

### DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

### ANÁLISE DE CÓDIGOS DE DISPERSÃO LINEAR COM CANAL DE REALIMENTAÇÃO NÃO IDEAL

Fernando Menezes Leitão Tavares

Brasília, julho de 2009

### UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA Faculdade de Tecnologia

### DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

### ANÁLISE DE CÓDIGOS DE DISPERSÃO LINEAR COM CANAL DE REALIMENTAÇÃO NÃO IDEAL

Fernando Menezes Leitão Tavares

Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Elétrica como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora

Prof. André Noll Barreto, ENE/UnB Orientador

Prof. Robson Domingos Vieira, ENE/Un<br/>B $Examinador \ Interno$ 

Prof. Renato Machado, PPEE/UFJF Examinador Externo

Prof. Paulo Henrique P. Carvalho,  ${\rm ENE}/{\rm UnB}$  Suplente

### FICHA CATALOGRÁFICA

TAVARES, FERNANDO MENEZES LEITÃO TAVAVRES						
Análise de Códigos de Dispersão						
Linear com Canal de Realimentação						
Não Ideal. [Di	strito Federal] 2009.					
vi, 51p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre). Dissertação de Mestrado.						
Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.						
Departamento	Departamento de Engenharia Elétrica.					
1. MIMO	2. Códigos de Dispersão Linear					
3. LDC	4. Canal de Realimentação					
I. $ENE/FT/UnB$	II. Título (série)					

### **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

TAVARES, F. M. L (2009). Análise de Códigos de Dispersão Linear com Canal de Realimentação Não Ideal. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGENE.DM - 390/09, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 51p.

### **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Fernando Menezes Leitão Tavares.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Análise de Códigos de Dispersão Linear com Canal de Realimentação Não Ideal.

GRAU / ANO: Mestre / 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Fernando Menezes Leitão Tavares Departamento de Engenharia Elétrica Campus Universitário Darcy Ribeiro Caixa Postal 4386 CEP: 70919-970 Brasília - DF

### Dedicatória

Dedico este trabalho às pessoas que fazem todo esforço e suor ter razão e valor: minha querida família, meus estimados amigos e, especialmente, minha amada esposa.

Fernando Menezes Leitão Tavares

#### RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar os efeitos causados por um canal de realimentação não ideal em técnica de pré-codificação MIMO que utiliza códigos de dispersão linear para formar os livros de códigos. Por meio de simulações computacionais, verifica-se como os algoritmos de busca podem ser utilizados para determinar bons livros de códigos e avalia-se o desempenho de tal técnica em situações nas quais limitações comuns a sistemas reais são consideradas. Ademais, propõe-se o uso do filtro discreto de Kalman para estimar o estado futuro do canal, com o intuito de atenuar o efeito do atraso no canal de realimentação.

### ABSTRACT

The present work has for objective to analyse the effects caused by a non-ideal feedback channel to a MIMO precoding technique that uses linear dispersion codes to form its code books. Using computer simulations, it is studied how the search algorithms may be used to find good code books and it is also evaluated the performance of the technique in situations that limitations present in real systems are considered. Moreover, the use of a discrete Kalman filter is proposed to estimate the future state of the channel, in order to mitigate the effect of the delay in the feedback channel.

# SUMÁRIO

1	Intro	DUÇÃO	1				
<b>2</b>	Refer	RENCIAL TEÓRICO	3				
	2.1	Modelo de Canal MIMO	3				
	2.1.1	Modelo de Canal	3				
	2.1.2	Códigos Espácio-Temporais de Bloco	4				
	2.1.3	Canal de Realimentação Limitada	4				
	2.2	Códigos de Dispersão Linear com Canal de Realimentação Limitada	5				
	2.2.1	Códigos de Dispersão Linear	5				
	2.2.2	Probabilidade de Erro por Pares	6				
	2.2.3	LDC para Sistemas com Canal de Realimentação Limitada	7				
	2.2.4	Algoritmo de Busca de Códigos de Dispersão Linear	7				
3	Algoi	RITMO DE BUSCA	10				
	3.1	Descrição do Novo Algoritmo	10				
	3.2	Exemplo de Uso do Novo Algoritmo	11				
	3.3	Considerações sobre os Algoritmos de Busca	14				
4	Considerações sobre o Canal de Realimentação Limitada						
	4.1	Modelo de Simulação	18				
	4.2	Limitações do Canal de Realimentação	19				
	4.2.1	Atraso de Sinalização	20				
	4.2.2	Período	20				
	4.2.3	Blocos de Subportadoras	20				
	4.2.4	Erro	20				
<b>5</b>	Análi	se das Limitações do Canal de Realimentação	<b>21</b>				
	5.1	Simulações com Erros no Canal de Realimentação	22				
	5.2	Simulações com Atraso no Canal de Realimentação	25				
	5.3	Simulações com Período de Sinalização Variável	27				
	5.4	Simulações com Tamanho de Bloco de Subportadoras Variável	28				
6	Análi	se do Canal Não Ideal em Sistemas Reais	32				
	6.1	Taxa de Erro de Bits (BER)	32				
	6.2	Taxa Útil $R$	34				

7	ALGOR	itmo de Predição de Canal com Filtro Discreto de Kalman.	39				
	7.1	Descrição de Algoritmo	39				
	7.2	Resultados de Predição de Canal	41				
	7.3	Resultados de Simulação com Predição de Canal	41				
8	CONCL	USÕES	43				
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 45							
A٢	NEXOS		47				
Ι	Result	ados de Busca de Códigos LDC	48				

# LISTA DE FIGURAS

3.1	Histograma de $D_{PEP}$ médio para os conjuntos de matrizes $\mathbf{X}_k$ .	12
3.2	Histograma de $D_{PEP}$ médio para os pares de conjuntos de matrizes $\mathbf{X}_k$	13
3.3	Probabilidade de erro por pares com razão sinal ruído variável.	14
4.1	Estrutura de quadros do sistema WiMAX.	17
4.2	Estrutura de quadros do sistema LTE.	17
4.3	Estrutura de blocos do simulador.	18
5.1	Formato da constelação 32QAM.	21
5.2	Taxa de erro de bits com razão sinal ruído variável.	22
5.3	Taxa de erro de bits com erro de canal de realimentação variável	23
5.4	Taxa útil com erro de canal de realimentação variável	24
5.5	Taxa de erro de bits com atraso no canal de realimentação variável	25
5.6	Taxa útil com atraso no canal de realimentação variável.	26
5.7	Taxa de erro de bits com período de sinalização variável.	28
5.8	Taxa útil com período de sinalização variável.	29
5.9	Taxa de erro de bits com tamanho de bloco de subportadoras variável	30
5.10	Taxa útil com tamanho de bloco de subportadoras variável	31
6.1	Taxa de erro de bits com período de sinalização variável - WiMAX	33
6.2	Taxa de erro de bits com período de sinalização variável - LTE	34
6.3	Taxa útil com período de sinalização variável - WiMAX	35
6.4	Taxa útil com período de sinalização variável e codificação $1/32$ no canal de reali-	
	mentação - WiMAX.	36
6.5	Taxa útil com período de sinalização variável - LTE	37
6.6	Taxa útil com período de sinalização variável e codificação $1/32$ no canal de reali-	
	mentação - LTE.	38
7.1	Modelo do algoritmo de predição de canal com filtro discreto de Kalman.	39
7.2	Exemplo de predição de canal com uso do filtro discreto de Kalman.	41
7.3	Taxa de erro de bits com atraso variável no canal de realimentação e predição de	
	canal Kalman.	42
7.4	Taxa de erro de bits com atraso variável no canal de realimentação e predição de	
	canal Kalman - WiMAX.	42

# LISTA DE TABELAS

I.1	Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros $M_T = \tau = Q = 2$ ,	
	$M_R=1 \ \mathrm{e} \ K=2$ - Parte 1 de 3	49
I.2	Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros $M_T = \tau = Q = 2$ ,	
	$M_R=1 \ \mathrm{e} \ K=2$ - Parte 2 de 3	50
I.3	Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros $M_T = \tau = Q = 2$ ,	
	$M_R = 1 e K = 2$ - Parte 3 de 3	51

## LISTA DE SIGLAS

BER	Taxa de Erro de Bits			
CSI	Informação sobre o Estado do Canal			
EGC	Combinação de Mesmo Ganho			
$\mathbf{FDD}$	Duplexação por Divisão na Frequência			
FIFO	Primeiro a Entrar Primeiro a Sair			
$\mathbf{LDC}$	Código de Dispersão Linear			
MIMO	Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas			
MRC	Combinação de Máxima Razão			
<b>OFDM</b> Multiplexação por Divisão Ortogon				
	Frequência			
PEP	Probabilidade de Erro por Pares			
$\mathbf{SDC}$	Combinação de Diversidade de Seleção			
SER	Taxa de Erro de Símbolos			
$\mathbf{SNR}$	Razão Sinal-Ruído			
STBC	Código Espácio-Temporal de Bloco			
TAS	Seleção de Antenas de Transmissão			
TDD	Duplexação por Divisão no Tempo			

Bit Error Rate Channel State Information Equal Gain Combining Frequency Division Duplex First In First Out Linear Dispersion Code Multiple Input Multiple Output Maximum Ratio Combining Orthogonal Frequency Division Multiplexing Pairwise Error Probability Selection Diversity Combining Symbol Error Rate Sinal-to-Noise Ratio Space-Time Block Code Transmit Antenna Selection Time Division Duplex

## Capítulo 1

## Introdução

A evolução dos sistemas de comunicação móvel depende da necessidade de oferecer, constantemente, aos usuários serviços com maior qualidade. Com esse propósito, as técnicas que utilizam múltiplas antenas de transmissão e recepção foram propostas e integram a especificação de novos sistemas em desenvolvimento, como WiMAX [1] e LTE [2].

A aplicação dessas técnicas visa a aumentar a capacidade do canal, por meio de multiplexação, bem como a reduzir as taxas de erro, utilizando a diversidade espacial. Técnicas como a Combinação de Diversidade de Seleção (SDC) (*Selection Diversity Combining*), a Combinação de Mesmo Ganho (EGC) (*Equal Gain Combining*) e a Combinação de Máxima Razão (MRC) (*Maximum Ratio Combining*) são exemplos do uso de múltiplas antenas de recepção com tal objetivo [3].

Por outro lado, a utilização de múltiplas antenas no receptor pode não ser viável, como, por exemplo, no caso de sistemas de comunicação móvel celular, em que o espaço físico disponível no telefone é limitado. Em casos como esse, a diversidade espacial pode ser explorada com o uso de múltiplas antenas de transmissão. É necessária, contudo, a utilização de algum tipo de pré-codificação para que o aumento de desempenho seja alcançado. Uma possibilidade é o uso de códigos espácio-temporais, sendo que, entre eles, o mais conhecido é o código de Alamouti [4].

A qualidade da pré-codificação pode ser melhorada caso exista algum canal de realimentação entre o receptor e o transmissor, de forma que informações sobre o estado do canal possam ser enviadas e utilizadas pelo transmissor para determinar a melhor codificação possível. Todavia, a taxa de transmissão por esse canal é, geralmente, limitada a poucos bits, pois cada bit de sinalização transmitido é um bit útil que deixa de ser transmitido também.

Assim, considerando-se essa limitação, foram propostas técnicas que fazem uso do canal de realimentação limitada para enviar apenas os bits necessários para identificar a melhor palavracódigo entre as palavras-código de um grupo pré-determinado. Entre essas propostas, destaca-se uma técnica que utiliza os códigos de dispersão linear e que reduz consideravelmente a taxa de erro sem a necessidade da utilização de códigos complexos e dispendiosos [5].

Apesar da notória relevância dos resultados obtidos pela técnica proposta em [5], observa-se a necessidade de avaliar essa técnica em condições mais próximas das reais. Limitações como atraso e erros de transmissão existem em qualquer sistema de comunicação, e o canal de realimentação não é diferente. Outras limitações existentes são a transmissão periódica de dados pelo canal de

realimentação e o uso de blocos de subportadoras, o que é comum em sistemas OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*); no entanto, a avaliação do impacto dessas limitações não foi realizada nos estudos das técnicas propostas.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo mostrar, por meio de simulações computacionais, que as vantagens apresentadas pela técnica proposta em [5] podem ser observadas mesmo quando essas são confrontadas com as limitações citadas. Para isso, este trabalho está organizado da seguinte forma: primeiramente, no Capítulo 2, são apresentados os conceitos necessários para a compreensão das técnicas analisadas; em seguida, no Capítulo 3, é apresentado um algoritmo que é capaz de determinar bons grupos de códigos de dispersão linear; no Capítulo 4, são apresentadas considerações sobre as limitações do canal de realimentação, bem como o modelo de simulação utilizado no presente estudo; nos Capítulos 5 e 6, apresentam-se os resultados referentes a cada limitação individualmente e os resultados que refletem os efeitos dessas limitações em sistemas reais, respectivamente; no Capítulo 7, apresenta-se uma técnica de predição de canal que tem por objetivo atenuar o efeito do atraso no canal de realimentação; por fim, as conclusões são apresentadas no Capítulo 8.

