Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies com Curvatura Média Constante na Direção de um Campo Normal Unitário em um Espaço de Randers

por

Tânia M. Machado de Carvalho

Brasília
2008

Meu testamento, céus, é mais rico e bonito
Que o testamento real dos príncipes e nobres!
Pois deixo o azul dos céus à colmeia dos pobres,
A todas as nações deixo o próprio Infinito!...

Alma, cujo tesoiro ideal parece um mito!
Se à clâmide do Orgulho, altíssona te cobres,
É para que, talvez, não caias nem soçobres
Nessas águas de azul vibrantes do teu Grito!...

Com teu oiro, este sol derramado nos montes,
Bem podiam comprar-se os mais finos condados,
As estrelas do céu e as pérolas das fontes!...

E morres como um pária, ó dono do Universo!
Repartindo-o na luz dos teus sonhos alados,
Na páscoa misteriosa e doce do teu Verso!...
(Celso Pinheiro)

Ao meu amado esposo José de Ribamar
e aos meus queridos filhos Otávio e Natália.

Agradecimentos

Agradeço à prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Keti Tenenblat pela orientação, dedicação e apoio.

Ao prof. Dr. Helmar Nunes Moreira, pela participação e pelas produtivas conversas.

Aos professores da UnB pela contribuição em minha formação acadêmica.

A todos os funcionários da UnB, que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho. Em particular ao Manoel, Pereira, Tânia e Eveline.

Ao meu esposo José de Ribamar pelo apoio, companheirismo, carinho e paciência.

Aos meus filhos Otávio e Natália, pelo incentivo, carinho e compreensão.

Aos meus pais Calmon e Iracema pela força, carinho e apoio.

A toda minha família pelo carinho e compreensão.

À minha amiga-irmã Rosângela pela amizade incondicional.

A todos os amigos de pós-graduação pelo apoio e carinho, em especial, ao Flávio, Anyelle, Ricardo, Manuela, Kélcio, Miguel, Walter,...

Às companheiras de Colina Eliete, Elza, Giovana, Eneida e Luciana pelo ombro amigo e companhia nos bons e maus momentos.

Um agradecimento muito especial à minha sogra, D. Dulce, cujo apoio, amizade e compreensão tornaram viável a realização deste trabalho.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Consideramos uma métrica de Finsler do tipo Randers $F_b = \alpha + \beta$, onde α é a métrica euclidiana e β uma 1-forma com coeficientes constantes e norma b, $0 \leq b < 1$, sobre um espaço vetorial real tridimensional (V^3, F_b). Introduzimos o conceito de *curvatura média constante não nula na direção de um campo normal unitário* neste espaço. Obtemos a equação diferencial ordinária que caracteriza as superfícies de rotação de curvatura média constante (cmc) na direção de um campo normal unitário em (V^3, F_b), a qual reduz-se à equação clássica das superfícies de rotação cmc no espaço euclidiano, quando $b = 0$. Reduz-se também à equação que caracteriza as superfícies mínimas de rotação em (V^3, F_b) quando $H = 0$, obtida por Souza e Tenenblat. Para $0 < b < \frac{\sqrt{3}}{3}$ fazemos uma análise qualitativa das soluções da equação diferencial ordinária.

Abstract

We consider a Randers metric $F_b = \alpha + \beta$, where α is the euclidean metric and β is a 1-form with the norm b, $0 \leq b < 0$, on a tridimensional real vector space (V^3, F_b). We introduce the concept of *constant mean curvature in the direction of a unitary normal vector field* in this space. We obtain an ordinary differential equation that characterizes the rotational surfaces of constant mean curvature (cmc) in the direction of a unitary normal vector field in the space (V^3, F_b), which reduces to the classical equation of the rotational cmc surfaces in euclidean space, when $b = 0$. It also reduces to the equation that characterizes the minimal rotational surfaces in (V^3, F_b) when $H = 0$, obtained by Souza and Tenenblat. For $0 < b < \frac{\sqrt{3}}{3}$ we provide a qualitative analysis of the ordinary differential equation.

SUMÁRIO

Introdução

O conceito de *forma curvatura média* em espaços de Finsler foi introduzido por Z. Shen em [31]. Em espaços de Finsler a métrica depende do ponto e das direções tangentes, sendo que, em qualquer direção tangente a curvatura média é nula. Assim não se pode falar de curvatura média constante não nula em todas as direções. Para contornar esta limitação, introduzimos o conceito de *curvatura média constante não nula na direção dos campos normais unitários*. Porquê na direção de campos normais unitários? Pelo fato de que, devido às propriedades da *forma curvatura média finsleriana*, ao determinar-se a curvatura média não nula, constante, na direção dos campos normais unitários, então, a curvatura média fica determinada para qualquer direção. O conceito de curvatura média nula segue como habitual. Isto é, superfícies com *forma curvatura média finsleriana* nula são chamadas superfícies mínimas.

O objetivo central do presente trabalho é obter uma equação diferencial ordinária que caracterize as superfícies de rotação com curvatura média constante na direção de um campo normal unitário em um espaço de Finsler munido com uma métrica de Randers, e através de uma análise qualitativa, determinar o comportamento das soluções da equação que é altamente não linear. Um resumo mais detalhado será apresentado no final desta introdução, após um breve histórico do problema.

O estudo das superfícies mínimas ou com curvatura média constante no espaço euclidiano tridimensional tem sido classicamente um dos problemas mais importantes da geometria diferencial.

O termo *mínima* data de 1760 quando Lagrange [21] propôs o seguinte problema: Dada uma curva fechada C, sem auto intersecções, encontrar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira. Este problema foi apresentado por Lagrange como exemplo de um método por ele desenvolvido para encontrar curvas ou superfícies que minimizassem quantidades como área, comprimento, energia, etc. Assim nasceu o que conhecemos hoje como Cálculo Variacional. A caracterização das superfícies mínimas como sendo aquelas cuja curvatura média constante é nula está inteiramente ligada ao problema variacional de minimizar áreas. De fato, suponha que S seja uma superfície suave e S^t uma variação normal de S, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dada por uma função f, suave em S. Seja D um domínio limitado de S e D^t a correspondente variação de D em S^t. Defina $A(t) =$ área de D^t. Prova-se que $A'(0) = -\int_D HfdA$. Quando $f \equiv 1$, obtemos que $-H$ é a velocidade de variação da área das superfícies paralelas a S por unidade de área de S. Observe que sob este ponto de vista, a curvatura média é uma generalização da curvatura de curvas planas. Para uma melhor explanação veja [11]. Em suma, do ponto de vista variacional, as superfícies com curvatura média constante podem ser caracterizadas como sendo os pontos críticos do funcional área para as variações que deixam fixo o volume (mas não necessariamente minimizam área). Do ponto de vista analítico, tais superfícies são localmente, gráficos de funções $f(x, y)$ de duas variáveis as quais satisfazem a equação

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 2H(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}, \tag{1}$$

a qual, para $H = 0$, é a condição necessária, obtida por Lagrange, para que uma superfície tenha área mínima, donde o termo *superfície mínima*. Porém, a caracterização em termos de H como soma das curvaturas veio dezesseis anos depois, quando Meusnier [24] utilizando as curvaturas principais k_1 e k_2 introduzidas por Euler (também em 1760), mostrou que resolver a equação (1) para $H = 0$ é equivalente a resolver $k_1 + k_2 = 0$ e que o catenóide e o helicóide (que é também a única superfície regrada mínima, excetuando o plano) satisfazem essa condição. Outros exemplos clássicos de superfícies mínimas em espaços euclidianos tridimensionais são, a superfície de Scherk (1835) e a superfície de Enneper (1864). Na verdade Scherk provou que podemos deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide. Esta deformação é isométrica e além disso rotações preservam a imagem esférica do domínio. Isto gera uma família de superfícies mínimas denominada *família associada ao catenóide*. Em 1983, C. Costa [8] apresentou um terceiro exemplo de superfície mínima completa de curvatura total finita mergulhada em $\mathbb{R}^3$ (os dois outros exemplos são o plano e o catenóide).

Intuitivamente, podemos pensar nas superfícies de área mínima no espaço euclidiano tridimensional, como sendo as superfícies que podem ser criadas por películas de sabão geradas a partir de um bordo construído de arame de forma arbitrária (modelo físico descrito por Plateau). Nem sempre uma superfície com $H = 0$ representa uma superfície que minimiza área, podem ocorrer casos em que a superfície como ponto crítico não seja nem sequer um mínimo relativo para a variação.

As superfícies com curvatura média constante admitem uma interpretação física. A diferença P das pressões entre as faces de uma superfície de curvatura média constante podem ser relacionadas através da equação de Laplace: $P = TH$, onde T denota a tensão da superfície. Afirmar que a curvatura média é nula, equivale a dizer que ambas as faces estão recebendo a mesma pressão. Neste caso diz-se que a superfície está em equilíbrio. Se a tensão é constante e a diferença das pressões P não é nula, mas é constante, temos uma superfície de curvatura média constante não nula. Estas superfícies com curvatura média constante aparecem em experimentos físicos como superfícies de separação dos fluídos não miscíveis sob certas condições ótimas. Mais informações podem ser obtidas em [35].

Em um trabalho datado de 1841, C. Delaunay [9] resolveu a equação (1) sob a hipótese adicional que a solução f fosse invariante por rotações em torno do eixo OZ e apresentou um método geométrico para a construção de tais superfícies de revolução com curvatura média constante. As soluções encontradas por Delaunay são curvas planas determinadas pelo lugar geométrico dos focos de cônicas que rolam ao longo de um eixo, sem deslizar (roulletes de Delaunay). Rotacionando tais curvas em torno deste eixo, obtém-se as superfícies de curvatura média constante, as quais são hoje conhecidas como ondulóides (geradas pelas ondulárias, roulletes da elipse), nodóides (geradas pelas nodárias, roulletes da hipérbole, as quais são curvas com auto-interseção) e os catenóides (sup. mínimas geradas pelas catenárias, roulletes da parábola). Além destas, as superfícies de Delaunay incluem os cilindros circulares retos e as esferas em $\mathbb{R}^3$, gerados respectivamente pela rotação (em torno do eixo) de retas e semi-círculos (casos degenerados). Sturm mostrou em um apêndice ao artigo de Delaunay, que toda superfície de revolução com curvatura média constante é obtida dessa forma.

Em 1981 M. do Carmo e M. Dajczer [10] obtiveram uma família de superfícies helicoidais em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não nula, as quais têm como caso particular a família das superfícies de revolução com curvatura média constante.

A conjectura de Hopf [16] afirmava que a esfera era a única superfície cmc, fechada, imersa em $\mathbb{R}^3$. O próprio Hopf provou que para superfícies de genus zero a conjectura é verdadeira. Alexandrov [1] provou ser verdadeira também se a imersão é um mergulho. Em trabalho datado de 1984, H. Wente construiu um toro imerso (não mergulhado) em $\mathbb{R}^3$ com $H \neq 0$, constante. O toro obtido por Wente é um contra exemplo à conjectura de Hopf. Para $n > 2$ Hsiang, Teng e Wu [17] encontraram exemplos de imersões de gênero zero e não esféricas $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ cmc, o que demonstra que o problema proposto por Hopf era essencialmente um problema bi-dimensional.

Faremos agora uma pausa no nosso passeio histórico por espaços euclidianos para introduzir os espaços de Finsler, que escolhemos para realizar o presente trabalho. Em 1854, Riemann introduziu a noção de estrutura métrica em um espaço geral M. O estudo dessa estrutura métrica pode ser dividido em dois segmentos distintos. O primeiro é quando F é uma forma quadrática do tipo,

$$F^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j.$$

A esse caso denominamos geometria Riemanniana, pois, embora tivesse conhecimento do caso geral, Riemann concentrou seus estudos nessa restrição quadrática. O segundo caso, que é o caso geral, ficou esquecido até 1918, quando Paul Finsler [14] em sua tese de doutorado estudou espaços munidos com métricas mais gerais, os quais posteriormente foram denominados espaços de Finsler. Em [7] Chern refere-se à geometria de Finsler como uma geometria Riemanniana sem a restrição quadrática.

Diversos resultados da geometria riemanniana são estendidos para a geometria de Finsler. A curvatura seccional no caso riemanniano, por exemplo, é substituída pelo conceito de *curvatura flag* no caso finsleriano (ver [3]). Os teoremas de Bonnet-Myers, Synge, o primeiro teorema de comparação de Rauch, e o teorema da comparação de Bishop-Gromov são todos estendidos para o caso finsleriano.

Em 1941, G. Randers [26] estudou uma classe de métricas finslerianas dadas por uma perturbação de uma métrica Riemanniana. Tais métricas são do tipo $F = \alpha+\beta$, onde α é a métrica riemanniana e β é uma $1-$forma tal que $0 \leq \|\beta\| < 1$. Espaços munidos com estas métricas foram então designados *espaços de Randers.* O estudo de espaços munidos com a métrica de Randers têm encontrado relevância devido ao fato de que tais espaços ocorrem em aplicações físicas, principalmente em ótica eletrônica [2]. É natural que, para estudar novos conceitos em geometria de Finsler, como por exemplo o de curvatura média, busquemos exemplos em espaços de Randers, pois quando $\beta = 0$ recaímos no caso riemanniano.

Os espaços de Finsler mais simples são os espaços vetoriais munidos de uma métrica de Minkowski, as quais são caracterizadas pelo fato que suas componentes dependem apenas da direção e não dependem do ponto. Esses espaços são denominados *espaços de Minkowski.*

O conceito de *forma curvatura média* para imersões em espaços de Finsler foi introduzido por Z. Shen [31] em 1998. Este conceito difere do caso riemanniano já que em espaços de Finsler a métrica depende de um ponto da variedade e de uma direção no espaço tangente à variedade. Shen provou que a forma curvatura média $\mathcal{H}_\varphi(p, w)$ para uma imersão $\varphi : M^n \to (\widetilde{M}^m, \widetilde{F})$, de uma variedade em um espaço de Finsler, é sempre nula quando w é um elemento de TM. Devido a este fato o conceito de subvariedade mínima aparece de forma natural como sendo aquela cuja forma curvatura média se anula em todas as direções. Surge daí a questão de como lidar com o conceito de curvatura média constante não nula. Este problema ainda não apareceu na literatura, pois, a forma curvatura média, da maneira como é definida, é sempre nula em direções tangentes, não sendo possível portanto, obtê-la constante não nula em todas as direções. Mas, a forma curvatura média é linear (ver [31]). Juntas estas duas propriedades nos dizem que $H_\varphi(p, w) = w^N H_\varphi(p, N)$, onde N é um campo normal unitário (na métrica de Finsler), w um campo qualquer de M e w^N é a componente de w segundo N. Isto é, uma vez determinada a forma curvatura média na direção de um campo normal unitário, ela fica determinada em qualquer outra direção w. Diante destas observações, surgiu a idéia de estudar superfícies com curvatura média constante na direção dos campos normais unitários, que é a proposta do presente trabalho.

Tendo em vista que a métrica de Randers $F = \alpha + \beta$, onde α é a métrica euclidiana e β é uma 1-forma com coeficientes constantes, é uma métrica de Minkowski, i.e, independe do ponto, tomamos estes espaços como ponto de partida para nossos estudos. No decorrer do trabalho espaços tridimensionais com esta métrica são denominados espaços de Randers (V^3, F_b). Vamos considerar coordenadas x_1, x_2, x_3 em V^3, de modo que $F_b(x, y) = \sqrt{\sum(y^i)^2} + by^3,\ 0 < b < 1$ e $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x V^3$.

