Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções para um Sistema de Equações Elípticas envolvendo o p-Laplaciano

por

ELSON LEAL DE MOURA

Brasília
2006

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, em que Δ_p e Δ_q são definidos por $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e similarmente para q, utilizando métodos variacionais. Analisamos três casos de não linearidade:

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^r + |v|^s),$$

para alguma constante positiva c_3.
(I) caso sublinear: $r < p$ e $s < q$,
(II) caso superlinear: $p < r < p^*$ e $q < s < q^*$,
(III) caso ressonante : $r = p$ e $s = q$.

Também estudamos a existência de soluções em $\mathbb{R}^N$ para um sistema equivalente com potenciais coercivos e não linearidade superquadrática e subcrítica.

Abstract

In this work we study the existence of solutions for the system

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases}$$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, where Δ_p and Δ_q are defined by $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ and in the same way for q, using variational methods. We analyse three nonlinear cases :

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^r + |v|^s),$$

for some positive constant c_3.
(I) sublinear case: $r < p$ and $s < q$,
(II) superlinear case: $p < r < p^*$ and $q < s < q*$,
(III) resonant case: $r = p$ and $s = q$.

We also study the existence of solutions in $\mathbb{R}^N$ for an equivalent system with coercive potentials and superquadratic and subcritic nonlinearity.

Introdução

Neste trabalho apresentaremos um estudo baseado no artigo de Boccardo e Figueiredo [14] sobre a existência de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases} \tag{$\mathbb{S}$}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ onde F_u, F_v designam as derivadas parciais de F com respeito a u e v, respectivamente ; p, q são números reais maiores que 1 e Δ_p, Δ_q são chamados de operadores p-Laplaciano e q-Laplaciano definidos por $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e similarmente para q.

Mais precisamente, estudaremos a geometria do funcional associado

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega F(x,u,v)dx.$$

Damos a esse trabalho um pouco de originalidade considerando um sistema elíptico em $\mathbb{R}^N$ da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2} &= F_u(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + b(x)\,|v|^{q-2} &= F_v(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{$\mathbb{D}$}$$

sobre a existência de soluções, generalizando o trabalho de Costa [8].

Observamos que existem muitos estudos recentes sobre sistemas elípticos em domínios ilimitados. Dentre eles podemos citar Ali e Tas [12] que tratam do problema ($\mathbb{D}$) com $a = 0,\ b = 0$. Estudaram também o mesmo problema com $p = q = 2$, Furtado, Maia e Silva [15] .

Resultados de existência de soluções para sistemas em domínios limitados têm sido considerados por [22], [25], [13], para as seguintes classes de potenciais F não lineares: $F(x,u,v) = c(x)\,|u|^\beta\,|v|^\gamma$.

O sistema seguinte

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= a(x)\,|u|^{\alpha-2}\,u + b(x)\,|v|^{\beta-2}\,v + f \\ -\Delta_q v &= c(x)\,|u|^{\gamma-2}\,u + d(x)\,|v|^{\delta-2}\,v + g \end{cases}$$

foi estudado por [6]. Em geral, o sistema não é variacional. Entretanto, se $b(x) = c(x)$ e $\beta = \gamma = 2$, se torna variacional com o funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ tendo $F(x,u,v) = a(x)\,|u|^{\alpha} + b(x)uv + d(x)\,|v|^{\delta} + fu + gv$.

Vamos introduzir certas hipóteses sobre as quais o nosso problema $(\mathbb{S})$ será estudado: nosso funcional Φ está bem definido no produto cartesiano dos espaços de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega) = E$ e, além disso, é um funcional de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ [cf. Apêndice A] se assumirmos uma condição de crescimento subcrítico e crítico para F :

$$|F(x,u,v)| \leq c_1(1 + |u|^{p^*} + |v|^{q^*}), \qquad (F.1)$$

onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$, $1 < p < N$, similarmente para q, $1 < q < N$, e c_1 é uma constante positiva. E, ainda, assumindo os seguintes crescimentos para as derivadas parciais contínuas de F: existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{cases} |F_u(x,u,v)| &\leq c_2(1 + |u|^{p^*-1} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}) \\ |F_v(x,u,v)| &\leq c_2(1 + |v|^{q^*-1} + |u|^{\frac{p^*(p^*-1)}{q^*}}). \end{cases} \qquad (F.2)$$

Trabalharemos com hipóteses mais restritivas para F; a geometria de Φ depende fortemente dos valores de r e s nas seguintes estimativas :

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^{r} + |v|^{s}), \qquad (F.3)$$

para alguma constante positiva c_3. Vamos considerar os seguintes casos:
(I) caso sublinear: $r < p$ e $s < q$,
(II) caso superlinear: $p < r < p^*$ e $q < s < q^*$,
(III) caso ressonante : $r = p$ e $s = q$.