## Capítulo 2

## Referencial Teórico

Inicia-se este capítulo com a apresentação do modelo matemático de um sistema de comunicação com múltiplas antenas de transmissão e recepção (MIMO) (*Multiple In Multiple Out*) dos códigos espácio-temporais de bloco e dos sistemas com canal de realimentação limitada. Em seguida, são apresentados os códigos de dispersão linear, bem como a técnica na qual eles são utilizados em sistemas com canal de realimentação limitada. Por fim, apresenta-se o algoritmo utilizado para determinar bons conjuntos desses códigos.

### 2.1 Modelo de Canal MIMO

Os sistemas MIMO são, em geral, modelados matematicamente com o uso de equações matriciais que representam, na forma do sinal recebido, os efeitos do canal por onde as ondas eletromagnéticas se propagam, do ruído e das eventuais codificações sobre o sinal que está sendo transmitido. Esse modelo é utilizado como base para o estudo das técnicas propostas. De forma a simplificar a análise, utiliza-se um modelo de banda estreita, dado que esse mesmo modelo pode ser utilizado para analisar sistemas OFDM, bastando que cada subportadora seja avaliada separadamente. Para tanto, são consideradas apenas características da banda base do sistema OFDM, em que apenas o envelope complexo da resposta do canal no domínio da frequência de cada subportadora é utilizado para modelar o efeito do canal no sistema de comunicação. Assim, as limitações relacionadas às imperfeições dos módulos de rádio frequência não são consideradas no presente trabalho.

#### 2.1.1 Modelo de Canal

Segundo Paulraj *et al* [3], o canal MIMO pode ser representado pela matriz de canal **H** de dimensões  $M_R \times M_T$ , em que  $M_R$  indica o número de antenas de recepção e  $M_T$  indica o número de antenas de transmissão.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,M_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M_R,1} & \dots & h_{M_R,M_T} \end{bmatrix}$$
(2.1)

Nessa matriz,  $h_{i,j}$  representa o ganho de canal complexo entre a antena de transmissão j e a antena de recepção i, em que  $i = 1, ..., M_R$  e  $j = 1, ..., M_T$ . Dessa forma, de acordo com Paulraj *et al*, pode-se definir o modelo de transmissão de um sistema MIMO pela seguinte equação:

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{E_s}{M_T}} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{2.2}$$

Em (2.2), o vetor de sinal recebido  $\mathbf{y}$ , com dimensão  $M_R \times 1$ , é resultado da multiplicação da matriz de canal definida em (2.1) pelo vetor de sinal transmitido  $\mathbf{x}$ , com dimensão  $M_T \times 1$ , somado ao vetor de ruído  $\mathbf{n}$  com dimensão  $M_R \times 1$ . O vetor  $\mathbf{n}$  é modelado por variáveis aleatórias complexas Gaussianas, com média zero e variância  $N_0$  por dimensão complexa.

O termo  $E_s$  representa a energia do sinal transmitido, e a razão  $\sqrt{1/M_T}$  é usada para normalizar a potência transmitida por cada antena, de forma que a potência total não ultrapasse aquela que seria utilizada no caso de uma única antena de transmissão.

#### 2.1.2 Códigos Espácio-Temporais de Bloco

Dado um conjunto de Q símbolos  $\{s_k\}_{k=1}^Q$  que será transmitido, em que cada símbolo pertence a uma constelação  $\mathcal{S}$ , como PSK ou QAM por exemplo, com energia média unitária, pode-se definir um Código Espácio-Temporal de Bloco (STBC) por meio da matriz  $\mathbf{X}$ , de dimensão  $M_T \times \tau$ .

Assim, pode-se estender o modelo de transmissão de um sistema MIMO a fim de representar a transmissão de um STBC. Nesse caso, o bloco de sinal é representado pela matriz **X** com dimensão  $M_T \times \tau$ , em que  $\tau$  é o número de instantes de tempo necessários para transmitir o bloco. Com isso, de (2.3), obtém-se o bloco de sinal recebido **Y**, de dimensão  $M_R \times \tau$ .

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{E_s}{M_T}} \mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{N}$$
(2.3)

Nesse caso, **N** representa o bloco de ruído com as mesmas características de **n**, mas com dimensão  $M_R \times \tau$ .

#### 2.1.3 Canal de Realimentação Limitada

Quando se trata de um sistema com múltiplas antenas de transmissão cuja informação sobre o estado do canal (CSI) está disponível apenas no receptor, pode-se obter diversidade espacial na transmissão caso o receptor envie a CSI, total ou parcialmente, para o transmissor. Para que isso ocorra, é necessário que exista um canal de realimentação entre o receptor e o transmissor.

Segundo Paulraj *et al* [3], a informação enviada pelo canal de realimentação pode ser total, ou seja, todos os ganhos do canal são enviados; ou parcial, caso em que apenas dados estatísticos sobre o canal, como a matriz de correlação ou a matriz de covariância, são enviados. Além dessas, outra opção é o envio de apenas alguns poucos bits que representam o índice do modo de transmissão que o transmissor deverá utilizar. Esse último caso é denominado canal de realimentação limitada.

Pode-se então modelar o esquema de transmissão com canal de realimentação limitada, por meio da Equação (2.4)

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{E_s}{M_T}} \mathbf{H} \mathbf{X}_k + \mathbf{N}$$
(2.4)

em que  $\mathbf{X}_k \in {\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K}$ , ou seja, os bits enviados pelo receptor indicam o índice k do código  $\mathbf{X}_k$  que o transmissor deverá utilizar na próxima transmissão. Assim, cabe ao projetista determinar os códigos que serão utilizados. Tal conjunto de códigos disponíveis denomina-se livro de códigos.

Em [6], os autores afirmam haver similaridade entre a busca de um livro de códigos ótimo e a solução do problema de empacotamento de linhas em um espaço Grassmanniano (*Grassmannian Line Packing Problem*). Nesse problema, tenta-se determinar a melhor forma na qual n linhas podem ser distribuídas em um espaço complexo  $\mathbb{C}^k$ , de forma que a distância d entre elas seja máxima, sendo que k denota o número de dimensões que o espaço complexo possui e d pode ser uma das métricas desse espaço, como a distância cordal, a distância espectral, a distância Fubini-Study ou a distância geodésica [7]. Na solução apresentada em [6], os autores utilizaram a distância cordal como métrica e foram capazes de determinar bons livros de códigos para sistemas com 2 e 3 antenas de transmissão, com 2, 4, ou 8 códigos por livro.

De forma similar, outros livros de código são propostos em [8]. Nesse caso, entretanto, o livro foi otimizado, buscando-se o conjunto de códigos que tivesse a máxima distância Euclidiana mínima entre eles.

Para esse estudo, por sua vez, escolheu-se a técnica proposta em [5], pois ela apresentou os melhores resultados conhecidos para o problema em questão. Essa técnica é apresentada na seção seguinte.

### 2.2 Códigos de Dispersão Linear com Canal de Realimentação Limitada

A técnica proposta em [5] utiliza os códigos de dispersão linear para formar o livro de códigos, os quais são utilizados para construir os blocos de transmissão. Assim, apresentam-se, em seguida, os conceitos necessários para compreensão de tal técnica.

#### 2.2.1 Códigos de Dispersão Linear

Em [9], Hassib *et al* apresentam os códigos de dispersão linear (LDC). Esses códigos são formados pela combinação linear de matrizes, nas dimensões espaço e tempo, nas quais os símbolos transmitidos são parâmetros que alteram essas matrizes.

Supondo-se que haja um sistema com  $M_T$  antenas de transmissão e  $M_R$  antenas de recepção e que o bloco de código será transmitido em  $\tau$  instantes de tempo, pode-se representar o sinal transmitido com uma matriz **X** de dimensão  $M_T \times \tau$  apresentada em (2.5). Essa matriz divide o fluxo de dados em Q sub-fluxos  $(X_1, X_2, \ldots, X_Q)$  formados por símbolos de uma constelação r-PSK ou r-QAM, em que os valores  $\alpha_q \in \beta_q$  são as partes real e imaginária do símbolo  $s_q$ , respectivamente.

$$\mathbf{X} = \sum_{q=1}^{Q} \alpha_q \mathbf{A}_q + j\beta_q \mathbf{B}_q = \sum_{q=1}^{Q} X_q$$
(2.5)

É importante ressaltar que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  devem satisfazer a pelo menos uma das seguintes restrições de potência, que são apresentadas em ordem crescente de restrição, ou seja, da menos restrita à mais restrita. Essas restrições, que também foram apresentadas em [9], são importantes para garantir a utilização adequada da potência do transmissor e a comparação justa dos diversos códigos possíveis. Nessas equações,  $Tr(\cdot)$  denota a operação traço e  $(\cdot)^H$  denota a operação conjugado transposto.

$$\sum_{q=1}^{Q} Tr(\mathbf{A}_{q}^{H}\mathbf{A}_{q} + \mathbf{B}_{q}^{H}\mathbf{B}_{q}) = 2\tau M_{T}$$
(2.6)

$$Tr(\mathbf{A}_{q}^{H}\mathbf{A}_{q}) = Tr(\mathbf{B}_{q}^{H}\mathbf{B}_{q}) = \frac{\tau M_{T}}{Q}, \ q = 1, \dots, Q$$

$$(2.7)$$

$$\mathbf{A}_{q}^{H}\mathbf{A}_{q} = \mathbf{B}_{q}^{H}\mathbf{B}_{q} = \frac{\tau}{Q}\mathbf{I}_{M_{T}}, \ q = 1, \dots, Q$$
(2.8)

Em (2.6), é garantido que a potência total do sinal transmitido  $\mathbf{X}$  seja normalizada, ou seja, que o limite de potência do transmissor será respeitado, dividindo-se a energia disponível pelas antenas e pelos instantes de tempo necessários para transmitir o STBC. A restrição (2.7), por sua vez, garante que a potência total seja dividida igualmente entre os Q símbolos. Por fim, em (2.8), é garantido também que a energia dos Q símbolos seja dispersa, uniformemente, pelas dimensões da matriz  $\mathbf{X}$ . O código de Alamouti, por exemplo, satisfaz às três restrições. Por outro lado, se a técnica de seleção de antenas de transmissão (TAS)(*Transmit Antenna Selection*) for avaliada, será verificado que ela não satisfaz à restrição em (2.8), mas atende às outras duas.

#### 2.2.2 Probabilidade de Erro por Pares

Pode-se analisar um LDC de acordo com sua probabilidade de erro por pares (PEP), como concluem Hassib *et al* em [9]. No trabalho, os autores apresentam a formulação de um limite superior para a PEP a partir de uma matriz de canal equivalente. Sejam  $\mathcal{A}_q$ ,  $\mathcal{B}_q \in \underline{\mathbf{h}}_n$  definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_{q} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{R,q} & -\mathbf{A}_{I,q} \\ \mathbf{A}_{I,q} & \mathbf{A}_{R,q} \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}_{q} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{I,q} & -\mathbf{B}_{R,q} \\ \mathbf{B}_{R,q} & -\mathbf{B}_{I,q} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{h}}_{n} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{R,n} \\ \mathbf{h}_{I,n} \end{bmatrix}$$
(2.9)

Em 2.9, os subscritos R e I denotam a partes real e imaginária das matrizes, e  $\mathbf{h}_n$  representa o vetor de canal de dimensão  $M_T \times 1$  referente a antena de recepção n. Seja então a matriz de canal equivalente  $\mathcal{H}$  de dimensão  $2M_R \tau \times 2Q$  dada por

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1}\underline{\mathbf{h}}_{1} & \mathcal{B}_{1}\underline{\mathbf{h}}_{1} & \dots & \mathcal{A}_{Q}\underline{\mathbf{h}}_{1} & \mathcal{B}_{Q}\underline{\mathbf{h}}_{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{1}\underline{\mathbf{h}}_{M_{R}} & \mathcal{B}_{1}\underline{\mathbf{h}}_{M_{R}} & \dots & \mathcal{A}_{Q}\underline{\mathbf{h}}_{M_{R}} & \mathcal{B}_{Q}\underline{\mathbf{h}}_{M_{R}} \end{bmatrix}$$
(2.10)

Assim, segundo os autores, a Equação (2.3) pode ser reescrita em função desses valores, como apressentado em (2.11).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{R,1} \\ \mathbf{y}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{R,M_R} \\ \mathbf{y}_{I,M_R} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E_s}{M_T}} \mathcal{H} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_Q \\ \beta_Q \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_{R,1} \\ \mathbf{n}_{I,1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{R,M_R} \\ \mathbf{n}_{I,M_R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}$$
(2.11)

Dada a Equação (2.11), a probabilidade de erro por pares é definida pela Equação (2.12), em que **e** denota algum vetor de sinal transmitido diferente de **x**,  $\rho$  representa a razão sinal-ruído (SNR) no receptor e  $\|\cdot\|^2$  denota a norma de Frobenius.

$$P(\mathbf{x} \to \mathbf{e} | \mathcal{H}) = P(\|\mathbf{y} - \sqrt{\frac{\rho}{M_T}} \mathcal{H} \mathbf{e}\|^2 < \|\mathbf{y} - \sqrt{\frac{\rho}{M_T}} \mathcal{H} \mathbf{x}\|^2)$$
(2.12)

No entanto, a PEP nessa equação depende da constelação de símbolos utilizada. Assim, os autores de [9] apresentam outra forma de representar a PEP, que é mostrada em (2.13), em que essa grandeza depende apenas das condições instantâneas do canal  $\mathcal{H}$ , sendo que  $(\cdot)^T$  denota a operação de transposição de matriz.

$$P_e(\mathcal{H}) \le \frac{1}{2} \det\left( \left[ I + \frac{\rho}{2M_T} \mathcal{H}^T \mathcal{H} \right]^{-\frac{1}{2}} \right)$$
(2.13)

#### 2.2.3 LDC para Sistemas com Canal de Realimentação Limitada

A utilização de códigos de dispersão linear para sistemas com canal de realimentação limitada foi proposta em [5]. Os autores propõem o uso do limite superior da PEP como critério de seleção para o código que será transmitido pelo canal de realimentação.

