UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA SUA CONTRIBUIÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

SANDRA APARECIDA DE OLIVEIRA BACCARIN

BRASÍLIA 2008

SANDRA APARECIDA DE OLIVEIRA BACCARIN

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA SUA CONTRIBUIÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

Dissertação apresentada à Comissão Examinadora da Faculdade de Educação, da Universidade de Brasília, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Dr. Cristiano Alberto Muniz.

BRASÍLIA 2008

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA SUA CONTRIBUIÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

Por

SANDRA APARECIDA DE OLIVEIRA BACCARIN

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Alberto Muniz, UnB

____

Membro: Prof. Dr. Luiz Carlos Pais, UFMS

____

Membro: Profª. Dra. Erika Zimmermann, UnB

____

Suplente: Prof. Dr. Antônio Villar Marques de Sá, UnB

Brasília, 10 de março de 2008

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar, presente em todos os momentos de minha vida.

À Universidade de Brasília pela oportunidade dada para o meu crescimento profissional.

Ao Prof. Dr Cristiano Alberto Muniz meu muito obrigado pela orientação, pelo apoio e a amizade que tanto contribuíram para meu crescimento acadêmico como pessoal.

Aos professores-membros da banca examinadora, pelas valiosas contribuições: Prof. Dr. Luiz Carlos Pais, Profª. Dra. Erika Zimmermann e Prof. Dr. Antônio Villar Marques de Sá.

A todos os colegas de trabalho do Colégio Madre Carmen Salles e Faculdade Jesus Maria José, cuja colaboração foi indispensável para o êxito deste trabalho, ao aprovar nossa liberação em diversos momentos e com os quais pretendemos dividir nosso aprendizado.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM) Prof.ª Nilza, Carmyra, Erondina, Mônica, Edilene e Patrícia pela troca de experiências e conhecimentos.

Aos membros do grupo de orientação coletiva EDEM, Josaphat, Verônica e Amanda pelos momentos ricos de discussão de nossos projetos de pesquisa e de aprendizagem conceitual.

Às amigas Regina Pina e Ana Porto pela oportunidade de aprender com vocês.

À Profª Claudia e aos alunos pela colaboração fundamental em nossa pesquisa. Aprendi muito com vocês.

Aos funcionários da Pós-graduação que nos atenderam com dedicação e presteza.

À Profª Soraia que muito colaborou com a revisão do texto.

Aos meus pais que com muita luta nunca negaram esforços para que eu pudesse estudar.

Aos meus irmãos Adriane, Jurandyr e Tiago que embora distantes estão sempre presentes em meu pensamento.

A minha amada avó Cândida que me ensinou os primeiros passos para gostar de Matemática, que embora já não esteja mais comigo ainda sinto sua voz que sopra suave na minha memória.

Ao meu querido esposo Mário Augusto que sempre compartilhou dos meus ideais, alimentando-os e incentivando-me a sempre prosseguir na jornada.

Aos meus filhos Marina, Bruno e Vitória, que abriram mão de momentos de convívio, que ora compreensivos, ora impacientes com a nossa ausência ou cansaço, sempre vibram com nossas conquistas.

A todos que nos deram a vida e nos ensinaram a acreditar na humanidade. Aos que nos deram conhecimentos e nos transmitiram sua crença no saber. Aos que nos deram compreensão e nos ensinaram a ter fé no amor. Aos que nos deram as mãos e nos ensinaram a ter esperança nos desígnios humanos.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as potencialidades da Investigação Matemática em sala de aula, na construção de conceitos algébricos pelos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com a participação de uma professora-colaboradora. O nosso trabalho de investigação partiu da idéia de Ponte (2003), Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001), fundamentados pela teoria de Vygotsky (1934) e Vergnaud (1994) sobre a formação de conceitos. Com esses referenciais, realizamos uma pesquisa de campo na qual propusemos a investigação realizada em grupos de alunos, convidados a não só resolver um problema, mas também a registrarem que conclusões tiraram na realização dessa tarefa e que processos usaram para chegar a essas conclusões (questões levantadas, como organizaram os dados, conjecturas provadas e não provadas, procedimentos usados para validação das conjecturas etc). Os problemas apresentados para os alunos tiveram como características situações das quais eles ainda não possuíam estruturas anteriores já prontas e que, para conseguirem resolver, teriam que mobilizar esquemas, elaborar hipóteses, testar resultados, conversar com os colegas para chegarem às resoluções. O papel do professor nesse caso foi o de mediar a construção desses conhecimentos, e não o de mostrar o modelo pronto. O estudo mostrou que as aulas de investigação podem ter um grande potencial nas aulas de Matemática, pois se constituiu num ambiente de interação e troca, favorecendo o aluno a criar atitudes de predisposição, interesse e entusiasmo pela atividade matemática. Favoreceu também o surgimento de teoremas em ato e conceitos em ato, contribuindo para entendermos um pouco mais como se dá a construção matemática dos alunos e, também, forneceu-nos dados importantes sobre em que momento em cada aluno estava em sua aprendizagem.

Palavras-chave: Investigação matemática, Conceito e Formação.

ABSTRACT

This research has the purpose of investigating the potentialities of the Mathematical Investigation in our classroom, in the construction of algebraic concepts by students of the seventh grade of junior high school, with the participation of a collaborating teacher. Our investigative work arose from the idea of Ponte (2003), Fiorentini, Fernandes and Cristóvão (2004) as well as Chevallard, Bosch and Gascón (2001), based on the theory of Vygotsky (1934) and Vergnaud (1994) about the formation of concepts. With such references, we performed a field research in which we proposed an investigation carried out by the students, who were organized in groups and invited to not only solve the problem, but also to register their findings (the issues raised by the problem, how they organized the data, conjectures which were proven and the ones which were not proven, the procedures used to validate such conjectures, etc). The problems presented to the students had as a characteristic situations in which they did not have previous structures already solved, and in order to solve such problems, the students had to mobilize schedules, create hypothesizes, test results and talk to their peers to get a solution. The teacher's role in this case was to mediate the construction of such knowledge, and not to demonstrate the model already done. The study showed that the investigation classes may have a great potential in classes of Mathematics, since they were built in an environment of interaction and exchange, influencing the students to create an attitude of predisposition, interest and enthusiasm for the mathematical activity. They also favored the surge of theorems in act and concepts in act, which contributed to our understanding of how the students' mathematical construction occurs and also they provided us with important data about the moment in which each student is learning.

Keywords: Mathematical investigation, concepts, formation

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

INEP	– Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
MEC	– Ministério da Educação
NCTM	– *National Council of Teachers of Mathematics*
PCN	– Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEB	– Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SENAI	– Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial

APRESENTAÇÃO

A última década do século XX foi marcada pela discussão sobre a qualidade da educação e sobre as condições necessárias para assegurar o direito de crianças, jovens e adultos a aprendizagens imprescindíveis para o desenvolvimento de suas capacidades. As transformações científicas e tecnológicas que ocorrem de forma acelerada exigem das pessoas novas aprendizagens. Esse contexto coloca enormes desafios para a sociedade e, como não poderia deixar de ser, também para a educação matemática, conforme apontam inúmeros estudos que abordam essa temática, entre eles, os de Ball (2000); Cardoso & Azcárate (2002,2003); Blanco e Contreras (2002), Serrazina (2002), Ponte (2002), Fiorentinni (2006). Esses estudos já apresentam alguns consensos, como por exemplo, a necessidade de conhecimentos matemáticos conceituais e procedimentais bem construídos, além dos conhecimentos didáticos para que os professores possam promover a aprendizagem de seus alunos.

Assim, algumas novas tarefas passam a nos ser colocadas.

Uma Matemática que se pretende de boa qualidade precisa contribuir progressivamente para a formação de cidadãos capazes de responder aos desafios impostos pela complexa realidade e de nesta intervir com suas individualidades. A reflexão que a comunidade de matemáticos, psicólogos, sociólogos, antropólogos e pedagogos têm acumulado nos últimos anos indica que, para uma formação deste tipo, a Educação Matemática deve assegurar às crianças, aos jovens e adultos, aprendizagens bastante diversificadas. Deve garantir-lhes a possibilidade de, ao longo da escolaridade, construir conceitos, princípios e fenômenos cada vez mais complexos, e de transitar por diferentes campos do saber, aprendendo procedimentos, valores e atitudes imprescindíveis para o desenvolvimento de suas diferentes capacidades.

A história da espécie humana sempre registrou mudanças nas relações entre os povos, quer sejam religiosas, quer sejam culturais, até mesmo militares e econômicas. Os gregos impunham sua cultura aos inimigos derrotados; os romanos, suas leis; os incas conquistavam militarmente, mas não interferiam na religião e na cultura dos povos dominados. Durante o Mercantilismo, os europeus invadiam, colonizavam e exploravam economicamente os “povos atrasados”. Em todos esses exemplos o homem dominado aprendia o *modus vivendi* do dominador. A educação, nas mais variadas formas, acompanhava, então, a expansão dos países, a marcha dos exércitos, a pregação dos religiosos. Não há como dissociá-la da História.

Surge, desse modo, o grande desafio: como mudar um conceito tão solidamente estabelecido na cultura humana?

Mudá-lo talvez não seja o objetivo, mas sim adaptá-lo, trazê-lo à atualidade. Para isso, bastaria que todos aprendessem a valorizar o conhecimento e os bens culturais e ter acesso a eles autonomamente; selecionar o que é relevante, investigar, questionar e pesquisar; construir hipóteses, compreender, raciocinar logicamente; comparar, estabelecer relações, inferir e generalizar; e adquirir confiança na própria capacidade de pensar e encontrar soluções, por vezes inusitadas e adversas. É preciso que todos aprendam a relativizar, a confrontar e a respeitar diferentes pontos de vista, a discutir divergência, a exercitar o pensamento crítico e reflexivo. O professor de Matemática tem que buscar aprendizagens significativas que estimulem o aluno a criar esquemas partindo dos que ele já possui. Esses novos desafios farão com que ele chegue à solução de problemas mais complexos. O erro passou a ser usado como estratégia didática e é preciso que o aluno aprenda a criar e agir de forma própria (Pinto, 2000).

Para isso é necessário que o professor compreenda como se dá a aprendizagem de seus alunos, criando situações-problema que gerem um processo de construção do conhecimento.

As mudanças no conceito de educação trouxeram questionamentos para a Matemática: passamos a refletir sobre o que precisamos ensinar e o que precisamos desenvolver? Como o aluno constrói o conhecimento matemático?

A partir daí criou-se uma ruptura no ensino e sentimos a necessidade de propiciar mudanças, mesmo que mínimas; de oferecer aos alunos e a nós professores uma oportunidade de organizar atividades de investigação em sala de aula que possam contribuir para nossa prática e real aprendizagem dos alunos. Percebemos que é preciso iniciar, mesmo que de forma modesta, a busca pelo melhor entendimento das possibilidades de aprendizagem do aluno.

Desta forma, este projeto é fruto de nossa trajetória como professora e coordenadora da área de exatas. Trabalhando em vários estados brasileiros, tivemos a oportunidade de observar diversos contextos em diferentes séries, desde a educação infantil até o ensino médio, e constatamos por meio de processos avaliativos que existe um desempenho muito baixo na aprendizagem da Matemática e que dificuldades de assimilação estão presentes em grande parte das crianças que freqüentam a escola, trazendo como conseqüência um alto índice de reprovação e evasão.

Muitos autores como Muniz (2006), Ponte (2003), Pais (2006) e outros que iremos abordar em nosso referencial têm mostrado em suas pesquisas estratégias para poder construir conhecimento matemático que gere alternativa de ação preventiva, facilitando o desenvolvimento lógico matemático.

Resgataremos algumas construções teóricas de Vygotsky (1934) e Vergnaud (1994) e traremos para discussão pontos que poderão nortear nosso trabalho. Eles nos possibilitarão entender um pouco mais sobre como o aluno constrói seu conhecimento. Da teoria de Vygotsky (1934), abordaremos a formação de conceitos e a psicogênese (origem e desenvolvimento dos processos e fenômenos psíquicos em oposição a uma psicologia estática, que vai estudar estados atuais, sem procurar entender sua gênese) e, em Vergnaud (1994), a teoria dos Campos Conceituais (processo da conceitualização).

A nossa proposta foi trabalhar com uma nova metodologia para a aprendizagem da Matemática, numa tentativa de mudança e superação dos processos mecânicos, presentes no processo aprendizagem/ensino.

Para isso, a dissertação está assim estruturada:

Primeiramente, delimitamos o objeto de pesquisa, contextualizando-o com nossa história de vida, com inquietações teóricas e com as práticas de nossa formação inicial e continuada. Apontamos também dificuldades no atual ensino da Matemática e a importância de se pensar num trabalho diferenciado para a aprendizagem da disciplina.

Com base nessas considerações iniciais, construímos nosso referencial teórico, buscando começar entender o conceito que estamos chamando de "investigação matemática em sala de aula". Para dar suporte a essa pesquisa, encontramos na formação de professores o conceito de professor reflexivo; na psicologia cognitiva, noções de formação de conceitos em ação, situações didáticas e a-didáticas que poderão nos dar apoio para a realização do trabalho. Buscamos também aporte teórico sobre resolução de problemas e representação semiótica.

Feitas essas discussões teóricas, apresentamos nossa estrutura metodológica, caracterizando o local e os participantes da pesquisa, bem como os procedimentos que adotamos.

Em seguida, apresentaremos nossa análise de dados, que é o resultado de uma pesquisa de campo que teve uma ampla observação e registro, que nos levaram a criar as categorias de análise: O convite ao falar, expressar e opinar, a diversidade de procedimentos e registros, evidências de fragmentos do processo de formação de conceitos algébricos, a investigação proporcionando situações a-didáticas, a investigação matemática agindo como uma aprendizagem reflexiva do aluno, a construção de um espaço de investigação como processo de reflexão-crítica e formação: conversando com a colaboradora, dentro de cada uma dessas categorias, apontamos os elementos mais significativos e por fim apresentamos um imbricar entre todas as categorias que foi o que conseguiu constituir o que chamamos de Investigação Matemática em sala de aula. Assim encerramos o trabalho tecendo nossas conclusões frente aos resultados e à relação entre a pesquisa e o quadro inferencial extraído da literatura.

Nas considerações finais fazemos uma reflexão sobre a nossa caminhada e apontamos novas propostas de estudo e pesquisa.

1. INTRODUÇÃO

1.1. HISTORICIDADE DA DELIMITAÇÃO DO NOSSO OBJETO DE PESQUISA

Comecei a gostar de Matemática desde muito pequena incentivada primeiramente por minha avó, que possuía apenas a 2ª série do que hoje chamamos Ensino Fundamental. Naquela época, morávamos numa pequena cidade do interior de S.Paulo e usávamos uma caderneta para fazer compras no armazém, na padaria e no açougue. Os donos desses estabelecimentos marcavam o que comprávamos e, ao final do mês, tinham que somar as despesas para efetuar o pagamento. Minha avó sempre conferia os cálculos e tirava até uma prova dos nove[1]. Eu achava aquilo o máximo. Foi então que ela começou a me ensinar os números e como fazer aquelas contas. Eu queria muito ir para a escola, mas não havia vaga em escolas públicas. Por isso e outros diversos motivos eu não fiz a pré-escola e acabei por entrar direto na 1ª série.

Minha mãe abandonou os estudos na 5ª série do Ensino Fundamental, porque queria fazer um curso de corte e costura, profissão que exerce até hoje e, dessa forma, pôde ajudar meu pai na educação de seus quatro filhos. Com ela aprendi muito sobre o sistema métrico, pois desde meus 8 anos ajudava a tirar medidas. Fui crescendo e passei, também, a auxiliar na montagem dos moldes no papel e isso foi me dando uma visão muito importante do quanto a Matemática podia ser útil no meu dia-a-dia.

Comecei a ter uma relação mais estreita com a Matemática quando estava na 1ª série do Ensino Médio e minha professora convidou-me para participar de uma Olimpíada de Matemática, na qual obtive o 1º lugar, na região. Com esse resultado, muitos alunos que tinham dificuldade começaram a pedir minha ajuda nos conteúdos que eles não compreendiam. Percebi que, quando algum aluno não entendia um assunto, ao fazê-lo pensar em outra maneira de resolução, freqüentemente conseguia um bom resultado.

Já na 3ª série do que seria o atual Ensino Médio, fiz um teste para trabalhar num banco e fui aprovada devido ao bom desempenho com a Matemática. Logo fui parar no setor de aplicações financeiras, o qual me rendeu a possibilidade de fazer vários cursos na área. Foi então que resolvi prestar vestibular para Matemática. No terceiro ano da graduação em Matemática, fiz estágio em uma escola na qual a Diretora convidou-me para trabalhar. Acho

---

[1] Processo utilizado para conferir o resultado de uma adição.

que ali se deu o início da minha carreira na Educação.

O presente trabalho é fruto da experiência e reflexão dessa trajetória como professora, por 15 anos, e coordenadora, por 6 anos. É importante acrescentar que trabalhei em vários estados brasileiros onde pude observar diversos contextos em diferentes séries, desde o infantil até o ensino médio.

Em 1992, trabalhei no SENAI-RS, num projeto de alfabetização de adultos. Estes eram operários e as aulas aconteciam dentro da própria empresa. O método aplicado era o de Paulo Freire e a desigualdade dentro do grupo era considerável: enquanto alguns alunos precisavam ser alfabetizados, outros necessitavam aprender mais sobre a Matemática. O objetivo, no entanto, era único: aplicar os novos conhecimentos para aprimorar seu próprio trabalho na empresa.

Essa foi a centelha inicial que me fez pensar nos diversos métodos de se ensinar Matemática, principalmente naqueles que trabalham com situações do dia-a-dia dos alunos, sem descuidar, contudo, da capacidade didática do professor.

Em 1995, em São Paulo, trabalhei no ensino fundamental em uma escola pública, com crianças de histórico de baixo rendimento escolar. Exercitando esse ensinar Matemática, em 1997 fui convidada para ser coordenadora de uma escola particular e comecei a observar os professores: por que alguns conseguiam trabalhar melhor o conteúdo do que outros?

Desde 1999, quando cheguei em Brasília, trabalho em uma escola particular. Além de dar aulas, sou coordenadora de área na disciplina de Matemática. Nesse fértil campo de experiências, continuo estudando diferentes maneiras de ensinar a disciplina dos números, buscando aprender um pouco mais sobre como o aluno constrói seu conhecimento matemático e como o professor pode mediar esse processo. Para isso venho pesquisando vários autores que se dedicaram a esse tema em suas obras.

O primeiro contato com a Educação Matemática foi em 2003, quando fui convidada a fazer parte de um grupo de estudo, constituído por professores, mestres e doutores da Universidade de Brasília, que fazem pesquisa a respeito do assunto. Essa participação tem provocado reflexões importantes em busca de respostas e me permite ver que a educação matemática requer discussões mais amplas, pois envolve questões históricas, sociais e psicológicas.

Pensar em Matemática hoje, para alguns alunos, é sempre uma experiência frustrante. Verifica-se que no Brasil existe um desempenho muito baixo na aprendizagem dessa disciplina e que dificuldades de assimilação estão presentes em grande parte das crianças que freqüentam a escola, trazendo como conseqüência um alto índice de reprovação e evasão. Dados apresentados pelo SAEB[2], de 2001, em amostra representativa do alunado brasileiro de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, comprovam o baixo rendimento dos alunos nessa disciplina. Foram avaliados diversos itens dos testes, tendo por objetivo levar os professores à reflexão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos e perceber a dinâmica do processo de construção do conhecimento.

Os resultados do SAEB 2003 mostram uma certa estabilidade em relação a uma avaliação semelhante realizada em 2001, mas evidenciam, também, que, embora muito se tenha feito, muito ainda há a se fazer. A escola brasileira, neste novo milênio que se inicia, necessita dar um salto de qualidade, possibilitando àqueles que a freqüentam a construção de conhecimentos e valores que lhes permitam transitar com desenvoltura no mundo contemporâneo.

No entanto, o ensino de Matemática nas escolas continua baseado no modelo de aulas expositivas sobre os conceitos, seguidas de aulas de exercícios e solução do tipo “é só seguir o modelo”, todos com mesma estrutura, abordando os mesmos conceitos, modificando-se apenas algumas quantidades. Percebe-se também o uso de muita simbologia, o que dificulta ainda mais o entendimento por parte dos alunos. Esse tipo de ensino da Matemática pode propiciar aos estudantes a aquisição de alguns hábitos, destrezas e conhecimentos relacionados aos conceitos e princípios abordados, mas pode estar dificultando o desenvolvimento das habilidades matemáticas, principalmente na interpretação e busca de estratégias de resolução, sendo este um dos principais fatores que influenciam a obtenção de sucesso na solução de problemas.

Esse modelo, até hoje vigente na maioria das escolas, concebe o ensino apoiado na: *1) apresentação dos conceitos; 2) exemplificação com grande número de exercícios; 3) solução de grandes listas como aplicação do conceito e 4) avaliação da reprodução do conceito. C*onfigura, em nosso entendimento, certa comodidade por parte dos agentes envolvidos nesse processo, pois causa uma falsa idéia de que o aluno está aprendendo. A nossa formação não fugira a essa regra, já que vivenciamos esse modelo ao longo do que chamamos de Ensino Fundamental e Médio, e até mesmo na Licenciatura de Ciências e Matemática, o que agora percebo com clareza expressava uma concepção de Matemática a-

---

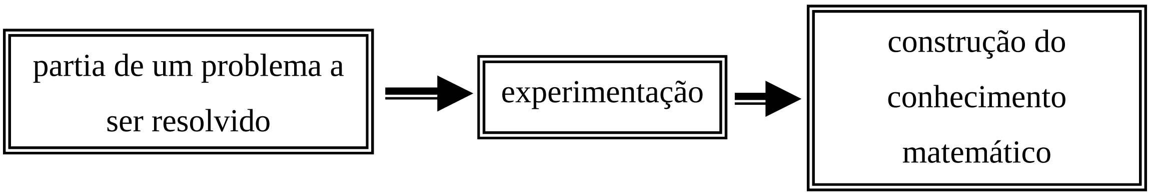
[2]Entre as prioridades estabelecidas pelo Ministério da Educação (MEC), destaca-se a melhoria permanente da Educação Básica no Brasil. Contribuindo para a realização de tal objetivo, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) implantou, em 1990, um dos mais amplos e completos esforços na coleta e sistematização de dados e análise de informações sobre o ensino fundamental e médio em nosso País: o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB.

histórica e acrítica, desconectada das práticas sociais. É essa mesma Matemática que continua sendo aplicada na maioria das escolas.

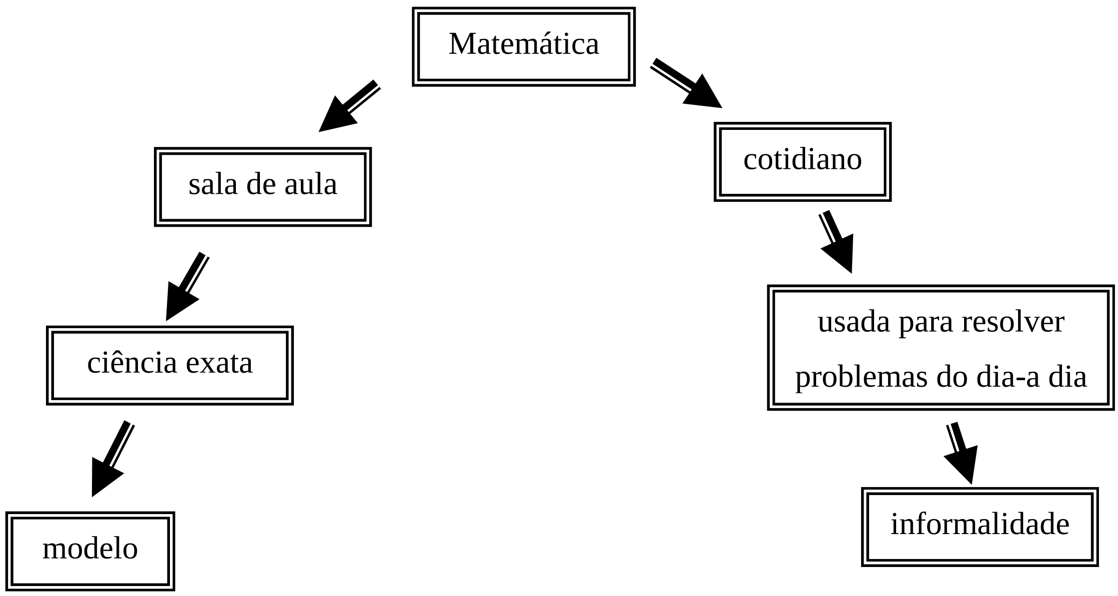
Se fizermos um retrospecto na história da construção do conhecimento matemático, poderemos perceber no esquema a seguir o quanto a Matemática foi se distanciando do seu objetivo inicial.

GRÁFICO 1 – Construção do conhecimento matemático

Como a Matemática se construiu ao longo dos tempos



Como está o ensino atual da Matemática????



Pensando nesse processo, partiu-se do primeiro pressuposto que consiste na compreensão de que o desenvolvimento conceitual é considerado como perspectiva epistemológica e didático-metodológica. Então, como encontrar uma metodologia que abarcasse uma tentativa de mudança no ensino e superação dos processos mecânicos, presentes no ensino-aprendizagem da Matemática, os quais impedem a possibilidade de ocorrer métodos alternativos de resolução?

Em nossa compreensão, porém, os problemas de ensino e aprendizagem em Matemática, como nos outros campos de conhecimento, não se limitariam somente a essas questões metodológicas. Ao contrário, acreditamos que exigiria uma análise do processo de construção histórico-conceitual do conhecimento.

Para tanto começamos delinear nosso projeto, imergindo nessa idéia do processo investigativo. Entendemos ser urgente a construção deste processo, tendo em face as considerações apontadas sobre o atual ensino da Matemática. Necessitamos rever a prática naquilo que oferece para potencializar a nossa atividade na escola e para isso pretendemos desenvolver em sala de aula um processo de investigação.

Podemos definir a investigação como um estudo de caminhos e de descobertas por meio da exploração, passando por etapas que aparecem naturalmente, e que tem alguma probabilidade de nos conduzir à solução. Dizemos que idéias mais simples poderão se constituir em estratégias mais importantes e, por meio da investigação dessas diversas estratégias que surgem, poderemos construir conhecimento que gere uma alternativa de ação preventiva, facilitando o desenvolvimento lógico-matemático.

1.2 RELEVÂNCIA DO ESTUDO PARA A EDUCAÇÃO

Nossa idéia é desenvolver uma pesquisa participante fundada na perspectiva desta investigação enquanto estratégia didática. A investigação nesse contexto será tomada em dupla perspectiva: uma realizada pelo aluno, que não receberá os conceitos prontos, mas irá investigar e descobri-los através da ação, e outra do professor, que investigará os processos usados pelos alunos para poder mediá-los na construção do conhecimento.

Interessa-nos conhecer os resultados de investigações sobre os processos de raciocínio dos alunos em trabalho exploratório. É importante saber se este tipo de situação-problema, “a investigação”, está ao alcance de todos os envolvidos. É relevante, também, saber se esse trabalho é adequado para a maioria dos alunos ou apenas para os que revelam mais inclinação pela Matemática.

Na verdade, é ainda escasso esse tipo de investigação sobre o trabalho dos alunos e professores. Procuraremos fazer algo que busque estar ao alcance da maioria dos alunos, mas cientes de que poderemos nos defrontar com dificuldades decorrentes de concepções e atitudes por parte dos alunos e professor, bem como de fatores associados ao contexto escolar e ao sistema educativo. Deste modo, torna-se necessário um melhor conhecimento das eventuais dificuldades ligadas às concepções e atitudes dos alunos e das estratégias a que o professor pode recorrer para superá-las.

Nessa pesquisa, resolver problema em Matemática será mais do que encontrar um valor numérico, significará uma construção de um procedimento, um algoritmo, o estabelecimento de um processo de pensamento lógico que será validado por meio da própria ação do aluno, o que, em termos cognitivos, implica na construção/aquisição de novos esquemas mentais, habilitando o sujeito a resolver novas classes de situações.

É natural assumir que o trabalho dos alunos não se limitará a reproduzir o que já existe, não trazendo nada de novo, pois o mesmo pode ser um "exercício" útil, mas não será necessariamente uma investigação. "Novo", aqui, refere-se ao aprendiz que realiza uma investigação, ou se ocupa de um problema semelhante a algo já explorado por outras pessoas, mas cujo trabalho desconhece e produz soluções (para ele) originais. Assim estará certamente realizando um trabalho de investigação a qual tem de ser comunicada a fim de ser apreciada e avaliada pelo grupo.

Essa investigação será fundamentalmente experiencial, pois envolverá a própria experiência de participação. Na verdade, essa investigação pode ser definida como uma ação do sujeito sobre o objeto.

A escolha do tema - Investigação Matemática em sala de aula, justifica-se pela importância da construção do conhecimento matemático na medida que isso é essencial para o indivíduo desempenhar suas funções sociais e profissionais, facilitando a resolução de problemas. Esta opção foi motivada, de um lado, pela possibilidade de acompanhar mais diretamente os sujeitos em processo de investigação, ou seja, em suas experiências de ação na construção de conceitos matemáticos.

1.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Fatores de ordem social, econômica, cultural e política são responsáveis pelo tipo de escola predominante. O repertório cultural de um país, repleto de contradições, constitui a base sob a qual a cultura escolar é selecionada. Ideologias hegemônicas, fruto daqueles fatores, tendem a pressionar a escola pela reprodução de valores nela incluída, moldando o tipo de instituição. E um dos caminhos para fazer frente à realidade congelada e opressiva de muitas escolas e trazer a vida à tona é a busca de uma educação político-estética, que tenha ao centro a visão do homem como ser que pode construir conhecimentos individual e coletivamente, e cuja capacidade de pensar está ligada à habilidade de imaginar e criar estratégias e esquemas mentais para resolução de problemas.

O que é, realmente, "investigar Matemática" na sala de aula?

Qual o papel da "investigação" na construção do conhecimento matemático?

Isto acaba por revelar que esse projeto tem uma dupla proposição: um melhor delineamento conceitual acerca da “investigação” no campo da Educação Matemática e um estudo empírico sobre a formação de conceitos matemáticos.

1.4 OUTRAS INQUIETAÇÕES

Utilizando a metodologia de investigação matemática em sala de aula:

- Será que os alunos irão mobilizar estruturas de acordo com as suas expectativas ou será necessário repensar a ação?
- Será que o aluno desenvolverá a capacidade de realizar investigações?
- Estas atividades promoverão atitudes, tais como persistência e o gosto pelo trabalho investigativo?

1.5 PRESSUPOSTOS

Com relação ao problema dado, podem-se levantar os seguintes pressupostos:

1) É preciso exercitar diversas maneiras de aprendizagem para que se possa construir um verdadeiro conhecimento matemático.
2) Conhecer melhor como o aluno constrói seu conhecimento matemático permitirá ao educador uma mediação mais eficaz no desenvolvimento da aprendizagem.
3) Criar um ambiente investigativo em sala de aula minimiza os distúrbios de aprendizagem e favorece a construção da auto-estima; cria atitudes de predisposição, interesse e entusiasmo; facilita a aprendizagem e auxilia a superação de dificuldades.

1.6 OBJETIVOS

Preocupada em fazer com que os alunos construam realmente um conhecimento matemático, e que adquiram o gosto pela disciplina para poder aplicá-la no exercício de sua cidadania, procuro buscar uma maneira diferenciada para construir esse conceito.

Sendo assim, coloco em destaque meus objetivos.

1.6.1 Objetivo Geral

Analisar o desenvolvimento de atividades que envolvam vários processos de investigação ou resolução num contexto matemático, buscando identificar a ocorrência de formação de conceitos algébricos por meio da ação do sujeito.

1.6.2 Objetivos Específicos:

- Identificar a presença da formação de conceito algébrico nas situações propostas e teoremas em ação, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud.
- Analisar o grau de complexidade e imprevisibilidade dos procedimentos resolutivos em que os alunos envolvem-se na construção de conceitos em ação.
- Analisar o papel da investigação na construção do conhecimento matemático.
- Analisar o processo de constituição do ambiente de investigação.
- Delinear conceitualmente investigação matemática no contexto escolar.

Uma vez tendo estabelecido aonde queremos chegar, buscaremos construir um referencial teórico que dê suporte a essa caminhada.

2.CONSTRUINDO NOSSA CAMINHADA

2.1 INICIANDO O CONCEITO ALGÉBRICO

Atualmente, ao escrever e resolver, quase automaticamente, uma equação do 1º grau, você nem pensa nos séculos de estudos que foram necessários para que se chegasse a esse ponto. A linguagem simbólica da Álgebra é um grande simplificador de cálculos. É uma pena que às vezes os alunos a utilizem sem perceberem o que estão fazendo.

Por meio de investigações, queremos saber como é o nascimento natural e significativo de uma língua algébrica e perceber como é construída pelos alunos. Para tanto, pressupomos que o domínio de uma língua implica saber escrever, ler, compreender oralmente, falar.

Em geral, no ensino da Matemática há ênfase na transmissão de como escrever um problema em linguagem algébrica, mas não há ênfase no desenvolvimento das demais competências. Assim, por meio da investigação, pretendemos ao mesmo tempo colocar os alunos em contato com situações significativas, que o levem a entender a Álgebra como uma nova linguagem, que tem seus modos próprios de registro e expressão, às vezes exigindo sua ação em situações-problema e em outras vezes em situações concretas. Assim, em vez de considerar a Álgebra como um código simbólico indecifrável, vamos pensá-la como uma língua que nos diz coisas, é traduzível, expressa idéias.

Educadores como Pais (1999), D'Ambrosio (1996) e Muniz (2006) entre outros, evidenciaram uma forte vinculação entre a forma como vemos e entendemos a matemática e o modo como entendemos e praticamos o seu ensino.

Segundo Becker, 1993, p.332 *é preciso "refletir primeiramente, sobre a prática pedagógica da qual o docente é sujeito. Apenas, então apropriar-se de teoria capaz de demonstrar a prática conservadora e apontar para construções futuras"*. Para tanto iniciamos nosso estudo sobre a Álgebra expondo algumas idéias sobre a trajetória do conhecimento algébrico.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) evidenciam três concepções de educação algébrica entre os professores:

- *Lingüística–pragmática:* Historicamente evidente em todo o século XIX até metade do século XX. Prevalecia a crença de que apenas as técnicas, mesmo que mecânicas, eram suficientes para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas. Nessa concepção, a Álgebra não necessita de objetos concretos como pré-requisitos, é uma Álgebra puramente aplicada à resolução de problemas tendo a finalidade de levar o aluno a realizar operações de maneira sistemática;

- *Fundamentalista–estrutural*: Surge, aproximadamente, na segunda metade do século XX e vem contrapor a idéia anterior com um cunho fundamentalista. A Álgebra passa a ter a função de fundamentar os vários campos da Matemática escolar. Prevalecia a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações que justificassem cada passagem presente no cálculo algébrico capacitaria o aluno a identificar e aplicar estas estruturas em diferentes contextos vindouros;
- *Fundamentalista–análoga:* Surge após o fracasso da Matemática Moderna na tentativa de contestar os aspectos internalistas, efetuando uma síntese entre as anteriores, procurando recuperar o valor instrumental da Álgebra e mantendo o caráter fundamentalista. Baseia-se em recursos geométricos e visuais. Acreditava-se que uma Álgebra "geométrica" era didaticamente superior a qualquer outra abordagem lógico-simbólica, pois tornava visível certas identidades algébricas.

O conhecimento de álgebra foi altamente difundido pela Matemática Moderna e abrange conteúdos que estão presentes no currículo da Matemática. Aparecem de maneira mecânica na maioria dos livros didáticos que analisamos e não são nem sequer questionados, simplesmente se estabelecem.

Tradicionalmente é no sétimo ano (antiga sexta-série) que o ensino da álgebra tem início, pois é quando as letras são apresentadas como substitutas de números, dando começo a uma nova linguagem que tenta traduzir em símbolos matemáticos uma idéia.

Fazendo uma análise dos livros didáticos, três pontos nos chamaram a atenção:

- A organização dos conteúdos de uma forma hierarquizada, ou seja, um conteúdo parece sempre depender do outro dando a idéia de sempre haver a necessidade de um pré-requisito para poder passar para etapa seguinte.
- O excessivo uso de formalismo e apresentação de modelos quase sempre destituídos de significado para o aluno, que só devem repetir procedimentos.
- O recurso exclusivo no simbolismo tornando o aluno um simples manipulador de símbolos e situações padronizadas, sem compreensão dos significados

matemáticos que estão presentes na situação, obscurecendo o que há de mais importante na álgebra que é a percepção de significados.

Vários pesquisadores têm demonstrado preocupação em relação ao ensino e aprendizagem da Álgebra, porém, como lembram Wagner e Parker (1993, p.131), as pesquisas sobre Álgebra estão focadas na descrição dos erros e dificilmente na explanação dos processos de construção que levam a tais erros. Hoje em dia, é comum relatos de professores a respeito das dificuldades que os alunos enfrentam na aprendizagem da Álgebra, porém o que não estamos conseguindo descobrir é como solucioná-los.

O pesquisador americano James Fey (1990) resumiu as dificuldades encontradas pelos alunos em Álgebra expressando-se da seguinte forma:

> Na Matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis, enquanto nomes literais para números desconhecidos, e com equações e inequações, que impõem condições nestes números. O ensino de Álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis. (p. 70).

Acreditamos que essas técnicas para a aprendizagem/ensino da Álgebra decorrem das concepções que professores e alunos possuem da mesma e encontramos algumas considerações que consideramos importantes sobre o que seja a Álgebra para alguns teóricos.

Para começar, Lins e Gimenez (1997, p.89) colocam a idéia de que não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente, mas somente um consenso de quais são as coisas da Álgebra: equações, cálculo literal, funções e que mesmo nesse sentido ainda ocorrem divergências.

Observemos a definição de Álgebra apresentada por estes mesmos autores:

> A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a Àlgebra. [...] A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade. (Lins E Gimenez ,1997, p.137).

Para Wagner e Parker (1993), Álgebra é uma linguagem para descrever ações e relações entre quantidades.

Usiskin (1994, p.13) afirma que: "*As finalidades da álgebra* são determinadas por, ou relacionam-se com, *concepções* diferentes *da álgebra* que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos *usos das variáveis*".

Lins e Gimenez (1997) iniciam uma discussão sobre as "tendências letristas" de alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um "cálculo com letras" e utiliza na sala de aula seqüência de exercícios para praticar as técnicas dos algoritmos, que estão disponíveis na maioria dos livros didáticos, e aponta que essa prática não se baseia em nenhuma investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, mas se apóia apenas em uma tradição. Tradição essa que estudos de Fernandes, Fiorentini e Cristóvão (2006) estão apontando ser ineficaz para aprendizagem.

Identificamos um trabalho de uma pesquisadora australiana, Lesley Booth, que tentou identificar os tipos de erros que os alunos usualmente cometem nessa matéria, bem como a natureza das razões desses erros. O projeto de pesquisa com que trabalhou, levado a efeito no Reino Unido de 1980 a 1983, envolveu estudantes de treze a dezesseis anos de idade que vinham estudando Álgebra no contexto de um programa de Matemática integrado desde o sétimo ano.

