Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A Fibração de Hopf e Superfícies de Willmore

por

Nilton Moura Barroso Neto

Brasília
2006

Resumo

Uma imersão $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ é dita uma **Superfície de Willmore** se é ponto crítico do funcional $\mathfrak{W}(X) = \int_M H^2 da$. Até 1986, os únicos exemplos conhecidos de tais superfícies eram obtidas a partir de projeções estereográficas de superfícies mínimas e compactas mergulhadas em S^3. Neste trabalho mostramos a existência de uma infinidade de superfícies de Willmore que não provém de superfícies mínimas em S^3, usando os trabalhos de Pinkall, Langer, Singer e Moniot.

Abstract

An immersion $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ is called a **Willmore surface** if it is an extremal for the functional $\mathfrak{W}(X) = \int_M H^2 da$. Until 1986, the only examples of such surfaces known so far were stereographic projections of compact embedded minimal surfaces in S^3. In this work we prove the existence of an infinite number of Willmore surfaces that do not stem from minimal surfaces in S^3, using the works of Pinkall, Langer, Singer and Moniot.

Introdução

Em 1965 T. J. Willmore [22] propôs o estudo do funcional

$$\widetilde{\mathfrak{W}}(X) = \int_M H^2 da \tag{1}$$

para imersões $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$, onde M^2 é uma superfície compacta, H é a curvatura média da imersão e da é a forma de área induzida.[1]

Agora, se definimos

$$\mathfrak{W}(X) = \int_M (H^2 - K) da, \tag{2}$$

então, pelo teorema de Gauss-Bonnet, temos:

$$\widetilde{\mathfrak{W}}(X) = \mathfrak{W}(X) + 2\pi\chi(M), \tag{3}$$

ou seja, os dois funcionais diferem apenas por uma constante. Na realidade o novo funcional $\mathfrak{W}$, definido a partir do funcional original de Willmore, tem a vantagem de seu integrando ser não-negativo e se anular exatamente nos pontos umbílicos da imersão X.

Certamente, $\mathfrak{W}(X) = 0$ se, e somente se, $M^2 = S^2$ e X é totalmente umbílica. Portanto o mínimo absoluto de $\mathfrak{W}$ no espaço das imersões $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ é 0 e o lugar geométrico dos pontos críticos é conhecido. Quando M é um toro, Willmore propôs um exemplo de imersão $X : M \to \mathbb{R}^3$ com $\mathfrak{W}(X) = 2\pi^2$ e provou que $\mathfrak{W}(X) \geq 2\pi^2$ para todas superfícies suaves de revolução. Ele então conjeturou que $\mathfrak{W}(X) \geq 2\pi^2$ para todas as imersões do toro com a igualdade valendo apenas para o exemplo que ele havia proposto: o toro obtido pela revolução de um círculo de raio r em torno de um eixo cuja

[1] Na verdade, o matemático alemão K. Voss durante a década de 50 já havia considerado o funcional $\mathfrak{W}$. Alguns anos mais tarde Willmore e K. Voss descobriram no livro de W. Blaschke [1] que este problema já era estudado desde o início do século, em particular nos trabalhos de Thomsen e Shadow em 1923 [19]

distância ao centro do círculo.

Entretanto, em 1973, J. H. White [21] provou que a 2-forma $(H^2 - K)da$ é invariante por tranformações conformes de $R^3 \cup \{\infty\}$ (grupo de Möbius), onde ∞ é o ponto no infinito. Logo, se T é uma tranformação conforme de $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ temos que:

$$\mathfrak{W}(T(X)) = \mathfrak{W}(X).$$

Portanto, podemos afirmar como corolário que se X é de Willmore, então $T(X)$ também será. Consequentemente, todas as superfícies geradas via transformações conformes do exemplo de Willmore também devem satisfazer $\mathfrak{W}(X) = 2\pi^2$. A conjectura foi então modificada de maneira que a igualdade fosse satisfeita, a menos de transformações conformes do toro de Willmore.

Observe que, da maneira como foi enunciada, a conjectura permite considerar toros imersos não mergulhados. Entretanto, em 1982 Li e Yau mostraram em [12] que se uma superfície se auto-intersecta então $\mathfrak{W} \geq 8\pi$. Recentemente, L. Simon [17] provou que o mínimo do funcional $\mathfrak{W}$ é alcançado entre os toros, mas ainda não se sabe se esse toro coincide ou não com o exemplo de Willmore.

O fato é que a conjectura de Willmore levou muitos matemáticos a seguinte questão: quais são os pontos críticos do funcional (2)? Dizemos que uma imersão X é de Willmore se ela é ponto crítico de $\mathfrak{W}$. Até meados da década de 80, os únicos exemplos conhecidos de tais superfícies eram obtidas via projeção estereográfica de superfícies mínimas e compactas mergulhadas em S^3. Nesse trabalho, usando a propriedade de invariância conforme como pano de fundo, vamos estudar o funcional $\mathfrak{W}$. Como veremos, isso permitirá demonstrar a existência de um número infinito de superfícies de Willmore não triviais, isto é, que não provém de superfícies mínimas de S^3.

