Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Máquina de Adição n-ádica e Grupos Solúveis

por

Josimar da Silva Rocha

Brasília

2007

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Máquina de Adição n-ádica e Grupos Solúveis

por

Josimar da Silva Rocha *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do título de

Doutor em Matemática

14 de junho de 2007

Comissão Examinadora:

Prof. Said Najati Sidki -MAT/UnB (Orientador)

Prof. Pavel Zalesski - MAT/UnB (Membro)

Prof. Alexandre Grishkov - IME/USP (Membro)

Prof. Ana Cristina Vieira - UFMG (Membro)

Prof. Dessislava Kochloukova - Unicamp (Membro)

*O autor foi bolsista da CAPES/CNPq durante parte da elaboração deste trabalho

Resumo

Nesta tese provamos que todo grupo solúvel do grupo finitamente gerado do grupo de automorfismos da árvore regular n-ária T_n, $\operatorname{Aut}(T_n)$, que contém a máquina de adição n-ádica tem uma estrutura bastante restrita.

Provamos que todo subgrupo nilpotente de $\operatorname{Aut}(T_n)$ contendo a máquina de adição é um grupo abeliano livre de torção.

Estudando os elementos de grupos abelianos normalizados pela máquina de adição n-ádica em $\operatorname{Aut}(T_n)$, demonstramos que quando n é um primo p, todo subgrupo solúvel finitamente gerado do pró-Sylow p-subgrupo de $\operatorname{Aut}(T_p)$, contendo a máquina de adição p-ádica é uma extensão de um grupo metabeliano livre de torção por um p-grupo finito.

Palavras chaves: Árvore n-ária; máquina de adição; grupos nilpotentes; grupos solúveis; transformações de Tietze.

Abstract

We prove in this thesis that finitely generated soluble group of automorphisms $\mathrm{Aut}(T_n)$ of the regular n-ary tree T_n, which contain the n-ary adding machine have restricted structure.

We prove that every nilpotent subgroup of $\mathrm{Aut}(T_n)$ containing then n-ary adding machine is a torsion-free abelian group.

We study in detail elements of abelian groups normalized by an n-ary adding machine. For the case where n is a prime number p we prove that every finitely generated soluble subgroup of the pro-Sylow p-subgroup of $\mathrm{Aut}(T_p)$, containing the p-adic adding machine is an extension of a torsion-free metabelian group by a finite p-group.

Keywords: n-ary trees; adding machine; nilpotent groups; solvable groups; Tietze transformations.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por mais esta conquista.

Agradeço a minha mãe, pelo incentivo, pela compreensão nos momentos difíceis e pela confiança que depositou em mim.

Agradeço a Vanessa, minha namorada, por me incentivar e me apoiar em todas as fases desta tese.

Agradeço ao Prof. Said Najati Sidki, o orientador desta tese, por acreditar em minha capacidade em desempenhar um bom trabalho sobre *Automorfismos de árvores* e também pelas sugestões e ensinamentos que ajudaram a melhorar esta tese.

Agradeço à Comissão julgadora desta tese de doutorado pelas críticas, sugestões e recomendações que foram importantes para a atualização desta tese.

Agradeço à Tânia Maria S. Sertão, da secretaria de pós-graduação, pela maneira simpática, carinhosa e eficiente com que resolve as burocracias de nossa vida acadêmica.

Agradeço a todos os meus amigos, pelo carinho, alegria, estímulo e companheirismo, fatores essenciais nesta fase de minha vida.

Agradeço aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos professores, alunos e funcionários da Unidade Universitária de Formosa da Universidade Estadual de Goiás pelo apoio e torcida durante todas as etapas do doutorado.

Finalmente, agradeço à CAPES e ao CNPq, pelo suporte financeiro de parte desta tese.

Sumário

1 Automorfismos de Árvores **5**

1.1 Preliminares 5

1.2 Estabilizadores 10

1.3 Representação por Autômata 11

1.4 Cálculo de Conjugados, Centralizadores e Comutadores 12

2 A máquina de adição n-ádica (τ) **15**

2.1 O anel dos inteiros n-ádicos ($\mathbb{Z}_n$) 15

A ação de $\mathrm{Aut}(T_n)$ no anel dos inteiros n-ádicos 16

2.2 Potências infinitas e extração de raízes 17

2.3 Polarizador e Indutor da máquina de adição n-ádica 21

2.4 O Normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle\tau\rangle}$ 26

3 Construção de Grupos Solúveis **31**

3.1 Grupos Estruturais 36

4 Grupos abelianos normalizados pela máquina de adição **39**

4.1 Elementos com atividade 2-ciclo 40

4.2 Elementos com atividade em $\langle\sigma_\tau\rangle$ 50

O caso binário 60

Exemplos em subgrupos de $\mathrm{Aut}(T_n)$ 61

A Tabela de Símbolos **67**

Introdução

Máquinas de adição foram estudadas no contexto de sistemas dinâmicos e, mais recentemente, no contexto de grupos agindo sobre árvores: veja [1, 4, 5, 7] e as referências contidas nestes artigos.

Se T_n é uma árvore regular n-ária cujos vértices são rotulados por palavras em um monóide $\mathcal{M}$ livremente gerado pelo conjunto $Y = \{0, 1, \cdots, n-1\}$, então toda palavra em $\mathcal{M}$ pode ser vista como um elemento do conjunto dos inteiros n-ádicos. Desta forma, se τ é uma máquina de adição n-ádica e $a_0 a_1 \cdots a_k$ é um vértice de T_n com $a_0, a_1, \cdots, a_k \in Y$, então a ação de τ em $a_0 a_1 \cdots a_k$ é dada por

$$(a_0 a_1 \cdots a_k)^\tau = \begin{cases} (a_0 + 1) a_1 \cdots a_k, & \text{se } a_0 \in \{0, 1, \cdots, n-2\} \\ 0(a_1 \cdots a_k)^\tau, & \text{se } a_0 = n-1 \end{cases}$$

Estendendo a ação de τ para seqüências infinitas (vértices da fronteira da árvore) de dígitos n-ádicos, então a ação de τ em um vértice de fronteira $a = a_0 a_1 a_2 \cdots$ pode ser traduzida como a soma de uma unidade ao elemento a visto como elemento do conjunto dos inteiros n-ádicos, ou seja,

$$a^\tau = a + 1.$$

Uma das características mais marcantes da máquina de adição n-ádica τ é que seu centralizador $C(\tau)$ no grupo de automorfismos da árvore n-ária é pró-cíclico, mais precisamente,

$$C(\tau) = \{\tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n\},$$

onde $\mathbb{Z}_n$ é o anel dos inteiros n-ádicos.

O propósito principal da tese é demonstrar que um grupo solúvel de automorfismos da árvore n-ária que contém a máquina de adição tem uma estrutura bastante restrita. No caso binário, este fato foi demonstrado em [8] por Said Sidki. Mais precisamente, se G é um grupo solúvel finitamente gerado que contém a máquina de adição binária, então este grupo é metabeliano-por-finito. Neste trabalho mostramos que este resultado se estende para o caso p-ádico para qualquer primo p :

Teorema A. *Seja p um primo e seja G um subgrupo solúvel do Pró-Sylow p-subgrupo do grupo de automorfismos da árvore p-ária contendo a máquina de adição p-ádica. Então G é metabeliano-por-finito.*

No Capítulo 1, veremos que um elemento α do grupo dos automorfismos da árvore n-ária, $\mathrm{Aut}(T_n)$, assume a forma

$$\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha,$$

onde $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(T_n)$ e $\sigma_\alpha \in \mathrm{S}_n$. Desenvolvimentos sucessivos nos α_i's produzem

$$Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\},$$

o conjunto dos estados de α.

A máquina de adição n-ádica tem a representação

$$\tau = (e, \cdots, e, \tau)\sigma_\tau,$$

onde e é elemento identidade de $\mathrm{Aut}(T_n)$ e σ_τ é a permutação $(0, 1, \cdots, n-1)$. Neste caso, τ possui apenas 2 estados, sendo $Q(\tau) = \{e, \tau\}$.

