentemente, ambos os componentes são tratados separadamente, contribuindo ainda mais para a complexidade geral das formulações.

Por sua vez a variação do campo de temperatura resulta em tensões térmicas. A influência desta variação nas equações governantes termoelásticas é representada através da lei constitutiva (Hetnarski e Eslami, 2009). Já a teoria da termoelasticidade é baseada na adição linear de deformações térmicas aos esforços mecânicos.

Outrossim a mudança de temperatura geralmente representa condições severas de carregamento, pois podem produzir deflexões excessivas e/ou altas tensões nas estruturas. Além disso, campos de temperatura não uniformes criam gradientes de temperatura entre as superfícies superior e inferior das cascas, produzem mudanças de curvatura e, portanto, rotações (Szilard, 2004).

Rezaiee-Pajand et al. (2019) mencionam a importância da análise termomecânica em estruturas do tipo cascas para o projeto de vasos de pressões, silos de armazenamento, cascos de navios, pois o efeito térmico nestas estruturas eleva as deformações e tensões. Além disso, as análises térmicas podem ser usadas para diferentes aplicações industriais, flares e torres de turbina eólicas.

Constata-se ainda que a escassez de formulações detalhadas, abrangendo os elementos finitos com acoplamento da temperatura, dificulta a implementação de rotinas computacionais próprias para estudos de estruturas mais complexas da engenharia, essa carência é observada na omissão dos detalhes na implementação das matrizes de forças internas para o equilíbrio energético e no processo incremental de integração ao longo do tempo.

Portanto este trabalho visa estudar o efeito termomecânico em estruturas metálicas do tipo casca através da aplicação de elementos isoparamétricos. Para isto, será necessário desenvolver e implementar um modelo constitutivo para o aço que simule de forma coerente a não linearidade do material, assim como o solver necessário para resolução dos sistemas de equações advindos da análise de elementos finitos.

Finalmente esta pesquisa propõe uma formulação direta para elementos de casca degenerados isoparamétricos, compatível com análises termomecânicas com não linearidade física. A formulação depende do campo de deslocamento e utiliza uma única matriz de deformação para converter eficientemente deslocamentos nodais em deformações dentro de um quadro de referência local alinhado com a superfície da casca. Sua versatilidade permite acomodar

diversas formas de superfície isoparamétrica, como triângulos de 3 e 6 nós, quadriláteros de 4, 8 e 12 nós, entre outras. A aplicação da formulação se dá no acoplamento termomecânico em estudos de cascas de aço, como em vasos de pressão, tubulações de eliminação de gases da extração de petróleo (flares), cobertas cilíndricas, entre outras.

1.1 - OBJETIVO GERAL

O objetivo principal deste estudo é investigar os efeitos termomecânicos em cascas de aço utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método emprega elementos isoparamétricos degenerados, aplicando um modelo constitutivo não linear para o material e utilizando simulações numéricas de estruturas sujeitas a condições como esforço mecânico e campo de temperatura. Além disso, estudos de caso, que incluem dados experimentais e numéricos, serão examinados para demonstrar a versatilidade das formulações propostas neste trabalho. A análise será conduzida examinando as variações nos campos de tensão e temperatura das estruturas.

1.2 - ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES

Em geral, este trabalho consiste na análise termomecânica acoplada de estruturas do tipo casca, utilizando elementos curvos isoparamétricos e um modelo de plasticidade para o material. No entanto, algumas limitações foram consideradas:

- As tensões térmicas e mecânicas são acopladas, porém, a contribuição da tensão térmica no processo de atualização da tensão no modelo constitutivo de plasticidade não é considerada;
- Apenas a não linearidade física é considerada; a não linearidade geométrica não é abordada neste estudo;
- Este trabalho considera somente a análise termomecânica estática;
- O efeito da viscosidade, que seria mais preciso para descrever o comportamento do material sob condições extremas de temperatura, não é adotado neste estudo.

1.3 - METODOLOGIA

Para atingir o objetivo proposto, o trabalho está desenvolvido através das seguintes etapas:

- Uma ampla revisão bibliográfica sobre teoria de cascas, formulações em elementos finitos consolidadas, análise termomecânica acoplada em elementos estruturais, incluindo as cascas e descrever os modelos constitutivos para o aço sujeito à elevadas temperaturas;
- Apresentação de uma abordagem adequada para a simulação do efeito termomecânico através de uma análise acoplada de elementos finitos em estruturas do tipo casca, apresentando as equações de equilíbrio das forças internas consistentes;
- Desenvolvimento e implementação do solver necessário para resolver as equações resultantes da análise de elementos finitos, incluindo o equilíbrio no tempo e das forças internas mecânicas e térmicas;
- Implementação do modelo constitutivo plástico para o aço, que seja adequado para simular os elementos finitos de cascas;
- Calibração e validação as formulações para análise termomecânica acoplada, os elementos finitos do tipo casca e o modelo constitutivo, por meio da comparação dos resultados numéricos com resultados analíticos de problemas consolidados e por meio da comparação com trabalhos experimentais realizados nessa área;
- Após a validação dos modelos e das formulações, dois estudos de caso são apresentados. O primeiro estudo envolve um ensaio experimental de um vaso de pressão, no qual um campo de temperatura é aplicado na parede interna da estrutura. O segundo estudo foca na análise de uma tubulação de um flare, submetida a um gradiente térmico elevado no topo. Em ambos os casos, serão avaliadas as tensões de von Mises e as variações de temperatura.

1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se dividido em capítulos, conforme descrito a seguir:

- Introdução: Apresenta os objetivos gerais da pesquisa, delimitações e limitações do estudo, bem como a estrutura organizacional do trabalho, ressaltando a importância das análises termomecânicas em estruturas de casca;

- **Revisão Bibliográfica:** Fornece uma análise detalhada do estado da arte em análises termomecânicas, formulações degeneradas aplicadas a cascas, e das contribuições científicas do PECC, contextualizando a pesquisa atual;
- **Embasamento Teórico:** Aborda as formulações de elementos finitos aplicadas a placas e cascas, incluindo elementos planos e curvos, e as teorias subjacentes relevantes para a análise termomecânica;
- **Metodologia:** Descreve a abordagem termomecânica acoplada, a formulação para cascas curvas isoparamétricas, o modelo de plasticidade de Von Mises, e as ferramentas computacionais utilizadas para a implementação das formulações;
- **Validação das Formulações Propostas:** Realiza a validação das formulações desenvolvidas por meio de exemplos de cobertas cilíndricas, cúpulas esféricas, anéis comprimidos, entre outros, comparando os resultados obtidos com soluções analíticas e software especializado;
- **Estudos de Caso:** Aplica as formulações desenvolvidas a casos práticos, tais como vasos de pressão, estruturas de flare, e pilares submetidos a incêndio, avaliando as distribuições de tensões e deformações resultantes;
- **Conclusões e Recomendações:** Apresenta as conclusões sobre a eficácia e precisão das formulações propostas, e sugere direções para pesquisas futuras no campo das análises termomecânicas de estruturas de casca.

2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os estudos desenvolvidos aplicando o efeito térmico e formulações degeneradas para as cascas. Em seguida aborda-se as definições, classificação e comportamento das cascas, os modelos constitutivos elástico perfeito, viscoelástico e elasto-viscoplástico para o aço e os efeitos termomecânicos neste tipo de elemento estrutural.

2.1 - ESTADO DA ARTE - ANÁLISES TERMOMECÂNICAS EM CASCAS

Desde a formulação pioneira de problemas de contorno e a derivação das equações de acoplamento do campo de temperatura em corpos deformáveis por J. M. C. Duhamel em 1835, conforme destacado por Hetnarski e Eslami (2009), a análise termomecânica de estruturas laminadas evoluiu consideravelmente.

A década de 70 marcou o início de um período de intensificação nos estudos dessa área, com Hoffman e Ariman (1970) abordando de maneira inovadora o problema termoelástico de uma placa retangular fina com um orifício circular, sob fluxo de calor, por meio do método de correspondência pontual. Este trabalho destacou-se pela análise da variação de temperatura arbitrária ao longo da espessura da placa.

Avançando nessa trajetória, Rao et al. (1971) ampliaram a compreensão das tensões de membrana em placas com furos, empregando um refinado método de correspondência de pontos para examinar a distribuição de temperatura e suas implicações na tensão dentro do plano.

Pesquisadores como Prakash e Rao (1974) e Bonde e Hao (1977) foram precursores na investigação de cascas sob efeitos de variações de temperatura, analisando tensões térmicas em torno de um furo circular em cascas esféricas com espessura uniforme, utilizando uma abordagem contínua para transformar a tensão térmica em um problema de valor limite equivalente.

Nos anos subsequentes, estudos como o de Safarian e Harris (1985) exploraram o impacto dos gradientes de temperatura em paredes de concreto de silos, enquanto Zhang et al. (1987) avançaram no estudo de tensões térmicas em reservatórios não coesivos (formações geológicas que armazenam hidrocarbonetos), aplicando o método dos elementos finitos com modelos elastoplásticos e validando os resultados numéricos com dados experimentais.

A partir da década de 90 a utilização do método dos elementos finitos para análise térmica em

cascas se tornou mais frequente. Huang e Tauchert (1991) desenvolveram, pelo MEF, uma análise do comportamento de placas planas e cascas cilíndricas submetidas às tensões térmicas, utilizando a abordagem da deformação de cisalhamento de primeira ordem.

Librescu et al. (1995) abordaram a análise de painéis curvos submetidos às cargas térmicas e mecânicas. As cargas mecânicas investigadas são cargas de borda compressivas uniformes e pressão lateral transversal. Os campos de temperatura considerados estão associados ao aquecimento espacialmente uniforme sobre o painel e a um gradiente linear de temperatura através da espessura.

Mais tarde Reddy e Chin (1998) analisaram a resposta termoelástica dinâmica de cascas cilíndricas e placas. O acoplamento termomecânico é incluído na formulação e um modelo de elementos finitos da formulação foi desenvolvido. A condução de calor e as equações termoelásticas são resolvidas para um cilindro axissimétrico funcionalmente graduado submetido à carga térmica.

No início dos anos 2000, Krys'ko et al. (2002) e Li e Thomas (2003) introduziram modelos termomecânicos acoplados para cascas não homogêneas e simulação de temperatura em estruturas tipo casca, respectivamente, abrindo caminho para avanços significativos na modelagem e análise de estruturas sob cargas termomecânicas.

Ren et al. (2007) utilizaram o MEF termo-elastoplástico para realizar cálculos de temperatura e distribuição de tensão da casca. Foi desenvolvido um modelo matemático acoplado termomecânico para simular o processo de solidificação do aço.

Recentemente, a pesquisa evoluiu para o desenvolvimento de modelos termomecânicos tridimensionais, como demonstrado por Jabbari et al. (2010) e Sun et al. (2012), que ampliaram a aplicabilidade dessas análises para uma gama mais ampla de problemas estruturais.

Cinefra et al. (2016), Rezaiee-Pajand et al. (2019), e Brischetto e Torre (2019) introduziram abordagens inovadoras para a análise de estruturas compostas laminadas sob tensões térmicas, empregando elementos finitos de casca com cinemática variável e modelos tridimensionais exatos para cascas esféricas e cilíndricas.

Por fim, Elfar et al. (2022) e Dewangan et al. (2023) exploraram, respectivamente, o efeito do acúmulo térmico devido ao carregamento termomecânico cíclico e apresentaram uma revisão abrangente sobre modelagem, análise e previsão de respostas estruturais de estruturas compostas laminadas com recortes sob carga termomecânica.

Este panorama histórico e os avanços recentes sublinham a evolução contínua e a riqueza de abordagens na análise termomecânica de estruturas laminadas, evidenciando a relevância desta área de pesquisa na engenharia estrutural. Portanto, este trabalho propõe como contribuição o desenvolvimento de uma formulação termomecânica acoplada aplicada a elementos de cascas curvos isoparamétricos, integrando um modelo constitutivo de plasticidade aos materiais. Essa formulação será capaz de descrever com precisão diferentes superfícies estruturais e considerar a aplicação de variadas condições mecânicas e térmicas.

2.2 - ESTADO DA ARTE - FORMULAÇÃO DEGENERADA EM CASCAS

A Tabela 2.1 apresenta alguns trabalhos que abordaram a elementos de casca degenerados isoparamétricos, especificando a formulação base e o tipo de elemento desenvolvido.

Tabela 2.1 – Alguns estudos de elementos de casca isoparamétricos degenerados.

Referência	Formulação base	Tipo de elemento
MacNeal (1976)	Elemento de viga	Elemento plano quadrilateral (Quad4)
Bathe e Dvorkin (1983)	Degenerado de 9-nodes	Triangular DKT
Yuan e Liang (1989)	Elemento de casca isoparamétrico quadrático	Elemento curvo de 3 nós
Koziey e Mirza (1997)	Polinômios cúbicos para aproximação de deslocamentos e polinômios quadráticos para aproximação de rotações	Elementos de 8 e 9 nós
Bucalem e Nóbrega (2000)	Formulação mista degenerada de 9 nós modifica a expressão de deformação e energia da membrana	Triangular
Zhang et al. (2001)	A interpolação é usada para translação, rotação e curvatura constante dentro do sistema de coordenadas naturais para evitar bloqueio de cisalhamento	Elemento de casca degenerado isoparámetro de 8 nós
Rezaiee-Pajand et al. (2017)	Degenerado de 12 nós usando uma função de interpolação apropriada para evitar cisalhamento e travamento da membrana	Elemento triangular de 6 nós
Huang et al. (2018)	Combinando o método dos elementos finitos assimétricos e as soluções analíticas em coordenadas oblíquas locais tridimensionais	Elemento de casca sólida assimétrico de 8 nós sem travamento

MacNeal (1976) abordou o uso de elementos planos quadrilaterais (Quad4) com base em elementos de viga. Bathe e Dvorkin (1983) desenvolveram uma formulação degenerada para elementos triangulares DKT de 9 nós. Yuan e Liang (1989) focaram em elementos de casca isoparamétricos quadráticos, utilizando elementos curvos de 3 nós. Koziey e Mirza (1997) aplicaram polinômios cúbicos para aproximação de deslocamentos e polinômios quadráticos para rotações, empregando elementos de 8 e 9 nós. Bucalem e Nóbrega (2000) propuseram uma formulação mista degenerada de 9 nós que modifica a expressão de deformação e energia da membrana, aplicada a elementos triangulares. Zhang et al. (2001) utilizaram interpolação para translação, rotação e curvatura constante em coordenadas naturais para evitar o bloqueio de cisalhamento em elementos de casca degenerados isoparamétricos de 8 nós. Rezaiee-Pajand et al. (2017) adotaram uma formulação degenerada de 12 nós com uma função de interpolação apropriada para evitar cisalhamento e travamento da membrana em elementos triangulares de 6 nós. Por fim, Huang et al. (2018) combinaram o método dos elementos finitos assimétricos com soluções analíticas em coordenadas oblíquas locais tridimensionais para elementos de casca sólida assimétricos de 8 nós sem travamento.

Esta compilação de trabalhos ilustra a diversidade de abordagens adotadas para melhorar a precisão e eficiência dos modelos de elementos finitos de cascas, abordando desafios comuns como o travamento por cisalhamento e a representação adequada de deformações e rotações. Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de um elemento finito de casca curva isoparamétrico utilizando uma formulação degenerada, que emprega uma única matriz de deformação para converter deslocamentos e rotações nodais de coordenadas locais para globais. A versatilidade desse elemento permite a utilização de elementos triangulares com 3 e 6 nós, bem como quadriláteros com 4, 8 e 12 nós, tornando-o capaz de modelar uma grande variedade de superfícies com convergência satisfatória.

2.3 - ESTADO DA ARTE - PRODUÇÕES DO PECC

A seguir são listadas e resumidas algumas dissertações de mestrado e teses de doutorado desenvolvidas no Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília, que abordaram como tema o estudo de cascas, a partir do ano de 2004.

Cortivo (2004) desenvolveu métodos para análises não-lineares física (plasticidade) e geométrica em cascas finas, sujeitas à grandes deslocamentos e pequenas deformações. O autor utilizou um elemento finito triangular de três nós ANDES (Assumed Natural Deviatoric Strain), já para análise não-linear foi utilizada uma formulação co-rotacional CSSE (Consistent Simetrizable Self-equilibrated) empregando o método do comprimento de arco para solução dos sistemas não-lineares. Finalmente para a não linearidade do material, foi

adotado o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento de von Mises, considerando o endurecimento isotrópico e material perfeitamente plástico.

Menin (2006) desenvolveu uma formulação co-rotacional que foi aplicada para analisar o comportamento não-linear geométrico de diferentes tipos de estruturas em análises estáticas. A abordagem separa os movimentos em corpo rígido e deformacional, permitindo o estudo da capacidade de carga das estruturas após a perda ou bifurcação de equilíbrio. Foram enfatizados os conceitos básicos da formulação co-rotacional, adaptados para estruturas discretizadas com elementos finitos de cascas. As deslocamentos deformacionais foram obtidas de usando operadores de projeção. A implementação computacional mostrou resultados consistentes com a literatura, utilizando métodos indiretos como o parâmetro de rigidez CST (Constant Strain Triangle) e a análise do número de pivôs negativos da matriz de rigidez. Para resolver o sistema de equações não-lineares e obter trajetórias de equilíbrio, foram empregados o método de comprimento de arco cilíndrico, o método de Riks-Wempner (Normal Plane) e o método de Ramm (Updated Normal Plane), combinados com o método de Newton-Raphson completo.

Por sua vez Mendes (2013) abordou a influência da interação fluido-estrutura no comportamento dinâmico de um sistema composto por uma barragem em arco e um reservatório de água submetido a um sismo. A pesquisa seguiu uma abordagem progressiva, partindo de análises mais simples até as mais complexas, utilizando métodos analítico-numéricos para os sistemas estrutural e fluido, tanto desacoplados quanto acoplados. Algumas limitações deste estudo incluem: o uso de materiais lineares, elásticos, homogêneos e isotrópicos; o desenvolvimento analítico restrito a cilindros de revolução e ao sistema estrutural desacoplado de painéis cilíndricos; e a análise de cascas cilíndricas circulares retas com espessura constante, paredes delgadas e pequenas deflexões, utilizando a teoria de cascas com aproximação de primeira ordem.

Macedo (2014) estudou as tensões térmicas axiais e circunferenciais em cascas cilíndricas finas e longas, submetidas a gradientes de temperatura. Utilizando tanques cilíndricos de concreto, observou que as tensões térmicas elevadas podem causar fissuras. A metodologia do autor comparou equações analíticas para condições de contorno com soluções numéricas via ANSYS, mostrando redução significativa nos esforços calculados nas bordas ao incluir fundo e tampa no cilindro, com resultados precisos. Algumas limitações desse estudo são: as estruturas são constituídas de material linear, elástico e a aplicação é somente para casos em que há gradiente térmico na parede do reservatório, provocado pela diferença de temperatura do produto armazenado e o meio ambiente, ou seja, limitando a temperatura de maneira que não provoque a degradação do material.

Já França Júnior (2018) analisou a influência de diferentes condições de contorno no comportamento dinâmico (em termos de vibrações livres) de reservatórios verticais cilíndricos vazios e totalmente preenchidos com líquidos através de métodos analíticos e numéricos. As principais limitações são: material homogêneo e que obedece a lei de Hooke, a casca cilíndrica tem espessura constante, paredes delgadas, são assumidos pequenos deslocamentos e

desprezado os efeitos inerciais de rotação e o fluido é considerado quiescente (estagnado), invíscido (não-viscoso) e incompressível. Não há escoamento, existindo somente vibração em torno de um ponto de equilíbrio (fluido acústico).

Posteriormente Silva (2019) abordou a análise não-linear de estruturas, particularmente aplicada às placas e cascas de pequena espessura, utilizando o MEF. O estudo se concentra na formulação co-rotacional para análise não-linear geométrica de placas e cascas, considerando elastoplasticidade e utilizando elementos sólidos de baixa ordem melhorados. O objetivo principal do trabalho foi estudar essas estruturas usando a formulação co-rotacional e um modelo de elastoplasticidade de von Mises com endurecimento isotrópico linear. A análise não-linear adotou uma abordagem incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson e na técnica do comprimento de arco. Vários problemas benchmarks foram analisados para avaliar a formulação implementada.

2.4 - DEFINIÇÕES GERAIS E CLASSIFICAÇÃO DAS CASCAS

Segundo Oñate (2013) as cascas podem ser vistas, em essência, como a extensão de uma placa de superfície não plana. A não-coplanaridade introduz esforços axiais (de membrana) além das forças de flexão, proporcionando assim um acréscimo de forças na análise estrutural global. Este comportamento faz das cascas estruturas capazes de vencer grandes vãos com quantidades de mínimas de material.

As cascas são comuns em muitas construções de engenharia, como: coberturas, domos, pontes, tanques e silos, bem como em fuselagens de aviões, cascos de navios, etc. Possuem três características essenciais: sua superfície de referência, espessura e contornos. Destas, a mais importante é, sem dúvida, a superfície de referência, pois define a forma da casca. Geralmente são classificadas pela formato da sua superfície média e espessura, sendo divididas em superfície de curvatura gaussiana, superfície planificáveis ou não planificáveis, geometria de superfície, superfície combinada e superfície dobrada.

2.4.1 - Superfície de curvatura gaussiana

De acordo com Solheiro (2017) as superfícies das cascas podem ser classificadas de acordo com o sinal da curvatura de Gauss ($K = 1/R_1R_2$), conforme Fig. 2.1.

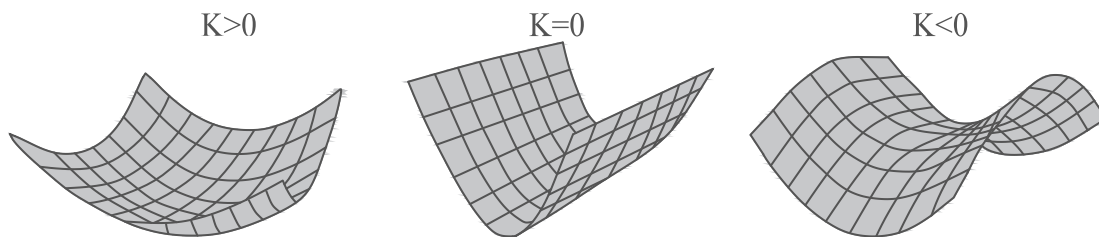


Figura 2.1 – Superfície gaussiana.

A superfície de curvatura dupla sinclástica ($K > 0$) tem ambas as curvaturas principais com o mesmo sinal (positiva). Estas cascas podem exibir tensões do mesmo sinal das duas direções principais para equilibrar as cargas. Paraboloides de revolução e cúpulas são exemplos desta superfície.

Por sua vez a superfície monolástica, ou de curvatura simples, possuem curvaturas principais nulas ($K = 0$). Um exemplo deste tipo de superfície são as cascas cilíndricas. Já a superfície de curvatura dupla anticlástica ($K < 0$) são caracterizadas por terem as duas curvaturas principais com sinais diferentes, logo, apresentam tensões de tração e compressão. As selas são exemplos deste tipo de curvatura.

2.4.2 - Superfície planificável ou não planificável

Blaauwendraad e Hoefakker (2014) caracterizam as superfícies planificáveis como aquelas que podem ser formadas a partir de uma superfície plana sem introdução de deformações na mesma (curvatura simples). Já as não planificáveis apresentam maior rigidez do que as superfícies planificáveis (curvatura dupla). Na Fig. 2.2 são ilustradas estes tipos de cascas.

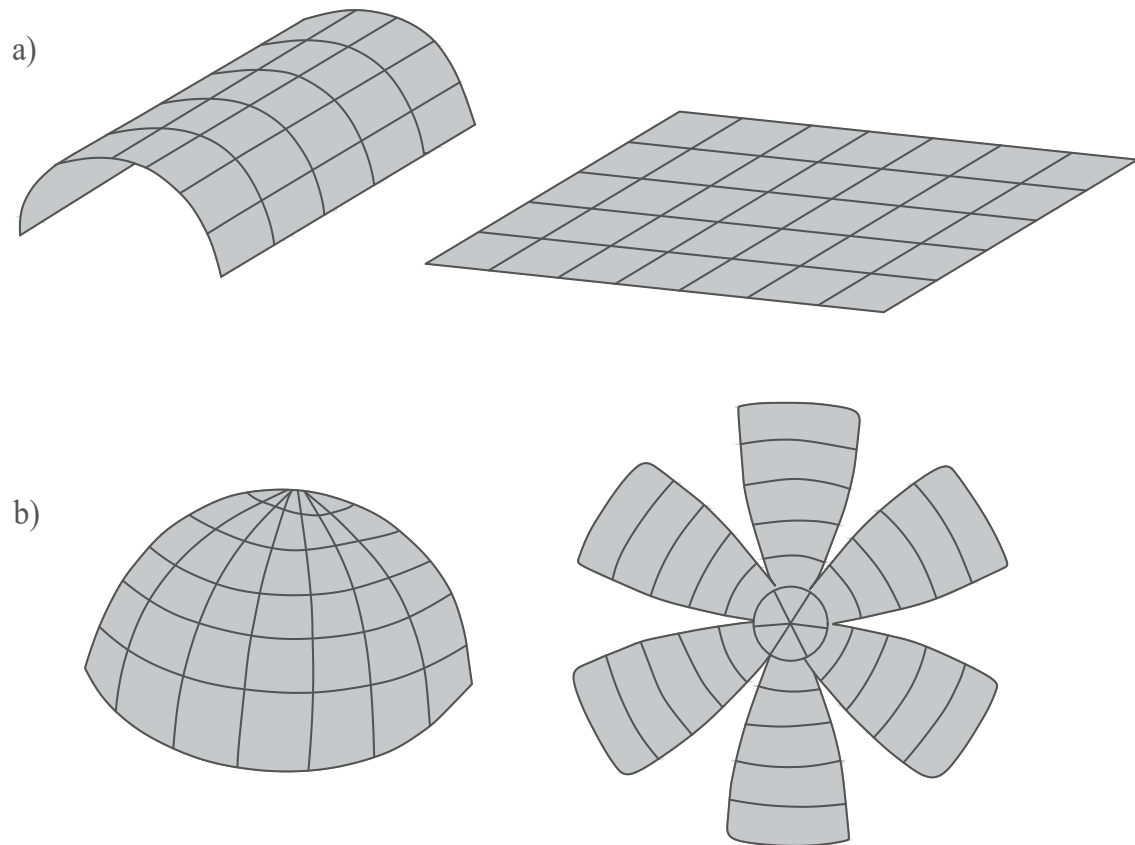


Figura 2.2 – Superfície planificável (a) e não planificável (b).

2.4.3 - Geometria de superfície

A forma das superfícies pode ser obtida através de métodos geométrico, utilizando funções matemáticas para descrever a geometria. São subdivididas em superfície de revolução, de translação e normalizadas (Ventsel e Krauthammer, 2001). Por um lado, as superfícies de revolução são obtidas pela rotação de uma curva plana, denominada meridiana, sobre um eixo que não está necessariamente cruzando o meridiano. Cilindros, cones, cúpulas esféricas e toróides são alguns exemplos, como mostrado na Fig. 2.3.

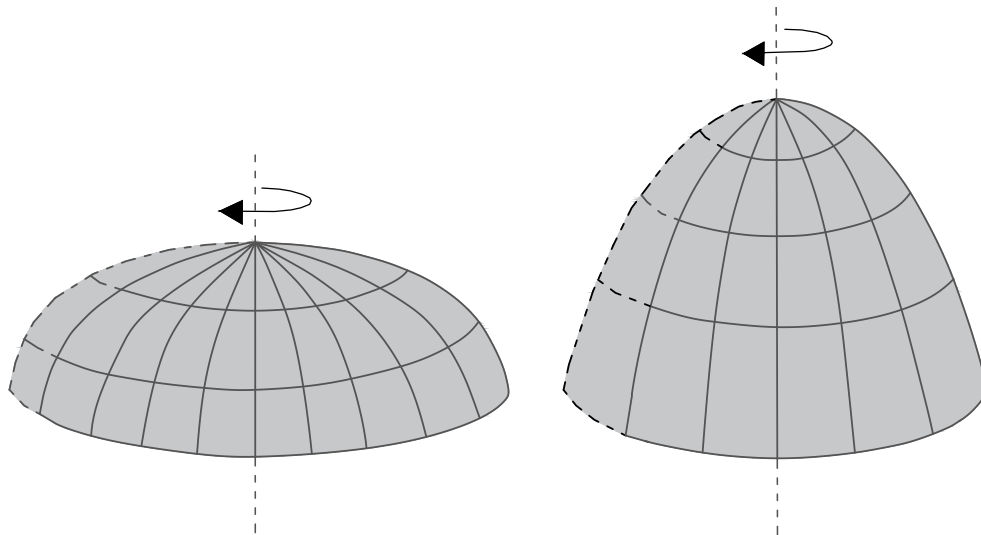


Figura 2.3 – Superfície de revolução.

Em contrapartida as superfícies de translação são formadas ao deslizar uma curva plana, mantendo a orientação da curva deslizante constante. A curva na qual a curva original desliza é chamada de gerador da superfície. No caso especial em que o gerador é uma linha reta, a superfície resultante é chamada de superfície cilíndrica. Na Fig. 2.4 são ilustrados alguns exemplos de superfícies de translação.

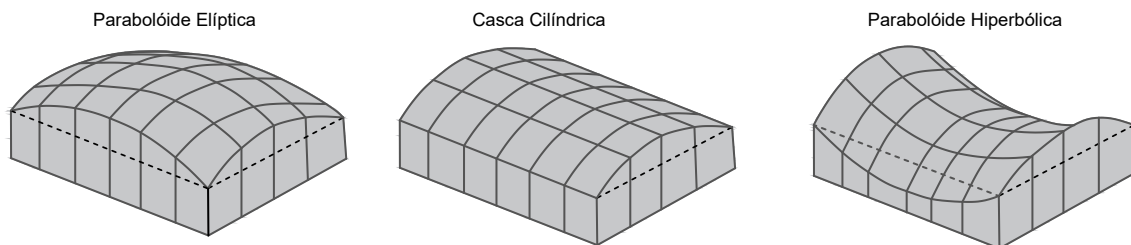


Figura 2.4 – Superfície de translação.

Por fim as superfícies normatizadas são geradas pela translação de linhas retas sobre duas curvas finais. Um exemplo clássico deste tipo de superfície é o tronco de cone, uma vez que pode ser formado pela translação de uma linha reta (gerador) sobre duas curvas em suas extremidades. A seguir, na Fig. 2.5, são observados exemplos deste tipo de superfície.

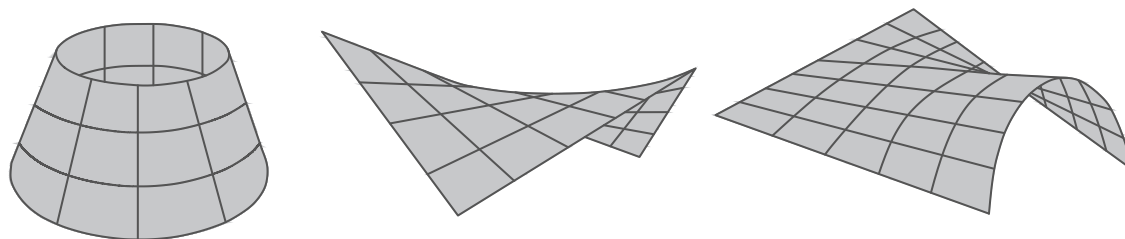


Figura 2.5 – Superfícies normalizadas.

2.4.4 - Superfície combinada

As superfícies combinadas podem ser parcialmente sinclástica e parcialmente anticlásticas, compostas de formas mais simples de cascas e curvatura descontínua, como observado na Fig. 2.6:

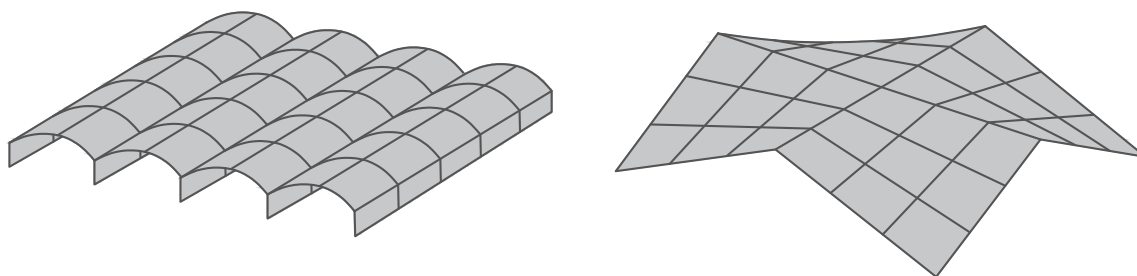


Figura 2.6 – Superfície combinada.

2.4.5 - Placas dobradas

As placas dobradas são estruturas compostas por duas ou mais placas, como mostrado na Fig.2.7. Além disso, podem ser usadas para formar estruturas tridimensionais muito rígidas. Pelo fato da alta rigidez, grandes deformações devem ser evitadas, e a análise estrutural geralmente é realizada utilizando a teoria simples de vigas.

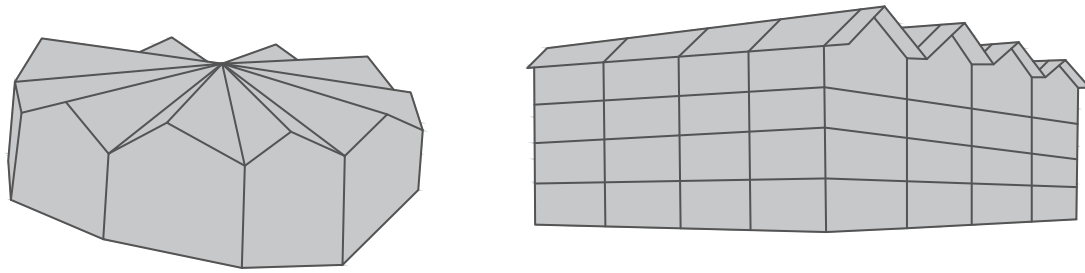


Figura 2.7 – Placas dobradas.

2.5 - COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DAS CASCAS

As estruturas de cascas constituem uma das áreas mais complexas e desafiadoras da engenharia estrutural, destacando-se pela sua intrincada geometria curva e pela notável eficiência material. Essas características conferem às cascas uma capacidade única de distribuir cargas de maneira eficaz, predominantemente através de tensões de membrana, o que permite uma significativa redução dos efeitos de flexão. Esta habilidade é particularmente evidente na forma como essas estruturas gerenciam carregamentos transversais, desenvolvendo um sistema de tensões de tração e compressão que se distribuem de maneira uniforme ao longo de sua espessura, um fenômeno descrito pela teoria da membrana.

Entretanto, a teoria da membrana, por mais eficiente que seja para descrever o comportamento inicial sob carregamentos, não abrange todos os aspectos do equilíbrio ou deslocamentos em estruturas de cascas. Isso se deve principalmente à ocorrência de momentos fletores e torções que surgem de descontinuidades no carregamento, variações na geometria ou restrições impostas pelos apoios. Para abordar essas complexidades, é necessária a transição para uma análise que considere os componentes de flexão. Essa necessidade marca a evolução para a teoria de flexão de cascas elásticas finas, que busca compensar as limitações da teoria da membrana em regiões perturbadas pela introdução de esforços fletores e torcionais.

A complexidade da análise de cascas não se limita apenas aos aspectos teóricos; ela também se estende à aplicação prática dessas estruturas. Como Blaauwendraad e Hoefakker (2014) enfatizam, o avanço contínuo dos métodos numéricos tem ampliado as possibilidades de aplicação das estruturas de cascas, combinando desempenho estrutural otimizado com estética arquitetônica. Esta sinergia entre forma e função faz das cascas uma opção cada vez mais atraente em projetos de engenharia e arquitetura. No entanto, a aplicação eficaz desses métodos numéricos exige um sólido entendimento das teorias fundamentais que regem o comportamento das cascas e das particularidades mecânicas inerentes a essas estruturas.

2.6 - TEORIA DE CASCAS

As teorias de cascas mais comuns são baseadas em conceitos de elasticidade linear. Essas teorias são eficazes para calcular corretamente a tensão e a deformação em cascas quando ocorrem apenas pequenas deformações elásticas, onde a lei de Hooke se aplica. Geralmente a análise de cascas abrange três teorias clássicas: Teoria Clássica de Casca, em inglês Classical Shell Theory, teoria de membrana e a teoria de flexão.

A Teoria Clássica de Casca considera que a casca é um corpo bidimensional, onde tensões normais ao plano médio são desprezadas, esta abordagem simplifica a análise ao focar nas forças e momentos dentro do plano da casca. Já a teoria de membrana assume que as forças internas nas cascas são predominantemente forças de tração, compressão e cisalhamento no plano, ignorando os efeitos de flexão, essa simplificação é válida para cascas sob carga uniforme e com grandes raios de curvatura, onde as tensões de flexão são desprezíveis. As forças de membrana são independentes da flexão e são definidas apenas pelas condições de equilíbrio estático. Na derivação da teoria de membrana, as propriedades do material não são consideradas, tornando-a aplicável a todas as cascas, independentemente de sua composição. Em contraste, a teoria de flexão considera as tensões e deformações devido à curvatura e aos momentos fletores, sendo essencial para a análise de cascas submetidas a cargas complexas e com geometrias onde os efeitos de flexão são significativos. Para aplicar a teoria de flexão, é necessário considerar abordagens cinemáticas básicas relacionadas à deformação de cascas, especialmente na análise de pequenas deflexões.

Além destas, existem outras teorias que estendem ou modificam as suposições da teoria clássica, como por exemplo: Teoria de Sanders-Koiter, Teoria de Donnell-Mushtari (DMVT), Teoria de Casca de Primeira Ordem (FSDT) e Teoria de Casca de Alta Ordem (HSDT).

2.6.1 - Teoria Clássica de Casca

A Teoria Clássica de Casca é uma abordagem fundamental na análise de estruturas de casca, amplamente utilizada em diversas áreas da engenharia. Desenvolvida ao longo do final do século XIX e início do século XX, esta teoria foi influenciada pelos trabalhos de pesquisadores como Augustus Edward Hough Love, Gabriel Lamé e Stephen Timoshenko. Esta teoria fornece uma formulação bidimensional simplificada para a análise de cascas finas, baseando-se em várias suposições-chave que facilitam a modelagem matemática, sendo fundamentada em três hipóteses básicas:

- As tensões normais ao plano médio são desprezadas ($\sigma_z = 0$);

- As seções transversais normais ao plano médio da casca antes da deformação permanecem normais e não sofrem alongamento após a deformação (Hipótese de Kirchhoff-Love);
- Assumem-se pequenos deslocamentos e rotações em relação às dimensões da casca, permitindo a linearização das equações.

Por sua vez as equações de equilíbrio estático no plano da casca são definidas por:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0 \quad (2.2)$$

onde N_x , N_y são forças normais por unidade de comprimento, N_{xy} é a força de cisalhamento por unidade de comprimento e q_x , q_y são as cargas distribuídas. Já as deformações são expressas em termos dos deslocamentos u , v e w ao longo dos eixos x , y e z , como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5)$$

Finalmente, utilizando a lei de Hooke para materiais isotrópicos e lineares tem-se:

$$N_x = \frac{Eth}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.6)$$

$$N_y = \frac{Eth}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.7)$$

$$N_{xy} = \frac{Eth}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (2.8)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e th é a espessura da casca. Apesar de ampla aplicabilidade, a teoria possui algumas limitações, como:

- Desprezo das Tensões Normais: A suposição de desprezar as tensões normais ao plano médio limita a precisão para cascas espessas;
- Deslocamentos Pequenos: Não é adequada para problemas com grandes deformações ou rotações, onde uma teoria não linear seria mais apropriada;

- Flexão e Cisalhamento: Embora inclua forças de flexão e momentos fletores, a teoria é menos precisa para cascas onde os efeitos de cisalhamento transversal são significativos.

2.6.2 - Teoria de Membrana

O comportamento de membrana foi admitido inicialmente por Lamé (1852), Lecornu (1880) e Lévy (1887). Sabe-se ainda que por se tratarem de uma estrutura curva, as cascas podem desenvolver forças no plano que introduzem tensões de compressão. Esta teoria é uma simplificação para análise de cascas, quando as tensões de flexão são desprezíveis em comparação com as tensões de tração, compressão e cisalhamento no plano da casca, e é útil para cascas sob carga uniforme e com grandes raios de curvatura.

A Teoria de Membrana baseia-se em algumas simplificações, como o desprezo da flexão e o equilíbrio estático. A primeira simplificação se refere às tensões normais ao plano médio e aos momentos fletores, que são desconsiderados. A casca é tratada como uma membrana submetida a esforços no plano. A segunda simplificação refere-se às forças de membrana, que são determinadas pelas condições de equilíbrio estático, independentemente das propriedades do material.

As equações de equilíbrio no plano para a teoria de membrana são as mesmas expressas nas Eqs. 2.1 e 2.2. As deformações no plano médio da casca são relacionadas aos deslocamentos u e v pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.11)$$

Pelo fato de essa teoria estar fundamentada em materiais isotrópicos e lineares, as relações constitutivas são expressas de modo análogo à Teoria Clássica de Cascas, seguindo as Eqs. 2.6, 2.7 e 2.8. Por sua vez a Teoria de Membrana apresenta várias limitações, como por exemplo:

- Não é adequada para cascas que estão sujeitas a cargas que induzem flexão significativa;
- Ignora as tensões e deformações que surgem devido à curvatura da casca, o que pode levar a uma análise incompleta e imprecisa em situações onde esses efeitos são importantes;
- Não é eficaz para geometrias complexas ou cascas com pequenas curvaturas, onde os efeitos de flexão e cisalhamento não podem ser desprezados;

- Cargas não uniformes ou concentradas podem induzir efeitos de flexão que a teoria de membrana não consegue capturar.

