Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para uma Equação Semilinear com Crescimento Crítico

por

João Pablo Pinheiro da Silva

Brasília

2007

Resumo

Neste trabalho estudaremos existência e multiplicidade de soluções para equação semilinear

$$
(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 4$ e $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Para apropriados valores de $\lambda > 0$, nós aplicaremos Métodos Variacionais para provar a existência de soluções e a Teoria de Ljusternik-Schnirelmann para relacionar o número de soluções com a topologia de Ω.

Abstract

In this work we study the existence and multiplicity of positive solutions for the semilinear equation

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, $N \geq 4$ and $2^* = 2N/(N-2)$ is the critical Sobolev exponent. For suitable values of $\lambda > 0$, we apply Variational Methods to prove existence of solution and Ljusternik-Schnirelmann Theory to relate the number of solutions with the topology of Ω.

Sumário

Introdução

Um dos vários métodos pelos quais podemos resolver uma equação diferencial são os chamados métodos variacionais, que consistem em obter pontos críticos de certos funcionais, que estão associados ao problema em questão. Este método é empregado em uma importante classe de problemas não-lineares que podem ser resolvidos por técnicas relativamente simples de análise funcional não linear. De um modo geral, esses problemas são da forma

$$Lu = 0,$$

onde o operador não linear L é a derivada de um apropriado funcional de energia φ. Simbolicamente escrevemos

$$L = \varphi^{'}.$$

A teoria se consolidou no início do último século, mas vale destacar que suas bases são antigas. Os primeiros trabalhos estavam relacionados com problemas físicos que eram modelados por equações diferencias parciais. A energia desenvolvida no processo estava associada ao funcional que mencionamos anteriormente. Na resolução destes problemas, partia-se do princípio de que a natureza faz um esforço mínimo na realização deste fenômeno, daí então buscava-se pontos (funções) que minimizavam estes funcionais.

Para exemplificar, consideremos o seguinte problema

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 3$ e $2 < p \leq 2^* = 2N/(N-2)$. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma solução clássica do problema $(*)$, isto é, uma função positiva que se anula em $\partial\Omega$, e que satisfaz a equação em todo ponto $x \in \Omega$. Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, após integrarmos sobre Ω, temos

$$\int_\Omega -\Delta u \phi dx = \int_\Omega |u|^{p-2} u \phi dx.$$

Aplicando o Teorema do Divergente obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega |u|^{p-1} \phi dx. \tag{1}$$

Por passagem ao limite, este resultado é válido para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Vamos trabalhar num espaço maior, para assim aumentar nossas chances de encontrar solução para o problema $(*)$. Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema se ela satisfaz a equação (1) para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Conforme visto anteriormente, uma solução clássica é uma solução fraca, entretanto não é imediato que soluções fracas sejam soluções clássicas. Argumentos de regularidade elípticas (veja [23]) mostram, que sob certas condições, a recíproca é verdadeira. Considere o seguinte funcional definido em $H_0^1(\Omega)$

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_\Omega (u^+)^p dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. Devido a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $2 < p \leq 2^*$, este funcional está bem definido e é diferenciável, com

$$\langle \varphi_p'(u), \phi \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx - \int_\Omega (u^+)^{p-1} \phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\phi = u^- = \max\{-u, 0\}$, obtemos $\int_\Omega |\nabla u^-| dx = 0$ e portanto $u^- = 0$, donde segue que $u \geq 0$. Argumentos de regularidade elípitica monstram que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, pelo Princípio do Máximo Forte $u > 0$. Assim os pontos críticos de φ_p são precisamente as soluções de $(*)$. Diferentemente dos problemas originais do cálculo das variações, este funcional não é limitado inferiormente. Para ver isto basta tomar $u > 0$ não nula e observar que

$$\varphi_p(tu) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{t^p}{p} \int_\Omega u^p dx \to -\infty.$$

Verifica-se também que este funcional não é limitado superiormente. Portanto não temos pontos críticos de máximo ou mínimo global. O Teorema do Passo da Montanha, garante que sob certas condições de compacidade é possível obter pontos críticos para este funcional. Este teorema é devido à Ambrosetti e Rabinowitz [2]. A condição de compacidade requerida no teorema é relativamente fácil de ser provada quando $2 < p < 2^*$, pois a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow$

$L^p(\Omega)$ é compacta. Entretanto, o caso crítico $p = 2^*$ é delicado. De fato quando Ω é estrelado, usamos uma identidade devida a Pohozaev (veja Apêndice $A.1$), para mostra que o problema $(*)$ não tem solução quando $p = 2^*$. No entanto, em um celebrado artigo, Brezis e Nirenberg [8] mostram que o problema muda de figura se acrescentarmos uma pertubação subcrítica do lado direito. Mais especificamente, entre outras coisas, eles consideram o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $N \geq 4$. O funcional associado é

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*-1},$$

seus ponto críticos são precisamente as soluções fracas do problema (P_λ), pois

$$\langle \varphi_\lambda'(u), \phi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_\Omega u\phi dx - \int_\Omega (u^+)^{2^*-2} u\phi dx \ , \quad \text{para toda} \ \ \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Entre outras coisas, apresentamos a demonstração do principal resultado do artigo de Brezis-Nirenberg, a saber

Teorema 0.1 (Brézis-Niremberg). *Seja Ω um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$. Se $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$, então o problema (P_λ) tem solução.*

No teorema acima $\lambda_1(\Omega)$ denota o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ com condições de Dirichlet.

