Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Algumas Álgebras de Lie sem Base Finita para suas Identidades

por

João Marcelo Gonçalves de Almeida

Brasília

2009

À minha família, aos meus amigos e à minha namorada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre ter abençoado, protegido e iluminado a minha vida.

À minha família, que sempre me apoiou e me ajudou em todos os projetos de minha vida, em especial nesta caminhada.

À minha namorada, Vanessa, pelo carinho, incentivo, compreensão e paciência.

Aos meus amigos João Paulo, Paulo Henrique, Pedro Henrique e Wendel, por estarem sempre presentes nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de graduação, pelos momentos de alegria e descontração. Em especial, Diego, Bruno, Isaac, Harudgy, Humberto e Fillippi.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de companheirismo e trocas de conhecimentos. Em especial, Marcos Mesquita, Felipe Batista, Igor dos Santos, Andréia Avelar e Laura Cristina.

Ao meu orientador, Alexei Krassilnikov, pelos ensinamentos, esclarecimentos, correções, sugestões, etc.

Aos professores Plamen Emilov Koshlukov (Unicamp) e Irina Sviridova (UnB), por participarem da comissão examinadora desta dissertação e pelas suas contribuições.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB, que muito me ensinaram e contribuíram para a minha formação acadêmica. Em especial, Lineu Neto, José Alfredo, Angel Baigorri, Maurício Ayala, Cátia Gonçalves e Alexei Krassilnikov.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UnB, pela prestatividade que sempre demonstraram. Em especial, Manuel, Isabel, Tânia e Eveline.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

"Nunca se afaste de seus sonhos,
pois se eles se forem,
você continuará vivendo,
mas terá deixado de existir."
(Charles Chaplin)

RESUMO

Seja K um anel associativo, comutativo e com unidade e seja $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ e seja G uma álgebra de Lie sobre K. Dizemos que $f = 0$ é uma **identidade** em G, se $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$, para todo $g_1, \ldots, g_n \in G$. Dois sistemas de identidades $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ e $\{v_j = 0 \mid j \in J\}$ são **equivalentes**, se toda álgebra de Lie sobre K satisfazendo todas as identidades $u_i = 0$, satisfaz todas as identidades $v_j = 0$ e vice-versa. Se o sistema de identidades $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ é equivalente a algum sistema finito de identidades, então dizemos que o sistema $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ **tem uma base finita**.

Nesta dissertação, demonstraremos que, sobre um corpo de característica 2, o sistema de identidades de álgebras de Lie formado pelas identidades $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0$ e $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0$ $(n = 3, 4, \ldots)$ não tem base finita. Provaremos também que, sobre um corpo infinito K de característica 2, a álgebra de Lie $gl_2(K)$ das matrizes 2×2 não tem base finita para suas identidades. Finalmente, mostraremos que a álgebra de Lie M, de todas as matrizes 3×3 sobre $\mathbb{Q}$ com a primeira coluna e a terceira linha nulas, *vista como um anel de Lie*, não possui base finita para suas identidades. É conhecido que as identidades de M, *vista como álgebra de Lie sobre* $\mathbb{Q}$, têm base finita. Esta dissertação está baseada nos artigos de Vaughan-Lee [17], de Krasilnikov [12] e também no livro de Drensky [5].

Palavras-chave: Identidades em álgebras de Lie, variedades de álgebras de Lie, problema (ou propriedade) da base finita.

ABSTRACT

Let K be an associative and commutative unitary ring and let $L\langle X\rangle$ be the free Lie algebra over K freely generated by $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Let $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ and let G be a Lie algebra over K. We say that $f = 0$ is an **identity** in G if $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$ for all $g_1, \ldots, g_n \in G$. Two systems of identities $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ and $\{v_j = 0 \mid j \in J\}$ are **equivalent** if every Lie algebra over K satisfying all the identities $u_i = 0$ satisfies all the identities $v_j = 0$ and vice versa. If the system of identities $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ is equivalent to some finite system of identities, we say that the system $\{u_i = 0 \mid i \in I\}$ **has a finite basis**.

In this dissertation, we will demonstrate that, over a field of characteristic 2, the system of identities of Lie algebras consisting of the identity $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0$ and the identities $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0$ $(n = 3, 4, \ldots)$ has no finite basis. We will prove also that, over an infinite field K of characteristic 2, the Lie algebra $gl_2(K)$ of the 2×2 matrices has no finite basis for its identities. Finally, we will show that the Lie algebra M, of all the 3×3 matrices over $\mathbb{Q}$ with the first column and the third row with zeros, *viewed as a Lie ring*, has no finite basis for its identities. It is known that the identities of M *viewed as a Lie algebra over* $\mathbb{Q}$ have a finite basis. This dissertation is based on the articles of Vaughan-Lee [17] and Krasilnikov [12] and also on Drensky's book [5].

Keywords: Identities in Lie algebras, varieties of Lie algebras, finite basis problem (or property).

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O problema de base finita para identidades de álgebras

Neste trabalho, nosso objetivo será estudar o comportamento de algumas álgebras (ou variedades de álgebras) de Lie com relação às suas identidades, isto é, se estas álgebras (ou variedades) têm uma base finita para suas identidades. Mais precisamente, seja K um anel associativo, comutativo e com unidade e seja $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Seja G uma álgebra de Lie sobre K. Um elemento $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ é uma **identidade** em G quando $v(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 0$, para todo $g_i \in G$. Neste caso, dizemos também que a expressão $v = 0$ é uma identidade de G. Dois conjuntos de identidades $\{u_i \mid i \in I\}$ e $\{v_j \mid j \in J\}$ são **equivalentes** quando toda álgebra de Lie sobre K, satisfazendo todas as identidades u_i, satisfaz também todas as identidades v_j e vice-versa. Se $\{u_i \mid i \in I\}$ é equivalente à algum conjunto **finito** de identidades, nós dizemos que o conjunto $\{u_i \mid i \in I\}$ é **finitamente baseado** ou **tem uma base finita**. Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in L\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios da álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$. A classe $\mathbb{V}$ de todas as álgebras de Lie sobre K que satisfazem as identidades $f_i = 0,\ i \in I$, é chamada de **variedade** de álgebras de Lie definida (ou determinada) pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$. As definições destas noções para álgebras associativas sobre K são análogas.

O **problema de base finita**, para um sistema de identidades em álgebras, é descobrir se o sistema é equivalente à algum sistema **finito** de identidades. Observe que toda variedade é definida por um sistema de identidades e dois sistemas de identidades são equivalentes se, e somente se, eles definem a mesma variedade. Por isto, o problema de base finita pode ser formulado para variedades de álgebras: “Pode uma dada variedade ser definida por um conjunto finito de identidades?” Note também que este problema pode ser levantado para uma álgebra G: “O conjunto de todas as identidades satisfeitas em G é equivalente a algum conjunto finito de identidades?” Nos casos em que a resposta é positiva, nós dizemos que o dado sistema ou a dada variedade **tem uma base finita de identidades**, ou seja, que estas identidades são **finitamente baseadas** ou **têm uma base finita.**

Ainda é um problema em aberto se toda álgebra de Lie sobre um corpo de característica 0 tem uma base finita para suas identidades. Por outro lado, as identidades de cada álgebra de Lie de dimensão finita sobre tal corpo têm base finita (Il'tyakov [10]). Observamos que, para álgebras associativas sobre um corpo de característica 0, o problema (também chamado de **problema de Specht**) tem solução positiva, isto é, cada álgebra associativa sobre tal corpo tem base finita para suas identidades. Esse é um resultado celebrado obtido por Kemer em 1987, em [11].

Sobre um corpo K de característica $p > 0$, existem álgebras de Lie, cujas identidades não são finitamente baseadas. Mais ainda, se K for infinito, então existem álgebras de Lie de dimensão finita que não têm base finita para suas identidades (Vaughan-Lee [17], para $p = 2$; Drensky [6], para $p > 2$; vide também [1], Teorema 1.5.7). Em particular, as identidades da álgebra de Lie $gl_2(K)$, de todas as matrizes 2×2 sobre um corpo infinito K de característica 2, não têm base finita (Vaughan-Lee [17]).

Por outro lado, Vasilovskii demonstrou em [16] que se K for um corpo infinito de característica $\neq 2$, então as identidades de $gl_2(K)$ têm uma base com uma única identidade, que é $[y, z, [t, x], x] + [y, x, [z, x], t] = 0$. Para um corpo de característica 0, isto foi provado anteriormente por Filippov [7], porém vale a pena ressaltar que foi Razmyslov [13] que encontrou a primeira base finita de (três) identidades da álgebra de Lie $gl_2(K)$ sobre um corpo de característica 0. Observamos que sobre um corpo finito, as identidades de uma álgebra de Lie de dimensão finita sempre têm base finita (vide Bahturin e Ol'sanskii [2]). Vale observar também que para a álgebra de Lie $gl_p(K)$, das matrizes $p \times p$ com entradas em um corpo infinito K de característica $p > 2$, ainda é um problema em aberto se as suas identidades são finitamente baseadas.

Note que sobre um corpo K de característica $p > 0$, existem álgebras associativas, cujas identidades não têm base finita. Isso foi provado por Belov [3], por Grishin [8] (para $p = 2$) e por Shchigolev [14] (vide também [4, 9, 15]). Para álgebras associativas de dimensão finita sobre um corpo infinito de característica $p > 0$, ainda não sabemos se as identidades destas álgebras sempre têm base finita. Em particular, não é conhecido se a álgebra associativa $M_2(K)$, das matrizes 2×2 com entradas em um corpo infinito K de característica 2, tem uma base finita para suas identidades.

Resultados principais

No primeiro capítulo, o nosso foco principal será apresentar as definições necessárias para o entendimento do conteúdo desta dissertação, tanto para as demonstrações dos teoremas principais que apresentaremos abaixo, quanto para os resultados auxiliares, junto com elas algumas proposições e teoremas que são resultados relativamente bem conhecidos da álgebra em geral.

No segundo capítulo, nosso objetivo principal será a demonstração do seguinte teorema, provado por Vaughan-Lee, em [17]:

Teorema 1 (Vaughan-Lee). *Seja K um corpo de característica 2. Seja $\mathbb{V}$ a variedade de álgebras de Lie sobre K definida pelas identidades*

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0 \quad e \quad [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0 \ , \quad com \quad n = 3, 4, \ldots \ .$$

Então, $\mathbb{V}$ não tem base finita para suas identidades.

Este teorema, deu o primeiro exemplo de uma variedade de álgebras de Lie sem base finita para suas identidades. Observe que, no artigo de Vaughan-Lee [17], este teorema foi enunciado de forma diferente. Nesta forma, o teorema foi escrito por Drensky, em [5].

No terceiro capítulo, nosso objetivo principal será a demonstração do seguinte teorema, também provado por Vaughan-Lee, em [17]:

Teorema 2 (Vaughan-Lee). *Se K é qualquer corpo infinito de característica 2, então a álgebra de Lie $gl_2(K)$ das matrizes 2×2 sobre K não tem base finita para suas identidades.*

Este teorema, deu o primeiro exemplo de uma álgebra de Lie de dimensão finita que não tem base finita para suas identidades.

Agora, note que as álgebras de Lie encontradas por Vaughan-Lee [17] e Drensky [6] não têm base finita para suas identidades, se elas forem vistas como anéis de Lie (isto é, álgebras de Lie sobre o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros). Portanto, existem anéis de Lie, cujas identidades não têm base finita. Por outro lado, todo anel de Lie nilpotente e todo anel de Lie metabeliano têm uma base finita para suas identidades (vide [1]).

Seja G uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Então, observe que a álgebra G pode ser vista como um anel de Lie. É possível mostrar (e será provado no **Capítulo 4**) que se as identidades do anel de Lie G têm uma base finita, então as identidades de G, vista como álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$, também têm uma base finita.

No quarto capítulo, nosso objetivo principal será a demonstração do teorema abaixo, provado por Krasilnikov em [12], que deu um exemplo que comprova que a recíproca desta afirmação não é sempre verdade.

Seja M a álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{Q}$, definida da seguinte maneira:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Teorema (Krasilnikov). *As identidades da álgebra de Lie M têm uma base finita, apesar de M, vista como um anel de Lie, não ter uma base finita para suas identidades.*

Seja $L_{\mathbb{Q}}$ a álgebra de Lie livre sobre $\mathbb{Q}$, livremente gerada por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e seja $L_{\mathbb{Z}}$ o anel de Lie livre sobre $\mathbb{Z}$, livremente gerado por $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Denotaremos por $V_{\mathbb{Q}}(M)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Q}}$ formado pelas identidades da álgebra M e denotaremos por $V_{\mathbb{Z}}(M)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$ formado pelas identidades da álgebra M, onde M é a álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$ definida acima. Por uma questão de conveniência, o teorema acima pode ser reformulado em uma forma equivalente (vide [12]):

Teorema 3 (Krasilnikov). *O T-ideal $V_{\mathbb{Q}}(M)$ é finitamente gerado, apesar de o T-ideal $V_{\mathbb{Z}}(M)$ não ser finitamente gerado.*

Este teorema será a versão que nós adotaremos no quarto capítulo desta dissertação.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, o nosso objetivo principal será descrever e definir alguns pré-requisitos necessários para o perfeito entendimento dos principais teoremas enunciados na **Introdução**. Para isto, apresentaremos os conceitos de álgebras, subálgebras, álgebras de Lie, álgebras associativas, anéis de Lie, ideais à esquerda e à direita de uma álgebra, homomorfismos entre álgebras, álgebras livres e relativamente livres, identidades, variedades de álgebras, T-ideais ou ideais verbais, álgebras finitamente baseadas e também estudaremos algumas propriedades importantes em relação à estas álgebras e aos polinômios.

1.1 Álgebras: Definições, exemplos e propriedades

Seja K um anel associativo, comutativo e com unidade.

Definição 1.1. *Uma* ***álgebra*** *(ou* ***K-álgebra****) R é um módulo sobre K munido de uma operação binária $*$, isto é, uma aplicação $* : R \times R \to R$, chamada de* ***multiplicação****, tal que satisfaz para quaisquer $a, b, c \in R$ e $\alpha \in K$ os seguintes itens:*

1. $(a + b) * c = a * c + b * c$;

2. $a * (b + c) = a * b + a * c$;

3. $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$;

Definição 1.2. *Uma álgebra W sobre K é dita uma **álgebra associativa** quando temos que*

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

para todo $a,b,c \in W$.

Definição 1.3. *Uma álgebra G sobre K é dita uma **álgebra de Lie** quando, para todo $a, b, c \in G$, tivermos que*

$$a * a = 0 \qquad (a \text{ lei anticomutativa})$$

e

$$J(a, b, c) = (a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0 \quad (a \text{ identidade de Jacobi}).$$

Observação 1.4. Seja G uma álgebra de Lie sobre K, com multiplicação dada por $[\ ,\ ]$:

a) Normalmente a multiplicação em uma álgebra de Lie é denotada por $[\ ,\ ]$.

b) Como $[a + b, a + b] = [a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b]$, a lei anticomutativa implica que $[a, b] + [b, a] = 0$, ou seja, $[a, b] = -[b, a]$, para todo $a, b \in G$.

c) Se a característica de K é 2, então $g = -g$ e $[g_1, g_2] = [g_2, g_1]$, para todo $g, g_1, g_2 \in G$.

Definição 1.5. *Toda álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$ é chamado de **anel de Lie**.*

Exemplos de álgebras

Exemplo 1.6. Alguns exemplos de álgebras associativas:

(*i*) $K[x]$, $K[x_1, ..., x_m]$ - *os polinômios em uma ou várias variáveis (comutativas);*

(*ii*) $M_n(K)$ - *o espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em K e com multiplicação usual de matrizes;*

(*iii*) $U_n(K)$ - *o subconjunto de $M_n(K)$ consistindo de todas as matrizes triangulares superiores, com a multiplicação usual de matrizes;*

(*iv*) $End_K V$ - *o conjunto de todos os operadores lineares do espaço vetorial V sobre K, com as operações usuais.*

Exemplo 1.7. Alguns exemplos de álgebras de Lie:

(i) *Toda álgebra associativa* R *com multiplicação* " $\cdot$ " *é uma álgebra de Lie com a multiplicação dada por* $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$. *Nós denotaremos esta álgebra de Lie por* $R^{(-)}$;

(ii) $gl_n(K)$ *- o conjunto de todas as matrizes* $n \times n$ *com entradas em* K *e com multiplicação dada por*

$$[r_1, r_2] = r_1 r_2 - r_2 r_1 \ , \quad \text{com} \quad r_1, r_2 \in gl_n(K).$$

Também denotamos $gl_n(K)$ *por* $M_n(K)^{(-)}$;

(iii) $sl_n(K)$ *- o subconjunto de* $gl_n(K)$ *consistindo de todas as matrizes* $n \times n$ *com traço zero, ou seja, o subconjunto de* $gl_n(K)$ *formado por todas as matrizes* $n \times n$, *tais que a soma dos elementos da diagonal principal é nula;*

(iv) $(End_K V)^{(-)}$ *- o conjunto de todos os operadores lineares do espaço vetorial* V *sobre* K, *com a multiplicação dada no item* (i).

Exemplo 1.8. Alguns exemplos de anéis de Lie:

(i) $gl_n(\mathbb{Z})$ *- o conjunto de todas as matrizes* $n \times n$ *com entradas em* $\mathbb{Z}$ *e com multiplicação dada por*

$$[r_1, r_2] = r_1 r_2 - r_2 r_1 \ , \quad \text{com} \quad r_1, r_2 \in gl_n(\mathbb{Z});$$

(ii) $sl_n(\mathbb{Z})$ *- o subconjunto de* $gl_n(\mathbb{Z})$ *consistindo de todas as matrizes* $n \times n$ *com traço zero, ou seja, o subconjunto de* $gl_n(\mathbb{Z})$ *formado por todas as matrizes* $n \times n$, *tais que a soma dos elementos da diagonal principal é nula.*

Definição 1.9. *O subespaço vetorial* S *da álgebra* R *é uma* ***subálgebra*** (*de* R) *quando ele for fechado para a multiplicação, ou seja, se* $s_1, s_2 \in S$, *então temos que* $s_1 * s_2 \in S$. *A subálgebra* I *de* R *é um* ***ideal à esquerda*** *de* R *quando* $RI \subseteq I$ (*ou seja,* $r * i \in R$, *para todo* $r \in R$ *e* $i \in I$). *Da mesma maneira se define* ***ideal à direita*** *de* R. *Agora, uma subálgebra* I *de* R *é um* ***ideal*** *desta álgebra quando* I *é ideal à esquerda e à direita da mesma e denotamos por* $I \lhd R$.