2.6.3 - Teoria de Flexão

Anteriormente observou-se que a teoria de membrana não apresenta soluções compatíveis com as condições reais de deformação em todas as situações. Também no contorno e em certas partes da casca esta teoria não consegue prever o estado de tensões. Estas limitações são superadas pela introdução da teoria de flexão, que leva em conta as forças de membrana e de flexão que atuam na estrutura da casca. O desenvolvimento da teoria de flexão pode ser encontrado em várias literaturas, tais como: Gravina (1957), Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Baker et al. (1972).

Considere o elemento infinitesimal definido por dois pares de planos normais à superfície média da casca, ilustrado na Fig. 2.8. A origem do sistema de eixos coordenados é localizada num canto do elemento com os eixos x e y tangentes às linhas de curvatura principal e o z perpendicular à superfície média.

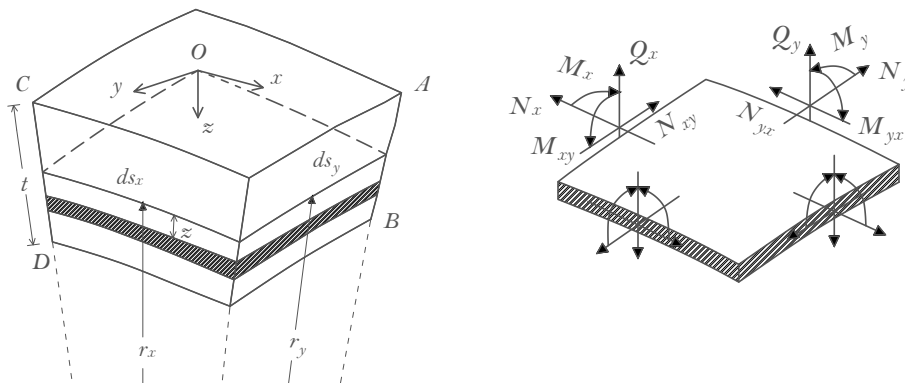


Figura 2.8 – Elemento infinitesimal definido por dois pares de planos normais a superfície média da casca.

Devido à curvatura da casca, os comprimentos dos arcos afastados de uma distância z da superfície média não são apenas ds_x e ds_y , os comprimentos medidos na superfície média, mas sim:

$$\frac{ds_x(r_x - z)}{r_x} = \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) ds_x \quad (2.12)$$

$$\frac{ds_y(r_y - z)}{r_y} = \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y \quad (2.13)$$

onde r_x e r_y são os raios de curvatura principais nos planos xz e yz , respectivamente. As tensões que atuam nas faces planas do elemento são σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . Se N_x representar a força

normal resultante que atua na face yz por unidade de comprimento tem-se, usando o arco real:

$$N_x ds_y = \int_{-th/2}^{th/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) ds_y dz \quad (2.14)$$

Dividindo pela distância arbitrária ds_y tem-se:

$$N_x = \int_{-th/2}^{th/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x (1 - zk_y) dz \quad (2.15)$$

Da mesma forma, podem derivar-se expressões para as outras forças por unidade de comprimento. Logo:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-th/2}^{th/2} \begin{pmatrix} \sigma_x (1 - zk_y) \\ \sigma_y (1 - zk_x) \\ \tau_{xy} (1 - zk_y) \\ \tau_{yx} (1 - zk_x) \\ \tau_{xz} (1 - zk_y) \\ \tau_{yz} (1 - zk_x) \end{pmatrix} dz \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \int_{-th/2}^{th/2} \begin{pmatrix} \sigma_x (1 - zk_y) \\ \sigma_y (1 - zk_x) \\ \tau_{xy} (1 - zk_y) \\ \tau_{yx} (1 - zk_x) \end{pmatrix} z dz \quad (2.17)$$

Destas equações conclui-se que apesar de $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$, as forças cortantes N_{xy} e N_{yx} e os momentos torçores M_{xy} e M_{yx} não são, necessariamente, iguais. Isto ocorre porque $r_x \neq r_y$. No entanto, para cascas finas a espessura th é pequena em comparação com r_x e r_y e, por isso, z/r_x e z/r_y podem ser desprezados. Neste caso $N_{xy} = N_{yx}$ e $M_{xy} = M_{yx}$. Assim, as forças por unidade de comprimento são descritas como:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-th/2}^{th/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \int_{-th/2}^{th/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \end{pmatrix} z dz \quad (2.19)$$

Para relacionar estas forças com as deformações da casca, as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} têm que ser

calculadas em termos das deformações. De acordo com os pressupostos, a tensão na direção z é desprezada, $\sigma_z = 0$. Novamente pela lei de Hooke:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x - \nu\epsilon_y) \quad (2.20)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y - \nu\epsilon_x) \quad (2.21)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.22)$$

Para determinar as deformações que aparecem nas Eqs. 2.20, 2.21 e 2.22, observe o elemento deformado da casca da Fig. 2.9, que possui os lados mn e $m'n'$ retos. A superfície média está alongada e o lado mn está rotacionado em relação à configuração original. O alongamento unitário ϵ_x de uma fibra l_f , posicionada no plano xz a uma distância z da superfície média, é dado por $\Delta l_f/l_f$.

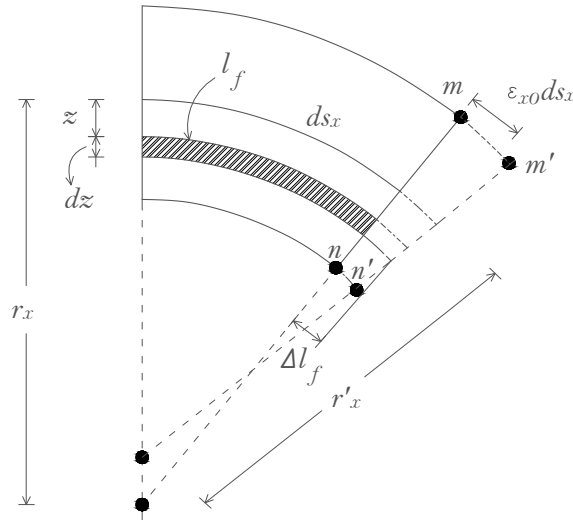


Figura 2.9 – Deformação do elemento de casca.

Δl_f é o alongamento sofrido por l_f , expressado pela equação a seguir:

$$l_f = ds_x (1 - zk_x) \quad (2.23)$$

$$\Delta l_f = ds_x (1 + \epsilon_{x0}) \left(1 - \frac{z}{r'_x} \right) - l_f \quad (2.24)$$

ϵ_{x0} representa a deformação unitária na superfície média, r'_x é o raio de curvatura após a deformação e ds_x é o comprimento da fibra na superfície média. Combinando as Eqs. 2.23 e 2.24:

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{x0}}{(1 - z/r_x)} - \frac{z}{(1 - z/r_x)} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon_{x0})r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (2.25)$$

r_x é a curvatura inicial. Uma vez que $th \ll r_x$, z/r_x pode ser omitido. Por outro lado a influência de ε_{x0} na curvatura é desprezável. Desta forma, a expressão acima se transforma em:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z \left(\frac{1}{r_x'} - \frac{1}{r_x} \right) = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \quad (2.26)$$

χ_x representa a variação da curvatura da superfície média. O alongamento unitário em qualquer distância normal à superfície média está relacionado com o alongamento da superfície média e a mudança da curvatura associada à deformação. Para a direção y obtém-se uma expressão idêntica:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z \left(\frac{1}{r_y'} - \frac{1}{r_y} \right) = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \quad (2.27)$$

Para determinar a distribuição da distorção γ_{xy} , considera-se γ_{xy0} a distorção na superfície média. Devido à rotação da aresta AB em torno do eixo x e χ_{xy} :

$$\gamma_{xy} = -2zk_{xy} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \quad (2.29)$$

Aqui, χ_{xy} designa a torção da superfície média. Isto representa o efeito da rotação dos elementos da casca em torno da normal à superfície média. Substituindo estes resultados nas Eqs. 2.20, 2.21 e 2.22, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x - \nu\chi_y)] \quad (2.30)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y - \nu\chi_x)] \quad (2.31)$$

$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy}) \quad (2.32)$$

Finalmente, desprezando os termos z/r_x e z/r_y , como anteriormente, e substituindo as tensões nas expressões das forças por unidade de comprimento obtém-se:

$$N_x = \frac{Eth}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \quad (2.33)$$

$$N_y = \frac{Eth}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0}) \quad (2.34)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_{xy0} \quad (2.35)$$

$$M_x = -D(\chi_x - \nu\chi_y) \quad (2.36)$$

$$M_y = -D(\chi_y - \nu\chi_x) \quad (2.37)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \chi_{xy} \quad (2.38)$$

e D é a rigidez à flexão da casca, definida por:

$$D = \frac{E t h}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.39)$$

Estas equações são as equações constitutivas para cascas. Nas condições em que a flexão pode ser desprezada, a análise das tensões simplifica-se bastante uma vez que M_x , M_y e $M_{xy} = M_{yx}$ desaparecem. O que sobra são as forças de membrana N_x , N_y e $N_{xy} = N_{yx}$.

Deste modo, é possível escrever as tensões compostas numa casca produzidas por forças e momentos:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t h} + \frac{12 M_x z}{t h^3} \quad (2.40)$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{t h} + \frac{12 M_y z}{t h^3} \quad (2.41)$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t h} + \frac{12 M_{xy} z}{t h^3} \quad (2.42)$$

Os primeiros termos nestas expressões representam as tensões de membrana e os segundos as tensões de flexão. Verifica-se que a distribuição das componentes da tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} na espessura é linear. As tensões de cisalhamento têm uma distribuição parabólica, de acordo com as seguintes equações:

$$\tau_{xz} = \frac{3 Q_x}{2 t h} \left(1 - \frac{4 z^2}{t h^2} \right) \quad (2.43)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3 Q_y}{2 t h} \left(1 - \frac{4 z^2}{t h^2} \right) \quad (2.44)$$

2.6.4 - Teoria de Sanders-Koiter

A Teoria Clássica de Casca é expandida para incluir os efeitos de grandes deslocamentos e rotações, mas mantém a suposição de pequenas deformações. Desenvolvida principalmente por J.L. Sanders e W.T. Koiter, a Teoria de Sanders-Koiter é aplicada para a análise de cascas em regime não linear, onde os deslocamentos são grandes e as deformações são moderadas. Esta teoria leva em consideração tanto as deformações no plano quanto as curvaturas, tensões e deformações resultantes de grandes deslocamentos e rotações. As principais características da teoria incluem:

- **Grandes Deslocamentos e Rotações:** Permite grandes deslocamentos e rotações da casca, embora as deformações sejam mantidas pequenas. Isso é crucial para a análise de estabilidade e pós-flambagem.

- **Efeitos Geométricos Não Lineares:** Inclui termos não lineares nas equações de equilíbrio e compatibilidade, considerando o efeito da geometria deformada da casca.
- **Equações de Equilíbrio e Compatibilidade:** As equações são derivadas a partir dos princípios de energia potencial total mínima, levando em conta os termos não lineares.

As equações de Sanders-Koiter são mais complexas devido à inclusão de termos não lineares que representam os efeitos de grandes deslocamentos e rotações. As principais equações incluem as seguintes equações de equilíbrio no plano:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q_x = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q_y = 0 \quad (2.46)$$

Por sua vez os momentos M_x , M_y e M_{xy} são calculados por:

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.47)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.48)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.49)$$

Já para equações de compatibilidade tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{w}{R} \quad (2.50)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \quad (2.51)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.52)$$

onde R é o raio de curvatura da casca. Apesar de suas vantagens, a Teoria de Sanders-Koiter tem algumas limitações:

- **Complexidade Computacional:** As equações não lineares são complexas e exigem métodos numéricos avançados para solução.
- **Pequenas Deformações:** Embora permita grandes deslocamentos e rotações, ainda assume pequenas deformações, o que pode não ser adequado para todos os problemas estruturais.

- **Aplicabilidade Limitada:** Em alguns casos, outras teorias mais específicas ou avançadas, como a Teoria de Casca de Alta Ordem (HSDT), podem ser mais apropriadas.

2.6.5 - Teoria de Donnell-Mushrati-Vlasov (DMVT)

A Teoria de Donnell-Mushtari-Vlasov (DMVT) é uma simplificação da Teoria Clássica de Casca, especialmente desenvolvida para analisar problemas de estabilidade em cascas finas. Esta teoria é amplamente utilizada na análise de flambagem e vibração de cascas cilíndricas e esféricas sob diferentes condições de carregamento. A DMVT é conhecida por sua capacidade de fornecer resultados precisos com um esforço computacional relativamente menor. A teoria é nomeada em homenagem a seus principais desenvolvedores L.H. Donnell, B.R. Mushtari e V.Z. Vlasov.

A DMVT faz várias simplificações importantes que tornam a análise de cascas finas mais simples, como:

- **Desprezo das Tensões Normais ao Plano Médio:** Similar à CST, as tensões normais à superfície média são desprezadas ($\sigma_z \approx 0$).
- **Pequenas Deformações:** Assume-se que as deformações são pequenas, permitindo a linearização das equações de equilíbrio.
- **Simplificação das Equações de Equilíbrio:** As equações de equilíbrio são simplificadas ao desprezar termos de ordem superior e ao considerar apenas os efeitos mais significativos.

As equações governantes na DMVT para cascas cilíndricas podem ser expressas em termos de deslocamentos u , v e w nas direções axiais, circunferenciais e radiais, respectivamente:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2N_\theta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.53)$$

onde N_x e N_θ são as forças normais por unidade de comprimento nas direções axial e circunferencial, respectivamente e w é o deslocamento radial. Já as equações de compatibilidade são descritas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \quad (2.55)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x \partial \theta} \quad (2.56)$$

onde ϵ_x e ϵ_θ são as deformações nas direções axial e circunferencial e $\gamma_{x\theta}$ é a deformação de cisalhamento.

A DMVT é amplamente utilizada para análise de estabilidade, análise de componentes de aeronaves, como fuselagens e tanques de combustível, análise de estruturas como silos e reservatórios que podem ser modelados como cascas finas e estudo de recipientes de pressão e outros componentes que usam cascas cilíndricas ou esféricas. No entanto, existem algumas limitações à sua aplicação:

- **Desprezo dos Termos de Ordem Superior:** A simplificação das equações pode levar a erros em casos onde os termos desprezados têm uma contribuição significativa.
- **Pequenas Deformações:** A teoria assume pequenas deformações, o que pode não ser aplicável em todos os cenários de carga, especialmente em grandes deslocamentos.
- **Aplicabilidade Restrita a Cascas Finas:** A teoria é ideal para cascas finas, mas pode não ser adequada para cascas espessas onde os efeitos de cisalhamento e flexão são mais pronunciados.

2.6.6 - Teoria de Casca de Primeira Ordem (FSDT)

A Teoria de Casca de Primeira Ordem, em inglês *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT), incorpora os efeitos de cisalhamento transversal, tornando-a adequada para análises de cascas mais espessas onde esses efeitos não podem ser ignorados. Diferente da Teoria Clássica de Casca, que não considera o cisalhamento transversal, a FSDT fornece maior precisão na análise de deformações e tensões em cascas de espessura moderada.

A FSDT foi desenvolvida a partir dos trabalhos de diversos pesquisadores no campo da mecânica dos sólidos e teoria de placas e cascas, incluindo Stephen Timoshenko, que introduziu a teoria de cisalhamento para vigas e posteriormente estendeu para placas e cascas, e Raymond Mindlin, que contribuiu significativamente para a teoria de deformação de placas e cascas ao incorporar os efeitos de cisalhamento transversal.

Esta teoria faz várias suposições importantes para considerar os efeitos de cisalhamento transversal, essenciais para uma análise mais precisa de cascas espessas:

- **Deformações por Cisalhamento Transversal:** A FSDT considera que as seções transversais normais ao plano médio antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao plano médio após a deformação, permitindo assim a consideração das deformações de cisalhamento transversal.

- **Deslocamentos Lineares:** Assume que os deslocamentos variam linearmente ao longo da espessura da casca, proporcionando uma descrição mais precisa das deformações em cascas espessas.
- **Equações de Equilíbrio:** As equações de equilíbrio incluem termos adicionais para as forças de cisalhamento, além dos momentos fletores e forças normais.

As equações de equilíbrio da FSDT para uma casca podem ser expressas da seguinte forma:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0 \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + q_z = 0 \quad (2.59)$$

onde N_x , N_y são forças normais por unidade de comprimento, N_{xy} é a força de cisalhamento no plano, Q_x , Q_y são forças de cisalhamento transversal e q_x , q_y , q_z são as cargas distribuídas nas direções x , y e z . Por sua vez a relação deformação-deslocamento são expressas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (2.61)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2.62)$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.63)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.64)$$

onde u , v , w são os deslocamentos nas direções x , y e z , ϕ_x , ϕ_y são as rotações das seções transversais em torno dos eixos y e x , respectivamente, ε_x , ε_y são as deformações normais e γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} são as deformações de cisalhamento. As relações constitutivas para materiais isotrópicos e lineares adotadas nessa FSDT são dadas por:

$$N_x = \frac{Eth}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.65)$$

$$N_y = \frac{Eth}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.66)$$

$$N_{xy} = \frac{Eth}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (2.67)$$

$$Q_x = \alpha_s G t h \gamma_{xz} \quad (2.68)$$

$$Q_y = \alpha_s G t h \gamma_{yz} \quad (2.69)$$

onde G é o módulo de cisalhamento, α_s é o fator de correção do cisalhamento e th é a espessura da casca. A FSDT é aplicada na análise de componentes de aeronaves, como asas e fuselagens, onde os efeitos de cisalhamento transversal são importantes, no projeto e análise de estruturas como pontes e edifícios com elementos de casca, no estudo de recipientes de pressão e outros componentes estruturais que utilizam cascas espessas. Entretanto, esta teoria apresenta algumas limitações:

- **Complexidade Computacional:** As equações são mais complexas do que as da Teoria Clássica de Casca, exigindo maior esforço computacional.
- **Precisão em Cascas Finas:** Para cascas muito finas, a teoria clássica Teoria Clássica de Casca pode ser suficiente e mais eficiente.
- **Correções Necessárias:** Fatores de correção de cisalhamento (α_s) precisam ser determinados com precisão para obter resultados coerentes.

2.6.7 - Teoria de Casca de Alta Ordem (HSDT)

Uma abordagem mais avançada para a análise de cascas é a Teoria de Deformação de Casca de Alta Ordem, em inglês *Higher-Order Shear Deformation Theory* (HSDT), que leva em consideração as variações não lineares das deformações e deslocamentos ao longo da espessura da casca. A HSDT fornece uma descrição mais precisa das tensões e deformações em cascas espessas e materiais compósitos. Isso a diferencia das teorias mais simples, como a Teoria Clássica de Casca e a Teoria de Casca de Primeira Ordem (FSDT).

A HSDT foi criada a partir das contribuições de vários pesquisadores. Seu objetivo era superar as restrições das teorias de cisalhamento de primeira ordem. Os principais desenvolvedores incluem J.N. Reddy, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento de teorias de alta ordem para placas e cascas, incorporando variações não lineares de deslocamento e deformações ao longo da espessura, e E. Reissner e M. Stein, que forneceram as formulações teóricas que serviram de base para a HSDT.

A HSDT faz algumas suposições que permitem uma análise mais precisa das cascas espessas:

- **Consideração de Deformações por Cisalhamento Transversal:** Diferentemente da FSDT, a HSDT não assume que as deformações de cisalhamento transversal são

constantes ao longo da espessura da casca. Em vez disso, permite uma variação mais complexa dessas deformações.

- **Deslocamentos Não Lineares:** Os deslocamentos ao longo da espessura da casca são modelados como funções de alta ordem das coordenadas transversais, proporcionando uma abordagem mais detalhada do comportamento estrutural.
- **Desprezo das Tensões Normais ao Plano Médio:** Assim como em outras teorias de casca, a HSDT geralmente ignora as tensões normais ao plano médio ($\sigma_z \approx 0$), simplificando a análise sem comprometer a precisão para muitas aplicações práticas.

As equações de equilíbrio da HSDT para uma casca podem ser expressas em termos de deslocamentos u , v , e w nas direções axiais, circunferenciais e radiais, respectivamente.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + q_z = 0 \quad (2.72)$$

onde N_x , N_y são forças normais por unidade de comprimento, N_{xy} é a força de cisalhamento no plano, Q_x , Q_y são forças de cisalhamento transversal e q_x , q_y , q_z são as cargas distribuídas nas direções x , y e z .

As relações deformação-deslocamento incluem termos de ordem superior para considerar a variação dos deslocamentos ao longo da espessura da casca. Para um material isotrópico e linear, as relações podem ser expressas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + f(z) \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + g(z) \quad (2.74)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + h(z) \quad (2.75)$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + k(z) \quad (2.76)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + l(z) \quad (2.77)$$

onde $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $k(z)$, e $l(z)$ são funções de ordem superior das coordenadas transversais. Por sua vez, para relações constitutivas de materiais isotrópicos e lineares, tem-se:

$$N_x = \int_{-th/2}^{th/2} \sigma_x dz \quad (2.78)$$

$$N_y = \int_{-th/2}^{th/2} \sigma_y dz \quad (2.79)$$

$$N_{xy} = \int_{-th/2}^{th/2} \tau_{xy} dz \quad (2.80)$$

$$Q_x = \int_{-th/2}^{th/2} \tau_{xz} dz \quad (2.81)$$

$$Q_y = \int_{-th/2}^{th/2} \tau_{yz} dz \quad (2.82)$$

onde σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , e τ_{yz} são as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. A HSDT é amplamente utilizada para a análise de componentes de aeronaves, como asas e fuselagens na engenharia aeroespacial, onde uma descrição precisa das deformações e tensões é crucial, no projeto e análise de estruturas como pontes e edifícios com elementos de casca, especialmente quando se lida com materiais compósitos, no estudo de recipientes de pressão e outros componentes estruturais que utilizam cascas espessas e materiais avançados, na análise de cascos de navios e submarinos, garantindo a precisão na descrição das tensões para a integridade estrutural. Contudo, a HSDT possui algumas limitações:

- **Complexidade Computacional:** As equações são mais complexas e requerem maior esforço computacional para solução.
- **Necessidade de Métodos Numéricos:** A solução das equações governantes muitas vezes exige o uso de métodos numéricos avançados.
- **Determinação dos Termos de Ordem Superior:** A precisão das funções de ordem superior $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $k(z)$, e $l(z)$ é crucial para a acurácia dos resultados.

2.7 - MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O AÇO

Existem vários modelos constitutivos para representar o comportamento do aço, incluindo o elástico linear, o elastoplástico perfeito, o viscoelástico e o elasto-viscoplástico, entre outros. Esses modelos, quando submetidos a elevadas temperaturas, têm como objetivo capturar o

comportamento mecânico do aço sob condições térmicas adversas, nas quais as propriedades do material, como resistência, ductilidade e módulo de elasticidade, sofrem alterações significativas. A altas temperaturas, o aço pode apresentar fenômenos como fluência, relaxação de tensões e degradação térmica, que impactam diretamente a integridade estrutural De Souza Neto et al. (2008). Portanto, os modelos constitutivos devem incorporar efeitos dependentes do tempo e da temperatura, permitindo a simulação de respostas não lineares e a previsão de falhas. O desenvolvimento e a validação desses modelos são essenciais para garantir a segurança e a durabilidade de estruturas em aplicações industriais, como plantas petroquímicas, plataformas offshore e componentes de turbinas a gás.

2.7.1 - Modelo elastoplástico perfeito

Na literatura, os principais modelos elastoplástico consagrados são os de von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker Prager e Tresca. De acordo com Cecílio (2011), o primeiro é apropriado para descrever o escoamento em metais. O segundo é adequado para materiais friccionais sensíveis à pressão, como solo, rocha, concreto. Já o terceiro, que consiste em uma modificação do critério de Von Mises, introduzindo a sensibilidade à pressão hidrostática. Ele estabelece que quando uma combinação crítica entre a pressão hidrostática e tensão de cisalhamento é atingida, o material chega ao limite da zona elástica. Finalmente, o critério de Tresca está associado à máxima tensão de cisalhamento.

O critério de von Mises baseia-se que o início do escoamento irá ocorrer quando o segundo invariante do tensor desviador (J_2) atinge um valor crítico, Logo, a função de escoamento é representada por:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = q - f_y \quad (2.83)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensão, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ é a deformação plástica, f_y é a resistência ao escoamento do material e q representa a tensão equivalente de von Mises, dada por:

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (2.84)$$

Já a superfície de escoamento proposta por esse modelo é mostrada na Fig. 2.10.

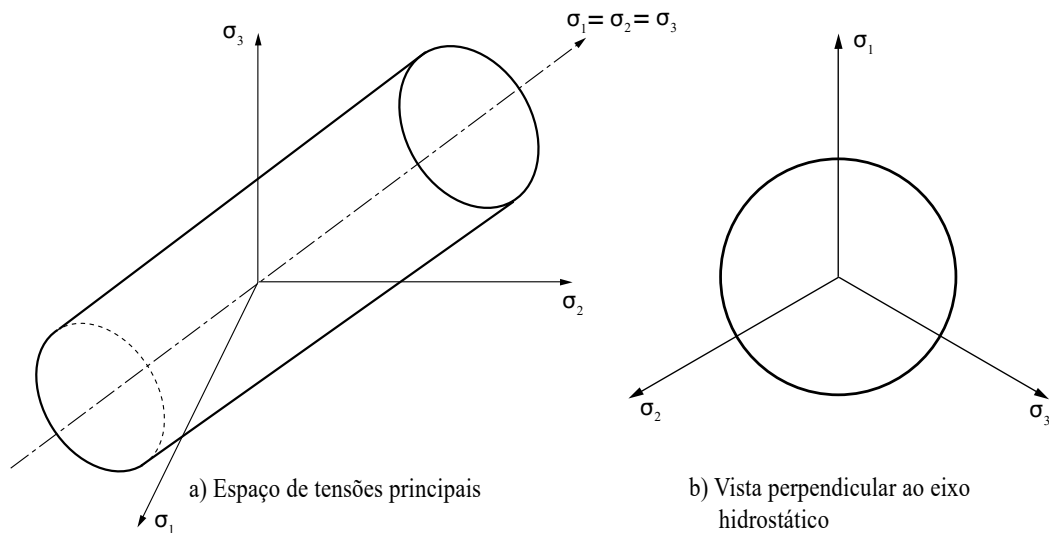


Figura 2.10 – Superfície de escoamento de Von Mises.

2.7.2 - Modelo Elasto-viscoplástico

O conceito de materiais elasto-viscoplásticos foi introduzido por Bingham (1972), posteriormente foi estudado por Zienkiewicz e Corneau (1974), Corneau (1975), Simo (1998) e Rosati e Valoroso (2004) e mais recentemente por De Angelis (2012), Cheng et al. (2017), Del Pozo e Romero (2017) e Shi et al. (2019). Este tipo de modelo é utilizado quando os fenômenos de fluência e plasticidade não podem ser tratados separadamente, como no caso de análises termomecânicas, pois somente o efeito combinado é admitido ou quando o conceito de desenvolvimento instantâneo permanente, tensões irreversíveis está em desacordo com a teoria da plasticidade ou resultados experimentais.

Sabe-se ainda que a viscoplasticidade considera que a evolução das deformações irreversíveis não ocorre de modo imediato, mas ao longo do tempo, abrangendo os fenômenos de fluência, com deformações crescentes à tensão constante, e relaxação, com tensões decrescentes à deformação constante. Nos metais os efeitos térmicos surgem, em geral, com temperaturas acima de um terço do ponto de fusão. Para ilustrar esse fenômeno, De Souza Neto et al. (2008) apresenta resultados experimentais para barras metálicas submetidas à tensões uniaxiais em elevadas temperaturas.

A Fig. 2.11 (a) refere-se ao ensaio de tensão-deformação para diferentes taxas de deformação. Por outro lado a figura 2.11 (b) esquematiza o fenômeno da fluência com a evolução das tensões plásticas ao longo do tempo, onde o aço foi ensaiado com três níveis de tensão (baixo, moderado e elevado) durante longos períodos de tempo. Por último na 2.11 (c) caracteriza-se a relaxação, onde dependência do tempo é analisada pelo decaimento da tensão.

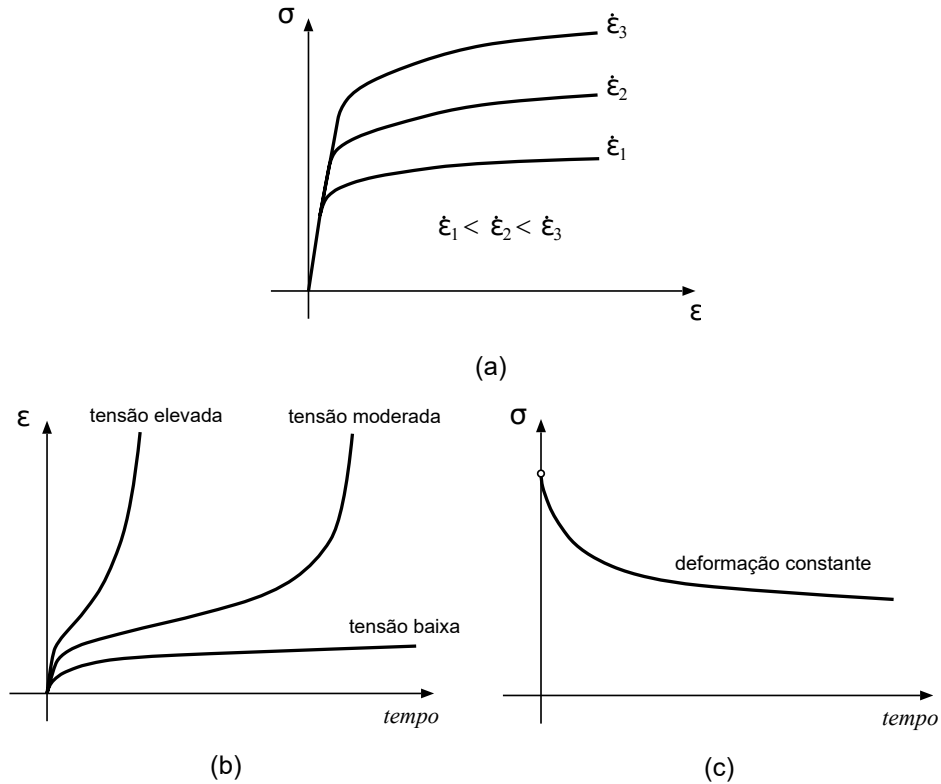


Figura 2.11 – Teste de tensão uniaxial em barras metálicas sujeitas a elevadas temperaturas. Adaptada de De Souza Neto et al. (2008).

A decomposição da deformação axial total é a soma de um componente elástico ε_e (recuperável) e um plástico ε_p (permanente):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.85)$$

Além disso a tensão axial σ é assumida relacionando a componente elástica de deformação e o módulo de Young:

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (2.86)$$

A existência de um domínio elástico, para tensão na zona em que o comportamento é puramente elástico, é representado por termos de funções de ruptura:

$$f(\sigma, f_u) = |\sigma| - f_u \quad (2.87)$$

onde f_u é tensão de ruptura. A diferença primordial entre o modelo elastoplástico e o viscoplástico está na definição da regra de fluxo, que descreve a evolução de ε_p . A regra de fluxo viscoplástico pode ser postulada de modo semelhante ao caso da deformação independente do tempo:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}(\sigma, f_u) \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.88)$$

λ é denominado multiplicador plástico e sgn é a função sinal definida por:

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1 & se \sigma \geq 0 \\ -1 & se \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

Na teoria elastoplástica, a taxa de deformação plástica é considerada uma taxa pseudo-temporal. Em outras palavras, $\dot{\epsilon}_p$ é a derivada da deformação plástica em relação a um parâmetro utilizado exclusivamente para descrever a sequência dos eventos. Por outro lado, na teoria viscoplástica, a escala temporal real é relevante. Nesse caso, a taxa de deformação plástica (Eq. 2.89) é a derivada em relação ao tempo real de ϵ_p . O multiplicador plástico é definido por:

$$\dot{\gamma}(\sigma, f_u) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{f_u} \right)^{1/\varepsilon_s} - 1 \right] & se f(\sigma, f_u) \geq 0 \\ 0 & se f(\sigma, f_u) < 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

onde μ é parâmetro de viscosidade e ε_s a taxa de sensibilidade, constantes que foram introduzidas por Péric (1993). Em linhas gerais, μ e ε_s são diretamente proporcionais à temperatura.

O modelo viscoplástico multidimensional é baseado na formulação uniaxial, seguindo os mesmos passos das Eqs. 2.85 a 2.88, considerando o endurecimento isotrópico independente. Por sua vez esta metodologia utiliza as seguintes equações:

$$\sigma = \mathbf{D}_e : \varepsilon_e \quad (2.91)$$

Logo:

$$f(\sigma, f_u) = q(\mathbf{s}(\sigma)) - f_u \quad (2.92)$$

Sendo a tensão equivalente de von Mises expressa por:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad (2.93)$$

Finalmente:

$$\xi = \{\sigma \mid F(\sigma, f_u) < 0\} \quad (2.94)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (2.95)$$

onde “:” representa o operador de dupla contração. Conforme Pereira (2018) alguns dos modelos viscoplásticos mais citados na literatura são: Plásticos de Bingham (1972), modelo de Herschel-Bulkley (Bird, 1982) e modelo de Papanastasiou (Papanastasiou, 1987). O primeiro considera a relação linear entre tensão de cisalhamento (τ) e a taxa de deformação (γ) a partir do ponto em que o material alcança a tensão limite de escoamento. Em contraposição, o modelo

de Herschel-Bulkley, ou modelo de Bingham generalizado, assume relação não-linear entre τ e γ . Já o método de Papanastasiou adicionando um termo exponencial para amortecer o termo da tensão limite de escoamento.

2.7.3 - Modelo Viscoelástico

Os materiais viscoelásticos são aqueles que a relação tensão-deformação depende do tempo. Alguns modelos clássicos são os de Maxwell, Voigt, Zener, entre outros. Por sua vez Pimentel (2014) menciona que o comportamento viscoelástico são encontrados em polímeros sintéticos, madeira, tecido humano, concreto, concreto asfáltico, metais submetidos à altas temperaturas etc. Estes materiais apresentam propriedades mecânicas que obedecem à lei de Hooke para a elasticidade, e à lei de Newton para a viscosidade. Em uma direção a lei de Hooke pode ser definida como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.96)$$

Definindo J como o inverso do módulo de elasticidade (E), é possível reescrever a deformação específica (ε) pela seguinte equação:

$$\varepsilon = J\sigma \quad (2.97)$$

Duas propriedades mecânicas são fundamentais para descrever os materiais viscoelásticos, a fluência, que trata do aumento lento e progressivo de deformação ao longo do tempo, mesmo que a tensão permaneça constante, e a relaxação, que equivale ao decréscimo de tensão ao longo do tempo sob deformação constante. Suponha que o histórico de tensões σ , dependente do tempo t , pode ser representada por:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad (2.98)$$

onde $H(t)$ é uma função degrau unitária definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

Por outro lado, ε para um material viscoelástico aumenta com o tempo, logo a Eq. 2.97 pode ser reescrita como:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.100)$$

Na Fig. 2.12 é apresentado o comportamento de um material viscoelástico submetida a um ensaio de fluência, onde a tensão aplicada permanece constante (σ_0) e o tempo varia de t até t_2 . Nesta ilustração é analisada a deformação por fluência lenta (ε_c) e a deformação elástica

instantânea (ε_e). Ademais no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ representa-se o período de fluência e para $t_1 \leq t \leq t_2$ tem-se o estágio de recuperação.

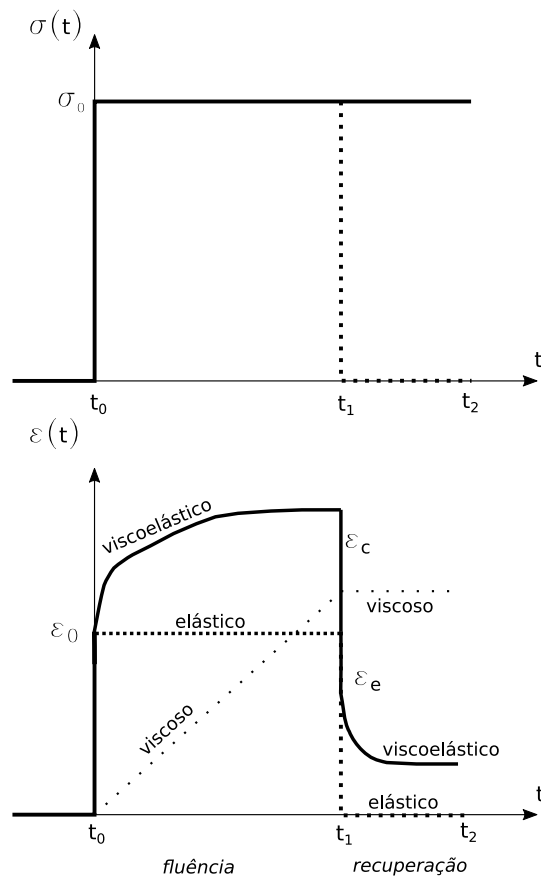


Figura 2.12 – Comportamento da tensão e deformação ao longo do tempo sob o efeito da fluência e recuperação.

O mapeamento da tensão pode ser realizado aplicando a Eq. 2.98, logo, reescrevendo-a para o trecho $t < t_1$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) \quad (2.101)$$

Já quando investiga-se o trecho $t > t_1$ a equação para tensão é caracterizada por:

$$\sigma(t) = \sigma_0 [H(t - t_0) - H(t - t_1)] \quad (2.102)$$

Por outro lado a Fig. 2.13 ilustra o ensaio de relaxação.

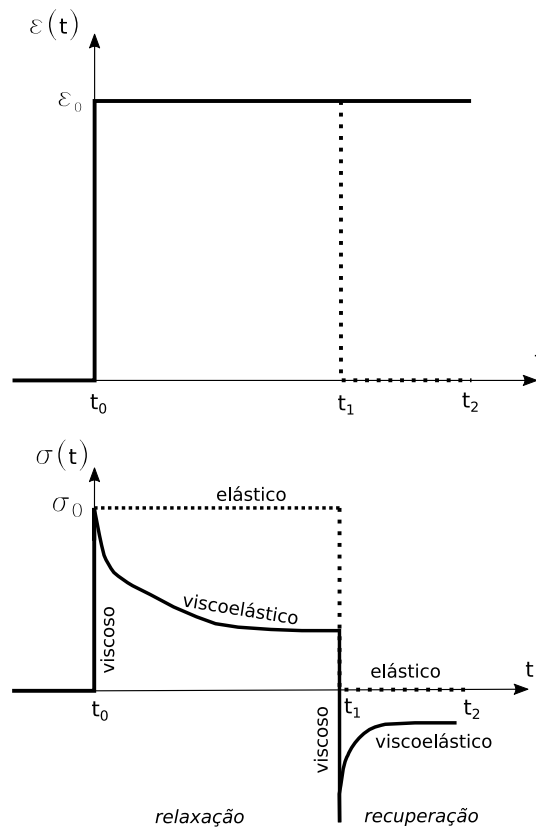


Figura 2.13 – Comportamento da tensão e deformação ao longo do tempo sob o efeito da relaxação e recuperação.

O módulo de relaxação pé definido como:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (2.103)$$

A Eq. 2.103 é independente do nível de deformação. Finalmente as equações a seguir representam o histórico de deformação para o trecho sob relaxação e o de recuperação.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) \quad (2.104)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 [H(t - t_0) - H(t - t_1)] \quad (2.105)$$

2.8 - EFEITOS TÉRMICOS EM ESTRUTURAS DO TIPO CASCA

Devido aos significativos efeitos da temperatura sobre o comportamento das estruturas, especialmente placas e cascas, é essencial analisar essas estruturas considerando a variação do

campo de temperatura (Masoodi e Arabi, 2018). A análise termomecânica permite avaliar as tensões térmicas e deformações em cascas, fatores críticos que influenciam diretamente na integridade e desempenho estrutural. Essa análise é particularmente importante nas seguintes situações:

- Projeto de estruturas, como: caldeiras, vasos de pressões, tubulações nucleares e aeronaves supersônicas;
- Estruturas submetidas à ação térmica, seja pelos produtos armazenados ou pela variação da temperatura do meio ambiente, tendem a se deformar e logo, gerar esforços adicionais na elementos estruturais;
- A resolução de problemas termoelásticos requer a modificação das equações constitutivas da teoria geral de cascas, ajustando-as para considerar os efeitos térmicos. Isso inclui a adaptação dos modelos de material para incorporar a expansão térmica e as mudanças nas propriedades mecânicas com a temperatura;
- Quando a geometria da casca é simples e o material é isotrópico, e as distribuições de temperaturas e cargas na estrutura são igualmente simples, é possível determinar as configurações de tensões e deslocamentos de forma analítica. No entanto, à medida que as dimensões e as grandezas se tornam mais complexas, a obtenção de resultados por meio de métodos numéricos torna-se mais viável e necessária;
- Em estruturas onde há um elevado gradiente térmico, como em flares e vasos de pressão, a análise precisa das tensões térmicas é crucial para prever e evitar falhas estruturais. Gradientes térmicos significativos podem levar a tensões localizadas que, se não forem adequadamente mitigadas, podem resultar em deformações plásticas.

Dessa forma, ressalta-se a importância deste estudo, que visa analisar, com uma formulação termomecânica acoplada, as tensões em um vaso de pressão e em estruturas do tipo flare, submetidas a um elevado gradiente térmico. Esta análise é crucial para garantir a segurança e a eficiência dessas estruturas em condições extremas. Ao integrar os efeitos térmicos e mecânicos, a metodologia proposta fornece uma visão abrangente do comportamento estrutural, permitindo a identificação de potenciais pontos de falha e a implementação de medidas preventivas para assegurar a longevidade e a integridade das estruturas analisadas.