Um fato importante que não será estudado é o caso crítico onde $r = p^*$ e $s = q^*$, em que perdem-se as imersões compactas de Sobolev.

Vamos agora enunciar os nossos resultados principais com respeito ao sistema $(\mathbb{S})$:

Teorema A (caso coercivo) : *Assuma as condições (F.2) e (F.3) com r e s no caso sublinear. Então Φ assume um mínimo global em algum ponto $(u_0, v_0) \in E$, o qual é uma solução fraca para o sistema $(\mathbb{S})$*

Uma pergunta que surge naturalmente, se considerarmos as condições

$$F(x,0,0) = F_u(x,0,0) = F_v(x,0,0) = 0, \qquad (F.4)$$

é de como obter uma solução não-trivial para o sistema $(\mathbb{S})$. A resposta a esta pergunta será possível, sob as condições do próximo teorema.

Teorema B (caso coercivo, solução não-trivial) : *Assuma que F satisfaz as condições $(F.2)$, $(F.4)$ e $(F.3)$ com r e s no caso sublinear. Se existem constantes positivas R e $\theta < 1$, e uma função contínua*

$$K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x, t^{\frac{1}{p}} u, t^{\frac{1}{q}} v) \geq t^{\theta} K(x,u,v), \qquad (F.5)$$

para $K \geq 0$, $|u|, |v| \leq R$ e $t > 0$ suficientemente pequeno. Então Φ possui um ponto $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ de mínimo global.

O próximo teorema envolve um resultado clássico de existência de soluções em Métodos Variacionais, o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [19].

Teorema C (caso superlinear): *Assuma as condições $(F.2), (F.4), (F.3)$ no caso superlinear. Assuma que existam números $R > 0, \theta_p, \theta_q$ com*

$$\frac{1}{p^*} < \theta_p < \frac{1}{p}, \frac{1}{q^*} < \theta_q < \frac{1}{q}$$

tais que

$$0 < F(x,u,v) \leq \theta_p u F_u(x,u,v) + \theta_q v F_v(x,u,v), \text{para } |u|, |v| \geq R. \qquad (F.6)$$

Assuma, ainda, que existam constantes $C > 0$, $\epsilon > 0$ e números $\bar{r} > p, \bar{s} > q$, tais que

$$|F(x,u,v)| \leq C(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}), \qquad (F.7)$$

para $|u|, |v| \leq \epsilon$. *Então* Φ *tem um ponto crítico não-trivial.*

Os dois resultados seguintes tratam de $(F.3)$ no caso ressonante. Precisaremos supor outras condições sobre F. Uma delas, a hipótese de não quadraticidade, foi introduzida por Costa-Magalhães [9],[10]: *existem números positivos* c, R, μ, ν *tais que*

$$\frac{1}{p}uF_u + \frac{1}{q}vF_v - F \geq c(|u|^\mu + |v|^\nu);\ |u|, |v| > R. \tag{$F.8$}$$

A outra condição que assumiremos envolve um problema de autovalor. Iremos trabalhar com o seguinte problema :

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - aG_u &= \lambda |u|^{p-2} u,\ \Omega \\ -\Delta_q v - aG_v &= \lambda |v|^{q-2} v,\ \Omega \end{aligned} \tag{$*$}$$

sujeito à condição de fronteira de Dirichlet, com $a \in L^\infty(\Omega)$, tendo (*) um autovalor $\lambda_1(a)$ caracterizado variacionalmente por

$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\, dx - \int_\Omega aG(u,v)dx \geq \lambda_1(a)\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\, dx\right),$
$\forall (u,v) \in E$.