Definição 1.10. *Sejam* G *uma álgebra de Lie sobre* K *e* I *um ideal qualquer de* G. *Então, o módulo* $\dfrac{G}{I}$ *sobre* K, *com multiplicação definida por*

$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]: & \dfrac{G}{I} \times \dfrac{G}{I} & \rightarrow & \dfrac{G}{I} \\ & (a+I, b+I) & \mapsto & [a+I, b+I] = [a,b] + I \end{array},$$

é uma álgebra de Lie sobre K, chamada de ***álgebra de Lie quociente****.*

Proposição 1.11. *A multiplicação* $[\ ,\ ]$ *em* $\dfrac{G}{I}$ *está bem-definida.*

Demonstração: Se a_1, a_2, b_1 e b_2 são elementos quaisquer de G, tais que

$$\begin{cases} a_1 + I &= a_2 + I \\ \\ b_1 + I &= b_2 + I \end{cases}, \text{ então podemos afirmar que } \begin{cases} a_1 &= a_2 + c \\ \\ b_1 &= b_2 + d \end{cases},$$

para alguns c e d pertencente à I. Desta forma, temos que

$$[a_1, b_1] + I = [a_2 + c, b_2 + d] + I = [a_2, b_2] + [a_2, d] + [c, b_2] + [c, d] + I.$$

Como I é um ideal de G, então os comutadores $[a_2, d], [c, b_2], [c, d] \in I$. Logo,

$$[a_1, b_1] + I = [a_2, b_2] + [a_2, d] + [c, b_2] + [c, d] + I = [a_2, b_2] + I,$$

ou seja, a multiplicação $[\ ,\ ]$ em $\dfrac{G}{I}$ está bem-definida.

■

Definição 1.12. *Uma álgebra de Lie L sobre K é dita* ***nilpotente*** *quando existir uma cadeia de ideais $\{L_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de L, tal que*

$$L_1 = L \ \supset \ L_2 = [L, L] \ \supset \ L_3 = [L_2, L] \ \supset \ \ldots \ \supset \ L_r = [L_{r-1}, L] \ \supset \ \ldots \ \supset \ L_n = \{0\},$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Seja c um número natural.

Definição 1.13. *Uma álgebra de Lie L sobre K é dita* ***nilpotente de classe c****, se $L_c \neq 0$ e $L_{c+1} = 0$, ou seja, se $[b_1, b_2, \ldots, b_c] \neq 0$ para alguns $b_j \in L$ e $[a_1, a_2, \ldots, a_{c+1}] = 0$ para todo $a_i \in L$.*

Definição 1.14. *O* ***produto Cartesiano*** *de uma família arbitrária $\{G_j\}_{j \in J}$ de álgebras de Lie sobre K é a álgebra de Lie sobre K dada por $\displaystyle\prod_{j \in J} G_j$, cujos elementos são as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} g: & J & \rightarrow & \displaystyle\bigcup_j G_j \\ & j & \mapsto & g(j) \end{array},$$

com a propriedade que $g(j) \in G_j$, para cada $j \in J$. Nós consideraremos os elementos de $\prod_{j\in J} G_j$ como vetores com entradas ou coordenadas indexadas pelos elementos de J. Assim, um elemento típico será escrito como (g_j); este elemento corresponde à função que leva j em g_j.

Homomorfismo de álgebras

Definição 1.15. *A transformação linear $\phi : R_1 \to R_2$ é um **homomorfismo** da álgebra R_1 para a álgebra R_2 quando $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$, para todo $a, b \in R_1$. Se ϕ é um homomorfismo **bijetivo**, então ϕ é chamado de **isomorfismo** entre as álgebras R_1 e R_2. Neste caso, R_1 e R_2 são álgebras isomorfas e nós denotaremos por $R_1 \cong R_2$. Se ϕ é um homomorfismo **sobrejetivo**, então ϕ é chamado de **epimorfismo**. Caso ϕ seja um homomorfismo **injetivo**, então ϕ será um **monomorfismo**.*

Definição 1.16. *Seja $\phi : R_1 \to R_2$ um homomorfismo da álgebra R_1 para a álgebra R_2. O **núcleo** de ϕ é o conjunto $Ker(\phi) = \{r_1 \in R_1 \mid \phi(r_1) = 0\}$ e o conjunto $Im(\phi)$ é a **imagem** deste homomorfismo, ou seja, $Im(\phi) = \phi(R_1)$.*

Propriedade 1.17. *Seja $\phi : R_1 \to R_2$ um homomorfismo da álgebra R_1 para a álgebra R_2. Logo, o seu núcleo $Ker(\phi)$ é um ideal de R_1 e a sua imagem $Im(\phi)$ é uma subálgebra de R_2. Temos também que ϕ é injetivo se, e somente se, $Ker(\phi) = \{0\}$.*

Teorema 1.18 (**Teorema do Homomorfismo**). *Seja $\phi : A \to B$ um homomorfismo da álgebra A para a álgebra B. Então, temos que a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \overline{\phi}: & \dfrac{A}{Ker(\phi)} & \to & Im(\phi) \\ & \overline{a} & \mapsto & \phi(a) \end{array}$$

é um isomorfismo entre as álgebras $\dfrac{A}{Ker(\phi)}$ e $Im(\phi)$, ou seja, $\dfrac{A}{Ker(\phi)} \cong Im(\phi)$.

Demonstração: Primeiramente, note que $\overline{\phi}$ é uma função bem definida. De fato, se a_1 e a_2 são elementos quaisquer de A, tais que $\overline{a}_1 = \overline{a}_2$, então $(a_1 - a_2) \in Ker(\phi)$. Logo, isto implica que $\phi(a_1 - a_2) = 0$, mas como ϕ é um homomorfismo, então temos que $\phi(a_1) = \phi(a_2)$, ou seja, $\overline{\phi}$ é uma função bem definida. Agora, note que

$$ker(\overline{\phi}) = \left\{ \overline{a} \in \frac{A}{Ker(\phi)} \,\middle|\, \phi(a) = 0 \right\} = \left\{ \overline{a} \in \frac{A}{Ker(\phi)} \,\middle|\, a \in Ker(\phi) \right\} = \{\overline{0}\},$$

ou seja, a aplicação $\overline{\phi}$ é injetiva. Finalmente, observe que $\overline{\phi}$ é sobrejetiva, pois se b é um elemento qualquer de $Im(\phi)$, então existe um elemento $a_b \in A$, tal que $\phi(a_b) = \overline{\phi}(\overline{a}_b) = b$.

■

1.2 Álgebras livres e identidades em álgebras de Lie

Definição 1.19. *Seja $\mathbb{V}$ uma classe de álgebras sobre K e seja $F \in \mathbb{V}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é uma* ***álgebra livre na classe $\mathbb{V}$, livremente gerada por X,*** *quando, para toda álgebra $R \in \mathbb{V}$, temos que toda aplicação $X \to R$ pode ser estendida para um homomorfismo $F \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de* ***posto*** *de F.*

Seja X o conjunto enumerável dado por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Exemplo 1.20. Alguns exemplos de álgebras livres:

(*i*) *$K[X]$ - o conjunto de todos os polinômios comutativos sobre K, com variáveis que pertencem a $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ e com as operações usuais, isto é, o espaço vetorial sobre K, cuja base é formada pelos monômios comutativos $x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \ldots x_{i_l}^{m_l}$, onde $l \geq 0$, $m_i > 0$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$. É possível verificar que a álgebra $K[X]$ é a álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas comutativas e com unidade sobre K, livremente gerada por X.*

(*ii*) *$K\langle X\rangle$ - o conjunto de todos os polinômios não-comutativos sobre K, com variáveis que pertencem a $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ e com as operações usuais, isto é, o espaço vetorial sobre K, cuja base é formada pelos monômios $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k}$, onde $k \geq 0$ e $j_s \geq 1$, para qualquer $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. É possível verificar que a álgebra $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas sobre K, livremente gerada por X.*

Teorema 1.21 (Witt). *A subálgebra de Lie $L\langle X\rangle$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é isomorfa à álgebra de Lie livre sobre K com X como conjunto gerador livre.*

Portanto, $L\langle X\rangle$ é a **álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por X.**

Definição 1.22. *Seja G uma álgebra de Lie sobre K. Um elemento $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ de $L\langle X\rangle$ é uma* ***identidade*** *ou uma* ***lei*** *em G quando $v(g_1, \ldots, g_n) = 0$, para todo $g_i \in G$.*

Observação 1.23. Se o elemento $v \in L\langle X\rangle$ é uma identidade da álgebra de Lie G, então dizemos também que a expressão $v = 0$ é uma identidade em G.

Definição 1.24. *Dois conjuntos de identidades $\{u_i \mid i \in I\}$ e $\{v_j \mid j \in J\}$ são **equivalentes** quando toda álgebra de Lie sobre K, satisfazendo todas as identidades u_i, satisfaz também todas as identidades v_j e vice-versa. Se $\{u_i \mid i \in I\}$ é equivalente à algum conjunto **finito** de identidades, nós dizemos que o conjunto $\{u_i \mid i \in I\}$ é **finitamente baseado** ou **tem uma base finita**.*

Seja I um conjunto qualquer.

Definição 1.25. *Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in L\langle X\rangle \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios da álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$. A classe $\mathbb{V}$ de todas as álgebras de Lie sobre K que satisfazem as identidades $f_i = 0$, $i \in I$, é chamada de **variedade** de álgebras de Lie definida (ou determinada) pelo sistema de identidades $\{f_i \mid i \in I\}$. A variedade $\mathbb{W}$ é uma subvariedade de $\mathbb{V}$ quando $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. O conjunto $T(\mathbb{V}) \subset L\langle X\rangle$ de todas as identidades satisfeitas por todas as álgebras da variedade $\mathbb{V}$ é chamado de **T-ideal** ou **ideal verbal** de $\mathbb{V}$. Nós usamos a notação $T(\mathbb{V}) = \langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma **base** para as identidades de $\mathbb{V}$.*

Observação 1.26. Dois conjuntos de identidades $\{u_i \mid i \in I\}$ e $\{v_j \mid j \in J\}$ de $L\langle X\rangle$ são equivalentes quando eles definem a mesma variedade de álgebras de Lie. Em outras palavras, $\{u_i \mid i \in I\}$ e $\{v_j \mid j \in J\}$ são equivalentes quando eles geram o mesmo T-ideal em $L\langle X\rangle$.

Definição 1.27. *O **ideal** de $L\langle X\rangle$ **gerado pelo conjunto** $\{h_i \mid i \in I\}$ é o subespaço vetorial de $L\langle X\rangle$ gerado pelos comutadores de Lie $[h_i, u_1, \ldots, u_l]$, onde $l \geq 0$ e $u_j \in L\langle X\rangle$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$.*

Observação 1.28. Note que V é um T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ quando V é o ideal gerado por $f_i(g_1, \ldots, g_{n_i})$, para todo $i \in I$ e para todo $g_j \in L\langle X\rangle$. Em outras palavras, V é um T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $C = \{f_i \mid i \in I\}$ quando V é o menor T-ideal que contém C, ou seja, V é a interseção de todos os T-ideais que contêm C. Observe também que um ideal W de $L\langle X\rangle$ é um T-ideal quando ele é fechado por endomorfismos de $L\langle X\rangle$, isto é, $\phi(W) \subseteq W$, para todo endomorfismo ϕ de $L\langle X\rangle$.

Definição 1.29. *Sejam $C_1 = \{g_j = 0 \mid j \in J\}$ e $C_2 = \{f_i = 0 \mid i \in I\}$ dois conjuntos de identidades de uma álgebra de Lie sobre K. O conjunto C_1 é uma **consequência** do* *conjunto C_2 quando $C_1 \subseteq \langle f_i \mid i \in I\rangle^T$, isto é, quando C_1 está contido no T-ideal gerado por C_2.*

Definição 1.30. *O **fecho-verbal** de um conjunto P de identidades é o menor T-ideal que contém P, ou seja, é o T-ideal gerado por P.*

Definição 1.31. *Seja Y um conjunto fixo. A álgebra $F_Y(\mathbb{V})$ da variedade $\mathbb{V}$ é chamada de **álgebra relativamente livre** de $\mathbb{V}$ quando $F_Y(\mathbb{V})$ é livre na classe $\mathbb{V}$ e é livremente gerada por Y.*

Observação 1.32. É possível demonstrar que

$$F_Y(\mathbb{V}) \cong \frac{L\langle Y\rangle}{T(\mathbb{V})}.$$

Definição 1.33. *Uma variedade de álgebras de Lie $\mathbb{V}$ sobre K é **finitamente baseada** ou **tem uma base finita para suas identidades** quando $\mathbb{V}$ puder ser definida por um sistema finito de identidades.*

1.3 Teorema de Birkhoff

Seja K um anel associativo, comutativo e com unidade e seja $\mathbb{V}$ uma classe de álgebras sobre K.

Definição 1.34. *Nós denotaremos por $C\mathbb{V}$, $S\mathbb{V}$ e $Q\mathbb{V}$, respectivamente, as classes de todos os **produtos Cartesianos**, **subálgebras** e **quocientes de álgebras** obtidas de $\mathbb{V}$.*

Agora, enunciaremos um teorema, demonstrado por Birkhoff (vide [5]), que é muito importante para o entendimento do **Capítulo 4** desta dissertação.

Teorema 1.35 (Birkhoff). *A classe de álgebras $\mathbb{V}$ é uma variedade se, e somente se, $\mathbb{V}$ é fechada por todos os produtos Cartesianos, subálgebras e quocientes de álgebras obtidas de $\mathbb{V}$, ou seja, quando $C\mathbb{V}, S\mathbb{V}, Q\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$.*

Corolário 1.36. *Seja G uma álgebra de Lie sobre K. Logo, todos os produtos Cartesianos, as subálgebras e as álgebras quocientes de G satisfazem todas as identidades de G.*

Demonstração: Vamos dar uma demonstração independente do **Corolário 1.36**. Seja $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L\langle X\rangle$ uma identidade qualquer de G. Logo, $v(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 0$, para todo $g_i \in G$.

Prova para subálgebras : Seja H uma subálgebra qualquer de G. Como $v(g_1, \ldots, g_n) = 0$, para todo $g_i \in G$, então temos que $v(h_1, \ldots, h_n) = 0$, para todo $h_i \in H \subseteq G$. Isto implica que v é uma identidade de H.

Prova para álgebras quocientes : Seja K um ideal qualquer de G. Logo, temos que $\dfrac{G}{K} = \{g + K \mid g \in G\}$ é a álgebra quociente de G pelo ideal K, onde a soma e o produto dos seus elementos são definidos da seguinte maneira

$$(a + K) + (b + K) = (a + b) + K \qquad \text{e} \qquad (a + K) \cdot (b + K) = (a \cdot b) + K,$$

para todo $a, b \in G$ (vide **Definição 1.10** e **Proposição 1.11**). Portanto, para todo $g_i \in G$, observe que

$$v(g_1 + K, \ldots, g_n + K) = v(g_1, \ldots, g_n) + K = 0 + K = \overline{0},$$

ou seja, v é uma identidade satisfeita pela álgebra quociente $\dfrac{G}{K}$.

Prova para produtos Cartesianos : Seja $\prod\limits_{l \in L} G$ o produto Cartesiano de L cópias de G, onde L é arbitrário. Vamos mostrar que v é uma identidade de $\prod\limits_{l \in L} G$. Para simplificar as notações, suponha que $L = \mathbb{N}$. Observe que a demonstração com L arbitrário é semelhante, usando as funções $L \to G$, em vez de "vetores" $(m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{il}, \ldots)$. Se $f_i \in \prod\limits_{l \in L} G$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $f_i = (m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{il}, \ldots)$, então temos que

$$\begin{aligned} v(f_1, \ldots, f_n) &= (v(m_{11}, \ldots, m_{l1}, \ldots), v(m_{12}, \ldots, m_{l2}, \ldots), \ \ldots \ , v(m_{1n}, \ldots, m_{ln}, \ldots)) \\ &= (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, v é uma identidade do produto Cartesiano de L cópias de G.

■

1.4 Algumas construções de Álgebras de Lie

Sejam K um corpo qualquer e G uma álgebra de Lie sobre K. Sabemos que $(End_K G)^{(-)}$ é a álgebra de Lie sobre K de todos os operadores lineares de G. Seja $D(G)$ o espaço vetorial sobre K de todas as derivações de G, isto é, operadores lineares $\delta \in (End_K G)^{(-)}$ que satisfazem a equação

$$\delta([u,v]) = [\delta(u),v] + [u,\delta(v)], \text{ para todo } u,v \in G.$$

Lema 1.37. *$D(G)$ é uma subálgebra de Lie de $(End_K G)^{(-)}$.*

Demonstração: Para provarmos este lema, temos que mostrar que se $\delta_1, \delta_2 \in D(G)$, então $[\delta_1, \delta_2] \in D(G)$, isto é, $[\delta_1, \delta_2]([u,v]) = [\ [\delta_1, \delta_2](u), v\ ] + [\ u, [\delta_1, \delta_2](v)\ ]$, para todo $u, v \in G$. Portanto, dados $\delta_1, \delta_2 \in D(G)$ e $u, v \in G$, note que

$$\begin{aligned}
\delta_1 \circ \delta_2([u,v]) &= \delta_1(\delta_2([u,v])) \\
&= \delta_1([\delta_2(u),v] + [u,\delta_2(v)]) \\
&= ([\delta_1 \circ \delta_2(u),v] + [\delta_2(u),\delta_1(v)]) + ([\delta_1(u),\delta_2(v)] + [u,\delta_1 \circ \delta_2(v)]).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\delta_1 \circ \delta_2([u,v]) = [\delta_1 \circ \delta_2(u),v] + [\delta_2(u),\delta_1(v)] + [\delta_1(u),\delta_2(v)] + [u,\delta_1 \circ \delta_2(v)]. \tag{1.1}$$

Assim, pelo mesmo motivo, temos que

$$\delta_2 \circ \delta_1([u,v]) = [\delta_2 \circ \delta_1(u),v] + [\delta_1(u),\delta_2(v)] + [\delta_2(u),\delta_1(v)] + [u,\delta_2 \circ \delta_1(v)]. \tag{1.2}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]([u,v]) &= (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)([u,v]) \\
&= \delta_1 \circ \delta_2([u,v]) - \delta_2 \circ \delta_1([u,v]).
\end{aligned}$$

Desta maneira, usando as equações (1.1) e (1.2) na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]([u,v]) &= (\ [\delta_1 \circ \delta_2(u),v] + [\delta_2(u),\delta_1(v)] + [\delta_1(u),\delta_2(v)] + [u,\delta_1 \circ \delta_2(v)]\ )\ + \\
&\quad -\ (\ [\delta_2 \circ \delta_1(u),v] + [\delta_1(u),\delta_2(v)] + [\delta_2(u),\delta_1(v)] + [u,\delta_2 \circ \delta_1(v)]\ ) \\
&= (\ [\delta_1 \circ \delta_2(u),v] - [\delta_2 \circ \delta_1(u),v]\ ) + (\ [u,\delta_1 \circ \delta_2(v)] - [u,\delta_2 \circ \delta_1(v)]\ ) \\
&= [[\delta_1,\delta_2](u),v] + [u,[\delta_1,\delta_2](v)],
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ∎

Lema 1.38. *Seja D a subálgebra de Lie de $D(G)$ sobre K das derivações de G e seja H a álgebra definida por $H = G \oplus D$ como um espaço vetorial sobre K, com multiplicação dada por*

$$[g_1 + \delta_1, g_2 + \delta_2] = [g_1, g_2] + \delta_1(g_2) - \delta_2(g_1) + [\delta_1, \delta_2], \tag{1.3}$$

onde $g_i \in G$ e $\delta_i \in D$, para todo $i = 1, 2$. Então, H é uma álgebra de Lie e G é um ideal de H.

