UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Equações Elípticas em $\mathbb{R}^N$ com Termo de Convecção e Soluções Positivas Decaindo no Infinito a um Número Não-Negativo

por

Fernando Kennedy da Silva

Brasília
2008

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Equações Elípticas em R^{N} com Termo de Convecção e Soluções Positivas Decaindo no Infinito a um Número Não-Negativo

por

Fernando Kennedy da Silva*

Orientador: Prof. José Valdo Abreu Gonçalves

*O autor contou com o apoio financeiro parcial do CNPq.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Equações Elípticas em $\mathbb{R}^N$ com Termo de Convecção e Soluções Positivas Decaindo no Infinito a um Número Não-Negativo

por

Fernando Kennedy da Silva

Tese de Doutorado submetida ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática**.

Brasília, 31 de outubro de 2008

Banca Examinadora:

Prof. José Valdo Abreu Gonçalves - UnB
(Orientador)

Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos - UnB

Prof. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Prof. Francisco Júlio S. de Araújo Corrêa - UFCG

Prof. Sérgio Henrique Monari Soares - USP

Aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus, por permitir mais esta conquista e por me iluminar a cada dia;

Aos meus pais, Luiz e Maria Abadia, e meus irmãos, Thiago e William, pela paciência, carinho e compreensão durante toda a minha vida;

Aos meus avôs, Heleno, Maria e Helena, que apesar de não estarem mais entre nós, sempre estarão em minha memória. A meu avô Geraldo, a todos os meus tios, primos, as minhas sobrinhas queridas e demais familiares que mesmo distantes torceram por mim;

A Jeovânio (in Memoriam), meu tio querido, que sempre estará em meu coração;

Ao Professor José Valdo Gonçalves pela excelente orientação, paciência e amizade. Seus conselhos e seu exemplo de profissionalismo refletirão na minha vida pessoal e acadêmica;

Aos amigos da UnB. Não citarei nomes para evitar esquecer alguém. Aos meus amigos do Departamento de Matemática da UFG-CAC. Aos demais amigos que, de uma forma ou de outra, participaram de cada etapa deste processo, amenizando-o e ajudando a torná-lo possível;

Aos membros da comissão examinadora por aceitarem compor a banca e por suas sugestões;

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela atenção, colaboração e harmonioso convívio;

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho tratamos de existência e não-existência de soluções inteiras para problemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\ a(x)\sigma(u) + b(x)\,|\nabla u|^q & \text{em } \mathbf{R^N}, \\ \\ u > \ell \ \text{ em } \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \ell, \end{cases}$$

onde $1 < p < N$, $N \geq 3$, $\ell \geq 0$, $q \geq 0$, Δ_p é o operador p-Laplaciano e λ é um parâmetro real.

Os potenciais $a : \mathbf{R^N} \to (0, \infty)$ e $b : \mathbf{R^N} \to \mathbf{R}$ são funções regulares. Exigimos, em um sentido apropriado, que a decaia para zero rapidamente no infinito, enquanto que, sobre o coeficiente b do termo convectivo $|\nabla u|^q$, impomos uma condição de sinal, a saber: $b > 0$, $b = 0$ ou $b < 0$.

Quanto à não-linearidade $\sigma(u)$, destacamos que da função $\sigma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ não exigimos qualquer tipo de monotonicidade e, quando $\ell = 0$, permitimos que σ seja singular, no sentido que $\sigma(s) \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \infty$.

As técnicas que empregamos exploram princípios variacionais, sub e supersoluções e argumentos de simetria.

Palavras-chaves: Equações Quasilineares Singulares, Soluções Inteiras, Sub e Supersolução, Princípios Variacionais, Termo de Convecção.

ABSTRACT

This work deals with existence and non-existence of entire solutions for problems of the form

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\ a(x)\sigma(u) + b(x)\,|\nabla u|^q \quad \text{in} \ \ \mathbf{R^N}, \\ \\ \qquad u > \ell \ \ \text{in} \ \ \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \ell, \end{cases}$$

where $1 < p < N$, $N \geq 3$, $\ell \geq 0$, $q \geq 0$, Δ_p is the p-Laplacian operator and λ is a real parameter.

The potentials $a : \mathbf{R^N} \to (0, \infty)$ and $b : \mathbf{R^N} \to \mathbf{R}$ are continuous functions. The potential a will be required to decay to zero at infinity fast enough in an appropriate sense while on the coefficient b of the convection term $|\nabla u|^q$ a sign condition will be imposed namely: $b > 0$, $b = 0$ or $b < 0$.

Regarding the nonlinearity $\sigma(u)$, we emphasize that no monotonicity condition will be required from the function $\sigma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ and when $\ell = 0$, σ is allowed to be singular at 0 in the sense that $\sigma(s) \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \infty$.

Our techniques exploit variational principles, lower and upper solutions as well as symmetry arguments.

Key Words: Quasilinear Singular Equations, Entire Solutions, Lower and Upper Solutions, Variational Principles, Convection Term.

SUMÁRIO

Introdução **ix**

1 Sub e Supersoluções de Problemas Singulares **1**

1.1 Equações Sem Termo Convectivo 1

1.2 Equações Com Termo Convectivo 6

2 Existência de Solução no Caso Não-Convectivo **10**

2.1 Supersolução Decaindo para $\ell \geq 0$ no Infinito 10

2.2 Soluções Positivas de Problemas em Domínios Limitados 19

2.3 Demonstração do Resultado Principal: Teorema 0.1 24

3 Existência e Não-Existência de Solução no Caso Convectivo **28**

3.1 Existência: Termo Convectivo com Coeficiente Negativo 28

3.2 Existência: Termo Convectivo com Coeficiente Positivo 35

3.3 Não-Existência 44

A Sub e Supersoluções de Problemas Não-Singulares **47**

A.1 Sub e Supersolução Sem Termo Convectivo: Prova do Lema 1.1 47

A.2 Sub e Supersolução Com Termo Convectivo: Prova do Lema 1.2 51

B Resultados Técnicos 1 **58**

B.1 Sobre o Decaimento do Potencial a no Infinito 58

B.2 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 2.1 60

B.3 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 2.2 61

B.4 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 3.1. 62

C Resultados Técnicos 2 **64**

Referências Bibliográficas **68**

Introdução

Formularemos resultados de existência e não-existência de soluções para problemas quasilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\ a(x)\sigma(u) + b(x)\,|\nabla u|^q \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \\ \\ u > \ell \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} \ell, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde $1 < p < N$, $N \geq 3$, $\ell \geq 0$, $q \geq 0$, $\Delta_p u := div\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right)$, λ é um parâmetro real, $a : \mathbf{R^N} \to (0,\infty)$ (denominada potencial anisotrópico) é localmente Hölder-contínua e a não-linearidade $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é C^1. Exigiremos também que a função $b : \mathbf{R^N} \to \mathbf{R}$ seja localmente Hölder-contínua.

Suporemos que σ satisfaz às condições

$$\text{(i)} \quad \frac{\sigma(s)}{s^\theta} \overset{s\to 0}{\to} \sigma_0, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\sigma(s)}{s^\theta} \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty, \tag{0.0.2}$$

onde

$$\theta := \begin{cases} (p-1)^2 & \text{se} \quad 1 < p \leq 2, \\ \\ p-1 & \text{se} \quad 2 \leq p < N, \end{cases}$$

$0 < \sigma_0 \leq \infty$ e $0 \leq \sigma_\infty \leq \infty$, com hipóteses adicionais a serem impostas ao par $(\sigma_0, \sigma_\infty)$ posteriormente. Nenhuma condição de monotonicidade será exigida de σ.

A norma euclidiana do $\mathbf{R^N}$ será denotada por $|\cdot|$ e introduziremos a função M, definida para $r \geq 0$, por

$$M(r) := \max_{|x|=r} \ a(x).$$

Focaremos o caso em que a função σ se comporta, perto do zero, da forma

$$\lim_{s \to 0^+} \ \sigma(s) = +\infty. \tag{0.0.3}$$

A pesquisa para esta classe de problemas em $\mathbf{R^N}$, com a, b, p, q, λ e σ satisfazendo hipóteses apropriadas, é recente. Um dos trabalhos pioneiros foi o de Edelson [26], em 1989.

No entanto, para a classe de problemas do tipo (0.0.1), com $\lambda = 1$, $b = 0$, $\ell = 0$ e $p = 2$, em domínios limitados de $\mathbf{R^N}$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\sigma(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \quad u(x) = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ é um domínio limitado regular e σ apresenta algum tipo de singularidade, já existe uma ampla e importante teoria na literatura.

Problemas de evolução onde aparecem termos não-lineares singulares, assim como os problemas estacionários associados, descrevem diversos fenômenos físicos.

O interesse em torno do problema (0.0.4) surgiu a partir da década de 60, em pesquisas realizadas por Fulks & Maybee [28], que abordaram um problema motivado por condutividade elétrica. Fulks & Maybee provaram resultados de existência e unicidade usando argumentos de ponto fixo, e além disso, mostraram que soluções do problema parabólico tendiam à única solução do problema elíptico estacionário correspondente.

Além disso, problemas do tipo (0.0.4) surgem no contexto de catalizadores químicos heterogêneos, superfícies mínimas singulares, fluidos não-Newtonianos (os chamados fluidos pseudoplásticos), em fenômenos de camada limite para fluidos viscosos, em processos de reação-difusão, na obtenção de diversos índices geofísicos (avanço glacial) e processos industriais, cf. [12–14, 16, 20, 21, 28, 37, 39, 51, 57, 58].

Como dito anteriormente, o conceito de problemas singulares do tipo (0.0.1) encontrado atualmente na literatura é bastante amplo, mas como um breve relato histórico de trabalhos voltados ao nosso interesse, citamos Dinu [24], que provou que dado um número não-negativo ℓ, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)f(u) \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \\ u > \ell \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \ell, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

admite uma única solução limitada desde que

$$\begin{gathered} \text{(i)} \ \ \ell = 0, \ \ \text{(ii)} \ \int_0^\infty r^{N-1}M(r)dr < \infty, \ \ \text{(iii)} \ \ s \mapsto \frac{f(s)}{s} \text{ é decrescente,} \\ \text{(iv)} \ \frac{f(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \ \text{(v)} \ \ f \text{ é crescente,} \ \ \text{(vi)} \ \frac{f(s)}{s} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \infty, \end{gathered} \tag{0.0.6}$$

ou

$$\ell > 0, \ \ \int_0^\infty rM(r)dr < \infty \ \text{ e } \ \text{(0.0.6)(iii)(iv)}.$$

O resultado de Dinu foi motivado por Brézis & Kamin [10], no qual a procura de soluções positivas limitadas de equações sublineares do tipo

$$-\Delta u = a(x)u^\gamma \ \text{ em } \ \mathbf{R^N},$$

onde $N \geq 3$ e $0 < \gamma < 1$ foi investigado e novas técnicas foram desenvolvidas.

Analisando o caso $\ell = 0$, em [15] Cirstea & Radulescu provaram a existência de soluções para (0.0.5) munido das condições

$$\text{(i)} \ \frac{f(s)}{s+\beta} \ \text{ é decrescente para algum } \ \beta > 0,$$

$$\text{(ii)} \ \frac{f(s)}{s} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \infty, \qquad \text{(iii)} \ \ f \text{ é limitada no } \ \infty,$$

enquanto Gonçalves & Santos, em [35], trataram do caso onde

$$\text{(i)} \ \frac{f(s)}{s} \ \text{ é decrescente,} \ \ \text{(ii)} \ \frac{f(s)}{s} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \infty, \ \ \text{(iii)} \ \frac{f(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{0.0.7}$$

Ainda tratando do caso $\ell = 0$, recentemente Zhang, em [67], provou que (0.0.5) admite uma solução inteira considerando apenas as condições (0.0.7)(ii)(iii), ou seja, nenhuma monotonicidade foi requerida.

Retornando para (0.0.1) Covei, em [17], supondo o caso em que $\ell = 0$, $\lambda = 1$ e $b = 0$, mostrou que o problema tem uma única solução inteira admitindo as seguintes hipóteses sobre σ e a, respectivamente:

$$\text{(i)} \quad \frac{\sigma(s)}{(s+\beta)^{p-1}} \quad \text{é decrescente para algum} \quad \beta > 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\sigma(s)}{s^{p-1}} \overset{s \to 0}{\to} \infty, \qquad \text{(iii)} \quad \sigma \text{ é limitada no } \infty$$

e

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \int_0^\infty r^{\frac{1}{p-1}} M(r)^{\frac{1}{p-1}} \, dr < \infty \quad \text{se} \quad 1 < p \leq 2, \\ &\text{(ii)} \quad \int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} M(r) \, dr < \infty \quad \text{se} \quad 2 \leq p < \infty. \end{aligned} \tag{0.0.8}$$

Covei também provou, em [17], que se a é radialmente simétrica e vale uma das condições abaixo,

$$\int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(r) \, dr = \infty \quad \text{se} \quad 1 \leq p \leq 2,$$

$$\int_0^\infty r^{\frac{1}{p-1}} a(r)^{\frac{1}{p-1}} \, dr = \infty \quad \text{se} \quad 2 \leq p < N,$$

$$p \geq N,$$

então (0.0.1) não possui solução radialmente simétrica.

Antes de estabelecer os resultados principais, consideraremos algumas notações. Seja

$$\zeta_1(a, B) := \inf_{\substack{W_0^{1,p}(B) \\ w \neq 0}} \left\{ \frac{\displaystyle\int_B |\nabla w|^p \, dx}{\displaystyle\int_B a(x) \, |w|^p \, dx} \right\}, \tag{0.0.9}$$

onde B é a bola unitária do $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, e tome

$$\alpha := \int_0^\infty \left[t^{1-N} \int_0^r s^{N-1} M(s) ds \right]^{\frac{1}{p-1}} dt, \tag{0.0.10}$$

o qual é positivo e finito, (cf. Apêndice B).

Se $\sigma_0 = \sigma_\infty = \infty$, seja

$$I_{m,\theta} := \inf_{s>0} \frac{\sigma(s)}{s^\theta} = \frac{\sigma(m)}{m^\theta},$$

onde $m > 0$ é um número real.

A seguir formularemos o primeiro de nossos resultados principais.

Teorema 0.1. *Sejam $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ e $b = 0$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8). *Então existem números não-negativos Λ_i, $0 \leq i \leq 2$, tais que se um dos conjuntos de condições*

(i) $$\ell = 0, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad \Lambda_1 < \lambda < \infty,$$

(ii) $$\ell = 0, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \frac{\zeta_1(a,B)}{\Lambda_0} < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$$

(iii) $$\ell = 0, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad \sigma_\infty = 0, \quad \Lambda_1 < \lambda < \infty,$$

(iv) $$0 \leq \ell < m, \quad \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_2,$$

(v) $$0 < \ell < \infty, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

(vi) $$0 < \ell < \infty, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ e alguma função $u := u_\lambda \in C^1(\mathbf{R^N})$, com $u \leq \mu$, satisfazendo (0.0.1) *no sentido das distribuições.*

Observação 0.1. **(a)** Mais adiante será mostrado que

$$\Lambda_0 := \left(\frac{1}{\alpha(p-1)}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{\sigma_\infty}\right) \quad \text{e} \quad \Lambda_1 := \frac{\zeta_1(a,B)}{\sigma_0};$$

(b) As funções $\sigma(s) = s^{-\alpha} + s^\gamma$ e $\sigma(s) = s^{-\alpha} + s^\theta e^s$, onde α e γ são números positivos, são exemplos típicos do nosso resultado principal;

(c) O Teorema acima completa os resultados principais de Dinu [24], em vários aspectos, por exemplo, quando $\sigma_0 = \infty$, $\sigma_\infty = 0$ e $p = 2$, (iii) e (vi) de nosso resultado aplicam-se com $\lambda = 1$. Também completa os resultados de Gonçalves & Santos [34], Covei [17], Zhang [67] e, o item (iv), o resultado de Gonçalves, Melo & Santos [33].

Problemas com a presença do termo convectivo ($b \neq 0$) surgem em teoria de controle estocástico e foram estudados por Lasry & Lions [44]. A correspondente equação parabólica foi considerada em Quittner [56].

Problemas elípticos com a não-linearidade σ combinada com o termo gradiente têm sido estudados em vários aspectos (cf. [8, 36, 48, 49]). Problemas deste tipo surgem no estudo de um campo eletromagnético em um meio não-linear, satisfazendo hipóteses adequadas (cf. [60, 61]). Em trabalhos de nosso interesse, Dinu [25] mostrou a existência e unicidade de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)\,|\nabla u|^q = a(x)u^{-\gamma} \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \\ \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0, \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $\gamma > 0$, $0 < q \leq 2$, $a, b \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbf{R^N})$, $a > 0$ em $\mathbf{R^N}$ e $b \geq 0$ em $\mathbf{R^N}$. Dinu, em [25], considerou o decaimento para $a(x)$ como em (0.0.8), com $p = 2$.

Em Ghergu & Radulescu [29], mostra-se a existência de pelo menos uma solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + |\nabla u|^q = a(x)f(u) + \lambda g(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ é um domínio limitado regular, $\lambda > 0$, $0 < q \leq 2$, f é Hölder-contínua, decrescente e satisfaz $f(s) \overset{s\to 0}{\to} \infty$, enquanto g satisfaz

$$\text{(i)} \ \frac{g(x,s)}{s} \ \text{ é não-crescente}, \quad \text{(ii)} \ \frac{g(x,s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} 0, \quad \text{(iii)} \ \frac{g(x,s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty.$$

Ghergu & Radulescu [29] também trataram o caso onde $a(x) < 0$ em $\overline{\Omega}$, mas exigiram que $\int_0^1 f(s)\, ds < \infty$. Eles mostraram que o problema (0.0.11) admite ao menos uma solução, desde que $\lambda > 0$ seja suficientemente grande.

O segundo de nossos resultados principais segue abaixo.

Teorema 0.2. *Sejam* $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $q = p$ *e* $b < 0$. *Suponha* (0.0.2), (0.0.3) *e* (0.0.8). *Então existem números não-negativos* Λ_i, $0 \leq i \leq 2$, *tais que se um dos conjuntos de condições*

(i) $\ell = 0, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad 2\Lambda_1 < \lambda < \infty,$

(ii) $\ell = 0, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \dfrac{2\zeta_1(a,B)}{\Lambda_0} < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$

(iii) $\ell = 0, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad \sigma_\infty = 0, \quad 2\Lambda_1 < \lambda < \infty,$

(iv) $0 \leq \ell < m, \quad \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_2,$

(v) $0 < \ell < \infty, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty,$

(vi) $0 < \ell < \infty, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ *e alguma função* $u := u_\lambda \in C^1(\mathbf{R^N})$, *com* $u \leq \mu$, *satisfazendo* (0.0.1) *no sentido das distribuições.*

Observação 0.2. O Teorema acima completa os resultados principais de Dinu [25], em vários aspectos, por exemplo, quando $\sigma_0 = \infty$, $\sigma_\infty = 0$ e $p = 2$, (iii) e (vi) de nosso resultado aplicam-se com $\lambda = 1$. Nosso resultado também completa Ghergu & Radulescu [29], pois estendemos o seu resultado para o operador p-Laplaciano, com $\ell = 0$, $0 < \sigma_0 \leq \infty$, $0 \leq \sigma_\infty \leq \infty$ e nenhuma monotonicidade sobre σ e $\sigma(s)/s^\theta$. Também completa o resultado principal de Zhang [67] pois, da mesma forma, estendemos o seu resultado para o operador p-Laplaciano, com a presença da não-linearidade singular σ combinada com o termo gradiente $|\nabla u|^q$.

Quanto ao caso $b > 0$, observamos que, recentemente, Ghergu & Radulescu [31], consideraram equações do tipo Lane-Emden-Fowler originadas em fluido-dinâmica (dinâmica de gases, astrofísica) (cf. [27, 30, 66]). Equações do tipo Lane-Emden-Fowler têm sido estudadas por vários autores utilizando diversos métodos e técnicas, (cf. [1, 7, 38, 50, 52, 65]).