Os resultados apontaram erros semelhantes, a despeito das diferenças de idade e experiência em álgebra, e as entrevistas com os alunos que cometiam esses erros, evidenciaram que muitos destes podiam ter origem nas idéias dos alunos sobre aspectos aritméticos.

Com a perspectiva de entender por que a apropriação da Álgebra constitui-se numa tarefa cognitiva árdua pretendemos pesquisar como os alunos formam os conceitos algébricos.

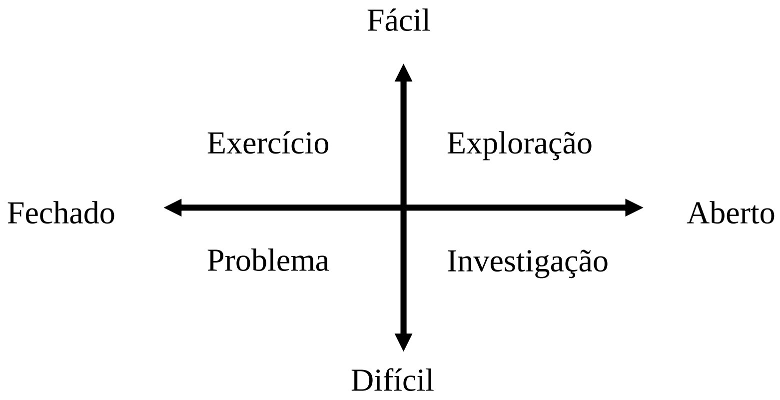
Preocupados com essas dificuldades de professores e alunos na aprendizagem/ensino da Álgebra buscamos novas propostas de trabalho nessa área que começaram a delinear o conceito de investigação.

2.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Partimos da idéia de que ao invés de enfatizar os procedimentos e técnicas seria melhor deixar o aluno construir hipóteses de resolução, manipular as igualdades, explorar as situações apresentadas e procurar meios para resolvê-las, procurando perceber como os conceitos algébricos iriam se formando e de que maneira poderia se constituir essa investigação em sala de aula.

Para melhor compreender o que diferencia uma tarefa investigativa de outros tipos de tarefas matemáticas, Ponte (2003) coloca, em um diagrama, quatro tipos diferentes de atividades: exercícios, problemas, explorações e investigações.

GRÁFICO 2 – Diagrama proposto por Ponte (2003) para diferenciar tarefas



Os limites que diferenciam uma exploração de uma investigação nem sempre são claros.

As explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho. As explorações são freqüentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.

As investigações, por sua vez, levam mais tempo - podendo ter duração de duas aulas a até um semestre letivo - e demandam, segundo Ponte (2003), quatro momentos principais:

- exploração e formulação de questões investigativas (ou situações problemáticas);
- organização de dados e construção de conjecturas;
- realização de testes e refinamento e sistematização das conjecturas;
- e construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Para Ponte (2003), realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos respondê-las, de um modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Em contextos de ensino, de aprendizagem ou de formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

Para Ponte, também numa investigação matemática parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas nas quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, ao se testar essas conjecturas, algumas poderão ser abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente corretas, poderão ser aperfeiçoadas. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, conferirá validade às conjecturas.

Ponte trabalha com atividades de investigação em sala de aula. O exemplo abaixo se refere a uma aula de duas horas, com uma turma do 5º ano, em que foi proposta uma tarefa de investigação intitulada "Potências e Regularidades", onde os alunos trabalharam em grupo:

FIGURA 1 – Atividade proposta por Ponte

Potências e Regularidades

1. O número 729 pode ser escrito como uma potência de base 3. Para o verificar basta escrever uma tabela com as sucessivas potências de 3:

$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$

a) Procura escrever como uma potência de base 2

64 =
128 =
200 =
256 =
1000 =

b) Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

2. Observa as seguintes potências de base 5:

$5^1 = 5$
$5^2 = 25$
$5^3 = 125$
$5^4 = 625$

a) O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de 5 seguintes?

b) Investiga o que se passa com as potências de 6.

c) Investiga também as potências de 9 e as de 7.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004) realizaram também uma pesquisa cujo objetivo principal era investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas (IM) no ensino da Álgebra elementar, identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos ao iniciarem o estudo deste tópico escolar. Esse trabalho foi desenvolvido em duas classes do sexto ano do ensino básico, foram planejadas e aplicadas duas tarefas investigativas nas duas classes e nesse trabalho eles buscaram explorar de maneira intencional a mobilização e o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos, que são duas coisas distintas, mas que, ao mesmo tempo, estão associadas. O material de análise é constituído de registros dos alunos e de diários de campo dos pesquisadores e gravações em áudio e vídeo e esse estudo desenvolvido mostrou que este é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, apresentando indícios de que as Investigações Matemáticas representam um momento rico e desafiador de aprendizagem, tanto para alunos quanto para professores.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001) também escreveram um trabalho colocando a necessidade de se restabelecer a comunicação entre alunos, pais e professores, baseando-se em relatos de uma jornalista que fez uma reportagem sobre o sistema educativo espanhol. O trabalho propõe restituir ao estudo o lugar que lhe é devido, que os autores consideram o coração do projeto educativo de nossa sociedade. Esses autores colocam que a Matemática tão presente em nossa vida cotidiana por meio de objetos técnicos, para muitos de nós, no entanto, está cada vez mais invisível e estranha e afirmam que essa situação é prejudicial a todos envolvidos nesse processo e que devemos corrigi-la.

Para ajudar-nos a definir o que em nosso trabalho chamamos de Investigação Matemática em sala de aula, abordaremos um exemplo dessa obra, em que alguns especialistas discutem a aula da professora chamada Marta, em uma escola da Espanha, aos alunos do 2º ano de um curso correspondente ao nosso Ensino Médio. Marta consegue que a aula seja dinâmica, que os alunos estejam atentos e participem muito. Nunca dá as respostas, propõe uma questão e guia o trabalho dos alunos para que eles possam chegar a formular uma resposta válida, num dos episódios em que Marta pretende começar o estudo das equações de primeiro grau com uma incógnita. Sua idéia é partir de uma situação matemática na qual se procura um número que cumpra certas condições. Ela coloca problemas para os alunos que embora eles tenham meios para resolvê-lo, é a primeira vez que se deparam com essa situação.

No caso da equação do 1º grau, Marta coloca que ao resolver uma equação do tipo

2x + 14 = 3x + 6, a idéia principal com a qual se trabalha é que se pode encontrar o valor de x, manipulando as igualdades. Trata-se principalmente que os alunos descubram quais as manipulações mais apropriadas. Na verdade o que ela faz é explorar com os alunos o algoritmo algébrico, para iniciar esse trabalho ela começa com adivinhações orais que levam o aluno a encontrar valores desconhecidos.

Ao longo do seu trabalho a professora Marta vai enriquecendo-o de modo que ao final os alunos resolvam uma equação compreendendo o que estão fazendo.

Em nossa dissertação investigamos como os alunos constroem esse conhecimento algébrico, numa perspectiva de investigação, tentando uma ruptura ou *transformação* significativa na forma de apreensão ou compreensão desse conceito, analisando a probabilidade de sua aprendizagem ou da aprendizagem de outros conhecimentos a partir desse.

2.3 FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UM PROCESSO CONTÍNUO

Para realizar nossa pesquisa precisávamos entender a própria sala de aula como um processo de autoformação, visto que seria a primeira vez que a professora colaboradora trabalharia com essa metodologia de investigação Matemática. Encontramos em alguns autores referências que se constituíram nas bases teóricas para fundamentar a Investigação Matemática em sala de aula como um espaço de formação do professor. Tardif (2002) entende que é na prática pedagógica que o professor atua e é nela que percebemos suas habilidades e competências, o que chama de saberes (conhecimentos construídos pelos professores). Esse conjunto caracteriza e personaliza a prática. Porém, os saberes docentes não são construídos somente na prática, são elaborados, construídos e reformulados desde o início da formação do professor e por toda a sua vida profissional. Observemos que a formação profissional não se limita, e nem deve limitar-se, apenas à formação inicial, durante o magistério ou na universidade, pois no decorrer do seu trabalho, da sua docência, seus conhecimentos e sua formação sofrem alterações. Estas muitas vezes não previstas, mas absolutamente necessárias para o pleno exercício da profissão.

Por isso, esta pesquisa tenta quebrar o paradigma do professor de Matemática como um apresentador de modelos, pois ao se defrontar com uma nova realidade no ensino da Matemática, necessitará criar meios para reformular sua prática e adaptá-la às novas situações de ensino, bem como atuar como sujeito da sua própria formação, ou seja, autoformando-se. Nóvoa (2001) afirma que “...mais importante do que formar é formar-se; que todo o conhecimento é autoconhecimento e que toda formação é autoformação” (p. 14). Acrescenta ainda que a formação depende de cada um e só o profissional pode ser responsável por ela.

É na prática pedagógica e no processo de autoformação que o professor constrói saberes para desenvolver o trabalho com os alunos, o que significa refletir, acima de tudo, sobre o processo de aprendizagem e a sua prática. Ao se pesquisar os saberes da experiência diante de investigação em sala de aula, estar-se-á validando a autoformação dos professores que, conseqüentemente, construirão novas formas de ensinar.

Torna-se relevante valorizar os saberes da experiência construídos a partir da prática e da autoformação dos docentes. Essa postura profissional é verdadeiramente um desafio para os professores, porém será imensamente positivo para todos os envolvidos. A partir desta postura assumida pelos docentes é que se podem vislumbrar mudanças eficazes no sistema de ensino, os agentes principais deste processo.

Pimenta (2000) conclui que as novas tendências investigativas sobre a formação de professores consideram que:

> “...a formação é na verdade, autoformação, uma vez que os professores reelaboram os saberes iniciais em confronto com suas experiências práticas, cotidianamente vivenciadas nos contextos escolares. É nesse confronto e num processo coletivo de troca de experiências e práticas que os professores vão constituindo seus saberes como *praticum*, ou seja, aquele que constantemente reflete na e sobre a prática.” (2000, p. 29)

Além disso, a partir de uma nova prática de ensino em sala de aula, o professor precisará rever sua maneira de ensinar para auxiliar na aprendizagem de todos os educandos. Essa reflexão acerca de sua prática faz parte da autoformação, pois será capaz de fazê-lo buscar novas alternativas, novos meios para ressignificá-la. Em outras palavras, esta reflexão é fundamental para que o professor construa e reflita sobre seus saberes. É preciso reconsiderar os saberes da docência, analisando-se a prática pedagógica e os docentes, o que auxiliará na ressignificação dos seus processos formativos.

Tardif (2002) reforça a idéia da autoformação e coloca que os profissionais devem, após seus estudos universitários iniciais, autoformar-se, utilizando para isso diferentes meios.

> “Se assumirmos o postulado de que os professores são atores competentes, sujeitos ativos, deveremos admitir que a prática deles não é somente um espaço de aplicação de saberes provenientes da teoria, mas também um espaço de produção de saberes específicos oriundos dessa mesma prática”. (Tardif, 2002, p. 234)

Encontrando apoio nesses autores passamos a pensar que os problemas de ensino e aprendizagem em Matemática, como nos outros campos de conhecimento, não se limitam somente a questões metodológicas. Ao contrário, acreditamos que exige uma análise do processo de construção histórico-conceitual do conhecimento, e para analisar melhor quais seriam as competências do professor nesse processo de investigação, tomamos com referência as competências apontadas para o Ensino da Matemática no século XXI, referenciadas no *National Council of Teachers of Mathematics*[3] e as competências básicas segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), para o desempenho da função de professores.

Sendo assim indicamos três grandes domínios para a formação do professor de Matemática:

- Psicologia Cognitiva
- Pedagogia
- Domínio do conteúdo Matemático.

Nessa perspectiva, colocamos o processo de investigação em sala de aula como um fator que venha a contribuir para a formação do professor nesses três grandes domínios, pois o professor de Matemática passa a ter um novo papel, que é o de criar situações que contribuam para fazer com que o aluno consiga se aproximar de uma definição conceitual, característica do saber científico, aproveitando os diversos caminhos utilizados na resolução de situações-problema.

Para tanto, destacamos novas idéias para a formação de professores, nas quais situações de produção de conhecimento começavam a aparecer. Entre essas novas idéias, surgiram as de Tardif (2002) que falam sobre saberes práticos, que se formam através da ação do docente e não se encontram sistematizados em teorias: são os “saberes experienciais ou práticos”. Do mesmo modo, destacaram-se as idéias de Schön (2000), sobre o professor reflexivo, que trouxeram à tona o conceito de reflexão considerado imprescindível para o trabalho e para a formação do bom professor, na medida em que em seu dia-a-dia, os próprios professores recorrem à reflexão, ainda que não se dêem conta desse processo.

Schön (2000) refere-se em especial a dois tipos de reflexão: a reflexão-na-ação e a reflexão-sobre-a-ação. A primeira é um processo de diálogo com uma situação-problema que exige uma intervenção e a captação do processo desenvolvido e as possibilidades e vantagens

[3]National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): entidade pública norte americana responsável por melhorar a visão, a liderança e o desenvolvimento profissional para dar suporte a professores e assegurar a aprendizagem da Matemática de alta qualidade para todos os estudantes.

de uma intervenção imediata. A segunda se desenvolve num momento posterior à própria ação, na qual adquirimos novas compreensões de situações, e acreditamos que a reflexão nesses dois tipos de ação é que poderá contribuir para esse professor investigador.

As construções teóricas de Schön (2000) e Tardif (2002) nos auxiliaram a valorizar os saberes relacionados à prática e a reflexão que eles apontam para o desenvolvimento profissional. Contudo Pimenta (2005) ajudou-nos a entender que não podemos esquecer a teoria, pois é necessária a apreensão teórico-prática do real para se constituir um professor que vá além da reflexidade, ou seja, um professor crítico-reflexivo.

No processo de investigação apresentado nessa pesquisa precisamos de um professor critíco-reflexivo, trabalhando com os três domínios apresentados acima, pois quando o professor propõe-se a não se limitar a modelos, mas a mediar a construção do conhecimento matemático por meio de situações-problema propostas, terá que saber muito bem esse conceito para poder construí-lo e desconstruí-lo junto com os alunos. Desta forma o professor terá que se aprofundar nos conteúdos matemáticos.

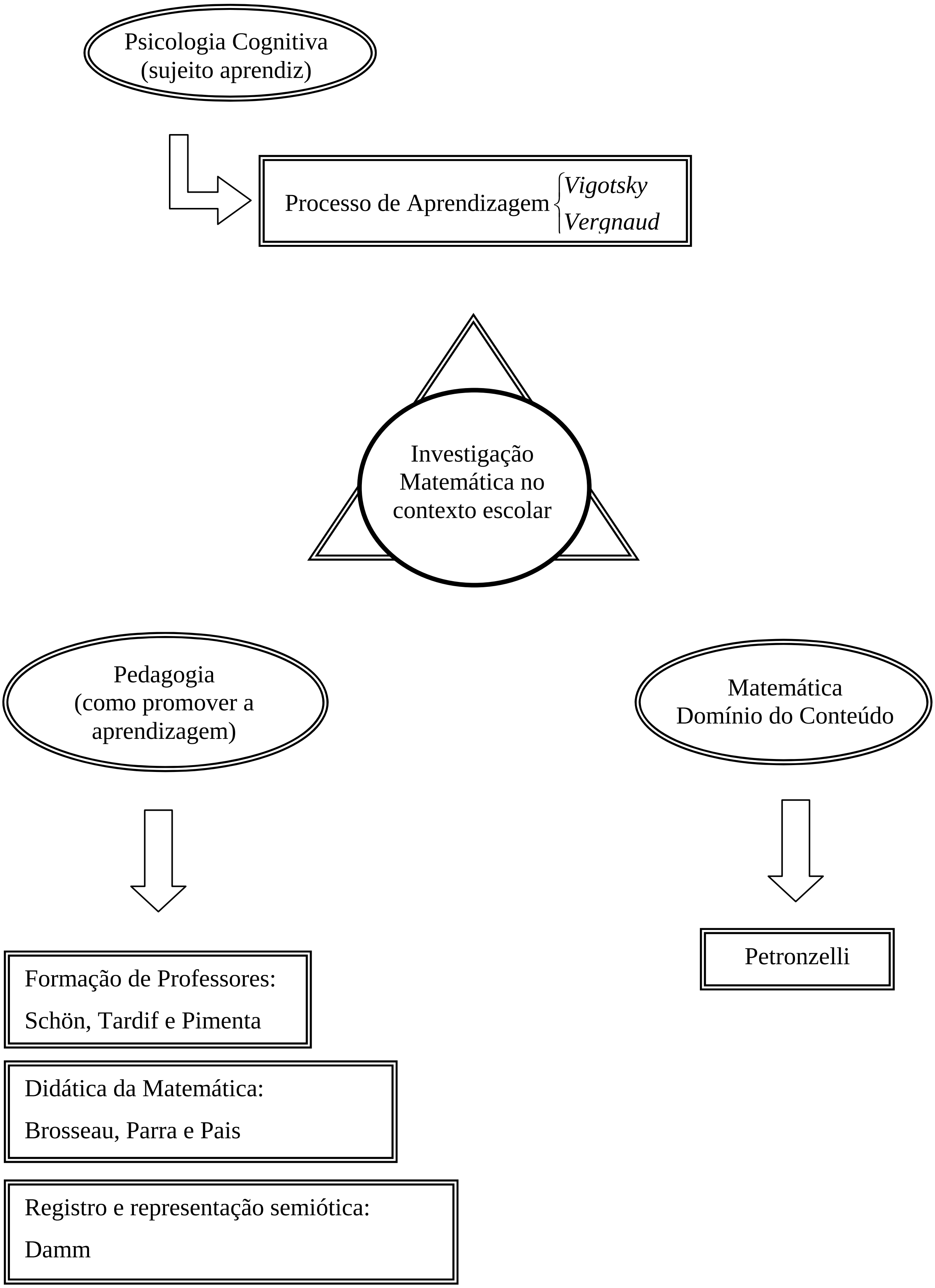
Como também aponta Pimenta (2005), a valorização da ação desenvolvida pelo professor, se for tomada como objeto de reflexão crítica, poderá oferecer alternativas ricas para a formação desse profissional.

Outro domínio que essa investigação propõe é que, para saber mediar o aluno, o professor terá que procurar metodologias e didáticas que sustentem esse processo, o que chamamos de domínio pedagógico.

E o terceiro domínio exigido nesse processo é o da psicologia cognitiva que poderá fornecer dados ao professor de como o aluno aprende.

Desta forma delineamos o seguinte esquema.

GRÁFICO 3 - Esquema do Referencial Teórico



2.4 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Quando falamos em transposição, sempre podemos relacionar a essência de um saber específico e, desse modo, é natural pensarmos na existência de um movimento de transposição desse saber.

Conforme aponta Chevallard (1991, apud Pais, 1999)

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os “objetos de ensino”. O “trabalho” que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (p. 16).

Nosso trabalho se insere numa perspectiva de construção de um conhecimento matemático, caracterizado por um processo evolutivo. No caso específico da Ciência e da Matemática, fica evidente que essas evoluções são marcadas pelos chamados paradigmas científicos.

A noção de transposição didática visa estudar o processo seletivo que ocorre através de uma longa rede de influências envolvendo diversos segmentos do sistema educacional.

Segundo Pais (1999), além desse contexto de evolução do saber, faz sentido falar da transposição restrita ao plano da elaboração pessoal e subjetiva, e é nesse nível que acontece toda a complexidade da problemática da aprendizagem. A vantagem em destacar essa dimensão da transposição está associada ao fato de que cada idéia nova deriva de conceitos anteriores já utilizados pelo aluno.

A transposição didática implica num confronto entre os conhecimentos científicos do professor, que está associado a sua vida acadêmica, e a sua adequação às necessidades cognitivas do educando para construção das estruturas de pensamento deste, embora devamos fazer uma ressalva de que nem toda produção acadêmica resulta em saberes científicos.

No desenvolvimento do conhecimento da matemática hoje, temos a aprendizagem como meta, mas não podemos simplesmente transmitir aos nossos alunos o conhecimento científico tal como ele é trabalhado no ensino superior.

Para isso é necessário um professor mais criativo e competente que:

- relacione-se bem com a disciplina.
- conheça e reflita sobre seus conteúdos.
- entenda as relações entre esses conteúdos.

- perceba sua relevância num mundo real. Embasados nesses fatos, percebemos a relevância de pesquisar como o professor poderá mediar esse conhecimento, criando metodologia que propicie uma real aprendizagem.

Para isso procuraremos saber um pouco mais sobre a formação de conceitos que é uma das temáticas centrais para a fundamentação da nossa prática pedagógica.

2.5 FORMAÇÃO DE CONCEITOS

O fazer pedagógico não se resume à contemplação, nem mesmo à comunicação ou repetição de seus saberes acumulados no transcorrer da história.

A participação do aluno na elaboração desse conhecimento deve ser priorizada, tanto no campo individual como no coletivo. E este conhecimento somente será significativo se representar uma inovação em relação ao saber dominado antes da experiência escolar. Na medida em que o professor encontra o caminho para intermediar o saber científico, ocorre a transposição didática.

Nessa etapa resgatamos algumas construções teóricas de Vygotsky[4] (1934) e Vergnaud (1994). Não pretendemos fazer uma ampla abordagem da teoria desses autores, mas apenas traremos para discussão pontos que poderão nortear nosso trabalho. Esses teóricos nos possibilitarão entender um pouco mais sobre como o aluno constrói seu conhecimento. Da teoria de Vygotsky (1934), abordaremos a formação de conceitos e a psicogênese[5] e, em Vergnaud (1994), a teoria dos Campos Conceituais (processo da conceitualização).

Em seus estudos, Vygotsky (1934) destacou a importância da linguagem e da interação cultural. Para esse autor a estrutura biológica, sozinha, não define o ser humano. Para explicar o assunto ele cita planos genéticos que, em interação, constituiriam o psiquismo do indivíduo.

Um plano é a filogênese, que é a história da espécie. Neste plano, nós teríamos que olhar para trás na história da espécie para entender como os processos que hoje são tipicamente humanos se originaram, desde os hominídeos, anteriores aos *homo-sapiens*, até os dias de hoje.

A sociogênese, ou a história cultural, seria um segundo plano, no qual se busca

[4] Vygotsky ou Vigotsky ou ainda Vigotski são grafias aceitas por diversos autores. Optamos pela primeira forma.

[5] Gênese do psiquismo - origem e desenvolvimento dos processos e fenômenos psíquicos em oposição a uma psicologia estática, que vai estudar estados atuais, sem procurar entender sua gênese.

compreender a imersão do sujeito num mundo cultural: todas as pessoas estão em um nicho de cultura, que é uma fonte primordial de funcionamento psicológico. É onde o indivíduo aprende a ser uma pessoa: vivemos assim, comemos deste modo, acreditamos nestas idéias. Para a criança recém-nascida, o mundo é filtrado pelo grupo cultural no qual ela está imersa. Aqui, a idéia de grupo cultural não é apenas sociológica, referente a fatores macroscópicos como nação, classe social, nível instrucional, por exemplo, mas fazem parte desta idéia pertinências menores, nichos culturais particulares, como os valores familiares aos quais somos submetidos, o tipo de pares com quem convivemos, as práticas religiosas às quais fomos expostos, etc.

O terceiro plano seria o ontogenético, que é o percurso do indivíduo em seu próprio ciclo de vida, do nascimento à morte, ou da infância à vida adulta, em termos de seu desenvolvimento. Neste plano, interessa-nos saber que coisas um indivíduo consegue fazer ou não, a depender da etapa de seu desenvolvimento em que se encontra. É interessante pensar que este caminho definido pela ontogênese tem relações com a filogênese e com a sociogênese. Assim, um membro da espécie humana cresce de determinado jeito: primeiro senta, depois engatinha, depois anda. Nasce o dente, tem maturação sexual em certa idade, ou seja, os indivíduos são marcados por seqüências de vida, dadas pela espécie. Mas também há a idéia que a ontogênese não é pura maturação, porque ela é lida – interpretada – pelo grupo cultural. Sobre isto, um exemplo é o da adolescência como um fato cultural e a puberdade como um fato biológico. A adolescência é um jeito de a cultura ler a puberdade e estabelecer práticas e marcações. Na cultura ocidental contemporânea, especialmente em alguns grupos sociais, a adolescência tem sofrido transformações radicais: está começando cada vez mais cedo, está terminando cada vez mais tarde.

Na relação entre estes três grandes planos genéticos, a filogênese fornece para a cultura limites e possibilidades; tem coisas que o ser humano pode fazer, outras que não pode, porque está equipado com limites e possibilidades que são de natureza física mesmo. Da filogênese para a sociogênese temos a idéia da restrição, mas da sociogênese para a filogênese há uma idéia de ampliação: como ser cultural o homem expande seus limites; o homem não voa, mas inventou o avião. A escrita, a memória, o computador ampliam a capacidade de operação, o relógio amplia a noção de tempo. Então a cultura retroage sobre a filogênese, no sentido de transformar aquele limite que originalmente seria uma restrição, expandido, crescendo para fora do organismo por intermédio de artefatos culturais.

A filogênese alimenta a ontogênese, embora não haja uma relação linear, pois sabemos que, muitas vezes, o indivíduo pula etapas.

A cultura dá significados, interpretando as fases do homem: a maturação biológica de um indivíduo, quando lida pela cultura, torna-se biografia, história de vida.

Aqui entra em jogo um quarto plano genético postulado por Vygotsky (1934) que é, na verdade, o mais interessante, chamado microgênese, termo cunhado não por Vygotsky (1934), mas por Wertsch, autor contemporâneo norte-americano. Este plano diz respeito ao fato de que todo e qualquer fenômeno psicológico tem a sua história: a história de como alguém aprende a ler e a escrever, como aprende a amarrar sapatos, a andar de bicicleta, a ligar a televisão, etc. O prefixo *micro* aqui se refere ao fato de que como as coisas não nascem prontas, e também não aparecem de uma forma repentina, tudo tem um processo, ainda que este não seja visível externamente. Cabe à psicologia compreender como o indivíduo passa do estágio de não saber alguma coisa, a sabê-la, de não ser capaz, a sê-lo: tudo no repertório psicológico teria a sua gênese.

Esta quarta dimensão é a porta aberta para o não determinismo. Se ficarmos presos à ontogênese e à filogênese, corremos um risco de determinismo biológico: tal fenômeno ocorre assim porque o sujeito é um ser humano, ou porque tem quatro anos de idade. Centrar demais na sociogênese traz o risco do determinismo cultural: faz-nos correr o temor de homogeneizar o indivíduo, anular o livre arbítrio, o individual e a subjetividade, porque o desenvolvimento estaria todo definido pela cultura.

A idéia da microgênese é tipicamente sócio-histórica, é materialista e é não determinista, porque com ela fragmentamos de tal modo a experiência de cada um, que encontramos a fonte da construção da singularidade. Não precisamos buscar explicações espirituais, em uma outra instância extramaterial. A psicologia se dá em um plano material, mas tão complexo e tão diverso, que é na construção de cada vida que vamos encontrar a fonte de constituição do psiquismo singular. Não encontramos duas vidas iguais e é a perspectiva microgenética que vai oferecer subsídios para a compreensão da singularidade.

A contribuição mais importante de Vygotsky (1998) para a educação é sua proposta de relação entre desenvolvimento e aprendizagem. Para ele o desenvolvimento está atrelado à aprendizagem, que é essencial para promovê-lo: é como se ela "puxasse" o desenvolvimento para frente. Nisto está referida a importância que Vygotsky (1998) dá para a cultura, para a experiência de vida do sujeito. Quer dizer, uma pessoa passa a vida aprendendo coisas, e é este caminho da aprendizagem que vai definir por onde passará o seu desenvolvimento. Isto dá à educação uma perspectiva muito valiosa, que é olhar para frente: uma visão prospectiva e não retrospectiva. É onde tem mais valor o conceito vygotskyano de zona proximal (muito divulgado, por vezes mal interpretado): é um valor heurístico, serve para iluminar um modo de ver a questão, e não tanto para instrumentalizar um olhar sobre as crianças.

A zona proximal seria um espaço abstrato, de desenvolvimento, relacionado ao que Vygotsky (1998) chama de nível de desenvolvimento real, que é o que a pessoa já tem consolidado, aquilo que já sabe, já conhece, já desempenha. Este nível é normalmente o objeto do olhar da psicologia tradicional, e também do senso comum. O que interessa para um olhar mais estático sobre o desenvolvimento é o que já está pronto. Um segundo nível para Vygotsky (1998) é o desenvolvimento potencial, que é aquilo que a criança ainda não tem consolidado, mas já anuncia que terá. A evidência que Vygotsky (1998) usa para indicar que este fato é visível, é quando a criança não consegue fazer sozinha uma determinada tarefa, mas consegue com ajuda. Isto pode parecer trivial, mas não é, porque a ajuda só funciona quando a criança está preparada para beneficiar-se dela (mesmo com ajuda um bebê não conseguirá dirigir um carro, por exemplo).

Então é como se cada habilidade, conquista ou fenômeno, cada componente do psiquismo humano passasse primeiro por um momento potencial, entrando no desenvolvimento como algo não pronto, sendo depois elaborado e consolidado como tal.

Assim, entre o presente e o futuro próximo da criança há esta região abstrata que é a zona proximal, quando uma série de coisas está em efervescência, em ebulição. Não se caracteriza como um estágio, como alguma coisa visível, mensurável; para cada item do repertório psicológico teríamos o espaço teórico da zona de desenvolvimento proximal.

Para desenvolver essa região abstrata, o professor terá que criar e resolver situações-problema que propiciem uma sucessão de evoluções, ou seja, aproveitar as experiências significativas do aluno, e através de mediações, fazer com que as mesmas sejam reelaboradas para se chegar ao conhecimento científico.

Desta forma a situação-problema poderá se constituir num verdadeiro eixo condutor da aprendizagem matemática, mas para isso não basta associar bons problemas a boas respostas; a construção do saber certamente não é unicamente essa associação.

Resolução de problemas não é um conteúdo do currículo a ser ensinado, mas sim a finalidade da educação matemática e estratégia de ensino, e esta resolução não é restrita à resposta numérica dada pelo aluno, mas é um processo como um todo. Os problemas que devem impulsionar a aprendizagem matemática têm como fonte múltiplos espaços e contextos: os esportes, o comércio, a política, a geografia, a economia, dentre outros. O contato com as circunstâncias que geram os problemas não deve sempre ser via texto escrito, mas também através das vivências, experiências, cálculos mentais, possibilidades, probabilidades e outros meios.

O professor deve procurar interpretações de contextos que concebam diferentes soluções para que sejam confrontadas, e nessas situações aproveitar para “institucionalizar” procedimentos espontâneos presentes na produção dos alunos.

É importante ressaltar que, segundo Vygotsky (1934), esses problemas devem estar dentro da zona proximal de desenvolvimento do aluno, o qual tem que estar sempre sendo estimulado a tentar se superar, por seu próprio esforço, ou fazendo parcerias, procurando no coletivo estratégias para chegar a respostas.

Para que isso ocorra o professor deve buscar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno: se estas forem insuficientes não desencadearão o processo de elaboração cognitiva, ao passo que se forem em excesso fatalmente ocorrerão os mesmos erros da forma tradicional de ensino (repetição, informações demasiadas, etc). O professor deve colocar como meta a idéia de que o aluno estará sempre em processo ativo de reelaboração de idéias de seu conhecimento. Faz-se necessário, então, um professor criativo e pesquisador do processo de aprendizagem de seus alunos visando cumprir o desafio de uma abordagem pedagógica diferenciada, que privilegie o aluno a vivenciar os primeiros passos de uma autonomia, iniciativa e produção do seu próprio conhecimento.

Portanto, a formação de conceitos é um tema central dos trabalhos de Vygotsky (1998). Para analisá-lo melhor, dividimo-los em dois grupos: espontâneos/cotidianos e os científicos. Os cotidianos são aqueles adquiridos com base na vivência da criança e os científicos são aqueles adquiridos nas interações escolarizadas.

O processo de formação de conceitos é fundamental no desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

> A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferência ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como o meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos. (Vygotsky, 1998, p.72).

Para aprender um conceito é exigido um agrupamento de diversas operações intelectuais como atenção, memória lógica, abstração, capacidade de comparar e diferenciar. Logo, um conceito não pode ser aprendido por meio de uma simples transmissão do professor, pois é um processo de construção individual, mediada pelo meio exterior.

As idéias de Vygotsky (1934) levaram-nos a algumas questões de nossa pesquisa:

- exercitar diversas maneiras de aprendizagem pode contribuir para que se possa construir um verdadeiro conhecimento matemático?
- conhecer melhor como o aluno constrói seu conhecimento matemático permitirá ao educador uma mediação mais eficaz no desenvolvimento da aprendizagem?

Para maior compreensão sobre este assunto presente em nossa pesquisa, buscaremos em Vergnaud (apud Franchi, 1999) os campos conceituais.

Um dos pressupostos básicos dessa teoria é que o conhecimento se constitui e se desenvolve no tempo em interação adaptativa do indivíduo com situações de experiência. O desenvolvimento cognitivo do sujeito emerge de conhecimentos anteriormente formados nos quais o mesmo buscará filiações ou rupturas. Essa teoria foi construída visando respeitar uma estrutura progressiva de elaboração de conceitos.

Nessa perspectiva, os processos cognitivos são entendidos como “aqueles que organizam a conduta, a representação e a percepção, assim como o desenvolvimento de competências e de concepções de um sujeito no curso de sua experiência”. (Vergnaud, apud Franchi, 1999, p.157).

Neste contexto Vergnaud (1995) coloca o termo sujeito em situação. Podemos pensar em situação um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço determinado de tempo, envolvendo o sujeito em suas ações.

Um dos aspectos relevantes da teoria dos campos conceituais é que ela permite a compreensão diferenciada de entender os conceitos matemáticos, no sentido de que as situações propostas estão próximas, mas dando destaque ao tratamento do saber escolar, os quais são concebidos tal como são formalizados no território do saber científico.

Para Vergnaud (1995) o desenvolvimento de conceitos está relacionado ao desenvolvimento de competências e concepções, considerando os esquemas que atuam no processo de aprendizagem.

Os conceitos são idéias gerais e abstratas usadas para sintetizar a essência de uma classe de objetos, situações ou problemas relacionados ao cotidiano e ao desenvolvimento científico. É lógico que esta frase não traduz a complexidade do que seja a definição de conceito.

Segundo Vergnaud (apud Pais, 2002), “Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito: um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los” (p. 57).

Assim sendo essa tríade é representada por **S**, **I** e **R**, em que:

- **S** é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, é o referente;
- **I** é o conjunto dos invariantes operatórios do conceito, é o significado;
- **R** é o conjunto das representações simbólicas, é o significante.

Os invariantes operatórios são as ações do sujeito e as propriedades matemáticas utilizadas na resolução de um problema.

Vergnaud (1995) também chama de teorema em ação invariantes implícitos que estão ligados à competência ou aos significados que aparecem na ação do sujeito ao resolver uma situação-problema. São as relações matemáticas que o sujeito leva em consideração, espontaneamente, quando escolhe uma seqüência de operações para resolver um problema. Ele destaca que essas formas espontâneas na ação do sujeito possuem, por vezes, uma validade focal, não universal, ou seja, é validada somente para aquela situação.

Vergnaud (1995) também fala sobre invariantes explícitos que estão ligados à concepção e aos significantes e são expressos por representações simbólicas do sujeito, ou seja, são representações que o sujeito consegue exteriorizar por meios orais ou escritos por onde ele cria os conceitos.

Segundo sua teoria, os conceitos estão sempre se expandindo, ou seja, estão sempre em evolução. Eles se apóiam mutuamente e essa dinâmica gera sentido aos conceitos produzidos progressivamente. Desta forma, a aprendizagem de um conceito ocorre ao longo de um amplo intervalo de tempo e emerge na medida em que os indivíduos agem em situações diferentes, mediados por sistemas de representações diferentes.

Sendo assim, para que o processo de aprendizagem ocorra é necessário que o sujeito esteja sempre sendo colocado em situação de ação sobre o objeto de estudo.

Nessa teoria da linguagem os símbolos têm um papel muito importante, pois é por meio deles que os teoremas-em-ação podem, progressivamente, transformar-se em conceitos científicos.

Nosso trabalho será o de criar situações que contribuam para fazer com que o aluno consiga se aproximar dessa definição conceitual, característica do saber científico, aproveitando os diversos caminhos utilizados na resolução de situações-problema.

Partiremos da seguinte premissa:

- todo conhecimento emerge da resolução de problemas desafiadores.

- a sugestão de resolução emerge com a mobilização de conceitos anteriormente formados que vão sendo reelaborados com a mediação do professor ou de outros alunos, e desta forma surgem os esquemas e invariantes operatórios.
- e a terceira é o fato de que os objetos matemáticos elaborados nessa ação comecem a ter conexões com outros e a se validar numa regra e se constituam numa representação.

Para compreendermos melhor o que é essa representação faremos um estudo sobre o assunto.

2.6 REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

Os sistemas de representação são essenciais na aprendizagem matemática, pois é por meio deles que o sujeito desenvolve seu conhecimento.

Um modelo adequado para explicar as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos por alunos deve estar prioritariamente centrado nas condições cognitivas de compreensão e esta requer a coordenação de diferentes registros.

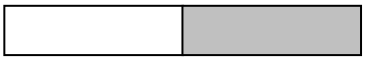
Raymond Duval (apud Damm, 1999) estabelece três aproximações da noção de representação:

- as representações como representação subjetiva e mental, tendo como método de estudo o de conversão, em que o erro é significativo.
- as representações internas ou computacionais, forma na qual uma informação pode ser descrita em um sistema de tratamento automático.
- as representações semióticas, relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, linguagem formal, externo e consciente do sujeito, dependendo da forma (mutável) do representante e o conteúdo (imutável) do representado.

Essas representações não são espécies diferentes, mas realizam funções distintas. As representações mentais têm uma forma de objetivação, as computacionais realizam uma função de tratamento, enquanto as semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de tratamento intencional. É por meio desta terceira que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano.

A atividade matemática, neste caso, é caracterizada pela dependência dessas representações. Isso por que as representações no domínio da Matemática assumem um papel considerável, já que a maioria dos objetos de estudo não é acessível somente pela percepção. Lembramos também que um mesmo objeto matemático poderá ter diferentes representações, dependendo da necessidade e do uso.

Por exemplo, na representação de metade:

- a metade do chocolate – linguagem natural.
- 0,5 é uma representação decimal.
- 1/2 é uma representação fracionária.
- 50% é uma representação percentual.
-  é uma representação geométrica.

Há, portanto, uma diversidade de representações que Duval (apud Damm, 1999) divide em quatro grupos: a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas.

Segundo Duval (apud Damm, 1999), são quatro, também, as funções que as representações podem preencher:

- função de comunicação – transmissão de mensagem.
- função de tratamento – transforma uma representação em outra.
- função de objetivação – permite ao sujeito tomar consciência daquilo que até então não tinha feito.
- função de identificação - permite encontrar, ou reencontrar, um dado ou uma informação dentre muitas outras.

O interesse pelo conhecimento da existência deste mundo de representações não se dá, tão somente, pela possibilidade de entendimento cognitivo para a aprendizagem matemática, mas também pelas funções que estas podem representar para o entendimento do processo investigativo na pesquisa. Um outro elemento que estamos considerando como fundamental é a ocorrência de situações a-didáticas.