Demonstração: Primeiro vamos provar que H é uma álgebra de Lie sobre K. De fato, como $[g + \delta, g + \delta] = [g, g] - \delta(g) + \delta(g) + [\delta, \delta] = 0$, para todo $g \in G$ e $\delta \in D$, então vale a lei anticomutativa em H. Logo, falta mostrarmos que vale a identidade de Jacobi em H, ou seja, que

$$J(h_1, h_2, h_3) = [h_1, h_2, h_3] + [h_2, h_3, h_1] + [h_3, h_1, h_2] = 0,$$

para quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$. Assim, sejam $h_1, h_2, h_3 \in H$ quaisquer, tais que $h_i = g_i + \delta_i$, onde $g_i \in G$ e $\delta_i \in D$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo, como o comutador $[\ ,\ ]$ é multilinear, temos que

$$\begin{aligned} J(h_1, h_2, h_3) &= [h_1, h_2, h_3] + [h_2, h_3, h_1] + [h_3, h_1, h_2] \\ &= [g_1 + \delta_1, g_2 + \delta_2, g_3 + \delta_3] + \ \ldots \ + [g_3 + \delta_3, g_1 + \delta_1, g_2 + \delta_2] \\ &= J(g_1, g_2, g_3) + \sum_j A_j + \sum_j B_j + J(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \end{aligned}$$

onde A_j são comutadores que contêm dois elementos de $D(G)$ e um de G (isto é, comutadores do tipo $[g_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}]$, com $i \in \{1, 2, 3\}$) e B_j são comutadores que contêm dois elementos de G e um de $D(G)$ (isto é, comutadores do tipo $[g_{i_1}, g_{i_2}, \delta_{i_3}]$, com $i \in \{1, 2, 3\}$). Agora, note que

$$J(g_1, g_2, g_3) = [g_1, g_2, g_3] + [g_2, g_3, g_1] + [g_3, g_1, g_2] = 0,$$

pois G é uma álgebra de Lie e, portanto, vale a identidade de Jacobi em B. Do mesmo modo, temos que

$$J(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = [\delta_1, \delta_2, \delta_3] + [\delta_2, \delta_3, \delta_1] + [\delta_3, \delta_1, \delta_2] = 0,$$

pois provamos no lema anterior que $D(G)$ é uma álgebra de Lie e, portanto, vale a identidade de Jacobi em $D(G)$. Observe também que, para todo $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$, temos que

$$\begin{aligned}
J(g_{i_1}, g_{i_2}, \delta_{i_3}) &= [g_{i_1}, g_{i_2}, \delta_{i_3}] + [g_{i_2}, \delta_{i_3}, g_{i_1}] + [\delta_{i_3}, g_{i_1}, g_{i_2}] \\
&= -\delta_{i_3}([g_{i_1}, g_{i_2}]) - [\delta_{i_3}(g_{i_2}), g_{i_1}] + [\delta_{i_3}(g_{i_1}), g_{i_2}] \\
&= -[\delta_{i_3}(g_{i_1}), g_{i_2}] - [g_{i_1}, \delta_{i_3}(g_{i_2})] + [g_{i_1}, \delta_{i_3}(g_{i_2})] + [\delta_{i_3}(g_{i_1}), g_{i_2}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isto implica que $\sum_j A_j = 0$. Veja também que, para todo $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$, temos que

$$\begin{aligned}
J(g_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}) &= [g_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}] + [\delta_{i_2}, \delta_{i_3}, g_{i_1}] + [\delta_{i_3}, g_{i_1}, \delta_{i_2}] \\
&= \delta_{i_3} \circ \delta_{i_2}(g_{i_1}) + [\delta_{i_2}, \delta_{i_3}](g_{i_1}) - \delta_{i_2} \circ \delta_{i_3}(g_{i_1}) \\
&= [\delta_{i_3}, \delta_{i_2}](g_{i_1}) - [\delta_{i_3}, \delta_{i_2}](g_{i_1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com isto, temos que $\sum_j B_j = 0$. Logo, temos que $J(h_1, h_2, h_3) = 0$, ou seja, vale a identidade de Jacobi em H. Portanto, H é uma álgebra de Lie sobre K.

Agora, vamos mostrar que G é um ideal de H. Para isto, temos que provar que $[H, G] \subseteq G$ e $[G, H] \subseteq G$. Como $-1 \in K$ e $[h, g] = -[g, h]$, para todo $g \in G$ e $h \in H$, então basta mostrar a primeira inclusão. Portanto, seja $[g_i + \delta_i, g_j]$ um elemento qualquer de $[H, G]$, onde $g_i, g_j \in G$ e $\delta_i \in D$. Vamos mostrar que $[g_i + \delta_i, g_j] \in G$. Observe que $[g_i + \delta_i, g_j] = [g_i, g_j] + [\delta_i, g_j] = [g_i, g_j] + \delta_i(g_j) \in G$, pois $[\ ,\ ]$ é uma operação binária em G e δ_i é um operador linear de G. Logo, $[H, G] \subseteq G$. Então, G é um ideal de H. Isto completa a demonstração deste lema.

$\blacksquare$

1.5 Algumas propriedades dos polinômios de $L\langle X\rangle$

Seja K um anel associativo, comutativo e com unidade. Sejam $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ e J um T-ideal qualquer de $L\langle X\rangle$.

Definição 1.39. *Os elementos da álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$ são chamados de* ***polinômios****. Também chamaremos de* ***polinômios*** *qualquer elemento de* $\dfrac{L\langle X\rangle}{J}$.

Observação 1.40. Sejam U e V dois conjuntos de polinômios de $L\langle X\rangle$ quaisquer. Portanto, sabemos que U é uma consequência de V quando U está contido no fecho-verbal de V, ou seja, quando U está contido no T-ideal gerado por V. Sabemos também que U e V são equivalentes quando cada um é consequência do outro.

Definição 1.41. *Se U e V são dois conjuntos de polinômios de $L\langle X\rangle$, então dizemos que V* ***implica*** *U quando U é uma consequência de V.*

Sabemos que todo polinômio de $L\langle X\rangle$ pode ser escrito como combinação linear de comutadores de $L\langle X\rangle$. Logo, nosso estudo sobre polinômios será focado nos comutadores.

Definição 1.42. *O* ***grau*** *de um comutador é o seu comprimento.*

Exemplo 1.43. O grau dos comutadores $[x_1, x_2, x_3]$ e $[x_1, x_1, x_1]$ é 3. Por outro lado, o grau de $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ e de $[x_2, x_2, x_4, x_4]$ é 4. Logo, os comutadores de grau 1 são da forma x_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Propriedade 1.44. *Se m_1, m_2 são comutadores de graus k, l , respectivamente, tais que $[m_1, m_2] \neq 0$, então $[m_1, m_2]$ é um comutador de grau $k + l$.*

Propriedade 1.45. *O comutador x_i tem grau 1 em relação à x_i e tem grau 0 em relação à x_j, se $i \neq j$. Se m_1 e m_2 são dois comutadores que têm grau k e l, respectivamente, em relação à x_i, tais que $[m_1, m_2] \neq 0$, então $[m_1, m_2]$ tem grau $k + l$ em relação à x_i.*

Note que os comutadores de $L\langle X\rangle$ geram $L\langle X\rangle$ como um espaço vetorial sobre K.

Polinômios homogêneos e multi-homogêneos

Propriedade 1.46. *Se $w = w(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é um elemento de $L\langle X\rangle$, então para cada inteiro i $(1 \leq i \leq n)$ existe um inteiro r_i, tal que*

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{r_i},$$

onde, para cada $j = 0, 1, \ldots, r_i$, w_j é uma combinação linear de comutadores de grau j em relação à x_i. Neste caso, w_j é chamado de ***componente de w de grau j*** *em relação à x_i. Se $w = w_j$ para algum inteiro j, então w é dito* ***homogêneo de grau j*** *em relação à x_i.*

Observação 1.47. Sejam $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ e $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ dois elementos quaisquer de $L\langle X\rangle$, tais que, para cada inteiro i $(1 \leq i \leq n)$, temos que $u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{r_i}$ e $v = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{r_i}$, onde u_j e v_j são combinações lineares de comutadores de grau j em relação à x_i, para cada $j = 0, 1, \ldots, r_i$. Logo, $u = v$ se, e somente se, $u_j = v_j$, para cada $j = 0, 1, \ldots, r_i$. Isto segue imediatamente do fato de $L\langle X\rangle$ ser isomorfo, como módulo sobre K, à $L_0 \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_n \oplus \ldots$, onde L_k é o conjunto formado pelas combinações lineares de comutadores de grau k, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lema 1.48. *Se K é um corpo infinito e $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio de $L\langle X\rangle$ sobre K, então w implica suas componentes de grau j em relação à x_i, para cada $j = 0, 1, \ldots$ e para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outras palavras, se T é o T-ideal de $L\langle X\rangle$ sobre K gerado por w, então suas componentes de grau j em relação à x_i pertencem à T, para cada $j = 0, 1, \ldots$ e para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demonstração: Sejam $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $w = w_0 + w_1 + \ldots + w_r$, onde w_j é a componente de w de grau j em relação à x_i, para cada $j = 0, 1, \ldots, r$. Observe que, para todo $\alpha \in K$, $w(x_1, \ldots, x_n)$ implica $w(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, que é igual à

$$w_0 + \alpha w_1 + \ldots + \alpha^j w_j + \ldots + \alpha^r w_r.$$

Como K é infinito, nós podemos escolher $r + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$. Considere o subespaço vetorial sobre K gerado por

$$w_0 + \ldots + {\alpha_k}^j w_j + \ldots + {\alpha_k}^r w_r \ ,$$

onde $k = 0, 1, \ldots, r$. Sabemos que este tem dimensão $r + 1$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & {\alpha_0}^2 & \cdots & {\alpha_0}^r \\ 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \cdots & {\alpha_1}^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_r & {\alpha_r}^2 & \cdots & {\alpha_r}^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como este determinante é igual à

$$\prod_{0 \leq k < j \leq r} (\alpha_j - \alpha_k)$$

e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são todos distintos, então o determinante é diferente de zero. Logo, o subespaço vetorial sobre K gerado por

$$w_0 + \ldots + {\alpha_k}^j w_j + \ldots + {\alpha_k}^r w_r \ ,$$

onde $k = 0, 1, \ldots, r$, tem dimensão $r+1$ e, portanto, contém w_j, para todo $j = 0, 1, \ldots, r$. Isto completa a prova deste lema.

■

Corolário 1.49. *Se K é um corpo infinito, então todo polinômio de $L\langle X\rangle$ sobre K é equivalente à um conjunto finito de polinômios multi-homogêneos, isto é, polinômios que são homogêneos em cada variável envolvida.*

Demonstração: Se w é um polinômio de $L\langle X\rangle$ sobre K, então w implica suas componentes de grau i em relação à x_1, para $i = 0, 1, \ldots, r_1$. Cada uma dessas componentes implica suas componentes de grau j em relação à x_2, para $j = 0, 1, \ldots, r_2$. Logo, por indução, temos que w implica um conjunto de polinômios, no qual cada um é homogêneo em cada variável envolvida. Com isso, demonstramos o corolário, pois w é a soma de todos esses polinômios.

■

Portanto, podemos concluir que w é uma identidade de uma álgebra de Lie G sobre um corpo infinito K se, e somente se, as suas componentes homogêneas são identidades de G.

1.6 Algumas identidades em álgebras de Lie centrais-por-metabelianas

Seja K um anel associativo, comutativo e com unidade.

Observação 1.50. Seja G uma álgebra de Lie qualquer sobre K. Todos os comutadores serão considerados da esquerda para direita, ou seja, $[a, b, c] = [[a, b], c]$, para todo $a, b, c \in G$.

Agora, considere K um corpo qualquer de característica 2. A variedade de álgebras de Lie centrais-por-metabelianas sobre K é determinada pela identidade

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0. \tag{1.4}$$

Lema 1.51. *A identidade* (1.4) *é equivalente à identidade*

$$[[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]] + [[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]] = 0. \tag{1.5}$$

Demonstração: Sejam $a = [x_1, x_2]$, $b = [x_3, x_4]$ e $c = x_5$. Logo, por (1.4), temos que $[a, b, c] = 0$. Pela identidade de Jacobi, temos que

$$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0 + [b, c, a] + [c, a, b] = 0,$$

então

$$[b, c, a] = -[c, a, b] = [c, a, b] \tag{1.6}$$

pois a característica de K é 2. Portanto,

$$[[x_3, x_4, x_5], [x_1, x_2]] = [[x_3, x_4], x_5, [x_1, x_2]] = [x_5, [x_1, x_2], [x_3, x_4]],$$

já que vale a equação (1.6). Deste modo, vemos que

$$\begin{aligned} [[x_3, x_4, x_5], [x_1, x_2]] = [x_5, [x_1, x_2], [x_3, x_4]] &= [[x_5, [x_1, x_2]], [x_3, x_4]] \\ &= [[[x_1, x_2], x_5], [x_3, x_4]] \\ &= [[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]]. \end{aligned}$$

Como

$$[[x_3, x_4, x_5], [x_1, x_2]] = -[[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]]$$

e temos que

$$[[x_3, x_4, x_5], [x_1, x_2]] = [[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]],$$

então

$$[[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]] + [[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]] = 0.$$

■

Seja F a álgebra de Lie livre central-por-metabeliana sobre K, livremente gerada por $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, ou seja, F é a álgebra de Lie quociente $\dfrac{L\langle X\rangle}{I}$, onde I é o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pela identidade (1.4) e $y_i = x_i + I$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Lembre que a variedade de álgebras de Lie centrais-por-metabelianas sobre K é determinada pela identidade (1.4).

Note que a álgebra $F' = [F, F]$ é gerada, como um espaço vetorial sobre K, pelos produtos

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}] \qquad \text{(onde } k \geq 2). \tag{1.7}$$

Assim, usando a identidade de Jacobi e as identidades $[a, a] = 0$, $[a, b] = -[b, a]$, nós podemos assumir em (1.7) que $i_1 > i_2 \leq i_3$.

Lema 1.52. *Seja* $L\langle X\rangle$ *a álgebra de Lie livre sobre* K*, gerada por* $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$*. Então,*

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]].$$

Em particular, $[x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3] \in L''\langle X\rangle = [[L\langle X\rangle, L\langle X\rangle], [L\langle X\rangle, L\langle X\rangle]]$*.*

Demonstração: Pela identidade de Jacobi, observe que

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [[x_1, x_2], x_3, x_4] = -[x_3, x_4, [x_1, x_2]] - [x_4, [x_1, x_2], x_3].$$

Logo,

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = -[x_3, x_4, [x_1, x_2]] + [[x_1, x_2], x_4, x_3] = -[x_3, x_4, [x_1, x_2]] + [x_1, x_2, x_4, x_3].$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3] &= -[x_3, x_4, [x_1, x_2]] \\ &= -[[x_3, x_4], [x_1, x_2]] \\ &= [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.53. *Temos que* $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k] - [x_1, x_2, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(k)}] \in L''\langle X\rangle$*, para qualquer permutação* σ *de* $\{3, \ldots, k\}$*.*

Dessa forma, vemos que F' módulo F'' (isto é, $\dfrac{F'}{F''}$) é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos produtos

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}] \qquad (\text{onde } \ k \geq 2 \ \text{ e } \ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k). \tag{1.8}$$

Lema 1.54. *Temos que* F'' *é gerado, como espaço vetorial sobre* K*, pelos elementos da forma*

$$[[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}], [y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l}]] \ ,$$

onde $\quad k, l \geq 2, \quad i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k \quad e \quad j_1 > j_2 \leq j_3 \leq \ldots \leq j_l.$

Demonstração: Sabemos que se A é uma álgebra de Lie sobre K gerada por $a_1, a_2, \ldots$, então o ideal A' de A é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos comutadores $[a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_m}]$, onde $m \geq 2$. Portanto, F'' é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos comutadores $[c_1, c_2, \ldots, c_m]$, onde $m \geq 2$ e todos os elementos c_j são da forma (1.7). Agora, note que se $m \geq 3$, então $[c_1, c_2, \ldots, c_m] = 0$, pois o comutador $[c_1, c_2]$ é central em F. Logo, $m = 2$. Assim, se $c_1 = u_1 + v_1$ e $c_2 = u_2 + v_2$, tal que u_i é da forma (1.8) e $v_i \in F''$, então temos que $[c_1, c_2] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] = [u_1, u_2]$, ou seja, que F'' é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos elementos da forma

$$[[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}], [y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l}]] \ ,$$

onde $k, l \geq 2$, $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k$ e $j_1 > j_2 \leq j_3 \leq \ldots \leq j_l$. Isto completa a demonstração deste lema.

■

Lema 1.55. *Se $a, b, c, d, g_1, g_2, \ldots, g_n \in F$, então*

$$[[a, b, g_1, \ldots, g_n], [c, d]] = [[a, b, g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(r)}], [c, d, g_{\sigma(r+1)}, g_{\sigma(r+2)}, \ldots, g_{\sigma(n)}]] \ , \qquad (1.9)$$

para qualquer permutação σ e para qualquer inteiro r $(0 \leq r \leq n)$.

Demonstração: Para todo $l \geq 2$, note que

$$\begin{aligned}
[[a, b, g_1, \ldots, g_l], [c, d]] &= [[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_l], [c, d]] \\
&= [[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], g_k, g_{k+1}, \ldots, g_l], [c, d]] \\
&= [[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], g_{k+1}, g_k, \ldots, g_l], [c, d]] + \\
&\quad + [[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], [g_k, g_{k+1}], g_{k+2}, \ldots, g_l], [c, d]] \\
&= [[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, g_k, \ldots, g_l], [c, d]] + \\
&\quad + [[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], [g_k, g_{k+1}], g_{k+2}, \ldots, g_l], [c, d]].
\end{aligned}$$

Como $[[F, F], [F, F], F] = 0$ e o comutador

$$[[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], [g_k, g_{k+1}], g_{k+2}, \ldots, g_l], [c, d]] \in [[F, F], [F, F], F] \ ,$$

então vemos que $[[[a, b, g_1, \ldots, g_{k-1}], [g_k, g_{k+1}], g_{k+2}, \ldots, g_l], [c, d]] = 0$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
[[a, b, g_1, \ldots, g_l], [c, d]] &= [[a, b, g_1, \ldots, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_l], [c, d]] \\
&= [[a, b, g_1, \ldots, g_{k+1}, g_k, \ldots, g_l], [c, d]] \ ,
\end{aligned}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, l-1\}$. Como as transposições da forma $(k\ \ (k+1))$, com $1 \leq k \leq (l-1)$, geram o grupo S_l das permutações do conjunto $\{1, \ldots, l\}$, então podemos permutar todos os elementos g_i, com $i \in \{1, \ldots, l\}$, ou seja, que

$$[[a, b, g_1, \ldots, g_l], [c, d]] = [[a, b, g_{\rho(1)}, g_{\rho(2)}, \ldots, g_{\rho(l)}], [c, d]]\ ,$$

para qualquer permutação ρ de l elementos. Do mesmo modo, podemos demonstrar que

$$[[a, b, g_1, \ldots, g_l], [c, d]] = [[a, b, g_{\mu(l)}, g_{\mu(l-1)} \ldots, g_{\mu(1)}], [c, d]]\ ,$$

para qualquer permutação μ de l elementos.