Foi provado em [31] que se (0.0.8) é satisfeito, com $p = 2$, então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\left(g(u) + f(u) + |\nabla u|^q\right) \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \\ \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0, \end{cases} \tag{0.0.12}$$

admite uma solução inteira se $0 < q < 1$, $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é uma função C^1 decrescente tal que $g(s) \overset{s\to 0}{\to} \infty$ e $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função Hölder-contínua satisfazendo

$$\text{(i)} \quad sf(s) > 0 \quad \text{para} \quad s > 0, \quad \text{(ii)} \quad \frac{f(s)}{s} \quad \text{é não-crescente,}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{f(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iv)} \quad \frac{f(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} 0.$$

Exemplos típicos de funções g e f satisfazendo as condições em [31] são:

$$g : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad g(s) = s^{-\beta}, \quad \text{onde} \quad 0 < \beta < \infty,$$

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(s) = s^{\gamma}, \quad \text{onde} \quad 0 < \gamma < 1.$$

Recentemente Xue & Zhang em [64] mostraram que, se (0.0.8) com $p = 2$ verifica-se, então (0.0.12) admite uma solução inteira sob as seguintes condições, onde nenhuma monotonicidade foi requerida:

$$\text{(i)} \quad g : (0, \infty) \to (0, \infty) \quad \text{é} \quad C^1, \quad \text{(ii)} \quad \frac{g(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iii)} \quad \frac{g(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} 0,$$

$$\text{(iv)} \quad f : [0, \infty) \to [0, \infty) \quad \text{é Hölder-contínua}, \quad \text{(v)} \quad \frac{f(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(vi)} \quad \frac{f(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} 0.$$

Exemplos típicos de funções g e f satisfazendo as condições em [64] são:

$$g : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad g(s) = s^{-\beta} + sen(s) + 1, \quad \text{onde} \quad 0 < \beta < \infty,$$

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(s) = s^{\gamma} + sen(s) + 1, \quad \text{onde} \quad 0 < \gamma < 1.$$

A seguir apresentaremos o terceiro de nossos resultados principais, que melhora o feito em [31] e [64], como verifica o exemplo abaixo.

Considere a classe de funções

$$\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad \sigma(s) = s^{-\beta} + (1 + sen(s)) + s^{\gamma},$$

onde β e γ são constantes positivas. Neste ponto observe que

$$\text{(i)} \ \text{ se } \ \gamma \in (0,1) \ \text{ então } \ \sigma_\infty = 0, \quad \text{(ii)} \ \text{ se } \ \gamma = 1 \ \text{ então } \ \sigma_\infty = 1,$$

$$\text{(iii)} \ \text{ se } \ \gamma > 1 \ \text{ então } \ \sigma_\infty = \infty.$$

Fazendo

$$\sigma(s) = g(s) + f(s), \quad s > 0,$$

temos que nenhum dos casos acima é satisfeito por [31], enquanto os itens (ii) e (iii) não são satisfeitos por [64].

Considerando o problema (0.0.1) com $p = 2, \ \ 0 < q < 1, \ \ \ell = 0$ e $b(x) = \lambda\, a(x)$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, a(x)\,(\sigma(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \ \ \mathbf{R^N}, \\ \\ u > 0 \ \ \text{em} \ \ \mathbf{R^N}, \quad u(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} 0. \end{cases} \tag{0.0.13}$$

temos o

Teorema 0.3. *Sejam $\ell = 0$, $\lambda > 0$ e $0 < q < 1$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8) *com $p = 2$. Então existem números não-negativos $\hat{\Lambda}_i$, $(i = 0, 1)$ tais que se um dos conjuntos de condições*

(i) $$0 < \frac{\zeta_1(a,B)}{\hat{\Lambda}_0} < \sigma_0 \le \infty, \quad 0 \le \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda \le \hat{\Lambda}_0,$$

(ii) $$\sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \quad 0 < \lambda \le \hat{\Lambda}_1,$$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ e alguma função $u := u_\lambda \in C^{2,\alpha}_{loc}$ com $u \le \mu$ satisfazendo (0.0.13).

Observação 0.3. **(a)** Mais adiante será mostrado que

$$\hat{\Lambda}_0 := \min\left\{1, \frac{1}{2k\alpha\sigma_\infty}\right\}, \quad \text{onde} \ \ k > 0 \ \ \text{é suficientemente grande;}$$

(b) O Teorema 0.3 completa os resultados principais em [64] em vários aspectos, por exemplo, quando $\sigma_0 = \infty$ e $\sigma_\infty = 0$, temos que (i) de nosso resultado aplica-se com $\lambda = 1$.

Para demonstrar os teoremas principais anteriormente citados, utilizaremos a técnica de sub e supersolução em domínios limitados. Neste contexto, apresentaremos alguns resultados que desempenharão papel chave neste trabalho.

Denote respectivamente por $\zeta_1(a,\Omega)$ e $w_1(a,\Omega)$ o primeiro autovalor e a primeira autofunção de

$$-\Delta_p w = \zeta\ a(x)\,|w|^{p-2}\,w \ \text{ em } \ \Omega, \qquad w = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ um domínio limitado regular, $a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $a > 0$ em $\overline{\Omega}$, e $\zeta_1(a,\Omega)$ é dado por uma expressão semelhante a (0.0.9). Referimos o leitor [6] e suas referências.

Seja $\ell \geq 0$ e considere o problema

$$-\Delta_p u = \lambda\ a(x)\sigma(u) + b(x)\,|\nabla u|^q \ \text{ em } \ \Omega, \qquad u > \ell \ \text{ em } \ \Omega. \tag{0.0.14}$$

Os resultados abaixo serão usados para produzir uma família de subsoluções para o problema (0.0.1), com $b = 0$ e $b < 0$.

Teorema 0.4. *Sejam $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ e $b = 0$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8). *Então existem números não-negativos $\Lambda_0, \widetilde{\Lambda}_1$ e Λ_2, tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $\ell = 0, \ \ 1 < p < 2, \ \ 0 < \sigma_0 \leq \infty, \ \ 0 < \sigma_\infty < \infty, \ \ \widetilde{\Lambda}_1 < \lambda < \infty,$

(ii) $\ell = 0, \ \ 2 \leq p < N, \ \ 0 < \dfrac{\zeta_1(a,\Omega)}{\Lambda_0} < \sigma_0 \leq \infty, \ \ 0 < \sigma_\infty < \infty, \ \ 0 < \lambda < \Lambda_0,$

(iii) $\ell = 0, \ \ 0 < \sigma_0 \leq \infty, \ \ \sigma_\infty = 0, \ \ \widetilde{\Lambda}_1 < \lambda < \infty,$

(iv) $0 \leq \ell < m, \ \ \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \ \ 0 < \lambda < \Lambda_2,$

(v) $0 < \ell < \infty, \ \ 1 < p < 2, \ \ 0 < \sigma_0 \leq \infty, \ \ 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \ \ 0 < \lambda < \infty,$

(vi) $0 < \ell < \infty, \ \ 2 \leq p < N, \ \ 0 < \sigma_0 \leq \infty, \ \ 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \ \ 0 < \lambda < \Lambda_0,$

valem, então existe uma função $u := u_\lambda \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo (0.0.14) *no sentido das distribuições. Além disso, nos casos* (*iv*), (*v*) *e* (*vi*), *$u = \ell$ sobre $\partial\Omega$, com $\ell > 0$ no caso* (*iv*).

Observação 0.4. Mostraremos adiante que

$$\widetilde{\Lambda}_1 := \frac{\zeta_1(a,\Omega)}{\sigma_0}.$$

Teorema 0.5. *Sejam* $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $q = p$ *e* $b < 0$. *Suponha* (0.0.2), (0.0.3) *e* (0.0.8). *Então existem números não-negativos* $\Lambda_0, \widetilde{\Lambda}_1$ *e* Λ_2, *tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $$\ell = 0, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad 2\widetilde{\Lambda}_1 < \lambda < \infty,$$

(ii) $$\ell = 0, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \frac{2\zeta_1(a,\Omega)}{\Lambda_0} < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 < \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$$

(iii) $$\ell = 0, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad \sigma_\infty = 0, \quad 2\widetilde{\Lambda}_1 < \lambda < \infty,$$

(iv) $$0 \leq \ell < m, \quad \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_2,$$

(v) $$0 < \ell < \infty, \quad 1 < p < 2, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

(vi) $$0 < \ell < \infty, \quad 2 \leq p < N, \quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda < \Lambda_0,$$

valem, então existe uma função $u := u_\lambda \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *satisfazendo* (0.0.14) *no sentido das distribuições. Além disso, nos casos* (iv), (v) *e* (vi), $u = \ell$ *sobre* $\partial\Omega$, *com* $\ell > 0$ *no caso* (iv).

A seguir, consideraremos o problema

$$-\Delta u = \lambda\, a(x)\,(\sigma(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{0.0.15}$$

O resultado que formularemos abaixo será utilizado na demonstração do Teorema 0.3.

Teorema 0.6. *Sejam* $\ell = 0$, $\lambda > 0$ *e* $0 < q < 1$. *Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8) *com* $p = 2$. *Então existem números não-negativos* $\hat{\Lambda}_0$ *e* $\hat{\Lambda}_1$ *tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $$0 < \frac{\zeta_1(a,\Omega)}{\hat{\Lambda}_0} < \sigma_0 \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \quad 0 < \lambda \leq \hat{\Lambda}_0,$$

(ii) $$\sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \quad 0 < \lambda \leq \hat{\Lambda}_1,$$

valem, então existe uma função $u := u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* (0.0.15).

Com o objetivo de construir uma supersolução para (0.0.1), estudaremos o problema formulado abaixo

$$\begin{cases} \displaystyle\int |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int \lambda \, a(x)\sigma(v)\phi \, dx + \int b(x) \, |\nabla v|^q \, \phi \, dx, \\ \\ v > \ell \;\; \text{em} \;\; \mathbf{R^N}, \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \ell, \end{cases} \tag{0.0.16}$$

onde $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N})$ e $\phi \geq 0$.

Os resultados abaixo tratam dos casos não-convectivo ($b = 0$) e convectivo ($b < 0$), respectivamente.

Teorema 0.7. *Sejam $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ e $b = 0$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8)*. Então existem números $\Lambda_0, \Lambda_2 \in (0, \infty)$ tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $\quad 0 \leq \ell < \infty, \;\; 1 < p < 2, \;\; 0 < \sigma_0 \leq \infty, \;\; 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \;\; 0 < \lambda < \infty,$

(ii) $\quad 0 \leq \ell < \infty, \;\; 2 \leq p < N, \;\; 0 < \sigma_0 \leq \infty, \;\; 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \;\; 0 < \lambda < \Lambda_0,$

(iii) $\quad 0 \leq \ell < m, \;\; \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \;\; 0 < \lambda < \Lambda_2,$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ e uma função radialmente simétrica $v := v_\lambda \in C^1(\mathbf{R^N}) \cap C^2(\mathbf{R^N} \setminus \{0\})$, com $|v_\lambda|_\infty = \mu$, satisfazendo (0.0.16).

O caso convectivo ($b < 0$) é uma consequência imediata do Teorema 0.7.

Corolário 0.1. *Sejam $\ell \geq 0$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $q = p$ e $b < 0$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8)*. Então existem números $\Lambda_0, \Lambda_2 \in (0, \infty)$ tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $\quad 0 \leq \ell < \infty, \;\; 1 < p < 2, \;\; 0 < \sigma_0 \leq \infty, \;\; 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \;\; 0 < \lambda < \infty,$

(ii) $\quad 0 \leq \ell < \infty, \;\; 2 \leq p < N, \;\; 0 < \sigma_0 \leq \infty, \;\; 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \;\; 0 < \lambda < \Lambda_0,$

(iii) $\quad 0 \leq \ell < m, \;\; \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \;\; 0 < \lambda < \Lambda_2,$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ e uma função radialmente simétrica $v := v_\lambda \in C^1(\mathbf{R^N}) \cap C^2(\mathbf{R^N} \setminus \{0\})$, com $|v_\lambda|_\infty = \mu$, satisfazendo (0.0.16).

Com o objetivo de construir uma supersolução para (0.0.13), considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta v \geq \lambda \, a(x) \left(\sigma(v) + |\nabla v|^q\right) \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \\ \\ v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad v(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} 0. \end{cases} \tag{0.0.17}$$

O resultado a seguir produzirá supersoluções adequadas para o problema (0.0.13).

Teorema 0.8. *Sejam $\ell = 0$, $\lambda > 0$ e $0 < q < 1$. Suponha* (0.0.2) *e* (0.0.8) *com $p = 2$. Então existem $\hat{\Lambda}_0, \hat{\Lambda}_1 \in (0, \infty)$ tais que, se um dos conjuntos de condições*

(i) $\quad 0 < \sigma_0 \leq \infty, \;\; 0 \leq \sigma_\infty < \infty, \;\; 0 < \lambda \leq \hat{\Lambda}_0,$

(ii) $\quad \sigma_0 = \sigma_\infty = \infty, \;\; 0 < \lambda \leq \hat{\Lambda}_1,$

valem, então existem um número positivo $\mu := \mu(\lambda)$ e uma função radialmente simétrica $v := v_\lambda \in C^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$, com $|v_\lambda|_\infty = \mu$, satisfazendo (0.0.17)*.*

É bem conhecido que as condições

$$\int_0^\infty rM(r)dr < \infty \tag{0.0.18}$$

e

$$\int_0^\infty rM(r)dr = \infty, \tag{0.0.19}$$

são respectivamente cruciais nas provas de existência e não-existência de soluções para o problema (0.0.12). De fato, a condição (0.0.18) é necessária para a existência de solução, (cf. [42, 43]) e suas referências.

Recentemente foi mostrado por Covei em [18] que (0.0.12) não tem solução radialmente simétrica se a é radialmente simétrica e (0.0.19) verifica-se.

O resultado abaixo completa [18] no sentido que aumenta a classe de funções σ.

Teorema 0.9. *Sejam $0 < q < 1$ e $\lambda > 0$. Suponha* (0.0.2)*, com $0 < \sigma_0 \leq \infty$ e $0 \leq \sigma_\infty < \infty$. Se $a = M$ satisfaz* (0.0.19)*, então* (0.0.13) *não admite solução radialmente simétrica.*

Observação 0.5. Alguns exemplos básicos de funções σ satisfazendo (0.0.2):

(a) $e^{1/u^\gamma} + u^p + \cos\psi(u) + 1$, onde $0 < \gamma, p < \infty$ e $\psi \in C^2(\mathbf{R})$;

(b) $u^{-\gamma}\ln^{-q_1}(1+u)+\ln^{q_2}(1+u)+u^p+sen\psi(u)+2$, com $\psi \in C^2(\mathbf{R})$, $0 < \gamma, p, q_1, q_2 < \infty$;

(c) $u^{-\gamma} + \arctan\psi(u) + \pi$, com $\psi \in C^2(\mathbf{R})$ e $0 < \gamma < \infty$.

Esta tese encontra-se organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1 provaremos dois resultados de sub e supersoluções. O primeiro visa estudar o caso $b = 0$ e o segundo visa estudar o caso $b \neq 0$.

No Capítulo 2 verificaremos o primeiro dos resultados principais (caso $b = 0$), isto é, o Teorema 0.1. Com este objetivo demonstraremos também os Teoremas 0.7 e 0.4.

No Capítulo 3 provaremos os demais resultados principais (casos $b < 0$ e $b > 0$), isto é, os Teoremas 0.2 e 0.3. Assim demonstraremos também o Corolário 0.1 e os Teoremas 0.5, 0.6 e 0.8. Neste capítulo, encontraremos também a demonstração do resultado de não-existência, isto é, o Teorema 0.9.

No Apêndice A apresentaremos as demonstrações de dois Teoremas de sub e supersoluções no caso não-singular, utilizados no Capítulo 1.

No Apêndice B apresentaremos algumas demonstrações de afirmações e resultados técnicos.

Enfim, no Apêndice C, encontraremos alguns resultados básicos utilizados neste trabalho.

CAPÍTULO 1

Sub e Supersoluções de Problemas Singulares

Neste capítulo formulamos e demonstramos resultados sobre sub e supersoluções para problemas singulares. Tratamos separadamente os casos: não-convectivo ($b = 0$) e o caso convectivo ($b \neq 0$).

1.1 Equações Sem Termo Convectivo

Nesta seção apresentamos e provamos um Teorema de sub e supersolução para problemas possivelmente singulares da forma

$$-\Delta_p u = a_\lambda(x)\sigma(u) \ \text{ em } \ \Omega, \quad u > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \tag{1.1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, $a_\lambda : \Omega \to (0, \infty)$ é localmente Hölder-contínua e σ é uma função suave. Enfatizamos que nosso principal interesse é o caso em que σ é singular no zero, no sentido que $\sigma(s) \overset{s \to 0}{\to} \infty$.

Primeiramente discutimos o problema de contorno (não-singular) da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ \quad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

onde $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfaz a bem conhecida condição de Carathéodory e tem crescimento subcrítico, isto é,

$$|g(x,s)| \leq C\left(1 + |s|^{q-1}\right), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbf{R}, \tag{1.1.3}$$

para alguma constante $C > 0$ e algum $q \in [1, p^*)$, onde $p^* := pN/(N-p)$ e $1 < p < N$.

Introduzimos as definições de sub e supersolução para (1.1.2).

Uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (1.1.2) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \leq \int_\Omega g(x, \underline{u}) \phi \, dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \\ \qquad \underline{u} \leq 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (1.1.2) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega g(x, \overline{u}) \phi \, dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \\ \qquad \overline{u} \geq 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

O resultado auxiliar abaixo é conhecido e apresentaremos um esboço da sua demonstração no Apêndice A, que é baseada em Iriarte [40].

Lema 1.1. *Suponha que $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfaz a condição de Carathéodory e* (1.1.3)*. Sejam $\underline{u}, \overline{u}$ sub e supersolução, respectivamente, de* (1.1.2) *tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Então existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha \in (0,1)$, tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega g(x,u)\phi \, dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em seguida temos as definições de sub e supersolução de (1.1.1).

Uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (1.1.1) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \leq \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(\underline{u})\phi \, dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \underline{u} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \quad \underline{u} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (1.1.1) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(\overline{u})\phi \, dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \overline{u} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \quad \overline{u} \geq 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

O principal resultado desta seção é apresentado abaixo e estende para o caso do operador p-Laplaciano, (σ não dependendo do termo gradiente de u), o resultado de Cui [19], o qual verifica-se para o operador Laplaciano. Referimos também o leitor o resultado de Agarwal, Lu & O'Regan [2] para o caso p-Laplaciano com $N = 1$.

Teorema 1.1. *Seja $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ uma função C^1 satisfazendo* (0.0.2) *com $0 < \sigma_0 \leq \infty$ e $0 \leq \sigma_\infty < \infty$. Sejam $\underline{u}, \overline{u}$ sub e supersolução, respectivamente, de* (1.1.1) *satisfazendo $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω e $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, se $1 < p < N$ existe $u \in C^1(\Omega)$ com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω satisfazendo* (1.1.1) *no sentido das distribuições, isto é,*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(u)\phi \, dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.1.4}$$

Demonstração do Teorema 1.1. Para cada $\epsilon > 0$ considere a função $\sigma_\epsilon : \mathbf{R} \to (0,\infty)$,

$$\sigma_\epsilon(s) = \sigma(s+\epsilon) \ \text{ se } \ s \geq 0 \ \text{ e } \ \sigma_\epsilon(s) = \sigma(\epsilon) \ \text{ se } \ s < 0,$$

e o problema associado

$$\begin{cases} -\Delta_p v = a_\lambda(x)\sigma_\epsilon(v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Note que σ_ϵ satisfaz as hipóteses do Lema 1.1. De fato, fazendo

$$g_\epsilon(x,s) = a_\lambda(x)\sigma_\epsilon(s),$$

e observando que

$$\frac{\sigma_\epsilon(s)}{s^{p-1}} = \frac{\sigma(s+\epsilon)}{(s+\epsilon)^\theta}\left(1+\frac{\epsilon}{s}\right)^\theta \frac{s^\theta}{s^{p-1}}.$$

Se $1 < p < 2$ então $\theta = (p-1)^2$ e assim usando (0.0.2) e recordando que $0 \leq \sigma_\infty < \infty$, segue que $g_\epsilon(x,s)$ satisfaz (1.1.3). O caso $2 \leq p < N$ é análogo.

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, recordando que $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega$ e fazendo $\underline{v} := \underline{u} - \epsilon$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{p-2}\,\nabla \underline{v}\cdot\nabla\phi\, dx &= \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\,\nabla \underline{u}\cdot\nabla\phi\, dx \\
&\leq \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(\underline{u})\phi\, dx \\
&= \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma_\epsilon(\underline{v})\phi\, dx,
\end{aligned}$$

mostrando que $\underline{v}$ é uma subsolução. Fazendo $\overline{v} := \overline{u} - \epsilon$, segue, por argumentos similares, que $\overline{v}$ é uma supersolução (1.1.5) no sentido do Lema 1.1.