3 - EMBASAMENTO TEÓRICO

Nesse capítulo são abordados os aspectos fundamentais da formulação e implementação dos elementos de casca isoparamétricos. Inicialmente, é discutida a teoria básica dos elementos de casca, incluindo a derivação das equações governantes e as técnicas de discretização espacial.

3.1 - FORMULAÇÕES EM ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS E CASCAS

A análise de cascas apresenta várias dificuldades principais, incluindo:

- **Geometria Complexa:** É difícil modelar com precisão as cascas devido às suas formas curvas e complexas. O comportamento estrutural pode ser significativamente afetado por variações mínimas na forma ou espessura.
- **Carregamentos Não Uniformes:** Carregamentos não uniformes, como variações térmicas, pressão interna e externa e forças pontuais, são frequentemente aplicados às cascas. Essas condições dificultam a análise devido à distribuição não homogênea de tensões e deformações.
- **Efeitos de Bordo:** As condições de contorno nas bordas das cascas podem introduzir concentrações de tensão e efeitos locais difíceis de prever e analisar.
- **Interação de Modo de Falha:** As cascas podem falhar de várias maneiras, como flambagem, ruptura por tração ou colapso por cisalhamento. A análise deve considerar a interação desses modos de falha.
- **Análise Não Linear:** Muitas vezes é necessário usar a análise não linear devido aos grandes deslocamentos e rotações e às relações não lineares entre tensões e deformações em altas temperaturas. Esses fatores aumentam a complexidade computacional.
- **Propriedades de Material Variáveis:** As propriedades de um material podem variar ao longo da casca devido a processos de fabricação, tratamentos térmicos ou condições operacionais. Isso significa que o material deve ser caracterizado com precisão.

O MEF é amplamente utilizado para superar esses desafios devido à sua versatilidade na simulação de fenômenos físicos. A utilização de elementos curvos ou planos apropriados

permite obter resultados satisfatórios, substituindo a geometria real da estrutura e a configuração da carga por aproximações equivalentes, alcançando resultados que se aproximam dos valores reais.

Para compreender o comportamento mecânico das cascas, é fundamental entender as teorias que regem o estudo das placas. A seguir, são abordados alguns elementos de placas encontrados na literatura, proporcionando uma base teórica essencial para a análise de estruturas de cascas.

3.1.1 - Elementos de Placa

As hipóteses fundamentais adotadas da Teoria de Kirchhoff e da Teoria de Reissner-Midlin são:

- Nos pontos do plano médio os deslocamentos são nulos;
- Todos os pontos contidos em um vetor normal ao plano médio possui o mesmo deslocamento vertical;
- A tensão normal $\sigma_z = 0$;
- Os pontos localizados sobre a normal ao ponto médio da placa antes da deformação, permanecem sobre a mesma reta, não necessariamente normal ao plano médio.

3.1.1.1 - Elemento de Placa MZC

Este elemento de placa, denominado MZC, foi estudado por Melosh (1961) e Zienkiewicz e Cheung (1964). Trata-se de um elemento finito utilizado na análise de placas e cascas, combinando características de elementos de membrana e de flexão para modelar com precisão o comportamento estrutural de placas submetidas a diversos carregamentos. O MZC é capaz de capturar tanto as tensões normais quanto as de cisalhamento, permitindo uma análise detalhada das deformações e tensões nas placas. Sua formulação considera a compatibilidade dos deslocamentos e a satisfação das condições de contorno, proporcionando resultados precisos para problemas estruturais complexos. Este é um elemento plano com quatro nós, cada um possuindo três graus de liberdade. Nesse contexto, Oñate (2013) descreveu uma metodologia detalhada para a implementação desse tipo de elemento, considerando as componentes de deslocamento da placa deformada, conforme ilustrado na Fig. 3.1.

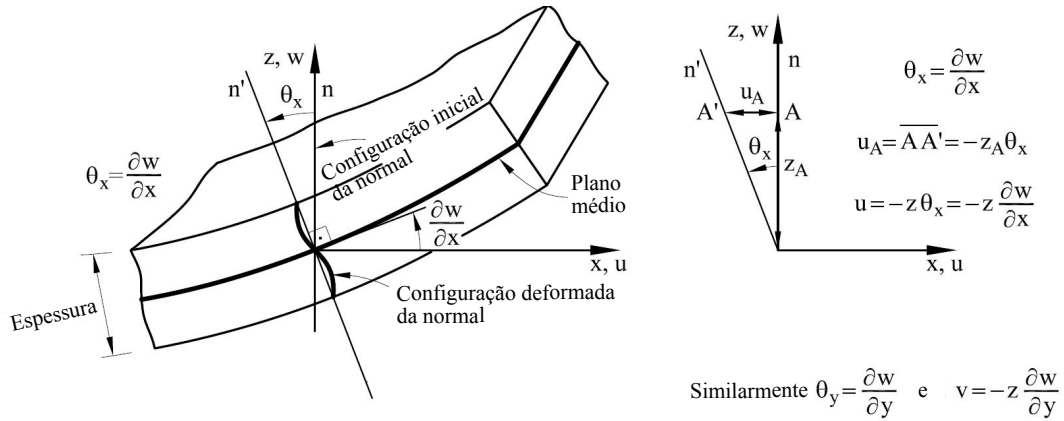


Figura 3.1 – Deformação da placa e campo de deslocamento. Adaptada de Oñate (2013).

Pela figura acima, tem-se que o campo de deslocamento para placa é:

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.3)$$

onde w é o deslocamento vertical dos pontos no plano médio, θ_x e θ_y são as rotações que coincidem com os ângulos seguidos pelos vetores normais contidos nos planos xz e yz , respectivamente. Estes ângulos podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5)$$

Já o vetor de deslocamentos (\mathbf{u}) num pontos contido no plano médio da placa por ser representado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T \quad (3.6)$$

Finalmente o campo de deslocamentos pode ser reescrito como:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.9)$$

Para \mathbf{u} tem-se:

$$\mathbf{u} = \left[w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \quad (3.10)$$

No estudo da placa, o vetor deformação é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

As expressões de deformação-deslocamento para os termos do tensor 3.11 são representados por:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

$$\tau_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

Substituindo as Eqs. 3.12, 3.13 e 3.14 em 3.11, e realizando algumas manipulações matemáticas, obtém-se:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (3.15)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é definido como o vetor generalizado de deformação, ou vetor de curvatura. Já a relação tensão-deformação é expressa pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.16)$$

Assumindo que $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$ e $\tau_{yz} = 0$, a matriz constitutiva pode ser representada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Por sua vez o vetor resultante de tensão é definido por:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.18)$$

$\hat{\mathbf{D}}$ para materiais homogêneos é dado por:

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{t^3}{12} \mathbf{D} \quad (3.19)$$

O vetor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, descrito anteriormente na Eq. 3.15, pode ser representado, para a formulação em

elementos finitos com quatro nós, por:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}_{(e)} \quad (3.20)$$

onde:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \left[w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T \quad (3.23)$$

Substituindo a Eq 3.20 em 3.18:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B} \mathbf{a}_{(e)} \quad (3.24)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para um elemento pode ser escrita por:

$$\int \int_{A^e} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA = \int \int_{A^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \sum_{i=1}^3 \delta \mathbf{a}_i^{(e)} \mathbf{q}_i^{(e)} \quad (3.25)$$

onde:

$$\delta \mathbf{a}_i^{(e)} = \left[\delta w_i \quad \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T \quad (3.26)$$

$$\mathbf{t} = \left[f z_i \quad , m x_i \quad m y_i \right]^T \quad (3.27)$$

$$\mathbf{q}_i^{(e)} = \left[F z_i \quad M x_i \quad M y_i \right] \quad (3.28)$$

A saber que $\delta \mathbf{a}_i^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos virtuais, \mathbf{t} é o vetor forças internas e $\mathbf{q}_i^{(e)}$ o vetor de forças externas. Finalmente a matriz de rigidez do elemento é:

$$\mathbf{k}_{ij} = \int \int_{A^e} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j dx dy \quad (3.29)$$

3.1.1.2 - Elemento de Placa pela Teoria de Reissner-Mindlin

Diferente da Teoria de Kirchhoff, a teoria proposta por Reissner (1945) e Mindlin (1951) assume que o vetor normal à placa não permanece ortogonal no plano médio de deformação, portanto, esforços de cisalhamento devem ser considerados, como é observado na Fig. 3.2.

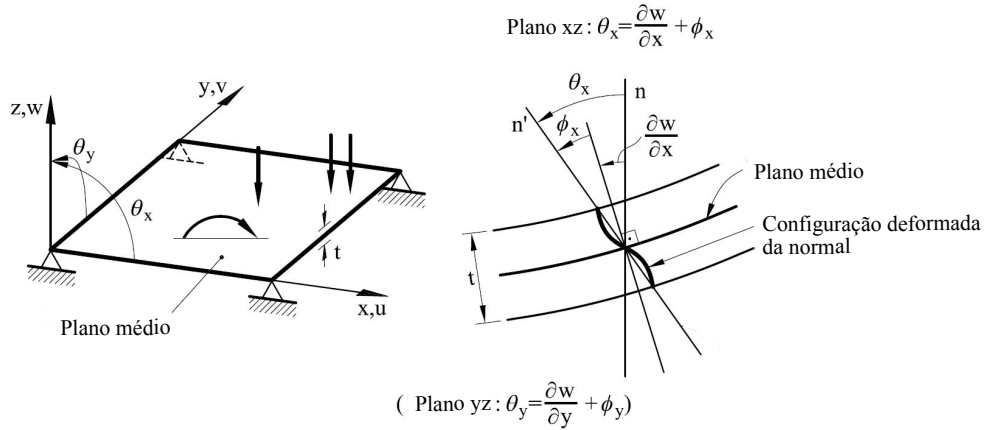


Figura 3.2 – Deformação da placa e campo de deslocamento considerando a Teoria de Reissner-Mindlin. Adaptada de Oñate (2013).

Pela consideração dos esforços cisalhantes, surgem modificações nas matrizes **B** e **D** da formulação em elementos finitos, e conseqüentemente na matriz **k**. A matriz de rigidez do elemento é a combinação de duas, e está descrita pelas seguintes equações:

$$\mathbf{k}_{bij} = \int \int_{A^e} \mathbf{B}_{bi}^T \hat{\mathbf{D}}_b \mathbf{B}_{bj} dA \quad (3.30)$$

$$\mathbf{k}_{sij} = \int \int_{A^e} \mathbf{B}_{si}^T \hat{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}_{sj} dA \quad (3.31)$$

A matriz \mathbf{k}_{bij} abrange os esforços de flexão, já a matriz \mathbf{k}_{sij} corresponde aos esforços cortante, onde:

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_b = \frac{5}{6} th GI_2 \quad (3.34)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_s = \frac{E th^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Os elementos finitos de placa adicionais encontrados na literatura incluem Adini (A), Tocher-T9, BFS-16 e ACM, entre outros, além das formulações mencionadas anteriormente. O elemento Adini (A) foi desenvolvido por Adini e Clough em 1961 e é um elemento finito quadrilateral. Foi projetado para a análise de placas usando uma formulação de deslocamento baseada em funções de forma bilineares. É usado em problemas de flexão de placas com

precisão moderada, conhecido por sua facilidade e eficiência computacional. É adequado para análises de estruturas com condições relativamente simples de contorno e carregamentos.

O Tocher-T9, desenvolvido em 1963, é um elemento triangular de nove nós utilizado em análises de flexão de placas e cascas. Os nove nós permitem uma representação mais precisa de variáveis de campo, como deslocamentos e rotações, em comparação com elementos de ordem inferior. É usado em uma variedade de aplicações de engenharia e pode modelar placas espessas e finas.

Em 1980, Batoz, Bathe e Ho desenvolveram o elemento quadrilateral BFS-16, que usa uma formulação baseada em funções de interpolação bicúbicas. Este componente aumenta a precisão das análises de flexão de placas e é particularmente útil para questões que levam em consideração a deformação de cisalhamento. É uma ferramenta comum para análises de estruturas de placas em engenharia civil e mecânica.

O elemento triangular ACM, criado por Argyris, Chrisfield e Mlejnek em 1981, é conhecido pela capacidade de lidar com a flexão de placas espessas e finas. O produto é adequado para uma ampla gama de problemas de engenharia estrutural porque utiliza funções complexas e oferece uma boa precisão em análises de flexão de placas, capturando com precisão os efeitos de flexão e corte.

3.1.2 - Elementos Planos Para Cascas Com Esforço Cortante Imposto

Diversos autores, como Ventsel e Krauthammer (2001), Szilard (2004), Oñate (2013), entre outros, abordam os elementos finitos de cascas considerando as teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. Essas teorias também são amplamente aplicadas no desenvolvimento de elementos de placa. Para uma melhor compreensão dessas teorias, inicialmente foram estudados os elementos finitos de placa.

O tipo de elemento adotado a seguir é o lagrangiano quadrangular. A formulação detalhada baseia-se nos trabalhos de Zienkiewicz (1991) e Oñate (2013). Para aplicar o PTV na análise de uma placa utilizando a formulação de elementos finitos, consideramos a relação entre as tensões, deformações, forças internas e externas. A equação geral do PTV pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \Delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.36)$$

Na Fig. 3.3 são apresentados os campos de deslocamentos para um elemento localizado no plano médio:

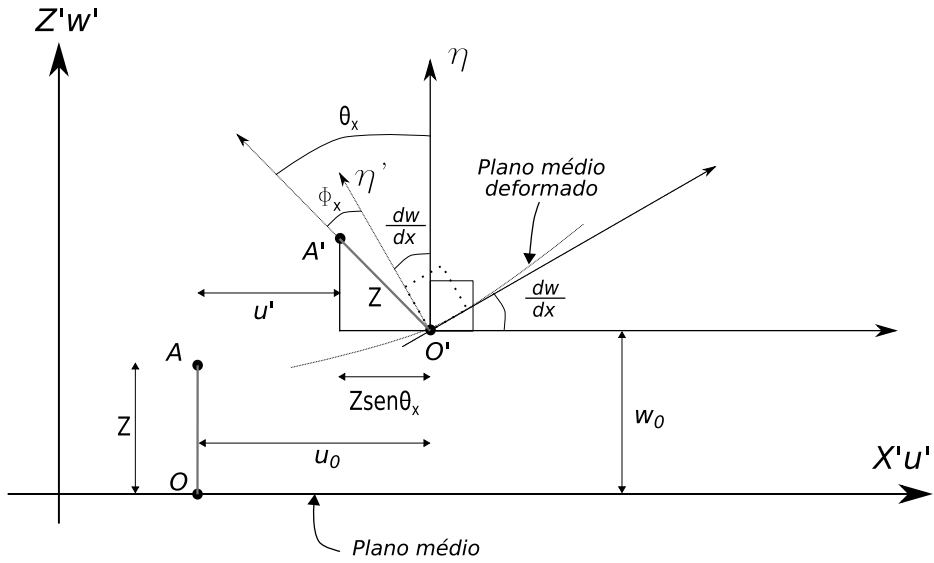


Figura 3.3 – Campos de deslocamentos para um elemento no plano médio deformado. Adaptada de Oñate (2013).

Assim sendo, os campos de deslocamentos são representados por:

$$\mathbf{u}'(x', y', z') = u'_0(x', y') - z' \theta'_x(x', y') \quad (3.37)$$

$$\mathbf{v}'(x', y', z') = v'_0(x', y') - z' \theta'_y(x', y') \quad (3.38)$$

$$\mathbf{w}'(x', y', z') = w'_0(x', y') \quad (3.39)$$

Logo o vetor de movimento do ponto A é descrito por:

$$\mathbf{u}' = [u'_0, v'_0, w'_0, \theta'_x, \theta'_y] \quad (3.40)$$

Por outro lado os campos de deformações são representados por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Como a tensão normal em z , conclui-se que a $\varepsilon_z = 0$. Portanto a Eq. 3.41 é reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_0}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_0}{\partial y'} + \frac{\partial v'_0}{\partial x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\ -z' \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\ -z' \left(\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial w'_0}{\partial x'} - \theta_{x'} \\ \frac{\partial w'_0}{\partial y'} - \theta_{y'} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

ou ainda:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c$ são, respectivamente, vetores de deformação generalizados de membrana, flexão e cortante, sendo expressos por:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m = \left\{ \frac{\partial u'_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v'_0}{\partial y} \quad \frac{\partial u'_0}{\partial y} + \frac{\partial v'_0}{\partial x} \right\}^T \quad (3.44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f = \left\{ -\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \quad -\frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \quad -\left(\frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \right\}^T \quad (3.45)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c = \left\{ \frac{\partial w'_0}{\partial x'} - \theta_{x'} \quad \frac{\partial w'_0}{\partial y'} - \theta_{y'} \right\} \quad (3.46)$$

3.1.2.1 - Relações constitutivas

A equação constitutiva, considerando $\sigma_z = 0$, é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.47)$$

com $\mathbf{D} = \mathbf{f}(E, \nu)$. Colocando $\boldsymbol{\sigma}$ na forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_f \\ \sigma'_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_f & 0 \\ 0 & D'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

\mathbf{D}'_f e \mathbf{D}'_c são determinados pela seguinte equação:

$$\mathbf{D}'_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{D}'_c = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \alpha_s & 0 \\ 0 & \alpha_s \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Para elementos com espessura constante, $\alpha_s = 5/6$. Já $\boldsymbol{\sigma}'$ pode ser representado em termos de $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c$, portanto:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_f & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m + z\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma}'_f = \mathbf{D}'_f (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m + z\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f);$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_c = \mathbf{D}'_c \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c.$$

De modo análogo a relação constitutiva em coordenadas locais pode ser obtida por:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}}'_c \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \quad (3.53)$$

ou também:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}'_m & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{D}}'_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{D}}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{D}}'_m = th\mathbf{D}'_f;$$

$$\hat{\mathbf{D}}'_f = \frac{th^3}{12}\mathbf{D}'_f;$$

$$\hat{\mathbf{D}}'_c = th\mathbf{D}'_c.$$

Sabendo que th equivale a espessura do elemento. Substituindo a Eq. 3.53 na Eq. 3.36:

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^T \hat{\mathbf{D}}' \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.55)$$

3.1.2.2 - Formulação em Elementos Finitos

A formulação em elementos finitos baseia-se em aproximar o termo da esquerda da Eq. 3.55 em:

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^T \hat{\mathbf{D}}' \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' d\Omega \approx \sum_i^m \sum_j^n \sum_k^p \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^T \hat{\mathbf{D}}' \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \quad (3.56)$$

Aproximando u , v e w e suas correspondentes derivadas parciais pelas funções de forma:

$$\mathbf{u} = \sum N_i u_i \quad \mathbf{v} = \sum N_i v_i \quad \mathbf{w} = \sum N_i w_i \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i$$

Substituindo a Eq. 3.58 em 3.42:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_f \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_c \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} u'_{0i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} v'_{0i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} u'_{0i} + \frac{\partial N_i}{\partial x'} v'_{0i} \\ \dots \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \theta_{x'i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \theta_{y'i} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \theta_{x'i} - \frac{\partial N_i}{\partial x'} \theta_{y'i} \\ \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x'} w'_{0i} - N_i \theta_{x'i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} w'_{0i} - N_i \theta_{y'i} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

logo, tem-se:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \begin{bmatrix} B'_1 & B'_2 & \dots & B'_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{a}'^{(e)} \quad (3.60)$$

Por sua vez os vetores $\{a'_i\}$ e $\{B'_i\}$ são definidos respectivamente por:

$$\mathbf{a}'_i = \{u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta_{x'i} \quad \theta_{y'i}\}^T \quad (3.61)$$

$$\mathbf{B}'_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}'_{mi} \\ \mathbf{B}'_{fi} \\ \mathbf{B}'_{ci} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

onde:

$$\mathbf{B}'_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{B}'_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{B}'_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Sabendo que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{a}'^n \rightarrow \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}' \delta \mathbf{a}'^n$, aplica-se a Eq. 3.61 na Eq. 3.55:

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \cdot \hat{\mathbf{D}}' \cdot \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' d\Omega = \delta \mathbf{a}'^n \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \cdot \hat{\mathbf{D}}' \cdot \mathbf{B}' d\Omega \mathbf{a}'^n \quad (3.66)$$

O segundo termo da Eq. 3.66 é definido como a matriz de rigidez \mathbf{k} do elemento:

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \cdot \hat{\mathbf{D}}' \cdot \mathbf{B}' d\Omega \quad (3.67)$$

3.1.3 - Elementos Curvos

A análise de cascas é desafiadora devido a fatores como irregularidades em sua forma e espessura, além da aplicação de carregamentos não uniformes. O Método dos Elementos Finitos destaca-se nesse contexto pela sua versatilidade em simular tais fenômenos físicos. Observa-se pela Fig. 3.4 é possível empregar elementos curvos ou planos adequados e substituir a geometria real da estrutura e a configuração da carga por aproximações precisas, alcançando resultados que se alinham estreitamente aos valores reais.

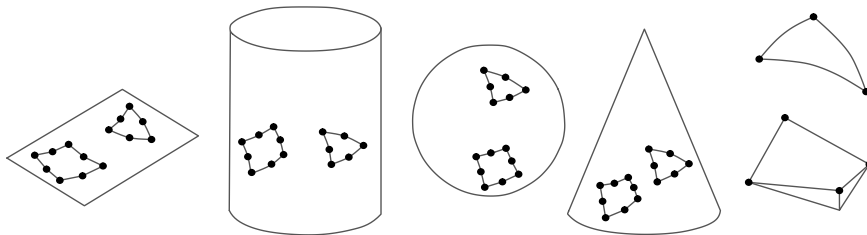


Figura 3.4 – Aplicação de elementos curvos em diferentes superfícies de cascas.

O campo de deslocamentos para o elemento de casca curvo é ilustrado na Fig. 3.5.

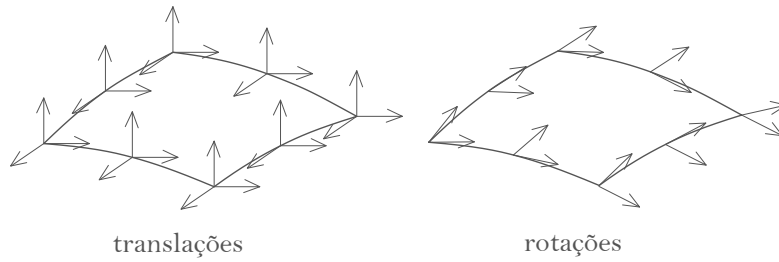


Figura 3.5 – Campo de deslocamentos para o elemento de casca. Adaptada de Solheiro (2017).

As variáveis básicas dos nós da casca são as translações u_x , u_y e u_z e as rotações θ_x e θ_y , e são representadas por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

Já a espessura da casca pode ser uniforme ou variável, conforme Fig. 3.6.

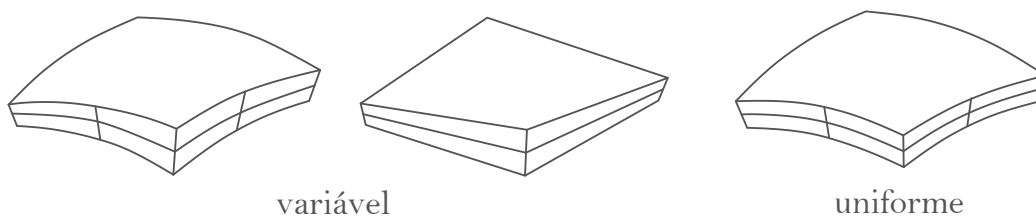


Figura 3.6 – Cascas com espessuras uniforme e variáveis. Adaptada de Solheiro (2017).

A variação não uniforme da espessura do elemento depende da ordem de interpolação: linear, quadrática, cúbica, etc. Atualmente os elementos de cascas mais utilizados nos softwares são: triangular de três, seis e nove nós, e quadrilateral de quatro, oito ou 12 nós. A Fig. 3.7 exibe alguns elementos de cascas convencionais.

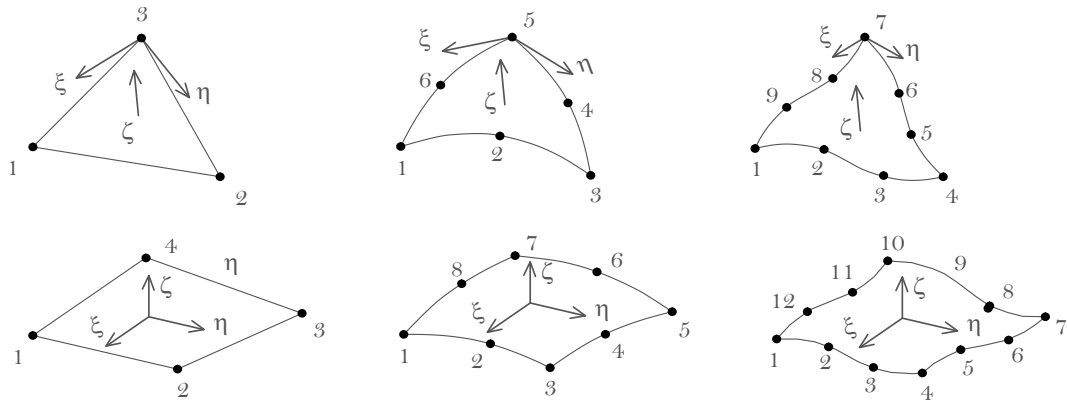


Figura 3.7 – Tipos usuais de elementos finitos curvos de casca. Adaptada de Solheiro (2017).

Estas formulações geralmente possuem grande complexidade matemática. A proposta deste estudo é desenvolver um elemento de casca curvo isoparamétrico, introduzindo uma abordagem mais direta e organizada que facilite a implementação computacional.

4 - METODOLOGIA

Neste capítulo descreve-se a metodologia empregada no desenvolvimento deste estudo. Inicia-se com uma análise da formulação termomecânica acoplada a ser utilizada na implementação computacional. Em seguida, são examinadas as formulações do Método dos Elementos Finitos aplicadas aos elementos de casca. Posteriormente é introduzida a modelagem constitutiva utilizada para o aço, permitindo a simulação dos efeitos termomecânicos em conjunto com a plasticidade do material. Também serão apresentadas as ferramentas computacionais adotadas para a implementação e validação.

4.1 - ANÁLISE TERMOMECÂNICA ACOPLADA

A análise termomecânica acoplada é uma abordagem que considera, de forma simultânea, os efeitos da temperatura e das cargas mecânicas em um sistema ou material. Essa análise investiga como as variações de temperatura influenciam o comportamento mecânico de uma estrutura e vice-versa. Em resumo, a análise termomecânica acoplada permite prever o comportamento de materiais e estruturas sob condições variáveis de temperatura e carga.

A seguir é apresentada a dedução matemática utilizada na implementação computacional da análise termomecânica acoplada, baseada no trabalho de Carter e Booker (1989).

4.1.1 - Equilíbrio Mecânico

O equilíbrio mecânico para análise termomecânica acoplada pode ser definido por:

$$\bar{\nabla} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (4.1)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é a taxa de tensão normal e $\dot{\mathbf{b}}$ é a taxa de forças de corpo. Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais na Eq. 4.1:

$$\int \mathbf{u}^* \cdot \bar{\nabla} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV + \int \mathbf{u}^* \cdot \dot{\mathbf{b}} dV = 0 \quad (4.2)$$

Por sua vez utilizando a regra do produto:

$$\mathbf{u}^* \bar{\nabla} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\nabla} (\mathbf{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \bar{\nabla} \mathbf{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. 4.3 na Eq. 4.2:

$$\int \mathbf{u}^* (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) dS - \int \bar{\nabla} \mathbf{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV + \int \mathbf{u}^* \cdot \dot{\mathbf{b}} dV = 0 \quad (4.4)$$

onde \mathbf{u}^* é o vetor com as componentes dos deslocamentos virtuais, \mathbf{n} é o vetor normal à superfície, dS é o diferencial de área e dV é o diferencial de volume.

4.1.2 - Relações de tensão, temperatura, deslocamento e deformação

Para aplicar o Método dos Elementos Finitos na Eq. 4.4, são requeridas algumas relações matemáticas. A primeira delas, expressa a variação de temperatura representada por:

$$\theta = T - T_0 \quad (4.5)$$

onde T é temperatura atual e T_0 é temperatura inicial, ambas em Kelvin. Então:

$$\dot{\theta} = \dot{T} \quad (4.6)$$

Por outro lado, o vetor de tensões totais que leva em conta os efeitos térmicos é expresso por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} - \beta \dot{\theta} \boldsymbol{\delta} \quad (4.7)$$

onde \mathbf{D} é o tensor constitutivo, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformação, $\boldsymbol{\delta}$ é o delta de Kronecker e “:” representa o operador de dupla contração. Ademais a tensão térmica β para deformação 3D é dada pela equação a seguir:

$$\beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad (4.8)$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material, E é o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson. Já $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \beta \dot{\theta} \boldsymbol{\delta} \quad (4.9)$$

Utilizando a notação matricial, é possível reescrever a Eq. 4.9 como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\beta \dot{\theta} \mathbf{m} + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{m}^T = \langle 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle$.

Para o caso de tensão-plana, tem-se a seguinte relação para as tensões:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y \quad (4.11)$$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y + \nu\sigma_x \quad (4.12)$$

Substituindo Eq. 4.12 na Eq. 4.11 obtêm-se:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + E\nu\varepsilon_y + \nu^2\sigma_x \quad (4.13)$$

Realizando algumas simplificações:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (4.14)$$

Por sua vez a deformação nas direções x , y e z devido à temperatura são representadas por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\Delta T \quad (4.15)$$

Substituindo os termos das deformações apresentados na Eq. 4.15 na Eq. 4.14:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\alpha\Delta t + \nu\alpha\Delta t) \quad (4.16)$$

Mais uma vez, após algumas manipulações matemáticas chega-se a seguinte equação para tensão:

$$\sigma_x = \frac{E\alpha}{1-\nu}\Delta t \quad (4.17)$$

De modo análogo encontra-se σ_y , definida por:

$$\sigma_y = \frac{E\alpha}{1-\nu}\Delta t \quad (4.18)$$

Sabendo que para tensão-plana $\sigma_z = 0$, é possível escrever as tensões na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E\alpha}{1-\nu}\Delta t \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

onde a tensão térmica $\beta = \frac{E\alpha}{1-\nu}$ e $\mathbf{m}^T = \langle 1, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$.

4.1.3 - Elementos finitos na equação do equilíbrio mecânico

Aplicando a discretização em elementos finitos na Eq. 4.4:

$$\int \mathbf{U}^{*T} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{t}} \, dS - \int \mathbf{U}^{*T} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \beta \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m}) \, dV + \int \mathbf{U}^{*T} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{b}} \, dV = 0 \quad (4.20)$$

onde \mathbf{U}^* é o vetor de deslocamentos virtuais, \mathbf{N} é o vetor das funções de forma, \mathbf{t} representa a superfície tracionada e \mathbf{B} é a matriz deformação-deslocamento. Descartando os deslocamentos virtuais e realizando algumas manipulações obtém-se:

$$\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \dot{\mathbf{U}} - \int \mathbf{B}^T \beta \mathbf{m} \mathbf{N}^T \, dV \dot{\boldsymbol{\theta}} = \int \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{b}} \, dV + \int \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{t}} \, dS \quad (4.21)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}$ e:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \quad (4.22)$$

$$\mathbf{C} = - \int \mathbf{B}^T \beta \mathbf{m} \mathbf{N}^T \, dV \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{b}} \, dV + \int \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{t}} \, dS \quad (4.24)$$

4.1.4 - Conservação de energia térmica

A equação da conservação da energia térmica é descrita por:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho c_v \dot{\boldsymbol{\theta}} + T \beta \epsilon_v = 0 \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla\theta$ é o fluxo de calor dado pela Lei de Fourier, \mathbf{k} a matriz de condutividade térmica diagonal 3x3, ρ é a densidade do material; c_v é o calor específico e ϵ_v é a deformação volumétrica. Desde que a variação da temperatura seja pequena quando comparada à temperatura ambiente absoluta, T pode ser aproximado pela constante T_0 . Aplicando a abordagem análoga ao PTV feita anteriormente, a Eq. 4.25 é representada por:

$$\boldsymbol{\theta}^* \nabla \mathbf{q} = \nabla (\boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathbf{q}) - \nabla \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathbf{q} \quad (4.26)$$

Integrando sobre o domínio e substituindo a lei de Fourier, obtém-se:

$$\int \boldsymbol{\theta}^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dV + \int \nabla \boldsymbol{\theta}^* \cdot (-\mathbf{k}\nabla\theta) \, dV = \int \boldsymbol{\theta}^* \rho c_v \dot{\boldsymbol{\theta}} \, dV + \int \boldsymbol{\theta}^* T_0 \beta (\mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \, dV \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \dot{q}_\theta$ representa o fluxo de calor normal ao limite do domínio.

4.1.5 - Elementos Finitos na equação da conservação de energia térmica

A Eq. 4.27 pode ser reescrita aplicando o MEF, logo:

$$\int \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}^* \dot{q}_\theta \, dS + \int \mathbf{B}_\theta \boldsymbol{\theta}^* (\mathbf{k} \mathbf{B}_\theta \boldsymbol{\theta}) \, dV + \int \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}^* \rho c_v \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \, dV + \int \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}^* T_0 \boldsymbol{\beta} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \dot{U} \, dV = 0 \quad (4.28)$$

Dividindo todos os termos da Eq. 4.28 por T_0 :

$$\int \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{k}}{T_0} \mathbf{B}_\theta \, dV \boldsymbol{\theta} + \int \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{N} \frac{\rho c_v}{T_0} \mathbf{N}^T \, dV \dot{\boldsymbol{\theta}} + \int \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \, dV \dot{U} + \int \boldsymbol{\theta}^{*T} \mathbf{N} \frac{\dot{q}_\theta}{T_0} \, dS = 0 \quad (4.29)$$

Mais uma vez descarta-se os incrementos de temperatura virtuais:

$$- \int \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{k}}{T_0} \mathbf{B}_\theta \, dV \boldsymbol{\theta} - \int \mathbf{N} \frac{\rho c_v}{T_0} \mathbf{N}^T \, dV \dot{\boldsymbol{\theta}} - \int \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \, dV \dot{U} = \int \mathbf{N} \frac{\dot{q}_\theta}{T_0} \, dS \quad (4.30)$$

onde:

$$\mathbf{H} = - \int \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{k}}{T_0} \mathbf{B}_\theta \, dV \quad (4.31)$$

$$\mathbf{M} = - \int \mathbf{N} \frac{\rho c_v}{T_0} \mathbf{N}^T \, dV \quad (4.32)$$

$$\mathbf{L} = - \int \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \, dV = \mathbf{C}^T \quad (4.33)$$

$$\mathbf{F}_\theta = \int \mathbf{N} \frac{\dot{q}_\theta}{T_0} \, dS \quad (4.34)$$

Por sua vez, a matriz térmica de deformação-deslocamento \mathbf{B}_θ é dada pelo gradiente de temperatura $\nabla \theta$, que é definido por:

$$\nabla \theta = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta}{\partial x'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y'} \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

onde:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} \theta_i \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y'} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} \theta_i \quad (4.37)$$

Usando a notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x'} & \frac{\partial N_2}{\partial x'} & \frac{\partial N_3}{\partial x'} & \frac{\partial N_4}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y'} & \frac{\partial N_2}{\partial y'} & \frac{\partial N_3}{\partial y'} & \frac{\partial N_4}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Finalmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x'} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\theta \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

4.1.6 - Forças e energia internas

Após resolver o sistema de equações para cada incremento de carga, é necessário calcular as forças internas para obter o resíduo do incremento correspondente. Para esse propósito, o vetor de forças internas em um elemento é dado por:

$$\dot{\mathbf{F}}_{int} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} dV - \int \mathbf{B}^T \beta \mathbf{m} \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} dV \quad (4.40)$$

Como $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}$, a Eq. 4.40 pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{F}}_{int} = \int \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dV - \int \mathbf{B}^T \beta \mathbf{m} \Delta \boldsymbol{\theta} dV \quad (4.41)$$

A energia de calor interna para um elemento é obtida pela seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{F}}_{qint} = - \int \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{k}}{T_0} \mathbf{B}_\theta \boldsymbol{\theta} dV - \int \mathbf{N} \frac{\rho c_v}{T_0} \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} dV - \int \mathbf{N} \beta \mathbf{m}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} dV \quad (4.42)$$

Realizando algumas substituições, o incremento de energia interna é dado por:

$$\dot{\mathbf{F}}_{qint} = \int \mathbf{B}_\theta^T \frac{\mathbf{q}}{T_0} \Delta \boldsymbol{\theta} dV - \int \mathbf{N} \frac{\rho c_v}{T_0} \Delta \boldsymbol{\theta} dV - \int \mathbf{N} \beta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v dV \quad (4.43)$$

Estas expressões são utilizadas para o cálculo de resíduos em forças e deslocamentos.

4.1.7 - Integração no tempo

Para uma análise incremental, as equações de equilíbrio mecânico e conservação de energia podem ser acopladas de acordo com o seguinte sistema de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Aplicando uma aproximação por diferenças finitas para integração no tempo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix}_{t+f\Delta t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix}_t + f \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Então:

$$\begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \theta \end{Bmatrix}_{t+f\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Substituindo a Eq. 4.46 na Eq. 4.45 e em seguida na Eq. 4.44, o sistema final de equações para uma análise acoplada é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} + f\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{F}_q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta t\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

A solução ao longo de todo o intervalo de tempo de interesse é obtida incrementando o tempo e resolvendo sucessivamente matriz da Eq. 4.47. Para integração implícita, f deve ser maior ou igual a 0,5, e frequentemente convém-se adotar $f = 1$ (ver Booker e Small (1975)).

4.2 - FORMULAÇÃO PARA CASCAS CURVAS ISOPARAMÉTRICAS

O uso de elementos isoparamétricos curvos na formulação de elementos finitos para cascas oferece uma abordagem mais precisa e eficiente para representar estruturas complexas. Estes elementos fornecem uma representação mais precisa da geometria curvada das cascas em comparação com componentes planos como Tri3 e Quad4, por exemplo. Estes elementos curvados utilizam funções de forma que interpolam deslocamentos, curvaturas e tensões, resultando em uma representação mais precisa das propriedades geométricas e condições de fronteira da estrutura. Além disso, integrando a matriz \mathbf{B} (deformação-deslocamento) sem a dividir em seus componentes de momento fletor, corte e membrana, torna a formulação simplificada e potenciais problemas de desconexão, tais como bloqueio de membrana e bloqueio do esforço cortante, são evitados, resultando em um estudo mais preciso e eficiente

do comportamento mecânico das cascas sob diferentes condições de carga. Isto proporciona, em última análise, uma melhor representação do desempenho estrutural.

A implementação da formulação curva isoparamétrica envolve a consideração de um elemento de qualquer casca com seus respectivos graus de liberdade em ambas as dimensões local e global, como mostrado na Fig. 4.1.

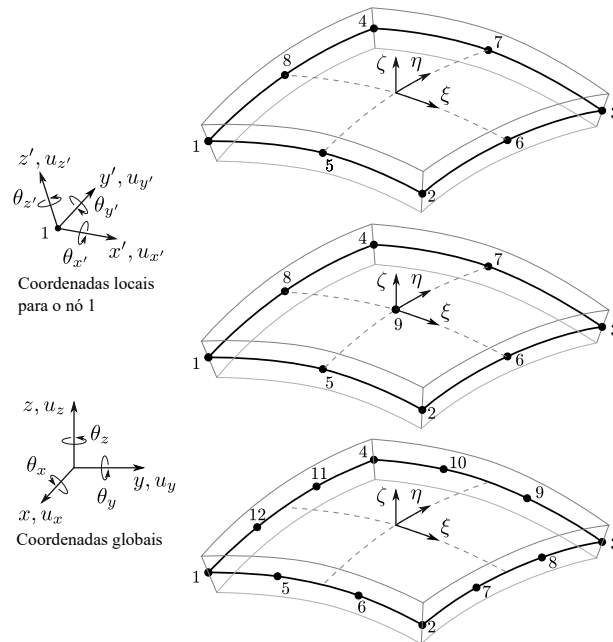


Figura 4.1 – Elementos de casca com 8, 9 e 12 nós, respectivamente, incluindo os graus de liberdade locais e globais.

Sabe-se ainda que para o elemento proposto o número de graus de liberdade equivale a seis e que as funções de forma são as funções convencionais de 8, 9 e 12 nós.

4.2.1 - Coordenadas Locais

Os cossenos diretores para um nó são dados por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Por sua vez a transformação entre coordenadas locais e globais são expressas pelas seguintes equações:

$$\Delta \mathbf{x}' = \mathbf{R} \Delta \mathbf{x} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0 = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (4.50)$$

As coordenadas locais podem ser reescritas como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{R}\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (4.51)$$

Para inclusão a variação ao longo da espessura, a equação anterior pode ser modificada por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{R}\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x} + \frac{t}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Já o Jacobiano em referencial local é definido por:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial x'}{\partial \eta} & \frac{\partial x'}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} & \frac{\partial y'}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z'}{\partial \xi} & \frac{\partial z'}{\partial \eta} & \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Sendo computado como:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ \sum \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ \sum \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{t}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{t}{2} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

As direções x' e y' são tangentes à superfície da casca e podem ser calculadas com ajuda da matriz Jacobiana global:

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \quad (4.55)$$

Visto que suas colunas são vetores (\mathbf{a} e \mathbf{b}) apontando nas direções de ξ e η e são tangentes à superfície, embora não necessariamente perpendiculares no espaço global. A direção x' é considerada paralela à direção ξ . Então, o vetor na direção z' é calculado como:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (4.56)$$

Então

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 \quad (4.57)$$

Finalmente, os componentes da matriz \mathbf{R} são formados pelos vetores unitários \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 .

