Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Comutatividade Fraca entre Grupos Isomorfos.

por

Ricardo Nunes de Oliveira

Brasília

2007

Resumo

Nesta tese estudamos alguns aspectos da comutatividade fraca entre grupos nilpotentes isomorfos, onde a comutatividade é determinada por isomorfismos ou mais geralmente por bijeções entre esses grupos. O conceito de comutatividade fraca foi introduzido por Sidki em 1980 [1]. Nesse trabalho foi definido o Grupo de Comutatividade Fraca gerado por duas cópias isomorfas de um grupo H,

$$\chi(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1,\ \forall h \in H \right\rangle,$$

onde $h \mapsto h^{\psi}$ um isomorfismo entre H e H^{ψ}.

Seguindo um ponto de vista combinatório elementar analisamos nesta tese a estrutura do grupo

$$\chi(H, \sigma) = \left\langle H, \dot{H} \mid [h, h^{\sigma}] = 1, \forall h \in H \right\rangle$$

onde $\dot{H}$ é uma cópia isomorfa de H, σ é uma bijeção de H para $\dot{H}$ tal que $1^{\sigma} = 1$ e H é um p-grupo finito, com ênfase no caso H um p-grupo abeliano elementar.

Palavras chaves: Comutatividade fraca, permutabilidade fraca, critério de finitude, classe de nilpotência, grau de solubilidade, classes duplas.

Abstract

In this thesis we study some aspects of the weak commutativity between isomorphic nilpotent groups, where the commutativity is defined by isomorphisms or more generally by bijections between such groups. The concept of weak commutativity was introduced by Sidki in 1980 [1]. In this work was defined the Weak Commutativity Group generated by two isomorphic copies of a group H,

$$\chi(H) = \left\langle H, H^{\psi} \middle| \; [h, h^{\psi}] = 1, \; \forall h \in H \right\rangle,$$

where $h \mapsto h^{\psi}$ a isomorphism between H and H^{ψ}.

Following an elementary combinatorial point of view we analyze in this thesis the structure of the group

$$\chi(H, \sigma) = \left\langle H, \dot{H} \middle| \; [h, h^{\sigma}] = 1, \forall h \in H \right\rangle,$$

where $\dot{H}$ is an isomorphic copy of H, σ is a bijection from H to $\dot{H}$ such that $1^{\sigma} = 1$ and H is a finite p-group with emphasis in the case where H is elementary abelian p-group.

Key words: Weak Commutativity, weak permutability, finiteness criterion, nilpotency class, solvavility degree, double cosets.

Introdução.

Nesta tese estudamos alguns aspectos da comutatividade fraca entre grupos nilpotentes isomorfos, onde a comutatividade é determinada por isomorfismos ou mais geralmente por bijeções entre estes grupos. O conceito de comutatividade fraca é um caso particular de permutabilidade fraca entre grupos, introduzido por Sidki em 1980 [1]. No mesmo trabalho foi definido o seguinte grupo gerado por duas cópias de um grupo H, que comutam fracamente entre si,

$$\chi(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid [h, h^{\psi}] = 1, \ \forall h \in H \right\rangle,$$

onde $h \mapsto h^{\psi}$ um isomorfismo entre H e H^{ψ}. Foi mostrado que χ pode ser considerado um operador na classe dos grupos que tem a propriedade de conservar finitude, fatores primos de $|H|$, solubilidade, nilpotência para grupos finitos. Mais tarde esta situação foi considerada por Rocco e Sidki em 1980 [6], onde são feitos avanços considerando-se H p-grupo finito, p ímpar, e por Gupta, Rocco e Sidki em 1986 [8], onde são estabelecidas cotas, bastante precisas, para a classe nilpotência de $\chi(H)$ em função da classe de H, onde H é um grupo nilpotente finitamente gerado. A construção foi motivada pela seguinte conjectura formulada por Sidki em 1976 [9], sobre um critério de não-simplicidade de grupos finitos

Conjectura 1. *Seja G um grupo finito que contenha um subgrupo A que é 2-abeliano elementar de posto $k \geqslant 1$ tal que toda involução em G comute com alguma involução de A. Então, $A \cap O_2(G)$ não é trivial.*

No mesmo trabalho, a conjectura foi verificada para $k \leqslant 3$. Muito recentemente, em 2006, foi enunciado por Archbacher-Guralnik-Segev [2] uma solução positiva para a conjectura geral. A demonstração dada utiliza profundamente a classificação dos grupos finitos simples.