Mostramos que o número de automorfismos com 2 estados em $\mathrm{Aut}(T_n)$ é

$$(2^n - 1) \cdot (n!) \cdot 2^n(n! - 1)$$

Na Capítulo 2, introduzimos a função Polarizador, definida por

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{i} \in \{0, 1, \cdots, n - \bar{j}\} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ e $\bar{i}$ é o resto da divisão de i por n. A função Polarizador aparece naturalmente quando encontramos as potências finitas e infinitas da máquina de adição e a partir desta função, definimos a função Indutor como sendo

$$\Delta_s(i, j) = \delta(i, j - i) - \delta(i - s, j - i).$$

Estas funções são necessárias para o estudo detalhado de grupos contendo a máquina de adição n-ádica.

Através do estudo do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle\tau\rangle}$, obtemos a caracterização dos subgrupos nilpotentes contendo τ :

Teorema B. *Todo subgrupo nilpotente de* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *contendo a máquina de adição* n*-ádica é um grupo abeliano livre de torção contido em* $\widehat{\langle\tau\rangle}$.

No Capítulo 3 apresentamos algumas construções de subgrupos solúveis de $\mathrm{Aut}(T_n)$ normalizados por um dado elemento de $\mathrm{Aut}(T_n)$. Como exemplo de grupos solúveis que contém a máquina de adição, obtemos uma classe de grupos abelianos-por-finito com a seguinte estrutura: para cada $t \in \mathbb{N}$ um subgrupo G_t solúvel de comprimento derivado $t+1$ isomorfo ao produto entrelaçado

$$(\cdots((\langle\tau\rangle \wr C_n) \wr C_n) \wr \cdots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece t vezes á direita de $\langle\tau\rangle$ no produto entrelaçado.

Uma classe de grupos metabelianos que aparece naturalmente quando estudamos a solubilidade de grupos que contém a máquina de adição é a classe dos *Grupos estruturais,* semelhante aos grupos de tipo Fibonacci. Cada grupo estrutural é um grupo metabeliano livre de torção e de índice n no produto entrelaçado $C \wr C_n$ para algum inteiro positivo n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, o grupo

$$J(n,t) = \left\langle b_0, \cdots, b_{n-1} \mid b_i b_{\overline{j+t}} = b_j b_{\overline{i+t}}, \forall i,j \in \{0,\cdots,n-1\} \right\rangle,$$

onde $\overline{z}$ é o resto da divisão inteira de z por n será chamado de **grupo estrutural.**

No Capítulo 4 analisamos elementos de subgrupos abelianos B de $\mathrm{Aut}(T_n)$ normalizados pela máquina de adição n-ádica. Em particular, se $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\sigma_\beta \in B$, estudamos a solubilidade ou não do grupo $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle$ e obtemos os seguintes resultados:

Teorema C. *Seja* n *par.*

(i) Se $\sigma_\beta = \left(s, s+\frac{n}{2}\right)$ *para algum* $s \in \{0, \cdots, \frac{n}{2}-1\}$, *então*

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^k],\ \beta_j,\ \beta_{\overline{\frac{n}{2}+s}}\beta_s,\ \tau\beta_s^2 \mid k \in \mathbb{Z},\ i,j \in Y, j \neq s, s+\frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H, *com* $\frac{H}{M} = \langle M\beta_s\rangle$.

(ii) Se $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$, *então*

$$M = \left\langle \beta_i\beta_{\overline{i+\frac{n}{2}}},\ \beta_j^2\tau^{-\Delta_{\frac{n}{2}}(j,j+\frac{n}{2})}, [\beta_t, \tau^k] \mid i,j,t \in Y \ e\ k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

é um subgrupo normal e abeliano de H, *com* $\frac{H}{M}$ *imagem homomórfica de*

$$\mathbb{Z} \times \underbrace{C_2 \times \cdots \times C_2}_{\frac{n}{2}\ \text{termos}}.$$

Teorema D. *Se $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ para algum inteiro t, então*

$$K = \left\langle [\beta_i, \tau^k],\ \beta_i \beta_{\overline{i+t}} \beta_{\overline{i+2t}} \cdots \beta_{\overline{i+(m-1)t}} \mid k \in \mathbb{Z}, i \in Y \ \ e \ \ m = \frac{n}{(n,t)} \right\rangle$$

é subgrupo abeliano normal de H. Mais ainda, $M = K\langle \tau \rangle$ é um subgrupo metabeliano normal de H sendo $\dfrac{H}{M}$ uma imagem homomorfica de um subgrupo de $C_m \wr C_n$, ou seja, H é metabeliano-por-finito.

Teorema E. *Sejam p um primo ímpar, G o pró-Sylow p-subgrupo de $\mathrm{Aut}(T_p)$ e B um subgrupo abeliano de G normalizado por τ. Então, para qualquer $\beta \in B$, existe $m \in \mathbb{N}$ e algum conjugado μ de τ em $\mathrm{Aut}(T_p)$ tal que $\beta \in \times_{p^m} \widehat{\langle \mu \rangle}$.*

Um subgrupo de $\mathrm{Aut}(T_n)$ que fixa todos os vértices que estão fora da subárvore com vértices $u\mathcal{M}$ e se projeta em um grupo H no vértice u é indicada por $u * H$ e seus elementos são denotados por $u * \alpha$, onde $\alpha \in H$. Desta forma,

$$(u * \alpha)_v = \begin{cases} \alpha_w, & \text{se } v = uw \text{ para algum } w \in \mathcal{M}. \\ e, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um dos resultados principais deste trabalho demonstrado utilizando o Teorema E e [8] é:

Teorema F. *Sejam p primo, K um grupo solúvel do pró-Sylow p-subgrupo contendo a máquina de adição p-ádica τ e Ψ o normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle \tau \rangle}$ no pró-Sylow p-subgrupo de $\mathrm{Aut}(T_p)$, então existe um menor inteiro positivo t tal que K é o conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$, onde $\Psi(t)$ é um elemento da seguinte seqüência de subgrupos de $\mathrm{Aut}(T_n)$:*

$$\Psi(0) = \Psi,\ \Psi(1) = \langle 0 * \Psi, \Psi(0) \rangle$$

$$\Psi(k) = \left\langle 0^k * \Psi, \Psi(k-1) \right\rangle, k = 1, 2, \cdots$$

Capítulo 1

Automorfismos de Árvores

1.1 Preliminares

Uma árvore regular (uni-raiz) T pode ser identificada por um monóide $\mathcal{M}$ livremente gerado por um conjunto Y e parcialmente ordenado pela relação

$$u \geq v \iff u \text{ é prefixo de } v.$$

O elemento identidade de $\mathcal{M}$ é a seqüência vazia $\varnothing$. Existe uma função nível em T, denotada por $|m|$ que fornece-nos o número de caracteres de $m \in \mathcal{M}$; o vértice raiz $\varnothing$ tem nível 0. No caso em que Y possui n elementos a árvore é dita n-ária e é simbolizada por T_n.

Sejam $\mathcal{A} = Aut(T)$ o grupo dos automorfismos da árvore T e S_Y o conjunto das permutações do conjunto Y. Toda permutação $\sigma \in \mathrm{S}_Y$ pode ser estendida para o grupo dos automorfismos de T da seguinte forma

$$(y \cdot u)^\sigma = (y)^\sigma \cdot u, \ \forall\, y \in Y, \ \forall\, u \in \mathcal{M}.$$

Mais precisamente, σ permutará rigidamente as sub-árvores de nível 1 e, portanto, temos uma imersão do grupo S_Y das permutações de Y no grupo $\mathcal{A}$ dos automorfismos da árvore T.

Um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ induz uma permutação σ_α no conjunto Y que é identificada pela sua extensão rígida ao automorfismo da árvore. Conseqüentemente, o automorfismo nos proporciona uma representação $\alpha = \alpha'\sigma_\alpha$ onde α' fixa Y pontualmente e induz para cada $y \in Y$ um automorfismo $\alpha'(y)$ da sub-árvore cujos vértices formam o conjunto $y \cdot \mathcal{M}$. Usando o isomorfismo canônico $y \cdot u \mapsto u$ entre esta subárvore e a árvore T, podemos considerar α' como uma função de Y em $\mathcal{A}$; em forma notacional, $\alpha' \in \mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$ denota o conjunto das funções de Y em $\mathcal{A}$. Conseqüentemente, o grupo $\mathcal{A}$ se fatora como $\mathcal{A} = \mathcal{F}(Y, \mathcal{A}) \cdot \mathrm{S}_Y$.