4.2.2 - Componentes de Deformação

Calculando os deslocamentos relativos como funções das rotações locais, ilustrado na Fig. 4.2, tem-se:

$$\mathbf{u}'_r = \frac{t}{2} \zeta \begin{pmatrix} \theta_{y'} \\ -\theta_{x'} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

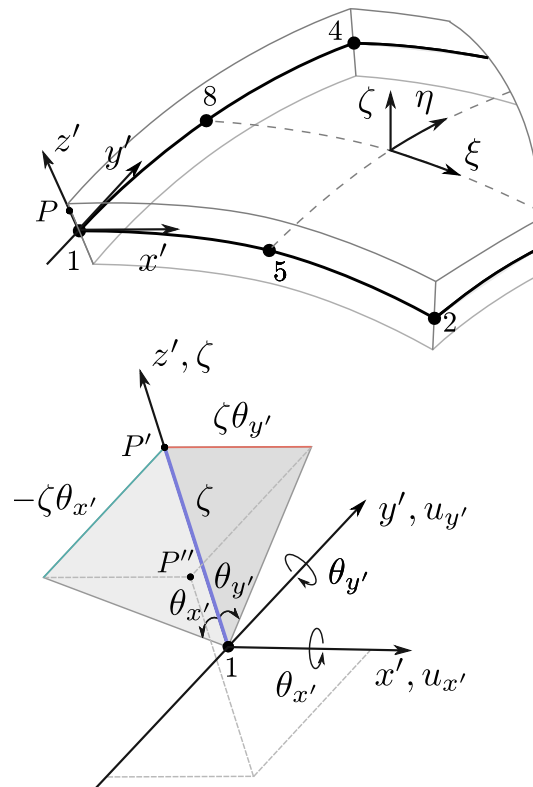


Figura 4.2 – Campo de deslocamentos para casca isoparamétrica.

Então, o campo de deslocamento para um elemento de casca pode ser expresso por:

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t}{2} \zeta \begin{pmatrix} \theta_{y'i} \\ -\theta_{x'i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

$$\begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{pmatrix} u_{x'i} \\ u_{y'i} \\ u_{z'i} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \frac{t}{2} \zeta \begin{pmatrix} \theta_{y'i} \\ -\theta_{x'i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Por sua vez o vetor de deformação é dado por:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ 2\varepsilon_{y'z'} \\ 2\varepsilon_{z'x'} \\ 2\varepsilon_{x'y'} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Assim, os componentes de deformação no plano são definidos por:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'_{x'}}{\partial x'} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{x'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} \theta_{y'i} \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{y'i} - \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} \theta_{x'i} \quad (4.63)$$

E a deformação normal é calculado por:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.64)$$

Além disso, os componentes de cisalhamento fora do plano são expressar por:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{y'z'} &= \frac{\partial u'_{y'}}{\partial z'} + \frac{\partial u'_{z'}}{\partial y'} \\ &= - \sum \frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial z'} \frac{t}{2} \theta_{x'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{z'i} \\ &= -N_i \theta_{x'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{z'i} \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{x'z'} &= \frac{\partial u'_{x'}}{\partial z'} + \frac{\partial u'_{z'}}{\partial x'} \\ &= + \sum \frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial z'} \frac{t}{2} \theta_{y'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{z'i} \\ &= N_i \theta_{y'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{z'i} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Por fim, a deformação por cisalhamento no plano conforme a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{x'y'} &= \frac{\partial u'_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial u'_{y'}}{\partial x'} \\ &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{x'i} + \sum \frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial y'} \frac{t}{2} \theta_{y'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{y'i} - \sum \frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial x'} \frac{t}{2} \theta_{x'i} \\ &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{x'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} \theta_{y'i} + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{y'i} - \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} \theta_{x'i} \end{aligned} \quad (4.67)$$

As deformações no referencial local podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ 2\varepsilon_{y'z'} \\ 2\varepsilon_{x'z'} \\ 2\varepsilon_{x'y'} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} u_{x'1} \\ u_{y'1} \\ u_{z'1} \\ u_{\theta_{x'1}} \\ u_{\theta_{y'1}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

E a submatriz $\bar{\mathbf{B}}_i$ correspondente ao nó i é escrita como:

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} & \frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Para expressar a matriz \mathbf{B}_i em coordenadas globais, a seguinte transformação é necessária:

$$\mathbf{B}_i = \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{R}_{\theta i} \quad (4.70)$$

Onde:

$$\mathbf{R}_{\theta i} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{xi} & l_{yi} & l_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & m_{xi} & m_{yi} & m_{zi} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Finalmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ 2\varepsilon_{y'z'} \\ 2\varepsilon_{z'x'} \\ 2\varepsilon_{x'y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \vdots \\ u_{zn} \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \\ \theta_{zn} \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

As derivadas cartesianas são:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x'} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y'} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y'} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y'} \quad (4.74)$$

E podem ser calculadas com a ajuda da matriz Jacobiana como:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{J}'^{-1} \quad (4.75)$$

As outras derivadas que são apresentadas na Eq. 4.74 são calculadas por:

$$\frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial y'} = \frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial y'} = \frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial(N_i \zeta)}{\partial z'} = N_i \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = N_i \frac{2}{t} \quad (4.78)$$

4.2.3 - Controle do *drilling*

Em elementos de cascas, especialmente aqueles utilizados para modelar estruturas finas, a precisão na modelagem do comportamento sob cargas de torção ou momentos aplicados perpendicularmente ao plano da casca é crucial. A dificuldade surge porque muitos modelos de elementos finitos de cascas são formulados principalmente para lidar com deslocamentos e deformações dentro do plano da casca e flexões normais à mesma, sem considerar adequadamente a resistência à rotação em torno do eixo normal da casca, amplamente conhecida como *drilling* (Providas e Kattis, 2022; Krysl, 2000).

A formulação proposta nesse trabalho não incorpora a rigidez relativa ao grau de liberdade de rotação torcional, podendo causar instabilidade numérica, principalmente quando modela-se superfícies planas. Esse problema pode ser resolvido empregando uma técnica de controle de *drilling*, sendo que uma das abordagens é realizada derivando uma restrição adicional baseada na diferença entre a rotação torsional da normal e a rotação da superfície média (ver Kanok-Nukulchai (1979) e Adam et al. (2013)). É possível expressar a diferença entre essas quantidades como:

$$\theta_d = \theta'_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_y}{\partial x'} - \frac{\partial u'_x}{\partial y'} \right) \quad (4.79)$$

θ_d pode ser aproximado pela interpolação dos deslocamentos locais, logo:

$$\theta_d = \sum N_i \theta_{z'i} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial N_i}{\partial x'} u_{y'i} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial N_i}{\partial y'} u_{x'i} \quad (4.80)$$

Colocando a equação anterior na forma matricial, tem-se:

$$\theta_d = \bar{\mathbf{B}}'_{dr} \begin{Bmatrix} u_{x'1} \\ u_{y'1} \\ \theta_{z'1} \\ u_{x'2} \\ u_{y'2} \\ \theta_{z'2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

Cada contribuição nodal da matriz $\bar{\mathbf{B}}'_{dr}$ é encontrada de modo explícito por:

$$\bar{\mathbf{B}}'_{dr_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y'} & -\frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & N_i \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Também é possível computar $\bar{\theta}$ em função das coordenadas globais como:

$$\theta_d = \bar{\mathbf{B}}_{dr} \mathbf{U} \quad (4.83)$$

Nesse caso, cada submatriz $\bar{\mathbf{B}}_{dr}$ associada ao nó i pode ser calculada como:

$$\bar{\mathbf{B}}_{dr_i} = \bar{\mathbf{B}}'_{dr_i} \bar{\mathbf{R}}_{\theta} \quad (4.84)$$

onde $\bar{\mathbf{R}}_{\theta}$ é a matriz de rotação obtida pela seguinte equação:

$$\bar{\mathbf{R}}_{\theta} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Finalmente a matriz de rigidez do grau de liberdade de *drilling* é representada por:

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \bar{\mathbf{B}}_{dr}^T (G \bar{\kappa}) \bar{\mathbf{B}}_{dr} t dA \quad (4.86)$$

onde G é o módulo de cisalhamento e $\bar{\kappa}$ é o parâmetro de controle do grau de liberdade do *drilling* da matriz de rigidez. $\bar{\mathbf{K}}$ pode ser aproximado numericamente por:

$$\bar{\mathbf{K}} = G \bar{\kappa} \int \bar{\mathbf{B}}_{dr_i}^T \bar{\mathbf{B}}_{dr_i} \|\mathbf{J}\| w_i \quad (4.87)$$

Pelo fato da integral ser de área, o Jacobiano \mathbf{J} apresentado na Eq. 4.55 torna-se uma matriz não quadrada, sendo computada como proposto por Durand e Silva (2021).

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{13} & J_{11} \\ J_{23} & J_{21} \end{vmatrix}} \quad (4.88)$$

4.2.4 - Matriz de rigidez

Uma vez que derivou-se a matriz de deformação \mathbf{B} , pode-se usar um procedimento convencional de elemento finito, como o método do trabalho virtual, para chegar a uma forma mais convencional para a matriz de rigidez do elemento de casca:

$$\mathbf{K}_{casca} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4.89)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva para condições de tensão plana, excluindo a linha e coluna relacionadas a $\sigma_{z'}$, e \mathbf{S} é introduzido para melhorar a previsão da distribuição de cisalhamento nas direções fora do plano ($\sigma_{x'z'}$ e $\sigma_{y'z'}$). A matriz \mathbf{S} é explicitamente dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Com $\alpha_s = \frac{5}{6}$. Já a matriz \mathbf{D} é representada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

A integração numérica é realizada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{casca} = \int \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_i \|\mathbf{J}'\| w_i \quad (4.92)$$

Combinando as matrizes de rigidez da Eqs. 4.87 e 4.92, obtém-se:

$$\mathbf{K} = \int \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_i \|\mathbf{J}'\| w_i + G \bar{\kappa} \int \bar{\mathbf{B}}_{dr_i}^T \bar{\mathbf{B}}_{dr_i} \|\mathbf{J}\| w_i \quad (4.93)$$

Vale mencionar que são necessários pelo menos dois pontos de integração na direção normal à casca.

4.3 - PLASTICIDADE DE VON MISES PARA ELEMENTOS DE CASCA

A função de escoamento original de von Mises com endurecimento linear é dada por:

$$f(\underline{\sigma}, \varepsilon_p) = \sqrt{3J_{2D}} - (f_y + H\varepsilon_p) \quad (4.94)$$

onde $\underline{\sigma}$ é o tensor de tensão, ε_p é a deformação plástica acumulada, $J_{2D} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{s}} : \underline{\mathbf{s}}$ é o segundo invariante do tensor desviatório ($\underline{\mathbf{s}}$), f_y é a resistência ao escoamento do material e H é o módulo de endurecimento. O operador ‘:’ denota a contração dupla em álgebra tensorial.

Como é conhecido, em três dimensões, a plasticidade de von Mises fornece uma solução em forma fechada para o processo de atualização da tensão. No entanto, esta solução não é diretamente aplicável ao estado de tensão plana. Portanto, esta seção desenvolverá as equações de plasticidade de von Mises relevantes para o tensor constitutivo e o processo de atualização da tensão para uso específico em elementos de cascas.

4.3.1 - Tensor constitutivo elastoplástico

Em contraste com a função convencional de von Mises, adotou-se uma função alternativa obtida pelo quadrado apropriado dos termos na Eq. (4.94). Esta modificação resulta na seguinte função de rendimento modificada:

$$f(\underline{\sigma}, \varepsilon_p) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{s}} : \underline{\mathbf{s}} - \frac{1}{3} (f_y + H\varepsilon_p)^2 \quad (4.95)$$

Escolheu-se esta modificação para simplificar as derivadas e agilizar o processo de atualização da tensão. Como resultado, as derivadas da função de rendimento podem ser calculadas como: $\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\mathbf{s}}$ e $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} = -\frac{2}{3} H (f_y + H\varepsilon_p)$. A seguir, considerando uma regra de fluxo associada, expressou-se a taxa de deformação plástica como:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{\mathbf{s}} \quad (4.96)$$

onde $\dot{\lambda}$ representa o multiplicador plástico. Além disso, a taxa da deformação plástica cumulativa ($\dot{\varepsilon}_p$) é calculada como:

$$\dot{\varepsilon}_p = \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p\| = \dot{\lambda} \|\underline{s}\| \quad (4.97)$$

Considerando a decomposição aditiva da deformação ($\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p$) e a regra de fluxo, pode-se expressar o tensor de tensão como:"

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\mathbf{D}}_e \dot{\lambda} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.98)$$

Aqui, $\underline{\mathbf{D}}_e$ representa o tensor constitutivo elástico de quarta ordem. Por outro lado, a condição de consistência é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad (4.99)$$

Seguindo o procedimento padrão em plasticidade e substituindo as Eqs. (4.97) e (4.98) na Eq. (4.99), obtém-se o multiplicador plástico como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{s} : \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{\dot{\varepsilon}}}{\underline{s} : \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{s} - \|\underline{s}\| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}} \quad (4.100)$$

Finalmente, ao substituir esta expressão na Eq. (4.98), derivou-se o tensor constitutivo elastoplástico como:

$$\underline{\mathbf{D}}_{ep} = \underline{\mathbf{D}}_e - \frac{\underline{\mathbf{D}}_e : \underline{s} \otimes \underline{s} : \underline{\mathbf{D}}_e}{\underline{s} : \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{s} - \|\underline{s}\| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}} \quad (4.101)$$

onde \otimes denota o operador diádico tensorial.

4.3.2 - Atualização da tensão

Este procedimento determina o incremento de tensão, $\Delta \underline{\sigma}$, dado o incremento de deformação, $\Delta \underline{\varepsilon}$, para um dado passo de tempo. Inicialmente supõe-se que $\Delta \underline{\sigma} = \underline{\mathbf{D}}_e : \Delta \underline{\varepsilon}$. Aplicando a decomposição aditiva da deformação e a regra de fluxo, expressa-se o tensor de tensão no passo $n + 1$ da seguinte forma:

$$\underline{\sigma}^{n+1} = \underline{\sigma}^{tr} - \Delta \lambda \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{s}^{n+1} \quad (4.102)$$

Aqui, $\underline{\sigma}^{tr} = \underline{\sigma}^n + \underline{\mathbf{D}}_e : \Delta \underline{\varepsilon}$ representa o estado de tensão de teste. Note que a expressão para $\underline{\sigma}^{n+1}$ depende de \underline{s}^{n+1} , que é definido como $\underline{\mathbf{P}}_d : \underline{\sigma}^{n+1}$, onde $\underline{\mathbf{P}}_d$ é o tensor de projeção deviatório.

Além disso, considerando que $\underline{\sigma}^{n+1} = \underline{\mathbf{I}}^{(4)} : \underline{\sigma}^{n+1}$ (com $\underline{\mathbf{I}}^{(4)}$ sendo o tensor identidade de quarta ordem), reescreve-se a Eq. (4.102) como:

$$\underline{\mathbf{I}}^{(4)} : \underline{\sigma}^{n+1} = \underline{\sigma}^{tr} - \Delta\lambda \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{\mathbf{P}}_d : \underline{\sigma}^{n+1} \quad (4.103)$$

Isso leva ao tensor de tensões atualizado, expresso como:

$$\underline{\sigma}^{n+1} = \left(\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \Delta\lambda \underline{\mathbf{D}}_e : \underline{\mathbf{P}}_d \right)^{-1} : \underline{\sigma}^{tr} \quad (4.104)$$

Por sua vez, o valor atualizado para a deformação plástica é dado por:

$$\varepsilon_p^{n+1} = \varepsilon_p^n + \Delta\lambda, \|\underline{\mathbf{s}}^{n+1}\|. \quad (4.105)$$

Neste estágio, tanto $\underline{\sigma}^{n+1}$ quanto ε_p^{n+1} dependem do multiplicador plástico, $\Delta\lambda$. Para a resolução de $\Delta\lambda$, estas variáveis são incorporadas na função de rendimento no passo $n+1$, que é escrita como:

$$\frac{1}{2} |\underline{\mathbf{s}}^{n+1}|^2 - \frac{1}{3} (f_y + H\varepsilon_p^{n+1})^2 = 0 \quad (4.106)$$

Para resolver a Eq. (4.106) para $\Delta\lambda$, um procedimento de solução não linear como o método de Newton-Raphson é necessário. Uma vez encontrado $\Delta\lambda$, os valores atualizados do tensor de tensão e da deformação plástica acumulada podem finalmente ser calculados.

4.3.3 - Equações matriz-vetor usando a notação de Mandel

A notação de Mandel é um método projetado para simplificar operações tensoriais. Esta técnica transforma tensores simétricos reduzindo sua ordem para facilitar operações mais diretas. Por exemplo, usando a notação de Mandel, tensores de segunda ordem, que tipicamente têm nove componentes, são representados como vetores de seis componentes. Enquanto isso, tensores de quarta ordem são transformados em matrizes 6x6. Para este fim, os componentes de cisalhamento são escalados por um fator de $\sqrt{2}$. Esta escala é essencial para preservar as interpretações físicas de operações como o produto escalar, correspondendo à energia no espaço tensorial original. Consequentemente, um tensor de segunda ordem pode ser

expresso como um vetor como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{23} \\ a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} \\ \underline{a}_{22} \\ \underline{a}_{33} \\ \sqrt{2}\underline{a}_{23} \\ \sqrt{2}\underline{a}_{13} \\ \sqrt{2}\underline{a}_{12} \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

Da mesma forma, um tensor simétrico de quarta ordem com 81 componentes é representado na notação de Mandel como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}A_{1113} & \sqrt{2}A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}A_{2213} & \sqrt{2}A_{2212} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}A_{3313} & \sqrt{2}A_{3312} \\ \sqrt{2}A_{2311} & \sqrt{2}A_{2322} & \sqrt{2}A_{2333} & 2A_{2323} & 2A_{2313} & 2A_{2312} \\ \sqrt{2}A_{1311} & \sqrt{2}A_{1322} & \sqrt{2}A_{1333} & 2A_{1323} & 2A_{1313} & 2A_{1312} \\ \sqrt{2}A_{1211} & \sqrt{2}A_{1222} & \sqrt{2}A_{1233} & 2A_{1223} & 2A_{1213} & 2A_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Uma vez que os tensores são transformados em vetores ou matrizes, operações tensoriais como adição, contração e multiplicação podem ser realizadas usando álgebra de matriz e vetor padrão. Esta simplificação é particularmente vantajosa em métodos numéricos e implementações computacionais onde operações de matriz são mais simples de manusear.

4.3.4 - Equações matriciais para o elemento de casca isoparmétrico

Seguindo a notação de Mandel, os vetores de tensão e deformação para elementos de casca podem ser expressos, respectivamente, como $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sqrt{2}, \sigma_{y'z'}, \sqrt{2}, \sigma_{x'z'}, \sqrt{2}, \sigma_{x'y'} \rangle$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \varepsilon_{x'x'}, \varepsilon_{y'y'}, \sqrt{2}, \varepsilon_{y'z'}, \sqrt{2}, \varepsilon_{x'z'}, \sqrt{2}, \varepsilon_{x'y'} \rangle$. Além disso, a matriz de deformação dada na Eq. 4.69 é reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y'} \frac{1}{\sqrt{2}} & -N_i \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & N_i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y'} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\partial N_i}{\partial x'} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \zeta \frac{t}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{\partial N_i}{\partial y'} \zeta \frac{t}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

Da mesma forma, os tensores \mathbf{D}_e e \mathbf{P}_d expressos como matrizes e excluindo os termos associados com a componente de tensão σ_z , são reescritos como:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

e

$$\mathbf{P}_d = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Note que nesta versão simplificada de \mathbf{P}_d , o vetor deviatório $\mathbf{s} = \mathbf{P}_d \boldsymbol{\sigma}$ não engloba todos os componentes únicos do tensor deviatório \mathfrak{s} , omitindo a tensão deviatoric na direção fora do plano, $\sigma_{z'} = -\left(\frac{\sigma_{x'}}{3} + \frac{\sigma_{y'}}{3}\right)$. Felizmente, na formulação do modelo constitutivo, este termo se torna irrelevante em todas as multiplicações matriz-vetor devido à condição de tensão plana, e é necessário apenas para calcular $\|\mathfrak{s}\|$. Consequentemente, para manter a correção da formulação, a seguinte norma deve ser usada quando necessário:

$$\|\mathfrak{s}\| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'}}{3} + \frac{\sigma_{y'}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{y'}}{3} - \frac{\sigma_{x'}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{x'}}{3} - \frac{\sigma_{y'}}{3}\right)^2 + 2\sigma_{y'z'}^2 + 2\sigma_{x'z'}^2 + 2\sigma_{x'y'}^2} \quad (4.112)$$

Por exemplo, a matriz elastoplástica é calculada usando álgebra matriz-vetor como:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{s}^T \mathbf{D}_e \mathbf{s} - \|\mathfrak{s}\| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}} \quad (4.113)$$

Por sua vez, no estágio de atualização da tensão, uma vez que $\Delta\lambda$ é encontrado, a tensão no passo $n+1$ é encontrada como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}_e \mathbf{P}_d)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{tr} \quad (4.114)$$

4.4 - RELAÇÃO ENTRE A TEMPERATURA E AS PROPRIEDADES MECÂNICA DO AÇO

De acordo com Vialves (2014) a temperatura influencia na deformação da estrutura devido à fluência. Por um lado causa mudanças imediatas nas propriedades mecânicas do aço, como no módulo de elasticidade, tensão de escoamento e coeficiente de dilatação térmica. Por outro lado causa alterações na microestrutura do material, fazendo com que as moléculas sejam rearranjadas, modificando a macroestrutura. Além disso a fluência no aço torna-se relevante para valores entre 30% e 50% da temperatura de fusão do aço, que segundo Pascoali (2008) é de 1400 °C.

Por sua vez Poh (2001) aborda em seu estudo a relação tensão-deformação do aço para diferentes temperaturas aplicadas no corpo de prova, como exposto na Fig. 4.3.

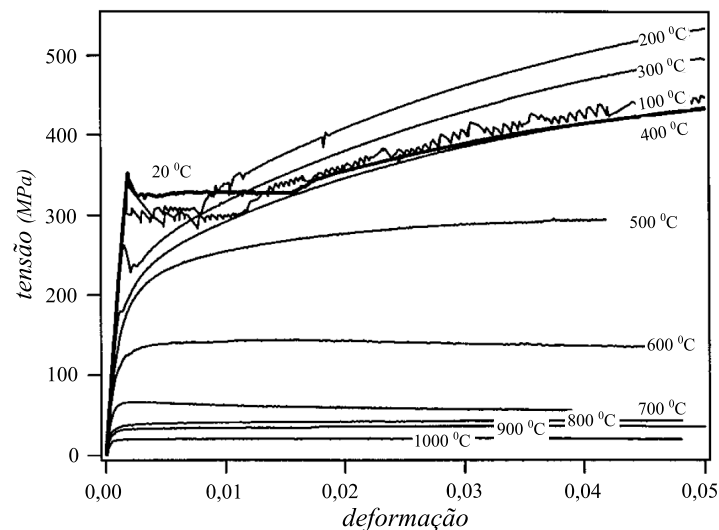


Figura 4.3 – Variação da tensão-deformação para diferentes níveis de temperatura no aço. Adaptada de Poh (2001).

Além disso o alongamento do material é relacionado com o coeficiente de dilatação térmica do aço (α) em função da temperatura ($\alpha(T)$) pela seguinte equação:

$$\Delta L = \int_{T_1}^{T_2} L_0 \alpha(T) dT \quad (4.115)$$

onde ΔL é o alongamento linear do material, L_0 é o comprimento original do material e dT é o diferencial de temperatura. Embora o calor específico do aço (c_v) não apareça diretamente na Eq. 4.115, ele está relacionado à quantidade de calor (Q) necessária para causar uma variação

de temperatura em um material de massa (m), pela equação a seguir:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m c_v(T) dT \quad (4.116)$$

Em resumo, a variação do calor específico e do coeficiente de expansão térmica devido ao aumento de temperatura pode ser incorporada nas fórmulas de alongamento térmico e de calor absorvido para proporcionar uma análise mais precisa. Isso é especialmente importante para materiais que operam em um amplo intervalo de temperaturas, onde $\alpha(T)$ e $c_v(T)$.

Em vista disso α , para temperaturas inferiores a $100^{\circ}C$, é de aproximadamente $1,0 \times 10^{-5} C^{-1}$ e para valores superiores, essa constante pode ser calculada pela equação a seguir (EC3, 2005):

$$\alpha = \begin{cases} 1,2 \times 10^{-5}T + 0,4 \times 10^{-8}T^2 - 2,416 \times 10^{-8} \rightarrow 20^{\circ}C \leq T < 750^{\circ}C \\ 1,1 \times 10^{-2} \rightarrow 750^{\circ}C \leq T < 860^{\circ}C \\ 2,0 \times 10^{-5}T - 6,2 \times 10^{-3} \rightarrow 860^{\circ}C \leq T \leq 1200^{\circ}C \end{cases} \quad (4.117)$$

Já o c_v , mensurado em J/kgK , segundo EC3 (2005), pode ser determinado de acordo com:

$$c_v = \begin{cases} 425 + 7,73 \times 10^{-1}T - 1,69 \times 10^{-3}T^2 + 2,22 \times 10^{-6}T^3 \rightarrow 20^{\circ}C \leq T < 600^{\circ}C \\ 666 + \frac{17820}{T-731} \rightarrow 600^{\circ}C \leq T < 735^{\circ}C \\ 545 + \frac{13002}{738-T} \rightarrow 735^{\circ}C \leq T < 900^{\circ}C \\ 650 \rightarrow 900^{\circ}C \leq T \leq 1200^{\circ}C \end{cases} \quad (4.118)$$

E a condutividade térmica (k), medida em W/mK , é obtida através da equação a seguir (EC3, 2005):

$$k = \begin{cases} 54 - 3,33 \times 10^{-2}T \rightarrow 20^{\circ}C \leq T < 800^{\circ}C \\ 27,3 \rightarrow 800^{\circ}C \leq T < 1200^{\circ}C \end{cases} \quad (4.119)$$

Nesse contexto, com a formulação descrita no presente trabalho é possível realizar as análises considerando as propriedades acima como constantes, ou ainda, segundo as Eqs. 4.117, 4.118 e 4.119.

4.5 - FERRAMENTAS UTILIZADAS

As análises foram conduzidas utilizando a biblioteca de elementos finitos Amaru (ver Durand e Silva (2021) e Durand et al. (2021)), na qual foram implementados o elemento de casca curvo isoparamétrico, a análise termomecânica acoplada e o modelo constitutivo do aço. O programa, escrito na linguagem de programação Julia, que é uma linguagem dinâmica de alto nível ideal para computação numérica e científica, permite realizar análises mecânicas, hidromecânicas e termomecânicas, tanto estáticas quanto dinâmicas, lineares e não lineares, em 2D e 3D. A geração de malhas, em alguns casos foram feitas utilizando o Gmsh, que é um gerador de malhas de elementos finitos tridimensionais desenvolvido por Christophe Geuzaine e Jean-François Remacle. Este software realiza a geração de malhas 1D, 2D e 3D, tanto estruturadas quanto não estruturadas, além de malhas híbridas e de alta ordem (curvilíneas). O pós-processamento dos resultados foi realizado com o auxílio do programa Paraview. Adicionalmente, sempre que possível, os problemas foram modelados no Abaqus, servindo como referência comparativa para as análises desenvolvidas neste trabalho. Além disso, a plotagem das figuras, os gráficos de curvas, campos de deslocamentos, tensões e temperatura apresentados neste trabalho foram produzidos pelo próprio Amaru.

5 - VALIDAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PROPOSTAS

Neste capítulo, são apresentados exemplos selecionados para validar as formulações propostas neste trabalho. Serão demonstrados os resultados obtidos para a validação do elemento de casca curva isoparamétrico, da formulação termomecânica acoplada em elementos sólidos e elementos de casca e do modelo constitutivo plástico.

A seção 4.1 aborda quatro exemplos, todos com solução analítica, para validar a formulação do elemento finito de casca proposto. Além disso, os resultados obtidos por este estudo são comparados com outros trabalhos que também apresentaram soluções numéricas.

Na seção 4.2, outros quatro exemplos são modelados para validar a formulação termomecânica acoplada. Os exemplos 1 e 2 examinam o fluxo de temperatura e deformações sob condições lineares elásticas em direções unidimensional e radial, respectivamente. Os outros dois exemplos são estudados aplicando diferentes condições de contorno, comparados com o software de elementos finitos Abaqus e utilizando elementos sólidos Hex20 no Amaru.

Finalmente, a seção 4.3 valida a formulação para a plasticidade de von Mises aplicada aos elementos de casca (tensão plana). Quatro exemplos são analisados: o primeiro trata-se de uma viga elastoplástica em balanço, apresentando solução analítica e numérica; o segundo trata-se de uma placa furada analisada por outros dois autores numericamente; no terceiro exemplo, é analisado um tubo com deslocamento prescrito, modelado com elementos de cascas e sólidos no Amaru. Por fim analisa-se um tubo com campo de temperatura prescrito.

É importante ressaltar que todas as implementações, simulações numéricas e apresentação de curvas e malhas foram realizadas utilizando a biblioteca de elementos finitos Amaru, disponível em <https://github.com/NumSoftware/Amaru>.

5.1 - VALIDAÇÃO DA ELEMENTO DE CASCA CURVO ISOPARAMÉTRICO

Na primeira seção são apresentados quatro exemplos para validação da formulação de cascas proposta neste trabalho.

5.1.1 - Coberta Cilíndrica sob Força Concentrada

O primeiro exemplo trata-se de uma cobertura cilíndrica, com uma carga concentrada (P) de 10 N aplicada no centro da estrutura, suportada por duas paredes rígidas, com deslocamentos

nos eixos x e z iguais a zero. Este, apresenta solução analítica proposta por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Flügge (1973), e está ilustrado na Fig. 5.1.

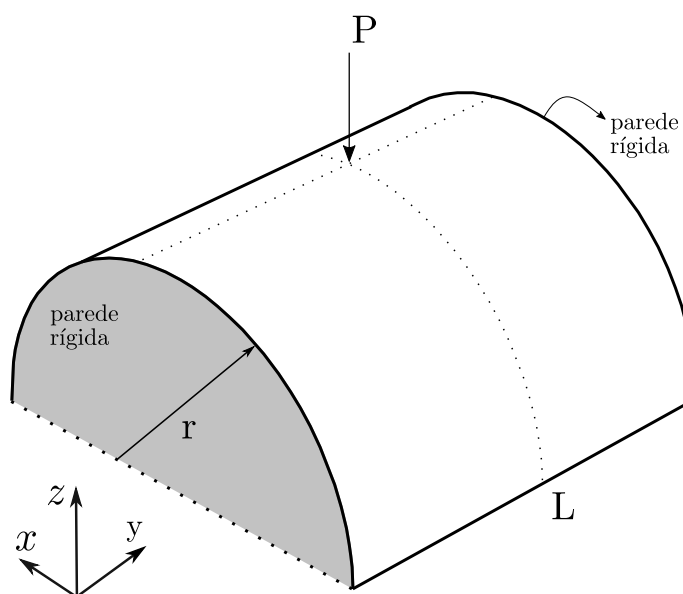


Figura 5.1 – Coberta cilíndrica.

Foram adotados os seguintes valores para a análise computacional: Comprimento (L) de 600 cm, raio (r) de 300 cm, espessura (t) igual a 3 cm, Módulo de Young (E) de 30 MPa e coeficiente de Poisson (ν) de 0,3. A Tabela 5.1 sumariza estes parâmetros.

Tabela 5.1 – Propriedades geométricas e do material para cobertura cilíndrica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger e Flügge.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	r	300 cm
Espessura	t	3 cm
Comprimento	L	600 cm
Módulo de Young	E	30 MPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3

Por sua vez na Fig 5.2 apresenta-se a convergência do elemento Quad8 para malhas de 2x2, 4x4, 8x8, 16x16 e 32x32, validada com a resposta analítica e comparada com os resultados encontrados por Escudero (1997) utilizando elementos Quad4 e Quad8.

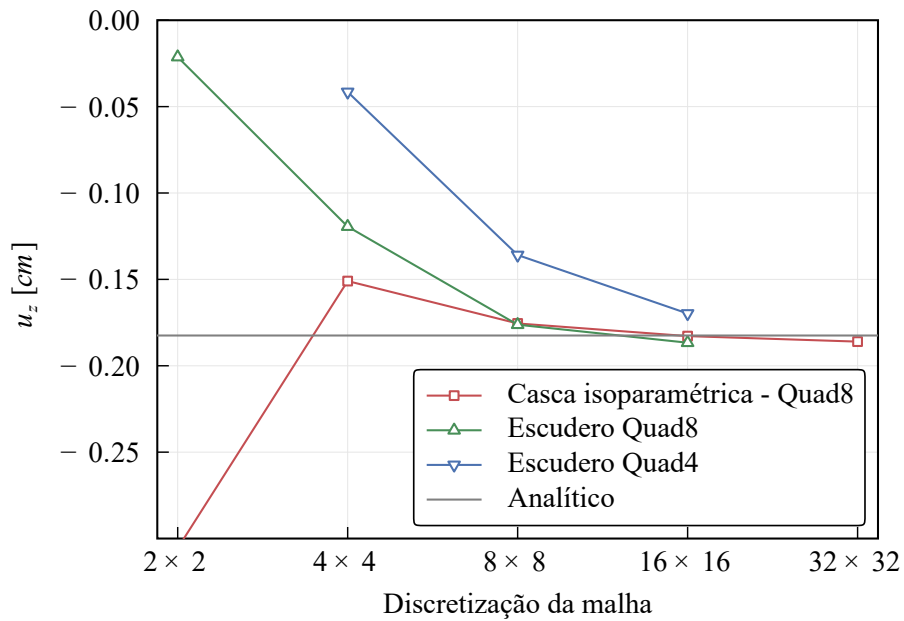


Figura 5.2 – Validação do elemento de casca (coberta cilíndrica).

Observou-se que o elemento de casca implementado convergiu a partir de uma malha de 16x16 elementos, com resultados satisfatórios quando comparados com a resposta analítica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Flügge (1973) e com desempenho melhor que os desenvolvidos por Escudero (1997). Ademais na Fig. 5.3 encontra-se a estrutura deformada da cobertura cilíndrica com o campo de deslocamento vertical. Constata-se que devido à força concentrada a um deslocamento vertical no sentido de z negativo mais acentuado no centro da estrutura.

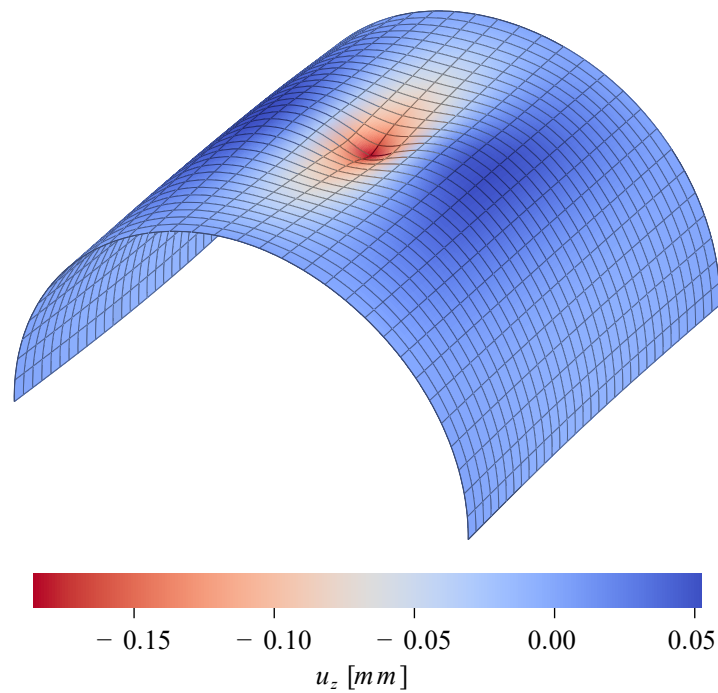


Figura 5.3 – Coberta cilíndrica deformada (malha 32x32).

5.1.2 - Coberta de Scordelis-Lo

Este exemplo verifica a precisão da formulação apresentada por meio da simulação do telhado cilíndrico atribuído a Scordelis e Lo. A Figura 5.4 mostra um telhado cilíndrico exposto a uma carga distribuída uniformemente (p) de $620,53 \text{ kN/m}^2$ na direção z . O telhado é suportado por duas paredes rígidas, conforme ilustrado na figura, onde os deslocamentos ao longo dos eixos x e z são ambos zero.

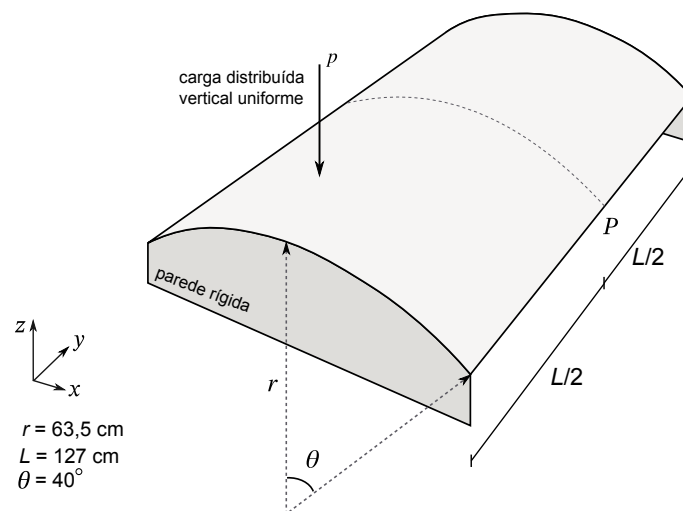


Figura 5.4 – Coberta de Scordelis-Lo.

Na Tabela 5.2 são apresentados os seguintes dados: Comprimento do telhado (L) vale 127 cm, a espessura do (t) é igual a 6,35 mm e o ângulo de curvatura (θ) é de 40° , Módulo de Elasticidade (E) de 2978,5 GPa e coeficiente de Poisson (ν) equivalente a 0.

Tabela 5.2 – Propriedades geométricas e do material para cobertura de Scordelis-Lo.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	r	63,5 cm
Espessura	t	6,35 mm
Comprimento da cobertura	L	127 cm
Ângulo de curvatura	θ	40°
Módulo de Young	E	2978,5 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0

Nesta análise numérica, simularam-se seis malhas diferentes para explorar sua convergência em direção ao valor analítico. Nela, empregou-se a abordagem formulada juntamente com elementos Quad8. Adicionalmente, uma análise secundária foi conduzida utilizando elementos sólidos Hex20 para referência. Os resultados dessas análises, detalhados na Fig. 5.5, são justapostos com a solução analítica fornecida por Carr (1967) e as descobertas de Oñate (2013) e Sangtarash et al. (2020).

O trabalho de Oñate (2013) envolveu a aplicação da teoria de Reissner-Mindlin a elementos planos, incluindo QLQL (Elemento quadrilateral de 16 nós), QLLL (Elemento quadrilateral de 4 nós e um campo de cisalhamento linear), e TLQL (Elemento triangular de placa Reissner-Mindlin Quadrático/Linear). Por outro lado, Sangtarash et al. (2020) propuseram o uso de um elemento de casca degenerado especializado. Os resultados demonstram que tanto os elementos Quad8 quanto os Hex20 exibem rápida convergência, alcançando um nível de precisão comparável às descobertas de Sangtarash et al. (2020).

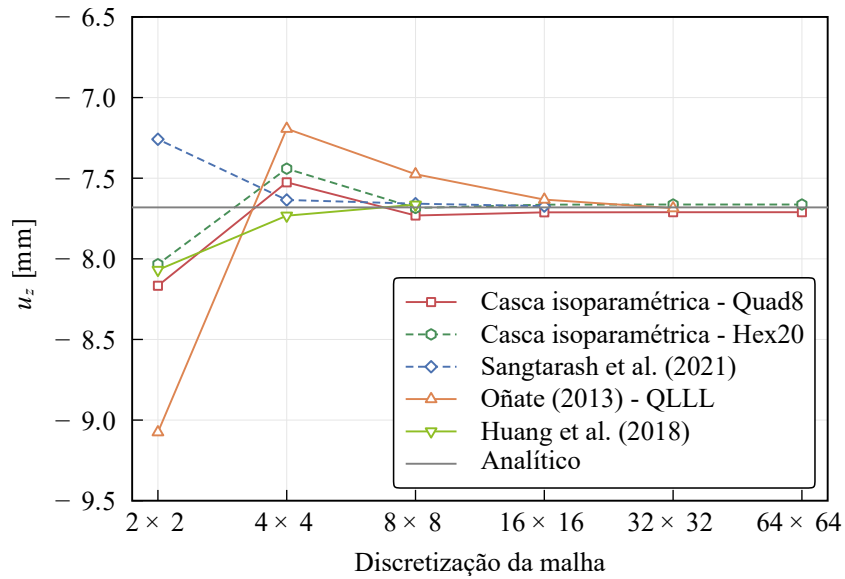


Figura 5.5 – Resultados obtidos para Coberta de Scordelis-Lo.

Finalmente a Fig. 5.6 exibe a estrutura deformada para o exemplo analisando, considerando uma malha de 64x64.

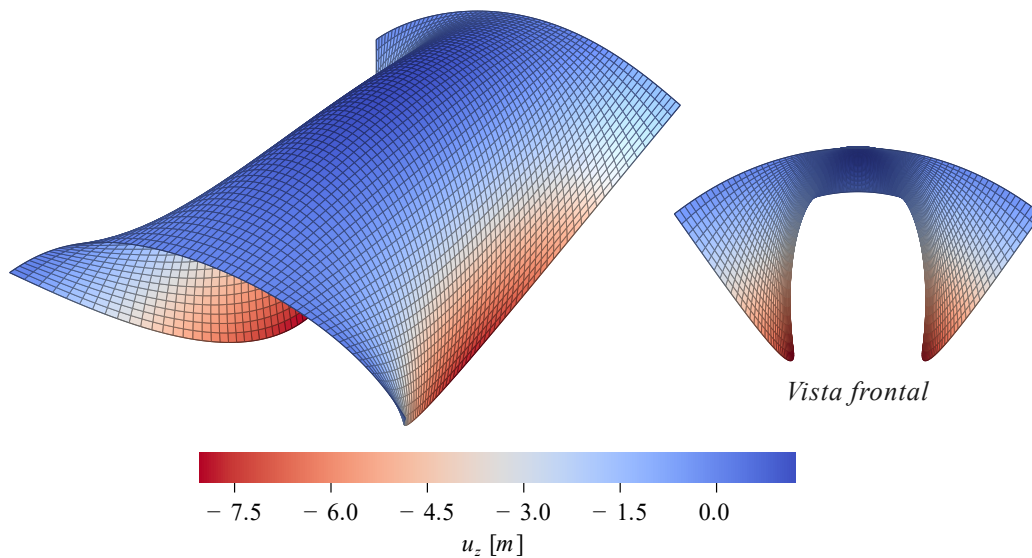


Figura 5.6 – Estrutura deformada - Coberta de Scordelis-Lo.