Vamos introduzir a seguinte condição: $\lambda_1(a) > 0$,

$$\limsup_{|u|,|v|\to\infty} \frac{F(x,u,v)}{G(u,v)} \leq a(x) \in L^\infty(\Omega), \tag{$F.9$}$$

onde $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$ *é uma função par de classe* C^1 *satisfazendo duas hipóteses:*
$(G.1)$ $G(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) = tG(u,v)$
$(G.2)$ $G(u,v) \leq k(|u|^p + |v|^q)$, k *constante.*

Um exemplo de uma função G que satisfaz estas duas condições é $G(u,v) = |u|^\beta |v|^\gamma$; $\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} = 1$. Para verificar tal afirmação, basta usar a desigualdade de Young.

Teorema D (caso ressonante) : *Assuma as condições* $(F.2), (F.8), (F.9), (F.3)$ *no caso ressonante. Então o nosso funcional* Φ *é limitado inferiormente e o ínfimo é atingido.*

Teorema E (caso ressonante): *Assuma as condições* $(F.2), (F.4), (F.8)$ *e* $(F.3)$ *no caso ressonante. Suponha, também, que existam números reais positivos* R, ϵ *e funções* b, c *em* $L^{\infty}(\Omega)$ *tais que*

$$\begin{cases} \lambda_1(b) < 0, F(x,u,v) \geq b(x)G(u,v), |u|, |v| \geq R & (F.10) \\ \\ \lambda_1(c) > 0, F(x,u,v) \leq c(x)\tilde{G}(u,v), |u|, |v| \leq \epsilon, & (F.11) \end{cases}$$

onde $G, \tilde{G}$ *são funções que satisfazem as hipóteses* $(G.1), (G.2)$. *Então o funcional* Φ *possui um ponto crítico não-trivial.*

Agora vamos introduzir as hipóteses para o sistema $(\mathbb{D})$:
Trabalharemos no seguinte espaço:

$$E_{p,q} = \left\{(u,v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p + |\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx < \infty\right\}$$
com $1 < p, q < N$.

(A_0) $a, b \in C(\mathbb{R}^N)$; $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, onde a_0, b_0 são constantes positivas.

(A_1) $a(x) \to \infty$, $b(x) \to \infty$, quando $|x| \to \infty$.

(F_0) $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $F(x,0,0) = 0$.

$$(F_1) \begin{cases} \left|\dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)\right| & \leq & c_1\,|u|^{p_1-1}\,|v|^{q_1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \\ \\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)\right| & \leq & c_2\,|u|^{q_2}\,|v|^{p_2-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $max\,\{p,q\} \leq p_i + q_i < min\,\{p^*, q^*\}$, para $i = 1, 2$; $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e $q^* = \frac{Nq}{N-q}$.

$(F_1)_\mu \quad U.\nabla F(x,U) \geq \mu F(x,U) > 0$, $\forall\ (x,U) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ onde $\mu > \max\{p,q\}$.

Estamos diante também de um problema variacional e o funcional associado ao sistema $(\mathbb{D})$ é definido por :

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p\right) dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx,$$

$$(u,v) \in E_{p,q}. \tag{4.1}$$

Com essas hipóteses iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema F (caso ressonante) : *Se as hipóteses* $(A_0),(A_1),(F_0),(F_1),(F_1)_\mu$ *são satisfeitas, então o funcional* Φ *associado ao problema* $(\mathbb{D})$ *tem um ponto crítico não-trivial.*

O nosso trabalho será estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos três teoremas importantes sobre pontos críticos para funcionais em espaços de Banach sobre os quais o trabalho está estruturado.

No Capítulo 2, apresentaremos as demonstrações dos teoremas A, B e C, ou seja, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{S})$ nos casos sublinear e superlinear.

No Capítulo 3, apresentaremos as demonstrações dos teoremas D e E, ou seja, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{S})$ no caso ressonante.

No Capítulo 4, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{D})$, ou seja, demostraremos o teorema F.

No Apêndice A, mostraremos que o funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ está bem definido e é de classe C^1.

No Apêndice B, enunciaremos os principais teoremas e resultados que utilizaremos no decorrer do trabalho.

No que se segue, denotaremos uma constante genérica por C.