As superfícies mínimas de rotação ($\mathcal{H}_\varphi = 0$) nesses espaços e o problema tipo Bernstein, já foram estudadas por Souza e Tenenblat em [33] e [34], portanto, concentramos nossos estudos no caso $\mathcal{H}_\varphi \neq 0$. O principal objetivo de nosso trabalho é caracterizar as imersões do tipo rotação em torno do eixo x_3, com curvatura média constante na direção dos campos normais unitários em espaços de Randers (V^3, F_b), através de duas equações diferenciais ordinárias respectivas a cada um dos vetores normais (pois, devido à não reversibilidade da norma em espaços de Finsler, em geral os vetores normais não são necessariamente paralelos). Mostramos que embora cada vetor normal dê origem a uma equação distinta, ambas geram as mesmas superfícies de rotação em V_3. Este resultado é importante no sentido que podemos escolher uma única equação diferencial (e um único vetor normal) para realizar o estudo das possíveis soluções para a curva $g(t)$. Mostramos ainda que cilindros circulares retos são superfícies cmc na direção do campo normal unitário e que não existem soluções lineares (não constantes) da referida equação.

Dividimos o trabalho em três capítulos. No capítulo 1, fazemos um breve resumo de todos aqueles conceitos que julgamos necessários para um bom entendimento dos capítulos seguintes. Introduzimos assim os conceitos de métrica e espaço de Finsler, métrica e espaço de Randers, o conceito de forma curvatura média para imersões em variedades finslerianas e o conceito de vetor normal em variedades finslerianas.

No capítulo 2 consideramos uma imersão dada por uma rotação em torno do eixo x_3. Encontramos os dois vetores normais unitários. Caracterizamos as imersões com curvatura média constante H na direção destes campos normais em uma variedade de Randers (V^3, F_b), $b = \|\beta\| < 1$, através de duas equações diferenciais distintas. Estas equações, quando $b = 0$, reduzem-se à equação ordinária clássica das superfícies com curvatura média constante, cujas soluções são o cilindro circular reto, a esfera e os ondulóides em $\mathbb{R}^3$.

Na primeira seção do capítulo 3, mostramos que, apesar de encontrar duas equações distintas que caracterizam as superfícies cmc H na direção dos dois campos normais unitários no espaço de Randers (V^3, F_b), ambas determinam uma mesma superfície de rotação cmc H.

Este resultado é importante, como já foi dito, pois permite a escolha de uma única equação a ser analisada. Mostramos ainda, nesta mesma seção, que o cilindro é uma superfície cmc na direção do campo normal unitário e que as possíveis soluções excluem as funções lineares não constantes, para todo $0 < b < 1$. Também demonstramos alguns lemas que nos auxiliarão na caracterização das soluções destas equações.

Nas seções dois e três do terceiro capítulo procedemos a uma análise qualitativa da equação diferencial. Consideramos a equação como um sistema dinâmico autônomo, e através da linearização em torno do único ponto de equilíbrio que fornece o cilindro, verificamos que, em torno do mesmo, as soluções são espirais localmente assintoticamente estáveis. Utilizamos em nossa análise teoremas clássicos como os teoremas de Hartman-Grobman e o teorema de estabilidade de Liapunov. Para realizar o estudo dos campos de direções, introduzimos o que denominamos *método da superfície*, o qual consiste em obter informações a respeito do comportamento das soluções da equação diferencial utilizando a relação existente entre a superfície associada à equação e as curvas que descrevem o comportamento dos pontos onde as derivadas primeira e segunda da solução se anulam, respectivamente, via Teorema da Função Implícita. Utilizando as informações assim obtidas, construímos o retrato de fase e determinamos o comportamento dos campos de direções no plano fase.

Concluimos o terceiro capítulo encontrando a bacia de estabilidade assintótica, que é uma região tal que, quando qualquer solução do sistema de equações diferenciais ordinárias penetra seu interior, é atraída pelo ponto crítico, ou de equilíbrio. Construimos para isso, uma função de Liapunov e aplicando os teoremas de Liapunov e Liapunov-La Salle, provamos que no interior desta bacia a estabilidade é global.

Por último, para que o texto tenha o máximo de autonomia, montamos um apêndice no qual enunciamos, sem demonstrações, alguns teoremas clássicos e fazemos um breve resumo da teoria de equações diferenciais ordinárias que utilizamos.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo, alguns resultados que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. Maiores detalhes podem ser encontrados em [31], [30], [3]. Introduzimos noções básicas de Geometria de Finsler, o conceito de campos normais a Hiperplanos em espaços de Minkowski e fazemos um breve resumo sobre volume em espaços de Finsler. Introduzimos o conceito de forma curvatura média em espaços de Finsler e deduzimos a equação diferencial que descreve as superfícies cmc H na direção de um campo normal unitário em um espaço de Randers (V^3, F_b).

1.1 A geometria de Finsler

A geometria de Finsler tem encontrado aplicações no estudo do crescimento de corais, em óptica eletrônica, etc. Para maiores detalhes veja [2] e [**?**]. No que segue vamos definir espaços de Finsler em geral, mas, antes definiremos o mais simples espaço de Finsler que é denominado *espaço de Minkowski.* Utilizaremos letras gregas minúsculas $\gamma, \epsilon, \eta, \tau, \ldots$ para índices variando de 1 a n e letras latinas minúsculas $i, j, k, l, \ldots$ para índices variando de 1

a $n-1$. Utilizaremos ainda a convenção de Einstein para índices repetidos para representar somas, salvo em menção contrária.

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial. Uma *norma de Minkowski* sobre V é uma função não negativa $F : V \to [0, \infty)$ a qual satisfaz as seguintes propriedades

(V1) F é C^∞ sobre $V \backslash \{0\}$ (regularidade).

(V2) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, for all $\lambda > 0$ e $y \in V$ (homogeneidade positiva em y).

(V3) Para qualquer $y \in V \backslash \{0\}$, a forma bilinear simétrica g_y sobre V é positiva definida, onde

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F^2(y + su + tv)]|_{s=t=0} \text{ (convexidade forte).} \tag{1.1}$$

O par (V, F) é chamado *um espaço de Minkowski.*

Uma interessante propriedade de uma norma de Minkowski é que em geral $F(y) \neq F(-y)$. Quando $F(y) = F(-y)$ dizemos que a norma é *reversível.* Da expressão (1.1) e da propriedade $(V2)$ deduz-se que,

$$g_y(y, u) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}[F^2(y + su)]|_{s=0}, \tag{1.2}$$

$$g_y(y, y) = F^2(y). \tag{1.3}$$

Qualquer norma de Minkowski sobre um espaço vetorial V induz uma métrica d sobre V por

$$d(u, v) := F(v - u), \qquad u, v \in V.$$

Em geral $d(u, v) \neq d(v, u)$ sendo que a igualdade ocorre se, e só se, F é reversível.

Definição 1.2. Seja (V, F) um espaço de Minkowski, o conjunto

$$I := \{y \in V : F(y) = 1\}$$

é denominado a *indicatriz* do espaço V.

Lema 1.3. *(Desigualdade Triangular) Qualquer norma de Minkowski sobre um espaço vetorial V satisfaz*

$$F(y+v) \leq F(y) + F(v), \quad y, v \in V.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $y = \lambda v$ para algum $\lambda \geq 0$.

Introduziremos a seguir o conceito de *métrica* ou *estrutura de Finsler.*

Definição 1.4. Uma função $F : TM \to [0, \infty)$ é chamada uma *métrica de Finsler* se F satisfaz as seguintes propriedades,

(F1) F é C^∞ sobre $TM\backslash\{0\}$ (regularidade).

(F2) Para cada $x \in M$, $F_x := F(x, .)$ é uma norma de Minkowski sobre T_xM. Isto é, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$, $\forall\ y \ \in T_xM$, e a forma bilinear g_y dada por

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F_x^2(y + su + tv)]|_{s=t=0}, \tag{1.4}$$

é positiva definida.

Seja $y \in T_xM$. Considerando uma base qualquer $\{z_i\}$ para T_xM e escrevendo $y = y^i z_i$, a estrutura de Finsler F torna-se uma função de (x^i, y^i) e as derivadas parciais de F são tomadas em relação aos y^i's. Mostra-se que a positividade de g na Definição 1.1 independe da escolha da base $\{z_i\}$. Assim, podemos escrever as componentes $g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}$ do tensor métrico finsleriano $g := g_{ij} dx_i \otimes dx_j$.

Observação 1.5. A respeito de uma função métrica F de Finsler podemos afirmar que

(i) F é riemanniana se $g_{ij} = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j} = a_{ij}(x)$ independe de y para todo i, j.

(ii) F é de Minkowski se $g_{ij} = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}$ independe de x para todo i, j.

(iii) F é Euclideana se $g_{ij} = a_{ij}$ independe de x e y para todo i, j.

No decorrer do trabalho $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i) : U \to \mathbb{R}^n$ representa um sistema de coordenadas locais sobre um aberto $U \subset M^n$ e $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ e $\{dx^i\}$ representam respectivamente as bases de coordenadas induzidas para T_xM e T_x^*M. Os x^i's dão origem às coordenadas locais (x^i, y^i) sobre $\pi^{-1}U \subset TM$ por meio de

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

As funções F definidas sobre TM são localmente expressas como $F(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, e as derivadas parciais são denotadas por $F_{x^i}, F_{x^ix^j}, \ldots, F_{y^i}, F_{y^iy^j}, \ldots$

Uma importante classe de métricas de Finsler foi estudada por G. Randers [26], a qual leva o seu nome. A seguir introduziremos o conceito de *espaço de Randers.*

Definição 1.6. Uma *métrica de Randers* em uma variedade M^n (C^∞) é uma estrutura de Finsler sobre o fibrado TM, dada por

$$F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y), \tag{1.5}$$

onde

$$\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}, \tag{1.6}$$

é a métrica riemanniana usual, e

$$\beta(x,y) = z_k(x)y^k, \tag{1.7}$$

é uma 1-forma sobre M tal que

$$0 \leq \|\beta\|_x = \sup_{y \in T_xM, \alpha(x,y)=1} \beta(x,y) = \sqrt{a^{ij}(x)z_i(x)z_j(x)} < 1. \tag{1.8}$$

Os a_{ij} e a^{ij} são respectivamente as componentes da matriz associada à métrica riemanniana e sua inversa e os z_k's são as componentes da $1-$forma $\beta := z_k dx^k$.

Observação 1.7. Exigir que $\|\beta\| < 1$, significa exigir que a *indicatriz* do espaço seja fortemente convexa.

Quando V é um espaço vetorial real e $F = \alpha + \beta$, onde α é a métrica euclideana e $\beta = z_k y^k$, z_k constante, o par (V, F) define um espaço de Randers que é um espaço de Minkowski dotado de uma métrica euclidiana perturbada por uma translação.

O próximo lema garante que escolhendo um referencial adequado podemos escrever a métrica de Randers em uma forma mais simples, denominada *forma normal* da métrica de Randers.

Lema 1.8. *Seja V^{n+1} um espaço vetorial e seja $F : TV \to \mathbb{R}$, uma métrica de Randers dada por $F = \alpha + \beta$. Então existe $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n+1$, um referencial ortonormal na métrica α tal que F tem a seguinte forma normal*

$$F(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2} + b(x)y^{n+1}, \qquad \forall\ x \in V_{n+1},\ \ e\ \forall\ y = y^i e_i \in T_x V^{n+1}, \tag{1.9}$$

onde $b(x)$ é a norma da 1-forma β dado em (1.8).

Prova:

Considerando coordenadas $x^1, \ldots, x^{n+1}$ temos que no referencial $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ a métrica riemanniana é dada por $a_{ij}(x) = \alpha \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j} \right)_x$ e a métrica de Randers é dada por

$$F(x,\, y) = \sqrt{a_{ij}(x)\bar{y}^i\bar{y}^j} + b_i(x)\bar{y}^i,\ \ \beta_x(y) = b_s(x)\bar{y}^s\,;\, \forall x \in V^{n+1},\ \ \forall y = \bar{y}^s \frac{\partial}{\partial x^s} \in T_x V^{n+1}.$$

Considere agora um referencial $\{e_i\},\ 1 \leq i \leq n+1$ ortonormal em relação à métrica α . Assim, a primeira parcela de F em (1.9) segue direto do fato que neste referencial $a_{ij}(x) = (e_i, e_j)_x = \delta_{ij}$.

Para a segunda parcela escolhemos e_{n+1} na direção e sentido do vetor $b_l(x)a^{li}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Temos que

$$e_{n+1} = c(x)b_l(x)a^{li}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Do fato de que $(e_{n+1},\, e_{n+1})_x = 1$ segue que

$$c(x) = \frac{1}{\sqrt{b_i(x)b_j(x)a^{ji}(x)}} = \frac{1}{b(x)}.$$

Devemos mostrar que $\beta_x(e_\eta) = 0,\ \forall \eta = 1,\, \ldots,\, n,$ onde $e_\eta = (e_\eta)^s \dfrac{\partial}{\partial x^s}$. Usando o fato que $(e_{n+1},\, e_\eta)_x = 0,\ \forall \eta = 1.\, \ldots,\, n,$ segue que

$$c(x)a_{is}(x)b_l(x)a^{li}(x)(e_\eta)^s = 0,$$

o que nos dá $b_s(x)(e_\eta)^s = 0,$ ou seja, obtemos $\beta_x(e_\eta) = 0,\ \forall \eta = 1,\, \ldots,\, n.$ Além disso,

$$\beta_x(e_{n+1}) = \frac{b_s(x)b_l(x)a^{ls}}{b(x)} = \frac{b^2(x)}{b(x)} = b(x).$$

Como $y = y^\eta e_\eta + y^{n+1} e_{n+1}$ e β_x é linear, segue que

$$\beta_x(y) = y^\eta \beta_x(e_\eta) + y^{n+1}\beta_x(e_{n+1}) = y^{n+1}\beta_x(e_{n+1}) = b(x)y^{n+1}.$$

■

1.2 Campos normais a hiperplanos em espaços de Minkowski

No capítulo seguinte necessitaremos do conceito de vetor normal à variedade. Veremos que devido ao fato da métrica de Finsler não ser em geral reversível, dado um hiperplano, temos dois vetores normais, um em cada semi espaço determinado pelo hiperplano, não necessariamente paralelos. Este fato ficará claro na Proposição 1.11. Mas, antes de enunciá-la, apresentaremos um resultado de análise e uma proposição que serão úteis na prova. Como o resultado de análise é bem conhecido, omitiremos a prova, a qual pode ser encontrada em [4].

Segue de propriedades básicas de espaços vetoriais que

Proposição 1.9. *Seja Υ um hiperplano de um espaço de Minkowski V e $v \in V\backslash\Upsilon$. Então V pode ser decomposto em $V = \mathbb{R}v \bigoplus \Upsilon$.*

Teorema 1.10. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um convexo fechado, não vazio e $\varphi : A \to (-\infty, +\infty)$, uma função convexa, semicontínua inferiormente (s.c.i) tal que*

$$\lim_{x\in A, \|x\|\to\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Então φ atinge seu mínimo sobre A, ie., existe $x_0 \in A$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_A \varphi.$$

Enunciaremos agora o resultado que prova que existem dois vetores normais, não necessariamente paralelos, em cada semi-espaço determinado por um hiperplano Υ do espaço de Minkowski.

Proposição 1.11. *Seja (V, F) um espaço de Minkowski. Dado um hiperplano $\Upsilon \subset V$ existe, em cada semi-espaço determinado por Υ, um único vetor N unitário $\in V$ tal que*

$$\Upsilon = \{w \in V : g_N(N, w) = 0\}. \tag{1.10}$$

Prova: Tome um vetor v não pertencente a Υ e defina

$$\varphi(w) := F(v - w), \qquad w \in \Upsilon. \tag{1.11}$$

Afirmação 1.12. *φ atinge seu mínimo $m := F(v - w_0) := \min \varphi$ em um único ponto $w_0 \in \Upsilon$.*

Defina,

$$N := \frac{v - w_0}{m}. \tag{1.12}$$

Afirmação 1.13. *N não depende dos vetores v num mesmo semi-espaço determinado por Υ em V.*

Afirmação 1.14. *$g_N(N, w) = 0, \quad \forall w \in \Upsilon$.*

Observe que, pela homogeneidade, N é unitário, pois $F(N) = F\left(\frac{v - w_0}{m}\right) = \frac{1}{m}F(v - w_0) = 1.$

Das Afirmações 1.12, 1.13, 1.14 e do fato de que N é unitário, concluímos que, para qualquer $\Upsilon \subset V$, existem exatamente dois vetores $N, N' \in V$ (um em cada semi-espaço determinado pelo hiperplano) unitários, normais ao hiperplano Υ. Em geral N e N' não são paralelos, a menos que F seja reversível (ie, $F(N) = F(-N)$).