2.7 SITUAÇÕES DIDÁTICAS E A-DIDÁTICAS

O significado do saber escolar para o aluno sofre influências pela forma com que o conteúdo, é apresentado didaticamente. Assim, seu envolvimento estará na dependência da situação didática vivenciada por intermédio das diferentes atividades de aprendizagem que lhe são propostas (Freitas, 2001). A análise das situações didáticas permite que se desvelem aspectos importantes relacionados a questões do ensino-aprendizagem, levando a uma reflexão profunda que poderá contribuir para nossa pesquisa.

A aula deve ser planejada pelo professor de maneira a oportunizar ao aluno o desenvolvimento da prática da autonomia para que o mesmo empregue seus próprios mecanismos para a resolução e formulação criativa de problemas. Nestas circunstâncias é que acreditamos que o estudante realmente constrói seu conhecimento. A finalidade de uma situação didática, portanto, é possibilitar ao aluno a estruturação de seu conhecimento por meio da articulação de diversas teorias didáticas, como a noção de ação a ser discutida nesta pesquisa.

Segundo Brousseau (1996), o trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não à exigência do professor.

Neste sentido, a situação didática aqui descrita e examinada se refere à concepção de ensino-aprendizagem da Matemática e construção de uma metodologia que seja capaz de colocar o sujeito numa real situação de aprendizagem.

Nosso ponto de partida é o conceito de situação didática dado por Brousseau (1996):

> "Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição" (apud Parra, p. 28).

Brousseau (1996) também nos coloca um novo conceito que é o de situação a-didática no qual argumenta que:

> [...] Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas. Não somente pode, como deve fazê-lo, porque só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada situação adidáctica. [...] (p. 49-50)

Chevallard, Bosch & Gascon (2001) definem uma situação a-didática da seguinte forma:

> Chama-se de situação adidática (específica de um conhecimento concreto) uma situação matemática específica desse conhecimento de maneira que, por si mesma, sem apelar para razões didáticas e na ausência de toda indicação intencional, permita ou provoque uma mudança de estratégia no jogador. (sic) (p. 215)

Nessa pesquisa acreditamos que o maior intuito será o de conseguir problemas que provoquem nos alunos situações a-didáticas.

2.8 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as idéias de George Polya (1944). Segundo ele, o desenvolvimento pelos alunos da capacidade de resolução de problemas deveria ser um dos objetivos principais do ensino da Matemática. O pensamento lógico que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal, mas também por processos informais, entre outros, generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta.

Polya (1944) procurou também descortinar o significado de problema, num sentido amplo, fazendo distinção entre o problema em si e o processo de resolução. Uma pessoa tem um problema quando procura "conscientemente uma certa ação apropriada para obter um objetivo claramente concebido, mas não atingível de maneira imediata".(Polya, vol. I, p. 117). Ao realizar essa ação, deu-se a resolução. Inerente ao conceito de problema é a noção de dificuldade, sem essa aquele não existe.

Esta noção foi sendo progressivamente enriquecida por se considerar importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos precisos. Muitas vezes, o processo de resolução pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado. A formulação de questões alternativas, de maneiras diferentes de resolução, poderá gerar gosto pelo trabalho, já que geralmente grandes descobertas podem resolver grandes questões. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios méritos, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Chega-se, então, às atividades de exploração de diferentes maneiras de resolução e de investigação matemática. Uma viagem até ao desconhecido. Assim, na resolução de problemas, o objetivo será encontrar diferentes caminhos para atingir um ponto não imediatamente acessível. Na proposta abordada o objetivo será o de explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo em que se sabe qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

Polya (1944, apud Muniz 2003), em seus estudos, enumerou dez idéias, as quais chamou de mandamentos, para o professor de Matemática:

1) Tenha interesse pela sua matéria.
2) Conheça sua matéria.
3) Procures ler as expressões faciais dos seus alunos; procure descobrir as suas expectativas e as suas dificuldades: ponha-se no lugar deles.
4) Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
5) Dê aos seus alunos não apenas informação, mas *know-how*, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
6) Faça-os aprender a dar palpites.
7) Faça-os aprender a demonstrar.
8) Procure encontrar, no problema que está abordando, aspectos que poderão ser úteis nos problemas que virão – procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
9) Não desvende o segredo de uma vez – deixe os alunos darem palpites antes e permita-os descobrirem por si próprios, na medida do possível.
10) Sugira, não os faça engolir à força.

Reconhecemos também a importância que os problemas desempenham na evolução da Matemática e que é também corroborada por pesquisadores e educadores. Segundo Stewart “o motor da aprendizagem matemática é a resolução de problemas” (apud Muniz, 2003).

Polya (1944) também coloca que o interesse pelo problema e a sua apropriação por quem o resolve são essenciais. No caso da atividade matemática considera que "o passo crucial do matemático é poder escolher o seu problema" ou, até mesmo, inventá-lo, o que nos remete às situações a-didáticas.

O processo de resolução de problemas pode ser expresso e comunicado de diversas maneiras como: desenhos, geometricamente, comunicação oral, expressões algébricas ou numéricas, esquemas, dentre outras.

Neste trabalho, além de valorizar os diferentes caminhos de resolução encontrados pelos alunos, procuraremos fazer uma socialização dessa diversidade, a fim de desmistificar o conceito de que o fazer matemático se resume numa simples reprodução de modelos.

Valorizamos nesse trabalho a importância de se dominar bem os conteúdos que se ensina que desde há muito tempo já é reconhecida.

2.9 DOMÍNIO DO CONTEÚDO

Esse domínio refere-se aos conteúdos específicos da matéria que o professor leciona. Inclui tanto as compreensões de fatos, conceitos, processos, etc. de uma área de conhecimento quanto aos procedimentos relativos à construção do conhecimento desse campo.

Pensar no domínio do professor para a Matemática atual requer olhar a história e levantar hipóteses a respeito de nossos ancestrais e dos caminhos que os conduziram à elaboração e à organização do que hoje chamamos de conhecimento matemático.

> Ao longo desta história, reconhecem-se esforços de indivíduos e de todas as sociedades para encontrar explicações, formas de lidar e conviver com a realidade natural e sociocultural. Isso deu origem aos modos de comunicação e às línguas, às religiões e às artes, assim como às ciências e às matemáticas, enfim a tudo o que chamamos "conhecimento", muitas vezes também chamado "saber". (D'Ambrósio, 1996, p. 18).

É importante refletir sobre o fato de como essa Ciência se desenvolveu ao longo dos tempos, principalmente nos últimos dois séculos, e a influência desta na sociedade.

A Matemática, desde a antiguidade, é conhecida como a ciência dos números e dos cálculos. Desde os tempos mais remotos o homem utiliza a Matemática para facilitar sua vida e organizar a sociedade. Ela foi usada pelos egípcios na construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia. Os gregos antigos também desenvolveram vários conceitos matemáticos.

> Hoje, a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação matemática, mudaram profundamente. Não que se tenha relaxado o rigor, mas, sem dúvida, o rigor científico hoje é de outra natureza. (D' Ambrósio, 2002, p.58)

Atualmente esta ciência está presente em várias áreas como: Informática, Engenharia Civil, Medicina, Química, etc, o que aponta sua influência.

Buscam-se então os princípios básicos no ensino de Matemática, para o século XXI, referenciados no *National Council of Teachers of Mathematics*:

- As definições devem ser o resultado das experiências com os conceitos; elas não devem ser o começo.
- Os estudantes devem sentir a necessidade de técnicas, modelos e fórmulas, chegando a elaborá-las.
- As aplicações devem ser usadas no começo, durante e no fim dos assuntos;
- Jogos, desafios, quebra-cabeça e problemas devem estar sempre presentes.
- Os estudantes precisam ouvir, falar, escrever e fazer matemática.
- Os estudantes precisam ao longo do tempo perguntar sempre, tirando suas dúvidas e criando autonomia.
- Ao final de cada tema, é necessário que os estudantes sejam capazes de fazer um resumo das idéias principais sobre o que aprenderam, colocando suas idéias.

Petronzelli (2002) também destaca como elementos principais que compõem os conteúdos da proposta de ensino da Matemática:

- resolução de problemas.
- comunicação das idéias matemáticas.
- aplicação da Matemática no dia-a-dia.
- alerta para resultados impossíveis.
- senso numérico e verificação dos resultados.
- estimativa.
- apropriação das técnicas de cálculos com números pequenos.
- pensamento algébrico.
- medida (distância, massa, tempo, capacidade, temperatura, ângulos, perímetro, área e volume).
- geometria (paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança e simetria);
- estatística.
- probabilidade.

Desta forma aponta-se em nossa pesquisa que é importante que o professor não só aprenda os conceitos matemáticos, mas que os compreenda à luz do método investigativo e dos cânones de ciência assumidos por essa área de conhecimento.

3 CONSTRUINDO NOSSA METODOLOGIA

Devido ao desafio de acompanhar esquemas mentais para entender a construção de conceitos e de procurar fazer um paralelo entre as aulas de investigação e a construção desses conceitos, sentimos a necessidade de optarmos pela pesquisa participante.

Segundo Hall (apud Demo, 2004), a pesquisa participante é descrita de modo mais comum como atividade integrada que combina investigação social, trabalho educacional e ação, sendo seus princípios:

1) Todos os métodos de pesquisa estão impregnados de implicações ideológicas.
2) O processo de pesquisa não pode esgotar-se em produto acadêmico, mas representar benefício direto à comunidade.
3) A comunidade ou população deve ser envolvida no processo inteiro; até a busca de soluções e à interpretação de achados, se a meta é mudança, deve haver envolvimento de todos os interessados na pesquisa.
4) O processo de pesquisa deve ser visto como uma experiência educacional total, que serve para estabelecer as necessidades da comunidade e aumentar a conscientização e o compromisso dentro da comunidade.
5) O processo de pesquisa deve ser visto como um processo dialético, diálogo através do tempo, e não como desenho estático a partir de ponto no tempo.
6) A meta é a liberação do potencial criativo e a mobilização no sentido de enfrentar e resolver os problemas.

Le Broterf (apud Demo, 2004), visualiza a pesquisa participante ligada a certo "processo experimental", que é assim montado:

- 1ª fase: "exploração" geral da comunidade.
- 2ª fase: identificação das necessidades básicas.
- 3ª fase: elaboração de estratégia educativa.

Demo (2004) afirma que a pesquisa participante não é somente possível, mas necessária para repormos a inter-relação dinâmica entre a teoria e a prática, não fugindo de sempre retornar à teoria para refazer a prática, recuperando o espírito crítico, evitando afogar-se no ativismo.

Optamos por esse tipo de pesquisa devido ao conhecimento da dificuldade da tarefa, já que nosso objeto de estudo era conhecer indícios da construção de conceitos algébricos em aulas de investigação, tentando mediar os sujeitos em ação de diferentes formas. Esse tipo de pesquisa nos proporcionou acompanhar a construção desse conhecimento, utilizando como instrumentos de coleta de dados, diário de campo, gravação de produção dos alunos e protocolos de resoluções dos mesmos, o que nos proporcionou planejar e replanejar ações ao longo do delineamento do estudo, retornando aos aportes teóricos sempre que necessário.

A cada aula registramos uma análise de dados, como resultado de uma ampla observação e comparação das informações obtidas, emitindo uma conclusão sobre essas observações, que serviram de base para os próximos encontros, realizados semanalmente. Para esses encontros estabelecemos o seguinte:

- trabalhar com o professor na preparação das aulas, que serão embasadas na análise das resoluções anteriores. Esta preparação consiste fundamentalmente na elaboração da proposição de situação-matemática adequada ao desenvolvimento da "investigação matemática".
- propor a resolução de situações-problema para as quais os alunos não possuam esquemas prontos para resolver, o que requer um conhecimento prévio do repertório cognitivo dos alunos.
- registrar o histórico de produção dos alunos por meio de gravação em áudio e protocolo de resolução manuscrito.
- analisar com o professor os protocolos (tentativas de resolução das situações-problema apresentadas).
- discutir com os alunos em entrevistas individuais e coletivas os protocolos, (serão gravadas e anotadas num diário de campo) focando a importância da construção do conhecimento matemático, ou seja, a criação de esquemas mentais que a cada situação poderá ser validado, aprimorado ou mesmo abandonado devido ao surgimento de esquema mais eficaz.

A preparação das aulas de investigação propriamente ditas se constituiu numa fase importante. Procura-se selecionar, adaptar ou até mesmo construir a tarefa, às quais leva-se em conta vários aspectos. Por um lado, essa tarefa deveria realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, era preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso, o professor pesquisador, com o apoio do colaborador, fez uma pesquisa em torno de vários materiais: manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e o mundo da Internet. Mais do que esta pesquisa, precisamos recorrer à nossa criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações e reconstruindo as questões de maneira que melhor servisse aos nossos objetivos, visando à devolução da situação. Por outro lado, esta escolha está também levou em conta o nível etário dos alunos, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo, os seus interesses, etc.

Além de preparar a tarefa fez-se necessário pensar na estrutura das aulas, por exemplo, no modo de trabalho dos alunos. Decidiu-se então que para esse tipo de atividade era melhor organizar os alunos em pequenos grupos. Além da organização dos alunos, foi considerada também a realização de diferentes momentos durante as aulas, bem como a respectiva gestão do tempo. A realização das aulas de investigação comportava três fases distintas: a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos e a discussão/reflexão e validação conjunta. No entanto, mesmo a adoção desta perspectiva requeriu muitas outras decisões. Às vezes a introdução era breve, mencionando apenas aspectos de gestão do trabalho da turma, outras continham uma exploração inicial, que levava os alunos à descoberta de alguns conceitos em conjunto e assim a cada planejamento pensávamos em cada um desses detalhes.

Durante a discussão dos protocolos com os alunos tentamos promover a participação de vários deles, pois percebemos que esse momento era muito rico. Nessa etapa também ocorriam as validações ou refutações dos conceitos construídos em ação.

Pode-se então ressaltar a importância do professor no processo da descoberta em que os alunos são chamados a falar, a expressar e a validar suas conclusões iniciais.

Uma outra fase importante da nossa pesquisa foi a discussão dos protocolos entre pesquisador e professor, pois foi por meio dessas que preparávamos as aulas posteriores e que buscamos indícios da contribuição dessa "investigação" para construção de conceitos.

Estas foram algumas das fases por que passamos para iniciar esse processo de investigação em sala de aula. Contudo, foi preciso não esquecer que esta era apenas uma base do trabalho e que o professor deveria estar preparado para alterar seu planejamento dependendo do rumo dos acontecimentos, sendo que a capacidade de reflexão na ação é aqui particularmente importante.

Para realizar este trabalho de pesquisa elaboramos o seguinte percurso.

GRÁFICO 4 - Percurso Metodológico

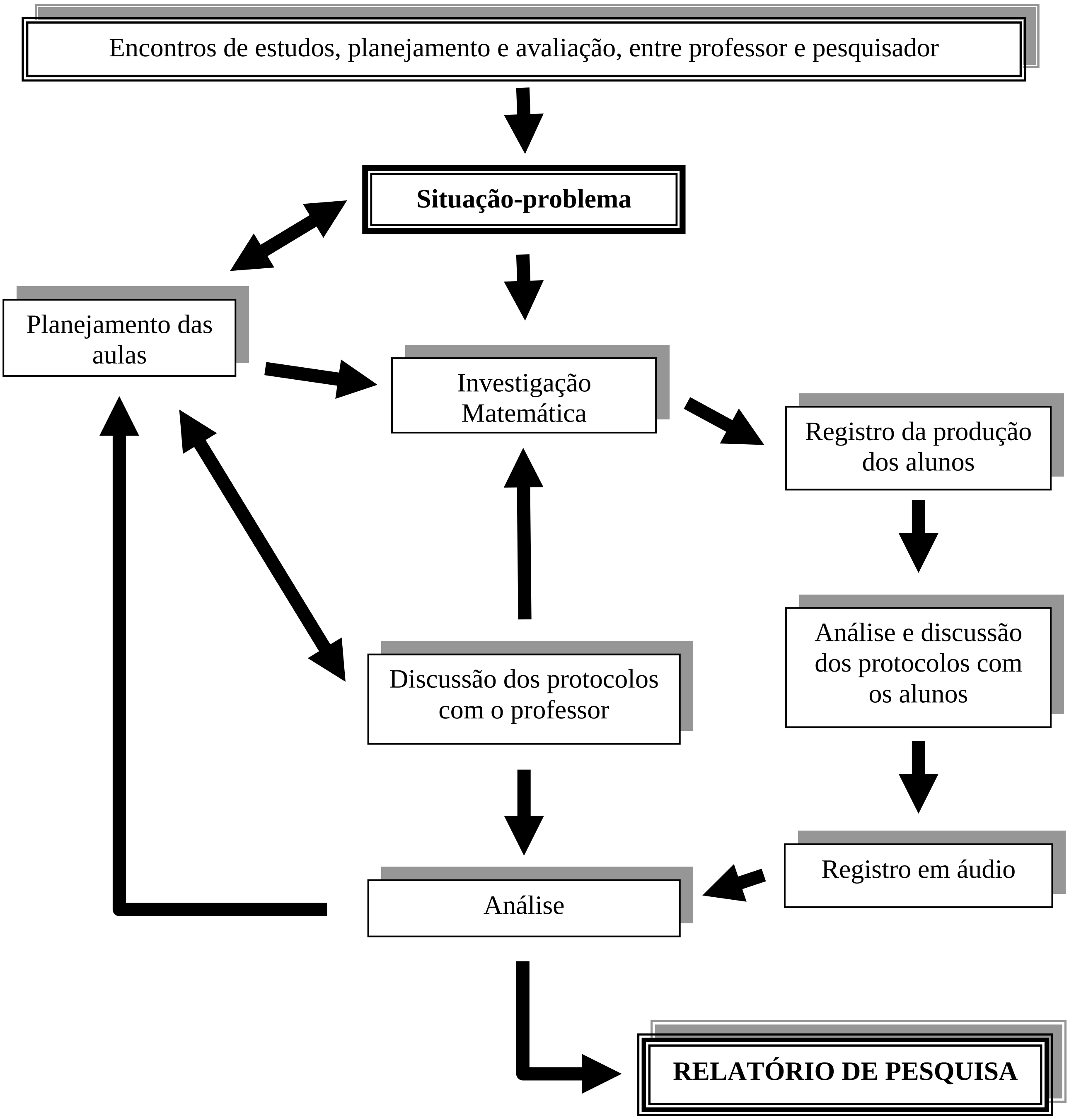
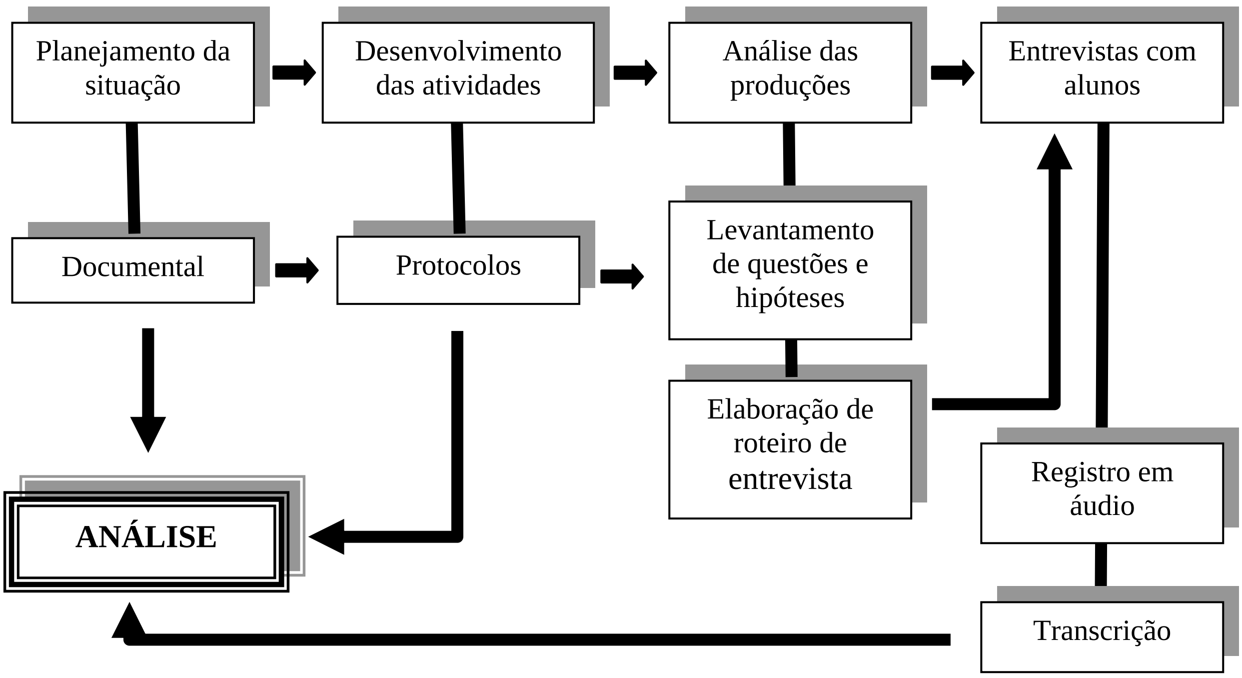


GRÁFICO 5 - Coleta de informações para análise



3.1 O LOCAL DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada num Colégio privado de Brasília, regido pelo movimento concepcionista, o qual inicialmente tinha seu corpo docente formado apenas pelas irmãs concepcionistas, que educavam através da evangelização. Com o passar dos tempos, devido ao aumento do número de alunos, a instituição sentiu a necessidade de contratar mais educadores os quais quase que na totalidade não faziam parte da congregação mas que, ao comporem o grupo, passaram a conhecer o projeto pedagógico baseado na Educação Personalizada Concepcionista (EPC) que tem como princípios:

- autonomia e liberdade.
- atividade (a escola e o educador deverão proporcionar ocasiões e instrumentos adequados para que o aluno atue).
- criatividade (incentivar a expressar pontos de vista pessoais, que não constem nos livros nem da programação oficial, e procedimentos originais).

- sociabilidade (fomentar a dimensão do respeito mútuo, a comunicação, a amizade).
- transcendência (libertar da pessoa de todos os condicionamentos, sobretudo dos interiores para poder expressar todo o seu dinamismo).

Esses princípios visam a formação de pessoas que contribuam para melhorar a sociedade, independente da atividade a ser exercida futuramente.

A educação personalizada também procura respeitar o ritmo de cada aluno e busca sempre inovações para uma verdadeira construção do conhecimento. Devido a essa abertura, a escola acolheu prontamente nossa pesquisa.

A direção da escola é constituída pelas Irmãs Concepcionistas que fazem rodízio de tempos em tempos, o que lhes possibilita o conhecimento de diversas realidades, pois a congregação possui outras instituições no Brasil e também no exterior.

A pesquisa transcorreu em sala-ambiente de Matemática, na qual foram disponibilizados vários materiais como: lápis, borracha, papéis, tesouras, compassos, réguas, metros, transferidores, dentre outros auxílios usados durante as aulas. Isso se mostrou favorável à realização do trabalho, pois o ambiente proporcionou interatividade e troca de experiências.

3.2 OS PARTICIPANTES

Para construir nossa pesquisa entramos em contato com os dois professores que trabalham com as quatro turmas de 7os anos desse Colégio, para ver a possibilidade de começar essa proposta de investigação, que já vínhamos amadurecendo desde o final do ano de 2006, quando percebemos que ambos os professores estavam se sentindo incomodados com o baixo rendimento dos alunos em Matemática. Eles relatavam que os alunos mal liam os problemas e que as respostas quase não tinham estratégia alguma. Exemplo de perguntas que surgiram:

Como fazer para que esses alunos reflitam mais sobre as estratégias de resolução de problemas que estão usando? Como fazer com que eles explorem as atividades e se interessem mais pelas aulas de Matemática?

Foi então que apresentei meu projeto a eles. Ambos se mostraram interessados. A professora Colaboradora tem mestrado em Educação Matemática pela Unicamp, o outro professor tem mestrado em Matemática e é formado pela Universidade de Brasília. Os dois são jovens e iniciaram a carreira de magistério há pouco tempo, são questionadores e se preocupam com a aprendizagem dos alunos. Optamos por observar as aulas da professora, devido ao horário ser mais adequado para a pesquisadora.

A turma escolhida possui 25 alunos sendo 6 alunos com 11 anos, 18 com 12 anos e um aluno com 13 anos.

3.3 CATEGORIAS DE ANÁLISE

Conforme já explicitado, a presente pesquisa intencionou analisar o desenvolvimento de atividades que chamamos de investigação matemática em sala de aula e sua contribuição na formação de conceitos algébricos.

Finalizada a fase de execução da pesquisa, organizamos todo o material coletado. Os dados do diário de campo das aulas com os alunos, do estudo com a professora e a produção escrita pelos alunos constituem-se como dados principais. As entrevistas e as gravações em fita são os dados secundários.

Analisamos minuciosamente as produções, organizando-as de forma cronológica para que se pudessem acompanhar as dificuldades e os avanços dos alunos e separar as que consideramos mais relevantes para o nosso trabalho e criamos as seguintes categorias.

3.3.1 O convite a falar, a expressar e a opinar

O espaço de investigação privilegia a situação didática e procura constituir um ambiente no qual os alunos estejam sempre propensos a explicitar suas descobertas, discutir com os colegas, acompanhar o raciocínio do outro, pois gostaríamos de observar, não somente nos protocolos, mas também na verbalização, os conceitos em ação. Tais explicitações ocorrem por meio da discussão oral, que são fontes de análise nessa categoria.

Por esse motivo optamos pelo que chamamos investigação matemática em sala de aula, a qual não consistia num modelo pronto, que conduzisse a um único caminho, mas sim em atividades que solicitassem que os alunos e professores envolvidos refletissem sobre suas próprias ações, individualmente ou em grupo, para compreendê-las, analisá-las e criticá-las. Essas atividades alocadas nessa categoria também abrangeram, por meio da exposição oral, a explicação do raciocínio utilizado e a tentativa de encontrar outros caminhos para solucioná-los, aos quais se chamou de validação.

Essa verbalização ajudará na compreensão dos protocolos, na tarefa de analisar a construção do conhecimento matemático dos alunos e no entendimento da constituição do ambiente de investigação.

A oralidade, além da função de comunicar produções, passa a se integrar na ação como elemento fundante da investigação matemática em sala de aula.

3.3.2 A diversidade de procedimentos e registros

Alocamos nesta categoria os diversos procedimentos e registros que podem ser percorridos para resolução de uma situação-problema e que permitem encarar a Matemática como algo inacabado, em que os esquemas explicitados ou implícitos (a serem revelados pelas análises) podem ser o tempo todo repensados.

Avançando em direção às pesquisas e no entendimento dos esquemas produzidos pelos alunos, o trabalho passou a eleger atividades que cada vez mais possibilitaram reunir essas multiplicidades de procedimentos e registros.

3.3.3 Evidências de fragmentos do processo de formação de conceitos algébricos

Criamos essa categoria para identificar evidências de fragmentos do processo de formação de conceitos algébricos. Pretendemos desvendar os fragmentos que um sujeito formulou em determinado momento, observando o que ele foi capaz de produzir por meio da ação.

Baseados na imersão de uma relação dialética entre a ação e o uso das ferramentas, entende-se que qualquer análise a priori da formação desses fragmentos só pode ser feita colocando o sujeito em ação (no sentido epistemológico do termo). Percebemos que uma visão fora do contexto da ação corresponde a uma visão especialista e não a de um indivíduo que está aprendendo a resolver uma determinada situação-problema. Desta forma, com o sujeito mobilizando esquema e realizando registros, podemos desvelar esses fragmentos.

Com relação ao desenvolvimento conceitual, partimos do pressuposto de que um conceito é construído pelos indivíduos quando os mesmos dominam três conjuntos de fatores que, segundo Vergnaud (1995), são os seguintes:

- um conjunto de situações que dão sentido ao conceito.

- um conjunto de invariantes operacionais ou de propriedade do conceito (objetos, propriedades e relações).
- um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Assim, tanto invariantes quanto representações simbólicas podem aparecer nesta categoria como forma de testemunho de fragmentos de formação de conceitos.

3.3.4 A investigação proporcionando situações a-didáticas

O acolhimento ao próximo esteve sempre presente em nossas aulas. Notava-se um respeito muito grande de um aluno com a produção do outro, e uma relação de acolhimento para com a pesquisadora não foi diferente. O contrato didático claro, estabelecido desde o início, proporcionou uma parceria muito grande.

Percebemos emergir, dessa forma, entre os participantes, ações de cooperação e amizade, as quais vieram a contribuir de maneira imprescindível para o desenvolvimento de nossa pesquisa e do processo de investigação ali instaurado. Uma das ações foi o surgimento de situações a-didáticas (Brousseau, 1996) durante a pesquisa, nas quais os alunos se sentem motivados a continuar pensando no assunto da aula, pois são produções desvinculadas da preocupação de estar “respondendo ao professor”. Esses fatores ajudam a conseguir um espaço diferente da sala de aula, o que deixa os alunos mais propensos à colaboração, isentando-os de uma competitividade e permitindo, assim, produzir simplesmente pelo prazer de compreender uma determinada situação e dar uma devolução (Brousseau, 1996). Essas produções serão analisadas nessa categoria.

3.3.5 A investigação matemática agindo como uma aprendizagem reflexiva do aluno

As propostas de investigação dadas em nosso trabalho permitiram aos sujeitos registrarem as próprias compreensões matemáticas, partilharem com seus companheiros, ouvirem o que o outro tinha a dizer, construindo assim um fazer Matemática, que subsidiou uma mudança de postura frente à disciplina.

Inserimos nessa categoria elementos que permitem o despertar de uma reflexão dos alunos sobre suas próprias ações, individualmente ou em grupo, para compreendê-las, analisá-las e, por muitas vezes, até criticá-las. Sem medo de expor seus raciocínios.

Nosso trabalho consistiu, portanto, em criar situações de interação entre os alunos e o objeto de estudo, segundo uma dimensão de desenvolvimento, procurando mediar de tal modo que o processo de produção fosse revisto e repensado pelo sujeito, de forma a resultar na reelaboração das ações, dos procedimentos e dos registros.

3.3.6 A construção de um ambiente de investigação como processo de reflexão-crítica e formação: conversando com a colaboradora

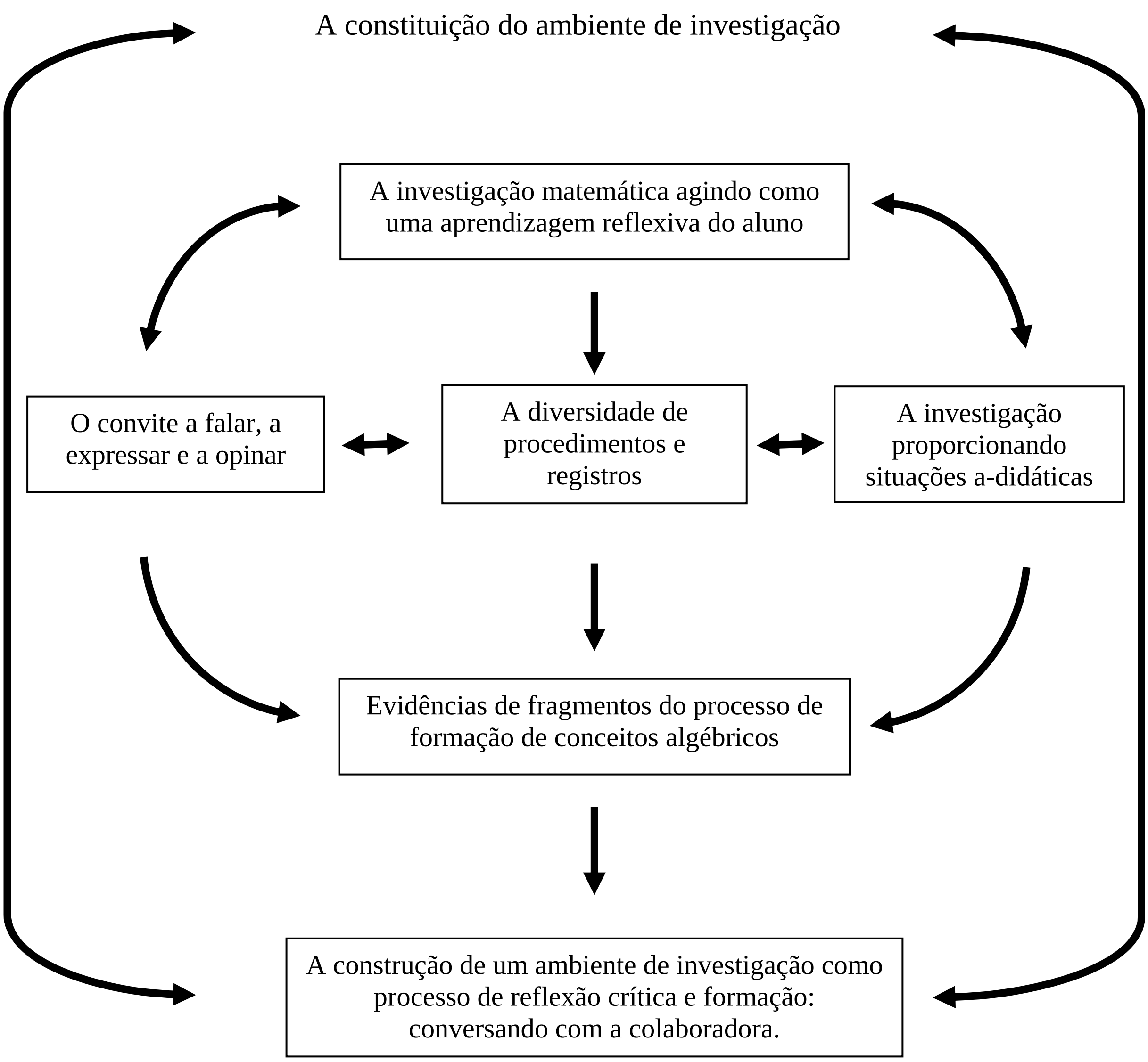
É nosso entendimento que nenhuma proposta pedagógica avançaria muito se não esclarecêssemos o papel exercido pelo professor para favorecer o curso do desenvolvimento cognitivo do aluno, isto é, a necessidade da sistematização dos conceitos, através do estabelecimento de suas interdependências, da conscientização da importância da atividade oral, ou seja, da tomada de consciência da diversidade de produções e registros produzidos pelos alunos, que seriam discutidos em grupo. Foi necessário, também, o estabelecimento de uma relação especial com a pesquisa, em que o professor passasse a entender a aprendizagem como mediação entre o sujeito e o objeto pela atividade.

Nessa categoria alocam-se evidências de que o desenvolvimento de investigação matemática aparece como espaço de formação reflexiva e continuada do professor, desde o planejamento coletivo das situações a serem propostas até a avaliação das análises realizadas.

3.3.7 A constituição do ambiente de investigação

Não é uma categoria em si, é um imbricar entre todas as categorias e foi o que conseguiu constituir o que chamamos de Investigação Matemática em sala de aula. A investigação foi ao mesmo tempo o ponto de partida e o culminar de todas essas categorias. Assim podemos dizer que seja uma supra-categoria.

GRÁFICO 6 - A constituição do ambiente de investigação



4. ANÁLISE DE DADOS

4.1 O CONVITE A FALAR, A EXPRESSAR E A OPINAR

> *Trata-se de apreender o homem como um ser que se constitui na e pela interação, isto é, sempre em meio à complexa e intrincada rede de relações sociais de que participa permanentemente." (Faraco, 1996, p.118)*

Logo nas primeiras atividades, sentimos a necessidade de criar um ambiente diferente para as aulas de investigação, então pensamos em colocar os alunos em grupo, pois a forma tradicional na qual se colocam os alunos enfileirados não favorece o diálogo entre eles.

Foi dessa forma que começamos a perceber a importância da oralidade em nossa pesquisa e as diversas dimensões em que elas estavam aparecendo. Primeiramente como linguagem interior que, segundo Luria (1987), é a etapa inicial na qual o sujeito na resolução de uma situação-problema começa a planejar o que irá fazer por meio da ação. Muitas vezes a chamada ao falar começou por colocar o sujeito numa situação em que era necessário refletir sobre o problema iniciando com uma fala interna consigo mesmo, organizando as idéias, num nível de metacognição para depois discutir com o grupo. Isso era possível observar por meio das fisionomias de cada aluno, pensativos, tentando formular alguma idéia, muitas vezes ao perceber essa reflexão, perguntava sobre o que eles estavam pensando e assim começavam a surgir as primeiras interações.

Outra importância da oralidade foi a comunicação entre os alunos, ou seja, a mediação aluno-aluno, que possibilitou a troca de idéias sobre caminhos distintos na solução de uma situação-problema, criou negociações, redefinições e articulações de diferentes pontos de vista.

E por fim a mediação professor-aluno, que pudemos observar tanto na troca de idéias com cada grupo, quanto na validação final quando a professora discutia como cada grupo havia resolvido uma determinada situação-problema.

Além de uma infinidade de trocas orais presentes no processo de investigação oral, para convidar os alunos a expressarem seus pensamentos sobre a Álgebra, elaborou-se uma ficha com os seguintes questionamentos:

- O que você entende pela expressão $x + 2 = 26$? Tente traduzir essa idéia.

- E a expressão x - 25 = 30?
- Vamos avançar! Tente agora expressar o significado de 2x = 12.

Pedimos aos alunos para que se organizassem em grupos e os deixamos livres para investigarem o que aquelas equações diziam.

No início, eles acharam um pouco estranho. A primeira idéia era querer encontrar um resultado. A professora deixou-os à vontade para falar e depois pediu para que anotassem o resultado das discussões.

Surgiram vários registros interessantes e foram durante construções que começamos a perceber essa linguagem interiorizada que é quando eles começam a organizar o pensamento para depois escrever, o que era percebido por meio de gestos e fisionomias pensativas.

Registro-Grupo 1 (aula 16.04.2007)[6]

O que você entende pela expressão x+2 = 26

Tente traduzir essa idéia.

"X" é um número desconhecido e sabemos que "x" + 2 = 26 então é só pensar em um nº que somado a dois é = 26 ou seja: X = 26 - 2 = x = 24.

E a expressão x-25 = 30

"X" é um número desconhecido e sabemos que "X" - 25 = 30 então é só pensar em um nº que subtraido 25 = 30 ou seja: X = 30+25 = X = 55

Vamos avançar!

Registro-Grupo 2 (aula 17.04.2007)

O que você entende pela expressão x+2 = 26

Tente traduzir essa idéia.

x = 24, porque se temos uma adição na qual x + 2 = 26, deve_mos subtrair 2 de 26, que é igual a 24. (o número que x representa).

E a expressão x-25 = 30

x = 55, porque se temos um subtração na qual x - 25 = 30, de_vemos adicionar 25 à 30, dando assim, o valor do x.

[6] Os retângulos são recortes de um contexto de produções e registros mais amplos que se constituíram em uma unidade de análise

Durante a produção desses protocolos vimos que cada um tinha a sua idéia e era preciso negociar com o grupo para ver como deveriam escrever.

Enquanto alguns grupos, por exemplo, simplesmente tentavam achar o resultado.

O que você entende pela expressão x+2 = 26

Tente traduzir essa idéia.

Que um número mais 2 = 26

24+2=26

E a expressão x-25 = 30

Um número menos 25 é = 30

Em outros, perceberam-se indícios de que, diante de alguma atividade que desconhecem, buscavam mobilizar conceitos anteriores, como podemos observar no registro abaixo um conceito de prova real, aprendido anteriormente.