Definição 1. *Seja $\alpha \in \mathcal{A}$. A permutação $\sigma_\alpha \in \mathrm{S}_Y$ induzida por α é chamada de* **atividade de** α**.** *Neste caso, denotando por e o elemento identidade de S_Y, dizemos que α é* **ativo** *se $\sigma_\alpha \neq e$ e* **inativo** *se $\sigma_\alpha = e$.*

Notação 1. *É conveniente denotarmos α por $\alpha_\varnothing$ e $\alpha'(y)$ por α_y.*

Para descrever α_y utilizamos o mesmo procedimento que em α e, aplicando recursivamente este raciocínio, obtemos a descrição de α_u para todo $u \in \mathcal{M}$ e a imagem de qualquer elemento de T por α da seguinte forma:

Seja $v \in \mathcal{M}$. Então existem $y_1, y_2, \cdots, y_r \in Y$ tais que $v = y_1 y_2 \cdots y_r$. Daí,

$$(v)^\alpha = (y_1 y_2 \cdots y_r)^\alpha = (y_1 y_2 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1} \cdot \sigma_\alpha} = (y_1 (y_2 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1}})^{\sigma_\alpha}$$

$$= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1}} = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 y_3 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2} \cdot \sigma_{\alpha_{y_1}}}$$

$$= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 (y_3 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2}})^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3 \cdots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2}}$$

$$= \cdots = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}}} \cdots (y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \cdots y_{r-1}}}}.$$

Portanto,

$$\Sigma_\alpha = \{\sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M}\}$$

é o conjunto das permutações de Y que descrevem fielmente o automorfismo α.

Definição 2. *Se $\alpha \in \mathcal{A}$ e $u \in \mathcal{M}$ é uma palavra de comprimento k em Y, então α_u é chamado de* **estado** *(do k-ésimo nível) de α. O conjunto $Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\}$ é chamado de* **conjunto dos estados** *α.*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $v = y_1 u$ com $u = y_2 \cdots y_r$, onde $y_1, \cdots, y_r \in Y$. Assim,

$$(v)^{\alpha\beta} = ((y_1 u)^\alpha)^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha} (u)^{\alpha_{y_1}})^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha})^{\sigma_\beta} ((u)^{\alpha_{y_1}})^{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}}}$$

$$= (y_1)^{\sigma_{\alpha\beta}} (u)^{(\alpha\beta)_{y_1}}$$

$$\therefore \sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \text{ e } \alpha_{y_1} \beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}} = (\alpha\beta)_{y_1} \tag{1.1}$$

Para encontramos a imagem de v por $\alpha\beta$,

$$(v)^{\alpha\beta} = ((y_1 y_2 \cdots y_r)^\alpha)^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}}} \cdots (y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \cdots y_{r-1}}}})^\beta$$

$$= ((y_1)^{\sigma_\alpha})^{\sigma_\beta} ((y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}})^{\sigma_{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}}}} \cdots ((y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \cdots y_{r-1}}}})^{\sigma_{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}}} \cdots (y_{r-1})^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \cdots y_{r-2}}}}}}}$$

Em particular, se $Y = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ temos que $\mathrm{S}_Y = \mathrm{S}_n$ e se $\alpha, \beta \in Aut(T)$ podemos escrever

$$\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha \text{ e } \beta = (\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})\sigma_\beta.$$

Daí

$$\alpha\beta = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha(\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})\sigma_\beta = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})(\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})^{\sigma_\alpha^{-1}}\sigma_\alpha\sigma_\beta$$

$$\overset{(1.1)}{=} (\alpha_0\beta_{(0)^{\sigma_\alpha}}, \alpha_1\beta_{(1)^{\sigma_\alpha}}, \cdots, \alpha_{n-1}\beta_{(n-1)^{\sigma_\alpha}})\sigma_\alpha\sigma_\beta.$$

Resultados bastante uteis são dados pela seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam $u, w, v \in \mathcal{M}$, então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$,*

(i) $\quad (wv)^\alpha = w^\alpha v^{\alpha_w}$ (1.2)

(ii) $\quad (\alpha\beta)_u = \alpha_u\beta_{u^\alpha}$ (1.3)

(iii) $\quad (\alpha^{-1})_{u^\alpha} = \alpha_u^{-1}$ (1.4)

(iv) $\quad (\alpha_u\alpha_w^{-1})_v = \alpha_{uv}\alpha^{-1}_{w(v^{\alpha_u\alpha_w^{-1}})}$ (1.5)

Demonstração.

(i) Como $w, v \in \mathcal{M}$, então existem $w_1, \cdots, w_t, v_1, \cdots, v_k \in Y$ tais que $w = w_1w_2\cdots w_t$ e $v = v_1v_2\cdots v_k$.

Assim,

$$(wv)^\alpha = (w_1\cdots w_tv_1\cdots v_k)^\alpha = (w_1)^{\sigma_\alpha}(w_2)^{\sigma_{\alpha_{w_1}}}\cdots(w_t)^{\sigma_{\alpha_{w_1\cdots w_{t-1}}}}(v_1\cdots v_k)^{\alpha_{w_1\cdots w_t}}$$

$$= (w_1\cdots w_t)^\alpha(v_1\cdots v_k)^{\alpha_{w_1\cdots w_k}} = w^\alpha v^{\alpha_w}$$

(ii) Procederemos por indução sobre o comprimento da palavra $u \in \mathcal{M}$.

- Se $|u| = 1$, então $u \in Y$ e, por (1.1), temos que $(\alpha\beta)_u = \alpha_u\beta_{(u)^{\sigma_\alpha}} = \alpha_u\beta_{(u)^\alpha}$.
- Suponhamos que $(\alpha\beta)_u = \alpha_u\beta_{(u)^\alpha}$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $u \in \mathcal{M}$ com $0 < |u| \leq k$.

  Dados $y \in Y$ e $u \in \mathcal{M}$ com $|u| = k$, temos

$$(\alpha\beta)_{yu} = (\alpha_y\beta_{(y)^{\sigma_\alpha}})_u = (\alpha_y)_u(\beta_{(y)^{\sigma_\alpha}})_{(u)^{\alpha_y}} = \alpha_{yu}\beta_{(y)^{\sigma_\alpha}(u)^{\alpha_y}} = \alpha_{yu}\beta_{(yu)^\alpha}$$

(iii) $(\alpha\alpha^{-1})_u = e \overset{(1.3)}{\Leftrightarrow} \alpha_u(\alpha^{-1})_{u^\alpha} = e \Leftrightarrow (\alpha^{-1})_{u^\alpha} = \alpha_u^{-1}$

(iv) $(\alpha_u\alpha_w^{-1})_v \overset{(1.3)}{=} (\alpha_u)_v(\alpha_w^{-1})_{v^{\alpha_u}} \overset{(1.4)}{=} (\alpha_u)_v((\alpha^{-1})_{w^\alpha})_{v^{\alpha_u}} = \alpha_{uv}(\alpha^{-1})_{w^\alpha v^{\alpha_u}}$

$\overset{(1.4)}{=} \alpha_{uv}\alpha^{-1}_{(w^\alpha v^{\alpha_u})^{\alpha^{-1}}} \overset{(1.2)}{=} \alpha_{uv}\alpha^{-1}_{(w^\alpha)^{\alpha^{-1}}(v^{\alpha_u})^{(\alpha^{-1})_{w^\alpha}}}$

$\overset{(1.4)}{=} \alpha_{uv}\alpha^{-1}_{(w^\alpha)^{\alpha^{-1}}(v^{\alpha_u})^{\alpha_w^{-1}}} = \alpha_{uv}\alpha^{-1}_{w(v^{\alpha_u\alpha_w^{-1}})}$

□

Corolário 1. *Se $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$, então*

$$(\alpha^m)_i = \alpha_i\alpha_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha_{i^{\sigma_\alpha^2}}\cdots\alpha_{i^{\sigma_\alpha^{m-1}}}$$

para todo inteiro positivo m e $i \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Demonstração. O resultado segue da Proposição 1 e por indução sobre m. □