Prova da Afirmação 1.12. Para provar que existe $w_0 \in \Upsilon$ tal que $\varphi(w_0) = \min \varphi$ vamos verificar abaixo que todas as condições do Teorema 1.10 são satisfeitas.

(i) $(V, F) = (V, F, \|.\|)$, é um espaço de Banach, pois é normado e tem dimensão finita;

(ii) (V, F) é reflexivo (todo espaço de Banach é reflexivo);

(iii) Υ é um conjunto convexo;

(iv) Υ é fechado;

(v) $\Upsilon \neq \emptyset$;

(vi) $\varphi : \Upsilon \to [0, \infty)$ é uma função convexa, pois

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \qquad \forall \lambda \in (0,1);$$

(vii) φ é s.c.i., pois como $\varphi(w) = F(v-w) \in C^{\infty}$, então φ é contínua ;

(viii) $\varphi : \Upsilon \to [0, \infty)$, logo, $\varphi \not\equiv +\infty$;

(ix) $\lim\limits_{\|w\| \to \infty} \varphi(w) = +\infty$ (φ é coerciva).

De fato,

$$\varphi(w) = F(v-w) = F\left(\|v-w\|\frac{v-w}{\|v-w\|}\right) = \|v-w\|F\left(\frac{v-w}{\|v-w\|}\right).$$

Agora, $F\left(\dfrac{v-w}{\|v-w\|}\right) \geq C_0 > 0$, uma vez que v não pertence a Υ, C_0 constante. Assim,

$$\lim_{\|w\| \to \infty} \varphi(w) = \lim_{\|w\| \to \infty} \|v-w\|F\left(\frac{v-w}{\|v-w\|}\right) \geq \lim_{\|w\| \to \infty} \|v-w\|C_0 = +\infty.$$

consequentemente, $\lim\limits_{\|w\| \to \infty} \varphi(w) = +\infty$.

Isso mostra que todas as hipóteses do Teorema 1.10 são satisfeitas e que portanto, φ atinge seu mínimo em w_0. Falta mostrar que w_0 é único.

Para provar que w_0 é único, vamos, como é natural, supor que existem dois pontos onde φ atinge seu mínimo e chegar a uma contradição.

Suponha que $w_0 \neq w_1$ sejam ambos, pontos de mínimo de φ. então, pela definição da função φ segue que $\varphi(w_0) = \varphi(w_1) = m$. Isto implica que existem $u \in \Upsilon$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \frac{aw_0 + bw_1}{a+b}, \qquad a, b > 0.$$

Então, usando a homogeneidade de F, o Lema 1.3 (desigualdade triangular) e que $F(v - w_0) = m$, temos,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= F\left(v - \frac{aw_0 + bw_1}{a+b}\right) \leq F\left(\frac{a}{a+b}(v-w_0)\right) + F\left(\frac{b}{a+b}(v-w_1)\right) \\ &= \frac{a}{a+b}F(v-w_0) + \frac{b}{a+b}F(v-w_0) = m. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Como temos que $m = \min \varphi$, o caso $\varphi(u) < m$ não pode ocorrer. Logo, $\varphi(u) = m$. Isso implica que na equação (1.13), ocorre a igualdade, donde, pela segunda parte do Lema 1.3, segue que

$$\frac{a}{a+b}(v - w_0) = \lambda \frac{b}{a+b}(v - w_1), \qquad \lambda \geq 0.$$

Concluimos portanto, que $v = \dfrac{1}{a - \lambda b}(aw_0 - \lambda b w_1)$. Ou seja, $v \in \Upsilon$. Temos assim a contradição que buscávamos e consequentemente, fica provada nossa afirmação.

Prova da Afirmação 1.13.

Sabemos da Proposição 1.9 que V pode ser decomposto em $V = \mathbb{R}v \bigoplus \Upsilon$.

Portanto, se $\overline{v} \in V$ podemos escrever, $\overline{v} = \lambda v + \overline{w}$, $\lambda > 0$, onde $\overline{v}$ é um outro vetor no mesmo semi-espaço de v. Então, $\overline{\varphi}(w) = F(\overline{v} - w)$ atinge seu mínimo $\overline{m} = \lambda m$ em $\overline{w}_0 = \overline{w} + \lambda w_0$, pois

$$\overline{\varphi}(\overline{w}_0) = F(\overline{v} - \overline{w}_0) = \lambda F(v - w_0) = \lambda \varphi(w_0) = \lambda m = \overline{m}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{v} - \overline{w}_0}{\overline{m}} = \frac{(\lambda v + \overline{w}) - (\overline{w} - \lambda w_0)}{\lambda m} = \frac{v - w_0}{m} .$$

Portanto $\overline{N} = N$. Isto significa que N não depende dos vetores v num mesmo semi-espaço determinado por Υ em V, como afirmamos.

Prova da Afirmação 1.14.

Fixe um vetor $w \in \Upsilon$ e defina

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2m^2}\varphi^2(w_0 - tmw) = \frac{1}{2m^2}[F(v - w_0 + tmw)]^2 \\ &= \frac{1}{2m^2}[F(Nm + tmw)]^2 = \frac{1}{2m^2}m^2 F^2(N + tw) = \frac{1}{2}F^2(N + tw), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{2}F^2(N + tw). \tag{1.14}$$

Diferenciando (1.14) de ambos os lados ,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{m}\varphi(w_0 - tmw)\varphi'(w_0 - tmw)(-w) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(N + tw)\right]. \end{aligned}$$

Aplicando a $t = 0$ e usando o fato que $\varphi'(w_0) = 0$ (w_0 é ponto crítico de φ), obtemos

$$0 = f'(0) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(N + tw)\right]|_{t=0} \, .$$

Portanto da expressão (1.2), temos que

$$g_N(N, w) = 0 \, ,$$

como queríamos demonstrar. Concluímos assim a prova da Proposição 1.11.

■

1.3 Volume em espaços de Finsler

Existem dois elementos de volume canônicos sobre um espaço de Finsler. Ambos reduzem-se ao elemento de volume riemanniano quando a métrica de Finsler é riemanniana. O primeiro, denominado *elemento de volume de Busemann-Hausdorff* é definido a seguir.

Seja (M^n, F) uma variedade de Finsler orientada. Sejam $\{e_i\}$ um referencial local em M e $\{\theta^i\}$ base dual em T^*M. Definimos

$$dV_F := \sigma_F \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

onde,

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol I\!B^n)}{Vol(\{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F(x, y^i e_i) < 1\}} \, ,$$

$I\!B^n$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, Vol é o volume euclidiano. dV_F é o *elemento de volume de Busemann-Hausdorff,* o qual deve seu nome ao fato que Busemann [6] provou (em 1947) que se F é reversível, então Vol_F (volume Finsleriano de Busemann-Hausdorff) é a medida de Hausdorff da métrica induzida por F.

O segundo elemento de volume canônico é definido da seguinte forma:

Nas mesmas condições da definição anterior, considere $y = y^i e_i \in T_xM \backslash \{0\}$ e

$$g_{ij}(y) := g_y(e_i, e_j),$$

de forma que cada $g_{ij}(y)$ é uma função C^∞ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Defina a n-forma

$$d\widetilde{V}_{F_x} := \widetilde{\sigma}_{F_x}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

onde

$$\widetilde{\sigma}_F := \frac{\int_{I\!\!B^n_x} det(g_{ij}(y))dy^1 \cdots dy^n}{Vol(I\!\!B^n)}$$

com,

$$I\!\!B^n_x := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F(y^i e_i) < 1\} \text{ e } I\!\!B^n \text{ a bola unitária euclidiana}.$$

$d\widetilde{V}_{F_x}$ é denominado *elemento de volume de Holmes-Thompson.*

No decorrer do trabalho optamos por utilizar o elemento de volume de Busemann-Hausdorff devido ao seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [38].

Lema 1.15. *A forma de volume de Holmes-Thompson sobre um espaço de Randers* $(M, F = \alpha + \beta)$ *coincide com a forma de volume riemanniana* (M, α)*, i.e.,* $dV_F^{(HT)} = dV_\alpha$.

Ou seja, o Lema 1.15 nos diz que a forma de volume de Holmes-Thompson em espaços de Randers desconsidera a perturbação da métrica riemaniana.

Vamos determinar agora o elemento de volume de Buseman-Hausdorff induzido por uma imersão em uma variedade de Finsler.

Seja $(\widetilde{M}^m, \widetilde{F})$ um espaço de Finsler. Seja $\varphi : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão. A métrica induzida em M dada por $F := \varphi^*\widetilde{F}$ é também uma métrica de Finsler, pois por definição $F(x, y) = \widetilde{F}(\varphi(x), d\varphi_x(y)), \ \forall (x, y) \in TM$.

Sejam $e = \{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ e $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$ referenciais locais fixos para TM e $T\widetilde{M}$, respectivamente. Defina

$$\mathcal{F}(x, z) := \frac{vol(I\!\!B^n)}{vol\{(y^\tau) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{F}(x, y^\tau z^i_\tau \widetilde{e}_i) \leq 1\}}, \tag{1.15}$$

onde $x \in M^n$, $I\!\!B^n$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, vol é o volume euclidiano e $z = (z^i_\tau) = (\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\tau})$. De agora em diante, para simplificar a notação, identificaremos x com $\varphi(x) = \widetilde{x}$ e e com $\varphi(e) = \widetilde{e}$.

Definição 1.16. *O elemento de volume induzido* em (M, F) é dado por

$$dV_F = \mathcal{F}(x, z)dx, \tag{1.16}$$

onde $\mathcal{F}(x, z)$ é dado em (1.15).

Seja $(V^{n+1}, \widetilde{F} = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})$ um espaço de Randers e $\varphi : M^n \to (V^{n+1}, \widetilde{F})$ uma imersão. Pode-se provar que a métrica induzida em M pela imersão é uma métrica de Randers $F = \alpha + \beta$.

O lema seguinte nos dará o elemento de volume induzido por uma imersão φ num espaço de Randers.

Lema 1.17. *Seja $\varphi : M^n \to (\widetilde{V}^{n+1}, \widetilde{F})$ uma imersão e $F = \alpha + \beta$ a métrica de Randers induzida em M. Considere $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_{n+1}$ um referencial local ortonormal na métrica $\widetilde{\alpha}$ dado pelo Lema 1.8. Então a forma de volume induzida é dada por*

$$dV_F = (1 - b^2 A^{\tau\gamma} z_\tau^{n+1} z_\gamma^{n+1})^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{detA}\; dx^1 \cdots dx^n, \tag{1.17}$$

onde $x^1, x^2, \ldots, x^n$ são as coordenadas de M, A é a matriz cujos elementos são

$$(A_{\gamma\tau}) = (\sum_{i=1}^{n+1} z_\tau^i z_\gamma^i), \qquad z_\gamma^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\gamma}, \tag{1.18}$$

$A^{\tau\gamma}$ denota a matriz inversa de A e b é a norma da 1-forma β satisfazendo $0 \leq b < 1$.

Prova: Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers sobre a variedade M^n. Para cada $x \in M$ considere

$$\|\beta\|_x = \sup_{\alpha_x(y)=1} \beta(y), \qquad y \in T_x M.$$

Considere ainda dV_F e dV_α as formas de volume de Busemann-Hausdorff de F e α respectivamente. Tome $\{e_\tau\}_{\tau=1}^n$ uma base ortonormal para $(T_x M, \alpha_x)$. Então,

$$dV_F = \sigma_F(x)\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n,$$

onde σ_F é dado por

$$\sigma_F(x) = \frac{vol\mathbb{B}^n}{volB_x^n},$$

com

$$B_x^n := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n : F_x(y^\tau e_\tau) \leq 1\}.$$

Pelo Lema 1.8 podemos assumir que $\beta(y) = \|\beta\|_x y^n$.

Temos que B_x^n é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Por este fato e pelo Lema 1.8 vale a seguinte relação,

$$\sqrt{\sum_{\tau=1}^{n}(y^\tau)^2} + \|\beta\|_x y^n \leq 1.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$\sum_{\tau=1}^{n}(y^\tau)^2 \leq 1 - 2\|\beta\|_x y^n + (\|\beta\|_x y^n)^2,$$

que é equivalente a

$$(1 - \|\beta\|_x^2)^2 \left(y^n + \frac{\|\beta\|_x}{1 - \|\beta\|_x^2}\right)^2 + (1 - \|\beta\|_x^2)\sum_{\alpha=1}^{n-1}(y^\alpha)^2 \leq 1.$$

Podemos reescrever a última expressão da seguinte forma,

$$\frac{\left(y^n + \frac{\|\beta\|_x}{1-\|\beta\|_x^2}\right)}{\left(\frac{1}{1-\|\beta\|_x^2}\right)^2} + \frac{\sum_{\tau=2}^{n}(y^\tau)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\|\beta\|_x^2}}\right)} \leq 1. \tag{1.19}$$

Se tomarmos a igualdade na equação (1.19), é imediato verificar que trata-se de um elipsóide de revolução. Portanto o volume euclidiano de B_x^n é o volume do interior deste elipsóide. Ou seja,

$$\begin{aligned} vol B_x^n &= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{1 - \|\beta\|_x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \|\beta\|_x^2}}\right)^{n-1} \\ &= \frac{vol\mathbb{B}^n}{(1 - \|\beta\|_x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\ . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Portanto, substituindo (1.20) na expressão de σ_x, concluímos que o elemento de volume em T_xM é dado por

$$dV_F = (1 - \|\beta\|_x^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha\,. \tag{1.21}$$

Seja agora $\varphi : M^n \to (\widetilde{V}^{n+1}, \widetilde{F})$ uma imersão, $\varphi(x) = (\varphi^i(x)) \in \widetilde{V}$. Temos de (1.15) que

$$\mathcal{F}(x,z) = \frac{vol\mathbb{B}^n}{vol\{(y^\tau) \in \mathbb{R}^n : \widetilde{F}(x, y^\tau z_\tau^i \widetilde{e}_i) \leq 1\}}, \quad z_\tau^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\tau}, \tag{1.22}$$

onde estamos considerando o referencial $\{\widetilde{e}_i\}, 1 \leq i \leq n+1$ ortonormal na métrica $\widetilde{\alpha}$ dado pelo Lema (1.8). Então

$$\widetilde{F}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2} + by^{n+1}.$$

Como $\varphi : M \to \widetilde{V}^{n+1}$ é uma imersão a métrica de Randers induzida $F = \alpha + \beta$, é dada por

$$\alpha(y) = \sqrt{A_{\tau\gamma} y^\tau y^\gamma} \quad \text{e} \quad \beta(y) = D_\tau y^\tau \,,$$

onde $y = y^\tau \dfrac{\partial}{\partial x^\tau} \in T_x M \,, \quad A_{\tau\gamma} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\tau} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\gamma} \quad \text{e} \quad D_\tau = b \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x^\tau}.$

Logo,

$$\|\beta\|_x^2 = b^2 A^{\tau\gamma} z_\tau^{n+1} z_\gamma^{n+1}.$$

Por (1.21), obtemos

$$\mathcal{F}(x, z) = (1 - b^2 A^{\tau\gamma} z_\tau^{n+1} z_\gamma^{n+1})^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{detA}\,, \tag{1.23}$$

e consequentemente,

$$dV_F = (1 - b^2 A^{\tau\gamma} z_\tau^{n+1} z_\gamma^{n+1})^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{detA}\; dx^1 \dots dx^n.$$

Isto prova o lema.