Em outras palavras, segundo a proposta, dado um conjunto de LDC  $\Psi = {\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K}$ , em que cada  $\mathbf{X}_k \mapsto {\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k}$  e K é o número de códigos do conjunto, o receptor enviará para o transmissor os bits que representam  $k_{opt}$ , dado pela Equação (2.14).

$$k_{opt} = \arg\min_{k} P_e(\mathcal{H}(\{\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k\}, \mathbf{H}))$$
(2.14)

Portanto, utilizando esse esquema, o canal de realimentação auxiliará na redução da PEP, desde que o conjunto de LDC  $\Psi$  seja escolhido de forma adequada.

#### 2.2.4 Algoritmo de Busca de Códigos de Dispersão Linear

Em [5], os autores propõem um algoritmo iterativo, cujo objetivo é buscar um conjunto de LDC que minimize a PEP média do sistema dada por (2.15), em que  $E_{\mathbf{H}}$  denota o valor esperado

com relação a H.

$$\overline{P_e}(\mathcal{H}) = E_{\mathbf{H}} \min_{\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \in \Psi} P_e(\mathcal{H}(\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}, \mathbf{H}))$$
(2.15)

Cada iteração do algoritmo é dividida em sub-iterações. Em cada sub-iteração, um elemento das matrizes de dispersão linear  $\mathbf{A}_q \in \mathbf{B}_q$  é escolhido. O valor desse elemento é então alterado de forma que se possam testar as matrizes com cada um dos valores discretos possíveis. Cada teste é feito avaliando N vezes o valor da PEP para uma amostra de canal diferente. O valor de N é escolhido de forma que um número representativo de amostras de canal seja utilizado. A média é obtida a partir dos N valores da PEP. O valor possível que apresentar a melhor PEP será selecionado e, a partir desse momento, passará a ser o valor do elemento em questão. Um novo elemento é escolhido, dando início a uma nova sub-iteração, e o processo repete-se para cada elemento, completando a iteração. Em uma nova iteração, o processo todo se repete. Quando o valor da PEP média obtida não for mais reduzido após determinado número de iterações, o processo é encerrado.

Com o intuito de auxiliar a compreensão do algoritmo, apresenta-se um exemplo no qual o objetivo é encontrar um par de códigos LDC cujos parâmetros são  $M_T = 2$ ,  $\tau = Q = 1$ . Sejam as matrizes de dispersão linear  $\mathbf{A}_q^i \in \mathbf{B}_q^i$ , em que *i* representa o índice do código LDC no par, definidas por

$$\mathbf{A}_{1}^{1} \triangleq \begin{bmatrix} a_{1} \\ a_{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{1}^{1} \triangleq \begin{bmatrix} b_{1} \\ b_{2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_{1}^{2} \triangleq \begin{bmatrix} a_{3} \\ a_{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{1}^{2} \triangleq \begin{bmatrix} b_{3} \\ b_{4} \end{bmatrix}$$
(2.16)

Se a restrição de potência em (2.8) for a escolhida, pode-se representar  $\mathbf{A}_q^i \in \mathbf{B}_q^i$  por matrizes  $\mathbf{C}_q^i$ , nas quais cada  $c_k \triangleq a_k + jb_k = e^{j\theta_k}$ , reduzindo o número de sub-iterações e o número de testes por iteração.

$$\mathbf{C}_{1}^{1} \triangleq \begin{bmatrix} c_{1} \\ c_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\theta_{1}} \\ e^{j\theta_{2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{1}^{2} \triangleq \begin{bmatrix} c_{3} \\ c_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\theta_{3}} \\ e^{j\theta_{4}} \end{bmatrix}$$
(2.17)

Esse algoritmo trabalha com um espaço de busca finito e discreto. Portanto, deve-se escolher um grupo de valores para  $\theta_k$ , como  $\theta_k \in \{0, \pi/10, 2\pi/10, \dots, 19\pi/10\}$ , por exemplo. Devem-se escolher, também, os valores iniciais para  $\theta_k$ . Nesse exemplo,  $\theta_k = 0$  é utilizado como valor inicial.

Assim, o algoritmo inicia a primeira sub-iteração da primeira iteração, calculando o valor da PEP para cada uma das N amostras de canal, considerando as matrizes  $\mathbf{C}_q^i$  com os valores iniciais, para cada valor de  $\theta_1 \in \{0, \pi/10, 2\pi/10, \dots, 19\pi/10\}$ .

$$\mathbf{C}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} e^{j\theta_{1}} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1} \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{1} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(2.18)

Os resultados da sub-iteração são avaliados, e o valor de  $\theta_1$  será aquele que foi utilizado para formar o par de matrizes  $\mathbf{C}_q^i$  cujo valor de PEP média era o maior entre todos. Por exemplo, caso o valor de  $\theta_1$  seja  $13\pi/10$ , na sub-iteração seguinte, será obtido algo como na Equação (2.19) e assim por diante.

$$\mathbf{C}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} e^{j13\pi/10} \\ e^{j\theta_{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} \cos 13\pi/10 \\ \cos \theta_{2} \end{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} \sin 13\pi/10 \\ \sin \theta_{2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(2.19)

Ao fim da última sub-iteração, começará uma nova iteração e o processo será repetido até que o melhor valor de PEP média obtida não varie durante um determinado número de iterações. O par de códigos LDC ótimo encontrado pelo algoritmo será o último conjunto de matrizes utilizado pelo algoritmo.

Aplicando esse algoritmo, os autores em [5] encontraram um par de códigos LDC para os parâmetros utilizados nesse exemplo. Esse par de LDC é apresentado em (2.20).

$$\mathbf{A}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{1}^{1} = \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1\\-1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{1}^{2} = \begin{bmatrix} 1\\-1 \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

## Capítulo 3

## Algoritmo de Busca

Em continuidade ao desenvolvimento do algoritmo de busca de códigos de dispersão linear para sistemas com canal de realimentação limitada, foi proposto um estudo que visasse ao aprimoramento de tal algoritmo, tendo em vista alguns pontos fracos identificados nele.

Entre esses pontos, pode-se destacar a dificuldade de buscar códigos limitados apenas pela restrição de potência apresentada em (2.6), na qual nenhuma restrição quanto a forma com que a potência deve ser distribuída pelo bloco de código LDC se aplica, havendo apenas a restrição quanto a potência total transmitida. Como o algoritmo altera um elemento por vez em cada subiteração, ele não conseguiria determinar quais códigos respeitam ou não tal restrição. Dessa forma, caso a restrição em (2.6) fosse escolhida, seria possível que o algoritmo escolhesse como melhor código um código LDC inválido.

Percebeu-se também que muitos códigos LDC possíveis são inadequados por apresentar uma PEP média muito alta, para fazer parte dos livros de código buscados. Seria interessante, portanto, que o algoritmo fosse capaz de identificar esses códigos e removê-los do grupo de códigos candidatos a formar tais livros. Com isso, a partir da identificação dessas oportunidades de melhoria, foi desenvolvido um novo algoritmo de busca.

### 3.1 Descrição do Novo Algoritmo

O novo algoritmo pode ser dividido em três passos: a seleção dos códigos LDC possíveis de acordo com o espaço de busca discreto e a restrição de potência escolhida, o cálculo da PEP média por código LDC individual e o cálculo da PEP média por grupo de códigos LDC.

Notou-se, contudo, que é possível reduzir o tempo necessário para realizar uma busca caso a função custo, no caso a PEP média, seja simplificada. Decidiu-se, portanto, utilizar um critério equivalente, apresentado em (3.1), que foi escolhido simplificando-se a Equação (2.13). Nota-se que, nesse caso, o critério é invertido, isto é, o LDC selecionado será aquele que maximizar o valor  $D_{PEP}$ .

$$D_{PEP}(\mathcal{H}) \triangleq \det \left[ I + \mathcal{H}^T \mathcal{H} \right] \tag{3.1}$$

No primeiro passo, o espaço de busca discreto deve ser definido. Utilizando-se os parâmetros de configuração  $(M_T, M_R, \tau, Q \in K)$  e a restrição de potência escolhida, o algoritmo cria uma coleção com todos os códigos LDC possíveis, por meio da combinação de valores de amplitude e fase, e seleciona apenas os códigos válidos, que são aqueles que atendem à restrição escolhida, definindo assim o espaço de busca discreto. Esse passo evita que códigos inválidos sejam considerados nos próximos passos, reduzindo o disperdício de capacidade computacional. Além disso, qualquer uma das três restrições de potência pode ser utilizada, o que permite ao algoritmo buscar códigos que o algoritmo anterior não era capaz de buscar.

Já no segundo passo, o  $D_{PEP}$  médio de cada código LDC individual é calculado, utilizando N amostras de canal, sendo que o valor de N deve ser escolhido de forma empírica. Uma das vantagens de utilizar-se esse passo é a possibilidade de observar-se o resultado de cada código individualmente e selecionar, a partir da observação dos valores de  $D_{PEP}$ , aqueles que deverão seguir para o passo seguinte.

Por último, o algoritmo calcula o  $D_{PEP}$  médio de cada combinação possível de códigos e seleciona aquela que tiver o melhor  $D_{PEP}$  médio e, por consequência, a melhor PEP média, como livro de códigos ótimo para os parâmetros escolhidos.

### 3.2 Exemplo de Uso do Novo Algoritmo

Um caso simples de uso do algoritmo é apresentado a seguir como exemplo. Primeiramente, os parâmetros  $M_T$ ,  $M_R$ ,  $\tau$ , Q e K devem ser escolhidos, bem como a restrição de potência e o espaço de busca que serão utilizados. Para esse caso, serão utilizados a restrição em (2.6) e os parâmetros  $M_T = 2$ ,  $M_R = \tau = Q = 1$  e K = 2.

No primeiro passo, o algoritmo cria todos os conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ , cujo formato é apresentado em (3.2), a partir do espaço de busca escolhido. Assim, caso tenha-se, por exemplo,  $\alpha_{i,j} \in \{0, \sqrt{1/2}, 1, \sqrt{3/2}, \sqrt{2}\}$  e  $\theta_{i,j} \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ , o algoritmo criará 10000 conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ , a partir da combinação de todas as 100 matrizes  $\mathbf{A}_q$  com todas as 100 matrizes  $\mathbf{B}_q$ , as quais foram formadas, elemento por elemento, pela combinação de um valor de  $\alpha_{i,j}$  com um valor de  $\theta_{i,j}$ , formando um elemento  $x_{i,j}^q$ .

Em seguida, verifica-se cada um dos conjuntos  $\mathbf{X}_k$  de forma a eliminar aqueles que não atendam

à restrição de potência escolhida. No caso em questão, todos os 1360 conjuntos são válidos, segundo a restrição escolhida. Por outro lado, caso a restrição em (2.8) fosse escolhida, restringindo os códigos àqueles que distribuem igualmente a potência em todas as dimensões, haveria apenas 400 conjuntos válidos, o que representa apenas 29,4% do total. Essa diferença pode não parecer significativa, se apenas o caso desse exemplo for avaliado, mas é considerável quando o número de conjuntos é muito maior. Por exemplo, se fossem mantidos os mesmos parâmetros e o valor de  $M_T$  utilizado fosse igual a 3, existiriam 4 milhões de conjuntos possíveis, sendo que apenas 448257 seriam válidos de acordo com a restrição em (2.6) e apenas 92416, segundo a restrição em (2.8), o que representa uma economia de 88,8% e 97,7%, respectivamente.

No segundo passo, é determinado o  $D_{PEP}$  médio para cada um dos conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ , calculando-se o  $D_{PEP}$  para um número N de amostras de canal e obtendo-se o valor médio. O valor de N deve ser ajustado de forma a obter-se uma quantidade de amostras representativa. No caso desse exemplo, utilizou-se amostras de canal obtidas a partir de variáveis aleatórias Gaussianas, com média zero e variância unitária, e escolheu-se empiricamente N igual a 20000, o mesmo número utilizado pelo algoritmo proposto em [5]. É importante observar que as mesmas amostras são utilizadas no cálculo do  $D_{PEP}$  médio de cada conjunto.