Utilizando a Proposição 1, obtemos as seguintes propriedades para a função Q :

$$Q(\alpha^{-1}) = Q(\alpha)^{-1} \text{ e } Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta),\ \forall\alpha,\beta \in \mathcal{A}. \tag{1.6}$$

Exemplo 1. *Sejam $Y = \{0,1\}, T_2$ a árvore binária e $\alpha = (e,e)\sigma, \beta = (\beta,\beta)\sigma \in AutT_2$, onde $\sigma = (0,1)$ e $e = (0)(1) \in \mathbf{S}_2$. Então*

$$Q(\alpha) = \{e,\alpha\} = \{e,\sigma\},\ \ Q(\beta) = \{\beta\},$$

$$Q(\alpha^{-1}) = \{e,\sigma\}$$

$$Q(\alpha\alpha) = Q(e) = \{e\} \subsetneq Q(\alpha)Q(\alpha) = \{e,\sigma\}$$

$$\alpha\beta = (\beta,\beta)\sigma(e,e)\sigma = (\beta,\beta)$$

$$Q(\alpha\beta) = \{\alpha\beta,\beta\} = \{\alpha,e\}\{\beta\} = Q(\alpha)Q(\beta).$$

A seguinte proposição caracteriza os automorfismos com finitos estados:

Proposição 2. $|Q(\alpha)| \leq m \Longleftrightarrow \exists u_1,\cdots,u_m \in \mathcal{M}$ *tais que* $\max\limits_{1\leq i\leq m}|u_i| < m$ *e* $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1},\cdots,\alpha_{u_m}\}\ \forall\ u \in \mathcal{M},\ |u| \leq m.$

Demonstração. **($\Longrightarrow$)** Seja $|Q(\alpha)| \leq m$. Mostraremos que para todo $u \in \mathcal{M}$ existe $v \in \mathcal{M}$ com $|v| < m$ tal que $\alpha_u \in \alpha_v$.

De fato, se $|u| < m$ então $v = u$ satisfaz a condição.

Se $|u| = m$ então existem $y_1,\cdots,y_m \in Y$ tais que $u = y_1\cdots y_m$. Daí, fazendo $y_0 = \varnothing$, obtemos

$$\alpha = \alpha_{y_0}, \alpha_{y_0y_1}, \alpha_{y_0y_1y_2}, \cdots, \alpha_{y_0y_1\cdots y_m}.$$

Portanto, como $|Q(\alpha)| \leq m$, existem $i, j \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i < j \leq m$ tais que $\alpha_{y_0y_1\cdots y_i} = \alpha_{y_0y_1\cdots y_j}$. Assim $\alpha_{y_0y_1\cdots y_m} = \alpha_{y_0y_1\cdots y_jy_{j+1}\cdots y_m} = (\alpha_{y_0y_1\cdots y_i})_{y_{j+1}\cdots y_m}$. Assim, tomando $v = y_0y_1\cdots y_iy_{j+1}\cdots y_m$, temos que $|v| = m - j + i < m$ e $\alpha_u = \alpha_v$.

Se para todo $u \in \mathcal{M}$ com $0 \leq |u| \leq k$ existir $v \in \mathcal{M}$ com $|v| < m$ satisfazendo $\alpha_u = \alpha_v$, então, para qualquer $y \in Y$ temos que $\alpha_{uy} = \alpha_{vy}$, onde $|vy| \leq m$. Portanto, existe $w \in \mathcal{M}$ com $|w| < m$ tal que $\alpha_{uy} = \alpha_{vy} = \alpha_w$.

Logo, por indução, existem $u_1, \cdots, u_m \in \mathcal{M}$ tais que $\max\limits_{1\leq i\leq m} |u_i| < m$ e $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$ $\forall u \in \mathcal{M}$ com $|u| \leq m$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se existirem $u_1, \cdots, u_m \in \mathcal{M}$ tais que $\max\limits_{1\leq i\leq m} |u_i| < m$ e $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$ $\forall\, u \in \mathcal{M},\ |u| \leq m$.

1o) Se $v \in \mathcal{M}$ é tal que $|v| \leq m$ então $\alpha_v \in \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$.

2o) Suponhamos que $\forall u \in \mathcal{M}$ com $0 \leq |u| \leq k$ tenhamos que $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$. Então, dado $y \in Y, \alpha_{uy} \in \{\alpha_{u_1y}, \cdots, \alpha_{u_my}\} \subseteq \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$, pois $\max\limits_{1\leq i\leq m} |u_iy| \leq m$.

Logo, por indução, $\alpha_v \in \{\alpha_{u_1}, \cdots, \alpha_{u_m}\}$ $\forall\, v \in \mathcal{M}$, ou seja, $|Q(\alpha)| \leq m$. $\square$

Notação 2. *Se* $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$, *então* $\left(\alpha^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência de elementos de* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *definida recursivamente por*

$$\begin{cases} \alpha^{(0)} = \alpha \\ \alpha^{(k)} = (\alpha^{(k-1)}, \alpha^{(k-1)}, \cdots, \alpha^{(k-1)}), \quad \textit{para } k = 1,\ 2,\ 3, \cdots \end{cases}$$

A seguinte proposição caracteriza os automorfismos com apenas um estado de $Aut(T_n)$:

Proposição 3. *Seja* $\alpha \in Aut(T_n)$ *com* $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha_u}, \forall u \in \mathcal{M}$. *Então*

$$\alpha = (\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)\sigma_\alpha = \alpha^{(1)}\sigma_\alpha.$$

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathcal{M}$. Assim, $\alpha_u\alpha_v^{-1}$ é inativo, pois $\sigma_{\alpha_u} = \sigma_{\alpha_v}$. Portanto, para todo $u \in \mathcal{M}$ e $j \in \{0, \cdots, n-1\}$, $(\alpha\alpha_j^{-1})_u = \alpha_u\alpha^{-1}_{ju^{\alpha\alpha_j^{-1}}}$ é inativo. Logo $\alpha = \alpha_j, \forall j \in \{0, \cdots, n-1\}$, i.e., $\alpha = (\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)\sigma_\alpha$. $\square$

Corolário 2. *O número de elementos em* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *com* 1 *estado é* $n!$.

Como conseqüência da Proposição anterior, temos a caracterização dos automorfismos com 2 estados:

Corolário 3. *Um automorfismo* $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$ *possui* 2 *estados se, e somente se, existe* $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ *tal que* *(i)* $\sigma_\beta \neq \sigma_\alpha$;

(ii) $\{\alpha_i \mid i \in Y\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \beta\}$;

(iii) $\{\beta_i \mid i \in Y\} \subset \{\alpha, \beta\}$.

Corolário 4. *O número de automorfismos com 2 estados em* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *é*

$$(2^n - 1) \cdot (n!) \cdot 2^n(n! - 1)$$

A seguinte proposição nos dá informações a respeito da ordem dos automorfismos de $Aut(T_n)$ de ordem finita:

Proposição 4. *Se* $\alpha \in Aut(T_n)$ *e* $m \in \mathbb{Z}$ *satisfazem* $\alpha^m = e$ *e* $(m, n!) = 1$, *então* $\alpha = e$.

Demonstração. Como $\alpha^m = e$, então $\sigma_\alpha^m = \sigma_\alpha^{n!} = e$. Assim, como $(m, n!) = 1$, segue que α é inativo. Portanto $\alpha^m = ((\alpha_0)^m, (\alpha_1)^m, \cdots, (\alpha_{n-1})^m)$ com $(\alpha_0)^m = (\alpha_1)^m = \cdots = (\alpha_{n-1})^m = e$. Por indução $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = e$. $\square$

Corolário 5. *Seja* $\alpha \in Aut(T_n)$ *com* $\boldsymbol{o}(\alpha) < \infty$. *Então todo divisor primo de* $\boldsymbol{o}(\alpha)$ *também é divisor de* $n!$.