Para analisar os valores sugeridos para a constante de penalidade do drilling $\bar{\kappa}$, foi realizada uma análise do exemplo de Scordelis-Lo utilizando elementos Quad8 para diferentes malhas (4x4, 8x8, 16x16 e 32x32). Os valores de $\bar{\kappa}$ foram variados no intervalo de 1×10^{-15} a 1×10^{-6} . A Figura 5.7 apresenta os resultados da análise em comparação com a resposta analítica.

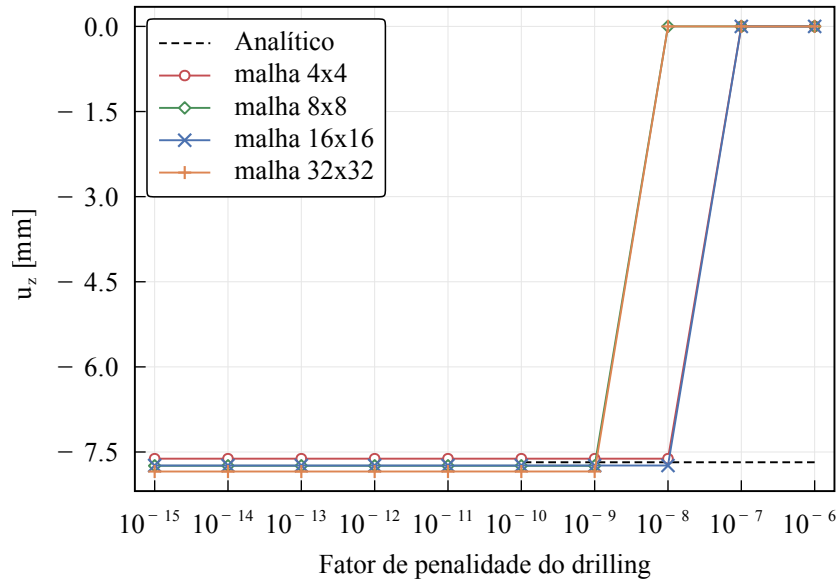


Figura 5.7 – Comparação do parâmetro de penalidade do drilling $\bar{\kappa}$ para o exemplo de Scordelis-Lo.

Observa-se que, para o controle de drilling proposto neste estudo, o parâmetro de penalidade deve ser menor ou igual a 1×10^{-9} para que as malhas convirjam para a resposta analítica. Para valores superiores, algumas malhas não se aproximaram da resposta presente na literatura. As malhas 8x8 e 32x32 não convergiram quando $\bar{\kappa} > 1 \times 10^{-9}$, enquanto as malhas 4x4 e 16x16 não convergiram quando $\bar{\kappa} > 1 \times 10^{-8}$.

5.1.3 - Cúpula esférica sob pressão perpendicular à superfície

Este problema envolve a análise de uma calota esférica exposta a uma pressão uniforme atuando perpendicularmente à superfície da calota, conforme ilustrado na Fig. 5.8. A formulação original deste problema é atribuída a Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

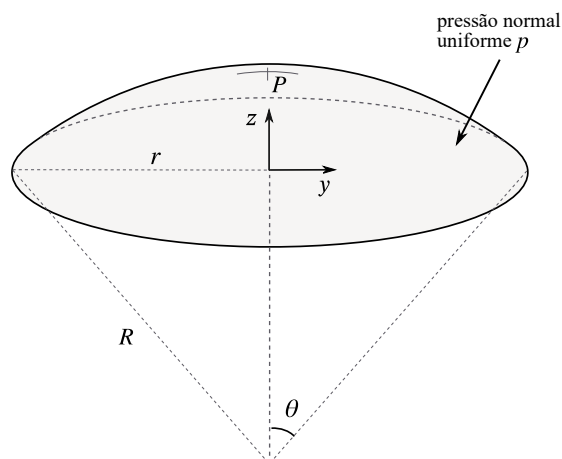


Figura 5.8 – Calota esférica.

Neste cenário, a calota esférica está sujeita a uma carga superficial (p) de $0,07 \text{ kg/cm}^2$. As dimensões consistem em uma espessura (t) de $7,5 \text{ cm}$, um raio (R) de 225 cm e um ângulo de curvatura (θ) de 35° . As propriedades do material usadas na análise são caracterizadas pelo Módulo de Young (E) de 2100 kg/cm^2 e coeficiente de Poisson (ν) de $1/6$. Em síntese, a Tabela 5.3 condensa as informações necessárias para a análise computacional.

Tabela 5.3 – Propriedades geométricas e do material da calota esférica.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	R	225 cm
Ângulo de curvatura	θ	35°
Espessura	t	$7,5 \text{ cm}$
Módulo de Young	E	2100 kg/cm^2
Coefficiente de Poisson	ν	$1/6$

Os resultados da deflexão vertical no topo são exibidos na Fig. 5.9. Evidencia-se que os elementos de casca Quad8 exibiram uma precisão notável, mesmo quando usados com malhas grosseiras, visto que a partir da malha 2×2 o deslocamento do nó central da análise numérica praticamente foi idêntico à resposta analítica. Esses resultados são subsequentemente comparados com os numéricos obtidos por Escudero (1997), que utilizou elementos de casca Reissner-Mindlin convencionais Quad4 e Quad8.

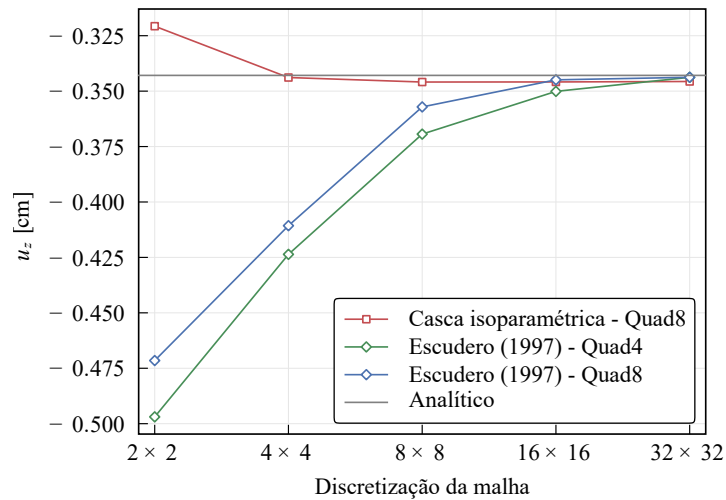


Figura 5.9 – Calota esférica - Resultados.

Por sua vez a Fig. 5.10 apresenta o campo de deslocamentos da calota deformada, para a análise usando elementos isoparamétricos Quad8 e malha 32×32 .

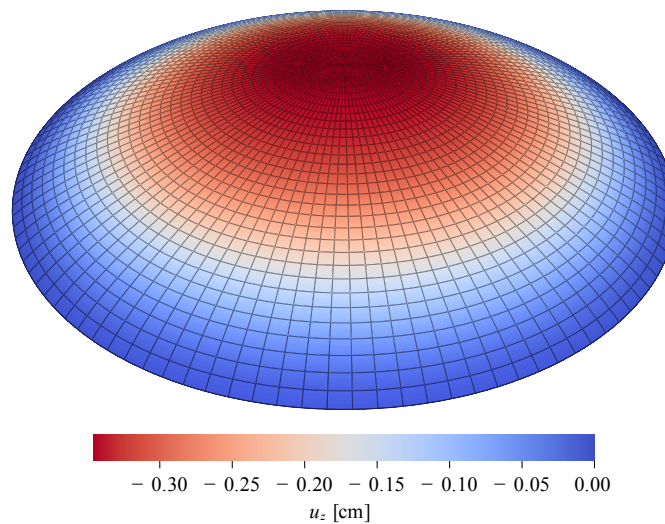


Figura 5.10 – Calota esférica - Campo de deslocamentos da estrutura deformada.

5.1.4 - Anel comprimido

Este teste examina o comportamento linear de um anel comprimido previamente investigado por Crandall et al. (1978). A Fig. 5.11 mostra a geometria e as condições de contorno.

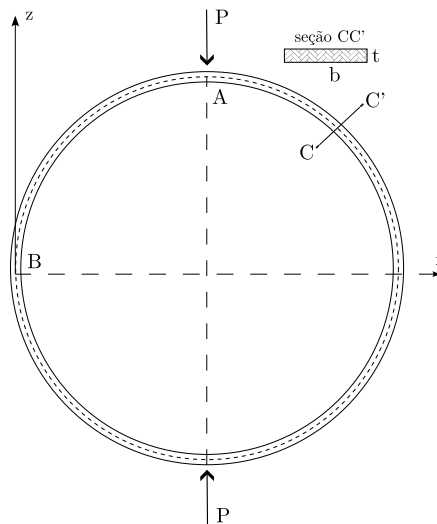


Figura 5.11 – Anel comprimido.

A Tabela 5.4 apresenta parâmetros necessários para modelagem da análise. A saber que o raio do anel (r) mede 12,58 cm, com uma largura (b) de 2,54 cm e uma espessura (t) de 2,3876 mm. As propriedades do material são Módulo de Elasticidade (E) equivalente a 72,395 GPa e (ν) de 0,3125, enquanto a carga aplicada (P) é de 0,4448 kN. Devido às considerações de simetria, apenas metade do anel foi simulado, focando no monitoramento da deflexão no ponto de aplicação da carga. Ressalta-se ainda, que a análise envolveu várias discretizações de elementos de cascas.

Tabela 5.4 – Propriedades geométricas e do material do anel comprimido.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	r	12,58 cm
Largura	b	2,54 cm
Espessura	t	2,3876 mm
Módulo de Young	E	72,395 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3125

Devido a simetria da estrutura, modelou-se somente metade anel, como mostra a Fig. 5.12.

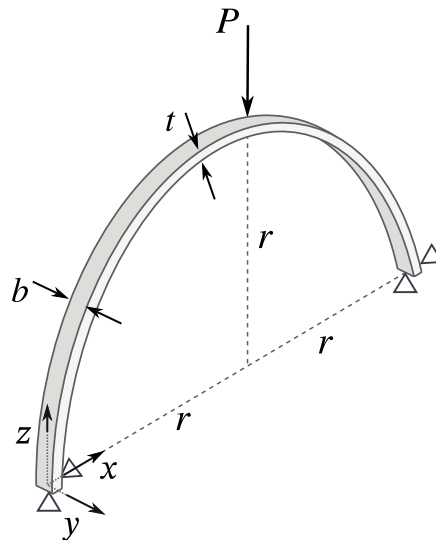


Figura 5.12 – Anel comprimido - Domínio utilizado na modelagem.

A Fig. 5.13 ilustra a convergência do deslocamento vertical no ponto A para as discretizações de elementos de cascas. Esses resultados são comparados com os numéricos de outras formulações de elementos de viga quadráticos apresentados por Prathap e Babu (1986), Choi e Lim (1993) e Raveendranath et al. (2001).

Para a análise, a carga P foi distribuída ao longo da borda através da largura do anel. Embora os resultados usando elementos de casca mostrem uma excelente tendência de convergência, eles não se alinham precisamente com a solução analítica. Notavelmente, a análise usando elementos de casca alinha-se com a solução analítica quando $\nu = 0$. Essa observação implica que os elementos de cascas não contabilizam completamente o efeito de Poisson na deformação do anel.

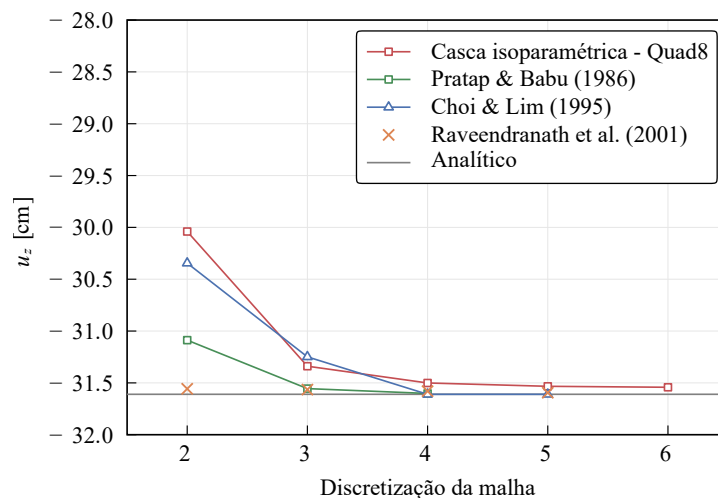


Figura 5.13 – Anel comprimido - Deslocamento vertical do ponto A.

Finalmente na Fig. 5.14 ilustra-se o campo de deslocamentos do anel deformado, para a análise usando 6 elementos isoparamétricos Quad8.

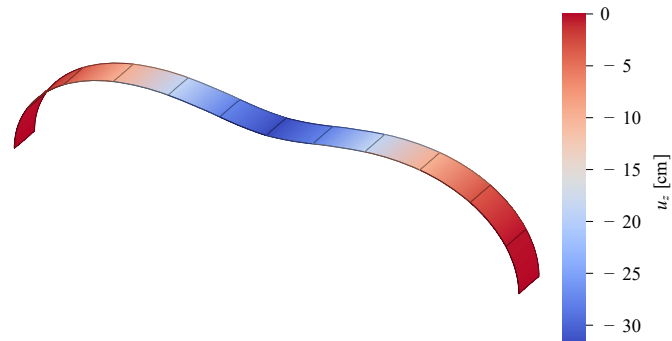


Figura 5.14 – Anel comprimido - Campo de deslocamentos da estrutura deformada.

5.2 - VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO TERMOMECÂNICA ACOPLADA

Para a validação da formulação termomecânica acoplada foram estudados 4 exemplos. Destes, dois apresentam solução analítica e os demais foram modelados no Abaqus e Amaru com elementos sólidos a título de comparação.

5.2.1 - Fluxo Unidimensional de Temperatura

A primeira análise tem como objetivo validar a formulação termomecânica acoplada aplicada ao fluxo de temperatura unidimensional. Essa formulação foi implementada de acordo com a metodologia descrita na seção 3.1 deste trabalho. O exemplo em questão foi previamente investigado por Carter e Booker (1989) e envolve uma placa feita de um material termoelástico com espessura th . Inicialmente, a placa encontra-se a uma temperatura absoluta $T_0 = 0$. A base da estrutura é rígida e isolada termicamente, conforme ilustrado na Fig. 5.15.

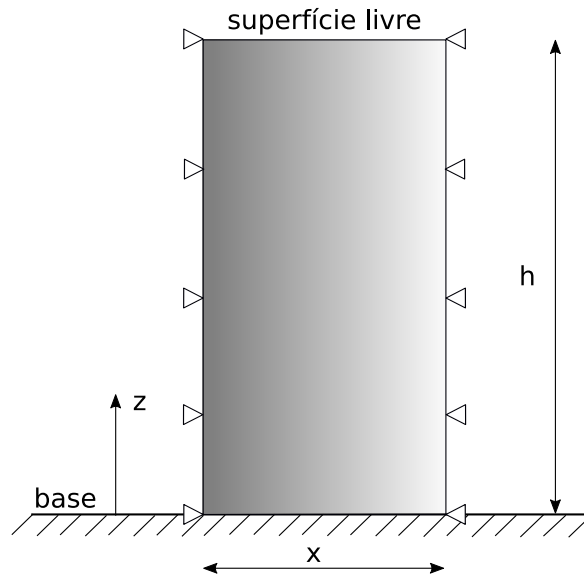


Figura 5.15 – Problema termomecânico unidimensional.

Neste estudo, foi adotada a seguinte condição: a partir de $t > 0$, uma temperatura de $\theta_0 = 100^\circ\text{C}$ é aplicada na superfície livre. Além disso, Carter e Booker (1989) apresentaram a solução analítica para o deslocamento em z e o perfil de temperatura ao longo da placa, conforme as seguintes equações:

$$\bar{\theta} = \left(\frac{\theta_0}{s} \right) \frac{\cosh(\mu z)}{\cosh(\mu h)} \quad (5.1)$$

$$\bar{w} = \left(\frac{\theta_0}{\mu s} \right) \left(\frac{\beta}{M} \right) \frac{\cosh(\mu z)}{\cosh(\mu h)} \quad (5.2)$$

onde:

$$\mu = \sqrt{\frac{sA}{\kappa M}} \quad (5.3)$$

Nas Eqs. 5.1 e 5.2, $\bar{\theta}$ e \bar{w} são as transformadas de Laplace com a variável s , A e M correspondem as condições adiabáticas e isotérmicas e κ é o coeficiente de difusividade. Para condições isotérmicas M é representado por:

$$M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.4)$$

Por outro lado, A é calculado pela equação a seguir:

$$A = M + \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v} \quad (5.5)$$

Finalmente κ é obtido através de:

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_v} \quad (5.6)$$

Além da solução exata, Carter e Booker (1989) apresentaram a resposta numérica, para isto, a estrutura foi discretizada de acordo com a Fig. 5.16.

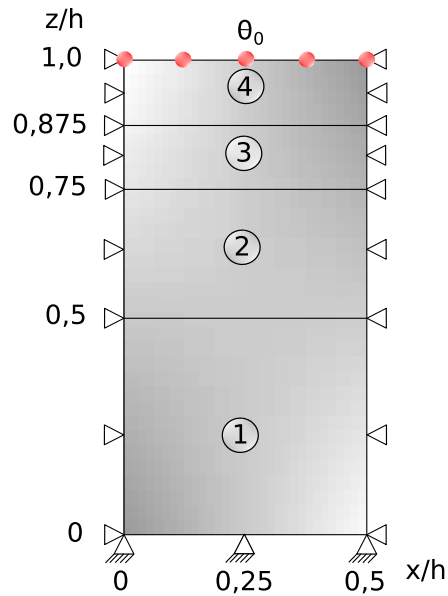


Figura 5.16 – Discretização da malha. Adaptada de Carter e Booker (1989).

Ademais os autores utilizaram a relação $A/M = 2$. Neste trabalho adotou-se as seguintes propriedades dos materiais: Módulo de Elasticidade (E) de 200 GPa, coeficiente de Poisson (ν) de 0,3, calor específico (c_v) de 113,35 J/kg/K, condutividade térmica (k) de 50,2 W/m/K, densidade (ρ) de 6000 kg/m³ e coeficiente de expansão térmica (α) de $5,0 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, conforme sintetizado na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Propriedades geométricas e do material da placa em estudo.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Base	x	0,5 m
Altura	z	1 m
Espessura	th	10 cm
Módulo de Young	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Calor específico	c_v	113,35 J/kg/K
Condutividade térmica	k	50,2 W/mK
Densidade	ρ	6000 kg/m ³
Coefficiente de expansão térmica	α	5·10 ⁻⁵ K ⁻¹

Por fim utilizou-se a mesma malha na análise via Amaru, com os resultados para o campo de temperatura expostos na Fig. 5.17.

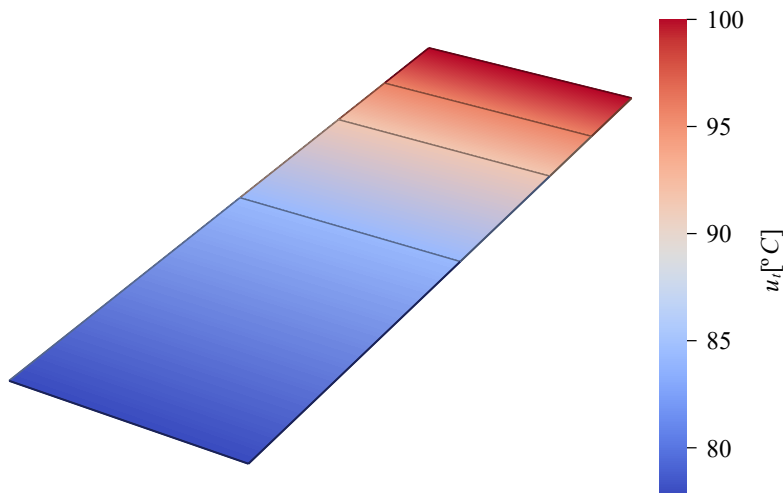


Figura 5.17 – Campo de temperatura da placa para $t = 13547,80$ segundos.

As Figuras 5.18 e 5.19 apresentam uma comparação detalhada entre os resultados obtidos na análise realizada por Carter e Booker (1989), a implementação via Amaru e a solução analítica para os campos de temperatura e deslocamento, respectivamente. Estas comparações foram feitas em diferentes instantes de tempo, representados pelo fator $\kappa t/h^2$. Para esta análise, três cenários distintos foram modelados: elementos de casca com tensão plana, sólidos com tensão plana e sólidos com deformação plana. A Figura 5.18 ilustra a razão entre a temperatura final e inicial ao longo da altura z da placa, proporcionando uma visão clara da variação térmica ao

longo da estrutura para diversos intervalos de tempo.

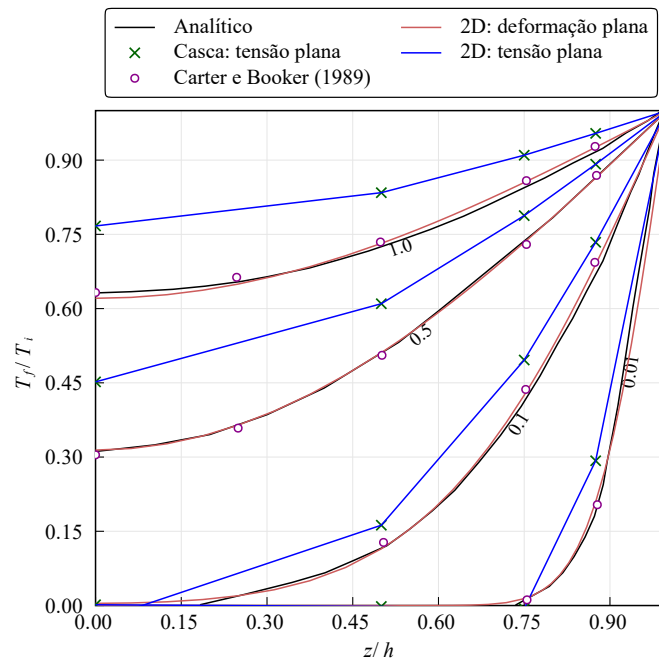


Figura 5.18 – Isocronas de temperatura para o fluxo unidimensional. Reposta analítica x numérica.

Na sequência a Fig. 5.19 exibe, para diferentes intervalos de tempo, o deslocamento vertical da superfície livre (topo) da placa em estudo.

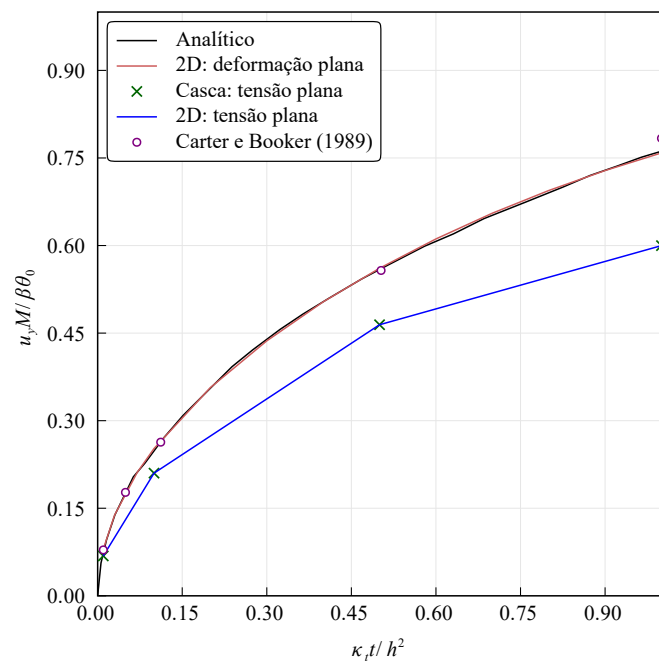


Figura 5.19 – Comparação do deslocamento vertical da superfície livre em função do tempo. Reposta analítica x numérica.

Nesse contexto, observa-se que a implementação termomecânica acoplada por meio do Amaru apresentou resultados notáveis para o fluxo unidimensional de temperatura e deslocamento na direção vertical. Destacou-se pela sua convergência tanto em comparação com a solução analítica quanto em relação a outra abordagem baseada em elementos finitos. Quando foram utilizados elementos sólidos com deformação plana, os resultados obtidos foram próximos aos valores numéricos e analíticos apresentados por Carter e Booker (1989). Já os resultados da modelagem com elementos de casca e elementos sólidos, ambos com tensão plana, foram praticamente idênticos.

Além disso, as Figuras 5.18 e 5.19 destacam os achados da análise transiente, apresentando vários cenários simulados em diferentes intervalos de tempo (fatores de tempo de $(\kappa t/h^2)$ 0,1, 0, 0, e 1,0) com elementos de casca e elementos sólidos. Observa-se que os resultados utilizando deformação plana foram próximos aos encontrados na literatura. Ademais, para facilitar a comparação com os resultados obtidos com o elemento de casca, foi simulado o elemento 2D utilizando tensão plana, levando a uma convergência nos resultados entre as duas análises. Assim, conclui-se que a metodologia empregada demonstrou eficácia nesse tipo de investigação.

5.2.2 - Fluxo Radial de Temperatura

Outro exemplo proposto por Carter e Booker (1989) trata-se de um cilindro longo infinito, com temperatura inicial uniforme $T_0 = 0$, submetido a um fluxo térmico radial, ilustrado na Fig. 5.20.

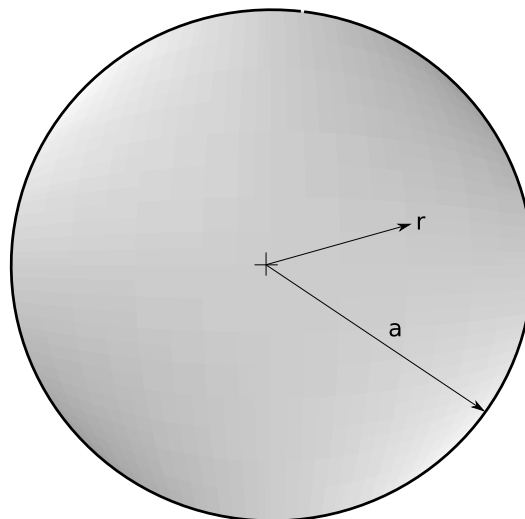


Figura 5.20 – Problema termomecânico em um cilindro. Adaptada de Carter e Booker (1989).

A análise consiste em aplicar uma temperatura θ_0 na superfície $r = a$, com o intuito de verificar

a difusão térmica no interior da estrutura. A solução analítica para o campo de temperatura é descrita por:

$$\beta \bar{\theta} = 2(M - A)R + SI_0(\mu r) \quad (5.7)$$

Já para o campo de deslocamentos a solução é calculada através da seguinte equação:

$$\frac{\bar{u}}{r} = R + \left(\frac{S}{M}\right) \left(\frac{I_0'(\mu r)}{\mu r}\right) \quad (5.8)$$

onde:

$$R = \left(\frac{G}{M}\right) \left(\frac{I_0'(\mu a)}{\mu a}\right) \Omega \quad (5.9)$$

$$S = (A - G) \Omega \quad (5.10)$$

$$\Omega = \beta \bar{\theta}_0 / \left[(A - G) I_0(\mu a) + 2(M - A) \left(\frac{G}{M}\right) \left(\frac{I_0'(\mu a)}{\mu a}\right) \right] \quad (5.11)$$

Finalmente I_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero, \bar{u} é o deslocamento radial e G é o módulo de elasticidade transversal.

Os autores utilizaram a relação $A/M = 1,75$, para isto, neste trabalho adotaram-se as seguintes propriedades dos materiais: Módulo de Elasticidade (E) de 200 GPa, coeficiente de Poisson (ν) de 0,3, calor específico (c_v) de 140,79 J/kg/K, condutividade térmica (k) de 50,2 W/m/K, densidade (ρ) de 6000 kg/m³ e coeficiente de expansão térmica (α) de 5,0·10⁻⁵ K⁻¹. Estes parâmetros são resumidos na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Propriedades geométricas e do material do cilindro em estudo.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	a	1 m
Espessura	t	10 cm
Módulo de Young	E	200 GPa
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Calor específico	c_v	140,79 J/kg/K
Condutividade térmica	k	50,2 W/m/K
Densidade	ρ	6000 kg/m ³
Coeficiente de expansão térmica	α	5·10 ⁻⁵ K ⁻¹

Carter e Booker (1989) apresentaram a solução exata e numérica, para a segunda, usou-se a seguinte discretização da malha mostrada na Fig. 5.21.

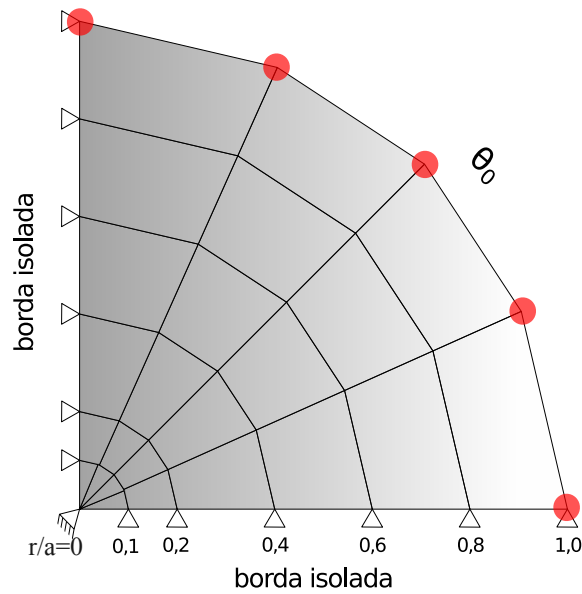


Figura 5.21 – Discretização da malha para o exemplo do cilindro. Adaptada de Carter e Booker (1989).

As Figs. 5.22 e 5.23 exibem as respostas analíticas e os resultados numéricos deste trabalho, bem como os de Carter e Booker (1989), para as temperaturas e os deslocamentos radiais, respectivamente. Foi adotada uma temperatura $\theta_0 = 200^\circ C$ em diferentes intervalos de tempo, representados pelo fator $\kappa t/a^2$. Foram utilizadas três abordagens de modelagem via Amaru: elementos sólidos com deformação plana, elementos com tensão plana e elementos de casca.

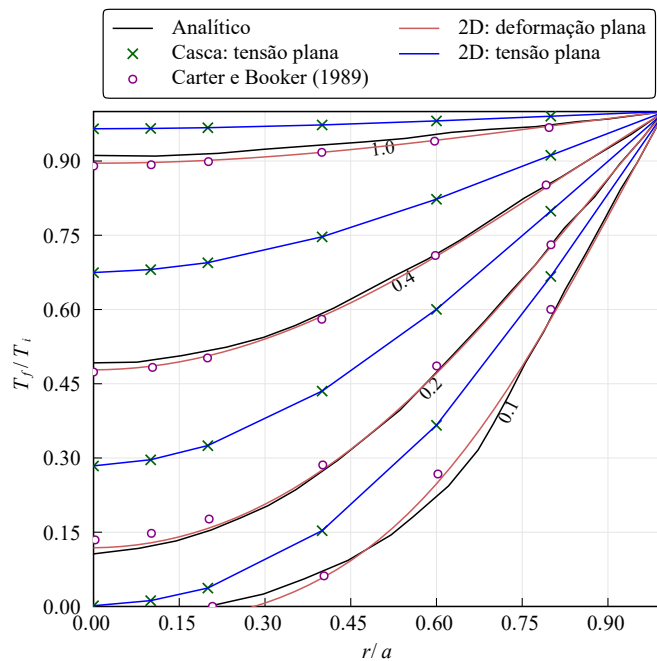


Figura 5.22 – Isocronas de temperatura para o fluxo em 1/4 de cilindro. Reposta analítica x numérica.

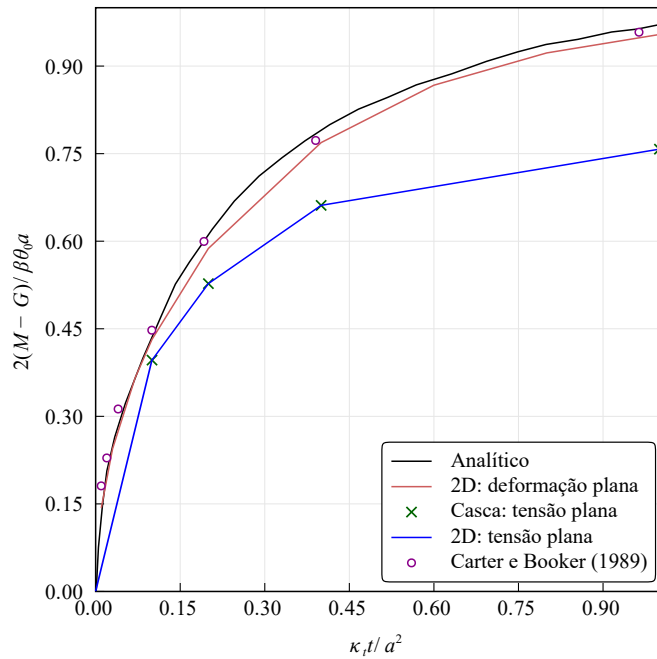


Figura 5.23 – Comparação do deslocamento radial em função do tempo. Resposta analítica x numérica.

A seguir, na Fig. 5.24, encontra-se a variação térmica em 1/4 de cilindro para $\kappa t/a^2 = 0,4$.

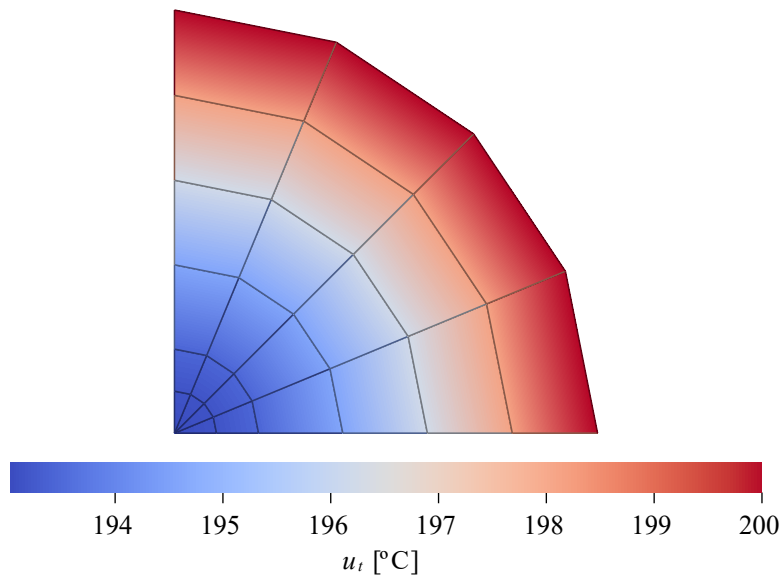


Figura 5.24 – Campo de temperatura na estrutura deformada - 1/4 do cilindro.

Analisando os resultados apresentados na Fig. 5.22, constata-se que os valores obtidos para temperatura foram, de modo geral, semelhantes a análise numérica realizada por Carter e Booker (1989), e próximos à resposta exata. Por outro lado na Fig. 5.23 foi observada uma congruência nas três metodologias analisadas, onde os deslocamentos radiais se aproximaram

dos valores previstos analiticamente. Além disso, ambas as figuras demonstram a resposta transiente ao problema em questão, indicando que a formulação acoplada também proporcionou um desempenho satisfatório para o fluxo de temperatura e os deslocamentos radiais. Quando se considera a tensão plana, os resultados para os elementos de casca e sólidos apresentaram excelente concordância.

5.2.3 - Placa Sob Várias Condições de Contorno

O exemplo exposto a seguir aborda a formulação termomecânica acoplada, ou seja, há restrições de apoio, esforços externos e aplicação de temperatura. A ideia é comparar o potencial da implementação desenvolvida neste estudo com os resultados das simulações no Abaqus. Em ambas as análises foram utilizados elementos planos Quad4. Sabe-se ainda que a base possui base (b) igual a 1 m, altura (h) de 2 m, espessura (t) de 10 cm. Já para as propriedades mecânicas tem-se o Módulo de Young (E) de 200GPa, coeficiente de Poisson (ν) de 0,3, calor específico (c_v) de 510,789 J/kg/K, condutividade térmica (k) de 50,2 W/m/K, densidade (ρ) de 7800 kg/m³ e coeficiente de expansão térmica (α) igual a $5,0 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, de acordo com a Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Propriedades geométricas e do material para análise da placa sob várias condições de contorno.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Base	b	1 m
Altura	h	2 m
Espessura	t	10 cm
Módulo de Young	E	200 GPa
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Calor específico	c_v	510,789 J/kg/K
Condutividade térmica	k	50,2 W/mK
Densidade	ρ	7800 kg/m ³
Coeficiente de expansão térmica	α	$5 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

A placa plana está sujeita às diversas condições de contorno. Nesse caso, são aplicadas temperaturas nas bordas esquerda e superior da placa, enquanto uma tensão de 50 MPa é aplicada na borda direita. A base da estrutura, por sua vez, apresenta restrições quanto ao deslocamento horizontal e vertical (ver Fig. 5.25).

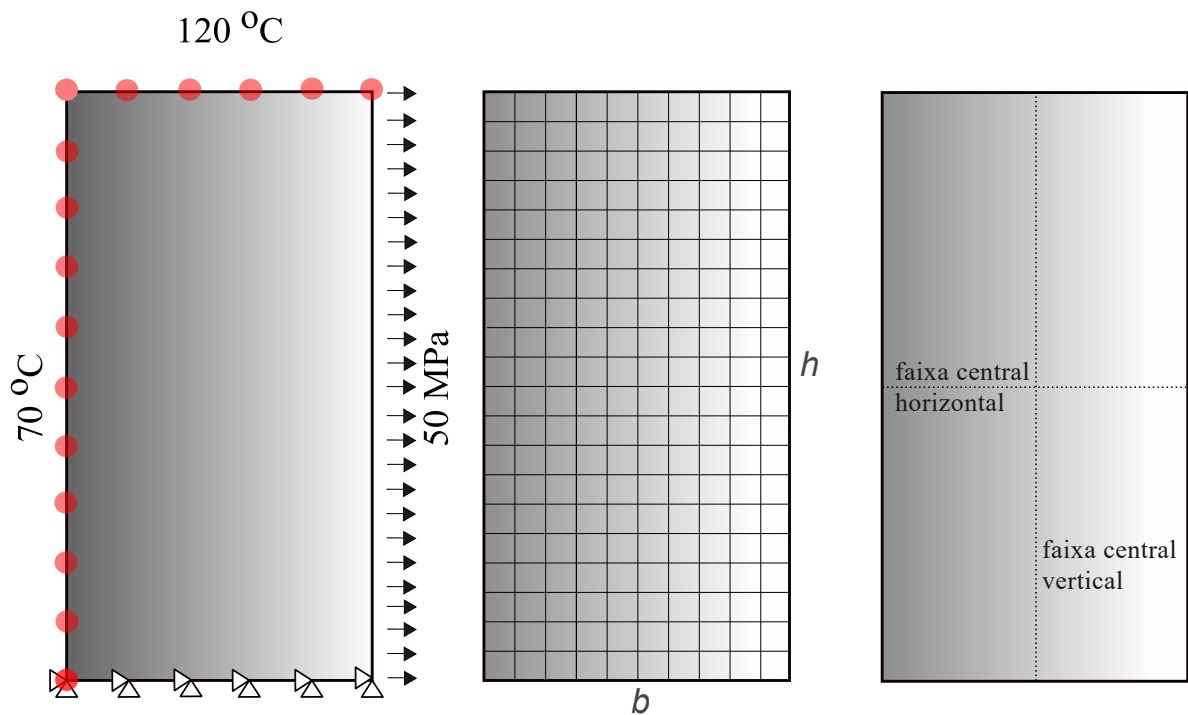


Figura 5.25 – Análise termomecânica acoplada para placa sob várias condições de contorno.

Realizando uma análise com um período de 20.000 segundos e dividindo-o em 20 incrementos, pode-se visualizar o campo de temperatura na placa deformada na Fig. 5.26.

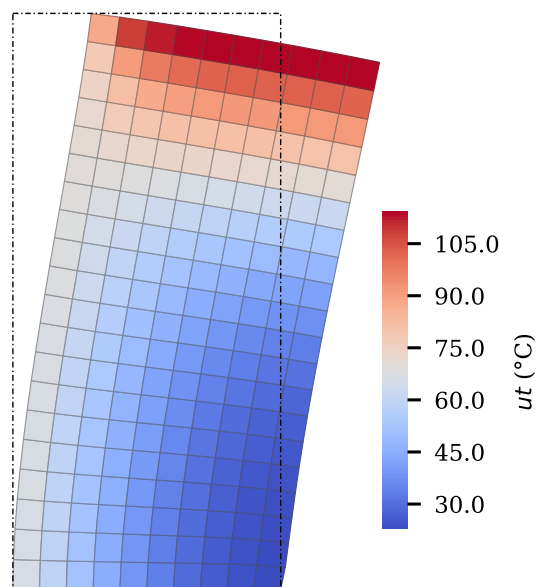


Figura 5.26 – Placa deformada com campo de temperatura para um tempo final de 20.000 segundos.