Desta forma, seja σ uma permutação qualquer de n elementos. Observe que

$$\begin{aligned} [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}], [c, d]] &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}, g_{\sigma(n)}], [c, d]] \\ &= [[[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}], g_{\sigma(n)}], [c, d]]. \end{aligned}$$

Logo, denotando $[x_1, x_2] = [a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}]$, $[x_3, x_4] = [c, d]$, $x_5 = g_{\sigma(n)}$ e usando a equação (1.5) na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}], [c, d]] &= [[[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}], g_{\sigma(n)}], [c, d]] \\ &= -[[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}], [c, d, g_{\sigma(n)}]] \\ &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-1)}], [c, d, g_{\sigma(n)}]]\ , \end{aligned}$$

já que a característica de K é 2. Agora, denotando $[x_1, x_2] = [a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-2)}]$, $[x_3, x_4] = [c, d, g_{\sigma(n)}]$, $x_5 = g_{\sigma(n-1)}$ e usando a equação (1.5) na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}], [c, d]] &= [[[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-2)}], g_{\sigma(n-1)}], [c, d, g_{\sigma(n)}]] \\ &= -[[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-2)}], [c, d, g_{\sigma(n)}, g_{\sigma(n-1)}]] \\ &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n-2)}], [c, d, g_{\sigma(n)}, g_{\sigma(n-1)}]]\ , \end{aligned}$$

já que a característica de K é 2. Fazendo isto sucessivamente, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} [[a, b, g_1, \ldots, g_n], [c, d]] &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(n)}], [c, d]] \\ &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(r)}], [c, d, g_{\sigma(n)}, g_{\sigma(n-1)}, \ldots, g_{\sigma(r+1)}]] \\ &= [[a, b, g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(r)}], [c, d, g_{\sigma(r+1)}, g_{\sigma(r+2)}, \ldots, g_{\sigma(n)}]]\ , \end{aligned}$$

para qualquer inteiro r $(0 \leq r \leq n)$. Isto completa a demonstração deste lema.

■

Desse modo, vemos que F'' é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos elementos da forma

$$[[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}], [y_{i_{k+1}}, y_{i_{k+2}}]], \tag{1.10}$$

onde $k \geq 2$, $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k$, $i_{k+1} > i_{k+2} \leq i_3$, $i_2 \geq i_{k+2}$ e se $i_2 = i_{k+2}$, então temos que $i_1 \geq i_{k+1}$.

CAPÍTULO 2

Uma variedade de álgebras de Lie sem base finita

Neste capítulo, nosso objetivo principal será a demonstração do seguinte teorema, provado por Vaughan-Lee em [17]:

Teorema 1 (Vaughan-Lee). *Seja K um corpo de característica 2. Seja $\mathbb{V}$ a variedade de álgebras de Lie sobre K definida pelas identidades*

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0 \quad e \quad [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0 \ , \quad com \quad n = 3, 4, \ldots \ .$$

Então, $\mathbb{V}$ não tem base finita para suas identidades.

A demonstração do **Teorema 1** que será apresentada neste trabalho, é baseada no **Capítulo 3**, do livro [5].

2.1 Uma família de álgebras de Lie

Sejam K um corpo de característica 2, $n \in \mathbb{N}$ fixo e

$$C_n = K[t_0, t_1, \ldots, t_n]/\langle t_0^3, t_1^2, \ldots, t_n^2 \rangle,$$

onde $K[t_0, \dots, t_n]$ é a álgebra de polinômios sobre K com variáveis $t_0, \dots, t_n$ e $\langle t_0^3, t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$ é o ideal de $K[t_0, \dots, t_n]$ gerado pelos monômios $t_0^3, t_1^2, \dots, t_n^2$. Seja G_n o espaço vetorial sobre K com base B_n dada por

$$B_n = \{u(t_0, t_1, \dots, t_n)a, t_0^2 t_1 \dots t_n b \mid u \text{ é um monômio mônico não-nulo em } C_n\}.$$

Nós definimos a multiplicação entre os elementos da base de G_n por

$$[u_1 a, u_2 a] = \begin{cases} t_0^2 t_1 \dots t_n b, & \text{se } u_1 u_2 = t_0^2 t_1 \dots t_n; \\ \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e todos os outros produtos dos elementos da base são 0.

Lema 2.1. *O espaço vetorial G_n, com a multiplicação $[\ ,\ ]$ definida acima, é uma álgebra de Lie sobre K. Mais ainda, G_n é nilpotente de classe 2.*

Demonstração: Vamos mostrar que G_n é uma álgebra de Lie sobre K, isto é, que G_n satisfaz a identidade de Jacobi e a lei anticomutativa. Primeiro, observe que G_n satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja, a identidade $J(x_1, x_2, x_3) = 0$, onde

$$J(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2].$$

De fato, sejam $g_{n_1}, g_{n_2}, g_{n_3} \in G_n$ quaisquer, tais que

$$g_{n_1} = \sum_j \alpha_j y_j \ , \quad g_{n_2} = \sum_k \beta_k y_k \quad \text{e} \quad g_{n_3} = \sum_l \gamma_l y_l$$

onde $\alpha_j, \beta_k, \gamma_l \in K$ e $y_j, y_k, y_l \in B_n$, para todo j, k, l. Logo, temos que

$$\begin{aligned} J(g_{n_1}, g_{n_2}, g_{n_3}) &= [g_{n_1}, g_{n_2}, g_{n_3}] + [g_{n_2}, g_{n_3}, g_{n_1}] + [g_{n_3}, g_{n_1}, g_{n_2}] \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l \alpha_j \beta_k \gamma_l \cdot ([y_j, y_k, y_l] + [y_k, y_l, y_j] + [y_l, y_j, y_k]) \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l \alpha_j \beta_k \gamma_l \cdot J(y_j, y_k, y_l). \end{aligned}$$

Como $[y_1, y_2, y_3] = 0$, para todo $y_1, y_2, y_3 \in B_n$, então temos que $J(y_j, y_k, y_l) = 0$, para todo j, k, l. Portanto, usando a equação acima, podemos afirmar que $J(g_{n_1}, g_{n_2}, g_{n_3}) = 0$, ou seja, G_n satisfaz a identidade de Jacobi.

Agora, vamos provar que a multiplicação [,] em G_n é anticomutativa, isto é, que o comutador $[g,g]=0$, para todo $g \in G_n$. De fato, seja g um elemento qualquer de G_n, tal que $g=\sum_i \alpha_i y_i$, onde $\alpha_i \in K$ e $y_i \in B_n$, para todo i. Sabemos que o comutador [,] é bilinear. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
[g,g]=\left[\sum_i \alpha_i y_i, \sum_i \alpha_i y_i\right] &= \sum_j {\alpha_j}^2[y_j,y_j]+\sum_{k\,\neq\,l}\alpha_k\alpha_l\left([y_k,y_l]\right)\\
&= \sum_j {\alpha_j}^2[y_j,y_j]+\left(\sum_{k\,<\,l}\alpha_k\alpha_l[y_k,y_l]+\sum_{k\,>\,l}\alpha_k\alpha_l[y_k,y_l]\right)\\
&= \sum_j {\alpha_j}^2[y_j,y_j]+\sum_{k\,<\,l}\alpha_k\alpha_l\left([y_k,y_l]+[y_l,y_k]\right).
\end{aligned}$$

Portanto, para provarmos a anticomutatividade em G_n basta mostrarmos que $[y_j,y_j]$ e $[y_k,y_l]+[y_l,y_k]$ são nulos, para todo $y_j,y_k,y_l \in B_n$. Assim, vemos que é suficiente provar que vale a igualdade

$$(i): \quad [u_1a,u_2a]=-[u_2a,u_1a]$$

e a igualdade

$$(ii): \quad [ua,ua]=0,$$

para quaisquer monômios $u_1,u_2,u \in C_n$.

Prova da igualdade (i): Pela definição da multiplicação entre elementos da base de G_n, sabemos que

$$[u_1a,u_2a]=\begin{cases} u_1u_2b, & \text{se } u_1u_2=t_0^2t_1\dots t_n;\\ \\ 0, & \text{caso contrário;}\end{cases}$$

e, do mesmo modo, temos que

$$-[u_2a,u_1a]=\begin{cases} -u_2u_1b, & \text{se } u_1u_2=t_0^2t_1\dots t_n;\\ \\ 0, & \text{caso contrário;}\end{cases}.$$

Como a característica de K é 2 e u_1,u_2 comutam entre si, já que eles pertencem à álgebra quociente C_n da álgebra comutativa $K[t_0,t_1,\dots,t_n]$, então temos que $u_1u_2b=-u_2u_1b$.

Portanto, vale a igualdade (i), já que $[u_1a, u_2a] = -[u_2a, u_1a]$.
Prova da igualdade (ii): É óbvia, pois $n > 0$ e $u^2 \neq t_0^2 t_1 \dots t_n$, tendo em vista que $t_0^2 t_1 \dots t_n$ não é o quadrado de algum monômio.

Logo, G_n é uma álgebra de Lie sobre K. Agora, note que G_n é nilpotente de classe 2. De fato, G_n não é abeliana, pois $[t_0 a, t_0 t_1 \dots t_n a] = t_0^2 t_1 \dots t_n b \neq 0$. Por outro lado, sabemos que o produto de quaisquer três elementos desta álgebra é igual à 0. Portanto, temos que G_n é nilpotente de classe 2.

■

Na notação do lema anterior, sejam $d_0, d_1, \dots, d_n$ operadores lineares de G_n definidos nos vetores da base de G_n por

$$d_i(ua) = t_i ua, \;\; d_i(ub) = 0, \;\; i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Seja D_n o espaço vetorial sobre K gerado por $d_0, d_1, \dots, d_n$.

Lema 2.2. *Os operadores lineares $d_0, d_1, \dots, d_n$ de G_n comutam entre si.*

Demonstração: Vamos mostrar que os operadores lineares d_i, d_j $(i, j = 0, 1, \dots, n)$ de G_n comutam entre si, isto é, $d_i(d_j(z)) = d_j(d_i(z))$, para todo $z \in G_n$. Como d_i, d_j são operadores lineares, então podemos considerar que z é um elemento qualquer de B_n. Desta maneira, observe que temos dois casos para analisar:

Caso 1: Seja $z = ub$, onde $u = t_0^2 t_1 \dots t_n$. Portanto, temos que

$$d_i(d_j(ub)) = d_i(0) = 0 = d_j(0) = d_j(d_i(ub)).$$

Caso 2: Seja $z = ua$, onde u é um monômio mônico pertencente à C_n. Logo, vemos que

$$d_i(d_j(ua)) = d_i(t_j ua) = t_i t_j ua \quad \text{e} \quad d_j(d_i(ua)) = d_j(t_i ua) = t_j t_i ua.$$

Note que os monômios t_i, t_j comutam entre si, pois eles pertencem à álgebra quociente C_n da álgebra comutativa $K[t_0, \dots, t_n]$. Com isto, podemos afirmar que $d_i(d_j(ua)) = d_j(d_i(ua))$.

Logo, provamos que d_i, d_j $(i, j = 0, 1, \dots, n)$ são operadores lineares de G_n que comutam entre si, ou seja, $[D_n, D_n] = 0$.

■

Lema 2.3. *Os operadores lineares $d_0, d_1, \dots, d_n$ são derivações de G_n.*

Demonstração: Vamos provar que cada d_i age como uma derivação nos produtos dos elementos de G_n, ou seja, $d_i([A, B]) = [d_i(A), B] + [A, d_i(B)]$, para todo $A, B \in G_n$. Como d_i é um operador linear e o comutador de Lie $[\ ,\ ]$ é bilinear, então podemos considerar que $A, B \in B_n$. Logo, para quaisquer u_1, u_2 monômios mônicos em C_n e $i = 0, 1, \ldots, n$, note que o único caso não trivial é $d_i([u_1 a, u_2 a])$, pois

$$d_i([u_1 a, u_2 b]) = d_i([u_1 b, u_2 a]) = d_i([u_1 b, u_2 b]) = d_i(0) = 0,$$

já que cada d_i é um operador linear e, portanto, leva o vetor 0 no 0. De fato, temos que:

$$d_i([u_1 a, u_2 a]) = d_i(u_1 u_2 b) = 0,$$

$$[d_i(u_1 a), u_2 a] + [u_1 a, d_i(u_2 a)] = ((t_i u_1) u_2) b + (u_1 (t_i u_2)) b = 2 t_i u_1 u_2 b = 0,$$

já que a característica de K é 2. Portanto,

$$d_i([u_1 a, u_2 a]) = 0 = [d_i(u_1 a), u_2 a] + [u_1 a, d_i(u_2 a)]$$

e isto implica que d_i é uma derivação, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

∎

Finalmente, podemos observar que D_n é uma subálgebra de Lie da álgebra $Der(G_n)$ (a álgebra de Lie das derivações de G_n sobre K), pois D_n é fechada pela multiplicação $[\ ,\ ]$. Logo, podemos afirmar que o espaço vetorial D_n gerado por $d_0, d_1, \ldots, d_n$ é uma subálgebra de Lie abeliana (isto é, comutativa) da álgebra de Lie $Der(G_n)$ das derivações de G_n.

Seja H_n a álgebra de Lie sobre K vista como o espaço vetorial igual à soma direta dos espaços vetoriais G_n e D_n sobre K, com multiplicação dada pela equação (1.3), do **Capítulo 1**, da **Seção 1.4**:

$$[g_1 + \delta_1, g_2 + \delta_2] = [g_1, g_2] + \delta_1(g_2) - \delta_2(g_1) + [\delta_1, \delta_2],$$

onde $g_i \in G_n,\ \delta_i \in D_n,$ para todo $i = 1, 2$. Seja $C(H_n)$ o centro de H_n, isto é, o conjunto de todos os elementos $z \in H_n$, tais que $[H_n, z] = 0$.

Lema 2.4. *O centro de H_n coincide com o espaço vetorial gerado por $t_0^2 t_1 \ldots t_n b$.*

Demonstração: Como o espaço vetorial H_n é a soma direta dos espaços vetoriais G_n e D_n, então a união das bases de G_n e de D_n é uma base de H_n. Seja $z \in C(H_n)$ qualquer, então existem $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ e $g \in G_n$, tais que $z = \alpha_0 d_0 + \ldots + \alpha_n d_n + g$. Logo,

$$\begin{aligned}[z, a] &= \alpha_0 d_0(a) + \ldots + \alpha_n d_n(a) + [g, a] \\ &= \alpha_0 t_0 a + \ldots + \alpha_n t_n a + \beta \bar{u}(t_0, \ldots, t_n) b \\ &= 0,\end{aligned}$$

já que $z \in C(H_n)$. Se $\bar{u}(t_0, \ldots, t_n) \neq 0$, então observe que $t_0 a, \ldots, t_n a, \bar{u}(t_0, \ldots, t_n) b$ são linearmente independentes. Agora, se $\bar{u}(t_0, \ldots, t_n) = 0$, então temos que $t_0 a, \ldots, t_n a$, são linearmente independentes. Enfim, nos dois casos acima, podemos afirmar que:

$$\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0, \text{ ou seja, } z \in G_n.$$

Portanto,

$$z = \sum_{i=0}^{r} \beta_i u_i(t_0, \ldots, t_n) a + \lambda t_0^2 t_1 \ldots t_n b,$$

onde cada u_i é um monômio mônico que pertence à álgebra quociente C_n da álgebra comutativa $K[t_0, t_1, \ldots, t_n]$. Dado $u_i \in C_n$, existe um monômio $v_i(t_0, \ldots, t_n) \in C_n$, tal que

$$u_i(t_0, \ldots, t_n) \cdot v_i(t_0, \ldots, t_n) = t_0^2 t_1 \ldots t_n.$$

Com isso, denotando

$$u_i = u_i(t_0, \ldots, t_n) \text{ e } v_i = v_i(t_0, \ldots, t_n),$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, r$, temos que:

$$\begin{aligned}[z, v_i a] &= [\beta_i u_i a, v_i a] + \sum_{j \neq i} [\beta_j u_j a, v_i a] + [\lambda t_0^2 t_1 \ldots t_n b, v_i a] \\ &= \beta_i t_0^2 t_1 \ldots t_n b + 0 + 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

já que $z \in C(H_n)$. Isto implica que $\beta_i = 0$, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$, pois $t_0^2 t_1 \ldots t_n b$ é um elemento da base de G_n. Logo,

$$z = \lambda t_0^2 t_1 \ldots t_n b,$$

para algum escalar λ. Portanto, provamos que o centro $C(H_n)$ de H_n está contido no espaço vetorial sobre K gerado pelo elemento $t_0^2 t_1 \dots t_n b$, ou seja,

$$C(H_n) \subseteq \langle t_0^2 t_1 \dots t_n b \rangle_K.$$

Como $t_0^2 t_1 \dots t_n b \in C(H_n)$, então temos que

$$C(H_n) = \langle t_0^2 t_1 \dots t_n b \rangle_K.$$

■

2.2 As identidades da álgebra de Lie H_n

Lema 2.5. *A álgebra H_n é central-por-metabeliana, isto é, satisfaz a identidade*

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0. \tag{2.1}$$

Demonstração: Note primeiro que o *ideal comutador* $H_n' = [H_n, H_n]$ está contido em G_n, pois

$$\begin{aligned} H_n' &= [H_n, H_n] \\ &= [G_n + D_n, G_n + D_n] \\ &= [G_n, G_n] + [G_n, D_n] + [D_n, G_n] + [D_n, D_n] \\ &= [G_n, G_n] + [G_n, D_n] + [D_n, G_n], \end{aligned}$$

já que $[D_n, D_n] = 0$ e os comutadores $[G_n, G_n], [G_n, D_n]$ e $[D_n, G_n]$ estão contidos em G_n. Pela definição da multiplicação em G_n, observe também que $G_n' = [G_n, G_n] = \langle t_0^2 t_1 \dots t_n b \rangle_K$. Portanto, pelo **Lema 2.4**, podemos afirmar que:

$$[[H_n, H_n], [H_n, H_n]] = H_n'' = (H_n')' \subseteq (G_n)' = G_n' = \langle t_0^2 t_1 \dots t_n b \rangle_K = C(H_n).$$

Logo, temos que $[[H_n, H_n], [H_n, H_n], H_n] = 0$, ou seja, H_n é central-por-metabeliana, já que o conjunto $[[H_n, H_n], [H_n, H_n]]$ está contido no centro de H_n.

■

Seja $f_k(x_1, \dots, x_k) = [[x_1, x_2, x_3, \dots, x_k], [x_1, x_2]]$, para todo $k \geq 3$.