Seguindo um ponto de vista combinatório elementar analisamos nesta tese a estrutura do grupo

$$\chi(H,\sigma) = \left\langle H, \dot{H} \mid [h, h^{\sigma}] = 1, \forall h \in H \right\rangle$$

onde $\dot{H}$ é uma cópia de H, σ é uma bijeção de H para $\dot{H}$ tal que $1^{\sigma} = 1$ e H é um p-grupo finito, com ênfase no caso em que H é um p-grupo abeliano elementar. Os resultados conhecidos para $\chi(H)$ e desta tese apóiam a seguinte

Conjectura 2. *Se H é um p-grupo finito então $\chi(H,\sigma)$ também é um p-grupo finito.*

Uma outra linha de generalização de $\chi(H)$ desenvolvida nesta tese é de se considerar grupos gerados por um sistema de grupos isomorfos que comutam fracamente entre si. Mais precisamente, considerando H um grupo nilpotente, o grupo definido pela apresentação

$$G = \left\langle H, \psi \mid [h^{\psi^i}, h^{\psi^j}] = 1, [D_{ij}, L_{kl}] = 1, \psi^n, \forall h \in H,\ i,j,k,l \in \{0, \dots n-1\} \right\rangle$$

onde $D_{ij} = [H^{\psi^i}, H^{\psi^j}]$, e $L_{ij} = [H^{\psi^l}, \psi^j]$ com $[h^{\psi^i}, \psi^j] = h^{-\psi^i} h^{\psi^{i+j}}$, possui n subgrupos $H, H^{\psi}, \dots, H^{\psi^{n-1}}$, que comutam fracamente. Assim definimos o grupo de comutatividade fraca entre n cópia de H como sendo

$$\chi(n,H) = \left\langle H, H^{\psi}, \dots, H^{\psi^{n-1}} \right\rangle.$$

A inclusão das relações $[D_{ij}, L_{kl}] = 1$ na definição do grupo G, deve-se ao fato de que em $\chi(H)$ vale a relação $[D(H), L(H)] = 1$, onde $D(H) = [H, H^{\psi}]$ e $L(H) = [H, \psi]$ e ao fato de que sem estas relações temos exemplos onde o grupo G é infinito.

No capítulo 2 estudamos a possibilidade de simplificar a apresentação do grupo $\chi(H)$, para H um p-grupo abeliano ou um p-grupo não abeliano de ordem p^3, reduzindo o conjunto de relações $[h, h^{\psi}] = 1$. Mais especificamente, dado $H = \langle a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \rangle$ um grupo finito de posto n, consideramos o grupo

$$\widehat{\chi}(H) = \left\langle H, H^{\psi} \mid [a_i, a_i^{\psi}] = 1 = [a_i a_j, a_i^{\psi} a_j^{\psi}],\ 1 \leqslant i < j \leqslant k \right\rangle$$

junto com o epimorfismo natural

$$\theta\ :\ \widehat{\chi}(H) \twoheadrightarrow \chi(H).$$

O estudo foi no sentido de determinar quais valores de H tornam o epimorfismo θ injetivo, ou, não sendo possível, determinar o núcleo de θ. Tratamos dos casos onde H é 2-abeliano elementar de posto 3, ou abeliano finito de ordem ímpar ou não abeliano de ordem p^3.

Teorema 1. *Seja $H =$ um grupo abeliano finito.*

i. Se H é de ordem ímpar, então $\widehat{\chi}(H) = \chi(H)$;

ii. Se $H \cong \mathbb{Z}_2^3$, então $N_\theta \cong \mathbb{Z}^4$.

Proposição 1. *Se H é um grupo não abeliano de ordem p^3, então $\widehat{\chi}(H) \cong \chi(H)$.*

No Capítulo 3 estudamos o grupo $\chi(H,\sigma)$, onde o enorme número de bijeções entre H e $\dot{H}$, e também a natureza combinatorial do problema, nos motivou a dar um tratamento computacional para a questão. O sistema computacional para Álgebra Discreta, GAP [10], junto com um programa para cálculo de classes duplas gentilmente fornecido pelo Prof. Alexander Hulpke, a quem agradecemos, com nossa gratidão, foi utilizado neste capitulo. O cálculo direto de todos grupos $\chi(H,\sigma)$, que a principio somam $(|H|-1)!$ grupos, não é viável à medida que a ordem do grupo H torna-se maior. De maneira a contornar esta situação temos os resultados

Proposição 2. *Sejam H um grupo finito, $A \cong Aut(H)$, $\dot{A} \cong Aut(\dot{H})$, os grupos de automorfismos, $\sigma \in Bij(H^{\#}, \dot{H}^{\#})$, $\alpha \in A$ e $\beta \in \dot{A}$. Então $\chi(H,\sigma) \cong \chi(H, \alpha\sigma\beta)$.*

Proposição 3. *Seja $H = C_p^n = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ um p-grupo abeliano elementar de posto n. Então, dado $\sigma \in Bij(H^{\#}, \dot{H}^{\#})$ podemos obter $\widetilde{\sigma} \in Bij(H^{\#}, \dot{H}^{\#})$ tal que $a_i^{\widetilde{\sigma}} = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\chi(H,\sigma) \cong \chi(H,\widetilde{\sigma})$.*