1.2 Estabilizadores

O **estabilizador do k-ésimo nível de** $\mathrm{Aut}(T_n)$, denotado por $\mathrm{Stab}_n(k)$, é o conjunto dos automorfismos que fixam palavras de comprimento k de $\mathcal{M}$. Assim, $\mathrm{Stab}_n(k) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid u^\alpha = u, \forall u \in \mathcal{M} \text{ com } |u| = k\}$. Evidentemente, como $\mathrm{Stab}_n(k)$ é o núcleo em $\mathrm{Aut}(T_n)$ da ação de $\mathrm{Aut}(T_n)$ sobre palavras de comprimento k, então $\mathrm{Stab}_n(k) \lhd \mathrm{Aut}(T_n)$. Assim,

$$\mathrm{Aut}(T_n) = \mathrm{Stab}_n(0) \rhd \mathrm{Stab}_n(1) \rhd \mathrm{Stab}_n(2) \rhd \cdots \rhd \mathrm{Stab}_n(k) \rhd \mathrm{Stab}_n(k+1) \rhd \cdots \rhd 1$$

Proposição 5. *Seja* $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$, *então* $\alpha^{(n!)^k} \in \mathrm{Stab}_n(k)$.

Demonstração. Como $\alpha^{n!} = ((\alpha^{n!})_0, \cdots, (\alpha^{n!})_{n-1})\sigma_\alpha^{n!}$ e $\sigma_\alpha \in S_n$, então $\sigma_\alpha^{n!} = e$ e $\alpha^{n!} \in \mathrm{Stab}_n(1)$.

Suponhamos que $\alpha^{(n!)^k} \in \mathrm{Stab}_n(k), \forall \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$.

Assim,

$$\alpha^{(n!)^{k+1}} = ((\alpha^{n!})_0^{(n!)^k}, \cdots, (\alpha^{n!})_{n-1}^{(n!)^k})$$

e $(\alpha^{n!})_j^{(n!)^k} \in \mathrm{Stab}_n(k), \forall j \in \{0, \cdots, n-1\}$, por indução.

Logo $\alpha^{(n!)^{k+1}} \in \mathrm{Stab}_n(k+1)$. $\square$

Corolário 6. *Sejam $H \leq \mathrm{Aut}(T_n)$ e $\alpha \in H$ com $\boldsymbol{o}(\alpha) > n!$, então H não é simples.*

Demonstração. De fato, como $\boldsymbol{o}(\alpha) > n!$, então $1 \neq \alpha^{n!} \in \mathrm{Stab}_n(1) \cap H \lhd H$, pela Proposição 5. $\square$

1.3 Representação por Autômata

Os automorfismos da árvore regular (uni-raiz) T podem ser identificados em termos de autômata de Mealy. Tal autômato é uma Máquina de Turing definida pela sextupla $(Q,\ L,\ \Gamma,\ f,\ l,\ q_0)$, onde Q é o conjunto de estados, L é o alfabeto de entrada, Γ é o alfabeto de saída, $f : Q \times L \longrightarrow Q$ é a função de transição de estados, $l : Q \times L \longrightarrow \Gamma$ é a função de saída e q_0 é o estado inicial.

Um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ pode ser interpretado como o autômato de Mealy representado pela sextupla $(Q(\alpha),\ Y,\ Y,\ f,\ l,\ \alpha)$, onde $f : Q(\alpha) \times Y \to Q(\alpha)$ e $l : Q(\alpha) \times Y \to Y$ são definitas por $f(\alpha_u, y) = \alpha_{uz}$ e $l(\alpha_u, y) = z$, onde $z = y^{\alpha_u},\ y \in Y$ e $u \in \mathcal{M}$. Desta forma, o autômato $\alpha \in \mathcal{A}$ poderá ser representado graficamente por um grafo direcionado onde as arestas são definidas por

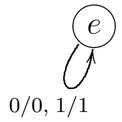
$$\Gamma(\alpha) = \{(\alpha_u, y/z, \alpha_{uz}) \mid z = y^{\alpha_u},\ \text{onde } u \in \mathcal{M} \text{ e } z, y \in Y\ \}$$

e os vértices são representados por pequenos círculos representando cada estado de α. Assim, se $u \in \mathcal{M}$, então α_u é um vértice de $\Gamma(\alpha)$ e para cada $y \in Y$ sai uma aresta rotulada por y/z de α_u para α_{uz}, onde $z = y^{\alpha_u}$. Graficamente,

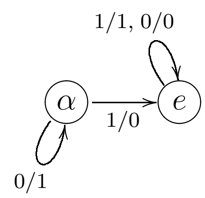
$$\alpha_u \xrightarrow[y/z]{} \alpha_{uz}$$

Exemplo 2. *Grafo que representa o autômato de Mealy identificado pelo automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$, onde*

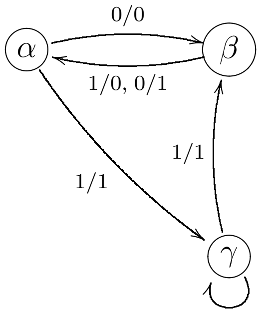
a) $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_2)$ *e* $\alpha = e$ *:*



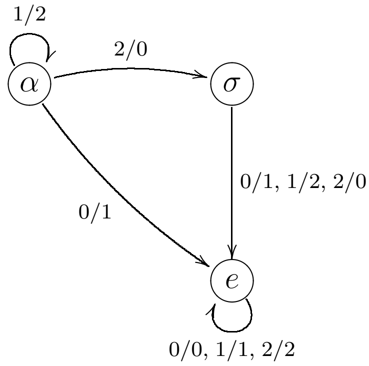
b) $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_2),\ \sigma = (0,1)$ *e* $\alpha = (\alpha, e)\sigma$*:*



c) $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_2)$, $\sigma = (0,1)$ *e* $\alpha = (\beta,\gamma)$, *onde* $\beta = (\alpha,\alpha)\sigma$ *e* $\gamma = (\gamma,\beta)$*:*



d) $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_3)$, $\sigma = (0,1,2)$ *e* $\alpha = (e,\alpha,\sigma)\sigma$ *:*



1.4 Cálculo de Conjugados, Centralizadores e Comutadores

Proposição 6. *Sejam* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{Aut(T_n)}$, *então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $\gamma = \beta^{\alpha} = \alpha^{-1}\beta\alpha$

(ii) $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha$ *e* $\gamma_{i^{\sigma_\alpha}} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}}$, $\forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$.

(iii) $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha$ *e* $\alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = (\beta^s)_i^{-1}\alpha_i(\gamma^s)_{i^{\sigma_\alpha}}$, $\forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, $\forall s \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. $(i) \Leftrightarrow (ii)$

$\gamma = \beta^\alpha \Leftrightarrow \beta\alpha = \alpha\gamma$

$\Leftrightarrow ((\beta_0,\cdots,\beta_{n-1})\sigma_\beta(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\sigma_\alpha = (\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\sigma_\alpha(\gamma_0,\cdots,\gamma_{n-1})\sigma_\gamma)$

$\Leftrightarrow \big((\beta_0,\cdots,\beta_{n-1})(\alpha_{0^{\sigma_\beta}},\cdots,\alpha_{(n-1)^{\sigma_\beta}})\sigma_\beta\sigma_\alpha = (\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})(\gamma_{0^{\sigma_\alpha}},\cdots,\gamma_{(n-1)^{\sigma_\alpha}})\sigma_\alpha\sigma_\gamma\big)$

$\Leftrightarrow \big((\beta_0\alpha_{0^{\sigma_\beta}},\cdots,\beta_{n-1}\alpha_{(n-1)^{\sigma_\beta}})\sigma_\beta\sigma_\alpha = (\alpha_0\gamma_{0^{\sigma_\alpha}},\cdots,\alpha_{n-1}\gamma_{(n-1)^{\sigma_\alpha}})\sigma_\alpha\sigma_\gamma\big)$

$\Leftrightarrow \big(\sigma_\gamma = \sigma_\beta^{\sigma_\alpha} \text{ e } \gamma_{i^{\sigma_\alpha}} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}}, \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}\big)$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

$\big(\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \gamma_{i^{\sigma_\alpha}} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}}, \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}\big)$