Depois do artigo de Brezis-Nirenberg muitos outros autores estudaram o problema de existência de soluções para equações com crescimento crítico. A lista de referências é extensa, citamos os trabalhos de J.G. Azorero-P. Alonso [12, 13] e M.Gueda-L. Veron [15] que extenderam o problema para o operador p-Laplaciano.

Na segunda parte do trabalho estaremos interessados em estudar a questão de multiplicidade de soluções de (P_λ). Mais especificamente, relacionaremos o número de soluções com a topologia de Ω. Utilizaremos um conceito topológico que chamamos categoria. Sejam A e B subconjuntos fechados de uma espaço de Banach E, tais que $A \subset B$. Intuitivamente A é contrátil em B, se ele pode ser reduzido , de maneira contínua e sem sair de B, em um único ponto. A categoria de A em B, que denotaremos por $cat_B(A)$ é o menor número de conjuntos contráteis e fechados em B, pelos quais A pode ser coberto. Um exemplo bem intuivo é a categoria de $\partial B_1(0)$ em $\partial B_1(0)$. A esfera não é contrátil na esfera, pois ela não pode ser reduzida, continuamente e sem sair da esfera, em um único ponto, entretanto tirando-se uma vizinhaça de um pólo da esfera este fato é possível, de modo que podemos cobrir a esfera por dois conjuntos, por exemplo um sem uma vizinhança do polo norte e o outro sem a do polo sul, portanto a categoria da esfera na esfera é 2. Quando escrevermos $cat_{\Omega}(\Omega)$ estaremos nos referindo a categoria de $\bar{\Omega}$ em $\bar{\Omega}$. Com respeito a multiplicidade, o teorema de maior importância é

Teorema 0.2. *Existe $\lambda_* \in (0, \lambda_1(\Omega))$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$ o problema (P_λ) tem pelo menos $cat_{\Omega}(\Omega)$ soluções positivas.*

O teorema acima foi provado por Rey [22] para $N \geq 5$ e M. Lazzo [17] para $N = 4$. Nossa demonstração está baseada no artigo de Lazzo e a técnica é devida a Benci e Cerami [4], que consideraram o problema $(*)$ e mostraram que o mesmo tem $cat_{\Omega}(\Omega)$ soluções se p é subcrítico e está próximo de 2^*. Esta técnica consiste em relacionar a topologia de Ω com a topologia de certos conjuntos de nível do funcional φ associado, em seguida utiliza-se um resultado abstrato, envolvendo o conceito de categoria, que fornece múltiplos pontos críticos. Existem outros resultados de multiplicidade que extendem o problema (P_λ) para o operador p-Laplaciano, dentre os quais citamos Alves-Ding [1].

O Capítulo 1, está dividido em duas seções, na primeira provamos o Teorema do Passo da Montanha, introduzimos o conceito de categoria e provamos o teorema que relaciona a categoria de certos conjuntos de nível do funcional com o número de pontos críticos do funcional restrito a uma variedade. No Capítulo 2, provamos o Teorema 0.1. A parte mais complicada é mostrar que existe $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ não-negativa, tal que

$$\frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |v|^2 dx}{\displaystyle\int_{\Omega} |v|^{2^*} dx} < S,$$

onde

$$0 < S = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1 \right\},$$

é a melhor constante para imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. É neste ponto que aparece o motivo pelo qual resolvemos o problema apenas para $N \geq 4$. Na prova deste resultado aparecem igualdades que só valem se $N \geq 4$. Quando $N = 3$ surgem complicações ainda maiores, o caso também foi tratado por Brezis-Nirenberg. Quando $\Omega = B_1(0)$ e $N = 3$, os autores mostraram que o problema tem solução apenas se $\frac{\lambda_1(\Omega)}{4} < \lambda < \lambda_1(\Omega)$.

No capítulo 3, provamos o Teorema 0.2. Na primeira seção mostramos um resultado de concentração de compacidade, na segunda seção mostramos que todas as hipóteses do teorema abstrato a ser utilizado são satisfeitas.

Finalizamos nosso trabalho com um Apêndice, contendo resultados que usamos no decorrer dos outros capítulos, bem como as enfadonhas contas para provar o teorema de existência.

Bibliografia

[1] C.O. Alves, Y.H. Ding, *Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 508-521.

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **149** (1973), 349-381.

[3] A.K. Ben-Naoum, C. Troestler, M. Willem, *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 823-833.

[4] V. Benci, G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 79-93.

[5] V. Benci, G. Cerami, *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology*, Cal. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), 29-48.

[6] H. Brézis, *Analise Functionelle*, Masson, Paris, 1983.

[7] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.

[8] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[9] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics v. **19** (1998).

[10] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Differential equations (São Paulo, 1981), pp. 34–87, Lecture Notes in Math., 957, Springer, Berlin-New York, 1982.

[11] G.B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[12] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and non-uniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Diff. Eq. **12** (1987), 1389-1430.

[13] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problem with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 877-895.

[14] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.

[15] M, Gueda, L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 879-902.

[16] Q. Han, F. Lin, *Elliptic partial diferential equations*, Courant Lectures Notes. (1997).

[17] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec léxposant critique de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 61-64.

[18] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA Rio de Janeiro (2002).

[19] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Ins. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109-145 e 223-283.

[20] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201 e **2** (1985), 45-121.

[21] J. R. Monkres, *Topology, a first course*, Prentice Hall Inc., (1975).

[22] O. Rey, *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 1241-1249.

[23] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[24] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[25] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality, Annali di Mat.* TMA **15** (1976) 353-372.