O que você entende pela expressão x+2 = 26

Tente traduzir essa idéia.

x é um número e temos que tirar a prova real para descobri-lo.

26-(+2) = 26 - 2 = +24

x então é igual a 24

E a expressão x-25 = 30

x é igual a um número que subtraindo 25 se acha 30, ou seja,

30 -(-25) = 30 + 25 = 55,

55 - 25 = 30

x é igual a 55

Durante essa aula, anotamos algumas idéias interessantes. O grupo da Patrícia falou que a equação era uma operação inversa.

A professora colaboradora perguntou:

- *E o que é para vocês uma operação inversa?*

Resposta de Marcos:

- *É só vir fazendo a conta ao contrário.*

A professora colaboradora:

- *Como? Explique melhor.*

- *A conta ao contrário x - 25 = 30, então x = 30 + 25 é igual a 55.*

Veja a explicação que o grupo havia formulado:

a expressão x-25 = 30

$$\begin{array}{r} 30 \\ +25 \\ \hline 55 \end{array}$$

Ou seja quando o x subtrair algum número temos que somar o resultado pelo o número subtraído para saber o valor de x.

Essa validação constituiu-se num outro momento importante da chamada ao falar, que contribuía na constituição do ambiente de investigação.

Nesse registro podemos observar um teorema-em-ato, ou seja, algo criado pelo sujeito durante a ação com o objeto, pois ele consegue perceber que para encontrar o valor de *x,* toda vez que se tem uma adição pode-se utilizar a subtração.

Percebemos, aqui, que desvendar os conceitos que um sujeito formulou em determinado momento é estar disposto a observar suas produções e seus relatos a respeito delas. O conceito que esses alunos estavam elaborando sobre resoluções de equações já continha teorias bem próximas de um conceito científico de equações.

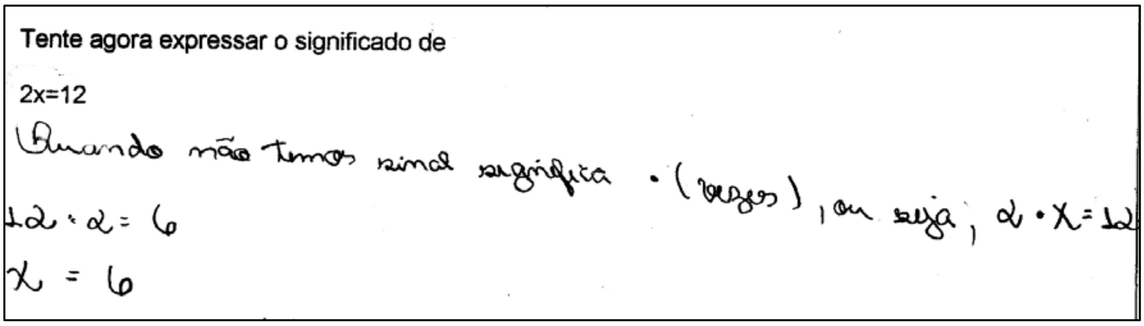
Notamos, também, que a relação com o outro era uma mola propulsora para a emergência de conceitos e que a análise da formação de fragmentos de conceitos só poderia ser feita colocando o sujeito em ação no sentido epistemológico do termo.

Uma visão fora do contexto da ação iria corresponder a uma visão especialista e não a de um indivíduo que está aprendendo a resolver uma determinada situação-problema e, desta forma, movendo esquemas para descobrir conceitos.

Esse processo de gerar conhecimento por meio da ação foi amplamente enriquecido pela interação com outros colegas, que estavam imersos nesse mesmo processo. Neste sentido retomamos mais uma vez o papel da linguagem na constituição do processo de investigação.

> A linguagem humana, sistema simbólico fundamental na mediação entre sujeito e objeto de conhecimento, tem, para Vygotsky, duas funções básicas: a de intercâmbio social e a de pensamento generalizante. Isto é, além de servir ao propósito de comunicação entre indivíduos, a linguagem simplifica e generaliza a experiência, ordenando as instâncias do mundo real em categorias conceituais cujo significado é compartilhado pelos usuários da linguagem. (Kohl, 1992, pág. 27)

Verificamos que o uso da linguagem oral para expor os esquemas, favorecia os processos de abstração e generalização, e avançando na direção do entendimento do que seria a constituição do ambiente de investigação, passamos a eleger atividades que privilegiassem a discussão entre as várias exposições dos colegas no grupo e com o professor na hora da validação.


Tente agora expressar o significado de

2x=12

Quando não temos sinal significa · (vezes), ou seja, 2 · x = 12

12 : 2 = 6

x = 6

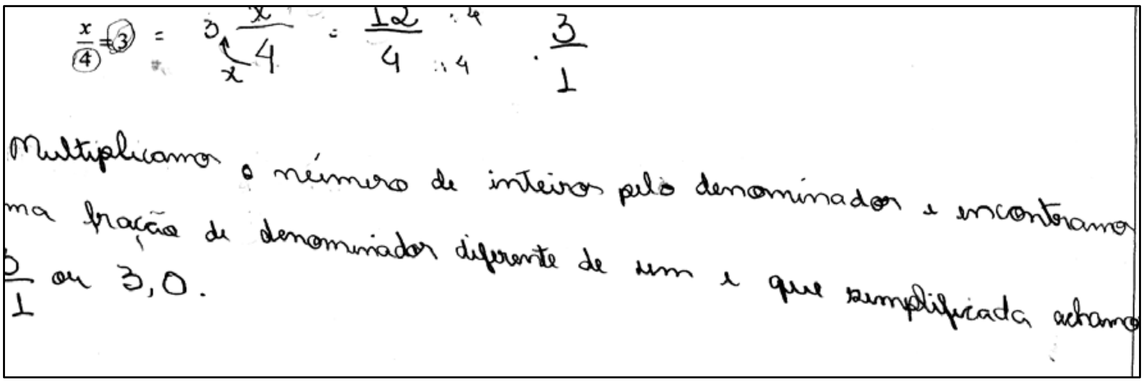
Ao ser apresentada a atividade acima, percebemos que eles não tinham a idéia de que 2x significava 2 vezes x.

Houve, então, uma mediação da professora colaboradora, explicando essa idéia. A partir disso, novamente os grupos começaram a trabalhar.

Foi então que observamos o quanto seria importante a comunicação entre professor-aluno na constituição do ambiente investigativo.

A partir dessa mediação, eles passaram a resolver equações mais elaboradas e muitas vezes deduziam alguns conceitos trocando idéias entre eles, como quando apareceu em uma das equações $\frac{x}{4}$. Logo eles perceberam que se tratava de uma divisão, porque essa representação já estava presente no estudo das frações. Começamos a perceber um movimento de validação antecipada entre os grupos, ou seja, um grupo perguntava ao outro se eles também achavam que $\frac{x}{4}$ era uma divisão.

Notamos que eles poderiam criar estratégias de resolução, como as deste grupo:


$\frac{x}{4} = 3 = 3\frac{x}{4} = \frac{12 : 4}{4 : 4} \cdot \frac{3}{1}$

Multiplicamos o número de inteiros pelo denominador e encontramos
ma fração de denominador diferente de um e que simplificada achamo
$\frac{3}{1}$ ou 3,0.

Verificamos então que os alunos já possuíam, de uma forma ou de outra, muitas idéias sobre equações, e que outras foram surgindo. Achamos interessante pedir para que eles interpretassem as equações, pois eles mesmos começavam a refletir sobre o que estavam fazendo. Houve certa surpresa ao vermos os termos que eles abordavam, como: um número que é desconhecido, um número oculto e a diversidade de interpretações.

Constatamos em várias etapas da nossa pesquisa o surgimento de dificuldades decorrentes de idéia imprecisa ou da insuficiência de ferramentas para avançar em suas produções.

Desta forma comprovou-se que a mediação aluno-aluno era muito importante para ultrapassar essas dificuldades e reafirmamos a teoria de Vygotsky (1934), quando ele coloca a interação social e o instrumento lingüístico como importantes fatores para o desenvolvimento do sujeito.

Pudemos também distinguir os dois níveis de desenvolvimento que Vygotsky (1934) identificou em sua pesquisa: um real, já adquirido ou formado pelo aluno, que determina que o mesmo já é capaz de fazer por si próprio; e um potencial, ou seja, a capacidade de aprender com outra pessoa. A aprendizagem interage com desenvolvimento, produzindo abertura nas *zonas de desenvolvimento proximal* (distância entre aquilo que o aluno faz sozinho e o que ele é capaz de fazer com a mediação do professor ou de outro colega).

Vygotsky (1934) também fala em sua teoria que a distância entre o nível de desenvolvimento real e o potencial não é o mesmo para todas as pessoas, nas quais as interações sociais são centrais, estando então, ambos os processos, aprendizagem e desenvolvimento, inter-relacionados. Assim, os conceitos trabalhados com a investigação requeriam sempre um processo de interação social para favorecer o desenvolvimento cognitivo.

Para Vygotsky (1934), a atividade do sujeito refere-se ao domínio dos instrumentos de mediação, inclusive sua transformação por uma atividade mental. Para ele, o sujeito não é apenas ativo, mas interativo, porque forma conhecimentos e se constitui a partir das relações intra e interpessoais.

É na troca com os outros sujeitos e consigo próprio que se vão internalizando conhecimentos, papéis e funções sociais, o que permite a formação de conhecimentos de sua própria consciência.

Powell, Francisco e Maher (2002) também ilustram que as interações entre estudantes podem avançar por meio de uma categoria interpretativa em que um interlocutor empenha-se em provocar sobre o que o seu parceiro está pensando, querendo falar, expressar e significar, engajando-se em fazer seu colega pensar alto, como se para descobrir o seu próprio pensamento.

Um ambiente que não incorpore esta característica de comunicação e interação entre os envolvidos possivelmente não atenderá as questões apresentadas para a criação de um ambiente investigativo, ou seja, é necessário na constituição desse ambiente propor atividades para que as pessoas possam envolver-se num processo de criação de significados o que implica a realização de um trabalho de forma cooperativa.

Entendemos ser fundamental que o professor possa construir nesse ambiente investigativo situações que julgue potencialmente pedagógicas, pois isto será propício para que incorpore de forma mais efetiva uma reflexão sobre a sua prática, tomando decisões fundamentais sobre as atividades que deve colocar para os alunos, de modo que estas possibilitem a interação entre os grupos, e ao mesmo tempo possibilitem diversas formas de resolução para que favoreça a troca de idéias na hora da validação de modo que essas atividades possam efetivar realmente uma investigação em "sala de aula" o que implicará o rompimento de barreiras com as aulas tradicionais apresentadas em sala de aula que por muitas vezes colocam os alunos e professores numa espécie de "camisa de força".

O modo como decorreram estas aulas também nos fizeram refletir sobre a importância por parte da professora colaboradora, na elaboração de estratégias que permitissem a interação entre os alunos e de certa forma percebemos que esse ambiente investigativo não só favorecia o desenvolvimento de capacidades/aptidões para Matemática, mas também nos conduziu à criatividade e flexibilidade na negociação entre os colegas do grupo para ver qual seria a estratégia mais adequada.

4.2 EVIDÊNCIAS DE FRAGMENTOS DO PROCESSO DE FORMAÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS

> *O inesperado surpreende-nos. É que nos instalamos de maneira segura em nossas teorias e idéias, e estas não têm estruturas para acolher o novo. Entretanto, o novo brota sem parar. Não podemos jamais prever como se apresentará, mas deve-se esperar sua chegada, ou seja, esperar o inesperado. E quando o inesperado se manifesta, é preciso ser capaz de rever nossas teorias e idéias, em vez de deixar o fato novo entrar à força na teoria incapaz de recebê-lo.* (Morin, 2001, p.30)

Para analisar o desenvolvimento conceitual, dentro de um ambiente investigativo, partimos do pressuposto de que um conceito é construído pelos indivíduos quando os mesmos dominam três conjuntos de fatores relacionados com esses conceitos, que, segundo Vergnaud (1995), são os seguintes:

- um conjunto de situações que dá sentido ao conceito.
- um conjunto de invariantes operacionais ou de propriedade do conceito (objetos, propriedades e relações).
- um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Quando os indivíduos começam a dominar essas dimensões de um conceito, o mesmo passa a lhes fazer sentido. Em outras palavras, pudemos observar em nossas aulas de investigação que o conceito é progressivamente apreendido na medida em que os alunos dominavam mais e mais as propriedades do conceito, as formas possíveis de representação e as relações com situações diversas. Isso vem ao encontro, também, da teoria da formação de conceitos de Vygotsky (1998) descrita em seu livro *Pensamento e Linguagem* no qual, de forma geral, ele descreve suas idéias e resultados na busca de uma compreensão sobre a gênese da formação de conceitos. Assim, nessa categoria, faremos a análise da contribuição das atividades de investigação na formação de conceitos baseados nas teorias de Vygotsky (1934) e Vergnaud (1995).

Lançamos mão, então, de uma atividade adaptada de Muniz (2007) publicada na revista da SBEM, a da utilização da balança, na apresentação e na resolução de uma sentença matemática (já utilizada por outros autores) para ver os conceitos que poderiam aparecer por meio da noção de manter o equilíbrio.

Lembramo-nos, então, de uma leitura de Chevallard (2001) que nos chamou a atenção a respeito da função do concreto, na aprendizagem matemática,, colocando a idéia de que o que é concreto para um sujeito pode não ser para outro. Como exemplo, para um adulto que costuma trabalhar com operações bancárias e está inserido nesse contexto, um problema de juros pode ser concreto enquanto que para uma criança esse contexto de juros pode não ter sentido algum. Então pensamos: como falar em balança de dois pratos, se hoje o cotidiano de nossos alunos só conta com balanças digitais? Concluímos que poderia se tornar concreto se mostrássemos uma balança e os alunos descobrissem seu funcionamento. Para tanto, levamos para a sala de aula uma balança e deixamos que os alunos a explorassem. Logo todos sentiram a necessidade de mexer, pôr e tirar objetos a partir do princípio do equilíbrio de massa, numa balança interfixa.

FIGURA 2 - Foto da balança

Foto da balança utilizada com os alunos

A professora deixou que eles explorassem bastante a idéia de equilíbrio que estava por trás dessa atividade, pois era nosso objetivo criar um movimento que impulsionasse a investigação.

Em seguida, a professora colaboradora iniciou as atividades daquele dia, sem falar sobre qual conceito iria trabalhar. Ela distribuiu cartelas com números negativos e positivos, bolinhas de vidro e dois pratinhos para cada grupo. Entregou, também, uma ficha para que, com esses objetos e o conceito de equilíbrio, colocassem e tirassem bolinhas dos pratos para encontrar o peso de cada uma.

Oficina de Equações

Material:

- 2 pratos
- 6 bolinhas para cada grupo
- tesoura
- fichas com números positivos e negativos.

Atividades

Represente a situação abaixo na balança e investigue o que você poderia fazer para encontrar o valor de cada bolinha. Registre suas idéias em folha.

1ª situação: **O** + **O** + 2 = 8

2ª situação: **O** + **O** + **O** + 1 = 13

3ª situação: **O** + **O** + **O** + 1 = 9 + **O** + **O**

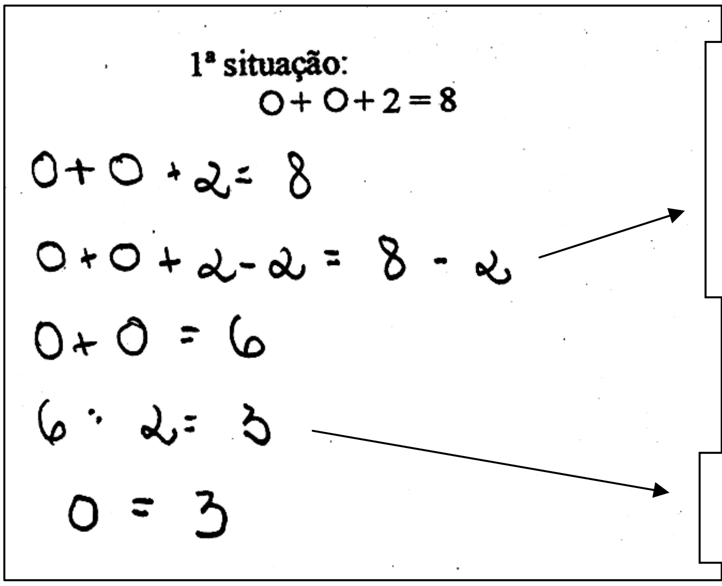
4ª situação: **O** + **O** + **O** + 1 = $-\frac{1}{2}$

Ao realizarmos essa atividade de investigação, percebemos mais indícios da formação de conceito em ação. O registro dos alunos deixou claro o surgimento do princípio aditivo e multiplicativo e observamos, também, que ocorrem diferentes procedimentos na construção que é fruto das diferentes relações entre esses sujeitos e objetos.

Abaixo, nos registros dos alunos, os círculos representam as bolinhas de vidro, ou seja, a incógnita nas sentenças, cujo valor deve ser descoberto por meio de sucessivas manipulações sem alterar o equilíbrio da balança (que representa a igualdade matemática). Ao elaborar a atividade, pensamos na bolinha porque era pesada e fácil de observar na balança. Ao vermos os registros dos alunos, percebemos que poderia haver confusão com o zero, não para os alunos, mas para quem não estivesse nesse contexto.

Analisando os registros dos alunos segundo Vergnaud (1995), percebemos que as **situações começaram a dar sentido ao conceito** e faziam com que os alunos construíssem **invariantes operacionais** e estabelecessem relações e propriedades.

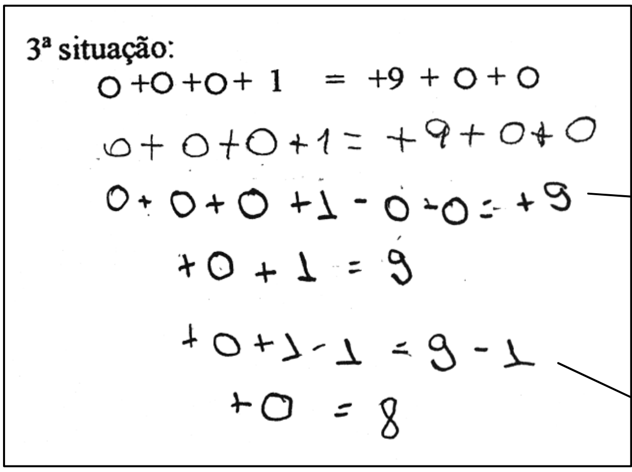
1º registro - Grupo 1 *(aula 17.04.2007)*



Situações que davam sentido ao conceito de manter o equilíbrio entre os dois lados da equação. O grupo percebe a necessidade de se tirar dois de cada lado para encontrar o valor da bolinha.

Em seguida divide por dois para encontrar o valor de uma bolinha

2º registro - grupo 2 ***(aula 17.04.2007)***


3ª situação:
0 + 0 + 0 + 1 = +9 + 0 + 0
0 + 0 + 0 + 1 = + 9 + 0 + 0
0 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0 = + 9
+ 0 + 1 = 9
+ 0 + 1 - 1 = 9 - 1
+ 0 = 8

Invariantes operacionais que estabelecem relações e propriedades começam a aparecer (começando a construir o conceito de operação inversa). Já não precisam retirar dos dois lados e retiram apenas de um lado.

Voltam novamente a retirar uma unidade dos dois lados

Acompanhando o desenvolvimento desses registros, pode-se destacar que ao retirar igualmente quantidades dos dois lados da balança, os alunos estavam baseados em experiências anteriores (manter o equilíbrio na balança). Entende-se, desta forma, que eles passavam por situações que estavam dando sentido ao conceito de manter o equilíbrio entre os dois membros da equação[7]. À medida que discutiam, esses conceitos ficavam mais elaborados (apareciam então **as invariantes operacionais,** ou seja, esquemas em que eliminavam a etapa de tirar dos dois lados, compreendendo o processo da inversão) e caminhavam em direção à formação de teoremas-em-ato e conceitos-em-ato.

Conceitos-em-ato são ingredientes necessários dos teoremas-em-ato, mas não se revelam ser a mesma coisa na ação nos sujeitos em processo de investigação. Um teorema-em-ato revela-se uma proposição considerada como verdadeira sobre o real; um conceito-em-ato é uma categoria de pensamento considerada como pertinente. (Vergnaud 1996a, p. 202)

Percebemos, também, nessas tentativas, a constituição de relação dialética e mutuamente entrelaçada dos conceitos espontâneos e científicos no espaço da investigação. Nas ações, os alunos elaboravam estratégias iniciais considerando os conceitos espontâneos. À medida que discutiam, esses conceitos ficavam mais elaborados, caminhando até ocupar o *status* de conhecimento científico.

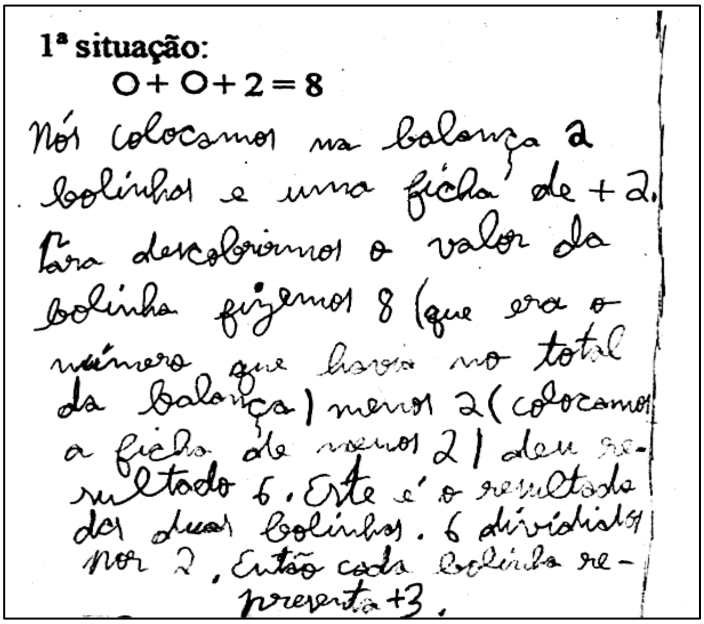
Muitas vezes, porém, víamos que eles voltavam novamente aos espontâneos como podemos observar no esquema acima.

Assim, pudemos evidenciar também a primeira série de estudos de Vygotsky (1998)

[7] Segundo Imenes e Lellis (1998), Equação é uma sentença matemática na qual aparece um sinal de igual e uma ou mais letras que representam números desconhecidos chamados de incógnitas.

que demonstrou que as funções necessárias ao aprendizado estão imaturas quando este se inicia e o desenvolvimento das bases psicológicas para o aprendizado de matérias básicas não o precede, mas sim se constitue numa interação contínua.

2º registro – Grupo 2 ***(aula 17.04.2007)***

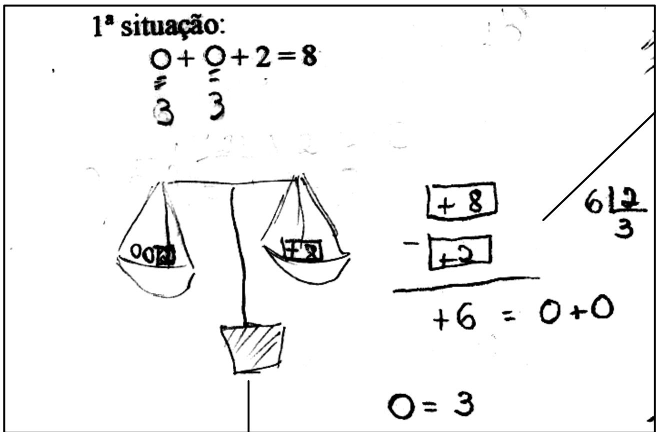


Transcrição do registro

Nós colocamos na balança 2 bolinhas e uma ficha de +2 (dois positivo). Para descobrirmos o valor da bolinha fizemos 8 (que era o número que havia no total da balança) menos 2 (colocamos a ficha de menos 2) deu resultado 6. Este é o resultado das duas bolinhas. 6 dividido por 2. então cada bolinha representa +3.

Esse grupo apresentou uma resolução apoiada na escrita, mas pode-se observar que embora eles não tenham formalizado uma equação, há indícios de que eles já possuem previamente um pensamento algébrico que dá sustentação à ação no contexto investigativo.

1º registro – grupo 3 ***(aula 17.04.2007)***



Tira 2 de cada um dos pratos e em seguida divide por 2 e encontra a massa de cada bolinha

Interpretando o raciocínio dos alunos:
Desenharam a balança onde colocaram em um dos pratos duas bolinhas e o número +2, no outro prato colocou o número +8.

Nesse grupo percebe-se, por meio de uma representação pictográfica (representações simbólicas por meio de desenhos), indícios que revelam claramente a formação de fragmentos de conceitos algébricos.

Nessa aula a professora circulou em todos os grupos e pôde acompanhar, também na fala dos alunos, os indícios da formação de conceitos algébricos na atividade de investigação.

Paulo:

- *Eu percebi que no resultado os números trocam de lugar.*

Professora colaboradora:

- *Como assim, Paulo?*

- *Perceba, professora:* ***O*** *+* ***O*** *+ 2 = 8"* (bolinha mais bolinha mais dois é igual a oito). *Então quando eu coloco* ***O*** *+* ***O*** *+ 2* **-** *2 = 8* **-** *2 , é a mesma coisa que se eu trocasse o dois de lugar, com o sinal trocado. Ele está em um prato da balança e vai passar para o outro, mas não pode esquecer que vai ter que trocar o sinal".*

Professora colaboradora:

- *É isso mesmo.*

Nessa fala percebe-se que a professora realiza, mesmo que superficialmente, a institucionalização da produção de Paulo (Brousseau, 1996), a aproximação do conceito científico de inversão numa equação de 1º grau.

Na validação dessa aula, percebeu-se que todos os grupos chegaram a uma resposta, embora com registros diferentes. A professora colaboradora aproveitou a validação para fazer alguns questionamentos. Durante a discussão, um aluno perguntou:

- *Então posso dizer que a balança quer dizer equilíbrio.*

Professora colaboradora:

- *A balança dá idéia de equilíbrio, mas me responda: o que o equilíbrio tem a ver com equações?*

Aluno:

- *Equações de equilíbrio.*

Professora colaboradora:

- *Quase.*

Outro aluno:

- *As equações têm que estar equilibradas como a balança.*

Professora:

- *Como?*

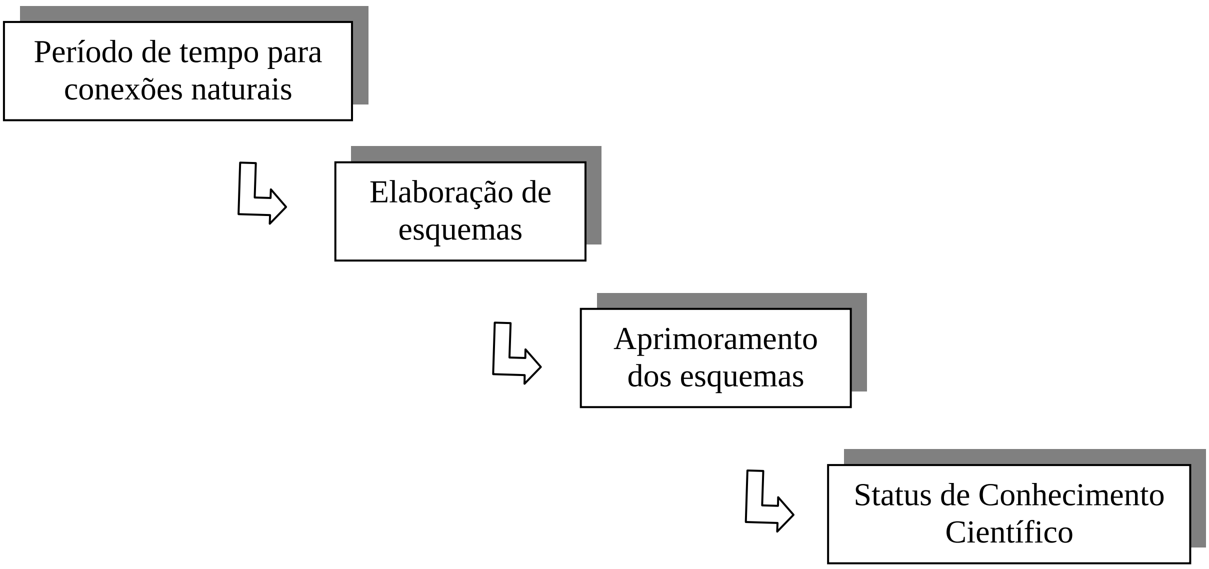
Aluno:

- *Por exemplo: x + 2 = 6, o x tem que ser 4, pois se for outro não está havendo* *equilíbrio.*

A professora aproveitou a institucionalização, segundo Brousseau (1996), para falar em equações equivalentes, e nesse momento vimos o quanto é importante a mediação do professor para fechar os conceitos para que esse não fiquem no senso comum.

Essa aula levou a uma reflexão sobre a importância do acompanhamento do registro numa aula de investigação, pois ele revela os múltiplos aspectos da dimensão da aprendizagem de cada sujeito. Levar adiante esse processo de aulas de investigação fez conhecer a trajetória de aprendizagem de cada aluno que é fundamental para a realização da mediação pedagógica.

Vivenciamos que a construção dos conceitos em atividades de investigação acontece em diferentes períodos de tempo para cada sujeito. Essa construção é formada por conexões naturais entre o objeto de estudo e as relações estabelecidas com ele e aos poucos os algoritmos vão se aprimorando até chegar bem próximo do conhecimento científico.



Percebemos, assim, como os conceitos iam se formando nesse contexto. Observamos que os alunos passavam por um agrupamento de operações intelectuais, as quais exigiam uma atenção deliberada, memória lógica, abstração e capacidade para comparar e diferenciar e que, embora participando das mesmas atividades, cada um estava em um momento da aprendizagem.

No encontro dessa semana com os professores, discutimos como esses momentos foram importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático e o quanto é necessário dar o tempo que cada um precisa para falar sobre o conceito e amadurecer a idéia.

Debatemos, também, como são infrutíferas as tentativas de professores de passar conceitos diretos. Quando o professor tenta assim proceder, acaba caindo numa repetição que de certa maneira simula um falso aprendizado, pois o aluno e o professor equivocam-se achando que, por estarem conseguindo realizar aquela repetição, o aluno aprendeu alguma coisa, sem que seja capaz de mobilizar tais conceitos/procedimentos em outra classe de situações.

Isso revelou que o ambiente de investigação matemática tem que desafiar, exigir e estimular o aluno a buscar sempre mais; tem que ser um jogo envolvente, onde haja uma relação de prazer e onde ele tenha tempo para degustar as idéias.

E era a constituição desse ambiente de investigação que nós estamos vivenciando e aprendendo com eles. Nessas aulas havia a satisfação de observar o quanto é importante fazer com que o aluno utilize suas funções psicológicas superiores, a partir de situações-problema significativas para se desenvolver cada vez mais.

Entendemos, assim, que para uma verdadeira situação de aprendizagem de conhecimento são necessários desequilíbrios e conflitos cognitivos, o que deve ser a base na constituição do ambiente de investigação matemática.

Nesse ambiente, o professor, como mediador, deve procurar interagir com os alunos e investigar esses algoritmos criados para aproximá-los dos conhecimentos científicos, baseando-se em uma estrutura construtivista e interacionista do conhecimento. E para que os conhecimentos em ação se rompam ou se modifiquem, promovendo a construção de conceitos, observamos nesta experiência que é necessário colocá-los à prova em diversas situações que os contrariem ou que os institucionalizem.

A fonte dos progressos dos conhecimentos, em especial dos conceitos algébricos, encontra-se justamente nos desequilíbrios e conflitos que os sujeitos sentem e nas suas próprias contradições. Os alunos nos revelaram que é no esforço de tentar resolver as situações-problema que são produzidos novos esquemas que permitem superar suas dificuldades anteriores.

O que os participantes da pesquisa puderam observar é que, num ambiente investigativo, os alunos aprendem os conceitos científicos, modificando suas teorias próprias já existentes por outras melhores adaptados às novas situações propostas no espaço da investigação em sala de aula. Isto acontece com a mediação do professor, do colega ou muitas vezes sozinho, quando o aluno começa a reelaborar seu próprio pensamento.

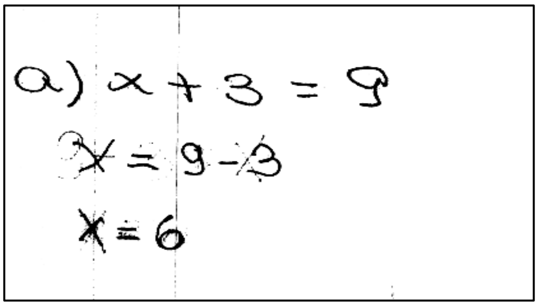
Não há como negar a subjetividade e particularidade da atividade humana na elaboração dos conceitos. A construção da objetividade, ou seja, do conhecimento científico, passa pela descoberta de novas idéias e exige uma etapa de conjecturas e, muitas vezes, de novos desafios que poderão ser propostos pelo mediador para chegar à validação de um conceito. É quando se percebe que a atividade de investigação não consiste somente na solução de problemas, mas também na descoberta de caminhos para chegar a essa solução.

Assim, segundo Pais (1999), o aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à “investigação científica”. Aprender a valorizar o raciocínio lógico e argumentativo torna-se um dos objetivos da Matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas.

Uma pesquisa realizada por Becker, em 1993 (apud Pais, 2006), analisa a epistemologia do professor no cotidiano escolar, concluindo que o pensamento predominante na prática docente, quanto ao significado de sua disciplina, é de natureza essencialmente empírica e que, normalmente, é muito difícil para ele afastar-se dessa posição. Esse pesquisador constatou o predomínio de uma visão estratificada e isolada da educação, o que faz com que utilize uma prática pedagógica fundamentada na repetição e na reprodução.

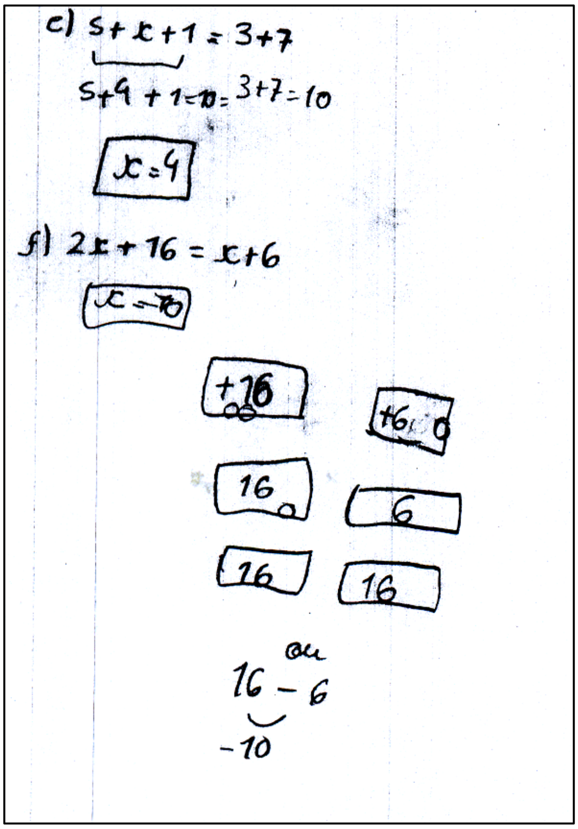
Nas aulas que se seguiram propusemos aos alunos que resolvessem as equações sem necessariamente o auxílio da balança.

(aula 19.04.2007)



Acompanhamos, nos registros, que o grupo de Marcos, que na aula anterior havia colocado o conceito da operação inversa, apresentou muita facilidade ao resolver as equações.

(aula 19.04.2007)



Substitui o x pelo 4 para ver se ele satisfaz a igualdade

Raciocínio apresentado pelo aluno

⇩

Duas bolinhas + 16 = 1 bolinha + 6

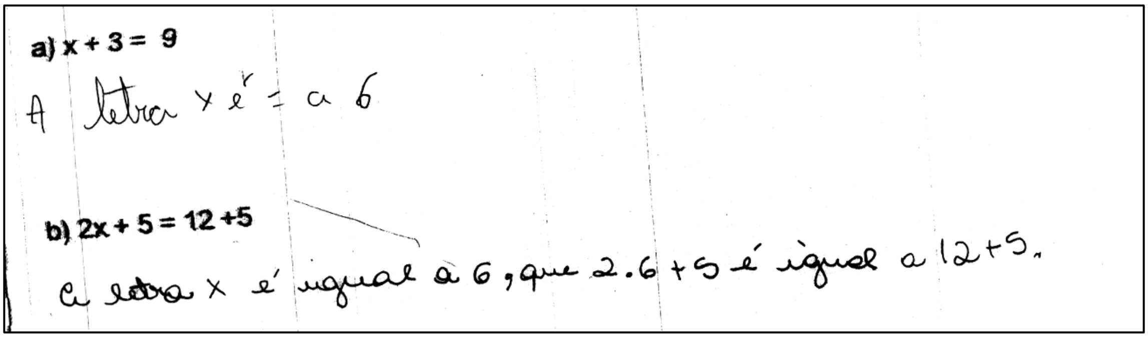
Tirando uma bolinha de cada lado teremos:
1 bolinha mais 16 = 6

Tirando 16 de cada lado teremos:
16 - 6

Ao perguntar por que ele coloca -10, ele responde que tirou o dezesseis do outro lado, por isso tinha que ficar negativo.

Já outro grupo usou duas estratégias ao mesmo tempo: quando era mais fácil, resolviam pelo processo de tentativas (testando se o número pensado satisfazia a condição dada), exemplo C acima, e quando aparecia o conceito de multiplicação, sentiam a necessidade de desenhar as bolinhas (exemplo f).

(aula 17.04.2007)



Esse outro grupo continuou resolvendo as atividades propostas, traduzindo a idéia na linguagem materna.

Analisando na totalidade as produções, percebemos que as diferenças de estágios faziam com que alguns alunos resolvessem a situação com maior rapidez, autonomia e aprofundamento, ao passo que para outros o tempo era bem maior e os caminhos utilizados às vezes longos.

Nesse dia, na hora da validação, houve uma troca muito grande de idéias e percebemos que isso levou um tempo maior.

Um aluno perguntou:

- *Se x aparece em todas as equações ele deverá ter o mesmo valor em todas?*

Outro respondeu:

- *Não. O x pode ter valores diferentes, pois acabamos de resolver as equações e nem todas têm o mesmo valor para x, mas todos que aparecem na mesma equação têm que ter o mesmo valor.*

A professora concluiu dizendo:

- *É isso mesmo, o x pode ter valores diferentes dependendo da equação, mas numa mesma equação o x ou o termo que você der a mesma letra terá o mesmo valor.*

Nesse mesmo dia, quando um grupo apresentou a sua resolução no quadro a professora colaboradora falou que eles estavam usando o princípio aditivo.

Então Rafael perguntou:

- *Por que se chama princípio aditivo?*

E Henrique respondeu:

- *Porque você está somando o número necessário a cada lado da equação.*

A professora colaboradora responde:

- *É isso mesmo, Henrique.*

Nesse momento percebeu-se que a exploração da comunicação e o incentivo da troca de idéias na validação constituem ponto chave numa aula investigativa.