■

1.4 Forma curvatura média

O conceito de forma curvatura média na métrica de Finsler foi introduzido por Z. Shen em [31] e é obtido considerando um problema variacional de volume. Veremos a seguir que em espaços de Finsler não é possível determinar uma forma curvatura média que seja constante e não nula para todo $(x, y) \in TM$, pois, uma importante propriedade desta forma curvatura média, a qual introduziremos a seguir, é que ela se anula sempre que aplicada a campos tangentes. Porém, o conceito de imersão mínima é definido da forma usual, como sendo aquela que tem a forma curvatura média nula, uma vez que nada impede que ela se anule em todas as direções.

Usando a idéia de ponto crítico da função volume da variação, Z. Shen introduziu a seguinte

Definição 1.18. Seja $\varphi : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \widetilde{F})$ uma imersão em um espaço de Finsler e $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \widetilde{e}_i$, $1 \leq i \leq n+1$, um campo ao longo de φ. Define-se a *forma curvatura média* para a imersão φ por

$$\mathcal{H}_\varphi(\widetilde{X}) = div[\mathcal{P}(\widetilde{X})]|_x - \mathcal{Q}_x(\widetilde{X}), \tag{1.24}$$

onde

$$\mathcal{P}(\widetilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}(z)} \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial z^i_\epsilon} e_\epsilon \,, \tag{1.25}$$

$$\mathcal{Q}_x(\widetilde{X}) = \frac{d}{dt}[ln\mathcal{F}(\varphi_t(x), D\varphi_t)]|_{t=0} \,, \tag{1.26}$$

e $\mathcal{F}$ é dada em (1.15).

Observação 1.19. *Dado um campo vetorial arbitrário $\widetilde{X} \in M$, sempre existe uma variação φ_t tendo $\widetilde{X}$ como campo variacional.*

Tomando coordenadas locais com bases naturais $\{\frac{\partial}{\partial x^\epsilon}\}_{\epsilon=1}^n$ e $\{\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}\}_{i=1}^{n+1}$ e escrevendo

$$dV_{F_t} = \mathcal{F}(\varphi_t, D\varphi_t) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

segue de (1.26) que

$$\mathcal{Q}(\widetilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} \widetilde{X}^i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon} \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^\epsilon} \right\}$$

e

$$\mathcal{P}(\widetilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon} \widetilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^\epsilon}.$$

Logo, em coordenadas locais,

$$\mathcal{H}_\varphi(\widetilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \widetilde{x}^j \partial z^i_\epsilon} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\epsilon} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \widetilde{x}^i} \right\} \widetilde{X}^i. \tag{1.27}$$

Isso mostra que $\mathcal{H}_\varphi(\widetilde{X})$ depende linearmente do campo $\widetilde{X}$.

Duas importantes propriedades da forma curvatura média são dadas nas proposições a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [31].

Proposição 1.20. *$\mathcal{H}_\varphi(\widetilde{X_x})$ depende linearmente de $\widetilde{X_x}$ em cada ponto $x \in M$.*

Proposição 1.21. *Seja $\mathcal{H}_\varphi$ a forma curvatura média para a imersão φ. Então*

$$\mathcal{H}_\varphi(\widetilde{u}) = 0,\ \forall\ \widetilde{u} = \varphi_*(u),\ \ u \in T_xM,\ \ x \in M,$$

i.e., $\mathcal{H}_\varphi$ se anula para todo $\widetilde{u} \in \varphi_*(TM)$.

Nos próximos capítulos o par (V^{n+1}, F_b) denotará espaços vetoriais $(n+1)$-dimensionais munidos com a métrica $F_b = \alpha + \beta$, onde α é uma métrica euclidiana, β uma 1-forma com coeficientes constantes. Vamos considerar o referencial $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$ tal que

$$F_b(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}(y^i)^2 + by^{n+1}},\ \forall x \in V^{n+1},\ y = \sum_{i=1}^{n+1} y^i\widetilde{e}_i,\ 0 \le b < 1. \tag{1.28}$$

Observe que em tais espaços $\widetilde{F_b}$ não depende de x, logo $\mathcal{F}$ também não depende de x (ver (1.22)), e, consequentemente a expressão (1.27) para a forma curvatura média, se reduz a

$$\mathcal{H}_\varphi(W) = \frac{1}{\mathcal{F}}\left\{\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}\right\}W^i. \tag{1.29}$$

1.5 A equação diferencial das imersões cmc na direção de um campo normal unitário em (V^{n+1}, F_b)

Em [31] Zongmin Shen introduziu a noção de forma curvatura média para imersões em variedades finslerianas e estabeleceu suas propriedades mais gerais, algumas das quais apresentamos na seção anterior. Em [33] Souza e Tenenblat apresentaram alguns resultados concernentes ao caso $H = 0$ (imersões mínimas), quando a imersão é uma superfície de rotação ou um gráfico em um espaço vetorial real tridimensional (V^3, F_b).

Como já foi dito na seção anterior, não é possível determinar uma forma curvatura média constante em todas as direções em Espaços de Finsler, devido ao fato que $\mathcal{H}_\varphi$ é sempre nula quando aplicada a campos tangentes. Devido a essa restrição resolvemos introduzir o conceito de *forma curvatura média constante na direção dos campos normais unitários.* Referimo-nos aqui a campos normais unitários porque, como vimos no Lema

1.11, para cada $x \in M$, temos dois vetores normais, não necessariamente paralelos, um em cada semi-espaço determinado pelo hiperplano T_xV.

A intuição nos leva a supor que, se temos dois vetores normais diferentes, devemos obter duas equações diferenciais distintas associadas à imersão. De fato, como veremos no capítulo 2, considerando superfícies de rotação em torno do eixo Ox_3, associamos a cada vetor normal uma equação diferencial distinta. Porém, um resultado importante é que, embora as duas equações diferenciais sejam diferentes, elas determinam uma mesma superfície de rotação, a menos de uma reflexão. Este fato será demonstrado no terceiro capítulo.

Surgem aqui duas importantes questões,

(1) Por quê na direção de um campo normal unitário?

(2) Como determinar tais campos normais unitários?

Responderemos a seguir à primeira questão. A segunda questão será respondida no próximo capítulo.

Para responder à primeira questão lembremo-nos de duas importantes propriedades da forma curvatura média $\mathcal{H}_\varphi$, determinadas na seção anterior,

(i) $\mathcal{H}_\varphi(p, v) = 0, \quad \forall v \in \varphi_* T_p M.$

(ii) $\mathcal{H}_\varphi(p, W)$ é linear em $T_{\varphi(p)}V$.

Vimos na Proposição 1.9 que fixado um hiperplano Υ de V^{n+1}, o espaço vetorial V^{n+1} pode ser decomposto em uma soma direta $\mathbb{R}y \bigoplus \Upsilon$, $y \in TV^n$. Portanto podemos tomar $\{e_1, e_2, \ldots e_n, N\}$ um referencial para V^{n+1}, onde para cada $x \in M$, $e_1, \ldots, e_n \in T_xM$ e N é normal a T_xM. Assim, qualquer elemento v de V^{n+1} pode ser escrito na forma $v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n + v^{n+1} N$. Consequentemente,

$$\mathcal{H}_\varphi(v) = \mathcal{H}_\varphi(v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n + v^{n+1} N). \tag{1.30}$$

Usando as propriedades (i) e (ii) temos que a expressão (1.30) fica reduzida a

$$\mathcal{H}_\varphi(v) = v^{n+1} \mathcal{H}_\varphi(N), \tag{1.31}$$

onde v^{n+1} é a componente de v segundo N.

Segue de (1.31) que se $\mathcal{H}_\varphi$ se anula na direção do campo normal unitário, então $\mathcal{H}_\varphi$ se anula em todas as direções. Ainda analisando a equação (1.31) e as propriedades (i) e (ii) de $\mathcal{H}_\varphi$, fica claro que se $\mathcal{H}_\varphi$ se anula na direção de um campo ao longo de M, $v \neq 0$ e $v \notin TM$, então $\mathcal{H}_\varphi$ se anula na direção de qualquer campo não nulo ao longo de M. Isto, no caso $\mathcal{H}_\varphi = 0$, faz com que a equação diferencial que caracteriza as imersões mínimas não dependa da escolha do campo v. No caso $\mathcal{H}_\varphi \neq 0$, uma importante consequência de (1.31), a qual motivou nosso trabalho, é que, escolhido o semi-espaço, ao determinar a forma curvatura média na direção do campo normal unitário, $\mathcal{H}_\varphi$ fica determinado em todas as direções.

A seguir deduziremos a equação diferencial para imersões no espaço (V^{n+1}, F_b) com curvatura média constante em uma direção normal.

Seja $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de V^{n+1} na métrica euclidiana, tal que F_b é dada por (1.28).

Teorema 1.22. *Seja $\varphi : M^n \to (V^{n+1}, F_b)$ uma imersão. Sejam $(\varphi^i(x^\epsilon))$ funções coordenadas de φ. Então a imersão é cmc na direção de um campo normal unitário N_ξ se, e somente se, satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{1}{(1-B)^2C}\left\{\frac{(n^2-1)}{4}\frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}C - \frac{(n+1)}{2}(1-B)\left[\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}C + \frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} + \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right]\right.$$
$$\left. +(1-B)^2\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\right\}\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N^i_\xi - H = 0, \qquad H = cte,\ \xi = \pm 1, \tag{1.32}$$

onde

$0 \leq b < 1$, $N = N^i e_i$, *A é dada por* (1.18)*, e*

$$C = \sqrt{detA}, \tag{1.33}$$

$$B = b^2 A^{\epsilon\eta} z^{n+1}_\epsilon z^{n+1}_\eta, \qquad z^i_\epsilon = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\epsilon}. \tag{1.34}$$

Prova: Temos de (1.23) que

$$\mathcal{F}(x,z) = (1 - b^2 A^{\tau\gamma} z^{n+1}_\tau z^{n+1}_\gamma)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{detA}.$$

Reescrevendo $\mathcal{F}$ na notação do enunciado do teorema e utilizando o fato que V é um espaço de Minkowski ($\mathcal{F}$ não depende de x), temos

$$\mathcal{F}(z) = (1 - B)^{\frac{n+1}{2}} C. \tag{1.35}$$

Derivando $\mathcal{F}$ em relação a z^j_η, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z^j_\eta} = -\frac{(n+1)}{2}(1-B)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial B}{\partial z^j_\eta} C + (1-B)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}. \tag{1.36}$$

Derivando agora (1.36) em relação a z^i_ϵ, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= -\frac{(n+1)}{2}\left[-\frac{(n-1)}{2}(1-B)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial B}{\partial z^j_\eta} C + (1-B)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} C \right. \\ &\left. +(1-B)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right] - \frac{(n+1)}{2}(1-B)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} \\ &+(1-B)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= \frac{(n^2-1)}{4}(1-B)^{\frac{n-3}{2}} \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial B}{\partial z^j_\eta} C - \frac{(n+1)}{2}(1-B)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} C + \frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right. \\ &\left. + \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right] + (1-B)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas encontradas na expressão de $\mathcal{H}$ dada por (1.27) temos que

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} N^i_\xi - H = 0$$

e pondo $(1-B)^{\frac{n-3}{2}}$ em evidência, obtemos exatamente a equação diferencial (1.32) do Teorema 1.22, a qual caracteriza as imersões com curvatura média H na direção de um campo normal unitário em (V^{n+1}, F_b).

■

No que segue consideraremos $n = 2$ no Teorema 1.22, obtendo o seguinte

Teorema 1.23. *Seja* $\varphi : M^2 \to (V^3, F_b)$*, uma imersão em um espaço de Randers nas condições do Teorema 1.22. Então* φ *tem cmc* H *na direção de um campo normal unitário* N_ξ *se, e somente se, satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(C^2-E)C}\left[\left(\frac{12E^2-(2E+C^2)^2}{C(C^2-E)}\right)\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}-\frac{3C}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right.\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{2E-C^2}{C^2-E}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta}+\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right)+\frac{3C}{4(C^2-E)}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} \qquad (1.37)\\
&\left.+\left(\frac{2E+C^2}{2C}\right)\frac{\partial^2 detA}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right]\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N^i_\xi - H = 0, \quad \forall N = N^i e_i, \quad H = cte,
\end{aligned}$$

onde

$$E = b^2\sum_{k=1}^{3}\left[(z^k_2)^2(z^1_3)^2 - 2z^k_1 z^k_2 z^3_1 z^3_2 + (z^z_1)^2(z^3_2)^2\right], \qquad (1.38)$$

$C = \sqrt{detA}, \quad A = A_{\epsilon\eta}(z) \quad$ e $\quad z = (z^i_\epsilon) \quad$ são dados em (1.18).

Prova: Considerando $n = 2$ no Teorema 1.22 a equação (1.32) se reduz a

$$\frac{1}{(1-B)^2 C}\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} - H = 0, \qquad (1.39)$$

onde

$$\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij} = \frac{3}{4}\frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}C - \frac{3}{2}(1-B)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}C + \frac{\partial B}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} + \frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right) + (1-B)^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}. \qquad (1.40)$$

Temos que, para $n = 2$

$$A^{\epsilon\eta} = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{(-1)^{\epsilon+\eta}}{detA}z^i_{\widetilde{\epsilon}}z^i_{\widetilde{\eta}}\right), \qquad \widetilde{\epsilon} = \delta_{\epsilon 2} + 2\delta_{\epsilon 1}, \quad \widetilde{\eta} = \delta_{\eta 2} + 2\delta_{\eta 1}, \qquad (1.41)$$

onde $A^{\epsilon\eta}$ é a inversa de $A_{\epsilon\eta}$ dada em (1.18). Temos ainda de (1.34) e (1.33) que, para $n = 2$ a expressão de B é dada por

$$B = b^2\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{\gamma+\tau}}{detA}z^i_{\widetilde{\gamma}}z^i_{\widetilde{\tau}}z^3_\gamma z^3_\tau = \frac{1}{C^2}E. \qquad (1.42)$$

Também temos de (1.33) e (1.23) que para $n = 2$, $\ C = \sqrt{detA} \quad$ e $\quad \mathcal{F} = (1-B)^{\frac{3}{2}}C$.