A Fig. 5.27 apresenta o deslocamento horizontal da placa em função do comprimento b ao

longo de uma faixa horizontal central, conforme Fig. 5.25. São comparados os resultados obtidos pelo Amaru e pelo Abaqus. Em ambas as análises, foi utilizada a mesma quantidade de elementos Quad4. Observa-se uma pequena discrepância nos resultados das duas análises, entretanto, ambos os resultados convergiram para a mesma tendência geral.

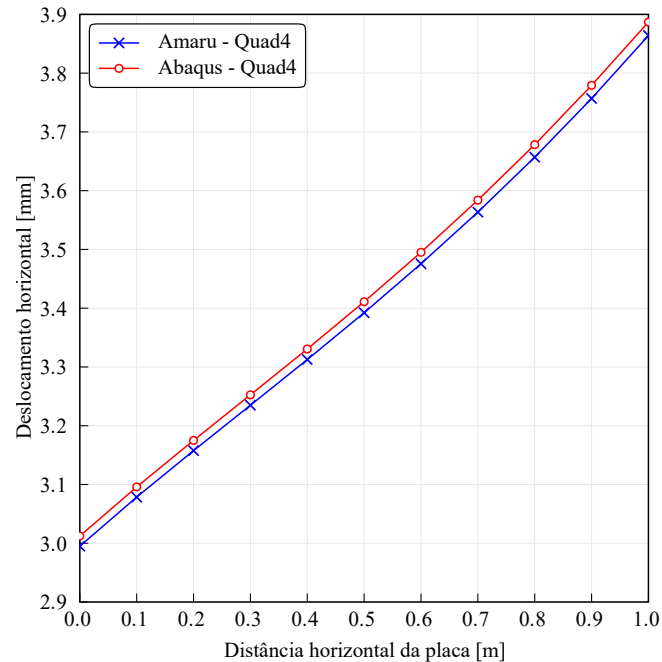


Figura 5.27 – Comparação dos valores para o deslocamento horizontal ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

A mesma faixa horizontal central monitorada na Figura 5.27 é agora utilizada para monitorar o deslocamento vertical, conforme mostrado na Figura 5.28. Consta-se que os resultados obtidos em ambas as análises foram idênticos.

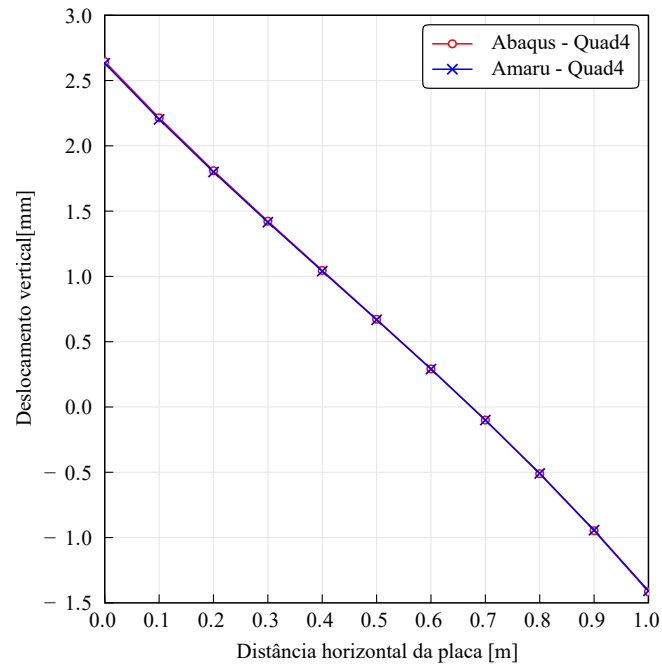


Figura 5.28 – Comparação dos valores para o deslocamento vertical ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

Nesse contexto, a Figura 5.29 apresenta a variação da temperatura ao longo da mesma faixa horizontal ($y = 1,0$). Os resultados obtidos pelo Amaru e pelo Abaqus foram semelhantes na faixa de 0 a 0,4 metros da placa. A partir desse ponto, observou-se uma pequena diferença entre os resultados das duas análises.

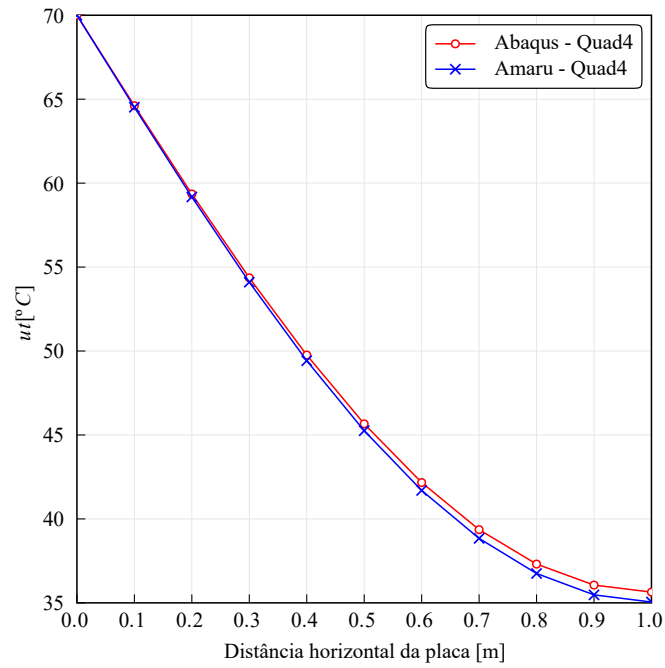


Figura 5.29 – Comparação dos valores para a temperatura ao longo do eixo horizontal no meio da placa ($y = 1,0$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

Utilizando a mesma metodologia de análise apresentada nas Figs. 5.27, 5.28 e 5.29, agora é analisada a faixa vertical em ($x = 0,5$). A Fig. 5.30 compara os valores do deslocamento horizontal ao longo do comprimento vertical da placa. Verifica-se que os resultados obtidos pelo Amaru e pelo Abaqus foram idênticos.

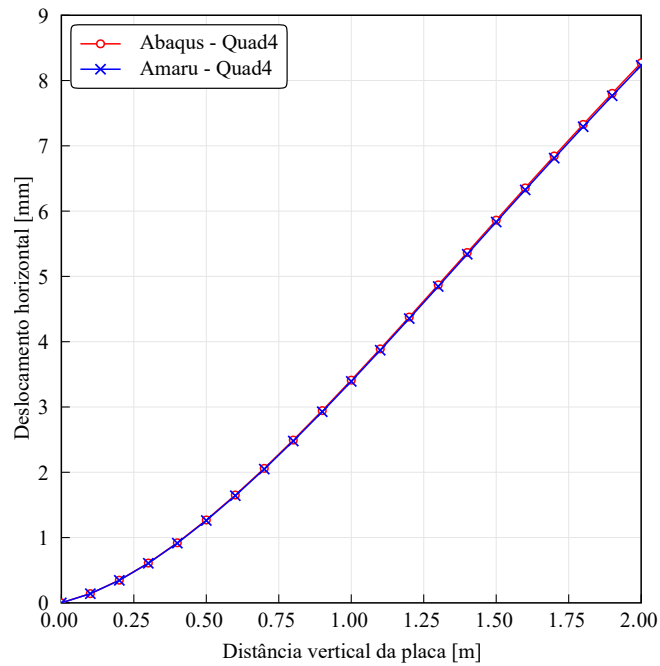


Figura 5.30 – Comparação dos valores para o deslocamento horizontal ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

Por sua vez a Fig. 5.31 exibe os valores encontrados para o deslocamento vertical na faixa de análise ($x = 0,5$), mais um vez, os resultados em ambas os softwares foram os mesmos.

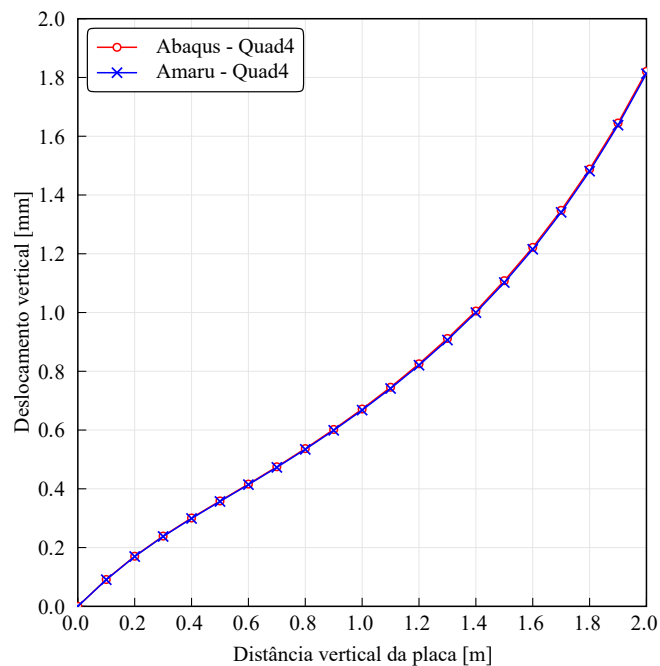


Figura 5.31 – Comparação dos valores para o deslocamento vertical ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

Finalmente a Fig. 5.32 ilustra a comparação dos valores para a temperatura ao longo do eixo vertical via Amaru e Abaqus, com os resultados simulares para os dois casos.

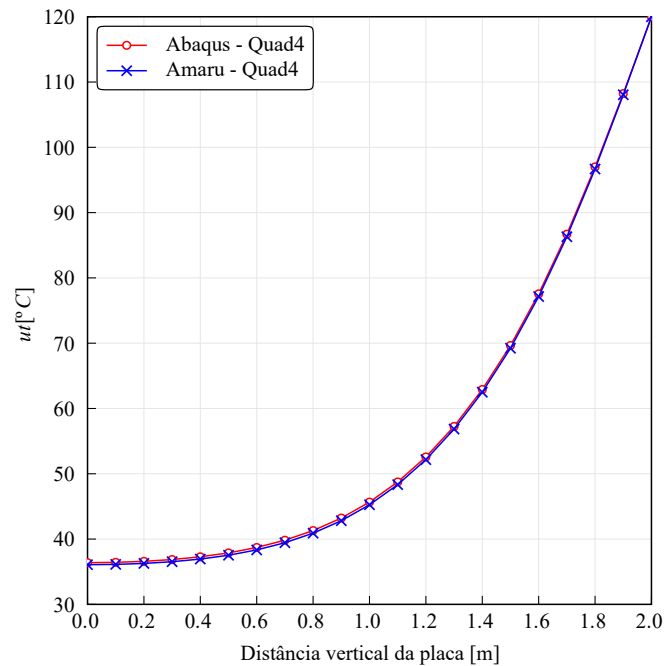


Figura 5.32 – Comparação dos valores para a temperatura ao longo do eixo vertical no meio da placa ($x = 0,5$) via Abaqus x Implementação via Amaru, para $t = 20.000$ segundos.

Os resultados das análises mostrados nas Figs. 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32 confirmam a validação da abordagem sugerida para a análise termomecânica neste trabalho. Apenas os resultados da Fig.5.27 e da Fig. 5.29 mostraram valores diferentes em ambas as análises. Isso pode ser explicado, por exemplo, pelo fato do Amaru usar dois pontos de integração ao longo da espessura, enquanto o Abaqus usa apenas um. Além disso, o Amaru simula o elemento Quad4 usando a formulação isoparamétrica degenerada, enquanto o Abaqus usa a formulação para elementos planos.

A fim de verificar o desempenho da implementação em relação à análise transiente, monitorou-se o nó central, com $0 \leq t \leq 10000$ segundos, utilizando 250 incrementos tanto no Amaru quanto no Abaqus. A seguir, nas Figs. 5.33, 5.34 e 5.35 são apresentados os valores obtidos em ambas as análises para o deslocamento horizontal, vertical e variação da temperatura, respectivamente.

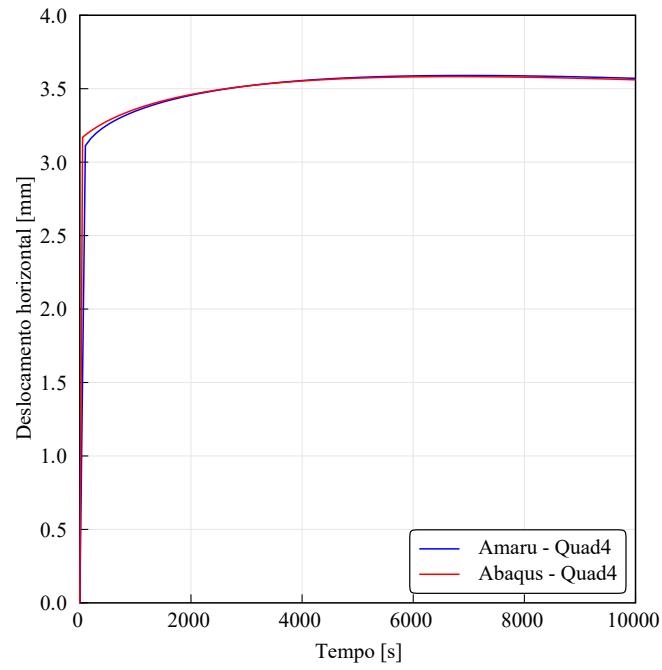


Figura 5.33 – Comparação dos resultados do deslocamento horizontal do nó central x tempo.

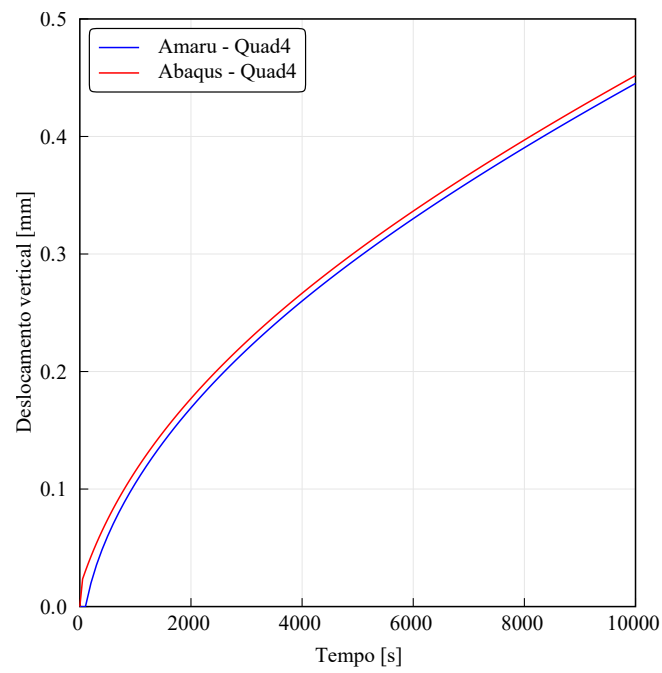


Figura 5.34 – Comparação dos resultados do deslocamento vertical do nó central x tempo.

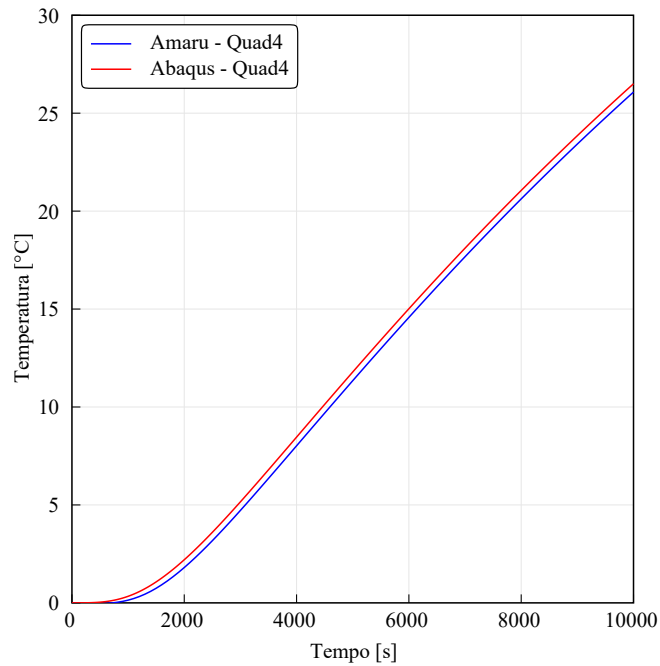


Figura 5.35 – Comparação dos resultados da temperatura do nó central x tempo.

Os resultados desta seção demonstram que a formulação para análise termomecânica acoplada apresentou um desempenho excelente em comparação com o Abaqus. No exemplo abordado, observou-se que os valores de temperatura, deslocamento horizontal e vertical eram praticamente idênticos nas duas modelagens, uma vez que a mesma quantidade de elementos quadriláteros de quatro nós foi empregada, tanto para análises estacionárias como transientes.

5.2.4 - Coberta Cilíndrica Sob Efeito da Temperatura

Finalmente, procedeu-se à análise do mesmo exemplo previamente discutido na seção 4.1.2, porém com a adição de um campo de temperatura elevado de 400°C . Este cenário é representado na Fig. 5.36.

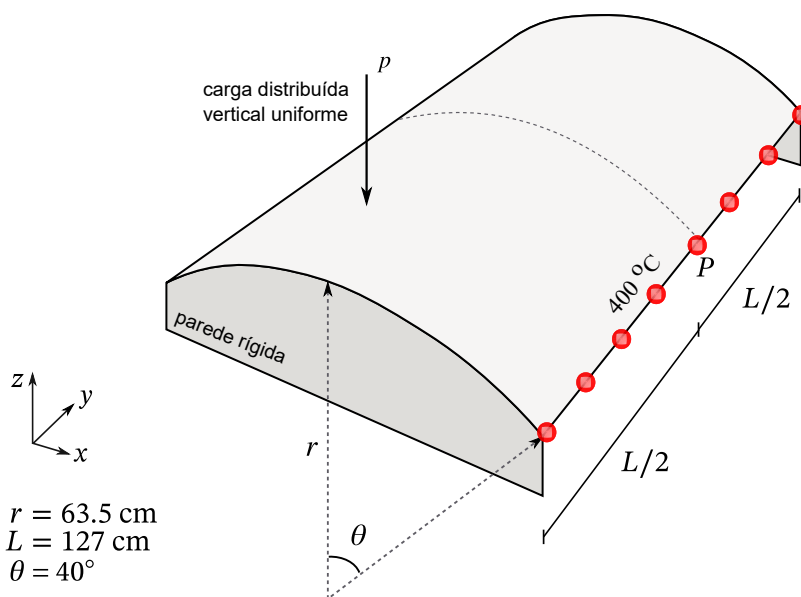


Figura 5.36 – Coberta de Scordelis-Lo com campo de temperatura aplicado.

A cobertura de formato cilíndrico em questão apresenta um comprimento (L) de 127 centímetros, um raio (r) de 63,5 centímetros, uma espessura (t) de 6,35 milímetros e um ângulo de curvatura da cobertura (θ) de 40 graus. As propriedades do material que compõe a referida cobertura são determinadas pelo Módulo de Elasticidade (E) de 2978,5 GPa, o coeficiente de Poisson (ν) que possui o valor de 0, o calor específico (c_v) de 425 J/kg/K, a condutividade térmica (k) de 54 W/m/K, a densidade (ρ) de 7800 kg/m³ e o coeficiente de expansão térmica (α) que é igual a $1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$. Ressaltando que c_v , k e α variam a medida que a temperatura no elemento aumenta, conforme proposto no item 4.4. Essas informações estão resumidas na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Propriedades geométricas e do material da cobertura de Scordelis-Lo com campo de temperatura aplicado.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio	r	63,5 cm
Espessura	t	6,35 mm
Comprimento da cobertura	L	127 cm
Ângulo de curvatura	θ	40°
Módulo de Young	E	2978,5 GPa
Coeficiente de Poisson	ν	0
Calor específico	c_v	425 J/kgK a 20°C
Condutividade térmica	k	54 W/mK a 20°C
Densidade	ρ	7800 kg/m ³
Coeficiente de expansão térmica	α	$1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ a 20°C

Com base nos resultados apresentados na Figura 5.37, que ilustra graficamente o deslocamento vertical z do ponto P ao longo de uma análise de 300 segundos utilizando diferentes malhas — 14x20 (280 elementos), 28x40 (1120 elementos) e 42x60 (2520 elementos) —, pode-se constatar que as curvas resultantes da modelagem numérica realizada neste estudo, empregando elementos de casca Quad8 e sólidos Hex20, bem como aquelas geradas pelo software Abaqus, convergiram para direções semelhantes. No entanto, foi necessário adotar uma maior discretização da malha no caso do Abaqus e dos elementos sólidos utilizados no software Amaru. Isso pode ser explicado pelo fato de que o elemento de casca Quad8 desenvolvido neste estudo aplica o grau de liberdade de temperatura em todos os nós, enquanto o Abaqus aplica esse grau de liberdade apenas nos nós das quinas, o que acelera o processamento, mas reduz a precisão dos resultados.

Sabe-se que a condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB) é essencial para garantir a estabilidade e a precisão dos métodos de elementos finitos, especialmente em problemas de ponto de sela, como a discretização de cascas. A LBB assegura que a discretização de Galerkin não produz soluções espúrias e que a pressão e a velocidade são corretamente acopladas em problemas de escoamento de fluido, o que pode ser análogo na análise de cascas para tensões e deformações. Entretanto, para elementos sólidos, a principal preocupação é resolver a distribuição de tensões e deformações dentro de um volume. Quando utilizados elementos sólidos para modelar problemas em que a estrutura tem elevado raio de curvatura e espessura pequena, será necessária uma maior discretização para evitar o efeito de travamento. Concluí-se que em todas as análises conduzidas, a partir dos 150 segundos, observou-se uma convergência em relação ao deslocamento máximo do ponto P , atingindo aproximadamente 0,0225 centímetros.

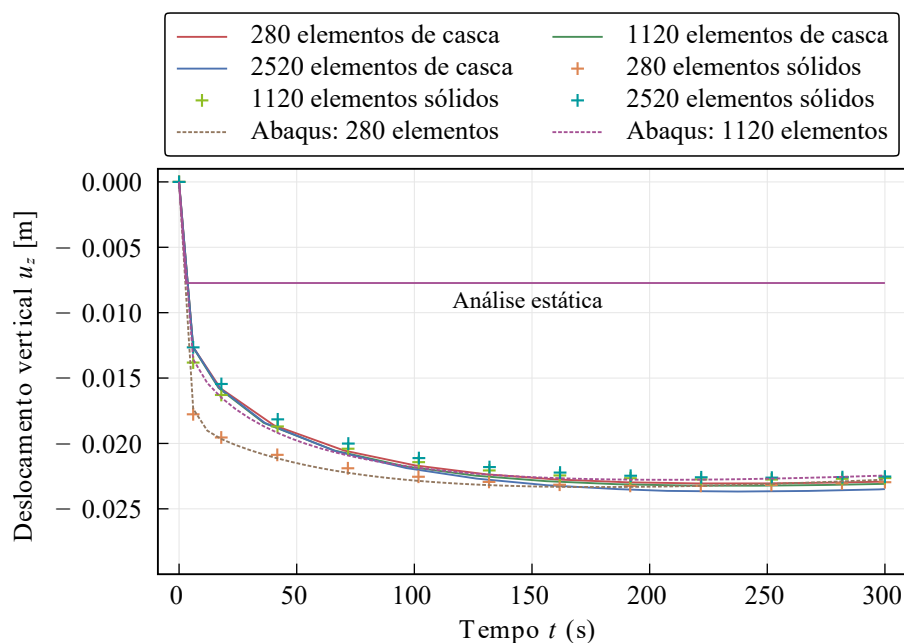


Figura 5.37 – Coberta de Scordelis-Lo - Resultados com campo de temperatura aplicado.

Com o propósito de visualizar detalhadamente tanto o campo de deslocamento quanto o campo de temperatura da estrutura em questão, são disponibilizadas as Figuras 5.38 e 5.39, respectivamente. Estas figuras fazem parte do resultado obtido a partir da análise realizada na malha composta por 28x40 elementos.

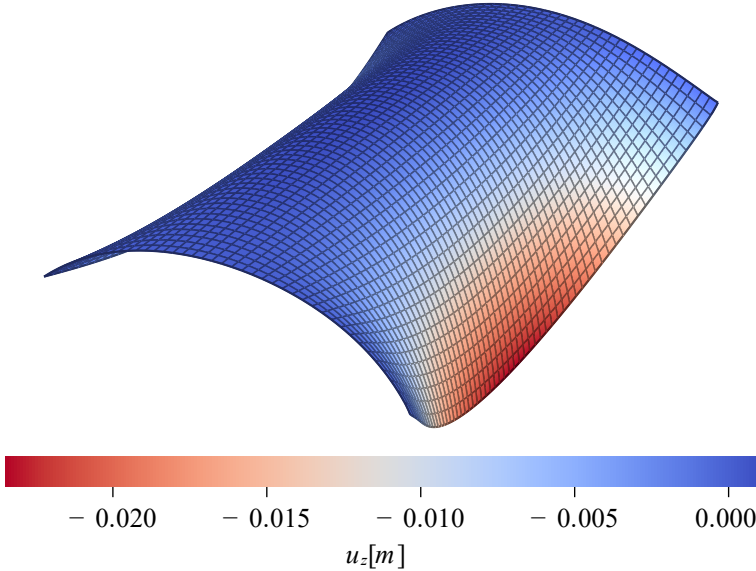


Figura 5.38 – Coberta de Scordelis-Lo - Estrutura deformada.

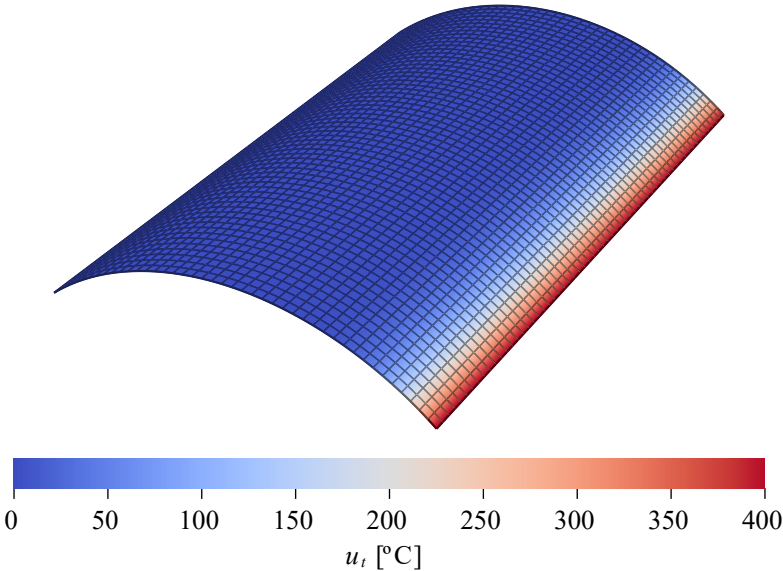


Figura 5.39 – Coberta de Scordelis-Lo - Campo de temperatura.

5.3 - VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE VON MISES PARA ELEMENTOS DE CASCA

Abaixo serão apresentados três exemplos que servirão para validar a formulação do modelo constitutivo do material, baseado na plasticidade de von Mises, desenvolvido no âmbito deste estudo. O primeiro exemplo consiste em uma viga elastoplástica em balanço. O segundo exemplo aborda uma placa quadrada contendo um furo circular localizado no centro. Por fim, o terceiro exemplo analisa o comportamento de um tubo sujeito a deslocamentos prescritos.

5.3.1 - Viga elastoplástica em balanço

Nesta análise, explora-se o comportamento não-linear de uma viga elastoplástica em balanço. Para isso, baseia-se na solução proposta por Lubliner e utilizando a teoria da plasticidade de von Mises. A Figura 5.40 apresenta a representação da malha de elementos finitos e as condições de contorno adotadas no estudo. É importante notar que, na extremidade esquerda da viga, somente o nó central está fixado na direção horizontal, enquanto na extremidade direita é aplicado um deslocamento prescrito de $\delta = 8$ centímetros.

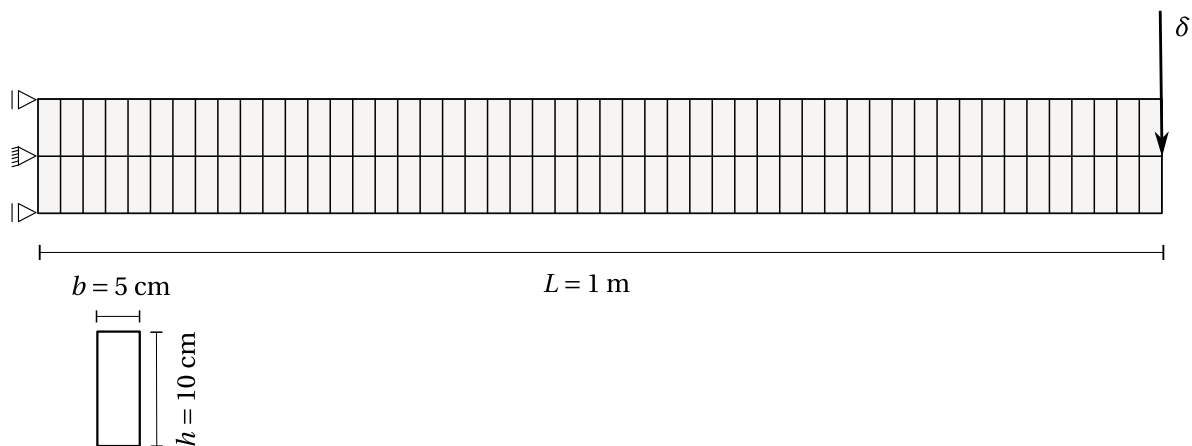


Figura 5.40 – Viga elastoplástica em balanço.

Adicionalmente, é importante ressaltar que as características geométricas da viga em questão abrangem o comprimento (L) de 1 m, a largura da base (b) de 5 cm e a altura (h) de 10 cm. Por outro lado, as propriedades do material utilizado na construção da viga incluem um módulo de elasticidade de Young equivalente a 210 GPa, um coeficiente de Poisson (ν) de 0,3 e uma resistência de escoamento (f_y) de 240 MPa, conforme detalhado na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga elastoplástica em balanço.

Parâmetro	Símbolo	Valor
base da viga	b	5 cm
altura da viga	t	10 cm
Comprimento da viga	L	1 m
Módulo de Young	E	210 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Tensão de escoamento	f_y	240 MPa

A carga limite analítica para este problema, conforme apresentado por Lubliner (2006), é expressa como:

$$F_{lim} = \frac{f_y b h^2}{4L} = 30 \text{ kN} \quad (5.12)$$

Inicialmente, a viga em questão foi submetida a uma simulação computacional utilizando um total de 2×50 elementos de casca isoparamétricos Quad8. Esta abordagem de discretização segue o mesmo padrão detalhado por De Souza Neto et al. (2008). Com o intuito de estabelecer comparações significativas, análises adicionais foram realizadas empregando elementos planos Quad8 sob condições de tensão plana, bem como elementos sólidos Hex20, ambos utilizando o software Amaru. Os resultados obtidos desta investigação estão representados na Fig. 5.41, onde são apresentados graficamente os valores numéricos da carga suportada pela viga em relação à sua deflexão vertical. Além disso, os achados reportados por De Souza Neto et al. (2008) com o uso de elementos planos quadráticos também são incluídos para efeito comparativo.

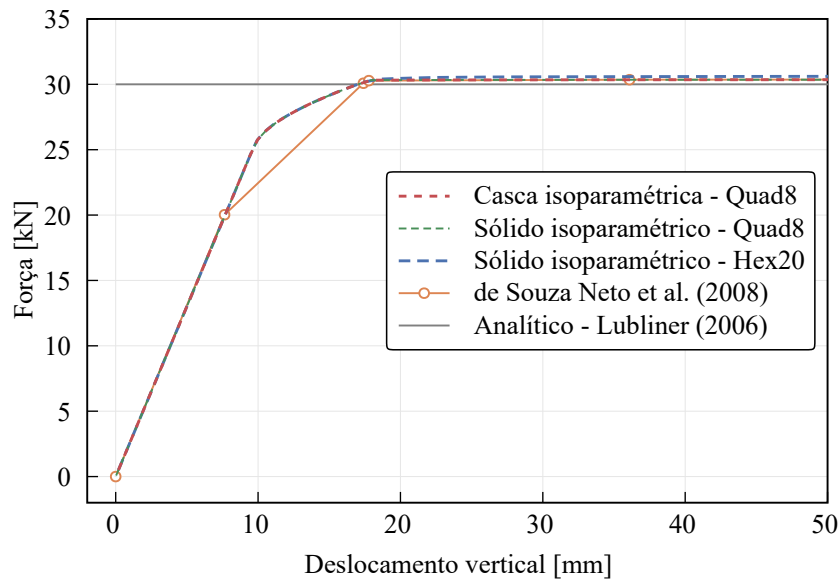


Figura 5.41 – Viga elastoplástica em balanço - Estudo do desempenho de elementos de casca utilizando a plasticidade de von Mises.

Os dados obtidos a partir da utilização de elementos de casca quadráticos com o modelo de plasticidade de von Mises demonstram resultados semelhantes aos encontrados ao utilizar elementos sólidos Quad8 e Hex20. Além disso, é observado que esses resultados estão em concordância com os valores calculados analiticamente. Adicionalmente, é possível notar que as curvas resultantes mostram um início gradual do processo de plastificação do material a partir de um deslocamento vertical de aproximadamente 18 milímetros em ambas as análises realizadas, tanto pela formulação proposta neste estudo, quanto pelas modelagens utilizando elementos sólidos no software Amaru e pelos resultados apresentados por Lubliner (2006) e De Souza Neto et al. (2008).

5.3.2 - Placa perfurada

Esta análise investiga o comportamento não-linear de uma placa com um furo central sob deformação por tração, conforme ilustrado na Fig.5.42.

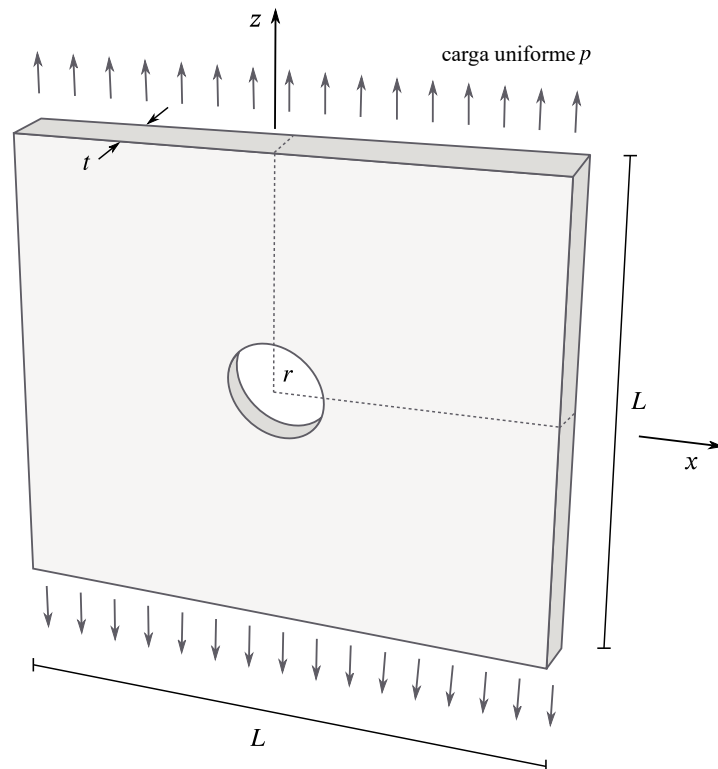


Figura 5.42 – Placa perfurada.

A placa em questão possui um comprimento (L) de 50 mm, um raio de furo (r) de 5 mm e uma espessura de 2 mm. Devido às considerações de simetria envolvidas, apenas um quarto do domínio total é simulado para simplificar a análise. As propriedades do material que compõe a placa incluem um módulo de Young E de 70 GPa, uma razão de Poisson ν de 0,2 e uma tensão de escoamento f_y de 243 MPa, como detalhado na Tabela 5.10. O carregamento mecânico atuante é representado por uma carga uniforme de 175 MPa aplicada nas fronteiras superior e inferior da placa. Este problema em particular foi previamente investigado por autores como Mousavi et al. (2021) e Asgari e Kouchakzadeh (2023) no contexto da formulação peridinâmica para análise de tensão plana, utilizando o modelo de plasticidade baseado em von Mises, respectivamente. Os estudos anteriores utilizaram uma malha uniforme composta por 220×220 elementos, enquanto a abordagem adotada neste trabalho emprega uma malha não estruturada de elementos finitos com 20 subdivisões ao longo dos lados mais extensos da placa para a modelagem numérica do problema em questão.

Tabela 5.10 – Propriedades geométricas e mecânicas da placa perfurada.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio externo	r	5 mm
Espessura	t	2 mm
Comprimento da placa	L	50 mm
Módulo de Young	E	70 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,2
Tensão de escoamento	f_y	243 MPa

A Figura 5.43 apresenta de forma gráfica os deslocamentos verticais ao longo do eixo z , que foram calculados utilizando elementos de casca triangulares com 6 nós. É importante ressaltar que os resultados obtidos nesta análise estão em total concordância com as descobertas de outros pesquisadores, em especial aqueles mencionados por Asgari e Kouchakzadeh (2023). Além disso, na Figura 5.44, é possível visualizar a distribuição da tensão de von Mises ao longo do eixo x . A utilização desses elementos de casca se mostrou eficaz na previsão da plastificação próxima ao furo, mantendo uma boa correspondência geral com estudos anteriores para a maior parte do domínio analisado. Nota-se que os resultados apresentados por Mousavi et al. (2021) tendem a superestimar a tensão de escoamento nas proximidades do furo. Por outro lado, é importante destacar que esses estudos prévios enfrentam dificuldades em prever com precisão os níveis de tensão nas fronteiras da placa.

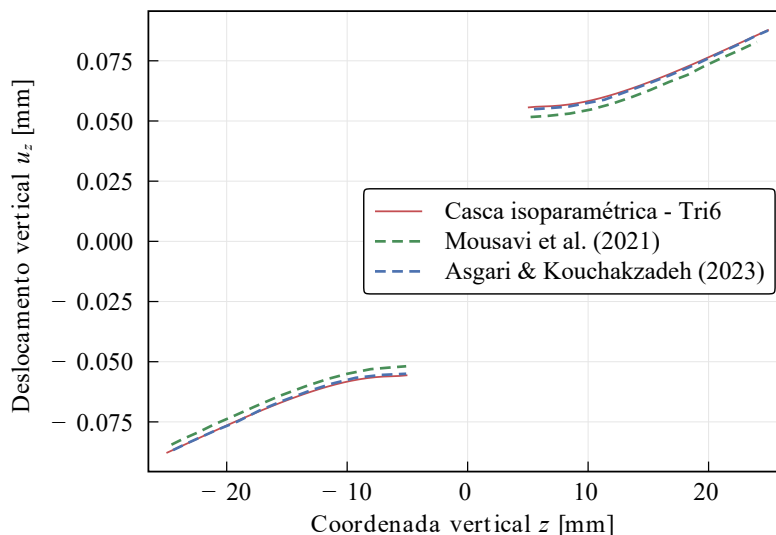


Figura 5.43 – Placa perfurada - Deslocamento vertical ao longo do eixo z .

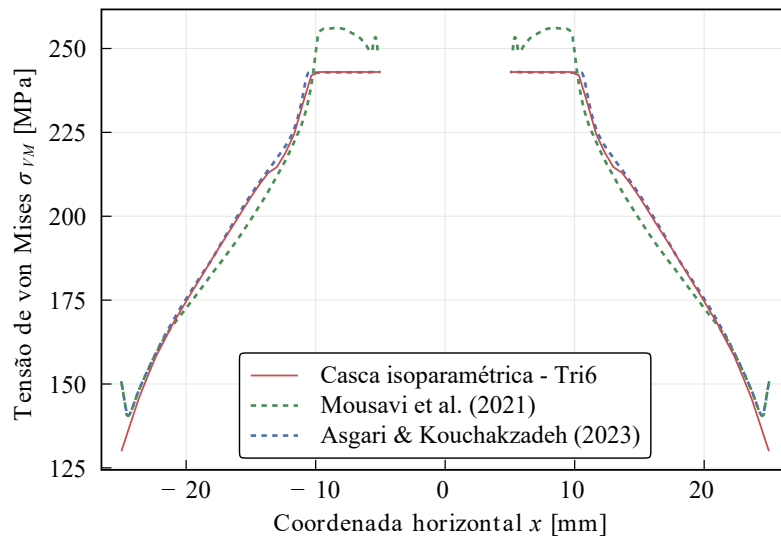


Figura 5.44 – Placa perfurada - Tensão de von Mises ao longo do eixo x .

Finalmente, para referência, a Fig. 5.45 mostra o campo σ_{VM} onde a região plastificada é pintada de vermelho.

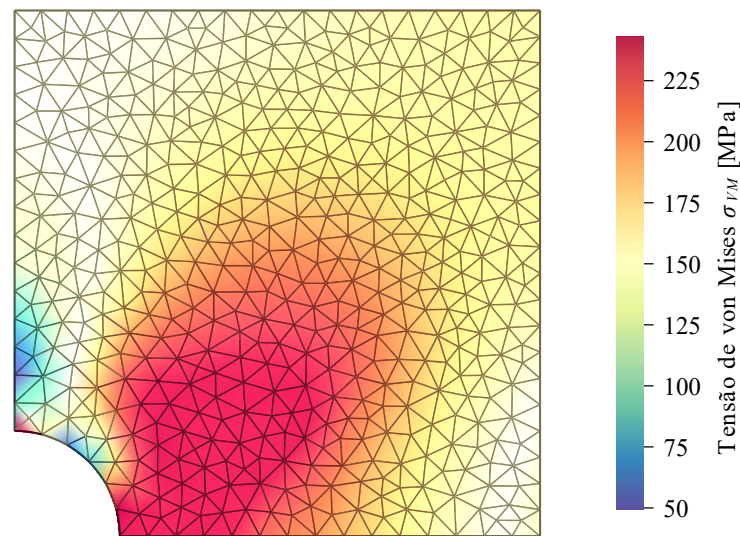


Figura 5.45 – Placa perfurada - Distribuição da tensão de von Mises para um quarto da placa.

