

Universidade de Brasília – Instituto de Física

Estudo, utilizando a mecânica quântica, das propriedades dielétricas e do efeito da blindagem dinâmica na taxa de aquecimento de plasmas macroscópicos

por

Adameck de França Guimarães

Orientador: Prof^o Dr. Antonio Luciano de A. Fonseca

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos Requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Brasília, Dezembro de 2006.

Adameck de França Guimarães

Estudo, utilizando a mecânica quântica, das propriedades dielétricas e do efeito da blindagem dinâmica na taxa de aquecimento de plasmas macroscópicos

Orientador: Prof^o Dr. Antonio Luciano de A. Fonseca

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos Requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Brasília, Dezembro de 2006.

Instituto de Física – Universidade de Brasília

Aos meus Pais

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus Pais pelo apoio e constante incentivo à elaboração desse trabalho.

Agradeço também a minha esposa Janieire e a meu filho Christian pela compreensão e incentivos nas horas que fiquei dedicado procurando finalizar esse trabalho.

Muito tenho a agradecer a meu orientador Prof^o Luciano, pelo apoio na elaboração desse trabalho permitindo o uso do espaço físico e computadores do Laboratório de Cálculo Científico de Nanoestruturas.

Agradeço também aos Profs^o Cleves e Amato pelas colaborações no decorrer da produção deste trabalho.

Aos meus colegas David de Miranda Fonseca e Célio Galante, meu muito obrigado pelas colaborações e incentivos na elaboração desta Tese de Doutorado.

Agradeço também aos meus colegas da equipe de Física do Colégio Militar de Brasília, especialmente a Cláudia, Thiago, João Batista, Alexandre, Ronan e Francisco, pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao Colégio Militar de Brasília, nas pessoas do Comandante do Colégio Cel. Pithan, Chefe da DE Cel. Bandeira e o Chefe do PREVEST Cap. Machado pelo apoio à realização deste trabalho.

RESUMO

Do ponto de vista da Mecânica-Quântica foram investigados as propriedades dielétricas e o comportamento das oscilações coletivas (plasmons), para plasmas macroscópicos submetidos à ação de campos de radiação eletromagnética. Para plasmas não magnetizados, encontraram-se modulações nas propriedades dielétricas e frequências de plasmons em regime de ondas evanescentes. Nesse regime, o amortecimento de Landau sofre modulações que conduzem a instabilidades. Para plasmas magnetizados, foram encontradas intensas modulações nas propriedades dielétricas e nas frequências de plasmons, em regime de ondas circularmente polarizadas. Na ressonância eletrociclôtrônica, foram encontrados os harmônicos ciclôtrônicos. Foram investigados também, os efeitos do potencial de blindagem dinâmica, nas taxas de aquecimento de um plasma magnetizado, submetido à ação de dois campos de radiação eletromagnética. Observa-se a relação quadrática com relação às intensidades dos campos de radiação em contraste com a relação linear quando os efeitos de blindagem dinâmica não são levados em consideração.

ABSTRACT

From the Quantum-Mechanical viewpoint the dielectric properties and collective oscillations' behavior were investigated for macroscopic plasmas submitted to electromagnetic radiation fields. For non-magnetized plasmas, modulations of dielectric properties and plasmons' frequencies were found out in the regime of evanescent waves. In this regime, Landau's damping term undergoes modulations, which leads to instabilities. For magnetized plasmas, strong modulations of dielectric properties and plasmons' frequencies were found out, in the regime of circularly polarized waves. In the cyclotron resonance condition the harmonics of electron cyclotron frequency were found out. In addition, the effects of dynamical screening on heating energy rate were investigated for magnetized plasma submitted to two electromagnetic radiation fields. It has observed the quadratic relation with radiation field's intensity against linear relation when the effects of dynamical screening are not considered.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	4
CAPÍTULO 1 -PROPRIEDADES GERAIS DOS PLASMAS.....	10
1.1 DEFINIÇÃO DE PLASMA	10
1.2 COMPORTAMENTO COLETIVO	12
1.3 NEUTRALIDADE MACROSCÓPICA E BLINDAGEM DE DEBYE	12
1.4 CRITÉRIOS PARA O PLASMA	15
1.5 OSCILAÇÕES ELETROSTÁTICAS EM UM PLASMA (OSCILAÇÕES COLETIVAS).....	16
1.5.1 A função dielétrica para um plasma macroscópico sob o ponto de vista clássico.....	17
1.5.2 A função dielétrica para um plasma macroscópico sob o ponto de vista quântico	21
CAPÍTULO 2 - MODULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DE UM PLASMA NÃO MAGNETIZADO SOB A AÇÃO DE UM CAMPO DE RADIAÇÃO.....	29
2.1 CÁLCULO DA FUNÇÃO DIELÉTRICA	29
2.2 CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS DE OSCILAÇÕES COLETIVAS	38
2.3 RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA UMA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO MAXWELLIANA.....	41
CAPÍTULO 3 - MODULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DE UM PLASMA MAGNETIZADO SOB A AÇÃO DE UM CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA EM REGIME DE ONDAS CIRCULARMENTE POLARIZADAS.	47
3.1 CAMPO MAGNETOSTÁTICO PARALELO AO COMPONENTE ELÉTRICO (CAMPO ELÉTRICO) DEPENDENTE DO TEMPO.....	47
3.2 CAMPO MAGNETOSTÁTICO ORTOGONAL AO COMPONENTE ELÉTRICO (CAMPO ELÉTRICO) DEPENDENTE DO TEMPO.....	49
3.2.1 Cálculo da função dielétrica.....	49
3.2.2 Cálculo das frequências de oscilações coletivas.....	62
3.2.3 Regime de ressonância eletrociclôtrônica	64
CAPÍTULO 4- POTENCIAL DE BLINDAGEM DINÂMICA EM UM PLASMA MAGNETIZADO SUBMETIDO A DOIS CAMPOS DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA.	65
4.1 CÁLCULO DO POTENCIAL DE CARGA ESTÁTICA E A CONSTANTE DIELÉTRICA EFETIVA	66
4.2 CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS DE OSCILAÇÕES COLETIVAS	71
4.3 TAXA DE AQUECIMENTO	74
CAPÍTULO 5-RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	77
5.1 MODULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DE UM PLASMA NÃO MAGNETIZADO SOB A AÇÃO DE UM CAMPO DE RADIAÇÃO.	77

5.2	MODULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DIELÉTRICAS DE UM PLASMA MAGNETIZADO SOB A AÇÃO UM CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA EM REGIME DE ONDAS CIRCULARMENTE POLARIZADA.....	83
5.3	POTENCIAL DE BLINDAGEM DINÂMICA EM UM PLASMA MAGNETIZADO SUBMETIDO A DOIS CAMPOS DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	87
	CONCLUSÃO.....	92
	REFERÊNCIA.....	97
	APÊNDICE A.RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO CAPÍTULO 2.....	100
	APÊNDICE B.RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO CAPÍTULO 3.....	102

SUMÁRIO DAS FIGURAS

FIGURA I.1: PLASMA CONFINADO MAGNETICAMENTE EM TOKAMAK	5
FIGURA 1.1 GRÁFICO DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA OSCILAÇÕES COLETIVAS.....	27
FIGURA 2.1 GRÁFICO RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UM PLASMA NÃO MAGNETIZADO.	29
FIGURA 2.2: COMPONENTE ELÉTRICO (CAMPO ELÉTRICO) DA RADIAÇÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X.	31
FIGURA 3.1: COMPONENTE ELÉTRICO (CAMPO ELÉTRICO) DA RADIAÇÃO PARALELO AO CAMPO MAGNETOSTÁTICO. ONDA ELETROMAGNÉTICA ORDINÁRIA.	47
FIGURA 3.2: COMPONENTE ELÉTRICO (CAMPO ELÉTRICO) DA RADIAÇÃO ORTOGONAL AO CAMPO MAGNETOSTÁTICO.	49
FIGURA 3.3: GRÁFICO DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA ONDAS L (VERMELHO) E ONDAS R (PRETO).	50
FIGURA 5.1: GRÁFICO DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA OS MODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA (PLASMONS) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA (PONTO AZUL) E PLASMA QUENTE (LINHA VERMELHA) COMO UMA FUNÇÃO DO NÚMERO DE ONDA Q PARA UMA AMPLITUDE E FREQUÊNCIA DE ONDA ELETROMAGNÉTICA RESPECTIVAMENTE: E $= 10 \text{ Vm}^{-1}$ E $\omega = 3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$	78
FIGURA 5.2: GRÁFICO DAS FREQUÊNCIAS DOS MODOS DE OSCILAÇÕES COLETIVAS COMO FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA (ω) E DA AMPLITUDE (E) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA.	79
FIGURA 5.3: GRÁFICO DAS FREQUÊNCIAS PARA OS MODOS DE OSCILAÇÕES COLETIVAS EM FUNÇÃO DA AMPLITUDE DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA (E) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA PARA TRÊS FREQUÊNCIAS DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA: $\omega_1 = 1 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (PRETO), $\omega_2 = 2 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (VERDE) E $\omega_3 = 3 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (VERMELHO).....	80
FIGURA 5.4: GRÁFICO DAS FREQUÊNCIAS DOS MODOS DE OSCILAÇÕES COLETIVAS COMO FUNÇÃO DA AMPLITUDE DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA (E) PARA UM PLASMA QUENTE (VERDE), PLASMA DE DESCARGA GASOSA (PRETO) E PLASMA MORNO (VERMELHO). FREQUÊNCIA DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA: $\omega = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$	81
FIGURA 5.5 GRÁFICO DOS TERMOS DE LANDAU COM MODULAÇÃO (VERMELHO) E SEM MODULAÇÃO (PRETO) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA COM COMPRIMENTO DE DEBYE DA ORDEM DE $7 \times 10^{-7} \text{ m}$	82
FIGURA 5.6: GRÁFICO DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO PARA OS MODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA (PLASMONS) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA COMO UMA FUNÇÃO DO NÚMERO DE ONDA Q PARA AMPLITUDES 1 Vm^{-1} (PRETO), 10 Vm^{-1} (VERMELHO) E 50 Vm^{-1} (AZUL).	84
FIGURA 5.7: GRÁFICO DA RELAÇÃO $\Omega_{q,\lambda} / \omega_c$ PARA OS MODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA (PLASMONS) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA COMO UMA FUNÇÃO DO NÚMERO DE ONDA Q PARA AMPLITUDE $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$. COM CAMPOS MAGNÉTICOS DE VALORES 2T (PRETO), 3T (VERMELHO) E 5T (AZUL).	84
FIGURA 5.8: GRÁFICO DA RELAÇÃO $\Omega_{q,\lambda} / \omega_c$ PARA OS MODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA (PLASMONS) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA (PRETO), PLASMA MORNO (VERMELHO) E PLASMA QUENTE (AZUL) COMO UMA FUNÇÃO DO NÚMERO DE ONDA Q PARA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA COM AMPLITUDE DE 100 Vm^{-1} E UM CAMPO MAGNÉTICO DE 5T.....	85

FIGURA 5.9: GRÁFICO DA RELAÇÃO $\Omega_{q,\lambda}$ x B PARA OS MODOS DE OSCILAÇÃO COLETIVA (PLASMONS) PARA UM PLASMA DE DESCARGA GASOSA (AZUL), PLASMA MORNO (VERMELHO) E PLASMA QUENTE (VERDE) PARA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA COM AMPLITUDE DE 100Vm^{-1} E NÚMERO DE ONDA DA ORDEM DE $10^{-2} - 10^0 \text{m}^{-1}$	86
FIGURA 5.10: GRÁFICO DA TAXA DE AQUECIMENTO DE UM PLASMA QUENTE COMO FUNÇÃO DA INTENSIDADE DO SEGUNDO CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA. O PRIMEIRO CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA FOI MANTIDO FIXO 10^{12}Wm^2 (LASER MODERADO). OS BAIXOS VALORES DA TAXA DE AQUECIMENTO SE DEVEM AOS EFEITOS DE BLINDAGEM PARA $\Delta\omega$ ESTAR AFASTADO DE Ω_{pe}	88
FIGURA 5.11: GRÁFICO DA TAXA DE AQUECIMENTO DE UM PLASMA QUENTE COMO FUNÇÃO DA INTENSIDADE DO SEGUNDO CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA. O PRIMEIRO CAMPO DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA FOI MANTIDO FIXO 10^{12}Wm^2 (LASER MODERADO). OS ELEVADOS VALORES DA TAXA DE AQUECIMENTO SE DEVEM AO COLAPSO DOS EFEITOS DE BLINDAGEM PARA $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$	89
FIGURA 5.12: GRÁFICO DA TAXA DE AQUECIMENTO PARA UM PLASMA QUENTE COMO FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA DA PLASMA (OU DENSIDADE). AS DUAS INTENSIDADES I_1 E I_2 E $\Delta\omega$ ESTÃO FIXOS. OS ELEVADOS VALORES DA TAXA DE AQUECIMENTO REFLETEM O COLAPSO NA BLINDAGEM.	90
FIGURA 5.13: GRÁFICO DO QUOCIENTE R COMO FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA DE PLASMA (OU DENSIDADE). AS INTENSIDADES DOS DOIS CAMPOS DE RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA I_1 E I_2 , E $\Delta\omega$ ESTÃO FIXOS. OS ELEVADOS VALORES DE R (GANHO) REFLETEM O COLAPSO DA BLINDAGEM PARA $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$	91

LISTAS DE VARIÁVEIS

φ	Potencial coulombiano.
e	Carga elementar (SI).
n_e	Densidade dos elétrons.
n_s	Densidade dos íons do tipo "s".
$f(v)$	Função de distribuição.
k_B	Constante de Boltzmann.
T_e	Temperatura dos elétrons.
T_s	Temperatura dos íons.
$\lambda_{D,e}$	Comprimento de Debye para os elétrons.
$\lambda_{D,s}$	Comprimento de Debye para os íons.
E	Campo elétrico (SI).
ω_{pe}	Frequência de plasma (SI).
τ	Tempo médio de colisões entre dos elétrons.
μ	Densidade de carga.
\vec{j}	Densidade de corrente.
q	Carga elétrica.
\vec{v}	Velocidade.
\vec{B}	Vetor indução magnética (Campo magnético) (SI).
\vec{k}	Vetor número de ondas para ondas longitudinais.
ω	Frequência das ondas longitudinais.
ϵ	Função dielétrica.
H	Hamiltoniano.
\hbar	Constante de Planck/ 2π (SI).
$\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t)$	Função de onda da partícula no estado \vec{k} .

LISTAS DE VARIÁVEIS

$\varepsilon_{\vec{k}}$	Energia da partícula no estado \vec{k} .
$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$	Flutuação na densidade de carga.
$\rho(\vec{r}, t)$	Flutuação total na densidade de carga.
$\Pi(\vec{q}, \Omega)$	Polarizabilidade eletrônica.
\vec{q}	Número de onda das ondas longitudinais.
Ω	Frequência das ondas longitudinais.
φ_{ind}	Potencial induzido.
φ_{ext}	Potencial externo.
δ	Penetração de ondas eletromagnéticas em plasmas (Skin depth)..
$\vec{A}(t)$	Potencial vetor.
U	Operador de transformação unitária.
$\vec{\alpha}(t)$	Gerador de translação de momento.
$\vec{\beta}(t)$	Gerador de translação de posição.
$\eta(t)$	Fator de Fase.
m_e	Massa do elétron (SI).
ω	Frequência da radiação eletromagnética (SI).
ε_γ	Energia de acoplamento do elétron com a radiação eletromagnética.
$\sigma(\omega)$	Condutividade elétrica.
B_0	Campo magnetostático.
ω_c	Frequência eletrociclôtrônica (SI).
n	Estado quântico dos níveis de Landau.
c_α^\dagger	Operador de criação.
c_α	Operador de destruição.

LISTAS DE VARIÁVEIS

$$V(\vec{r} + \vec{\beta}(t))$$

Potencial deslocado.

$$P(\alpha \rightarrow \alpha')$$

Amplitude de transição.

$$P_i(\alpha \rightarrow \alpha')$$

Probabilidade de transição por unidade de tempo.

$$\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt}$$

Taxa de absorção de energia.

Introdução

No ano de 1929, Tonks e Langmuir [1] estudavam as oscilações em gases ionizados e observaram que os íons positivos se comportavam com uma "gelatina rígida" à medida que os elétrons oscilavam. Um comportamento um tanto parecido com o sangue humano, onde corpúsculos se movem através do plasma sanguíneo. É possível então que a partir dessa analogia, os dois pesquisadores tenham usado o termo plasma, para designar a porção do gás, que apresentava elevadas densidades de íons e elétrons substancialmente iguais. Nesse mesmo ano, Tonks e Langmuir desenvolveram uma teoria para explicar o comportamento desse gás [2]. Com isso, surgiu uma nova área na Física, a Física dos Plasmas.

No decorrer dos anos, muitos pesquisadores desenvolveram estudos em Física dos Plasmas, especificamente na investigação de propagação de ondas longitudinais em plasmas não magnetizados e magnetizados descritos nas referências [3,4]. Na referência [3] o autor deixa entender que ocorre amortecimento de ondas longitudinais que se propagam perpendicularmente ao campo magnético com comprimento de ondas menores do que os comprimentos de Debye (definido no cap. 1). Porém, em um trabalho desenvolvido por Bernstein [5], foi demonstrado que ondas longitudinais podem se propagar para uma dada direção com o campo magnetostático sem sofrer amortecimento. Em 1968, Gruber e Bekefi [6] estudaram experimentalmente a excitação de ondas longitudinais em plasmas magnetizados. Guiados pelos resultados teóricos de Bernstein, esses pesquisadores provaram a existência de propagação de ondas longitudinais na direção perpendicular ao campo magnetostático. Neste mesmo ano, Walters e Harris [7] estudaram os fenômenos não lineares em plasmas intensamente magnetizados sob a teoria da

Introdução

Mecânica-Quântica, onde a possibilidade de ocorrência de instabilidades foi interpretada como emissão ou absorção de plasmons por partículas energéticas.

Dentro da área de Física dos Plasmas, um dos assuntos mais frequentemente abordados se refere à fusão termonuclear. Para esse processo, utiliza-se plasma confinado magneticamente em Tokamak (fig.I.1). Um dos mecanismos para se obter este tipo de reação, se dá por meio das interações da radiação eletromagnética com o plasma. A partir disto, vários estudos envolvendo esses tipos de interações foram desenvolvidos [8-10]. Um dos mecanismos para a absorção rápida de energia da radiação eletromagnética é o processo via Bremsstrahlung inverso [9]. Durante esse processo, o elétron do plasma ganha energia do campo de radiação eletromagnética, absorvendo os fótons do campo de radiação durante a colisão com o núcleo. Foi demonstrado que o modo mais eficiente de aquecimento de plasma via Bremsstrahlung inverso é submeter o plasma a dois campos de radiação eletromagnética, no caso, um forte e outro fraco [11]. Com isso, a taxa de absorção não decresce, o que ocorre com a incidência de apenas um campo de radiação eletromagnética. Na presença de campo magnetostático, foi demonstrado que ao submeter o plasma a dois campos de radiação eletromagnética, um forte e outro fraco, a eficiência do aquecimento aumenta [12]. Existe na literatura uma ampla quantidade de títulos referentes a interação de plasma com radiação eletromagnética [13-27].

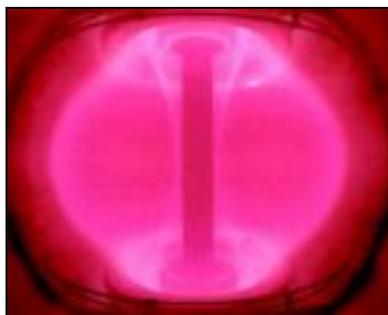


Figura I.1: Plasma confinado magneticamente em Tokamak

Introdução

Outro problema interessante que foi alvo de estudo se refere ao efeito de blindagem coulombiana no processo de aquecimento via bremsstrahlung inverso na presença de dois campos de radiação eletromagnética [16,21,27]. Foi demonstrado [27] que apesar dos efeitos de blindagem realmente diminuírem as interações coulombianas, essa pode realizar uma redução de efeitos mais fracos, pela utilização de dois campos de radiação eletromagnética cujas frequências diferem em um valor próximo do valor da frequência de plasma. Esse colapso na blindagem para esse regime de frequência acentua intensamente a contribuição do aquecimento do plasma via bremsstrahlung inverso.

No que concerne a interação de radiação eletromagnética com o plasma, foi considerado recentemente, o aquecimento de um de plasma por campos intensos de radiações eletromagnéticas [28]. Onde foi demonstrado que o aquecimento do plasma é dominado por processos de absorções ressonantes não lineares envolvendo transições energéticas de elétrons através do aglomerado na presença de campos de radiações e resultando no início da absorção de campos de radiações eletromagnéticas. Processos de resposta de um plasma (constante dielétrica) a ondas eletromagnéticas (microondas e radiofrequências) em um plasma de Tokamak também foram alvos de estudos [29,30].

Todos esses estudos envolvendo plasmas, principalmente estudos envolvendo a interação de plasma com radiações eletromagnéticas, serviram de inspiração para o desenvolvimento desta Tese de Doutorado. Procuramos estudar nesta tese, os efeitos da incidência de campos de radiação eletromagnética na função (constante) dielétrica de plasmas não magnetizados e plasmas magnetizados. Estudamos também os efeitos de radiações eletromagnéticas no regime de colapso da blindagem no aquecimento do plasma magnetizados via bremsstrahlung inverso.

Embora plasmas macroscópicos sejam tratados como sistemas clássicos, ou seja, efeitos quânticos são nesse caso irrelevantes, utilizamos a Mecânica Quântica (MQ) como ferramenta de

Introdução

análise desses plasmas. Foi demonstrado nos trabalhos desenvolvidos por Pines e Schrieffer [31] e Wyld e Pines [32] a possibilidade de aplicação do formalismo da MQ a plasmas clássicos. No primeiro caso foi proposta uma dedução mecânico-quântico de equações clássicas quase lineares para plasmas. No segundo caso foram escritas equações para a taxa de variação das funções distribuição de partículas devido às colisões. Estes trabalhos demonstraram a facilidade com que equações descrevendo plasmas clássicos (macroscópicos) poderiam ser deduzidas por fórmulas de teoria de perturbação da MQ utilizando-se o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$).

A aplicação do formalismo da MQ possui algumas vantagens em relação ao tratamento clássico. Com esse tratamento quântico, é possível observar alguns efeitos que não aparecem diretamente quando se usa a equação de Vlasov. Em muitos casos os cálculos são mais diretos e menos laboriosos que os correspondentes clássicos, além disso, o estudo do comportamento de um plasma do ponto de vista da MQ apresenta mais facilidade quando a complexidade do sistema aumenta, como em problemas envolvendo interações não lineares [7, 33, 34].

Utilizando o formalismo da MQ [9,13,14,18,19,21-25,27,34] podemos calcular a função de onda de um elétron na presença de um campo de radiação eletromagnética, como ondas planas na aproximação de dipolo, utilizando uma transformação unitária [16,17]. Com isso podemos calcular a flutuação na densidade de carga devido a um potencial local com o uso da teoria de perturbação temporal [35-37]. Com a equação de Poisson [38,39] podemos determinar a constante dielétrica do plasma e assim, utilizando a relação de dispersão [40-42] determinamos então o espectro das oscilações coletivas do plasma. Para o cálculo da blindagem dinâmica, podemos, a partir da constante dielétrica, determinar a função dielétrica efetiva e assim aplicarmos na equação da taxa de aquecimento.

Portanto, trataremos o plasma dentro do formalismo da MQ, por se mostrar mais direto do que seu correspondente clássico. Com isso, fica essa presente tese organizada como segue:

Introdução

No capítulo 1 apresentamos brevemente, o conceito e os critérios de plasma, seções 1.1 até 1.4. Calculamos a constante dielétrica (função dielétrica) classicamente e quanticamente, e mostramos que os dois formalismos conduzem ao mesmo resultado seção 1.5.

No capítulo 2 calculamos a função dielétrica para um plasma não magnetizado submetido a um campo de radiação eletromagnética evanescente, seção 2.1, dentro do formalismo da MQ. Dentro do limite clássico, calculamos o espectro das oscilações coletivas e constatamos que o mesmo se encontra modulado devido à incidência do campo de radiação eletromagnética, seção 2.2. Na seção 2.3, calculamos o termo de Landau, parte imaginária das soluções da relação de dispersão para ondas longitudinais. Encontramos valores positivos para esse termo, demonstrando assim que podem ocorrer instabilidades no plasma submetido ao regime de ondas referido anteriormente.

No capítulo 3 calculamos a função dielétrica para um plasma magnetizado submetido a um campo de radiação eletromagnética com o componente elétrico paralelo ao campo magnético externo, seção 3.1, onde constatamos, como era esperado, não haver diferença ao caso que foi estudado no capítulo 2. Em seguida, com um campo de radiação eletromagnética em regime de ondas circularmente polarizada a direita, seção 3.2, calculamos a constante dielétrica do plasma magnetizado, subseção 3.2.1, determinamos o espectro das oscilações coletivas, subseção 3.2.2 e verificamos uma modulação que conduz a uma atenuação das referidas frequências até o valor da frequência eletrociclôtrônica. E encontramos os harmônicos em regime de ressonância, subseção 3.2.3.

No capítulo 4 calculamos o potencial de carga estática e a constante dielétrica efetiva, seção 4.1. Encontramos o espectro das oscilações coletivas, seção 4.2 e calculamos a taxa de aquecimento na seção 4.3.

Introdução

No capítulo 5 apresentamos os cálculos numéricos e discussões referentes aos resultados teóricos dos capítulos anteriores, a saber: 2, 3 e 4 nas seções 5.1, 5.2 e 5.3 respectivamente.