$\Leftrightarrow \big(\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\beta}} = \beta_i^{-1}\alpha_i\gamma_{i^{\sigma_\alpha}}, \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}\big)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \quad \text{e} \quad \alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\beta^{s-1}}}\alpha_{i^{\sigma_\beta^{s-1}}}\gamma_{i^{\sigma_\beta^{s-1}\sigma_\alpha}}, \\ \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\beta^{s-1}}}(\beta^{s-1})_i^{-1}\alpha_i(\gamma^{s-1})_{i^{\sigma_\alpha}}\gamma_{i^{\sigma_\beta^{s-1}\sigma_\alpha}}, \\ \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z}, \text{ por indução sobre } s \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\beta^{s-1}}}(\beta^{s-1})_i^{-1}\alpha_i(\gamma^{s-1})_{i^{\sigma_\alpha}}\gamma_{i^{\sigma_\alpha\sigma_\gamma^{s-1}}}, \\ \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \ \forall s \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = \left((\beta^{s-1})_i\beta_{i^{\sigma_\beta^{s-1}}}\right)^{-1}\alpha_i(\gamma^{s-1})_{i^{\sigma_\alpha}}\gamma_{i^{\sigma_\alpha\sigma_\gamma^{s-1}}}, \\ \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \ \forall s \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\beta^s}} = (\beta^s)_i^{-1}\alpha_i(\gamma^s)_{i^{\sigma_\alpha}}, \\ \forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

□

Proposição 7. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{T_n})$, então*

(i) $\theta = [\beta, \alpha] = \beta^{-1}\beta^\alpha$ se, e somente se, $\theta_{i^{\sigma_\alpha\sigma_\beta}} = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}}$ e $\sigma_\theta = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha]$.

(ii) $\beta \in C(\alpha)$ se, e somente se, $\beta_i = \alpha_i\beta_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha^{-1}_{i^{\sigma_\beta}}$ e $\sigma_\beta \in C(\sigma_\alpha)$

Demonstração. (i) Seja $\gamma = \beta^\alpha$. Assim, $\theta = [\beta, \alpha] = \beta^{-1}\beta^\alpha = \beta^{-1}\gamma \Leftrightarrow \beta\theta = \gamma$

$$\Leftrightarrow ((\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})\sigma_\beta(\theta_0, \cdots, \theta_{n-1})\sigma_\theta = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-1})\sigma_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \big((\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})(\theta_{0^{\sigma_\beta}}, \cdots, \theta_{(n-1)^{\sigma_\beta}})\sigma_\beta\sigma_\theta = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-1})\sigma_\gamma\big)$$

$$\Leftrightarrow \big((\beta_0\theta_{0^{\sigma_\beta}}, \cdots, \beta_{n-1}\theta_{(n-1)^{\sigma_\beta}})\sigma_\beta\sigma_\theta = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-1})\sigma_\gamma\big)$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_\beta\sigma_\theta = \sigma_\gamma \text{ e } \beta_i\theta_{i^{\sigma_\beta}} = \gamma_i \text{ para } i = 0, \cdots, n-1)$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_\beta\sigma_\theta = \sigma_\gamma \text{ e } \beta_{i^{\sigma_\alpha}}\theta_{i^{\sigma_\alpha\sigma_\beta}} = \gamma_{i^{\sigma_\alpha}} \text{ para } i = 0, \cdots, n-1)$$

$$\Leftrightarrow \big(\sigma_\theta = \sigma_\beta^{-1}\sigma_\beta^{\sigma_\alpha} = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha] \text{ e } \theta_{i^{\sigma_\alpha\sigma_\beta}} = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}}$$

$$\text{para } i = 0, \cdots, n-1, \text{ pela Proposição 6}\big)$$

(ii) $\beta \in C(\alpha) \Leftrightarrow [\beta, \alpha] = e$. Assim, para $i = 0, \cdots, n-1$,

$$\big(e = \beta^{-1}_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i^{\sigma_\beta}} \text{ e } e = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha], \text{ por (i)}\big)$$

$$\Leftrightarrow \big(\beta_i = \alpha_i\beta_{i^{\sigma_\alpha}}\alpha^{-1}_{i^{\sigma_\beta}} \text{ e } \sigma_\beta \in C(\sigma_\alpha)\big)$$

□

Um exemplo bastante simples que ilustra a Proposição 7 é dado pelo seguinte Corolário:

Corolário 7. *Seja $\sigma = (0, \cdots, n-1) \in \mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$, então* *(i)* $C(\sigma) = \left\{\beta \in \mathcal{A} \mid \beta = (\beta_0, \cdots, \beta_0)\sigma^t, \text{ onde } \beta_0 \in \mathcal{A} \text{ e } t \in \mathbb{Z}\right\}$;

(ii) $Z(C(\sigma)) = \langle\sigma\rangle$;

(iii) $\frac{C(\sigma)}{\langle\sigma\rangle} \cong \mathcal{A}$.

Proposição 8. *Seja* $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_{n-1})\sigma \in \mathrm{Aut}(T_n)$ *com* $\sigma = (0, \cdots, n-1)$ *e* $\alpha \in \mathrm{Stab}_n(1)$ *satisfazendo* $\beta^\alpha = (e, \cdots, e, \gamma)\sigma$*. Então* γ *é o conjugado de* $\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}$ *por* α_0 *e* $\alpha = (\alpha_0, \beta_0^{-1}\alpha_0, \cdots, (\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-2})^{-1}\alpha_0)$.

Demonstração. Como $\beta^\alpha = (e, \cdots, e, \gamma)\sigma$, então, pela Proposição 6,

$$e = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i+1}, \forall i \in \{0, \cdots, n-2\} \text{ e } \gamma = \alpha_{n-1}^{-1}\beta_{n-1}\alpha_0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_0^{-1}\alpha_0 \\ \alpha_2 = \beta_1^{-1}\alpha_1 = \beta_1^{-1}\beta_0^{-1}\alpha_0 = (\beta_0\beta_1)^{-1}\alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = \beta_{n-2}^{-1}\alpha_{n-2} = (\beta_0\cdots\beta_{n-2})^{-1}\alpha_0 \\ \gamma = \alpha_0^{-1}(\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1})\alpha_0 \end{cases}$$

Logo

$$\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = (\alpha_0, \beta_0^{-1}\alpha_0, \cdots, (\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-2})^{-1}\alpha_0)$$

e

$$\gamma = (\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1})^{\alpha_0}.$$

□

Capítulo 2

A máquina de adição n-ádica (τ)

Neste capítulo introduziremos o conceito de inteiro n-ádico e trabalharemos com um automorfismo da árvore n-ária que assume o papel de somar uma unidade a cada inteiro n-ádico. Chamaremos este automorfismo de máquina de adição n-ádica e estudaremos também subgrupos de $\mathrm{Aut}(T_n)$ que contêm este automorfismo.

2.1 O anel dos inteiros n-ádicos ($\mathbb{Z}_n$)

Um dígito n-ádico é um número natural entre 0 e $n-1$ (inclusive). Um inteiro n-ádico é definido como uma seqüência $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de dígitos n-ádicos. Convencionalmente escreveremos $a_0a_1a_2\cdots a_i\cdots$ ou $\sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i$ para representar esta seqüência $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. O conjunto dos inteiros n-ádicos será denotado por $\mathbb{Z}_n$.

Para facilitar a notação dado $b=(b_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}_n$, o símbolo $\overline{b}$ representará o dígito n-ádico b_0 que diremos ser o resto da divisão de b por n.

Se a é um número natural e $a=a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0$ é sua representação n-ária (em outras palavras $a=\sum_{i=0}^{k-1} a_i n^i$ em que cada a_i é um dígito n-ádico) então nós identificamos a como o inteiro n-ádico (a_i) com $a_i=0$ se $i\geq k$.

Portanto números naturais são inteiros n-ádicos em que apenas um número finito de dígitos são não-nulos. Note ainda que 0 é o inteiro n-ádico em que todos os seus dígitos n-ádicos são iguais a 0 e que 1 é o inteiro n-ádico em que o primeiro dígito n-ádico (escrito da esquerda para a direita) é 1 e os demais dígitos n-ádicos são iguais a 0 (zero).

Se $a=(a_i)$ e $b=(b_i)$ são dois inteiros n-ádicos, então podemos definir, indutivamente, a soma $a+b=(c_i)$ deste dois números n-ádicos da seguinte forma:

- $\varepsilon_0=0$;

- Se $a_i + b_i + \varepsilon_i \in \{0, \cdots, n-1\}$ faça $c_i = a_i + b_i + \varepsilon_i$ e $\varepsilon_{i+1} = 0$; caso contrário, faça $c_i = a_i + b_i + \varepsilon_i - n$ e $\varepsilon_{i+1} = 1$.