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pelo Lema 1.1 existe $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad \underline{v} \leq u_\epsilon \leq \overline{v} \quad \text{em} \quad \Omega, \\
&\text{(ii)}\quad \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\,\nabla u_\epsilon\cdot\nabla\phi\, dx = \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(u_\epsilon+\epsilon)\phi\, dx.
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Seja $\{\Omega_k\}$ uma sequência de domínios suaves e limitados tais que

$$\overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1} \quad \text{e} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k.$$

Tomando um inteiro $k \geq 1$ tal que $supp(\phi) \subset \Omega_k$ temos por (1.1.6)(ii),

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\,\nabla u_\epsilon\cdot\nabla\phi\, dx = \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_\epsilon+\epsilon)\phi\, dx. \tag{1.1.7}$$

Por (1.1.6)(i)(ii) e por DiBenedetto [23] e Tolksdorff [63] (cf. Apêndice C, Teorema C.2), existem $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $C > 0$, independente de ϵ, tais que

$$|\nabla u_\epsilon(x)| \leq C \quad \text{e} \quad |\nabla u_\epsilon(x) - \nabla u_\epsilon(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha, \quad x,y \in \overline{\Omega_k}.$$

Fazendo $\epsilon := 1/n$ e $u_\epsilon := u^n$, segue que $\{u^n\}$ é limitado em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega_k})$ e então existem uma subsequência de $\{u^n\}$ denotada por $\{u_k^n\}$, com a propriedade de $\{u_k^n\} \subseteq \{u_{k+1}^n\}$, e uma função $u_k \in C^1(\overline{\Omega_k})$ tal que

$$u_k^n \xrightarrow{n} u_k \quad \text{em} \quad C^1(\overline{\Omega_k}) \quad \text{e} \quad u_k > 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega_k}.$$

Logo

$$|\nabla u_k^n|^{p-2} \nabla u_k^n \xrightarrow{n} |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \quad \text{em} \quad C(\overline{\Omega_k}).$$

Utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_k^n|^{p-2} \nabla u_k^n \cdot \nabla\phi \; dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \cdot \nabla\phi \; dx$$

e

$$\int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k^n + 1/n)\phi \; dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k)\phi \; dx.$$

Usando (1.1.7) temos

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \cdot \nabla\phi \; dx = \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k)\phi \; dx.$$

Definindo $u : \Omega \to (0, \infty)$ por

$$u(x) := u_k(x), \quad x \in \Omega_k,$$

temos

$$u \in C^1(\Omega), \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \underline{u} \le u \le \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso, u também satisfaz (1.1.4). Isto termina a prova do Teorema 1.1.

$\square$

1.2 Equações Com Termo Convectivo

Nesta seção apresentamos e provamos um Teorema de sub e supersolução para problemas possivelmente singulares da forma

$$-\Delta_p u = a_\lambda(x)\sigma(u) + b(x)\,|\nabla u|^p \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, $a_\lambda : \Omega \to (0,\infty)$ e $b : \Omega \to \mathbf{R}$ são localmente Hölder-contínua e σ é uma função suave. Enfatizamos que o principal interesse é o caso em que σ é singular no zero no sentido que $\sigma(s) \overset{s\to 0}{\to} \infty$.

Uma função $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (1.2.1) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\,\nabla \underline{u}\cdot\nabla\phi\; dx \le \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(\underline{u})\phi\; dx + \int_\Omega b(x)\,|\nabla \underline{u}|^p\,\phi\; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \ge 0, \\ \underline{u} > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \underline{u} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (1.2.1) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\,\nabla \overline{u}\cdot\nabla\phi\; dx \ge \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(\overline{u})\phi\; dx + \int_\Omega b(x)\,|\nabla \overline{u}|^p\,\phi\; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \ge 0, \\ \overline{u} > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \overline{u} \ge 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

O principal resultado desta seção é

Teorema 1.2. *Seja $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ uma função C^1 satisfazendo* (0.0.2) *com $0 < \sigma_0 \le \infty$ e $0 \le \sigma_\infty < \infty$. Sejam $\underline{u}, \overline{u}$ sub e supersolução, respectivamente, de* (1.2.1) *satisfazendo $\underline{u} \le \overline{u}$ em Ω e $\overline{u} > 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, se $1 < p < N$ existe $u \in C^1(\Omega)$ com $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ em Ω satisfazendo* (1.2.1) *no sentido das distribuições, isto é,*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\cdot\nabla\phi\; dx = \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(u)\phi\; dx + \int_\Omega b(x)\,|\nabla u|^p\,\phi\; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2.2}$$

Este Teorema completa o de Cui [19], pois tratamos o caso para o operador p-Laplaciano.

Para provar o Teorema 1.2 tratamos primeiramente de um resultado preliminar para o caso não-singular da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = F(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sobre } \Omega, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

onde $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ satisfaz a conhecida condição de Carathéodory e tem um crescimento no seguinte sentido: existe uma função crescente $c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ tal que

$$|F(x, s, \xi)| \leq c(|s|)\,(1 + |\xi|^p)\,. \tag{1.2.4}$$

Introduzimos as definições de subsolução e supersolução para (1.2.3).

Uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (1.2.3) se

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\, \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \; dx \leq \int_\Omega F(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \phi \; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \\ \underline{u} \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma supersolução de (1.2.3) se

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\, \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \; dx \geq \int_\Omega F(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \phi \; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \geq 0, \\ \\ \overline{u} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Observe que, como $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $|\nabla \underline{u}| \in L^p(\Omega)$ e por (1.2.4), temos $F(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \in L^1(\Omega)$ de modo que as integrais acima fazem sentido.

O resultado abaixo é um caso particular de um Teorema geral devido a Boccardo, Murat & Puel [9]. No Apêndice A apresentaremos um esboço de sua demonstração.

Lema 1.2. *Suponha $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ satisfaz a condição de Carathéodory e* (1.2.4)*. Sejam $\underline{u}, \overline{u}$, respectivamente, sub e supersolução de* (1.2.3) *tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Então existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \phi \; dx = \int_\Omega F(x, u, \nabla u) \phi \; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Demonstração do Teorema 1.2. Para cada $\epsilon > 0$ considere a função $\sigma_\epsilon : \mathbf{R} \to (0, \infty)$,

$$\sigma_\epsilon(s) = \sigma(s+\epsilon) \ \text{ se } \ s \geq 0 \ \text{ e } \ \sigma_\epsilon(s) = \sigma(\epsilon) \ \text{ se } \ s < 0$$

e o problema associado

$$\begin{cases} -\Delta_p v = a_\lambda(x)\sigma_\epsilon(v) + b(x)\,|\nabla v|^p \quad \text{em } \ \Omega, \\ \\ \qquad\qquad v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Note que $F_\epsilon(x, s, \xi)$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.2. Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e fazendo $\underline{v} := \underline{u} - \epsilon$ e $\overline{v} := \overline{u} - \epsilon$ segue que $\underline{v}, \overline{v}$ são, respectivamente, sub e supersolução de (1.2.5) no sentido do Lema 1.2.

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pelo Lema 1.2 existe $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\begin{gathered} \text{(i)} \ \ \underline{v} \leq u_\epsilon \leq \overline{v} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \text{(ii)} \ \ \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla\phi \; dx = \int_\Omega a_\lambda(x)\sigma(u_\epsilon+\epsilon)\phi \; dx + \int_\Omega b(x)\,|\nabla u_\epsilon|^p \,\phi \; dx. \end{gathered} \tag{1.2.6}$$

Seja $\{\Omega_k\}$ uma sequência de domínios suaves e limitados tais que

$$\overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1} \ \text{ e } \ \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

Tomando um inteiro $k \geq 1$ tal que $supp(\phi) \subset \Omega_k$ temos por (1.2.6)(ii),

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla\phi \; dx = \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_\epsilon+\epsilon)\phi \; dx + \int_{\Omega_k} b(x)\,|\nabla u_\epsilon|^p \,\phi \; dx. \tag{1.2.7}$$

Por (1.2.6)(i)(ii) e por DiBenedetto [23] e Tolksdorff [63] (cf. Apêndice C, Teorema C.2), existem $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $C > 0$, independente de ϵ, tais que

$$|\nabla u_\epsilon(x)| \leq C \ \text{ e } \ |\nabla u_\epsilon(x) - \nabla u_\epsilon(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha, \quad x, y \in \overline{\Omega_k}.$$

Fazendo $\epsilon := 1/n$ e $u_\epsilon := u^n$, segue que $\{u^n\}$ é limitado em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega_k})$ e então existe uma subsequência de $\{u^n\}$ denotada por $\{u_k^n\}$, com a propriedade de $\{u_k^n\} \subseteq \left\{u_{k+1}^n\right\}$ e uma função $u_k \in C^1(\overline{\Omega_k})$ tal que

$$u_k^n \xrightarrow{n} u_k \ \text{ em } \ C^1(\overline{\Omega_k}) \ \text{ e } \ u_k > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega_k}.$$

Logo

$$|\nabla u_k^n|^{p-2}\,\nabla u_k^n \xrightarrow{n} |\nabla u_k|^{p-2}\,\nabla u_k \quad \text{em} \quad C(\overline{\Omega_k}),$$

$$|\nabla u_k^n|^{p} \xrightarrow{n} |\nabla u_k|^{p} \quad \text{em} \quad C(\overline{\Omega_k}).$$

Utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_k^n|^{p-2}\,\nabla u_k^n \cdot \nabla\phi\; dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^{p-2}\,\nabla u_k \cdot \nabla\phi\; dx,$$

$$\int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k^n + 1/n)\phi\; dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k)\phi\; dx$$

e

$$\int_{\Omega_k} b(x)\,|\nabla u_k^n|^{p}\,\phi\; dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega_k} b(x)\,|\nabla u_k|^{p}\,\phi\; dx$$

Usando (1.2.7) temos

$$\int_{\Omega_k} |\nabla u_k|^{p-2}\,\nabla u_k \cdot \nabla\phi\; dx = \int_{\Omega_k} a_\lambda(x)\sigma(u_k)\phi\; dx + \int_{\Omega_k} b(x)\,|\nabla u_k|^{p}\,\phi\; dx.$$

Definindo $u : \Omega \to (0, \infty)$ por

$$u(x) := u_k(x), \quad x \in \Omega_k,$$

temos

$$u \in C^1(\Omega), \quad u > 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega, \quad \underline{u} \le u \le \overline{u} \;\; \text{em} \;\; \Omega.$$

Além disso, u também satisfaz (1.2.2). Isto termina a prova do Teorema 1.2.

$\square$

CAPÍTULO 2

Existência de Solução no Caso Não-Convectivo

O alvo deste capítulo é demonstrar o Teorema 0.1 e iniciamos a seção seguinte com a demonstração da existência de uma supersolução radialmente simétrica que decaia para $\ell \geq 0$ no infinito. A prova do Teorema 0.7 é baseada nos argumentos de Gonçalves & Santos [34], Gonçalves, Melo & Santos [33] e Dinu [24]. Técnicas importantes para encontrar soluções radialmente simétricas de problemas singulares foram desenvolvidas nos trabalhos de Pucci, Garcia-Huidobro, Manasevich & Serrin [54], Pucci & Servadei [55]. Adicionalmente, referimos o leitor a Alves, Corrêa & Goncalves [4], onde são tratados sistemas de equações singulares, Perera & Silva [53], onde são utilizados métodos variacionais, e suas referências.

2.1 Supersolução Decaindo para $\ell \geq 0$ no Infinito

Formulamos no Lema abaixo uma extensão para o p-Laplaciano de um resultado de Zhang [67]. Enfatizamos que, em nosso caso, o resultado é mais geral também no sentido de que σ_∞ pode ser positivo. O esboço de sua demonstração será dada no Apêndice B.

Lema 2.1. *Suponha que $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é C^1 e satisfaz (0.0.2), com $0 < \sigma_0 \leq \infty$ e $0 \leq \sigma_\infty < \infty$. Então existe uma função C^1, $\Gamma^*_{\theta,\sigma} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tal que*

$$\text{(i)} \quad \frac{\sigma(s)}{s^\theta} \leq \Gamma^*_{\theta,\sigma}(s), \quad s > 0,$$

$$\text{(ii)} \ \ \Gamma^*_{\theta,\sigma} \ \text{ é não-crescente }, \quad \text{(iii)} \ \ \Gamma^*_{\theta,\sigma}(s) \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty.$$

A seguir demonstramos o Teorema 0.7 que exerce um papel importante neste trabalho.

Demonstração do Teorema 0.7. A prova será dividida em dois passos.

Passo 1: Prova de (i) e (ii). Seja $\Lambda_0 = \left(\frac{1}{\alpha(p-1)}\right)^{p-1} \frac{1}{\sigma_\infty}$ e

$$\Lambda^* = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad 1 < p < 2; \\ \Lambda_0 & \text{se} \quad 2 \leq p < N. \end{cases}$$

Tome $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ e seja $\omega := \omega_\lambda$ definido por

$$\omega(r) := \lambda^{\frac{1}{p-1}} \left(\alpha - \int_0^r \left[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} M(s)\, ds \right]^{\frac{1}{p-1}} dt \right) \tag{2.1.1}$$

segue que $\omega(0) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \alpha$ e além disso $\omega(r) \overset{r\to\infty}{\to} 0$.

Seguindo argumentos encontrados em Gonçalves & Santos [34], mostra-se que ω satisfaz

$$\begin{cases} -(r^{N-1}|\omega'|^{p-2}\omega')' = \lambda r^{N-1} M(r), \quad r > 0, \\ \omega'(0) = 0, \quad \omega \in C^1([0,\infty)) \cap C^2((0,\infty)). \end{cases}$$

Definindo

$$h_{\theta,\sigma}(s) := s^\theta \left(\Gamma^*_{\theta,\sigma}(s) + 1/s^\theta \right), \quad s > 0,$$

segue facilmente que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \ \ h_{\theta,\sigma}(s) > s^\theta \Gamma^*_{\theta,\sigma}(s) \geq \sigma(s), \quad \text{(ii)} \ \ h_{\theta,\sigma}(s)/s^\theta \text{ é decrescente}, \\ &\text{(iii)} \ \ \frac{h_{\theta,\sigma}(s)}{s^\theta} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iv)} \ \ \frac{h_{\theta,\sigma}(s)}{s^\theta} \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Considere a função

$$\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell) := (h_{\theta,\sigma}(t+\ell)+1)^{1/(p-1)}, \quad t>0.$$

Afirmamos que $\tilde{h}_{\theta,\sigma}$ satisfaz

$$\text{(i)} \ \ \tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell) \geq h_{\theta,\sigma}(t+\ell)^{1/(p-1)}, \ t>0, \quad \text{(ii)} \ \ \frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)}{t^{p-1}} \text{ é decrescente,}$$
$$\text{(iii)} \ \ \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t)}{t} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 1<p<2; \\ \sigma_\infty^{1/(p-1)} & \text{se} \quad 2 \leq p < N. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

De fato, (2.1.3)(i) segue direto da definição de $\tilde{h}_{\theta,\sigma}$. Para mostrar (2.1.3)(ii), observe que

$$\frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)}{t^{p-1}} = \left(\frac{h_{\theta,\sigma}(t+\ell)+1}{(t+\ell)^{(p-1)^2}}\right)^{1/(p-1)} \left(1+\frac{\ell}{t}\right)^{p-1}. \tag{2.1.4}$$

Se $1<p<2$, temos que $\theta=(p-1)^2$ e então utilizando (2.1.4) e (2.1.2)(ii), obtemos

$$\frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)}{t^{p-1}} \text{ é decrescente.}$$

Se $2 \leq p < N$, temos que $\theta = p-1$ e então de (2.1.4), temos

$$\frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)}{t^{p-1}} = \left(\frac{h_{\theta,\sigma}(t+\ell)}{(t+\ell)^{(p-1)}}\frac{1}{(t+\ell)^{p^2-3p+2}} + \frac{1}{(t+\ell)^{(p-1)^2}}\right)^{1/(p-1)} \left(1+\frac{\ell}{t}\right)^{p-1}.$$

Mas $p^2-3p+2 \geq 0$, e assim (2.1.3)(ii) segue de (2.1.2)(ii) e da expressão acima.

Aplicando (2.1.2)(iv), temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{h_{\theta,\sigma}(t)+1}{t^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 1<p<2; \\ \sigma_\infty^{1/(p-1)} & \text{se} \quad 2 \leq p < N. \end{cases}$$

mostrando (2.1.3)(iii).

Considere a função contínua $\tilde{H}_{\theta,\sigma}$ definida por

$$\tilde{H}_{\theta,\sigma}(r) = \frac{1}{\alpha r^{p-1}} \int_0^{r-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt, \quad r > \ell.$$

Afirmamos que

$$\text{(i)} \;\; \tilde{H}_{\theta,\sigma}(r) \overset{r\to\infty}{\to} \begin{cases} \infty & \text{se} \;\; 1 < p < 2; \\ \frac{1}{\alpha(p-1)} \left(\frac{1}{\sigma_\infty}\right)^{1/(p-1)} & \text{se} \;\; 2 \le p < N; \end{cases} \qquad \text{(ii)} \;\; \tilde{H}_{\theta,\sigma}(r) \overset{r\to\ell}{\to} 0. \tag{2.1.5}$$

Para mostrar (2.1.5)(i)(ii), note que

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{r-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt}{\alpha r^{p-1}} &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\alpha(p-1)} \left(1 - \frac{\ell}{r}\right)^{p-1} \frac{r}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(r)} \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se} \;\; 1 < p < 2; \\ \frac{1}{\alpha(p-1)} \left(\frac{1}{\sigma_\infty}\right)^{1/(p-1)} & \text{se} \;\; 2 \le p < N. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora afirmamos que para cada $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ existe algum $\mu \in (\ell, \infty)$ tal que

$$\tilde{H}_{\theta,\sigma}(\mu) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}.$$

De fato, a afirmação segue analisando os casos $1 < p < 2$ e $2 \le p < N$ separadamente e usando (2.1.5)(i)(ii).

Pela definição de $\tilde{H}_{\theta,\sigma}$,

$$\frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{\mu} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \alpha. \tag{2.1.6}$$

Considere a função $P : [0, \infty) \times [\ell, \mu] \to \mathbf{R}$ definida por

$$P(t, s) := \omega(t) - \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{s-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt.$$

Fazendo $s = \ell$

$$P(t, \ell) = \omega(t) > 0 \text{ para } t \geq 0,$$

e por (2.1.1) e (2.1.6)

$$P(t, \mu) = \omega(t) - \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{\mu-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt < 0.$$

Além disso por (2.1.3)(ii),

$$\frac{\partial P(t,s)}{\partial s} = -\frac{1}{\mu^{p-1}} \frac{(s-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(s)} < 0, \quad s > 0.$$

Agora, pelo Teorema da Função Implícita existe uma função $v : [0, \infty) \to [\ell, \mu]$ tal que

$$P(r, v(r)) = 0, \quad r > 0$$

o qual nos dá

$$\omega(r) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{v(r)-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t+\ell)} dt. \tag{2.1.7}$$

Derivando ambos os membros da equação (2.1.7) com respeito a r obtemos

$$\omega'(r) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \cdot \frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)} v'(r)$$

e

$$\omega''(r) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \cdot \frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)} v''(r) + \frac{1}{\mu^{p-1}} \frac{d}{dv} (\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}) |v'(r)|^2.$$

Portanto

$$|\omega'(r)|^{p-2} = \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-2} (\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)})^{p-2} |v'(r)|^{p-2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
|\omega'(r)|^{p-2}\omega''(r) &= \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-2}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-2}|v'(r)|^{p-2} \\
&\cdot \left[\frac{1}{\mu^{p-1}}\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}v''(r)+\frac{1}{\mu^{p-1}}\frac{d}{dv}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)|v'(r)|^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-1}|v'(r)|^{p-2}v''(r) \\
&+ \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-2}\frac{d}{dv}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)|v'(r)|^{p}.
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
\left(|\omega'(r)|^{p-2}\right)'\cdot\omega'(r) &= \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-1}\left(|v'(r)|^{p-2}\right)'\cdot v'(r) \\
&+ \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left[\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-2}\right]'\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}|v'(r)|^{p},
\end{aligned}$$

e

$$|\omega'(r)|^{p-2}\cdot\omega'(r) = \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-1}|v'(r)|^{p-2}\cdot v'(r).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\left(r^{N-1}|\omega'(r)|^{p-2}\omega'(r)\right)' &= \left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-1}\left(r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r)\right)' \\
&+ (p-1)\left(\frac{1}{\mu^{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)^{p-2}\frac{d}{dv}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)r^{N-1}|v'(r)|^{p}.
\end{aligned}$$

Notando que por (2.1.3)(ii), temos

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{(v-\ell)^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)}\right)\geq 0,$$

segue que

$$\left(r^{N-1}|\omega'(r)|^{p-2}\omega'(r)\right)' \quad \geq \quad \left(\frac{1}{\mu}\right)^{(p-1)^2} \frac{(v-\ell)^{(p-1)^2}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)^{p-1}} \left(r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r)\right)'.$$

Daí

$$\begin{aligned}\left(r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r)\right)' \quad &\leq \quad -\left(\frac{\mu}{v-\ell}\right)^{(p-1)^2} \tilde{h}_{\theta,\sigma}(v)^{p-1}r^{N-1}\ \lambda\ M(r) \\ &\leq \quad -r^{N-1}\ \lambda\ M(r)\ h_{\theta,\sigma}(v(r)), \quad r>0.\end{aligned}$$

Portanto

$$-\frac{1}{r^{N-1}}\left(r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r)\right)' \geq \lambda\ M(r)\ h_{\theta,\sigma}(v(r)), \quad r>0,$$

isto é,

$$-\Delta_p v \geq \lambda\ a(x)h_{\theta,\sigma}(v) \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}\setminus\{0\}, \tag{2.1.8}$$

no sentido clássico, onde $v := v_\lambda \in C^1(\mathbf{R^N}) \cap C^2(\mathbf{R^N}\setminus\{0\})$.