Finalizamos esse trabalho com as conclusões finais e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 1 - Propriedades Gerais dos Plasmas

1.1 Definição de plasma

A matéria (não escura) existente no Universo é basicamente classificada em quatro estados, a saber: sólido, líquido, gasoso e plasma. A diferença entre os estados sólido, líquido e gasoso reside na força de agregação (potencial de ligação) entre as partículas que compõe o sistema. Aquecendo um sistema que se encontra no estado sólido ou líquido, suas partículas adquirirão mais energia cinética até ser possível vencer o potencial de ligação que as uniam, ocorrendo então, uma transição de fase (p.ex.: líquido \rightarrow gasoso). As transições de fase ocorrem essencialmente à temperatura constante. Se mais energia térmica for fornecida para o sistema, as moléculas desse poderão se dissociar tornando-se um gás de átomos, resultado das colisões que ocorrem entre as partículas com energia térmica superior ao potencial de ligação molecular. À temperaturas extremamente elevadas, devido às colisões, é possível então obtermos um gás ionizado, ou *plasma*. Mas a transição que ocorre do estado gasoso para plasma não é propriamente uma transição de fase, pois a mesma ocorre com variação de temperatura. Como o estado de plasma possui propriedades distintas dos outros três estados, ele é considerado o quarto estado da matéria.

Existem ainda outras formas de se produzir plasmas, especialmente em laboratório. Dependendo do método utilizado para a produção do plasma, esse poderá ter uma densidade alta ou baixa, uma temperatura alta ou baixa dentre outras características. Um dos métodos utilizados é a fotoionização [40]. Nesse processo a ionização ocorre na absorção, por parte das partículas que compõe o sistema, de fótons incidentes que possuem energia igual, ou até maior, do que o potencial de ionização das referidas partículas. O excesso de energia do fóton incidente é transferido, na forma de energia cinética, para os íons e elétrons produzidos no sistema. Pode-se

Capítulo 1

produzir plasma com fótons de raios X ou raios gama, que possuem comprimentos de ondas muito pequenos. O plasma existente na ionosfera terrestre é um exemplo de produção pelo processo de fotoionização. Outro processo que podemos citar é a descarga gasosa [40]. Nesse processo, um campo elétrico é aplicado para ionizar o gás por meio de uma avalanche eletrônica. Dessa forma os elétrons livres são acelerados e com isso pode-se aumentar o grau de ionização do gás, por meio de colisões com outros átomos. Como característica desse processo podemos destacar a forma com que a energia do campo elétrico é transferida eficientemente para os elétrons, por serem mais leves do que os íons. A temperatura dos elétrons em uma descarga gasosa é bem mais alta do que a dos íons, uma vez que a transferência de energia dos elétrons para os íons ocorre de forma muito lenta (na verdade essa transferência é pouco eficiente devido a grande massa dos íons).

Outro aspecto a ser ressaltado é a emissão de radiação por parte do plasma. Os mecanismos que causam essa emissão podem ser classificados em duas categorias, a saber: Emissão de radiação por átomos e moléculas que compõe o sistema e emissão pelas partículas carregadas submetidas a acelerações. Em um plasma, à medida que ocorrem ionizações o processo oposto também ocorre, ou seja, a recombinação dos íons com os elétrons para formar partículas neutras. Como resultado desse processo, radiações são emitidas quando as partículas no seu estado excitado atingem o estado fundamental. Essas radiações formam o espectro do plasma. Por outro lado, as partículas carregadas de um plasma quando são aceleradas emitem radiações. Quando a partícula carregada sofre uma desaceleração devido a um processo de colisão, essa emite uma radiação que é denominada *bremstrahlung* [40,43]. As emissões eletrociclônicas ocorrem na presença de um campo magnético, devido a aceleração centrípeta experimentada pelas partículas carregadas.

Embora o plasma seja um gás quase que em sua totalidade ionizado, nem todo gás ionizado é um plasma. Um plasma é um gás que possui uma característica de quaseneutralidade e partículas carregadas e neutras que exibem um comportamento coletivo.

1.2 Comportamento coletivo

Observamos, em um plasma, partículas neutras, positivas e negativas. Essas partículas possuem energia cinética elevada, devido às altas temperaturas. As partículas positivas de um plasma são íons e as partículas negativas são elétrons. Os elétrons, por serem mais leves, possuem mais mobilidade do que os íons. Portanto teremos colisões entre todos os tipos de partículas, e os íons e as partículas neutras movendo-se lentamente em relação aos elétrons. O plasma, neste aspecto, possui um comportamento de fluido. Mas muitas partículas estão carregadas e são capazes de interagir entre si mesmo à distância por meio da força Coulombiana. E ainda ocorre a interação destas partículas com campos eletromagnéticos externos ou até mesmo com os campos gerados pelo movimentos das mesmas. Portanto o plasma exibe ambos comportamentos: de fluido e de um conjunto de partículas carregadas.

Como as partículas carregadas de um plasma estão em movimento, podemos encontrar regiões dentro do plasma com densidade de partículas positivas e também negativas. Sabemos, pela Lei de Coulomb, que a força de interação entre essas duas regiões diminui com $1/r^2$. Porém, mesmo para grandes distâncias ocorre interação entre as regiões com partículas carregadas. Portanto, uma perturbação local pode afetar o movimento das partículas carregadas em regiões muito afastadas de um plasma.

1.3 Neutralidade Macroscópica e Blindagem de Debye

Na ausência de campos externos o plasma é, macroscopicamente, neutro. Ou seja, no equilíbrio, em um volume do plasma suficientemente grande, onde a quantidade de partícula é

Capítulo 1

muito grande e o tamanho dessas partículas é muito pequeno se comparado com qualquer comprimento relacionado a variação de densidade e temperatura, a carga líquida total é zero. Isso é que podemos chamar de quaseneutralidade (neutralidade macroscópica).

Porém, mesmo exibindo esse comportamento de quaseneutralidade o plasma pode blindar um potencial elétrico aplicado localmente. Se inserirmos, por exemplo, uma pequena esfera carregada no plasma, partículas de sinais opostos formarão uma "nuvem" ao redor desta esfera.

Vamos tomar a equação de Poisson [38,39], para calcular o potencial de blindagem.

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \left[(n_{e,0} - n_e) + \sum_s Z_s (n_s - n_{s,0}) \right]. \quad (1.1)$$

Estamos assumindo que temos várias tipos de íons onde cada um possui uma temperatura T_s e carga $Z_s e$, e n_e e n_s são as densidades dos elétrons e dos íons do tipo "s" respectivamente. Para um plasma livre de campos externos, podemos assumir que as densidades não perturbadas são tais que:

$$n_{e,0} = \sum_s Z_s n_{s,0}. \quad (1.2)$$

Na presença de um potencial externo, a função Maxwelliana assume a seguinte forma:

$$f(v) = A \exp \left[- \left(\frac{m_e v^2}{2k_B T} + \frac{e\varphi}{k_B T} \right) \right]. \quad (1.3)$$

Onde, $A = n_e \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$ e k_B é a constante de Boltzmann. Integrando $f(v)$ e assumindo que

$n_e(\varphi = 0) \cong n_{e,0}$ teremos:

$$n_e = n_{e,0} \exp \left(\frac{e\varphi}{k_B T_e} \right). \quad (1.4)$$

De forma semelhante, teremos também

Capítulo 1

$$n_s = n_{s,0} \exp\left(-\frac{Z_s e \varphi}{k_B T_s}\right). \quad (1.5)$$

Substituindo esses resultados na eq.(1.1), teremos:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \left\{ n_{e,0} \left[1 - \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \right] + \sum_s Z_s n_{s,0} \left[\exp\left(-\frac{Z_s e \varphi}{k_B T_s}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (1.6)$$

Para regiões do plasma onde $\left| \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right| \ll 1$ (de forma semelhante para todos os tipos "s" de íons),

podemos expandir a exponencial numa série de Taylor[44-46]:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \left\{ n_{e,0} \left(-\frac{e\varphi}{k_B T_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{e\varphi}{k_B T_e} \right)^2 - \dots \right) + \sum_s n_{s,0} \left(-\frac{Z_s e \varphi}{k_B T_s} + \frac{1}{2} \left(\frac{Z_s e \varphi}{k_B T_s} \right)^2 - \dots \right) \right\}. \quad (1.7)$$

Vamos considerar apenas os termos lineares em φ . Portanto, teremos:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi e^2 n_{e,0}}{k_B T_e} \varphi + \sum_s \frac{4\pi e^2 n_{s,0} Z_s}{k_B T_s} \varphi \quad (1.8)$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \varphi = \lambda_D^{-2} \varphi. \quad (1.9)$$

Onde

$$\lambda_D^{-2} = \lambda_{D,e}^{-2} + \sum_s \lambda_{D,s}^{-2}. \quad (1.10)$$

Na eq.(1.10), $\lambda_{D,e}$ e $\lambda_{D,s}$ são os comprimentos de Debye para os elétrons e para os íons respectivamente, expressos por:

$$\lambda_{D,e}^2 = \frac{k_B T_e}{4\pi n_{e,0} e^2} \quad \text{e} \quad \lambda_{D,s}^2 = \frac{k_B T_s}{4\pi Z_s n_{s,0} e^2}. \quad (1.11)$$

Para que um gás ionizado seja considerado plasma, é necessário que ele seja denso o bastante para que suas dimensões (L) obedeçam a seguinte relação:

Capítulo 1

$$\lambda_D \ll L. \quad (1.12)$$

O número " N_D " de partículas dentro da blindagem de Debye (esfera de Debye) pode ser calculado assumindo como raio da esfera o comprimento de Debye:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3. \quad (1.13)$$

Onde $n_{e,0} \cong n_{s,0} \cong n$, com " n " sendo chamado comumente de densidade do plasma. Assumindo como verdadeira a relação expressa por (1.12), o comportamento coletivo requer:

$$N_D \gg 1. \quad (1.14)$$

1.4 Critérios para o plasma

Um outro aspecto que deve ser observado diz respeito às colisões. Alguns gases ionizados não são classificados propriamente como plasma porque suas partículas carregadas colidem freqüentemente com os átomos neutros. Assim seus movimentos não são propriamente determinados pelos campos eletromagnéticos.

Vamos considerar um plasma nas seguintes condições: a) livre da ação de campos magnéticos; b) os movimentos devido às temperaturas desprezíveis $k_B T \cong 0$; c) os íons estão praticamente fixos (em repouso) e uniformemente distribuídos; d) o plasma é infinitamente extenso e e) os elétrons movimentam-se unidimensionalmente (direção do eixo " x ", por exemplo). Consideremos agora um conjunto de elétrons que sofreu um deslocamento da sua posição inicial x para a posição $x + \alpha$. Utilizando a equação de Poisson, teremos para o campo elétrico devido a este deslocamento a relação:

$$E = 4\pi n e \alpha. \quad (1.15)$$

Para a equação de movimento do elétron (2ª lei de Newton), teremos:

$$m_e \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -eE. \quad (1.16)$$

Capítulo 1

Substituindo a eq.(1.15) na eq.(1.16), teremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_{pe}^2 \alpha = 0. \quad (1.17)$$

Onde,

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{1/2} \quad (1.18)$$

é a frequência de oscilação de elétrons do plasma, chamada simplesmente de frequência de plasma.

Considerando " ω_{pe} " e " τ " o tempo médio entre colisões dos elétrons, com átomos neutros, temos para um plasma que:

$$\omega_{pe} \tau > 1. \quad (1.19)$$

Isto é, a frequência de plasma é maior do que a frequência de colisões das partículas carregadas com os átomos neutros. Isto, então, garante que as forças de colisões (forças hidrodinâmicas) não determinarão o comportamento do plasma.

Assim temos as relações (1.12), (1.14) e (1.19) como critérios para que um gás ionizado seja classificado como um plasma.

1.5 Oscilações eletrostáticas em um plasma (Oscilações coletivas)

Consideremos um plasma em repouso, com íons quiescentes. Vamos obter uma expressão para a função dielétrica do plasma e com essa expressão teremos uma forma de obter a relação de dispersão para estudar as frequências de oscilações longitudinais (oscilações eletrostáticas ou oscilações coletivas) em um plasma. Primeiramente obteremos a função dielétrica do plasma classicamente, depois obteremos com o auxílio da ferramenta da mecânica quântica.

1.5.1 A função dielétrica para um plasma macroscópico sob o ponto de vista clássico

Classicamente, podemos definir função de distribuição, de tal forma que essa fornecerá o número de partículas em um elemento de volume entre x e $x + dx$, y e $y + dy$, z e $z + dz$ e com velocidades entre v_x e $v_x + dv_x$, v_y e $v_y + dv_y$, v_z e $v_z + dv_z$ [40,42]:

$$d^6N = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z. \quad (1.20)$$

Podemos considerar a eq.(1.20) como sendo a probabilidade de encontrar uma partícula em um volume específico do espaço. Portanto a densidade "n" de partículas pode ser expressa como:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (1.21)$$

Conseqüentemente as densidades de carga e de corrente em termos da função de distribuição para uma análise mais apropriada do plasma são expressas por:

$$\mu = \sum_s q_s \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (1.22)$$

e

$$\vec{j} = \sum_s q_s \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}. \quad (1.23)$$

Respectivamente, onde $s = e, 1, 2, \dots$ são as espécies de cargas ($1, 2, \dots$ referentes aos diversos tipos de ions).

O vetor aceleração, para casos não relativísticos, para qualquer tipo de partícula é expresso por:

$$\vec{a}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.24)$$

Em um intervalo de tempo dt , o deslocamento da partícula do tipo "s" é dado por:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} dt \quad (1.25)$$

e para a velocidade teremos:

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{a} dt. \quad (1.26)$$

Capítulo 1

A função de distribuição também mudará de tal forma que podemos escrever:

$$f \rightarrow f' = f + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (1.27)$$

Observamos que o número de partículas deve permanecer inalterado, ou seja, o número de partículas no volume inicial, instante t , deve ser igual ao número de partículas no volume posterior, instante $t + dt$.

$$f'(\vec{r}', \vec{v}', t + dt) d\vec{r}' d\vec{v}' = f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}. \quad (1.28)$$

Utilizando o Jacobiano de transformação[45]:

$$d\vec{r}' d\vec{v}' = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(v'_x, v'_y, v'_z)}{\partial(v_x, v_y, v_z)} d\vec{r} d\vec{v} \quad (1.29)$$

e as eq.(1.25) e (1.26), para a primeira ordem em " dt ", temos:

$$d\vec{r}' d\vec{v}' = \left(1 + \frac{\partial a_i}{\partial v_i} dt \right) d\vec{r} d\vec{v}. \quad (1.30)$$

Onde " i " representa as variáveis x , y e z . Expandindo a eq.(1.28) para a primeira ordem em " dt ", obtemos:

$$\left[f + v_i dt \frac{\partial f}{\partial r_i} + a_i dt \frac{\partial f}{\partial v_i} + dt \frac{\partial f}{\partial t} \right] \left[1 + \frac{\partial a_i}{\partial v_i} dt \right] = f + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c dt, \quad (1.31)$$

O termo $(\partial f / \partial t)_c$ no lado direito da equação representa os efeitos de colisão. Da equação do movimento (2ª lei de Newton) temos $\partial a_i / \partial v_i = 0$, logo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c. \quad (1.32)$$

Onde a_i é a aceleração da partícula do plasma na direção " i ". No caso em que os efeitos de colisões são desprezíveis, a eq.(1.32) pode ser expressa por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \left(\frac{q}{m} E_i + \frac{q}{m} (v_m B_n - v_n B_m)_i \right) \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (1.33)$$

Capítulo 1

Esta equação é conhecida como equação de Vlasov [31,33,34]. Vamos fazer uma análise de uma perturbação linear utilizando a eq.(1.33). Considere um plasma uniforme com os íons fixos, sem a ação de campos elétricos e magnéticos. Consideremos agora uma pequena perturbação da condição de equilíbrio:

$$f = f_0 + f_1, \quad \vec{E} = \vec{E}_1 \quad (1.34)$$

onde f_0 é a função de distribuição não perturbada (no equilíbrio) e E_1 a perturbação no campo elétrico. Para um plasma não relativístico, para partículas com velocidade menor do que "c", desprezaremos os efeitos de campos magnéticos devido à pequena perturbação. Utilizando a eq.(1.33), teremos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_1}{\partial r_i} - \frac{e}{m_e} E_{1i} \frac{df_0}{dv_i} = 0. \quad (1.35)$$

Para simplificar os cálculos vamos admitir a perturbação ocorrendo somente na direção do eixo "x". Sendo $\vec{E}_1 = \vec{E}_x$ e f_1 independentes de y e z. Logo, a eq.(1.35) é expressa por:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_1 \frac{df_0}{dv} = 0 \quad (1.36)$$

Utilizando a equação de Poisson, teremos:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -4\pi e \int f_1 dv. \quad (1.37)$$

Vamos utilizar a função de distribuição normalizada expressa da seguinte forma:

$$f_v(x, v, t) = n_0^{-1} f(x, v, t) \quad (1.38)$$

e substituí-la nas eqs.(1.36) e (1.37), assim teremos:

$$\frac{\partial f_{1v}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{1v}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_1 \frac{df_{0v}}{dv} = 0 \quad (1.39)$$

e

Capítulo 1

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -4\pi n_0 e \int f_{1v} dv. \quad (1.40)$$

Como n_0 e f_{0v} são uniformes no espaço e no tempo, é conveniente expandir f_i . Seja a seguinte expansão de Fourier:

$$f_{1v}(x, v, t) = \int dk \int d\omega \exp[i(kx - \omega t)] \tilde{f}_{1v}(k, v, \omega) \quad (1.41)$$

com

$$\tilde{f}_{1v}(k, v, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int dx \int dt \exp[-i(kx - \omega t)] f_{1v}(x, v, t). \quad (1.42)$$

Substituindo nas eqs.(1.39) e (1.40), temos:

$$-i\omega \tilde{f}_{1v} + ivk \tilde{f}_{1v} - \frac{e}{m_e} \tilde{E}_1 \frac{df_{0v}}{dv} = 0 \quad (1.43)$$

e

$$ik \tilde{E}_1 = -4\pi n_0 e \int \tilde{f}_{1v} dv. \quad (1.44)$$

Assim da eq.(1.43) obtemos:

$$\tilde{f}_{1v} = \frac{i \frac{e}{m_e} \tilde{E}_1 \frac{df_{0v}}{dv}}{\omega - kv}. \quad (1.45)$$

Para valores de k e ω para os quais $\omega \neq kv$ e para v nas regiões de valores onde $f_{0v} \neq 0$.

Substituindo na eq.(1.44), teremos:

$$\left\{ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{dv}{v - \frac{\omega}{k}} \frac{df_{0v}}{dv} \right\} \tilde{E}_1 = 0. \quad (1.46)$$

Com isso teremos a seguinte relação de dispersão, na condição em que $\tilde{E}_1 \neq 0$:

$$\epsilon(k, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{df_{0v}}{dv} \frac{dv}{v - \frac{\omega}{k}} = 0. \quad (1.47)$$

Integrando por partes, teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{0v}}{dv} \frac{dv}{v - \frac{\omega}{k}} = \left[\frac{f_{0v}}{v - \frac{\omega}{k}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{f_{0v}}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{0v}}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2} dv \quad (1.48)$$

e substituindo na eq.(1.47),

$$\epsilon(k, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{f_{0v}}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2} dv. \quad (1.49)$$

A expressão da eq.(1.49), fornece a função dielétrica do plasma $\epsilon(k, \omega)$ [40-42]. Esse resultado descreve de forma mais geral as oscilações para os casos em que o plasma possa ser descrito por uma função de distribuição ao invés de uma coleção de partículas carregadas.

1.5.2 A função dielétrica para um plasma macroscópico sob o ponto de vista quântico

Como no caso anterior, vamos considerar um plasma uniforme com os íons fixos, sem a ação de campos elétricos e magnéticos. Nosso ponto de partida é a equação de Schrödinger para um elétron livre [35-37]:

$$H\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.50)$$

onde o Hamiltoniano é expresso por:

$$H = \frac{1}{2m_e} \vec{p}^2. \quad (1.51)$$

A solução da eq.(1.50) é expressa por:

$$\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon_{\vec{k}} t\right) \quad (1.52)$$

Capítulo 1

Aqui $\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t)$ é normalizada e

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e}. \quad (1.53)$$

A função de onda expressa pela eq.(1.52) forma uma conjunto ortonormal. Assim, podemos observar que não ocorre flutuação na densidade de carga:

$$\rho_{\vec{k}}^{(0)} = -e \psi_{\vec{k}}^{*(0)} \psi_{\vec{k}}^{(0)}. \quad (1.54)$$

Onde "e" é a carga do elétron e o volume é unitário.

Vamos considerar uma pequena perturbação no plasma, devido à ação de um potencial local capaz de provocar uma pequena flutuação na densidade de carga. A função de onda de um elétron sob um potencial local pode ser expandida utilizando a solução da eq.(1.52), Portanto teremos a seguinte expansão [35-37]:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) \psi_{\vec{k}}^{(0)} \quad (1.55)$$

O coeficiente $a_{\vec{k}}(t)$ será determinado pelo método da perturbação temporal [35-37].

Vamos considerar um potencial local expresso por:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d\vec{q} \int d\Omega \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (1.56)$$

E encontrar a mudança de densidade de elétrons e o potencial induzido. Na equação acima c.c. representa o complexo conjugado do termo precedente. Pelo método da perturbação temos:

$$\frac{\partial a_{\vec{k}}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} e \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\vec{k}'}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}) t\right] \langle \vec{k} | \varphi(\vec{r}, t) | \vec{k}' \rangle. \quad (1.57)$$

Substituindo a eq.(1.56) na eq.(1.57), teremos:

$$\frac{\partial a_{\vec{k}}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} e \sum_{\Omega} \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\vec{k}'}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega) t\right]. \quad (1.58)$$

Integrando no tempo:

$$a_{\vec{k}+\vec{q}} = -e \sum_{\Omega} \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega)t\right]}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\zeta} \varphi(\vec{q}, \Omega), \quad \zeta \rightarrow 0^+. \quad (1.59)$$

Agora podemos escrever a função de onda do elétron sob um potencial local. Portanto a expressão da função de onda até a primeira ordem será expressa por:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \Psi_{\vec{k}}^{(0)} - e \sum_{\vec{q}, \Omega} \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega)t\right]}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp\left[i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{r}\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} t\right). \quad (1.60)$$

Para a flutuação da densidade de carga teremos:

$$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -e \Psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}, t) \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) - \rho_{\vec{k}}^{(0)} \quad (1.61)$$

Desprezando os termos de ordem elevada para φ , teremos:

$$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \varphi(\vec{q}, \Omega) \frac{\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} + c.c. \quad (1.62)$$

Para a flutuação total da densidade de carga do sistema, teremos:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) \quad (1.63)$$

onde $f_{\vec{k}}$ é a função de distribuição Maxwelliana. Substituindo na a eq.(1.63) na eq.(1.62), teremos:

$$\rho(\vec{r}, t) = e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \Pi(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (1.64)$$

Onde $\Pi(\vec{q}, \Omega)$, a polarizabilidade eletrônica, é expressa por:

$$\Pi(\vec{q}, \Omega) = \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta}. \quad (1.65)$$

Capítulo 1

Utilizando a equação de Poisson podemos calcular o potencial induzido a partir da flutuação da densidade de carga:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (1.66)$$

Utilizaremos uma expansão de Fourier para o potencial induzido, assim teremos:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{q}, \Omega} q^2 \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (1.67)$$

O potencial local é a soma do potencial externo com o potencial induzido, dado por:

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega). \quad (1.68)$$

Mas o potencial local é expresso em termos do potencial externo por meio da função dielétrica, de tal forma que teremos:

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega)}{\epsilon(\vec{q}, \Omega)} \quad (1.69)$$

Utilizando a eq.(1.69) na eq.(1.68) juntamente com os resultados das eqs.(1.64), (1.66) e (1.67), teremos para o valor esperado da função dielétrica:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = \langle \epsilon(\vec{q}, \Omega) \rangle = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \Pi(\vec{q}, \Omega). \quad (1.70)$$

A eq.(1.70) representa a função dielétrica do plasma. Contudo, estamos tratando de plasmas macroscópicos, e para tanto, podemos supor um volume muito grande (tendendo para o infinito) para esse sistema. Logo, faremos a seguinte aproximação [33,34]:

$$\sum_{\vec{k}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} V \int d^3v \quad (1.71)$$

com $\vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m_e}$. Então a eq.(1.70) toma a seguinte forma:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \int \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \epsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} d^3v. \quad (1.72)$$

Capítulo 1

Com auxílio da fórmula de Plemelj [33], expressa por:

$$\frac{1}{x+i\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad (1.73)$$

poderemos escrever a expressão da parte real da função dielétrica como,

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} P \int \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} - \epsilon_{\vec{k}}^{(0)} - \hbar\Omega} d^3v, \quad (1.74)$$

onde "P" indica que um valor principal deve ser tomado na integral [47]. Para os termos de energia, teremos:

$$\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 (\vec{k} + \vec{q})^2}{2m_e} - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m_e} \cdot \vec{q} + \frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2m_e}. \quad (1.75)$$

Plasmas macroscópicos são sistemas clássicos. Logo, tomaremos o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0; \hbar\vec{k} \rightarrow m\vec{v}$) [33] na eq.(1.75), quando esta for substituída na eq.(1.74). Como resultado,

teremos:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} P \int \frac{\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial \vec{v}}}{v - \Omega/q} d^3v \quad (1.76)$$

onde, $\frac{1}{m_e} \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial \vec{v}} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\frac{\hbar^2 \vec{q}^2}{2m_e} + \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m_e} \cdot \vec{q} - \hbar\Omega}$. Utilizando a integração por partes de eq.(1.48),

teremos:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{q^2} \int \frac{f_{\vec{k}}}{\left(v - \Omega/q\right)^2} d\vec{v} \quad (1.77)$$

Capítulo 1

Observamos que a eq.(1.77) é exatamente igual a expressão da eq.(1.49). Com essa expressão podemos calcular as frequências dos modos de oscilações coletivas, usando $\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 0$, eq.(1.47). Assim teremos:

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\vec{k}}}{\left(v - \frac{\Omega}{q}\right)^2} d\vec{v}, \quad (1.78)$$

mas a integral representa a média do denominador. Logo,

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{q^2} \left\langle \left(v - \frac{\Omega}{q}\right)^{-2} \right\rangle. \quad (1.79)$$

Sendo a velocidade de fase muito maior do que a velocidade térmica ($\Omega/q \gg v$), poderemos expandir a expressão da eq.(1.79) [39,40]:

$$\left(v - \frac{\Omega}{q}\right)^{-2} = \left(\frac{\Omega}{q}\right)^{-2} \left(1 - \frac{v}{\Omega/q}\right)^{-2} = \left(\frac{\Omega}{q}\right)^{-2} \left(1 + 2\frac{v}{\Omega/q} + 3\left(\frac{v}{\Omega/q}\right)^2 + 4\left(\frac{v}{\Omega/q}\right)^3 + \dots\right). \quad (1.80)$$

Os termos de potência ímpares se anularão, portanto, teremos:

$$\left\langle \left(v - \frac{\Omega}{q}\right)^{-2} \right\rangle \approx \left(\frac{\Omega}{q}\right)^{-2} \left(1 + 3\frac{\langle v^2 \rangle}{\left(\frac{\Omega}{q}\right)^2}\right) \quad (1.81)$$

Para plasmas frios, considerando apenas o primeiro termo da eq.(1.81), teremos:

$$\Omega = \omega_{pe}. \quad (1.82)$$

Agora se considerarmos a temperatura do plasma, teremos que utilizar a média de v^2 na eq.(1.81). Assim, teremos:

$$\Omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3\frac{kT_e}{m_e} q^2. \quad (1.83)$$

ou ainda, utilizando a expressão do comprimento de Debye dado pela eq.(1.11), teremos:

Capítulo 1

$$\Omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3\lambda_{D,e}^2 q^2). \quad (1.84)$$

A eq.(1.83) mostra a dependência da frequência das oscilações coletivas com relação a " q ". Construindo o gráfico Ω x q , fig. 1.1, poderemos observar, que as velocidades de fase e de grupo são finitas. As eqs.(1.82) e (1.83) são os resultado esperados classicamente e representam a relação de dispersão para as oscilações coletivas. Porém para a utilização da eq.(1.76), onde a função de distribuição é Maxwelliana, teremos que levar em conta os efeitos de amortecimento (termos de amortecimento de Landau), pois as frequências de plasmons apresentam também uma parte imaginária negativa. No capítulo 2 trataremos esse caso.

