Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Subgrupos 2-Gerados de Produtos Livres de Grupos Pro-p com Amalgamação Cíclica.

por

Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Brasília
2008

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Subgrupos 2-Gerados de Produtos Livres de Grupos Pro-p com Amalgamação Cíclica.

por

Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Orientador: Prof. Dr. Pavel Zalesski

Brasília
2008

Dedicatória

À meu pai, minha mãe (in memorian)
e minha esposa, que formaram a base
de apoio nesta caminhada.

Agradecimentos

Inicialmente, a Deus, por ter me dado saúde e força para vencer mais esta etapa em minha vida;

À meu pai, que com esta tese, sentiu-se realizado porque passou todos os momentos de angustias e sofrimentos juntamente comigo;

À minha mãe, in memorian, que no início me incentivou e inspirou a estar hoje concluindo o doutorado, mas não se encontra junto a nós para celebrar este momento;

À minha queridíssima esposa, que com seu apoio, companheirismo e sabedoria me deu forças para concluir este trabalho;

Ao Prof. Dr. Pavel Zalesski, pelas horas de extrema dedicação, apoio, incentivo, sugestões, ensinamentos e pela ajuda na escolha do tema desta tese;

Às minhas irmãs, que me deram suporte e incentivaram nessa caminhada;

A todos meus parentes, tios(as), primos(as), sobrinhos(as), cunhados(as) que de uma forma ou de outra me incentivaram com palavras de apoio e carinho;

Aos professores da UnB, que transmitiram com afinco os conteúdos para minha formação. E também aos demais professores que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho;

Aos funcionários da UnB, que sempre estão nos auxiliando no que for preciso para o desenvolvimento dos nossos trabalhos. Em particular, a Tânia, Gari e Manoel;

Aos meus colegas do CAC/UFG, que se desdobraram no trabalho para que eu pudesse permanecer o tempo suficiente em Brasília para concluir o doutorado;

Aos meus colegas de pós-graduação ou não, que me apoiaram, incentivaram e me compreenderam nesse período. Em especial, André Luiz Galdino, Flávio Raimundo e Manuela, Evander, Carlos Carrion e Cira, Marcelo Furtado e Aline, Moacir e Luciana Ávila, Márcio Roberto e Mônica, Ari, Jhone, Aline, Fernando Kennedy, Thiago Porto, Ricardo e Anyelle, Theo Zapata e Flávia, Anderson, Vagner, Fabiano, Paulo Henrique (P.H.) e Simone, Sheila Campos, Jaques, Walter, Nilton, Rosângela, Tânia, Eunice, ...;

Aos colegas de futebol, os quais proporcionaram momentos de descontração necessários para a continuação do trabalho;

Ao grande amigo Adriano Cielo, pelas longas e boas conversas, acompanhadas de um saboroso chimarrão;

Aos grandes amigos, Fernando e Ismênia, pela força, incentivo e os momentos de descontração durante os vários instantes que estivemos reunidos neste período;

À minha sogra e meu sogro (in memorian), que com muita humildade e sabedoria apoiaram e incentivaram em cada instante;

Ao CNPQ, que me ofereceu auxílio financeiro, em parte, deste período.

Resumo

Neste trabalho, provamos para grupos pro-p um resultado análogo ao que foi provado por Gilbert Baumslag em [B] para grupos abstratos. Seja L um subgrupo pro-p 2-gerado de um produto pro-p livre amalgamado $G = F_1 \amalg_{\langle c \rangle} F_2$ de grupos pro-p livres finitamente gerados com subgrupo amalgamado $\langle c \rangle$, onde c gera seu próprio centralizador em F_1 e F_2. Assim, o resultado garante que L é um grupo pro-p livre.

Palavras-chave: Produto amalgamado, grupo pro-p livre, subgrupo procíclico, árvore pro-p, grupo pro-p virtualmente livre.

Abstract

In this work we prove a pro-p analog of a result which was proved by Gilbert Baumslag in [B] for abstract groups. Let L be a 2-generated pro-p subgroup of an amalgamated free pro-p product $G = F_1 \amalg_{\langle c \rangle} F_2$ of finitely generated free pro-p groups with amalgamated subgroup $\langle c \rangle$, where $\langle c \rangle$ generates its own centralizer in G. The result ensures that L is a free pro-p group.

Key words: Amalgamated product, free pro-p group, procyclic subgroup, pro-p tree, virtually free pro-p group.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos subgrupos 2-gerados de produtos pro-p livres de grupos livres com amalgamação cíclica.

A motivação do problema principal estudado surgiu por meio do resultado de Gilbert Baumslag publicado em 1962, sobre subgrupo 2-gerado de um produto livre de grupos livres com amalgamação cíclica, mais especificamente do seguinte teorema:

Teorema 1 ([B-62])**.** *Todo subgrupo 2-gerado de $K = \langle F * \overline{F}; u = \overline{u}\rangle$ é livre, onde F e $\overline{F}$ são grupos livres isomorfos e $u \in F$ é o gerador de seu próprio centralizador.*

O propósito do trabalho é estender o resultado acima no sentido de mostrar que um subgrupo pro-p 2-gerado de um produto pro-p livre com subgrupo amalgamado cíclico é um grupo pro-p livre. E este é o resultado principal de nosso trabalho.

Teorema 2.1. *Seja $G = F_1 \amalg_{\langle c\rangle} F_2$, onde F_i, $i = 1, 2$, são grupos pro-p livres finitamente gerados e c é o gerador de seu próprio centralizador em F_1 e F_2. Se L é um subgrupo 2-gerado de G, então L é um grupo pro-p livre.*

Inicialmente percebemos que o método usado na demonstração por Baumslag, para grupos abstratos, não funciona na categoria de grupos pro-p. Isto porque Baumslag mostrou, primeiramente, que o grupo $K = \langle F * \overline{F}; u = \overline{u}\rangle$ era residualmente livre e em seguida demonstrou que todo subgrupo 2-gerado de tal grupo considerado é abeliano livre ou um grupo livre de posto 2. Entretanto, no caso pro-p, não temos estabelecido o estudo de grupos residualmente livres. Portanto, para mostrarmos tal resultado usamos métodos de Teoria Combinatória dos grupos pro-p. Particularmente, uma ferramenta essencial na demonstração deste teorema foi o resultado de W. Herfort e P. Zalesski de 2007.

Teorema 1.8.8 ([H-Z-07])**.** *Seja G um grupo pro-p virtualmente livre finitamente gerado agindo sobre uma árvore pro-p T com estabilizadores finitos de vértices. Então G fatora como um produto amalgamado ou uma HNN-extensão sobre algum estabilizador de aresta.*

Para aplicar o teorema acima, consideramos $G = \varprojlim G_U$, onde $U \lhd_o G$ e assim $G_U = F_1/U_1 \amalg_{C_U} F_2/U_2$. Desta forma, G_U é um grupo pro-p virtualmente livre finitamente gerado. Portanto, considerando $L = \varprojlim L_U$ onde L_U é subgrupo de G_U teremos que L_U é um grupo pro-p virtualmente livre. Sendo assim, podemos aplicar o resultado de W. Herfort e P. Zalesskii. Logo, a demonstração do Teorema 2.1 divide-se naturalmente em dois casos: L_U é um produto pro-p livre não trivial com subgrupo amalgamado cíclico finito ou L_U é uma HNN extensão pro-p com subgrupo associado cíclico finito.

Com este trabalho damos início ao estudo de grupos residualmente livres na categoria dos grupos pro-p.

No Capítulo 1, estabelecemos alguns resultados preliminares utilizando como principais referências o livro *Profinite Groups* [R-Z-00] e o capítulo "Pro-p Trees and Applications" em [Ri-Za-00], dos autores L. Ribes e P. Zalesski. Neste capítulo, estamos interessados no estudo de grupos pro-p livres, produtos pro-p livres amalgamados e HNN-extensões pro-p. Além disso, provamos alguns resultados auxiliares novos, os quais foram usados, direto ou indiretamente, na demonstração do teorema principal. Nestas demonstrações, utilizamos fortemente as propriedades de subgrupo de Frattini, entre outros resultados preliminares abordados neste capítulo.

No Capítulo 2, nos dedicamos exclusivamente à demonstração do resultado principal, enunciado acima.

Capítulo 1

Preliminares e Resultados Auxiliares

Neste capítulo fazemos uma abordagem das definições e dos resultados conhecidos que serão importantes para a leitura deste trabalho. Começamos com definições básicas como limites inversos e grupos pro-p e encerramos com resultados importantes, os quais serão aplicados no sentido de obtermos o resultado principal.

Mesmo nosso estudo sendo restrito a grupos pro-p, nas seções sobre grupos profinitos, grupos profinitos finitamente gerados e módulos livres profinitos, julgamos que a restrição à categoria de grupos e módulos livres pro-p é irrelevante. Nas demais seções, em geral, a restrição é considerada.

Além disso, neste capítulo, demonstramos todos os resultados auxiliares necessários para conclusão do resultado principal.

As referências principais utilizadas neste capítulo inicial foram o livro de Ribes e Zalesskii [R-Z-00], o artigo de Ribes e Zalesskii [Ri-Za-00] e o preprint de Herfort e Zalesskii [H-Z-07].

1.1 Grupos profinitos

Definição 1.1.1. *Um conjunto dirigido* $(I, \preceq)$ *é o conjunto parcialmente ordenado que satisfaz a seguinte condição: se* $i, j \in I$ *existe algum* $k \in I$ *tal que* $i, j \preceq k$.

Definição 1.1.2. *Um sistema projetivo (ou inverso) de grupos topológicos, indexado por um conjunto dirigido* I*, consiste em uma família* $\{X_i \mid i \in I\}$ *de grupos topológicos indexados por* I*, e uma família de homomorfismos contínuos* $\varphi_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$ *definidos quando* $i \succeq j$ *tal que* $\varphi_{ii} = id$ *e os diagramas*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & X_k \\ & X_j \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

comutam para todos $i \succeq j \succeq k$.

Definição 1.1.3. *Sejam* Y *um grupo topológico,* $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ *um sistema projetivo de grupos topológicos e* $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ *homomorfismos contínuos. Dizemos que os homomorfismos* ψ_i *são compatíveis se* $\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j$ *sempre que* $i \succeq j$.

Definição 1.1.4. *Dado um sistema projetivo de grupos topológicos* $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$*, dizemos que* X *juntamente com os homomorfismos compatíveis* $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$ *é um limite inverso (projetivo) do sistema, se satisfaz a seguinte propriedade universal: sempre que* Y *é um grupo topológico e* $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$ *são homomorfismos compatíveis, existe um único homomorfismo contínuo* $\psi : Y \longrightarrow X$ *de maneira que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "\psi_i"'] & X \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ X_i & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\varphi_i\psi = \psi_i$.

Definição 1.1.5. *Define-se um grupo pro-p G como um limite inverso*

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i$$

de um sistema projetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de p-grupos G_i, onde é assumido que cada p-grupo G_i tem topologia discreta.

Analogamente dizemos que um grupo G é um *grupo profinito* se G é o limite inverso $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ de um sistema projetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos finitos, onde é assumido que cada grupo G_i finito tem topologia discreta.

Seja $(I, \preceq)$ um conjunto dirigido. Consideremos I' um subconjunto de I de tal maneira que $(I', \preceq)$ venha a ser um conjunto dirigido. Dizemos que I' é *cofinal* em I se para todo $i \in I$ existe algum $i' \in I'$ tal que $i \preceq i'$. Deste modo, se $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema projetivo de grupos topológicos compactos e I' é cofinal em I, então $\{G_i, \varphi_{ij}, I'\}$ torna-se um sistema projetivo de maneira óbvia, e dizemos que $\{G_i, \varphi_{ij}, I'\}$ é um subsistema cofinal de $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$. Com isto, temos o resultado a seguir.

Lema 1.1.6. *Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema projetivo de grupos topológicos compactos sobre um conjunto dirigido I e considere que I' é um subconjunto cofinal de I. Então*

$$\varprojlim_{i \in I} G_i \cong \varprojlim_{i' \in I'} G_{i'}.$$

Demonstração: Vide Lema 1.1.9 em [R-Z-00].

1.2 Grupos profinitos finitamente gerados

Definição 1.2.1. *Seja G um grupo profinito e X um subconjunto de G. Dizemos que X gera G, se o subgrupo abstrato gerado por X em G, denotado por $\langle X \rangle$, é denso em G.*

Definição 1.2.2. *Um grupo profinito G é dito finitamente gerado se G contém um subconjunto X finito que gera G. Dizemos que G é n-gerado, por X, se*

$$min\{|X| \mid \overline{\langle X \rangle} = G\} = n,$$

onde $\overline{\langle X \rangle}$ *é um subgrupo fechado gerado por* X*.*

Seja G um grupo profinito finitamente gerado, então definimos $d(G)$ da seguinte maneira

$$d(G) = min\big\{|X| \mid X \subseteq G,\ X \text{ gera } G\big\}.$$

Assim, os completamentos pro-p e profinito de $\mathbb{Z}$ são, respectivamente, o anel de inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ e o anel profinito $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que são grupos profinitos 1-gerados.

Proposição 1.2.3. *Seja* G *um grupo profinito finitamente gerado.*
(a) Para cada número natural n*, o número de subgrupos abertos de* G *de índice* n *é finito.*
(b) O elemento identidade 1 *de* G *tem um sistema fundamental de vizinhança consistindo de uma cadeia enumerável de subgrupos normais abertos*

$$G = V_0 \geq V_1 \geq V_2 \geq \cdots .$$

Demonstração: Vide Proposição 2.5.1 em [R-Z-00].

Lema 1.2.4. *Seja* $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ *um sistema projetivo sobrejetivo de grupos finitos. Defina*

$$G = \varprojlim_{i\in I} G_i.$$

Então $d(G) < \infty$ *se, e somente se,* $\{d(G_i) \mid i \in I\}$ *é um conjunto limitado; neste caso, existe algum* $i_0 \in I$ *tal que* $d(G) = d(G_i)$*, para cada* $i \succeq i_0$*.*

Demonstração: Vide Lema 2.5.3 em [R-Z-00].