Multiplicando (2.1.8) por uma função não-negativa $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N}\setminus\{0\})$ e integrando, temos

$$\int |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\cdot\nabla\phi\ dx \geq \int \lambda\ a(x)h_{\theta,\sigma}(v(x))\phi\ dx \tag{2.1.9}$$

Os argumentos abaixo são inspirados em [3,5]. Considere a função $\eta \in C^\infty$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 0$ se $|x| \leq 1$ e $\eta(x) = 1$ se $|x| \geq 2$.

Tome $\epsilon > 0$ e considere a função $\psi_\epsilon(x) = \eta(x/\epsilon)$. Se $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N})$ então $\psi_\epsilon\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N}\setminus\{0\})$. Trocando ϕ em (2.1.9) por esta função temos

$$\int |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\cdot\nabla\phi\psi_\epsilon\ dx + \int |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\cdot\nabla\psi_\epsilon\phi\ dx \geq \int \lambda\ a(x)h_{\theta,\sigma}(v(x))\psi_\epsilon\phi\ dx \tag{2.1.10}$$

Afirmamos que, fazendo $\epsilon \to 0$,

$$\int |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \phi \psi_\epsilon \, dx \to \int |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx, \tag{2.1.11}$$

$$\int |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \psi_\epsilon \phi \, dx \to 0, \tag{2.1.12}$$

$$\int \lambda \; a(x) h_{\theta,\sigma}(v(x)) \psi_\epsilon \phi \, dx \to \int \lambda \; a(x) h_{\theta,\sigma}(v(x)) \phi \, dx \tag{2.1.13}$$

De fato, (2.1.11) e (2.1.13) segue como aplicação direta do Teorema de Lebesgue. Retornando a (2.1.12) e aplicando a desigualdade de H$\ddot{o}$lder, temos

$$\left| \int |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \psi_\epsilon \phi \, dx \right| \leq C \left(\int |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |\nabla \psi_\epsilon|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1.14}$$

onde C denota uma constante positiva. Seja $z := x/\epsilon$ e $\eta(z) := \psi_\epsilon(x(z))$, daí

$$\frac{\partial \eta}{\partial z_j} = \epsilon \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad |\nabla \eta|^p = \epsilon^p \, |\nabla \psi_\epsilon|^p$$

e logo

$$\left(\int_{|x| \leq 2\epsilon} |\nabla \psi_\epsilon|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{|z| \leq 2} |\nabla \eta|^p \, dz \right)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{\frac{N-p}{p}} \to 0 \;\; \text{quando} \;\; \epsilon \to 0,$$

e portanto (2.1.12) segue de (2.1.14). Fazendo $\epsilon \to 0$ em (2.1.10), usando (2.1.11)-(2.1.13) e (2.1.2)(i) obtemos uma solução no sentido das distribuições de (0.0.16).

Agora, como $\omega(r) \overset{r \to \infty}{\to} 0$ segue por (2.1.7) que $v(r) \overset{r \to \infty}{\to} \ell$. Por outro lado, por (2.1.1), $\omega(0) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \alpha$, e por (2.1.6) e (2.1.7) temos respectivamente

$$\omega(0) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{\mu - \ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t + \ell)} dt \;\; \text{e} \;\; \omega(0) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{v(0) - \ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\sigma}(t + \ell)} dt.$$

Como o integrando é estritamente crescente, temos que $v(0) = \mu$. Daí usando o fato que v é radialmente simétrica, inferimos que $|v_\lambda|_\infty = \mu$. Isto termina a prova dos itens (i) e (ii).

Passo 2: Prova de (iii). Considere a função $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \sigma(s), & \text{se} \quad 0 < s \le m, \\ \\ I_{m,\theta} s^\theta, & \text{se} \quad s > m. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

onde $I_{m,\theta}$ é definido na página xiii. Note que $\varphi \in C^1$ e satisfaz

$$\text{(i)} \quad \frac{\varphi(s)}{s^\theta} \overset{s \to 0}{\to} \infty, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\varphi(s)}{s^\theta} \overset{s \to \infty}{\to} I_{m,\theta}.$$

Além disso, qualquer solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v \ge \lambda \; a(x)\varphi(v) \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \\ \\ v > \ell \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \quad v(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} \ell, \quad v \le m, \end{cases}$$

é também solução de (0.0.16). Seja

$$h_{\theta,\varphi}(s) := s^\theta \left(\Gamma^*_{\theta,\varphi}(s) + 1/s^\theta \right), \quad s > 0.$$

Temos que

$$\text{(i)} \quad h_{\theta,\varphi}(s) > s^\theta \Gamma^*_{\theta,\varphi}(s) \ge \varphi(s), \quad \text{(ii)} \quad \frac{h_{\theta,\varphi}(s)}{s^\theta} \text{ é decrescente,}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{h_{\theta,\varphi}(s)}{s^\theta} \overset{s \to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iv)} \quad \frac{h_{\theta,\varphi}(s)}{s^\theta} \overset{s \to \infty}{\to} I_{m,\theta}.$$

Seja

$$\tilde{H}_{\theta,\varphi}(r) = \frac{1}{\alpha r^{p-1}} \int_0^{r-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\varphi}(t+\ell)} dt, \quad r > \ell, \quad 0 \le \ell < m.$$

onde

$$\tilde{h}_{\theta,\varphi}(t+\ell) := (h_{\theta,\varphi}(t+\ell) + 1)^{1/(p-1)}, \quad t > 0.$$

Considere

$$\Lambda_2 := \min \left\{ \left(\frac{1}{\alpha(p-1)} \right)^{p-1} \left(\frac{1}{I_{m,\theta}} \right), \left(\tilde{H}_{\theta,\varphi}(m) \right)^{p-1} \right\}.$$

Por argumentos similares feitos no Passo 1, temos

$$\text{(i)}\ \ \tilde{h}_{\theta,\varphi}(t+\ell) \geq h_{\theta,\varphi}(t+\ell)^{1/(p-1)},\ t>0, \quad \text{(ii)}\ \ \frac{\tilde{h}_{\theta,\varphi}(t+\ell)}{t^{p-1}} \text{ é decrescente,}$$

$$\text{(iii)}\ \ \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{h}_{\theta,\varphi}(t)}{t} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 1<p<2; \\ I_{m,\theta}^{1/(p-1)} & \text{se} \quad 2\leq p<N. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

$$\text{(iv)}\ \ \tilde{H}_{\theta,\varphi} \overset{r\to\infty}{\to} \begin{cases} \infty & \text{se} \quad 1<p<2; \\ \lambda^*_{\theta,\varphi} & \text{se} \quad 2\leq p<N. \end{cases} \qquad \text{(v)}\ \ \tilde{H}_{\theta,\varphi}(r) \overset{r\to\ell}{\to} 0,$$

onde

$$\lambda^*_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\alpha(p-1)} \left(\frac{1}{I_{m,\theta}}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Se $\lambda \in (0,\Lambda_2)$ então $\lambda^{\frac{1}{p-1}} < \tilde{H}_{\theta,\varphi}(m)$. Por (2.1.16)(iv)(v) existe $\mu := \mu(\lambda) \in (\ell, m]$ tal que $\tilde{H}_{\theta,\varphi}(\mu) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, onde tomamos o menor μ tal que

$$\frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^{\mu-\ell} \frac{t^{p-1}}{\tilde{h}_{\theta,\varphi}(t+\ell)} dt = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \alpha.$$

A prova agora segue por argumentos como no Passo 1. Isto termina a prova do Teorema 0.7.

□

2.2 Soluções Positivas de Problemas em Domínios Limitados

O principal propósito desta seção é provar o Teorema 0.4. Utilizamos alguns resultados auxiliares. Para começar, o Lema abaixo é uma extensão para o p-Laplaciano de um resultado de Zhang [67] e sua demonstração se encontra no Apêndice B.

Lema 2.2. *Suponha que* $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *é* C^1 *e satisfaz* (0.0.2)*, com* $0 < \sigma_0 \leq \infty$ *e* $0 \leq \sigma_\infty < \infty$*. Então existe uma função* C^1, $I^*_{\theta,\sigma} : (0,\infty) \to (0,\infty)$*, tal que*

$$\begin{gathered} (i)\ \ \frac{\sigma(s)}{s^\theta} \geq I^*_{\theta,\sigma}(s), \quad s > 0, \\ (ii)\ \ I^*_{\theta,\sigma} \ \text{ é não-crescente}\ , \quad (iii)\ \ I^*_{\theta,\sigma}(s) \overset{s\to 0}{\to} \sigma_0. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Demonstração do Teorema 0.4. Prova de (i). Seja

$$\tilde{\Lambda}_1 := \frac{\zeta_1(a,\Omega)}{\sigma_0},$$

e tome $\lambda \in (\tilde{\Lambda}_1, \infty)$. Fazendo $\zeta_1(\lambda a) := \zeta_1(\lambda a, \Omega)$, $w_{1,\lambda} := w_1(\lambda a, \Omega)$ e recordando que $w_{1,\lambda} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, temos

$$\begin{cases} -\Delta_p w_{1,\lambda} = \zeta_1(\lambda a)\ \lambda a(x)\, |w_{1,\lambda}|^{p-2}\, w_{1,\lambda} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ w_{1,\lambda} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \ \ w_{1,\lambda} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Como $a > 0$ sobre $\overline{\Omega}$ e

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a,\Omega)}{\lambda} = \zeta_1(\lambda a),$$

existe $\delta := \delta(\lambda) \in (0,1)$ tal que

$$I^*_{\theta,\sigma}(s) \geq \zeta_1(\lambda a), \quad s \in (0,\delta). \tag{2.2.3}$$

Seja $\underline{u} = c w_{1,\lambda}$, onde $c > 0$ é uma constante. Afirmamos que $\underline{u}$ é uma subsolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.1, se c é tomado suficientemente pequeno. De fato, seja

$$0 < c < \frac{\delta}{\max\limits_{\overline{\Omega}} w_{1,\lambda}}$$

e tome $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$. Usando (2.2.2), (2.2.3) e (2.2.1)(i), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\, \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \; dx \ &\leq \ \int_\Omega \lambda a(x) I^*_{\theta,\sigma}(c w_{1,\lambda})(c w_{1,\lambda})^{p-1} \phi \; dx \\ &\leq \ \int_\Omega \lambda \; a(x) \sigma(\underline{u}) \phi \; dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, a função $\overline{u} := v_\lambda$, onde v_λ é dada pelo Teorema 0.7 (i), satisfaz

$$\begin{gathered}
\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega \lambda \, a(x) \sigma(\overline{u}) \phi \, dx, \\
\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \overline{u} > 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.
\end{gathered} \tag{2.2.4}$$

mostrando que $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.1.

Afirmamos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. De fato, escolhendo c suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{(c\,|w_{1,\lambda}|_\infty)^{p-1}} > \zeta_1(\lambda a).$$

Seja

$$B_{c,\overline{u}} := \{x \in \Omega \;\mid\; c w_{1,\lambda}(x) > \overline{u}(x)\}.$$

É suficiente mostrar que $B_{c,\overline{u}} = \emptyset$. Primeiramente note que $\overline{B}_{c,\overline{u}} \subset \Omega$. Faça

$$\omega_1 := (c w_{1,\lambda})^p, \quad \text{e} \quad \omega_2 := (\overline{u})^p$$

no Lema C.4 (cf. Apêndice C). Usando (2.2.4) e recordando que $\theta = (p-1)^2$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{B_{c,\overline{u}}} \left[\frac{-\Delta_p (c w_{1,\lambda})}{(c w_{1,\lambda})^{p-1}} + \frac{\Delta_p \overline{u}}{\overline{u}^{p-1}} \right] \left((c w_{1,\lambda})^p - \overline{u}^p \right) dx \\
&\leq \int_{B_{c,\overline{u}}} \lambda \, a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{h_{\theta,\sigma}(v)}{(v)^{p-1}} \right] \left((c w_{1,\lambda})^p - \overline{u}^p \right) dx \\
&\leq \int_{B_{c,\overline{u}}} \lambda \, a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{v^{(p-1)^2}}{v^{p-1}} \left(\Gamma^*_{\theta,\sigma}(v) + \frac{1}{v^{(p-1)^2}} \right) \right] \left((c w_{1,\lambda})^p - \overline{u}^p \right) dx \\
&\leq \int_{B_{c,\overline{u}}} \lambda \, a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{1}{v^{p-1}} \right] \left((c w_{1,\lambda})^p - \overline{u}^p \right) dx, \\
&\leq \int_{B_{c,\overline{u}}} \lambda \, a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{1}{(c\,|w_{1,\lambda}|_\infty)^{p-1}} \right] \left((c w_{1,\lambda})^p - \overline{u}^p \right) dx < 0,
\end{aligned}$$

o que é impossível. Isto mostra que $B_{c,\overline{u}} = \emptyset$, provando a afirmação.

Como consequência do Teorema 1.1, existe uma função $u \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo (0.0.14) no sentido das distribuições e

$$cw_{1,\lambda} \leq u \leq v_\lambda \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Prova de (ii) Tome $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Como

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a, \Omega)}{\Lambda_0} = \zeta_1(\Lambda_0 a, \Omega) \geq \zeta(\lambda a),$$

e $a > 0$ sobre $\overline{\Omega}$, existe $\delta := \delta(\lambda) \in (0,1)$ satisfazendo (2.2.3). Procedendo como na prova de (i) segue que $\underline{u} := cw_{1,\lambda}$ é uma subsolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.1.

Seja $\overline{u} := v_\lambda$, onde v_λ é dado pelo Teorema 0.7 (ii). Segue que $\overline{u}$ satisfaz (2.2.4) e então $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.1. O restante da prova segue como na prova de (i).

Prova de (iii) Note primeiramente que $\sigma_\infty = 0$. Tome $\Lambda_0 = \infty$. A prova segue as mesmas linhas das provas dos itens (i) e (ii), considerando separadamente os casos $1 < p < 2$ e $2 \leq p < \infty$.

Prova de (iv) Neste ponto observe que qualquer solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \; a(x)\varphi(u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ \quad u > \ell \;\; \text{em} \;\; \Omega, \quad u \leq m, \end{cases}$$

onde φ foi definida em (2.1.15), é uma solução de (0.0.14) e ainda, o problema acima é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p z = \lambda \; a(x)\varphi(z+\ell) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ \quad z > 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega, \quad z \leq m - \ell. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Notando que

$$\frac{\varphi(s+\ell)}{s^\theta} = \frac{\varphi(s+\ell)}{(s+\ell)^\theta}\left(1 + \frac{\ell}{s}\right)^\theta \overset{s\to 0}{\to} \infty$$

existe um $\delta := \delta(\lambda) \in (0,1)$ tal que

$$I^*_{\theta,\varphi}(s) > \zeta_1(\lambda a), \qquad s \in (0,\delta).$$

Fazendo $\underline{z} = cw_{1,\lambda}$, e procedendo como nos itens anteriores, temos

$$\int_\Omega |\nabla \underline{z}|^{p-2}\nabla \underline{z}\cdot\nabla\phi\, dx \;\; \leq \;\; \int_\Omega \lambda a(x)\varphi(\underline{z}+\ell)\phi\, dx, \;\; \phi \in C_0^\infty(\Omega), \;\; \phi \geq 0.$$

Por outro lado, a função $\overline{z} := v_\lambda - \ell$, onde v_λ é dada pelo Teorema 0.7 (iii), satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla \overline{z}|^{p-2}\nabla \overline{z}\cdot\nabla\phi\, dx \geq \int_\Omega \lambda\; a(x)\varphi(\overline{z}+\ell)\phi\, dx, \;\; \phi \in C_0^\infty(\Omega), \;\; \phi \geq 0,$$

$$\overline{z} \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; \overline{z} > 0 \;\text{ em }\; \overline{\Omega}.$$

Afirmamos que $\underline{z} \leq \overline{z}$ em Ω. De fato, escolhendo c suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{(c\,|w_{1,\lambda}|_\infty + \ell)^{p-1}} > \zeta_1(\lambda a),$$

e procedendo como nas provas dos itens (i) e (ii), mostramos que $\underline{z}$ e $\overline{z}$ são sub e supersolução de (2.2.5), no sentido do Teorema 1.1.

Se $\ell = 0$, pelo Teorema 1.1 existe uma função $z \in C^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tal que

$$cw_{1,\lambda} \leq z \leq v_\lambda \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (2.2.5) no sentido das distribuições.

Se $\ell > 0$, pelo Lema 1.1 existe $z \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$cw_{1,\lambda} \leq z \leq v_\lambda - \ell \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (2.2.5) no sentido fraco.

Portanto, fazendo $u := z + \ell$ segue que $u \in C^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo (0.0.14) e, se $\ell > 0$, então

$$cw_{1,\lambda} + \ell \leq u \leq v_\lambda \leq m \quad \text{em} \quad \Omega,$$

e $u = \ell$ sobre $\partial\Omega$.

Prova de (v) e (vi) A prova segue os mesmos argumentos das provas dos itens (iv), (i), (ii). Isto termina a prova do Teorema 0.4.

□

2.3 Demonstração do Resultado Principal: Teorema 0.1

Prova de (i). Seja

$$\Lambda_1 = \frac{\zeta_1(a,B)}{\sigma_0}.$$

Tome $\lambda \in (\Lambda_1, \infty)$ e um inteiro $k \geq 1$. Considere o problema

$$-\Delta_p u = \lambda\ a(x)\sigma(u) \ \text{ em } \ B_k, \quad u > \ell \ \text{ em } \ B_k, \tag{2.3.1}$$

onde B_k é a bola de raio k centrada na origem do $\mathbf{R^N}$.

Usando as hipóteses do Teorema 0.1 (i) temos

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a,B)}{\lambda} \geq \frac{\zeta_1(a,B_k)}{\lambda}.$$

Pelo Teorema 0.4 (i) com $\Omega = B_k$, (2.3.1) admite uma solução

$$u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$$

satisfazendo

$$0 < \underline{u} \leq u_k \leq v_\lambda \leq \mu$$

onde $\underline{u}$ é a subsolução correspondente a $\Omega := B_k$ e v_λ é a função dada pelo Teorema 0.7 (i).

Agora provaremos algumas estimativas sobre $\{u_k\}$. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N})$ e tome um inteiro $k_1 \geq 1$ tal que $supp(\phi) \subset B_{k_1}$. Tome um domínio limitado $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ tal que

$$supp(\phi) \subset \Omega \subset\subset B_{k_1}.$$

Afirmamos que

$$\left\{ |u_k|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \right\}_{k=k_1}^{\infty} \quad \text{é limitado.} \tag{2.3.2}$$

De fato, fazendo $\Omega = B_{k_1}$ no Teorema 0.4 (i) e tomando $k \geq k_1$ afirmamos que

$$0 < \underline{u}_{k_1} \leq u_k \quad \text{em} \quad B_{k_1}, \quad k \geq k_1.$$

A afirmação é verdadeira para $k = k_1$. Suponha, por contradição, que existe $k_0 > k_1$ e considere o conjunto

$$A_{k_0,k_1} := \left\{ x \in B_{k_1} \;\; | \;\; \underline{u}_{k_1}(x) > u_{k_0}(x) \right\}.$$

É suficiente mostrar que $A_{k_0,k_1} = \emptyset$. Faça

$$\omega_1 := (cw_{1,\lambda})^p \;\; \text{e} \;\; \omega_2 := (u_{k_0})^p$$

no Lema C.4 (cf. Apêndice C). Recordando que $\theta = (p-1)^2$ temos

$$\begin{aligned} 0 \;\; &\leq \;\; \int_{A_{k_0,k_1}} \left[\frac{-\Delta_p(cw_{1,\lambda})}{(cw_{1,\lambda})^{p-1}} + \frac{\Delta_p u_{k_0}}{u_{k_0}^{p-1}} \right] \left((cw_{1,\lambda})^p - u_{k_0}^p \right) dx \\ &\leq \;\; \int_{A_{k_0,k_1}} \lambda \; a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{\sigma(u_{k_0})}{(u_{k_0})^{p-1}} \right] \left((cw_{1,\lambda})^p - u_{k_0}^p \right) dx. \end{aligned}$$

De

$$\sigma(u_{k_0}(x)) \leq h_{\theta,\sigma}(u_{k_0}(x))$$

temos

$$\begin{aligned} 0 \;\; &\leq \;\; \int_{A_{k_0,k_1}} \lambda \; a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{u_{k_0}^{\theta}}{(u_{k_0})^{p-1}} \left(\Gamma^*_{\theta,\sigma}(u_{k_0}) + \frac{1}{u_{k_0}^{\theta}} \right) \right] \left((cw_{1,\lambda})^p - u_{k_0}^p \right) dx, \\ &\leq \;\; \int_{A_{k_0,k_1}} \lambda \; a(x) \left[\zeta_1(\lambda a) - \frac{1}{u_{k_0}^{p-1}} \right] \left((cw_{1,\lambda})^p - u_{k_0}^p \right) dx < 0, \end{aligned}$$

o que é impossível. Isto mostra que $A_{k_0,k_1} = \emptyset$, provando a afirmação.