Figura 3.1: Histograma de  $D_{PEP}$  médio para os conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ .

A Figura 3.1 apresenta um histograma em função do valor de  $D_{PEP}$  médio dos diversos conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$  que formam o espaço de busca do algoritmo. Nota-se que os valores de  $D_{PEP}$ variam aproximadamente de 5 até 13. Nos casos em que o número de conjuntos  $\mathbf{X}_k$  é muito grande, pode-se utilizar essa informação para escolher quais conjuntos serão utilizadas no passo seguinte, selecionando-se aqueles que apresentarem um valor de  $D_{PEP}$  igual ou superior a um determinado valor. A escolha dos conjuntos, nesse passo, é baseada simplesmente no tempo disponível para a busca. No caso desse exemplo, optou-se por utilizar apenas os conjuntos que apresentam o valor máximo de  $D_{PEP}$ . Dessa forma, apenas 36 conjuntos serão utilizados no próximo passo do algoritmo.



Figura 3.2: Histograma de  $D_{PEP}$  médio para os pares de conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ .

No terceiro passo, o algoritmo calcula o  $D_{PEP}$  médio por grupo de códigos LDC. No exemplo em questão, procura-se um par de códigos ótimo e, para tanto, o algoritmo combina dois a dois os conjuntos  $\mathbf{X}_k$  selecionados no passo anterior, o que resulta em 630 pares de conjuntos  $\mathbf{X}_k$ , cada um representando um par de códigos LDC. Em seguida, é calculado o  $D_{PEP}$  médio para cada par. Por fim, basta determinar o par que apresenta o maior  $D_{PEP}$  médio. Nesse exemplo, 128 pares apresentam igualmente o maior  $D_{PEP}$ , como pode ser observado na Figura 3.2. No entanto, quando os resultados da busca desse exemplo são verificados, nota-se que eles são formados por simples rotações de um código mais simples, que é apresentado em (3.3).

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{A_1(1)} \\ A_1(1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{B_1(1)} \\ B_1(1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \underbrace{A_1(2)} \\ B_1(2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ B_1(2) \end{array} \right\}$$

Mantendo-se a mesma restrição de potência e restringindo-se  $\alpha_{i,j}$  a {1}, o algoritmo encontra o código proposto em [5], que é apresentado em (2.20). Todavia, é interessante observar que, ao calcular a PEP média para ambos os grupos de códigos LDC, pode-se concluir que ambos são igualmente eficientes de acordo com esse critério, como pode ser observado na Figura 3.3.

Além disso, o algoritmo também foi utilizado para determinar o melhor par de códigos LDC na configuração  $M_T = 2$ ,  $M_R = 1$ ,  $\tau = Q = 2$  e K = 2. O resultado dessa busca, em que foram encontrados 192 pares ótimos, é apresentado no anexo I. É interessante ressaltar que, ao avaliar a PEP média para cada um dos pares encontrados, percebeu-se que eles também apresentam valores iguais ao valores do código proposto em [5].

A partir dessas informações, pode-se concluir que é muito provável já ter sido encontrado o



Figura 3.3: Probabilidade de erro por pares com razão sinal ruído variável.

melhor par de códigos LDC. Assim, dado que todos os resultados obtidos apresentaram desempenho equivalente de acordo com o critério da probabilidade de erro por pares, pode-se afirmar que o código proposto em [5] é o mais indicado para os sistemas com canal de realimentação limitada, pois é ele que apresenta a menor complexidade e, portanto, o menor custo de implementação.

### 3.3 Considerações sobre os Algoritmos de Busca

Apesar de o algoritmo ter apresentado resultados interessantes, é importante ressaltar algumas limitações que não foram por ele solucionadas. Ambos os algoritmos, o proposto no presente trabalho e o proposto em [5], exigem muita capacidade computacional, especialmente devido à função custo utilizada. Tal função demanda o cálculo da PEP, ou  $D_{PEP}$ , com diversas amostras de canal para que seja possível obter uma média consistente, exigindo que o software execute instruções de inversão de matrizes e o cálculo de determinantes dezenas de milhares de vezes por código LDC.

No presente estudo, foram realizadas buscas relativamente pequenas, nas quais os números de antenas, símbolos e instantes de tempo por bloco eram muito pequenos. Entretanto, se tais parâmetros fossem modificados com o intuito de buscar códigos LDC para sistemas com mais antenas de transmissão por exemplo, isso tornaria o espaço de busca discreto exponencialmente maior, fazendo com que uma busca que demoraria poucas horas levasse dias ou meses. Outra situação que levaria a um aumento exponencial da necessidade de capacidade computacional seria a busca de livros de códigos com mais de dois códigos, o que tornaria inviável a busca de códigos com métodos similares.

Além disso, o algoritmo trabalha com um espaço de busca discreto. Entretanto, apesar de bons resultados terem sido encontrados, não é possível ainda confirmar se os melhores resultados fazem realmente parte desse espaço ou se se encontram em outro ponto do espaço que não foi incluído no espaço de busca válido.

Assim, não se pode desprezar os resultados obtidos pelos algoritmos propostos. Todavia, é latente a necessidade de novas propostas para que se possa determinar de forma eficiente livros de códigos LDC para os futuros sistemas de comunicação.

## Capítulo 4

# Considerações sobre o Canal de Realimentação Limitada

Observou-se a necessidade de analisar as técnicas propostas para sistemas com canal de realimentação limitada em condições mais próximas das reais ao notar-se que, apesar dos bons resultados apresentados, os autores das propostas não avaliaram o impacto dos efeitos de um canal de realimentação não ideal. Essa necessidade torna-se ainda mais importante quando se percebe que os novos sistemas em desenvolvimento, como WiMAX e LTE, os quais poderiam adotar tais técnicas, operam em realidades bem diferentes das utilizadas para avaliar as técnicas até o momento.

No presente trabalho, serão estudados o sistema IEEE 802.16e-2005 (WiMAX) e o sistema LTE (*Long Term Evolution*). O primeiro será avaliado na configuração TDD, na qual a estrutura do quadro do enlace direto é formada por 47 símbolos OFDM e 1024 subportadoras, divididas em subcanais de 48 subportadoras [10], como pode ser visto na Figura 4.1. Em cada subcanal são transmitidas sequências de *slots* que podem ter formações diversas. Já o segundo será avaliado na configuração FDD na qual um quadro é dividido em 20 *slots*, cada qual com 7 símbolos e 12 subportadoras [11], como pode ser visto na Figura 4.2.

Para fins de simulação, são definidas estruturas de quadro específicas para cada sistema. No presente trabalho, o termo quadro é utilizado para definir o bloco de subportadoras e símbolos de cada tecnologia. Assim, para o sistema WiMAX, o quadro utilizado é formado por 48 subportadoras e 47 símbolos OFDM em sequência. No caso do sistema LTE, o quadro utilizado é formado por 12 subportadoras e 7 símbolos OFDM em sequência.

A organização da sequência de transmissão em quadros obriga o uso do canal de realimentação apenas no intervalo entre os quadros. Essa limitação implica, portanto, a transmissão periódica de dados por tal canal, o que não foi avaliado nas propostas citadas no item 2.1.3. Além disso, enviar informações pelo canal de realimentação para cada subportadora de um bloco pode não ser eficiente. Portanto, essa limitação também será analisada.

Outra limitação que não foi avaliada é o atraso do canal de realimentação. Os equipamentos atuais não têm a capacidade de processar a informação recebida instantaneamente. Assim, como o receptor precisa receber o sinal enviado, estimar o canal e determinar a informação que deve ser



Figura 4.1: Estrutura de quadros do sistema WiMAX.



Figura 4.2: Estrutura de quadros do sistema LTE.

enviada pelo canal de realimentação, não é possível uma comunicação sem atraso por esse canal. Além disso, deve-se considerar que, para estimar o canal, o receptor utiliza pilotos que são enviados em certas subportadoras. O tempo necessário para receber os pilotos e estimar o canal pode ser bastante longo, dependendo da configuração do sistema. Dessa forma, o receptor pode precisar esperar diversos quadros até ter a oportunidade de enviar os bits necessários para que as técnicas funcionem corretamente.

Por fim, todo sistema de comunicação está sujeito a erros, e o caso do canal de realimentação não é diferente; por isso, é necessário avaliar o impacto de erros na transmissão dos índice do livro de códigos sobre a performance da técnica LDC. Os sistemas que serão analisados, neste estudo, usam altas taxas de codificação para garantir que a informação de sinalização chegue ao seu destino sem erros. Portanto, o impacto do aumento do número de bits necessários para enviar tal informação também deve ser estudado.

### 4.1 Modelo de Simulação

Com o intuito de fundamentar a análise deste trabalho, um simulador de enlace foi desenvolvido especialmente para avaliar a performance de sistemas MIMO com canal de realimentação em condições nas quais as limitações presentes em sistemas reais possam ser consideradas.

O simulador, cuja estrutura é apresentada na Figura 4.3, foi desenvolvido em código Matlab e é composto de diversos módulos que se interagem. A utilização de módulos é recomendada para facilitar o entendimento do todo, reduzir o tempo necessário para detectar falhas e permitir que adaptações e melhorias sejam incluídas no programa de forma simples e direta.



Figura 4.3: Estrutura de blocos do simulador.

A estrutura básica do simulador pode ser apresentada descrevendo-se os módulos e a forma como ocorre a interação entre eles. A interação entre os módulos ocorre em ciclos, que representam a transmissão de um quadro. A cada ciclo, a informação é transferida do primeiro módulo até o último, cada qual processando essa informação e passando-a para o próximo. Ao final de cada ciclo, o processo é reiniciado até que a transmissão do total de quadros tenha sido simulada.

Além disso, devido à escolha dos sistemas que serão estudados, o simulador foi concebido de forma a modelar uma comunicação com OFDM. Entretanto, apesar de considerar que uma transmissão OFDM está sendo realizada, o simulador não realiza os cálculos relativos a esse tipo de transmissão, isto é, ele apenas utiliza o envelope complexo da resposta em frequência do canal de cada subportadora em seus cálculos.

O primeiro módulo é o Transmisssor. Esse módulo cria, utilizando uma distribuição uniforme, os dados que representam a informação que deve ser enviada. Informação suficiente para formar um quadro é criada, considerando-se o número de símbolos OFDM por quadro, o número de portadoras, a modulação e o tipo de STBC que serão utilizados. A palavra-código MIMO é escolhida também nesse módulo. Entretanto, o mapeamento do índice da palavra-código para o bloco de código será feito no módulo seguinte, denominado Mapeador, que utilizará o índice para selecionar de uma lista a palavra-código que será enviada. Nesses dois módulos, a informação passa então de bits para os símbolos  $s_q$  e daí para a matriz  $\mathbf{X}$ , completando a etapa de transmissão.

O módulo de ruído tem como única função criar, utilizando-se um gerador de números aleatórios com distribuição normal, um conjunto de números que representam a matriz de ruído complexo  $\mathbf{N}$ , apresentada em (2.3). O módulo de canal, por sua vez, pode funcionar de duas formas distintas:

utilizando um gerador de números aleatórios com distribuição Rayleigh ou lendo as informações que representam a matriz de canal **H** de um arquivo, que é informado como parâmetro de configuração da simulação.

Esse arquivo com as informações do canal é criado utilizando o modelo clássico de Jakes [12], no qual os multipercursos e o efeito Doppler são considerados. Tais informações são guardadas na forma de um vetor de canal espacial variante no tempo. O vetor utilizado nas simulações neste trabalho foi obtido configurando-se o algoritmo para gerar um vetor de canal OFDM na frequência de 2.5 GHz, com 10MHz de banda e 1024 subportadoras. O perfil de atraso de potência utilizado foi o *ITU Pedestrian B* [13], no qual a velocidade do móvel é de 3Km/h. As múltiplas antenas de transmissão ou recepção são consideradas descorrelacionadas. Assim, vetores foram criados para cada combinação de antenas de transmissão e recepção utilizada nas simulações.

Em seguida, o módulo Receptor utilizará a informação gerada pelos módulos de canal e de ruído para criar a matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$  que representa o sinal recebido, utilizando a Equação (2.3). Essa informação segue então para o módulo seguinte que decidirá, aplicando o critério da máxima verossimilhança, qual palavra código foi recebida, informando para o módulo seguinte quais símbolos formam a palavra-código estimada.

Por fim, um algoritmo verificará se erros ocorreram durante o processo, determinando quantos erros de símbolos e de bits ocorreram em todo o quadro. Essa informação será utilizada para criar as estatísticas de SER e de BER.

O simulador possui, além dos módulos já apresentados, os módulos que simulam o funcionamento do canal de realimentação. O mais importante deles é o módulo que tem como função gerar a informação do canal de realimentação. Esse módulo utiliza as informações disponíveis sobre o estado do canal e sobre a SNR, para informar ao transmissor o melhor modo de transmissão. É nesse módulo em que se concentrou boa parte deste estudo, pois é nele que as limitações do canal de realimentação são modeladas.