1.3 Subgrupo de Frattini

Seja G um grupo profinito. Todo subgrupo fechado de G é a interseção de subgrupos abertos. Assim, um subgrupo maximal fechado de G é necessariamente aberto. Além disso, se G é não trivial, ele sempre tem subgrupos abertos maximais.

Definição 1.3.1. *O subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ de G é a interseção de todos seus subgrupos abertos maximais.*

Observe que, diferentemente do que acontece para grupos infinitos abstratos, se G é um grupo profinito não trivial, então sempre teremos que $\Phi(G) < G$.

Proposição 1.3.2. *(a) Seja G um grupo profinito. Se $N \triangleleft_c G$ (subgrupo normal fechado) e $N \leq \Phi(G)$, então $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$;*
(b) Se $\rho : G \longrightarrow H$ é um epimorfismo de grupos profinitos, então $\rho\big(\Phi(G)\big) \leq \Phi(H)$;
(c) Se $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema projetivo sobrejetivo de grupos profinitos sobre o conjunto dirigido I, então

$$\Phi\Big(\varprojlim_{i\in I} G_i\Big) = \varprojlim_{i\in I} \Phi(G_i).$$

Demonstração: Vide Proposição 2.8.2 em [R-Z-00].

Lema 1.3.3. *Seja G um grupo profinito finitamente gerado, então $d(G) = d\big(G/\Phi(G)\big)$.*

Demonstração: Vide Lema 2.8.6 em [R-Z-00].

Lema 1.3.4. *Sejam p um número primo e G um grupo pro-p.*
(a) Todo subgrupo fechado maximal M de G tem índice p;
(b) O quociente de Frattini $G/\Phi(G)$ é um grupo profinito abeliano p-elementar, e assim um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ com p elementos;
(c) O subgrupo de Frattini $\Phi(G) = \overline{G^p[G,G]}$, onde $G^p = \{x^p \mid x \in G\}$ e $[G,G]$ denota o subgrupo comutador de G.

Demonstração: Vide Proposição 2.8.7 em [R-Z-00].

Corolário 1.3.5. *Seja p um número primo e $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ um homomorfismo contínuo de grupos pro-p. Então:*
(a) $\psi\big(\Phi(G_1)\big) \leq \Phi(G_2)$. Em particular, se $G_1 \leq G_2$, então $\Phi(G_1) \leq \Phi(G_2)$;

(b) Se ψ é um epimorfismo, então $\psi\big(\Phi(G_1)\big) = \Phi(G_2)$. Neste caso, ψ induz um epimorfismo contínuo $\overline{\psi} : G_1/\Phi(G_1) \longrightarrow G_2/\Phi(G_2)$.

Demonstração: Vide Corolário 2.8.8 em [R-Z-00].

Seja G um grupo pro-p. Definimos $\Phi^1(G) = \Phi(G)$ e indutivamente

$$\Phi^{n+1}(G) = \Phi\big(\Phi^n(G)\big) \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

Então a série

$$G \geq \Phi(G) \geq \Phi^2(G) \geq \cdots$$

é chamada a *série de Frattini.*

Proposição 1.3.6. *Seja p um número primo e G um grupo pro-p finitamente gerado. Então a série de Frattini de G constitui um sistema fundamental de vizinhanças abertas de 1 em G.*

Demonstração: Vide Proposição 2.8.13 em [R-Z-00].

Lema 1.3.7. *Seja $L = \varprojlim L_U$ um grupo pro-p finitamente gerado tal que L_U são grupos pro-p. Se $\varphi_{UV}(C_U) \leq C_V$ e $\varprojlim C_U = 1$, onde C_U é subgrupo finito de L_U e $\varphi_{UV} : L_U \longrightarrow L_V$. Então $\varprojlim \langle C_U \rangle^{L_U} = 1$, onde $\langle C_U \rangle^{L_U}$ é o fecho normal de C_U por L_U.*

Demonstração: Seja $\psi_U : L \longrightarrow L_U$. Assim, $1 = \bigcap \psi_U^{-1}(C_U)$. Portanto, para qualquer n existe U tal que $\psi_U^{-1}(C_U) \leq \Phi^n(L)$, o que implica que o fecho normal de $\psi_U^{-1}(C_U)$ está dentro de $\Phi^n(L)$. Então a interseção dos fechos normais é trivial, pois $\bigcap \Phi^n(L) = 1$.

Temos que C_V é finito para qualquer V. Assim, fixando V podemos escolher U de tal maneira que $\varphi_{UV}(C_U)$ é trivial em C_V, pois $\varprojlim C_U = 1$. Portanto, para U escolhido teremos que $\varphi_{UV}\big(\langle C_U\rangle^{L_U}\big)$ também é trivial. Mas, podemos fazer isto para cada V, logo teremos que $\varprojlim \langle C_U\rangle^{L_U} = 1$.

□

Precisaremos também de um resultado simples, o qual enunciaremos como o lema a seguir.

Lema 1.3.8. *Seja $C = \varprojlim C_U$ um grupo pro-p não trivial, onde cada C_U é um grupo cíclico finito. Então, existe U tal que a projeção $\varphi_U : C \longrightarrow C_U$ é sobrejetora.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não exista U tal que a projeção φ_U seja sobrejetora.

Fixando um V qualquer no conjunto dirigido, consideremos $V \geq U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots$ tal que $\varphi_{U_{i+1}U_i}(C_{U_{i+1}}) \neq C_{U_i}$. Pelo fato que C_V é finito e todos os C_{U_i} são cíclicos, existe i tal que $\varphi_{U_iV}(C_{U_i}) = 1$ em C_V. Logo, $\varphi_V(C) = 1$. Como V foi escolhido arbitrariamente, temos uma contradição.

□

1.4 Grupos pro-p livres

Um espaço topológico X com um ponto distinguido $*$ é chamado *espaço pontuado*. Denotamos tal espaço por $(X, *)$. Uma aplicação de espaços pontuados

$$\varphi : (X, *) \longrightarrow (X', *')$$

é simplesmente uma aplicação contínua de X sobre X' tal que $\varphi(*) = *'$.

Definição 1.4.1. *Sejam X um espaço profinito e F um grupo pro-p. Consideremos $\iota : X \longrightarrow F$ uma aplicação contínua tal que $\overline{\langle \iota(X)\rangle} = F$. Dizemos que (F, ι) é um grupo* *pro-p livre sobre o espaço profinito X, se satisfaz a seguinte propriedade universal: para toda aplicação $\varphi : X \longrightarrow G$, onde G é um grupo pro-p gerado topologicamente por $\varphi(X)$, existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : F \longrightarrow G$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & G \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

comute, ou seja, $\overline{\varphi}\iota = \varphi$.

É suficiente checar a propriedade universal apenas para os p-grupos finitos. De fato, sejam F um grupo pro-p livre sobre X e $\varphi_i : X \longrightarrow G_i$ uma aplicação contínua sobre um p-grupo finito G_i tal que $\varphi_i(X)$ gera G_i. Então, pela propriedade universal para grupo pro-p livre, temos que existe um único homomorfismo contínuo $\psi_i : F \longrightarrow G_i$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\psi_i"] & \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & G_i \end{tikzcd}$$

comute, isto é, $\psi_i\iota = \varphi_i$.

Agora, considerando $G = \varprojlim G_i$, temos que a projeção $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ é um homomorfismo contínuo. Assim, pela propriedade universal de limite inverso, existe um único homomorfismo contínuo $\psi : F \longrightarrow G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "\psi_i"'] & G \arrow[dl, "\pi_i"] \\ G_i & \end{tikzcd}$$

comute, isto é, $\pi_i\psi = \psi_i$. Portanto, checando a propriedade universal para p-grupos finitos, automaticamente, vale para qualquer grupo pro-p G, desde que G seja o limite inverso destes p-grupos finitos.

Lema 1.4.2. *Seja (F, ι) um grupo pro-p livre em uma base profinita X, então a aplicação ι é injetora e $1 \notin \iota(X)$.*

Demonstração: Vide Lema 3.3.1 em [R-Z-00].

Proposição 1.4.3. *Sejam $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito e $F = F(X)$ o grupo livre abstrato com base X. Então $\widehat{F}$ (o completamento pro-p de F) é um grupo pro-p livre com base X. Em particular, $posto(F) = posto(\widehat{F})$.*

Demonstração: Vide Proposição 3.3.2 e Proposição 3.3.6 em [R-Z-00].

Teorema 1.4.4. *Seja G um grupo pro-p gerado por um conjunto finito com n elementos. Então existe um grupo pro-p livre F de posto n e um epimorfismo $\alpha : F \longrightarrow G$.*

Demonstração: Vide Proposição 3.3.16 em [R-Z-00].

Teorema 1.4.5. *Sejam F um grupo pro-p livre sobre um conjunto finito X e H um subgrupo aberto de F. Então H é um grupo pro-p livre de posto*

$$posto(H) - 1 = [F : H]\big(posto(F) - 1\big).$$

Demonstração: Vide Teorema 3.6.1 em [R-Z-00].

Teorema 1.4.6. *Todo subgrupo fechado de grupo pro-p livre é grupo pro-p livre.*

Demonstração: Vide Corolário 7.7.5 em [R-Z-00].

Proposição 1.4.7. *Sejam p um número primo e $F = F_p(X)$ um grupo pro-p livre sobre o conjunto X convergindo para 1, onde $|X| \geq 2$. Se N é um subgrupo normal não trivial fechado de F de índice infinito, então*

$$posto(N) = max\{|X|, \aleph_0\}.$$

Demonstração: Vide Proposição 8.6.3 em [R-Z-00].

Lema 1.4.8. *Seja M um subgrupo pro-p cíclico maximal de F, onde F é um grupo pro-p livre finitamente gerado. Então $\mathcal{N}_F(M) = M$.*

Demonstração: Temos pelo Teorema 1.4.6 que $\mathcal{N}_F(M)$ é um grupo pro-p livre. Então, pela Proposição 1.4.7, se $[\mathcal{N}_F(M) : M]$ fosse infinito teríamos o

$$posto(M) = max\big\{|X|, \aleph_0\big\},$$

onde $|X|$ é número de geradores de F, o que não pode acontecer pois M tem posto 1. Ou seja, $[\mathcal{N}_F(M) : M]$ é finito. Então, pelo Teorema 1.4.5, teremos que o $posto\big(\mathcal{N}_F(M)\big) = 1$. Portanto, $\mathcal{N}_F(M)$ é cíclico. Logo,

$$\mathcal{N}_F(M) = M,$$

pois M é maximal.

□

Proposição 1.4.9. *Seja G um grupo pro-p virtualmente livre qualquer. Então $G/\langle Tor(G)\rangle$ é um grupo pro-p livre, onde $Tor(G)$ é o conjunto de todos os elementos de G de ordem finita.*

Demonstração: Vide Proposição 1.7 em [Za-04].

1.5 Produtos pro-p livres amalgamados

Definição 1.5.1. *Sejam G_1, G_2 grupos pro-p e $f_i : H \longrightarrow G_i (i = 1, 2)$ monomorfismos contínuos de grupos pro-p. O produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H é um pushout na categoria dos grupos pro-p*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & G_1 \amalg_H G_2 \end{tikzcd}$$

isto é, um grupo pro-p $G = G_1 \amalg_H G_2$ *junto com homomorfismos* $\varphi_i : G_i \longrightarrow G (i = 1, 2)$ *satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada par de homomorfismos contínuos* $\psi_1 : G_1 \longrightarrow K$, $\psi_2 : G_2 \longrightarrow K$ *em um grupo pro-p* K *com* $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$*, existe um único homomorfismo contínuo* $\psi : G \longrightarrow K$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\ & & K \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

seja comutativo, isto é, $\psi\varphi_1 = \psi_1$ *e* $\psi\varphi_2 = \psi_2$*.*

Analogamente ao que foi mostrado para grupos pro-p livres, basta checarmos a propriedade universal para p-grupos finitos. De fato, sejam G um produto pro-p livre amalgamado (estabelecido a Definição 1.5.1) e K_i um p-grupo finito com homomorfismos contínuos $\psi_i : G_i \longrightarrow G$, $i = 1, 2$ tal que $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$. Então, pela propriedade universal para produto pro-p livre amalgamado, temos que existe um único homomorfismo contínuo $\eta_i : G \longrightarrow K_i$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\eta_i"] & \\ & & K_i \end{tikzcd}$$

seja comutativo, isto é, $\eta_i\varphi_1 = \psi_1$ e $\eta_i\varphi_2 = \psi_2$.

Considerando $K = \varprojlim K_i$ podemos estabelecer a projeção $\pi_i : K \longrightarrow K_i$ que é um homomorfismo contínuo. Assim, pela propriedade universal de limite inverso, existe um único homomorfismo contínuo $\psi : G \longrightarrow K$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "\pi_i"] \\ G \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\eta_i"'] & K_i \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\pi_i\psi = \eta_i$. Portanto, checando a propriedade universal de produto pro-p livre amalgamado para p-grupos finitos, automaticamente, vale para qualquer grupo pro-p K, desde que K seja o limite inverso destes p-grupos finitos.

Neste trabalho, denotaremos o conjugado de K por g da seguinte maneira: $K^g = g^{-1}Kg$.