Agora seja

$$\rho_k(x) := \lambda\ a(x)\sigma(u_k(x)), \quad x \in B_{k_1}, \quad k \geq k_1$$

em (2.3.1) e note que $\rho_k \in L^\infty(B_{k_1})$.

Por resultados de DiBenedetto [23] e Tolksdorff [63] (Teorema C.2, cf. Apêndice C) existe uma constante positiva C, independente de k, tal que

$$|\nabla u_k(x)| \leq C \quad \text{e} \quad |\nabla u_k(x) - \nabla u_k(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha\,, \quad x, y \in \overline{\Omega},$$

mostrando (2.3.2).

Usando a imersão compacta

$$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}),$$

existe uma função $u := u_\Omega \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_k \to u$ em $C^1(\overline{\Omega})$ e, passando o limite em (2.3.1), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \cdot \nabla\phi\ dx = \int_\Omega \lambda\ a(x)\sigma(u)\phi\ dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como $\mathbf{R^N} = \bigcup B_k$ temos, aplicando o conhecido processo da sequência diagonal de Cantor, que existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_k\}$, tal que a função definida por

$$u(x) := \lim_k u_k(x), \quad x \in \mathbf{R^N}$$

pertence a $C^1(\mathbf{R^N})$ e satisfaz (0.0.1) no sentido das distribuições.

Prova de (ii). Seja $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Usando as hipóteses do Teorema 0.1 (ii) temos

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a,B)}{\Lambda_0} \geq \frac{\zeta_1(a,B_k)}{\Lambda_0}, \quad k \geq 1.$$

Pelo Teorema 0.4 (ii) com $\Omega = B_k$, (2.3.1) admite uma solução

$$u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k).$$

Além disso, temos

$$0 < \underline{u} \leq u_k \leq v_\lambda \leq \mu$$

onde $\underline{u}$ é a subsolução correspondente a $\Omega := B_k$ e v_λ é a função dada pelo Teorema 0.7 (ii). A prova de (ii) agora segue como no item (i).

Prova de (iii). Recordando que $\sigma_\infty = 0$. Faça $\Lambda_0 = \infty$.

Tome $\lambda \in (\Lambda_1, \infty)$. A prova segue as mesmas linhas dos itens (i) e (ii), considerando separadamente os casos $1 < p < 2$ e $2 \leq p < \infty$.

Prova de (iv). Seja $\lambda \in (0, \Lambda_2)$. Pelo Teorema 0.4 (iv), o problema (2.3.1) admite uma solução

$$u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$$

e além disso,

$$0 < \underline{u} \leq u_k \leq v_\lambda \leq m.$$

O resultado segue procedendo como na prova do item (i).

Prova de (v), (vi). Segue os mesmos argumentos como nas provas dos itens (i) e (ii).

Isto termina a prova do Teorema 0.1.

$\square$

CAPÍTULO 3

Existência e Não-Existência de Solução no Caso Convectivo

Neste capítulo tratamos do problema (0.0.1) com $b \neq 0$, observando assim uma característica importante, que é a presença do termo de convecção $|\nabla u|^q$. Tratamos separadamente os casos $b < 0$ e $b > 0$.

3.1 Existência: Termo Convectivo com Coeficiente Negativo

Nesta seção demonstramos o Teorema 0.2 e também o Corolário 0.1. Demonstramos também o Teorema 0.5, que tem o objetivo de construir uma subsolução adequada.

Demonstração do Corolário 0.1. Note que qualquer solução do problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int |\nabla v|^{p-2}\, \nabla v \cdot \nabla \phi \; dx \geq \int \lambda \; a(x)\sigma(v)\phi \; dx, \\ \\ v > \ell \;\text{ em }\; \mathbf{R^N}, \quad v(x) \overset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} \ell, \end{cases}$$

também é solução do problema (0.0.16), pois neste caso, temos que $b(x)\,|\nabla u|^p \leq 0$.

Portanto, o resultado segue a partir do Teorema 0.7. Isto termina a demonstração do Corolário 0.1.

□

Agora demonstraremos o Teorema 0.5, o qual é uma adaptação do método em Dinu [25], isto é, usaremos novamente a técnica de sub e supersoluções.

Demonstração do Teorema 0.5. **Prova de (i).** Tome $\lambda \in (2\tilde{\Lambda}_1, \infty)$. Fazendo $\zeta_1(\lambda a) := \zeta_1(\lambda a, \Omega)$ e $w_{1,\lambda} := w_1(\lambda a, \Omega)$ e tal que satisfaz a equação (2.2.2).

Como $a > 0$ sobre $\overline{\Omega}$ e

$$\sigma_0 > \frac{2\zeta_1(a, \Omega)}{\lambda} = 2\zeta_1(\lambda a),$$

existe $\delta := \delta(\lambda) \in (0, 1)$ tal que

$$I^*_{\theta,f}(s) \geq 2\zeta_1(\lambda a), \qquad s \in (0, \delta). \tag{3.1.1}$$

Seja $\underline{u} = cw_{1,\lambda}$, onde $c > 0$ é uma constante. Afirmamos que $\underline{u}$ é uma subsolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.2, se c é tomado suficientemente pequeno. De fato, queremos mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \; dx + \int_\Omega \tilde{b}(x) \, |\nabla \underline{u}|^q \, \phi \; dx \leq \int_\Omega \lambda \; a(x)\sigma(\underline{u})\phi \; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \phi \geq 0,$$

onde $\tilde{b} := -b > 0$. Observe que é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \; dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda \; a(x)\sigma(\underline{u})\phi \; dx, \\ &\text{(ii)} \quad \int_\Omega \tilde{b}(x) \, |\nabla \underline{u}|^q \, \phi \; dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda \; a(x)\sigma(\underline{u})\phi \; dx. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Afirmamos que $\underline{u}$ satisfaz (3.1.2)(i) se

$$0 < c < \frac{\delta}{\max\limits_{\overline{\Omega}} w_{1,\lambda}}.$$

De fato, tome $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \geq 0$. Usando (2.2.2), (3.1.1) and (2.2.1)(i), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda \, a(x) I^*_{\theta,\sigma}(cw_{1,\lambda})(cw_{1,\lambda})^{p-1} \phi \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda \, a(x) \sigma(\underline{u}) \phi \, dx,\end{aligned}$$

provando (3.1.2)(i).

Agora, para mostrar (3.1.2)(ii), temos por (0.0.3) que existe $c \in (0, 1]$ tal que

$$2 \left| \frac{\tilde{b}}{\lambda a} \right|_\infty |\nabla w_{1,\lambda}|^q_\infty \leq \sigma(c_0 w_{1,\lambda}).$$

Então, para $c \in (0, 1]$,

$$2 \frac{\tilde{b}(x)}{\lambda a(x)} |\nabla (cw_{1,\lambda})|^q \leq 2c^q \left| \frac{\tilde{b}}{\lambda a} \right|_\infty |\nabla w_{1,\lambda}|^q_\infty \leq \sigma(c_0 w_{1,\lambda}). \tag{3.1.3}$$

Agora, multiplicando (3.1.3) por $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando sobre Ω, temos (3.1.2)(ii).

Por outro lado, a função $\overline{u} := v_\lambda$, onde v_λ é dada pelo Corolário 0.1 (i), satisfaz

$$\begin{gathered}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega \lambda \, a(x) \sigma(\overline{u}) \phi \, dx + \int_\Omega b(x) |\nabla u|^q \phi \, dx, \\ \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \overline{u} > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega},\end{gathered} \tag{3.1.4}$$

mostrando que $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.2. Procedendo como no Teorema 0.4, concluimos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω.

Como consequência do Teorema 1.2 existe uma função $u \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que

$$cw_{1,\lambda} \leq u \leq v_\lambda \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (0.0.14) no sentido das distribuições.

Prova de (ii). Tome $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Temos que

$$\sigma_0 > \frac{2\zeta_1(a, \Omega)}{\Lambda_0} = 2\zeta_1(\Lambda_0 a, \Omega) \geq 2\zeta(\lambda a).$$

Observando que $a > 0$ sobre $\overline{\Omega}$, existe $\delta := \delta(\lambda) \in (0,1)$ satisfazendo (3.1.1). Procedendo como na prova de (i), segue que $\underline{u} := cw_{1,\lambda}$ é uma subsolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.2.

Seja $\overline{u} := v_\lambda$, onde v_λ é dado pelo Corolário 0.1 (ii). Segue que $\overline{u}$ satisfaz (3.1.4) e então $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.0.14) com $\ell = 0$, no sentido do Teorema 1.2. O restante da prova segue como na prova de (i).

Prova de (iii). Note primeiramente que $\sigma_\infty = 0$. Tome $\Lambda_0 = \infty$. A prova segue as mesmas linhas das provas dos itens (i) e (ii), considerando separadamente os casos $1 < p < 2$ e $2 \leq p < \infty$.

Prova de (iv). Neste ponto observe que qualquer solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\, a(x)\varphi(u) + b(x)\,|\nabla u|^q \quad \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ u > \ell \;\; \text{em} \;\; \Omega, \quad u \leq m, \end{cases}$$

onde φ foi definida em (2.1.15), é uma solução de (0.0.14). Além disso, observe que o problema acima é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p z = \lambda\, a(x)\varphi(z+\ell) + b(x)\,|\nabla z|^q \quad \text{em} \;\; \Omega, \\ \\ z > 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega, \quad z \leq m - \ell. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Notando que

$$\frac{\varphi(s+\ell)}{s^\theta} = \frac{\varphi(s+\ell)}{(s+\ell)^\theta}\left(1 + \frac{\ell}{s}\right)^\theta \overset{s\to 0}{\to} \infty,$$

existe um $\delta := \delta(\lambda) \in (0,1)$ tal que

$$I^*_{\theta,\varphi}(s) > 2\zeta_1(\lambda a), \qquad s \in (0,\delta).$$

Fazendo $\underline{z} = cw_{1,\lambda}$ e procedendo como nos itens anteriores temos

$$\int_\Omega |\nabla \underline{z}|^{p-2}\, \nabla \underline{z} \cdot \nabla\phi\; dx + \int_\Omega \tilde{b}(x)\,|\nabla \underline{z}|^q\, \phi\; dx \leq \int_\Omega \lambda\; a(x)\varphi(\underline{z}+\ell)\phi\; dx,$$

onde $\phi \in C_0^\infty(\Omega),\;\; \phi \geq 0$.

Por outro lado, a função $\overline{z} := v_\lambda - \ell$, onde v_λ é dada pelo Corolário 0.1, satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla \overline{z}|^{p-2} \nabla \overline{z} \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega \lambda \, a(x) \varphi(\overline{z} + \ell) \phi \, dx + \int_\Omega b(x) \, |\nabla \overline{z}|^q \, \phi \, dx,$$

$$\overline{z} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \overline{z} > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega},$$

onde $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$.

Como feito na demonstração do Teorema 0.4, temos que $\underline{z} \leq \overline{z}$ em Ω. Procedendo como nas provas dos itens (i) e (ii) mostramos que $\underline{z}$ e $\overline{z}$ são sub e supersolução de (3.1.5), no sentido do Teorema 1.2.

Se $\ell = 0$, pelo Teorema 1.2 existe uma função $z \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que

$$c w_{1,\lambda} \leq z \leq v_\lambda \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (3.1.5) no sentido das distribuições.

Se $\ell > 0$, pelo Lema 1.2 existe $z \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$c w_{1,\lambda} \leq z \leq v_\lambda - \ell \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (3.1.5) no sentido fraco.

Portanto, fazendo $u := z + \ell$ segue que $z \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaz (0.0.14) e, se $\ell > 0$, então

$$c w_{1,\lambda} + \ell \leq u \leq v_\lambda \leq m \quad \text{em} \quad \Omega$$

e $u = \ell$ sobre $\partial\Omega$.

Prova de (v) e (vi). A prova segue os mesmos argumentos das provas dos itens (vi), (i), (ii). Isto termina a prova do Teorema 0.5.

$\square$

Demonstração do Teorema 0.2. **Prova de (i)**. Tome $\lambda \in (2\Lambda_1, \infty)$ e um inteiro $k \geq 1$. Considere o problema

$$-\Delta_p u = \lambda \ a(x)\sigma(u) + b(x) \left|\nabla u\right|^q \quad \text{em} \quad B_k, \quad u > \ell \quad \text{em} \quad B_k, \tag{3.1.6}$$

onde B_k é a bola de raio k centrada na origem do $\mathbf{R^N}$.

Usando as hipóteses do Teorema 0.2 (i) temos

$$\sigma_0 > \frac{2\zeta_1(a, B)}{\lambda} \geq \frac{2\zeta_1(a, B_k)}{\lambda}.$$

Pelo Teorema 0.5 (i) com $\Omega = B_k$, (3.1.6) admite uma solução $u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$ satisfazendo

$$0 < \underline{u} \leq u_k \leq v_\lambda \leq \mu,$$

onde $\underline{u}$ é a subsolução correspondente a $\Omega := B_k$ e v_λ é dada pelo Corolário 0.1 (i).

Agora provaremos algumas estimativas sobre $\{u_k\}$. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R^N})$ e tome um inteiro $k_1 \geq 1$ tal que $supp(\phi) \subset B_{k_1}$. Tome um domínio limitado $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ tal que

$$supp(\phi) \subset \Omega \subset\subset B_{k_1}.$$

Afirmamos que

$$\left\{ |u_k|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \right\}_{k=k_1}^{\infty} \quad \text{é limitado.} \tag{3.1.7}$$

De fato, fazendo $\Omega = B_{k_1}$ no Teorema 0.5 (i) e tomando $k \geq k_1$, afirmamos que

$$0 < \underline{u}_{k_1} \leq u_k \quad \text{em} \quad B_{k_1}, \quad k \geq k_1.$$

Agora seja

$$\rho_k(x) := \lambda \ a(x)\sigma(u_k(x)) + b(x) \left|\nabla u_k(x)\right|^q, \quad x \in B_{k_1}, \quad k \geq k_1$$

em (3.1.6) e note que

$$|\rho_k| \leq c(|u_k|) \left(1 + |\nabla u_k|^q\right).$$

Por resultados de DiBenedetto [23] e Tolksdorff [63] (cf. Apêndice C, Teorema C.2), existe uma constante positiva C, independente de k, tal que

$$|\nabla u_k(x)| \leq C \quad \text{e} \quad |\nabla u_k(x) - \nabla u_k(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}\,, \quad x, y \in \overline{\Omega},$$

mostrando (3.1.7).

Usando a imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, existe uma função $u := u_\Omega \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_k \to u$ em $C^1(\overline{\Omega})$ e, passando o limite em (3.1.6),

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \cdot \nabla \phi\; dx = \int_\Omega \lambda\; a(x)\sigma(u)\phi\; dx + \int_\Omega b(x)\,|\nabla u|^q\,\phi\; dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como $\mathbf{R^N} = \bigcup B_k$ temos, aplicando o conhecido processo da sequência diagonal de Cantor, que existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_k\}$, tal que a função definida por

$$u(x) := \lim_k u_k(x), \quad x \in \mathbf{R^N},$$

pertence a $C^1(\mathbf{R^N})$ e satisfaz (0.0.1) no sentido das distribuições.

Prova de (ii). Seja $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Usando as hipóteses do Teorema 0.2 (ii) temos

$$\sigma_0 > \frac{2\zeta_1(a,B)}{\Lambda_0} \geq \frac{2\zeta_1(a,B_k)}{\Lambda_0}, \quad k \geq 1.$$

Pelo Teorema 0.5 (ii) com $\Omega = B_k$, (3.1.6) admite uma solução

$$u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k).$$

Além disso, temos

$$0 < \underline{u} \leq u_k \leq v_\lambda \leq \mu,$$

onde $\underline{u}$ é a subsolução correspondente a $\Omega := B_k$ e v_λ é a função dada pelo Corolário 0.1(ii). A prova de (ii) agora segue como no item (i).

Prova de (iii). Recordando que $\sigma_\infty = 0$, faça $\Lambda_0 = \infty$. Tome $\lambda \in (\Lambda_1, \infty)$. A prova segue as mesmas linhas dos itens (i) e (ii), considerando separadamente os casos $1 < p < 2$ e $2 \leq p < \infty$.

Prova de (iv). Seja $\lambda \in (0, \Lambda_2)$. Pelo Teorema 0.5(iv), o problema (3.1.6) admite uma solução

$$u_k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$$

e além disso,

$$0 < \underline{u} \le u_k \le v_\lambda \le m.$$

O resultado segue procedendo como na prova do item (i).

Prova de (v), (vi). A prova segue os mesmos argumentos das provas dos itens (i) e (ii).

Isto termina a prova do Teorema 0.2.

□

3.2 Existência: Termo Convectivo com Coeficiente Positivo

Começaremos a seção demonstrando o Teorema 0.8.

Demonstração do Teorema 0.8. Passo 1: Prova de (i). Seja

$$\Psi(r) := r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} M(t)dt, \quad \forall\ r > 0.$$

Pela condição (0.0.8) com $p = 2$ e, pela regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{r \to 0} \Psi(r) = \lim_{r \to \infty} \Psi(r) = 0.$$

Logo, Ψ é limitado em $(0, \infty)$ e assim pode ser estendido para a origem tomando $\Psi(0) = 0$. Por outro lado, integrando Ψ de 0 a ∞, temos por (0.0.10) que

$$\int_0^\infty \Psi(r)dr = \lim_{r \to \infty} \int_0^r \Psi(r)dr = \alpha < \infty.$$

Sejam

$$k := \max \left\{ 3, \left[2 \max_{r \ge 0} \Psi(r)^q \right]^{\frac{1}{1-q}} \right\}$$

e

$$\hat{\Lambda}_0 = \min \left\{ 1, \frac{1}{2k\alpha\sigma_\infty} \right\}.$$

Tome $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_0]$ e defina $\omega := \omega_\lambda$ por

$$\omega(r) := k\lambda \int_r^\infty \Big[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} M(s)\ ds\Big] dt, \qquad r \geq 0.$$

Segue que $\omega(0) = k\lambda\alpha$ e ω satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\omega = k\ \lambda\ M(|x|) \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \\ \\ \omega > 0 \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \quad \omega(|x|) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Definindo

$$h_\sigma(s) := s\left(\Gamma_\sigma^*(s) + 1/s\right), \quad s > 0,$$

segue facilmente que

$$\begin{gathered} \text{(i)} \ \ h_\sigma(s) > s\Gamma_\sigma^*(s) \geq \sigma(s), \quad \text{(ii)} \ \ h_\sigma(s)/s \text{ é decrescente}, \\ \text{(iii)} \ \ \frac{h_\sigma(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iv)} \ \ \frac{h_\sigma(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty. \end{gathered} \tag{3.2.2}$$

Considere a função contínua H_σ definida por

$$H_\sigma(r) = \frac{1}{k\alpha r} \int_0^r \frac{t}{h_\sigma(t) + 1} dt, \quad r > 0.$$

Afirmamos que

$$\text{(i)} \ \ H_\sigma(r) \overset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{k\alpha\sigma_\infty}, \qquad \text{(ii)} \ \ H_\sigma(r) \overset{r\to 0}{\to} 0. \tag{3.2.3}$$

As provas de (3.2.3)(i)(ii) são feitas através de cálculos simples de limites. Mostraremos o item (i):

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{k\alpha r} \int_0^r \frac{t}{h_\sigma(t) + 1} dt = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{k\alpha} \frac{r}{h_\sigma(r) + 1} = \frac{1}{k\alpha\sigma_\infty}.$$

Agora segue como consequência de (3.2.3)(i)(ii) que para cada $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_0]$ existe algum $\mu \in (0, \infty)$ tal que

$$H_\sigma(\mu) = \lambda.$$

Por definição de H_σ,

$$\frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{t}{h_\sigma(t) + 1} dt = k\lambda\alpha. \tag{3.2.4}$$

Considere a função $P : [0,\infty) \times [0,\mu] \to \mathbf{R}$,

$$P(t,s) := \omega(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^s \frac{t}{h_\sigma(t)+1}dt.$$

Temos que

$$P(t,0) = \omega(t) > 0, \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

e por (3.2.4),

$$P(t,\mu) = \omega(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^\mu \frac{t}{h_\sigma(t)+1}dt < 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial P(t,s)}{\partial s} = -\frac{1}{\mu}\frac{s}{h_\sigma(s)+1} < 0, \quad s > 0.$$

Logo, existe uma função $v : [0,\infty) \to [0,\mu]$ tal que

$$P(r, v(r)) = 0, \quad r > 0,$$

o qual nos dá

$$\omega(r) = \frac{1}{\mu}\int_0^{v(r)} \frac{t}{h_\sigma(t)+1}dt. \tag{3.2.5}$$

Note que

$$v(|x|) \leq \mu.$$

Agora, derivando (3.2.5) com respeito a r, temos

$$v'(r) = \mu\frac{h_\sigma(v)+1}{v}\omega'(r) = k\ \lambda\ \mu\Psi(|x|)\frac{h_\sigma(v)+1}{v}. \tag{3.2.6}$$

Derivando a expressão acima, temos

$$\frac{1}{\mu}\frac{v}{h_\sigma(v)+1}v'' + \frac{1}{\mu}\frac{d}{dv}\left(\frac{v}{h_\sigma(v)+1}\right)|v'|^2 = \omega''.$$

Como

$$\frac{h_\sigma(v)+1}{v} \quad \text{é decrescente em} \quad v,$$

segue que

$$v'' \leq \mu\frac{h_\sigma(v)+1}{v}\omega''.$$

Recordando que v e ω são radialmente simétricas, inferimos que

$$\Delta v \leq \mu \frac{h_\sigma(v)+1}{v} \Delta \omega.$$

Usando a equação em (3.2.1) e a expressão (3.2.6), temos

$$\begin{aligned}
-\Delta v &\geq k\ \lambda\ \mu M(|x|) \frac{h_\sigma(v)+1}{v} \\
&\geq \mu\ \lambda\ a(x) \frac{h_\sigma(v)+1}{v} + \frac{k}{2} \mu\ \lambda\ a(x) \frac{h_\sigma(v)+1}{v} \\
&\geq \lambda\ a(x)\left(h_\sigma(v)+1\right) + \lambda\ a(x) \left[\lambda k \mu \frac{h_\sigma(v)+1}{v} \Psi(|x|)\right]^q \\
&= \lambda\ a(x)\left(h_\sigma(v)+1\right) + \lambda\ a(x) \left|\nabla v\right|^q .
\end{aligned}$$

e, por (3.2.2)(i), temos

$$-\Delta v \geq \lambda\ a(x)\left(\sigma(v) + |\nabla v|^q\right) \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}.$$

Agora, como $\omega(r) \stackrel{r \to \infty}{\to} 0$, segue por (3.2.5) que $v(r) \stackrel{r\to\infty}{\to} 0$. Por outro lado, $\omega(0) = k\lambda\alpha$, e por (3.2.4) e (3.2.5), temos respectivamente que

$$\omega(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{t}{h_\sigma(t)+1} dt \ \text{ e } \ \omega(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{v(0)} \frac{t}{h_\sigma(t)+1} dt.$$

Como $v(0) = \mu$ e v é radialmente simétrica, inferimos que $|v_\lambda|_\infty = \mu$. Isto termina a prova do item (i).