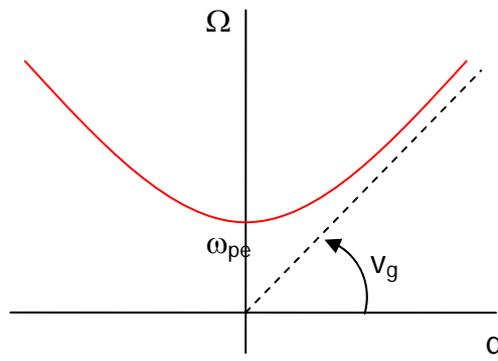


Figura 1.1. Gráfico da relação de dispersão para oscilações coletivas.

Podemos concluir que para esses tipos de cálculos, as ferramentas da Mecânica Quântica nos conduzem aos mesmos resultados que os encontrados classicamente. Em alguns casos, os cálculos clássicos se mostram mais vantajosos, porém existem muitos casos em que as ferramentas da Mecânica Quântica se mostram muito mais úteis. Muitas vezes os cálculos são mais diretos e mais simples. Portanto utilizaremos as ferramentas da Mecânica Quântica nos capítulos posteriores para obter as funções dielétricas e as frequências de oscilações coletivas para: plasmas não magnetizados [49] e plasmas magnetizados, capítulos 2 e 3, respectivamente.

Capítulo 1

E também para estudar os efeitos do potencial de blindagem em um plasma submetido a campos de radiação eletromagnética [27], capítulo 4.

Capítulo 2- Modulação das propriedades dielétricas de um plasma não magnetizado sob a ação de um campo de radiação.

Neste capítulo, vamos analisar os efeitos de uma radiação eletromagnética sobre as propriedades dielétricas e oscilações coletivas de um plasma na ausência de campos magnetostáticos em regime de ondas eletromagnéticas evanescentes [49]. Como foi mostrado no capítulo 1, utilizaremos o formalismo da Mecânica Quântica.

2.1 Cálculo da função dielétrica

Para ondas eletromagnéticas que se propagam em um plasma não magnetizado, temos a seguinte relação de dispersão [41]:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 . \quad (2.1)$$

Esse resultado mostra que ondas eletromagnéticas, para altas magnitudes de ck , propagam-se no plasma sem sofrerem atenuações.

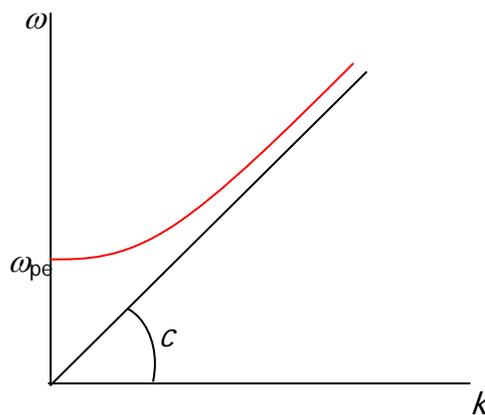


Figura 2.1 Gráfico relação de dispersão para ondas eletromagnéticas em um plasma não magnetizado.

Capítulo 2

Porém, para ondas eletromagnéticas com frequências (ω) menores do que a frequência de plasma (ω_{pe}), a eq.(2.1) fornece valores imaginários para (\vec{k}). Isso significa que a onda eletromagnética sofrerá uma atenuação em sua amplitude (ondas evanescentes) ao passo que se propaga no plasma até uma distância dada por [40-42]:

$$\delta = \frac{c}{(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (2.2)$$

Utilizaremos esse fato nos cálculos para a obtenção da função dielétrica do plasma. Ou seja, levaremos em conta, no Hamiltoniano da equação de Schrödinger, o fator de interação do elétron com um potencial vetor \vec{A} relacionado com a onda eletromagnética.

Primeiramente, iniciaremos com a equação de Schrödinger para um elétron livre que tem a seguinte forma:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m_e} \Phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

cuja solução é dada por:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\vec{k}} t\right) \quad (2.4)$$

Aqui a função $\Phi(\vec{r}, t)$ é normalizada e

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e}. \quad (2.5)$$

Agora vamos considerar um plasma sob a incidência de uma radiação eletromagnética. Tomaremos o componente elétrico dependente do tempo (campo elétrico), da referida radiação, ao longo da direção do eixo x. Portanto, para um elétron na presença de uma radiação eletromagnética, a equação de Schrödinger assume a forma:

Capítulo 2

$$H\psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

onde H representa o Hamiltoniano dado por:

$$H = \frac{1}{2m_e} (\vec{p} - e\vec{A}(t))^2, \quad (2.7)$$

com

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \hat{e}_x. \quad (2.8)$$

Logo:

$$\vec{E}(t) = (E \cos(\omega t)) \hat{e}_x.$$

A figura abaixo mostra a geometria do sistema:

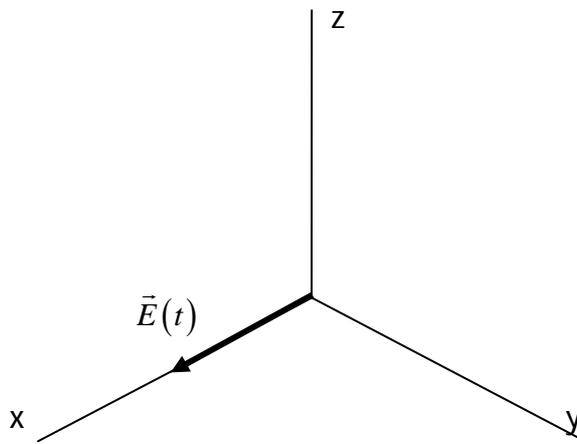


Figura 2.2: Componente elétrico (campo elétrico) da radiação na direção do eixo x.

A equação de Schrödinger para um Hamiltoniano expresso pela eq.(2.7) onde o potencial vetor é dependente do tempo é de difícil solução. Para contornar essa dificuldade, podemos utilizar uma transformação unitária [16,17] para obter a solução da eq.(2.6) a partir da eq.(2.4).

Capítulo 2

O efeito da transformação unitária é transformar o problema de um elétron na presença de potenciais dependentes do tempo para uma representação onde o elétron está na presença de apenas potenciais não dependentes do tempo. Seja a seguinte relação:

$$\psi(\vec{r}, t) = U\Phi(\vec{r}, t), \quad (2.9)$$

sendo U o operador unitário dado por:

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{r}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\beta}(t) \cdot \vec{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\eta(t)\right). \quad (2.10)$$

Onde $\vec{\alpha}(t)$ é o gerador de translação de momento; $\vec{\beta}(t)$ o gerador de translação espacial e $\eta(t)$

um fator de fase. Desta forma teremos:

$$\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{r} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{p} + \frac{d\eta}{dt} \right) \psi(\vec{r}, t) + U \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Substituindo a expressão acima na eq.(2.6), teremos:

$$HU\Phi(\vec{r}, t) = - \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{r} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{p} + \frac{d\eta}{dt} \right) \psi(\vec{r}, t) + Ui\hbar \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Multiplicando por U^\dagger , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_e} (\vec{p} + \vec{\alpha} - e\vec{A}(t))^2 \Phi(\vec{r}, t) &= - \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot (\vec{r} - \vec{\beta}) + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot (\vec{p} + \vec{\alpha}) + \frac{d\eta}{dt} \right) \cdot \Phi(\vec{r}, t) \\ &+ H_0\Phi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

com

$$H_0\Phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Da eq.(2.13), teremos:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} (\vec{\alpha} - e\vec{A}(t))^2 + \frac{\vec{p}}{m_e} (\vec{\alpha} - e\vec{A}(t)) + \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{r} \\ &+ \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{p} - \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{\beta} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{\alpha} + \frac{d\eta}{dt} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Capítulo 2

Precisamos escolher as funções $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)$ e $\eta(t)$, de forma que os termos que são lineares em \vec{p} e \vec{r} e os termos que dependem apenas do tempo sejam nulos. Logo:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = 0; \quad (2.16)$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \frac{1}{m_e}(\vec{\alpha} - e\vec{A}(t)) = 0; \quad (2.17)$$

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{\alpha} - \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{\beta} + \frac{1}{2m_e}(\vec{\alpha} - e\vec{A}(t))^2 = 0. \quad (2.18)$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias utilizando a eq.(2.8) [Apêndice A], teremos:

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0; \quad (2.19)$$

$$\beta_x = \frac{eE}{m_e \omega^2}(1 - \cos(\omega t)), \beta_y = \beta_z = 0; \quad (2.20)$$

$$\eta = -\frac{e^2 E^2}{4m_e \omega^2} t + \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega^3} \text{sen}(2\omega t). \quad (2.21)$$

Logo o operador U assume a seguinte forma:

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} 2\gamma_1 \omega t\right) \exp\left(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \gamma_1 \text{sen}(2\omega t)\right) \quad (2.22)$$

onde, $\gamma_0 = \frac{eE}{m_e \omega^2}$ e $\gamma_1 = \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega^3}$.

Poderemos aplicar esta função de onda dependente do tempo para calcular o estado dos elétrons em um potencial local e deduzir as propriedades dielétricas do sistema. A função de ordem zero tem a seguinte forma:

$$\psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(t)\right) \exp\left(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))\right) \exp\left(i\vec{k} \cdot \vec{r}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\vec{k}} t\right), \quad (2.23)$$

onde $F(t) = -2\gamma_1 \omega t + \gamma_1 \text{sen}(2\omega t)$. A eq.(2.23) forma um conjunto ortonormal, tal que:

Capítulo 2

$$\langle \psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) | \psi_{\vec{k}'}^{(0)}(\vec{r}, t) \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (2.24)$$

Para a densidade de carga teremos então:

$$\rho_{\vec{k}}^{(0)} = -e \psi_{\vec{k}}^{*(0)}(\vec{r}, t) \psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) = -e, \quad (2.25)$$

onde "e" representa a carga do elétron.

Conforme mostra a eq.(2.24), a função de onda de ordem zero expressa pela eq.(2.23) forma um conjunto ortonormal, portanto, não observamos flutuação na carga, mesmo na presença de uma radiação eletromagnética. A função de onda de um elétron sob um potencial local pode ser expandida utilizando o conjunto ortonormal referido anteriormente [35-37]:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) = & \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(t)\right) \exp(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\vec{k}} t\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

o coeficiente $a_{\vec{k}}(t)$ será determinado pelo método da perturbação.

Agora vamos considerar um potencial local,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d\vec{q} \int d\Omega \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (2.27)$$

e encontrar a mudança de densidade de elétrons e o potencial induzido. Na equação acima *c.c.* representa o complexo conjugado do termo precedente. Assumimos agora que o potencial local é fraco e usando o método da perturbação utilizado no capítulo 1 para calcular a mudança de estado do elétron. Assim a equação de primeira ordem será expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{\vec{k}'}(t)}{\partial t} = & \frac{i}{\hbar} e \cdot \exp(i\gamma_0 (k_x - k'_x) (1 - \cos(\omega t))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}}) t\right) \\ & \cdot \int d\vec{r} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) \varphi(\vec{r}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

e

Capítulo 2

$$a_{\vec{k}}(t) = \frac{i}{\hbar} e \int dt \exp(i\gamma_0(k_x - k'_x)(1 - \cos(\omega t))) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}})t\right) \int d\vec{r} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}) \varphi(\vec{r}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.29)$$

Substituindo a expansão de Fourier dada pela eq.(2.27) e utilizando a função geradora de Bessel [44-46],

$$\exp(i\alpha \cos x) = \sum_m i^m J_m(\alpha) \exp(imx), \quad (2.30)$$

teremos:

$$a_{\vec{k}+\vec{q}}(t) = e \cdot \exp(-i\gamma_0 q_x) \sum_{m, \Omega} i^m J_m(q_x \gamma_0) \varphi(\vec{q}, \Omega) \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega)t\right)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\zeta} \quad (\zeta \rightarrow 0^+). \quad (2.31)$$

Agora podemos escrever a expressão da função de onda até a primeira ordem:

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) &= \psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{r}, t) + \sum_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}}(t) \psi_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}(\vec{r}, t) \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(t)\right) \exp(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\vec{k}} t\right) \\ &\quad \left\{ \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + e \sum_{\vec{q}, \Omega} \exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)) \cdot \sum_m i^m J_m(q_x \gamma_0) \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{\varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(-i(\Omega + m\omega)t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} \exp(i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Podemos calcular a flutuação da densidade de carga,

$$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -e \Psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}, t) \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) - \rho_{\vec{k}}^{(0)}, \quad (2.33)$$

que, ao desprezarmos os termos em ϕ de ordens elevadas, temos:

$$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \sum_m i^m \varphi(\vec{q}, \Omega) J_m(q_x \gamma_0) \left[\frac{\exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)) \cdot \exp(-i(\Omega + m\omega)t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} \cdot \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) + \frac{(-1)^m \exp(i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)) \cdot \exp(i(\Omega + m\omega)t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}) \right] + c.c. \quad (2.34)$$

Após algumas manipulações algébricas teremos:

$$\rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = -e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)) \cdot \sum_m i^m J_m(q_x \gamma_0) \left[\frac{\exp(-i(\Omega + m\omega)t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} + \frac{\exp(i(\Omega + m\omega)t)}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} + \hbar\Omega + m\hbar\omega + i\eta} \right] + c.c. \quad (2.35)$$

Para a flutuação total da densidade do sistema, temos:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}}(\vec{r}, t) \quad (2.36)$$

onde $f_{\vec{k}} = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} - \frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T} \right)$ é a função de distribuição Maxwelliana [40-42].

Nesta expansão, k_B é a constante de Boltzmann e $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_1 \omega$ representa a energia da radiação eletromagnética. Substituindo a eq.(2.35) na eq.(2.36), teremos:

$$\rho(\vec{r}, t) = e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)) \cdot \exp(-i\Omega t) \sum_m i^m J_m(q_x \gamma_0) \exp(-im\omega t) \Pi(\vec{q}, \Omega + m\omega), \quad (2.37)$$

com $\Pi(\vec{q}, \Omega)$, a polarizabilidade eletrônica, tendo a seguinte forma:

$$\Pi(\vec{q}, \Omega) = \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - i\eta}. \quad (2.38)$$

Após decompor o fator $\exp(-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t))$ em sucessivos harmônicos, a flutuação na densidade de cargas dos elétrons pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{r}, t) = -e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(-i\Omega t) \cdot \sum_{m, m'} i^{m-m'} J_m(q_x \gamma_0) J_{m'}(q_x \gamma_0) \cdot \exp(-i(m-m')\omega t) \cdot \Pi(\vec{q}, \Omega + m\omega). \quad (2.39)$$

O potencial local pode ser obtido com o auxílio da equação de Poisson a partir da flutuação da densidade de cargas:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t). \quad (2.40)$$

Aplicando a expansão de Fourier para o potencial induzido, teremos:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{q}, \Omega} q^2 \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (2.41)$$

Combinando agora as eqs.(2.37), (2.40) e (2.41), teremos:

$$\varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \varphi(\vec{q}, \Omega) \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \Pi(\vec{q}, \Omega + m\omega). \quad (2.42)$$

Vamos tomar a parte real da eq.(2.39) para observar a flutuação da densidade de cargas, logo os termos com $m \neq m'$ não contribuem para o potencial induzido. O potencial local é a soma do potencial externo e o potencial induzido,

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega), \quad (2.43)$$

que por sua vez,

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega)}{\epsilon(\vec{q}, \Omega)}. \quad (2.44)$$

Onde o valor esperado para a função dielétrica assume a seguinte forma:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = \langle \epsilon(\vec{q}, \Omega) \rangle = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{V} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \Pi(\vec{q}, \Omega + m\omega), \quad (2.45)$$

ou usando a eq.(2.38):

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta}. \quad (2.46)$$

2.2 Cálculo das frequências de oscilações coletivas

O sistema possui um volume muito grande, conforme foi mencionado no capítulo 1, assim:

$$\sum_{\vec{k}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} V \int d^3v \quad (2.47)$$

com $\vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m_e}$.

Então a eq.(2.46) assume a forma:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \int \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} d^3v. \quad (2.48)$$

Não é possível separar as ondas em um plasma em ondas longitudinais e ondas transversais, pois há um acoplamento entre elas. Mas para um plasma isotrópico, essa separação pode ocorrer. Ainda que o plasma não seja isotrópico, pode-se assumir esse desacoplamento com boa aproximação [33,34]. Vamos dividir a função dielétrica dada pela eq.(2.48) em duas partes, a saber: parte real e parte imaginária:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = \epsilon_1(\vec{q}, \Omega) + i\epsilon_2(\vec{q}, \Omega). \quad (2.49)$$

Para efetuar essa separação utilizaremos a fórmula de Plemelj [33] que possui a seguinte forma:

$$\frac{1}{x + i\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (2.50)$$

Onde P indica que um valor principal deve ser tomado na integração subsequente [45]. Teremos então:

$$\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega} d^3v \quad (2.51)$$

e

$$\epsilon_2(\vec{q}, \Omega) = -i\pi \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \int (f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}) \delta(\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega) d^3v. \quad (2.52)$$

Admitiremos um acoplamento fraco entre os elétrons e a radiação eletromagnética, portanto desprezaremos os termos de ordem elevadas para "m" nas funções de Bessel, ou seja, utilizaremos $m = 0$, pois esse termo prevalece sobre os demais. Logo a eq.(2.51) assume a seguinte forma:

$$\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} J_0^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar\Omega} d^3v, \quad (2.53)$$

onde $\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2(\vec{k} + \vec{q})^2}{2m_e} - \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2\vec{k}}{m_e} \cdot \vec{q} + \frac{\hbar^2\vec{q}^2}{2m_e}$. No limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$; $\hbar\vec{k} \rightarrow m\vec{v}$), a

eq.(2.53) se torna:

$$\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} J_0^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{\vec{q} \cdot \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial \vec{v}}}{\vec{v} \cdot \vec{q} - \Omega} d^3v, \quad (2.54)$$

onde $\frac{1}{m_e} \frac{\vec{q} \cdot \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial \vec{v}}}{\vec{v} \cdot \vec{q} - \Omega} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}} - f_{\vec{k}}}{\frac{\hbar^2\vec{q}^2}{2m_e} + \frac{\hbar^2\vec{k}}{m_e} \cdot \vec{q} - \hbar\Omega}$.

Vamos admitir que a velocidade de fase das ondas longitudinais seja muito maior que a velocidade térmica dos elétrons. Assim poderemos efetuar uma integração por partes (conforme foi efetuado mostrado na eq.(1.48)) na eq.(2.54) para uma primeira aproximação. E poderemos utilizar a expansão de $\left(v - \frac{\Omega}{q}\right)^{-2}$, para determinar as médias sobre os termos de frequência.

Assim, obteremos a seguinte expressão:

$$\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) \cong 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} J_0^2(q_x \gamma_0) \left[1 + \frac{2\langle \vec{q} \cdot \vec{v} \rangle}{\Omega} + \frac{3\langle (\vec{q} \cdot \vec{v})^2 \rangle}{\Omega^2} \right] \exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma}{k_B T}\right). \quad (2.55)$$

Capítulo 2

Onde ω_{pe} é a frequência de plasma. Encontraremos as frequências das ondas longitudinais (oscilações coletivas) resolvendo a equação $\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) = 0$ utilizando apenas o primeiro termo (plasma frio) e o terceiro (plasma quente) da eq.(2.55). Logo, teremos respectivamente as seguintes expressões para as frequências das oscilações coletivas:

$$\Omega_{\vec{q}, \lambda} \cong \omega_{pe} \exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma}{2k_B T}\right) [J_0^2(q_x \gamma_0)]^{1/2} \quad (2.56)$$

ou, considerando os efeitos de temperatura,

$$\Omega_{\vec{q}, \lambda} \cong \left(\omega_{pe}^2 + 3\frac{k_B T}{m_e} q_x^2\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma}{2k_B T}\right) [J_0^2(q_x \gamma_0)]^{1/2}. \quad (2.57)$$

Os resultados expressos pelas eqs.(2.55), (2.56) e (2.57) mostram que ocorrem modulações tanto na função dielétrica do plasma como nas frequências de oscilações coletivas, respectivamente, em um regime de ondas eletromagnéticas evanescentes. Essas modulações dependerão, conforme mostram as referidas equações, da amplitude do campo elétrico (intensidade da radiação eletromagnética), frequência da radiação eletromagnética bem como também da temperatura dos elétrons. Para vetores de onda de baixa magnitude a energia do plasma é determinada principalmente pela energia de seus próprios elétrons. Podemos observar que para o caso de ($m = 0$), a eq.(2.56) é intensamente dependente das frequência e amplitude do campo de radiação eletromagnética, conforme já foi observado anteriormente, devido aos parâmetros $\epsilon_\gamma = e^2 E^2 / 4m_e \omega^2$ e $\gamma_0 = \frac{eE}{m_e \omega^2}$ respectivamente. O efeito do acoplamento elétron-campo de radiação eletromagnética é modular, atenuando as frequências das oscilações coletivas (plasmons) devido a presença do fator $\exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma}{k_B T}\right)$. As frequências de plasmons de

comprimentos de ondas longos na ausência de campos de radiação eletromagnética podem relacionar-se à condutividade elétrica $\sigma(\omega)$ de plasmas com altas frequências pela relação [40]:

$$\Omega_{pe}^2 = 2\pi\sigma(\omega)\Omega_{\vec{q}}. \quad (2.58)$$

Podemos observar que a redução nas frequências de plasmons sob a ação do campo de radiação pode estar relacionada como uma supressão da condutividade elétrica do plasma [49], ou seja, esse regime, para os elétrons, possui menor mobilidade. Por outro lado, o processo da amplitude do campo de radiação eletromagnética é proporcional ao quadrado de $J_0(\gamma_0 q_x)$, eq.(2.56). Para um dado q_x e ω a função de Bessel de ordem zero oscila com a amplitude do campo de radiação E conforme será mostrado no capítulo 5.