Lema 1.5.2. *Seja $G = G_1 \amalg_C G_2$ um grupo pro-p, onde G_1 é cíclico finito e G_2 finito com $C \leq G_1$. Então $K = G_1 \amalg_C G_2^g$ é isomorfo a G, se $g \in \mathcal{N}_G(C)$, onde C é identificado com C^g em K.*

Demonstração: Queremos definir $\psi_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ e $\psi_2 : G_2 \longrightarrow G_2^g$ de tal maneira que $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$, onde $f_i : C \longrightarrow G_i$ $(i = 1, 2)$ é o monomorfismo estabelecido substituindo H por C na definição 1.5.1 de produto pro-p livre amalgamado. Para tanto, definimos o homomorfismo contínuo $\psi_2 : G_2 \longrightarrow G_2^g$ no grupo pro-p K dado por $\psi_2(g_2) = {g_2}^g$, $g \in \mathcal{N}_G(C)$. Além disso, como $C \triangleleft \mathcal{N}_G(C)$, teremos que $\alpha : C \longrightarrow C^g$, $g \in \mathcal{N}_G(C)$ é um automorfismo definido por $\alpha(c) = c^g$ com $c \in C$. Seja g_1 gerador de G_1 cuja ordem é p^n. Se a ordem de C é p^m, então $C = G_1^{p^{n-m}}$. Assim, tomando $c \in C$, $g \in G$ e $\overline{g}_1$ em G_1 de tal maneira que $c^g = {\overline{g}_1}^s$ com $s = p^{n-m}$, podemos considerar o automorfismo $\psi_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ definido por $\psi_1(g_1) = \overline{g}_1$ tal que ψ_1 restrita ao subgrupo C teremos $\psi_1(c) = {\overline{g}_1}^s$, onde $c = {g_1}^s$. Portanto, pela definição 1.5.1 de produto pro-p livre amalgamado, temos que existe um único homomorfismo contínuo

$$\psi : G \longrightarrow K \qquad (\star)$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\psi\varphi_1 = \psi_1$ e $\psi\varphi_2 = \psi_2$.

Analogamente, considerando $\overline{\psi}_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ e $\overline{\psi}_2 : G_2^g \longrightarrow G_2$ homomorfismos contínuos no grupo pro-p G com $\overline{\psi}_1 f_1 = \overline{\psi}_2 f_2$, onde $\overline{\psi}_1(\overline{g}_1) = g_1$, $\overline{\psi}_2(g_2^g) = (g_2^g)^{g^{-1}} = g_2$ e f_i $(i = 1, 2)$ são os monomorfismos estabelecidos acima de acordo com a definição 1.5.1. Assim, teremos que existe um único homomorfismo contínuo

$$\overline{\psi} : K \longrightarrow G \qquad (\star\star)$$

tal que $\overline{\psi}\psi_1 = \varphi_1$ e $\overline{\psi}\psi_2 = \varphi_2$. Portanto, de $(\star)$ e $(\star\star)$ teremos que $\overline{\psi}\psi \cong id_G$ e $\psi\overline{\psi} \cong id_K$, onde $\psi(C) = C = \overline{\psi}(C)$, pois C é normalizado por $g \in \mathcal{N}_G(C)$. Logo, $G \cong K$.

□

Corolário 1.5.3. *Seja $G = G_1 \amalg_C G_2$, onde $C \leq G_1$, G_1 cíclico finito e G_2 finito. Então $K = G_1^h \amalg_C G_2$ é isomorfo a G, para algum $h \in \mathcal{N}_G(C)$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.5.2 temos que $G = G_1 \amalg_C G_2 \cong G_1 \amalg_C G_2^g$, $g \in \mathcal{N}_G(C)$. Portanto, considerando $h = g^{-1}$ teremos que $G_1^{g^{-1}} \amalg_{C^{g^{-1}}} \left(G_2^g\right)^{g^{-1}} = G_1^h \amalg_C G_2$, pois $C \lhd G$. Logo, pelo Lema 1.5.2, obtemos que $G_1 \amalg_C G_2 \cong G_1^h \amalg_C G_2$.

□

A afirmação a seguir é bem conhecida, para tanto basta ver a proposição 9.2.1 em [R-Z-00]. Mas, como na demonstração da mesma é apresentada a construção explícita para o produto pro-p livre amalgamado, optamos por reproduzi-la neste trabalho.

Proposição 1.5.4. *Sejam G_1, G_2 grupos pro-p e $f_i : H \longrightarrow G_i (i = 1, 2)$ monomorfismos contínuos. O produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H, existe e é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos a unicidade do produto pro-p livre amalgamado. Sejam G juntamente com homomorfismos contínuos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$, $i = 1, 2$ um produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H, e K juntamente com homomorfismos contínuos $\psi_i : G_i \longrightarrow K$, $i = 1, 2$ outro produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H. Sendo assim, pela propriedade universal de produto pro-p livre amalgamado, existe um único homomorfismo contínuo $\psi : G \longrightarrow K$ tal que $\psi\varphi_1 = \psi_1$ e $\psi\varphi_2 = \psi_2$. Analogamente, existe um único homomorfismo contínuo $\varphi : K \longrightarrow G$ tal que $\varphi\psi_1 = \varphi_1$ e $\varphi\psi_2 = \varphi_2$. Desta forma, teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dotted, shift right, "\psi"'] & \\
& & K. \arrow[ul, dotted, shift right, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Conseqüentemente, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & G \arrow[dr, dotted, shift left, "Id_G"] \arrow[dr, dotted, shift right, "\varphi\psi"'] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

comutativo para G juntamente com os homomorfismos φ_1 e φ_2. Como, pela definição, existe um único homomorfismo contínuo satisfazendo esta propriedade, teremos $\varphi\psi = Id_G$. Similarmente, $\psi\varphi = Id_K$. Portanto, φ é um isomorfismo.

A existência é garantida pela construção explícita de

$$G = G_1 \amalg_H G_2.$$

Seja $G^{abs} = G_1 *_H G_2$ o produto livre de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H, como grupos abstratos. Denote por $\varphi_i^{abs} : G_i \longrightarrow G^{abs}$ as imersões naturais $(i = 1, 2)$. Seja

$$\mathcal{N} = \left\{ N \lhd_f G^{abs} \mid (\varphi_i^{abs})^{-1}(N) \lhd_o G_i (i = 1, 2) \text{ e } G^{abs}/N \text{ p-grupo finito} \right\}$$

Definimos $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G^{abs}/N$ sendo o completamento de G^{abs} com respeito a $\mathcal{N}$. Seja $\iota : G^{abs} \longrightarrow G$ o homomorfismo natural. Definimos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ por $\varphi_i = \iota\varphi_i^{abs}$ $(i = 1, 2)$. Desta forma, G juntamente com φ_1 e φ_2 é um produto pro-p livre amalgamado de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H. Para tanto, checamos a propriedade universal correspondente.

Sejam $\psi_i : G_i \longrightarrow K$ $(i = 1, 2)$ homomorfismos contínuos para algum p-grupo finito K tal que $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$. Então, pela propriedade universal para produtos livres amalgamados, existe um único homomorfismo

$$\psi^{abs} : G^{abs} \longrightarrow K$$

com $\psi_i = \psi^{abs}\varphi_i^{abs}$ $(i = 1, 2)$. Assim, segue que $(\varphi_i^{abs})^{-1}\big(Ker(\psi^{abs})\big) = Ker(\psi_i)$ é um subgrupo aberto em G_i para todo $i = 1, 2$, e como K é um p-grupo finito temos que $Ker(\psi^{abs}) \in \mathcal{N}$. Portanto, existe um homomorfismo contínuo $\psi : G \longrightarrow K$ com $\psi^{abs} = \psi\iota$. Logo, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[rdd, dotted, bend left, "\psi"] & \\
& G^{abs} \arrow[u, "\iota"] \arrow[rd, "\psi^{abs}"] & \\
H \arrow[r, "f_i"'] & G_i \arrow[u, "\varphi_i^{abs}"] \arrow[r, "\psi_i"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi_i"] & K
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que $\psi_i = \psi\varphi_i$. A unicidade de ψ segue do fato que $G = \overline{\langle \varphi_1(G_1), \varphi_2(G_1) \rangle}$.

$\square$

Um produto pro-p livre amalgamado $G = G_1 \amalg_H G_2$ será chamado *próprio* se os homomorfismos $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ $(i = 1, 2)$ são monomorfismos.

Proposição 1.5.5. *Sejam G_1, G_2 grupos pro-p e H um subgrupo fechado comum de G_1 e G_2. Sejam $G^{abs} = G_1 *_H G_2$ um produto livre amalgamado abstrato de grupos pro-p e*

$$\iota : G^{abs} \longrightarrow G = G_1 \amalg_H G_2$$

um homomorfismo canônico. Então, $G = G_1 \amalg_H G_2$ é próprio se, e somente se, $Ker(\iota) \cap G_i = 1$ para $i = 1, 2$.

Demonstração: Vide Proposição 9.2.2 em [R-Z-00].

Teorema 1.5.6. *Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p com um subgrupo procíclico fechado comum H. Então o produto pro-p amalgamado de G_1 e G_2 sobre H é próprio.*

Demonstração: Vide o teorema 3.2 em [R-71].

Observação 1.5.7. *Em nossos resultados trabalhamos com amalgamação cíclica. Sendo assim, de acordo com o teorema 1.5.6 em (1.1), para simplificar notação em alguns casos, por conveniência, consideraremos f_1 como sendo a identidade.*

Se $G = G_1 \amalg_H G_2$ não é próprio, podemos sempre trocar G_1, G_2 e H por imagens deles em G. Esta operação não muda G, mas o produto livre amalgamado torna-se próprio. Além disso, vamos excluir o caso quando o produto livre amalgamado pro-p é trivial, isto é, quando o subgrupo amalgamado $H = G_1$ ou $H = G_2$ o que implica que $G = G_2$ ou $G = G_1$, respectivamente.

Teorema 1.5.8. *Seja $G = G_1 \amalg_H G_2$ um produto pro-p livre amalgamado próprio.*
(a) Se K é um subgrupo finito de G, então $K \leq gG_ig^{-1}$ para algum $g \in G$ e $i \in \{1, 2\}$;
(b) Se $1 \leq i \neq j \leq 2$ ou $g \notin G_i$, então $G_i \cap gG_jg^{-1} \leq bHb^{-1}$ para algum $b \in G_i$.

Demonstração: Vide Teoremas 4.2 e 4.3 em [Ri-Za-00].

Proposição 1.5.9. *Sejam G_1, G_2 grupos pro-p com um subgrupo procíclico fechado comum C, tal que $G = G_1 \amalg_C G_2$ seja próprio. Então $\mathcal{N}_G(C) = \mathcal{N}_{G_1}(C) \amalg_C \mathcal{N}_{G_2}(C)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.5.6, temos que o produto pro-p livre amalgamado $G = G_1 \amalg_C G_2$ é próprio. Logo, a demonstração segue do Corolário 2.7 [R-Z-96].

Seja $G = G_1 \amalg_H G_2$ um produto pro-p livre com amalgamação cíclica, onde $H = \langle c \rangle$ e G_1, G_2 são grupos pro-p. Consideremos $A = (G_1 \times G_2)/\langle (c \cdot f_2(c)^{-1}) \rangle^{G_1 \times G_2}$, com homomorfismos naturais $\psi_1 : G_1 \longrightarrow A$ e $\psi_2 : G_2 \longrightarrow A$. Logo, $f_1\psi_1 = f_2\psi_2$. Então, pela definição de produto livre com amalgamação, existe um único homomorfismo

$\varphi : G \longrightarrow A$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\langle c \rangle \arrow[r, hook, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, "\exists !\, \varphi"] & \\
 & & A,
\end{tikzcd}$$

isto é, $\varphi\varphi_i = \psi_i, \;\; i = 1, 2.$

Lema 1.5.10. *Sejam*

$$G = G_1 \amalg_{\langle c \rangle} G_2 \;\; e \;\; A = (G_1 \times G_2)/\big\langle (c \cdot f_2(c)^{-1}) \big\rangle^{G_1 \times G_2},$$

onde G_1, G_2 *são grupos pro-p finitamente gerados e* $c \notin \Phi(G_1)$. *Então*

$$d(A) = d(G_1) + d(G_2) - 1.$$

Demonstração: Sejam $\overline{G}_1 = G_1/\Phi(G_1)$ e $\overline{G}_2 = G_2/\Phi(G_2)$, ou seja, $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ são grupos pro-p abelianos elementares.

Suponhamos que $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ sejam n e m gerados, respectivamente. Considerando

$$\alpha : \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \longrightarrow \overline{G}_1 \times \overline{G}_2, \qquad g : \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \longrightarrow \overline{A} \qquad \text{e} \qquad f : \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \longrightarrow \overline{G}$$

onde

$$\overline{A} = (\overline{G}_1 \times \overline{G}_2)/\big\langle (c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1}) \big\rangle^{\overline{G}_1 \times \overline{G}_2}$$

tal que c_1 é a imagem de c em $\overline{G}_1$ e $\langle c_1 \rangle = \overline{C}$ (e, por hipótese, $c_1 \neq 1$),

$$\overline{f}_2 : \langle c_1 \rangle \longrightarrow \overline{G}_2 \;\; \text{e} \;\; \overline{G} = (\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2)/N$$

com

$$N = \Big\langle \big\{ c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1} \mid c_1 \in \overline{C} \big\} \Big\rangle^{\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2}$$

$\Big($$N$ é o menor subgrupo normal de $\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2$ que contém $\big\{ c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1} \mid c_1 \in \overline{C} \big\}$ ou o fecho normal de $\big\{ c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1} \mid c_1 \in \overline{C} \big\}$ $\Big)$. Assim, α, g e f são homomorfismos sobrejetivos.