Proposição 2.6. *Além da identidade* (2.1)*, a álgebra* H_n *satisfaz as identidades*

$$f_k(x_1,\dots,x_k),\ \textit{para todo}\ k\geq 3,\ \ k\neq n+2,$$

mas não satisfaz

$$f_{n+2}(x_1,\dots,x_{n+2}).$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $f_{n+2}\neq 0$ em H_n. Se $x_1=a$ e $x_i=d_{i-2}$, para todo $i=2,3,\dots,n+2$ e sabendo que $[d_k,ua]=d_k(ua)=t_kua$, para todo $k=0,1,\dots$, então

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x_1,\dots,x_{n+2}) &= [[x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n+2}],[x_1,x_2]]\\
&= [[a,d_0,d_1,\dots,d_n],[a,d_0]]\\
&= [[-d_0(a),d_1,\dots,d_n],-d_0(a)]\\
&= [[-t_0a,d_1,\dots,d_n],-t_0a]\\
&= [[-d_1(-t_0a),d_2,\dots,d_n],-t_0a]\\
&= [[d_1(t_0a),d_2,\dots,d_n],-t_0a]\\
&= [[t_1t_0a,d_2,\dots,d_n],-t_0a]\\
&\ \vdots\\
&= [(-1)^{n+1}t_0t_1\dots t_na,-t_0a]\\
&= (-1)^{n+2}[t_0t_1\dots t_na,t_0a]\\
&= (-1)^{n}[t_0t_1\dots t_na,t_0a]\\
&= (-1)^{n}{t_0}^2t_1\dots t_nb\\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, provamos que $f_{n+2} \neq 0$ em H_n.

Agora, seja $k \neq n+2$. Suponha que $f_k(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, para alguns $x_i \in H_n$. Note que $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ é linear em cada variável x_i, $i = 3, \ldots, k$, pois cada uma delas tem grau 1 nesta identidade. Observe também que

$$[x_1, x_2] = c_1 a + c_2 b, \text{ onde } c_1, c_2 \in C_n,$$

pois $[x_1, x_2]$ é um elemento de G_n, já que provamos no **Lema 2.5** que $[H_n, H_n] \subseteq G_n$. Dado $j \in \{1, \ldots, k\}$, sabemos que se $x_j \in H_n = G_n \oplus D_n$, então existem $\alpha_{0_j}, \alpha_{1_j}, \ldots, \alpha_{n_j} \in K$ e $g_j \in G_n$, tais que $x_j = g_j + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_j} d_i$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
f_k(x_1, \ldots, x_k) &= [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k], [x_1, x_2]] \\
&= [[c_1 a + c_2 b \ , \ g_3 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_3} d_i \ , \ \ldots \ , \ g_k + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_k} d_i] \ , \ c_1 a + c_2 b] \\
&= [[c_1 a \ , \ g_3 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_3} d_i \ , \ \ldots \ , \ g_k + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_k} d_i] \ , \ c_1 a] \ ,
\end{aligned}$$

pois $c_2 b$ é um elemento central em H_n. Como $g_j \in G_n$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, então existem polinômios $u_{1_j}, u_{2_j} \in C_n$ tais que $g_j = u_{1_j} a + u_{2_j} b$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
f_k(x_1, \ldots, x_k) &= [[c_1 a \ , \ g_3 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_3} d_i \ , \ \ldots \ , \ g_k + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_k} d_i] \ , \ c_1 a] \\
&= [[c_1 a \ , \ (u_{1_3} a + u_{2_3} b) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_3} d_i \ , \ \ldots \ , \ (u_{1_k} a + u_{2_k} b) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_k} d_i] \ , \ c_1 a] \\
&= [[c_1 a \ , \ u_{1_3} a + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_3} d_i \ , \ \ldots \ , \ u_{1_k} a + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i_k} d_i] \ , \ c_1 a] \ ,
\end{aligned}$$

pois $u_{2_j} b$ é um elemento central em H_n, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como sabemos que

$$[u_1 a, u_2 a] = \begin{cases} u_1 u_2 b, & \text{se } u_1 u_2 = t_0^2 t_1 \ldots t_n; \\ \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e $u_1u_2b \in C(H_n)$, então os únicos elementos que dão uma contribuição não-trivial para o polinômio $f_k(x_1,\ldots,x_k)$ são $[x_1,x_2] = ca$ (onde $c \in C_n$ é um polinômio sem termo constante) e $x_j = d_{i_j},\ j = 3,\ldots,k$. Logo, nós podemos assumir que existe um comutador

$$[ca, d_{i_3}, \ldots, d_{i_k}, ca] = c^2 t_{i_3} \ldots t_{i_k} b \neq 0,$$

pois $f_k(x_1,\ldots,x_k)$ é a soma de comutadores deste tipo e supomos que $f_k(x_1,\ldots,x_k) \neq 0$. Seja $c = \sum\limits_p \alpha_p u_p$, onde u_p são monômios que têm grau ≥ 1 em C_n, $\alpha_p \in K$ e $p \in \mathbb{N}$. Como a álgebra associativa C_n é comutativa e a característica de K é 2, então temos que

$$\begin{aligned} c^2 = (\sum_p \alpha_p u_p)^2 &= \sum_p \alpha_p^2 u_p^2 + \sum_{p<q} \alpha_p u_p \cdot \alpha_q u_q + \sum_{p<q} \alpha_q u_q \cdot \alpha_p u_p \\ &= \sum_p \alpha_p^2 u_p^2 + 2 \sum_{p<q} \alpha_p u_p \cdot \alpha_q u_q \\ &= \sum_p \alpha_p^2 u_p^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[ca, d_{i_3}, \ldots, d_{i_k}, ca] = c^2 t_{i_3} \ldots t_{i_k} b = (\sum_p \alpha_p^2 u_p^2) t_{i_3} \ldots t_{i_k} b \neq 0.$$

Como os elementos não-nulos na forma $f \cdot b \in H_n$ (onde f é um polinômio de C_n) são múltiplos de $t_0^2 t_1 \ldots t_n b$, então existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_{p_0}^2 t_{i_3} \ldots t_{i_k} = t_0^2 t_1 \ldots t_n.$$

Logo, $u_{p_0} = t_0$ (pois o grau de u_{p_0} é ≥ 1) e $k = n+2$, o que é um absurdo, já que $k \neq n+2$. Portanto, $f_k(x_1,\ldots,x_k) = 0$ em H_n, para todo $k \neq n+2$. Isto completa a demonstração desta proposição.

■

Corolário 2.7. *A identidade* $[[x_1,x_2,\ldots,x_{n+2}],[x_1,x_2]]$ *não é uma consequência da identidade* (2.1) *e das identidades*

$$[[x_1,x_2,\ldots,x_k],[x_1,x_2]],$$

onde $k \geq 3$ *e* $k \neq n+2$.

2.3 Demonstração do Teorema 1

Suponha, por absurdo, que $\mathbb{V}$ é definida por um sistema **finito** de identidades

$$g_i(x_1, \ldots, x_m), \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Note que, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, g_i pertence ao T-ideal $T = T(\mathbb{V})$ gerado pelo polinômio (2.1) e pelos polinômios

$$f_n = [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] \;\; (\text{com } n = 3, 4, \ldots)$$

da álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$ sobre o corpo K. Observe também que T é gerado pelos elementos g_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, já que supomos que a variedade $\mathbb{V}$ é definida por eles. Logo, cada g_i pode ser escrito da seguinte maneira

$$g_i = \alpha_{i0} \cdot c_{i0} + \sum_{n \geq 3}^{r_i} \alpha_{in} \cdot c_{in} \; ,$$

onde $\alpha_{im} \in K$ (para todo $m \geq 0$), c_{i0} é uma combinação linear de comutadores de Lie que pertencem ao T-ideal gerado por (2.1) e c_{in}, com $n \geq 3$, é uma combinação linear de comutadores de Lie que pertencem ao T-ideal gerado por f_n. Como o número de elementos g_i é finito, então existe $r \in \{3, 4, \ldots\}$, tal que $r \geq r_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Portanto, temos que cada identidade g_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$g_i = \alpha_{i0} \cdot c_{i0} + \sum_{n \geq 3}^{r} \alpha_{in} \cdot c_{in} \; ,$$

onde $\alpha_{im} \in K$ (para todo $m \geq 0$), c_{i0} é uma combinação linear de comutadores de Lie que pertencem ao T-ideal gerado por (2.1) e c_{in}, com $n \geq 3$, é uma combinação linear de comutadores de Lie que pertencem ao T-ideal gerado por f_n.

Logo, podemos concluir que todos os elementos g_i pertencem ao T-ideal gerado por (2.1) e por $f_3, \ldots, f_r$. Por outro lado, temos que T é gerado por todos os elementos g_i. Desta forma, podemos afirmar que T é gerado pelo conjunto finito formado por (2.1) e por $f_3, \ldots, f_r$. Assim, todas as identidades f_n, com $n \geq 3$, pertencem ao T-ideal gerado pelas identidades f_n, com $3 \leq n \leq r$. Portanto, toda álgebra de Lie central-por-metabeliana H que satisfaz as identidades f_n, com $3 \leq n \leq k$, satisfaz também as outras identidades f_n, com $n > k$, o que é um absurdo, pois isto contradiz a **Proposição 2.6**. Logo, $\mathbb{V}$ não tem base finita para suas identidades e isto completa a demonstração do **Teorema 1**.

■

CAPÍTULO 3

Identidades da álgebra de Lie das matrizes 2×2

Neste capítulo, nosso objetivo será a demonstração do seguinte teorema, provado por Vaughan-Lee, em [17]:

Teorema 2 (**Vaughan-Lee**). *Se K é qualquer corpo infinito de característica 2, então a álgebra de Lie $gl_2(K)$ das matrizes 2×2 sobre K não tem base finita para suas identidades.*

Desta maneira, iniciaremos o capítulo demonstrando alguns resultados necessários para provarmos tal teorema. Este capítulo será baseado no artigo [17] de Vaughan-Lee.

3.1 Alguns resultados auxiliares

Sejam K um corpo de característica 2 e $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Seja I o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pela identidade (2.1), ou seja, o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pela identidade

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$$

e seja $F = \dfrac{L\langle X\rangle}{I}$ a álgebra de Lie livre central-por-metabeliana sobre K gerada por Y, onde $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ tal que $y_i = \overline{x_i} = x_i + I$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.1. *O polinômio* $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]$ *de* F*, com* $n \geq 3$ *fixo, não é uma consequência do conjunto* $\{[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k], [y_1, y_2]] \mid k \geq 3,\ k \neq n\}$.

Demonstração: Observe primeiro que, pelo **Corolário 2.7** do **Capítulo 2**, a identidade $p_n = [[x_1, x_2, \ldots, x_n], [x_1, x_2]]$ não é uma *consequência* da identidade $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ e das identidades

$$p_k = [[x_1, x_2, \ldots, x_k], [x_1, x_2]], \quad \text{onde} \quad k \geq 3 \quad \text{e} \quad k \neq n.$$

Em outras palavras, p_n não pertence ao T-ideal T_n de $L\langle X\rangle$ gerado por $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ e pelas identidades p_k, com $k \geq 3$ e $k \neq n$. Seja φ o homomorfismo canônico de $L\langle X\rangle$ para $F = \dfrac{L\langle X\rangle}{I}$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & L\langle X\rangle & \rightarrow & \dfrac{L\langle X\rangle}{I} \\ & x_i & \mapsto & y_i = x_i + I \end{array}.$$

Note que, para todo $a, b \in L\langle X\rangle$, temos que

$$\varphi([a, b]) = [a, b] + I = [a + I, b + I] = [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Logo, usando repetidamente a equação acima, vemos que

$$\begin{aligned} \varphi(p_n) = \varphi([[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]]) &= [\varphi([x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]), \varphi([x_1, x_2])] \\ &= [\varphi([[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}], x_n]), [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]] \\ &= [[\varphi([x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}]), \varphi(x_n)], [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]] \\ &\vdots \\ &= [[\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \ldots, \varphi(x_n)], [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]] \\ &= [[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]. \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo, temos que a *imagem* pela aplicação φ do conjunto C_n formado pela identidade $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ e pelas identidades p_k (com $k \geq 3$ e $k \neq n$) é o conjunto $\varphi(C_n) = \{\overline{0}\} \cup \{[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k], [y_1, y_2]] \mid k \geq 3,\ k \neq n\}$. Sabemos que se T_n é o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado por C_n, então $\varphi(T_n)$ é o T-ideal de F gerado por $\varphi(C_n)$.

Suponha, por absurdo, que $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]] = \varphi(p_n) = p_n + I$ pertence ao T-ideal $\varphi(T_n) = \dfrac{T_n}{I}$ gerado pelo conjunto $\{[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k], [y_1, y_2]] \mid k \geq 3,\ k \neq n\}$. Logo, existe um elemento $t_n \in T_n$, tal que $p_n + I = t_n + I$, ou seja, p_n é congruente à t_n módulo I. Portanto, existe um elemento $h \in I$, tal que $p_n = t_n + h$. Como $I \subseteq T_n$ e $p_n = t_n + h$, então temos que $p_n \in T_n$, o que é um absurdo, pois isto contradiz o **Corolário 2.7** do **Capítulo 2**. Logo, temos que o polinômio $\varphi(p_n)$ não pertence à $\frac{T_n}{I}$, ou seja, que $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]$ não é uma *consequência* do conjunto $\{[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k], [y_1, y_2]] \mid k \geq 3, \ k \neq n\}$. Isto completa a demonstração deste lema.

■

Lema 3.2. *O T-ideal Ω_n de F gerado por $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]$, visto como espaço vetorial sobre K, é gerado pelos polinômios da forma $[[m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n], [m_1, m_2]]$, onde $m_1, \ldots, m_n$ são monômios de F.*

Demonstração: Como $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]$ está no centro de F, pois pertence à F'', então Ω_n é gerado pelos polinômios da forma $[[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], [a_1, a_2]]$, onde $a_i \in F$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sabemos que todo elemento de F é escrito como combinação linear de monômios e, além disso, temos que $[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]]$ é linear em $y_3, y_4, \ldots, y_n$, pois eles têm grau 1. Portanto, nós podemos supor que $a_3, a_4, \ldots, a_n$ são monômios. Logo, falta provarmos que a_1, a_2 são monômios. Suponha que $a_1 = \beta b + \gamma c$, onde $\beta, \gamma \in K$ e $b, c \in F$. Então,

$$\begin{aligned}
[[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], [a_1, a_2]] &= [[(\beta b + \gamma c), a_2, a_3, \ldots, a_n], [(\beta b + \gamma c), a_2]] \\
&= \beta^2 [[b, a_2, a_3, \ldots, a_n], [b, a_2]] + \gamma^2 [[c, a_2, a_3, \ldots, a_n], [c, a_2]] \\
&\quad + \beta\gamma [[b, a_2, a_3, \ldots, a_n], [c, a_2]] + \beta\gamma [[c, a_2, a_3, \ldots, a_n], [b, a_2]].
\end{aligned}$$

Desta maneira, usando a equação (1.9), temos que

$$\begin{aligned}
[[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], [a_1, a_2]] &= \beta^2 [[b, a_2, a_3, \ldots, a_n], [b, a_2]] + \gamma^2 [[c, a_2, a_3, \ldots, a_n], [c, a_2]] \\
&\quad + 2\beta\gamma [[b, a_2, a_3, \ldots, a_n], [c, a_2]] \\
&= \beta^2 [[b, a_2, a_3, \ldots, a_n], [b, a_2]] + \gamma^2 [[c, a_2, a_3, \ldots, a_n], [c, a_2]],
\end{aligned}$$

pois a característica de K é 2. Portanto, nós podemos supor que a_1 é um monômio. Do mesmo modo, podemos supor que a_2 também é um monômio e isto completa a prova deste lema.

■

3.2 Demonstração do Teorema 2

Sejam K um corpo infinito de característica 2 e $A = gl_2(K) = M_2(K)^{(-)}$ a álgebra de Lie das matrizes 2×2 sobre K, a qual possui uma base formada pelo conjunto $\{a, b, c, [b, c]\}$, onde

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, note que A tem dimensão 4. Observe também que

$$bc = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$cb = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

já que a característica de K é 2. Portanto,

$$[b, c] = bc - cb = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o qual é central em A, pois $[x, [b, c]] = x \cdot [b, c] - [b, c] \cdot x = x - x = 0$, para todo $x \in A$. Em particular, temos que $[a, [b, c]] = [b, [b, c]] = [c, [b, c]] = 0$. Agora, note também que

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$ba = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, sabendo que a característica de K é 2, temos que

$$[b, a] = [a, b] = ab - ba = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b.$$

Veja também que

$$ac = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$ca = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

pois a característica de K é 2. Assim, vemos que

$$[c,a] = [a,c] = ac - ca = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = c.$$

Seja $B \subseteq A$ a álgebra de Lie gerada por b, c. Como B possui uma base formada pelo conjunto $\{b, c, [b,c]\}$ e o elemento $[b,c] \neq 0$ é central em A, então B não é abeliana e o produto de quaisquer três elementos desta álgebra é nulo. Portanto, temos que B é nilpotente de classe 2. Observe também que B é um ideal de A. De fato, sejam h e g elementos quaisquer de B e A, respectivamente. Logo, existem elementos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \sigma, \mu \in K$, tais que

$$h = \alpha \cdot b + \beta \cdot c + \gamma \cdot [b,c] \qquad \text{e} \qquad g = \delta \cdot a + \lambda \cdot b + \sigma \cdot c + \mu \cdot [b,c].$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
[h,g] &= [\ \alpha \cdot b + \beta \cdot c + \gamma \cdot [b,c]\ ,\ \delta \cdot a + \lambda \cdot b + \sigma \cdot c + \mu \cdot [b,c]\ ] \\
&= [\ \alpha \cdot b\ ,\ \delta \cdot a + \lambda \cdot b + \sigma \cdot c + \mu \cdot [b,c]\ ]\ +\ [\ \beta \cdot c\ ,\ \delta \cdot a + \lambda \cdot b + \sigma \cdot c + \mu \cdot [b,c]\ ] \\
&\quad + [\ \gamma \cdot [b,c]\ ,\ \delta \cdot a + \lambda \cdot b + \sigma \cdot c + \mu \cdot [b,c]\ ] \\
&= ([\alpha \cdot b, \delta \cdot a] + [\alpha \cdot b, \lambda \cdot b] + [\alpha \cdot b, \sigma \cdot c] + [\alpha \cdot b, \mu \cdot [b,c]]) \\
&\quad + ([\beta \cdot c, \delta \cdot a] + [\beta \cdot c, \lambda \cdot b] + [\beta \cdot c, \sigma \cdot c] + [\beta \cdot c, \mu \cdot [b,c]]) \\
&\quad + ([\gamma \cdot [b,c], \delta \cdot a] + [\gamma \cdot [b,c], \lambda \cdot b] + [\gamma \cdot [b,c], \sigma \cdot c] + [\gamma \cdot [b,c], \mu \cdot [b,c]]) \\
&= \alpha\delta \cdot [b,a] + \alpha\sigma \cdot [b,c] + \beta\delta \cdot [c,a] + \beta\lambda \cdot [b,c] \\
&= \alpha\delta \cdot b + \beta\delta \cdot c + (\alpha\sigma + \beta\lambda) \cdot [b,c]\ ,
\end{aligned}$$

ou seja, que $[h,g]$ é um elemento de B, já que $[h,g]$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da base $\{b, c, [b,c]\}$ de B. Logo, temos que B é um ideal de dimensão três de A.

