Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Estudo Analítico e Numérico de um Modelo para Escoamento Trifásico

por

Vinícius de Carvalho Rispoli

Brasília
2007

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo de Stone-Leverett para escoamento unidimensional trifásico que é utilizado em engenharia de reservatórios petrolíferos. Este modelo utiliza a função de fluxo de Stone e a matriz de viscosidade construída usando pressões capilares de Leverett. Verificamos, utilizando o conceito de estabilidade de Majda-Pego, que este modelo é estável próximo a fronteira do triângulo de saturações e instável em um conjunto aberto contendo dois vértices do triângulo no seu fecho. Além disso, para ilustrarmos essa estabilidade de Majda-Pego através de simulações numéricas, criamos um software, em linguagem Java, para encontrar soluções aproximadas de um problema de Riemann.

Abstract

In this work we study the Stone-Leverett model for one-dimensional three-phase flow which is utilized in petroleum reservoir engineering. This model uses the Stone flux function and the viscosity matrix using the Leverret capillary pressures. We verified, using the Majda-Pego stability condition, that this model is stable near the saturation triangle edges and unstable in an open set containing two corners of the triangle in its closure. Moreover, to illustrate the Majda-Pego stability with numerical simulations, we built a software, in JAVA language, to find approximated solutions of a Riemann problem.

Introdução

O modelo usual para o escoamento trifásico horizontal e unidimensional em um reservatório petrolífero é baseado no sistema de equações diferenciais parciais não-lineares

$$u_t + F(u)_x = [B(u)u_x]_x, \tag{1}$$

onde $u = (u_1, u_2)^T$, u_1 e u_2 representam as saturações de duas fases do fluido (água, gás ou óleo), que assumem valores no chamado *triângulo de saturações* $\Delta = \{(u_1, u_2) : 0 \leq u_1 + u_2 \leq 1\}$, $F = (F_1, F_2)^T$ é chamada função de fluxo e B é uma matriz 2×2 que representa os efeitos da pressão capilar. Uma modelagem desta equação será feita no Capítulo 2.

Apesar de na modelagem considerarmos os efeitos da pressão capilar, em geral, esses efeitos são deprezados, dando importância, apenas, a equação de convecção

$$u_t + F(u)_x = 0. \tag{2}$$

Um problema de valor inicial para (2) de grande interesse analítico e numéricos considera dados iniciais constantes por partes, do tipo

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & se\ x < 0 \\ u_r, & se\ x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Este tipo de problema de valor inicial foi estudado por Riemann no século XIX, e é chamado problema de Riemann. As soluções de um problema de Riemann são formadas por grupos de ondas. A estrutura dessas ondas será estudada no Capítulo 3.

Quando consideramos o sistema (1), levando em conta a matriz de viscosidade, é possível que um problema de Riemann bem posto tenha a solução apresentando um comportamento anômalo. Majda e Pego [17] introduziram um conceito de estabilidade, que utilizaremos nesse trabalho, e vamos verificar no Capítulo 4 que o modelo utilizado é estável perto das arestas do triângulo de saturações. O modelo que estudaremos utiliza a função de fluxo de Stone e a matriz de viscosidade de Leverett, que vamos definir no Capítulo 4. A definição da estabilidade de Majda-Pego leva em conta os efeitos da matriz de viscosidade, por isso a análise da estabilidade é importante para um modelo usado em recuperação de petróleo.

Com o intuito de ilustrarmos a estabilidade de Majda-Pego no modelo de Stone-Leverett vamos estudar alguns métodos numéricos, fazendo simulações numéricas utilizando, principalmente, um método de alta resolução de diferenças finitas introduzido por Nessyahu e Tadmor em [26]. Este método será apresentado no Capítulo 5, junto com uma pequena discussão da teoria envolvida nos métodos numéricos para sistemas de leis de conservação não-lineares. Com isso, vamos simular numericamente o comportamento do modelo de Stone-Leverett. Os resultados serão apresentados no Capítulo 5.

Referências Bibliográficas

[1] D.K. Arrowsmith, C.M. Place. **Dynamical System - Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour**. Chapman & Hall, London, 1992.

[2] K. Aziz, A. Settari. **Petroleum Reservoir Simulation**. Elsevier Applied Science, New York-London 1990.