Para facilitar os cálculos computaremos separadamente as componentes da expressão (1.40). Calculando as derivadas primeira e segunda de B em relação a z^i_ϵ, obtemos

$$\frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon},$$

ou, usando de (1.42) que $E = BC^2$, temos

$$\frac{\partial B}{\partial z^i_\epsilon} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}B. \tag{1.43}$$

Derivando a expressão (1.43) em relação a z^j_η, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= \left(\frac{2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} - \frac{2}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right)B - \frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\left[-\frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta}\right]\\ &\quad -\frac{2}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon},\end{aligned}$$

usando o fato que $B = \frac{E}{C^2}$ e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= \frac{1}{C^2}\left[-\frac{2E}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} + \frac{6E}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right.\\ &\quad \left. -\frac{2}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right].\end{aligned} \tag{1.44}$$

Por outro lado, temos de (1.33) que $C^2 = detA$. Calculando a derivada de C^2 em relação a z^i_ϵ, obtemos

$$\frac{\partial C^2}{\partial z^i_\epsilon} = 2C\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}, \tag{1.45}$$

então,

$$\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} = \frac{1}{2C}\frac{\partial C^2}{\partial z^i_\epsilon} = \frac{1}{2C}\frac{\partial detA}{\partial z^i_\epsilon}.$$

Derivando a última expressão em relação a z^j_η, temos que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta z^i_\epsilon} = \frac{1}{2C}\left[\frac{\partial^2 detA}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial detA}{\partial z^i_\epsilon}\right],$$

usando 1.45, obtemos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta z^i_\epsilon} = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 detA}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} - \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right]. \tag{1.46}$$

Por outro lado, substituindo as expressões (1.43) e (1.44) na expressão (1.40) , temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij} &= \frac{3C}{4}\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right)\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} - \frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right) - \frac{3}{2}(1-B)\left\{\frac{1}{C^2}\left[-\frac{2E}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right.\right.\\
&\quad \left. + \frac{6E}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right] C - \frac{3}{2}(1-B)\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right) + \left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2E}{C^3}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right)\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right\} + (1-B)^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}.
\end{aligned}$$

Lembrando de (1.42) que $(1-B)/C = (C^2-E)/C^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij} &= \left(\frac{C^2-E}{C^4}\right)\left\{\frac{3C}{4(C^2-E)}\left(\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} - \frac{2E}{C}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} - \frac{2E}{C}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{4E^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\right)\right.\\
&\quad - \frac{3C}{2}\left[-\frac{2E}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} + \frac{6E}{C^2}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{2}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon}\right]\\
&\quad \left. - \frac{3}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} - \frac{4E}{C}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} + \frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} + (C^2-E)\frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij} &= \left(\frac{C^2-E}{C^4}\right)\left[\frac{3E}{C}\left(\frac{-C^2+2E}{C^2-E}\right)\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} - \frac{3}{2}\left(\frac{-C^2+2E}{C^2-E}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{3C}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} + \frac{3C}{4(C^2-E)}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + (C^2+2E)\frac{\partial^2 C}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\right].
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas segundas de C deduzidas em (1.46), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\epsilon\eta}_{ij} &= \left(\frac{C^2-E}{C^4}\right)\left\{\frac{3E}{C}\left(\frac{-C^2+2E}{C^2-E}\right)\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial C}{\partial z^j_\eta} - \frac{3}{2}\left(\frac{-C^2+2E}{C^2-E}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{3C}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} + \frac{3C}{4(C^2-E)}\frac{\partial E}{\partial z^i_\epsilon}\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta} + \frac{(C^2+2E)}{C}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 detA}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} - \frac{\partial C}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, após mais algumas computações algébricas simples obtemos a seguinte expressão,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{ij}^{\epsilon\eta} &= \left(\frac{C^2-E}{C^4}\right)\left\{\frac{12E^2-(2E+C^2)^2}{C(C^2-E)}\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}\frac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\right. \\
&\quad -\frac{3C}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z_\eta^j \partial z_\epsilon^i} - \frac{3}{2}\left(\frac{2E-C^2}{C^2-E}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}\frac{\partial E}{\partial z_\eta^j} + \frac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i}\right) \\
&\quad \left. + \frac{3C}{4(C^2-E)}\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i}\frac{\partial E}{\partial z_\eta^j} + \frac{(2E+C^2)}{2C}\frac{\partial^2 detA}{\partial z_\eta^j \partial z_\epsilon^i}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.47}
$$

Substituindo a expressão (1.47) na equação (1.37) do Teorema 1.23, concluímos a demonstração.

■

A seguir explicitaremos as derivadas de C e E em termos dos z_η^j's para uso posterior. Temos de (1.33) e de (1.18) que

$$
C = \sqrt{detA} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{3}(z_1^k)^2(z_2^l)^2 - \left(\sum_{s=1}^{3} z_1^s z_2^s\right)^2}
$$

onde

$$
detA = \sum_{k\neq l}(z_1^k)^2(z_2^l)^2 - \sum_{k\neq l} z_1^k z_2^k z_1^l z_2^l. \tag{1.48}
$$

Vamos escrever as derivadas de $detA$ em relação a z_ϵ^i da seguinte forma,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial detA}{\partial z_\epsilon^i} &= \frac{1}{2C}\left[\sum_{k\neq l}(\delta_{ik}\delta_{\epsilon 1}2z_1^k(z_2^l)^2 + \delta_{il}\delta_{\epsilon 2}2(z_1^k)^2 z_2^l - \delta_{ik}(\delta_{\epsilon 1}z_2^k z_1^l z_2^l + \delta_{\epsilon 2}z_1^k z_1^l z_2^l))\right. \\
&\quad \left. - \sum_{k\neq l}\delta_{il}(\delta_{\epsilon 1}z_1^k z_2^k z_2^l + \delta_{\epsilon 2}z_1^k z_2^k z_1^l)\right].
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

Segue que as derivadas de C em relação a z_ϵ^i assumem a forma,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i} &= \frac{1}{2C}\frac{\partial detA}{\partial z_\epsilon^i} \\
&= \frac{1}{C}\left[\sum_{l\neq i}(\delta_{\epsilon 1}z_1^i(z_2^l)^2 + \delta_{\epsilon 2}z_2^i(z_1^l)^2) - \sum_{l\neq i}(\delta_{\epsilon 1}z_2^i z_1^l z_2^l + \delta_{\epsilon 2}z_1^i z_1^l z_2^l)\right].
\end{aligned}
$$

Fatorando a última expressão, obtemos

$$
\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i} = \frac{1}{C}\sum_{l\neq i}(z_1^i z_2^l - z_2^i z_1^l)(\delta_{\epsilon 1}z_2^l - \delta_{\epsilon 2}z_1^l). \tag{1.50}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 detA}{\partial z_\epsilon^i \partial z_\eta^j} \;=\; & \sum_{l\neq i}\Big\{\delta_{\epsilon 1}(\delta_{\eta 1}\delta_{ji}(z_2^l)^2 + 2z_1^i\delta_{\eta 2}\delta_{jl}z_2^l) + \delta_{\epsilon 2}(\delta_{\eta 2}\delta_{ji}(z_1^l)^2 + 2z_2^i\delta_{\eta 1}\delta_{jl}z_1^l) \\
& -\delta_{\epsilon 1}[\delta_{\eta 2}\delta_{ij}z_1^l z_2^l + z_2^i(\delta_{\eta 1}\delta_{jl}z_2^l + \delta_{\eta 2}\delta_{jl}z_1^l)] - \delta_{\epsilon 2}[\delta_{\eta 1}\delta_{ji}z_1^l z_2^l \\
& + z_1^i(z_2^l\delta_{\eta 1}\delta_{jl} + z_1^l\delta_{\eta 2}\delta_{jl})]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

Por outro lado, calculando as derivadas de E em relação a z_ϵ^i, obtemos de (1.41)

$$
\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i} = b^2\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\gamma+\tau}[\delta_{ik}z_\gamma^3 z_\tau^3(\delta_{\epsilon\widetilde{\gamma}}z_{\widetilde{\tau}}^k + \delta_{\epsilon\widetilde{\tau}}z_{\widetilde{\gamma}}^k) + \delta_{i3}z_{\widetilde{\epsilon}}^k z_{\widetilde{\tau}}^k(\delta_{\epsilon\tau}z_\gamma^3 + \delta_{\epsilon\gamma}z_\tau^3)],
$$

onde $\widetilde{\gamma} = 2$ se $\gamma = 1$ e $\widetilde{\gamma} = 1$ se $\gamma = 2$ (idem para $\widetilde{\tau}$).

Logo,

$$
\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i} = 2b^2\left[z_{\widetilde{\epsilon}}^3(-1)^{\widetilde{\epsilon}+\tau}z_{\widetilde{\tau}}^i z_\tau^3 + \delta_{i3}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\epsilon+\tau}z_\tau^3 z_{\widetilde{\tau}}^k z_{\widetilde{\epsilon}}^k\right]. \tag{1.52}
$$

Derivando (1.52) em relação a z_η^j, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z_\eta^j \partial z_\epsilon^i} \;=\; & 2b^2[\delta_{j3}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}(-1)^{\widetilde{\epsilon}+\tau}z_{\widetilde{\tau}}^i z_\tau^3 + z_{\widetilde{\epsilon}}^3(-1)^{\widetilde{\epsilon}+\tau}(\delta_{\eta\widetilde{\tau}}\delta_{ij}z_\tau^3 + \delta_{\eta\tau}\delta_{j3}z_{\widetilde{\tau}}^i) \\
& +\delta_{i3}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\epsilon+\tau}(\delta_{j3}\delta_{\eta\tau}z_{\widetilde{\tau}}^k z_{\widetilde{\epsilon}}^k + \delta_{jk}(\delta_{\eta\widetilde{\tau}}z_\tau^3 z_{\widetilde{\epsilon}}^k + \delta_{\widetilde{\epsilon}\eta}z_\tau^3 z_{\widetilde{\tau}}^k))].
\end{aligned}
$$

Levando-se em conta que os índices $\widetilde{\epsilon}$, $\widetilde{\eta}$ e $\widetilde{\tau}$ não são somados devido ao fato que dependem de ϵ, η, e τ respectivamente, como podemos ver na notação introduzida em (1.41), simplificando a última expressão obtemos,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z_\eta^j \partial z_\epsilon^i} \;=\; & 2b^2[\delta_{j3}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}(-1)^{\widetilde{\epsilon}+\tau}z_{\widetilde{\tau}}^i z_\tau^3 + z_{\widetilde{\epsilon}}^3((-1)^{\widetilde{\epsilon}+\widetilde{\eta}}\delta_{ji}z_{\widetilde{\eta}}^3 + (-1)^{\widetilde{\epsilon}+\eta}\delta_{j3}z_{\widetilde{\eta}}^i) \\
& +\delta_{i3}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\epsilon+\eta}\delta_{j3}z_{\widetilde{\eta}}^k z_{\widetilde{\epsilon}}^k + \delta_{i3}(-1)^{\epsilon+\widetilde{\eta}}z_{\widetilde{\eta}}^3 z_{\widetilde{\epsilon}}^j + \delta_{i3}(-1)^{\epsilon+\tau}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}z_\tau^3 z_{\widetilde{\tau}}^j].
\end{aligned}
\tag{1.53}
$$

Estas expressões facilitarão os extensos cálculos que faremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 2

Superfícies de rotação cmc na direção de um campo normal em (V^3, F_b)

Neste capítulo vamos determinar os campos unitários, normais a uma imersão na variedade de Randers (V^3, F_b) e obter duas equações diferenciais ordinárias, as quais descrevem as superfícies de rotação com curvatura média constante H na direção destes campos.

É conhecido da teoria clássica que quando F é euclidiana (o que corresponde a tomar $b = 0$) tais equações reduzem-se à equação diferencial ordinária que descreve as superfícies de Delaunay (cilindro, esfera e ondulóides).

2.1 Vetor normal

Seja (V^3, F_b) o espaço de Randers com $F_b = \alpha + \beta$, onde α é a métrica euclideana perturbada por uma translação de norma β e $\{e_i\}_{i=1}^3$ um referencial ortonormal nas condições do Lema 1.8 . Seja $\varphi : M^2 \to (V^3, F)$ dada por $\varphi(t, \theta) = (g(t)cos\theta, g(t)sen\theta, t), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]$ e g uma função diferenciável não nula. Temos do Lema 1.11 que existe um único vetor normal

N_ξ em cada semi-espaço determinado pelo hiperplano $T_x\varphi(M^2)$, tal que

$$\forall\ w\ \in\ T_x\varphi(M^2),\ g_N(N,w)=0\,. \tag{2.1}$$

Observe que, como em (V^3, F_b) a métrica não depende do ponto x e levando em conta que podemos identificar $\varphi(M^2)$ com o próprio M^2, denotaremos $T_x\varphi(M^2)$ por TM^2.

Denominando φ_t e φ_θ as respectivas derivadas da imersão $\varphi(t,\theta)$ em relação a t e θ, temos

$$\varphi_t = (g'(t)cos\theta, g'(t)sen\theta, 1) \tag{2.2}$$

$$\varphi_\theta = (-g(t)sen\theta, g(t)cos\theta, 0). \tag{2.3}$$

Para encontrar os vetores normais, basta encontrar a solução $N=(N^1,N^2,N^3)$ do seguinte sistema,

$$\begin{cases} g_N(N,\varphi_t)=0 \\ g_N(N,\varphi_\theta)=0 \\ g_N(N,N)=1\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Observação 2.1. *Temos de* (1.2) *e da condição* $F(N)=1, que$

$$\begin{aligned} g_N(N,u) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}F^2(N+su)|_{s=0} \\ &= F(N)\frac{\partial}{\partial s}F(N+su)|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}F(N+su)|_{s=0}, \end{aligned}$$

portanto

$$g_N(N,u)=\frac{\partial}{\partial s}F(N+su)|_{s=0}, \qquad \forall u\in TM^2. \tag{2.5}$$

Temos do Lema 1.8 que $F(N)=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(N^i)^2}+bN^3$, consequentemente fazendo $F(N)=1$ obtemos,

$$\sqrt{(N^1)^2+(N^2)^2+(N^3)^2}=1-bN^3. \tag{2.6}$$

Por outro lado, usando o resultado (2.5), temos

$$\begin{aligned} g_N(N,\varphi_t) &= \frac{\partial}{\partial s}F(N+s\varphi_t)|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}F(N^1+sg'cos\theta, N^2+sg'sen\theta, N^3+s)|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\Big\{\big[(N^1)^2+2N^1sg'cos\theta+s^2(g')^2cos^2\theta+(N^2)^2+2N^2sg'sen\theta \\ &\quad +s^2(g')^2sen^2\theta+(N^3)^2+2N^3s+s^2\big]^{\frac{1}{2}}+b(N^3+s)\Big\}|_{s=0}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g_N(N,\varphi_t) = \frac{N^1g'cos\theta+N^2g'sen\theta+N^3}{\sqrt{(N^1)^2+(N^2)^2+(N^3)^2}}+b. \tag{2.7}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos

$$g_N(N,\varphi_\theta) = \frac{N^2gcos\theta-N^1gsen\theta}{\sqrt{(N^1)^2+(N^2)^2+(N^3)^2}}. \tag{2.8}$$

Afirmação 2.2. *Os vetores normais ao hiperplano TM^2 na métrica Randers Especial são caracterizados por,*

$$N_\xi = \frac{1}{\sqrt{1-b^2+(g')^2}}\left(-\xi cos\theta, -\xi sen\theta, \frac{-b\sqrt{1-b^2+(g')^2}+\xi g'}{1-b^2}\right), \tag{2.9}$$

onde $\xi=\pm1$.

Prova: Para provar a Afirmação 2.2 vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} N^2gcos\theta-N^1gsen\theta=0 \\ N^1g'cos\theta+N^2g'sen\theta+N^3+b\sqrt{(N^1)^2+(N^2)^2+(N^3)^2}=0, \end{cases} \tag{2.10}$$

e na sequência, substituiremos na última equação do sistema (2.4) os valores encontrados.

Utilizando (2.6) e o fato que $g\neq0$, transformamos o sistema (2.10) em

$$\begin{cases} N^2cos\theta-N^1sen\theta=0 \\ N^1g'cos\theta+N^2g'sen\theta+N^3(1-b^2)+b=0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Resolveremos o sistema (2.11) em duas etapas, sendo que na primeira consideraremos $g' \neq 0$ e na segunda $g' = 0$.