Como $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ são grupos pro-p finitamente gerados, $\overline{G}_1 \times \overline{G}_2$ e $\overline{A}$ também são grupos pro-p finitamente gerados. Desta forma, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \arrow[d, "g"] \\ \overline{G} = (\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2)/N \arrow[r, two heads, "\varphi"] & \overline{A} \end{tikzcd}$$

Pelo fato que α, g e f são homomorfismos sobrejetivos, então, obviamente, φ é homomorfismo sobrejetivo. E como $\overline{G}_1 \times \overline{G}_2$ tem $(n+m)$ geradores, portanto, $\overline{A}$ têm $(n+m)$ geradores se $\langle(c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1})\rangle = 1$ ou $\overline{A}$ têm no máximo $(n+m-1)$ geradores se $\langle(c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1})\rangle \neq 1$. Mas, se $\langle(c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1})\rangle = 1$, então $\overline{G} = \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $\overline{A}$ têm no máximo $(n+m-1)$ geradores. Como $d(\overline{G}_i) = d(G_i)$ para $i = 1, 2$, $c_1 \neq 1$ em $\overline{G}_1$ e $c \notin \Phi(G_1)$, então $d(\overline{A}) = d(A)$. Logo,

$$d(A) = d(\overline{G}_1) + d(\overline{G}_2) - 1.$$

□

Lema 1.5.11. *Seja $G = G_1 \amalg_{\langle c\rangle} G_2$ um grupo pro-p infinito 2-gerado tal que G_i, $i = 1, 2$ é p-grupo abeliano elementar finito. Então $G = C_p \amalg C_p$.*

Demonstração: Sejam

$$\alpha : G_1 \amalg G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2, \qquad g : G_1 \times G_2 \longrightarrow A \qquad \text{e} \qquad f : G_1 \amalg G_2 \longrightarrow G,$$

onde $A = (G_1 \times G_2)/\langle(c \cdot f_2(c)^{-1})\rangle^{G_1 \times G_2}$ tal que $\langle c\rangle = C$. Assim, α, g e f são homomorfismos sobrejetivos. Desta forma, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G_1 \amalg G_2 \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & G_1 \times G_2 \arrow[d, "g"] \\ G = (G_1 \amalg G_2)/N \arrow[r, two heads, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

onde $N = \left\langle \{c \cdot f_2(c)^{-1} \mid c \in C\} \right\rangle^{G_1 \amalg G_2}$. Deste modo, temos que φ é homomorfismo sobrejetivo. Portanto, obtemos que A é no máximo 2-gerado. Então, pelo Lema 1.5.10, $G_1 \times G_2$

é no mínimo 2-gerado e no máximo 3-gerado, pois $G_1 \times G_2$ é p-grupo abeliano elementar finito e $c \cdot f_2(c)^{-1}$, caso seja não trivial, é um dos geradores de $G_1 \times G_2$. Então G_1 ou G_2 é 1-gerado, isto é, cíclico de ordem p. Sendo assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que G_1 é cíclico de ordem p. Desta forma, podemos considerar dois casos: $c \neq 1$ e $c = 1$. Se $c \neq 1$, então $\langle c \rangle = G_1$ pelo fato que $G = G_1 \amalg_{\langle c \rangle} G_2$ é produto pro-p livre com amalgamação cíclica pelo subgrupo gerado por c. Como em G_2 temos uma cópia isomórfica do subgrupo gerado por c, temos que $G_1 \leq G_2$, ou seja, $G = G_2$ que é finito. O que contradiz a hipótese. Portanto, teremos que $c = 1$, ou seja, $G = C_p \amalg G_2$, onde G_2 é p-grupo abeliano elementar finito, ou seja,

$$G_2 = \underbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}_{r \text{ vezes}} \qquad r \in \mathbb{N}^*, \quad r < \infty.$$

Mas, G é 2-gerado. Logo,

$$G_2 = C_p \quad \text{e} \quad G = C_p \amalg C_p.$$

$\square$

Proposição 1.5.12. *Seja $G = G_1 \amalg_C G_2$ o produto pro-p livre com amalgamação cíclica, onde G_i, $i = 1, 2$, são grupos pro-p. Se G é 2-gerado, então G_1 ou G_2 é cíclico.*

Demonstração: Temos que

$$d(G_i) = d\big(G_i / \Phi(G_i)\big), \quad i = 1, 2. \qquad (1)$$

E ainda, como G_i, $i = 1, 2$ é um grupo pro-p finitamente gerado, temos $G_i / \Phi(G_i)$, $i = 1, 2$ é grupo abeliano elementar. Sendo assim, teremos os seguintes casos:

(i) $\xi_i : C/\Phi(C) \longrightarrow G_i / \Phi(G_i)$, definido por $\xi_i\big(c + \Phi(C)\big) = c + \Phi(G_i)$, para $i = 1, 2$.

Seja $C = \langle c \rangle$, assim $c \notin \Phi(G_i)$ para $i = 1, 2$. Consideremos,

$$\overline{G} = G_1 / \Phi(G_1) \amalg_{C/\Phi(C)} G_2 / \Phi(G_2)$$

o produto pro-p livre com amalgamação cíclica. Pelo Lema 1.5.11, $\overline{G} \cong C_p \amalg C_p$. Assim,

$$G_i/\Phi(G_i) \cong C_p, \quad i = 1, 2$$

e então 1-gerado. Logo, por (1), G_i, $i = 1, 2$ também é 1-gerado, como desejado.

(ii) $\xi_i : C/\Phi(C) \longrightarrow G_i/\Phi(G_i)$, definido por $\xi_i\big(c + \Phi(C)\big) = \Phi(G_i)$, para $i = 1, 2$.

Portanto, teremos que $c \in \Phi(G_i)$, $i = 1, 2$. Então podemos escrever

$$\overline{G} = G_1/\Phi(G_1) \amalg G_2/\Phi(G_2).$$

Mas, $\overline{G}$ é 2-gerado, portanto $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ são 1-gerados. Logo, G_1 e G_2 também são 1-gerados.

(iii) $\xi_1 : C/\Phi(C) \longrightarrow G_1/\Phi(G_1)$, definido por $\xi_1\big(c + \Phi(C)\big) = c + \Phi(G_1)$, e $\xi_2 : C/\Phi(C) \longrightarrow G_2/\Phi(G_2)$, definido por $\xi_2\big(c + \Phi(C)\big) = \Phi(G_2)$ ou vice-versa.

Se $C/\Phi(C) = 1$, então $C = 1$. Portanto, retornamos ao caso (i). Então $c \notin \Phi(G_1)$ e $c \in \Phi(G_2)$. Portanto, pelo Lema 1.5.10 temos que $d(A) = d(G_1) + d(G_2) - 1$, onde $A = (G_1 \times G_2)/\big\langle\big(c \cdot f_2(c)^{-1}\big)\big\rangle^{G_1 \times G_2}$ é no máximo 2-gerado. Portanto $d(G_1) + d(G_2) \leq 3$. Logo, G_1 ou G_2 é 1-gerado.

□

Proposição 1.5.13. *Seja $G = G_1 \amalg_C G_2$ o produto pro-p livre com amalgamação cíclica pelo subgrupo gerado por $\langle c \rangle = C$, onde G_i, $i = 1, 2$ são grupos pro-p livres e c é o gerador de seu próprio centralizador em G. Se G é no máximo 3-gerado, então G é um grupo pro-p livre.*

Demonstração: Seja $\overline{G}_i = G_i/\Phi(G_i)$ com $i = 1, 2$. Consideremos,

$$f : \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \longrightarrow \overline{G}, \quad \alpha : \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \longrightarrow \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \quad \text{e} \quad g : \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \longrightarrow A,$$

onde $A = \big(G_1/\Phi(G_1) \times G_2/\Phi(G_2)\big)\Big/\Big\langle\big(c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1}\big)\Big\rangle^{\overline{G}_1 \times \overline{G}_2}$ tal que c_1 é a imagem de c em $\overline{G}_1$, $\langle c_1 \rangle = \overline{C}$, e $\overline{f}_2 : \overline{C} \longrightarrow \overline{G}_2$. Assim, f, α e g são homomorfismos sobrejetivos.

Desta forma, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2 \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 , \arrow[d, "g"] \\ \overline{G} = (\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2)/N \arrow[r, two heads, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

comutativo, onde $N = \left\langle \{c_1 \cdot \overline{f}_2(c_1)^{-1} \mid c_1 \in \overline{C}\} \right\rangle^{\overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2}$. Se $c \notin \Phi(G_1)$, então podemos escrever $G_1 = C \amalg G_1'$, onde G_1' é um grupo pro-p livre. Assim $G = G_1' \amalg G_2$, ou seja, G é um grupo pro-p livre. Analogamente, G é um grupo pro-p livre se $c \notin \Phi(G_2)$. Sendo assim, podemos assumir que $C \leq \Phi(G_i)$ para $i = 1, 2$. Portanto, $\overline{G} = \overline{G}_1 \amalg \overline{G}_2$ é quociente de G e no máximo 3-gerado. Então $\overline{G}_1$ ou $\overline{G}_2$ é cíclico e consequentemente G_1 ou G_2 é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Mas, por hipótese, c gera seu próprio centralizador em G. Logo $c = 1$, ou seja, $G = G_1 \amalg G_2$ que é um grupo pro-p livre.

$\square$

1.6 HNN- extensões pro-p

Definição 1.6.1. *Sejam H um grupo pro-p e $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo contínuo entre subgrupos fechados A, B de H. Uma HNN-extensão pro-p de H com subgrupos associados A, B consiste de um grupo pro-p $G = HNN(H, A, t)$, um elemento $t \in G$, e um homomorfismo contínuo $\varphi : H \longrightarrow G$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para qualquer grupo pro-p K, qualquer $k \in K$ e todo homomorfismo contínuo $\psi : H \longrightarrow K$ satisfazendo $k\big(\psi(a)\big)k^{-1} = \psi f(a)$ para todo $a \in A$, existe um único homomorfismo contínuo $\omega : G \longrightarrow K$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dashed, "\omega"] & \\ H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] & K \end{tikzcd}$$

comute e $\omega(t) = k$.

Como nos casos de grupos pro-p livres e produtos pro-p livres amalgamados, precisamos mostrar a propriedade universal acima somente para p-grupos finitos. De fato, sejam G uma HNN-extensão, conforme a definição 1.6.1, e K_i um p-grupo finito com $k \in K_i$, qualquer, e todo homomorfismo contínuo $\psi_i : H \longrightarrow K_i$ satisfazendo

$$k\big(\psi_i(a)\big)k^{^{-1}} = \psi_i f(a) \;\text{ para todo }\; a \in A.$$

Então, pela propriedade universal para HNN-extensão, existe um único homomorfismo contínuo $\omega_i : G \longrightarrow K_i$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dashed, "\omega_i"] & \\ H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & K \end{tikzcd}$$

comuta e $\omega_i(t) = k$.

Considerando $K = \varprojlim K_i$, podemos estabelecer a projeção $\pi_i : K \longrightarrow K_i$ que é um homomorfismo contínuo. Assim, pela propriedade universal para limite inverso, existe um único homomorfismo contínuo $\omega : G \longrightarrow K$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "\pi_i"] \\ G \arrow[ur, dashed, "\omega"] \arrow[r, "\omega_i"'] & K_i \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\pi_i\omega = \omega_i$. Portanto, checando a propriedade universal de HNN-extensão para p-grupos finitos, automaticamente, vale para qualquer grupo pro-p K, desde que K seja o limite inverso destes p-grupos finitos.

Como no caso de produto pro-p livre amalgamado, devido a construção explícita para HNN-extensão pro-p, provaremos a proposição a seguir. Apesar que, a mesma está demonstrada como a proposição 9.4.1 em [R-Z-00].

Proposição 1.6.2. *Sejam H um grupo pro-p e $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo contínuo de subgrupos de H. Então existe uma única HNN-extensão pro-p $G = HNN(H, A, t)$.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que a unicidade da HNN-extensão. Seja G uma HNN-extensão pro-p de H com subgrupos associados A, B, um elemento $t \in G$ e um homomorfismo contínuo $\varphi : H \longrightarrow G$ tal que $t\big(\varphi(a)\big)t^{-1} = \varphi f(a)$ para todo $a \in A$.

Consideremos K outra HNN-extensão pro-p de H com subgrupos associados A, B, um elemento $k \in K$ e um homomorfismo contínuo $\psi : H \longrightarrow K$ tal que $k\big(\psi(a)\big)k^{-1} = \psi f(a)$ para todo $a \in A$. Sendo assim, pela propriedade universal para HNN-extensão pro-p, existe um único homomorfismo contínuo $\omega : G \longrightarrow K$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dashed, "\omega"] & \\
H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] & K
\end{tikzcd}$$

comuta e $\omega(t) = k$. Analogamente, existe um único homomorfismo contínuo $\theta : K \longrightarrow G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
G & \\
H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] & K \arrow[ul, dashed, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

comuta e $\theta(k) = t$. Além disso, observemos que a propriedade universal é válida para a aplicação identidade $Id_G : G \longrightarrow G$ que é um homomorfismo contínuo onde $Id_G(t) = t$. Mas, $\theta\omega : G \longrightarrow G$ também é um homomorfismo contínuo. Sendo assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dashed, bend left, "Id_G"] \arrow[dr, dashed, "\theta\omega"'] & \\
H \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi"'] & G
\end{tikzcd}$$

comutativo. Como, pela definição, existe um único homomorfismo contínuo satisfazendo esta propriedade, teremos que $\theta\omega = Id_G$. Similarmente, $\omega\theta = Id_K$. Portanto, ω é um isomorfismo.

A existência será garantida por meio de uma construção explícita de $G = HNN(H, A, t)$. Seja $G^{abs} = HNN^{abs}(H, A, t)$ a HNN-extensão abstrata. Denote por $\varphi^{abs} : H \longrightarrow G^{abs}$ a imersão natural. Seja

$$\mathcal{N} = \left\{ N \lhd_f G^{abs} \mid (\varphi^{abs})^{-1}(N) \lhd_o H,\ \ G^{abs}/N \text{ p-grupo finito} \right\}$$

Defina $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G^{abs}/N$ como sendo o completamento de G^{abs} com respeito a $\mathcal{N}$. Seja $\iota : G^{abs} \longrightarrow G$ o homomorfismo natural e definimos $\varphi = \iota\varphi^{abs}$. Então, checaremos a propriedade universal para G e φ.