As informações produzidas pelo módulo de canal de realimentação são utilizadas pelo módulo Mapeador, na transmissão, para selecionar o melhor código LDC. Essa informação, obviamente, também é utilizada pelo algoritmo de recepção por máxima verossimilhança.

O módulo de canal de realimentação seleciona o melhor LDC, utilizando o critério do menor limite superior de probabilidade de erro por pares. A forma como esse limite é calculado é apresentada em (2.13). Entretanto, de forma a reduzir o tempo necessário de simulação, um critério equivalente foi escolhido, simplificando-se a Equação (2.13) como é apresentado na Equação (3.1). Esse critério é o mesmo utilizado pelo algoritmo de busca apresentado anteriormente.

### 4.2 Limitações do Canal de Realimentação

O módulo de canal de realimentação do simulador tem também como função modelar as limitações do canal de realimentação. Para cada uma delas, foi criado um código específico para que o modelo se aproximasse ao máximo das condições presentes em sistemas reais.

#### 4.2.1 Atraso de Sinalização

No estudo do atraso da sinalização, considerou-se que a informação era enviada ao fim de cada quadro, em um grande bloco no qual a informação para todos os símbolos e todas as portadoras do quadro estaria disponível simultaneamente. No entanto, a informação levaria um determinado número de quadros até estar disponível para o transmissor. Esse comportamento foi obtido, utilizando-se uma fila do tipo FIFO (*First In First Out*), na qual a informação entra e sai na ordem que chegou, após aguardar por determinado número de ciclos. Assim, pode-se controlar o tamanho do atraso, controlando-se o número de quadros em que a informação ficará na fila até ser utilizada.

#### 4.2.2 Período

O período de sinalização é modelado no simulador, considerando-se apenas que a informação é enviada sempre no fim de certo quadro. O período é, portanto, o número de quadros que o receptor deve aguardar antes de enviar novamente alguma informação pelo canal de realimentação. Dessa forma, como no caso do atraso na sinalização, a informação é enviada em um grande bloco em que estão contidos os índices dos códigos LDC escolhidos referentes a cada um dos símbolos OFDM, em cada subportadora do quadro.

#### 4.2.3 Blocos de Subportadoras

No simulador, também é modelado o agrupamento de subportadoras OFDM em blocos. A informação é enviada pelo canal de realimentação no fim do quadro, mas, nesse caso, a quantidade de informação enviada por bloco será equivalente à informação enviada referente a uma única subportadora. Assim, o receptor seleciona o melhor código LDC referente à subportadora que se encontra no meio do bloco de subportadoras e o envia ao transmissor a fim de que ele utilize essa informação para escolher o mesmo LDC para todas as subportadoras do bloco.

#### 4.2.4 Erro

Um erro no processo de envio da informação pode levar o transmissor a codificar a informação com um LDC diferente do LDC selecionado pelo receptor. Essa situação é modelada no simulador com uma variável aleatória de distribuição uniforme. Assim, o simulador pode ser configurado de forma que a probabilidade de um erro ocorrer na transmissão pelo canal de realimentação é pré-determinada. Caso o simulador entenda que um erro deva ocorrer em certa transmissão, ele escolherá aleatoriamente um índice entre todos os possíveis. Com isso, uma probabilidade nula leva a uma transmissão sem qualquer erro, enquanto uma transmissão com 100% de erro equivale à situação em que o receptor escolhe aleatoriamente os índices e os envia para o transmissor.

## Capítulo 5

# Análise das Limitações do Canal de Realimentação

Neste capítulo, apresentam-se os resultados de simulação para cada uma das limitações listadas no capítulo anterior. Nessas simulações, foi utilizada a técnica proposta em [5] com o código LDC apresentado em (2.20), a qual é, no presente trabalho, denominada técnica LDC. Para comparação, também são apresentados resultados referentes à técnica que usa o código de Alamouti e à técnica em que não são utilizadas múltiplas antenas de transmissão, as quais são denominadas, neste trabalho, técnica Alamouti e técnica Sem Diversidade, respectivamente.

Todas as simulações foram realizadas com três modulações diferentes: BPSK, 8PSK e 32QAM. Essas modulações têm energia média unitária, e a modulação 32QAM utilizada tem o formato apresentado na figura 5.1.



Figura 5.1: Formato da constelação 32QAM.

As figuras 5.2(a), 5.2(b) e 5.2(c) apresentam os resultados de simulação referentes às técnicas LDC, Alamouti e Sem Diversidade. Como pode ser verificado nas figuras, a técnica LDC apresenta maiores ganhos em termos de redução da BER quando a SNR é maior. Dessa forma, todas as simulações dos casos em que as limitações são avaliadas foram feitas com SNR igual a 20 dB.



Figura 5.2: Taxa de erro de bits com razão sinal ruído variável.

### 5.1 Simulações com Erros no Canal de Realimentação

Inicialmente, são apresentados os resultados de simulação com erros no canal de realimentação. As simulações foram realizadas variando-se o parâmetro  $P_f$ , que define a probabilidade de erro no canal de realimentação de 0% a 100% em passos de 10%. As figuras 5.3(a), 5.3(b) e 5.3(c) apresentam as curvas de BER em função da probabilidade de erro no canal de realimentação para as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM. Em cada figura, também são apresentados, para comparação, os valores da BER referentes à técnica Sem Diversidade e à técnica Alamouti.

Como pode ser verificado nas figuras, o ganho fornecido pela técnica LDC é reduzido com o aumento da probabilidade de erro no canal de realimentação. Pode-se avaliar essa redução, comparando a curva da técnica LDC com a curva da técnica Alamouti. Verifica-se que, do ponto



Figura 5.3: Taxa de erro de bits com erro de canal de realimentação variável.

de vista da taxa de erro, a técnica LDC apresenta taxas menores que a técnica Sem Diversidade, não importando a probabilidade  $P_f$ . Verifica-se, também, que, com a constelação BPSK, a técnica LDC tem BER menor que a técnica Alamouti quando a probabilidade  $P_f < 20\%$ . Para 8PSK e 32QAM, isso ocorre com  $P_f < 50\%$  e  $P_f < 75\%$ , respectivamente. Esse fato pode ser explicado pela necessidade de codificação em cada caso. A utilização de ordens maiores de modulação implica maior dificuldade de estimação dos símbolos enviados, caso a SNR seja mantida para todos os casos. Pode-se afirmar, dessa forma, que os benefícios do uso da técnica LDC são menores para o BPSK do que para o 32QAM. Assim, apesar dos erros no canal de realimentação, obtêm-se melhores resultados na aplicação da técnica LDC quando a codificação é mais necessária.

Não é suficiente analisar, contudo, apenas a BER para avaliar os benefícios da técnica LDC. De forma a determinar o impacto dos erros no canal de realimentação, é importante verificar, além da BER, a taxa útil de transmissão do sistema. Essa grandeza indica a capacidade do sistema em utilizar os recursos disponíveis. Em seu cálculo, são consideradas as informações de BER, bem como a quantidade de recursos que é utilizada para sinalização. De forma a simplificar a análise, considera-se um sistema duplex em que a informação do canal de realimentação referente a um enlace é enviada pelo enlace na direção oposta, ou seja, o enlace direto tem como canal de realimentação o enlace reverso e vice-versa. Assim, pode-se calcular a taxa útil R como na Equação



Figura 5.4: Taxa útil com erro de canal de realimentação variável.

(5.1), em que  $N_s$  e  $N_c$  são, respectivamente, o número de símbolos OFDM e de subportadoras por quadro e M é a ordem da modulação. *BER* corresponde a BER, estimada por meio de simulação com SNR igual a 20 dB, F denota o número de bits de sinalização utilizado por quadro e T denota o período de transmissão do quadro.

$$R = \frac{(N_s N_c \log_2 M - F) \times (1 - BER)}{T}$$
(5.1)

As figuras 5.4(a), 5.4(b) e 5.4(c) apresentam a taxa útil para as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM com erro de canal de realimentação variável. Para o cálculo da taxa R apresentada nessas figuras utilizou-se Ns = 50, Nc = 1, F = 1 e T = 0.005. O valor de M utilizado foi de 2, 8 e 64 símbolos para BPSK, 8PSK e 32QAM, respectivamente.

Novamente, os valores de referência estão presentes nas figuras para comparação. Nota-se que, caso a constelação BPSK seja utilizada, a taxa útil da técnica LDC será sempre inferior à técnica Alamouti. No caso das modulações 8PSK e 32QAM, é interessante utilizar o LDC apenas quando houver  $P_f < 40\%$  e  $P_f < 70\%$ , respectivamente. Nota-se que a técnica LDC passa, dessa forma, a exigir valores menores de probabilidade  $P_f$  para ser vantajosa, quando comparada à técnica Alamouti. Isso ocorre devido à necessidade de sinalização imposta pela técnica. Nota-se, também,

que o impacto da sinalização é maior para as modulações de ordem menor, tornando o uso da técnica LDC não recomendado quando a modulação for BPSK, por exemplo.



Figura 5.5: Taxa de erro de bits com atraso no canal de realimentação variável.

Além disso, cabe ressaltar que, nos três casos, foi considerado o número de bits de realimentação F por quadro igual a 1, ou seja, nenhuma codificação foi utilizada no canal de realimentação para garantir que a informação de sinalização da técnica LCD seja recebida corretamente. Assim, quando modulações de maior ordem forem utilizadas, a BER do canal de realimentação será maior, exigindo que sejam utilizados, no canal de realimentação, códigos de repetição, por exemplo, o que implicará a redução da taxa útil.

### 5.2 Simulações com Atraso no Canal de Realimentação

Apresentam-se, a seguir, os resultados de simulação com atraso no canal de realimentação. Variou-se de 0 a 10 quadros o valor do parâmetro  $N_d$ , que determina o tamanho em quadros do atraso no canal de realimentação nas simulações, obtendo-se, assim, atrasos de 0 a 50 ms. Verifica-se, nas figuras 5.5(a), 5.5(b) e 5.5(c), em que são apresentadas as curvas de BER para as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM, respectivamente, que a BER cresce com o aumento do atraso, em todos os casos. Com o aumento do atraso, torna-se menos provável que o índice escolhido pelo receptor ainda seja o ótimo, apesar de o receptor escolher corretamente tal índice, pois o canal varia com o tempo. Dessa forma, o comportamento da técnica LDC com relação ao atraso assemelha-se ao comportamento com relação ao erro no canal de realimentação.

Assim, verifica-se que, quando o sistema utiliza a constelação BPSK, a técnica LDC apresenta BER menor que a técnica Alamouti se  $N_d < 3$ . Quando a constelação é 8PSK ou 32QAM, isso ocorre se  $N_d < 5$  e  $N_d < 7$ , respectivamente. Assim, de forma similar à probabilidade de erro no canal de realimentação, pode-se observar que a redução de ganho devido ao aumento do atraso é menor quanto maior for a ordem da constelação utilizada. Mais uma vez, esse fato pode ser explicado pela necessidade de codificação imposta pela utilização de ordens maiores de modulação.



Figura 5.6: Taxa útil com atraso no canal de realimentação variável.

Nota-se, também, que a curva da BER tende a um valor constante com o aumento do atraso. Isso se deve ao fato de que a informação enviada pelo canal de realimentação torna-se imprecisa com o passar dos quadros, dado que o canal utilizado é variante no tempo. Considerando-se que a frequência Doppler máxima do canal utilizado nas simulações está em torno de 7 Hz, o tempo de coerência será de 21,5 ms, aproximadamente. Segundo o modelo utilizado para o cálculo desse valor [3], é nesse ponto que o canal passa a ter autocorrelação menor que 0,7. Assim, quando  $N_d$  se aproxima de 10 quadros, o sistema está operando em condições nas quais a correlação entre o estado do canal imediatamente anterior ao próximo envio e o estado do canal considerado no momento do envio da informação pelo canal de realimentação é bem pequena. Dessa forma, pode-se concluir que a probabilidade de o índice escolhido ainda ser válido é baixa. Além disso, caso a velocidade do móvel fosse alterada para 50 Km/h, teria-se o tempo de coerência em torno de 1,5 ms, o que faria com que os ganhos fossem fortemente reduzidos mesmo com atrasos muito pequenos.

Assim como na seção anterior, deve-se considerar também a taxa útil do sistema. Observa-se, nas Figuras 5.6(a) (BPSK), 5.6(b) (8PSK) e 5.6(c) (32QAM), que, caso a constelação BPSK seja utilizada, a taxa útil R da técnica LDC nunca será melhor que a taxa útil da técnica Alamouti. Para as constelações 8PSK e 32QAM, será interessante utilizar a técnica LDC caso haja  $N_d < 5$  e  $N_d < 7$ , respectivamente.