Passo 2: Prova de (ii). Considere a função $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \sigma(s), & \text{se } \ 0 < s \leq m, \\ I_{m,2} s, & \text{se } \ s > m. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Note que $\varphi \in C^1$ e satisfaz

$$\text{(i)} \ \frac{\varphi(s)}{s} \stackrel{s\to 0}{\to} \infty, \qquad \text{(ii)} \ \frac{\varphi(s)}{s} \stackrel{s\to\infty}{\to} I_{m,2}.$$

Além disso, qualquer solução de

$$\begin{cases} -\Delta v \geq \lambda\ a(x)\left(\varphi(v) + |\nabla v|^q\right) \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \\ v > 0 \ \text{ em } \ \mathbf{R^N}, \quad v(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad v \leq m, \end{cases}$$

é também solução de (0.0.17). Fazendo

$$h_\varphi(s) := s\left(\Gamma^*_\varphi(s) + 1/s\right), \quad s > 0,$$

temos que

$$\text{(i)} \;\; h_\varphi(s) > s\Gamma^*_\varphi \geq \varphi(s), \quad \text{(ii)} \;\; \frac{h_\varphi(s)}{s} \text{ é decrescente,}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{h_\varphi(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty, \quad \text{(iv)} \;\; \frac{h_\varphi(s)}{s} \overset{s\to\infty}{\to} I_{m,2}.$$

Tome k como na prova do item (i). Seja

$$H_\varphi(r) = \frac{1}{k\alpha r}\int_0^r \frac{t}{h_\varphi(t)+1}\,dt, \quad r > 0,$$

e note que H_φ é crescente em r.

Por argumentos similares aos da prova do item (i) temos que

$$\text{(i)} \;\; H_\varphi(r) \overset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{k\alpha I_{m,2}}, \qquad \text{(ii)} \;\; H_\varphi(r) \overset{r\to 0}{\to} 0. \tag{3.2.8}$$

Seja

$$\hat{\Lambda}_1 := \min\left\{1, H_\varphi(m)\right\}$$

e tome $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_1]$. Por (3.2.8)(i)(ii) existe $\mu := \mu(\lambda) \in (0, m]$ tal que $H_\varphi(\mu) = \lambda$. Note que

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\mu \frac{t}{h_\phi(t)+1}dt = k\lambda\alpha.$$

Agora a prova segue como na prova do item (i). Isto termina a demonstração do Teorema 0.8.

$\square$

Demonstração do Teorema 0.6. Prova de (i). Tome $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_0]$. Como

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a,\Omega)}{\Lambda_0} = \zeta_1(\Lambda_0 a, \Omega) \geq \zeta_1(\lambda a),$$

existe $\delta := \delta(\lambda) > 0$ tal que

$$I^*_\sigma(s) \geq \zeta_1(\lambda a), \quad s \in (0, \delta).$$

Seja $\underline{u} = cw_{1,\lambda}$ onde $c > 0$ é uma constante. Afirmamos que $\underline{u}$ é uma subsolução de

$$-\Delta u = \lambda\, a(x)\,(\sigma(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \qquad (3.2.9)$$

se c é tomando suficientemente pequeno. De fato, seja

$$0 < c < \frac{\delta}{\max\limits_{\overline{\Omega}} w_{1,\lambda}}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &= \lambda\, a(x)\zeta_1(\lambda a)(cw_{1,\lambda}) \leq \lambda\, a(x) I^*_\sigma(cw_{1,\lambda})(cw_{1,\lambda}) \\ &\leq \lambda\, a(x)\sigma(\underline{u}) \leq \lambda\, a(x)\,(\sigma(\underline{u}) + |\nabla \underline{u}|^q)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, a função $\overline{u} := v_\lambda$, onde v_λ é dada pelo Teorema 0.8 (i), satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v \geq a(x)\,(\sigma(v) + |\nabla v|^q) \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \\ \\ v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbf{R^N}, \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\rightarrow} 0. \end{cases}$$

Logo $\overline{u} := v_\lambda$ é uma supersolução de (3.2.9). Agora, provaremos que

$$\underline{u} \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

De fato, suponha o contrário, isto é, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\overline{u}(x_0) < \underline{u}(x_0)$. Então,

$$\sup_{x\in\Omega}\,(ln(\underline{u}(x)) - ln(\overline{u}(x)))$$

existe e é positivo em Ω. Neste ponto, temos

$$\nabla\,(ln(\underline{u}(x_0)) - ln(\overline{u}(x_0))) = 0$$
$$\Delta\,(ln(\underline{u}(x_0)) - ln(\overline{u}(x_0))) \leq 0.$$

Como Γ^*_σ é não-crescente, temos

$$\Gamma^*_\sigma(\overline{u}(x_0)) \geq \Gamma^*_\sigma(\underline{u}(x_0)) \geq \frac{\sigma(\underline{u}(x_0))}{\underline{u}(x_0)}.$$

Então obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(ln(\underline{u}(x_0)) - ln(\overline{u}(x_0))\right) &= \frac{\Delta\underline{u}(x_0)}{\underline{u}(x_0)} - \frac{\Delta\overline{u}(x_0)}{\overline{u}(x_0)} - \frac{|\nabla\underline{u}(x_0)|^2}{(\underline{u}(x_0))^2} + \frac{|\nabla\overline{u}(x_0)|^2}{(\overline{u}(x_0))^2} \\
&= \frac{\Delta\underline{u}(x_0)}{\underline{u}(x_0)} - \frac{\Delta\overline{u}(x_0)}{\overline{u}(x_0)} \\
&\geq \lambda\, a(x_0)\Big(\big[\frac{h_\sigma(\overline{u}(x_0))}{\overline{u}(x_0)} - \frac{\sigma(\underline{u}(x_0))}{\underline{u}(x_0)}\big] + \frac{|\nabla\overline{u}(x_0)|^q}{\overline{u}(x_0)}\Big) \\
&= \lambda\, a(x_0)\Big(\big[\Gamma^*_\sigma(\overline{u}(x_0)) - \frac{\sigma(\underline{u}(x_0))}{\underline{u}(x_0)}\big] + \frac{1}{\overline{u}(x_0)} + \frac{|\nabla\overline{u}(x_0)|^q}{\overline{u}(x_0)}\Big) \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição. Portanto $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Pelo Lema C.6 (cf. Apêndice C), a prova do item (i) está completa.

Prova de (ii). Neste ponto observamos que qualquer solução do problema

$$
\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, a(x)\,(\varphi(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u \leq m, \end{cases} \tag{3.2.10}
$$

onde φ foi definido em (3.2.7), é solução de (0.0.15).

Notando que

$$
\frac{\varphi(s)}{s} \overset{s\to 0}{\to} \infty,
$$

existe algum $\delta := \delta(\lambda) > 0$ tal que

$$
I^*_\varphi(s) > \zeta_1(\lambda a), \qquad s \in (0, \delta).
$$

Procedendo como antes, na prova do item (i), segue que $\underline{u} = cw_{1,\lambda}$ é uma subsolução de

$$
\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, a(x)\,(\varphi(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.11}
$$

Por outro lado, a função $\overline{u} := v_\lambda$, com v_λ dado por Teorema 0.8 (ii), é uma supersolução de (3.2.11).

Procedendo novamente como na prova de (i), temos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω. Pelo Lema C.6 (cf. Apêndice C), existe $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que

$$cw_{1,\lambda} \leq u \leq v_\lambda \quad \text{em} \quad \Omega,$$

satisfazendo (0.0.15). Isto termina a prova do Teorema 0.6.

□

Demonstração do Teorema 0.3. Prova de (i). Seja $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_0]$ e considere o problema

$$-\Delta u = \lambda\, a(x)\, (\sigma(u) + |\nabla u|^q) \quad \text{em} \quad B_n, \qquad u > 0 \quad \text{em} \quad B_n, \tag{3.2.12}$$

onde $B_n := \{x \in \mathbf{R^N}; |x| < n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Usando as hipóteses do Teorema 0.3(i), temos

$$\sigma_0 > \frac{\zeta_1(a, B)}{\hat{\Lambda}_0} \geq \frac{\zeta_1(a, B_n)}{\hat{\Lambda}_0}, \quad n \geq 1.$$

Segue, pelo Teorema 0.6 (i), que o problema (3.2.12) tem ao menos uma solução $u_n \in C^2(B_n) \cap C(\overline{B_n})$.

Tome

$$u_n(x) = 0, \quad \forall\ |x| > n.$$

Seja v_λ dado pelo Teorema 0.8 (i), no qual temos

$$u_n(x) \leq v_\lambda(x),\ x \in \mathbf{R^N},\ n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.2.13}$$

Agora, precisamos estimar $\{u_n\}$. Para qualquer domínio limitado regular $\Omega' \subset \mathbf{R^N}$, tome Ω_1 e Ω_2 regulares, e K_1 suficientemente grande, tais que

$$\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset B_n, \quad n \geq K_1.$$

Note que

$$u_n(x) \geq \underline{u}_{K_1}(x) > 0, \quad \forall x \in B_{K_1}, \tag{3.2.14}$$

onde B_{K_1} é substituido por Ω na prova do Teorema 0.6 (i).

Seja

$$\rho_n(x) = \lambda a(x)\left(\sigma(u_n) + |\nabla u_n|^q\right), \quad x \in \overline{B}_{K_1}.$$

Como $-\Delta u_n(x) = \rho_n(x)$, $x \in B_{K_1}$, por estimativas no interior de Ladyzenskaja & Ural'tseva [41], (cf. Teorema 3.1, p. 266), obtemos uma constante positiva C_1 independente de n, tal que

$$\max_{x\in\overline{\Omega}_2} |\nabla u_n(x)| \leq C_1 \max_{x\in\overline{B}_{K_1}} u_n(x) \leq C_1 \max_{x\in\overline{B}_{K_1}} v(x), \quad \forall\, x \in B_{K_1},$$

isto é, $|\nabla u_n(x)|$ é uniformemente limitado em $\overline{\Omega}_2$.

Segue que $\{\rho_n\}_{K_1}^{\infty}$ é uniformemente limitado em $\overline{\Omega}_2$ e então $\rho_n \in L^p(\Omega_2)$ para qualquer $p > 1$.

Como $-\Delta u_n(x) = \rho_n(x)$, $x \in \Omega_2$, temos por [32], (cf. Teorema 9.11), que existe uma constante positiva C_2, independente de n, tal que

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega_1)} \leq C_2\left(\|\rho_n\|_{L^p(\Omega_2)} + \|u_n\|_{L^p(\Omega_2)}\right), \quad \forall\, n \geq K_1.$$

Tomando $p > N$ tal que $\alpha < 1 - N/p$ e aplicando a imersão de Sobolev, temos que

$$\{\|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}\}_{K_1}^{\infty}$$

é uniformemente limitado. Portanto $\rho_n \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_1)$ e

$$\{\|\rho_n\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)}\}_{K_1}^{\infty}$$

é uniformente limitado. Segue, por estimativas interiores de Schauder [32], (cf. Capítulo 1 p. 2), que existe uma constante positiva C_3, independente de n, tal que

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C_3\left(\|\rho_n\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)} + \|u_n\|_{C(\overline{\Omega}_1)}\right), \quad \forall\, n \geq K_1;$$

isto é, $\{\|u_n\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})}\}_{K_1}^{\infty}$ é uniformemente limitado. Usando o Teorema de Ascoli-Arzelá e o argumento da sequência diagonal de Cantor, a sequência $\{u_n\}_{K_1}^{\infty}$ tem uma subsequência uniformemente convergente em $C^2(\overline{\Omega'})$ para a função $u \in C^2(\overline{\Omega'})$ e u satisfaz

$$-\Delta u = \lambda\ a(x)\left(\sigma(u) + |\nabla u|^q\right), \quad x \in \overline{\Omega'}.$$

Por (3.2.14), obtemos que

$$u > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega'}.$$

Aplicando o Teorema de regularidade de Schauder, temos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$. Como Ω' é arbitrário, temos também que $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbf{R^N})$.

Segue por (3.2.13) que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Assim, por um argumento de bootstrap padrão, mostra-se que u é uma solução clássica do problema (0.0.13). Isto termina a prova do item (i).

Prova de (ii). Seja $\lambda \in (0, \hat{\Lambda}_1]$. Pelo Teorema 0.6 (ii), o problema (3.2.12) admite uma solução

$$u_n \in C(\overline{B_n}) \cap C^2(B_n),$$

e além disso,

$$0 < \underline{u}_{K_1} \leq u_n \leq v_\lambda \leq m.$$

O resultado segue procedendo como na prova do item (i).

Isto termina a prova do Teorema 0.3.

□

3.3 Não-Existência

Usamos a seguinte variante do resultado de [67] cujo esboço da prova está no Apêndice B. A prova do Teorema 0.9 é baseada em argumentos de [18].

Lema 3.1. *Suponha que $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é C^1 e satisfaz (0.0.2), com $0 < \sigma_0 \leq \infty$ e $0 \leq \sigma_\infty < \infty$. Então existe uma função C^1, $I^*_\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tal que*

$$(i)\ \frac{\sigma(s)}{s+1} \geq I^*_\sigma(s) \ \ para \ \ s > 0, \quad (ii)\ I^*_\sigma \text{ é não-crescente}, \quad (iii)\ I^*_\sigma(s) \overset{s\to 0}{\to} \sigma_0.$$

Prova do Teorema 0.9. Suponha, por contradição, que (0.0.13) tenha uma solução radialmente simétrica, digamos $u(x) := u(|x|) := u(r)$.

Então

$$-\Delta u(r) = \lambda\ a(r) \left(\sigma(u(r)) + |\nabla u(r)|^q\right),$$

e como consequência $u(r)$ satisfaz

$$-\left(r^{N-1}u^{'}(r)\right)^{'} \geq r^{N-1}\lambda\ a(r)\sigma(u(r)). \tag{3.3.1}$$

Integrando (3.3.1) de 0 a r, temos que

$$-r^{N-1}u^{'}(r) \geq \int_0^r s^{N-1}\lambda a(s)\sigma(u(s))ds,$$

o qual nos dá $u^{'}(r) < 0$. Fazendo

$$\widetilde{u}(r) = ln(u(r)+1), \quad r > 0,$$

e derivando duas vezes, obtemos

$$\Delta\widetilde{u}(r) = \frac{1}{u(r)+1}\Delta u(r) - \frac{1}{(u(r)+1)^2}|\nabla u|^2,$$

mostrando que $\widetilde{u}(r)$ satisfaz

$$\widetilde{u}^{''} + \frac{N-1}{r}\widetilde{u}^{'} + \frac{1}{(u(r)+1)^2}|\nabla u|^2 \leq -\lambda a(r)\frac{\sigma(u(r))}{u(r)+1}. \tag{3.3.2}$$

Multiplicando a equação (3.3.2) por r^{N-1} e integrando de 0 a ξ, encontra-se

$$\widetilde{u}^{'}(\xi)\xi^{N-1} + \int_0^\xi \frac{s^{N-1}}{(u(s)+1)^2}|\nabla u|^2 ds \leq -\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)\frac{\sigma(u(s))}{u(s)+1}ds. \tag{3.3.3}$$

Agora, multiplicando (3.3.3) por ξ^{1-N} e integrando de 0 a ξ,

$$\widetilde{u}(r)-\widetilde{u}(0)+\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi \frac{s^{N-1}}{(u(s)+1)^2}\left|\nabla u\right|^2 dsd\xi$$

$$\leq -\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)\frac{\sigma(u(s))}{u(s)+1}dsd\xi. \tag{3.3.4}$$

Observe que $u(r) < u(0)$ e $\widetilde{u}(r) < \widetilde{u}(0)$ para $r > 0$. Como $\widetilde{u}(r)$ é positivo, (3.3.4) dá

$$\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)\frac{\sigma(u(s))}{u(s)+1}dsd\xi \leq \widetilde{u}(0), \tag{3.3.5}$$

para $r > 0$. Agora, usando o Lema 3.1 em (3.3.5), temos

$$\begin{aligned}\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)I_\sigma^*(u(s))dsd\xi &\leq \int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)\frac{\sigma(u(s))}{u(s)+1}dsd\xi\\ &\leq \int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)\frac{\sigma(u(s))}{u(s)+1}dsd\xi\\ &\leq \widetilde{u}(0).\end{aligned}$$

Mas, como I_σ^* é não-crescente em $(0,\infty)$, temos

$$\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)dsd\xi \leq \frac{1}{I_\sigma^*(u(0))}\widetilde{u}(0) < \infty,$$

o que é impossível porque, por (0.0.19),

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r \xi^{1-N}\int_0^\xi s^{N-1}\lambda a(s)dsd\xi = \infty.$$

Isto termina a prova do Teorema 0.9.

□

APÊNDICE A

Sub e Supersoluções de Problemas Não-Singulares

Neste Apêndice demonstraremos os Lemas de sub e supersoluções para funções não-singulares. Demonstraremos o caso em que $b = 0$, isto é, o Lema 1.1, e também o Lema 1.2, que é o caso $b \neq 0$.

A.1 Sub e Supersolução Sem Termo Convectivo: Prova do Lema 1.1

Para provar o Lema 1.1 definamos a função $\tilde{g} : \overline{\Omega} \times R \to R$ por

$$\tilde{g}(x,s) = \begin{cases} g(x, \underline{u}(x)) & \text{se} \quad s < \underline{u}(x), \\ g(x,s) & \text{se} \quad \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x), \\ g(x, \overline{u}(x) & \text{se} \quad s > \overline{u}(x). \end{cases}$$

Segue que $\tilde{g}$ satisfaz a condição de Carathéodory e, por (1.1.3), concluímos que $\tilde{g}(x,s)$ é limitada por alguma constante positiva C.

Agora, consideremos o funcional $\tilde{\Phi} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{R}$ definido por

$$\tilde{\Phi}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega \tilde{G}(x,u)dx, \tag{A.1.1}$$

onde

$$\tilde{G}(x,s) = \int_0^s \tilde{g}(x,\tau)d\tau.$$

Continuaremos a demonstração do Lema 1.1 seguindo por passos:

Passo 1: Primeiramente provaremos que $\tilde{\Phi}$ é coercivo. Usando que $\tilde{g}(x,s)$ é limitada e a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que

$$\tilde{\Phi}(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \tilde{C}\|u\|,$$

assim, como $p > 1$,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \tilde{\Phi}(u) = \infty,$$

donde segue a afirmação.