4.2.1 Acompanhando o desenvolvimento conceitual até o momento

Numa análise inicial dessas atividades, percebemos que, quando os indivíduos começam a dominar as dimensões de um conceito numa aula de investigação numa dada classe de situações (Vergnaud, 1995), o mesmo passa a lhes fazer sentido. Em outras palavras, pudemos observar que nessas aulas o conceito é progressivamente apreendido na medida em que os alunos dominam mais e mais as propriedades do mesmo, as formas possíveis de representação e as relações com situações diversas, o que está em conformidade com a Teoria Cognitivista de Vergnaud (1994).

Destacamos, também, dessa teoria, a partir de observações das ações cognitivas dos alunos em situação, a comprovação de que quando há interesse por aprendizagem e seu ensino, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pois é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Começávamos a ver claramente esse processo de elaboração pragmática que Vergnaud (1995) coloca como sendo essencial para a psicologia e para a didática.

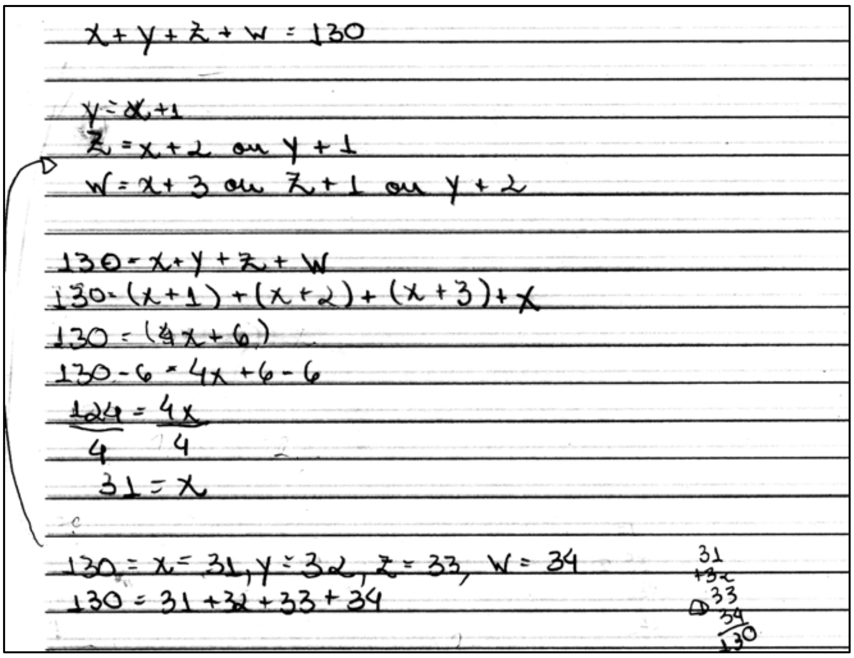
Entendemos, então, a idéia de que aprender a lidar com um conceito significa ter apreendido um número de invariantes relativo a esse conceito, numa rede de elementos psicológicos de alta complexidade.

Na aula seguinte, quando a professora pesquisadora lançou um desafio a um grupo, tivemos a oportunidade de acompanhar a discussão e a emergência de um fragmento de conceito.

Gravamos esse processo em áudio e pudemos acompanhar passo a passo a discussão no grupo. O desafio colocado foi: *A soma de 4 números consecutivos é igual a 130. Quais são esses números?*

A primeira idéia que surgiu não foi a de mover ferramentas da Álgebra. Os alunos tentaram, primeiro, resolver com os conceitos aritméticos. A conta realizada encontra-se ao final da figura abaixo, no lado direito.

(aula 24.04.2007)



$x + y + z + w = 130$

$y = x + 1$

$z = x + 2$ ou $y + 1$

$w = x + 3$ ou $z + 1$ ou $y + 2$

$130 = x + y + z + w$

$130 = (x+1) + (x+2) + (x+3) + x$

$130 = (4x + 6)$

$130 - 6 = 4x + 6 - 6$

$\frac{124}{4} = \frac{4x}{4}$

$31 = x$

$130 = x = 31, y = 32, z = 33, w = 34$

$130 = 31 + 32 + 33 + 34$

31
+32
33
34
130

Seguiu-se o diálogo:

Paula fala:

- *Vamos dividir o número por 4.*

Fernando responde:

- *Mas não dá exato.*

Então Paula fala:

- *Deixa eu ver então, vamos dividir 120 por 4 que dá exato e os dez que sobram nós dividimos novamente de forma que a diferença seja sempre um. Acho que assim nós encontraremos os números. Deixa eu ver 120 por 4 dá 3.*

Fernando responde.

- *Dá 30.*

Paula:

- *É mesmo, eu estava dividindo 12 por 4 e pensei em acrescentar o zero no final e acabei me esquecendo.*

Paula continua:

- *Bom, agora esses dez que sobraram nós vamos colocar 1 em um trinta, dois em outro trinta, três em outro trinta.*

- *Deixa eu ver, fica 31+ 32+33+34 que somando dá?*

Fernando responde eufórico:

- *130.*

- *Exatamente.*

Nesse momento a professora pesquisadora faz uma intervenção:

- *Será que vocês conseguiriam resolver esse problema algebricamente?*

Eles respondem:

- *Não sei, vamos tentar.*

O registro desse processo encontra-se na figura anterior.

Primeiramente, eles pensaram em dar uma letra para cada número $x + y + z + w = 130$. Logo em seguida, percebem que isso não vai dar certo. Ficam sem saída. A professora pesquisadora faz uma pergunta:

- *Qual a diferença entre os números?*

João, que estava quieto até então, começa a participar e responde:

- *É um.*

Então pensam mais um pouco e resolvem pedir ajuda do grupo que está ao lado, relatando o problema para os alunos desse grupo. Paulo, sem ver a resolução que eles haviam feito, dá a mesma idéia de dividir o número por 4.

Paula responde:

- *Isso nós já fizemos, nós até já sabemos o resultado, nós queremos agora é encontrar uma equação que chegue nesse resultado.*

Eles começam a pensar novamente na idéia que não poderiam ser letras diferentes, mas apenas uma. Voltam na conta que fizeram para encontrar o número. Paula tem a idéia de chamar o y de x + 1 e, a partir daí, eles conseguem montar a equação e resolvê-la.

Durante essa observação, percebemos que a aprendizagem/ensino da Álgebra envolve competências em generalizações que decorrem da Aritmética e que a questão da representação é vital, já que essa subárea da Matemática requer a construção e a interpretação de uma nova linguagem.

Lins e Gimenez (1997, p. 113) destacam que "o que precisamos fazer é entender de que modo Álgebra e Aritmética se ligam, o que elas têm em comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira raiz que nos permitirá repensar o problema".

O exemplo a seguir deixou ainda mais clara a idéia de que os conceitos apresentados pelos professores como modelos não têm significados para os alunos. Começamos a entender que, para a construção de um conceito por meio do sujeito em ação, o imprescindível é proporcionar, segundo Vergnaud, (1996) um vínculo entre a conduta e a representação (e, conseqüentemente, a conceitualização) e são os *invariantes operatórios* que articulam teoria e prática já que a busca e a seleção da informação baseiam-se inteiramente no sistema de *conceitos-em-ato* disponíveis no sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circunstâncias, etc) e nos *teoremas-em-ato* subjacentes a sua conduta.

Ao resolver uma das equações, um dos alunos faz os seguintes questionamentos:

$$\frac{3}{5}x = \frac{1}{6}$$

Bruno:

- *Posso simplificar o três com o seis?*

Professora pesquisadora:

- *Não sei, por que você não faz um teste para verificar?*

Bruno:

- *Nessa equação é muito complicado, deixa eu pensar sem o x.*

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{6}$$

Professora pesquisadora:

- *Mas se você tirar o x, não poderá pensar que isso é uma igualdade, só se mudar a fração.*

Bruno:

- *Como assim?*

Professora pesquisadora:

- *Colocar duas frações equivalentes.*

Assim:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Marcos:

- *Se eu simplificar o 2 com o 2 terei 1 = ¼. Já entendi, então só posso simplificar os dois números denominador e o numerador se forem da mesma fração.*

Professora pesquisadora.

- *Será que só existe essa possibilidade?*

Bruno:

- *Por quê? Tem mais alguma?*

Professora pesquisadora:

- *Olhe bem para a fração.*

Pensa por algum tempo, faz alguns rabiscos e percebe que se simplificar o 2 e o 4 dos denominadores dá o mesmo resultado. Nesse momento o grupo já está interessado na conversa e começa a testar números. Depois de algum tempo chegam a conclusão de que se for uma igualdade com uma incógnita, muda a situação e a simplificação para continuar mantendo o status de equivalente deve-se simplificar dois numeradores.

Luara que está atenta à discussão fala:

- *Ou eliminar se forem iguais de ambos os lados, é a idéia de manter o equilíbrio da balança* (conceito da aula de 28.04.2007).

O conhecimento intuitivo contido nessa conduta é constituído essencialmente de invariantes operatórios, ou seja, de teoremas-em-ato e conceitos-em-ato. Eles são a parte "conceitual" dos esquemas, independente de serem implícitos ou explícitos, conscientes ou inconscientes. Se um esquema se aplica a uma classe de situações, ele deve conter invariantes operatórios relevantes a toda a classe (Vergnaud, 1994, p. 54).

Os registros, o modo como decorreram essas aulas e a análise nos indicam que as aulas de investigação podem ser um dos caminhos para formação de conceitos, realçamos em nossa análise a importância do papel do professor nessas aulas tanto na elaboração das atividades, quanto na mediação das aulas, como na interpretação dos registros.

Vimos que nessas aulas de investigação os conceitos surgem por meio de descobertas dos próprios alunos, o que passa a ter mais significado para eles e isso é realmente aprender matemática. O uso diversificado de momentos (resolução em grupo, exploração do problema, confronto de idéias, validação das resoluções) fez com que os alunos não adquirissem somente modelos, mas entendessem a Matemática de um modo integrado, articulando estratégias , raciocínio e conceitos.

Os alunos passaram a refletir melhor sobre as estratégias de soluções o que proporcionou o desenvolvimento das capacidades de intuir, testar, conjecturar, generalizar, além de outras capacidades como a de comunicar-se tanto oralmente como por escrito.

Este estudo evidencia algumas vantagens da aula investigativa na formação de conceitos algébricos.

4.3 A DIVERSIDADE DE REPRESENTAÇÕES E ARTICULAÇÕES

> *Valorizar estratégias pelas quais o aluno pode fazer Matemática implica identificar esquemas de ação próprios do seu raciocínio (Pais, 2006, p.30)*

Vergnaud (1994) usa o termo representação como elemento associado ao conceito que tem um significado para o sujeito e é isso que pretendemos discutir nessa categoria. Durante as aulas de investigações, colocamos os sujeitos em ação sem que lhes fosse dado um modelo a seguir. Essa liberdade fez com que surgissem, em diversos momentos, maneiras diferentes de resolver uma determinada situação. Entretanto há de se considerar que as ações dos sujeitos estão mergulhadas em um certo contexto representacional.

Avançando na direção do entendimento dessas representações, eu e a professora colaboradora pensamos em atividades que possibilitassem reunir a multiplicidade de resoluções. Estas atividades deviam privilegiar a discussão entre as várias exposições dos colegas. Ouvindo uns aos outros, eles verificariam como cada um fazia e falava, procurando interpretar, buscando convergências com a sua resolução.

Nessa semana iniciamos a resolução dos problemas que de certa forma levassem os alunos ao raciocínio algébrico. Os grupos ficaram à vontade para resolvê-los da forma que quisessem, o que deve ser característica marcante do espaço de investigação.

Discutimos a importância de permitir aos alunos construírem seus próprios algoritmos e que muitos daqueles problemas não necessitavam da Álgebra para resolvê-los.

Foi apresentado um esquema que representa uma rodovia em linha reta. O ponto A corresponde ao quilômetro 35 e o ponto D, ao quilômetro 110 da rodovia.

FIGURA 3 – O problema da estrada

(Retirado do livro Pensar & Descobrir, Giovanni e Giovanni Jr, 2005)

Sabe-se que:

- A distância de C a D é igual ao dobro da distância de A a B.
- A distância de B a C é 45 Km.

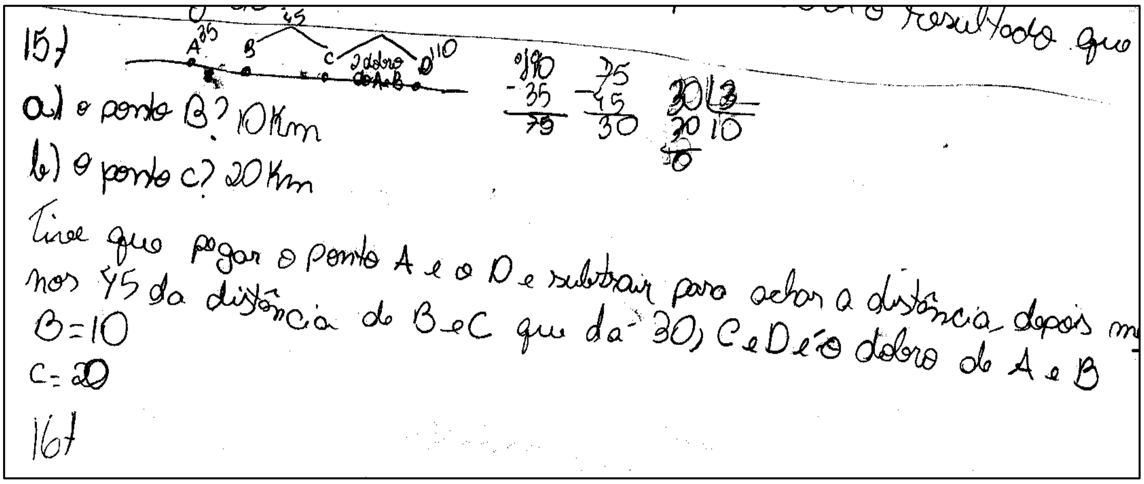
A qual quilômetro dessa rodovia corresponde:

a) O ponto B?

b) O ponto C?

Percebemos diferentes representações associadas cada uma a certo tipo de procedimento resolutivo para um mesmo problema.

Registro do grupo 1

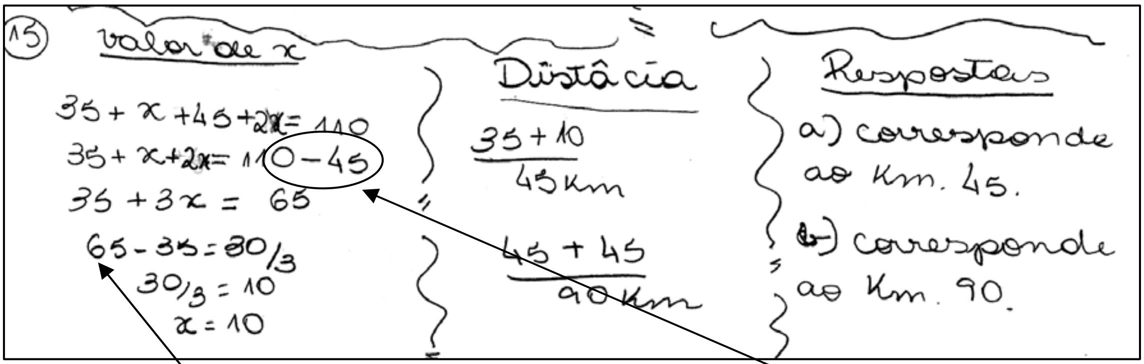


Interpretação do raciocínio do aluno:
Primeiro ele desenha a reta para tentar entender os dados do problema **(representação geométrica do problema) – representação enquanto estratégia de interpretação para resolução.**
Depois se utiliza de conceitos e procedimentos da Aritmética para resolver o problema.
Subtrai os 35 quilômetros iniciais do total da distância que são 110 quilômetros, obtendo 75 Km. Em seguida subtrai a distância de 45 quilômetros referente à distância BC, obtendo 30 Km; então divide por 3, já que $\overline{CD}$ é o dobro de $\overline{AB}$.
Ao final dá a resposta incorreta, pois interpreta como a distância entre os pontos dados e não como o quilômetro correspondente.

É interessante que, mesmo conhecendo equações, eles não a utilizaram como ferramenta de representação, e por conseqüência, de resolução. Podemos observar, no entanto, que embora a representação seja geométrica e aritmética, oculta-se por traz um pensamento algébrico, como por exemplo, quando eles dividem por 3. Esse pensamento já carrega consigo a idéia de que uma distância seria x e a outra, o dobro de x; portanto, divide-se por 3, apesar de não estar presente no registro.

Analisando os conhecimentos intuitivos nos registros acima, à luz da teoria de Vergnaud (1994), percebemos que os esquemas apresentados revelam conceitos em ato independente de serem implícitos ou explícitos, conscientes ou inconscientes, porque esses esquemas contêm invariantes operatórios que se aplicam a uma classe de situações, como é o caso do conceito de que quando se quer dividir algo em duas partes, em que uma é o dobro da outra, é só dividir por três e dar uma parte para um e duas para outro, ou seja, x + 2x é igual ao total que se quer repartir.

Registro do grupo 2

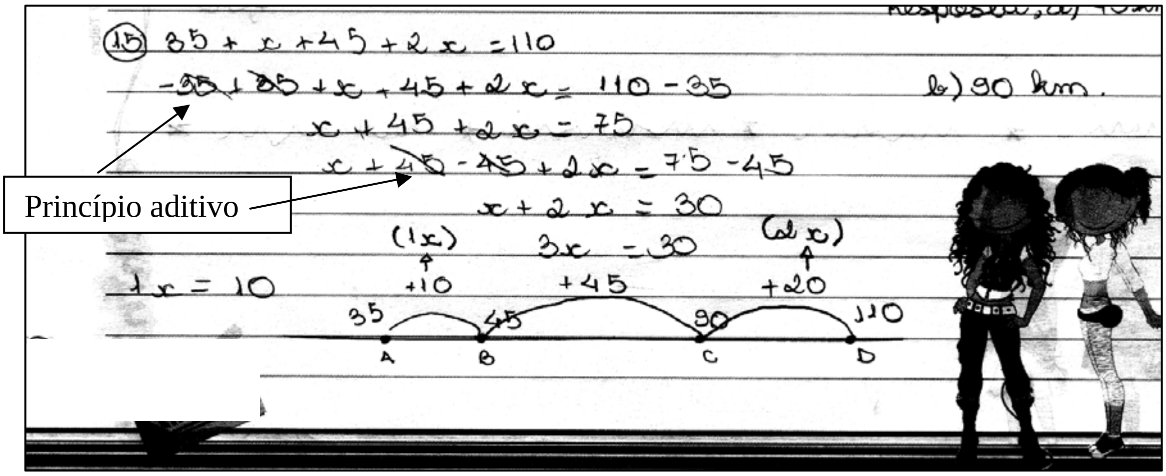


Observe-se que eles não utilizam a forma como as equações são apresentadas normalmente. Isso revela indícios de uma aprendizagem significativa, pois dá a idéia de que eles estão entendo o que estão fazendo.

Método da inversão-mudança de números e variáveis e um membro para outro trocando o sinal.

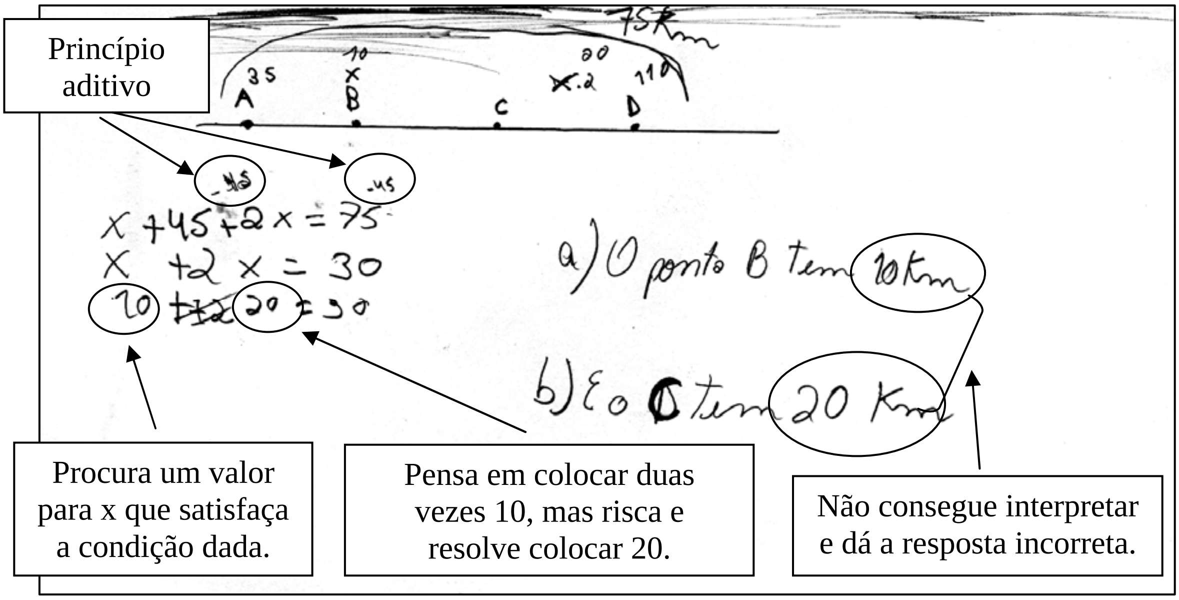
Esse grupo utiliza a equação para representar a situação e resolver o problema. Percebemos que ele compreende a equação como uma inversão e consegue interpretar corretamente a resposta.

Registro do grupo 3



Esse outro grupo resolveu o problema usando a equação para representação assim como para resolução, utilizando o princípio aditivo. Ao final, porém, fez o desenho da estrada, o que ajudou na interpretação da resposta. Podemos levantar a hipótese da necessidade de uso de mais de uma forma de representação para uma classe de situações como essa que mobiliza o conceito de distância entre pontos geográficos.

Registro do grupo 4



Esse grupo, embora tenha feito a representação da estrada, usou a equação para resolver, encontrou o valor de x corretamente, mas não conseguiu interpretar o problema "*em que ponto da estrada estão os pontos*". O grupo erra ao dar a solução porque interpreta a resposta como sendo a distância entre os pontos. Isso pode apontar para a necessidade do ambiente de investigação oportunizar a representação em mais de um tipo de quadro (Douady, 1986).

A professora colaboradora faz uma intervenção, pedindo para que eles lessem novamente a pergunta. Ao fazê-lo, percebem que a resposta não é somente encontrar o valor de x, mas sim o ponto em que B se encontrava. Querem apagar, mas como se pede os registros para poder analisá-los ou tira-se foto na hora em que eles estão resolvendo, um aluno fala:

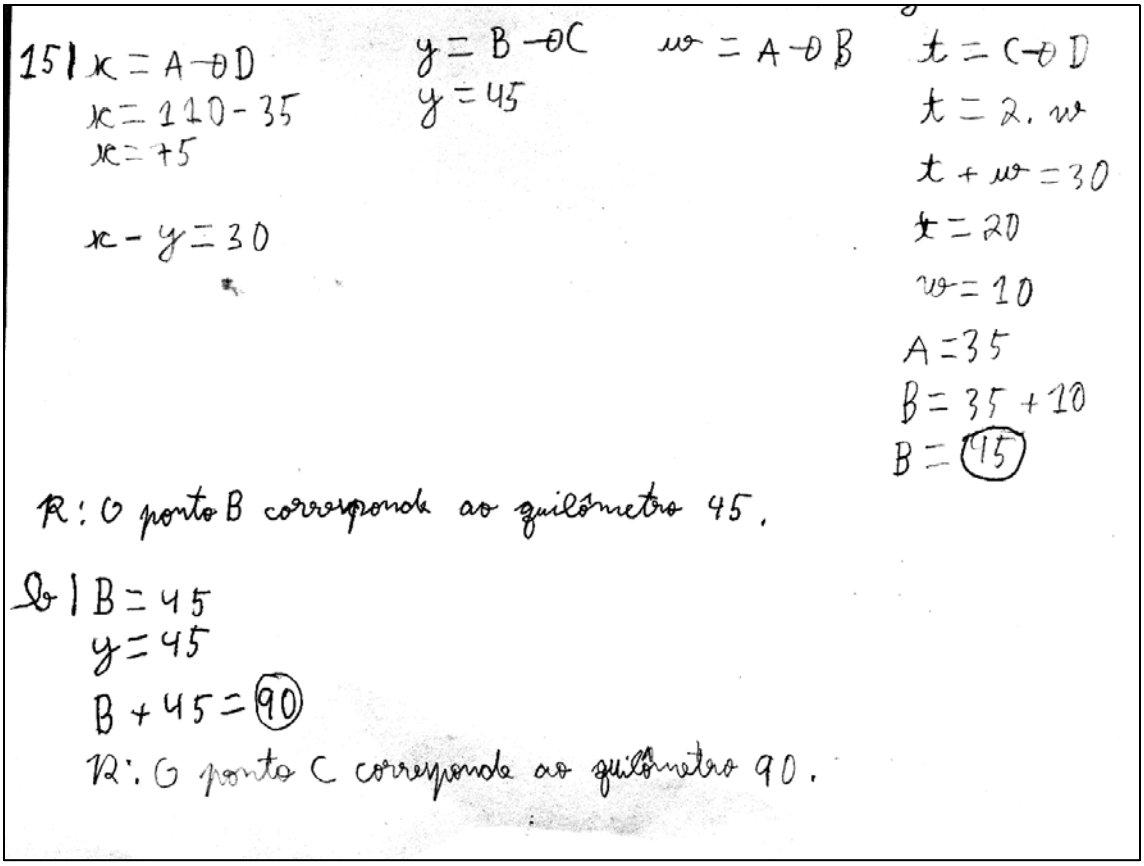
- *Não apaga não, ela vai querer analisar, vamos escrever a resposta certa na outra página.*

Isso nos revela o grau de consciência que os alunos constroem acerca dos objetivos da pesquisadora, o que influencia nas suas ações.

No início a professora pesquisadora não mencionou que era uma pesquisa que estava fazendo; falou simplesmente que iria observar as aulas. No entanto, ao longo do trabalho, os alunos foram percebendo e buscavam ajudar mostrando seus registros. Parece que eles estão se sentindo importantes por se querer ver suas formas de resolver, e todos querem mostrar suas descobertas. Isso criou uma relação muito interessante na aula, mas é também uma certa intervenção didática por meio da pesquisa.

Esse grupo deu uma nova idéia à resolução da equação.

Registro do grupo 5



15) $x = A \rightarrow D$
$x = 110 - 35$
$x = 75$

$x - y = 30$

$y = B \rightarrow C$
$y = 45$

$w = A \rightarrow B$

$t = C \rightarrow D$
$t = 2 . w$
$t + w = 30$
$t = 20$
$w = 10$
$A = 35$
$B = 35 + 10$
$B = 45$

R: O ponto B corresponde ao quilômetro 45.

b) $B = 45$
$y = 45$
$B + 45 = 90$
R: O ponto C corresponde ao quilômetro 90.

Para o sujeito aprender, tem que estar disposto a mergulhar num contexto social rico em cultura e apropriar-se dela numa relação mediada, formando conceitos cada vez mais aprimorados, aumentando assim sua rede conceitual.

Isso deixou claro que, se se pretendesse formar conceitos, o caminho estava certo.

Foi apresentado um novo problema, retirado do livro Pensar & Descobrir (Giovanni e Giovanni Jr, 2005).

O Problema 2:

Caio tinha 13 250 reais e Luca tinha 9 320 reais no início do ano de 2005. Se Caio economizar 329 reais por mês e Luca economizar 1 115 reais por mês, em qual mês do ano de 2005 os dois passarão a ter quantias iguais?

Podemos observar a riqueza de algoritmos criados pelos alunos.

Um grupo resolveu tirando mês a mês até chegar à resposta:

12) Caio 13,250 reais, no início de 2005 — Nº 5 (Maio)
Luca 9,320 reais, no início de 2005

13.250 + 329 = 13.579	9.320 + 1.115 = 10.435
13.579 + 329 = 13.908	10.435 + 1.115 = 11.550
13.908 + 329 = 14.237	11.550 + 1.115 = 12.665
14.237 + 329 = 14.566	12.665 + 1.115 = 13.780
14.566 + 329 = 14.895	13.780 + 1.115 = 14.895

Outro grupo montou uma equação para resolver:

$$13\,250 + (329 \cdot x) = 9\,320 + (1.115 \cdot x)$$
$$(329 \cdot x) - (1.115 \cdot x) = 13.250 - 9\,320$$
$$(786 \cdot x) = 3830$$
$$x = 3830 : 786 = 5$$
$$x = 5$$

- janeiro
- fevereiro
- março
- abril

maio

no mês de maio os amigos Caio e Luca ficariam com a mesma quantia

Esses dois modelos apresentados oportunizaram a validação desse dia como sendo um momento fértil de aprendizagem. A professora colaboradora fez uma relação entre os dois, valorizando ambos, falando que o primeiro nos permite compreender o raciocínio do problema, e o segundo é uma maneira bem mais rápida de resolver. Ela conversa com os alunos questionando: *se o prazo para igualar as quantias fosse maior, quanto tempo levaria para resolver o problema usando o primeiro modelo?*

Com a observação dessas aulas, percebemos que a aprendizagem-ensino da Álgebra envolve diversas competências em generalizações e a questão da representação é vital para esse entendimento.

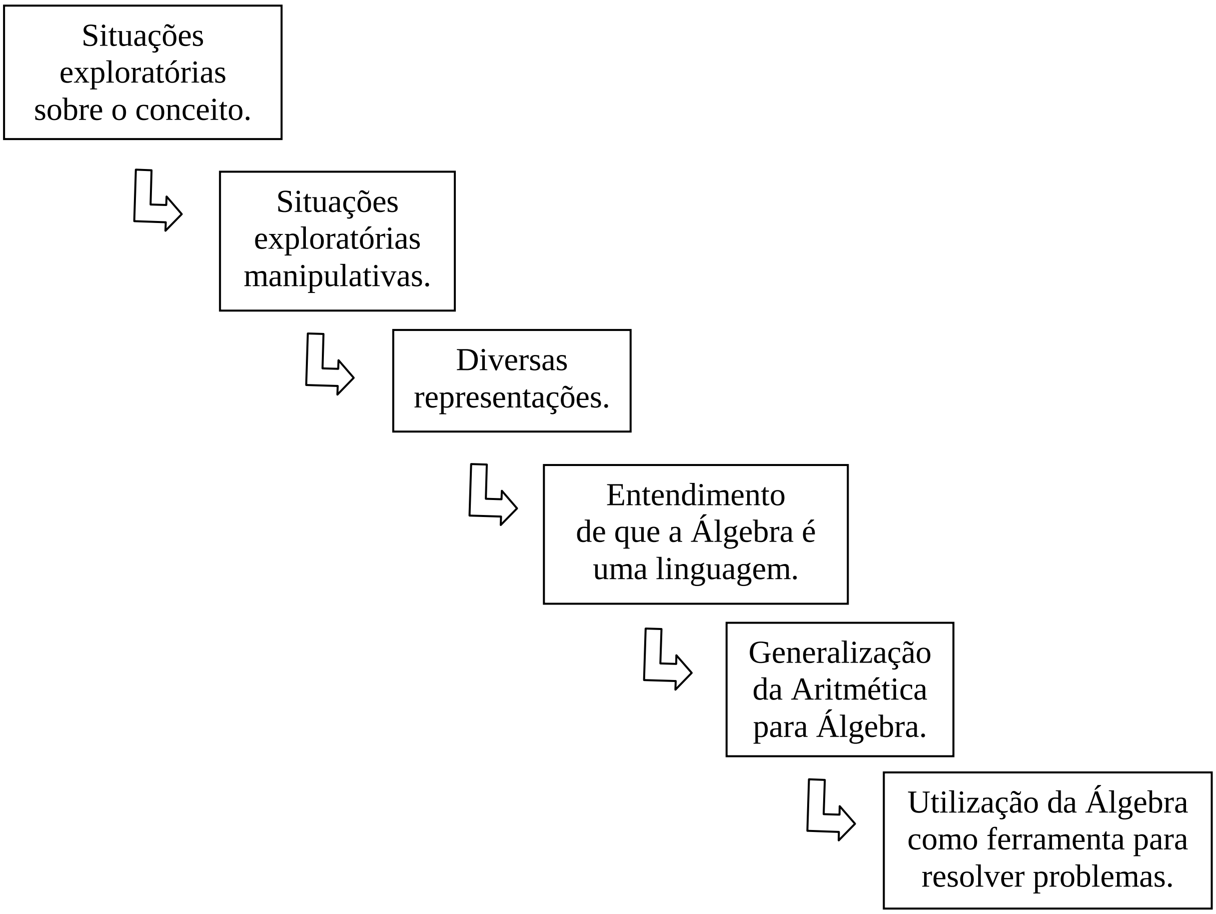
> Em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para o seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. (sic). (Damm,1999, p.135)

O que se pode observar é que as aulas de investigação permitem aos alunos construírem os conceitos científicos, modificando seus teoremas em ação, já existentes, por outros melhores, mais próximos daqueles construídos pelos cientistas.

Tais resultados revelam que não há como negar a subjetividade e a particularidade da atividade humana na elaboração dos conceitos. Observamos assim que a construção da objetividade, ou seja, do conhecimento científico, passa pela descoberta de novas idéias e exige uma etapa de conjecturas e muitas vezes de novos desafios que poderão ser propostos pelo mediador para chegar à validação de um conceito. É quando se percebe que a atividade de investigação não consiste somente na solução de problemas, mas também na descoberta de novos caminhos para chegar a essa solução.

Assim, segundo Pais (2001), o aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à “investigação científica”. Aprender a valorizar o raciocínio lógico e argumentativo torna-se um dos objetivos das aulas de investigação em Matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas. Foi o que acabamos de constatar na análise das produções.

Até esse ponto da pesquisa já passamos por diversos momentos na construção do conceito algébrico.



Portanto, para construir o conceito algébrico como linguagem e não simplesmente como um código, precisa-se dar significado, deve-se ir devagar, explorando todas as possibilidades.

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (Damm,1999, p.137)

Percebemos a importância da proposta das aulas de investigação em criar um ambiente mais livre com diversidade de representações e articulações das situações, em que os alunos resolvessem os problemas da maneira que achassem melhor. Os métodos formais surgiram gradativamente e viu-se que o mais importante era que cada sujeito elaborava suas hipóteses construindo suas idéias de maneira clara, compreendendo o significado de cada símbolo usado. No ambiente investigativo, a professora colaboradora deu ênfase na linguagem própria dos alunos, o que pode ser um passo em direção à eliminação da aprendizagem mecânica, o que é raro nas aulas tradicionais.

Começamos a sentir que a professora colaboradora estava muito contente com a riqueza dos algoritmos que os alunos estavam criando, mas também sentimos a preocupação da mesma com alguns grupos que ainda não estavam utilizando os conceitos da Álgebra que, nesse momento, era o que estava no currículo a ser aplicado. Decidiu-se que na próxima aula seriam lançados problemas que fossem mais difíceis de resolver pela Aritmética e que, assim, os alunos começariam a mobilizar os conceitos da Álgebra.

- *Achei muito importante a idéia de insistir para que os alunos experimentassem idéias para resolver, registrassem o que havia ocorrido. (Professora Pesquisadora - diário de campo, 10.05.07).*

O problema escolhido foi *"Adivinhando a idade de uma pessoa" (Aula de 11/05/2007).*

Podemos adivinhar a idade de uma pessoa pedindo-lhe que realize os seguintes cálculos:

1º *Escrever um número de dois algarismos.*

2º *Multiplicar o número escrito por dois.*

3º *Somar cinco unidades ao produto obtido.*

4º *Multiplicar esta soma por cinqüenta.*

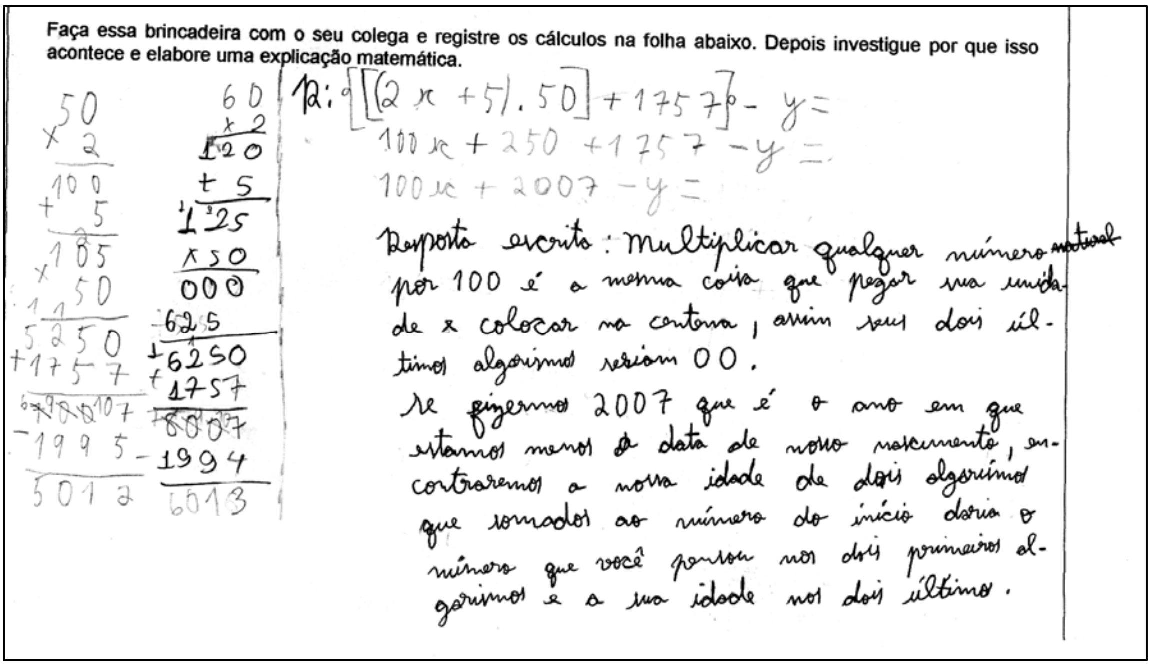
5º *Somar ao produto o número 1757.*

6º *Subtrair o ano do nascimento.*

O resultado que se obtém é um número de quatro algarismos abcd. Os dois algarismos da direita, que correspondem às dezenas e às unidades, indicam a idade da pessoa e, os dois algarismos da esquerda, que correspondem às centenas e aos milhares, indicam o número que a pessoa havia pensado.

Faça essa brincadeira com o seu colega e registre os cálculos na folha abaixo. Depois investigue por que isso acontece e elabore uma explicação matemática.

Registro 1


Faça essa brincadeira com o seu colega e registre os cálculos na folha abaixo. Depois investigue por que isso acontece e elabore uma explicação matemática.