Note que as regras acima são exatamente as regras utilizadas na adição de números naturais na representação n-ária.

Se $a = (a_i)$ e $b = (b_i)$ são dois inteiros n-ádicos podemos também definir uma multiplicação $a \cdot b = (c_i)$ destes dois inteiros n-ádicos da seguinte forma

- $d_0 = a_0 b_0$;
- $c_0 = \overline{a_0 b_0}$;
- $d_{i+1} = \frac{d_i - c_i}{n} + \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1-k} b_k$;
- $c_{i+1} = \overline{d_{i+1}}$

Note que esta multiplicação coincide também com a multiplicação de números naturais na representação n-ária.

Analisando o comportamento da adição e multiplicação dos números naturais quando imersos em $\mathbb{Z}_n$, podemos observar que o conjunto $\mathbb{Z}_n$ munido das operações de adição e multiplicação acima define uma estrutura de anel comutativo com unidade $1 = (a_i)$, onde

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

Além disso, denotando por $U(\mathbb{Z}_n)$ o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_n$. Um inteiro n-ádico $a = (a_i)$ pertence ao conjunto $U(\mathbb{Z}_n)$ se, e somente se, $(a_0, n) = 1$. Conseqüentemente $\mathbb{Z}_n^1 = \{(a_i) \in \mathbb{Z}_n \mid a_0 = 1\}$ é um subgrupo multiplicativo de $U(\mathbb{Z}_n)$.

Exemplo 3. *O inverso multiplicativo de* 2 *em* $\mathbb{Z}_3$ *é* $2 + \sum_{i=1}^{\infty} 3^i$ *e o inverso multiplicativo de* 3 *em* $\mathbb{Z}_5$ *é* $2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \cdots = 2 + \sum_{i=1}^{\infty}((-1)^{i+1} + 2)5^i$.

A ação de $\mathrm{Aut}(T_n)$ no anel dos inteiros n-ádicos

Estendendo a ação dos elementos de $\mathrm{Aut}(T_n)$ para seqüências infinitas (ou pontos de fronteira da árvore) de dígitos n-ádicos então a ação de $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$ em um ponto de fronteira $a = a_0 a_1 a_2 \cdots$ pode ser traduzida na ação sobre o anel dos inteiros n-ádicos da seguinte maneira:

$$a^{\alpha} = (a_0)^{\sigma_\alpha} (a_1 a_2 \cdots)^{\alpha}$$

Em $\mathrm{Aut}(T_n)$ existe um automorfismo τ que faz o papel de adicionar uma unidade a cada ponto de fronteira identificado no conjunto dos inteiros n-ádicos. Este automorfismo τ é conhecido como máquina de adição n-ádica.

Definição 3. *O automorfismo $\tau = (e, \cdots, e, \tau)\sigma_\tau \in \mathrm{Aut}(T_n)$ com $\sigma_\tau = (0, \cdots, n-1)$ é chamado de máquina de adição n-ádica e a ação deste automorfismo em uma dada palavra $y_0y_1 \cdots y_k$ com $y_i \in \{0, \cdots, n-1\}$ é dada por*

$$(y_0y_1\cdots y_k)^\tau = \begin{cases} (y_0+1)y_1\cdots y_k & se\ y_0 \in \{0, \cdots, n-2\} \\ 0(y_1\cdots y_k)^\tau & se\ y_0 = n-1 \end{cases}$$

Se $a \in \mathbb{Z}_n$ então a ação de τ estendida a $\mathbb{Z}_n$ é traduzida por

$$a^\tau = 1 + a.$$

Proposição 9. *A máquina de adição n-ádica induz uma permutação transitiva sobre os vértices de cada nível da árvore n-ária.*

Demonstração. Sejam $v, u \in \mathcal{M}^*$ com $|v| = |u| = k$. Então existem $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$, $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1} \in Y$ tais que

$$v = v_0 \cdots v_{k-1} \ \text{ e } \ u = u_0 \cdots u_{k-1}$$

Assim, $m = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1)n + \cdots (u_{k-1} - v_{k-1})n^{k-1}$ satisfaz

$$v^{\tau^m} = (v_0v_1\cdots v_{k-1})^{\tau^{\sum_{j=0}^{k-1}(u_j - v_j)n^j}} = u_0u_1\cdots u_{k-1} = u$$

□

2.2 Potências infinitas e extração de raízes

Se $(\alpha(k))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $\mathrm{Aut}(T_n)$, com $\alpha(k)$ pertencente ao subgrupo estabilizador do nível k-ésima da árvore T_n, $\mathrm{Stab}_n(k)$, então $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots$ é um elemento bem definido de $\mathrm{Aut}(T_n)$, já que somente os primeiros k elementos do produto $\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots$ têm ação não-trivial nos vértices da árvore T_n até o nível k. Desta forma, se $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$ e m é um múltiplo do expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então podemos definir potências "finitas e infinitas"de α onde cada expoente é visto como um elemento de $\mathbb{Z}_m$.

A seguinte proposição nos permite definir certos tipos de potências infinitas de automorfismos em $Aut(T_n)$:

Proposição 10. *Se* $\alpha \in Aut(T_n)$ *e* m *é um múltiplo do expoente do grupo* $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$ *, então, para cada* $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m^k \in \mathbb{Z}_m$,

$$\alpha^{\xi} = \alpha^{\sum_{k=0}^{\infty} a_k m^k} = \alpha^{a_0} \cdot \alpha^{a_1 m} \cdot \alpha^{a_2 m^2} \cdots$$

é um bem definido elemento de $Aut(T_n)$.

Demonstração. De fato, como m é múltiplo do expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, somente os primeiros k elementos do produto $\alpha^{a_0} \cdot \alpha^{a_1 m} \cdot \alpha^{a_2 m^2} \cdots$ tem ação não trivial sobre os vértices da árvore T_n até o nível k. Portanto, α^{ξ} é um bem definido elemento de $\mathcal{A}$. □

Proposição 11. *As potências finitas e infinitas da máquina de adição* n*-ádica podem ser escritas na forma*

$$\tau^{\xi} = (\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \cdots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}, \cdots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}}_{\bar{\xi} \text{ termos}})\sigma_{\tau}^{\bar{\xi}}, \tag{2.1}$$

onde $\xi \in \mathbb{Z}_n$.

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{Z}_n$, então existe uma seqüência (a_i) de dígitos n-ádicos tais que

$$\xi = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k + \cdots .$$

Aplicando o Corolário 1, obtemos

$$(\tau^{a_0})_i = \tau_i \tau_{i^{\sigma_\tau}} \cdots \tau_{i^{\sigma_\tau^{a_0-1}}} = \begin{cases} e, & \text{se } 0 \leq i < n - a_0 - 1 \\ \tau, & \text{se } i \geq n - a_0 \end{cases}$$

$$(\tau^n)_i = \tau_i \tau_{i^{\sigma_\tau}} \cdots \tau_{i^{\sigma_\tau^{n-1}}} = \tau$$

$$(\tau^{kn})_i = (\tau^n)_i (\tau^n)_{i^{\sigma_{\tau^n}}} \cdots (\tau^n)_{i^{\sigma_{(\tau^n)^{k-1}}}} = \tau^k$$

Assim,

$$\tau^{a_0} = (e, \cdots, e, \underbrace{\tau, \cdots, \tau}_{a_0 \text{ termos}})\sigma_{\tau}^{a_0}$$

$$\tau^{a_j n^j} = \tau^{(a_j n^{j-1})n} = \left(\tau^{a_j n^{j-1}}, \tau^{a_j n^{j-1}}, \cdots, \tau^{a_j n^{j-1}}\right)$$