### 5.3 Simulações com Período de Sinalização Variável

Quanto aos resultados de simulação com transmissão periódica de informação pelo canal de realimentação, observa-se nas Figuras 5.7(a), 5.7(b) e 5.7(c) que a BER aumenta com o aumento do número de períodos entre cada transmissão de sinalização pelo canal de realimentação. Nessas simulações, o parâmetro  $N_p$  foi utilizado para controlar o tamanho do período em quadros. Verifica-se que, no caso em que a constelação BPSK é utilizada, se  $N_p > 5$ , então a BER da técnica LDC será maior que a taxa da técnica Alamouti. Para o caso em que a constelação 32QAM é utilizada, a BER da técnica LDC será maior se  $N_p > 10$ . Entretanto, quando a constelação 32QAM é utilizada, a BER da técnica LDC é sempre menor. A mesma explicação do item anterior é válida também para esse caso: com o aumento do número de quadros, a correlação entre o estado do canal no começo e no fim do período de transmissão pelo canal de realimentação torna-se muito pequena. Além disso, como já foi citado anteriormente, mantida a mesma SNR, existe maior ganho com o uso da técnica LDC quando é maior a ordem da modulação, pois, nessa situação, existe maior necessidade de codificação para que o erro seja reduzido.

Analisando-se a taxa útil R, como nos casos anteriores, pode-se perceber que ela varia de forma diferente quando a limitação imposta é a transmissão periódica pelo canal de realimentação. Isso se deve à redução da utilização do canal de realimentação para transmissão de sinalização com o aumento do número de quadros. Assim, pode-se notar nas Figuras 5.8(a), 5.8(b) e 5.8(c) que existe um ponto ótimo onde há equilíbrio entre o ganho na redução da BER e a perda referente ao uso do canal de realimentação para sinalização. As figuras mostram que, para as constelações BPSK, 8PSK e 32 QAM, os pontos ótimos seriam 4, 2 e 2 quadros, respectivamente. No entanto, é importante notar que, caso a constelação BPSK seja utilizada, a taxa útil do esquema LDC nunca será melhor que a taxa do esquema Alamouti. Para a constelação 8PSK, a taxa do esquema LDC será sempre melhor.



Figura 5.7: Taxa de erro de bits com período de sinalização variável.

### 5.4 Simulações com Tamanho de Bloco de Subportadoras Variável

Em seguida, são apresentados os resultados de simulação com o agrupamento de subportadoras em blocos, em que o parâmetro  $N_c$  foi utilizado para determinar o número de subportadoras por bloco. Nas Figuras 5.9(a), 5.9(b) e 5.9(c), nota-se que a taxa de erro de bits (BER) aumenta com o crescimento de  $N_c$ . Esse aumento, contudo, passa a ser significativo apenas quando  $N_c > 8$ , para as três modulações analisadas. De forma semelhante ao atraso e ao período, pode-se analisar esses resultados com relação à banda de coerência. O modelo utilizado considera o perfil de atraso do canal [3]. Segundo esse modelo, a banda de coerência é de aproximadamente 1.5 MHz. Isso significa que, em um sistema com 1024 subportadoras em que cada subportadora tem aproximadamente 9.8 KHz, a autocorrelação entre as subportadoras será menor que 0,7 apenas quando o bloco de subportadoras for maior que 160 subportadoras.

Ao verificar a taxa útil R, nas Figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.10(c)), nota-se também que existe um ponto máximo na taxa útil da técnica LDC em torno de  $N_c = 16$  e  $N_c = 8$ , quando as constelações utilizadas são BPSK e 8PSK, respectivamente. Ressalta-se, porém, que, nesse caso, a taxa R foi normalizada por subportadora, para que o resultado pudesse ser comparado aos resultados das outras limitações. No caso da constelação 32QAM, blocos de 4 ou 8 portadoras



Figura 5.8: Taxa útil com período de sinalização variável.

são igualmente interessantes quando se analisa a taxa útil; assim, pode-se afirmar que um número ideal de subportadoras por bloco pode ser obtido. Por outro lado, os resultados indicam que o agrupamento de subportadoras não é a limitação que causa o maior impacto nesse tipo de sistema.



Figura 5.9: Taxa de erro de bits com tamanho de bloco de subportadoras variável.



Figura 5.10: Taxa útil com tamanho de bloco de subportadoras variável.

## Capítulo 6

# Análise do Canal Não Ideal em Sistemas Reais

Neste capítulo, são apresentados os resultados referentes às simulações em que o simulador é configurado de maneira que sua estrutura de quadros seja equivalente à estrutura de quadros de sistemas reais (WiMAX e LTE). De forma similar ao capítulo anterior, todas as simulações foram realizadas, utilizando a técnica proposta em [5], com SNR igual a 20 dB. Em cada uma das simulações foram utilizadas as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM. Destaca-se, no entanto, que apesar de essas modulações não integrarem a especificação de nenhum dos dois sistemas analisados, os resultados apresentados a seguir podem ser estendidos para outras modulações, se o impacto da ordem da modulação sobre o desempenho da técnica LDC for devidamente considerado.

Além disso, o objetivo do presente trabalho não é avaliar o desempenho dos sistemas WiMAX e LTE. Pretende-se, na verdade, avaliar apenas o impacto das limitações em situações similares às enfrentadas por tais sistemas em situações reais. Assim, considerou-se apenas a estrutura de quadros de cada um dos sistemas para determinar o tamanho do atraso, dos blocos de subportadoras e dos períodos de transmissão pelo canal de realimentação. Não foram considerados, portanto, outros tipos de codificação que não o tipo proposto pela técnica.

### 6.1 Taxa de Erro de Bits (BER)

Estimou-se a BER dos sistemas WiMAX e LTE por meio de simulações computacionais. Em ambos os casos, as limitações estudadas no capítulo anterior foram utilizadas no modelo de simulação. Nessas simulações, considerou-se que existe um atraso de 2 quadros entre o momento em que o canal é estimado e o momento em que o índice  $k_{opt}$ , usado para selecionar o código LDC, está disponível para o transmissor.

Considerou-se, também, que o receptor seleciona um código LDC por quadro, ou seja, o transmissor utilizará o mesmo índice para todos os símbolos de todas as subportadoras do quadro. Além disso, configurou-se o simulador para que a probabilidade de erros de transmissão pelo canal de realimentação fosse nula. A escolha dessa configuração deve-se ao fato de ambos os sistemas utilizarem altas taxas de codificação em seus canais de sinalização. Portanto, o efeito dos erros no canal de realimentação será avaliado na taxa útil do sistema, quando se analisar o impacto da codificação no aumento da quantidade de bits necessários para enviar o índice  $k_{opt}$ .



Figura 6.1: Taxa de erro de bits com período de sinalização variável - WiMAX.

Nas Figuras 6.1(a), 6.1(b) e 6.1(c), pode-se observar a BER em função do período de sinalização para o sistema WiMAX. Nessas figuras, utilizam-se as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM, respectivamente. Nota-se, nesses resultados, que caso a modulação BPSK seja utilizada, será melhor utilizar a técnica Alamouti, pois tal técnica apresenta menor BER que a técnica LDC. Por outro lado, caso as modulações 8PSK e 32QAM sejam utilizadas, a BER apresentada pelo sistema será reduzida com o uso da técnica LDC. Entretanto, tal redução apenas ocorrerá caso o período seja menor que 8 e 10 quadros, para as modulações 8PSK e 32QAM, respectivamente.

Percebe-se, também, por meio da análise das figuras, que o impacto da transmissão periódica pelo canal de realimentação continua significativo. O atraso de 2 quadros e o uso de múltiplas subportadoras por bloco, no entanto, não afeta significativamente o desempenho da técnica LDC. O atraso de 2 quadros é pequeno para o tipo de canal utilizado nas simulações em que a velocidade do móvel é de apenas 3 km/h. Além disso, tal canal é pouco seletivo na frequência, ou seja, sua banda de coerência é grande ao compararmos com o tamanho do quadro no domínio da frequencia. Assim, pode-se concluir, para esse caso, que a utilização do mesmo código para todas as subportadoras do quadro não degrada significativamente a BER. Nas Figuras 6.2(a), 6.2(b) e 6.2(c), são apresentados os resultados de taxa de erro de bits para o sistema LTE, com modulação BPSK, 8PSK e 32QAM, respectivamente. Nesses resultados, nota-se que a transmissão periódica pelo canal de realimentação não afeta o LTE da mesma forma que o WiMAX. Isso ocorre pois o tamanho do quadro LTE é consideravelmente menor que o quadro do outro sistema. Verifica-se que, mesmo com período de 20 quadros, a taxa de erro da técnica LDC é menor que a taxa de erro da técnica Alamouti.



Figura 6.2: Taxa de erro de bits com período de sinalização variável - LTE.

### 6.2 Taxa Útil R

Como já foi citado no capítulo anterior, verificar apenas a BER não permite concluir se a técnica LDC apresenta vantagens para os sistemas como WiMAX e LTE. É importante avaliar também a taxa útil R, apresentada em (5.1). As Figuras 6.3(a), 6.3(b) e 6.3(c) apresentam a taxa útil R para o sistema WiMAX, com as modulações BPSK, 8PSK e 32QAM, respectivamente.

Nessas figuras, a taxa útil foi calculada sem codificação no canal de realimentação, ou seja, foi utilizado apenas 1 bit para enviar o índice  $k_{opt}$  para o transmissor. Verifica-se que ganhos de taxa útil R de aproximadamente 2.1% (8PSK) e 3.6% (32QAM) podem ser obtidos se a técnica LDC for



Figura 6.3: Taxa útil com período de sinalização variável - WiMAX.

utilizada. Entretanto, essa técnica não melhora a taxa útil quando a modulação BPSK é utilizada.

Contudo, resultados mais próximos da realidade são obtidos apenas caso se considere que cada bit enviado pelo canal de realimentação tenha sido codificado de forma que a transmissão seja robusta o suficiente para um erro de sinalização ser bastante improvável. Assim, as Figuras 6.4(a), 6.4(b) e 6.4(c) apresentam a taxa útil R para a técnica LDC com codificação 1/32 no canal de realimentação, ou seja, para cada bit de informação necessário para enviar  $k_{opt}$ , 32 bits são enviados.

Pode-se notar, observando-se as figuras, que, mesmo com a codificação 1/32, é possível obter ganhos de performance com o uso da técnica LDC desde que sejam utilizadas modulações de maior ordem. Caso a modulação BPSK seja usada, a técnica LDC apresentará perdas significativas de taxa útil R quando comparada à técnica Alamouti. Por outro lado, é vantajoso utilizar a técnica LDC caso as modulações 8PSK ou 32QAM sejam utilizadas, mesmo com a codificação do canal de realimentação. Isso ocorre pois, mantida a quantidade absoluta de recursos necessários para a sinalização, o aumento da ordem da modulação implica um uso mais efetivo desses recursos. Assim, recomenda-se o envio da informação pelo canal de realimentação a cada quadro, pois, dessa forma, ainda é possível obter ganhos de 1.6% (8PSK) e 3.2% (32QAM), aproximandamente, na comparação com a técnica Alamouti.



Figura 6.4: Taxa útil com período de sinalização variável e codificação 1/32 no canal de realimentação - WiMAX.

Por outro lado, em sistemas como o LTE, em que o tamanho do quadro é reduzido em comparação com o tamanho do quadro do WiMAX, não é recomendado o envio de informação pelo canal de realimentação em um período tão curto. Observando-se as Figuras 6.5(a), 6.5(b) e 6.5(c), verifica-se que caso o canal de realimentação não fosse codificado, obteriam-se ganhos de aproximadamente 2.1% e 4.9% devido ao uso da técnica LDC para qualquer configuração de período, desde que fossem utilizadas as modulações 8PSK ou 32QAM, respectivamente.

No entanto, assim como no caso do sistema WiMAX, o canal de realimentação deve ser codificado para que não haja erros na transmissão dos bits utilizados para selecionar o código LDC. Assim, como pode ser verificado nas Figuras 6.6(a), 6.6(b) e 6.6(c), se a codificação 1/32 for utilizada, os ganhos da técnica LDC para o sistema LTE serão bastante reduzidos. Nesse caso, a taxa útil R é degradada substancialmente pelo uso do canal de realimentação para sinalização da técnica LDC, quando períodos curtos entre as transmissões pelo canal de realimentação são utilizados. Portanto, para o sistema LTE, recomenda-se o uso de período superior a 20 quadros caso se deseje obter os maiores ganhos da técnica LDC, dado que, com essa configuração, ainda é possível obter ganhos de aproximadamente 1,3% e 4,1%, com as modulações 8PSK e 32QAM, respectivamente.



Figura 6.5: Taxa útil com período de sinalização variável - LTE.



Figura 6.6: Taxa útil com período de sinalização variável e codificação 1/32no canal de realimentação - LTE.

## Capítulo 7

# Algoritmo de Predição de Canal com Filtro Discreto de Kalman

Observando-se os resultados de simulação apresentados nos capítulos anteriores, verifica-se que o atraso no canal de realimentação reduz os ganhos obtidos com o emprego da técnica LDC. Neste capítulo, é apresentado um algoritmo de predição que atenua o efeito dessa limitação.

### 7.1 Descrição de Algoritmo

O algoritmo de predição utilizado para atenuar o efeito do atraso no canal de realimentação é baseado no filtro discreto de Kalman. Esse filtro é conhecido na literatura por sua capacidade de estimar as variáveis de estado de um sistema a partir de amostras ruidosas obtidas por observação de tal sistema [14]. Esse mesmo filtro, quando é utilizado de forma adequada, pode ser usado para estimar o estado futuro de um sistema das mesmas amostras.