Seja $\psi : H \longrightarrow K$ um homomorfismo contínuo para algum p-grupo finito K com $k\big(\psi(a)\big)k^{-1} = \psi f(a)$ para todo $a \in A$. Então, pela propriedade universal para HNN-extensões abstratas, existe um único homomorfismo

$$\omega^{abs} : G^{abs} \longrightarrow K$$

com $\omega^{abs}(t) = k$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^{abs} \arrow[dr, dashed, "\omega^{abs}"] & \\
H \arrow[u, "\varphi^{abs}"] \arrow[r, "\psi"] & K
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, segue que $(\varphi^{abs})^{-1}\big(Ker(\omega^{abs})\big) = Ker(\psi)$ é um subgrupo aberto em H, e como K é um p-grupo finito temos que $Ker(\omega^{abs}) \in \mathcal{N}$. Portanto, existe um homomorfismo contínuo $\omega : G \longrightarrow K$ com $\omega^{abs} = \omega\iota$. Portanto o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[ddr, dotted, bend left, "\omega"] & \\
G^{abs} \arrow[u, "\iota"'] \arrow[dr, "\omega^{abs}"] & \\
H \arrow[u, "\varphi^{abs}"'] \arrow[r, "\psi"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi"] & K
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que $\psi = \omega\varphi$. A unicidade de ω segue do fato que $G = \overline{\langle \varphi(H), \iota(t) \rangle}$.

$\square$

Em contraste com a situação abstrata, o homomorfismo canônico $\varphi : H \longrightarrow G = HNN(H, A, t)$ não é sempre um monomorfismo. Quando φ é um monomorfismo, chamaremos $G = HNN(H, A, t)$ uma HNN-extensão pro-p *própria*.

Proposição 1.6.3. *Sejam $G = HNN(H, A, t)$ uma HNN-extensão profinita de grupos profinitos e $\varphi : H \longrightarrow G$ o homomorfismo canônico. Então*
(1) $Ker(\varphi) = K$, onde

$$K = \big\{ \cap U \mid U \lhd_o H, f(A \cap U) = f(A) \cap U \big\}.$$

(2) $G = HNN(H,A,t)$ é próprio se, e somente se, para todo subgrupo normal aberto U de H existe um subgrupo normal aberto V de H contido em U e tal que

$$f(A\cap V) = f(A)\cap V$$

(ou equivalentemente, se, e somente se, K é trivial). Em particular, se A é finito, então G é próprio.
(3) $G = HNN(H,A,t)$ é uma HNN-extensão profinita própria se, e somente se, $HNN^{abs}(H,A,t)$ mergulha em G e, portanto, é residualmente finito.

Demonstração: Vide Proposição 9.4.3 em [R-Z-00].

Teorema 1.6.4. *Seja $G = HNN(H,A,t)$ uma HNN-extensão pro-p própria. Se K é um subgrupo finito de G, então $K \leq gHg^{-1}$ para algum $g \in G$.*

Demonstração: Vide Teorema 4.2 em [Ri-Za-00].

Proposição 1.6.5. *Seja $G = HNN(M,C,t)$ um grupo 2-gerado, onde M é um grupo pro-p abeliano elementar e C um subgrupo cíclico. Então M é um grupo pro-p no máximo 2-gerado.*

Demonstração: Temos que $G = \langle M, t \mid c^t m^{-1}\rangle$, onde c é gerador de C e $f(c) = m$ tal que $f : C \longrightarrow M$ é um monomorfismo. Então, consideremos

$$\alpha : M \amalg \langle t\rangle \longrightarrow M\times\langle t\rangle, \qquad g : M\times\langle t\rangle \longrightarrow A \qquad \text{e} \quad \beta : M \amalg \langle t\rangle \longrightarrow G,$$

onde $A = \big(M\times\langle t\rangle\big)/\langle c^t m^{-1}\rangle$. Assim, α, g e β são homomorfismos sobrejetivos. Desta forma, podemos estabelecer o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \amalg \langle t\rangle \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M\times\langle t\rangle \arrow[d, "g"] \\
G = \big(M \amalg \langle t\rangle\big)/\langle c^t m^{-1}\rangle \arrow[r, two heads, "\varphi"] & A = \big(M\times\langle t\rangle\big)/\langle c^t m^{-1}\rangle
\end{tikzcd}$$

Então pelo diagrama acima, obrigatoriamente φ é um homomorfismo sobrejetivo. Assim, se M é 3-gerado, temos que $M \times \langle t \rangle$ é 4-gerado. Então, temos dois casos: A é 3-gerado se $\langle c^t m^{-1} \rangle$ é um gerador de $M \times \langle t \rangle$ ou 4-gerado se $\langle c^t m^{-1} \rangle$ não é um gerador de $M \times \langle t \rangle$. Logo, G é 3-gerado ou 4-gerado $\big($pois φ é um homomorfismo sobrejetivo$\big)$, o que é um absurdo. Ou seja, M é no máximo 2-gerado.

$\square$

Corolário 1.6.6. *Seja $G = HNN(M, C, t)$ um grupo 2-gerado, onde M é um grupo pro-p e C cíclico. Então, M é um grupo pro-p no máximo 2-gerado.*

Demonstração: Consideremos

$$\overline{G} = HNN\big(M/\Phi(M), C\Phi(M)/\Phi(M), t\big),$$

onde $\Phi(M)$ é o subgrupo de Frattini de M. Assim, $M/\Phi(M)$ é um grupo pro-p abeliano elementar e $C\Phi(M)/\Phi(M)$ é cíclico. Portanto, pela Proposição 1.6.5, $M/\Phi(M)$ é no máximo 2-gerado. Mas, pelo Lema 1.5.2, $d(M) = d\big(M/\Phi(M)\big)$. Logo, M é no máximo 2-gerado.

$\square$

Lema 1.6.7. *Seja $G = HNN(M, C, t)$ uma HNN-extensão pro-p própria, onde M é um grupo pro-p 2-gerado e C cíclico. Se $\langle C, C^t \rangle \neq M$, então G é um grupo pro-p 3-gerado.*

Demonstração: Seja $\overline{M} = M\big/\Phi(M)$ e como $\langle C, C^t \rangle \neq M$, então temos $\overline{C} = \overline{C}^t$ em $\overline{M}$, onde $\overline{C}$ é a imagem de C em $\overline{M}$. Desta forma, consideremos

$$\rho : \overline{M} \amalg \langle \overline{t} \rangle \longrightarrow \overline{G}, \qquad \alpha : \overline{M} \amalg \langle \overline{t} \rangle \longrightarrow \overline{M} \times \langle \overline{t} \rangle,$$

$$\beta : M \amalg \langle t \rangle \longrightarrow \overline{M} \amalg \langle \overline{t} \rangle \quad \text{e} \quad g : M \amalg \langle t \rangle \longrightarrow G,$$

onde $\overline{G} = \left(\overline{M} \amalg \langle \bar{t} \rangle\right) / \langle c^{\bar{t}} c^{-1} \rangle^{\overline{M} \amalg \langle \bar{t} \rangle}$, com $c \in \overline{C}$ e $\bar{t}$ a imagem de t em $\overline{G}$. Assim, ρ, α, β e g são homomorfismos sobrejetivos. Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
M \amalg \langle t \rangle \arrow[rr, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & & G \arrow[d, dashed, two heads, "\psi"] \\
\overline{M} \amalg \langle \bar{t} \rangle \arrow[rr, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] & & \overline{G} \arrow[dll, dashed, two heads, "\varphi"] \\
\overline{M} \times \langle \bar{t} \rangle & &
\end{tikzcd}$$

Assim, obtemos que φ e ψ são homomorfismos sobrejetivos. E como $\overline{C} = \overline{C}^t$ em $\overline{M}$, temos que $\overline{G}$ é um grupo pro-p 3-gerado. Mas, ψ é homomorfismo sobrejetivo. Logo, G também é um grupo pro-p 3-gerado.

$\square$

1.7 Módulos profinitos livres

Definição 1.7.1. *Define-se um anel profinito Λ como um limite inverso*

$$\Lambda = \varprojlim_{i \in I} \Lambda_i$$

de um sistema projetivo sobrejetivo $\{\Lambda_i, \varphi_{ij}, I\}$ de anéis finitos Λ_i, onde é assumido que cada Λ_i tem topologia discreta.

Consideraremos que os anéis possuem elemento identidade, denotado por 1, e que homomorfismos de anéis leva elemento identidade em elemento identidade. Um anel profinito é evidentemente compacto, Hausdorffiano e um anel topológico totalmente desconexo.

Definição 1.7.2. *Seja Λ um anel profinito. Um grupo profinito abeliano M é dito um Λ-módulo profinito à esquerda se existe uma aplicação contínua $\Lambda \times M \longrightarrow M$, definida por $(\lambda, m) \longmapsto \lambda m$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $(\lambda_1 \lambda_2)m = \lambda_1(\lambda_2 m)$

(ii) $(\lambda_1 + \lambda_2)m = \lambda_1 m + \lambda_2 m$

(iii) $\lambda(m_1 + m_2) = \lambda m_1 + \lambda m_2$

(iv) $1m = m$,

para $m, m_1, m_2 \in M$ *e* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, *onde 1 é o elemento identidade de* Λ.

Analogamente, definimos Λ-módulo profinito à direita como um grupo profinito abeliano M junto com uma aplicação contínua $M \times \Lambda \longrightarrow M$, definida por $(m, \lambda) \longmapsto m\lambda$, satisfazendo condições semelhantes a (i), (ii), (iii) e (iv) acima.

Definição 1.7.3. *Seja* M *um* Λ*-módulo profinito. Dizemos que* N *é um* Λ*-submódulo de* M *se* N *é um subgrupo fechado de* M *tal que* $\lambda n \in N$ *para todo* $n \in N$ *e* $\lambda \in \Lambda$, *juntamente com a aplicação induzida* $\Lambda \times N \longrightarrow N$ *definida por* $(\lambda, n) \longmapsto \lambda n$.

Seja N um Λ-submódulo de M, então M/N é um Λ-módulo quociente desde que M/N seja um grupo quociente em relação à aplicação $\Lambda \times M/N \longrightarrow M/N$ definida por $(\lambda, m + N) \longmapsto \lambda m + N$.

Seja X um subconjunto de um Λ-módulo profinito M. O Λ-submódulo gerado por X, denotado por $\overline{\langle X \rangle}$, é a interseção de todos os Λ-submódulos de M contendo X. Dizemos que M é *finitamente gerado* se $M = \overline{\langle X \rangle}$ para algum subconjunto finito X de M. Como no caso de grupos profinitos, dizemos que um subconjunto Y de um Λ-módulo profinito M *converge* para 1 se todo submódulo aberto de M contém todos exceto uma quantidade finita de elementos de Y. Além disso, uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow M$ de um conjunto X sobre um grupo profinito M *converge* para 1 se o conjunto $\varphi(X)$ converge para 1 em M.

Lema 1.7.4. *Sejam* Λ *um anel profinito e* M *um* Λ*-módulo profinito.*

(a) Então M *é o limite inverso de seus* Λ*-módulos quocientes finitos. Equivalentemente, os submódulos de* M *de índice finito formam um sistema fundamental de vizinhança de 0.*

(b) Todo Λ*-módulo profinito contém um subconjunto de geradores convergindo para 1.*

Demonstração: Vide Lema 5.1.1 em [R-Z-00].

Definição 1.7.5. *Sejam X um espaço profinito, Λ um anel profinito, M Λ-módulo profinito e $\iota : X \longrightarrow M$ uma aplicação contínua. Dizemos que (M, ι) é um Λ-módulo profinito livre no espaço X ou, simplesmente, M é um Λ-módulo profinito livre sobre X, se a seguinte propriedade universal é satisfeita: sempre que $\varphi : X \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua sobre um Λ-módulo profinito N, existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : M \longrightarrow N$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & N \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

comute, isto é, $\overline{\varphi}\iota = \varphi$.

Um Λ-módulo profinito livre sobre um espaço topológico pontuado $(X, *)$ é definido similarmente. Ele consiste de um Λ-módulo profinito M juntamente com uma aplicação de espaços pontuados $\iota : (X, *) \longrightarrow M$ $\big($isto é, $\iota(*) = 0$ $\big)$ satisfazendo uma propriedade universal análoga: sempre que $\varphi : X \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua de espaços pontuados sobre um Λ-módulo profinito N, existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : M \longrightarrow N$ tal que $\overline{\varphi}\iota = \varphi$.

Lema 1.7.6. *Sejam Λ um anel profinito e (M, ι) um Λ-módulo profinito livre sobre o espaço profinito X $\big($respectivamente, um Λ-módulo profinito livre sobre o espaço profinito pontuado $(X, *)$ $\big)$, então*

(a) $\iota(X)$ gera M como um Λ-módulo;

(b) A aplicação ι é injetiva.

Demonstração: Vide Lema 5.2.1 em [R-Z-00].

Das definições acima, deduzimos que se um Λ-módulo profinito livre sobre X $\big($ou sobre $(X, *)\big)$ existe, então ele é único. Denotaremos Λ-módulo profinito livre sobre X por $[\![\Lambda X]\!]$ e Λ-módulo profinito livre sobre $(X, *)$ por $[\![\Lambda(X, *)]\!]$.

Se X é um conjunto e Λ um anel, denotamos o Λ-módulo livre abstrato sobre X por $[\Lambda X]$. Similarmente, se $(X,*)$ é finito, então $[\![\Lambda(X,*)]\!] = [\Lambda(X,*)]$.

Proposição 1.7.7. *Seja Λ um anel profinito.*
(a) Para todo espaço profinito X, existe um único Λ-módulo profinito livre $[\![\Lambda X]\!]$ sobre X, isto é, $[\![\Lambda X]\!] = \varprojlim [\Lambda X_j]$, onde $X = \varprojlim X_j$ é qualquer decomposição de X como um limite inverso de espaços finitos.
(b) Para todo espaço profinito pontuado $(X,*)$, existe um único Λ-módulo profinito livre $[\![\Lambda(X,*)]\!]$ sobre o espaço pontuado $(X,*)$, isto é, $[\![\Lambda(X,*)]\!] = \varprojlim [\Lambda(X_j,*)]$, onde $(X,*) = \varprojlim (X_j,*)$ é qualquer decomposição de $(X,*)$ como um limite inverso de espaços pontuados finitos.

Demonstração: Vide Proposição 5.2.2 em [R-Z-00].

1.8 Grupos pro-p agindo em árvores pro-p

Um *grafo* é um conjunto Γ com um subconjunto distinguido $V = V(\Gamma)$ (o conjunto dos vértices de Γ), junto com as aplicações, $d_0, d_1 : \Gamma \longrightarrow V$, que são as identidades em V. Os elementos de $E = E(\Gamma) = \Gamma - V(\Gamma)$ são as arestas de Γ. Seja $e \in E$, então $d_0(e)$ e $d_1(e)$ são chamados os vértices inicial e final de e, respectivamente.