Proposição 4. ***(Sidki)****Sejam H um p-grupo abeliano elementar finito, p ímpar, $\sigma \in Bij(H^{*}, \dot{H}^{\#})$. Então é possível obter $\widehat{\sigma} \in Bij(H^{\#}, \dot{H}^{\#})$, permutando os subgrupos cíclicos de H, de forma que $\chi(H,\sigma)$ seja imagem homomorfa do grupo $\chi(H,\widehat{\sigma})$*

Se considerarmos $H = \{1, h_1, \dots, h_n\}$, uma enumeração de H, podemos considerar as bijeções entre H e $\dot{H}$ como elementos do grupo $S_{|H|-1}$, via $h_i^\sigma = \dot{h}_{i\sigma}$. Assim, seguindo as notações da **Proposição 2**, temos

$$A = \dot{A} \leqslant S_{|H|-1}.$$

Então a proposição nos diz que basta calcularmos os grupos $\chi(H, \sigma)$ para σ um representante de classe dupla do quociente $A \backslash S_{|H|-1}/A$, o que reduz substancialmente a quantidade de grupos.

Um outro fato importante no tratamento dos grupos $\chi(H, \sigma)$ é a possibilidade da criação de uma árvore cuja raiz é um comutador básico de peso 2, do tipo $[x, \dot{y}],\ x, y \in H$, onde os vértices são obtidos pelo *i.* e *ii.* abaixo.

i. $[a, \dot{x}] = 1 \Rightarrow [a, \dot{b}] = [a, \dot{x}\dot{b}]$,

ii. $[y, \dot{b}] = 1 \Rightarrow [a, \dot{b}] = [ya, \dot{b}]$.

Onde $a, b, x, y \in H$. A utilização deste grafo permite descrever a série central descendente e série derivada em várias situações. Para estes fatos temos uma rotina, **??**, escrita no ambiente do GAP [10], que permite obter a árvore computacionalmente.

Como havíamos mencionado $\chi(H, \sigma) = \chi(H)$ quando σ é um isomorfismo, $\sigma : H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \dot{H}$. O seguinte teorema trata do caso onde σ é uma transposição.

Teorema 2. *Sejam $H = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ um p-grupo abeliano elementar de posto n, p-ímpar, σ, uma tranposição de H com $1^\sigma = 1$. Então, $\chi(H, \sigma)$ é um quociente de $\chi(H)$.*

No Capítulo 4 tratamos do grupo $\chi(n, H)$. Neste caso mostramos alguns resultados sobre nilpotência, semelhantes aos obtidospor Gupta-Rocco-Sidki em [8]. Já para H abeliano finito damos uma estimativa para a ordem do grupo $\chi(n, H)$, que acreditamos ser a ordem exata.

Teorema 3. *Sejam H um grupo nilpotente m-gerado de classe no máximo c com $m \geqslant 2$, $c \geqslant 1$. Então para $m \leqslant c + 2$, $\gamma_{c+3}(\chi(n, H)) = 1$.*

Teorema 4. *Sejam H um grupo nilpotente m-gerado de classe no máximo c com $m \geqslant 2$, $c \geqslant 1$. Então para $m \geqslant c + 2$, $\gamma_{c+3}(\chi(n, H))$ é um 2-grupo abeliano elementar de posto* *no máximo*

$$\sum_{k=c+3}^{m} \binom{m}{k}.$$

Teorema 5. *Se H é um grupo abeliano finito, então a ordem do grupo $\chi(n, H)$ divide $|\chi(H)|^m \, |H|^{n-2m}$, onde $m = \binom{n}{2}$.*

Referências Bibliográficas

[1] Sidki, S.N., *On Weak Permutability between Groups.* Journal of Algebra. , v.63, p.186 - 225, 1980.

[2] Aschbacher, M.,Guralnick, R., Segev, Y., *Elementary Abelian 2-subgroups of Sidki-Type in Finites Groups,* Groups, Geomety and Dynamics, to appear

[3] Gupta, N; Rocco, N., R.; Sidki, S.N., *Diagonal Embeddings of Nilpotent Groups.* Illinois J. of Math. , v.30, p.274 - 283, 1986.

[4] Johnson, D L, *Topics in the theory of group presentations,* Cambridge Univ Press.

[5] Magnus, W., Karras, A., Solitar, D., *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations,* 2nd ed., New york, Dover, 1976.

[6] Rocco, N., R. *Comutatividade fraca entre p-grupos finitos,* Tese de Doutorado, 1980.

[7] Rocco, N., R. *A Presentation for a Crossed Embedding of Finite Solvable Groups.* Communications in Algebra, v.22(6), p. 1975-1998, 1994.

[8] Sidki, S.N., *Some Commutation Patterns between Involutions of a Finite Group. I.* Journal of Algebra. , v.39, p.52 - 65, 1976.

[9] Sidki, S.N., *Some Commutation Patterns between Involutions of a Finite Group. II.* Journal of Algebra. , v.39, p.66 - 74, 1976.

[10] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.4.9; 2006. (`http://www.gap-system.org`).