2.3 Relação de dispersão para uma função de distribuição Maxwelliana

No cálculo da eq.(2.54) fizemos uma primeira aproximação na função de distribuição. Porém devemos observar que existe uma parte de valor imaginário negativo para as frequências $\Omega_{\vec{q},\lambda}$ que causa uma atenuação temporal nas oscilações coletivas. Esse amortecimento das oscilações coletivas que ocorre sem colisão é conhecido como amortecimento de Landau. Para esse cálculo, vamos substituir novamente a função Maxwelliana na eq.(2.54) e resolver para $\epsilon_1(\vec{q}, \Omega) = 0$. Assim teremos:

$$1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{n_0 q^2} \frac{m_e}{k_B T} J_0^2(q_x \gamma_0) \int \frac{v_x f_{\vec{k}}}{(v_x - \Omega/q)} d^3 v. \quad (2.59)$$

Resolvendo as integrações em v_y e v_z , teremos:

$$q_x = -\omega_{pe}^2 \frac{m_e}{k_B T} \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma}{k_B T}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g \exp(-g^2)}{(g - \Omega)} dg, \quad (2.60)$$

onde,

Capítulo 2

$$\mathfrak{g} = \frac{v_x}{\left(2k_B T / m_e\right)^{1/2}} \quad (2.61)$$

e

$$\mathfrak{A} = \frac{\left(\Omega / q\right)}{\left(2k_B T / m_e\right)^{1/2}}. \quad (2.62)$$

Usando a expressão do comprimento de Debye dada pela eq.(1.11), teremos:

$$q_x^2 \lambda_{D,e}^2 + I(\mathfrak{A}) J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right) = 0 \quad (2.63)$$

onde

$$I(\mathfrak{A}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{g} \exp(-\mathfrak{g}^2)}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} d\mathfrak{g}. \quad (2.64)$$

Não podemos integrar diretamente a eq.(2.64) devido ao ponto de singularidade $\mathfrak{g} = \mathfrak{A}$.

Para valores reais de $\Omega(q)$ o denominador desaparece no eixo real v_x . Para valores complexos

$\Omega(q)$, que correspondem aos amortecimentos se $i\{\Omega\} < 0$, ou instabilidade se $i\{\Omega\} > 0$.

Podemos observar que,

$$\frac{\mathfrak{g}}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} = 1 + \frac{\mathfrak{A}}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})}. \quad (2.65)$$

Assim, teremos:

$$I(\mathfrak{A}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})}\right) \exp(-\mathfrak{g}^2) d\mathfrak{g}. \quad (2.66)$$

A primeira integral é igual a 1, logo teremos:

$$I(\mathfrak{A}) = 1 + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mathfrak{g}^2)}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} d\mathfrak{g}. \quad (2.67)$$

Fazendo

$$H(\mathfrak{A}, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-s\mathfrak{g}^2)}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} d\mathfrak{g}. \quad (2.68)$$

Assim a relação de dispersão toma a seguinte forma:

$$q_x^2 \lambda_{D,e}^2 + (1 + \mathfrak{A}H(\mathfrak{A}, 1)) J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right) = 0 \quad (2.69)$$

A eq.(2.68) pode ser reescrita assumindo a seguinte forma:

$$H(\mathfrak{A}, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathfrak{g} + \mathfrak{A})}{(\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{A}^2)} \exp(-s\mathfrak{g}^2) d\mathfrak{g}. \quad (2.70)$$

A primeira integração se anula, uma vez que o integrando é uma função ímpar de \mathfrak{g} . Assim temos uma expressão alternativa para a eq.(2.70):

$$H(\mathfrak{A}, s) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-s\mathfrak{g}^2)}{(\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{A}^2)} d\mathfrak{g}. \quad (2.71)$$

Vamos tomar a derivada da eq.(2.71) com relação a variável s . Assim teremos:

$$\frac{dH(\mathfrak{A}, s)}{ds} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{\mathfrak{A}^2}{\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{A}^2}\right) \exp(-s\mathfrak{g}^2) d\mathfrak{g}. \quad (2.72)$$

Calculando a primeira integral teremos $-\mathfrak{A}/\sqrt{s}$, assim,

$$\frac{dH(\mathfrak{A}, s)}{ds} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{s}} - \mathfrak{A}^2 H(\mathfrak{A}, s). \quad (2.73)$$

Multiplicando a eq.(2.73) por $\exp(s\mathfrak{A}^2)$ podemos escrever:

$$\frac{d}{ds} \left[H(\mathfrak{A}, s) \exp(s\mathfrak{A}^2) \right] = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{s}} \exp(s\mathfrak{A}^2). \quad (2.74)$$

Agora vamos integrar dos dois lados de $s = 0$ até $s = 1$, assim teremos:

$$H(\mathfrak{A},1) = H(\mathfrak{A},0) \exp(-\mathfrak{A}^2) - \mathfrak{A} \exp(-\mathfrak{A}^2) \int_0^1 \frac{\exp(s\mathfrak{A}^2)}{\sqrt{s}} ds. \quad (2.75)$$

Para amortecimentos fracos, em regime de alta velocidade de fase, o pólo $v_x = \frac{\Omega}{q_x}$ se encontra próximo do eixo real e poderemos resolver a integral $H(\mathfrak{A},0)$ como uma integral imprópria como se segue:

$$H(\mathfrak{A},0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathfrak{g}}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-p}^p \frac{d\mathfrak{g}}{(\mathfrak{g} - \mathfrak{A})} = i\sqrt{\pi}. \quad (2.76)$$

Assim podemos reescrever a eq.(2.75) como:

$$H(\mathfrak{A},1) = i\sqrt{\pi} \exp(-\mathfrak{A}^2) - 2 \int_0^{\mathfrak{A}} \exp(\mathfrak{W}^2 - \mathfrak{A}^2) d\mathfrak{W} \quad (2.77)$$

com a mudança de variável $s \rightarrow \frac{\mathfrak{W}^2}{\mathfrak{A}^2}$.

Logo a relação de dispersão expressa pela eq.(2.69) torna-se:

$$-\frac{q_x^2 \lambda_{D,e}^2}{J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right)} = \left[1 + i\sqrt{\pi} \mathfrak{A} \exp(-\mathfrak{A}^2) - 2\mathfrak{A} \int_0^{\mathfrak{A}} \exp(\mathfrak{W}^2 - \mathfrak{A}^2) d\mathfrak{W} \right]. \quad (2.78)$$

Para resolver a integral dentro do colchete faremos mais uma mudança de variável, de tal forma que:

$$2\mathfrak{A} \int_0^{\mathfrak{A}} \exp(\mathfrak{W}^2 - \mathfrak{A}^2) d\mathfrak{W} = \int_0^{\mathfrak{A}^2} \left(1 - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}^2}\right)^{-1/2} \exp(-\mathfrak{E}) d\mathfrak{E}, \quad (2.79)$$

onde $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{W}^2$. No regime de alta velocidade de fase, $\mathfrak{A} \gg 1$, assim $\mathfrak{E} < \mathfrak{A}^2$ em toda região de integração. Então poderemos expandir a expressão dentro dos parênteses em uma série binomial e resolver a integral de cada termo da referida série presente à direita da eq.(2.79).

Assim, temos para a relação de dispersão a seguinte expressão:

Capítulo 2

$$\frac{q_x^2 \lambda_{D,e}^2}{J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right)} = \frac{1}{2\mathfrak{A}^2} + \frac{3}{4\mathfrak{A}^4} - i\sqrt{\pi}\mathfrak{A} \exp(-\mathfrak{A}^2). \quad (2.80)$$

Ou ainda com o auxílio da eq.(1.11), que define o comprimento de Debye e da eq.(2.62), que define \mathfrak{A} , teremos:

$$\begin{aligned} \Omega_{q_x, \lambda}^2 = & \left(\omega_{pe}^2 + 3 \frac{k_B T}{m_e} q_x^2 \right) J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right) \\ & - i \frac{\sqrt{\pi/2} \omega_{pe}^5}{q_x^3 (k_B T / m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\omega_{pe}^2}{2q_x^2 (k_B T / m_e)} - \frac{3}{2}\right) J_0^2(\gamma_0 q_x) \exp\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T}\right), \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde $\omega \approx \omega_{pe}$ para grandes comprimentos de ondas. Exceto na exponencial onde foi utilizado a expressão da eq.(1.84).

Os dois primeiros termos correspondem a nossa primeira aproximação eq.(2.57), o terceiro termo representa uma quantidade complexa que se refere ao termo do amortecimento de Landau [40-42,48]. Vamos separar $\Omega_{q_x, \lambda}$ nas partes real e imaginária de acordo com a relação

$\Omega_{q_x, \lambda} = \Omega_\tau + i\Omega_i$, observando que:

$$\Omega_i = \frac{\left(\Omega_{q_x, \lambda}^2\right)_i}{2\Omega_\tau},$$

usaremos $\Omega_\tau = \omega_{pe} \left[J_0^2(\gamma_0 q_x) \right]^{1/2} \exp\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{2k_B T}\right)$, assim teremos:

$$\Omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^4}{q_x^3 (k_B T / m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\omega_{pe}^2}{2q_x^2 (k_B T / m_e)^{3/2}} - \frac{3}{2}\right) J_0(\gamma_0 q_x) \exp\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{2k_B T}\right). \quad (2.82)$$

Para elevados valores de comprimento de onda, o termo de amortecimento de Landau é desprezível, porém para valores de comprimento de onda da ordem do comprimento de Debye definida pela eq.(1.11), o termo de amortecimento de Landau é predominante. Podemos observar

Capítulo 2

da eq.(2.82) que dependendo do sinal da função de Bessel, poderemos ter amortecimento das ondas longitudinais ($J_0 > 0$) ou instabilidade ($J_0 < 0$). No capítulo 5 apresentaremos os resultados numéricos.

Capítulo 3 - Modulação das propriedades dielétricas de um plasma magnetizado sob a ação de um campo de radiação eletromagnética em regime de ondas circularmente polarizadas.

Neste capítulo, analisaremos os efeitos de uma radiação eletromagnética sobre as propriedades dielétricas e oscilações coletivas de um plasma na presença de um campo magnetostático uniforme.

3.1 Campo magnetostático paralelo ao componente elétrico (campo elétrico) dependente do tempo.

Para essa análise, consideraremos ambos, o campo magnético e o componente elétrico (campo elétrico da radiação eletromagnética) na direção do eixo "z". A figura a seguir mostra a geometria do sistema:

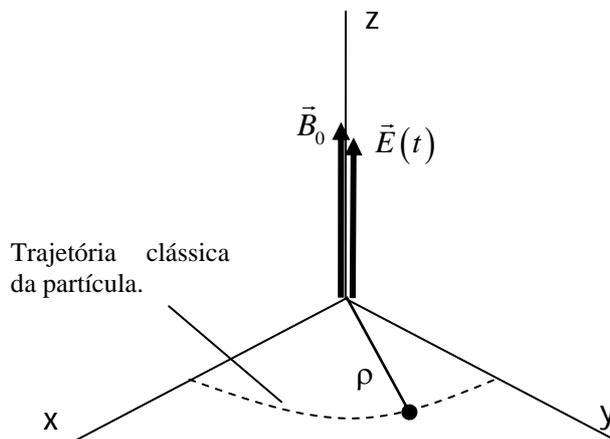


Figura 3.1: Componente elétrico (campo elétrico) da radiação paralelo ao campo magnetostático. Onda eletromagnética ordinária.

A equação que descreve a interação de um elétron de massa m_e com uma radiação eletromagnética possui a forma da eq.(2.4) sendo que o Hamiltoniano assume a forma da

Capítulo 3

eq.(2.5). Para um elétron em um campo magnetostático uniforme o potencial vetor possui a seguinte forma [35]:

$$A_x = -B_0 y, \quad (3.1)$$

Então a equação de Schrödinger para um elétron na presença deste campo magnético assume a seguinte forma:

$$H_0 \Phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

onde,

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} (p_x - eA_x)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (3.3)$$

Na eq.(3.2), $\Phi(\vec{r}, t)$ representa as funções de onda de Landau. Porém, na presença de uma radiação eletromagnética, a equação de Schrödinger é descrita como:

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.4)$$

onde,

$$H = \frac{1}{2m_e} (p_x - eA_x - e\vec{A}(t))^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}, \quad (3.5)$$

e,

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \hat{e}_z, \quad (3.6)$$

que conduz a,

$$\vec{E}(t) = (E \cos(\omega t)) \hat{e}_z.$$

Novamente, teremos que recorrer a uma transformação unitária para encontrar as soluções da eq.(3.4). Isso nos conduzirá ao mesmo resultado do capítulo 2. Ou seja, para a

função dielétrica teremos a eq.(2.54) e para as frequências dos modos de oscilações coletivas a eq.(2.55).

3.2 Campo magnetostático ortogonal ao componente elétrico (campo elétrico) dependente do tempo.

Para esta análise, consideremos o campo magnético na direção do eixo "z" e o componente elétrico na direção do eixo "x". A figura a seguir mostra a geometria do sistema.

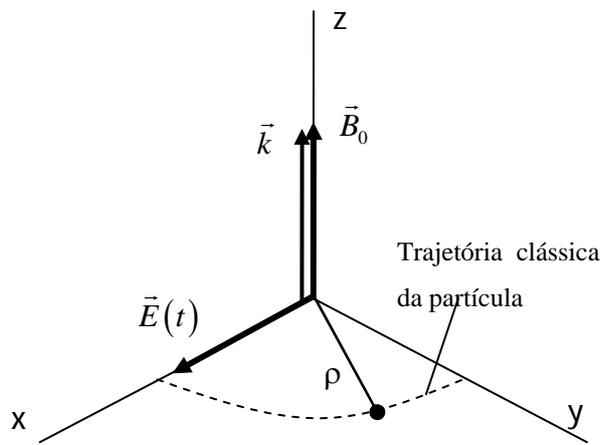


Figura 3.2: Componente elétrico (campo elétrico) da radiação ortogonal ao campo magnetostático.

3.2.1 Cálculo da função dielétrica

Para um plasma magnetizado temos as seguintes relações de dispersão para ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo do campo magnético [41]:

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\frac{\Omega_{pe}}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}; \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\frac{\Omega_{pe}}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}. \quad (3.8)$$

As eqs.(3.7) e (3.8) representam respectivamente as ondas circularmente polarizadas à direita (R) e circularmente polarizadas à esquerda (L). Ω_{pe} e ω_C são as frequências de plasma e electrociclôtrônica respectivamente. A figura abaixo mostra o diagrama para as referidas relações de dispersão.

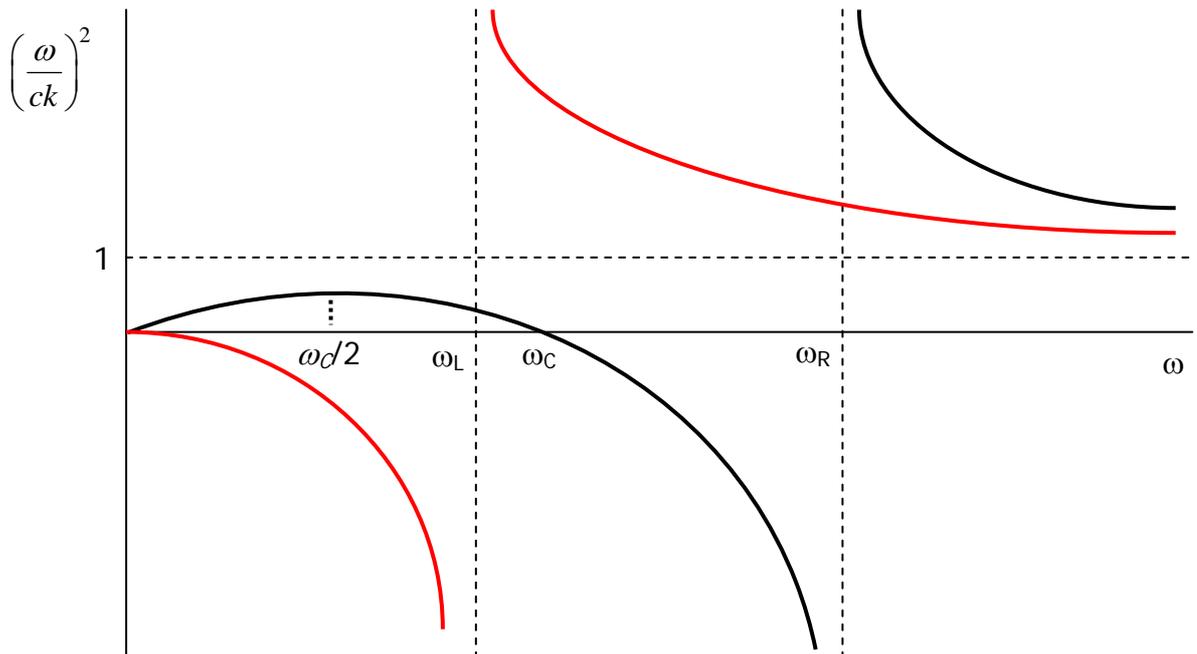


Figura 3.3: Gráfico da relação de dispersão para ondas L (vermelho) e ondas R (preto).

Observamos do gráfico da fig. 3.3 que existem dois modos de propagação de ondas R, a saber: $\omega < \omega_C$ (modos Whistler) e $\omega > \omega_R$. E para $\omega_C < \omega < \omega_R$, a onda R sofre atenuação. As ondas L se propagam apenas com $\omega > \omega_L$. Aqui ω_R e ω_L são as frequências de corte para as ondas R e L respectivamente. Vamos explorar os casos para os modos Whistler. As ondas eletromagnéticas de baixa frequência (modos Whistler) são importantes para o estudo de fenômenos relacionados à ionosfera.

Capítulo 3

Como no caso anterior, vamos iniciar a partir da equação de Schrödinger que descreve a interação de um elétron de massa m_e com um campo eletromagnético. Essa equação é expressa, para um elétron em um campo magnetostático uniforme, pela eq.(3.2). Portanto podemos escrever a equação de Schrödinger como:

$$H_0\Phi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad (3.9)$$

onde,

$$H_0 = \frac{1}{2m_e}(p_x - eA_x)^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (3.10)$$

Na eq.(3.9), $\Phi(\vec{r},t)$ representa as funções de onda de Landau [35]. Porém, na presença de uma radiação eletromagnética, a equação de Schrödinger assume a seguinte forma:

$$H\psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \quad (3.11)$$

com,

$$H = \frac{1}{2m_e}(p_x - eA_x - e\vec{A}(t))^2 + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (3.12)$$

Onde,

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \hat{e}_x, \quad (3.13)$$

que conduz a,

$$\vec{E}(t) = (E \text{cos}(\omega t)) \hat{e}_x. \quad (3.14)$$

Recorremos novamente a uma transformação unitária[16,17] para encontrar as soluções da eq.(3.11). Para tanto, seja a seguinte relação:

$$\psi(\vec{r},t) = U\Phi(\vec{r},t), \quad (3.15)$$

onde U possui a forma dada pela eq.(2.10). Utilizando as eqs.(3.1), (3.9), (3.11), (3.13) e (3.15), teremos:

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \frac{1}{2m_e}(p_x + eB_0y)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(\alpha_x - e \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) - eB_0\beta_y \right)^2 + p_x \cdot \\
 & \left(\frac{\alpha_x}{m_e} - e \left(\frac{E}{m_e\omega} \text{sen}(\omega t) \right) - \frac{eB_0}{m_e} \beta_y \right) + \omega_c y \alpha_x - \omega_c y \left(\frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \\
 & - m_e \omega_c^2 \beta_y y + \frac{p_y^2}{2m_e} + \frac{p_z^2}{2m_e} + \frac{p_y \alpha_y}{m_e} + \frac{p_z \alpha_z}{m_e} + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{\alpha_z^2}{2m_e} + \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{r} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{p} \\
 & - \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{\beta} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{\alpha} + \frac{d\eta}{dt},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.

Devemos encontrar as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\eta(t)$, de tal forma que os termos lineares da eq.(3.16) em p e r e os termos que dependem apenas do tempo sejam nulos. Assim teremos, para $\alpha(t)$:

$$\frac{d\alpha_y}{dt} + \omega_c \alpha_x - \left(\frac{\omega_c eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) - m_e \omega_c^2 \beta_y = 0; \tag{3.17}$$

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = 0; \tag{3.18}$$

$$\frac{d\alpha_z}{dt} = 0. \tag{3.19}$$

Para $\beta(t)$:

$$\frac{d\beta_x}{dt} + \frac{\alpha_x}{m_e} - \frac{eE}{m_e\omega} \text{sen}(\omega t) - \omega_c \beta_y = 0; \tag{3.20}$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} + \frac{\alpha_y}{m_e} = 0; \tag{3.21}$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} + \frac{\alpha_z}{m_e} = 0. \tag{3.22}$$

Capítulo 3

E para $\eta(t)$:

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\beta_y}{dt}\alpha_y - \frac{d\alpha_y}{dt}\beta_y + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\alpha_x - \left(\frac{eE}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) - m_e \omega_c \beta_y \right)^2 = 0. \quad (3.23)$$

Resolvendo esse sistema de equações [Apêndice B] teremos para $\vec{\alpha}(t)$:

$$\alpha_x(t) = \alpha_z(t) = 0; \quad (3.24)$$

$$\alpha_y(t) = -\frac{e\omega_c E}{(\omega^2 - \omega_c^2)} (\cos(\omega t) - 1). \quad (3.25)$$

Para $\vec{\beta}(t)$:

$$\beta_y(t) = \frac{\omega_c e E}{m_e \omega (\omega^2 - \omega_c^2)} \text{sen}(\omega t); \quad (3.26)$$

$$\beta_x(t) = -\frac{eE}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)} (\cos(\omega t) - 1); \quad (3.27)$$

$$\beta_z(t) = 0. \quad (3.28)$$

E para $\eta(t)$:

$$\eta(t) = -\frac{e^2 E^2}{4m_e (\omega^2 - \omega_c^2)} t + \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega (\omega^2 - \omega_c^2)} \text{sen}(2\omega t) \quad (3.29)$$

Podemos observar que a eq.(3.29) se reduz a eq.(2.19) quando $B_0 = 0$, ou seja quando $\omega_c = 0$.

Logo para U , temos:

$$\begin{aligned} U = & \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [\gamma_2 m_e \omega_c (\cos(\omega t) - 1) \text{sen}(\phi)] y\right) \cdot \\ & \exp(-ik_x \gamma_2 (\cos(\omega t) - 1)) \cdot \exp(ik_y \gamma_2 \omega_c \text{sen}(\omega t)) \cdot \\ & \exp\left(-\frac{i}{\hbar} 2\gamma_3 \omega t\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \gamma_3 \text{sen}(2\omega t)\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Onde $\gamma_2 = \frac{eE}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)}$ e $\gamma_3 = \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega (\omega^2 - \omega_c^2)}$.

Podemos agora escrever a expressão para a função de onda de ordem zero $\psi_{\vec{k},n_p}^{(0)}(\vec{r},t)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k},n}^{(0)}(\vec{r},t) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}[\gamma_2 m_e \omega_c (\cos(\omega t) - 1) \text{sen}(\phi)] y\right) \cdot \\ &\exp(-ik_x \gamma_2 (\cos(\omega t) - 1)) \cdot \exp(ik_y \gamma_2 \omega_c \text{sen}(\omega t)) \cdot \\ &\exp\left(-\frac{i}{\hbar} 2\gamma_3 \omega t\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \gamma_3 \text{sen}(2\omega t)\right) \exp(ik_x x) \exp(ik_z z) \\ &\chi_n(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_n t\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Na eq.(3.31) temos que:

$$\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} a_c^{1/2} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{2a_c^2}\right) H_n\left(\frac{y-y_0}{a_c}\right). \quad (3.32)$$

Onde $y_0 = \frac{\hbar k_x}{m_e \omega_c}$ e $a_c = \left(\frac{\hbar}{m_e \omega_c}\right)^{1/2}$. A função H_n representa os polinômios de Hermite e ε_n a

energia dos níveis de Landau, expressa por:

$$\varepsilon_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}. \quad (3.33)$$

A eq.(3.31) formará um conjunto ortonormal, logo expandiremos a função de onda de um elétron sob um potencial conforme foi efetuado anteriormente. De tal forma que teremos:

$$\Psi_{\vec{k},n}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) \psi_{\vec{k},n}^{(0)}(\vec{r},t). \quad (3.34)$$

O coeficiente $a_{\vec{k}}(t)$ será determinado pelo método da perturbação, como no caso referido no capítulo 2.

Vamos tomar o potencial local expresso por:

$$\varphi(\vec{r},t) = \int d\vec{q} \int d\Omega \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\vec{q},\Omega) + c.c. \quad (3.35)$$

Capítulo 3

e encontrar a mudança de densidade de elétrons e o potencial induzido. Na eq.(3.35), *c.c.* representa o complexo conjugado do termo precedente. Para o tratamento da transição de níveis de Landau veja a referência [50]. Vamos assumir um potencial local fraco o que justifica a utilização do método da perturbação para o cálculo da mudança de estado do elétron. Assim teremos:

$$\frac{\partial a_{\vec{k}'} }{\partial t} = \frac{i}{\hbar} e \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_n^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)})t} \int \psi_{\vec{k},n}^{(0)} \varphi(\vec{r}, t) \psi_{\vec{k}',n}^{(0)} d\vec{r}. \quad (3.36)$$

Utilizando a eq.(3.31) na eq.(3.36), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{\vec{k}'} }{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} e \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_n^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)})t} \int \exp(-i(k'_x - k_x)\gamma_2(\cos(\omega t) - 1)) \cdot \\ &\exp(i(k'_y - k_y)\gamma_2\omega_c \text{sen}(\omega t)) \exp(i(k'_x - k_x)x) \\ &\exp(i(k'_z - k_z)z) \chi_n(y) \varphi(\vec{r}, t) \chi_{n'}(y) d\vec{r} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilizaremos a eq.(3.35) na eq.(3.37) para obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{\vec{k}'} }{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} e \exp(-iq_x\gamma_2) \int dy \exp(iq_x\gamma_2 \cos(\omega t)) \exp(-iq_y\gamma_2\omega_c \text{sen}(\omega t)) \\ &\chi_n(y) \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(iq_y y) \chi_{n'}(y) \sum_{\Omega} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega)t\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim integrando a eq.(3.38) e utilizando a função geradora de Bessel expressa pela eq.(2.29), teremos:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k},n}(t) &= e \exp(-iq_x\gamma_2) \sum_{\Omega, m_x, m_y} i^{m_x+m_y} J_{m_x}(q_x\gamma_2) J_{m_y}(q_y\gamma_2\omega_c) \exp\left(im_y \frac{\pi}{2}\right) \cdot \\ &\varphi(\vec{q}, \Omega) \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - (m_x + m_y)\hbar\omega)t\right]}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - (m_x + m_y)\hbar\omega - i\zeta} \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \end{aligned} \quad (3.39)$$

Com $\langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle$ sendo o termo de "overlap" nos níveis de Landau e $\zeta \rightarrow 0^+$. De acordo com a ref. [7], temos para o termo de "overlap" a seguinte expressão:

Capítulo 3

$$\begin{aligned} \langle n | e^{iq_y y} | n' \rangle &= N_n N_{n'} \sqrt{\pi} a_c \exp \left[\left(\frac{y'_0}{2a_c} - \frac{iq'_y a_c}{2} \right)^2 - \left(\frac{y'_0{}^2}{2a_c^2} + iq'_y y_0 \right) \right] \\ &\left(\frac{y'_0}{a_c} - iq'_y a_c \right)^{n'-n} 2^n n! L_n^{n-n'} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{y'_0}{a_c} + iq'_y y_0 \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Aqui $y'_0 = \frac{\hbar q_x}{m_e \omega_c}$, $N_n = \frac{1}{\pi^{1/4} a_c^{1/2} \sqrt{2^n n!}}$ e $L_n^{n-n'}$ sendo os polinômios associados de Laguerre.