Um grupo G age sobre um grafo Γ se G age no conjunto Γ de tal maneira que $d_i(gm) = gd_i(m)$ para todo $g \in G$, $m \in \Gamma$, $i = 0, 1$.

Um espaço topológico X é um *espaço profinito* se ele é o limite inverso de espaços discretos finitos. Em outras palavras, X é profinito se ele é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. Um grafo Γ é chamado um *grafo profinito* se Γ é um espaço profinito, o conjunto de vértices $V(\Gamma)$ é fechado (e assim profinito) e as duas aplicações incidentes $d_0, d_1 : \Gamma \longrightarrow V(\Gamma)$ são contínuas. Se $E(\Gamma)$ é fechado, é suficiente definir d_0 e d_1 continuamente em $E(\Gamma)$. O conjunto de arestas $E(\Gamma)$ de um grafo profinito Γ não precisa ser um subconjunto fechado (e portanto compacto) de Γ. Sendo assim, grafos abstratos finitos são grafos profinitos.

Um grafo profinito Γ é *conexo* se todos seus grafos quocientes finitos são conexos como grafos abstratos.

Seja Γ um grafo profinito. Denotamos por $\big(E^*(\Gamma), *\big)$ o espaço quociente $\Gamma/V(\Gamma)$ com a imagem de $V(\Gamma)$ como um ponto distinguido $*$. Consideremos a sequência

$$0 \longrightarrow [\![\mathbf{F_p}(E^*(\Gamma), *)]\!] \xrightarrow{\delta} [\![\mathbf{F_p}V(\Gamma)]\!] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{F_p} \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

de $\mathbf{F_p}$-módulos profinitos tal que $\varepsilon(v) = 1$ para todo $v \in V(\Gamma)$, $\delta(\overline{e}) = d_1(e) - d_0(e)$ se $\overline{e}$ é a imagem em $E^*(\Gamma)$ da aresta $e \in E(\Gamma)$, e $\delta(*) = 0$, onde $[\![\mathbf{F_p}(E^*(\Gamma), *)]\!]$ é um $\mathbf{F}_p$-módulo profinito livre sobre o espaço profinito $\big(E^*(\Gamma), *\big)$, $[\![\mathbf{F_p}V(\Gamma)]\!]$ é um $\mathbf{F_p}$-módulo profinito livre sobre o espaço profinito $V(\Gamma)$ e δ, ε são homomorfismos $\big($pois, $[\![\mathbf{F_p}V(\Gamma)]\!]$ e $[\![\mathbf{F_p}(E^*(\Gamma), *)]\!]$ são $\mathbf{F_p}$-módulos profinitos livres, portanto pela propriedade universal para $\mathbf{F_p}$-módulos profinitos livres temos que δ e ε induzem homomorfismos contínuos, os quais denotaremos pelas mesmas letras$\big)$. Obviamente, $Im(\delta) \leq Ker(\varepsilon)$. E Γ é dito uma árvore pro-p se (1.2) é uma sequência exata.

Observe que se $E(\Gamma)$ é compacto (que é o caso para a maioria dos exemplos importantes), então

$$[\![\mathbf{F_p}(E^*(\Gamma), *)]\!] = [\![\mathbf{F_p}E(\Gamma)]\!].$$

Seja G um grupo profinito e Γ um grafo profinito. Suponhamos que G age continuamente sobre o espaço profinito Γ pela esquerda. Dizemos que G *age sobre o grafo profinito* Γ (pela esquerda) se $d_i(gm) = gd_i(m)$ para todo $g \in G$, $m \in \Gamma$ e $i = 0, 1$. Define-se $G_m = \{g \in G \mid gm = m\}$ sendo o *estabilizador* de um elemento $m \in \Gamma$.

Proposição 1.8.1. *Sejam L um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T e $\widetilde{L} = \overline{\langle L_m \mid m \in T\rangle}$ o subgrupo gerado por todos estabilizadores. Então $\widetilde{L}$ é normal em L e $L/\widetilde{L}$ é um grupo livre pro-p. Além disso, $T/\widetilde{L}$ é uma árvore pro-p.*

Demonstração: Vide Proposição 3.5 e Corolário 3.6 em [Ri-Za-00].

Seja $G = G_1 \amalg_H G_2$ um produto pro-p livre amalgamado. Então, o grafo padrão $S = S(G)$ é definido como segue:

$$\begin{aligned} S &= G/H \dot{\bigcup} G/G_1 \dot{\bigcup} G/G_2, \\ V(S) &= G/G_1 \dot{\bigcup} G/G_2, \\ d_0(gH) &= gG_1, \quad d_1(gH) = gG_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Obviamente, G age naturalmente sobre $S(G)$. Os estabilizadores de vértices são conjugados de G_1 ou G_2, e os estabilizadores de arestas são conjugados de H. O grafo quociente $S(G)/G$ é uma árvore finita tendo uma aresta e dois vértices

Agora, se considerarmos $G = HNN(H, A, t) = \langle H, t \mid tat^{-1} = f(a), \, \forall a \in A \rangle$ uma HNN-extensão pro-p, então o grafo padrão é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S &= G/A \dot{\bigcup} G/H, \\ V(S) &= G/H, \\ d_0(gA) &= gH, \ \ d_1(gA) = gt^{-1}H. \end{aligned} \tag{1.4}$$

O grupo G age naturalmente sobre $S(G)$. Os estabilizadores de vértices são conjugados de H e os estabilizadores de arestas são conjugados de A. O grafo quociente $S(G)/G$ é exatamente um laço: uma aresta com um único vértice

Teorema 1.8.2. *Grafo padrão é uma árvore pro-p.*

Demonstração: Vide Teorema 4.1 em [Ri-Za-00].

Teorema 1.8.3. *Seja $G = HNN(H, A, t)$ uma HNN-extensão pro-p própria. Então,*

$$H \cap gHg^{-1} \leq bAb^{-1}$$

para algum $b \in Ht \cup H$, sempre que $g \notin H$.

Demonstração: Vide Teorema 3.12 em [Z-M-89] juntamente com a construção $S(G)$ em (1.4).

Em nosso resultado, precisamos de uma afirmação um pouco mais precisa. Por isso, enunciaremos o corolário a seguir:

Corolário 1.8.4. *Sejam $G = HNN(H, A, t)$ uma HNN-extensão pro-p própria e $S = S(G)$ a árvore pro-p definida pelas equações (1.4). Então, na equação*

$$H \cap gHg^{-1} \leq bAb^{-1}$$

do teorema precedente, teremos que $b \in H$ se $H \cap gHg^{-1}$ estabiliza uma aresta terminando no vértice $1H$ e $b \in Ht$ se $H \cap gHg^{-1}$ estabiliza uma aresta começando no vértice $1H$.

Demonstração: Consideremos $e = 1A$ em (1.4), assim e é uma aresta que começa no vértice $1H$ e a aresta te é a translação de $e = 1A$ por t.

Como $H \cap gHg^{-1} \leq bAb^{-1}$ e $b \in Ht \cup H$, temos que bAb^{-1} estabiliza a aresta be. Portanto, se $b \in H$ então $H \cap gHg^{-1}$ estabiliza uma aresta que começa em $1H$ e, se $b \in Ht$ então $H \cap gHg^{-1}$ estabiliza uma aresta que termina em $1H$ pois

$$bAb^{-1} = htAt^{-1}h^{-1}, \quad \text{onde } \; h \in H$$

e tAt^{-1} estabiliza a aresta te. Logo, uma aresta estabilizada por $H \cap gHg^{-1}$ começa ou termina em $1H$, mas toda aresta que termina em $1H$ é uma translação de $e = 1A$ e toda aresta que começa em $1H$ é uma translação de te, por elemento de H. Desta forma, por um lado, se a aresta estabilizada por $H \cap gHg^{-1}$ é uma translação da aresta $e = 1A$, então $H \cap gHg^{-1} \leq bAb^{-1}$ com $b \in H$. Por outro lado, se a aresta estabilizada por $H \cap gHg^{-1}$ é uma translação de te, então $H \cap gHg^{-1} \leq bAb^{-1}$ com $b \in Ht$.

$\square$

Teorema 1.8.5. *Seja H um grupo pro-p agindo sobre uma árvore pro-p T. Então, uma das seguintes condições é válida:*

(a) $H = H_v$ é o estabilizador de um vértice v de T.

(b) H tem um subgrupo livre pro-p não abeliano P tal que $P \cap H_v = 1$ para todo vértice v de T.

(c) Existe uma aresta e de T cujo estabilizador H_e é normal em H, e o grupo quociente H/H_e é solúvel e isomorfo a um dos seguintes grupos:

(1) $\mathbb{Z}_p$;

(2) um grupo pro-2 diedral infinito $\mathbb{Z}_2 \rtimes C_2 \cong C_2 \amalg C_2$.

Demonstração: Vide Teorema 3.18 em [Ri-Za-00].

Lema 1.8.6. *Seja $G = F_1 \amalg_C F_2$, onde F_i, $i = 1, 2$ são grupos pro-p livres finitamente gerados e C um subgrupo cíclico maximal em F_1, F_2, então $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ não é subgrupo de G.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $H = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p \leq G$. Consideremos $S(G)$ o grafo padrão de G definido pelas equações (1.3), então pelo Teorema 1.8.2 temos que $S(G)$ é uma árvore pro-p e G age sobre $S(G)$. Assim, H também age sobre a árvore pro-p $S(G)$. Portanto, aplicando o teorema 1.8.5 para H, temos que $\frac{H}{H_e} \cong \mathbb{Z}_p$, onde $H_e \triangleleft H$ é o estabilizador de $e \in S(G)$. Portanto, H_e é conjugado de um subgrupo de C, logo conjugando H em G, podemos assumir que $H_e \leq C$. Então, pela Proposição 1.5.9

$$\mathcal{N}_G(H_e) = \mathcal{N}_{F_1}(H_e) \amalg_C \mathcal{N}_{F_2}(H_e),$$

mas pelo Lema1.4.8$\mathcal{N}_{F_i}(H_e) = C$, $i = 1, 2$, ou seja,

$$\mathcal{N}_G(H_e) = C \amalg_C C = C.$$

Como $H_e \triangleleft H$, teremos $H \leq \mathcal{N}_G(H_e)$, portanto $H \leq C$, o que é um absurdo. Logo, H não é subgrupo de G.

□

Proposição 1.8.7. *Seja $\{L_U, \psi_{UV}, I\}$ um sistema projetivo enumerável totalmente ordenado, onde I é uma família de subgrupos normais abertos, $L_U = HNN(M_U, C_U, t_U)$*

é uma HNN-extensão pro-p e $L = \varprojlim L_U$ *limite inverso sobrejetor tal que* $|M_U| < \infty$. *Então,*

$$L = HNN(M, C, t),$$

onde $M = \varprojlim M_U'$, $C = \varprojlim C_U'$ *com* M_U' *conjugado de* M_U *e* C_U' *conjugado de* C_U.

Demonstração: Para subgrupos normais abertos, $U \leq V$, temos o epimorfismo

$$\psi_{UV} : L_U = HNN(M_U, C_U, t_U) \longrightarrow L_V = HNN(M_V, C_V, t_V),$$

onde $C_U^{t_U^{-1}} \leq M_U$ e $|M_U| < \infty$. Assim, pelo Teorema 1.6.4,

$$\psi_{UV}(M_U) \leq M_V^{l_V}, \text{ onde } l_V \in L_V.$$

Seja $l_U \in \psi_{UV}^{-1}(l_V)$. Então, substituindo

$$M_U \text{ por } M_U^{l_U^{-1}}, \; C_U \text{ por } C_U^{l_U^{-1}}, \; C_U^{t_U^{-1}} \text{por } C_U^{t_U^{-1} l_U^{-1}}, \; t_U \text{ por } l_U t_U^{-1} l_U^{-1}$$

e fazendo isto em todo caminho de baixo para cima, teremos $\psi_{UV}(M_U) \leq M_V$. Portanto, $\{M_U, \psi_{UV}\}$ é um sistema projetivo, onde $U \leq V$.

Sendo assim, como $C_U = M_U \cap M_U^{t_U}$, temos

$$\psi_{UV}(C_U) \leq M_V \cap M_V^{\psi_{UV}(t_U)} \text{ e } \psi_{UV}(C_U^{t_U^{-1}}) \leq M_V^{\psi_{UV}(t_U^{-1})} \cap M_V.$$

Agora, se $\psi_{UV}(t_U) \in M_V$ para algum V, como $\psi_{UV}(M_U) \leq M_V$, o homomorfismo ψ_{UV} não é um epimorfismo, pois $\psi_{UV}(L_U) \leq M_V \neq L_V$, o que é uma contradição. Portanto, $\psi_{UV}(t_U) \notin M_V$. Desta forma, pelo Teorema 1.8.3,

$$\psi_{UV}(C_U) \leq C_V^{g_V} \text{ e } \psi_{UV}(C_U^{t_U^{-1}}) \leq C_V^{g_V \psi_{UV}(t_U^{-1})}, \text{ onde } g_V \in M_V t_V \cup M_V. \qquad (*)$$

Sendo assim, teremos duas possibilidades: $g_V \in M_V t_V$ ou $g_V \in M_V$.

(i) $g_V \in M_V$.

Assim, tomando $g_U \in \psi_{UV}^{-1}\big|_{M_U}(g_V)$ e substituindo C_U por $C_U^{g_U^{-1}}$ de tal maneira que fazendo isto em todo caminho de baixo para cima, podemos assumir $\psi_{UV}(C_U) \leq C_V$. Além disso, precisamos mostrar que podemos assumir $\psi_{UV}(C_U^{t_U^{-1}}) \leq C_V^{t_V^{-1}}$.