Figura 7.1: Modelo do algoritmo de predição de canal com filtro discreto de Kalman.

No algoritmo proposto, deseja-se utilizar o filtro discreto de Kalman para estimar o estado

futuro do canal de comunicação. Essa informação será utilizada para determinar qual código LDC será o melhor em um estado futuro. Assim, ajustando-se corretamente o filtro, é possível enviar o índice  $k_{opt}$  com alguma antecedência e garantir que o transmissor tenha a informação correta no momento certo.

A Figura 7.1 demonstra o modelo de sistema utilizado, em que a parte cinza da figura representa o passado, enquanto a parte branca, o futuro. O algoritmo tem disponível todas as amostras passadas, mas utiliza apenas algumas delas, que estão marcadas com quadrados cheios na figura. Esse tipo de sistema pode ser modelado pela Equação (7.1). Nessa equação, o valor de h[n]representa o ganho complexo do canal no instante de tempo n, os  $x_i$  representam os coeficientes do filtro, d representa o tamanho do atraso e m determina a ordem do filtro.

$$h[n] = h[n-d]x_1[n] + h[n-d-1]x_2[n] + h[n-d-2]x_2[n] + \ldots + h[n-d-m]x_m[n]$$
(7.1)

O algoritmo do filtro dicreto de Kalman é dividido em duas etapas: atualização e predição, que estão representadas pelas Figuras 7.1(a) e 7.1(b), respectivamente. Na primeira etapa, a amostra disponível mais nova (A) e as amostras passadas (B) são utilizadas para atualizar o estado do filtro. Na segunda etapa, é estimado o valor da amostra futura (D) a partir dos valores atuais disponíveis (C) e do estado atual do filtro.

Assim, com base na definição das equações de atualização e na observação das variáveis de estado do sistema, apresentadas em (7.2) e (7.3), respectivamente, pode-se aplicar o algoritmo simplificado do filto discreto de Kalman apresentado nas equações (7.4), (7.5), (7.6) e (7.7). Nessas equações,  $\mathbf{x}[n]$  representa o vetor com os coeficientes do filtro, enquanto  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  representa o valor de  $\mathbf{x}[n]$  estimado pelo filtro e a matriz  $\mathbf{H}[n]$  representa o vetor de ganhos complexos do canal, como apresentado em (7.1), v[n] denota o ruído branco com média zero e variância  $\mathbf{R}[n]$  e  $\mathbf{w}[n]$  denota o vetor de ruído branco com média zero e variância  $\mathbf{R}[n]$  e  $\mathbf{w}[n]$  representam, respectivamente, o ruído de medição ou observação e o ruído de processo.

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n-1]$$
 (7.2)

$$h[n] = \mathbf{H}[n]\mathbf{x}[n] + v[n]$$
(7.3)

$$\mathbf{P}^{-}[n] = \mathbf{P}^{+}[n-1] + \mathbf{Q}[n-1]$$
(7.4)

$$\mathbf{K}[n] = \mathbf{P}^{-}[n-1]\mathbf{H}[n]^{T}(\mathbf{H}[n]\mathbf{P}^{-}[n-1]\mathbf{H}[n]^{T} + R[n])^{-1}$$
(7.5)

$$\widehat{\mathbf{x}}[n] = \widehat{\mathbf{x}}[n-1] + \mathbf{K}[n](h[n] + \mathbf{H}[n]\widehat{\mathbf{x}}[n-1])$$
(7.6)

$$\mathbf{P}^{+}[n] = (\mathbf{I} + \mathbf{K}[n]\mathbf{H}[n])\mathbf{P}^{-}[n-1](\mathbf{I} + \mathbf{K}[n]\mathbf{H}[n])^{T} + \mathbf{K}[n]\mathbf{R}[n]\mathbf{K}[n]^{T}$$
(7.7)

A matriz  $\mathbf{K}[n]$ , apresentada em (7.5), representa o ganho de Kalman, ou seja, determina quanto o erro entre os valores estimado e real da observação do sistema deverá influenciar na atualização do estado do sistema, apresentada na Equação (7.7), enquanto a matriz  $\mathbf{P}[n]$  representa a covariância do estado do sistema.

Assim, a cada ciclo, o algoritmo, após determinar a melhor estimativa do estado do sistema, utiliza a Equação (7.8) para calcular a estimativa do valor futuro do canal.

$$h[n+d] = h[n]x_1[n] + h[n-1]x_2[n] + h[n-2]x_2[n] + \dots + h[n-m]x_m[n]$$
(7.8)

### 7.2 Resultados de Predição de Canal

O algoritmo foi utilizado para estimar o valor futuro do canal com d variando de 1 até 10 quadros. Como resultado, obtiveram-se vetores de canal que foram utilizados no simulador para avaliar quanto o efeito do atraso pode ser atenuado com a aplicação dessa técnica. A Figura 7.2 apresenta, como exemplo, o resultado da utilização do algoritmo para uma antena em apenas uma das portadoras.



Figura 7.2: Exemplo de predição de canal com uso do filtro discreto de Kalman.

### 7.3 Resultados de Simulação com Predição de Canal

Inicialmente, apresenta-se, na Figura 7.3, o resultado da simulação com modulação 8PSK na qual foi considerada a existência de atraso no canal de realimentação. Pode-se observar, nessa figura, que a utilização do algoritmo de predição reduz o efeito do atraso sobre o desempenho da técnica LDC. Essa redução, entretanto, só ocorre quando o atraso é maior do que 2 quadros. Isso ocorre pois a previsão adiciona erros inevitáveis à informação utilizada pelo receptor para selecionar o código LDC. Esses erros são significativos quando o atraso é pequeno, dado que, como visto anteriormente, o efeito do atraso é limitado nesse caso devido a correlação do canal. Por outro lado, os benefícios são maiores que os erros adicionados quando o atraso se torna maior. Na Figura 7.4, apresenta-se o resultado de simulação com modulação 8PSK para o sistema WiMAX. Pode-se observar que o algoritmo é capaz de reduzir o efeito do atraso também nesse caso. Todavia, no caso do sistema WiMAX, a redução não é tão significativa, como pode ser observado na Figura 7.4. A atenuação passa a ocorrer apenas com 7 quadros de atraso. Nessa simulação, assim como nas outras simulações relativas ao sistema WiMAX, apenas uma subportadora central do bloco de subportadoras é considerada para definir o código LDC ótimo. Assim, o erro adicionado pelo algoritmo é estendido às outras subportadoras, aumentando o número de vezes que o código selecionado é inadequado.



Figura 7.3: Taxa de erro de bits com atraso variável no canal de realimentação e predição de canal Kalman.



Figura 7.4: Taxa de erro de bits com atraso variável no canal de realimentação e predição de canal Kalman - WiMAX.

## Capítulo 8

## Conclusões

Neste trabalho, foram analisados os códigos de dispersão linear em situações em que o canal de realimentação está sujeito a limitações similares às encontradas por sistemas reais, como WiMAX e LTE. Além disso, estudou-se o algoritmo de busca utilizado para determinar bons livros de códigos LDC e apresentou-se uma proposta de uso do filtro de Kalman para atenuar os efeitos das limitações impostas à técnica LDC.

Em relação ao algoritmo de busca de livros de códigos LDC apresentado no presente trabalho, pode-se concluir que houve avanço em relação ao algoritmo proposto anteriormente, dado que o primeiro permite buscar novos códigos em configurações mais complexas de forma mais otimizada. Além disso, o uso desse algoritmo produziu resultados que indicam ser possível os melhores livros de códigos LDC já terem sido encontrados, pois os novos livros encontrados apresentam o mesmo desempenho dos propostos em [5], com relação à probabilidade de erro por pares média.

Por outro lado, identificou-se, durante o estudo dos algoritmos de busca, que é necessário outro tipo de algoritmo para que as buscas por livros de códigos LDC ainda mais complexos possam continuar. A quantidade de recursos computacionais exigida por esses algoritmos cresce exponencialmente com o aumento do número de códigos por livro e das dimensões de seus códigos, tornando as buscas mais demoradas e custosas. Ademais, a utilização da probabilidade de erro por pares média demanda a utilização de um número significativo de amostras de canal para que tal função custo possa ser utilizada de forma adequada; com o aumento das dimensões do espaço de busca, tal número também deve crescer exponencialmente para continuar significativo, tornando o cálculo da função custo para cada ponto do espaço de busca discreto ainda mais lento.

No que se refere à análise dos códigos de dispersão linear com canal de realimentação não ideal, conclui-se que é possível utilizar a técnica mesmo em sistemas reais, desde que sejam considerados os efeitos de sua necessidade de sinalização. Para tanto, quanto maior for a ordem da modulação, mais fácil será equilibrar os ganhos provenientes da pré-codificação mais eficiente com as perdas de taxa útil de transmissão por causa da sinalização.

Concluiu-se, também, que o agrupamento de subportadoras em blocos é menos nocivo à técnica LDC que o atraso ou a transmissão periódica. Caso a técnica seja utilizada em condições nas quais a velocidade do terminal seja maior, espera-se que o efeito do atraso e da transmissão periódica sejam ainda maiores. Por outro lado, a limitação imposta pelos erros de transmissão pelo canal de realimentação, apesar de relevante, pode ser eliminada com a utilização de codificação desse canal, desde que o sistema seja configurado de forma equilibrada, para que a taxa útil não seja demasiadamente prejudicada.

Verifica-se, por fim, que a utilização de algoritmos de predição como o apresentado neste trabalho pode atenuar os efeitos do atraso no canal de realimentação limitada. Todavia, tendo em vita que o algoritmo utilizado precisa de ajustes de parâmetros que dependem do tipo de canal, será necessária a utilização de algoritmos de estimação mais robustos, para garantir que o filtro mantenha-se estável.

Assim, percebe-se, por meio do presente trabalho, que ainda existe muito espaço para pesquisa sobre sistemas com canal de realimentação limitada, sendo que é importante que os códigos de dispersão linear e a técnica analisada sejam estudados em situações ainda mais próximas das reais. Pode-se destacar a necessidade de avaliar-se o desempenho dos códigos LDC em simulações em que são consideradas a codificação de canal, a interferência de outros enlaces, a correlação entre as antenas e a presença de linha de visada entre o transmissor e o receptor, antes que eles possam ser adotados pelos sistemas em desenvolvimento.

Além disso, pode-se imaginar a utilização dos códigos LDC para formar blocos de códigos que explorem a diversidade nas três dimensões disponíveis nos novos sistemas (espaço, tempo e frequência) ou a busca de novos códigos LDC que combinem, em um mesmo STBC, benefícios da diversidade e da multiplexação espacial. Entretanto, para que isso se torne realidade, será necessário que trabalhos futuros encontrem novas soluções para os problemas apresentados.

# **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- IEEE standard for local and metropolitan area networks Part 16: Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems amendment 2: physical and medium access control layers for combined fixed and mobile operation in licensed bands and corrigendum 1. *IEEE Std* 802.16e-2005 and IEEE Std 802.16-2004/Cor 1-2005 (Amendment and Corrigendum to IEEE Std 802.16-2004), 2006.
- [2] 3GPP TS 36.201 Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Long Term Evolution (LTE) physical layer; General description. 3GPP TS 36.201, 2009.
- [3] PAULRAJ, A.; NABAR, R.; GORE, D. Introduction to space-time wireless communications.
   [S.1.]: Cambridge university press, 2003.
- [4] ALAMOUTI, S. A simple transmit diversity technique for wireless communications. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, v. 16, n. 8, p. 1451–1458, 1998.
- [5] MACHADO, R.; UCHOA-FILHO, B.; DUMAN, T. Linear dispersion codes for MIMO channels with limited feedback. In: *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, 2008. WCNC 2008. [S.l.: s.n.], 2008. p. 199–204.
- [6] LOVE, D.; JR, R. H.; STROHMER, T. Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, n. 10, p. 2735–2747, 2003.
- [7] TROPP, A. et al. Constructing packings in grassmannian manifolds via alternating projections. submitted to Experimental Mathematics Journal.
- [8] YANG, S.; KO, J.; LEE, Y. Transmit beamforming with reduced channel information in MIMO-OFDM wireless systems. In: Wireless Conference, 2008. EW 2008. 14th European. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–5.
- [9] HASSIBI, B.; HOCHWALD, B. High-rate codes that are linear in space and time. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 48, n. 7, p. 1804–1824, 2002.
- [10] BARRETO, A. N.; JUNIOR, V. A.; CAVALCANTE, A. M. WiMAX móvel, a tecnologia e suas aplicações. In: XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2007. [S.l.: s.n.], 2007.
- [11] LESCUYER, P.; LUCIDARME, T. Evolved Packet System (EPS): The LTE and SAE Evolution of 3G UMTS. [S.l.]: Wiley, 2008.