A seguir, provaremos que $\tilde{\Phi}$ é fracamente semicontínuo inferior. Como $\|\cdot\|^p$, para $p > 1$, é fortemente contínua e convexa, então $\|\cdot\|^p$ é fracamente semicontínuo inferior, portanto, só falta mostrar que o segundo termo de (A.1.1) é fracamente semicontínuo inferior. Para isso definamos o funcional $\Psi : L^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ por

$$\Psi(u) = \int_\Omega \tilde{G}(x,u(x))dx,$$

e provemos que ele é contínuo.

Seja $\{u_n\} \subset L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, então existem uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \xrightarrow{q.t.p.} u \quad \text{e} \quad |u_n| \leq h.$$

Usando a continuidade de $\tilde{G}(x,.)$, temos que

$$\tilde{G}(x,u_n(x)) \to \tilde{G}(x,u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e como

$$\left|\tilde{G}(x, u_n(x))\right| \leq \tilde{h}(x), \quad \text{onde} \quad \tilde{h} = C \cdot h \in L^1(\Omega),$$

temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\Psi(u_n) \to \Psi(u).$$

Assim, se $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$, pela imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, então, usando a continuidade de Ψ, resulta que

$$\int_\Omega \tilde{G}(x, u_n(x))dx \to \int_\Omega \tilde{G}(x, u(x))dx,$$

e daí

$$\tilde{\Phi}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \tilde{\Phi}(u_n).$$

Logo, existe $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\tilde{\Phi}(u_1) = \inf_{u \in W_0^{1,p}} \tilde{\Phi}(u),$$

isto é, u_1 é o mínimo global de $\tilde{\Phi}$. Como $\tilde{\Phi}$ é diferenciável, u_1 é um ponto crítico de (A.1.1), e assim satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega \tilde{g}(x, u_1)\phi \, dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.1.2}$$

Passo 2: Mostraremos agora que $\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}$.

De fato, usando a definição de subsolução e (A.1.2), temos que

$$\int_\Omega \left[|\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1\right] \cdot \nabla \phi \, dx \leq \int_\Omega \left[g(x, \underline{u}) - \tilde{g}(x, u_1)\right] \phi \, dx,$$

para $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geq 0$.

Escolhendo $\phi = [\underline{u} - u_1]^+$ obtemos, usando a definição de $\tilde{g}$, que

$$\int_\Omega \left[g(x, \underline{u}) - \tilde{g}(x, u_1)\right] \cdot (\underline{u} - u_1)^+ \, dx = \int_{\{\underline{u} - u_1 \geq 0\}} \left[g(x, \underline{u}) - \tilde{g}(x, u_1)\right](\underline{u} - u_1) \, dx = 0.$$

Consequentemente pela Proposição C.1 (cf. Apêndice C), temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\{\underline{u}-u_1\geq 0\}} \left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right)\cdot \nabla(\underline{u}-u_1)\,dx \\ &\geq \begin{cases} c_p \int_{\{\underline{u}-u_1\geq 0\}} |\nabla(\underline{u}-u_1)|^p\,dx & \text{se} \quad p\geq 2, \\ \\ c_p \dfrac{\left(\int_{\{\underline{u}-u_1\geq 0\}}|\nabla(\underline{u}-u_1)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_{\{\underline{u}-u_1\geq 0\}}(|\nabla \underline{u}|+|\nabla u_1|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} & \text{se} \quad 1<p\leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, para qualquer $p>1$, temos que

$$0 = \int_{\{\underline{u}-u_1\geq 0\}} |\nabla(\underline{u}-u_1)|^p\,dx = \int_\Omega \left|\nabla(\underline{u}-u_1)^+\right|^p\,dx,$$

então

$$(\underline{u}-u_1)^+ = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja, $\underline{u}\leq u_1$.

Da mesma forma, podemos verificar que $u_1\leq \overline{u}$. Portanto

$$\tilde{g}(x,u_1) = g(x,u_1)$$

e, pela definição de $\tilde{g}$, temos que u_1 é uma solução de (1.1.2).

Passo 3: Regularidade da solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Usando o fato que $\tilde{g}(\cdot,u_1(\cdot))$ é limitada, temos que $\tilde{g}(\cdot,u_1(\cdot)) \in L^\infty(\Omega)$. Então $\tilde{g}(\cdot,u_1(\cdot)) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_p u_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Por outro lado,

$$-u_1\Delta_p u_1 = u_1\tilde{g}(x,u_1) \leq C\,|u_1|\,, \qquad C>0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então, pelo Lema C.2 (cf. Apêndice C), $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, daí, $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Finalmente, como $\Delta_p u_1 \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema C.1 (cf. Apêndice C),

$$u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \text{para algum } \alpha\in(0,1).$$

$\square$

A.2 Sub e Supersolução Com Termo Convectivo: Prova do Lema 1.2

Procederemos com base nas idéias de Boccardo, Murat & Puel [9].

Defina $g : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ por

$$g(x,s,\xi) = \begin{cases} F(x,\underline{u}(x),\nabla\underline{u}(x)) & \text{se} \quad s < \underline{u}(x), \\ F(x,s,\xi) & \text{se} \quad \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x), \\ F(x,\overline{u}(x),\nabla\overline{u}(x)) & \text{se} \quad s > \overline{u}(x). \end{cases}$$

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = G(u,\nabla u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{A.2.1}$$

onde $G(u,\nabla u)(x) = g(x,u(x),\nabla u(x))$. Segue que o operador $G : W^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ está bem definido e é contínuo. Além disso, existe uma constante C_0, tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|G(u,\nabla u)(x)| \leq C_0\left(1 + |\nabla u(x)|^p\right). \tag{A.2.2}$$

Afirmamos que toda solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (A.2.1) satisfaz $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ e, além disso, u é uma solução de (1.2.3). De fato, seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução de (A.2.1), mostraremos que $\underline{u} \leq u$. Como $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\underline{u} \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, temos

$$[\underline{u} - u]^+ \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Usando a definição de subsolução, temos

$$\int_\Omega \left[|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right] \cdot \nabla\phi \, dx \leq \int_\Omega \left[F(x,\underline{u},\nabla\underline{u}) - g(x,u,\nabla u)\right]\phi \, dx,$$

para $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$. Tomando $\phi = [\underline{u} - u]^+$ e recordando a definição de G, temos

$$\int_{\{\underline{u}-u\geq 0\}} \left[F(x,\underline{u},\nabla\underline{u}) - g(x,u,\nabla u)\right](\underline{u} - u) \, dx = 0,$$

e então

$$0 \geq \int_{\{\underline{u}-u\geq 0\}} \left[|\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \nabla(\underline{u} - u)\ dx.$$

Usando a Proposição C.1 (cf. Apêndice C), encontramos

$$0 \geq \int_{\{\underline{u}-u\geq 0\}} \left[|\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \nabla(\underline{u} - u)\ dx \geq \int_{\Omega} |\nabla(\underline{u} - u)^{+}|^{p}\ dx.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} |\nabla(\underline{u} - u)^{+}|^{p}\ dx = 0,$$

mostrando que $(\underline{u} - u)^{+} = 0$, q.t.p. em Ω e, como consequência, $\underline{u} \leq u$. Similarmente mostra-se que $u \leq \overline{u}$ e portanto

$$g(x, u, \nabla u) = F(x, u, \nabla u).$$

Agora definiremos um problema aproximado de (A.2.1). Para $m \in \mathbf{N}$, defina a função $g_m : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ como segue abaixo

$$g_m(x, s, \xi) = \begin{cases} g(x, s, \xi) & \text{se} \quad |g(x, s, \xi)| \leq m, \\ \\ m\dfrac{g(x, s, \xi)}{|g(x, s, \xi)|} & \text{se} \quad |g(x, s, \xi)| > m. \end{cases} \tag{A.2.3}$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, considere $G_m(u, \nabla u)$ definido por

$$G_m(u, \nabla u)(x) = g_m(x, u(x), \nabla u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Para $m \in \mathbf{N}$ fixado e para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, claramente temos que $G_m(u, \nabla u) \in L^{\infty}(\Omega)$ e, além disso, para todo $q \in [1, \infty)$, a aplicação $u \mapsto G_m(u, \nabla u)$ é contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$.

Por outro lado, de (A.2.2) e (A.2.3) temos que, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|G_m(u, \nabla u)(x)| \leq C_0 \left(1 + |\nabla u(x)|^{p}\right), \tag{A.2.4}$$

onde C_0 está definido em (A.2.2) e é independente de m.

Agora considere o problema aproximado

$$\begin{cases} -\Delta_p u_m = G_m(u_m, \nabla u_m) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u_m \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{A.2.5}$$

Afirmamos que, para todo $m \in \mathbf{N}$, o problema (A.2.5) admite uma solução $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido das distribuições. De fato, defina para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$T_m(v) = -\Delta_p v - G_m(v, \nabla v).$$

Como $G_m \in L^\infty(\Omega)$, segue facilmente a verificação da coercividade de T_m.

Para estabelecer que T_m é um operador no cálculo das variações, no sentido de Lions [47](cf. Definição 2.2, p. 180), consideramos o Lema C.5 (cf. Apêndice C). E assim pela Proposição 2.6 de [47] que nos diz: T_m é um operador no cálculo das variações $\Rightarrow T_m$ é pseudo-monótono. Logo pelo Corolário 2.1 de [47] segue a afirmação.

Agora precisamos estimar as soluções $\{u_m\}$, independente de m, do problema (A.2.5). Primeiramente, tome

$$m_0 = \sup\left[|F(x, \underline{u}, \nabla \underline{u})|_{L^\infty(\Omega)}, |F(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})|_{L^\infty(\Omega)} \right].$$

Afirmamos que, se $m \geq m_0$ então, para toda solução u_m de (A.2.5), temos que $\underline{u} \leq u_m \leq \overline{u}$. De fato, mostraremos que $\underline{u} \leq u_m$.

Como $m \geq m_0$, temos

$$g_m(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) = G(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) = F(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}).$$

Se $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução de (A.2.5), então procedemos como anteriormente, obtendo

$$g_m(x, u_m, \nabla u_m) = G(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) = F(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \text{ para } m \geq m_0,$$

e então, concluindo que $[\underline{u} - u_m]^+ = 0$, temos $\underline{u} \leq u_m$. Similarmente mostra-se que $u_m \leq \overline{u}$ e portanto a afirmação segue.

Agora afirmamos que, para todo $m \geq m_0$ e, se u_m é uma solução de (A.2.5), então u_m é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, independente de m. De fato, seja $t \in \mathbf{R}^+$ e considere a função

$$\phi_m = e^{(tu_m^2)} \cdot u_m.$$

Como $u_m \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\phi_m \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Multiplicando (A.2.5) por ϕ_m, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla u_m e^{(tu_m^2)}\ dx + 2t \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \cdot \nabla u_m u_m^2 e^{(tu_m^2)}\ dx$$

$$= \int_\Omega g_m(x, u_m, \nabla u_m) e^{(tu_m^2)} u_m\ dx.$$

Usando (A.2.4), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^p \cdot e^{(tu_m^2)}\ dx + 2t \int_\Omega |\nabla u_m|^p \cdot u_m^2 e^{(tu_m^2)}\ dx$$

$$\leq C_0 \int_\Omega e^{(tu_m^2)} |u_m| \left(1 + |\nabla u_m|^p\right)\ dx.$$

Escolhendo $t = \frac{C_0^2}{2}$, e usando que $u_m \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$C_0 \int_\Omega e^{(tu_m^2)} |u_m|\ dx \leq C_1, \quad \text{(com } C_1 \text{ independente de } m\text{)}.$$

Aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$C_0 \int_\Omega e^{(tu_m^2)} |u_m| |\nabla u_m|^p\ dx$$

$$= C_0 \int_\Omega \left[e^{(\frac{1}{2}tu_m^2)} |u_m| |\nabla u_m|^{p/2}\right] \left[e^{(\frac{1}{2}tu_m^2)} |u_m| |\nabla u_m|^{p/2}\right]\ dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega e^{(tu_m^2)} |\nabla u_m|^p\ dx + \frac{C_0^2}{2} \int_\Omega e^{(tu_m^2)} |u_m|^2 |\nabla u_m|^p\ dx.$$

Em conclusão,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{(tu_m^2)}\,|\nabla u_m|^p\ dx+\frac{C_0^2}{2}\int_\Omega e^{(tu_m^2)}\,|u_m|^2\,|\nabla u_m|^p\ dx\leq C_1$$

e então u_m é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, independente de m.

E ainda, mostra-se que existe $q>p$ tal que, para todo aberto ω, com $\omega\subset\subset\Omega$, e para toda solução u_m do problema (A.2.5), temos $u_m\in W^{1,q}(\omega)$ e u_m é limitado em $W^{1,q}(\omega)$, independente de m. Essa afirmação é devido a um resultado de regularidade do tipo Meyers (ver demonstração dessa afirmação em Borccardo, Murat & Puel [9]).

Agora sejam $\mathcal{O}$ um conjunto aberto de $\mathbf{R}^N$ tal que $\mathcal{O}\subset\subset\Omega$, $\widetilde{\phi}\in C_0^\infty(\Omega)$, $\widetilde{\phi}\geq 0$, tal que $\widetilde{\phi}=1$ em $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\Omega}$ o suporte compacto de $\widetilde{\phi}$, $(\widetilde{\Omega}\subset\subset\Omega)$.

Então, por afirmações anteriores, podemos extrair uma subsequência de u_m, ainda denotada por u_m, tal que se $m\to\infty$,

$$\begin{cases} u_m\rightharpoonup u & \text{em}\ \ W_0^{1,p}(\Omega),\\[2ex] u_m\to u & \text{em}\ \ L^p(\Omega)\ \ \text{q.t.p. em}\ \ \Omega.\end{cases}$$

Multiplicando (A.2.5) por $\widetilde{\phi}(u_m-u)$, temos

$$\int_\Omega -\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_m|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\,(u_m-u)\,\widetilde{\phi}\,dx$$

$$+\int_\Omega -\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_m|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_j}\,(u_m-u)\ dx=\int_\Omega g_m(x,u_m,\nabla u_m)\widetilde{\phi}\,(u_m-u)\ dx.$$

Então

$$\int_\Omega -\sum_{j=1}^N\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_m|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\,(u_m-u)\,\widetilde{\phi}\,dx$$

$$=\int_\Omega\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u_m|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_j}\,(u-u_m)\ dx$$

$$+\int_\Omega\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\,(u-u_m)\,\widetilde{\phi}\,dx+\int_\Omega g_m(x,u_m,\nabla u_m)\widetilde{\phi}\,(u_m-u)\ dx.$$

Mostraremos que o segundo membro da igualdade acima tende para zero quando $m \to \infty$. Observe que o primeiro termo,

$$\left(|\nabla u_m|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right)$$

é limitado em $L^{p'}(\Omega)$, $\partial\widetilde{\phi}/\partial x_j \in L^\infty(\Omega)$ e que $(u - u_m) \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Então o primeiro termo tende para zero.

No segundo termo, como $u_m \to u$ q.t.p. em Ω, temos

$$|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \to |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

em $L^{p'}(\Omega)$. Por outro lado, $\widetilde{\phi} \in L^\infty(\Omega)$ e $\partial/\partial x_j(u - u_m) \rightharpoonup 0$ em $L^p(\Omega)$. Portanto o segundo termo tende para zero.

No terceiro termo, observe que u_m é limitado em $W^{1,q}(\mathcal{O})$ e $g_m(x, u_m, \nabla u_m)$ é limitado em $L^{q/p}(\mathcal{O})$ (com $q/p > 1$). Por outro lado,

$$(u - u_m) \to 0 \ \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|u - u_m|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{é limitado.}$$

Daí, em particular,

$$u - u_m \to 0 \ \text{ em } \ L^{(q/p)'}(\mathcal{O}),$$

e portanto o terceiro termo tende para zero.

Como consequência, obtemos

$$\int_\Omega - \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla u_m|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m - u) \, \widetilde{\phi} \, dx \to 0.$$

Usando a propriedade de $\widetilde{\phi}$, temos

$$\int_{\mathcal{O}} - \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla u_m|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (u_m - u) \ dx \to 0.$$

Por Browder [11], obtemos

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{1,p}(\mathcal{O})$$

e usando a continuidade do operador G e o Teorema de Vitali obtemos, respectivamente,

$$G(u_m, \nabla u_m) \to G(u, \nabla u) \quad \text{em } L^1(\mathcal{O}).$$

$$g_m(x, u_m, \nabla u_m) \to g(x, u, \nabla u) \quad \text{em } L^1(\mathcal{O}).$$

Além disso,

$$|\nabla u_m|^{p-2}\, \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \to |\nabla u|^{p-2}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Considerando $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $supp(\phi) \subset \mathcal{O}$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \phi \; dx = \int_\Omega g(x, u, \nabla u)\phi \; dx.$$

Como isto é valido para todo $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$, concluimos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \phi \; dx = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\phi \; dx, \quad \forall \;\; \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o que termina a prova do Lema 1.2.

$\square$

APÊNDICE B

Resultados Técnicos 1

Neste Apêndice apresentamos as demonstrações de algumas afirmações e resultados técnicos importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

B.1 Sobre o Decaimento do Potencial a no Infinito

É suficiente mostrar que

$$I(r) := \int_0^r \left[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} M(s)\, ds \right]^{\frac{1}{p-1}} dt$$

tem limite finito quando $r \to \infty$. Denotaremos por C diversas constantes positivas.

Se $1 < p \leq 2$, obtemos que

$$I(r) \leq C \left(1 + \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}} \left[\int_0^t s^{N-1} M(s)^{\frac{1}{p-1}} ds \right] dt \right).$$

De fato, como $1 < p \leq 2$, temos que $0 < p - 1 \leq 1$. Assim, segue que $1 \leq \frac{1}{p-1} < \infty$. Pela Desigualdade de Jensen, Teorema C.1 (cf. Apêndice C), e para qualquer $r > 0$, temos

$$\begin{aligned}
I(r) &= \int_0^1 t^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\frac{t}{t}\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^t t^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} t^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{1}{t}\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq \int_0^1 \left[\int_0^t M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt + \int_0^r t^{\frac{2-N}{p-1}} \frac{1}{t}\left[\int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} M(s)^{\frac{1}{p-1}} ds\right] dt \\
&\leq C\left(1 + \int_1^r t^{\frac{3-N-p}{p-1}} \left[\int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} M(s)^{\frac{1}{p-1}} ds\right] dt\right).
\end{aligned}$$

Reescrevendo a última expressão da seguinte forma

$$I(r) \leq C\left(1 + \frac{p-1}{2-N}\int_1^r \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{2-N}{p-1}}\right)\left[\int_0^t s^{\frac{N-1}{p-1}} M(s)^{\frac{1}{p-1}} ds\right] dt\right)$$

temos, usando a condição que $N \geq 3$ e integração por partes, que

$$I(r) \leq C\left(1 + \int_1^r t^{\frac{1}{p-1}} M(t)^{\frac{1}{p-1}} dt\right).$$

Aplicando (0.0.8)(i) na integral acima, inferimos que $I(r)$ tem limite finito quando r tende para ∞.

Agora seja $2 \leq p < \infty$, então $1 \leq p-1$. Segue que $1 \geq \frac{1}{p-1} > 0$. Seja

$$U(t) := \int_0^s s^{N-1}M(s)ds,$$

e note que $U(t) \leq 1$ para $t > 0$ ou $U(t_0) = 1$ para algum $t_0 > 0$.

No primeiro caso,

$$\left[\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} \leq 1,$$

então

$$\int_0^r t^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt, \leq C + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}} dt$$

logo, $I(r)$ tem limite finito quando $r \to \infty$, pois $p < N$.

No segundo caso,

$$\left[\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]^{\frac{1}{p-1}} \leq \int_0^t s^{N-1}M(s)ds$$

para $t \geq t_0$, e então

$$I(r) \leq C + \int_1^r t^{\frac{1-N}{p-1}}\left[\int_0^t s^{N-1}M(s)ds\right]dt.$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} I(r) &\leq C\left(1+\tfrac{p-1}{N-p}\left[\int_1^r t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}M(t)dt - r^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^r t^{N-1}M(t)dt\right]\right) \\ &\leq C\left(1+\int_1^r t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}M(t)dt\right). \end{aligned}$$

Agora, por (0.0.8)(ii), temos que $I(r)$ tem limite finito quando $r \to \infty$.

□

B.2 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 2.1

Para cada $s > 0$, seja

$$\Gamma_{\theta,\sigma}(s) := \sup_{t\geq s}\frac{\sigma(t)}{t^\theta}.$$

Note que $\Gamma_{\theta,\sigma}(s) \geq \sigma(s)/s^\theta$ para $s > 0$ e, se $0 < s_1 \leq s_2 < \infty$, então

$$\Gamma_{\theta,\sigma}(s_1) = \sup_{t\geq s_1}\frac{\sigma(t)}{t^\theta} \geq \sup_{t\geq s_2}\frac{\sigma(t)}{t^\theta} = \Gamma_{\theta,\sigma}(s_2),$$

isto é, $\Gamma_{\theta,\sigma}$ é não-crescente em $(0,\infty)$.