50 × 2 = 100; 100 + 5 = 105; 105 × 50 = 5250; 5250 + 1757 = 7007; 7007 − 1995 = 5012

60 × 2 = 120; 120 + 5 = 125; 125 × 50 = 6250; 6250 + 1757 = 8007; 8007 − 1994 = 6013

R: $[[(2x+5).50]+1757] - y =$

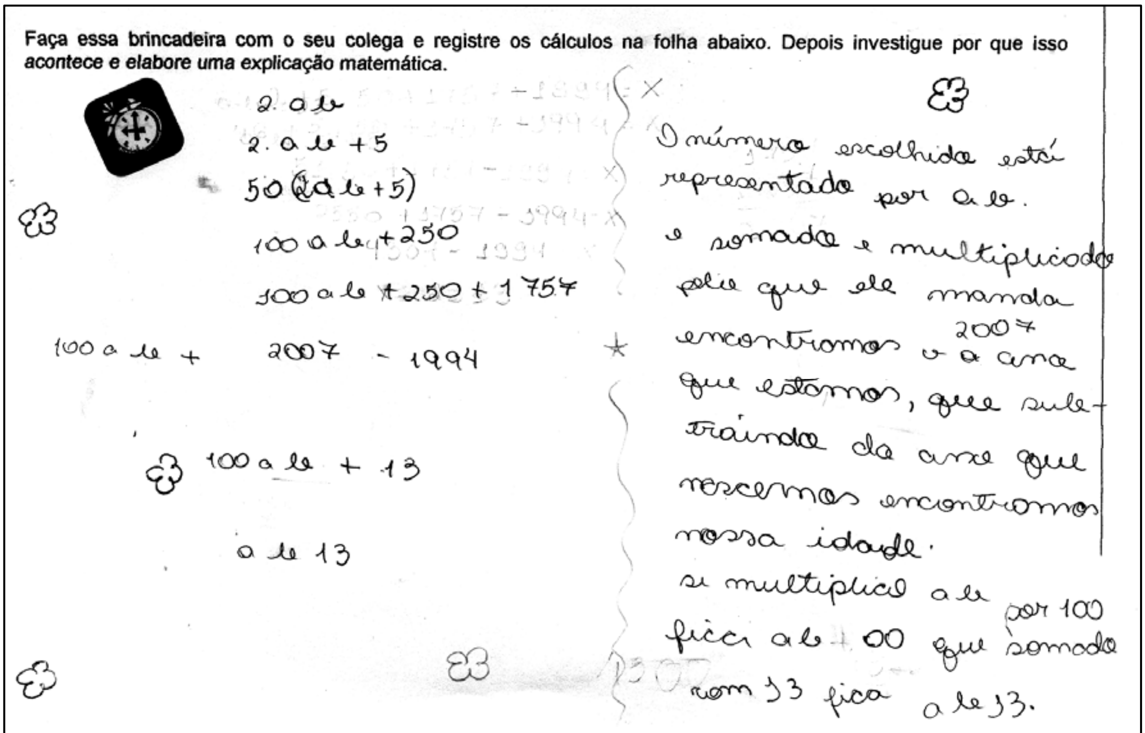
$100x + 250 + 1757 - y =$

$100x + 2007 - y =$

Resposta escrita: Multiplicar qualquer número natural por 100 é a mesma coisa que pegar sua unidade e colocar na centena, assim seus dois últimos algarismos seriam 00.
Se fizermos 2007 que é o ano em que estamos menos a data de nosso nascimento, encontraremos a nossa idade de dois algarismos que somados ao número do início daria o número que você pensou nos dois primeiros algarismos e a sua idade nos dois último.

Depois de percorrerem passo a passo até chegar à resposta, explicaram o porquê do aparecimento ao final do número pensado e da idade da pessoa, o que nos deixa claro o entendimento da idéia do problema.

Registro 2


Faça essa brincadeira com o seu colega e registre os cálculos na folha abaixo. Depois investigue por que isso acontece e elabore uma explicação matemática.

2 . ab

2 . ab + 5

50(2ab + 5)

100ab + 250

100ab + 250 + 1757

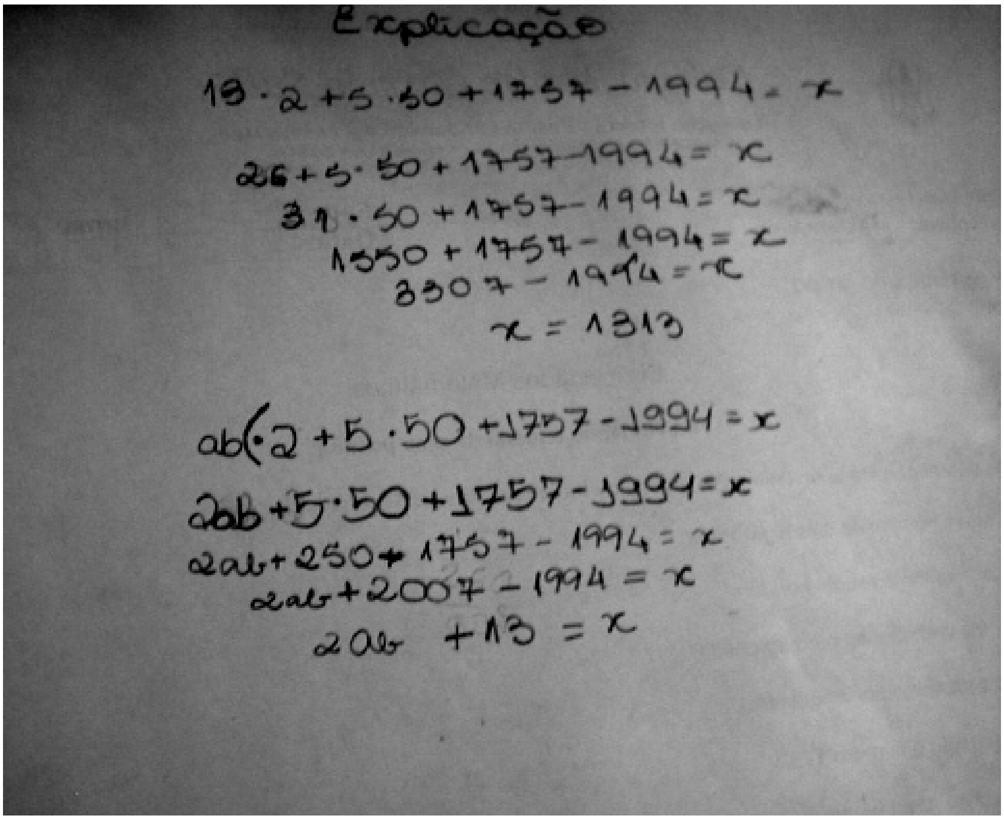
100ab + 2007 − 1994

100ab + 13

ab13

O número escolhido está representado por ab. é somado e multiplicado pelo que ele manda encontramos o 2007 o ano que estamos, que subtraindo do ano que nascemos encontramos nossa idade.
se multiplica ab por 100 fica ab00 que somado com 13 fica ab13.

Esse grupo faz a brincadeira oralmente e depois apresenta um cálculo algébrico para provar a idéia.



Explicação

13 · 2 + 5 · 50 + 1757 − 1994 = x

26 + 5 · 50 + 1757 − 1994 = x

31 · 50 + 1757 − 1994 = x

1550 + 1757 − 1994 = x

3307 − 1994 = x

x = 1313

ab · 2 + 5 · 50 + 1757 − 1994 = x

2ab + 5 · 50 + 1757 − 1994 = x

2ab + 250 + 1757 − 1994 = x

2ab + 2007 − 1994 = x

2ab + 13 = x

Esse grupo faz uso do próprio número utilizado para justificar o problema.

Escolhemos dois dos grupos para fazer a validação, visto que os demais apresentavam idéias parecidas. Nesse dia a validação foi muito importante para que alguns alunos que não haviam entendido a idéia, compreendessem.

O grupo de Henrique falou:

- *Sabe o que eu estou pensando? Acho que eu não poderia fazer essa brincadeira com meu avô, pois ele tem 102 anos.*

Essa fala revela o grau de compreensão desse aluno sobre o problema, visto que percebe que se a idade tivesse um algarismo de 3 casas, colocaria em choque a lógica do problema.

Aula do dia 16/05/2007

No encontro seguinte a essa aula, várias situações diferentes apareceram.

Gabriela chegou logo falando:

- *Pense em um número de 1 a 10, agora some 50, agora subtraia 10, agora some 40. Tire o número que você pensou. Pronto, agora não fale o resultado, deixe eu adivinhar, deu 80.*

Continuou Gabriela:

- *Nessa brincadeira você pode fazer o que quiser, desde que uma operação anule a outra e chegue no número que você quer, entendeu?*

Professora pesquisadora:

- *Como assim? Você poderia me explicar matematicamente?*

Gabriela:

- *Vou dar outro exemplo, esse foi a Amanda que criou, venha cá, Amanda, me empresta o seu caderno para eu fazer a brincadeira com a professora.*

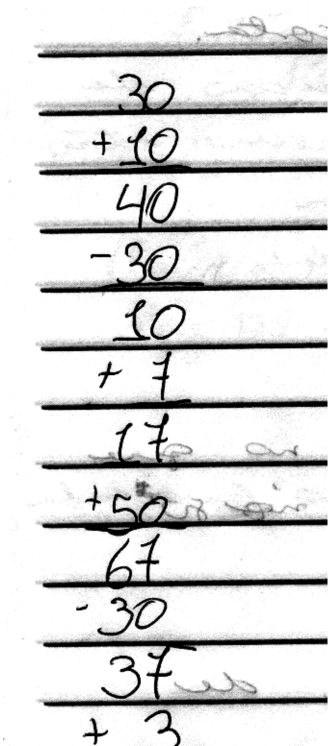
Amanda:

- *Deixe que eu faço. Pense em um número de 1 a 10, some 30, acrescente 10, tire 30, acrescente 7, agora acrescente 50, tire 30, acrescente 3 e tire o número que você havia pensado. O resultado vai ser sempre 40.*

A professora colaboradora insiste:

- *Mas vocês ainda não me falaram matematicamente por que isso acontece.*

Amanda pega o caderno e faz o seguinte registro e vai falando.



Amanda

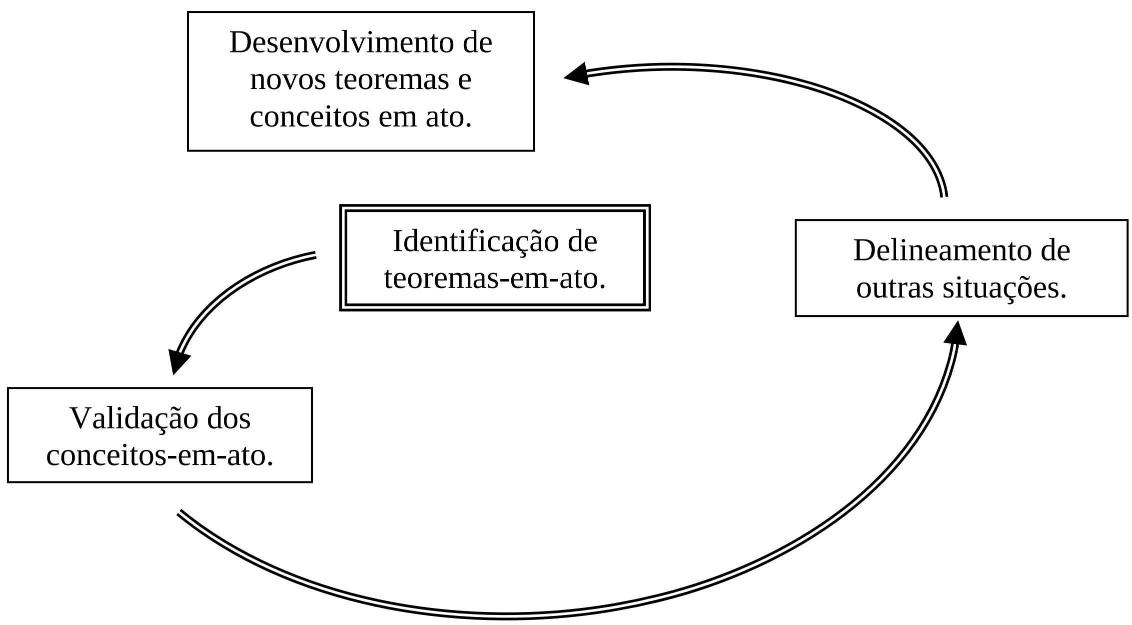
- *Veja bem, se você não pode colocar o número que você pensou, porque você sempre vai pedir para pessoa retirar no final, então é só bolar várias contas de modo que uma operação anule a outra. E no fim sobre sempre o número que você quer, no meu caso eu escolhi o quarenta.*

Nesse momento da pesquisa pode-se perceber, por meio dos registros, que todos os alunos já estavam resolvendo problemas algébricos que envolviam uma incógnita, então a professora colaboradora propôs que avançássemos, seguindo o espírito da aula de investigação e lançássemos a idéia do sistema de duas equações com duas incógnitas.

Pudemos ver o quanto a professora pesquisadora abraçou a proposta mediante aos bons resultados que estava obtendo, inclusive com a disciplina dos alunos, pois todos se engajavam na aula em busca de soluções, a participação na pesquisa tem, portanto, se constituído num espaço de formação.

Com essas atividades de investigação, vimos que o estudo da Álgebra requer um domínio progressivo por parte do aluno, dos campos conceituais, ou subcampos, correspondentes. Por exemplo, um conceito mais amplo como o da Generalização levou alguns grupos a terem dificuldade em realizar as tarefas propostas. Para investigar como os alunos chegam a tais conceitos temos que, inicialmente, identificar os teoremas-em-ato (proposições tidas como válidas) e conceitos-em-ato (categorias de pensamento pertinentes) que os estudantes usam para abordar situações envolvendo esse campo conceitual. Posteriormente, devemos delinear outras situações que permitam o desenvolvimento de novos teoremas-em-ato e conceitos-em-ato que, progressivamente, levem ao desenvolvimento de teoremas e conceitos adequados ao tratamento desse tipo de problemas (situações). Esse processo leva um tempo diferente para cada aluno, e é nisso que vimos um campo fértil num ambiente de investigação, pois ele nos permitiu acompanhar esse processo de conceitualização dos alunos.

GRÁFICO 7 – Processo de conceitualização dos alunos no ambiente investigativo



A habilidade de alguns grupos em representar, articular e resolver situações calcadas em linguagem natural possibilitou melhores critérios para aquisição de conceitos, mas, por outro lado, a simbolização de alguns grupos ajudou a resolver mais rapidamente um problema, isso fez com que os alunos assimilassem a idéia de que há problemas mais facilmente resolvíveis do que outros, ou procedimentos mais fáceis do que outros, há também representações simbólicas mais potentes do que outras, como era o caso de resolver os problemas usando equações.

4.4 A INVESTIGAÇÃO PROPORCIONANDO SITUAÇÕES A-DIDÁTICAS

> *“As situações adidáticas são as situações de aprendizagem nas quais o professor consegue fazer desaparecer sua vontade, suas intervenções, enquanto informações determinantes do que o aluno fará: São as que funcionam sem a intervenção do professor no nível dos conhecimentos”. (Brousseau, 2001, p. 55).*

As atividades de investigação tiveram como uma das características manter o aluno em uma constante ruptura com a didática tradicional de sala de aula estabelecendo um “jogo” de devolução[8], que extrapolou o contexto escolar.

Nessa categoria abordamos a importância das situações de investigação, como propulsora de situações a-didáticas, devido a mesma comportar diferentes relações entre professor-aluno, professor-pesquisador, aluno e saber. Diferentes no sentido de que o aluno não era obrigado a dar a resposta que o professor ou o pesquisador queriam, suas respostas estavam atreladas à relação que os mesmos estabeleciam com a situações (maior ou menor engajamento com o saber) e à medida que essas relações se modificavam estabeleciam novas concepções e representações sobre a sua própria aprendizagem matemática, que acabou proporcionando por diversas vezes o aparecimento de situações a-didáticas.

Numa das aulas a professora abordou o seguinte problema, já citado nesse trabalho:

“Adivinhando a idade de uma pessoa"

Podemos adivinhar a idade de uma pessoa pedindo-lhe que realize os seguintes

---

[8] Brousseau (1996) afirma que “Não basta comunicar um problema a um aluno, para que esse problema se converta em *seu* problema e ele se sinta o único responsável em resolvê-lo. Também não basta que o aluno aceite essa responsabilidade para que um problema que resolva seja um problema ‘universal’, livre de pressupostos subjetivos”. Devolução é a atividade por intermédio da qual o professor tenta alcançar ambos os resultados.

cálculos:

1º *Escrever um número de dois algarismos.*

2º *Multiplicar o número escrito por dois.*

3º *Somar cinco unidades ao produto obtido.*

4º *Multiplicar esta soma por cinqüenta.*

5º *Somar ao produto o número 1757.*

6º *Subtrair o ano do nascimento.*

O resultado que se obtém é um número de quatro algarismos ***abcd****. Os dois algarismos da direita, que correspondem às dezenas e às unidades, indicam a idade da pessoa e, os dois algarismos da esquerda, que correspondem às centenas e aos milhares, indicam o número que a pessoa havia pensado.*

O aluno Felipe não conseguiu entender a idéia em sala de aula, mesmo depois de ter trabalhado junto com o grupo na resolução ou mesmo no decorrer das validações feitas no quadro pelos alunos ele continuava intrigado, falava que não conseguia entender a idéia.

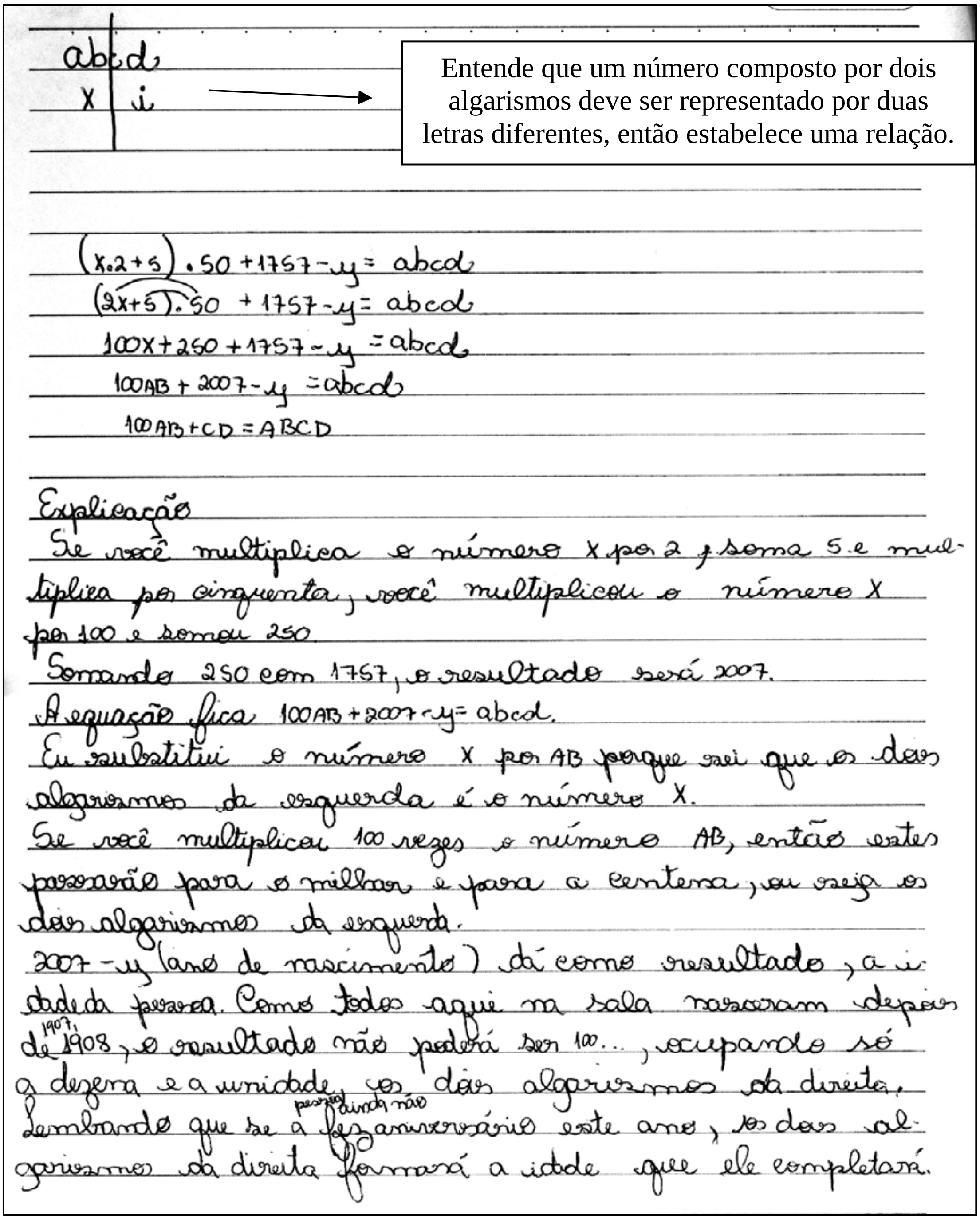
Felipe vai para casa e continua pensando no problema, na aula seguinte entrega o registro abaixo para professora colaboradora e fala:

- *Você pode corrigir para ver se agora minha idéia está certa?"*

Relato da professora-pesquisadora:

- *Felipe me disse que na aula anterior não conseguiu entender a idéia, foi para casa e tentou montar o seu próprio esquema, pois disse que nenhum dos esquemas apresentados fez com que ele entendesse o porquê de aparecer o número pensando e a sua idade.*

Esquema apresentado por Felipe.



ab | cd

x | y

Entende que um número composto por dois algarismos deve ser representado por duas letras diferentes, então estabelece uma relação.

$(x.2+5).50+1757-y=abcd$

$(2x+5).50+1757-y=abcd$

$100x+250+1757-y=abcd$

$100AB+2007-y=abcd$

$100AB+CD=ABCD$

Explicação

Se você multiplica o número x por 2, soma 5 e multiplica por cinquenta, você multiplicou o número x por 100 e somou 250.

Somando 250 com 1757, o resultado será 2007.

A equação fica 100AB+2007−y= abcd.

Eu substitui o número x por AB porque sei que os dois algarismos da esquerda é o número x.

Se você multiplicar 100 vezes o número AB, então estes passarão para o milhar e para a centena, ou seja os dois algarismos da esquerda.

2007 − y (ano de nascimento) dá como resultado a idade da pessoa. Como todos aqui na sala nasceram depois de 1907 ~~1908~~, o resultado não poderá ser 100..., ocupando só a dezena e a unidade, os dois algarismos da direita.

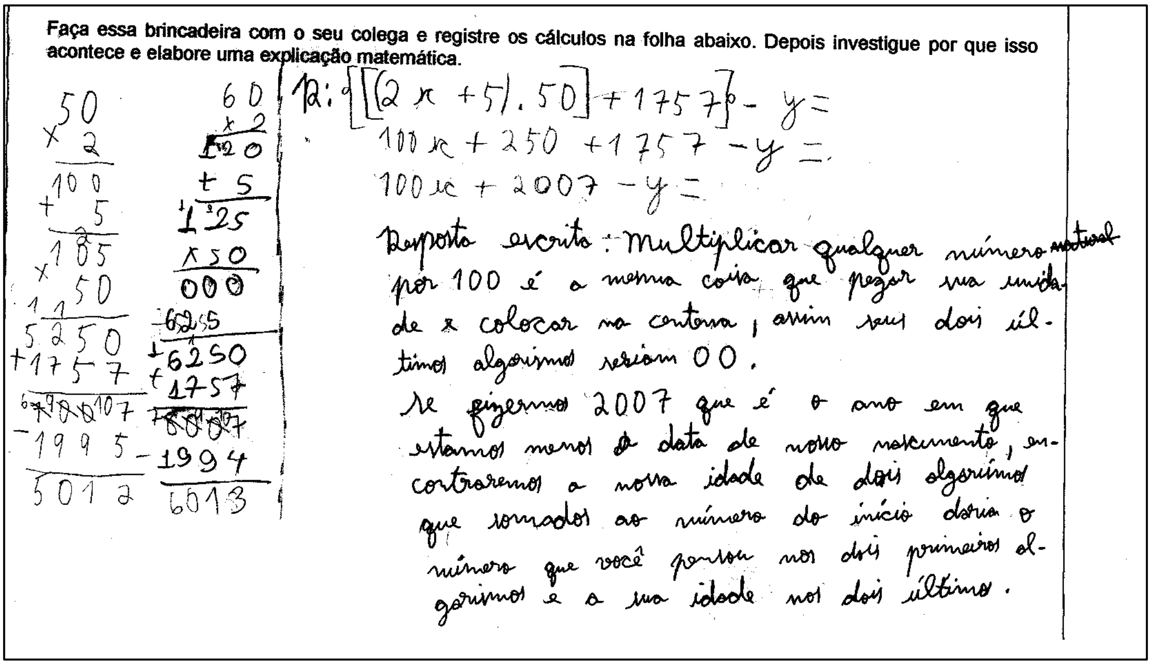
Lembrando que se a pessoa ainda não fez aniversário este ano, os dois algarismos da direita formará a idade que ele completará.

A relação estabelecida ente *ab* = *x* e *cd* = *y* nos deixa clara a idéia de que Felipe estava construindo conceitos algébricos bastante sólidos que posteriormente poderiam ser movidos em outra classe de situações como o de uma equação biquadrada, na qual para se resolvida podemos estabelecer relações entre duas variáveis $x^2 = y$.

Uma entrevista com Felipe no dia posterior deu a idéia do que aconteceu. Felipe fala:

- *Saí daqui chateado, pois não consegui entender. Fui para casa e fiquei pensando, fiz um rascunho (*não preservado*), peguei a resolução apresentada pelo grupo e pensei muito.*

Foi aí que entendi a idéia.


Faça essa brincadeira com o seu colega e registre os cálculos na folha abaixo. Depois investigue por que isso acontece e elabore uma explicação matemática.

50 × 2 = 100; 100 + 5 = 105; 105 × 50 = 5250; 5250 + 1757 = 7007; 7007 − 1995 = 5012

60 × 2 = 120; 120 + 5 = 125; 125 × 50 = 6250; 6250 + 1757 = 8007; 8007 − 1994 = 6013

R: $\{[(2x + 5) . 50] + 1757\} - y =$

$100x + 250 + 1757 - y =$

$100x + 2007 - y =$

Resposta escrita: Multiplicar qualquer número natural por 100 é a mesma coisa que pegar sua unidade e colocar na centena, assim seus dois últimos algarismos seriam 00.
Se fizermos 2007 que é o ano em que estamos menos a data de nosso nascimento, encontraremos a nossa idade de dois algarismos que somados ao número do início dará o número que você pensou nos dois primeiros algarismos e a sua idade nos dois último.

Pudemos perceber no registro apresentado por Felipe, que segundo Pais (2001), o espaço e o tempo da sala de aula representaram apenas uma parcela do seu momento de aprendizagem.

Nas aulas de investigação o caminho para o conhecimento depende fundamentalmente da criação de questões que balizam a investigação. As respostas são decorrências desse processo.

Salientamos da explicação dada por Felipe a parte em que ele escreve *como todos aqui na sala nasceram depois de 1907, 1908, o resultado não poderá ser 100*, que houve um diálogo dele com o objeto de estudo, e que esse diálogo não se restringiu aos objetos escolares e nem mesmo aos científicos, pois houve um interpretação do problema. E acreditamos que quando um aluno constrói um conhecimento por meio de um processo como este, uma vez aprendido, poderá ser extrapolado para outras classes de situações. Cabe-nos aqui argumentar que este processo talvez seja o mais relevante não só para a Matemática mas também para outros campos.

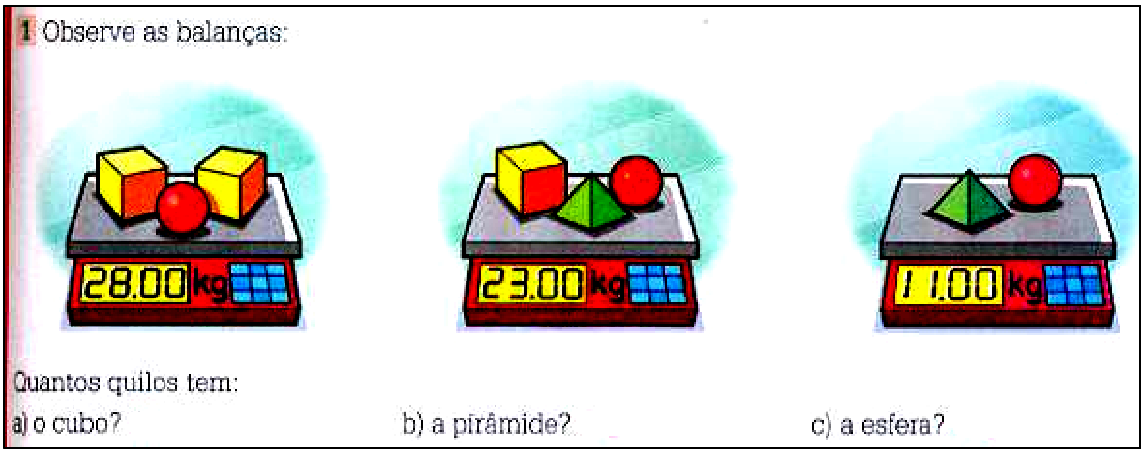
O ensino tradicional da Matemática, em que a compreensão e a aprendizagem são noções praticamente visadas e muitas vezes há um “anúncio” por parte do professor do como fazer, acarreta para o aluno a não ultrapassagem de obstáculos em sua trajetória de aprendiz e a não construção de seu próprio conhecimento, permanecendo numa inércia com relação à construção de conceitos.

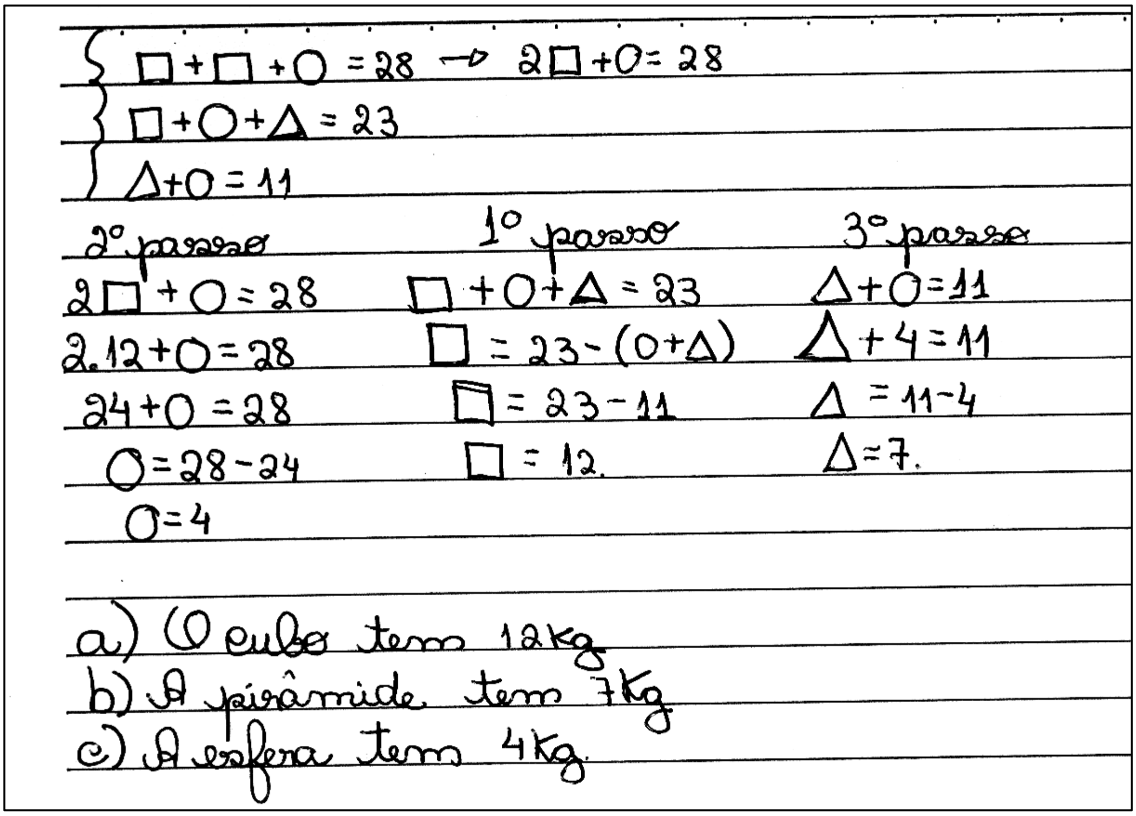
Outro exemplo de situação a-didática foi o de Henrique, que nos procurou fora da aula para entregá-lo. Ele falou que estava fazendo a tarefa, quando ao virar as páginas do livro, encontrou esse problema e começou a tentar resolver.

Resolução do problema do livro.

FIGURA 4 – O problema da balança

(Retirado do livro Pensar & Descobrir, Giovanni e Giovanni Jr, 2005)





Observação: O aluno representou o cubo como quadrado, a pirâmide como triângulo e a esfera como círculo; depois utilizou essa nomenclatura para descrever como resolveu.

Pediu-se ao aluno que explicasse seu raciocínio. Ele falou:

- Primeiro eu montei as três equações, depois percebi que um triângulo mais uma bolinha pesavam 11 kg, então poderia substituir na equação 2 e achar o valor do quadrado, dessa forma passei para o segundo passo(ver registro) e encontrei o valor da bolinha, então resolvi a terceira equação para encontrar o valor do triângulo.

O conceito elaborado nessa situação nos aponta que o aluno quando está motivado procura por si próprio avançar.

Segundo Pais (2001), para uma efetiva aprendizagem do aluno, devem-se considerar as situações em que o aluno continua aprendendo, mesmo que o professor não esteja presente, pois as aulas em si representam apenas uma parcela dos possíveis momentos de aprendizagem, e não o todo.

Desta forma acreditamos que as aulas de investigação despertaram nos alunos motivação para continuar aprendendo mesmo sem a presença do professor, proporcionando assim a ocorrência de situações a-didáticas.

4.5 A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA; UMA APRENDIZAGEM REFLEXIVA DO ALUNO

> *A ação gera conhecimento, isto é, a capacidade de explicar, de lidar, de manejar, de entender a realidade, gera o matema (D'Ambrosio, 2002, p. 23)*

Criar possibilidades de interação entre os alunos e o objeto de estudo foi uma das propostas das aulas de investigação. A professora colaboradora buscou mediar de tal modo que o processo fosse revisto e repensado pelo sujeito, de forma a resultar na reelaboração das ações, dos procedimentos e dos registros.

Essa categoria é uma analise das atividades que permitiram o despertar de uma reflexão dos alunos sobre suas próprias ações, individualmente ou em grupo, para compreendê-las, analisá-las e, por muitas vezes, até criticá-las.

Para mediar essa reflexão, elaboramos dois tipos de estratégia:

1ª estratégia

Problemas que envolvessem diversas formas de resolução. ⇨ Resolução no quadro para confrontar as diversas maneiras de resolver. ⇨ Comparação e reflexão entre as diversas maneiras de resolver um problema.

2º estratégia

Reflexão do sujeito sobre sua própria ação. ⟺ O aluno explicando como havia resolvido.

Aula do dia 11/05/2007

A reflexão sobre as resoluções de um determinado problema.

Nesse dia os alunos levaram para casa alguns problemas para resolver. Na hora da correção dessa tarefa em sala de aula, chamou a atenção a correção do problema 4: E*m um grupo de pessoas, 32% estão entre 30 e 40 anos, 48% entre 41 e 50 anos, e 40 pessoas estão entre 51 e 60 anos. Quantas pessoas fazem parte desse grupo?*

A professora colaboradora perguntou:

- *Quem gostaria de resolver o problema 4 no quadro?*

Gabriela falou que queria ir e resolveu da seguinte maneira.

$$32\% = \frac{32}{100} = 0,32$$

$$48\% = \frac{48}{100} = 0,48$$

$$\begin{aligned}
&0,32x + 0,48x + 40 = x \\
&0,8x + 40 = x \\
&x - 0,8x = 40 \\
&0,2x = 40 \\
&x = 200 \\
&\mathrm{Re}\,sposta: 200\,pessoas
\end{aligned}$$

Professora colaboradora:

- *Muito bem Gabriela, a sua resolução está certa. Todos fizeram dessa maneira?*

Alexandre responde:

- *Eu fiz diferente.*

Professora colaboradora:

- *Você poderia colocar sua resolução no quadro?*

$$\begin{array}{r} 32\% \\ \underline{+48\%} \\ 80\% \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100\% \\ -\underline{80\%} \\ 20\% \end{array}$$

$$40 = 20\%$$

- *Se 20 % é igual a 40 pessoas, isto significa que nesse caso o número de pessoas é sempre o dobro da porcentagem.*

Então:

$$48 \, . \, 2 = 96$$

$$21 \, . \, 2 = 64$$

$$40 + 96 + 64 = 200 \text{ pessoas.}$$

Luiza fala:

- *Eu resolvi de outra maneira, posso fazer no quadro?*

Professora colaboradora:

- *Pode Luiza, depois nós vamos comparar as três respostas.*

$$32\%x + 48\%x + 40 = x$$

$$\frac{32}{100}x + \frac{48}{100}x + 40 = x$$

$$32x + 48x + 4000 = 100x$$

$$80x + 4000 = 100x$$

$$100x - 80x = 4000$$

$$20x = 4000$$

$$x = 200$$

Resposta: O grupo tem 200 pessoas

Na comparação a turma falou que o jeito da Luiza é bem parecido com o da Gabriela.

A professora colaboradora perguntou:

- *Por que é bem parecido?*

Felipe respondeu:

- *Um está na forma decimal, o outro está na forma de fração, mas o modo de fazer é praticamente o mesmo.*

A professora colaboradora respondeu:

- É isso mesmo, uma porcentagem pode ser escrita na forma decimal ou na forma fracionária, e cabe a vocês escolherem a forma que mais lhe agrada para fazer os cálculos. Quais as maneiras que podemos escrever 50 %?

Os alunos foram respondendo:

$$50\% = \frac{50}{100} = 0,50 = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

É interessante como todos querem mostrar sua resolução. Essa é uma das diferenças que notamos nas aulas de investigação, pois como aparecem diversas maneiras de resolver um mesmo problema, todos querem mostrar seu modo de fazer, pois eles são sempre valorizados pela professora colaboradora.

E assim os alunos vão refletindo com os diversos modos de resolução para um mesmo problema e vão construindo e reelaborando idéias sobre um mesmo conceito. Segundo DEWEY (1897, apud Brito, 2006), aprender é reconstruir com base na experiência, reconvertendo a informação num bem intelectual.

Entendemos ser fundamental que o professor possa construir nesse ambiente de investigação situações que julgue potencialmente pedagógicas para propiciar uma efetiva reflexão sobre os conceitos trabalhados. Para tanto, deve propor diversas situações em que o aluno possa expor o seu entendimento e a tradução da idéia tanto da linguagem materna para a Matemática, quanto da linguagem Matemática para materna, observando os símbolos que serão utilizados nessa tradução.

A esse respeito, Machado (1992) e Smole (2000) afirmam que o entendimento da linguagem matemática é parte essencial para a formação de conceitos matemáticos, pois fornece elos entre a organização do pensamento, a linguagem materna e o conhecimento matemático.

Sobre isso Vergnaud (apud Brito, 2006) observa que a "nominalização" é essencial para a transformação de um conceito instrumento em um conceito objeto. Os invariantes que constituem os "esquemas" são instrumentos, mesmo que tenham um nome para designá-los eles ainda não possuem o status de um objeto matemático, e é por um jogo paralelo de comunicação-representação lingüística e simbólica e do funcionamento cognitvo que esses instrumentos se transformam em objetos.

É importante também que o aluno identifique os conceitos matemáticos com que está trabalhando e reflita sobre suas diferentes representações Damm (1999), como no exemplo mostrado anteriormente, no qual passa por diversas representações do número racional.