Por $(*)$, temos que $\psi_{UV}(C_U^{t_U^{-1}}) \leq C_V^{g_V \psi_{UV}(t_U^{-1})}$. E, ainda, temos que $C_U^{t_U^{-1}}$ estabiliza uma aresta que termina no vértice $1M_U$ da árvore pro-p T_U de L_U, definida pelas equações (1.4). Portanto, considerando $U \leq V$ temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} L_U = HNN(M_U, C_U, t_U) \arrow[r, two heads, "\psi_{UV}"] \arrow[d, two heads, "\alpha_U"'] & L_V = HNN(M_V, C_V, t_V) \arrow[d, two heads, "\alpha_V"] \\ L_U/\langle M_U\rangle^{L_U} = \mathbb{Z}_p = \langle t_U\rangle \arrow[r, two heads, "\rho_{UV}"] & L_V/\langle M_V\rangle^{L_V} = \mathbb{Z}_p = \langle t_V\rangle. \end{tikzcd}$$

Sendo assim, temos que $T_V^{'} = T_V/\langle M_V\rangle^{L_V}$ é uma árvore pro-p pela Proposição 1.8.1 sobre a qual $\mathbb{Z}_p = \langle t_V\rangle$ age livremente e, considerando o vértice $v_0 = \alpha_V(1M_V)$ como a imagem do vértice $1M_V$ em $T_V^{'}$, teremos uma aresta terminando e outra começando em v_0.

Desta forma, pelo Corolário 1.8.4 como $\psi_{UV}(C_U)$ estabiliza uma aresta que termina no vértice $1M_V$, segue que a aresta estabilizada por $\psi_{UV}\big(C_U^{t_U^{-1}}\big)$ é a translação da aresta estabilizada por $\psi_{UV}(C_U) \leq C_V$ pelo elemento $g_V\psi_{UV}(t_U^{-1})$. Mas, analisando a imagem $g_V\psi_{UV}(t_U^{-1})$ no grupo $\mathbb{Z}_p = \langle t_V\rangle$, temos que $\alpha_V(g_V)$ é trivial. Assim, $\alpha_V\big(\psi_{UV}(t_U^{-1})\big)$ é gerador de $\mathbb{Z}_p = \langle t_V\rangle$. Portanto a ação de $\alpha_V\big(\psi_{UV}(t_U^{-1})\big)$, na imagem da aresta estabilizada por $\psi_{UV}(C_U)$ em $T_V^{'}$, estabelece uma translação não trivial de uma aresta que termina no vértice v_0, da árvore pro-p $T_V^{'}$, para a aresta que começa em v_0. Como o morfismo $T_V \longrightarrow T_V^{'}$ preserva a orientação da imagem da aresta estabilizada por $\psi_{UV}\big(C_U^{t_U^{-1}}\big)$, temos que $\psi_{UV}\big(C_U^{t_U^{-1}}\big)$ estabiliza uma aresta que começa em $1M_V$. Logo,

$$C_V^{g_V\psi_{UV}(t_U^{-1})} = C_V^{t_V^{-1}g_V^{'}}, \text{ para algum } g_V^{'} \in M_V.$$

Portanto, considerando $g_U \in \psi_{UV}^{-1}\big|_{M_U}(g_V^{'})$ e substituindo $C_U^{t_U^{-1}}$ por $C_U^{t_U^{-1}g_U^{-1}}$, obtemos

$$\psi_{UV}(C_U^{t_U^{-1}g_U^{-1}}) \leq C_V^{g_V\psi_{UV}(t_U^{-1})\psi_{UV}(g_U^{-1})} = C_V^{t_V^{-1}g_V^{'}(g_V^{'})^{-1}} = C_V^{t_V^{-1}}.$$

(ii) $g_V \in M_V t_V$.

Argumentaremos de modo análogo em (i). Temos que $g_V = m_V t_V$, onde $m_V \in M_V$. Como $\psi_{UV}(C_U) \leq C_V^{g_V}$, consideraremos $m_U \in \psi_{UV}^{-1}\big|_{M_U}(m_V)$. Então, substituindo t_U por t_U^{-1} e C_U por $C_U^{t_U^{-1}m_U^{-1}}$, similarmente ao caso $g_V \in M_V$, obtemos $\psi_{UV}(C_U) \leq C_V$. Isto reduz esta situação ao caso (i), já considerado. Assim, $\psi_{UV}(C_U)^{t_U^{-1}} \leq C_V^{t_V^{-1}}$.

Agora, consideremos o epimorfismo $\psi_U : L \longrightarrow L_U$ tal que K seja o núcleo de ψ_U. Então, existe $N_U \lhd_o L$ tal que $N_U \cap M_U = K \cap M_U$. Seja

$$Q_U = \big\{\tau_U \in L \mid (CN_U)^{\tau_U} = C_t N_U \ \text{ e } \ \langle MN_U, \tau_U\rangle = L\big\},$$

onde $C = \varprojlim C_U$ e $C_t = \varprojlim C_U^{t_U}$. Desta forma, pela projeção ψ_U, teremos que $\psi_U^{-1}(t_U) \subseteq Q_U$, ou seja, Q_U é diferente de vazio. De fato, pois o diagrama comutativo a seguir

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, two heads, "\psi_U"] \arrow[dr, "\alpha_U"'] & & L_U \arrow[dl, "\beta_U"] \\ & L/N_U & \end{tikzcd}$$

nos permite reescrever Q_U da seguinte maneira:

$$Q_U = \Big\{\tau_U \in L \mid \alpha_U(C)^{\alpha_U(\tau_U)} = \alpha_U(C_t) \ \text{ e } \ \big\langle \alpha_U(M),\ \alpha_U(\tau_U)\big\rangle = L/N_U\Big\}.$$

Mas, por um lado, em L_U, temos as igualdades

$$\psi_U(C_U)^{\psi_U(\tau_U)} = \psi_U(C_t) = C_U^{t_U} \ \text{ e } \ \langle C_U, t_U\rangle = L_U,$$

para todo $\tau_U \in \psi_U^{-1}(t_U)$. E isto implica, pelo epimorfismo β_U, que as igualdades

$$\alpha_U(C)^{\alpha(\tau_U)} = \alpha_U(C_t) \ \ e \ \ \langle \alpha_U(M),\ \alpha_U(\tau_U)\rangle = L/N_U$$

são satisfeitas em L/N_U.

Por outro lado, para subgrupos normais abertos $N_U,\ N_V \in L$ tal que $N_U \leq N_V$ e para todo $\tau_U \in Q_U$, teremos

$$(CN_V)^{\tau_U} = C_t N_V \ \text{ e } \ \langle MN_V, \tau_U\rangle = L,$$

pois o subgrupo N_V contém o subgrupo N_U. Portanto, $Q_U \subseteq Q_V$.

Além disso, podemos escrever $Q_U = t_U \mathcal{N}_L(C)$. E como $\mathcal{N}_L(C)$ é um subgrupo fechado, então Q_U também é fechado e portanto compacto. Logo, $Q = \bigcap Q_U$ é diferente de vazio, ou seja, existe $t \in Q$.

Como $L_U = HNN(M_U, C_U, t_U)$, então temos que

$$L_U = \big\langle M_U, t_U \mid c_U^{t_U} = f_U(c_U)\big\rangle,$$

onde $f_U : C_U \longrightarrow C_U^{t_U^{-1}}$ é um isomorfismo e c_U é gerador de C_U. Seja $t_U^{'}$ a imagem de t em L_U, isto é, $\psi_U(t) = t_U^{'}$. Mas, $C_U^{t_U^{-1}} = C_U^{(t_U^{'})^{-1}}$ e portanto $t_U^{-1}t_U^{'} \in \mathcal{N}_{L_U}(C_U)$, ou seja, $t_U^{'} = t_U n_U$ para algum $n_U \in \mathcal{N}_{L_U}(C_U)$. Em seguida, definimos o isomorfismo $f_U^{'} : C_U \longrightarrow C_U^{t_U^{-1}}$ tal que $f_U^{'}(c_U) = \big(f_U(c_U)\big)^{n_U^{-1}}$, onde $c_U \in C_U$ e n_U é exatamente o elemento tal que $t_U^{'} = t_U n_U$. Assim, podemos reescrever

$$L_U = \big\langle M_U, t_U^{'} \mid c_U^{(t_U^{'})^{-1}} = \big(f_U(c_U)\big)^{n_U^{-1}} \big\rangle.$$

Desta forma, obtemos que L_U pode ser escrito da seguinte maneira

$$L_U = HNN(M_U, C_U, t_U^{'}),$$

pois $t_U^{'} = t_U n_U$ para algum $n_U \in \mathcal{N}_{L_U}(C_U)$ e $C^t = C_t$. Logo, temos que $L = HNN(M, C, t)$, pois

$$HNN(M, C, t) = \varprojlim HNN(M_U, C_U, t_U^{'}). \qquad (**)$$

O que conclui a demonstração, lembrando que M_U e C_U em $(**)$ são conjugados de M_U e C_U considerados inicialmente.

$\square$

A ferramenta chave para a prova do nosso resultado principal é a seguinte

Teorema 1.8.8 (Herfort e Zalesski [H-Z-07])**.** *Seja G um grupo pro-p virtualmente livre finitamente gerado agindo sobre uma árvore pro-p T com estabilizadores de vértices finitos. Então G fatora como um produto amalgamado não trivial ou uma HNN-extensão sobre algum estabilizador de aresta.*

Demonstração: Vide Teorema 5.6 em [H-Z-07].

Capítulo 2

Resultado Principal

No artigo [B-62], Gilbert Baumslag mostrou que todo subgrupo 2-gerado do produto livre amalgamado $K = \langle F * \overline{F}; u = \overline{u}\rangle$ (onde F e $\overline{F}$ são grupos livres isomorfos e $u \in F$ gera seu próprio centralizador), é um grupo livre. Mostramos, neste capítulo, um resultado similar para grupos pro-p livres.

Teorema 2.1. *Seja $G = F_1 \amalg_{\langle c\rangle} F_2$, onde $F_i,\ \ i = 1, 2$, são grupos pro-p livres finitamente gerados e c é o gerador de seu próprio centralizador em F_1 e F_2. Se L é um subgrupo 2-gerado de G, então L é um grupo pro-p livre.*

Demonstração: Seja $S = S(G)$ o grafo padrão definido pelas equações (1.3), então, pelo Teorema 1.8.2, $S(G)$ é uma árvore pro-p padrão. Assim G age em S. Considerando $\widetilde{L} = \overline{\left\langle L_m \mid m \in S\right\rangle}$ (onde L_m é estabilizador de $m \in S$), pela Proposição 1.8.1, temos que $L/\widetilde{L}$ é um grupo pro-p livre. Logo, podemos assumir que $\widetilde{L} \neq 1$, pois se $\widetilde{L} = 1$ não há nada a provar.

Seja $U \lhd_o L$ e $\widetilde{U} = \left\langle (U \cap F_i)^l \mid l \in L,\ i = 1, 2\right\rangle = \left\langle U \cap F_i^l \mid l \in L,\ i = 1, 2\right\rangle$. Assim $\widetilde{U} \lhd L$ e $(L/\widetilde{U})\big/(U/\widetilde{U}) \cong L/U$ que é finito, ou seja, $L/\widetilde{U}$ é um grupo pro-p virtualmente livre, pois a proposição 1.8.1 garante que $U/\widetilde{U}$ é um grupo pro-p livre. Além disso, a proposição 1.8.1 também nos garante que $S/\widetilde{U}$ é uma árvore pro-p sobre a qual $L/\widetilde{U}$ age. Portanto, o teorema 1.8.8 nos garante que o grupo pro-p $L/\widetilde{U}$ decompõe-se em um produto pro-p livre amalgamado não trivial ou uma HNN-extensão pro-p com subgrupo associado finito.

Seja I a família de todos subgrupos normais abertos em L, então I é um conjunto dirigido com respeito a ordem $\preceq'$ definida por $V \preceq' U$ se, e somente se, U é um subgrupo de V. Desta forma, pela Proposição 1.2.3 teremos que I é um conjunto enumerável pois L é finitamente gerado e, portanto, podemos considerar o conjunto cofinal I' de I como uma família enumerável de números naturais. Sendo assim, para $V \preceq' U$ tomando $\alpha_{UV} : L/U \longrightarrow L/V$ definida por $\alpha_{UV}\big(lU\big) = lV$, $l \in L$, obtemos o sistema projetivo $\big\{L/U,\ \alpha_{UV}, I'\big\}$. Assim, L juntamente com homomorfismos compatíveis $\alpha_U : L \longrightarrow L/U$ é o limite inverso do sistema, isto é, $L = \varprojlim_{U \lhd_o L} L/U$.

Agora, temos apenas dois casos: $L = \widetilde{L}$ e $L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$, pois se $G(x,y)$ é um grupo pro-p livre 2-gerado, temos os epimorfismos

$$G(x,y) \xrightarrow{\rho_1} L \xrightarrow{\rho_2} L/\widetilde{L}\,.$$

Mas, se $L/\widetilde{L}$ é um grupo pro-p livre 2-gerado, então $\rho_2\rho_1$ é um isomorfismo, isto é, $G(x,y) \cong L/\widetilde{L}$. Portanto, obtemos também que ρ_1 é um isomorfismo, ou seja, L é um grupo pro-p livre.

1^o Caso: $L = \widetilde{L}$.

Por um lado, $L/\widetilde{U}$ não pode ser uma HNN extensão com subgrupo associado finito, pois se $L/\widetilde{U} = HNN(M_U, C_U, t_U)$, então

$$(L/\widetilde{U})\big/\langle M_U\rangle^{L/\widetilde{U}} = \mathbb{Z}_p = \langle t_U\rangle. \qquad (1)$$

Mas, por outro lado, considerando

$$H = (L \cap F_i^g)\big/(\widetilde{U} \cap L \cap F_i^g) = (L \cap F_i^g)\big/(U \cap L \cap F_i^g), \quad \text{onde} \quad g \in G, \qquad (2)$$

teremos H finito, pois $U \lhd_o L$, isto é, $L/\widetilde{U}$ é gerado por elementos de torção. Assim, de (1) e (2) $L/\widetilde{U}$ não pode ser uma HNN-extensão. Sendo assim, o restante da demonstração segue da seguinte afirmação

Afirmação: Se $L/\widetilde{U} = L_{1U} \amalg_{C_U} L_{2U}$ é um produto pro-p livre não trivial com amalgamação cíclica para infinitos $U \in I'$ (isto é, $C_U \neq L_{1U}$ e $C_U \neq L_{2U}$), então L é um grupo pro-p livre.