5.3.3 - Tubo sob deslocamentos prescritos

A presente análise tem como objetivo a investigação da plastificação de um tubo que está sujeito a deslocamentos prescritos em suas extremidades, conforme demonstrado de forma ilustrativa na Fig. 5.46. O referido tubo encontra-se fixado em uma das extremidades, ao passo que um deslocamento estritamente vertical de δ_z igual a 1 milímetro é aplicado na outra extremidade. O intuito deste estudo é analisar minuciosamente a evolução das tensões presentes na extremidade

direita do tubo.

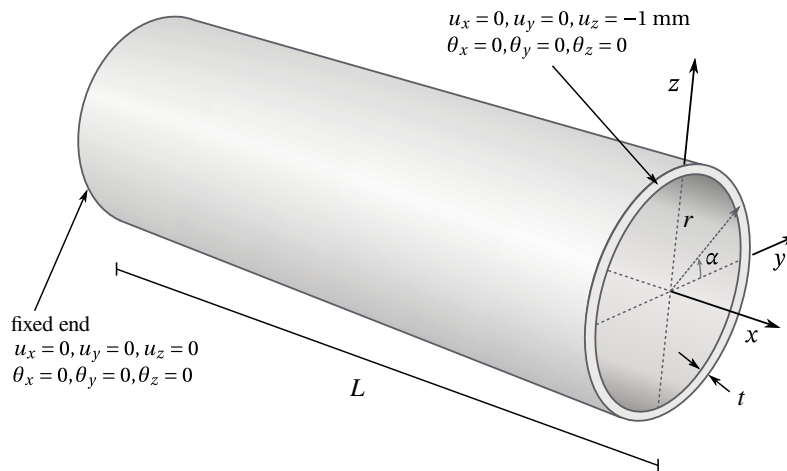


Figura 5.46 – Tubo sob deslocamentos prescritos.

As propriedades geométricas do tubo incluem um comprimento (L) de 150 mm, um raio (r) de 25,4 mm e uma espessura de 2 mm. Já as propriedades mecânicas são caracterizadas pelo módulo de Young (E) de 200 GPa, uma razão de Poisson (ν) de 0,2 e uma tensão de escoamento (f_y) de 243 MPa, ambas resumidas na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Propriedades geométricas e mecânicas para análise do tubo sob deslocamentos prescritos.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio externo	r	25,4 mm
Espessura	t	2 mm
Comprimento do tubo	L	150 mm
Módulo de Young	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,2
Tensão de escoamento	f_y	243 MPa

A representação fornecida pela Figura 5.47 apresenta uma malha composta por 20x20 elementos, a qual foi submetida a deformações com o intuito de ilustrar o campo de tensão de von Mises (σ_{VM}). Observa-se claramente que a plastificação do material ocorre de forma significativa nas extremidades do tubo, tornando este fenômeno bastante evidente e concentrado nessas regiões específicas.

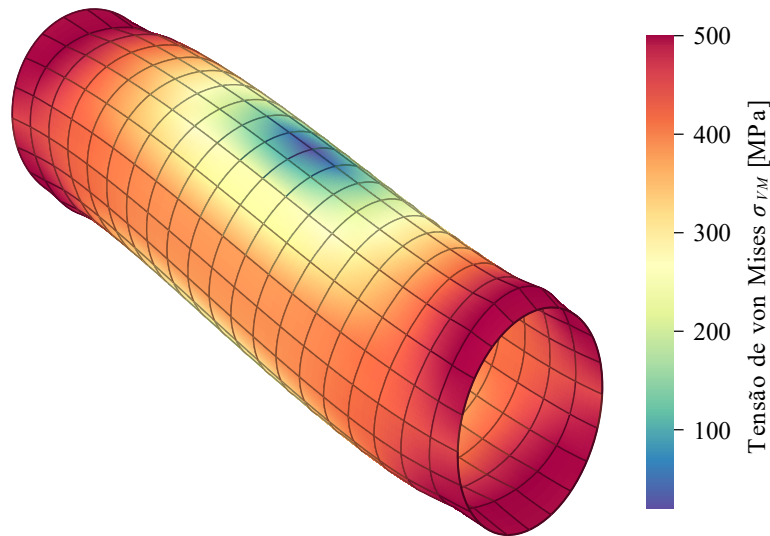


Figura 5.47 – Tubo sob deslocamentos prescritos - Campo de tensões de von Mises.

Subsequentemente, a Fig. 5.48 apresenta a distribuição de σ_{VM} na extremidade direita do tubo usando elementos de casca isoparamétricos Quad8 e sólidos Hex20, sendo ambas análises realizadas no Amaru. A figura em questão plota a tensão de von Mises ao longo do perímetro da borda, para três níveis do deslocamento prescrito (40%, 70% e 100% do deslocamento total δ_z).

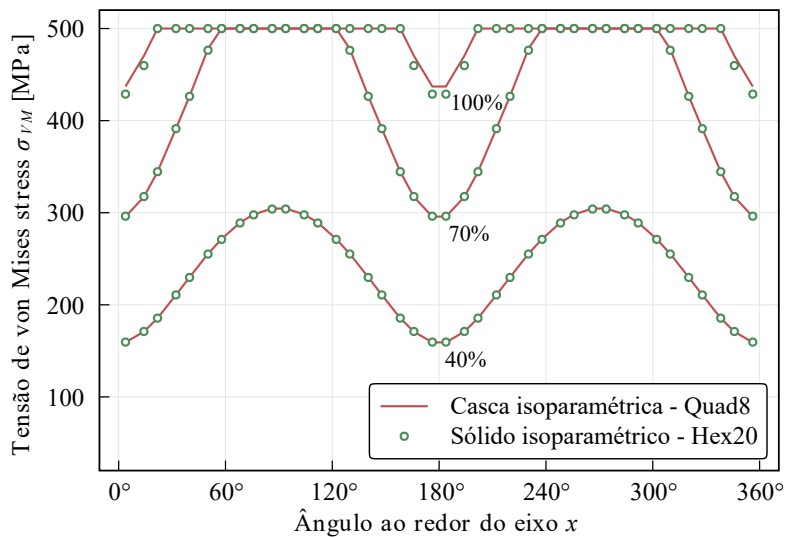


Figura 5.48 – Tubo sob deslocamentos prescritos - Tensão de von Mises nos pontos de integração da extremidade à direita.

Em ambos os casos, os valores de tensão são extraídos da camada mais externa de pontos de integração e mais próximos à extremidade ancorada. Embora leves discrepâncias sejam observadas nas proximidades de 0° e 180° quando 100% de δ_z é aplicado; excelente concordância é observada em todas as etapas de carga. Esta concordância se estende aos pontos onde o material atinge sua tensão de deformação plástica, demonstrando a

confiabilidade da análise usando elementos de casca com o modelo de plasticidade de von Mises.

5.3.4 - Tubo sob temperatura prescrita

Esta análise discute o campo de tensões de von Mises para um tubo submetido a um campo de temperatura em sua extremidade direita, de acordo com o ilustrado na Fig. 5.49.

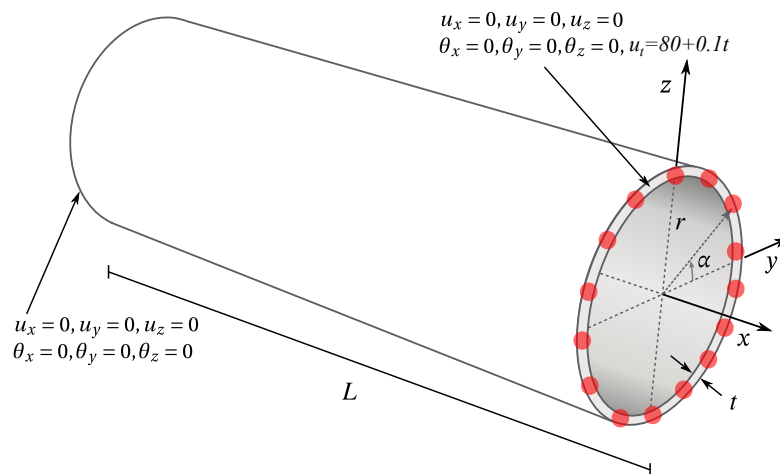


Figura 5.49 – Tubo sob temperatura prescrita.

O tubo está fixado em ambas as extremidades enquanto uma temperatura de $u_t = 80 + 0,1t$ é aplicada ao lado direito da estrutura, conforme a Fig. 5.50, onde t é o tempo variando de 0 a 1200 segundos.

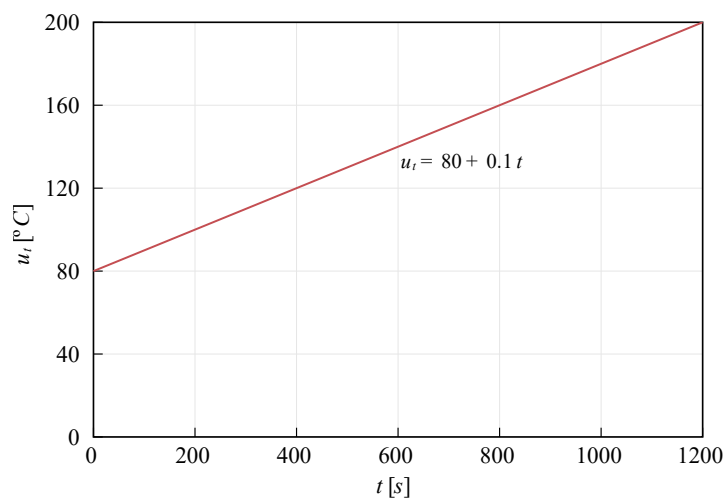


Figura 5.50 – Função da temperatura.

As propriedades geométricas do tubo incluem um comprimento (L) de 150 mm, um raio (r) de 25,4 mm e uma espessura de 2 mm. As propriedades mecânicas e do material são caracterizadas por um módulo de Young (E) de 200 GPa, uma razão de Poisson (ν) igual a zero, uma tensão de escoamento (f_y) de 243 MPa, o calor específico (c_v) de 439,20 J/kg/K, a condutividade térmica (k) de 54,108 W/m/K, a densidade (ρ) de 7800 kg/m³ e o coeficiente de expansão térmica (α) que é igual a $1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$. Essas informações estão resumidas na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Propriedades geométricas e do material para o tubo sob temperatura prescrita.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio externo	r	25,4 mm
Espessura	t	2 mm
Comprimento do tubo	L	150 mm
Módulo de Young	E	200 GPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,2
Tensão de escoamento	f_y	243 MPa
Calor específico	c_v	439,20 J/kgK
Condutividade térmica	k	54,108 W/mK
Densidade	ρ	7800 kg/m ³
Coefficiente de expansão térmica	α	$1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

A distribuição da tensão de von Mises (σ_{VM}) ao longo do comprimento do tubo L usando elementos de casca isoparamétricos Quad8 é mostrada na Fig. 5.51. Os resultados obtidos com elementos sólidos Hex20 são comparados a esses mesmos. O campo de tensão é consistente em toda a estrutura, exceto na extremidade direita do tubo, essa discordância pode ser explicada pelas diferentes camadas de pontos de integração que cada tipo de elemento possui. Por outro lado, a malha deformada que representa o campo de tensões de von Mises é mostrada na Fig. 5.52. A tensão máxima está próxima à extremidade onde a temperatura é aplicada.

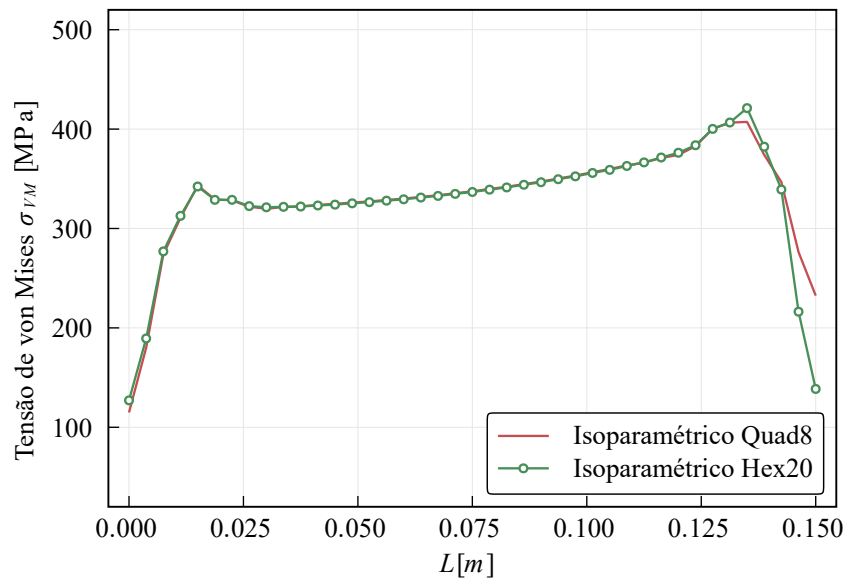


Figura 5.51 – Tensão de von Mises (σ_{VM}) ao longo do comprimento do tubo.

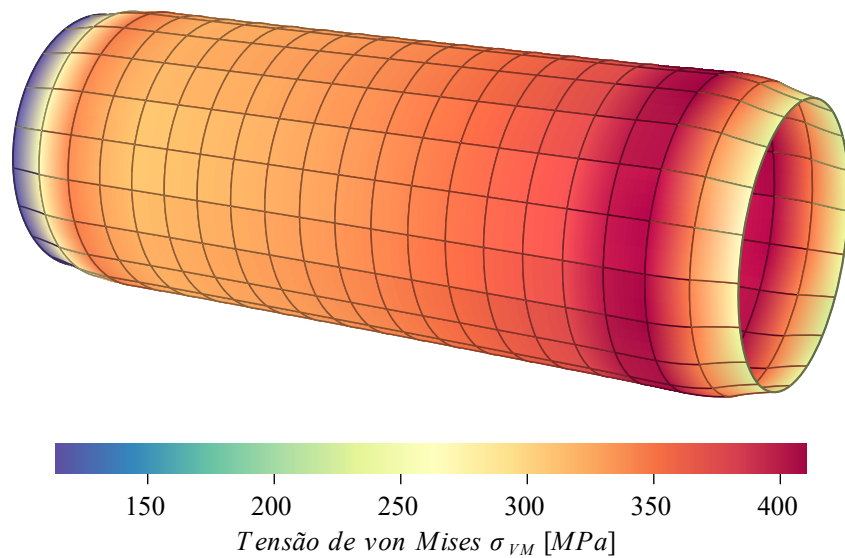


Figura 5.52 – Tubo sob temperatura prescrita: Campo de tensão de von Mises.

A seguir, a Fig. 5.53 apresenta uma comparação da temperatura ao longo do comprimento do tubo, utilizando elementos de casca Quad8 e elementos sólidos Hex20. Observa-se uma excelente concordância entre os resultados. Além disso, nota-se que na extremidade esquerda a temperatura atinge aproximadamente 125 °C, enquanto na extremidade direita esse valor aumenta para 200 °C. Por fim, a Fig. 5.54 mostra o campo de temperatura para todo o tubo, com uma excelente concordância entre o uso de elementos de casca e elementos sólidos.

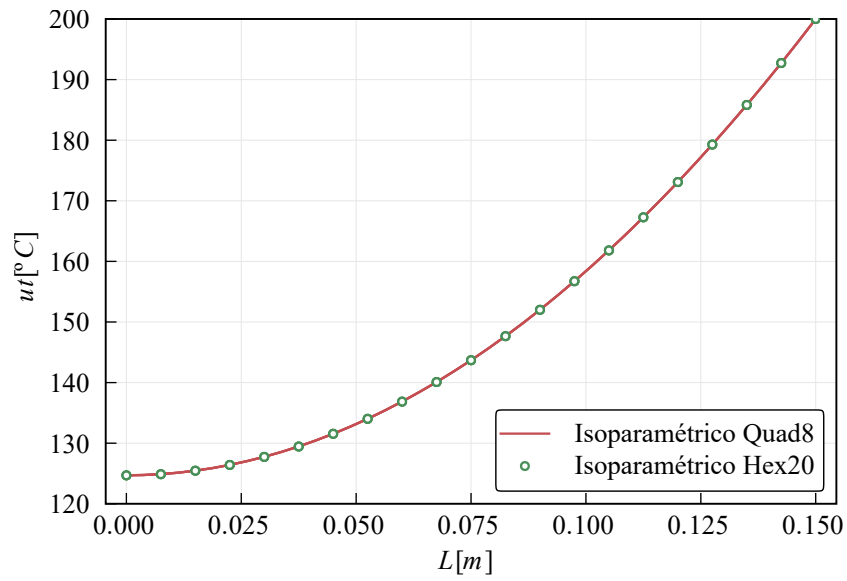


Figura 5.53 – Temperatura ao longo do comprimento do tubo.

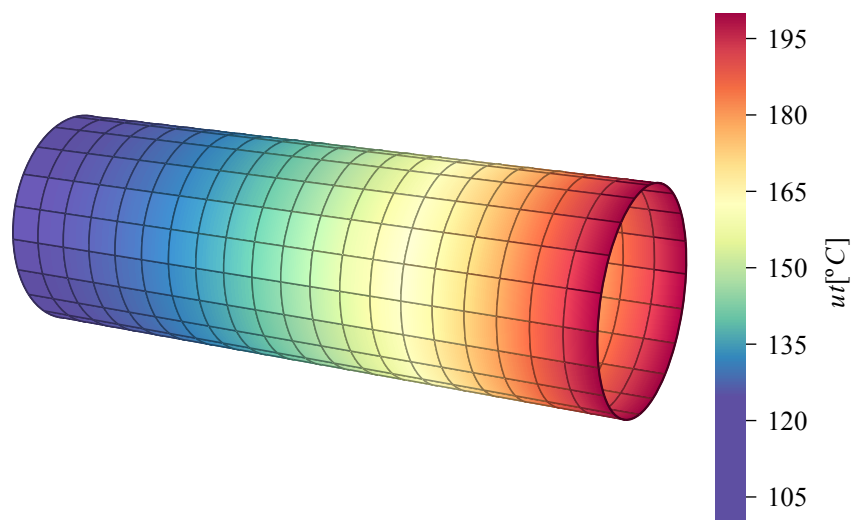


Figura 5.54 – Tubo sob temperatura prescrita: Campo de temperatura (u_t) no tempo final da análise.

6 - ESTUDOS DE CASO

A metodologia descrita neste trabalho será aplicada em três estudos de caso neste capítulo. O elemento de casca curvo isoparamétrico, a formulação termomecânica acoplada e o modelo de von Mises para o material serão utilizados. Um experimento realizado por Júnior et al. (2023), que monitora a temperatura e a tensão de von Mises na parede externa de um vaso de pressão cilíndrico, é apresentado no primeiro exemplo. No segundo exemplo, um flare é analisado usando um campo de temperatura elevado para verificar o início da plastificação da seção. Finalmente no último exemplo comparam-se os resultados experimentais obtidos por Costa (2013) e os encontrados utilizando as formulações propostas nesse estudo.

6.1 - ANÁLISE DA TENSÃO TÉRMICA TRANSIENTE DE UM VASO DE PRESSÃO

As indústrias geralmente usam vasos de pressão cilíndricos para armazenar e transportar gases ou líquidos sob alta pressão, como mostra a Fig. 6.1. Esses recipientes são essenciais para processos industriais como reações químicas, armazenamento de materiais perigosos ou sistemas de aquecimento e resfriamento. Esses processos ocorrem nas indústrias de petroquímica, farmacêutica, alimentícia e bebidas. O formato cilíndrico reduz o risco de falhas estruturais, distribuindo a tensão uniformemente ao longo da superfície do vaso, tornando-o ideal para suportar pressões internas elevadas.

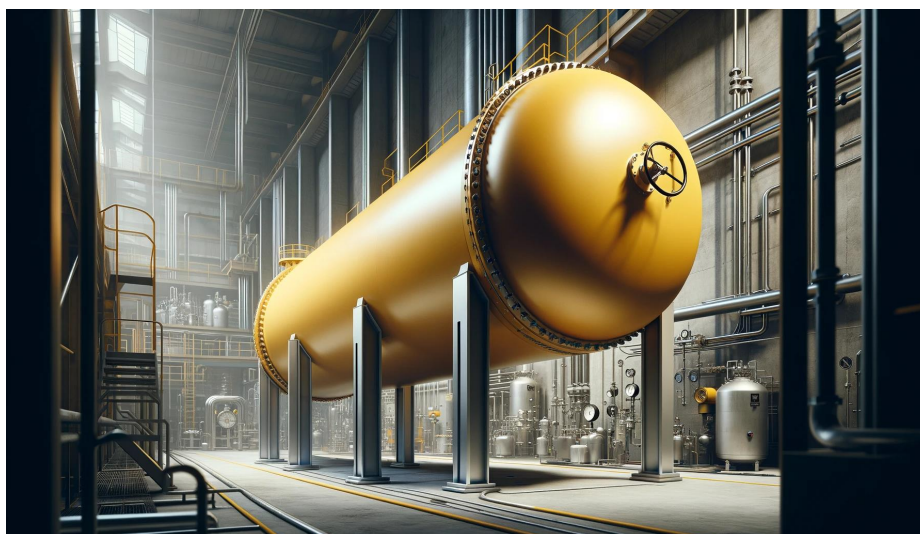


Figura 6.1 – Imagem gerada de um vaso de pressão cilíndrico em ambiente industrial.

A análise térmica dos vasos de pressão cilíndricos é crucial para garantir a segurança e a eficiência operacional nas indústrias. Essa análise envolve o estudo do comportamento dos materiais de um vaso sob diferentes condições de temperatura, identificando como o calor afeta a resistência mecânica, a dilatação térmica e a estabilidade estrutural. Em ambientes industriais, onde os vasos podem ser expostos a temperaturas extremas, variações térmicas podem causar tensões adicionais e fadiga nos materiais. Sem uma análise térmica adequada, há um risco aumentado de falhas, como rupturas ou explosões, que podem resultar em acidentes graves, danos ao equipamento e interrupções na produção. Portanto, a análise térmica ajuda a prever e mitigar esses riscos, assegurando que os vasos de pressão operem dentro dos limites seguros e prolongando a vida útil dos equipamentos.

Nesse contexto o exemplo a seguir trata-se de um ensaio de laboratório proposto por Júnior et al. (2023), nele é montado um esquema experimental que consiste em um circuito de água com um banho termostático Lauda, um medidor de vazão, uma válvula de pressão e uma seção de teste. A bomba do banho de aquecimento permite fluxos internos de água quente na seção de teste com uma taxa de fluxo de massa de 0,065 kg/s, conforme Fig. 6.2. A seção teste é composta por um RTD (Detector de Temperatura por Resistência), um termopar e um medidor de tensão. Nesse estudo é verificada a variação de tensão e temperatura na parede externa de um cilindro a partir do aquecimento induzido pela circulação de água quente no interior da estrutura.

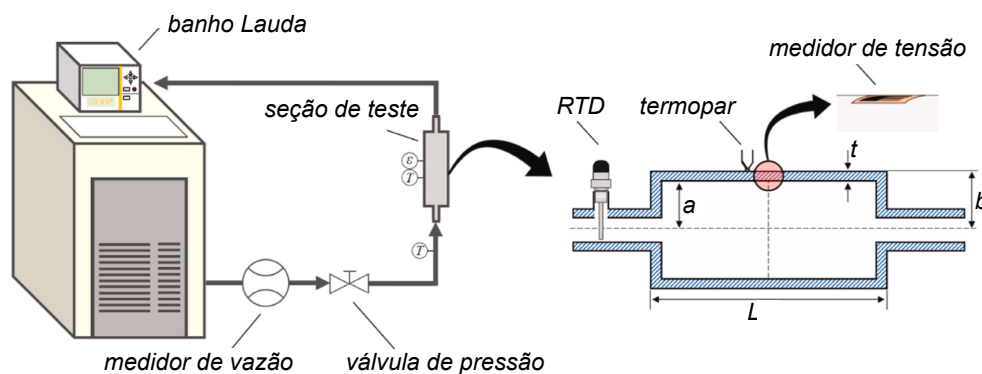


Figura 6.2 – Estudo de caso proposto - Ensaio experimental de um cilindro de paredes finas. Adaptada de Júnior et al. (2023).

A seção de teste, mostrada na Fig. 6.2, consiste em um cilindro com raio externo b de 11,25 mm, raio interno a de 3,75 mm e comprimento L de 150 mm, feito de aço inoxidável 316 L, com as seguintes propriedades do material: Módulo de Young (E) igual a 193 GPa, tensão de escoamento (f_y) de 500 MPa, coeficiente de Poisson (ν) de 0,3, capacidade térmica específica (c_v) de 500 J/kg/K, condutividade térmica (k) de 14 W/m/K, densidade (ρ) de 8000 kg/m³ e coeficiente de expansão térmica (α) de $1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. A Tabela 6.1 resume as dimensões e propriedades utilizadas para análise do cilindro.

Tabela 6.1 – Dimensões e propriedades utilizadas para análise do cilindro de aço inoxidável.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio interno	a	3,75 mm
Raio externo	b	11,25 mm
Espessura	t	7,5 mm
Módulo de Young	E	200 GPa
Tensão de escoamento	f_y	500 MPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Capacidade térmica específica	c_v	500 J/kg/K
Condutividade térmica	k	14 W/m/K
Densidade	ρ	8000 kg/m ³
Coefficiente de expansão térmica	α	$1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

No âmbito da análise transiente com material linear elástico realizada no software Amaru, foram estabelecidas duas malhas distintas para a representação dos elementos de casca e sólidos, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 6.3. Considerando que o experimento em questão visa monitorar tanto a temperatura quanto as tensões ao longo das paredes interna e externa do cilindro em estudo, optou-se por realizar uma discretização específica para cada tipo de elemento.

Para os elementos de casca, a discretização foi realizada levando em consideração o raio do tubo, enquanto que usando elementos sólidos a abordagem adotada permitiu a discretização ao longo da espessura e comprimento do mesmo. Em ambas as situações, dada a presença de simetria no problema analisado, procedeu-se à modelagem de apenas 1/8 do domínio total com o intuito de otimizar os resultados obtidos.

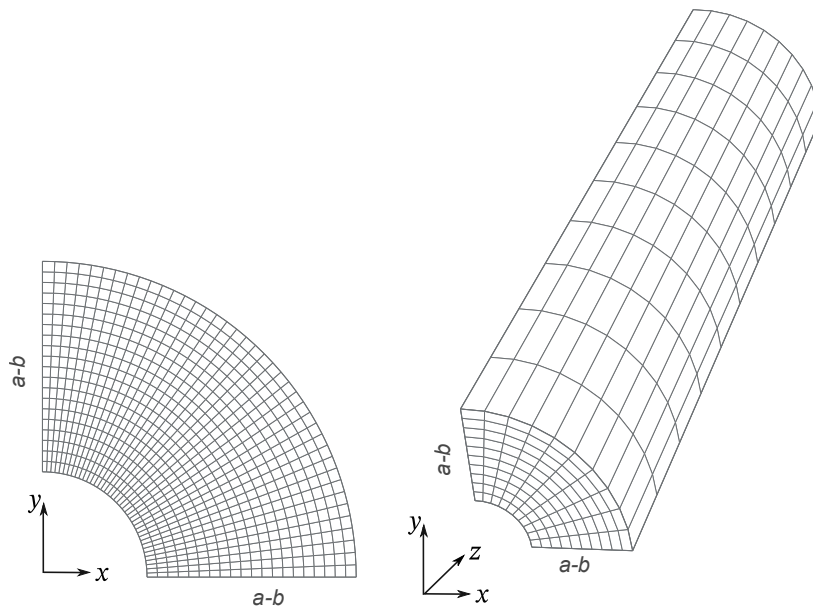


Figura 6.3 – Discretização da malha para elementos de casca e sólidos, respectivamente.

A Fig. 6.4 apresenta a variação da temperatura na parede externa do cilindro para a análise numérica utilizando elementos de casca e sólidos, com uma temperatura de 90°C aplicada na parede interna. Os resultados obtidos foram comparados com os dados experimentais de Júnior et al. (2023). Observa-se que ambas as modelagens realizadas no software Amaru forneceram resultados satisfatórios para a análise transiente da temperatura, quando comparados com os resultados de laboratório. Apenas na região próxima aos 25 segundos houve uma pequena discrepância em relação aos achados da literatura, no ponto em que a temperatura externa começa a se estabilizar em torno dos 90°C aplicados internamente. Em resumo, a temperatura de equilíbrio na análise experimental e numérica foi concordante.

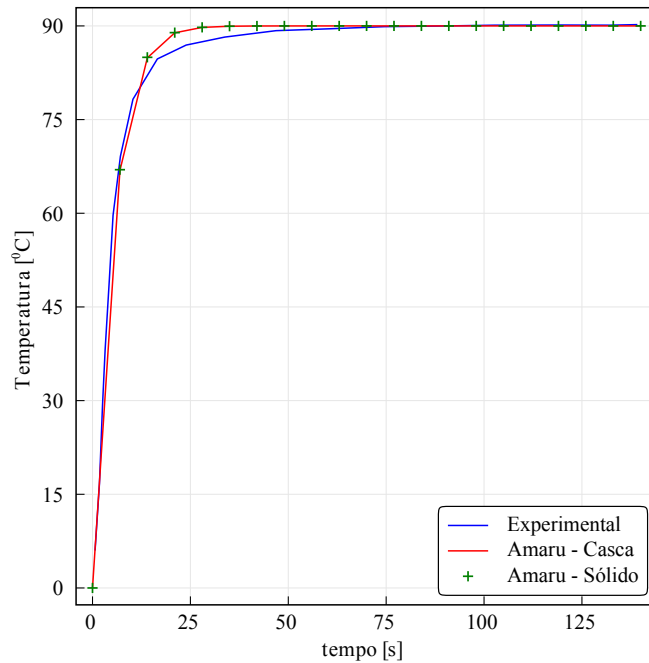


Figura 6.4 – Variação da temperatura na parede externa do cilindro ao longo do tempo.

Por sua vez a Fig. 6.5 apresenta a variação da tensão de von Mises na parede externa do cilindro ao longo de um período de 140 segundos, com uma temperatura de 70°C aplicada na parede interna. Os resultados obtidos neste estudo foram comparados com os dados experimentais e numéricos de Júnior et al. (2023). Para os dados numéricos, o autor utilizou elementos sólidos hexaédricos de 8 nós, totalizando 29.700 elementos. No software Amaru, foram usados 1.000 elementos Hex20. Observou-se que, aos 6 segundos, a tensão máxima atingiu aproximadamente 31 MPa, em conformidade com os achados experimentais de Júnior et al. (2023). Essa concordância inicial valida a precisão da modelagem numérica utilizada. Além disso, a análise revelou que, após 75 segundos, a tensão de von Mises na parede externa se estabilizou em torno de 7 MPa, indicando um comportamento estável do material sob um campo de temperatura aplicado. Entretanto, uma divergência foi identificada na região próxima aos 25 segundos, onde os resultados da modelagem por elementos finitos mostraram uma discrepância em relação aos dados experimentais. Essa discrepância pode ser atribuída a fatores não considerados na modelagem, como possíveis variações nas propriedades materiais. Portanto, apesar das pequenas divergências observadas, os resultados gerais reforçam a validade da abordagem numérica para a análise termomecânica acoplada com a formulação descrita nesse trabalho.

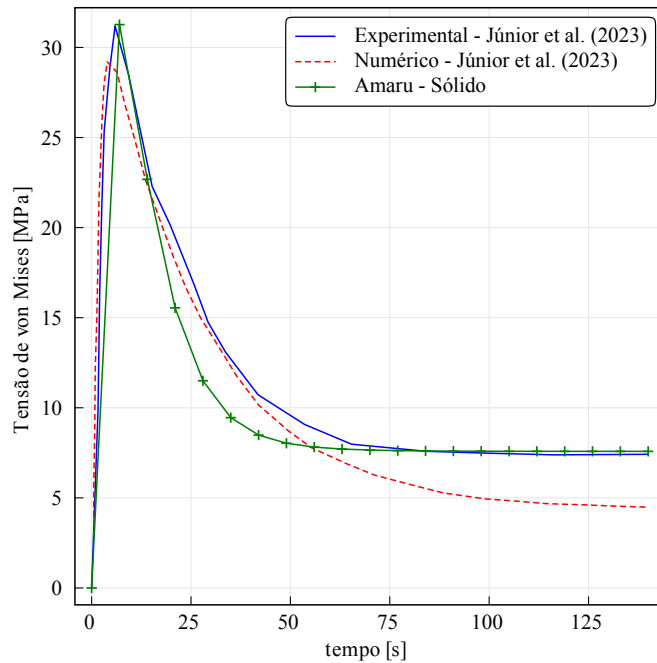


Figura 6.5 – Análise transiente da tensão de von Mises na parede externa do tubo para uma temperatura de $70^{\circ}C$.

Ainda na Figura 6.5, observa-se que os resultados numéricos obtidos neste estudo se aproximaram mais dos resultados numéricos de Júnior et al. (2023), especialmente a partir dos 75 segundos, quando a tensão de von Mises se estabilizou na parede externa. Isso pode ser explicado pelo uso de elementos de 20 nós no Amaru, que, apesar de serem menos numerosos, proporcionam uma excelente precisão devido à sua complexidade. Outra justificativa pode ser o fato de que o modelo adotado por Júnior et al. (2023) na simulação não ser capaz de reproduzir com precisão o estudo proposto no experimento.

6.2 - SIMULAÇÃO TERMOMECAÂNICA DE UMA ESTRUTURA DO TIPO FLARE

Para esse estudo de caso, aplicando a metodologia proposta para análise termomecânica acoplada, o elemento finito de casca desenvolvido e o modelo constitutivo com plasticidade de von Mises para o aço, pretende-se abordar o tipo de estrutura denominado flare, ilustrado na Fig. 6.6.



Figura 6.6 – Imagem gerada de um flare - Estudo de caso proposto.

Os flares são estruturas esbeltas, tipicamente verticais ou horizontais, compostas por elementos de seção transversal tubular. São indispensáveis em instalações industriais, como refinarias de petróleo, plantas petroquímicas e plataformas de petróleo e gás, com o objetivo de queimar gases residuais, impedindo sua liberação direta na atmosfera. A altura dos flares pode variar consideravelmente: em refinarias e plantas petroquímicas, as chaminés têm entre 30 e 90 metros de elevação, enquanto em plataformas marítimas podem atingir mais de 90 metros, garantindo a dispersão segura dos produtos de combustão. O diâmetro de um flare também depende das especificações do projeto e da quantidade de gás a ser queimado. Para sistemas menores, o diâmetro pode variar de 0,3 a 0,6 metros; para sistemas médios, de 0,6 a 1,2 metros; e para grandes sistemas, pode variar de 1,2 a 2,4 metros ou mais. A espessura da parede do flare também é variável: chaminés menores podem ter espessuras de 6 a 12 mm, enquanto chaminés maiores podem ter paredes de 25 a 50 mm ou mais, dependendo da necessidade de resistência à pressão, calor e corrosão (para mais informações ver manuais do American Petroleum Institute (API) e da American Society of Mechanical Engineers (ASME)).

Os flares são frequentemente construídos com materiais como aço inoxidável, especificamente tipos como o AISI 304, 316 e 310, que oferecem boa resistência à corrosão e altas temperaturas. Aço carbono revestido e cerâmicas refratárias também são utilizados em determinadas aplicações para combinar força estrutural e resistência térmica. O aço inoxidável 310, em particular, possui propriedades ideais para aplicações em ambientes de alta temperatura.

Neste exemplo será simulado um flare de dimensões: raio externo (r) de 600 mm, espessura (t)

de 12 mm e comprimento do trecho de flare (L) de 30 m fixo na base da estrutura e livre no topo. As propriedades do material são: módulo de elasticidade (E) de 200 GPa, resistência ao escoamento (f_y) de 500 MPa e coeficiente de Poisson (ν) de 0,3. Termicamente, sua condutividade térmica (k) é de cerca de 14,2 W/m·K a 20°C, aumentando ligeiramente com a temperatura. O coeficiente de expansão térmica (α) é de aproximadamente $1,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ entre 20°C e 1000°C, com uma capacidade calorífica (c_v) de cerca de 500 J/kg·K a 20°C, e um ponto de fusão entre 1400°C e 1450°C. Essas propriedades garantem a durabilidade e eficiência do material em condições severas. Os dados utilizados na análise computacional estão sintetizados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Dimensões e propriedades utilizadas para análise do flare.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio externo	r	600 mm
Espessura	th	12 mm
Comprimento do Flare	L	30 m
Módulo de Young	E	200 GPa
Resistência ao escoamento	f_y	500 MPa
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Capacidade térmica específica	c_v	500 J/kgK
Condutividade térmica	k	14,2 W/mK a 20°C
Densidade	ρ	7800 kg/m ³
Coeficiente de expansão térmica	α	$1,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

Os valores de k foram adotados conforme a variação apresentada na Fig. 6.7.

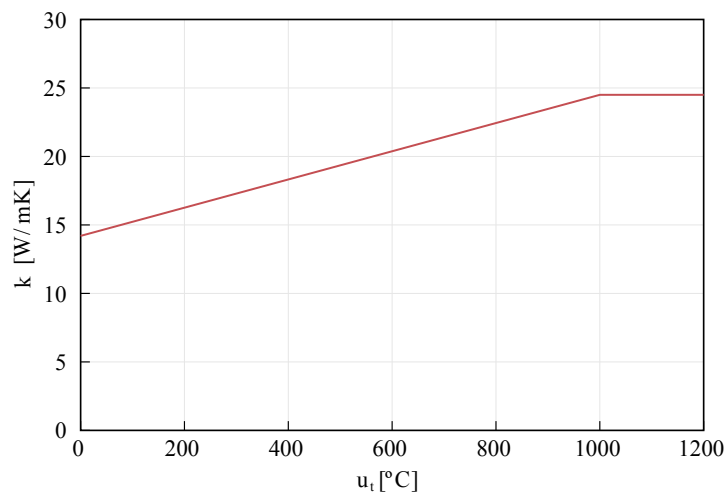


Figura 6.7 – Variação da condutividade térmica do aço inoxidável 310 ao longo da temperatura.

Adicionalmente na Figura 6.8, são ilustradas as condições de contorno utilizadas no estudo. A estrutura é considerada engastada na base do flare. Além disso, foi modelada uma chama no topo da estrutura e considerou-se uma discretização de 400 elementos Quad8. O estudo abrange três cenários de temperatura(u_t), aplicadas em graus Celsius, descritas pelas seguintes equações:

$$u_t = 400 + 0,1t \quad (6.1)$$

$$u_t = 700 + 0,1t \quad (6.2)$$

$$u_t = 1000 + 0,1t \quad (6.3)$$

onde t representa o tempo de análise, variando de 0 a 500 segundos.

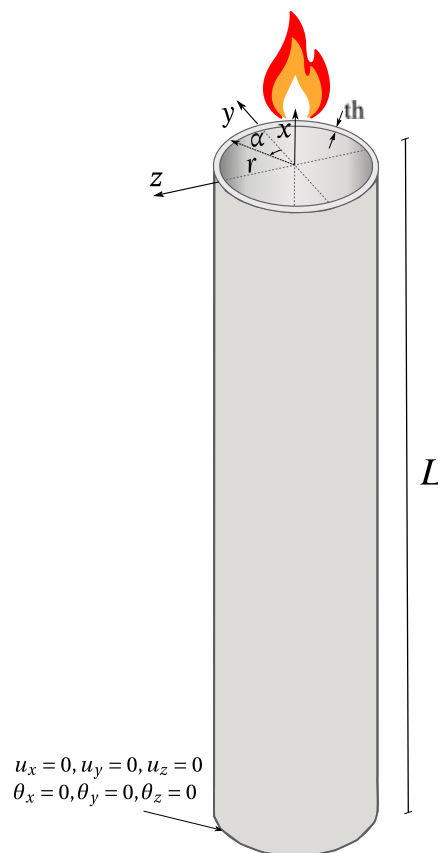


Figura 6.8 – Condições de contorno para o estudo do flare.

Na Figura 6.9, são apresentadas as tensões de von Mises ao longo do comprimento L (15 a 30 metros), utilizando elementos de casca Quad8, quando $y = r$, para os três cenários de temperatura propostos, conforme as Eqs. 6.1, 6.2 e 6.3. Observa-se o início da plastificação da seção no topo da estrutura do flare quando aplicado o campo de temperatura de acordo com a Eq. 6.3. Para as outras duas curvas, não foi alcançado o valor de σ_{VM} de 500 MPa; contudo, o comportamento das curvas foi consistente em todos os casos.

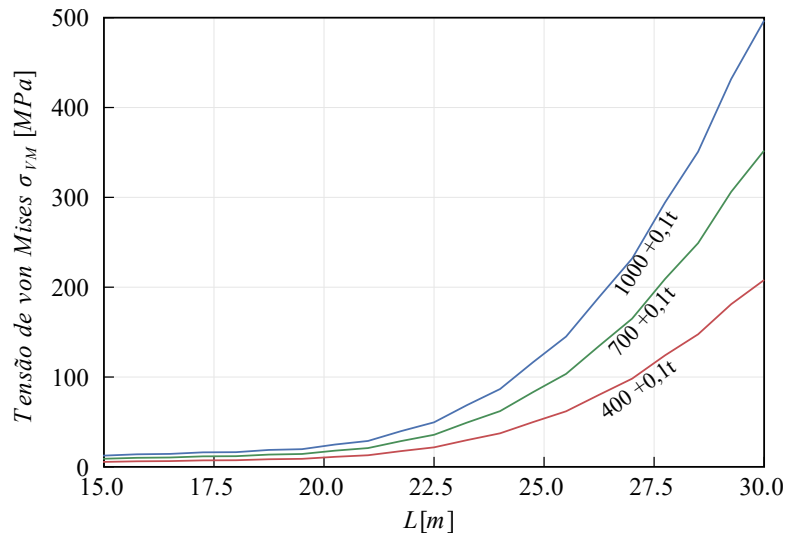


Figura 6.9 – Tensão de von Mises ao longo do comprimento L para três níveis de temperatura.