Seja $g' \neq 0$ e seja M a matriz dada por ,

$$M = \begin{pmatrix} -sen\theta & cos\theta \\ g'cos\theta & g'sen\theta \end{pmatrix},$$

logo, a inversa de M é dada por,

$$M^{-1} = -\frac{1}{g'}\begin{pmatrix} g'sen\theta & -cos\theta \\ -g'cos\theta & -sen\theta \end{pmatrix}.$$

Podemos reescrever o sistema (2.11) da seguinte forma,

$$M\begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -N^3(1-b^2) - b \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade (2.12) por M^{-1}, obtemos que

$$N^1 = -\frac{cos\theta}{g'}(N^3(1-b^2)+b), \tag{2.13}$$

$$N^2 = -\frac{sen\theta}{g'}(N^3(1-b^2)+b). \tag{2.14}$$

Substituindo (2.13) e (2.14) em (2.6) e elevando ao quadrado, obtemos

$$[(N^3)^2(1-b^2)^2 + 2bN^3(1-b^2) + b^2](\frac{1}{(g')^2}) + (N^3)^2 = (1-bN^3)^2.$$

Temos portanto uma equação de grau 2, dada por

$$(N^3)^2[(1-b^2)^2 + (g')^2(1-b^2)] + N^3[2b(1-b^2+(g')^2)] + b^2 - (g')^2 = 0.$$

Consequentemente, a componente N^3 do vetor normal N é dada por

$$N^3 = \frac{-b(1-b^2+(g')^2) \pm \sqrt{(g')^2(1-b^2+(g')^2))}}{(1-b^2)(1-b^2+(g')^2)}.$$

Pondo $\sqrt{(1-b^2+(g')^2)}$ em evidência na última equação, obtemos

$$N^3 = \frac{-b\sqrt{1-b^2+(g')^2} + \xi g'}{(1-b^2)\sqrt{1-b^2+(g')^2}}, \qquad \xi = \pm 1. \tag{2.15}$$

O passo seguinte é substituir (2.15) em (2.13) e em (2.14) obtendo,

$$N^1 = -\frac{\xi cos\theta}{\sqrt{1-b^2+(g')^2}}, \qquad \xi = \pm 1. \tag{2.16}$$

$$N^2 = -\frac{\xi sen\theta}{\sqrt{1-b^2+(g')^2}}, \qquad \xi = \pm 1. \tag{2.17}$$

Para o caso $g' = 0$, basta substituir $g' = 0$ no sistema (2.11). Efetuando procedimentos algébricos simples, obtemos as expressões

$$\begin{aligned} N^1 &= \frac{\chi cos\theta}{\sqrt{1-b^2}}, \qquad \chi = \pm 1; \\ N^2 &= \frac{\chi sen\theta}{\sqrt{1-b^2}}, \qquad \chi = \pm 1; \\ N^3 &= -\frac{b}{1-b^2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observe que temos a liberdade de escolher o sinal de N^1 e N^2 em (2.18). Desta forma, como necessitamos de um campo diferenciável, isto é, queremos unir de forma suave as duas expressões que caracterizam o campo N_ξ, para $g' \neq 0$ e $g' = 0$, escolheremos o sinal de forma que $\chi = -\xi$. Isto prova a Afirmação 2.2.

A expressão do vetor normal deduzida nesta seção será peça fundamental na sequência de nosso trabalho.

2.2 Equação diferencial das superfícies de rotação cmc na direção de um campo normal unitário N_ξ em (V^3, F_b)

Nesta seção vamos considerar superfícies de rotação com curvatura média constante H em (V^3, F_b). Vamos provar que existem duas equações diferenciais ordinárias, cujas soluções caracterizam curvas planas, que ao serem rotacionadas, determinam as superfícies com curvatura média constante H na direção dos campos normais unitários N_ξ, onde $\xi = \pm 1$. O sinal $+$ corresponde à escolha da orientação euclidiana positiva e o sinal $-$ corresponde à escolha da orientação euclidiana negativa.

Seja $\varphi : M^2 \to V^3$ dada por $\varphi(t,\theta) = (g(t)cos\theta, g(t)sen\theta, t), t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]$ e g uma função diferenciável que não se anula. O teorema a seguir fornece-nos duas equações diferenciais, que a função $g = g(t)$ deve satisfazer para que a imersão tenha cmc H na direção dos respectivos campos normais.

Teorema 2.3. *Considere o espaço de Randers (V^3, F_b). Seja $\varphi : M^2 \to V^3$ uma imersão dada por $\varphi(t,\theta) = (g_b(t)cos\theta, g_b(t)sen\theta, t)$, $g_b(t) \neq 0$. Então φ tem com curvatura média constante H na direção do campo normal unitário N_ξ se, e somente se, g_b satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária,*

$$\{-g_b g_b''[w_b(1 + 2b^2 + (1 - 3b^2)(g_b')^2) + 3b^4(g_b')^2] + w_0 w_b(1 - b^2 + (1 - 3b^2)(g_b')^2)\}$$
$$(-\xi w_b - b g_b'\sqrt{w_b}) - H g_b(1 - b^2)w_0^2(w_b)^{\frac{5}{2}} = 0, \quad H = cte, \tag{2.19}$$

$$\textit{onde } \ \xi = \pm 1, \ w_0 = 1 + (g_b')^2 \textit{ e } w_b = 1 - b^2 + (g_b')^2. \tag{2.20}$$

Para provar o Teorema 2.3 precisamos do seguinte lema.

Lema 2.4. *Seja $\varphi : M^2 \to (V^3, F_b)$ uma imersão dada por $\varphi(t,\theta) = (g_b(t)cos\theta, g_b(t)sen\theta, t)$, $g_b(t) \neq 0 \ \forall \ t$. Então (omitindo o índice b na notação de g_b) valem as seguintes igualdades ,*

$$\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i} N_\xi^i = \frac{\pi\xi\delta_{\epsilon 1} g}{\sqrt{w_0}\sqrt{w_b}}[-\xi g' + Z]; \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} = \frac{\pi\xi g'}{\sqrt{w_0}}\delta_{\epsilon 1}(g g'' + w_0); \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i} N_\xi^i = \frac{2b^2 g^2}{\sqrt{w_b}}\delta_{\epsilon 1} Z; \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z_\eta^j}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} = 2b^2 g g' \delta_{\epsilon 1}; \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z_\epsilon^i \partial z_\eta^j}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} = 2b^2 g(\delta_{i3} 2g' - \delta_{i1} cos\theta - \delta_{i2} sen\theta), \tag{2.25}$$

onde C, E, e A são dados em (1.33), (1.38), *e* (1.18) *respectivamente, $\pi = sinal(g)$ é o sinal de g e Z é dado por*

$$Z = \frac{-b\sqrt{w_b} + \xi g'}{1 - b^2}. \tag{2.26}$$

Prova .

Tendo em vista que $z^i_\epsilon = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\epsilon}$, e considerando $x_1 = t$ e $x_2 = \theta$, em termos da imersão φ temos que,

$$\begin{aligned} z^i_\epsilon &= \delta_{\epsilon 1}(\delta_{i1} z^1_1 + \delta_{i2} z^2_1 + \delta_{i3} z^3_1) + \delta_{\epsilon 2}(\delta_{i1} z^1_2 + \delta_{i2} z^2_2 + \delta_{i3} z^3_2) \\ &= \delta_{\epsilon 1}(\delta_{i1} g'(t) cos\theta + \delta_{i2} g'(t) sen\theta + \delta_{i3}) \\ &\quad + \delta_{\epsilon 2}(-\delta_{i1} g(t) sen\theta + \delta_{i2} g(t) cos\theta). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Utilizando esta mesma notação escreveremos a derivada segunda das coordenadas da imersão,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} &= (\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 2} + \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 1}) g'(t)(-\delta_{j1} sen\theta + \delta_{j2} cos\theta) \\ &\quad + (\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 1} g''(t) - \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 2} g(t))(\delta_{j1} cos\theta + \delta_{j2} sen\theta). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Observe que, pelas expressões (2.27) e (2.28) temos

$$z^3_\epsilon = \delta_{\epsilon 1} \quad e \quad \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} = 0, \quad \forall\, \epsilon, \eta. \tag{2.29}$$

Deste ponto em diante omitiremos o parâmetro t sempre que não houver possibilidade de ambiguidade. Temos ainda de (1.18), (1.33), (1.38) e usando (2.27) e (2.29), que

$$A = \begin{pmatrix} 1 + (g')^2 & 0 \\ 0 & g^2 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$C = |g|\sqrt{1 + (g')^2}, \tag{2.31}$$

$$E = b^2 g^2. \tag{2.32}$$

Temos de (1.50) que,

$$\frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} = \frac{1}{C} \sum_{l \neq i} (z^i_1 z^l_2 - z^i_2 z^l_1)(\delta_{\epsilon 1} z^l_2 - \delta_{\epsilon 2} z^l_1).$$

Segue portanto de (2.27) que $\forall\ 1 \leq i \leq 3$ e $\epsilon = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial z^i_\epsilon} &= \frac{\pi}{\sqrt{1 + (g')^2}} \Big\{ \delta_{\epsilon 1} g [g'(\delta_{i1} cos\theta + \delta_{i2} sen\theta) + \delta_{i3}] \\ &\quad + \delta_{\epsilon 2}(1 + (g')^2)(-\delta_{i1} sen\theta + \delta_{i2} cos\theta) \Big\}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde $\pi = sinal(g)$.

Vamos reescrever as componentes do vetor normal N_ξ dado em (2.9) da seguinte forma,

$$N_\xi^i = \frac{1}{\sqrt{w_b}}(-\delta_{i1}\xi cos\theta - \delta_{i2}\xi sen\theta + \delta_{i3}Z), \tag{2.34}$$

onde Z e w_b são dados em (2.26) e (2.20), respectivamente .

Multiplicando (2.33) por (2.34) e somando em i, obtemos com a notação (2.20)

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}N_\xi^i &= \frac{\pi}{\sqrt{w_o}\sqrt{w_b}}\{\delta_{\epsilon 1}g[g'(\delta_{i1}cos\theta + \delta_{i2}sen\theta) + \delta_{i3}] \\ &\quad +\delta_{\epsilon 2}w_0(-\delta_{i1}sen\theta + \delta_{i2}cos\theta)\}(-\xi\delta_{i1}cos\theta - \xi\delta_{i2}sen\theta + \delta_{i3}Z), \quad \forall\epsilon.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}N_\xi^i = \frac{\pi\xi\delta_{\epsilon 1}g}{\sqrt{w_o}\sqrt{w_b}}(-\xi g' + Z), \quad \forall\epsilon,$$

o que prova a equação (2.21).

Segue-se de (2.33) e (2.28) e somando em j e η que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} &= \frac{\pi\xi}{\sqrt{w_0}}\{\delta_{\eta 1}g[g'(\delta_{j1}cos\theta + \delta_{j2}sen\theta) + \delta_{j3}] + \delta_{\eta 2}w_0(-\delta_{j1}sen\theta \\ &\quad +\delta_{j2}cos\theta)\}[(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 2} + \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 1})g'(-\delta_{j1}sen\theta + \delta_{j2}cos\theta) \\ &\quad +(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 1}g'' - \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 2}g)(\delta_{j1}cos\theta + \delta_{j2}sen\theta)] \\ &= \frac{\pi\xi g'}{\sqrt{w_0}}\delta_{\epsilon 1}(gg'' + w_0), \quad \forall\epsilon,\end{aligned}$$

isto prova a equação (2.22).

Segue de (1.38) que as derivadas de E são dadas pela expressão

$$\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i} = 2b^2g[\delta_{\epsilon 1}\delta_{i3}g - \delta_{\epsilon 2}\delta_{i1}sen\theta + \delta_{\epsilon 2}\delta_{i2}cos\theta], \quad \forall\epsilon. \tag{2.35}$$

Multiplicando 2.35 por N_ξ^i e somando em i, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i}N_\xi^i &= \frac{2b^2g}{\sqrt{w_b}}[\delta_{\epsilon 1}\delta_{i3}g - \delta_{\epsilon 2}\delta_{i1}sen\theta + \delta_{\epsilon 2}\delta_{i2}cos\theta](-\xi\delta_{i1}cos\theta - \xi\delta_{i2}sen\theta + \delta_{i3}Z) \\ &= \frac{2b^2g^2}{\sqrt{w_b}}(\delta_{\epsilon 1}Z), \quad \forall\epsilon,\end{aligned}$$

o que prova a equação 2.23.

Substituindo i por j e ϵ por η na equação (2.35), multiplicando por (2.28) e somando em j e η obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial z^j_\eta}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} &= 2b^2 g[\delta_{\eta 1}\delta_{j3}g - \delta_{\eta 2}\delta_{j1}sen\theta + \delta_{\eta 2}\delta_{j2}cos\theta]\{(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 2} + \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 1})g'(-\delta_{j1}sen\theta + \delta_{j2}cos\theta) \\
&\quad +(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 1}g'' - \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 2}g)(\delta_{j1}cos\theta + \delta_{j2}sen\theta)\} \\
&= 2\delta_{\epsilon 1}b^2 gg', \qquad \forall \epsilon,
\end{aligned}$$

isso prova a equação (2.24) .

Temos de (1.53) que para uma imersão qualquer, as derivadas segundas de E são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z^j_\eta \partial z^i_\epsilon} &= 2b^2[\delta_{j3}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}(-1)^{\widetilde{\epsilon}+\tau} z^i_{\widetilde{\tau}} z^3_\tau + z^3_{\widetilde{\epsilon}}((-1)^{\widetilde{\epsilon}+\widetilde{\eta}}\delta_{ji}z^3_{\widetilde{\eta}} + (-1)^{\widetilde{\epsilon}+\eta}\delta_{j3}z^i_{\widetilde{\eta}}) \\
&\quad +\delta_{i3}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\epsilon+\eta}\delta_{j3}z^k_{\widetilde{\eta}}z^k_{\widetilde{\epsilon}} + \delta_{i3}(-1)^{\epsilon+\widetilde{\eta}}z^3_{\widetilde{\eta}}z^j_{\widetilde{\epsilon}} + \delta_{i3}(-1)^{\epsilon+\tau}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}z^3_\tau z^j_{\widetilde{\tau}}].
\end{aligned}$$

Portanto, para nossa imersão $\varphi(t,\theta)$ usando (2.27), a expressão anterior torna-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= 2b^2\Bigg[\delta_{j3}\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}(-1)^{1+\widetilde{\epsilon}}g(-\delta_{i1}sen\theta + \delta_{i2}cos\theta) + \delta_{\widetilde{\epsilon}1}((-1)^{1+\widetilde{\eta}}\delta_{ji}\delta_{\widetilde{\eta}1} + (-1)^{1+\eta}\delta_{j3}z^i_{\widetilde{\eta}}) \\
&\quad +\delta_{i3}\Bigg(\sum_{k=1}^{3}(-1)^{\eta+\epsilon}\delta_{j3}z^k_{\widetilde{\eta}}z^k_{\widetilde{\epsilon}} + (-1)^{\epsilon+\widetilde{\eta}}\delta_{\widetilde{\eta}1}[\delta_{j1}(\delta_{\widetilde{\epsilon}1}g'cos\theta - \delta_{\widetilde{\epsilon}2}gsen\theta) \\
&\quad +\delta_{j2}(\delta_{\widetilde{\epsilon}1}g'sen\theta + \delta_{\widetilde{\epsilon}2}gcos\theta)] + (-1)^{\epsilon+1}g\delta_{\eta\widetilde{\epsilon}}(-\delta_{j1}sen\theta + \delta_{j2}cos\theta)\Bigg)\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Multiplicando (2.36) por (2.28) e somando em ϵ, η e j obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta} &= 2b^2\{\delta_{\epsilon 2}(-1)^{1+\widetilde{\eta}}\delta_{ij}\delta_{\eta 2} + \delta_{i3}(-1)^{\epsilon+\widetilde{\eta}}[\delta_{\eta 2}(\delta_{j1}(\delta_{\epsilon 2}g'cos\theta + \delta_{\epsilon 1}gsen\theta) \\
&\quad +\delta_{j2}(\delta_{\epsilon 2}g'sen\theta + \delta_{\epsilon 1}gcos\theta)) + (-1)^{1+\epsilon}g\delta_{\widetilde{\epsilon}\eta}(-\delta_{j1}sen\theta \\
&\quad +\delta_{j2}cos\theta)]\}\ \{(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 2} + \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 1})g'(t)(-\delta_{j1}sen\theta + \delta_{j2}cos\theta) \\
&\quad +(\delta_{\epsilon 1}\delta_{\eta 1}g''(t) - \delta_{\epsilon 2}\delta_{\eta 2}g(t))(\delta_{j1}cos\theta + \delta_{j2}sen\theta)\} \\
&= \delta_{i3}4b^2gg' - \delta_{i1}2b^2gcos\theta - \delta_{i2}2b^2gsen\theta \\
&= 2b^2g(\delta_{i3}2g' - \delta_{i1}cos\theta - \delta_{i2}sen\theta),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

o que prova (2.25). Isto encerra a prova do Lema 2.4.

■

Lema 2.5. *Seja* $\varphi : M^2 \rightarrow (V^3, F_b)$ *uma imersão nas condições do Lema 2.4, Então,*

$$\frac{\partial^2 detA}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N^i_\xi = \frac{2g}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}\Big[\xi(1-b^2)(1-gg'')+\xi(g')^2(1+b^2)-2bg'\sqrt{w_b}\Big], \quad (2.38)$$

onde A *é dada em* (2.30) eN^i_ξ *é dado em* (2.34).