Agora podemos escrever a função de onda:

$$\Psi_{\bar{k},n}(\vec{r},t) = \psi_{\bar{k},n}^{(0)}(\vec{r},t) + \sum_{\bar{q}} a_{\bar{k}+\bar{q},n'}(t) \psi_{\bar{k}+\bar{q},n'}^{(0)}(\vec{r},t) \quad (3.41)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{k}}(\vec{r},t) &= \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_e \omega_c \gamma_2 (\cos(\omega t) - 1) y \right) \exp(-ik_x \gamma_2 (\cos(\omega t) - 1)) \\ &\exp(ik_y \gamma_2 \omega_c \text{sen}(\omega t)) \exp \left(\frac{i}{\hbar} F(t) \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_n t \right) \left\{ \exp(ik_x x) \exp(ik_z z) \chi_n(y) + \right. \\ &e \sum_{\bar{q}} \exp(-iq_x \gamma_2 \cos(\omega t)) \exp(iq_y \gamma_2 \omega_c \text{sen}(\omega t)) \sum_{\Omega, m_x, m_y} i^{m_x+m_y} J_{m_x}(q_x \gamma_2) J_{m_y}(q_y \gamma_2 \omega_c) \\ &\varphi(\bar{q}, \Omega) \frac{\exp[-i(\Omega + (m_x + m_y)\omega)t]}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - (m_x + m_y)\hbar\omega - i\zeta} \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \exp \left(im_y \frac{\pi}{2} \right) \\ &\left. \exp(i(k_x + q_x)x) \exp(i(k_z + q_z)z) \chi_{n'}(y) \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Onde $F(t) = -2\gamma_3 \omega t + \gamma_3 \text{sen}(2\omega t)$. Podemos com isso, calcular a flutuação na densidade de carga, conforme foi feito anteriormente, eq.(2.32). Assim a flutuação na densidade de carga é dada por:

$$\rho_{\bar{k},n}(\vec{r},t) = -e \Psi_{\bar{k},n}^*(\vec{r},t) \Psi_{\bar{k},n}(\vec{r},t) - \rho_{\bar{k},n}^{(0)}(\vec{r},t), \quad (3.43)$$

onde,

Capítulo 3

$$\rho_{\vec{k},n}^{(0)}(\vec{r},t) = -e\psi_{\vec{k},n}^{*(0)}(\vec{r},t)\psi_{\vec{k},n}^{(0)}. \quad (3.44)$$

Substituindo a expressão da eq.(3.42) na expressão da eq.(3.43), usando a expressão da eq.(3.44)

teremos:

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{k}}(\vec{r},t) = & -e^2 \sum_{\vec{q},\Omega} \sum_{j_\rho, j_\phi} i^{m_x+m_y} J_{m_x}(q_x \gamma_2) J_{m_y}(q_y \gamma_2 \omega_c) \varphi(q_\phi, \Omega) \\ & \exp\left(im_y \frac{\pi}{2}\right) \varphi(\vec{q}, \Omega) \exp(-iq_x \gamma_2 \cos(\omega t)) \exp(iq_y \gamma_2 \omega_c \text{sen}(\omega t)) \exp(iq_x x) \\ & \exp(iq_z z) \left[\frac{\exp(-i(\Omega + (m_x + m_y)\omega)t)}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - \hbar(m_x + m_y)\omega - i\zeta} \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle + \right. \\ & \left. \frac{\exp(i(\Omega + (m_x + m_y)\omega)t)}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - \hbar(m_x + m_y)\omega - i\zeta} \langle n' | \exp(-iq_y y) | n \rangle \right] \chi_n(y) \chi_{n'}(y) + c.c \end{aligned} \quad (3.45)$$

Onde foram realizadas algumas manipulações algébricas e os termos de ordem elevada do potencial foram desprezados. Para a flutuação total da densidade do sistema, teremos:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}}(\vec{r},t) \quad (3.46)$$

com $f_{\vec{k}} = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2k_B T_e} (v_\perp^2 + v_z^2) - \frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e} \right)$ sendo a função de distribuição

Maxwelliana, em uma situação de isotropismo: $k_B T_\perp = k_B T_z = k_B T_e$. Nesta expressão, k_B é a

constante de Boltzmann, $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$ é a velocidade da partícula perpendicular ao campo

magnetostático e $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_3 \omega$, representa a energia de interação do elétron com a radiação

eletromagnética. Expandindo os harmônicos de $\cos(\omega t)$ e $\text{sen}(\omega t)$ e substituindo a eq.(3.45) na

eq.(3.46), teremos:

Capítulo 3

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}, t) = e^2 \sum_{\vec{q}, \Omega} \varphi(\vec{q}, \Omega) \sum_{m_x, m'_x, m_y, m'_y} i^{m_x + m_y - m'_x + m'_y} J_{m_x}(q_x \gamma_2) J_{m_y}(q_y \gamma_2 \omega_c) \\
 J_{m'_x}(q_x \gamma_2) J_{m'_y}(q_y \gamma_2 \omega_c) \exp\left(i(m_y - m'_y) \frac{\pi}{2}\right) \exp(iq_x x) \exp(iq_z z) \exp(-i\Omega t) \quad (3.47) \\
 \exp\left(-i(m_x + m_y - m'_x + m'_y) \omega t\right) \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \Pi(\vec{q}, \Omega + (m_x + m_y) \omega) \\
 \chi_n(y) \chi_{n'}(y)
 \end{aligned}$$

onde a expressão de $\Pi(q, \Omega)$, a usual polarizabilidade eletrônica, é expressa pela eq.(2.37). O potencial local pode ser obtido com o auxílio da equação de Poisson a partir da flutuação da densidade de cargas:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t). \quad (3.48)$$

Aplicando a expansão de Fourier para o potencial induzido, teremos:

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{q}, \Omega} q^2 \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega) + c.c. \quad (3.49)$$

Utilizaremos o fato que os termos de ordem elevada para j nas funções de Bessel não contribuem de forma significativa para a modulação, ou seja $m_x = m_y = m'_x = m'_y = 0$ e as eqs.(3.47), (3.48) e (3.49), para obter:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{\vec{q}, \Omega} \varphi(\vec{q}, \Omega) J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c) \\
 \langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \Pi(\vec{q}, \Omega) \chi_n(y) \exp(-iq_y y) \chi_{n'}(y). \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

O potencial local é a soma do potencial externo e o potencial induzido,

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\vec{q}, \Omega). \quad (3.51)$$

E o potencial local é dado por:

$$\varphi(\vec{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\vec{q}, \Omega)}{\epsilon(\vec{q}, \Omega)}. \quad (3.52)$$

Logo, teremos para o valor esperado da função dielétrica:

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{q}, \Omega) &= \langle \epsilon(\vec{q}, \Omega) \rangle = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c) \\ &\langle n | \exp(iq_y y) | n' \rangle \Pi(\vec{q}, \Omega) \int dy \chi_n(y) \exp(-iq_y y) \chi_{n'}(y). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substituindo a expressão da polarizabilidade eletrônica, teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{q}, \Omega) &= 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c) \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}+\vec{q}}}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - i\zeta} \langle n | e^{iq_y y} | n' \rangle \\ &\langle n | e^{-iq_y y} | n' \rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como o volume do sistema é de grande magnitude, faremos a seguinte aproximação:

$$\sum_{\vec{k}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} V \int d^3v.$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{q}, \Omega) &= 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c) \int d^3v \frac{f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}+\vec{q}}}{\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} - \hbar\Omega - i\zeta} \langle n | e^{iq_y y} | n' \rangle \\ &\langle n | e^{-iq_y y} | n' \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

A diferença entre as energias que aparece no denominador da primeira integral é representada por [33]:

$$\varepsilon_{n'}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)} = \hbar\omega_c + \frac{\hbar k_z}{m_e} q_z + \frac{\hbar^2 q_z^2}{2m_e}. \quad (3.56)$$

Tomando a expressão da eq.(3.40) no limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$), teremos [7]:

$$\langle n | e^{-iq_y y} | n' \rangle = e^{iq'_y y_0 - i\ell\phi} J_1\left(\frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right). \quad (3.57)$$

No limite clássico, n e n' tendem a assumirem valores infinitos. Porém a diferença $n - n'$, permanece finita. O ângulo ϕ que aparece na eq.(3.57) é definido pela relação entre q_x e q_y na seguinte expressão [6,33]:

Capítulo 3

$$q_x + iq_y = q_\perp e^{i\phi}. \quad (3.58)$$

E v_\perp está relacionado ao número quântico n dado por: $\frac{1}{2} m_e v_\perp^2 = \hbar \omega_c n$.

Logo a eq.(3.55) toma a seguinte forma no limite clássico:

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{q}, \Omega) = & 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{J_l^2\left(\frac{q_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)}{l\omega_c + q_z v_z - \Omega - i\zeta} \left[\frac{l\omega_c}{v_\perp} \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial v_\perp} + q_z \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial v_z} \right] \\ & J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aqui, $l = n' - n$.

A expressão da eq.(3.59) se reduz ao caso tratado por Harris [33], em um regime ausente de campos de radiação eletromagnética ($\gamma_2 = 0$). Para investigar os modos de oscilação coletiva perpendicular ao campo magnetostático, vamos tomar $q_z = 0$. Assim teremos:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3 v \frac{J_l^2\left(\frac{q_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)}{l\omega_c - \Omega - i\zeta} \cdot \frac{l\omega_c}{v_\perp} \cdot \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial v_\perp} J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c). \quad (3.60)$$

Assim, teremos para a integral da eq.(3.60), em coordenadas cilíndricas, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int d^3 v \frac{J_l^2\left(\frac{q_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)}{l\omega_c - \Omega} \frac{l\omega_c}{v_\perp} \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial v_\perp} = \\ & = n_0 \left(\frac{m_e}{k_B T_e}\right)^2 \frac{l}{\Omega/\omega_c - l} \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_l^2\left(\frac{q_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) \exp\left(-\frac{m_e v_\perp^2}{2k_B T_e}\right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Vamos efetuar uma mudança de variável, de tal forma que:

$$\bar{v} = \frac{k_B T_e}{m_e} \frac{q_\perp^2}{\omega_c^2} \quad (3.62)$$

e

Capítulo 3

$$\xi = \frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}. \quad (3.63)$$

Feito isso, teremos:

$$\begin{aligned} & \int d^3v \frac{J_l^2\left(\frac{q_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) l \omega_c}{l \omega_c - \Omega} \frac{\partial f_{\vec{k}}}{v_{\perp} \partial v_{\perp}} = \\ & = n_0 \left(\frac{m_e}{k_B T_e}\right)^2 \frac{\omega_c^2}{q_{\perp}^2} \exp\left(\frac{\varepsilon_{\gamma}}{k_B T_e}\right) \frac{l}{\Omega/\omega_c - l} \int_0^{\infty} \xi J_l^2(\xi) e^{-\xi^2/2\bar{v}} d\xi \end{aligned} \quad (3.64)$$

Da expressão da eq.(3.64), podemos reconhecer a integral da forma:

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 x^2} J_n(ax) J_n(bx) x dx = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{(a^2+b^2)}{4p^2}} I_n\left(\frac{ab}{2p^2}\right), \quad (3.65)$$

conhecida como integral exponencial segunda de Weber [45]. Aqui I_n é a função modificada de Bessel [44,45,46] relacionada da seguinte forma:

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix).$$

Assim, com o auxílio da expressão da eq.(3.65), podemos resolver a eq.(3.64) e substituir o resultado na expressão da eq.(3.60) para obter:

$$\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{\Omega_{pe}^2 \tilde{\mathfrak{F}}}{\omega_c^2} \frac{e^{-\bar{v}}}{\bar{v}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{v}) \frac{l}{\Omega/\omega_c - l} \quad (3.66)$$

onde $\tilde{\mathfrak{F}} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\gamma}}{k_B T_e}\right) J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c)$. Observando a expressão da eq.(3.66), verificamos

que ocorre uma modulação na frequência de plasma acarretando uma modulação na função dielétrica do plasma. De tal forma que podemos encontrar os vários harmônicos que estão presentes em um plasma magnetizado submetido a uma radiação eletromagnética.

3.2.2 Cálculo das frequências de oscilações coletivas

Para encontrar a relação de dispersão para os modos de oscilações coletivas (plasmons), devemos resolver a equação $\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 0$, para o caso de ondas quase-estáticas, propagando-se transversalmente ao campo magnetostático. Para isso a onda de campo magnético é desprezível [40]. E a onda de campo elétrico se propaga longitudinalmente à oscilação elétrica. Com isso observamos que já ocorre um desacoplamento da onda transversal. Então a relação de dispersão referida acima está relacionada a uma onda longitudinal que se propaga transversalmente ao campo magnetostático. Assim da eq.(3.66), teremos:

$$\bar{v} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} = e^{-\bar{v}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{v}) \frac{l}{\Omega/\omega_c - l}. \quad (3.67)$$

Na ausência de campos de radiação eletromagnética ($\gamma_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{F} \equiv 1$), a expressão da eq.(3.67) se reduz a expressão da equação que conduz aos tão conhecidos modos de Bernstein [5]. Com a finalidade de investigar as soluções complexas de Ω na eq.(3.67), faremos a seguinte expansão:

$$e^{\bar{v} \cos y} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{v}) e^{imy}. \quad (3.68)$$

Fazendo $y = 0$, e somando com a eq.(3.67), teremos:

$$1 + \bar{v} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} = e^{-\bar{v}} \Omega \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{v}) \frac{1}{\Omega - l\omega_c}. \quad (3.69)$$

Seja $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$, onde Ω_R e Ω_I são respectivamente as partes real e imaginária de Ω . Com isso teremos:

$$1 + \bar{v} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} = e^{-\bar{v}} (\Omega_R + i\Omega_I) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{I_l(\bar{v})}{\Omega_R + i\Omega_I - l\omega_c}. \quad (3.70)$$

Que separadas nas partes real e imaginária assume as formas:

Capítulo 3

$$1 + \bar{\nu} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} = e^{-\bar{\nu}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{\nu}) \left[1 + \frac{l\omega_c \Omega_R - (l\omega_c)^2}{(\Omega_R - l\omega_c)^2 + \Omega_I^2} \right] \quad (3.71)$$

e

$$0 = -e^{-\bar{\nu}} \Omega_I \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\bar{\nu}) \frac{l\omega_c}{(\Omega_R - l\omega_c)^2 + \Omega_I^2}. \quad (3.72)$$

A única solução para a eq.(3.72) é $\Omega_I = 0$. Em outras palavras, nesse regime quase-estático, não observamos amortecimento temporal ou instabilidades.

Retornando à expressão da eq.(3.67), temos que para o caso de $\bar{\nu} \ll 1$, regime de temperatura zero, as funções modificadas de Bessel que contribuem de forma efetiva são: $I_{\pm 1}(\bar{\nu})$ que valem aproximadamente $\bar{\nu}/2$, se Ω/ω_c é próximo dos valores de "l". Assim a expressão da eq.(3.67) se reduz a:

$$\bar{\nu} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} = -\frac{\bar{\nu}/2}{\left(\frac{\Omega}{\omega_c} + 1\right)} + \frac{\bar{\nu}/2}{\left(\frac{\Omega}{\omega_c} - 1\right)}, \quad (3.73)$$

que simplificada assume a forma:

$$\Omega^2 = \omega_c^2 + \Omega_{pe}^2 \mathfrak{F} \quad (3.74)$$

ou

$$\Omega^2 = \omega_c^2 + \Omega_{pe}^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e}\right) J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c). \quad (3.75)$$

Na ausência de campos de radiação eletromagnética ($\gamma_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{F} \equiv 1$) a eq.(3.74) ou a eq.(3.75) assumem a mesma expressão da frequência híbrida superior [6,7,40-42,51]. Para um plasma livre de campos de radiação, só obtemos um modo de oscilação, que é a frequência híbrida superior. Porém quando submetido a um campo de radiação no regime de ondas circularmente polarizadas, surge então outros modos de oscilação coletiva. Observamos

claramente a partir das expressões das eqs.(3.74) ou (3.75) que a frequência de plasma é modulada, apresentando assim os vários harmônicos presentes nas funções de Bessel de ordem zero. No capítulo 5 apresentaremos os cálculos numéricos efetuados para algumas espécies típicas de plasmas.

3.2.3 Regime de ressonância eletrociclôtrônica

Em regime de ressonância eletrociclôtrônica, a frequência da radiação eletromagnética deve ser igual a frequência eletrociclôtrônica, $\Omega = \omega_c$. Neste caso devemos analisar novamente a eq.(3.67). Quando estamos em regime de ressonância, as expressões de γ_2 e γ_3 tendem a valores

elevados: $\gamma_2 = eE/m_e(\omega^2 - \omega_c^2) \rightarrow \infty$ e $\gamma_3 = e^2 E^2 / 8m_e \omega(\omega^2 - \omega_c^2) \rightarrow \infty$. Assim,

$$\mathfrak{F} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_\gamma}{k_B T_e}\right) J_0^2(q_x \gamma_2) J_0^2(q_y \gamma_2 \omega_c) \rightarrow 0. \quad (3.76)$$

Observando a expressão da eq.(3.67), vemos que:

$$\bar{v} \frac{\omega_c^2}{\Omega_{pe}^2 \mathfrak{F}} \rightarrow \infty \quad (3.77)$$

o que nos leva a concluir que:

$$\Omega = l\omega_c. \quad (3.78)$$

Onde $l \geq 1$. Esse resultado não é observado em um plasma frio magnetizado, porém podemos observar esse resultado em um plasma quente magnetizado, mesmo quando submetido a uma radiação eletromagnética que se propaga paralelamente ao campo magnético.

Capítulo 4- Potencial de blindagem dinâmica em um Plasma magnetizado submetido a dois campos de radiação eletromagnética.

Calcularemos neste capítulo a constante dielétrica estática efetiva e a taxa de absorção de energia para um plasma de elétrons magnetizado na presença de dois campos de radiação eletromagnética, considerando efeitos de blindagem no potencial de espalhamento, levando em consideração o aquecimento do plasma para a obtenção da fusão termonuclear.

Com o desenvolvimento de fontes de alta intensidade de radiação eletromagnética, muitos pesquisadores produziram trabalhos voltados com a interação laser-plasma [48,52-57]. Nesta investigação da interação da radiação eletromagnética com o plasma, foi demonstrado que o modo mais eficiente de aquecimento de plasma via Bremsstrahlung inverso é submeter o plasma, não magnetizado [11] e magnetizado [12], a dois campos de radiação eletromagnética, no caso um forte e um fraco. Porém a blindagem coulombiana devida aos elétrons no potencial dos íons, afeta diretamente a temperatura do plasma, tornando o processo de absorção de energia ineficiente. Este efeito de blindagem também é observado em plasmas astrofísicos densos [58] onde as reações termonucleares são afetadas e plasmas de semicondutores [59-61].

Com o intuito de promover um colapso nesta blindagem, vamos utilizar dois campos de radiação eletromagnética e, com um ajuste em suas respectivas frequências, otimizamos o processo de absorção de energia. Portanto, nesse capítulo, vamos considerar o nosso sistema sendo um gás de elétrons magnetizados na presença dos referidos campos de radiação perturbado pela presença de uma distribuição de carga estática. Neste estudo, demonstraremos que o referido ajuste nas frequências dos campos conduz ao colapso na blindagem e conseqüentemente otimiza o processo de absorção de energia. Vamos determinar o potencial efetivo desta

distribuição de carga estática levando em conta os efeitos de plasmas. Esse cálculo será efetuado no regime de aproximação aleatória de fase (random-phase-approximation RPA) pelo tratamento da interação Coulombiana entre os elétrons com um campo auto-consistente. Os campos de radiação eletromagnética serão tratados como ondas planas na aproximação de dipolo a exemplo dos capítulos anteriores.

4.1 Cálculo do potencial de carga estática e a constante dielétrica efetiva

Nesse cálculo vamos iniciar com a equação de Schrödinger que descreve a interação de um elétron de massa m_e com um campo magnético uniforme é expressa por:

$$H_0 \Phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.1)$$

onde,

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} (\vec{p} - e\vec{A}_0)^2. \quad (4.2)$$

Aqui, \vec{A}_0 é dado pela eq.(3.1) e, na eq.(4.1), $\Phi(\vec{r}, t)$ representa as funções de onda de Landau [43]. Porém, na presença de dois campos de radiação eletromagnética, a equação de Schrödinger assume a seguinte forma [12]:

$$H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.3)$$

com,

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - e \left(\vec{A}_0 - \vec{A}_1(t) - \vec{A}_2(t) \right) \right)^2. \quad (4.4)$$

Onde

$$\vec{A}_1(t) = \left(\frac{E_1}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t) \right) \hat{e}_x \quad \text{e} \quad \vec{A}_2(t) = \left(\frac{E_2}{\omega_2} \text{sen}(\omega_2 t) \right) \hat{e}_y. \quad (4.5)$$

Capítulo 4

O cálculo a ser efetuado aqui é semelhante ao que foi realizado no capítulo 3, ou seja, para resolver a eq.(4.3), utilizaremos novamente uma transformação unitária da forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = U\Phi(\vec{r}, t), \quad (4.6)$$

onde U é dado pela eq.(2.10). Feito isso teremos:

$$\alpha_x = -\frac{e\omega_c^2}{2} \left[\frac{E_1 \text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1(\omega_c^2 - \omega_1^2)} + \frac{E_2 \text{cos}(\omega_2 t)}{\omega_2(\omega_c^2 - \omega_2^2)} \right]; \quad (4.7)$$

$$\alpha_y = -\frac{e\omega_c}{2} \left[\frac{E_1 \text{cos}(\omega_1 t)}{(\omega_c^2 - \omega_1^2)} + \frac{E_2 \text{cos}(\omega_2 t)}{(\omega_c^2 - \omega_2^2)} \right]; \quad (4.8)$$

$$\beta_x = -\frac{e}{m} \left[\frac{E_1 \text{cos}(\omega_1 t)}{(\omega_c^2 - \omega_1^2)} + \frac{E_2 \text{cos}(\omega_2 t)}{(\omega_c^2 - \omega_2^2)} \right]; \quad (4.9)$$

$$\beta_y = -\frac{e\omega_c}{m} \left[\frac{E_1 \text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1(\omega_c^2 - \omega_1^2)} + \frac{E_2 \text{cos}(\omega_2 t)}{\omega_2(\omega_c^2 - \omega_2^2)} \right]. \quad (4.10)$$

Se considerarmos um elétron na presença de dois campos de radiação eletromagnética e um campo magnético uniforme interagindo com uma carga estática descrito pelo potencial $V(\vec{r})$, tal que:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - e(\vec{A}_0 - \vec{A}_1(t) - \vec{A}_2(t)) \right)^2 + V(\vec{r}), \quad (4.11)$$

e por meio de uma transformação unitária que irá transferir os termos dos dois campos de radiação eletromagnética da eq.(4.11) para um termo que descreve o potencial de uma distribuição de carga estática tal que:

$$\begin{aligned} H \rightarrow H' &= U^+ \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H \right] U \\ &= H_0 + V(\vec{r} + \vec{\beta}(t)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde H_0 é dado pela eq.(4.2), então teremos o Hamiltoniano para um elétron em um campo magnético uniforme que se move em um potencial deslocado, $V(\vec{r} + \vec{\beta}(t))$. Utilizando a eq.(4.12) e também o formalismo de segunda quantização para o Hamiltoniano (na representação de Φ), teremos:

$$H = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} - e \sum_{\alpha \beta \vec{k}} \tilde{\varphi}(\vec{k}, t) \langle \beta | \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) | \alpha \rangle c_{\beta}^{\dagger} c_{\alpha}. \quad (4.13)$$

Onde $\varepsilon_{\alpha} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}$ é a energia do elétron no nível de Landau

$\alpha = (n, p_x, p_z)$, $\beta = (n', p_x + \hbar k_x, p_z + \hbar k_z)$, $\tilde{\varphi}(\vec{k}, t)$ descreve as componentes de Fourier para o potencial deslocado, o qual é dado pela equação de Poisson:

$$k^2 \tilde{\varphi}(\vec{k}, t) = 4\pi \tilde{\rho}(\vec{k}, t) - 4\pi e \sum_{\alpha, \beta} \langle \beta | \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) | \alpha \rangle \langle c_{\beta}^{\dagger} c_{\alpha} \rangle_t. \quad (4.14)$$

Aqui $\tilde{\rho}(\vec{k}, t)$ é o componente de Fourier para a distribuição de carga deslocada e $\langle c_{\beta}^{\dagger} c_{\alpha} \rangle_t$ é a média com o Hamiltoniano completo. Notamos que se $\varphi(\vec{k}, t)$ e $\rho(\vec{k})$ são os componentes de Fourier do potencial e da distribuição de carga, na representação de ψ . Eles se relacionam com $\tilde{\varphi}(\vec{k}, t)$ e $\tilde{\rho}(\vec{k}, t)$ na representação de Φ por:

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}, t) = \varphi(\vec{k}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\beta}(t)); \quad (4.15)$$

$$\tilde{\rho}(\vec{k}, t) = \rho(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\beta}(t)). \quad (4.16)$$

Utilizamos a aproximação eletrostática (electrostatic approximation - EA) em um plasma magnetizado, embora na presença de um campo magnético, os modos normais em um plasma envolvem contribuições de corrente longitudinais e transversais e, exceto sobre certas condições, esse último não precisa ser desprezado. Essas condições são muito bem descritas [62,63] se a

frequência (ω) e o comprimento de onda (k^{-1}) satisfizerem a relação $\omega \ll kc$, e a corrente longitudinal não for desprezível comparada com a corrente transversal. A eq.(4.13) foi utilizada sob esses aspectos. Isto significa que a manipulação do campo auto-consistente espacialmente não uniforme em RPA foi efetuada apenas nas interações Coulombianas que importam (EA). A seguinte condição $\omega_{modo} \ll k_{modo} c$ justifica a eq.(4.14).