Como já citamos numa das categorias anteriores, as situações propostas pelo professor devem oportunizar a discussão de diferentes formas de registrar/traduzir uma mesma afirmação. O aluno precisa ter flexibilidade de pensamento e para isso é necessário refletir sobre as situações apresentadas, mas também sobre as possibilidades de resolução; e isso foi uma característica muito marcante do ambiente de investigação.

Tacca (2006) afirma que a estratégia pedagógica não pode ser simplesmente um recurso externo, mas sim algo que movimente o aluno em direção ao conhecimento, numa perspectiva que oriente o sujeito para a relação social, pois só ela dá possibilidade de conhecer o pensar do outro e interferir nele.

Percebemos que após a resolução de cada problema os alunos se interessavam cada vez mais pela socialização das respostas. E o papel da professora colaboradora foi fundamental, incentivando a argumentação, atentando para as justificativas de cada um, evitando as incoerências ou falsas analogias e generalizações. Esse tipo de trabalho não seria possível com aulas tradicionais, que treinam apenas a memorização de conceitos e não provocam a compreensão e nem possibilitam a reflexão dos alunos sobre suas idéias. Segundo Pais (2006, p.28), "fazer Matemática é uma atividade oposta às práticas da reprodução, as quais insistem em conceber a educação escolar como um exercício de contemplação do mundo científico, de onde vem a idéia transmissão de conhecimentos".

Aula do dia 17/05/2007

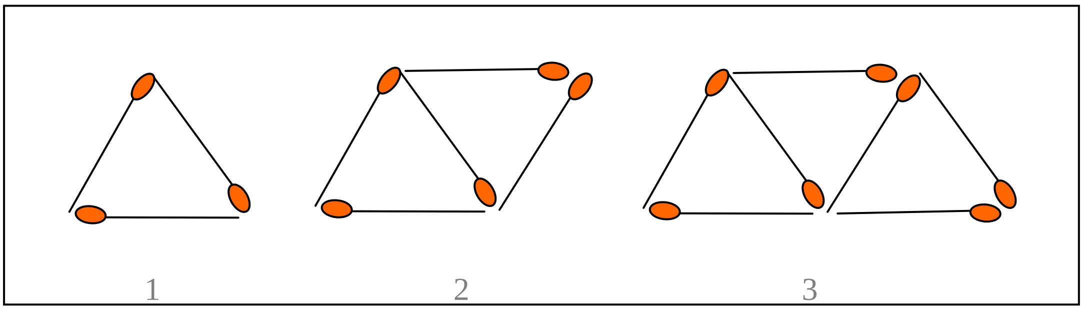
Utilizando a estratégia 2 (O sujeito refletindo sobre a sua própria ação)

Nesse dia, como eram três atividades, a professora passava por cada grupo acompanhando os processos de resolução de cada um. As idéias foram gravadas e anotadas. Uma das propostas foi a seguinte atividade:

Investigando seqüências.

1- Vamos construir uma seqüência de palitos de fósforo e investigá-la. Observe que a figura 1 contém 3 palitos, a figura 2 contém 5 palitos e a figura 3 contém 7 palitos. Seguindo essa seqüência, quantos palitos você teria na figura 10?

FIGURA 5 – Seqüência de palitos



Você consegue montar uma expressão algébrica que dê o número de palitos da figura 10 sem precisar contar os palitos? Vamos tentar!

Esquemas apresentados pelos grupos

Aula dia 17/05/2007

Grupo 1

$$3 + 9 \cdot 2 =$$
$$3 + 18 =$$
$$21$$

$$(x - 1) \cdot 2 + 3 =$$

Relato dos grupos sobre a construção de seus esquemas

Professora pesquisadora:

- *Vocês poderiam me explicar como chegaram a essa resposta?*

Resposta de um aluno do grupo:

- *Peguei o número de palitos da figura 1, depois somei ao resto de figuras que sobrou até a figura que estava trabalhando, multiplicando por 2, por causa de dois palitos a mais em cada figura. A figura 1 mais a figura que eu quero menos 1, vezes 2 que é o número de palitos que eu aumento em cada figura.*

Grupo 2

$F1 = 3$
$F2 = 3+2$
$F3 = 3+2+2$
$F4 = 3+2+2+2$
$F6 = 3+2.5$

$x =$ nº da figura

$Fx = 3+2.y$

y = é a figura anterior

$y = Fx-1$

$Fx = 3+2.Fx-1$

$F4 = 3+2.4-1$	$F4 = 3+2.(4-1)$
$F4 = 3+8-1$	$F4 = 3+2.3$
$F4 = 11-1$	$F4 = 3+6$
$F4 = 10$	$F4 = 9$

Resposta: $F10 = 3+2.(10-1) = 21$

- Primeiro tivemos uma idéia de chamarmos de F1 a figura 1, F2 a figura 2 para ficar mais fácil.

- Então chamamos de x a figura que queremos achar.

- Testamos nossa fórmula para ver se dava certo, então percebemos que faltava alguma coisa, e essa coisa eram uns parênteses.

- Aqui é nossa resposta.

Professora pesquisadora.

- Vocês acham que ela está certa?

Grupo:

- Temos certeza, nós fomos contando os palitos até a figura 10 e testamos cada figura para ver se estava certo.

Grupo 3

A figura 10 tem 21 palitos

$3+2=5+2=7+2=9+2=11+2=13+2=15+2=17+2=19$

$(\ )+2=21$

10 vezes

RESP: para achar o número de palitos de cada figura soma-se 3 mais o número de triângulos subtraído de 1, vezes 2.

$3+(x-1)\cdot 2$

Pedro veio mostrar a solução. (Esse aluno não apresenta nenhum esquema na prova, ele se recusa a fazer qualquer coisa que seja imposta e nesse dia o grupo dele foi o primeiro a terminar a atividade).

Pedi para que explicasse o que havia feito.

Pedro falou:

- *Primeiro fomos fazendo a conta da figura anterior mais 2 e descobrimos que assim sempre precisaríamos da figura anterior. Então percebemos que para achar o número de palitos de cada figura, soma-se 3 mais o número de triângulos subtraído de 1, vezes 2.*

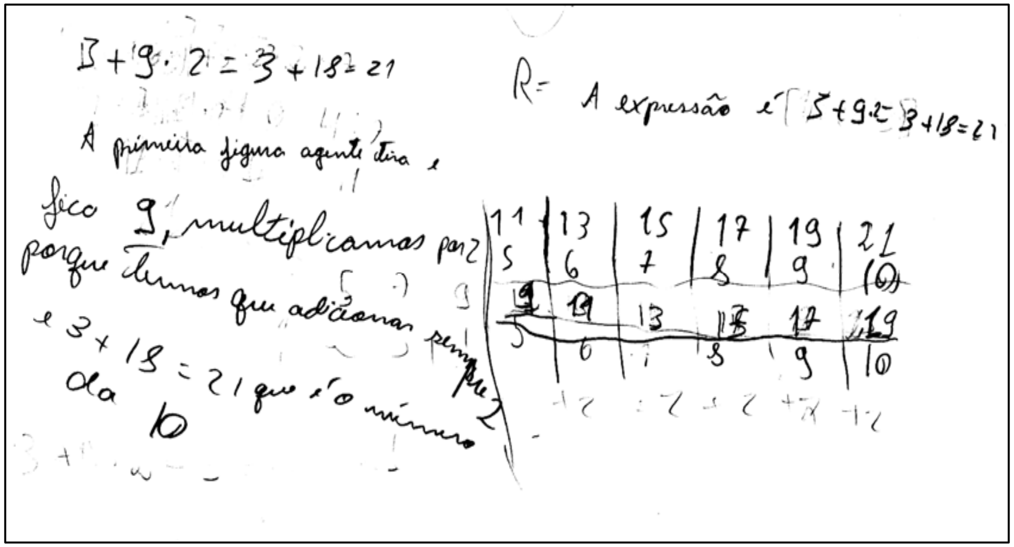
Professora pesquisadora:

- *O número de triângulos?*

Pedro:

- Sim o número de triângulos que tem na figura é igual ao número da figura.

Grupo 4



Explicação do esquema pelo grupo.

- *A primeira figura a gente tira fora porque senão não dá certo aí a gente fica com 9.*

- *Na figura 4 nós descobrimos que tem 9 palitos, mais dois vai dar 11 que é o total de palitos da figura 5. Então a expressão que vai dar a figura 10 é 3 + 9 x 2= 21.*

Pergunta da pesquisadora:

- *Mas 9 não é o total da figura 4?*

Resposta do grupo:

- *Mas você tem que pegar o total da figura antes de acrescentar o 2. Nós testamos com a figura 4, é só pegar 3 + 3x2=9.*

Mesmo com algumas mediações esse grupo não conseguiu generalizar uma expressão. Percebeu-se que eles precisariam de mais tempo para avançar.

O fato do grupo 4 não ter conseguido concluir corretamente o exercício, mesmo com algumas mediações da professora, revela que este problema estava fora da Zona de Desenvolvimento Proximal desse grupo, e que eles precisariam de um tempo maior para avançar. Considerou-se que num ambiente investigativo é necessária uma perspicácia do professor em perceber e respeitar o momento de aprendizagem de cada sujeito envolvido.

Depois da discussão das várias idéias debatidas pelo grupo, a professora colaboradora perguntou:

- *Todos os grupos colocaram esse menos um, mas vocês já pararam para pensar o porquê desse menos um?*

Luísa falou:

- *Tem que ser um outro número, não dá certo na fórmula.*

Professora colaboradora insiste:

- *Mas tem que ter um porquê. Olhem para o desenho dos palitos.*

Alexandre fala:

- *É porque dois triângulos usam um mesmo lado.*

Essa idéia apresentada pelo Alexandre e a colocação de Pedro *"Sim, o número de triângulos que tem na figura é igual ao número da figura"*, revelam o grau de percepção sobre o objeto de estudo, observando detalhes que numa aula tradicional fatalmente passariam despercebidos.

Na experiência de relatar suas próprias idéias algumas lições foram tiradas. O aluno teve a oportunidade de refletir sobre seu processo de resolução, revelando para o professor seus conhecimentos e capacidades muitas vezes ocultas no registro escrito.

Muniz (2006) afirma que as estruturas apresentadas, via esquemas mentais (que estão ocultas no registro) são qualitativamente mais ricas e mais complexas daquelas ensinadas e cobradas pela escola e que os professores têm dificuldades na decodificação desses esquemas.

O pensar sobre suas próprias idéias, o refletir sobre o seu registro, o organizar e elaborar uma síntese para poder comunicar o que havia feito, nos fez perceber o crescimento do sujeito no entendimento do conceito.

> A conceitualização é assim considerada como um processo que se desenvolve e evolui e que ainda por cima não chega necessariamente a um conhecimento objetivo, no sentido em que o sujeito pode recuperar elementos que não são pertinentes à prática concreta e situacional ou estabelecer relações cuja validade permanece limitada a uma situação. (Brito, 2006, pág.60)

Rever o processo de resolução contemplou, no ambiente de investigação, a reflexão do sujeito sobre seu própria ação e a análise das idéias apresentadas pelos alunos pode indicar pontos de avanço e de bloqueio dos alunos. Talvez seja esse um dos caminhos para a consolidação de uma cultura avaliativa reflexiva, investigativa e questionadora rumo à construção de uma nova pedagogia. Segundo Jahn, Healy e Pitta (2007), as visões dos professores, sobre as provas, são limitadas por suas formações iniciais que enfatizaram apenas avaliações formais. Mudar a forma de avaliar, buscando entender o fazer do aluno e observar suas ações sobre o objeto permitem ao professor uma visão melhor das habilidades que o aluno está desenvolvendo, bem como avaliar os processos que está usando, podendo assim, fornecer ao professor mais detalhes sobre a aprendizagem do aluno.

Percebemos que o sujeito que elabora um processo de síntese para poder explicar sua resolução já não é o mesmo sujeito de antes, pois ele já passou por um processo de produção de um registro escrito e está fazendo um repensar da sua própria ação, o que acreditamos ir além da cognição, ou seja o aluno entra num processo de metacognição[9].

Portanto, o ambiente investigativo nos possibilitou compreender a necessidade de oportunizar em sala de aula uma prática que possibilite o entendimento, no qual o sujeito passe a assumir um papel autoconsciente em relação a suas ações.

4.6 A CONSTRUÇÃO DE UM AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO COMO UM PROCESSO DE REFLEXÃO CRÍTICA E FORMAÇÃO: CONVERSANDO COM A COLABORADORA.

O trabalho teve início no final de fevereiro de 2007, quando passou-se a ter encontros semanais com os dois professores, para colocá-los a par da pesquisa. Eles se mostraram muito interessados.

Num de nossos encontros, eles falaram sobre a necessidade que sentiam em mudar sua prática de sala de aula, mas que acabavam cedendo a uma acomodação. Comentaram, também, a falta de motivação dos alunos, em aulas expositivas e que os adolescentes são muito curiosos. pois querem ser desafiados. Disseram, ainda, que os alunos não estão aceitando mais que o professor explique e depois mande repetir inúmeros exercícios iguais.

---

[9] Diz respeito, entre outras coisas, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos. De acordo com Weinert (1987) apud Ribeiro (2003), as metacognições podem ser consideradas cognições de segunda ordem: pensamentos sobre pensamentos, conhecimentos sobre conhecimentos, reflexões sobre ações.

Por isso os professores gostaram da nossa proposta, pois veio ao encontro de seus anseios, mas confessaram que precisavam de ajuda para saber como trabalhar dessa maneira.

Nos encontros posteriores, discutimos sobre uma certa insegurança que os professores apresentam devido às características das aulas de investigação, já que não é possível prever e planejar todas as variáveis. Sendo assim, o professor sente seu papel vulnerável, junto à dúvida, ao erro e à curiosidade por parte dos alunos.

Voltamos então a pensar como seria esse trabalho de investigação e realizamos várias leituras.

4.6.1 Nosso primeiro encontro para discutir o trabalho (06/03)

Nesse encontro discutimos por qual tema iríamos iniciar as aulas de investigações e decidimos começar pelas equações. Equações é um dos ramos da Matemática que, a nosso ver, possibilita inúmeras utilizações e diferentes caminhos para se encontrar uma solução.

Matemática é uma ciência muito abrangente. Obviamente, há outras áreas além das equações. E observe que, mesmo dentro dessas, há várias linhas diferentes. Algumas delas muito distanciadas das aplicações dos alunos de 7º ano.

Embora a palavra *equação* seja relativamente recente na linguagem matemática – surgiu possivelmente no séc. XVII - o conceito de equação tem vindo ao longo dos tempos e está presente em grande parte dos problemas propostos.

Para a resolução destes problemas houve sempre um esforço, no sentido de procurar esquematizá-los, de forma a obter mais facilmente soluções.

E é isto que queríamos observar em nossas aulas, os esquemas mentais elaborados pelos alunos para resolver as atividades propostas, os diferentes caminhos que cada um percorreria e que estudos se fariam necessários à pesquisadora e à colaboradora no transcorrer desse processo e no planejamento das aulas.

4.6.2 Discutindo melhor a idéia da investigação (13/03)

Decidimos que a idéia de investigação matemática seria uma tentativa de rompimento com o ensino tradicional de Matemática, o que implicaria na proposição de uma ação didática que possibilitasse ao aluno a elaboração de seus conhecimentos como uma solução subjetiva de um problema significativo, respondendo às formulações e exigências do contexto no qual está inserido e não apenas às expectativas do professor. Isto só poderia ser feito colocando o sujeito em ação (Vergnaud, 1994), por meio de tarefas investigativas, outras vezes por tarefas exploratórias ou pela resolução de situações-problema.

Julgamos importante colocar o sujeito em ação, pois acreditamos que por meio da observação desse processo de resolução do aluno, o professor pode recolher muitos dados sobre suas atitudes, sobre como mobiliza os conhecimentos matemáticos formais e informais. Para isso nos apoiaremos na Teoria Cognitivista de Vergnaud (1994).

Nesta perspectiva teórica e epistemológica, o professor, ao observar, não tem de se limitar a uma atitude passiva, pelo contrário, pode fazer perguntas aos alunos de modo a perceber melhor o que eles estão fazendo e a forma como estão pensando.

Com esse processo de aprendizagem/ensino de Matemática esperávamos possibilitar ao aluno a compreensão dos significados, o estabelecimento de relações com experiências anteriormente vivenciadas, a formulação de hipóteses, incentivando-o a aprender mais, e a perceber o relacionamento entre objetos, noções e conceitos.

Entendemos que o verdadeiro papel do professor seria o de percorrer com os alunos os caminhos do imprevisto que os levassem a conscientização sobre a responsabilidade de cada um no seu processo de aprendizagem, descobrindo estratégias, compartilhando as mesmas e fazendo conjecturas até tentar prová-las ou refutá-las. Percebemos também que deveríamos aproveitar as dúvidas dos alunos para juntos estudarmos uma solução, lembrando que isso não colocaria em risco o papel de professor.

Acrescentamos que a organização do trabalho pedagógico, sob essa ótica de investigação, pode criar um ambiente repleto de descobertas e de informações em que o grupo, mediado pelo professor e por inúmeros materiais, interpreta uma realidade. Vygotsky (1998) deu a esse espaço o nome de “comunidade de investigação”.

Nossa intenção será formar uma pequena comunidade de investigação colocando uma proposta em sala de aula que estimule a cooperação e ajude o professor a sair da solidão, pois assim ele passa a compartilhar tarefas, a co-produzir estratégias pedagógicas e a aprender com seus alunos. Ou seja, ele deixa de ocupar seu lugar centralizador e passa a ter inúmeros lugares e atribuições no grupo. A ele cabe criar um ambiente propício à aprendizagem, em que as curiosidades, as dúvidas e as hipóteses sejam realmente executadas, validadas e operacionalizadas para que realmente ocorra a aprendizagem. Isso permite ao professor assumir o papel de mediador.

4.6.3 Inquietações sobre as primeiras aulas (20/03)

A fase inicial era, pensamos, a parte mais crítica, pois sabíamos que os alunos não tinham experiência com esse tipo de investigação.

Nesse encontro a professora colaboradora, após uma pausa, fez algumas indagações que revelaram uma certa insegurança:

- *Será que eles iriam se empolgar na realização da tarefa? Será que todos iriam entender a proposta?*

4.6.4 Planejamento da 1ª aula (10/04)

Partimos da idéia de Muniz (2007) sobre conhecimentos prévios, em que ele faz os seguintes questionamentos: *sabemos do que se trata conhecimento prévio? Mediamos a partir de que conhecimento do nosso aluno?* A primeira idéia foi buscar algo que nos desse indícios de quais conhecimentos prévios nossos alunos tinham a respeito da Álgebra, mais precisamente, nessa aula, sobre equações.

Para esse primeiro encontro, sentiu-se a necessidade de buscar qual era o conceito de Álgebra e encontrou-se a seguinte idéia definida por Lins e Gimenez (1997, p.89), que falam que não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente, mas somente um consenso de quais são as coisas da Álgebra: equações, cálculo literal, funções. Mesmo nesse sentido ainda ocorrem divergências.

Observamos a definição de Álgebra apresentada por estes mesmos autores:

> A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a Álgebra.[...] A Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade. (Lins e Gimenez ,1997, P.137).

Juntando a idéia do que seria conhecimento prévio e observando a definição de Álgebra, pensamos: Qual significado uma equação teria para alunos de 7º ano?

Atualmente, ao escrever e resolver, quase automaticamente, uma equação do 1º grau, não se pensa nos séculos de estudos que foram necessários para que se chegasse a esse ponto. A linguagem simbólica da Álgebra é um grande simplificador de cálculos. É uma pena que às vezes os alunos a utilizem sem perceberem o que estão fazendo.

Tentar perceber nos alunos como a linguagem algébrica é construída, como é aprendida, ou seja, por meio de investigações queremos saber como é o nascimento natural e significativo de uma língua algébrica.

Pretendemos dar novos olhares a aprendizagem/ensino da Álgebra lançando-se em um caminho de descobertas em todos os espaços que ela possa estar presente. Nesse sentido, questionamos o “diálogo” com a Álgebra tendo apenas essa característica letrista, por meio de fórmulas e definições e modelos. Partimos da idéia de que o conhecimento é parte de nossas ações, de nosso olhar, de nossas experiências e de nossa observação. Logo, não poderemos falar de Álgebra para alguém, devemos deixar que os sujeitos sintam, vejam, observem, deduzam, validem e sistematizem a Álgebra.

Acreditamos que o domínio de uma língua implica saber escrever, ler, compreender oralmente, falar.

Em geral, há ênfase em ensinar como escrever um problema em linguagem algébrica, mas não há ênfase em desenvolver as demais competências, portanto pretendemos ao mesmo tempo colocar os alunos em contato com situações significativas, que os levem a entender a álgebra com uma nova linguagem, que tem seus modos próprios de registro e expressão, às vezes exigindo sua ação em situações-problema e, em outras, em situações concretas. Assim, em vez de considerar a álgebra como um código simbólico indecifrável, vamos pensá-la como uma língua que nos diz coisas, é traduzível, expressa idéias.

4.6.5 Encontro após as primeiras aulas (24/04)

O relato da colaboradora foi de que nas primeiras aulas a maior dificuldade foi a de conseguir entender as novas descobertas, disponibilizando-as para todos como conhecimento, no momento da validação (Brousseau, 1996). Essas ações de tomada de consciência e de institucionalização do saber contribuíram, segundo ela, na transição dos conceitos espontâneos para científicos.

Notamos também a utilização de várias ferramentas que haviam conseguido ao longo desse processo, como o conceito, embora não explícito, de operação inversa, operações com números inteiros. Notamos que no início das aulas muitos alunos tinham dificuldade nessas operações, mas com a mediação dos colegas e da facilitadora isso foi sendo assimilado.

Ainda era uma fase de angústia para a pesquisadora e a colaboradora, pois percebemos que no início os alunos não estavam acostumados a esse tipo de aula e precisávamos o tempo todo incentivá-los a buscar novas tentativas. Observamos também que alguns tinham a Matemática como uma repetição de etapas que antes haviam sido colocadas pelo professor passo a passo no quadro.

Um comentário da professora colaboradora:

- *Estamos em duas na sala de aula e às vezes parece que não damos conta de atender a todos os grupos, e como eu faria se estivesse sozinha?*

Foi então que se percebeu o quanto não é fácil começar um trabalho diferente, por isso muitos professores desistem ou nem começam, acabam se acomodando e com isso os alunos saem perdendo, pois acabam por apenas repetir procedimentos sem nada aprender.

Diante das dificuldades encontradas, decidimos voltar ao nosso referencial teórico a fim de buscar ajuda para o planejamento das nossas próximas aulas.

A professora colaboradora estava em conflito quanto a essa aula investigativa. Muitas vezes comentava que, em determinados momentos, não sabia muito bem como agir.

Buscamos ajuda em Vygotsky (1998) sobre suas concepções a respeito do funcionamento do cérebro humano quando afirma que as funções psicológicas superiores são construídas ao longo da história social do homem, na sua relação com o mundo, mediadas pelos instrumentos e símbolos desenvolvidos culturalmente. O ser humano, por sua vez, cria fórmulas e formas de ação que o diferencia dos outros animais. Para ele, aprender é estar disposto a mergulhar num contexto social rico em cultura e apropriar-se dela numa relação mediada, formando conceitos cada vez mais aprimorados, aumentando assim sua rede conceitual.

Isso nos deixou claro que se pretendíamos formar conceitos estávamos no caminho certo. Discutimos como foi nossa aula anterior, quais conceitos apareceram, como poderíamos fazer para planejar a aula seguinte. E resolvemos fazer mais um encontro para discutir melhor o assunto, antes de delineá-la, sentimos a necessidade de realizar outras leituras sobre o tema, para poder mediar o trabalho dos alunos com maior segurança.

4.6.6 Desenvolvimento de concepções matemáticas em sala de aula (02/05)

Nesse encontro, fizemos pesquisas em diversos livros didáticos, Internet, teses e dissertações defendidas que tratavam do conteúdo equações para prepararmos as aulas.

Comentamos também que começávamos a ver claramente que, quando os alunos se lançam na compreensão de um novo objeto, o papel do professor como mediador de descobertas era o de realmente fazer com que os alunos fossem chamados a falar, a expressar, a opinar e a emitir conclusões para chegar a institucionalizar os saberes, que a partir daí então, poderiam ser novas ferramentas que usariam em novos esquemas, dessa forma pudemos ver claramente que a nossa primeira categoria de análise seria essa (O convite a falar, a expressar e a opinar).

Não pudemos deixar de falar nesse encontro como Vygotsky (1998) analisou esse tipo de questão.

Ele acreditava que o aprendizado escolar poderia acrescentar novos elementos ao aprendizado das crianças e separou os em dois níveis:

- Real: as competências que as crianças já dominam.
- Potencial: competências que elas podem desenvolver com a mediação de outras pessoas (que poderá ser um adulto ou outra criança).

Este espaço ele denominou zona de desenvolvimento proximal.

Neste mesmo encontro, comentamos também como os conceitos vão se formando, observando que os alunos passavam por um agrupamento de operações intelectuais, as quais exigiam uma atenção deliberada, memória lógica, abstração e capacidade para comparar e diferenciar.

Nesse encontro, discutimos como esses momentos são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Desta forma, notamos o quanto as tentativas de professores de passar conceitos diretos são infrutíferas. Quando o professor tenta assim proceder, acaba caindo numa repetição que de certa maneira simula um falso aprendizado, pois o aluno e o professor equivocam-se achando que, por estar conseguindo realizar aquela repetição, o aluno aprendeu alguma coisa.

O ambiente tem que desafiar, exigir e estimular o aluno a buscar sempre mais, tem que ser um jogo envolvente, no qual haja uma relação de prazer.

E era isso que nós, professora e pesquisadora, estávamos vivenciando e aprendendo com eles, durante as aulas de investigação. Nessas aulas tivemos a satisfação de observar o quanto é importante fazer com que o sujeito utilize suas funções psicológicas superiores, para se desenvolver cada vez mais.

Discutimos nesse nosso encontro que para uma verdadeira situação de aprendizagem de conhecimento são necessários desequilíbrios e conflitos cognitivos.

O mediador deve procurar modificar esses conhecimentos espontâneos para aproximá-los dos conhecimentos científicos que se pretende ensinar, baseando-se em uma estrutura construtivista e interacionista do conhecimento. E para que os conhecimentos em ação se modifiquem, é necessário colocá-los à prova em diversas situações que os contrariem.

Nesse encontro, percebemos que para o aluno poder mobilizar essas estruturas superiores é necessário que o professor saiba colocar situações-problema que suscitem isso, pois foi discutida a idéia de que alguns problemas apresentados aos alunos eram resolvidos por Aritmética, não necessitando mover nenhuma estrutura baseada na linguagem algébrica, foi então que tivemos que encontrar outros problemas que necessitassem de maior elaboração para que talvez eles começassem a utilizar a linguagem algébrica.

Notamos que a fonte dos progressos dos conhecimentos encontra-se justamente nos desequilíbrios e conflitos que os sujeitos sentem e nas suas próprias contradições. E é no esforço de tentar resolver as situações-problema que são produzidos novos esquemas que permitem superar suas dificuldades anteriores.

O que estávamos podendo observar em nossa pesquisa é que os alunos aprendem os conceitos científicos, modificando suas teorias próprias já existentes por outras melhores, mais próximas daquelas construídas pelos cientistas.

Não havia como negar a subjetividade e particularidade de cada aluno na atividade de elaboração dos conceitos. A construção da objetividade, ou seja, do conhecimento científico, no espaço de investigação em sala de aula, passa pela descoberta de novas idéias e exige uma etapa de conjecturas e muitas vezes de novos desafios que poderão ser propostos pelo mediador para chegar à validação de um conceito. É quando se percebe que a atividade de investigação não consiste somente na solução de problemas, mas também na descoberta de novos caminhos para chegar a essa solução e acabamos por delinear nossa segunda categoria. (A descoberta de novos caminhos para chegar a uma solução).

4.6.7 A decepção com a primeira avaliação (08/05)

O Colégio faz avaliações mensais e bimestrais marcadas pela coordenação. E nessa avaliação vários alunos não foram bem como esperávamos, pois nas aulas eles pareciam estar entendendo tudo. De posse dessa avaliação discutimos cada questão e notamos que ainda não estava no tempo certo de eles realizarem uma avaliação solitária, pois nas aulas de investigação o trabalho é feito em grupo e muitas vezes o que tem que ser avaliado são as estratégias, as idéias colocadas por cada um. Mas uma pergunta ficou: *será que no final, eles conseguirão resolver sozinhos, ou sempre precisarão estar em grupo?*

4.6.8 Os obstáculos epistemológicos (05/05)

As professoras marcaram um outro encontro para discutir a questão dos obstáculos epistemológicos encontrados como a questão das equações que envolviam parênteses.

Bachelard (apud Pais, 2001) analisa os obstáculos epistemológicos, destacando que a Matemática não formal, aquela que precede à tentativa de formalização, não se desenvolve segundo um processo de acréscimos, como se os teoremas pudessem facilmente ser encaixados, já no momento de elaboração do saber. Uma vez que a teoria já se encontra formalizada, não há mais como transparecer as refutações e provas a que foram submetidas até chegar ao ponto final. Porém, é claro que durante o processo isso ocorreu, pois o pesquisador também vivencia um processo de melhoria das conjecturas e proposições que são submetidas a um refinado crivo das provas e refutações.

Na prática, o que pudemos observar é que os exercícios evoluíam em função das refutações levantadas pelos alunos, e novos esquemas apareciam (comentário da professora colaboradora):

- Ao contrário do que eu imaginava, esses obstáculos estão contribuindo para a formação dos conceitos, embora algumas vezes eu tenha que ir dando idéias até que eles cheguem a formar o conceito. Foi o caso das equações do tipo 5 (x+5) = 3 + 2 (x+1). Qual o significado desses parênteses para os alunos? Se esse significado não for discutido amplamente em sala de aula pode se tornar um obstáculo na resolução da equação?

Colocamos para a colaboradora que na Matemática os obstáculos interferem com maior intensidade na gênese das primeiras idéias e isso normalmente não aparece na redação final, pois ao elaborar a etapa de síntese o matemático acaba filtrando as dificuldades encontradas, ou seja, na história da Matemática muitos dos obstáculos encontrados pelos matemáticos foram filtrados pelos mesmos, a não ser em casos que ficaram em aberto e foram resolvidos por outros matemáticos. Permitir que os alunos reflitam sobre os obstáculos, identificando a evolução dos mesmos ao longo da História, pode ser uma didática mais interessante no fazer Matemática em sala de aula.

Durante a aprendizagem em sala de aula, ao se iniciar um conceito inovador, pode ocorrer uma revolução interna entre o equilíbrio aparente do velho conhecimento e o saber que se encontra em elaboração. Para que realmente ocorra uma aprendizagem, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, o que pode ser complicado, pois o conhecimento antigo, na maioria dos casos, é dominante e age como uma força contrária à realização de uma próxima aprendizagem.

4.6.9 Postura e diretrizes didático-pedagógicas (22/06)

Avançando na direção do entendimento da idealidade dos objetos, eu e a professora colaboradora elegíamos atividades que possibilitassem reunir a multiplicidade dada na percepção. Estas atividades deviam privilegiar a discussão entre as várias exposições dos colegas. Ouvindo uns aos outros, eles verificavam como cada um fazia e falava, procurando interpretar, buscando convergências com a sua resolução.

Assim, o nosso fazer pedagógico passou a trabalhar com o *eu* e com o *outro* nos alunos.

E esse foi um momento a partir do qual passamos a organizar as experiências empíricas, os conceitos formulados pelos alunos tanto verbalizados como colocados no papel, para darmos início à análise dos dados.

4.6.10 A resposta a nossa decepção (21/06)

Foi realizada a prova bimestral, e desta vez os alunos foram muito bem, mas muito bem mesmo o que nos deixou muito empolgados.

Comentário da professora colaboradora:

- *Eles obtiveram um crescimento incrível, alunos que não costumavam ir bem na prova agora foram, isso para mim foi muito bom, confesso que no início não estava acreditando que isso pudesse dar tão certo.*

Foi então que se percebeu que a formação continuada do professor pode ser feita de várias maneiras e uma delas é essa, propondo diferentes atividades em sala de aula que venham a despertar o desejo para se aprofundar tanto em teoria como em conteúdos matemáticos.

Essa pesquisa foi uma fagulha que provocou na colaboradora vontade de continuar esse trabalho, pois vieram dela iniciativas, durante a pesquisa, de adotar essa mesma idéia para as aulas do 6º ano em que ela também trabalha.

4.6.11 Uma reflexão crítica sobre o trabalho realizado

Percebemos que se a preparação das aulas de investigação constituiu um momento muito importante não menos importante é a reflexão crítica sobre o trabalho realizado. A cada encontro com a professora colaboradora, ressaltamos que, apoiados na idéia de Fonseca, Brunheira e Ponte (2003), eram necessários dois tipos de avaliação:

- uma avaliação sobre a forma como decorreram as aulas e que conduzia a questões como: A tarefa foi adequada em relação aos objetivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos em grupo ajudou na constituição do ambiente investigativo? O tempo dado aos alunos para resolver as questões foi suficiente? Que dificuldades foram sentidas pelos alunos durante a realização da tarefa? Que dificuldade sentiu a professora na hora da validação? A professora estava conseguindo sistematizar os conceitos ao final da validação de forma que os alunos não entendessem que alguns dos teoremas criados em ato não poderiam ser validados para outra classe de situações?
- era necessária também uma avaliação sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos: de que forma reagiram os alunos à tarefa? Quais as maiores dificuldades encontradas pelos alunos (era na hora de resolver os problemas ou na hora de apresentar sua solução aos colegas e ao professor)? Como estava se desenvolvendo a sua capacidade de expressar idéias matemáticas (oralmente ou por escrito)? Estavam realmente construindo conceitos?

Esta reflexão tornou-se importante por várias vezes, pois por um lado, ela nos informava sobre o trabalho futuro, sugerindo o reforço, manutenção ou diminuição deste tipo de trabalho, apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização e também nos alertava para obstáculos ou condições facilitadoras. Por outro lado, a reflexão constituía-se num momento de aprendizagem dos professores atuantes no processo, pois possibilitavam um desempenho melhor do seu papel, atendendo também a um maior conhecimento que foi se construindo sobre os alunos, sobre as atividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

É nosso entendimento que a proposta de aulas de investigação não avançaria muito se o professor não tivesse uma clara visão do papel exercido por ele para favorecer o curso do desenvolvimento cognitivo do aluno, a conscientização da importância da atividade oral; o deixar o aluno encontrar suas próprias maneiras de resolver, evitando a apresentação de modelos, o aprender a interpretar as produções dos alunos, que seriam discutida em grupo; a necessidade da sistematização dos conceitos na hora da validação, por meio do estabelecimento das relações entre o registro realizado pelo aluno e o conhecimento científico principalmente .

Dessa forma, o que almejamos nas aulas de investigação é valorizar uma prática pedagógica que fortaleça a autonomia intelectual do professor, capacitando-o para compreender e assumir a relação pedagógica em sua plenitude, como um mediador seguro do processo de construção do conhecimento, capaz de orientar a busca de respostas e soluções.

Tal perfil só foi se consolidando aos poucos na professora colaboradora, a partir de várias discussões sobre as práticas de sala de aula, relacionadas às teorias que as inspiram, aprofundando-as a partir de posturas teóricas, ou muitas vezes pelos resultados satisfatórios encontrados na própria sala de aula como logo no início quando percebemos o quanto os alunos se envolveram e participaram das aulas.

Logo nas primeiras aulas já começamos a sentir o quanto o professor tem que pensar e refletir sobre suas ações num ambiente investigativo, uma vez que nas primeiras aulas a professora colaboradora sentia dificuldades nesse processo e montava algumas idéias para a validação. Veja o exemplo a seguir, em que ela planeja como fazer a validação com os alunos e suas anotações:

Questões para finalizar:

Perguntar para os grupos o que eles entendem por cada expressão (eu estou achando que eles vão responder o valor de x, por exemplo, na primeira que o x vale 24, pois 24+2 é igual a 26).

"Mas como podemos dizer isso (x+2=26), aqui não está escrito que 24 + 2 = 26?" (esperando que eles percebam que *um número somado com 2 é igual a 26*, e que esse número é 24)

Será que sempre podemos encontrar o valor desconhecido?

Como fazemos isso? (apenas anotar as respostas, não contar como se faz e nem se está certo ou errado)

A investigação matemática em sala de aula impôs uma grande reflexão sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos, isto é, obrigou-nos a pensar nos esquemas de ação postos em prática pela inteligência dos sujeitos para a apropriação do conhecimento matemático, porque só compreendendo isso poderíamos fazer as mediações necessárias.

Por muitas vezes víamos a professora colaboradora organizando roteiros para suas aulas, principalmente quando decidimos dar os problemas para os alunos, mas deixá-los resolver da forma que quisessem.

Anotações da professora-colaboradora.

- observar se aparecem nas resoluções dos problemas alguns indícios de linguagem algébrica.
- no caso do problema 1, pedir para que eles reelaborem o problema com essa mesma idéia para que os outros grupos descubram a idade da pessoa escolhida.
- observar a linguagem que usam entre eles.
- fazer a validação no final.

Freqüentemente percebemos o conflito da professora colaboradora quanto à aula. Ela comentava que, em determinados momentos, não sabia muito bem como agir. As múltiplas possibilidades de reflexão efetivadas pelas professoras pesquisadora e colaboradora durante o planejamento, a execução e a análise das atividades da pesquisa, foram, aos poucos, modificando a conduta e o pensamento delas. Começamos a vivenciar o surgimento de uma professora mais reflexiva de sua prática. Passamos a entender que a formação do professor é um conjunto, não separado da teoria e prática e concluímos que um olhar mútuo de respeito entre ambas poderia contribuir para uma melhor atividade docente.

Conforme afirma Vasques (1977)

> "Entre a teoria e a atividade prática transformadora se insere um trabalho de educação das consciências, de organização dos meios materiais e planos concretos de ação: tudo isso como passagem indispensável para desenvolver ações reais, efetivas."(p.207)

Avançando em direção às nossas pesquisas e no entendimento dos esquemas produzidos pelos alunos, o nosso trabalho passou a eleger atividades que cada vez mais possibilitavam reunir a multiplicidade de resoluções. Exigia-se assim da professora colaboradora buscar interpretar o sentir do aluno, seu fazer Matemática, suas falas, etc..

Assim, esse fazer pedagógico do professor foi contribuindo cada vez mais, como um tipo de auto-formação embasada nos estudos realizados durante o planejamento e na prática em sala de aula.

Para Zeichner e Liston (1987a & b), a educação dos professores deve levá-los a analisar sua prática, a tomar decisões e a dar a seus alunos a oportunidade de fazerem o mesmo. Dessa forma, estaremos fazendo uma Educação alicerçada em uma prática social. O que vai além do que se refere Schön (1987) quando trata, em especial, de dois tipos de reflexão: a reflexão-na-ação e a reflexão-sobre-a-ação. E nos aponta para autores como Pimenta (2000), que afirma que para uma verdadeira Educação é necessário ainda mais do trabalho do professor. São estratégias, procedimentos, modos de fazer, além de uma sólida cultura geral, a qual a autora chama de professor-crítico-reflexivo.

Concordamos com a perspectiva de que o ambiente investigativo pode contribuir para a formação de professores se estes estiverem alicerçados teoricamente e dispostos a investigar e refletir não só sobre a prática do aluno, mas também sobre sua própria prática num movimento de real inserção profissional.