Lema 3.3. *O elemento $a \in A$ age como uma derivação em B.*

Demonstração: Vamos mostrar que o elemento $a \in A$ age como uma derivação em B, ou seja, que

$$[a,[u,v]] = [[a,u],v] + [u,[a,v]],$$

para todo $u, v \in B$. Como o comutador $[\ ,\ ]$ é multilinear, então é suficiente mostrar que $[a,[u,v]] = [[a,u],v] + [u,[a,v]]$, para todo u, v pertencente à base $\{b, c, [b,c]\}$ de B. Como $[[a,b],c] + [b,[a,c]] = 2[b,c] = 0 = [a,[b,c]]$ (pois a característica de K é 2) e este é o único caso não-trivial, então a é uma derivação de B.

∎

Note também que $\frac{A}{B} = \langle a \rangle$, ou seja, que a álgebra de Lie quociente $\frac{A}{B}$ tem dimensão 1. Logo, $\frac{A}{B}$ é uma álgebra de Lie abeliana, já que $[x,y] = [\alpha a, \beta a] = \alpha\beta[a,a] = 0$, para todo $x = \alpha a$ e $y = \beta a$ pertencentes à $\frac{A}{B}$. Portanto, temos que $A' \subseteq B$. Desta forma, podemos afirmar que $A'' \subseteq B'$. Como a álgebra de Lie B' é gerada, como espaço vetorial sobre K, pelo elemento $[b,c]$ que é central em A, então temos que $[A'', A] = 0$, ou seja, que A é uma álgebra de Lie central-por-metabeliana.

Agora, vamos mostrar que A não tem base finita para suas identidades.

Lema 3.4. *A satisfaz a identidade $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0$, para todo $n \geq 3$.*

Demonstração: Será necessário mostrar que $[[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], [a_1, a_2]] = 0$, para todo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A$ e $n \geq 3$. Como na prova do **Lema 3.2**, nós podemos supor que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são elementos da base $\{a, b, c, [b,c]\}$ de A. Se $[a_1, a_2] \neq 0$, então pelo menos um dos a_1, a_2 deve ser igual à b ou c. Logo, não há perda de generalidade em supor que $a_1 = b$. Se $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ não está no centro de A, então $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$. Portanto, temos que

$$[[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n], [a_1, a_2]] = [[b, a, \ldots, a], [b, a]] = [b, b] = 0.$$

Logo, A satisfaz a identidade $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]] = 0$, para todo $n \geq 3$.

∎

Agora, suponha que $w = w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é uma identidade em A, onde $w \in F$. Como K é um corpo infinito, então nós podemos supor, pelo **Corolário 1.49** do **Capítulo 1**, que w é homogêneo de grau r_i em relação à y_i (para todo $i = 1, 2, \ldots, n$) e podemos supor também que $r_i > 0$ (para todo $i = 1, 2, \ldots, n$). Logo, pela equação (1.8), vemos que F', módulo F'' (isto é, $\frac{F'}{F''}$), é gerado pelos produtos

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}] \qquad (k \geq 2,\ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k)$$

e escrevendo $[[a, b^{(k-1)}], b] = [a, b^{(k)}] = [a, \underbrace{b, \ldots, b}_{k \text{ fatores}}]$, temos que

$$w = \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i [y_i, y_1^{(r_1)}, \ldots, y_{i-1}^{(r_{i-1})}, y_i^{(r_i - 1)}, y_{i+1}^{(r_{i+1})}, \ldots, y_n^{(r_n)}] \ + \ u(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

para alguns $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in K$ e algum $u \in F''$. Suponha que $\alpha_j \neq 0$ para algum inteiro j $(2 \leq j \leq n)$. Então, substituindo $a + b$ em y_j e substituindo a em y_i $(i \neq j)$ na identidade w, temos que $\alpha_j b = 0$, o que é uma contradição, pois nós supomos que $\alpha_j \neq 0$ e sabemos que b é um elemento (não-nulo) da base de A.

Observação 3.5. Note que $w(a, \ldots, a, a+b, a, \ldots, a) = \alpha_j b = 0$, tendo em vista que w é uma identidade em A e que a subálgebra G de A, gerada por a, b, é metabeliana (ou seja, $G'' = 0$). Por isso que

$$u(a, \ldots, a, a+b, a, \ldots, a) = 0.$$

Logo, temos que $\alpha_j = 0$, para todo j $(2 \leq j \leq n)$. Portanto, $w \in F''$.

Agora, nós vamos considerar dois casos importantes:

Caso 1: Suponha que w não é linear em todas as variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Então, não existe perda de generalidade em supor que $r_1 \geq 2$. Pela equação (1.10), vemos que F'' é gerado pelos elementos da forma

$$[[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}], [y_{i_{k+1}}, y_{i_{k+2}}]],$$

onde $k \geq 2$, $\ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_k$, $\ i_{k+1} > i_{k+2} \leq i_3$, $\ i_2 \geq i_{k+2}$ e $i_1 \geq i_{k+1}$ quando $i_2 = i_{k+2}$. Se pelo menos dois dos $i_1, i_2, \ldots, i_{k+2}$ são iguais à 1, então temos que $i_2 = i_{k+2} = 1$ e, portanto, $i_1 \geq i_{k+1}$.

Deste modo, w pode ser escrito na forma

$$w \ = \sum_{r_i \geq 2}^{2 \leq i \leq n} \alpha_i [[y_i, y_1^{(r_1 - 1)}, y_2^{(r_2)}, \ldots, y_{i-1}^{(r_{i-1})}, y_i^{(r_i - 2)}, y_{i+1}^{(r_{i+1})}, \ldots, y_n^{(r_n)}], [y_i, y_1]] \ +$$

$$\sum_{i > j \geq 2} \beta_{ij} [[y_i, y_1^{(r_1 - 1)}, y_2^{(r_2)}, \ldots, y_{j-1}^{(r_{j-1})}, y_j^{(r_j - 1)}, y_{j+1}^{(r_{j+1})}, \ldots, y_{i-1}^{(r_{i-1})}, y_i^{(r_i - 1)}, y_{i+1}^{(r_{i+1})}, \ldots, y_n^{(r_n)}], [y_j, y_1]],$$

onde o primeiro somatório indica a parte de w na qual $i_1 = i_{k+1}$ e o segundo somatório indica a parte de w em que temos $i_1 > i_{k+1}$. Suponha que $\beta_{ij} \neq 0$ para alguns inteiros i, j (com $i > j$). Então, substituindo $a + b$ em y_i, $a + c$ em y_j e a em y_k, onde $k \neq i, j$, temos que

$$0 = \beta_{ij} [[b, a, \ldots, a], [c, a]] = \beta_{ij} [b, c],$$

o que é uma contradição, pois supomos que $\beta_{ij} \neq 0$ e sabemos que $[b, c]$ é um elemento (não-nulo) da base de A.

Observação 3.6. Note que

$$\beta_{ij}[[b, a, \ldots, a], [c, a]] = \beta_{ij}[b, c] = 0,$$

pois w é uma identidade em A.

Portanto, $\beta_{ij} = 0$, para todo i, j, onde $i > j \geq 2$. Com isto, temos que

$$w = \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ r_i \geq 2}} \alpha_i[[y_i, y_1^{(r_1-1)}, y_2^{(r_2)}, \ldots, y_{i-1}^{(r_{i-1})}, y_i^{(r_i-2)}, y_{i+1}^{(r_{i+1})}, \ldots, y_n^{(r_n)}], [y_i, y_1]],$$

que é a parte de w onde $i_1 = i_{k+1}$. Logo, no *Caso* 1, podemos concluir que w é uma consequência das identidades

$$[[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n], [y_1, y_2]] = 0,$$

onde $n \geq 3$.

Caso 2: Suponha que $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é linear em cada uma das variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Então, o fecho-verbal de w é gerado pelos polinômios $w(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, onde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são monômios de F.

Lema 3.7. *O polinômio $w(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0$, a não ser que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são todos de grau* 1.

Demonstração: Suponha o contrário. Sabemos que não existe perda de generalidade em supor que $w(m_1, m_2, \ldots, m_n) \neq 0$ para alguns $m_1, m_2, \ldots, m_n$, onde o grau de m_1 é maior do que 1. Então, certamente temos que

$$w(y_{n+1}y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \tag{3.1}$$

e $w(y_{n+1}y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é, também, uma identidade em A. Logo, como $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ está contido em F'' e é linear em relação às variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$, temos que

$$w(y_{n+1}y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{3 \leq i \leq n} \alpha_i[[y_i, y_2, y_3, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n], [y_{n+1}, y_1]]$$

para alguns $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n \in K$, os quais não são todos nulos, pois vale a equação (3.1). Com isto, suponha que $\alpha_j \neq 0$, para algum $3 \leq j \leq n$. Assim, substituindo b no lugar de y_j, c no lugar de y_{n+1} e a no lugar de y_k, para todo $k \notin \{j, n+1\}$, temos que

$$0 = \alpha_j[[b, a, \ldots, a], [c, a]] = \alpha_j[b, c],$$

o que é uma contradição, já que nós supomos que $\alpha_j \neq 0$ e sabemos que $[b, c]$ é um elemento (não-nulo) da base de A.

Observação 3.8. Note que

$$\alpha_j[[b, a, \ldots, a], [c, a]] = \alpha_j[b, c] = 0,$$

pois w é uma identidade em A.

Logo, verificamos que $w(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0$, a não ser que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são todos de grau 1.

■

Desta forma, no *Caso* 2, nós podemos concluir que o fecho-verbal de $w(y_1, \ldots, y_n)$ em F é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos polinômios que têm grau n.

Seja $T(A)$ o T-ideal de $L\langle X\rangle$ formado por todas as identidades de A. Portanto, de acordo com a análise feita nos dois casos acima, vemos que $T(A)$ é gerado pela identidade (2.1) e pelos dois tipos seguintes de identidades:

Tipo 1: Identidades da forma $w(x_1, \ldots, x_n)$, tais que o fecho-verbal de $w(y_1, \ldots, y_n)$ em F é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos polinômios que têm grau n. Logo, se f é um polinômio homogêneo do fecho-verbal de $w(x_1, \ldots, x_n)$ em $L\langle X\rangle$ com grau maior que n, então $f \in I$.

Tipo 2: Identidades da forma $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]]$, onde $n \geq 3$.

Suponha, por absurdo, que A tem uma base finita para suas identidades. Então, $T(A)$ é gerado pela identidade (2.1), por um conjunto finito de polinômios do *Tipo* 1 e por um conjunto finito de polinômios do *Tipo* 2. Assim, seja m o grau máximo dos polinômios que pertencem ao conjunto formado por (2.1) e por estes conjuntos finitos e seja

$$P = [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m], [x_1, x_2]].$$

Portanto, temos que

$$P = [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m], [x_1, x_2]] = P_{(2.1)} + P_1 + P_2,$$

onde $P_{(2.1)}$ é um polinômio que pertence à I, P_1 é um polinômio que pertence ao T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 1 de grau menor ou igual a m e P_2 é um polinômio que pertence ao T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 2 de grau menor ou igual a m, ou seja, gerado pelos polinômios $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k], [x_1, x_2]]$, com $k \leq m-2$. Sabendo que o grau de P é $m+2$, então note que cada um destes polinômios pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P_{(2.1)} &= P'_{(2.1)} + P''_{(2.1)} \\ \\ P_1 &= P'_1 + P''_1 \\ \\ P_2 &= P'_2 + P''_2 \end{cases},$$

onde P'_j é a parte homogênea de grau $m+2$ de P_j e P''_j é a soma das partes homogêneas de graus diferentes de $m+2$ de P_j, para todo $j \in \{1, 2, (2.1)\}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P = P_{(2.1)} + P_1 + P_2 &= (P'_{(2.1)} + P''_{(2.1)}) + (P'_1 + P''_1) + (P'_2 + P''_2) \\ \\ &= (P'_{(2.1)} + P'_1 + P'_2) + (P''_{(2.1)} + P''_1 + P''_2). \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que $P - (P'_{(2.1)} + P'_1 + P'_2) - (P''_{(2.1)} + P''_1 + P''_2) = 0$ em $L\langle X\rangle$. Logo, utilizando a **Observação 1.47**, podemos afirmar que

$$P - (P'_{(2.1)} + P'_1 + P'_2) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad P = P'_{(2.1)} + P'_1 + P'_2.$$

Seja I_1 o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 1 que têm grau no máximo m e seja I_2 o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 2 que têm grau no máximo m. Analisando a definição de P_1, temos que $P'_1 \in I_1$, ou seja, que P'_1 é um polinômio homogêneo de grau $m+2$ que pertence a I_1. Portanto, $P'_1 \in I$, isto é, P'_1 é congruente a 0 módulo I. Logo, $P'_{(2.1)} + P'_1 \in I$, ou seja, $P'_{(2.1)} + P'_1 = P'''_{(2.1)}$, onde $P'''_{(2.1)}$ pertence a I. Desta forma, vemos que

$$P = P'_{(2.1)} + P'_1 + P'_2 = P'''_{(2.1)} + P'_2,$$

ou seja, que P é uma consequência da identidade (2.1) e das identidades do *Tipo* 2 que têm grau no máximo m, o que é um absurdo, pois isto contradiz a **Proposição 3.1**.

Logo, A é uma álgebra de Lie de dimensão 4 sobre K que não tem base finita para suas identidades. Isto completa a demonstração do **Teorema 2**.

∎

CAPÍTULO 4

As identidades de uma álgebra de Lie vista como um anel de Lie

Seja $L_{\mathbb{Q}}$ a álgebra de Lie livre sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, livremente gerada por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e seja $L_{\mathbb{Z}}$ o anel de Lie livre, livremente gerado por $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Denotaremos por $V_{\mathbb{Q}}(M)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Q}}$ formado pelas identidades de M e denotaremos por $V_{\mathbb{Z}}(M)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$ formado pelas identidades de M, onde M é a álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$ definida da seguinte maneira:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Neste capítulo, nosso objetivo principal será a demonstração do seguinte teorema, provado por Krasilnikov, em [12]:

Teorema 3 (Krasilnikov). *O T-ideal $V_{\mathbb{Q}}(M)$ é finitamente gerado, apesar de o T-ideal $V_{\mathbb{Z}}(M)$ não ser finitamente gerado.*

Algumas observações iniciais

Seja G uma álgebra de Lie qualquer sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Então, observe que a álgebra G pode ser vista como um anel de Lie. Falamos na **Introdução** que é possível mostrar que se as identidades do anel de Lie G têm uma base finita, então as identidades de G, vista como álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$, também têm uma base finita. De fato, sabemos que $L_{\mathbb{Z}} \subset L_{\mathbb{Q}}$. Denotaremos por $V_{\mathbb{Q}}(G)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Q}}$ formado pelas identidades da álgebra de Lie G e denotaremos por $V_{\mathbb{Z}}(G)$ o T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$ formado pelas identidades do anel de Lie G.

Observe que $V_{\mathbb{Z}}(G) = V_{\mathbb{Q}}(G) \cap L_{\mathbb{Z}}$. Por outro lado, temos que $V_{\mathbb{Q}}(G)$ é gerado, como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, por $V_{\mathbb{Z}}(G)$. De fato, se $f \in L_{\mathbb{Q}}$, então existe um número $m \in \mathbb{Z}$ não-nulo, tal que $m \cdot f$ é um polinômio de Lie com coeficientes inteiros, ou seja, $m \cdot f \in L_{\mathbb{Z}}$. Logo, se $f \in V_{\mathbb{Q}}(G)$, então temos que $m \cdot f \in V_{\mathbb{Z}}(G) = V_{\mathbb{Q}}(G) \cap L_{\mathbb{Z}}$.

Note também que se um conjunto $S \subset L_{\mathbb{Z}}$ gera $V_{\mathbb{Z}}(G)$ como um T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$, então temos que S gera $V_{\mathbb{Q}}(G)$ como um T-ideal em $L_{\mathbb{Q}}$. Em outras palavras, uma base de identidades do anel de Lie G é também uma base de identidades da álgebra de Lie G sobre $\mathbb{Q}$. Logo, se as identidades do anel de Lie G têm uma base finita, então as identidades de G, vista como álgebra de Lie sobre $\mathbb{Q}$, também têm uma base finita.

Demonstração do Teorema 3

Sejam G uma álgebra de Lie sobre um corpo K de característica 0 e $T(G)$ o T-ideal de $L\langle X\rangle$ formado por todas as identidades satisfeitas em G. Seja ad a seguinte representação:

$$\begin{array}{rccl} ad: & G & \rightarrow & End(G) \\ & a & \mapsto & ad(a): x \rightarrow [x,a] \end{array}.$$

Teorema 4.1 (**Il'tyakov [10]**). *Se G é uma álgebra de Lie finitamente gerada como espaço vetorial sobre K, tal que o envolvente de $ad(G)$ em $End(G)$ é uma PI-álgebra, então $T(G)$ é um T-ideal finitamente gerado na álgebra de Lie livre $L\langle X\rangle$.*

Para provar o **Teorema 3**, vamos utilizar o seguinte teorema de Il'tyakov [10], que é uma consequência do **Teorema 4.1**:

Teorema 4.2 (**Il'tyakov**). *Toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica 0 possui uma base finita para suas identidades.*

Note que este teorema é uma consequência do **Teorema 4.1**. De fato, se $dim\ G = n < \infty$, então $dim\ End(G) = n^2 < \infty$. Logo, a álgebra associativa $End(G)$ satisfaz a identidade multilinear $s_{n^2+1}(x_1, \ldots, x_{n^2+1}) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_{n^2+1}} (\text{sign}\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n^2+1)}$, ou seja, $End(G)$ é uma

PI-álgebra. Portanto, pelo **Teorema 4.1**, podemos afirmar que G possui uma base finita para suas identidades.

Como M é uma álgebra de Lie de dimensão 4 sobre o corpo $\mathbb{Q}$ de característica 0, então, pelo **Teorema 4.2**, a álgebra M tem uma base finita para suas identidades, ou seja, o T-ideal $V_{\mathbb{Q}}(M)$ em $L_{\mathbb{Q}}$ é finitamente gerado.

Portanto, para completar a demostração do **Teorema 3**, falta provar que $V_{\mathbb{Z}}(M)$ não é finitamente gerado como um T-ideal no anel de Lie livre $L_{\mathbb{Z}}$. Antes disto, vamos mostrar que M satisfaz a identidade

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = 0. \tag{4.1}$$

Lema 4.3. *A álgebra de Lie M é central-por-metabeliana, isto é, satisfaz a identidade* (4.1).

Demonstração: Sejam a, b, c, d, f elementos quaisquer da álgebra de Lie M, tais que

$$a = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots \ , d = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & d_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } f = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{22}, b_{22}, c_{22}, d_{22} \in \mathbb{Q}$ e $*$ representa números racionais que não interferem no resultado. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & b_{22}a_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que

$$[c,d] = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
[[a,b],[c,d]] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos observar que

$$\begin{aligned}
[[a,b],[c,d],f] &= \left[[[a,b],[c,d]], \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a álgebra de Lie M é central-por-metabeliana. Isto completa a demonstração deste lema.