Prosseguindo, vamos fazer uma nova denotação: $\alpha = (n, p_x, p_z)$ e $\alpha' = (n', p_x - \hbar k_x, p_z - \hbar k_z)$. Construindo uma equação de movimento para $\langle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} \rangle_t$ no regime de RPA e resolvendo a referida equação com a seguinte condição inicial, $\langle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} \rangle_{t=\infty} = 0$, teremos:

$$\langle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} \rangle_t = e^{\left[\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) t \right]} \int_{-\infty}^t dt' i e \tilde{\varphi}(\vec{k}, t') \langle \alpha | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} | \alpha' \rangle (f_{\alpha'} - f_{\alpha}) e^{\left[\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) t' \right]}, \quad (4.17)$$

onde f_{α} representa o número de ocupações do elétron no nível α de Landau. Substituindo a eq.(4.17) na eq.(4.14), teremos:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\vec{k}, t) &= \frac{4\pi\tilde{\rho}(\vec{k}, t)}{k^2} - \frac{4\pi i e^2}{k^2} \\ &\cdot \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\varphi}(\vec{k}, t') \sum_{\alpha, \alpha'} \left| \langle \alpha' | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | \alpha \rangle \right|^2 (f_{\alpha'} - f_{\alpha}) e^{\left[\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) (t-t') \right]}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Da eq.(4.18), observa-se que o componente temporal de Fourier de $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\rho}$, estão relacionados por:

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)}{k^2 \epsilon(\vec{k}, \omega)} \quad (4.19)$$

onde $\epsilon(\vec{k}, \omega)$ é a função dielétrica em RPA dada por [62-64]:

Capítulo 4

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi i e^2}{k^2} \sum_{\alpha, \alpha'} |\langle \alpha' | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} | \alpha \rangle|^2 \frac{f_{\alpha'} - f_{\alpha}}{\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar\omega}. \quad (4.20)$$

Utilizando as eq.(4.15), eq.(4.16) e eq.(4.19), teremos:

$$\varphi(\vec{k}, t) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\beta}(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{4\pi\rho(\vec{k})}{k^2\epsilon(\vec{k}, \omega)} e^{-i\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\vec{k}\cdot\vec{\beta}(t') - i\omega t'}. \quad (4.21)$$

Utilizando a função geradora de Bessel na eq.(4.21), bem como resolvendo as respectivas integrações, teremos:

$$\varphi(\vec{k}, t) = \sum_{n,s,\mu,\nu}^{+\infty} J_{n+\mu}(z_1) J_n(z_1) J_{s+\nu}(z_2) J_s(z_2) \left\{ \frac{4\pi\rho(\vec{k})}{k^2\epsilon(\vec{k}, n\omega_1 + s\omega_2)} e^{i(\mu\omega_1 + \nu\omega_2)t} \right\} \quad (4.22)$$

onde $z_i = \vec{k}_{\perp} \cdot \vec{a}_i$ ($i=1,2$), \vec{k}_{\perp} é o componente transversal de \vec{k} e $\vec{a}_i \equiv \frac{e\vec{E}_i\omega_c}{m_e\omega_i(\omega_c^2 - \omega_i^2)}$. Aqui \vec{E}_i

é o componente do campo elétrico da radiação eletromagnética "i". A eq.(4.22) indica que na presença de campos de altas frequências, o potencial de cargas estáticas além de ser anisotrópico, possui componentes nas frequências dos campos e seus harmônicos. Aqui, vamos considerar apenas o componente estático $\varphi_0(\vec{r})$ do potencial (i.e., $\mu = \nu = 0$). Assim, teremos:

$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \frac{4\pi\rho(\vec{k})}{k^2\epsilon_{eff}} e^{(-i\vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad (4.23)$$

onde,

$$\frac{1}{\epsilon_{ef}} = \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(z_1) J_s^2(z_2)}{\epsilon(\vec{k}, n\omega_1 + s\omega_2)} \quad (4.24)$$

$$\text{e } z_i \equiv \frac{ek_{\perp} E_i \omega_c}{m_e \omega_i (\omega_c^2 - \omega_i^2)}.$$

4.2 Cálculo das frequências de oscilações coletivas

A eq.(4.24) é a expressão da constante dielétrica efetiva. Entretanto, precisamos utilizar uma expressão para a constante dielétrica, $\epsilon(\vec{k}, \omega)$, para um plasma na presença apenas de um campo magnético uniforme. Para o limite de comprimentos de ondas extremamente grandes, temos a seguinte expressão [62]:

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\Omega_{pe}^2 \text{sen}^2 \theta}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_{pe}^2 \text{cos}^2 \theta}{\omega^2} \quad (4.25)$$

onde θ é o ângulo entre as direções de \vec{k} e o campo magnético (eixo z). Observamos da eq.(4.25) duas regiões de ressonância, que são as raízes ω_+ e ω_- da equação $\epsilon(\vec{k}, \omega) = 0$, ou seja:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\Omega_{pe}^2 - \omega_c^2 \right) \pm \left[\left(\Omega_{pe}^2 + \omega_c^2 \right)^2 - 4\Omega_{pe}^2 \omega_c^2 \text{cos}^2 \theta \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.26)$$

No regime de densidade elevada ($\Omega_{pe}^2 \gg \omega_c^2$) teremos da eq.(4.26):

$$\omega_+^2 = \Omega_{pe}^2 + \omega_c^2 \text{sen}^2 \theta; \quad (4.27)$$

$$\omega_-^2 = \omega_c^2 \text{cos}^2 \theta. \quad (4.28)$$

O modo híbrido superior ω_+ é, neste caso, o modo ordinário dos plasmons. O modo ω_- está associado com um movimento próximo a um movimento circular. No regime de baixa densidade ($\Omega_{pe}^2 \ll \omega_c^2$) teremos:

$$\omega_+^2 = \omega_c^2 + \Omega_{pe}^2 \text{sen}^2 \theta; \quad (4.29)$$

$$\omega_-^2 = \Omega_{pe}^2 \text{cos}^2 \theta. \quad (4.30)$$

O modo ω_- corresponde ao modo híbrido inferior que está bem próximo a um movimento linear paralelo ao campo magnético. O modo ω_+ corresponde ao modo ciclotrônico.

Capítulo 4

Retornando a eq.(4.24) e utilizando a eq.(4.25) no regime de ressonância $n = -s = 1$, teremos:

$$\frac{1}{\epsilon_{ef}} = \frac{J_1^2(z_1)J_1^2(z_2)}{1 - \frac{\Omega_{pe}^2 \text{sen}^2 \theta}{\Delta\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_{pe}^2 \text{cos}^2 \theta}{\Delta\omega^2}}. \quad (4.31)$$

Para um regime de densidade alta, $\Omega_{pe}^2 \gg \omega_c^2$, segue da eq.(4.31) que para $\Delta\omega = \Omega_{pe}$, ϵ_{ef}^{-1} se torna muito elevado; i.e., um colapso da blindagem ocorrerá resultando em um aumento de $\varphi_0(\vec{r})$. Por outro lado, para $\Delta\omega = \omega_c$, a eq.(4.31) será desprezível, i.e., ocorrerá um colapso na interação do elétron ($\varphi_0(\vec{r}) \rightarrow 0$). Também para $\omega_i = \omega_c$ ($i = 1, 2$), i.e., como para qualquer radiação eletromagnética cuja frequência se aproxime da frequência ciclotrônica, mas não simultaneamente ($\Delta\omega \neq 0$) a eq.(4.31) se torna desprezível desde que o argumento das funções de Bessel para $\omega_i = \omega_c$ se torne infinito. Neste caso haverá também um colapso da interação do elétron ($\varphi_0(\vec{r}) \rightarrow 0$). A mesma conclusão pode ser verificada para o regime de baixa densidade.

Podemos observar a partir da eq.(4.31), que o comportamento de ϵ_{ef}^{-1} para $\Delta\omega$ próximo da frequência de plasma é o oposto do caso onde $\Delta\omega$ é próximo da ressonância eletrociclotrônica. Um colapso na blindagem ocorrerá, para esse último caso, considerando que há também um colapso nas interações do elétron. Fisicamente, o fato de que ϵ_{eff}^{-1} se torna desprezível para $\Delta\omega \cong \omega_c$ pode ser interpretado da seguinte forma: Considerando o problema clássico de um elétron na presença dos dois campos de radiação eletromagnética e um campo magnético uniforme e sob a ação de um potencial V (i.e. o potencial dos outros elétrons, íons e impurezas), o Hamiltoniano é dado por:

$$H = \frac{1}{2}m_e v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}m_e v_{\perp}^2 + V \quad (4.32)$$

onde v_{\parallel}^2 e $v_{\perp}^2 = \left[\frac{eE_1}{m_e(\omega_1 - \omega_c)} \right]^2 + \left[\frac{eE_2}{m_e(\omega_2 - \omega_c)} \right]^2$, são as médias quadráticas das velocidades

dos elétrons nas direções longitudinais e transversais, respectivamente. Logo, quando $\Delta\omega \cong \omega_c$, uma das radiações eletromagnéticas, por exemplo, ω_1 , está próxima da frequência eletrociclôtrônica ω_c , v_{\perp} será muito grande ($v_{\perp} \rightarrow \infty$). A energia cinética transversal se torna maior do que V tanto que H será então determinado pelo termo da energia cinética. Isso equivale a dizer que na frequência eletrociclôtrônica, a energia originada dos campos de radiação eletromagnética é transferida para o movimento transversal do elétron o que aumentaria o raio da trajetória tanto que o elétron não sofreria dessa forma a interação com o potencial V . Isso implica que $\varphi_0(\vec{r})$ no lado esquerdo da eq.(4.23) seria desprezível no regime $\Delta\omega \cong \omega_c$, o que implica que ϵ_{ef}^{-1} teria valores muito pequenos.

Em contraste, no caso onde $\Delta\omega$ é próximo de Ω_{pe} , ao invés de um colapso na blindagem, as interações do elétron simplesmente não ocorrem. Esses dois comportamentos contrastantes de ϵ_{ef}^{-1} podem ser observados de outro ponto de vista. No caso da ocorrência do colapso na blindagem, a nuvem de blindagem (o meio do plasma polarizado) é submetida a um aumento na amplitude de oscilação ao passo que a frequência Ω_{pe} se aproxima de $\Delta\omega$ entre os dois campos de radiação eletromagnética. Os resultados são então uma intensificação das interações dos elétrons com os núcleos. De forma inversa, se a condição da frequência eletrociclôtrônica, $\Delta\omega \cong \omega_c$, for atingida, é o caráter individual do movimento do elétron (movimento circular da nuvem de blindagem) e não o coletivo que se torna importante. Aqui o movimento ciclôtrônico de um elétron exibe uma amplitude muito grande, típica de um comportamento de ressonância.

4.3 Taxa de aquecimento

Para estimar a taxa de aquecimento via Bremsstrahlung inverso, podemos fazê-lo de forma similar ao que foi feito na [12] para o processo de espalhamento elétron-íon na presença de campos externos. Com a finalidade de calcular a taxa de absorção de energia, precisamos da probabilidade de transição. Desta forma, escrevemos a amplitude de transição do elétron de ir do estado α ao estado α' :

$$P(\alpha \rightarrow \alpha') = -\frac{i}{\hbar} \int d^3r dt \Psi_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{r}, t) [-e\varphi(\vec{r}, 0)] \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (4.33)$$

onde as funções de onda Ψ são as funções originais do problema descrito pela eq.(4.3) e Ψ_{α} é dada por:

$$\Psi_{\alpha} = e^{\frac{i\vec{\alpha}(t)\cdot\vec{r}}{\hbar}} e^{\frac{i\vec{\beta}(t)\cdot\vec{p}}{\hbar}} \phi_{\alpha} \quad (4.34)$$

Assim, teremos:

$$P(\alpha \rightarrow \alpha') = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{J_1^2(\vec{k}\cdot\vec{a}_1) J_1^2(\vec{k}\cdot\vec{a}_2)}{\epsilon(\vec{k}, \Delta\omega)} \langle \alpha' | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} | \alpha \rangle \frac{4\pi}{Vk^2} \delta(\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar\Delta\omega) \quad (4.35)$$

onde V é o volume de normalização.

Supondo que os campos de lasers são fracos temos que $\vec{k}\cdot\vec{a}_1 \ll 1$ e $\vec{k}\cdot\vec{a}_2 \ll 1$, então serão válidas as seguintes aproximações[46]:

$$J_i^2(\vec{k}\cdot\vec{a}_i) \cong \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}_i}{2} \right)^2 \quad (4.36)$$

onde $i = 1, 2$. Utilizando esta aproximação e a eq.(4.20), obtemos:

$$P(\alpha \rightarrow \alpha') = iG\delta(\epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha} - \hbar\Delta\omega) \quad (4.37)$$

onde

$$G \equiv \frac{Ze^2 \bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2}{\pi V} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\Delta\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{(\Delta\omega^2 - \omega_c^2)} \sin^2 \theta \right]^{-1} \int k^2 \langle \alpha' | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | \alpha \rangle d^3 \vec{k}. \quad (4.38)$$

Com as eqs.(4.37) e (4.38) podemos escrever a equação para a probabilidade de transição

$P_t(\alpha \rightarrow \alpha')$ por unidade de tempo τ :

$$P_t(\alpha \rightarrow \alpha') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|P(\alpha \rightarrow \alpha')|}{\tau} \quad (4.39)$$

que é obtida da regra de ouro de Fermi:

$$P_t(\alpha \rightarrow \alpha') = \frac{2\pi}{\hbar} |G|^2 \delta(\varepsilon_{\alpha'} - \varepsilon_{\alpha} - \hbar\Delta\omega). \quad (4.40)$$

A equação cinética para a função de distribuição dos elétrons com momentum $\vec{p}_{\alpha'}$ é dada em termos da probabilidade de transição, utilizando-se a regra de ouro de Fermi, eq.(4.40),

$$\frac{\partial f(\vec{p}_{\alpha'})}{\partial t} = \sum_{\vec{p}_{\alpha}} P_t(\alpha \rightarrow \alpha') [f(\vec{p}_{\alpha}) - f(\vec{p}_{\alpha'})]. \quad (4.41)$$

De posse da eqs. (4.38) - (4.41) podemos calcular a taxa de absorção de energia como auxílio da seguinte relação:

$$\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt} = \sum_{\vec{p}_{\alpha'}} \varepsilon(\vec{p}_{\alpha'}) \frac{\partial f(\vec{p}_{\alpha'})}{\partial t} \quad (4.42)$$

onde $\varepsilon(\vec{p}_{\alpha'}) = \frac{(p_z + \hbar k_z)^2}{2m_e} + \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} + \alpha' \right)$.

Considerando apenas transições eletrônicas envolvendo a absorção e emissão de um fóton por dois campos de radiação eletromagnética, a expressão para a média da taxa de aquecimento é dada por:

Capítulo 4

$$\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt}_{sc} = \frac{15\pi(8\pi)^4 Z^2 e^4 \alpha^4 N_i N_e |\Delta\omega| I_1^2 I_2^2}{m^6 \beta (\omega_1^2 - \omega_c^2)^4 (\omega_2^2 - \omega_c^2)^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega_{pe}^2}{\Delta\omega^2}\right)^2}, \quad (4.43)$$

onde $\alpha = 1/137$ é a constante hiperfina, N_i e N_e são as densidades de íons e elétrons respectivamente, e e m são a carga e massa do elétron respectivamente, $\beta = 1/k_B T$, T a temperatura do plasma, I_1 e I_2 são as intensidades das radiações eletromagnéticas e $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, a diferença de frequência dos dois campos de radiação eletromagnética. Agora, na ausência de potencial de blindagem, a taxa de aquecimento, nas mesmas condições dadas acima, é dada por:

$$\frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt}_0 = \frac{15\pi(8\pi)^2 Z^2 e^4 \alpha^2 N_i N_e |\Delta\omega| I_1 I_2}{m^4 \beta \omega_c^2 (\omega_1^2 - \omega_c^2)^2 (\omega_2^2 - \omega_c^2)^2}. \quad (4.44)$$

Comparando as eqs.(4.43) e (4.44), podemos observar que, devido à blindagem dinâmica, eq.(4.31), a relação da taxa de aquecimento com as intensidades dos campos de radiação eletromagnética é quadrática ao invés de ser apenas linear, como é o caso da eq.(4.44) (taxa de aquecimento sem blindagem dinâmica).

Os resultados numéricos serão apresentados no capítulo 5.

Capítulo 5- Resultados e discussões

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados dos cálculos numéricos obtidos a partir da aplicação dos principais resultados teóricos deduzidos nos capítulos subseqüentes, a saber: 2, 3 e 4. Para tanto, utilizamos os parâmetros de algumas espécies típicas de plasma [65] (densidade, frequência e temperatura). Os referidos resultados foram obtidos com auxílio de computador, no Laboratório de Cálculo Científico de Nanoestruturas, onde foram utilizados programas computacionais (softwares) para resolução de cálculos matemáticos (MAPLE) e construção de gráficos (ORIGIN).

5.1 Modulação das propriedades dielétricas de um plasma não magnetizado sob a ação de um campo de radiação.

Vamos analisar o comportamento da eq. (2.56) efetuando alguns cálculos numéricos para algumas espécies típicas de plasma, a saber: Plasma de descarga gasosa, plasma morno e plasma quente. Para tanto, o componente elétrico da amplitude da radiação eletromagnética terá sua direção fixada no eixo "x" e assumiremos que a propagação dos modos de oscilações coletivas (plasmons) será ao longo da direção do "x" ($q_x = q$ e $q_z = q_y = 0$). Primeiramente aplicaremos a eq.(2.56) para um plasma de descarga gasosa e um plasma quente que possuem os seguintes parâmetros respectivamente: $n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $k_B T = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, $\Omega_{pe} = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$, $n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $k_B T = 1.6 \times 10^{-17} \text{ J}$ e $\Omega_{pe} = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$, onde n_0 é a densidade do plasma; $k_B T$ é a energia do plasma e Ω_{pe} é a frequência de plasma. Utilizaremos uma radiação eletromagnética com frequências na faixa de $\omega = 3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ até $\omega = \Omega_{pe}$.

Capítulo 5

A figura 5.1 mostra a relação de dispersão para as frequências dos modos de oscilações coletivas em função de q (número de onda) para duas espécies de plasma: Plasma de descarga gasosa e plasma quente. Utilizamos para a amplitude da radiação eletromagnética (intensidade da onda eletromagnética) o valor de $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$. Essas duas espécies de plasma possuem a mesma frequência de plasma, porém possuem temperaturas diferentes, mais bem próximas, de tal forma que, conforme pode ser observado do gráfico da figura 5.1, não há diferença nas respectivas relações de dispersão.

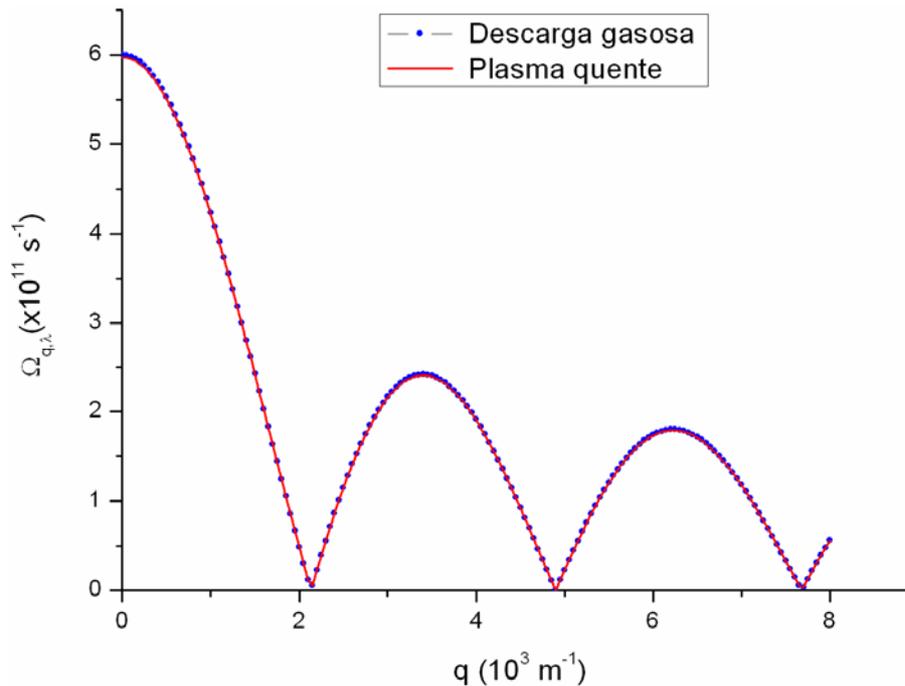


Figura 5.1: Gráfico da relação de dispersão para os modos de oscilação coletiva (plasmons) para um plasma de descarga gasosa (ponto azul) e plasma quente (linha vermelha) como uma função do número de onda q para uma amplitude e frequência de onda eletromagnética respectivamente: $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$ e $\omega = 3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$.

Capítulo 5

Utilizamos a eq.(2.56) para um plasma de descarga gasosa e obtivemos a superfície representada na figura 5.2 que mostra os modos de oscilações coletivas em função da frequência (ω) e da intensidade (E). Observamos desta representação tridimensional que o efeito da atenuação das frequências para valores baixos de frequências da radiação eletromagnética, abaixo da frequência de plasma, é intenso, tanto que reflete no efeito de atenuação das frequências dos modos de oscilações coletivas [aqui a velocidade de fase das excitações $v \approx v_{Th}$ (velocidade térmica)]. Observamos também da figura 5.2 que os modos de oscilações coletivas decrescem à medida que elevamos a magnitude da amplitude da radiação eletromagnética.

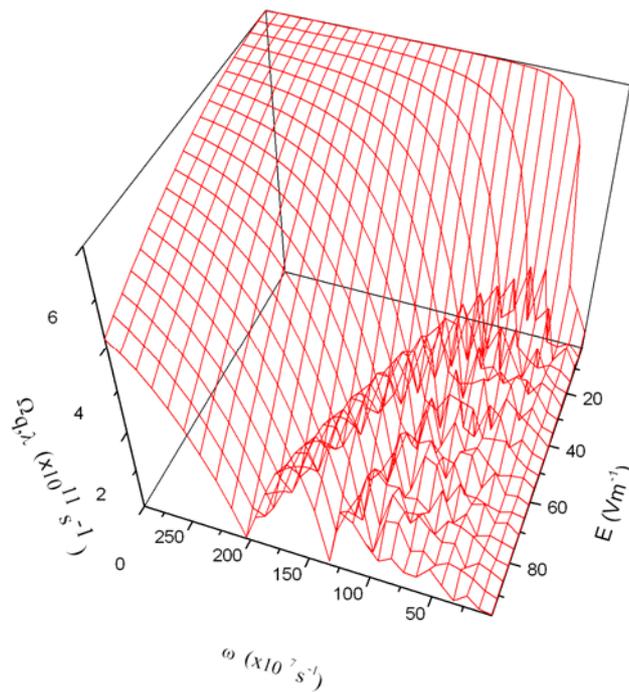


Figura 5.2: Gráfico das frequências dos modos de oscilações coletivas como função da frequência da radiação eletromagnética (ω) e da amplitude (E) para um plasma de descarga gasosa.

Aplicamos a eq. (2.56) para um plasma de descarga gasosa para três regimes de frequências de radiação eletromagnéticas, a saber, $\omega_1 = 1 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 2 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ e $\omega_3 = 3 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$, respectivamente como pode ser observado na figura 5.3. Podemos observar que as frequências para os modos de oscilações coletivas, possuem o mesmo comportamento que foi observado na figura 5.2.