Pela Proposição 1.5.12 temos que L_{1U} ou L_{2U} é cíclico. Sem perda de generalidade, consideremos L_{1U} cíclico. Portanto, cíclico finito, pois $L/\widetilde{U}$ é gerado por elementos de torção.

Note que, $\overline{L}_{2U} = L_{2U}/\big(L_{2U} \cap (U/\widetilde{U})\big)$ é finito. Assim, tomando $L_U = L_{1U} \amalg_{C_U} \overline{L}_{2U}$, que é um produto pro-p livre amalgamado não trivial, obtemos $L = \varprojlim L_U = \varprojlim L/\widetilde{U}$. Então, teremos o homomorfismo

$$\varphi_{UV} : L_U = L_{1U} \amalg_{C_U} \overline{L}_{2U} \longrightarrow L_V = L_{1V} \amalg_{C_V} \overline{L}_{2V}.$$

Mas subgrupos de ordem finita são levados em subgrupos de ordem finita, logo pelo Teorema 1.5.8

$$\varphi_{UV}(L_{1U}) \leq L_{1V}^{l_{1V}} \quad \text{e} \quad \varphi_{UV}(\overline{L}_{2U}) \leq \overline{L}_{2V}^{\,l_{2V}}.$$

Queremos por meio do homomorfismo contínuo φ_{UV} encaixar L_{1U} em L_{1V} de tal maneira que no produto pro-p livre amalgamado L_U, L_{1U} não seja alterado.

Sendo assim, consideremos $l_{1U} \in \varphi_{UV}^{-1}(l_{1V})$. Então, substituindo L_{1U} por $L_{1U}^{l_{1U}^{-1}}$ e fazendo isto em todo o caminho de baixo para cima (ou seja, estabelecer o automorfismo $L_U \longrightarrow L_U^{l_U^{-1}}$ para cada U, onde $l_U \in \psi_{UV}^{-1}(l_V)$), teremos $\varphi_{UV}(L_{1U}) \leq L_{1V}$. E como C_U é subgrupo cíclico próprio finito de L_{1U}, podemos escrever $C_U = p^{t_U} L_{1U}$ para cada U. Mas, $\varphi_{UV}(C_U) \leq L_{1V}$ e $\varphi_{UV}(C_U) \leq \overline{L}_{2V}^{\,l_{2V}}$, ou seja, $\varphi_{UV}(C_U) \leq L_{1V} \cap \overline{L}_{2V}^{\,l_{2V}}$. E, pelo Teorema 1.5.8, $L_{1V} \cap \overline{L}_{2V}^{\,l_{2V}} \leq bC_V b^{-1}$, onde $b \in L_{1V}$. Então, $\varphi_{UV}(C_U) \leq C_V$, pois L_{1V} é cíclico. Desta forma, temos que $\langle c \rangle = C = \varprojlim C_U$ que é um grupo cíclico infinito. Então $C = p^t L_1$, onde $L_1 = \varprojlim L_{1U}$ e $t = 0$ ou $t = \infty$, pois, por hipótese, c gera seu próprio centralizador em L. Portanto, se $t = 0$ teremos $C = L_1 = \varprojlim L_{1U}$. E além disso, se $C \neq 1$, então L_1 é cíclico não trivial. Logo, pelo Lema 1.3.8, a projeção $\varphi_U : L_1 \longrightarrow L_{1U}$ é sobrejetora a partir de algum U. Então, L_U não é um produto pro-p livre amalgamado não trivial. Se $C = 1$, o que sempre acontece quando $t = \infty$, teremos, pelo Lema 1.3.7, que $\varprojlim \langle C_U \rangle^{L_U} = 1$. Portanto,

$$L = \varprojlim L_U = \varprojlim L_U / \langle C_U \rangle^{L_U} = \varprojlim \Big[\big(L_{1U}/C_U \big) \amalg \big(\overline{L}_{2U} / \langle C_U \rangle^{\overline{L}_{2U}} \big) \Big].$$

Agora queremos encaixar o produto pro-p livre $\big(L_{1U}/C_U \big) \amalg \big(\overline{L}_{2U} / \langle C_U \rangle^{\overline{L}_{2U}} \big)$ sobre o produto pro-p livre $\big(L_{1V}/C_V \big) \amalg \big(\overline{L}_{2V} / \langle C_V \rangle^{\overline{L}_{2V}} \big)$. Mas, já mostramos que a imagem de L_{1U} por meio do homomorfismo φ_{UV} é um subgrupo de L_{1V}, então resta mostrar que a imagem de $\overline{L}_{2U}$ é um subgrupo de $\overline{L}_{2V}$. Para isto, faremos analogamente à construção acima. Seja $l_{2U} \in \varphi_{UV}^{-1}(l_{2V})$. Então, substituindo $\overline{L}_{2U}$ por $\overline{L}_{2U}^{l_{2U}^{-1}}$ (o que, pelo Lema 1.5.2, não altera a estrutura do produto pro-p livre amalgamado) e fazendo isto em todo o caminho de baixo para cima estabelecendo a conjugação em todo o grupo L_U, teremos $\varphi_{UV}(\overline{L}_{2U}) \leq \overline{L}_{2V}$. Assim,

$$L = \varprojlim \Big[\big(L_{1U}/C_U \big) \amalg \big(\overline{L}_{2U} / \langle C_U \rangle^{\overline{L}_{2U}} \big) \Big] = \varprojlim \big(L_{1U}/C_U \big) \amalg \varprojlim \big(\overline{L}_{2U} / \langle C_U \rangle^{\overline{L}_{2U}} \big).$$

Como L é 2-gerado e L_{1U}/C_U é cíclico, temos que $\overline{L}_{2U} / \langle C_U \rangle^{\overline{L}_{2U}}$ também é cíclico. Logo,

$$L = \mathbb{Z}_p \amalg \mathbb{Z}_p,$$

ou seja, L é um grupo pro-p livre.

<u>2^o Caso</u> : $L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$.

Sendo assim, podemos assumir que $L/\widetilde{U} = HNN(M_U, C_U, t_U)$ é uma HNN-extensão a partir de algum U, onde C_U é um grupo cíclico finito, pois caso contrário, pela afirmação feita no 1º caso, teremos o resultado desejado.

Observe que, pela Proposição 1.8.1, $U/\widetilde{U}$ é um grupo pro-p livre, então

$$(U/\widetilde{U}) \cap C_U = 1 = (U/\widetilde{U}) \cap C_U^{t_U^{-1}}.$$

Assim, considerando $L_U = HNN(\overline{M}_U, \overline{C}_U, \overline{t}_U)$, onde $\overline{M}_U = M_U / \big(M_U \cap (U/\widetilde{U}) \big)$ e $|\overline{M}_U| < \infty$, teremos $L = \varprojlim L_U = \varprojlim L/\widetilde{U}$.

Para subgrupos normais abertos de L, $U \leq V$, temos o epimorfismo

$$\psi_{UV} : L_U = HNN(\overline{M}_U, \overline{C}_U, \overline{t}_U) \longrightarrow L_V = HNN(\overline{M}_V, \overline{C}_V, \overline{t}_V),$$

onde $\overline{C}_U^{\overline{t}_U^{-1}} \leq \overline{M}_U$ e $|\overline{M}_U| < \infty$. Assim, pela Proposição 1.8.7 temos que $L = HNN(M, C, t)$, onde $M = \varprojlim \overline{M}_U^{'}$ e $C = \varprojlim \overline{C}_U^{'}$ com $\overline{M}_U^{'}$ conjugado de $\overline{M}_U$ e $\overline{C}_U^{'}$ conjugado de $\overline{C}_U$.

Temos ainda que $HNN(M_U, C_U, t_U)$ é um grupo pro-p 2-gerado, assim $HNN(\overline{M}_U, \overline{C}_U, \overline{t}_U)$ também é um grupo pro-p 2-gerado. Então, o corolário 1.6.6 garante que $\overline{M}_U$ é um grupo pro-p no máximo 2-gerado. Desta forma, teremos dois subcasos: $\overline{M}_U$ 2-gerado ou $\overline{M}_U$ 1-gerado.

i) $\overline{M}_U$ 2-gerado.

Temos que $\widetilde{L}/\widetilde{U} = \langle L_m/\big(U \cap L_m\big) \big| m \in S \rangle$ e como $L_m/\big(U \cap L_m\big)$ é finito, obtemos que $\widetilde{L}/\widetilde{U}$ é gerado pelos elementos de torção de $L/\widetilde{U}$, ou seja, $\widetilde{L}/\widetilde{U} = \langle Tor(L/\widetilde{U}) \rangle$. Assim, $\widetilde{L}/\widetilde{U} \leq \langle M_U \rangle^{L/\widetilde{U}}$. Por hipótese, $L/\widetilde{L} \cong \mathbb{Z}_p$, então $\big(L/\widetilde{U}\big)/\big(\widetilde{L}/\widetilde{U}\big) \cong \mathbb{Z}_p$. Além disso,

$$\alpha : \big(L/\widetilde{U}\big)/\big(\widetilde{L}/\widetilde{U}\big) \longrightarrow \big(L/\widetilde{U}\big)/\langle M_U \rangle^{L/\widetilde{U}}$$

é um epimorfismo e $\big(L/\widetilde{U}\big)/\langle M_U \rangle^{L/\widetilde{U}} \cong \mathbb{Z}_p$. Portanto, α é um isomorfismo. Logo, $\widetilde{L}/\widetilde{U} = \langle M_U \rangle^{L/\widetilde{U}}$, ou seja,

$$\langle M_U \rangle^{L/\widetilde{U}} = \Big\langle Tor\big(L/\widetilde{U}\big) \Big\rangle. \qquad (\star)$$

Considerando $\overline{L/\widetilde{U}} = HNN\big(M_U/\langle Tor(M_U) \rangle, 1, t_U\big) = M_U/\langle Tor(M_U) \rangle \amalg \langle t_U \rangle$, temos um epimorfismo de $L/\widetilde{U}$ para $\overline{L/\widetilde{U}}$. Mas, pela Proposição 1.4.9, $M_U/\langle Tor(M_U) \rangle$ é um grupo pro-p livre. Assim, por $(\star)$ temos que a imagem de $\langle Tor(L/\widetilde{U}) \rangle$ em $M_U/\langle Tor(M_U) \rangle$ é trivial e, consequentemente, a imagem de M_U também é trivial. Portanto, $\big(M_U/\langle Tor(M_U) \rangle\big) = 1$, ou seja, $M_U = \langle Tor(M_U) \rangle$. Logo, $M_U = \widetilde{M}_U$, pois M_U age sobre a árvore $S/\widetilde{U}$ e como $M_U = \langle Tor(M_U) \rangle$, obtemos a igualdade. Então, $M_U = \widetilde{M}_U$ e

$$M = \varprojlim \overline{M}_U = \varprojlim M_U = \varprojlim \widetilde{M}_U = \widetilde{M}.$$

Desta forma, pelo 1º caso obtemos que $M = F(x, y)$ é um grupo pro-p livre 2-gerado. Sendo assim, $L = HNN(M, C, t) = HNN\big(F(x, y), C, t\big)$. Portanto, se o subgrupo $\langle C, C^t \rangle \neq F(x, y)$ então, pelo Lema 1.6.7, L é 3-gerado, o que é um absurdo, pois, por hipótese, L é 2-gerado. Sendo assim, $\langle C, C^t \rangle = F(x, y)$. Então

$$L = \langle C, C^t, t \mid t^{-1}Ct = C^t \rangle = \langle C, t \mid \quad \rangle.$$

Logo, L é um grupo livre.

ii) $\overline{M}_U$ 1-gerado.

Então $\varprojlim \overline{M}_U = \mathbb{Z}_p$ e, portanto, $L = HNN(C, C, t)$. Mas, $(\mathbb{Z}_p)^t \leq C$, então t normaliza C que também é $\mathbb{Z}_p$. Logo,

$$L = HNN(C, C, t) \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p.$$

O que não pode acontecer pelo Lema 1.8.6, o que conclui a demonstração.

$\square$

Referências Bibliográficas

[B-62] Baumslag, G., *On generalised free products*, Mathematische Zeitschrift, **78** (1962) 423-438.

[H-Z-07] Herfort, W., Zalesskii, P. A., *Virtually Free Pro-p groups*, preprint, 2007.

[J-90] Johnson, D. L., *Presentations of Groups*, London Mathematical Society, Student Texts, 15, 1990.

[L-S-77] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 19977.

[R-71] Ribes, L., *On Amalgamated Products of Profinite Groups*, Math. Z., **123** (1971) 357-364.

[R-Z-00] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *Profinite Groups*, Springer-Verlag, Vol. 40, Berlin, 2000.

[R-Z-92] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *On the Profinite Topology of a Free Group*, Bull. London Math. Soc., **25** (1993) 37-43.

[R-Z-96] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *Conjugacy Separability of Almagamated Free Products of Groups*, Journal of Algebra, **179** (1996) 751-774.

[Ri-Za-00] Ribes, L., Zalesskii, P. A., *Pro-p Trees and Applications*, New Horizonts in pro-p Groups, **PM 184** (2000) 75-119.

[S-77] Serre, J. P., *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 1977.

[W-98] Wilson, J. S., *Profinite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1998

[Za-04] Zalesskii, P. A., *On Virtually projective groups,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **572** (2004) 97-110.

[Z-92] Zalesskii, P. A., *Open Subgroups of Free Profinite Products,* Contemporary Mathematics, **131** (1992) 473-491.

[Z-M-89] Zalesskii, P. A., Mel'nikov, O. V., *Subgroups of Profinite Groups Acting on Trees*, Math. USSR Sbornik, Vol.**63** (1989) 405-424.