Nesse contexto, a Figura 6.10 apresenta o campo de tensão de von Mises para a temperatura aplicada de $1000 + 0,1t$ para o tempo final de 550 segundos, ilustrando a porção plastificada do flare em análise. Constatou-se que, em aproximadamente 5 metros do topo, os níveis de tensão do cilindro já estão consideravelmente elevados, com valores acima de 250 MPa.

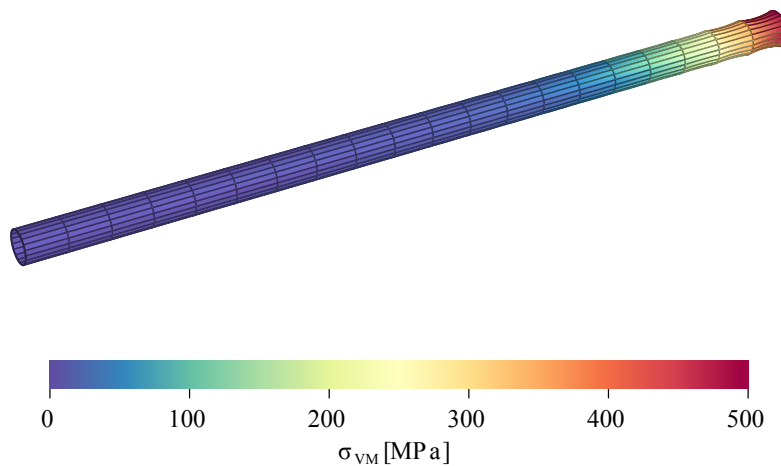


Figura 6.10 – Campo de tensão de von Mises para $u_t = 1000 + 0,1t$.

Ainda na Fig. 6.10, observa-se claramente a plastificação da seção, demonstrando que apenas a aplicação de um campo de temperatura na estrutura é suficiente para plastificar o material. Este resultado destaca a importância da análise termomecânica acoplada para esses tipos de estruturas, corroborando a necessidade de considerar os efeitos térmicos em conjunto com os mecânicos para uma avaliação precisa do comportamento do material.

Finalmente, a Fig. 6.11 apresenta o campo de temperatura ao longo do comprimento do flare no tempo final da análise. Observa-se que, no topo da estrutura, a temperatura atingiu 1100°C . A partir de 25 metros de altura, a temperatura do flare ficou acima de 200°C , aumentando consideravelmente até atingir a temperatura máxima no ponto de queima. Em contraste, o restante do comprimento do cilindro permaneceu em temperatura ambiente.

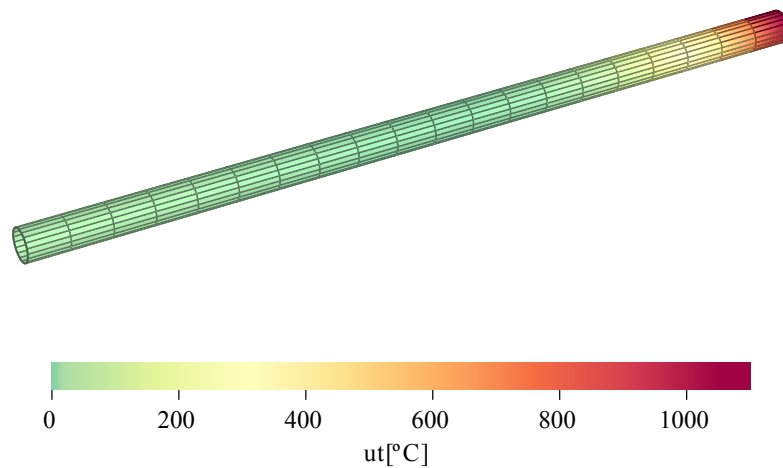


Figura 6.11 – Campo de temperatura para $u_t = 1000 + 0,1t$.

6.3 - ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE UM PILAR SUBMETIDO A INCÊNDIO

O último estudo de caso proposto trata-se de uma simulação numérica de um pilar de aço em escala real ensaiado experimentalmente por Costa (2013), conforme esquematizado na Fig. 6.12.

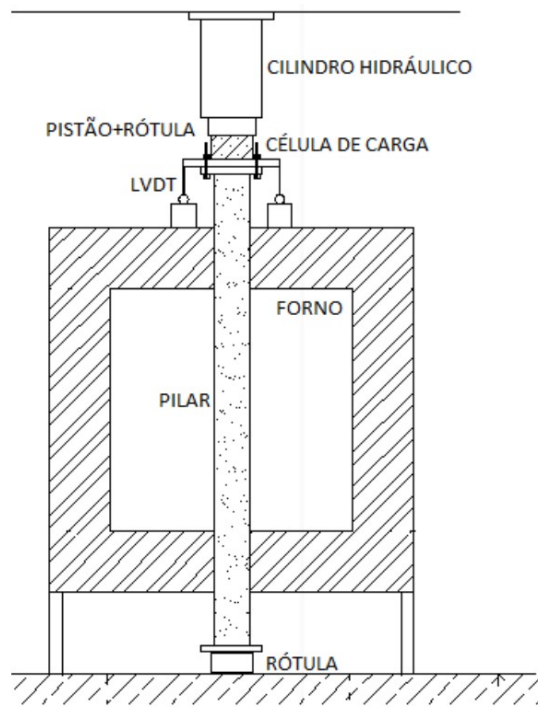


Figura 6.12 – Esquema do pilar ensaiado. Fonte: Costa (2013).

O pilar foi previamente dimensionado seguindo a NBR 14672 (ABNT, 2010), possuindo as dimensões como mostra a Fig. 6.13.

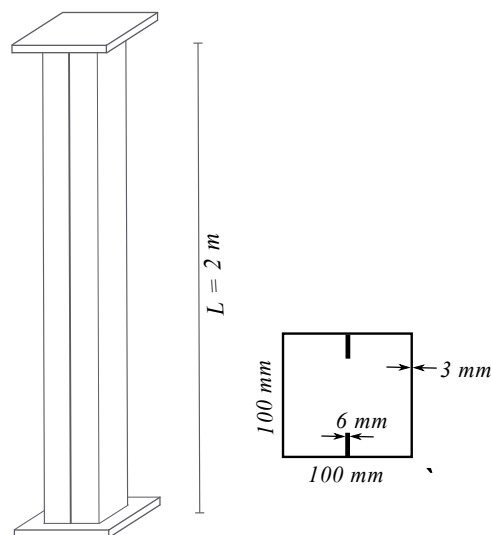


Figura 6.13 – Dimensões do pilar ensaiado. Adaptado de Costa (2013).

O pilar do estudo proposto possui comprimento L de 3 m, feito de aço carbono, com as seguintes propriedades do material: Módulo de Young (E) igual a 200 GPa, tensão de escoamento (f_y) de 500 MPa, coeficiente de Poisson (ν) de 0,3, capacidade térmica específica (c_v) de 480 J/kg/K, condutividade térmica (k) de 50 W/m/K, densidade (ρ) de 7850 kg/m³ e coeficiente de expansão

térmica (α) de $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. A Tabela 6.3 resume as propriedades utilizadas para análise do pilar submetido a incêndio.

Tabela 6.3 – Propriedades utilizadas para análise do pilar submetido a incêndio.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Módulo de Young	E	200 GPa
Tensão de escoamento	f_y	500 MPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Capacidade térmica específica	c_v	480 J/kg/K
Conductividade térmica	k	50 W/m/K
Densidade	ρ	7850 kg/m ³
Coefficiente de expansão térmica	α	$1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

A curva-padrão de incêndio da ISO 834 (2014) , geralmente utilizada para o dimensionamento de estruturas de aço em situação de incêndio, é descrita pela equação a seguir:

$$u_t = 345 \log_{10}(8t + 1) + 20 \quad (6.4)$$

onde t representa o tempo da análise, em minutos. Já na Fig. 6.14 encontra-se a curva da temperatura aplicando a Eq. 6.4 e a encontrada pelo forno desenvolvido por Costa (2013).

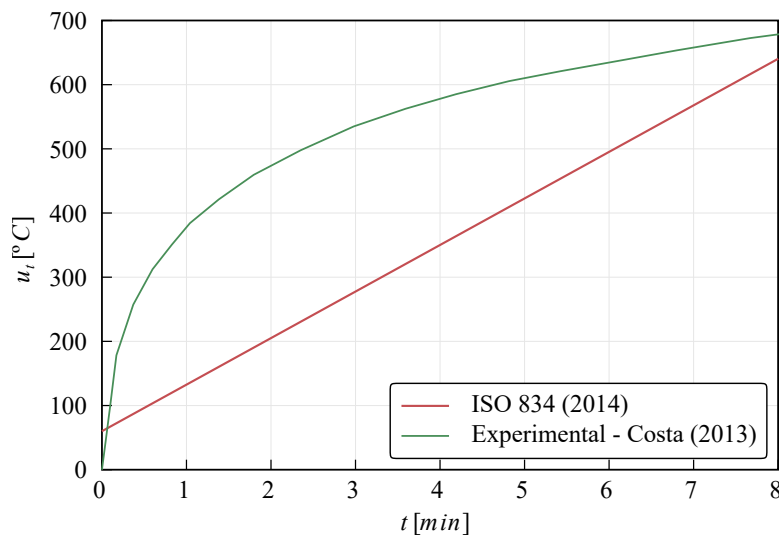


Figura 6.14 – Curva de incêndio padrão pela ISO 834 (2014) e a obtida por Costa (2013).

A análise consiste em aplicar um campo de temperatura durante 450 segundos na região do pilar compreendida entre 50 cm da base e 50 cm do topo, com as extremidades restritas para impedir

deslocamentos nas três direções. A Fig. 6.15 apresenta a distribuição da temperatura após 450 segundos de análise, utilizando a curva padrão de incêndio, conforme modelagem realizada no software Amaru.

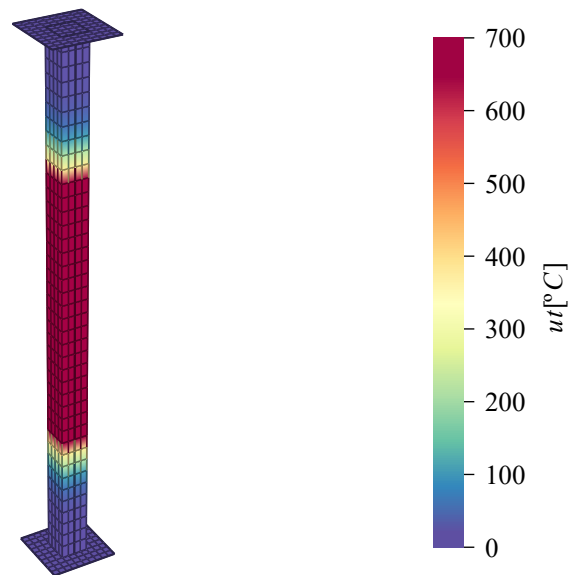


Figura 6.15 – Distribuição da temperatura para um tempo de análise de 450 segundos, utilizando a curva padrão de incêndio.

Na Fig. 6.16 são apresentados os resultados numéricos para o deslocamento axial do pilar, obtidos pelo software Amaru utilizando elementos Quad8 e aplicando as curvas de incêndio da Fig. 6.14. Estes resultados são comparados com os dados experimentais de Costa (2013) e os resultados numéricos de Chaves (2014).

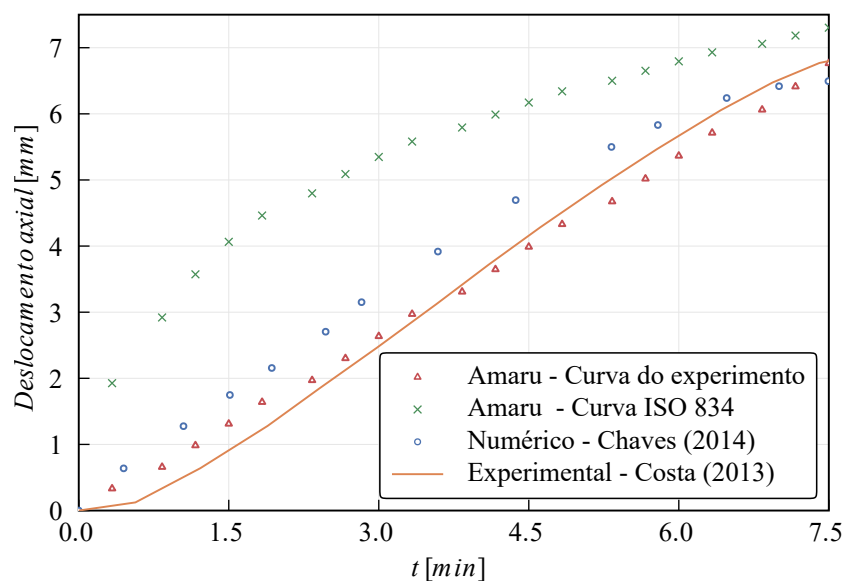


Figura 6.16 – Resultados do deslocamento axial em função do tempo para o pilar submetido a incêndio.

A partir da figura anterior, observa-se que os resultados obtidos pelo software Amaru, utilizando a mesma curva de Costa (2013), mostraram uma boa aproximação em relação aos experimentais. Em contrapartida, os resultados de Chaves (2014) apresentaram maior discrepância, provavelmente devido à utilização de uma modelagem desacoplada pelo autor. Além disso, os deslocamentos obtidos pelo Amaru ao aplicar a curva de incêndio padrão foram significativamente superiores às demais análises, como esperado, devido ao aumento exponencial da temperatura nesse caso.

7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O objetivo central deste trabalho foi desenvolver e implementar uma formulação de elementos finitos isoparamétricos para cascas, voltada para a análise termomecânica acoplada em materiais metálicos, com ênfase no aço. Além disso, foi formulado um modelo constitutivo não linear para este material, considerando o efeito da plasticidade de von Mises para tensão plana. Essas formulações foram validadas utilizando exemplos presentes na literatura e em softwares de elementos finitos. Posteriormente, a metodologia deste trabalho foi aplicada em três estudos de caso envolvendo estruturas sujeitas a elevados gradientes de temperatura. Este capítulo discute as conclusões alcançadas através deste estudo e sugere direções para pesquisas futuras.

7.1 - CONCLUSÕES

As conclusões foram divididas em quatro partes. A primeira parte refere-se ao elemento de casca isoparamétrico formulado e abordado para análises mecânicas e termomecânicas. A segunda parte discute a formulação termomecânica acoplada desenvolvida neste estudo. A terceira parte trata da implementação do modelo constitutivo plástico para o aço. Por fim, a quarta parte apresenta os resultados obtidos nos estudos de caso.

7.1.1 - Com relação ao elementos de casca isoparamétrico

A metodologia adotada para o desenvolvimento do elemento de casca isoparamétrico provou ser eficaz. Utilizando a técnica de degeneração de sólidos, foi possível estabelecer um modelo para cascas, resultando em uma matriz de deformação-deslocamento **B**, que se destaca pela sua simplicidade e facilidade de implementação. Diferentemente de outras formulações para elementos de casca, nas quais a matriz **B** é separada em matriz de deformação de membrana, momento e cisalhamento, este estudo apresentou essa matriz sem separação, evitando principalmente os efeitos de bloqueio, especialmente o bloqueio de cisalhamento, que torna os elementos mais rígidos e dificulta a convergência nas análises em que há esforço cortante aplicado. Um aspecto importante do modelo é o tratamento do problema de *drilling*, no qual a rotação $\bar{\theta}_z$ foi interpolada de maneira estratégica para incorporar o efeito torcional, não presente em cascas. Esta abordagem resolveu o desafio do controle de *drilling*.

A formulação isoparamétrica para a análise de elementos de casca curvos ofereceu uma

abordagem mais flexível para modelar diversos tipos de superfícies. Quando utilizada a interpolação quadrática no elemento, foi possível alcançar resultados precisos com uma menor discretização da malha. Além disso, a utilização de dois pontos de integração ao longo da espessura do elemento contribuiu para a robustez da análise, garantindo maior precisão e confiabilidade nos resultados.

Para validar a eficácia da formulação proposta, foram selecionados e modelados quatro exemplos com soluções analíticas conhecidas, abrangendo diversas condições mecânicas. Os exemplos escolhidos, que incluem a cobertura cilíndrica sob força concentrada, a cobertura de Scordelis-Lo, a cúpula esférica sob pressão perpendicular à superfície e o anel comprimido, demonstraram a robustez e versatilidade dos elementos de casca isoparamétricos. A comparação dos resultados numéricos com as soluções analíticas e os utilizando softwares de elementos finitos mostrou uma boa concordância, confirmando a precisão e a confiabilidade da abordagem. Esses exemplos validam a capacidade dos elementos de casca isoparamétricos de resolver uma variedade de problemas estruturais.

Além disso, o modelo foi submetido a uma série de testes com diversas condições de contorno, incluindo cargas concentradas, peso próprio, cargas superficiais e variados tipos de apoio. Esses testes confirmaram não apenas a versatilidade do elemento de casca isoparamétrico, mas também destacaram sua aplicabilidade em variados cenários de modelagens de estruturas.

As implementações em que as propriedades térmicas foram modeladas como variáveis, de acordo com a mudança de temperatura, também foram testadas considerando essas propriedades como constantes. No entanto, não houve diferenças significativas nos resultados obtidos. Portanto, a utilização de funções para descrever essas propriedades térmicas não trouxe melhorias substanciais nas análises.

7.1.2 - Com relação a formulação termomecânica acoplada

As análises indicaram que a formulação termomecânica acoplada produziu resultados adequados nos casos estudados, evidenciando a interação entre temperatura e deslocamento. Para validar essa abordagem, foram realizadas comparações com soluções teóricas exatas, seguidas de comparações com os resultados gerados pelo software Abaqus. Essa estratégia confirmou a precisão da formulação, que se alinhou bem com os valores analíticos, inclusive nas simulações de equilíbrio ao longo do tempo. A comparação com o Abaqus, utilizando a mesma configuração de elementos finitos e discretização, mostrou concordância nos resultados tanto em análises estacionárias quanto transientes.

O item 4.1 apresenta detalhadamente o desenvolvimento matemático, facilitando a compreensão dos procedimentos para implementação computacional. Isso inclui a descrição das matrizes para forças internas, fundamentais para o equilíbrio incremental ao longo do tempo. A integração das equações de equilíbrio mecânico e conservação de energia térmica

permitiu a obtenção de resultados precisos e consistentes.

Após a comparação dos resultados de elementos de casca e elementos sólidos, observou-se ainda que não houve diferenças relevantes, embora o uso de elementos de casca seja mais simples devido à facilidade na geração da malha.

Portanto, conclui-se que o solver desenvolvido, seguindo a metodologia proposta, é uma ferramenta competente para a análise termomecânica acoplada. Ele se mostra aplicável a diversas configurações, incluindo fluxos de temperatura unidimensionais, bidimensionais e radiais, sob diferentes condições de carga e restrições, evidenciando sua eficiência e adaptabilidade.

7.1.3 - Com relação ao modelo de plasticidade de von Mises para o aço

Neste estudo, avançou-se na compreensão e aplicação de modelos constitutivos elastoplásticos, incorporando o modelo de plasticidade de von Mises ao elemento de casca isoparamétrico desenvolvido. A integração deste modelo constitutivo permitiu uma representação mais acurada do comportamento elastoplástico em estruturas metálicas.

A utilização da notação de Mandel para a abordagem das equações constitutivas facilitou a implementação computacional, tornando o modelo mais acessível para simulações de grande escala. A notação de Mandel é conhecida por simplificar a manipulação de tensores em plasticidade, o que resulta em uma implementação mais direta e menos propensa a erros. A eficiência computacional é um fator crucial para a aplicação prática do modelo, permitindo que simulações complexas sejam realizadas em tempos razoáveis.

A análise foi enriquecida com quatro exemplos: o primeiro concentrou-se em uma viga em balanço submetida a deslocamentos impostos. Os resultados alcançados não só convergiram para a solução analítica mas também demonstraram uma concordância com os resultados numéricos publicados por De Souza Neto et al. (2008), validando a eficácia do modelo proposto. O segundo exemplo, focado em uma placa perfurada, mostrou que os resultados da modelagem se alinharam com os dados de Asgari e Kouchakzadeh (2023).

O terceiro exemplo desta série examinou um tubo engastado, utilizando tanto elementos sólidos quanto de casca para sua modelagem. A comparação das tensões de von Mises, particularmente na extremidade afetada pelo deslocamento imposto, mostrou uma correspondência perfeita entre os dois tipos de elementos, destacando a capacidade de oferecer instrumentos para o estudo do comportamento elastoplástico em diferentes configurações estruturais.

Finalmente no ultimo exemplo desse tópico foi abordado um tubo com campo de temperatura prescrito em uma das extremidades, os resultados obtidos demonstraram ótima concordância quando modelados com elementos de casca Quad8 e sólido Hex20.

Este modelo permitiu capturar a não linearidade do comportamento do material em condições

de carga mecânica e térmica. Ao levar em consideração a plasticidade de von Mises durante a formulação, foi possível fazer previsões mais precisas de tensões e deformações. Isso é particularmente verdadeiro em áreas com alta plastificação. A análise mostrou que, ao incluir os efeitos não lineares da plasticidade, é possível obter uma compreensão mais ampla e realista do desempenho estrutural, principalmente em ambientes severos com temperaturas que variam significativamente.

7.1.4 - Com relação aos estudos de caso

Os estudos de caso realizados confirmaram a eficácia e a aplicabilidade da metodologia proposta. No primeiro estudo de caso, a análise térmica transiente de um vaso de pressão cilíndrico revelou que a modelagem numérica é capaz de fornecer resultados satisfatórios quando comparada com dados experimentais. A variação de temperatura e tensão de von Mises na parede externa do cilindro apresentou boa concordância, validando a precisão da abordagem adotada.

No segundo estudo de caso, a simulação termomecânica de uma estrutura do tipo flare demonstrou que o modelo desenvolvido pode prever o comportamento da estrutura sob diferentes condições de temperatura. Os resultados indicaram o início da plastificação no topo da estrutura em cenários de temperatura mais elevada. Isso evidenciou que a simples aplicação de um campo de temperatura é suficiente para plastificar a seção, destacando a importância da análise térmica em estruturas sujeitas a ambientes severos.

Finalmente no terceiro estudo de caso analisou-se um pilar em situação de incêndio, comparando os resultados da modelagem via Amaru com os experimentais contidos na literatura.

Todos os estudos de caso destacaram a eficácia da metodologia proposta em prever o comportamento térmico e mecânico de estruturas submetidas a variações térmicas significativas. A abordagem adotada, baseada em elementos finitos e modelagem acoplada, mostrou-se adequada para a análise de problemas termomecânicos complexos, contribuindo para a segurança e eficiência operacional das estruturas estudadas.

Esses resultados reforçam a validade da metodologia proposta e sugerem que ela pode ser aplicada a outros tipos de estruturas industriais, fornecendo uma ferramenta útil para a análise e redução de riscos associados a variações térmicas.

7.2 - RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Recomenda-se adicionar a análise não linear geométrica. Neste estudo, assume-se a não linearidade do material (análise não linear física), enquanto a não linearidade geométrica é excluída. Contudo, ao incorporar esta última, abrimos portas para uma análise mais refinada e complexa, capaz de abarcar grandes deformações e deslocamentos, instabilidade estrutural (incluindo flambagem e pós-flambagem) e os efeitos decorrentes da curvatura. Estes últimos introduzem configurações geométricas adicionais, pois a curvatura é capaz tanto de intensificar quanto de atenuar determinadas respostas estruturais, variando conforme a configuração específica e as condições de carga impostas.

Recomenda-se o acoplamento total a nível de tensões. Neste trabalho, há o acoplamento das tensões mecânicas e térmicas; no entanto, para um acoplamento completo ao nível do modelo constitutivo, é necessário incluir a contribuição da tensão térmica no processo de atualização da tensão descrito no item 4.3.2 do modelo plástico de von Mises.

Recomenda-se a integração de modelos avançados de plasticidade. No presente estudo foi implementado o modelo plástico de von Mises para tensão plana, indica-se explorar a integração de modelos de plasticidade mais avançados, como o modelo de plasticidade viscoplástica, que pode capturar de forma mais precisa o comportamento do material sob condições extremas de temperatura e carga.

Recomenda-se a análise de fadiga térmica. A implementação de uma análise de fadiga térmica pode fornecer insights sobre a durabilidade das estruturas sob ciclos repetidos de aquecimento e resfriamento, um fator crítico para muitas aplicações industriais.

Recomenda-se a implementação da análise dinâmica. Neste trabalho, foca-se exclusivamente na análise estática. No entanto, ao integrar um solver dinâmico, abre-se a possibilidade de explorar uma vasta gama de aplicações relacionadas à análise termomecânica dinâmica acoplada.

Recomenda-se a expansão da formulação para materiais compósitos. A adoção de materiais compostos, tais como fibra de carbono e resina epóxi, ampliaria a formulação termomecânica aplicável a esses materiais. Frequentemente escolhidos na produção de elementos de casca devido à sua conhecida relação entre resistência, módulo de elasticidade e leveza, eles se destacam como soluções ótimas para setores que buscam otimização estrutural e diminuição de peso, incluindo as indústrias aeroespacial, automotiva e de construção civil.

REFERÊNCIAS

- 834, ISO (2014). “ISO 834: Fire-resistance tests: elements of building construction -part 1.1: general requirements for fire resistance testing”. Em: *International Organization for Standardization*.
- ABNT (2010). “NBR 14762 - Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio”. Em: *Associação Brasileira de Normas Técnicas*.
- Adam, F. M., A. E. Mohamed e A. E. Hassaballa (2013). “Degenerated Four Nodes Shell Element with Drilling Degree of Freedom”. Em: *IOSR Journal of Engineering*, pp. 10–20.
- Asgari, Mojtaba e Mohammad Ali Kouchakzadeh (out. de 2023). “An improved plane strain/plane stress peridynamic formulation of the elastic–plastic constitutive law for von Mises materials”. Em: *Engineering with Computers*, pp. 1–16. ISSN: 1435-5663. DOI: 10.1007/s00366-023-01898-5.
- Baker, E. H., L. Kovalsky e F. L. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. California: McGraw-Hill.
- Bathe, Klaus-Jurgen e Eduardo. Dvorkin (1983). “Our Discrete-Kirchhoff And Isoparametric Shell Elements For Nonlinear Analysis - An Assessment”. Em: *Computers and Structures*, pp. 88–98.
- Bingham, E. C. (1972). *Fluidity and Plasticity*. New York: McGraw-Hill.
- Bird, R. B. (1982). *Rheology and Flow of Viscoplastic Materials*. Reviews in Chemical Engineering.
- Blaauwendraad, J. e J. J. Hoefakker (2014). *Structural Shell Analysis - Understanding and Application*. Waterloo: Springer.
- Bonde, D. H. e K. P. Hao (1977). “Thermal Stresses in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole or a Rigid Inclusion”. Em: *Nucl. Eng. Des.*, pp. 337–346.
- Booker, J. R. e J. C. Small (1975). “An investigation of the stability of numerical solutions of Biot’s equations of consolidation”. Em: *Int. J. Solids Struct.* 11, pp. 907–917.
- Brischetto, S. e R. Torre (2019). “3D Shell Model For The Thermo-Mechanical Analysis Of FGM Structures Via Imposed And Calculated Temperature Profiles”. Em: *Aerospace Science and Technology*, pp. 121–141.

- Bucalem, Miguel Luiz e Selma H. Shimura Nóbrega (2000). “A mixed formulation for general triangular isoparametric shell elements based on the degenerated solid approach”. Em: *Computers and Structures*, pp. 35–44.
- Carr, A. J. (1967). “A refined finite element of thin shells”. Em: *Civil Engineering*.
- Carter, J. P. e J. P. Booker (1989). “Finite Element Analysis of Coupled Thermoelasticity”. Em: *Computers and Structures*, pp. 73–80.
- Cecílio, D. L. (2011). “Modelagem e Simulação Elastoplástica em Elementos Finitos”. Diss. de maestr. Universidade Estadual de Campinas, p. 68.
- Chaves, Waghner da Rocha (2014). “Estudo Numérico de Pilar em Aço Formado a Frio com Seção Tubular Quadrada em Situação de Incêndio”. Tese de dout. Universidade Federal de Pernambuco, p. 116.
- Cheng, T., Y. Wen e J. A. Hawk (2017). “Modeling Elasto-viscoplasticity in a Consistent Phase Field Framework”. Em: *International Journal of Plasticity*, pp. 242–263.
- Choi, Jong-keun e Jang-keun. Lim (1993). “GENERAL CURVED BEAM ELEMENTS BASED ON THE ASSUMED STRAIN FIELDS”. Em: *Computers and Structures*, pp. 379–386.
- Cinefra, M., S. Valvano e E. Carrera (2016). “Thermal Stress Analysis of Laminated Structures by a Variable Kinematic MITC9 Shell Element”. Em: *Journal Thermal Stresses*, vol. 39, no. 2, pp. 121–141.
- Cormeau, I. C. (1975). “Numerical Stability in Quasi-Static Elasto/Visco-Plasticity”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 109–127.
- Cortivo, Nélvio dal (2004). “Análise de Estruturas de Cascas Finas Utilizando-se uma Formulação Co-rotaciona, um Modelo Plástico por Camadas e o Elemento Finito Andes”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 182.
- Costa, Leonardo Medeiros da (2013). “Análise Experimental de Pilares em Aço Formado a Frio Sob Altas Temperaturas com Dilatação Térmica Livre e Restringida”. Tese de dout. Universidade Federal de Pernambuco, p. 190.
- Crandall, S. H., N. C. Dahl e T. J. Lardner (1978). *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 1ª ed. Singapore: McGraw-Hill Book Company.
- De Angelis, F. (2012). “On Constitutive Relations in Non-smooth Elasto/Viscoplasticity”. Em: *Advanced Materials Research*, pp. 691–98.

De Souza Neto, EA., D. Peric e DRJ. Owen (2008). *Computational Methods For Plasticity - Theory and Applications*. United Kingdom: John Wiley e Sons.

Del Pozo, D. e I. Romero (2017). “Formulation and Numerical Solution of Non-smooth Elasto-visco-plasticity Models”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 457–475.

Dewangan, H. C., S. K. Panda e N. Sharma (2023). “A review of linear and nonlinear structural responses of laminated flat/curved panels with and without cutout under thermo-mechanical loading”. Em: *Compsite Structures*.

Durand, R. e F. H. B. T. Silva (2021). “Three-dimensional modeling of fracture in quasibrittle materials using plasticity and cohesive finite elements”. Em: *J. Fract.* 288(1), pp. 45–70.

Durand, R. et al. (2021). “Reinforcing bars modelling using a rod–solid interface element without the need for mesh compatibility”. Em: *Finite Elem. Anal. Des.* 197).

EC3 (2005). *Design of Steel Structures. Part 1-2: General Rules – Structural Fire Design*. European Committee for Standardization.

Elfar, M., R. Sedaghati e O. R. Abdelsalam (2022). “Transient coupled thermo-elasticity analysis of a temperature-dependent thick-walled cylinder under cyclic thermo-mechanical loads”. Em: *S N Applied Sciences*.

Escudero, Aldo A. G. (1997). “Investigação de Modelos Computacionais de Cascas Usando o Método de Elementos Finitos”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 237.

Flügge, W. (1973). *Stress in Shells*. 2ª ed. Springer-Verlag.

França Júnior, Davidson de Oliveira (2018). “Um Estudo Analítico-numérico em Vibrações Livres Fluido-elásticas em Cascas Cilíndricas para Diferentes Condições de Contorno”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 145.

Gravina, P. B. (1957). *Teoria E Cálculo Das Cascas: Cascas De Revolução*. 1ª ed. São Paulo: Salesianas, Escolas profissionais.

Hetnarski, R. B. e M. R. Eslami (2009). *Thermal Stress - Advanced Theory and Applications*. 1ª ed. Waterloo: Spriger.

Hoffman, R. E. e T. Ariman (1970). “Thermal Bending of Plates with Circular Holes”. Em: *Nucl. Eng. Des.*, pp. 231–238.

Huang, Junbin et al. (2018). “An unsymmetric 8-node hexahedral solid-shell element with high distortion tolerance: Linear formulations”. Em: *Int J Numer Methods Eng.*, pp. 759–783.

- Huang, N. N. e T. R. Tauchert (1991). “Large Deflections of Laminated Cylindrical and Doubly-Curved Panels Under Thermal Loading”. Em: *Computational Structures*, pp. 303–312.
- Jabbari, M., H. Dehbani e M. R. Eslami (2010). “An Exact Solution for Classic Coupled Thermoelasticity in Spherical Coordinates”. Em: *Journal of Pressure Vessel Technology*.
- Júnior, M. Teixeira et al. (2023). “Experimental and numerical analysis of transient thermal stresses on thick-walled cylinder”. Em: *International Journal of Pressure Vessels and Piping*.
- Kanok-Nukulchai, Worsak (1979). “A simple and efficient finite element for general shell analysis”. Em: *Int J Numer Methods Eng*, pp. 179–200.
- Koziey, Brad L. e Farooque A. Mirza (1997). “Consistent Thick Shell Element”. Em: *Computers and Structures*, pp. 531–549.
- Krys’ko, V. A., J. Awrejcewicz e V. M. Bruk (2002). “On The Solution Of A Coupled Thermo-Mechanical Problem For Non-Homogeneous Timoshenko-Type Shells”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 273, no. 2, pp. 409–416.
- Krysl, Petr (2000). “Robust flat-facet triangular shell finite element”. Em: *Int J Numer Methods Eng*, pp. 2399–2423.
- Lamé, G. (1852). *Leçons Sur Lá Théorie Mathématique De L'élasticité Des Corps Solides*. Paris.
- Lecornu, L. (1880). *Sur L'équilibre Des Surfaces Flexibles Et Inextensibles*. Paris.
- Li, C. e BG. Thomas (2003). “Thermo-Mechanical Finite-Element Model Of Shell Behavior In The Continuous Casting Of Steel”. Em: *Key Engineering Materials*.
- Librescu, L. et al. (1995). “Thermomechanical Postbuckling of Geometrically Imperfect Flat and Curved Panels Taking into Account Tangential Edge Constraints”. Em: *Journal Thermal Stresses*, pp. 465–482.
- Lubliner, Jacob (2006). *Plasticity Theory*. 3ª ed. California: Pearson Education.
- Lévy, M. (1887). *Statique Graphique*. Paris.
- Macedo, Fabiano Campos (2014). “Estudo Analítico e Numérico dos Esforços Térmicos em Cascas Cilíndricas Axissimétricas”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 151.
- MacNeal, Richard. (1976). “A SIMPLE QUADRILATERAL SHELL ELEMENT”. Em: *Computers and Structures*, pp. 175–183.
- Masoodi, A. R. e E. Arabi (2018). “Geometrically Nonlinear Thermomechanical Analysis Of Shell-Like Structures”. Em: *Journal of Thermal Stresses*, pp. 37–53.

- Melosh, R. J. (1961). “A Stiffness Matrix For the Analysis of Thin Plates in Bending”. Em: *Journal of Aerospace Science*, pp. 34–42.
- Mendes, Neander Berto (2013). “Estudo Comparativo Analítico-numérico de Aspectos da Interação Fluido-estrutura em Cascas com Aplicações a Barragens em Arco”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 343.
- Menin, Renato César Gavazza (2006). “Aplicação da Descrição Cinemática Co-rotacional na Análise Não-linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 190.
- Mindlin, R. D. (1951). “Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates”. Em: *Journal of Appl. Mech.*, pp. 31–38.
- Mousavi, Farzaneh, Siavash Jafarzadeh e Florin Bobaru (out. de 2021). “An ordinary state-based peridynamic elastoplastic 2D model consistent with J2 plasticity”. Em: *Int. J. Solids Struct.* 229, p. 111146. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111146.
- Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. 1ª ed. Barcelona: Springer.
- Papanastasiou, T. C. (1987). “Flows of Materials with Yield, Journal of Rheology”. Em: pp. 385–404.
- Pascoali, S. (2008). *Tecnologia dos materiais I*. Universidade de Santan Catarina.
- Pereira, M. R. S. (2018). “Modelagem Numérica E Mecânica De Escoamentos Elasto-Viscoplásticos Tixotrópicos: Investigações Com Uma Nova Função Viscoplastica”. Tese de dout. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 176.
- Pimentel, F. C. (2014). “Aplicação de Modelo Numérico de Fluência Para Análise de Estruturas Metálicas de Flares sob Carregamento Termomecânico”. Diss. de maestr. Universidade de Federal do Rio de Janeiro.
- Poh, K. W. (2001). “Stress-Strain-Temperature Relationship For Structural Steel”. Em: *J. Mater. Civ. Eng.*, pp. 371–379.
- Prakash, P. e K. P. Rao (1974). “Thermal Stresses Around Circular Holes in Spherical Shells”. Em: *Nucl. Eng. Des.*, pp. 83–87.
- Prathap, G. e C. Ramesh Babu (set. de 1986). “An isoparametric quadratic thick curved beam element”. Em: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 23.9, pp. 1583–1600. ISSN: 0029-5981. DOI: 10.1002/nme.1620230902.

- Providas, E. e M. A. Kattis (2022). “An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations”. Em: *Computers and Structures*, pp. 129–139.
- Péric, D. (1993). “On a Class of Constitutive Equations in Viscoplasticity: Formulation and Computational Issues”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 1365–1393.
- Rao, K. S., N. Badu Rao e T. Ariman (1971). “Thermal Stresses in Plates with Circular Holes”. Em: *Nucl. Eng. Des.*, pp. 97–112.
- Raveendranath, P., Gajbir Singh e G. Venkateswara Rao (2001). “A three-noded shear-exible curved beam element based on coupled displacement eld interpolations”. Em: *Int J Numer Methods Eng.*, pp. 85–101.
- Reddy, J. N. e C. D. Chin (1998). “Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates”. Em: *Journal Thermal Stresses*, pp. 593–626.
- Reissner, E. (1945). “The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates”. Em: *Journal of Appl. Mech.*, pp. 69–76.
- Ren, TZ., X. Jin e J. Guan (2007). “Thermo-Mechanical Coupled FEM Analysis On Deformation Of Solidified Shell In Funnel Mold”. Em: *International Conference On Mechanical Engineering And Mechanics 2007, Vols 1 And 2*, pp. 1473–1477.
- Rezaiee-Pajand, M., E. Arabi e Amir R. Masoodi (2017). “A triangular shell element for geometrically nonlinear analysis”. Em: *Acta Mech*, pp. 323–342.
- Rezaiee-Pajand, M., D. Pourhekmatt e E. Arabi (2019). “Buckling And Post-Buckling Of Arbitrary Shells Under Thermo-Mechanical Loading”. Em: *Springer Nature B.V. 2019*.
- Rosati, L. e N. Valoroso (2004). “A Return Map Algorithm for General Isotropic Elasto/Viscoplastic Materials in Principal Space”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 461–498.
- Safarian, S. e E. C. Harris (1985). *Design and Construction of Silos and Bunkers*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Sangtarash, Hosein et al. (2020). “A high-performance four-node flat shell element with drilling degrees of freedom”. Em: *Engineering with Computers*, 2837–2852.
- Shi, Z., J. P. Hambleton e G. Buscamera (2019). “Formulation and Numerical Solution of Non-smooth Elasto-visco-plasticity Models”. Em: *Journal of Engineering Mechanics*.

- Silva, Sebastião Simão da (2019). “Utilização de Ementos Finitos de Alta Performance e da Formulação Co-rotacional na Análise Inelástica de Placas e Lâminas”. Tese de dout. Universidade de Brasília, p. 200.
- Simo, J. C (1998). *Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*. Amsterdam: Lyons J-L.
- Solheiro, A. R. F. (2017). “Análise de Estruturas de Casca pelo Método dos Elementos Finitos”. Diss. de mest. Instituto Superior Técnico de Lisboa.
- Sun, J et al. (2012). “Thermo-Mechanical Coupled Analysis Of Heavy Shell Ring Hot Rolling Mill With Two Drive Rolls”. Em: *Advanced Materials Research*, pp. 200–205.
- Szilard, R. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis*. New Jersey: John Wiley e Sons.
- Timoshenko, S. e S. Woinowsky-Krieger (1959). *Theory of Plates and Shells*. 2ª ed. New York: McGraw-Hill.
- Ventsel, E. e T. Krauthammer (2001). *Thin Plates and Shells - Theory, Analysis, and Applications*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Vieralves, G. F. (2014). “Análise Termo-Viscoelástica de Estruturas Fraturadas e Submetidas a Altas Temperaturas”. Diss. de mest. Universidade de Brasília.
- Yuan, K. Y. e C. C. Liang (1989). “Nonlinear Analysis Of An Axisymmetric Shell Using Three Noded Degenerated Isoparametric Shell Elements”. Em: *Computers and Structures*, pp. 1225–1239.
- Zhang, Q. et al. (1987). “Finite Element Model for Predicting Static and Thermally Induced Bin Wall Pressures”. Em: *American Society of Agricultural Engineers*.
- Zhang, XIang-ming, An-wen Wang e Han-lin He (2001). “Locking-free Degenerated Isoparametric Shell Element”. Em: *Applied Mathematics and Mechanics*, pp. 609–617.
- Zienkiewicz, O. C (1991). *The Finite Element Method*. 4ª ed. Mc Graw-Hill Book Company Europe.
- Zienkiewicz, O. C. e Y. K. Cheung (1964). “The Finite Element Method For Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs”. Em: pp. 471–488.
- Zienkiewicz, O. C. e I. C. Corneau (1974). “Visco-plasticity – Plasticity and Creep in Elastic Solids – A Unified Numerical Solution Approach”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 821–845.