$\blacksquare$

Para todo $l \geq 5$, seja U_l o T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$ gerado pela identidade (4.1) e por todas as outras identidades de grau até no máximo l satisfeitas na álgebra M vista como um anel de Lie. Então, temos que

$$U_5 \subseteq U_6 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq \cdots$$

e

$$V_{\mathbb{Z}}(M) = \bigcup_{l=5}^{\infty} U_l \ . \tag{4.2}$$

Logo, para completar a demonstração do **Teorema 3** é suficiente provar que a cadeia de T-ideais acima satisfaz a seguinte regra de inclusões **próprias**

$$U_5 \subsetneq U_6 \subseteq U_7 \subsetneq U_8 \subseteq \cdots \subseteq U_{2n-1} \subsetneq U_{2n} \subseteq U_{2n+1} \subsetneq \cdots \qquad (n \geq 3). \tag{4.3}$$

De fato, suponha que vale (4.3). Queremos mostrar que $V_{\mathbb{Z}}(M)$ **não** é finitamente gerado como um T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$. Portanto, suponha que $V_{\mathbb{Z}}(M)$ é finitamente gerado como um T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$, isto é, existem $v_1, \ldots, v_k$ identidades de M, tais que $V_{\mathbb{Z}}(M) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Como vale (4.2), então existe $l_0 \in \{5, 6, \ldots\}$, tal que $v_i \in U_{l_0}$, para todo $1 \leq i \leq k$, ou seja,

$$V_{\mathbb{Z}}(M) = \bigcup_{l=5}^{\infty} U_l = U_{l_0}$$

e, pela cadeia (4.3), temos que existe $l_1 \in \{5, 6, \ldots\}$, tal que

$$U_{l_0} \subsetneq U_{l_1}$$

(onde $l_1 > l_0$), o que é uma contradição.

Seja $P = \mathbb{Z}[t_i \mid i \in \mathbb{N}]$ o anel de polinômios com coeficientes inteiros sobre um conjunto infinito enumerável de variáveis. Seja H o anel de Lie dado por

$$H = \begin{pmatrix} 0 & P & P \\ 0 & P & P \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; p_{ij} \in P \right\}.$$

Observe que M e H podem também ser vistos como anéis associativos, onde a soma e a multiplicação de matrizes são as usuais.

Lema 4.4. *Existe um homomorfismo sobrejetivo do anel associativo H para o anel associativo M.*

Demonstração: Antes provarmos que existe um homomorfismo sobrejetivo do anel associativo H para o anel associativo M, observe que $\mathbb{Q}$ é uma imagem homomórfica de P. De fato, sabemos que o conjunto $X = \{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ das variáveis de P é infinito enumerável e $\mathbb{Q}$ também é, então existe uma bijeção

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & t_i & \longmapsto & q_i \end{array}$$

entre X e $\mathbb{Q}$. Portanto, sejam $p_k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ um polinômio qualquer de P tal que

$$p_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) = n_1 t_1^{m_{11}} \ldots\ t_k^{m_{1k}} + n_2 t_1^{m_{21}} \ldots\ t_k^{m_{2k}} + \ldots + n_j t_1^{m_{j1}} \ldots\ t_k^{m_{jk}},$$

(onde $k \in \mathbb{N}$ é o maior índice das variáveis que aparecem em p_k, $n_l \in \mathbb{Z}$ e $m_{uv} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) e φ a função de P até $\mathbb{Q}$ definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi(p_k(t_1, t_2, \ldots, t_k)) &= \varphi(n_1 t_1^{m_{11}} \ldots\ t_k^{m_{1k}} + n_2 t_1^{m_{21}} \ldots\ t_k^{m_{2k}} + \ldots + n_j t_1^{m_{j1}} \ldots\ t_k^{m_{jk}}) \\ &:= n_1 q_1^{m_{11}} \ldots\ q_k^{m_{1k}} + n_2 q_1^{m_{21}} \ldots\ q_k^{m_{2k}} + \ldots + n_j q_1^{m_{j1}} \ldots\ q_k^{m_{jk}}\ . \end{aligned}$$

Observe que a função φ é um homomorfismo sobrejetivo de P para $\mathbb{Q}$. De fato, se p_1, p_2 são dois polinômios quaisquer de P, tais que

$$p_1 = p_1(t_1, t_2, \ldots, t_k) = a_1 t_1^{\alpha_{11}} \ldots\ t_k^{\alpha_{1k}} + a_2 t_1^{\alpha_{21}} \ldots\ t_k^{\alpha_{2k}} + \ldots + a_j t_1^{\alpha_{j1}} \ldots\ t_k^{\alpha_{jk}}$$

e

$$p_2 = p_2(t_1, t_2, \ldots, t_k) = b_1 t_1^{\beta_{11}} \ldots\ t_k^{\beta_{1k}} + b_2 t_1^{\beta_{21}} \ldots\ t_k^{\beta_{2k}} + \ldots + b_i t_1^{\beta_{i1}} \ldots\ t_k^{\beta_{ik}}\ ,$$

(onde $k \in \mathbb{N}$ é o maior índice das variáveis que aparecem em p_1 e em p_2 , $\alpha_{n_1 m_1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\beta_{n_2 m_2} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todos os $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{N}$), então temos que

$$\begin{aligned} \varphi(p_1 + p_2) &= \varphi(a_1 t_1^{\alpha_{11}} \ldots\ t_k^{\alpha_{1k}} + \ldots + a_j t_1^{\alpha_{j1}} \ldots\ t_k^{\alpha_{jk}} + b_1 t_1^{\beta_{11}} \ldots\ t_k^{\beta_{1k}} + \ldots + b_i t_1^{\beta_{i1}} \ldots\ t_k^{\beta_{ik}}) \\ &= a_1 q_1^{\alpha_{11}} \ldots\ q_k^{\alpha_{1k}} + \ldots + a_j q_1^{\alpha_{j1}} \ldots\ q_k^{\alpha_{jk}} + b_1 q_1^{\beta_{11}} \ldots\ q_k^{\beta_{1k}} + \ldots + b_i q_1^{\beta_{i1}} \ldots\ q_k^{\beta_{ik}} \\ &= \varphi(p_1) + \varphi(p_2) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\varphi(p_1p_2) &= \varphi\Big((a_1t_1^{\alpha_{11}}\dots\ t_k^{\alpha_{1k}}+\dots+a_jt_1^{\alpha_{j1}}\dots\ t_k^{\alpha_{jk}})(b_1t_1^{\beta_{11}}\dots\ t_k^{\beta_{1k}}+\dots+b_it_1^{\beta_{i1}}\dots\ t_k^{\beta_{ik}})\Big)\\
&= \varphi\left(\sum_{l=1}^{i}a_1b_lt_1^{\alpha_{11}+\beta_{l1}}\dots\ t_k^{\alpha_{1k}+\beta_{lk}}+\dots+\sum_{l=1}^{i}a_jb_lt_1^{\alpha_{j1}+\beta_{l1}}\dots\ t_k^{\alpha_{jk}+\beta_{lk}}\right)\\
&= \varphi\left(\sum_{m=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}a_mb_lt_1^{\alpha_{m1}+\beta_{l1}}\dots\ t_k^{\alpha_{mk}+\beta_{lk}}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}a_mb_lq_1^{\alpha_{m1}+\beta_{l1}}\dots\ q_k^{\alpha_{mk}+\beta_{lk}}\\
&= \sum_{l=1}^{i}a_1b_lq_1^{\alpha_{11}+\beta_{l1}}\dots\ q_k^{\alpha_{1k}+\beta_{lk}}+\dots+\sum_{l=1}^{i}a_jb_lq_1^{\alpha_{j1}+\beta_{l1}}\dots\ q_k^{\alpha_{jk}+\beta_{lk}}\\
&= (a_1q_1^{\alpha_{11}}\dots\ q_k^{\alpha_{1k}}+\dots+a_jq_1^{\alpha_{j1}}\dots\ q_k^{\alpha_{jk}})(b_1q_1^{\beta_{11}}\dots\ q_k^{\beta_{1k}}+\dots+b_iq_1^{\beta_{i1}}\dots\ q_k^{\beta_{ik}})\\
&= \varphi(p_1)\varphi(p_2)\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja, φ é um homomorfismo de P para $\mathbb{Q}$. Note que φ é uma aplicação sobrejetiva, já que para todo $q_i \in \mathbb{Q}$, existe um $p_i \in P$ $(p_i = t_i)$ tal que $\varphi(p_i) = q_i$. Com isto, provamos que $\mathbb{Q}$ é a imagem de um homomorfismo de P para $\mathbb{Q}$.

Agora, vamos mostrar que M é a imagem de um homomorfismo do anel associativo H para o anel associativo M. Sejam h_f e h_g duas matrizes quaisquer de H, tais que

$$
h_f = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13}\\ 0 & f_{22} & f_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h_g = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13}\\ 0 & g_{22} & g_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},
$$

onde $f_{ij}, g_{ij} \in P$, para todo $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$. Seja ψ uma função de H para M definida por

$$
\begin{aligned}
\psi: \quad & H & \longrightarrow \quad & M\\
& \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13}\\ 0 & p_{22} & p_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \longmapsto \quad & \begin{pmatrix} 0 & \varphi(p_{12}) & \varphi(p_{13})\\ 0 & \varphi(p_{22}) & \varphi(p_{23})\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

onde φ é a função definida no início da demonstração deste lema, $p_{ij} \in P$ e $\varphi(p_{ij}) \in \mathbb{Q}$, para todo $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$. Vamos mostrar que ψ é um homomorfismo sobrejetivo de H para M em relação a soma e a multiplicação usual de matrizes.

Primeiro vamos mostrar que ψ é uma aplicação sobrejetiva. De fato, seja

$$m = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uma matriz qualquer de M, onde $q_{ij} \in \mathbb{Q}$, para todo $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$. Como φ é uma aplicação sobrejetiva, então, para cada $q_{ij} \in \mathbb{Q}$ com $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$, existe um polinômio $p_{ij} \in P$, tal que $\varphi(p_{ij}) = q_{ij}$. Logo, existe uma matriz

$$h_m = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de H, tal que $\psi(h_m) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(p_{12}) & \varphi(p_{13}) \\ 0 & \varphi(p_{22}) & \varphi(p_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = m$, ou seja, ψ é também uma aplicação sobrejetiva. Agora, note que

$$\begin{aligned} \psi(h_f + h_g) &= \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & f_{12}+g_{12} & f_{13}+g_{13} \\ 0 & f_{22}+g_{22} & f_{23}+g_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Logo, pela definição de ψ, vemos que

$$\psi(h_f + h_g) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12}+g_{12}) & \varphi(f_{13}+g_{13}) \\ 0 & \varphi(f_{22}+g_{22}) & \varphi(f_{23}+g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como φ é um homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(h_f + h_g) &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12}) + \varphi(g_{12}) & \varphi(f_{13}) + \varphi(g_{13}) \\ 0 & \varphi(f_{22}) + \varphi(g_{22}) & \varphi(f_{23}) + \varphi(g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12}) & \varphi(f_{13}) \\ 0 & \varphi(f_{22}) & \varphi(f_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varphi(g_{12}) & \varphi(g_{13}) \\ 0 & \varphi(g_{22}) & \varphi(g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \psi(h_f) + \psi(h_g).
\end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
\psi(h_f \cdot h_g) &= \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & f_{12} \cdot g_{22} & f_{12} \cdot g_{23} \\ 0 & f_{22} \cdot g_{22} & f_{22} \cdot g_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de ψ, vemos que

$$\psi(h_f \cdot h_g) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12} \cdot g_{22}) & \varphi(f_{12} \cdot g_{23}) \\ 0 & \varphi(f_{22} \cdot g_{22}) & \varphi(f_{22} \cdot g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como φ é um homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(h_f \cdot h_g) &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12}) \cdot \varphi(g_{22}) & \varphi(f_{12}) \cdot \varphi(g_{23}) \\ 0 & \varphi(f_{22}) \cdot \varphi(g_{22}) & \varphi(f_{22}) \cdot \varphi(g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \varphi(f_{12}) & \varphi(f_{13}) \\ 0 & \varphi(f_{22}) & \varphi(f_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \varphi(g_{12}) & \varphi(g_{13}) \\ 0 & \varphi(g_{22}) & \varphi(g_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \psi(h_f) \cdot \psi(h_g).
\end{aligned}$$

Portanto, provamos que ψ é um homomorfismo sobrejetivo do anel associativo H para o anel associativo M.

■

Corolário 4.5. *Existe um homomorfismo sobrejetivo do anel de Lie H para o anel de Lie M.*

Demonstração: Vamos provar que a aplicação ψ, definida no **Lema 4.4**, é um homomorfismo sobrejetivo do anel de Lie H para o anel de Lie M. Já mostramos que ψ é uma aplicação sobrejetiva, então falta provar que ψ é um homomorfismo do anel de Lie H para o anel de Lie M. Usando as equações

$$\psi(h_1 + h_2) = \psi(h_1) + \psi(h_2)$$

e

$$\psi(h_1 \cdot h_2) = \psi(h_1) \cdot \psi(h_2),$$

provadas no lema anterior, onde h_1, h_2 são elementos quaisquer de H, temos que

$$\begin{aligned} \psi([h_f, h_g]) &= \psi\left(h_f \cdot h_g - h_g \cdot h_f\right) \\ &= \psi\left(h_f \cdot h_g\right) - \psi\left(h_g \cdot h_f\right) \\ &= \psi(h_f) \cdot \psi(h_g) - \psi(h_g) \cdot \psi(h_f) \\ &= \left[\psi(h_f), \psi(h_g)\right], \end{aligned}$$

para todo $h_f, h_g \in H$. Desta forma, temos que ψ é um homomorfismo sobrejetivo de H para M, ou seja, M é a imagem do homomorfismo ψ.

■

Corolário 4.6. $\dfrac{H}{Ker(\psi)} \cong M$ *.*

Demonstração: Consequência imediata do **Teorema do Homomorfismo**, onde M é a imagem do homomorfismo ψ e o ideal (de H) $Ker(\psi)$ é o seu núcleo.

■

Lema 4.7. *Toda identidade do anel de Lie H é satisfeita pelo anel de Lie M, ou seja, $V_{\mathbb{Z}}(H) \subseteq V_{\mathbb{Z}}(M)$.*

Demonstração: Seja K um ideal qualquer de H. Portanto, pelo **Corolário 1.36** do **Capítulo 1**, temos que toda identidade de H é satisfeita pelo anel quociente $\dfrac{H}{K}$. Logo, tomando $K = Ker(\psi)$ e usando **Corolário 4.6**, temos que toda identidade de H é satisfeita por M, ou seja, $V_{\mathbb{Z}}(H) \subseteq V_{\mathbb{Z}}(M)$.

$\blacksquare$

Lema 4.8. *A interseção dos núcleos de todos os homomorfismos de H para M é trivial.*

Demonstração: Vamos mostrar que se para todo homomorfismo $\overline{\xi}$ de H para M, temos que $\overline{\xi}(h) = 0$ para algum $h \in H$ fixo, então $h = 0$. Em outras palavras, se $\{\xi_i\}_{i \in I}$ é a família de todos os homomorfismos de H para M, tal que $\xi_i(h) = 0$ para todo $i \in I$, então temos que h é um elemento nulo de H, ou seja, a interseção dos núcleos de todos os homomorfismos ξ_i é trivial.

Logo, seja $h = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ um elemento qualquer de H, onde $f_{ij} = f_{ij}(t_1, \ldots, t_k)$ são polinômios de P, tais que $k \in \mathbb{N}$ é o maior índice das variáveis que aparecem em $f_{12}, \ldots, f_{23}$. Seja $\{\xi_l\}_{l \in L}$ a família de todos os homomorfismos de H para M. Se $\xi_l(h) = 0$, para todo $l \in L$, então temos que $f_{ij}(q_1, \ldots, q_k) = 0$, para todo $q_s \in \mathbb{Q}$. Portanto, podemos afirmar que $f_{ij} = 0$, para todo $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{2, 3\}$, ou seja, que $h = 0$. Isto completa a prova deste lema.

$\blacksquare$

Desta forma, provamos que se ξ é o homomorfismo de H para o produto Cartesiano $\prod_{l \in L} M$ definido por

$$\begin{array}{rrcl} \xi : & H & \to & \prod_{l \in L} M \\ & h & \mapsto & (\ \xi_1(h),\ \ldots\ , \xi_l(h),\ \ldots\ ) \end{array} ,$$

então o seu núcleo $Ker\ (\xi) = \bigcap_{l \in L} Ker\ (\xi_l) = \{0\}$, ou seja, ξ é um homomorfismo injetivo de H para o produto Cartesiano de L cópias de M. Com isto, vemos que $H \subseteq \prod_{l \in L} M$. Em outras palavras, temos que H é uma subanel de Lie de $\prod_{l \in L} M$.

Lema 4.9. *Toda identidade do anel de Lie M é satisfeita pelo anel de Lie H, ou seja, $V_{\mathbb{Z}}(M) \subseteq V_{\mathbb{Z}}(H)$.*

Demonstração: Pelo **Corolário 1.36** dado no **Capítulo 1**, temos que se M satisfaz uma identidade, então o produto Cartesiano de L cópias de M também satisfaz esta identidade. Como H é um subanel de Lie de $\prod_{l \in L} M$ e toda identidade de M é satisfeita por $\prod_{l \in L} M$, então, usando novamente o **Corolário 1.36**, temos que toda identidade do anel de Lie M é satisfeita pelo anel de Lie H, isto é, que $V_{\mathbb{Z}}(M) \subseteq V_{\mathbb{Z}}(H)$. Isto completa a demonstração deste lema.

■

Lema 4.10. *Os conjuntos formados pelas identidades dos anéis de Lie M e H coincidem, ou seja, $V_{\mathbb{Z}}(M) = V_{\mathbb{Z}}(H)$.*

Demonstração: Segue imediatamente do **Lema 4.7** e do **Lema 4.9**.

■

Seja K um corpo infinito enumerável de característica 2 e seja $\overline{H}$ uma álgebra de Lie sobre K, tal que

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 4.11. *O corpo K é uma imagem homomórfica do anel de polinômios P e a álgebra $\overline{H}$, vista como um anel de Lie, é uma imagem homomórfica do anel de Lie H.*

Demonstração: A prova é análoga à demonstração do **Lema 4.4** e do **Corolário 4.5**.