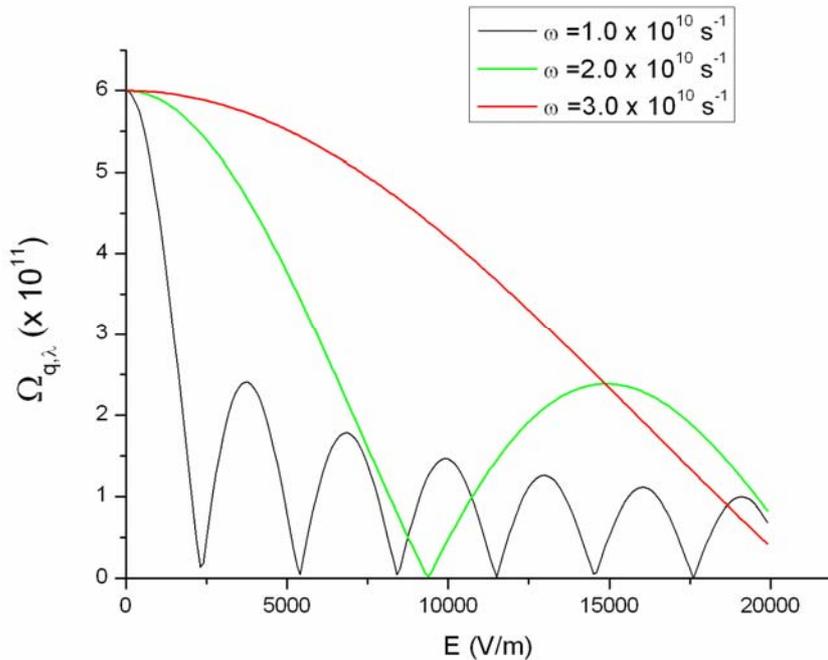


Figura 5.3: Gráfico das frequências para os modos de oscilações coletivas em função da amplitude da radiação eletromagnética (E) para um plasma de descarga gasosa para três frequências de radiação eletromagnética: $\omega_1 = 1 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (preto), $\omega_2 = 2 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (verde) e $\omega_3 = 3 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (vermelho).

Capítulo 5

A figura 5.4 mostra os modos de oscilações coletivas para três espécies típicas de plasma, a saber, Plasma quente e difuso ($n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$; $k_B T = 1.6 \times 10^{-17} \text{ J}$ and $\Omega_{pe} = 6 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$), Plasma de descarga gasosa ($n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $k_B T = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, $\Omega_{pe} = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$) e plasma morno ($n_0 = 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $k_B T = 1.6 \times 10^{-18} \text{ J}$ and $\Omega_{pe} = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$), como função da intensidade da radiação eletromagnética (E). Nesse caso utilizamos uma radiação eletromagnética com frequência de valor: $\omega = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$. Nesse regime de frequência, observamos do gráfico da figura 5.4 que as relações de dispersão para as três espécies de plasma diferem significativamente. Isso se deve essencialmente a temperatura de cada plasma e também da frequência da radiação eletromagnética.

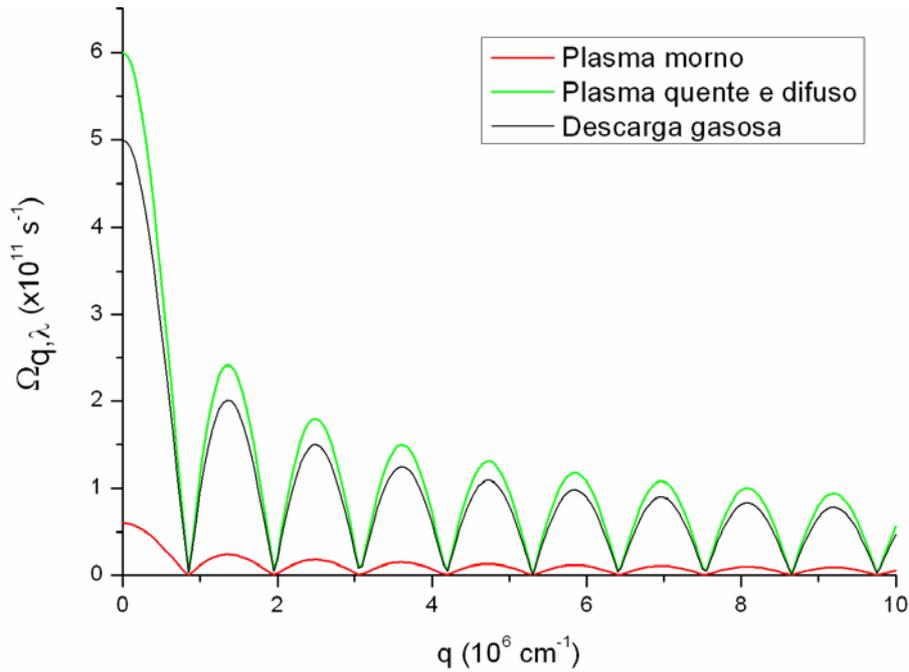


Figura 5.4: Gráfico das frequências dos modos de oscilações coletivas como função da amplitude da radiação eletromagnética (E) para um plasma quente (verde), plasma de descarga gasosa (preto) e plasma morno (vermelho). Frequência da radiação eletromagnética: $\omega = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$.

Capítulo 5

A figura 5.5, mostra a o termo de Landau (vermelho) dado pela expressão da eq. (2.82) comparado ao termo de Landau sem modulação (preto), para um plasma de descarga gasosa submetido a uma radiação eletromagnética de intensidade 100 V.m^{-1} e frequência igual a $\omega = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$. O termo de Landau expresso pela eq. (2.82) revela uma certa faixa de comprimento de onda, da ordem do comprimento de Debye, onde ocorre instabilidade.

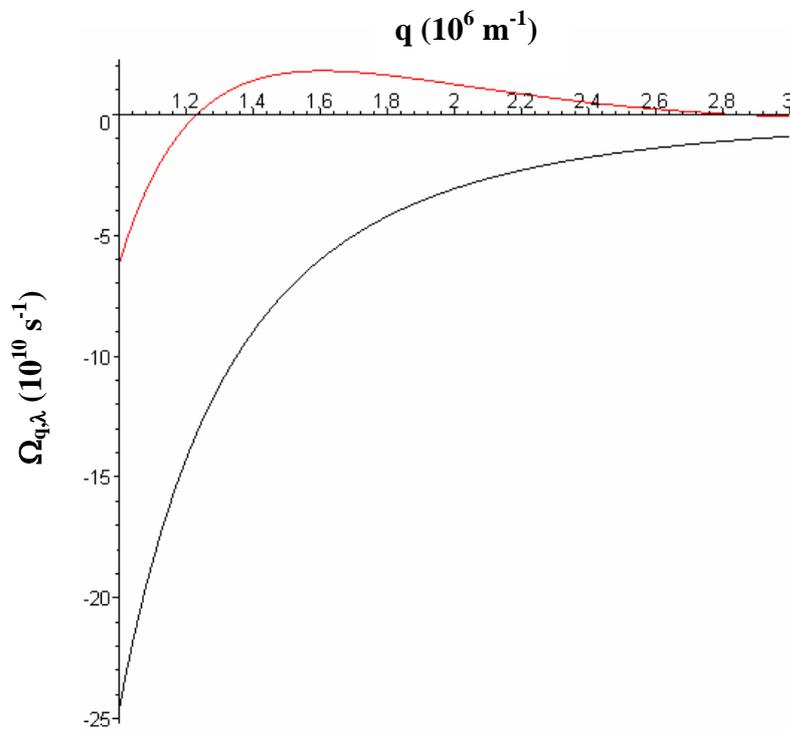


Figura 5.5 Gráfico dos termos de Landau com modulação (vermelho) e sem modulação (preto) para um plasma de descarga gasosa com comprimento de Debye da ordem de $7 \times 10^{-7} \text{ m}$.

5.2 Modulação das propriedades dielétricas de um plasma magnetizado sob a ação um campo de radiação eletromagnética em regime de ondas circularmente polarizada.

Vamos utilizar agora a eq.(3.75), com $q_x = q_y = q$, para efetuar os cálculos numéricos para alguns tipos de plasma, a saber: Plasma de descarga gasosa, plasma morno e plasma quente. Para esse procedimento vamos manter o campo magnético na direção do eixo "z" e o componente do elétrico da radiação na direção do eixo "x". Para efetuar os referidos cálculos numéricos, vamos utilizar a frequência da radiação eletromagnética no seguinte regime: $\omega = 20\% \omega_c$, onde ω_c é a frequência eletrociclôtrônica.

A figura 5.6 mostra os modos de oscilações coletivas para um plasma de descarga gasosa submetido a um campo magnético de intensidade 2T. Usamos para a amplitude da radiação eletromagnética os seguintes valores: 1Vm^{-1} ; 10Vm^{-1} e 50Vm^{-1} . Podemos observar, do gráfico da figura 5.6 uma significativa atenuação na frequência dos modos de oscilações coletivas à medida que utilizamos uma radiação eletromagnética com amplitude elevada. Isso mostra uma forte dependência da frequência dos modos de oscilações coletiva com a amplitude (intensidade) da radiação eletromagnética.

A figura 5.7 mostra a relação $\Omega_{q,\lambda} / \omega_c$ para os modos de oscilação coletiva para um plasma de descarga gasosa submetido a uma radiação eletromagnética com intensidade no valor de 10Vm^{-1} . Nesse caso utilizamos campos magnéticos com os seguintes valores: 2T; 3T e 5T. Observamos do gráfico da figura 5.7 que o número dos modos de oscilação é tão maior quanto menor for o campo magnético aplicado. Isso se deve ao fato de utilizarmos uma frequência para a radiação eletromagnética vinculada com a frequência eletrociclôtrônica.

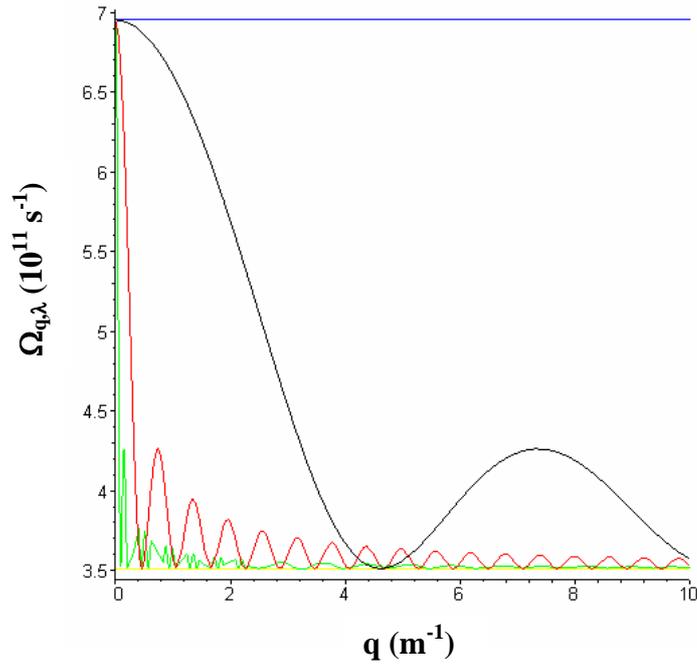


Figura 5.6: Gráfico da relação de dispersão para os modos de oscilação coletiva (plasmons) para um plasma de descarga gasosa como uma função do número de onda q para amplitudes 1Vm^{-1} (preto), 10Vm^{-1} (vermelho) e 50Vm^{-1} (azul).

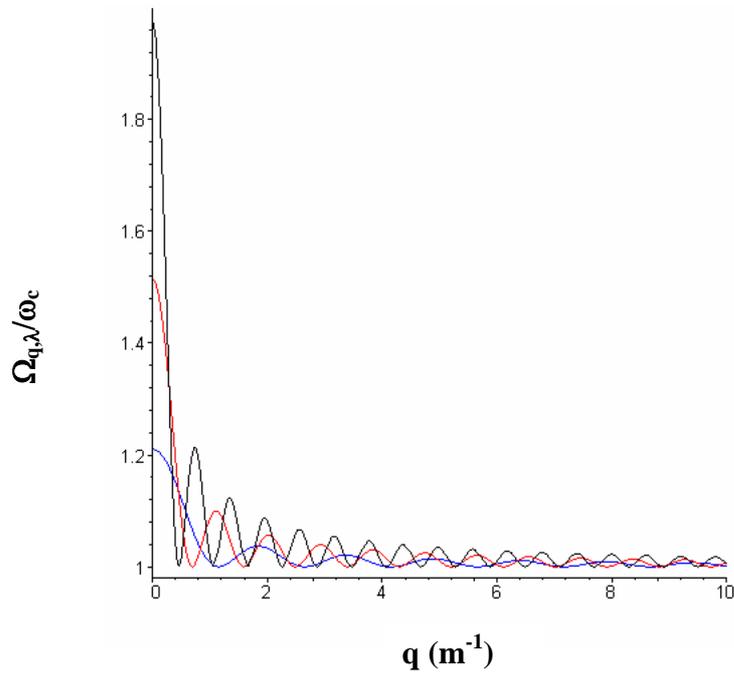


Figura 5.7: Gráfico da relação $\Omega_{q,\lambda}/\omega_c$ para os modos de oscilação coletiva (plasmons) para um plasma de descarga gasosa como uma função do número de onda q para amplitude $E = 10\text{Vm}^{-1}$. Com campos magnéticos de valores 2T (preto), 3T (vermelho) e 5T (azul).

A figura 5.8 mostra a relação $\Omega_{q,\lambda}/\omega_c$ para os modos de oscilação coletiva para três espécies típicas de plasma, a saber: Plasma de descarga gasosa, plasma morno e plasma quente. Para esse cálculo utilizamos um campo magnético no valor de 5T e uma radiação eletromagnética com intensidade no valor de 100Vm^{-1} . Observamos do gráfico da figura 5.8 que os comportamentos da frequência de plasmons são praticamente idêntico, mesmo para três espécies distintas de plasma.

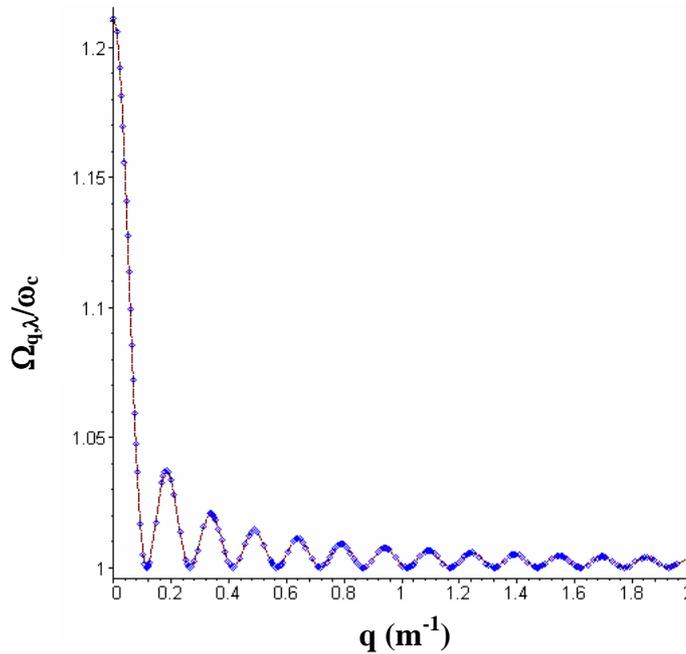


Figura 5.8: Gráfico da relação $\Omega_{q,\lambda}/\omega_c$ para os modos de oscilação coletiva (plasmons) para um plasma de descarga gasosa (preto), plasma morno (vermelho) e plasma quente (azul) como uma função do número de onda q para radiação eletromagnética com amplitude de 100Vm^{-1} e um campo magnético de 5T.

A energia de acoplamento ε_γ é muito baixa (da ordem de 10^{-27}) para esse regime de ondas eletromagnéticas. As temperaturas dos plasmas variam de 10^{-19} a 10^{-17} . Com isso, da expressão da eq.(3.75), teremos: $\exp(\varepsilon_\gamma/k_B T_e) \rightarrow 1$. As três espécies de plasma possuem a mesma frequência, portanto, é esperado que, quando submetidas às mesmas circunstâncias, ou seja,

mesma intensidade de campo magnetostático e mesma frequência e intensidade de radiação eletromagnética, os comportamentos para as frequências de plasmons também sejam praticamente idênticos.

A figura 5.9 mostra o comportamento das frequências de oscilações coletivas em função do campo magnético para plasmas de descarga gasosa (azul), plasma morno (vermelho) e plasma quente (verde). A exemplo do gráfico da fig. 5.6, podemos observamos que os efeitos de modulação conduzem a uma atenuação das frequências até o limite da frequência eletrociclôtrica (preto) à medida que a intensidade do campo magnético aumenta.

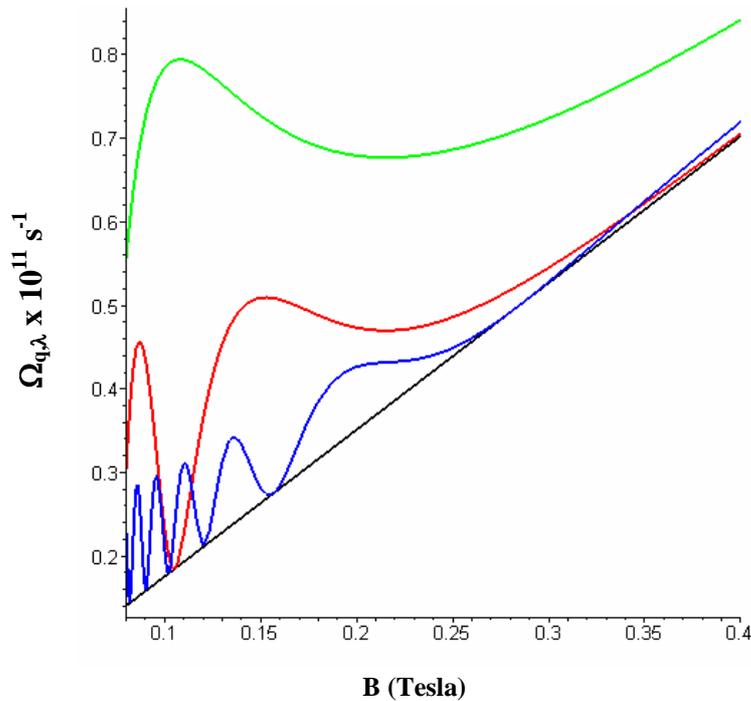


Figura 5.9: Gráfico da relação $\Omega_{q,\lambda} \times B$ para os modos de oscilação coletiva (plasmons) para um plasma de descarga gasosa (azul), plasma morno (vermelho) e plasma quente (verde) para radiação eletromagnética com amplitude de 100 Vm^{-1} e número de onda da ordem de $10^{-2} - 10^0 \text{ m}^{-1}$.

5.3 Potencial de blindagem dinâmica em um plasma magnetizado submetido a dois campos de radiação eletromagnética

Vamos estudar o comportamento das eqs. (4.43) e (4.44), taxa de aquecimento com blindagem dinâmica e sem blindagem respectivamente, para um plasma quente. Para tanto, vamos aplicar um campo magnético de 10 T no plasma e submetê-lo a um campo de duas radiações eletromagnéticas com comprimentos de onda de $10,6\mu\text{m}$ e $10,8\mu\text{m}$ (laser de CO_2). Uma das radiações terá sua intensidade fixada no valor de 10^{12} Wm^{-2} (laser moderado) e a outra será variada.

As figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento da taxa de aquecimento, eq.(4.43) sob um potencial de blindagem como função da intensidade de um dos campos de radiação eletromagnética (a intensidade do outro campo de radiação eletromagnética foi mantida fixa) e bem como o comportamento linear na intensidade eq.(4.44) na ausência dos efeitos do potencial de blindagem. Dos gráficos das figs. 5.10 e 5.11, podemos observar a diferença na taxa de aquecimento a medida que a intensidade de um dos campos de radiação eletromagnética é aumentada. Isto está associado ao fato de que, no gráfico da fig. 5.11, $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$ na eq.(4.43), enquanto que no gráfico da fig.5.10, na eq.(4.43), $\Delta\omega$ está afastado de Ω_{pe} . Fisicamente esta diferença pode ser compreendida se considerarmos o fato de que sob os efeitos do potencial de blindagem, os potenciais dos íons são responsáveis pelo espalhamento dos elétrons e conseqüentemente para o mecanismo do Bremsstrahlung inverso estar blindado pela nuvem eletrônica que não permite que ocorra a interação elétron-núcleos. Uma vez que os elétrons não experimentam o espalhamento dos núcleos mudar o momento necessário para uma rápida absorção da energia do campo de radiação eletromagnética, a taxa de aquecimento é atenuada intensamente. Por outro lado, como $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$, há um colapso na blindagem da nuvem e o

potencial dos núcleos se apresenta novamente. Este efeito é refletido na absorção da radiação eletromagnética que aumenta a taxa de aquecimento como comparado com a ausência de blindagem, eq.(4.44).

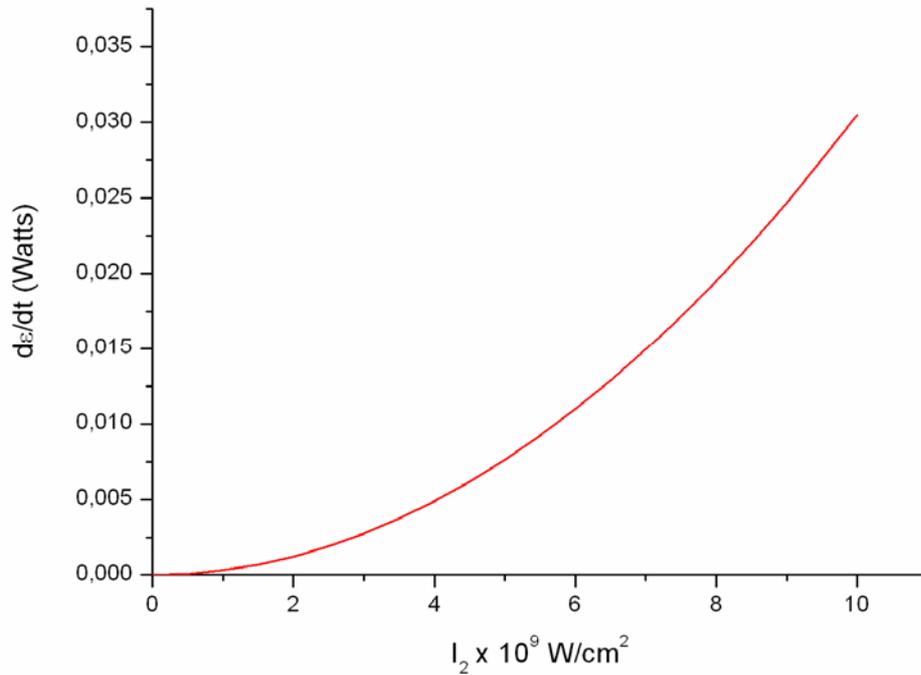


Figura 5.10: Gráfico da taxa de aquecimento de um plasma quente como função da intensidade do segundo campo de radiação eletromagnética. O primeiro campo de radiação eletromagnética foi mantido fixo 10^{12} Wm^2 (laser moderado). Os baixos valores da taxa de aquecimento se devem aos efeitos de blindagem para $\Delta\omega$ estar afastado de Ω_{pe} .

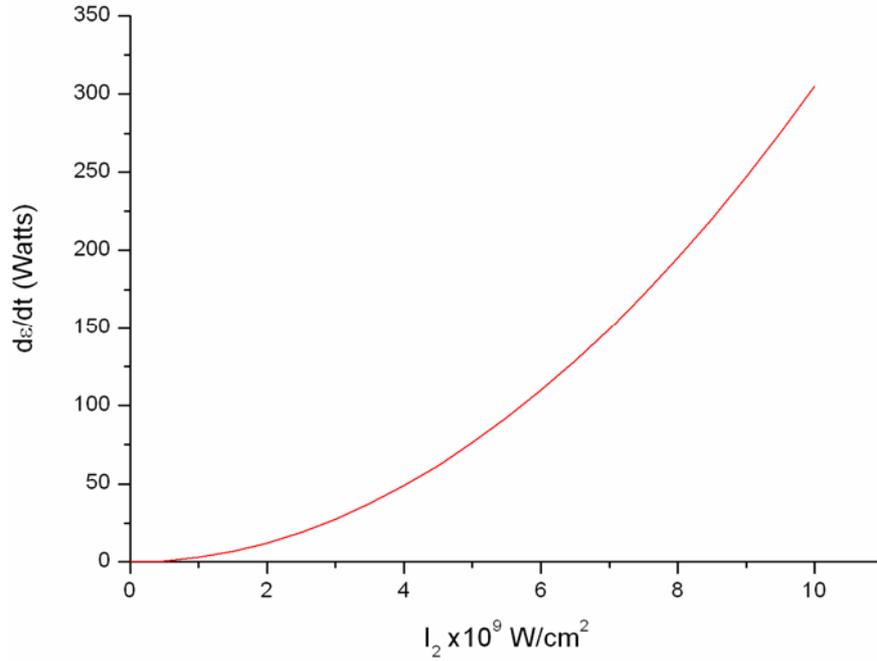


Figura 5.11: Gráfico da taxa de aquecimento de um plasma quente como função da intensidade do segundo campo de radiação eletromagnética. O primeiro campo de radiação eletromagnética foi mantido fixo 10^{12}Wm^2 (laser moderado). Os elevados valores da taxa de aquecimento se devem ao colapso dos efeitos de blindagem para $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$.

A figura 5.12 mostra a taxa de aquecimento em função da frequência de plasma (ou densidade de elétrons) para $\Delta\omega$ fixo. Podemos observar do gráfico da fig. 5.12 que para valores $\Omega_{pe} \approx 3,3 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$ ocorre o colapso na blindagem quando $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$. Aqui o fator $1/(1 - \Omega_{pe}^2/\Delta\omega^2)^2$ foi substituído pela usual função Lorentziana. A figura 5.13 mostra o comportamento do quociente entre as taxas de aquecimento com os efeitos de blindagem, eq.(4.43) e sem os efeitos de blindagem, eq.(4.44), a saber:

$$R = \frac{d\langle\epsilon\rangle/dt_{sc}}{d\langle\epsilon\rangle/dt_0} = \frac{\omega_c^2 \alpha^2 I_1 I_2}{m^2 (\omega_1^2 - \omega_c^2)^2 (\omega_2^2 - \omega_c^2)^2} \cdot \frac{1}{(1 - \Omega_{pe}^2/\Delta\omega^2)^2}. \quad (5.1)$$

Capítulo 5

Segue da eq.(5.1) que, para $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$, quando ocorre colapso na blindagem, a razão R pode tender para valores muito grandes $\left(1/\left(1-\Omega_{pe}^2/\Delta\omega^2\right)^2 \rightarrow \infty\right)$. Em outras palavras, controlando as propriedades dielétricas do plasma via dois campos de radiação eletromagnética podemos obter um alto ganho na taxa de aquecimento.