Afirmamos que $\Gamma_{\theta,\sigma}(s) \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty$.

De fato, seja $s_n \to \infty$ e note que

$$\Gamma_{\theta,\sigma}(s_n) := \sup_{t\geq s_n}\frac{\sigma(t)}{t^\theta}.$$

Para cada n, existe algum $t_n \geq s_n$, tal que

$$\Gamma_{\theta,\sigma}(s_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{\sigma(t_n)}{t_n^\theta} \leq \Gamma_{\theta,\sigma}(s_n).$$

Recordando que $\Gamma_{\theta,\sigma}$ é não-crescente e limitado, temos

$$\lim_n \Gamma_{\theta,\sigma}(s_n) \leq \lim_n \frac{\sigma(t_n)}{t^\theta} \leq \lim_n \Gamma_{\theta,\sigma}(s_n).$$

Como $\sigma(s)/s^\theta \overset{s\to\infty}{\to} \sigma_\infty$, temos que $\Gamma_{\theta,\sigma}(s_n) \overset{n\to\infty}{\to} \sigma_\infty$, mostrando a afirmação.

Defina

$$\Gamma^*_{\theta,\sigma}(s) := \frac{2}{s}\int_{s/2}^{s} \Gamma_{\theta,\sigma}(t)\ dt, \quad s > 0.$$

Daí, temos

$$\frac{d\Gamma^*_{\theta,\sigma}}{ds} = \frac{2}{s}\left(\Gamma_{\theta,\sigma}(s) - \frac{1}{2}\Gamma_{\theta,\sigma}(s/2)\right) - \frac{2}{s^2}\int_{s/2}^{s} \Gamma_{\theta,\sigma}(t)\ dt,$$

mostrando que $\Gamma^*_{\theta,\sigma} \in C^1$.

Além disso, como

$$\frac{1}{s}\Gamma^*_{\theta,\sigma}(s) := \frac{2}{s^2}\int_{s/2}^{s} \Gamma_{\theta,\sigma}(t)\ dt \geq \frac{1}{s}\Gamma_{\theta,\sigma}(s),$$

segue que

$$\frac{d\Gamma^*_{\theta,\sigma}}{ds} \leq \frac{2}{s}\left(\Gamma_{\theta,\sigma}(s) - \frac{1}{2}\Gamma_{\theta,\sigma}(s/2)\right) - \frac{1}{s}\Gamma_{\theta,\sigma}(s) \leq 0,$$

mostrando que $\Gamma^*_{\theta,\sigma}$ é não-crescente.

□

B.3 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 2.2

Para cada $s > 0$, seja

$$I_{\theta,\sigma}(s) := \inf_{s \geq t > 0} \frac{\sigma(t)}{t^\theta}.$$

Note que $0 < I_{\theta,\sigma}(s) \leq \sigma(s)/s^\theta$ para $s > 0$ e, se $0 < s_1 \leq s_2 < \infty$, então

$$I_{\theta,\sigma}(s_1) = \inf_{s_1 \geq t > 0} \frac{\sigma(t)}{t^\theta} \geq \inf_{s_2 \geq t > 0} \frac{\sigma(t)}{t^\theta} = I_{\theta,\sigma}(s_2),$$

isto é, $I_{\theta,\sigma}$ é não-crescente em $(0, \infty)$.

Afirmamos que $I_{\theta,\sigma}(s) \stackrel{s\to 0}{\to} \sigma_0$.

De fato, seja $s_n \to 0$ e note que

$$I_{\theta,\sigma}(s_n) := \inf_{s_n \geq t > 0} \frac{\sigma(t)}{t^\theta}.$$

Para cada n, existe algum $t_n \leq s_n$ tal que

$$I_{\theta,\sigma}(s_n) \leq \frac{\sigma(t_n)}{t_n^\theta} \leq I_{\theta,\sigma}(s_n) + \frac{1}{n}.$$

Recordando que $I_{\theta,\sigma}$ é não-crescente e limitado, temos

$$\lim_n I_{\theta,\sigma}(s_n) \leq \lim_n \frac{\sigma(t_n)}{t^\theta} \leq \lim_n I_{\theta,\sigma}(s_n).$$

Como $\sigma(s)/s^\theta \stackrel{s\to 0}{\to} \sigma_0$, temos que $I_{\theta,\sigma}(s_n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \sigma_0$, mostrando a afirmação.

Defina

$$I^*_{\theta,\sigma}(s) := \int_s^{s+1} I_{\theta,\sigma}(t)\ dt, \quad s > 0.$$

Daí, segue que

$$I_{\theta,\sigma}(s+1) \leq I^*_{\theta,\sigma}(s) \leq I_{\theta,\sigma}(s),$$

e então

$$\frac{dI^*_{\theta,\sigma}}{ds} = I_{\theta,\sigma}(s+1) - I_{\theta,\sigma}(s) \leq 0, \quad s > 0,$$

mostrando que $I^*_{\theta,\sigma}$ é C^1 e não-crescente.

$\square$

B.4 Extensão de um Lema de Zhang: Prova do Lema 3.1.

Seja

$$c_0 = \lim_{s\to 0} \sigma(s).$$

Como $\sigma_0 > 0$, segue que $0 < c_0 \leq \infty$. Agora, observe que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sigma(s)}{s+1} = c_0$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\sigma(s)}{s+1} = \sigma_\infty.$$

O restante da prova segue com os itens B.2 e B.3.

$\square$

APÊNDICE C

Resultados Técnicos 2

Neste Apêndice enunciaremos alguns Teoremas para facilitar as citações.

Começamos com a Desigualdade de Jensen, cuja demonstração encontra-se em Lieb & Loss [45], Teorema 2.2, p. 38.

Teorema C.1 (Desigualdade de Jensen). *Sejam $\Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ aberto e limitado, $j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexa e $u : \Omega \to \mathbf{R}$ uma função integrável. Então*

$$j\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u(x)dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} j(u(x))dx,$$

onde $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de Ω.

O seguinte lema foi provado por Liebermann [46] e Tolksdorff [62].

Lema C.1 (Estimativa $C^{1,\alpha}$). *Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\beta}$, para algum $\beta \in (0,1)$, e seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^{\infty}(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq K_1$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $K_1 > 0$. As constantes α e K_1 só dependem de $N, \Omega, p, \|u\|_{L^{\infty}}$ e $\|\Delta_p u\|_{L^{\infty}}$.*

O seguinte resultado foi provado por Anane [6].

Lema C.2 (Estimativa L^∞)**.** *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Suponhamos que existem números reais $a > 0, \sigma \in [1, p^*), q \in [1, \frac{p^*}{p})$ e uma função $b \in L^{q'}(\Omega)$ com $b \geq 0$ tais que*

$$-u\Delta_p u \leq a\,|u|^\sigma + b(x)\,|u| \qquad q.t.p.\ em\ \ \Omega.$$

Então $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty} \leq C$, onde C é uma constante que depende de $a, \sigma, q, N, p, \|b\|_{L^{q'}}$ e $\|u\|_{L^{p_0}}$, onde

$$p_0 = \begin{cases} p^* & se \quad p^* < \infty, \\ 2\max\{pq, \sigma\} & se \quad p^* = \infty. \end{cases}$$

O resultado a seguir é devido a DiBenedetto [23] e Tolksdorff [63] e trata sobre regularidade interior para soluções de problemas quasilineares da forma

$$-\Delta_p u = H(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega, \tag{C.0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R^N}$ e $H : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R^N} \to \mathbf{R}$ é uma função contínua..

Teorema C.2 ($C^{1,\alpha}$ Regularidade Interior)**.** *Suponha que $|H(x, s, \xi)| \leq \gamma(|u|)\,(1 + |\xi|^p)$, onde γ é uma função contínua em $\mathbf{R}^+$ e crescente. Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ uma solução fraca de (C.0.1). Então $x \mapsto \nabla u(x)$ é localmente Hölder-contínua em Ω', i.e. para todo compacto $D \subset \Omega'$, existe $\alpha > 0$ e uma constante positiva C, dependendo somente de $\gamma, p, N, \|u\|_{\infty, D}$ e D tal que*

$$|\nabla u(x)| \leq C \quad e \quad |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha, \quad x, y \in D.$$

A demonstração do Lema a seguir pode ser encontrada em Simon [59].

Lema C.3. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que, para todo $s_1, s_2 \in \mathbf{R^N}$,*

$$\left(|s_2|^{p-2}\,s_2 - |s_1|^{p-2}\,s_1, s_2 - s_1\right) \geq \begin{cases} c_p\,|s_2 - s_1|^p & se \quad p \geq 2, \\ c_p \frac{|s_2 - s_1|^p}{(|s_2| + |s_1|)^{2-p}} & se \quad p \leq 2, \end{cases}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual em $\mathbf{R^N}$.

Proposição C.1. *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p > 1$, então*

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right)\cdot\nabla(u_2-u_1)\,dx \geq \begin{cases} c_p\int_\Omega |\nabla(u_2-u_1)|^p\,dx & se \quad p \geq 2, \\ c_p\dfrac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_2-u_1)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_2|+|\nabla u_1|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} & se \quad p \leq 2. \end{cases}$$

Demonstração: Dividiremos a prova em dois casos:

Caso $p \geq 2$: Neste caso, o resultado é uma aplicação imediata do Lema C.3 acima.

Caso $1 < p \leq 2$: Usando a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}}}(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(p-2)}{2}}dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{p-2}}dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}.\end{aligned}$$

Então, usando o Lema C.3, acima temos que

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}dx \\ &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right)\cdot\nabla(u_2-u_1)\,dx,\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

□

O próximo resultado é devido a Díaz & Saa [22].

Lema C.4. *Seja $i, j \in \{1,2\}$ e seja $\mathcal{O} \subset \mathbf{R^N}$ um conjunto aberto. Se $\omega_i \in L^\infty(\mathcal{O})$ satisfaz*

$$\omega_i > 0 \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \mathcal{O}, \quad \omega_1 = \omega_2 \ \ sobre \ \ \partial\mathcal{O}, \quad \omega_i^{1/p} \in W^{1,p}(\mathcal{O}),$$

$$\Delta_p \omega_i^{1/p} \in L^\infty(\mathcal{O}) \ \ e \ \ \omega_i/\omega_j \in L^\infty(\mathcal{O}).$$

Então

$$\int_\mathcal{O} \left[\frac{-\Delta_p\omega_1^{1/p}}{\omega_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p\omega_2^{1/p}}{\omega_2^{(p-1)/p}}\right](\omega_1-\omega_2)\ dx \geq 0.$$

A demonstração do seguinte lema encontra-se em Browder [11].

Lema C.5. *Se* $u_k \rightharpoonup u$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *e*

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\nabla u_k|^{p-2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right], u_k - u \right\rangle \to 0,$$

então $u_k \to u$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

A demonstração do seguinte lema encontra-se em Cui [19].

Lema C.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *um domínio limitado regular. Suponha que o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)\left(\sigma(u) + |\nabla u|^q\right) \quad em \;\; \Omega, \\ \\ u > 0 \quad em \;\; \Omega, \qquad u = 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma supersolução $\overline{u}$ *e uma subsolução* $\underline{u}$ *tais que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *em* Ω*, então o problema (0.0.15) tem ao menos uma solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em* Ω.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Agarwal, R. P. & O'Regan, D., *Existence theory for single and multiple solutions to singular positone boundary value problems*, J. Differential Equations, **175** (2001), 393-414.

[2] Agarwal, R. P., Lu, H. & O'Regan, D., *An upper and lower solutions method for the one dimensional singular p-Laplacian*, Mem. Differential Equations Math. Phys., **28** (2003), 13-31.

[3] Alves, C. O. & Goncalves, J. V., *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in* $\mathbf{R^N}$ *involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., **32** (1998), 53-70.

[4] Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A. & Goncalves, J. V., *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems*, Adv. Nonlinear Stud., **5** (2005), 265-278.

[5] Alves, C. O., Goncalves, J. V. & Santos, C. A., *Existence and asymptotic behavior of ground states for quasilinear singular equations involving Hardy-Sobolev exponents*, J. Math. Anal. Appl., **322** (2006), 298-315.

[6] Anane, A., *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Lapacien avec poids*, CRAS Paris, **Série I** (1987), 725-728.

[7] Arcoya, D., *Positive solutions for semilinear Dirichlet problems in an annulus*, J. Differential Equations, **94** (1991), 217-227.

[8] Bandle, C. & Giarrusso, E., *Boundary blow-up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Advances in Differential Equations, **1** (1996), 133-150.

[9] Boccardo, L., Murat, F. & Puel, J. P., *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinèaires*, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, **2** (1984), 213-235.

[10] Brézis, H. & Kamin, S., *Sublinear elliptic equations in R^N*, Manuscripta Math., **74** (1992), 87-106.

[11] Browder, F. E., *Existence theorems for nonlinear partial differential equations*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, ed. by S. S. Chern and S. Smale, American Mathematical Society, vol. XVI, Providence, RI, (1970).

[12] Caffarelli, L., Hardt, R. & Simon, L., *Minimal surfaces with isolated singularities*, Manuscripta Math., **48** (1984), 1-18.

[13] Callegari, A. & Nashman, A., *Some singular nonlinear equations arising in boundary layer theory*, J. Math. Anal. Appl., **64** (1978), 96-105.

[14] Callegari, A. & Nashman, A., *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math., **38** (1980), 275-281.

[15] Cirstea, F. & Radulescu, V., *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in R^N*, J. Math. Anal. Appl., **229** (1999), 417-425.

[16] Cohen, D. S. & Keller, H. B., *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Mech., **16** (1967), 1361-1376.

[17] Covei, D-P., *Existence and uniqueness of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in R^N*, Electron. J. Differential Equations, **139** (2005), 1-15.

[18] Covei, D-P., *Non-existence result for radialy symmetric solutions in the Lane-Emdem-Fowler equations*, Nonlinear Anal., (2008), (in Press).

[19] Cui, S., *Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Anal., **41** (2000), 149-176.

[20] Díaz, J. I., *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol.1. Elliptic Equations*, Research Notes in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), 106, Boston, MA, (1985).

[21] Díaz, J. I., Morel, J. M. & Oswald, L., *An elliptic equation with singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations, **12** (1987), 1333-1344.

[22] Díaz, J. I. & Saa, J. E., *Existence et unicité de solutions positives pour certaines equations elliptiques quasilinaires*, CRAS Paris, **305 Série I** (1987), 521-524.

[23] DiBenedetto, E., *$C^{1+\alpha}$-local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., **7** (1983), 827-850.

[24] Dinu, T-L., *Entire solutions of sublinear elliptic equations in anisotropic media*, J. Math. Anal. Appl., **322** (2006), 382-392.

[25] Dinu, T-L., *Entire positive solutions of the singular Emden-Fowler equation with nonlinear gradient term*, Results Math., **43** (2003), 96-100.

[26] Edelson, A. L., *Entire solutions of singular elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl., **139** (1989), 523-532.

[27] Fowler, R. H., *The solution of Emden's and similar differential equations*, Monthly Notices Roy. Astro. Soc., **91** (1930), 63-91.

[28] Fulks, W. & Maybee, J. S., *A singular non-linear equation*, Osaka Math. J., **12** (1960), 1-19.

[29] Ghergu, M. & Radulescu, V., *On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term*, J. Math. Anal. Appl., **311** (2005), 635-646.

[30] Ghergu, M. & Radulescu, V., *Multiparameter bifurcation and asymptotics for the Lane-Emden-Fowler equation with a convection term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **135** (2005), 61-83.

[31] GHERGU, M. & RADULESCU, V., *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term*, J. Math. Anal. Appl., **333** (2007), 265-273.

[32] GILBARG, D. & TRUDINGER, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, (1998).

[33] GONCALVES, J. V., MELO, A. L. & SANTOS, C. A., *On existence of L^∞-ground states for singular elliptic equations in the presence of a strongly nonlinear term*, Advanced Nonlinear Studies, **7** (2007), 475-490.

[34] GONCALVES, J. V. & SANTOS, C. A., *Positive solutions for a class os quasilinear singular equations*, Electron. J. Differential Equations, **56** (2004), 1-15.

[35] GONCALVES, J. V. & SANTOS, C. A., *Existence and asymptotic behavior of non-radially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Anal., **65** (2006), 719-727.

[36] GRENON, N. & TROMBETTI, C., *Existence results for a class of nonlinear elliptic problems with p-growth in the gradient*, Nonlinear Anal., **52** (2003), 931-942.

[37] HAITAO, Y., *Multiplicity and asymtotic behavior of positive solutions for a singular semilinear elliptic problem*, J. Differential Equations, **189** (2003), 487-512.

[38] HALE, J. K. & MAWHIN, J., *Coincidence degree and periodic solutions of neutral equations*, J. Differential Equations, **15** (1974), 295-307.

[39] HERNADÉZ, J., MANCEBO, F. J. & VEGA, J. M., *On the linearization of some singular nonlinear elliptic problems and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinéaire, **19** (2002), 777-813.

[40] IRIARTE, E., *Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-Laplaciano*, Doctoral Thesis, Unicamp-Brasil (2004).

[41] LADYZENSKAYA, O. A. & URAL'TSEVA, N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, (1968).

[42] LAIR, A. V. & SHAKER, A. W., *Entire solution of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl., **200** (1996), 498-505.

[43] Lair, A. V. & Shaker, A. W., *Classical and weak solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), 371-385.

[44] Lasry, J. M. & Lions, P. L., *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constrains*, Math. Ann., **283** (1989), 583-630.

[45] Lieb, E. H. & Loss, M., *Analysis*, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, vol.14, Providence, RI, (2001).

[46] Liebermann, G. M., *Boundary regularity for solutions of degerenate elliptic equations*, Nonlinear Anal., **12** (1988), 1203-1219.

[47] Lions. J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, (1969).

[48] Mâagli, H. & Zribi, M., *Existence and estimates of solutions for singular nonlinear elliptic problems*, J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 522-542.

[49] Maderna, C., Pagani, C. D. & Salsa, S., *Quasilinear elliptic equations with quadratic growth in the gradient*, J. Differential Equations, **97** (1992), 54-70.

[50] Mawhin, J. & Willem, M., *Critical point theory and hamiltonian systems*, Springer, New York (1989).

[51] Meadows, A., *Stable and singular solutions of the equation* $\Delta u = \frac{1}{u}$, Indiana Univ. Math. J., **53** (2004), 1681-1703.

[52] Nato, Y. & Tanaka, S., *On the existence of multiple solutions of the boundary value problems for nonlinear second order differential equations*, Nonlinear Anal., **56** (2004), 919-935.

[53] Perera, K. & Silva, E. A. B., *On singular p-Laplacian problems*, Differential Integral Equations, **20** (2007), 105-120.

[54] Pucci, P., Garcia-Huidobro, M., Manasevich, R. & Serrin, J., *Qualitative properties of ground states for singular elliptic equations with weights*, Ann. Mat. Pura Appl., **185** (2006), S205-S243.

[55] PUCCI, P. & SERVADEI, R., *Existence, non-existence and regularity of radial ground states for p-Laplacian equations with singular weights*, Annales de l'IHPAnalyse Non Lineaire, **25** (2008), 505-537.

[56] QUITTNER. P., *Blow-up for semilinear parabolic equations with a gradient term*, Math. Meth. Appl. Sci., **14** (1991), 413-417.

[57] SHI, J. & YAO, M., *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, sect. A, **128** (1998), 1389-1401.

[58] SHI, J. & YAO, M., *Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity*, Eletronic Journal of Differential Equations, **4** (2005), 1-11.

[59] SIMON. J., *Regularité de la solution d'une equation non linéaire dans R^N*, Journeés d'analyse non linéarie, Proceedings, Besançon, France, 1977, Lectures Notes in Mathematics, 665, Springer-Verlag, (1978).

[60] STUART, C. A., *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Ration. Mech. Analysis, **113** (1991), 65-96.

[61] STUART, C. A. & ZHOU, H. S., *A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field*, Math. Meth. Appl. Sci., **19** (1996), 1397-1407.

[62] TOLKSDORFF, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domain with conical boundary points*, Comm. in P.D.E., **8(7)** (1983), 773-817.

[63] TOLKSDORFF. P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eq., **51** (1984), 126-150.

[64] XUE, H. & ZHANG, Z., *A remark on ground state solution for Lane-Emden-Fowler equations with a convection term*, Electron. J. Differential Equations, **53** (2007), 1-10.

[65] WANG, H., *On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in annulus*, J. Differential Equations, **109** (1994), 1-7.

[66] WONG, J. S. W., *On the generalized Emden-Fowler equation*, SIAM Review, **17** (1975), 339-360.

[67] ZHANG, Z., *A remark on existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Anal., **67** (2007), 147-153.