■

Sabemos que a álgebra A, construída no **Capítulo 3**, é uma álgebra de Lie sobre um corpo infinito K de característica 2 gerada pelos elementos a, b, c, tais que

$$[a, b] = b \quad , \quad [a, c] = c \quad , \quad [a, [b, c]] = [b, [b, c]] = [c, [b, c]] = 0.$$

A álgebra A tem dimensão 4 e os elementos $a, b, c, [b, c]$ formam a sua base. Só para lembrar, as matrizes $a, b, c, [b, c]$ são

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } [b, c] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja e_{ij}, com $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$, a matriz em $\overline{H}$, tal que tem 1 na posição (i,j) e 0 no resto, ou seja,

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isto, podemos afirmar que a álgebra de Lie $\overline{H}$ tem dimensão 4 e a sua base é o conjunto formado pelos elementos $e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}$. Observe que, para todo $i,k \in \{1,2\}$ e $j,l \in \{2,3\}$, temos que

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{se } j = k; \\ \\ 0, & \text{se } j \neq k; \end{cases}.$$

Portanto, vemos que

$$e_{12} \cdot e_{13} = 0 \ \text{ e } \ e_{13} \cdot e_{12} = 0, \ \text{ ou seja, } \ [e_{12}, e_{13}] = e_{12} \cdot e_{13} - e_{13} \cdot e_{12} = 0;$$

$$e_{12} \cdot e_{22} = e_{12} \ \text{ e } \ e_{22} \cdot e_{12} = 0, \ \text{ isto é, } \ [e_{12}, e_{22}] = e_{12} \cdot e_{22} - e_{22} \cdot e_{12} = e_{12};$$

$$e_{12} \cdot e_{23} = e_{13} \ \text{ e } \ e_{23} \cdot e_{12} = 0, \ \text{ ou seja, } \ [e_{12}, e_{23}] = e_{12} \cdot e_{23} - e_{23} \cdot e_{12} = e_{13};$$

$$e_{13} \cdot e_{22} = 0 \ \text{ e } \ e_{22} \cdot e_{13} = 0, \ \text{ isto é, } \ [e_{13}, e_{22}] = e_{13} \cdot e_{22} - e_{22} \cdot e_{13} = 0;$$

$$e_{13} \cdot e_{23} = 0 \ \text{ e } \ e_{23} \cdot e_{13} = 0, \ \text{ ou seja, } \ [e_{13}, e_{23}] = e_{13} \cdot e_{23} - e_{23} \cdot e_{13} = 0;$$

$$e_{22} \cdot e_{23} = e_{23} \ \text{ e } \ e_{23} \cdot e_{22} = 0, \ \text{ isto é, } \ [e_{22}, e_{23}] = e_{22} \cdot e_{23} - e_{23} \cdot e_{22} = e_{23}.$$

Portanto, olhando a multiplicação entre os elementos da álgebra de Lie $\overline{H}$, podemos concluir que o elemento e_{13} é central em $\overline{H}$. De fato, a tabela de multiplicação da álgebra de Lie $\overline{H}$ sobre o corpo K de característica 2 é

[,]	e_{12}	e_{13}	e_{22}	e_{23}
e_{12}	0	0	e_{12}	e_{13}
e_{13}	0	0	0	0
e_{22}	e_{12}	0	0	e_{23}
e_{23}	e_{13}	0	e_{23}	0

,

onde vemos que e_{13} é central em $\overline{H}$. Agora, observe que a tabela de multiplicação da álgebra de Lie A sobre K é

$[\ ,\ ]$	b	$[b,c]$	a	c
b	0	0	b	$[b,c]$
$[b,c]$	0	0	0	0
a	b	0	0	c
c	$[b,c]$	0	c	0

,

onde $[b,c]$ é central em A.

Seja $\overline{h}$ um elemento qualquer de $\overline{H}$, tal que

$$\overline{h} = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $k_{ij} \in K$, para todo $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{2,3\}$. Vemos que $\overline{h}$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de $\overline{H}$ da seguinte maneira:

$$\overline{h} = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = k_{12} \cdot e_{12} + k_{13} \cdot e_{13} + k_{22} \cdot e_{22} + k_{23} \cdot e_{23}.$$

Seja σ a aplicação linear da álgebra de Lie $\overline{H}$ para a álgebra de Lie A, tal que

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \overline{H} & \rightarrow & A \\ & e_{12} & \mapsto & b \\ & e_{13} & \mapsto & [b,c] \\ & e_{22} & \mapsto & a \\ & e_{23} & \mapsto & c \end{array},$$

onde a imagem de $\overline{h}$ por σ é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma(\overline{h}) = \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \sigma(k_{12} \cdot e_{12} + k_{13} \cdot e_{13} + k_{22} \cdot e_{22} + k_{23} \cdot e_{23}) \\ &:= k_{12} \cdot \sigma(e_{12}) + k_{13} \cdot \sigma(e_{13}) + k_{22} \cdot \sigma(e_{22}) + k_{23} \cdot \sigma(e_{23}) \\ &= k_{12} \cdot b + k_{13} \cdot [b,c] + k_{22} \cdot a + k_{23} \cdot c. \end{aligned}$$

Lema 4.12. *A aplicação σ é um homomorfismo da álgebra de Lie $\overline{H}$ para a álgebra de Lie A.*

Demonstração: Observe primeiro que

$$\begin{aligned}
[\alpha x + \beta y, \gamma z + \delta w] &= [\alpha x, \gamma z] + [\alpha x, \delta w] + [\beta y, \gamma z] + [\beta y, \delta w] \\
&= (\alpha x \cdot \gamma z - \gamma z \cdot \alpha x) + \ldots + (\beta y \cdot \delta w - \delta z \cdot \beta x) \\
&= \alpha\gamma(x \cdot z - z \cdot x) + \ldots + \beta\delta(y \cdot w - z \cdot x) \\
&= \alpha\gamma[x, z] + \alpha\delta[x, w] + \beta\gamma[y, z] + \beta\delta[y, w] \ ,
\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ e $x, y, z, w \in \overline{H}$, ou seja, que o comutador $[\ ,\ ]$ é bilinear. Note também que a "imagem" pela aplicação σ da tabela de multiplicação de $\overline{H}$ é a tabela de multiplicação de A. Queremos mostrar que σ é um homomorfismo de $\overline{H}$ para A, isto é, que

$$\sigma([\overline{u}, \overline{v}]) = [\sigma(\overline{u}), \sigma(\overline{v})] \ ,$$

para todo $\overline{u}, \overline{v} \in \overline{H}$. Como qualquer elemento de $\overline{H}$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da sua base e o comutador é bilinear, então basta verificarmos a igualdade acima somente para os elementos da base de $\overline{H}$, ou seja,

$$\sigma([e_{ij}, e_{nm}]) = [\sigma(e_{ij}), \sigma(e_{nm})] \ , \tag{4.4}$$

para todo $i, n \in \{1, 2\}$ e $j, m \in \{2, 3\}$. Como a aplicação σ leva a tabela de multiplicação de $\overline{H}$ na tabela de multiplicação de A, então claramente vemos que vale a equação (4.4). Logo, σ é um homomorfismo de $\overline{H}$ para A.

■

Lema 4.13. *A aplicação σ é uma bijeção entre as álgebras de Lie $\overline{H}$ e A.*

Demonstração: Primeiro, observe que σ é sobrejetiva. De fato, como σ é uma aplicação linear e todo elemento da base $\{a, b, c, [b, c]\}$ de A é imagem de algum elemento da base $\{e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$ de $\overline{H}$, então todo elemento de A é imagem de algum elemento de $\overline{H}$, ou seja, $\sigma(\overline{H}) = A$. Logo, vemos que σ é realmente uma função sobrejetiva.

Agora, vamos mostrar que σ é uma aplicação injetiva. De fato, seja

$$\overline{h} = k_{12} \cdot e_{12} + k_{13} \cdot e_{13} + k_{22} \cdot e_{22} + k_{23} \cdot e_{23}$$

um elemento qualquer de $\overline{H}$, onde $k_{ij} \in K$, para todo $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{2, 3\}$. Se $\overline{h} \in Ker(\sigma)$, então temos que

$$\sigma(\overline{h}) = \sigma(k_{12} \cdot e_{12} + k_{13} \cdot e_{13} + k_{22} \cdot e_{22} + k_{23} \cdot e_{23}) = k_{12} \cdot b + k_{13} \cdot [b, c] + k_{22} \cdot a + k_{23} \cdot c = 0.$$

Como $a, b, c, [b, c]$ são linearmente independentes, já que estes elementos formam a base de A, então temos que

$$\begin{cases} k_{12} &= 0 \\ k_{13} &= 0 \\ k_{22} &= 0 \\ k_{23} &= 0 \end{cases}.$$

Portanto, temos que $\overline{h} = 0$, ou seja, $Ker(\sigma) = \{0\}$. Isto implica que σ é injetiva. Logo, provamos que σ é uma bijeção entre $\overline{H}$ e A.

■

Lema 4.14. *A álgebra de Lie $\overline{H}$ é isomorfa à álgebra de Lie A construída no* **Capítulo 3**.

Demonstração: A prova segue imediatamente do **Lema 4.12** e do **Lema 4.13**.

■

Observação 4.15. Pelo **Lema 4.9**, sabemos que toda identidade do anel de Lie M é satisfeita pelo anel de Lie H e, pelo **Lema 4.11**, sabemos também que toda identidade do anel de Lie H é satisfeita pelo anel de Lie $\overline{H}$, pois temos que $\overline{H}$ é uma imagem homomórfica de H. Portanto, toda identidade do anel de Lie M é satisfeita pelo anel de Lie $\overline{H}$.

Para todo $l \geq 5$, seja W_l o T-ideal em $L_{\mathbb{Z}}$ gerado pela identidade (4.1) e por todas as outras identidades de grau até no máximo l satisfeitas na álgebra $\overline{H}$ vista como um anel de Lie. Então, pela **Observação 4.15**, podemos afirmar que $U_l \subset W_l$, para todo $l \geq 5$. Agora, para todo $m \geq 3$, seja

$$v_m = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, [x_1, x_2]] = [[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m], [x_1, x_2]] \in L_{\mathbb{Z}}.$$

Lema 4.16. *Para todo $k \geq 2$, as identidades v_{2k} são satisfeitas em M.*

Demonstração: Observe que o comutador de duas matrizes quaisquer de M é uma matriz triangular superior com diagonal nula. Desta forma, seja

$$[x_1, x_2] = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & * \\ 0 & 0 & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M,$$

onde $P_{12}, P_{23} \in \mathbb{Q}$ e $*$ representa números racionais que não interferem na demonstração deste lema. Para todo $i \in \{3, 4, \ldots\}$, seja

$$x_i = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \alpha_i & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ e $*$ representa números racionais que não interferem na demonstração deste lema. Desta forma, note que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] &= [x_1, x_2] \cdot x_3 - x_3 \cdot [x_1, x_2] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \cdot \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & P_{23} \cdot \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \cdot \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & -P_{23} \cdot \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_4] = [[x_1, x_2, x_3], x_4] &= [x_1, x_2, x_3] \cdot x_4 - x_4 \cdot [x_1, x_2, x_3] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 & * \\ 0 & 0 & +P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $m \geq 3$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m] &= \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m & * \\ 0 & 0 & (-1)^m P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & A_m & * \\ 0 & 0 & B_m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde $A_m = P_{12} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m$ e $B_m = (-1)^m \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m$. Logo, para todo $m \geq 3$, temos que

$$\begin{aligned}
v_m = [[x_1, x_2, \ldots, x_m], [x_1, x_2]] &= [x_1, x_2, \ldots, x_m] \cdot [x_1, x_2] - [x_1, x_2] \cdot [x_1, x_2, \ldots, x_m] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_m \cdot P_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_m \cdot P_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (A_m \cdot P_{23} - B_m \cdot P_{12}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para todo $m \geq 3$, note que

$$\begin{aligned}
A_m \cdot P_{23} - B_m \cdot P_{12} &= P_{12} \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \; - \; (-1)^m \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \\
&= (1 - (-1)^m) \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_m.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $k \geq 2$, temos que

$$A_{2k} \cdot P_{23} - B_{2k} \cdot P_{12} = (1-1) \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2k} = 0 \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2k} = 0,$$

ou seja, o anel de Lie M satisfaz as identidades v_{2k}.

■

Sabendo que todas as identidades v_{2k} $(k \geq 2)$ são satisfeitas no anel de Lie M e usando a **Observação 4.15**, podemos afirmar que elas são satisfeitas também nos anéis de Lie H e $\overline{H}$.

Seja $L\langle X\rangle$ a álgebra de Lie livre sobre K, livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ e seja I o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pela identidade (4.1). Seja $F = \dfrac{L\langle X\rangle}{I}$ a álgebra de Lie livre central-por-metabeliana sobre K gerada por Y, onde $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ tal que $y_i = x_i + I$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $T(A)$ o T-ideal de $L\langle X\rangle$ formado por todas as identidades de A. Como a álgebra de Lie A é central-por-metabeliana, então temos que $I \subseteq T(A)$.

De acordo com a análise feita nos dois casos estudados no final da prova do **Teorema 2** do **Capítulo 3**, temos que $T(A)$ é gerado pela identidade (2.1) e pelos dois tipos seguintes de identidades:

Tipo 1: Identidades da forma $w(x_1, \ldots, x_n)$, tais que o fecho-verbal de $w(y_1, \ldots, y_n)$ em F é gerado, como espaço vetorial sobre K, pelos polinômios que têm grau n. Logo, se f é um polinômio homogêneo do fecho-verbal de $w(x_1, \ldots, x_n)$ em $L\langle X\rangle$ com grau maior que n, então $f \in I$.

Tipo 2: Identidades da forma $[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], [x_1, x_2]]$, onde $n \geq 3$.

Note que, pelo **Lema 4.14**, a álgebra de Lie $\overline{H}$ é isomorfa à álgebra de Lie A. Logo, podemos afirmar que as álgebras $\overline{H}$ e A têm as mesmas identidades, isto é, que $T(\overline{H}) = T(A)$, onde $T(\overline{H})$ é o T-ideal de $L\langle X\rangle$ formado por todas as identidades de $\overline{H}$.

Lema 4.17. *Para todo $l \geq 4$, temos que $v_l \notin W_{l+1}$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe um $l_0 \in \{4, 5, \ldots\}$, tal que $v_{l_0} \in W_{l_0+1}$. Para todo $l \geq 4$, sabemos que v_l é uma identidade em $\overline{H}$. Logo, v_{l_0} é uma identidade em $\overline{H}$. Como o T-ideal $T(\overline{H})$ é gerado por (4.1) e pelos dois tipos acima de identidades, então v_{l_0} pode ser escrito como combinação linear destas identidades da seguinte maneira:

$$v_{l_0} = P_{(4.1)} + P_1 + P_2,$$

onde $P_{(4.1)}$ é um polinômio que pertence a I, P_1 é um polinômio que pertence ao T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 1 que têm grau no máximo l_0+1 e P_2 é um polinômio que pertence ao T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 2 que têm grau no máximo $l_0 + 1$. Sabendo que o grau de v_{l_0} é $l_0 + 2$, então note que cada um destes polinômios pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P_{(4.1)} & = & P'_{(4.1)} + P''_{(4.1)} \\ \\ P_1 & = & P'_1 + P''_1 \\ \\ P_2 & = & P'_2 + P''_2 \end{cases},$$

onde P'_j é a parte homogênea de grau $l_0 + 2$ de P_j e P''_j é a soma das partes homogêneas de graus diferentes de $l_0 + 2$ de P_j, para todo $j \in \{(4.1), 1, 2\}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} v_{l_0} = P_{(4.1)} + P_1 + P_2 &= (P'_{(4.1)} + P''_{(4.1)}) + (P'_1 + P''_1) + (P'_2 + P''_2) \\ &= (P'_{(4.1)} + P'_1 + P'_2) + (P''_{(4.1)} + P''_1 + P''_2). \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que $v_{l_0} - (P'_{(4.1)} + P'_1 + P'_2) - (P''_{(4.1)} + P''_1 + P''_2) = 0$ em $L\langle X\rangle$. Logo, utilizando a **Observação 1.47**, podemos afirmar que

$$v_{l_0} - (P'_{(4.1)} + P'_1 + P'_2) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad v_{l_0} = P'_{(4.1)} + P'_1 + P'_2.$$

Seja I_1 o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 1 que têm grau no máximo l_0+1 e seja I_2 o T-ideal de $L\langle X\rangle$ gerado pelos polinômios do *Tipo* 2 que têm grau no máximo $l_0 + 1$. Analisando a definição de P_1, temos que $P'_1 \in I_1$, ou seja, que P'_1 é um polinômio homogêneo de grau $l_0 + 2$ que pertence a I_1. Portanto, $P'_1 \in I$, isto é, P'_1 é congruente a 0 módulo I. Logo, $P'_{(4.1)} + P'_1 \in I$, ou seja, $P'_{(4.1)} + P'_1 = P'''_{(4.1)}$, onde $P'''_{(4.1)}$ pertence a I. Desta forma, vemos que

$$v_{l_0} = P'_{(4.1)} + P'_1 + P'_2 = P'''_{(4.1)} + P'_2,$$

ou seja, que v_{l_0} é uma consequência da identidade (4.1) e das identidades do *Tipo* 2 que têm grau no máximo $l_0 + 1$, o que é um absurdo, pois isto contradiz o **Corolário 2.7**, do **Capítulo 2**. Então, temos que $v_l \notin W_{l+1}$, para todo $l \geq 4$. Isto completa a prova deste lema.

■

Portanto, pelo **Lema 4.17**, temos que $v_{2k} \notin W_{2k+1}$, para todo $k \geq 2$. Como $U_{2k+1} \subseteq W_{2k+1}$ e $v_{2k} \notin W_{2k+1}$, então $v_{2k} \notin U_{2k+1}$, para todo $k \geq 2$. Por outro lado, como v_{2k} é uma identidade de grau $2k + 2$ em M, então temos que $v_{2k} \in U_{2k+2}$. Logo, $U_{2k+1} \subsetneq U_{2k+2}$, para todo $k \geq 2$, ou seja, provamos que vale a cadeia (4.3). Isto completa a demonstração do **Teorema 3**.

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Yu. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.

[2] Yu. A. Bahturin and A. Ju. Ol'sanskii, *Identical relations in finite Lie rings*, Mat. Sb. (N. S.), **96(138)** (1975), no. 4, 543-559, 645 (Russo).

[3] A. Ya. Belov, *On non-Specht Varieties*, Fundam. Prikl. Mat. **5** (1999), 47-66 (Russo).

[4] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, Mat. Sb., **191** (2000), 13-24; English translation in Sb. Math., **191** (2000), 329-340.

[5] V. S. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[6] V. S. Drensky, *Identities in Lie algebras*, Algebra i Logika **13** (1974), 265-290 (Russo).

[7] V. T. Filippov, *On a variety of Mal'tsev algebras*, Algebra i Logika **20** (1981), no. 3, 300-314, 361 (Russo); English translation in Algebra and Logic **20** (1981), no. 3, 200-210 (1980).

[8] A. V. Grishin, *Examples of T-Spaces and T-ideals of Characteristic* 2 *without the Finite Basis Property*, Fundam. Prikl. Mat. **5** (1999), 101-118 (Russo).

[9] A. V. Grishin, *On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity* $x^{32} = 0$, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society **6** (2000), 50-51 (electronic).

[10] A. V. Il'tyakov, *On finite basis of identities of Lie algebra representations*, Nova J. Algebra Geom. **1** (1992), 207-259.

[11] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Translations of Math. Monographs **87**, AMS, Providence, RI, 1991.

[12] A. Krasilnikov, *The identities of a Lie algebra viewed as a Lie ring*, Quart. J. Math. Oxford **60** (2009), 57-61.

[13] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra Logic **10** (1973), 47-63.

[14] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, Fundam. Prikl. Mat. **5** (1999), 307-312 (Russo).

[15] V. V. Shchigolev, *Construction of non-finitely based T-ideals*, Comm. in Algebra **29** (2001), 3935-3941.

[16] S. Yu. Vasilovskii, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field* (Russo), Algebra i Logika **28** (1989), no. 5, 534-554, 611; translation in Algebra and Logic **28** (1989), no. 5, 355-368 (1990).

[17] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford (2) **21** (1970), 297-308.