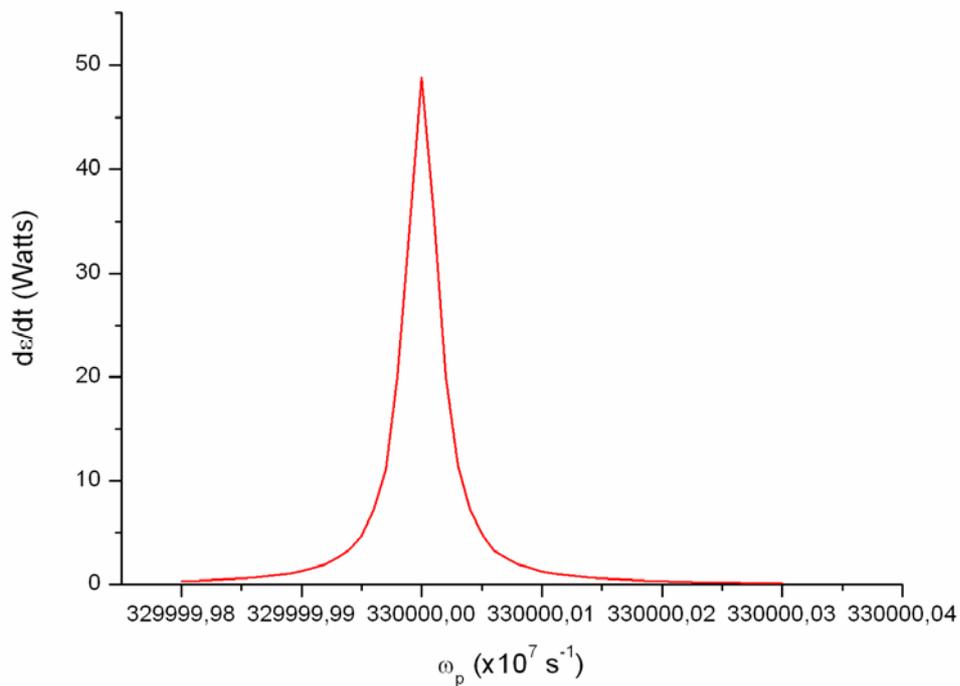


Figura 5.12: Gráfico da taxa de aquecimento para um plasma quente como função da frequência da plasma (ou densidade). As duas intensidades I_1 e I_2 e $\Delta\omega$ estão fixos. Os elevados valores da taxa de aquecimento refletem o colapso na blindagem.

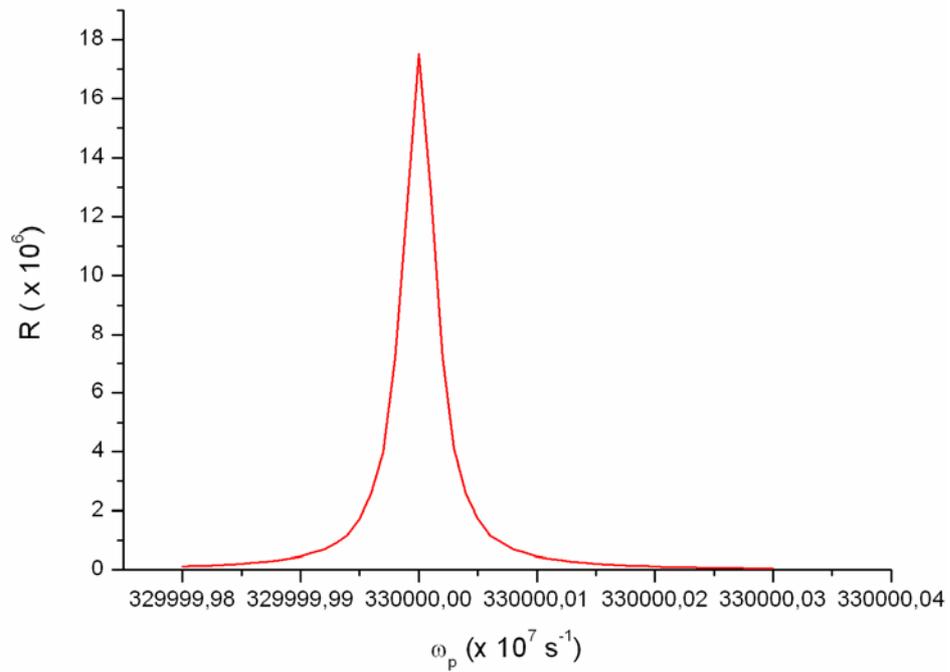


Figura 5.13: Gráfico do quociente R como função da frequência de plasma (ou densidade). As intensidades dos dois campos de radiação eletromagnética I_1 e I_2 , e $\Delta\omega$ estão fixos. Os elevados valores de R (ganho) refletem o colapso da blindagem para $\Delta\omega \approx \Omega_{pe}$.

Conclusão final

Para a realização desse trabalho, utilizamos a ferramenta da Mecânica Quântica para plasmas macroscópicos (magnetizados ou não magnetizados), na investigação de dois tópicos, a saber: Propriedades dielétricas na presença de campos de radiação eletromagnética; e o estudo dos efeitos de blindagem dinâmica na taxa de aquecimento.

Calculamos a função dielétrica classicamente e depois calculamos a mesma função usando as ferramentas da Mecânica Quântica, conforme mostrado no capítulo 1. Para tanto, foi necessário resolver a equação de Schrödinger para um elétron livre. De posse da função de onda, utilizamos o método da perturbação temporal. Este método possibilita encontrar o potencial local induzido responsável pela flutuação na densidade de carga. Assim, via equação de Poisson, encontramos a referida função dielétrica. Porém plasmas macroscópicos são sistemas clássicos e como tal devem ser tratados. Portanto foi utilizado o limite clássico. Com isso, por meio de uma relação de dispersão, $\epsilon(\vec{q}, \Omega) = 0$, encontramos as frequências dos modos de oscilação coletiva (plasmons). O resultado encontrado é idêntico ao resultado calculado classicamente. O que nos motiva a utilizar esse método mecânico-quântico nos cálculos subsequentes.

Resolvemos, no capítulo 2, o problema da interação plasma-campo de radiação eletromagnética em regime de ondas evanescentes. Nesse regime, as ondas eletromagnéticas penetram no plasma e se propagam até uma distância δ . Isso significa que as ondas eletromagnéticas estão sofrendo atenuação na sua amplitude transferindo energia para os elétrons. Tal regime é utilizado para se determinar experimentalmente a densidade de um plasma (cutoffs). Contudo, esse problema traz uma complicação adicional na equação de Schrödinger. Devemos resolver a referida equação para um elétron na presença de um campo de radiação

Conclusão final

eletromagnética (na aproximação de dipolo). Tal solução não é trivial, pois se trata de um problema onde o potencial é dependente do tempo. Entretanto, é possível contornar essa complicação. Para isso, utilizamos a técnica da transformação unitária, que transporta nosso problema de potencial dependente do tempo, para o caso simples de um elétron livre. De posse da função de onda, calculamos a flutuação na densidade de carga com o auxílio do método da perturbação temporal. A partir disso foi possível calcular a função dielétrica via equação de Poisson. Aqui o limite clássico foi aplicado na função dielétrica, e com a utilização da relação de dispersão, obtivemos numa primeira aproximação as frequências de plasmons. Mas, de forma geral, utiliza-se uma função de distribuição Maxwelliana. Nesse caso, devemos encontrar tanto as soluções reais, quanto as soluções imaginárias para as frequências de plasmons advindas da relação de dispersão. As soluções reais encontradas se reduzem ao caso anterior, e as soluções imaginárias são conhecidas como o termo de amortecimento de Landau. O amortecimento de Landau é significativo quando o comprimento de onda é da ordem do comprimento de Debye. Para elevados valores de comprimentos de ondas esse termo é desprezível. Ele está relacionado ao decréscimo no número de plasmons (amplitude da onda) e ocorre sem dissipação de energia por colisão. Esse efeito está ligado à existência de elétrons na função de distribuição que possuem velocidades aproximadamente iguais à velocidade de fase dos plasmons. Esses elétrons, viajam junto com os plasmons e podem trocar energia com os mesmos. Se os elétrons possuem velocidade inferior à velocidade de fase dos plasmons, eles ganham energia desses últimos, fazendo com que ocorra o amortecimento. Caso contrário, se os elétrons viajam a uma velocidade maior do que a velocidade de fase dos plasmons, esses últimos ganham energia fazendo com que ocorram as instabilidades (aumento na amplitude de onda). O estudo de regime de instabilidades é particularmente importante no tratamento de aquecimento de plasmas

Conclusão final

objetivando a fusão termonuclear. A partir dos resultados teóricos encontrados concluímos o que se segue:

- (i). Na presença do campo de radiação eletromagnética, a função dielétrica do plasma sofre uma intensa modulação. Tão intensa quanto maior for a relação E^2/ω^2 do campo eletromagnético.
- (ii). As frequências de plasmons são intensamente moduladas, fornecendo outros harmônicos ($d\Omega_{\vec{q},\lambda}/dq = 0$).
- (iii). O termo de Landau também sofre modulação. Observamos uma faixa de comprimento de onda, com valores da ordem do comprimento de Debye, onde ocorrem instabilidades. Os elétrons energéticos (devido ao acoplamento com o campo de radiação eletromagnética) estão transferindo energia para os plasmons, provocando assim, as referidas instabilidades.

Resolvemos, no capítulo 3, o problema de um plasma magnetizado submetido a um campo de radiação eletromagnética em regime de ondas circularmente polarizadas. Da mesma forma como no caso anterior, resolvemos a equação de Schrödinger para um elétron em um campo magnetostático submetido à ação de um campo de radiação eletromagnética. Com o auxílio da técnica de transformação unitária, calculamos a função de onda. A partir da função de onda, utilizando a técnica de perturbação temporal, determinamos a flutuação na densidade de carga. Ato contínuo, determinamos a função dielétrica do plasma magnetizado, via equação de Poisson. Aqui foi utilizado o limite clássico na função dielétrica. Por meio de uma relação de dispersão (modos de Bernstein) obtivemos as frequências dos plasmons para um plasma isotrópico ($k_B T_{\perp} = k_B T_z = k_B T_e$). Mesmo para uma função de distribuição Maxwelliana, a parte imaginária da solução das frequências de plasmons é nula, ou seja, não ocorrem amortecimentos para o número de plasmons que se propagam perpendicularmente ao campo magnetostático. Dos resultados teóricos obtidos podemos concluir o que se segue:

Conclusão final

(iv). Na presença de um campo de radiação eletromagnética, em regime de ondas circularmente polarizadas, a função dielétrica é intensamente modulada. Aqui, a modulação está para uma relação direta com a razão $E^2/(\omega^2 - \omega_c^2)$ referente ao campo de radiação eletromagnética.

(v). A frequência híbrida superior dos plasmons é intensamente modulada. E observamos a presença de outros harmônicos ($d\Omega/dq = 0$). Em regime de ressonância, a modulação da frequência híbrida conduz aos harmônicos ciclotrônicos ($\Omega = l\omega_c, l = 1, 2, 3, \dots$).

(vi). Os resultados teóricos obtidos neste capítulo, para valores elevados de comprimentos de ondas, estão de acordo com as observações experimentais realizadas por Gruber e Bekefi [6], que observaram propagação de plasmons nesse regime de comprimentos de onda ($d\Omega/dq < 0$).

Investigamos no capítulo 4, os efeitos do colapso na blindagem dinâmica, para um plasma magnetizado submetido a dois campos de radiação eletromagnética. Partimos da resolução da equação de Schrödinger para um elétron na presença de um campo magnetostático e, submetido à ação de dois campos de radiação eletromagnética. Via transformação unitária, determinamos a função de onda, de tal forma que os efeitos dos dois campos de radiação eletromagnética foi transferido para o termo que descreve o potencial de uma distribuição de carga estática. Aqui o formalismo da segunda quantização da Mecânica-Quântica, foi utilizado para o Hamiltoniano. Feito isso, levamos em consideração os efeitos das blindagens utilizando a aproximação da fase randômica (RPA) na equação de movimento para os operadores de criação e destruição dos elétrons. Nos prosseguimentos que se seguem, determinamos a função dielétrica do plasma em um regime RPA e o potencial de cargas estáticas com auxílio da equação de Poisson. A seguir, o dielétrico efetivo e as frequências de plasmons foram determinados. Com

Conclusão final

tudo isso efetuado, foi possível então, investigar o comportamento das taxas de aquecimento.

Dos resultados teóricos obtidos concluímos o que se segue.

(vii). A taxa de aquecimento devido à blindagem dinâmica é quadrática, com relação às intensidades dos campos de radiação eletromagnética, em contraste com a taxa de aquecimento sem os efeitos de blindagem dinâmica que é linear com relação às referidas intensidades.

Como perspectivas para desenvolvimento de trabalhos futuros, esperamos investigar o aquecimento de plasmas na absorção de energia via Bremsstrahlung inverso relativístico objetivando a fusão termonuclear.

Referência

- [1]. L. Tonks e I. Langmuir, Phys. Rev. **33**, 195 (1929).
- [2]. L. Tonks e I. Langmuir, Phys. Rev. **34**, 876 (1929).
- [3]. E. P. Gross, Phys. Rev. **82**, 232 (1951).
- [4]. H. K. Sen, Phys. Rev. **88**, 816 (1952).
- [5]. Bernstein I., Phys. Rev. **109**, 10 (1958).
- [6]. S. Gruber e G. Bekefi, Phys. of Fluids. **11**, 122 (1968).
- [7]. G. M. Walters e E. G. Harris, Phys. of Fluids. **11**, 112 (1968).
- [8]. D.R. Cohn, W. Halverson, B. Lax e C. E. Chase, Phys. Ver. Lett. **29**, 1544 (1972).
- [9]. J. F. Seely e E. G. Harris, Phys. Rev. A **7**, 1064 (1973).
- [10]. L. Schlessinger e J. Wright, Phys. Rev. A **20**, 1934 (1979).
- [11]. A.L. A. Fonseca, O. A. C. Nunes, and F. R. F. Aragão, Phys. Rev. A **38**, 4732 (1988).
- [12]. R. Gargano, A. L. A. Fonseca, and O. A. C. Nunes, Phys. Rev. A **41**, 2138 (1990).
- [13]. J. F. Seely, Phys. Rev. A **10**, 1863 (1974).
- [14]. M. A. Amato and L. C. M. Miranda, Phys. Rev. A **14**, 877 (1976).
- [15]. H. S. Brandi, B. Koiller, H. G. P. L. de Barros e L. C. M. Miranda, Phys. Rev. A **18**, 1415 (1978).
- [16]. M. B. S. Lima e L. C. M. Miranda, J. Phys. C **11**, L843 (1978).
- [17]. R.M.O. Galvão e, L.C.M. Miranda, Am.J.Phys. **51**, **729** (1983).
- [18]. M. Moham, R. Arharya, J. Plasma Phys. **19**, 177 (1978).
- [19]. M. B. S. Lima, C. A. S. Lima, and L. C. M. Miranda, Phys. Rev. A **19**, 1796 (1979).
- [20]. M. A. Amato, Nuovo Cimento **D 7**, 767 (1986).
- [21]. O. A. C. Nunes e A. L. A. Fonseca, Phys. Rev. A **40**, 311 (1989).
- [22]. A. L. A. Fonseca e O. A. C. Nunes, Phys. Ver. A **40**, 4107 (1989).
- [23]. A. L. A. Fonseca and O. A. C. Nunes, Phys. Lett. A **155**, 159 (1991).
- [24]. A. L. A. Fonseca, J. L. Ferreira e O. A. C. Nunes, J. Phys. Soc. Japan **65**, 3871 (1996).
- [25]. R. B. Pereira, A. L. A. Fonseca, and O. A. C. Nunes, J. Phys. Soc. Jpn **67**, 4098 (1998).
- [26]. C. G. Pinheiro, Máquina de espelhos magnéticos para produção de plasma na frequência eletrociclôtrônica, Dissertação de Mestrado, IF-UnB, 1999.
- [27]. D. F. Miranda, A. F. Guimarães, A. L. A. Fonseca, D. A. Agrello, and O. A. C. Nunes, Contrib. Plasma Phys. **45**, 22 (2005).

Referência

- [28]. T. Taguchi, T. M. Antonsen Jr., and H. M. Milchberg, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 205003 (2004).
- [29]. P. U. Lamelle, *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, 465 (1998).
- [30]. I. R. Rafatov, P. V. Kozlov, and V. M. Lelevkin, *Contrib. Plasma Phys.* **45**, 139 (2005).
- [31]. D. Pines e J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **125**, 804 (1962).
- [32]. H. W. Wyld Jr. e D. Pines, *Phys. Rev.* **127**, 1851 (1962).
- [33]. E.G.Harris, *Advances in Plasma Physics*, **3**, 157, A. Simon e W.B. Thompson - Interscience Publisher, New York (1969).
- [34]. R.B. Pereira, *Aplicação da Mecânica Quântica no Estudo de Plasmas Submetidos a Campos Externos*, Tese de Doutorado, IF-UnB, (1999).
- [35]. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory* (Elsevier Butterworth – Heinemann, Oxford, England, 1977, reprinted 2005).
- [36]. S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, Inc. (1974).
- [37]. A.S. Davidov, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, New York (1965)
- [38]. W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism*, Addison & Wesley, USA (1971).
- [39]. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, USA (1975).
- [40]. J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics* (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, São Paulo, 1995).
- [41]. F.F.Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York (1974)
- [42]. P.A Sturrock, *Plasma Physics*, Cambridge University Press (1994).
- [43]. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Electrodynamics* (Elsevier Butterworth - Heinemann, Oxford, England, 1982, reprinted 2004).
- [44]. M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, McGraw-Hill, Brasil (1973).
- [45]. I. S. Gradshteyn e L. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, USA (2000).
- [46]. M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 1964.
- [47]. E. Butkov, *Física Matemática*, Ed. Guanabara, Brasil (1988).
- [48]. W. L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley, USA (1988).
- [49]. A. F. Guimarães, D. F. Miranda, A. L. A. Fonseca e O. A. C. Nunes, *Suppression of plasma high-frequency electrical conductivity under a radiation field*, submetido à publicação no *European Journal of Physics*, 2006.

Referência

- [50]. E.B. Kleiman, I.M. Ojringel, *Physica Scripta*, **39**, 749 – 751 (1989).
- [51]. Akhiezer, *Collective Oscillations in Plasma*,
- [52]. A. Das et al., *Phys. Plasmas* **5**, 2533 (1998); S. Ptalzner et al., *Phys. Rev. E* **57**, 4698 (1998).
- [53]. Y. Kostyukov et al., *Phys. Rev. E* **59**, 1122 (1999); G. M. Fraiman et. al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 319, (1999); W. Yu. et al., *Phys. Rev. E* **59**, 3583 (1999).
- [54]. B. Ersfeld et al., *Phys. Plasmas* **7**, 1001 (2000); A.M. Al-Khateeb, *Phys. Rev. E* **62**, 2684 (2000).
- [55]. A. Wierling et al., *Phys. Plasmas* **8**, 3810 (2000); Th. Bornath et al., *Phys. Rev. E* **64**, 26414 (2001).
- [56]. G. Hazah et al., *Phys. Plasmas* **9**, 345, (2002).
- [57]. G. Shvets et al., *Phys. Rev. E* **65**, 46403 (2002).
- [58]. A. Erdas et al., *AIP Conference Proceedings* **327**, 323 (1995).
- [59]. C. ZHANG, *Phys. Rev. B* **65**, 153107, (2002).
- [60]. S. C. Lee, I. Galbraith, *Phys. Rev. B* **62**, 15327 (2000).
- [61]. N. Van Trong, G. Mahler, *Phys. Rev. B* **54**, 1766 (1996).
- [62]. N. D. Mermin, E. Canel, *Ann. Phys. N. Y.* **26**, 247 (1964).
- [63]. V. Celli, N. D. Mermin, *Ann. Phys.* **30**, 279 (1964).
- [64]. D. Pines, *Many-Body Problems* (Benjamin, New York, 1961).
- [65]. J. D. Huba, *NRL Plasma Formulary* (Washington, USA, 1994).

Apêndice A. Resolução do Sistema de Equações Diferenciais do Capítulo 2

Temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = 0; \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \frac{1}{m_e} \left(\vec{\alpha} - e \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \hat{e}_x \right) = 0; \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{\alpha} - \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \cdot \vec{\beta} + \frac{1}{2m_e} \left(\vec{\alpha} - e \left(\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) \hat{e}_x \right)^2 = 0. \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo a eq.(A.1) e assumindo as condições iniciais, teremos:

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo na eq.(A.2), teremos:

$$\frac{d\beta_y}{dt} = \frac{d\beta_z}{dt} = 0 \quad (\text{A.5})$$

e

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eE}{m_e \omega} \text{sen}(\omega t). \quad (\text{A.6})$$

Integrando as eqs.(A.5) e (A.6) e assumindo as condições iniciais, teremos:

$$\beta_x = \frac{eE}{m_e \omega^2} (1 - \cos(\omega t)); \beta_y = \beta_z = 0. \quad (\text{A.7})$$

A eq.(A.3) tem a seguinte forma:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{e^2 E^2}{2m_e \omega^2} \text{sen}^2(\omega t). \quad (\text{A.8})$$

Agora integrando a eq.(A.8), teremos:

Apêndice A

$$\eta = -\frac{e^2 E^2}{4m_e \omega^2} t + \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega^3} \text{sen}(2\omega t). \quad (\text{A.9})$$

Portanto temos a solução do sistema dada pelas eqs.(A.4), (A.7) e (A.9).

Apêndice B. Resolução do Sistema de Equações Diferenciais do Capítulo 3

Temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{d\alpha_z}{dt} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\alpha_y}{dt} + \omega_c \left(\alpha_x - eB_0\beta_y - e\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} + \frac{1}{m_e} \left(\alpha_x - eB_0\beta_y - e\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} + \frac{\alpha_y}{m_e} = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} + \frac{\alpha_z}{m_e} = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2m_e} \left(\alpha_x - eB_0\beta_y - e\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right)^2 + \frac{\alpha_y^2}{2m_e} - \frac{d\alpha_y}{dt} \beta_y + \frac{d\beta_y}{dt} \alpha_y = 0. \quad (\text{B.6})$$

Da eq.(B.5) temos:

$$\frac{d\beta_z}{dt} = 0 \Rightarrow \beta_z = 0. \quad (\text{B.7})$$

Da eq.(B.4) temos:

$$\frac{d^2\beta_y}{dt^2} = -\frac{1}{m_e} \frac{d\alpha_y}{dt}. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo a expressão da eq.(B.2) na eq.(B.8), temos:

$$\frac{d^2\beta_y}{dt^2} = \frac{1}{m_e} \omega_c \left(-eB_0\beta_y - e\frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right). \quad (\text{B.9})$$

Ou ainda:

Apêndice B

$$\frac{d^2 \beta_y}{dt^2} + \omega_c^2 \beta_y = -\omega_c \frac{e}{m_e} \frac{E}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (\text{B.10})$$

onde, $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$. Procuramos uma solução da forma:

$$\beta_y = A \text{sen}(\omega t). \quad (\text{B.11})$$

Substituindo a expressão da eq.(B.11) na eq.(B.10), teremos como solução:

$$\beta_y = \frac{e\omega_c E}{m_e \omega (\omega^2 - \omega_c^2)} \text{sen}(\omega t). \quad (\text{B.12})$$

Agora substituindo a expressão da eq.(B.12) na eq.(B.4) e na eq.(B.3), teremos:

$$\alpha_y = -\frac{e\omega_c E}{(\omega^2 - \omega_c^2)} (\cos(\omega t) - 1), \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{e\omega E}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)} \text{sen}(\omega t). \quad (\text{B.14})$$

Que integrando, reduz a:

$$\beta_x = -\frac{eE}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)} (\cos(\omega t) - 1). \quad (\text{B.15})$$

Das expressões das eqs.(B.12), (B.13) e (B.15), temos que:

$$\frac{\alpha_y^2}{2m_e} = \frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{2m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} (\cos^2(\omega t) + 1 - 2\cos(\omega t)), \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d\alpha_y}{dt} \beta_y = \frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} \text{sen}^2(\omega t) \quad (\text{B.17})$$

e

$$\frac{d\beta_y}{dt} \alpha_y = -\frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} (\cos^2(\omega t) - \cos(\omega t)). \quad (\text{B.18})$$

Apêndice B

Substituindo as expressões das eqs.(B.16), (B.17) e (B.18) na eq.(B.6), efetuando algumas manipulações algébricas, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} = & -\frac{e^2 \omega^2 E^2}{2m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} \text{sen}^2(\omega t) + \frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{2m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} \text{cos}^2(\omega t) \\ & + \frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} \text{sen}^2(\omega t) - \frac{e^2 \omega_c^2 E^2}{2m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Integrando e efetuando as manipulações algébricas necessárias, teremos finalmente:

$$\eta = -\frac{e^2 E^2}{4m_e (\omega^2 - \omega_c^2)^2} t + \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega (\omega^2 - \omega_c^2)} \text{sen}(2\omega t). \quad (\text{B.20})$$