5. A CONSTITUIÇÃO DO AMBIENTE INVESTIGATIVO E O PAPEL DA INVESTIGAÇÃO.

> *"O único homem educado é o homem que aprendeu a aprender; que aprendeu a adaptar-se e mudar, que percebe que nenhum conhecimento é seguro e que só o processo de buscar conhecimento dá alguma base para a segurança. Só de um contexto interpessoal no qual a aprendizagem seja facilitada surgirão verdadeiros estudantes, reais aprendizes, cientistas e intelectuais criativos e praticantes, indivíduos da espécie capazes de viver em um equilíbrio delicado, mas sempre mutável, entre o que é atualmente conhecido e os fluentes, móveis e mutáveis problemas e fatos do futuro." (Milhollan & Forisha, 1978, p. 176-177).*

Esse trabalho de pesquisa partiu da idéia de Ponte (2003) que afirma que realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos soluciona-las, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Fundamentado nessa idéia, o trabalho propôs a investigação realizada em grupos de alunos, convidados a não só resolver um problema, mas também a registrarem que conclusões tiraram na realização dessa tarefa e que processos usaram para chegar a essas conclusões (questões levantadas, como organizaram os dados, conjecturas provadas e não provadas, procedimentos usados para validação das conjecturas, etc).

Os problemas apresentados pelo professor tiveram como características situações das quais os alunos ainda não possuíam estruturas anteriores já prontas e que, para conseguirem resolver, teriam que mobilizar esquemas, elaborar hipóteses, testar resultados, conversar com os colegas para chegarem às resoluções. O papel do professor nesse caso foi o de mediar a construção desses conhecimentos, mas não o de mostrar o modelo pronto.

Esse processo de investigação dos alunos disparou um processo de trabalho do professor-colaborador desenvolvendo uma nova práxis que foi a de investigar como eles resolviam os problemas, analisando seus protocolos e validando os tipos de resoluções encontradas.

A pesquisa foi uma tentativa de rompimento com o ensino tradicional de Matemática, o que implicou a proposição de uma ação didática que possibilitou ao aluno a elaboração de seus conhecimentos como uma solução subjetiva de um problema significativo, respondendo às formulações e exigências do contexto em que está inserido e não apenas às expectativas do professor.

Por meio da observação e análise desse processo de resolução do aluno, o professor pode recolher muita informação sobre suas atitudes, sobre como mobiliza os conhecimentos matemáticos formais e informais e, ainda, sobre o seu entendimento (do aluno) do que seria uma investigação, qual o papel de ambos (professor e aluno) na respectiva realização de atividades diferenciadas e sobre a capacidade do sujeito em executá-las.

Ao observar as ações dos alunos, o professor não se manteve numa postura passiva, pelo contrário, fez perguntas aos alunos de modo a perceber melhor o que eles estavam fazendo e a forma como estavam pensando. O papel do professor, por muitas vezes, foi o de um provocador, colocando em xeque as idéias apresentadas pelos alunos.

Nessa pesquisa analisamos as bases teóricas que sustentam a implementação desse processo de ensino voltado para a formação dos conceitos em Matemática; analisamos como esse procedimento didático foi capaz de contribuir para superar a concepção imposta aos alunos, na qual o conteúdo tem que lhes ser ensinado e que os mesmos devem ser repetidos tal qual o procedimento apresentado pelo professor. A esse processo de aprendizagem/ensino de Matemática, no qual pudemos perceber as possibilidades de levar o aluno à compreensão dos significados, ao estabelecimento de relações com experiências anteriormente vivenciadas, à formulação de hipóteses, incentivando-o a aprender mais, e à percepção do relacionamento entre objetos, noções e conceitos matemáticos, que ao mesmo tempo poderá contribuir para a formação do professor, é que chamamos de **Investigação matemática em sala de aula**, que foi o objeto de nossa pesquisa.

6. RESULTADOS E RELAÇÃO ENTRE A PESQUISA E O QUADRO INFERENCIAL EXTRAÍDO DA LITERATURA.

Conforme já explicitado, a presente pesquisa intencionou analisar o desenvolvimento de atividades que envolvessem vários processos de investigação ou resolução, na aula de Matemática e identificar a presença de conceito algébrico nas situações propostas e teoremas em ação (tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, 1994). Pretendeu, ainda, analisar o grau de complexidade e imprevisibilidade dos procedimentos resolutivos em que os alunos envolveram-se na construção de conceitos em ação e, também, o processo de constituição do ambiente de investigação, assim como o papel da investigação na construção do conhecimento matemático.

Começando por nosso primeiro objetivo, que era identificar a presença da formação de conceito algébrico em ação, compreendemos que é possível que os alunos formem os conceitos matemáticos por meio da sua própria ação sobre o objeto, mas é necessária a presença constante da mediação que, no caso da investigação, foi realizada não somente pelo professor, mas também pelos próprios colegas e pela pesquisadora. Entendemos, também, que para a formação de conceitos a validação feita pelo professor teve um papel de suma importância nesta construção.

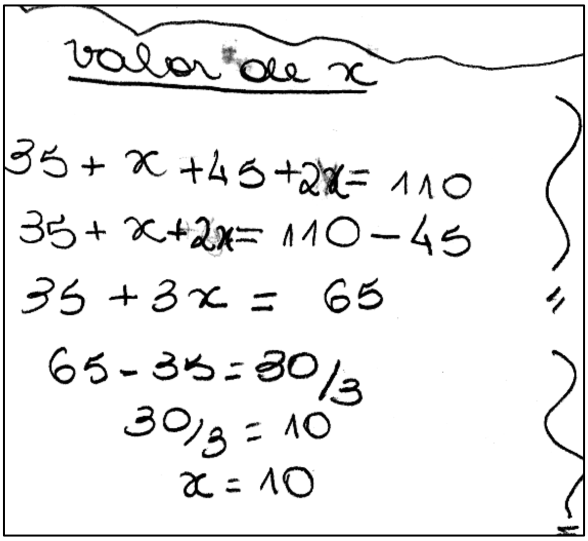
Percebemos que os alunos passaram por diversos estágios, mas que estes não foram lineares e encadeados, no sentido em que os sujeitos experimentaram movimentos de ir e vir, e que nem todos passaram pelas mesmas fases.

Estágios observados:

- compreendem apenas idéias simples (entendem a equação como um adivinhar de números que estão ocultos).
- muitos negam a utilização da Álgebra, pois a consideram desnecessária.
- procuram fazer generalizações da Aritmética para a Álgebra.
- com o evoluir das situações propostas, começam a entender e se familiarizarem com a simbologia e experimentam momentos de ir e vir.
- quando se apropriam da idéia, começam então a utilizá-la com mais freqüência do que outras representações.

Uma idéia apresentada nos registros dos alunos, em especial na categoria de formação de conceitos, deu-nos a noção de que nas aulas de investigação eles podem construir um conceito de forma mais significativa quando avançam de forma gradativa. “A introdução gradual dos meios para a solução permite-nos estudar o processo total da formação de conceitos em todas as suas fases dinâmicas” (Vygotsky, 1998, p. 72).

A não utilização das formas convencionais apresentadas nos livros didáticos, propostas no ambiente investigativo, revelou-nos indícios de que eles estavam entendendo o que estavam fazendo, principalmente quando observamos o transitar com facilidade de um membro da equação para o outro. O exemplo abaixo nos deixa clara essa idéia.



Retomando o conceito definido por Vergnaud (1994) como sendo uma tríade representada por S, I e R, em que:

- **S** é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, é o referente;
- **I** é o conjunto dos invariantes operatórios do conceito, é o significado;
- **R** é o conjunto das representações simbólicas, é o significante,

inferimos que o aprendizado de um conceito ocorre progressivamente na medida em que os sujeitos apropriam-se de formas de representação dos conceitos, ou formas específicas de mediação. Além disso, o desenvolvimento conceitual cresce na proporção em que os sujeitos desenvolvem esquemas de lidar com esses conceitos em situações diferentes. O desenvolvimento conceitual ocorre ainda pelo aumento do número de propriedades dos conceitos matemáticos (invariantes) que os alunos disponibilizam em situações.

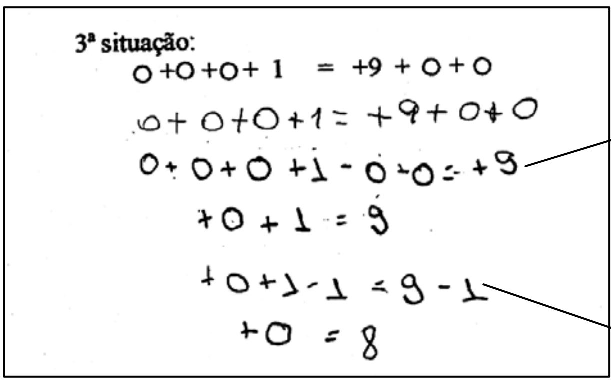
Percorrendo essas idéias, também podemos apontar, em diversas categorias deste estudo, o grau de complexidade e imprevisibilidade dos procedimentos resolutivos em que os alunos envolveram-se na construção de conceitos num ambiente investigativo. Os registros e comentários, com certeza, indicaram que a semente que estávamos plantando começava a germinar. As aulas realizadas nos fizeram construir a idéia de que, ser um investigador em sala de aula, seja ele matemático ou não, é estar sempre buscando alternativas, novos caminhos e modos de apresentar e representar soluções, testando-os, desvencilhando-se do tradicional.

Isso tudo contribuiu para ratificar nossa opinião de que precisamos resgatar a Matemática, que em algum lugar no tempo perdeu seu objetivo principal e vem desencantando alunos. Precisamos redescobrir e buscar a verdadeira Matemática, a dos nossos ancestrais, que a concebiam como uma forma de solucionar seus problemas, para desafiar os alunos e despertar motivações.

Constatamos, também, como fator importante para a mudança de postura dos alunos frente à Matemática, no ambiente investigativo, a interação estabelecida entre os participantes da pesquisa, ou seja, alunos/professora colaboradora/professora pesquisadora, que foi, sem dúvida, momento de reconstrução pessoal e ressignificação acerca da aprendizagem matemática, ressaltando o surgimento das relações afetivas e as inúmeras possibilidades de mediação.

Aspectos específicos da aula de investigação constituíram-se em sistemas particulares de representação de conceitos. E estes, a partir do momento que foram apreendidos, ampliaram o campo conceitual dos indivíduos, constituindo-se em formas de mediação da atividade que envolvia *a posteriori* esses conceitos. Assim, na ação de investigar possibilidades de resolução, há uma mobilização de invariantes operacionais, mediados por sistemas de representações, e tudo isso ocorreu ao mesmo tempo em que situações passaram a fazer sentido para os alunos. Esse exemplo nos deixa clara essa idéia e aponta para o movimento na construção dos conceitos.

2º registro - grupo 2 ***(aula 17.04.2007)***


3ª situação:
o+o+o+1 = +9+o+o
o+o+o+1 = +9+o+o
o+o+o+1-o-o = +9
+o+1 = 9
+o+1-1 = 9-1
+o = 8

Invariantes operacionais que estabelecem relações e propriedades começam a aparecer (começando a construir o conceito de operação inversa).
Já não precisam retirar dos dois lados e retiram apenas de um lado.

Voltam novamente a retirar uma unidade dos dois lados.

A partir da definição de conceito de Vergnaud (1994), inferimos que o aprendizado por meio da ação em aulas de investigação ocorre progressivamente na medida em o conceito passa a ter significado para o sujeito e assim eles começam a criar invariantes operatórios, apropriando-se então de formas de representação que impulsionam a construção de teoremas em ato e conceitos em ato. Para que isso ocorra são necessárias formas específicas de mediação (aluno/aluno, objeto/aluno, professor/aluno).

Além disso, observamos que o desenvolvimento conceitual nas aulas de investigação cresce na proporção em que os sujeitos desenvolvem esquemas de lidar com um mesmo conceito em situações diferentes e com o aumento do número de invariantes operatórios que esse sujeito desenvolve sobre a situação.

Entendemos, também, que a investigação proporcionou aos alunos a noção que Vergnaud (1995) coloca sobre campo conceitual: como sendo uma rede de conceitos. No ambiente investigativo, os conceitos sempre se apoiaram mutuamente e essa dinâmica possibilitou sentidos aos conceitos que eram produzidos progressivamente. Nesse sentido, a aprendizagem de um conceito ocorreu ao longo de um amplo intervalo de tempo e emergiu na medida em que os sujeitos agiram em situações diferentes, mediados por sistemas de representações diferentes.

A aula de investigação proporcionou-nos identificar diferentes maneiras de aprendizado do aluno, relacionadas com os conhecimentos anteriores de cada um e com a mediação realizada. Percebemos que esses conceitos surgiam à medida que os alunos passavam a agir sobre determinada situação, na tentativa de resolução, o que leva a uma diferente concepção da Matemática, que é a de construção e diversidade.

Os momentos de validação desenvolvidos nas aulas de investigação deram-nos, também, indícios de que podemos explorar noções intuitivas e conceitos espontâneos, e assim evoluir por meio de mediações até chegar no conceito matemático. Exemplo apresentado na categoria de formação de conceitos:

- *Então posso dizer que a balança quer dizer equilíbrio.*

Professora colaboradora:

- *A balança dá idéia de equilíbrio, mas me responda: o que o equilíbrio tem a ver com equações?*

Aluno:

- *Equações de equilíbrio.*

Professora colaboradora:

- *Quase.*

Outro aluno:

- *As equações têm que estar equilibradas como a balança.*

Professora:

- *Como?*

Aluno:

- *Por exemplo: x + 2 = 6, o x tem que ser 4, pois se for outro não está havendo equilíbrio.*

Definindo situação, segundo Vergnaud(1995), como sendo a representação que o aluno faz de uma tarefa, e retomando a definição com o conceito de Vergnaud(1995) e Vygotsky (1934), abordada no item 2.2 do referencial teórico, observamos que a adequação da aula de investigação ao ensino de conteúdos está relacionada com a possibilidade de a mesma favorecer o surgimento de uma grande variedade de situações envolvendo conceitos.

Concluímos que um melhor encaminhamento para as aulas de investigação em Matemática implica uma renovação do processo pedagógico e deve contemplar quatro momentos importantes envolvidos na complexidade do processo ensino-aprendizagem apontados por este estudo, quais sejam:

1. Propiciar situações pedagógicas em que o aluno possa aprender dentro e fora da escola. (Como disparar o aprender?).
2. Estabelecer relações entre os conteúdos a serem aprendidos e o objetivo de se promover o desenvolvimento intelectual e a autonomia do aluno (Por que aprender? O que aprender?).
3. Intervenção no desenvolvimento cognitivo do aluno (Quando se deve mediar?).
4. Definir os procedimentos adequados para mediação do processo. (Como mediar?).

Assim, essa pesquisa aponta que foram as ações dos alunos que definiram as linhas gerais do processo de construção do conhecimento matemático. Essas ações consistiram em um desencadeamento de aprendizagem matemática como um processo que foi além do âmbito escolar, como expusemos na categoria de situações a-didáticas no qual a ação do aluno exerceu papel determinante; vale dizer, estabeleceu-se a existência da construção de um conhecimento matemático a partir da própria experiência do aluno com a Matemática.

Há também que se definir que numa proposta pedagógica de investigação o professor tem que internalizar a necessidade da sistematização dos conceitos por meio do estabelecimento de suas interdependências, da conscientização da importância da atividade mental que o aluno terá que desenvolver, ou seja, da tomada de consciência das operações mentais e do estabelecimento de uma relação especial com o objeto de estudo. Enfim, o professor terá que compreender a aprendizagem/ensino como uma mediação entre o sujeito e o objeto pela atividade docente.

Para tanto se faz necessário fortalecer a autonomia intelectual do professor, capacitando-o para compreender e assumir a relação pedagógica em sua plenitude, como um mediador seguro do processo de construção do conhecimento, capaz de orientar a busca de respostas e soluções.

> Há que se considerar, sem dúvida, a importância da formação teórica, de uma cultura crítica, e aqui já se apresenta um dos sentidos da reflexividade. A escola é um dos lugares específicos do desenvolvimento da razão, portanto, de desenvolvimentos da reflexividade. Mas, principalmente, a escola é lugar da formação da razão crítica através de uma cultura crítica, para além da cultura reflexiva, que propicia a autonomia, autodeterminação, condição de luta pela emancipação intelectual e social. Tanto em relação ao professor crítico reflexivo, ao prático reflexivo ou ao intelectual crítico, penso que não chegaremos a lugar nenhum sem o desenvolvimento de capacidades e competências do pensar-raciocínio, análise, julgamento. Se queremos um aluno crítico reflexivo, é preciso um professor crítico reflexivo. (Pimenta, 2000 p.76)

Podemos perceber que, embora a professora-colaboradora tenha uma formação altamente qualificada, tal perfil somente foi se consolidando a partir da discussão sobre as práticas de sala de aula, relacionadas às teorias que as inspiraram, aprofundando-as a partir de posturas teóricas novas, de tal modo que procedimentos inadequados ao desenvolvimento cognitivo, emocional e social do aluno fossem substituídos por procedimentos orientados por concepções científicas, aliados aos resultados obtidos em sala de aula.

Concluímos, também, que o planejamento das aulas, articulado ao estudo de teorias que fundamentaram a pesquisa e à análise dos trabalhos produzidos pelos alunos, proporcionou-nos interessantes pontos de interação entre teoria e prática, o que foi aos poucos permitindo um resgate dos processos de evolução do conhecimento matemático, elemento importante para o desenvolvimento de ações docentes, para a formação de conceitos matemáticos nos alunos e para a formação crítica reflexiva do professor.

Trata-se, então, de como pensar no encaminhamento na formação de um professor que desperte epistemologicamente esse ser curioso, investigador e crítico de sua própria prática pedagógica.

Historicamente, a preocupação no trabalho pedagógico em Matemática tem se constituído em disponibilizar aos alunos o acesso a técnicas operatórias pautadas por repetição e memorização. No nosso trabalho, o início da construção da linguagem algébrica, num ambiente investigativo, foi tratado sob uma ótica dinâmica por considerarmos que a gênese, o processo de resolução e a discussão dos esquemas, até chegar à validação ou refutação, teriam reflexos decisivos na aprendizagem matemática dos alunos.

Entendemos que na maioria das vezes o fato matemático é abstrato e envereda-se por caminhos muito formalizados, os quais se mostram distantes do modo de pensar do aluno. É importante criar situações pedagógicas que lhes permitam visualizar os fatos fundamentais, levantar hipóteses e testá-las, o que não é possível quando se pauta apenas em raciocínios formais.

O ambiente investigativo requer uma mediação que sustente a evolução da aprendizagem, fazendo a transição do pensamento espontâneo e científico por etapas tão próximas que muitas vezes se fundem e nos surpreendem pelos avanços nas atitudes dos alunos.

> *Se* por um lado aprender para o aluno deve significar romper com conceitos antigos, impregnados na ação e no pensamento, requerendo um esforço na mudança de paradigmas na forma de conceber a realidade e agir sobre ela, por outro lado, o aprender para o professor, na mesma base teórica, significa também um rompimento com conceitos cristalizados sobre sua prática profissional e seu papel social, e não menos, significa um esforço cognitivo de revisão de conceitos e procedimentos. (Muniz, 2003. p. 207).

As discussões levadas a termo conduziram-nos a concluir que a temática da investigação em sala de aula também envolve aportes lingüísticos, psicológicos, conceituais e sócio-culturais dos indivíduos, cabendo ao professor criar um ambiente de busca e de descoberta no qual não hesite em experimentar, levantar hipóteses e testá-las, mesmo correndo o risco de eventualmente cometer enganos e erros.

Assim, as aulas de investigação em Matemática devem envolver muito mais do que a simples aplicação de fórmulas e procedimentos algorítmicos, voltando-se para o desenvolvimento integral do aluno, capacitando-o para analisar o grande volume de informações que recebe, para que possa selecionar aqueles conhecimentos mais úteis no seu fazer cotidiano.

Entendemos que a compreensão do modo como raciocinamos está diretamente ligada à capacidade de estabelecermos relações entre os diferentes significados e representações de uma idéia matemática. Dessa forma, é possível definir que a condução do aluno à compreensão dos conceitos em Matemática deve ser entendida como a possibilidade de elaboração paulatina de uma rede de significados.

No bojo de nossas conclusões podemos apontar o que aprendemos sobre as aulas de investigação:

- o ambiente de investigação matemática tem que desafiar, exigir e estimular o aluno e por conseqüência o professor a buscar sempre mais; tem que ser um jogo envolvente, em que haja uma relação de prazer e ele tenha tempo para degustar a idéia.
- a conscientização da importância do registro por parte dos alunos (registrar o mais próximo da maneira que eles haviam pensando de modo que o professor e os colegas também pudessem entender).
- a comunicação entre os alunos, ou seja, a mediação aluno-aluno, é de suma importância, pois é ela que possibilita a troca de idéias sobre caminhos distintos na solução de uma situação-problema, cria negociações e articula diferentes pontos de vista.
- o papel do professor na validação é essencial, pois é nesse momento que, na maioria das vezes, ocorre a sistematização dos conceitos.
- a atividade de investigação não consiste somente na solução de problemas, mas também na descoberta de caminhos diferentes para chegar a uma solução, que serão socializadas.
- tem que haver, por parte do professor, respeito à subjetividade e à particularidade de cada indivíduo na elaboração dos conceitos, considerando que os trajetos das

idéias não precisam ser lineares e encadeados, mas que experimentam movimentos de ir e vir.

- é necessário fazer o aluno pensar sobre suas próprias idéias, refletir sobre o seu registro e elaborar formas de comunicá-los.
- procurar estabelecer sempre um confronto entre diversas maneiras de resolver um mesmo problema, pois as comparações entre linguagem natural, procedimentos aritméticos e geométricos em um ambiente investigativo, possibilitam a construção de um conhecimento algébrico mais significativo.
- colocar os conceitos à prova em diversas situações, tanto para institucionalizá-los, quanto para contrariá-los.
- há a necessidade de o professor estar sempre atento aos processos de resolução dos alunos e as suas falas, pois estes revelam pontos de avanço e de bloqueio.

Com essas idéias, acreditamos que aprendemos muito a respeito de investigações em sala de aula, mas também ao final compreendemos que a utilização da investigação não se trata de um modelo dogmático pronto e acabado, mas sim de se pensar em novas propostas que talvez se constituam no fazer e no refazer pedagógico. Acreditamos que essa experiência nos ensinou que estamos apenas começando e que a aprendizagem terá seu desenvolvimento na prática em sala de aula e nas pesquisas que nos darão aporte teórico.

A experiência obtida até agora permitiu-nos avançar no entendimento de que a proposta de investigação matemática na sala de aula pode contribuir para entendermos um pouco mais como se dá a construção dos conceitos matemáticos pelo aluno e, também, fornecer dados importantes sobre em que momento cada aluno está em sua aprendizagem, além de formas alternativas de resolução e construção de conceitos por meio de discussões, tentativas e erros, até chegar a uma validação.

Entendemos, também, que esse processo requer uma investigação por parte do professor para tentar desvendar os esquemas produzidos pelos alunos e procurar mediá-los da melhor maneira possível, constituindo-se numa alternativa estimulante do fazer pedagógico, o que coloca uma grande responsabilidade por parte das Instituições formadoras que terão de repensar suas práticas de formação de professores, o que nos suscita novas pesquisas a esse respeito.

Sabemos das restrições desse trabalho, todavia acreditamos que ele fornece dados importantes que poderão auxiliar professores e pesquisadores em outras experiências, tomando o cuidado da não-generalização, o que é vital para o crescimento científico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para encerrar esse trabalho, que culminou na elaboração de uma dissertação, mas que também causou mudanças em nossa vida pessoal e em nossa trajetória como profissional de educação, faz-se necessária uma análise dos fatos vivenciados.

No início, não me esqueço da minha felicidade como aluna de mestrado, numa Universidade Federal, realizando um sonho. Cursamos várias disciplinas que muito contribuíram para um embasamento teórico o qual, mais tarde, serviu de suporte para a pesquisa. Por muitas vezes sentimos um misto de felicidade e apreensão, pois sabíamos que estávamos diante de um grande desafio.

Logo percebemos a importância de estar fazendo um mestrado e passamos a encarar o desenvolvimento profissional como algo permanente, com a finalidade de nos tornarmos mais aptos a conduzir a aprendizagem/ensino de Matemática de acordo com as necessidades e interesses de cada aluno. Já acreditávamos que essa pesquisa poderia contribuir para melhorar nosso trabalho tanto no Ensino Fundamental e Médio, quanto na formação de professores, campos em que atuamos profissionalmente.

Optarmos pela pesquisa-participativa, como metodologia, foi uma grande responsabilidade, pois sabíamos que seria vital para o processo que queríamos instaurar, visto que nos possibilitaria o seguinte esquema.

Dessa forma começávamos a dar os primeiros passos, vislumbrando executarmos uma pesquisa cheia de entusiasmo, alegria e aprendizagens, e que pudesse se constituir, ao final, num instrumento que contribuísse para a melhoria da aprendizagem matemática.

Com essa perspectiva, escolhemos para a aplicação de nossa pesquisa o colégio em qual trabalhamos há oito anos, tendo como colaboradora uma colega de trabalho e, como participantes, seus alunos. Acredito que isso foi um avanço pessoal, já que, a partir desse momento, passaríamos a vivenciar os problemas de nossa própria realidade.

Um dado importante de sermos acolhidos pelo nosso próprio local de trabalho era que nosso perfil profissional, bastante respeitado tanto pela instituição quanto pelos pais, proporcionou-nos total liberdade para realizarmos a pesquisa.

Hoje lembramos alguns fatos que nos causaram grande inquietação, como quando convidamos a professora para participar da pesquisa. Havia o receio de que ela não se interessasse e, para nossa surpresa, ela não só aceitou como se engajou na pesquisa. Assim, mais que professora, atuou como participante quando se deslocou do estrito contexto pedagógico e colocou-se como investigadora da própria práxis, favorecendo, portanto, a constituição de um espaço de formação continuada por meio da participação efetiva da pesquisa em todos os momentos e espaços. O respeito da mesma por conhecer meu trabalho, aliado ao conjunto metodológico que nos permitia planejar e replanejar, impulsionou-nos e agora lembramos com carinho essas passagens.

Outro fato que nos gerou apreensão foi a insegurança de como os alunos iriam reagir nas aulas de investigação. Hoje temos certeza de que o espaço de pesquisa teve significado positivo na história deles. Mesmo após o encerramento da pesquisa, a professora colaboradora, freqüentemente, nos pede opiniões e sugestões sobre propostas de aulas investigativas, o que nos traz a idéia de que continua desenvolvendo esse trabalho e de que os alunos estão bastante motivados com esse tipo de aula.

Lembramos as noites sem dormir tentando encontrar as categorias de análise, mas também lembramos a alegria em analisá-las. Foram momentos de grande reflexão e diálogo teórico e prático.

Acreditamos que com esse avanço inauguramos uma nova fase nas aulas de Matemática do colégio, onde se abriu um espaço para investigações e reflexões.

Durante a pesquisa, também tivemos a oportunidade de integrar um grupo de estudos formado por professores, mestres e doutores da UnB (Universidade de Brasília), o qual se reúne para discutir os caminhos da Educação Matemática no Brasil e no mundo, e está, aos poucos, reconstituindo a história da Educação Matemática no DF.

Continuamos como membro atuante da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), e com os conhecimentos que adquirimos com o mestrado, procuramos ajudar na formação de outros professores ministrando Oficinas, Cursos e participando de Congressos, divulgando assim, para outros professores, maneiras diferentes de se ensinar

Matemática em sala de aula.

Para os alunos que participaram da pesquisa, o resultado foi o surgimento de um senso investigativo, que resgatou a grande beleza de aprender Matemática e os levou a serem sujeitos mais ativos com maior capacidade de argumentação. Ousamos afirmar que isso é um fato importante, que acreditamos irá fazer diferença em suas vidas, tanto escolar quanto pessoal. Não podemos esquecer de suas falas, que nos mostraram muitas vezes a sua compreensão sobre os conceitos que estavam construindo.

O encerramento dessa atividade no papel, necessário para podermos dar conclusão ao nosso trabalho, não significou um fim, visto que, por iniciativa própria, os discentes deram continuidade aos estudos de investigação, contando com o apoio da professora colaboradora. Hoje continuamos nos encontrando, nesse Colégio, semanalmente, quando debatemos não só assuntos relacionados à Matemática, como também diversos temas que nos despertem para novas investigações.

O resultado do trabalho, para nós, foi bastante amplo, e a experiência de uma atividade metodologicamente não fechada, que se desencadeou de forma dialogada e reformulada a cada constatação de fatos ou conjecturas, ensinou-nos muito e fez-nos pensar que a investigação matemática em sala de aula pode ser uma alternativa para formação continuada de professores, visto que a mesma se constituiu num campo fértil de conciliação de teoria e prática.

A especificidade de uma pesquisa participante colocou todos os envolvidos como personagens da nossa própria história, na qual tínhamos liberdade para acrescentar novas informações, intervir e modificar de acordo com as necessidades e anseios.

A mediação da professora foi cada vez mais interessante à medida que ela se tornou mais segura em provocar situações, resgatar conhecimentos dos alunos e colocá-los em xeque quanto aos seus próprios conceitos já formados. Podíamos ver claramente sua percepção em momentos de bloqueios dos alunos e a sua pronta atuação para fazê-los avançar na construção do conhecimento, participando dos detalhes do processo de cada um. A professora colaboradora conseguiu entender muito bem a mensagem de que o nosso papel de professor não era o de dar a melhor resposta, mas sim o de fazer a melhor pergunta.

Avaliando a ação desenvolvida no trabalho possibilitou às professoras colaboradora e pesquisadora repensarem suas práticas em sala de aula. As discussões nesse sentido foram profícuas. Acreditamos que, de fato, podemos considerar que conseguimos romper com o modo tradicional de conceber a ação pedagógica em Matemática, no qual o conhecimento aparece como algo pronto, destituído da iniciativa de uma outra tentativa de resolução, em que cabe ao aluno somente internalizar o processo passado pelo professor através da memorização de repetição de algoritmos.

O rompimento com essas concepções foi, certamente, um grande ponto de partida, pois acreditamos que tais pontos de vista têm raízes muito profundas em nosso fazer pedagógico tradicional. Romper com esse processo nos colocou numa posição de reaprender a aprender. Por isso cremos que nossas discussões teóricas, aliadas ao sucesso verificado no decorrer da pesquisa, deram suporte para essa mudança de concepção. O preparo das aulas e o acompanhamento da resolução dos alunos lograram um melhor diagnóstico para o encaminhamento de ações pedagógicas.

Sabemos das limitações de nossa pesquisa, mas acreditamos que as aulas de investigação nos permitiram um grande avanço na compreensão dos conceitos algébricos, pois esta nos forneceu dados que poderão ajudar professores e pesquisadores, tanto em sala de aula, como na realização de outras pesquisas.

A apropriação do trabalho consolidou um fator de formação contínua, tanto para a professora colaboradora, quanto para a pesquisadora, e os limites de sua consecução estão vinculados aos “processos vivos de aprendizagem” que pulsam no interior de cada indivíduo e que agora pulsam ainda mais forte em nós, pois percebemos que esse estudo nos aponta para a compreensão da construção de um profissional competente para trabalhar com novas propostas na aprendizagem/ensino da Matemática, o que requer um aprofundamento da relação teoria e prática nos cursos de formação.

A certeza que temos é que devemos continuar essa prática em sala de aula e, quem sabe, num aprofundamento maior pertinente a um doutorado.

REFERÊNCIAS

AZCÁRATE GODED, P.; CARDEÑOSO, J. M. Una estrategia metodológica par la caracterización de las concepciones probabilísticas de los profesores. In: *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 2, Cuba: 2002, 16º RELME. ANAIS, 2003.

BALL, D. L. Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education.*, Mahwah, NJ, USA: L. Erlbaum Associates, 2000, p. 928-936.

BECKER, F. *Da ação a operação:* o caminho da aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 1997.

BLANCO, L.J.; CONTRERAS, L.C. Un modelo formativo de maestros de primaria, en el área de matemáticas, en el ámbito de la geometría. In: CONTRERAS, L. C; BLANCO, L. J. (Orgs.). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas:* una mirada a la práctica docente. Servicio de Publicaciones. Cáceres, España, Universidad de Extremadura, 2002.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-27.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, M. R. F. *Solução de problemas e a matemática escola.* Campinas: Alínea, 2006.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: *Didática das Matemáticas,* BRUN, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 35-113.

______. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C. (Org.). *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 48-72.

CARDEÑOSO, J. M.; AZCÁRATE, M.P. Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional. In: CONTRERAS, L. C; BLANCO, L. J. (Orgs.). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas:* una mirada a la práctica docente. Servicio de Publicaciones. Cáceres, España, Universidad de Extremadura, 2002.

CHEVALLARD, Y.; BOSH, M.; GÁSCON, J. *Estudar matemáticas:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D’AMBROSIO, U. *Da realidade à ação:* reflexões sobre educação e matemática. Campinas: Edunicamp, 1996.

______. A transferência de conhecimento matemático para a américa latina: um estudo de dinâmica cultural. In: NOBRE, S; TEIXEIRA, M.V. *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: UNESP, SBHMat, 2003, p. 1-17.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DEMO, P. *Pesquisa participante:* saber pensar e intervir juntos. Brasília: Líber Livro, 2004. (série Pesquisa em Educação, v. 8)

FARACO, C. A. O dialogismo como chave de uma antropologia filosófica. In: CASTRO, FARACO e TEZZA (Org.). *Diálogos com Bakhtin*. Curitiba: UFPR, 1996, 113-126.

FERNANDES, F. P.; FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. Investigações matemáticas e o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos da 6ª série. In: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (Eds.). *Histórias e investigações de/em aulas de Matemática.* Campinas: Alínea, 2006, p. 227-244.

FEY, J. “Quantity”. In: STEEN, L.A. (Org.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington, D. C.: National Academy Press, 1990, p. 61-94.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para repensar a educação algébrica elementar. Campinas: *Pro-Posições,* v. 4, n.1 (10), 1993, p. 78-91.

______. *Investigações matemáticas no ensino de Álgebra: estudo de suas potencialidades pedagógicas.* Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo: Fapesp. Projeto ligado a(o) DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO, 1993.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. (Org.). *Educação matemática:* uma introdução. São Paulo: PUC, 1999, p. 155-193.

FREITAS, L. C. *Crítica da organização do trabalho pedagógico e da didática*. 4. ed. São Paulo: Papirus, 2001.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. *Microdicionário de matemática*. São Paulo: Scipione,1998.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA, C.S. *Concepções de professores de matemática sobre prova e seu ensino:* mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. GT: Educação Matemática /Anped, n.19, 2007.

KOHL, M. O. *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento* - um processo sócio-histórico. S. Paulo: Scipione, 1993.

LINS, R.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, SP: Papirus, 1997.

LURIA, A. R. *Pensamento e Linguagem:* as últimas conferências de Luria. Trad. de Diana Myriam Lichtenstein e Mário Corso, supervisão de trad. de Sérgio Spritzer, Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez (Artigo Anped), 1992.

MEIRA, L. O mundo-real e o dia-a-dia no ensino de matemática, In: POMPEU JUNIOR (dir). *A Educação Matemática*, revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, n. 1, 1993, p. 19-27.

MILHOLLAN, F.; FORISHA, B. E. *Skinner X Rogers:* maneiras contrastantes de encarar a educação. São Paulo: Summus Editorial, 1998.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Trad. Catarina Eleonora F. da Silva e Jeanne Sawaya. Rev. Téc. Edgard de Assis Carvalho, 4. ed. São Paulo: Cortez; Brasília: UNESCO, 2001.

MUNIZ, C. A. *Situação-problema como força motriz da aprendizagem matemática*. Brasília: Projeto GESTAR/MEC, 2003.

______. *O professor pesquisador*. Brasília: Projeto GESTAR/MEC, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Estandares curriculares y de evaluation para la educacion matematica*. S. A. E. M. Thales, Reston, USA, s/d.

NÓVOA, A. Professor se forma na escola. *Revista Nova Escola*, São Paulo, edição 142, maio 2001. p. 13-16.

OLIVEIRA, M., VYGOTSKY, K. *Aprendizado e Desenvolvimento:* um Processo Sócio-Histórico. São Paulo: Scipione, 2000.

PAIS, L. C. Transposição didática. In: MACHADO, S. (Org.). *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: PUC, 1999.

______. *Didática da matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

______. *Ensinar e aprender Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PARRA. C. et al. *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

PETRONZELLI, V. L. L. *Educação matemática e a aquisição do conhecimento matemático:* alguns caminhos a serem trilhados, 2002, (Dissertação de Mestrado, UTP) 166p.

PIMENTA, S. G. (Org.). *Saberes pedagógicos e atividade docente*. São Paulo: Cortez, 2. ed., 2000.

PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Orgs.). *Professor reflexivo no Brasil:* gêneses e crítica de um conceito. 3. ed, São Paulo: Cortez, 2005.

PINTO, N. B. *O erro como estratégia didática:* estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*; (Heitor Lisboa da Araújo, trad.). Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (trabalho original publicado em 1944).

PONTE, J. P., BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POWELL, A.B., FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. The Robert B. Davis Institute for Learning, Graduate School of Education, Rutgers University, 10 Seminary Pl., New Brunswick, NJ, USA, 2007.

SCHÖN, D. A. *Educando o profissional reflexivo:* um novo design para o ensino e aprendizagem. Trad. Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SERRAZINA, L. A formação para o ensino de Matemática: perspectivas futuras. In: *Revista Portuguesa de Formação de Professores*, vol. 1 Lisboa: INAFOP, 2002.

SMOLE, K.C.S. (Org.). *Era uma vez na matemática:* uma conexão com a literatura infantil. 3. ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

TACCA M. C. V. R. (Org.) *Aprendizagem e trabalho pedagógico*. Campinas, SP: Alínea, 2006.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional***.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As idéias da álgebra*. NCTM (1998). Tradução: Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VÁSQUEZ, A.S. *Filosofia da práxis*. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977.

VERGNAUD, G. *Au foud de l'aprentissage, la conceptualisation, actes de l'ecole d'eté*. IREM de Clermond Ferrand, 1995, p. 174-185.

______. *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Paris: Peter Lang, 1994.

______. Education, the best portion of Piaget's heritage. *Swuiss Journal of Psychology*. v. 55, n.2/3, 1996, p. 112-118.

______. Lê role de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In: ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C; TAVIGNOT, P. (Eds.). *Vingt ans didactique des mathématiques em France*. Paris: La Pensée Sauvage Editions, 1994, p. 177-198.

VYGOTSKY, L. S**.** *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R. *Estudos sobre a história do comportamento:* o macaco, o homem primitivo e a criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

WAGNER, S.; PARKER, S. Advancing Algebra. In: WILSON, P.S. (ed.). *Research Ideas for the classroom, High School Mathematics***.** New York: MacMillan, 1993, p. 119-139.

WEINERT, F. E. Metacognition and motivation as determinants of effective learning and understanding. In: WEINERT, F.E.; KLUWE, R. (Orgs.). *Metacognition, motivation, and understanding.* Hillsdale, N. J.: Erlbaum.1987, p.1-16.

ZEICHNER, K.; LISTON, D. Teaching teachers to reflect. *Harvard Educational Review*, v. 57. n.1, 1987, p. 23-46.