[3] A. Azevedo, D. Marchesin, B. Plohr, K. Zumbrun. **Capillary Instability in Models for Three-Plase Flow**. Zeitschrit Fur Angewandte Mathematik Und Physik, v. 53, n. 5, p. 713-746, 2002.

[4] Azevedo, A. **Helicoid in Riemann Solutions: A New Mechanism Responsible For Multiple Solutions**. Matemática Contemporânea, Brasil, v. 22, p. 1-17, 2002.

[5] Batchelor, G.K. **An Introduction To Fluid Dynamics** Cambridge Mathematical Library, 1967.

[6] J. B. Bell, J. A. Trangenstein, G. R. Shubin. **Conservation Laws Of Mixed Type Describing Three-Phase Flow In Porous Media**. SIAM J. Applied Math. (1986) **46**, N° 6, 1000-1017.

[7] C. Conley, J. Smoller. **Viscosity Matrices For Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Systems**. Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 876-884.

[8] A. J. Chorin, J. E. Marsden. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics - 3rd Edition**. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York 1993.

[9] A. T. Corey, C. H. Rathjens, J.H. Henderson, M. R. J. Wyllie. **Three-Phase Relative Permeability Models**. Trans. AIME (1956) **207**, 349-351.

[10] H. M. Deitel, P. J. Deitel. **Java, Como Programar - 4ª Edição**. Editora Bookman, Porto Alegre, 2003.

[11] F. J. Fayers. **Extension Of Stone's Method 1 And Conditions For Real Characteristicas In Three-Phase Flow**. Soc. Pet. Eng. Res. Eng. (1989), 437-445.

[12] D. G. Figueiredo, A. F. Neves. **Equações Diferenciais Aplicadas - 2ª Edição**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[13] R. E. Guzmán. **Mathematics Of Three-Phase Flow**. Tese de Ph.D., 1995, Stanford University.

[14] R. E. Guzmán, F. J. Fayers. **Calculation Of Three-Phase Flow Behavior And Its Influence On Reservoir Performance**. (May 15-17 1995) Proceedings Of The Eight European Symposium On Improved Oil Recovery, Vienna, Austria.

[15] L. Holden. **On The Strict Hiperbolicity Of The Buckley-Leverett Equations For Tree-Phase Flow In A Porous Medium**. SIAM J. Applied Math. (June 1990) **50**, N° 3, 667-682.

[16] M. C. Leverett, W. B. Lewis. **Steady Flow of Gas-Oil-Water Mixtures Through Unconsolidated Sands**. *Trans. SPE* of *AIME* **142** (1941), 107-116.

[17] A. Majda, R. Pego. **Stable Viscosity Matrices For Systems of Conservation Laws**. J. Differential Equations, **56** (1985), 229-262.

[18] D. Marchesin, H. B. Medeiros. **A Note On The Stability Of Eigenvalues Degeneracy In Nonlinear Conservation Laws Of Multiphase Flow**. Contemporary Mathematics (1989) **100**, 215-224.

[19] P. D. Lax. **Hyperbolic Systems Of Conservation Laws II**. Com. Pure Appl. Math. **10**, 537-566, 1957.

[20] P. D. Lax. **The Formation and Decay of Shock Waves**. Am. Math. Monthly **79** (1972) 227-241.

[21] R. J. LeVeque. **Numerical Methods for Conservation Laws**. Lectures in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Barsel 1992.

[22] J. Smoller. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations - 2nd Edition**. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.

[23] L. H. Stone **Probability Model For Estimating Three-Phase Relative Permeability**. J. Tech. Trans. AIME (1970) **249**, 214-218.

[24] L. H. Stone **Estimating Of Three-Phase Relative Permeability And Residual Oil Data**. J. Cdn. Pet. Tech. (1973) **12**, 53-61.

[25] J. C. Strikwerda. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. Wadsworth and Brooks/Cole 1989.

[26] E. Tadmor, H. Nessyahu. **Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws**. Journal of Computational Physics, Vol. 87, No 2, April 1990, pp. 408-463.

[27] M. E. Taylor. **Partial Differential Equations III - Nonlinear Equations**. Applied Mathematical Sciences **117**, Springer, New York, 1996.

[28] J. A. Trangenstein. **Three-Phase Flow With Gravity**. Contemporary Mathematics (1989) **100**, 147-159.

[29] Sun Microsystems. **http://java.sun.com/**.