- [12] RAPPAPORT, T. Wireless Communications: Principles & Practice. [S.I.]: Prentice Hall, 2002.
- [13] SRINIVASAN, R. et al. IEEE 802.16m evaluation methodology document (EMD). IEEE 802.16m-08/004r2, 2008.
- [14] SIMON, D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. [S.I.]: Wiley-Interscience, 2006.

# ANEXOS

## I. RESULTADOS DE BUSCA DE CÓDIGOS LDC

Em (I.1), são apresentados os conjuntos de matrizes  $\mathbf{C}_k$  que formam os 192 conjuntos de matrizes  $\mathbf{X}_k$ , apresentadas nas tabelas I.1, I.2 e I.3; tais conjuntos foram encontrados como resultado da busca por pares de códigos LDC, com os parâmetros  $M_T = \tau = Q = 2$ ,  $M_R = 1$  e K = 2.

$$C_{A} = \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{array}\right] \\ C_{I} \\ C_{B} = \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{array}\right] \\ C_{I} \\ C_{I} \\ C_{I} \\ C_{I} \end{array}\right] \left\{ \begin{array}{c} -1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{array}\right] \\ C_{C} \\ C_{I} \\$$

	$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$		$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$
$\mathbf{X}_1$	А	А	С	С	$\mathbf{X}_{33}$	А	А	D	С
$\mathbf{X}_2$	А	В	С	С	$\mathbf{X}_{34}$	А	В	D	С
$\mathbf{X}_3$	А	Е	С	С	$\mathbf{X}_{35}$	А	Е	D	С
$\mathbf{X}_4$	А	F	С	С	$\mathbf{X}_{36}$	А	F	D	С
$\mathbf{X}_5$	В	А	С	С	$\mathbf{X}_{37}$	В	А	D	С
$\mathbf{X}_{6}$	В	В	С	С	$\mathbf{X}_{38}$	В	В	D	С
$\mathbf{X}_7$	В	Ε	С	С	$\mathbf{X}_{39}$	В	Ε	D	С
$\mathbf{X}_8$	В	F	С	С	$\mathbf{X}_{40}$	В	F	D	С
$\mathbf{X}_9$	А	А	С	D	$\mathbf{X}_{41}$	А	А	D	D
$\mathbf{X}_{10}$	А	В	С	D	$\mathbf{X}_{42}$	А	В	D	D
$\mathbf{X}_{11}$	А	Ε	С	D	$\mathbf{X}_{43}$	А	Ε	D	D
$\mathbf{X}_{12}$	А	F	С	D	$\mathbf{X}_{44}$	А	F	D	D
$\mathbf{X}_{13}$	В	А	С	D	$\mathbf{X}_{45}$	В	А	D	D
$\mathbf{X}_{14}$	В	В	С	D	$\mathbf{X}_{46}$	В	В	D	D
$\mathbf{X}_{15}$	В	Е	С	D	$\mathbf{X}_{47}$	В	Ε	D	D
$\mathbf{X}_{16}$	В	F	С	D	$\mathbf{X}_{48}$	В	F	D	D
$\mathbf{X}_{17}$	А	А	С	G	$\mathbf{X}_{49}$	А	А	D	G
$\mathbf{X}_{18}$	А	В	С	G	$\mathbf{X}_{50}$	А	В	D	G
$\mathbf{X}_{19}$	А	Е	С	G	$\mathbf{X}_{51}$	А	Е	D	G
$\mathbf{X}_{20}$	А	F	С	G	$\mathbf{X}_{52}$	А	F	D	G
$\mathbf{X}_{21}$	В	А	С	G	$\mathbf{X}_{53}$	В	А	D	G
$\mathbf{X}_{22}$	В	В	С	G	$\mathbf{X}_{54}$	В	В	D	G
$\mathbf{X}_{23}$	В	Ε	С	G	$\mathbf{X}_{55}$	В	Ε	D	G
$\mathbf{X}_{24}$	В	F	С	G	$\mathbf{X}_{56}$	В	F	D	G
$\mathbf{X}_{25}$	А	А	С	Н	$\mathbf{X}_{57}$	А	А	D	Н
$\mathbf{X}_{26}$	А	В	С	Н	$\mathbf{X}_{58}$	А	В	D	Н
$\mathbf{X}_{27}$	А	Ε	С	Η	$\mathbf{X}_{59}$	А	Ε	D	Н
$\mathbf{X}_{28}$	А	F	С	Η	$\mathbf{X}_{60}$	А	F	D	Η
$\mathbf{X}_{29}$	В	А	С	Н	$\mathbf{X}_{61}$	В	А	D	Н
$\mathbf{X}_{30}$	В	В	С	Н	$\mathbf{X}_{62}$	В	В	D	Н
$\mathbf{X}_{31}$	В	Е	С	Н	$\mathbf{X}_{63}$	В	Е	D	Н
$\mathbf{X}_{32}$	В	F	С	Η	$\mathbf{X}_{64}$	В	F	D	Η

Tabela I.1: Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros  $M_T = \tau = Q = 2$ ,  $M_R = 1$  e K = 2 - Parte 1 de 3.

	$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$		$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$
$\mathbf{X}_{65}$	С	С	Е	А	$\mathbf{X}_{97}$	А	А	G	С
$\mathbf{X}_{66}$	С	D	Е	А	$\mathbf{X}_{98}$	А	В	G	С
$\mathbf{X}_{67}$	С	G	Е	А	$\mathbf{X}_{99}$	А	Ε	G	С
$\mathbf{X}_{68}$	С	Η	Ε	А	$\mathbf{X}_{100}$	А	F	G	С
$\mathbf{X}_{69}$	D	С	Е	А	$\mathbf{X}_{101}$	В	А	G	С
$\mathbf{X}_{70}$	D	D	Ε	А	$\mathbf{X}_{102}$	В	В	G	С
$\mathbf{X}_{71}$	D	G	Ε	А	$\mathbf{X}_{103}$	В	Ε	G	С
$\mathbf{X}_{72}$	D	Η	Е	А	$\mathbf{X}_{104}$	В	$\mathbf{F}$	G	С
$\mathbf{X}_{73}$	С	С	Е	В	$\mathbf{X}_{105}$	Е	А	G	С
$\mathbf{X}_{74}$	С	D	Е	В	$\mathbf{X}_{106}$	Е	В	G	С
$\mathbf{X}_{75}$	С	G	Е	В	$\mathbf{X}_{107}$	Е	Ε	G	С
$\mathbf{X}_{76}$	С	Η	Ε	В	$\mathbf{X}_{108}$	Е	F	G	С
$\mathbf{X}_{77}$	D	С	Е	В	$\mathbf{X}_{109}$	А	А	G	D
$\mathbf{X}_{78}$	D	D	Ε	В	$\mathbf{X}_{110}$	А	В	G	D
$\mathbf{X}_{79}$	D	G	Ε	В	$\mathbf{X}_{111}$	А	Ε	G	D
$\mathbf{X}_{80}$	D	Η	Ε	В	$\mathbf{X}_{112}$	А	F	G	D
$\mathbf{X}_{81}$	С	С	Е	Е	$\mathbf{X}_{113}$	В	А	G	D
$\mathbf{X}_{82}$	С	D	Ε	Е	$X_{114}$	В	В	G	D
$\mathbf{X}_{83}$	С	G	Е	Е	$\mathbf{X}_{115}$	В	Ε	G	D
$\mathbf{X}_{84}$	С	Η	Ε	Е	$\mathbf{X}_{116}$	В	F	G	D
$\mathbf{X}_{85}$	D	С	Ε	Е	$\mathbf{X}_{117}$	Е	А	G	D
$\mathbf{X}_{86}$	D	D	Е	Е	$\mathbf{X}_{118}$	Е	В	G	D
$\mathbf{X}_{87}$	D	G	Ε	Е	$\mathbf{X}_{119}$	Е	Ε	G	D
$\mathbf{X}_{88}$	D	Η	Е	Е	$\mathbf{X}_{120}$	Е	F	G	D
$\mathbf{X}_{89}$	С	С	Ε	F	$\mathbf{X}_{121}$	А	А	G	G
$\mathbf{X}_{90}$	С	D	Е	F	$\mathbf{X}_{122}$	А	В	G	G
$\mathbf{X}_{91}$	С	G	Ε	F	$\mathbf{X}_{123}$	А	Ε	G	G
$\mathbf{X}_{92}$	С	Η	Ε	F	$\mathbf{X}_{124}$	А	F	G	G
$\mathbf{X}_{93}$	D	С	Е	F	$\mathbf{X}_{125}$	В	А	G	G
$\mathbf{X}_{94}$	D	D	Е	F	$\mathbf{X}_{126}$	В	В	G	G
$\mathbf{X}_{95}$	D	G	Ε	F	$\mathbf{X}_{127}$	В	Ε	G	G
$\mathbf{X}_{96}$	D	Н	Е	F	$\mathbf{X}_{128}$	В	F	G	G

Tabela I.2: Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros  $M_T = \tau = Q = 2$ ,  $M_R = 1$  e K = 2 - Parte 2 de 3.

	$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$		$\mathbf{A}(1)$	$\mathbf{B}(1)$	$\mathbf{A}(2)$	$\mathbf{B}(2)$
$\mathbf{X}_{129}$	Е	А	G	G	$\mathbf{X}_{161}$	В	А	Η	D
$\mathbf{X}_{130}$	Е	В	G	G	$\mathbf{X}_{162}$	В	В	Η	D
$\mathbf{X}_{131}$	Е	Е	G	G	$\mathbf{X}_{163}$	В	Е	Η	D
$\mathbf{X}_{132}$	Е	F	G	G	$\mathbf{X}_{164}$	В	F	Η	D
$\mathbf{X}_{133}$	А	А	G	Η	$\mathbf{X}_{165}$	Е	А	Η	D
$\mathbf{X}_{134}$	А	В	G	Н	$\mathbf{X}_{166}$	Е	В	Η	D
$\mathbf{X}_{135}$	А	Ε	G	Н	$\mathbf{X}_{167}$	Е	Ε	Η	D
$\mathbf{X}_{136}$	А	F	G	Н	$\mathbf{X}_{168}$	Е	F	Η	D
$\mathbf{X}_{137}$	В	А	G	Н	$\mathbf{X}_{169}$	А	А	Η	G
$\mathbf{X}_{138}$	В	В	G	Н	$\mathbf{X}_{170}$	А	В	Η	G
$\mathbf{X}_{139}$	В	Ε	G	Η	$\mathbf{X}_{171}$	А	Ε	Η	G
$\mathbf{X}_{140}$	В	F	G	Η	$\mathbf{X}_{172}$	А	F	Η	G
$\mathbf{X}_{141}$	Е	А	G	Η	$\mathbf{X}_{173}$	В	А	Η	G
$\mathbf{X}_{142}$	Е	В	G	Η	$\mathbf{X}_{174}$	В	В	Η	G
$\mathbf{X}_{143}$	Е	Ε	G	Η	$\mathbf{X}_{175}$	В	Ε	Η	G
$\mathbf{X}_{144}$	Е	F	G	Η	$\mathbf{X}_{176}$	В	F	Η	G
$\mathbf{X}_{145}$	А	А	Η	С	$\mathbf{X}_{177}$	Е	А	Η	G
$\mathbf{X}_{146}$	А	В	Η	С	$\mathbf{X}_{178}$	Е	В	Η	G
$\mathbf{X}_{147}$	А	Ε	Η	С	$\mathbf{X}_{179}$	Е	Ε	Η	G
$\mathbf{X}_{148}$	А	F	Η	С	$\mathbf{X}_{180}$	Е	F	Η	G
$X_{149}$	В	А	Η	С	$\mathbf{X}_{181}$	А	А	Η	Η
$\mathbf{X}_{150}$	В	В	Η	С	$\mathbf{X}_{182}$	А	В	Η	Η
$\mathbf{X}_{151}$	В	Ε	Η	С	$\mathbf{X}_{183}$	А	Ε	Η	Η
$\mathbf{X}_{152}$	В	F	Η	С	$\mathbf{X}_{184}$	А	F	Η	Η
$\mathbf{X}_{153}$	Е	А	Η	С	$\mathbf{X}_{185}$	В	А	Η	Η
$\mathbf{X}_{154}$	Е	В	Η	С	$\mathbf{X}_{186}$	В	В	Η	Η
$\mathbf{X}_{155}$	Е	Ε	Η	С	$\mathbf{X}_{187}$	В	Ε	Η	Η
$\mathbf{X}_{156}$	Е	F	Η	С	$\mathbf{X}_{188}$	В	F	Η	Н
$\mathbf{X}_{157}$	А	А	Η	D	$\mathbf{X}_{189}$	Е	А	Η	Н
$\mathbf{X}_{158}$	А	В	Η	D	$\mathbf{X}_{190}$	Е	В	Η	Η
$\mathbf{X}_{159}$	А	Е	Η	D	$\mathbf{X}_{191}$	Е	Ε	Η	Н
$\mathbf{X}_{160}$	А	F	Η	D	$X_{192}$	Е	F	Η	Η

Tabela I.3: Resultados de busca por pares de códigos LDC com os parâmetros  $M_T = \tau = Q = 2$ ,  $M_R = 1$  e K = 2 - Parte 3 de 3.