Prova: Temos de (1.51) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 detA}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta} &= \sum_{l\neq i}\{\delta_{\epsilon 1}(\delta_{\eta 1}\delta_{ji}(z^l_2)^2 + 2z^i_1\delta_{\eta 2}\delta_{jl}z^l_2) + \delta_{\epsilon 2}(\delta_{\eta 2}\delta_{ji}(z^l_1)^2 + 2z^i_2\delta_{\eta 1}\delta_{jl}z^l_1)\\ &\quad -\delta_{\epsilon 1}[\delta_{\eta 2}\delta_{ij}z^l_1 z^l_2 + z^i_2(\delta_{\eta 1}\delta_{jl}z^l_2 + \delta_{\eta 2}\delta_{jl}z^l_1)] - \delta_{\epsilon 2}[\delta_{\eta 1}\delta_{ji}z^l_1 z^l_2\\ &\quad + z^i_1(z^l_2\delta_{\eta 1}\delta_{jl} + z^l_1\delta_{\eta 2}\delta_{jl})]\}.\end{aligned}$$

Calcularemos separadamente cada uma das parcelas da expressão anterior, mas, antes devemos observar que omitiremos o cálculo das parcelas envolvendo δ_{j3}, uma vez que as mesmas serão multiplicadas por zeros quando efetuarmos o produto $\frac{\partial^2 detA}{\partial z^i_\epsilon \partial z^j_\eta}\frac{\partial^2\varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}$, pois temos de (2.29) que $\frac{\partial^2\varphi^3}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}$ se anula para todo ϵ, η.

Segue da expressão de $z^i_\epsilon = \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^\epsilon}$ dada em (2.27) que $\forall\ i, j;\ 1 \leq i, j \leq 3$

$$\begin{aligned}\sum_{l\neq i}\delta_{ij}(z^l_2)^2 &= \delta_{i1}\delta_{j1}((z^2_2)^2 + (z^3_2)^2) + \delta_{i2}\delta_{j2}((z^1_2)^2 + (z^3_2)^2) + \delta_{i3}\delta_{j3}((z^1_2)^2 + (z^2_2)^2)\\ &= g^2(\delta_{i1}\delta_{j1}cos^2\theta + \delta_{i2}\delta_{j2}sen^2\theta) + R_1(\delta_{j3}). \quad (2.39)\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}\sum_{l\neq i}\delta_{ij}(z^l_1)^2 &= \delta_{i1}\delta_{j1}((z^2_1)^2 + (z^3_1)^2) + \delta_{i2}\delta_{j2}((z^1_1)^2 + (z^3_1)^2) + \delta_{i3}\delta_{j3}((z^1_1)^2 + (z^2_1)^2)\\ &= (g')^2(\delta_{i1}\delta_{j1}sen^2\theta + \delta_{i2}\delta_{j2}cos^2\theta) + (\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + R_2(\delta_{j3}). \quad (2.40)\end{aligned}$$

Temos ainda que,

$$\begin{aligned}\sum_{l\neq i}\delta_{jl}z^i_1 z^l_2 &= \delta_{i1}z^1_1(\delta_{j2}z^2_2) + \delta_{j3}z^3_2) + \delta_{i2}z^2_1(\delta_{j1}z^1_2) + \delta_{j3}z^3_2) + \delta_{i3}z^3_1(\delta_{j1}z^1_2) + \delta_{j2}z^2_2),\\ &= g[g'(\delta_{i1}\delta_{j2}cos^2\theta - \delta_{i2}\delta_{j1}sen^2\theta) + \delta_{i3}(-\delta_{j1}sen\theta + \delta_{j2}cos\theta)] \quad (2.41)\\ &\quad +R_3(\delta_{j3}).\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
-\sum_{l\neq i}\delta_{jl}z_2^iz_1^l &= -[\delta_{i1}z_2^1(\delta_{j2}z_1^2)+\delta_{j3}z_1^3)+\delta_{i2}z_2^2(\delta_{j1}z_1^1)+\delta_{j3}z_1^3)+\delta_{i3}z_2^3(\delta_{j1}z_1^1)+\delta_{j2}z_1^2)],\\
&= -gg'(-\delta_{i1}\delta_{j2}sen^2\theta+\delta_{i2}\delta_{j1}cos^2\theta)+R_4(\delta_{j3}). \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
-\sum_{l\neq i}\delta_{ij}z_1^lz_2^l &= -[\delta_{i1}\delta_{j1}(z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3)+\delta_{i2}\delta_{j2}(z_1^1z_2^1+z_1^3z_2^3)+\delta_{i3}\delta_{j3}(z_1^1z_2^1+z_1^2z_2^2)],\\
&= -gg'sen\theta cos\theta(\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i2}\delta_{j2})+R_5(\delta_{j3}). \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
\sum_{l\neq i}\delta_{jl}z_1^iz_1^l &= \delta_{i1}(\delta_{j2}z_1^1z_1^2+\delta_{j3}z_1^1z_1^3)+\delta_{i2}z_1^2(\delta_{j1}z_1^1+\delta_{j3}z_1^3)+\delta_{i3}z_1^3(\delta_{j1}z_1^1+\delta_{j2}z_1^2),\\
&= (g')^2sen\theta cos\theta(\delta_{i1}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j1})+g'\delta_{i3}(\delta_{j1}cos\theta+\delta_{j2}sen\theta) \qquad (2.44)\\
&\quad +R_6(\delta_{j3}).
\end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}
-\sum_{l\neq i}\delta_{jl}z_2^iz_2^l &= -[\delta_{i1}z_2^1(\delta_{j2}z_2^2+\delta_{j3}z_2^3)+\delta_{i2}z_2^2(\delta_{j1}z_2^1+\delta_{j3}z_2^3)+\delta_{i3}z_2^3\sum_{l\neq i}\delta_{jl}z_2^l].\\
&= g^2[(\delta_{i1}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j1})sen\theta cos\theta]+R_7(\delta_{j3}). \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Segue portanto de (2.39) a (2.45) que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 detA}{\partial z_\epsilon^i\partial z_\eta^j} &= \delta_{\epsilon1}\{\delta_{\eta1}[g^2(\delta_{i1}\delta_{j1}cos^2\theta+\delta_{i2}\delta_{j2}sen^2\theta)+(\delta_{i1}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j1})g^2sen\theta cos\theta]\\
&\quad +\delta_{\eta2}[2g(g'(\delta_{i1}\delta_{j2}cos^2\theta-\delta_{i2}\delta_{j1}sen^2\theta)+\delta_{i3}(-\delta_{j1}sen\theta+\delta_{j2}cos\theta))\\
&\quad -gg'sen\theta cos\theta(\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i2}\delta_{j2})-gg'(-\delta_{i1}\delta_{j2}sen^2\theta+\delta_{i2}\delta_{j1}cos^2\theta)]\} \qquad (2.46)\\
&\quad +\delta_{\epsilon2}\{\delta_{\eta1}[-gg'sen\theta cos\theta(\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i2}\delta_{j2})+2gg'(-\delta_{i1}\delta_{j2}sen^2\theta\\
&\quad +\delta_{i2}\delta_{j1}cos^2\theta)-g[g'(\delta_{i1}\delta_{j2}cos^2\theta-\delta_{i2}\delta_{j1}sen^2\theta)+\delta_{i3}(-\delta_{j1}sen\theta+\delta_{j2}cos\theta)]]\\
&\quad +\delta_{\eta2}[-g'sen\theta cos\theta[g'(\delta_{j1}\delta_{i1}-\delta_{i2}\delta_{j1})+\delta_{i3}(\delta_{j1}cos\theta+\delta_{j2}sen\theta)]\\
&\quad +(\delta_{i1}\delta_{j1}(1+(g')^2sen^2\theta)+\delta_{i2}\delta_{j2}(1+(g')^2cos^2\theta))]\}+R(\delta_{j3}).
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (2.46) pelas expressões $\dfrac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}$ e N_ξ^i dadas em (2.28) e (2.34) respectivamente e somando em todos os índices, obtemos

$$\frac{\partial^2 detA}{\partial z_\epsilon^i \partial z_\eta^j}\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i \quad = \quad \frac{2g}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}\left[\xi(1-b^2)(1-gg'')+\xi(g')^2(1+b^2)-2bg'\sqrt{w_b}\right],$$

o que prova o Lema 2.5.

■

A seguir, utilizaremos os Lemas 2.4 e 2.5 como auxiliares na prova do Teorema 2.3.

Prova do Teorema 2.3.

Para a prova do teorema, tendo em vista a equação (1.37) (Teorema 1.23) vamos obter as seguintes igualdades,

(i) $\dfrac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}\dfrac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\dfrac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i = \dfrac{gg'b}{(1-b^2)w_0\sqrt{w_b}}\left[(gg''+w_0)(\xi bg'-\sqrt{w_b})\right];$

(ii) $\dfrac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i}\dfrac{\partial E}{\partial z_\eta^j}\dfrac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i = \dfrac{4b^4g^3g'}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}(-b\sqrt{w_b}+\xi g');$

(iii) $(\dfrac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}\dfrac{\partial E}{\partial z_\eta^j}+\dfrac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\dfrac{\partial E}{\partial z_\epsilon^i})\dfrac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i = \pi\dfrac{2b^2g^2g'}{(1-b^2)\sqrt{w_b}\sqrt{w_0}}\left[g'(w_0+gg''+b^2)-b\xi\sqrt{w_b}(1+g''+w_0)\right];$

(iv) $\dfrac{\partial^2 E}{\partial z_\eta^j \partial z_\epsilon^i}\dfrac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i = \dfrac{2b^2g}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}\left[\xi(1+2(g')^2-b^2)-2bg'\sqrt{w_b}\right].$

Temos de (2.21), (2.22) que

$$\frac{\partial C}{\partial z_\epsilon^i}\frac{\partial C}{\partial z_\eta^j}\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^\epsilon \partial x^\eta}N_\xi^i \quad = \quad \left[\frac{\pi\xi\delta_{\epsilon 1}g}{\sqrt{w_0}\sqrt{w_b}}(-\xi g'+Z)\right]\left[\frac{\pi\xi g'}{\sqrt{w_0}}\delta_{\epsilon 1}(gg''+w_0)\right], \qquad (2.47)$$

logo, um simples cálculo algébrico usando (2.26) nos dá o item (i) (vale lembrar que $\pi^2 = 1$).

O item (ii) segue direto do produto de (2.23) por (2.24) usando (2.26). O item (iii) segue direto das equações (2.21), (2.24), (2.22) e (2.23). E finalmente, para provar o item (iv) basta multiplicar a equação (2.25) por N_ξ^i, dada em (2.34).

É fácil verificar, por simples cálculo algébrico, que os coeficientes que aparecem na equação (2.19) do Teorema 2.3 são dados pelas seguintes igualdades,

$$\frac{12E^2-(2E+C^2)^2}{C(C^2-E)} = \frac{\pi g(8b^4-4b^2w_0-w_0^2)}{\sqrt{w_0}w_b}, \tag{2.48}$$

$$\frac{3C}{2} = \frac{3|g|}{2}\sqrt{w_0}, \tag{2.49}$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{2E-C^2}{C^2-E}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{2b^2-w_0}{w_b}\right), \tag{2.50}$$

$$\frac{3C}{4(C^2-E)} = \pi\frac{3}{4}\frac{\sqrt{w_0}}{g\sqrt{w_b}}, \tag{2.51}$$

$$\frac{2E+C^2}{2C} = \pi g\frac{(2b^2+w_0)}{2\sqrt{w_0}}, \tag{2.52}$$

$$\frac{1}{C(C^2-E)} = \frac{1}{g^3\sqrt{w_0}w_b}, \tag{2.53}$$

onde $\pi = \frac{g}{|g|} = sinal(g)$ e C, E são dados respectivamente pelas equações (2.31) e (2.32).

Substituindo em (1.37) as igualdades (i) a (iv), (2.38) e (2.48) a (2.48), obtemos

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{1}{|g|g^2\sqrt{w_0}w_b}\left\{\frac{\pi g(8b^4-4b^2w_0-w_0^2)}{\sqrt{w_0}w^b}\left[\frac{gg'b}{(1-b^2)w_0\sqrt{w_b}}\left[(gg''+w_0)(\xi bg'-\sqrt{w_b})\right]\right]\right. \\ & -\frac{3|g|}{2}\sqrt{w_0}\frac{2b^2g}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}\left[\xi(1+2(g')^2-b^2)-2bg'\sqrt{w_b}\right] - \\ & -\frac{3}{2}\left(\frac{2b^2-w_0}{w_b}\right)\pi\frac{2b^2g^2g'}{(1-b^2)\sqrt{w_b}\sqrt{w_0}}\left[g'(w_0+gg''+b^2)-b\xi\sqrt{w_b}(1+g''+w_0)\right] + \\ & +\pi\frac{3}{4}\frac{\sqrt{w_0}}{g\sqrt{w_b}}\left[\frac{4b^4g^3g'}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}(-b\sqrt{w_b}+\xi g')\right] \\ & +\left(\frac{\pi g(1+2b^2+(g')^2)}{2\sqrt{w_0}}\right)\frac{2g}{\sqrt{w_b}(1-b^2)}\left[\xi(1-b^2)(1-gg'')+\xi(g')^2(1+b^2)-\right. \\ & \left.\left.-2bg'\sqrt{w_b}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Efetuando as devidas simplificações na última expressão e usando o fato que $\pi\frac{g}{|g|} = \pi^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \{-gg''[w_b(1+2b^2+(1-3b^2)(g')^2)+3b^4(g')^2]+w_0w_b(1-b^2+(1-3b^2)(g')^2)\} \\ & (-\xi w_b - bg'\sqrt{w_b}) - Hg_b(1-b^2)w_0^2(w_b)^{\frac{5}{2}} = 0, \quad H = cte, \end{aligned}$$

o que prova o Teorema 2.3.

■

Segue do Teorema 2.3 (mais precisamente da equação (2.19)) que temos duas equações distintas, dependendo da escolha de ξ, em contraste ao caso euclidiano (obtido ao fazer $b = 0$), quando temos uma única equação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Alexandrov, A.D., *Uniqueness theorems for surfaces in the large I* , Vestnik Leningrad Univ. Math., 11 (1956), 5-17.

[2] Antonelli, P.L.,Ingarden,R.S. and Matsumoto,M., *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology* , D.Reidl and Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[3] Bao, D., Chern,.S., Shen,Z., *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Graduate Texts in Math., 200, Springer Verlag, New York, 2000.

[4] Brezis, H., *Analyse Functionelle. Theory et Aplications*, Masson, Paris, 1983.

[5] Boyce, W.E., Diprima,R.C., *Elementary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2001.

[6] Busemann, H.: *Intrinsic area*, Ann. Of Math.,48 (1947), 234-267.

[7] Chern, S.S., *Finsler geometry is just riemannian geometry without the quadratic restrictions*, Notices Amer. math. Soc. 43(1996), 959-963.

[8] Costa, C.J., *Example of complete minimal immersion in* $\mathbb{R}^3$ *and three-embedded ends*, Bol.Soc. Bras.Mat., 15(1984), 47-54.

[9] Delaunay, C., *Sur La Surface de Revolution don't la Courboure Moyenne est Constant*, J.Math, Pures Appl. 6(1841),309-320, com apêndice de M. Sturm.

[10] do Carmo,M., Dajczer, M.:*Helicoidal with constant mean curvature*, Tôhoku Math., J. 34(1982)425-435.

[11] do Carmo, M., *Superfícies Mínimas*, 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, RJ,1987.

[12] do Carmo, M., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, RJ, 2005.

[13] Farkas, Miklós., *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, Inc., San Diego, 2001.

[14] Finsler, P., *Über Kurven und Flächen in Allgemeinen Räumen*, Dissertation, Göttingan, Birkhäuser Verlag, Basel,1918.

[15] Hartman, P., *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 11(1960), 610-620.