Mais precisamente temos o seguinte: inicialmente consideramos a projeção de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$. Tal aplicação é, na verdade, uma fibração localmente trivial com espaço total S^3, espaço base S^2 e fibra típica S^1. Em seguida, construímos certos toros em S^3 que são imagens inversas de curvas simples e fechadas em S^2 via fibração de Hopf. Mostraremos que tais superfícies são pontos críticos do funcional $\mathfrak{W}$ se, e somente se, as curvas correspondentes são pontos críticos do funcional:

$$\mathfrak{F}(\gamma) = \int_0^L \left(1 + k^2\right) ds, \tag{4}$$

onde a função $s \mapsto k(s)$ e L são respectivamente a curvatura geodésica e o comprimento de γ e s é o comprimento do arco. Por fim, provaremos que existem um número infinito de curvas simples e fechadas em S^2 que são pontos críticos do funcional $\mathfrak{F}$, estabelecendo dessa forma o resultado desejado.

O presente trabalho tem a seguinte organização: no capítulo 1 fazemos referência a alguns fatos clássicos que serão usados com frequência durante todo o texto, bem como uma rápida análise acerca da construção e principais propriedades da fibração de Hopf.

No capítulo 2, usando as equações de Euler-Lagrange para o funcional (4) e as equações de Frenet para a curva γ em S^2, provaremos que γ é ponto crítico de (4) se, e somente se, sua curvatura geodésica k satisfaz

$$\frac{d^2k}{ds^2} = -k^2 \frac{k + \frac{1}{k}}{2}, \tag{5}$$

onde s é o comprimento do arco. Na segunda parte desse mesmo capítulo provamos a existência de infinitas soluções para a equação diferencial acima e fazemos uma rápida análise qualitativa das principais propriedades dessas curvas.

No capítulo 3 consideramos curvas fechadas γ em S^2 e ξ em S^3 tais que $\gamma = \pi \circ \xi$, isto é, γ é a imagem de ξ via $\pi : S^3 \to S^2$. Assumimos que ξ está parametrizada pelo comprimento de arco e em seguida consideramos imersões

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{X}: & [0, L/2] \times S^1 & \to & S^3 \\ & (t, \phi) & \mapsto & e^{i\phi}.\xi(t), \end{array} \tag{6}$$

onde L é o comprimento de γ. Provamos em seguida que a curvatura média da imersão (6) coincide com a curvatura geodésica de γ. Finalmente, usando alguns resultados provados por Weiner em [20], veremos que $\mathfrak{X}$ é ponto crítico do funcional de Willmore se, e somente se a função curvatura geodésica de γ satisfaz (5), ou seja é ponto crítico do funcional $\mathfrak{F}$.

Por fim, no capítulo 4, usando um resultado de Bryant [2], reobtemos os resultados provados no capítulo 2 sem utilizar noções de cálculo de variações ou geometria Riemanniana. Tal abordagem tem a vantagem de ser mais simples e intuitiva do ponto de vista geométrico, além de trazer à luz algumas interessantes relações entre certas famílias de círculos e curvas em S^2.

Referências Bibliográficas

[1] Blaschke, W., *Vorlensungen über Differentialgeometrie III*, Sringer, Berlin, 1929.

[2] Bryant, R. L.,*A Duality Theorem for Willmore Surfaces*, Journal of Differential Geometry 20, 1984, 23-53.

[3] Davis, T. H., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover, New York, 1962.

[4] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.

[5] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.

[6] Hopf, H., *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kuglelfläche*, Math. Ann. **104**, 1931, 637-665.

[7] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer Universitext, 4^{th} Edition, 2005.

[8] Kobayashi & Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, 1963.

[9] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*, New York, Interscience, 1966.

[10] Langer, J., & Singer,D. A., *The Total Squared Curvature of Closed Curves*, Journal of Differential Geometry, 20, 1984, 1-22.

[11] Langer, J., & Singer, D. A., *Curve Straightening in Riemannian Manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 5, No.2, 1987, 133-150.

[12] Li, P. & Yau, S. T., *A New Conformal Invariant and its Aplications to the Willmore Conjecture and the first Eigeinvalue os Compact Surfaces*, Invent. Math. 69, 1982, 269-291.

[13] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1992.

[14] Lima, E. L., *Curso de Análise Vol. 2*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.

[15] Moniot, G., *Existence de Surfaces de Willmore qui ne sont pas Minimales*, Rapport de Recherche, 2002, 273.

[16] Pinkall, U., *Hopf Tori in* S^3,Invent.Math. 81, 1985, 379-386.

[17] Simon, L., Existence of Surfaces Minimizing the Willmore Energy, Comm. Anal. Geom. 1 (2), 1993, 281-326.

[18] Spivak, M., *A Compreheensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Texas, 3^{rd} Edition, 1995.

[19] Thomsen, G., *Über Konforme Geometrie I: Grundlajem der Konformen Flänchentheorie*, Abh. Math. Sem., Hamburg, 1923, 31-56.

[20] Weiner, J. L., *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Indiana Univ. Math. Journal 27, 1978, 19-35.

[21] White, J. H., *A Global Invariant of Conformal Mappings in Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 38, 1973, 162-164.

[22] Willmore, T. J., *Note on Embedded surfaces*, An. Sti. Univ."Al. I. Cuza"Iasi Sect. Ia. Mat. 11B, 1965, 493-496.