[16] Hopf, H., *Differential Geometry in the Large* , Lectures notes in Math.,1000 Springer Verlag,Berlim, 1983.

[17] Hsiang,W.Y.,Teng, Z.H.,Yu, W.C, *New examples of constant mean curvature immersions of* $(2k-1)$*-spheres into euclidean 2 k-space* , Ann. of Math. 117 (1983), 609-625.

[18] Kenmotsu, C.K., *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tôhoku Math.J, 32(1980), 147-153.

[19] Kenmotsu, C.K., *Surfaces with constant mean curvature*, Trans. math. monographs, 221 Amer. Math. Soc. Providence, 2003.

[20] King, A.C., Billingham J., Otto S.R., *Differential Equations Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[21] Lagrange, J.L., *Essai dùne nouvelle méthode pour determinerles maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Miscellanea Taurnensia Tome II(1760-1761), 172-195; Oevres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris, 1(1867), 335-362.

[22] La Salle, J., Lefschetz, S.: *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, NY, 1961.

[23] Liu, J.H., *A First Course in the Qualitative Theory of Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc, NY, 2003.

[24] Meusnier, J.B., *Mémoire sur la courboure des surfaces*, Mémoires Des Savans Étrangers 10(1785), 477-510.

[25] Polyanin, A. D.,Zaitsev, V. F.: *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman e Hall/CRC; Boca Raton, Florida, 2003.

[26] Randers, G., *On an asymmetrical metric ibn the four-space of general relativity*, Phys.Rev.,59 (1941), 195-199.

[27] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, MacGraw-Hill Book Co., New York, 1989.

[28] Rund, H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

[29] Scherk, H.F.., Bemerkungen über die kleinste fläche innerhalb gegebenner grenzen, J.Reine Angew. Math. (Creller's Journal) 13(1835), 185-208.

[30] Shen, Z., *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.

[31] Shen, Z., *On Finsler geometry of submanifolds*, Math. Ann.,311 (1998), 549-576.

[32] Sotomayor, J., *Liçoes de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[33] Souza, M., Tenenblat, K. *Minimal surfaces of rotation in Finsler space with a Randers metric*, Math. Ann. 325, (2003), 625-642.

[34] Souza, M., Spruck, J., Tenenblat, K. *A Bernstein type theorem on a Randers space*, Math. Ann. 329(2004), 291-305.

[35] Thomas, E.L., Anderson, D.M., Henkee,C.S., Hoffman, D.: *Periodic área minimizing surfaces in block copolymers*, Nature, 334(1988), 598-601.

[36] Waltmam, P., *A Second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc., Orlando, 1986.

[37] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[38] Ye, W. B., *On the volume and submanifolds in Finsler geometry*, pre-print, 2007.

CAPÍTULO 3

Apêndice

3.1 Teoremas e resultados clássicos

Definição 3.1. *Se $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável então $a \in F(U)$ é um valor regular de F se, e somente se, F_{x_1}, F_{x_2} e F_{x_3} não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa*

$$F^{-1}(a) = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : F(x_1, x_2, x_3) = a\}.$$

Proposição 3.2. *Se $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in F(U)$ é um valor regular de F então $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.*

A demonstração pode ser encontrada em [12].

Teorema 3.3. *(Teorema da Função Implícita - caso especial) Seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Um ponto do $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado por (x, z), onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}$. Suponha que $F(x_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) = 0$. Então, existe uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e uma vizinhança V de z_0 tal que $z = g(x)$, para uma única função g de classe*

C^1 em B e que satisfaz $F(x, g(x)) = 0$. Além disso, $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $i = 1, 2, ..., n$.

A demonstração pode ser encontrada em [27].

Teorema 3.4. *(Teorema do Valor Médio de Cauchy) Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) e $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

3.2 Preliminares de equações diferenciais ordinárias

3.2.1 Linearização e estabilidade

Neste apêndice introduzimos alguns conceitos de EDO os quais devem facilitar o entendimento do terceiro capítulo. A teoria qualitativa de equações diferenciais foi criada por Henry-Poincaré (1854-1912) em um dos muitos extraordinários artigos publicados entre 1880 e 1886. Poincaré foi pioneiro no uso de séries assintóticas, uma das mais poderosas ferramentas da matemática aplicada contemporânea. Entre outras coisas ele utilizou expansões assintóticas para obter soluções em torno de pontos singulares irregulares, extendendo trabalhos de Fuchs e Frobenius.

Um sistema de equações diferenciais ordinárias é dito *autônomo* se suas derivadas não dependem explicitamente do tempo, e *não autônomo* se suas derivadas dependem explicitamente do tempo.

Considere o sistema não linear, autônomo

$$\dot{X} = A(X) + h(X), \tag{3.1}$$

onde A é não singular, i.é, $\det A \neq 0$.

Seja $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})$ tal que

$$\dot{x} = F(x, y), \qquad \dot{y} = G(x, y). \tag{3.2}$$

Pontos onde $\dot{x} = F(x, y) = 0$ e $\dot{y} = G(x, y) = 0$ são denominados *pontos críticos.* Esses pontos correspondem a soluções constantes as quais são denominadas *soluções de equilíbrio.* Pontos (x_0, y_0) que não são críticos são denominados *pontos ordinários*.

Se em (3.1)

$$\lim_{X \to 0} \frac{\|h(X)\|}{\|X\|} = 0, \tag{3.3}$$

então (3.2) é denominado um *sistema quase-linear* na vizinhança do ponto crítico.

A condição (3.3) significa que $h(X)$ é pequeno, e, consequentemente $\|h\|$ é pequeno em relação a $\|X\|$ perto da origem.

Para verificar se um sistema do tipo (3.2) é quase linear na vizinhança de um ponto crítico basta constatar que F e G possuem derivadas parciais contínuas de pelo menos ordem dois.

De fato, usando a expansão em série de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0), podemos reescrever F e G da seguinte forma,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r_1(x, y), \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r_2(x, y), \end{aligned}$$

onde $\frac{r_i(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, $i = 1, 2$.

Usando o fato que nos pontos críticos $F(x, y) = G(x, y) = 0$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt}$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt}$, reduzimos o sistema (3.2) à forma,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x, y) \\ r_2(x, y) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Se F e G são duas vezes diferenciáveis então o sistema (3.2) é quase linear, isto é, satisfaz (3.3). Uma consequência direta de (3.4) é que o sistema linear que aproxima o sistema não linear (3.2) é dado pela parte linear de (3.4), isto é,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

onde $u_1 = x - x_0$, $u_2 = y - y_0$ e

$$A = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

A garantia de que um sistema linear aproxima um sistema não linear localmente linerizado é dada mais adiante pelo Teorema 3.5, cuja demonstração pode ser encontrada em [15].

Em qualquer instante t podemos olhar o vetor solução de um sistema do tipo (3.2) como um ponto no espaço. O ponto representando a solução é geralmente chamado o estado do sistema, ou simplesmente *estado.* A totalidade de todos os possíveis estados, correspondentes a todas as condições iniciais para todo parâmetro t sob consideração, é denominado *espaço estado*. Em duas dimensões este espaço é simplesmente um plano. No caso especial em que a equação dada pode ser escrita na forma do sistema,

$$\dot{x_1} \; = \; x_2 \, ; \quad \dot{x_2} = G(x_1, x_2) \, ,$$

o estado fase é denominado o *plano fase* . Um *caminho integral* ou *trajetória* é uma solução $(x(t), y(t))$ de (3.2) no plano-(x, y) (ou plano fase). Assim as trajetórias são curvas definidas em termos do parâmetro t e representam o caminho percorrido pelos pontos estado.

O declive de um caminho integral é dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}.$$

Este declive é únicamente definido em todos os pontos $x = x_0$ e $y = y_0$ não nulos (pontos ordinários). Do fato que a solução passando por um tal ponto existe e é única obtemos que caminhos integrais não podem se cruzar em pontos ordinários.

Seja,

$$\Psi(x, y) = \frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)} \, .$$

A curva $\Psi(x, y) = c$, para um c fixo é denominada uma *isóclina*, a qual é o lugar geométrico dos pontos *estado* para os quais o declive das trajetórias é sempre o mesmo .

Um ponto de equilíbrio é denominado *hiperbólico* se a parte real dos autovalores da matriz associada à linearização é não nula. Ao conjunto das trajetórias no plano-(x, y) denomina-se *retrato de fase*. Em um sistema não linear o comportamento das trajetórias na vizinhança de um ponto de equilíbrio é determinado através da análise dos autovalores da matriz jacobiana associada à linearização (3.6) neste ponto.

Teorema 3.5. *(Hartman-Grobman) Se $\overline{X}$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema de enésima ordem $\dot{X} = f(X)$, então existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ definido em uma vizinhança de $\overline{X}$ que mapeia trajetórias de um sistema não linear em trajetórias do mesmo sistema localmente linearizado.*

Seja $\overline{X}(t)$ uma solução de $\dot{X} = f(X)$, então, sem muito rigor podemos dizer que $\overline{X}(t)$ é *estável* se soluções começando perto de $\overline{X}(t)$ em um dado tempo, permanecem perto de $\overline{X}(t)$ para qualquer tempo posterior. E $\overline{X}(t)$ é *assintoticamente estável* se soluções próximas a $\overline{X}(t)$ convergem para $\overline{X}(t)$ quando t tende para infinito. Neste último caso os pontos críticos são denominados pontos espirais ou *focos*. A seguir daremos uma definição formal.

Definição 3.6. *(Estabilidade de Liapunov)* $\overline{X}(t)$ é dita ser *estável (ou Liapunov estável)* se, dado $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer outra solução $Z(t)$, de $\dot{X} = f(X)$ satisfazendo $|\overline{X}(t_0) - Z(t_0)| < \delta$, então $|\overline{X}(t) - Z(t)| < \epsilon$, para todo $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 3.7. *(Estabilidade assintótica)* $\overline{X}(t)$ é dita ser *assintóticamente estável* se é Liapunov estável e existe uma constante $c > 0$ tal que, se $|\overline{X}(t_0) - Z(t_0)| < c$, então $\lim_{t\to\infty} |\overline{X}(t) - Z(t)| = 0$, para todo $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

O teorema a seguir será muito útil no capítulo 3 e sua demonstração pode ser encontrada em [37], pg 10-12.

Teorema 3.8. *Seja A a matriz jacobiana associada à linearização do sistema não linear $\dot{X} = f(X)$. Suponha que todos os autovalores de A sejam complexos com a parte real negativa. Então a solução de equilíbrio $X = \overline{X}$ de $\dot{X} = f(X)$ é assintóticamente estável.*

O sistema (3.2) define um campo de vetores (ou de direções) no plano-(x, y) (ou plano fase). As direções são tangentes às trajetórias e apontam na direção que o tempo cresce.

Considere o sistema de quações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M(x, y) \\ \dot{y} &= N(x, y). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Seja V uma função definida em algum domínio D contendo a origem. V é dita positiva definida sobre D se $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in D$. Queremos que a função V seja tal que

$$\dot{V}(x,y) = V_x(x,y)M(x,y) + V_y(x,y)N(x,y)\,, \tag{3.8}$$

onde M e N são dadas em (3.7). $\dot{V}(x,y)$ pode ser identificada com o raio de mudança da função V ao longo da trajetória do sistema (3.7) passando pelo ponto (x,y). Isto é, se $x = X(t)$ e $y = Y(t)$ é uma solução do sistema (3.7), então

$$\begin{aligned}
\frac{dV(X(T),Y(t))}{dt} &= V_x(X(t),Y(t))\frac{dX(t)}{dt} + V_y(X(t),Y(t))\frac{dY(t)}{dt} \\
&= V_x(x,y)M(x,y) + V_y(x,y)N(x,y) \\
&= \dot{V}(x,y).
\end{aligned}$$

Uma tal função V é denominada *função de Liapunov*.

Teorema 3.9. *(Liapunov) Considere um sistema de EDO como em* (3.7)*. Seja $\overline{x}$ um ponto de equilíbrio de* (3.7) *e $V : D \to \mathbb{R}$ uma função C^1 definida em alguma vizinhança D de $(\overline{x},\overline{y})$ tal que*

i) $V(\overline{x},\overline{y}) = 0$ *e* $V(x,y) > 0$ *se* $(x,y) \neq (\overline{x},\overline{y})$.

ii) $\dot{V}(x,y) \leq 0$ *em* $D\backslash\{(\overline{x},\overline{y})\}$, *então* $(\overline{x},\overline{y})$ *é estável.*
Além disso se,

iii) $\dot{V}(x,y) < 0$ *em* $D\backslash\{(\overline{x},\overline{y})\}$, *então* $(\overline{x},\overline{y})$ *é assintoticamente estável.*

A demonstração pode ser encontrada em [37].

Definição 3.10. *Um conjunto G é dito positivamente invariante* (*negativamente invariante*) com respeito ao sistema 3.7, se as trajetórias através de $x_0 \in G$ em $t = 0$, permanecem em G para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$).

Definição 3.11. *Um conjunto G é dito invariante* se é ao mesmo tempo *positivamente invariante* e *negativamente invariante*.

Observe que pela definição 3.11 todo ponto crítico (ou de equilíbrio) é invariante. Os conjunto de pontos de uma órbita periódica é também invariante.

Seja R um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e G um subconjunto de R, o qual contém as soluções do sistema (3.7). Para R e G nestas condições temos o seguinte teorema.

Teorema 3.12. *(Liapunov-La Salle) Seja $V(x)$ uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Seja G uma componente da região $V(x) < l$. Assuma que G é limitado e que no interior de G ocorra $\dot{V}(x) \leq 0$. Seja E o conjunto de todos os pontos no interior de G tais que $\dot{V}(x) = 0$, e seja I o maior conjunto invariante em E. Então qualquer solução $x(t)$ em G tende para I quando t tende ao infinito.*

Para a demonstração veja [22] (pg. 58,59).

3.2.2 Séries de Taylor

Se uma função $y(t)$ tem uma série de Taylor convergente $y(t) = \sum a_n(t-t_0)^n$ em algum intervalo em torno de $t = t_0$, então $y(t)$ é dita ser analítica em t_0. Desde que todas as derivadas de uma função analítica existem, as derivadas y' e y'' podem ser obtidas diferenciando a série termo a termo, produzindo séries com o mesmo raio de convergência que a série em y. Descreveremos a seguir o processo para se obter y utilizando a série de Taylor, o qual aplicamos no capítulo 3 utilizando recursos computacionais.

A solução do problema de Cauchy

$$y'' = f(t, y, y'); \qquad y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y_1, \tag{3.9}$$

pode ser escrita na forma de uma série de Taylor em torno de $(t - t_0)$ de maneira que

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(t_0)(t - t_0)^2}{2!} + \frac{y'''(t_0)(t - t_0)^3}{3!} + \cdots . \tag{3.10}$$

Os dois primeiros coeficientes de (3.10) são determinados pelas condições iniciais dadas em (3.9). O valor das derivadas subsequentes de y no ponto $t = t_0$ é determinado diferenciando sucessivamente a equação (3.10) levando em conta as condições iniciais. Em particular fazendo $t = t_0$ em (3.9) e substituindo as condições iniciais obtemos

$$y''(t_0) = f(t_0, y_0, y_1) \,. \tag{3.11}$$

Diferenciando (3.9), obtemos

$$y''' = f_t(t, y, y') + f_y(t, y, y')y' + f'_y(t, y, y')y'' \,. \tag{3.12}$$

Substituindo em (3.12) $t = t_0$, as condições iniciais e o valor de y'' encontrado em (3.11) obtemos o valor da terceira derivada no ponto $t = t_0$

$$y'''(t_0) = f_t(t_0, y_0, y_1) + f_y(t_0, y_0, y_1)y_1 + f(t_0, y_0, y_1)f'_y(t_0, y_0, y_1).$$

Prosseguindo desta forma encontramos as demais derivadas de y no ponto $t = t_0$ e substituindo-as em (3.10) obtemos a desejada aproximação na vizinhança do ponto $t = t_0$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [25] .