Logo,

$$\tau^{\xi} = \tau^{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots} = \tau^{a_0} \cdot \left(\tau^{0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots}\right) = \left(\tau^{0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots}\right) \cdot \tau^{a_0}$$

$$= \left(\tau^0 \cdot \tau^{a_1 n} \cdot \tau^{a_2 n^2} \cdots\right) \cdot \tau^{a_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big((\tau^{a_1}, \tau^{a_1}, \cdots, \tau^{a_1}) \cdot (\tau^{a_2 n}, \tau^{a_2 n}, \cdots, \tau^{a_2 n}) \cdots \\
&(\tau^{a_j n^{j-1}}, \tau^{a_j n^{j-1}}, \cdots, \tau^{a_j n^{j-1}}) \cdots \Big) \cdot (e, \cdots, e, \underbrace{\tau, \cdots, \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_2 n} \cdots \tau^{a_j n^{j-1}} \cdots, \cdots, \tau^{a_1} \cdot \tau^{a_2 n} \cdots \tau^{a_j n^{j-1}} \cdots, \\
&\underbrace{(\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_2 n} \cdots \tau^{a_j n^{j-1}} \cdots) \cdot \tau, \cdots, (\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_2 n} \cdots \tau^{a_j n^{j-1}} \cdots) \cdot \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{a_1 + a_2 n + \cdots + a_j n^{j-1} + \cdots}, \cdots, \tau^{a_1 + a_2 n + \cdots + a_j n^{j-1} + \cdots}, \\
&\underbrace{(\tau^{a_1 + a_2 n + \cdots + a_j n^{j-1} + \cdots}) \cdot \tau, \cdots, (\tau^{a_1 + a_2 n + \cdots + a_j n^{j-1} + \cdots}) \cdot \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{\frac{\xi - a_0}{n}}, \cdots, \tau^{\frac{\xi - a_0}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi - a_0}{n} + 1}, \cdots, \tau^{\frac{\xi - a_0}{n} + 1}}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{\frac{\xi - \bar{\xi}}{n}}, \cdots, \tau^{\frac{\xi - \bar{\xi}}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi - \bar{\xi}}{n} + 1}, \cdots, \tau^{\frac{\xi - \bar{\xi}}{n} + 1}}_{\bar{\xi} \text{ termos}}) \sigma_\tau^{\bar{\xi}}
\end{aligned}
$$

□

Notação 3. *O fêcho topológico de $\langle \tau \rangle$, isto é, o grupo pró-cíclico gerado por todas as potências n-ádicas de τ, será denotado por*

$$\widehat{\langle \tau \rangle} = \left\{ \tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n \right\}$$

A seguinte proposição caracteriza os elementos de $Aut(T_n)$:

Proposição 12. *Sejam $\alpha \in Aut(T_n), m$ o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$ e $t \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(m, t) = 1$. Então a equação*

$$x^t = \alpha$$

sempre tem solução em $Aut(T_n)$.

Demonstração. Como m é o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então, pela proposição anterior, $\alpha^\xi \in Aut(T_n)$ para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}_m$. Portanto, como $(m, t) = 1$, então t possui um inverso t^{-1} em $\mathbb{Z}_m$. Logo $x = \alpha^{t^{-1}}$ é solução para a equação acima. □

Corolário 8. *Seja $\tau \in Aut(T_n)$ a máquina de adição n-ádica e seja m um elemento invertível em $\mathbb{Z}_n$. Então equação*

$$x^m = \tau$$

sempre tem solução em $Aut(T_n)$.

Exemplo 4. *Se $\tau \in \mathrm{Aut}(T_n)$ é a máquina de adição n-ádica, então para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$x^{nk+1} = \tau$$

tem solução

$$x = (x^{-k}, \cdots, x^{-k}, x^{(n-1)k+1})\sigma_x,$$

onde $\sigma_x = \sigma_\tau = (0, \cdots, n-1)$.

Demonstração. De fato, se $x^{nk+1} = \tau$, podemos escolher $\sigma_x = (0, 1, \cdots, n-1)$.

Pelo Corolário 1,

$$(x^{nk+1})_i = (x_i x_{i+1} \cdots x_{i+n-1})^k x_i = x_i (x_{i+1} \cdots x_i)^k = \begin{cases} e, & \text{se } i \in \{0, \cdots, n-2\} \\ \tau, & \text{se } i = n-1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Assim, para $i \in \{0, \cdots, n-3\}$,

$$\begin{cases} x_i (x_{i+1} \cdots x_i)^k = e \\ (x_{i+1} \cdots x_i)^k x_{i+1} = e \end{cases} \Rightarrow x_i = x_{i+1}$$

Logo

$$x_0 = x_1 = \cdots x_{n-2} \tag{2.3}$$

Além disso,

$$\begin{cases} x_{n-1} (x_0 \cdots x_{n-1})^k = \tau \\ (x_0 \cdots x_{n-1})^k x_0 = e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n-1} (x_0 \cdots x_{n-1})^k = \tau \\ (x_0 \cdots x_{n-1})^k = x_0^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{n-1} x_0^{-1} = \tau \Rightarrow x_{n-1} = \tau x_0$$

e

$$\begin{cases} x_{n-2} (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = e \\ (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k x_{n-1} = \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n-2} (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = e \\ (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = \tau x_{n-1}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{n-2} \tau x_{n-1}^{-1} = e$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = x_{n-2} \tau$$

$$\overset{(2.3)}{\Rightarrow} x_{n-1} = x_0 \tau$$

Logo

$$x_{n-1} = x_0\tau = \tau x_0 \tag{2.4}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
(x_0 \cdots x_{n-1})^k &= e \\
\overset{(2.3),(2.4)}{\Rightarrow} (x_0^n\tau)^k x_0 &= e \\
\overset{(2.4)}{\Rightarrow} x_0^{nk+1}\tau^k &= e \\
\Rightarrow x_0^{nk+1} &= \tau^{-k}
\end{aligned}$$

Fazendo $x_0 = x^{-k}$, teremos que

$$x_0 = \cdots = x_{n-2} = x^{-k}$$

e

$$x_{n-1} = \tau x_0 = x^{nk+1} \cdot x^{-k} = x^{(n-1)k+1}$$

Logo

$$x = (x^{-k}, \cdots, x^{-k}, x^{(n-1)k+1})\sigma_x,$$

com $\sigma_x = (0, \cdots, n-1)$ satisfaz $x^{nk+1} = \tau$. $\square$

2.3 Polarizador e Indutor da máquina de adição n-ádica

Polarizadores e Indutores aparecem naturalmente quando trabalhamos com estruturas que envolvem a máquina de adição n-ádica. Nesta seção demonstraremos algumas propriedades dos Polarizadores e dos Indutores que serão úteis em nosso estudo.

Definição 4. *Pela Proposição 11, podemos escrever as potências da máquina de adição n-ádica na forma*

$$\tau^\xi = (\tau^{\frac{\xi-\overline{\xi}}{n}+\delta(0,\xi)}, \cdots, \tau^{\frac{\xi-\overline{\xi}}{n}+\delta(n-\xi-1,\xi)}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-\overline{\xi}}{n}+\delta(n-\xi,\xi)}, \cdots, \tau^{\frac{\xi-\overline{\xi}}{n}+\delta(n-1,\xi)}}_{\overline{\xi}\text{ termos}})\sigma_\tau^{\overline{\xi}}, \forall \xi \in \mathbb{Z}_n,$$

onde $\delta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \{0,1\}$ *é a função definida por*

$$\delta(j,r) = \begin{cases} 0 & se\ \overline{j} = 0, \cdots, n-1-\overline{r} \\ 1 & c.c \end{cases}$$

Esta função é chamada de **Polarizador da máquina de adição n-ádica**.

Observação 1.

$$\delta(j,r) = \begin{cases} 0, & se\ \overline{j} + \overline{r} \leq n-1 \\ 1, & se\ \overline{j} + \overline{r} > n-1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposição 13. *(Propriedades do Polarizador da máquina de adição n-ádica)*

(i) Se $(a,n) = 1$, então $\sum_{k=0}^{n-1} \delta(i+ka, \xi) = \overline{\xi}$.

(ii) Seja j inteiro positivo, então

$$\frac{j\xi - \overline{j\xi}}{n} + \delta(i, j\xi) = j\left(\frac{\xi - \overline{\xi}}{n}\right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i + k\xi, \xi), \forall i, \xi \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

Demonstração. (i) Seja $\varphi : \{0, \cdots, n-1\} \rightarrow \{0, \cdots, n-1\}$ dada por $\varphi(x) = \overline{i + xa}$. Como $(n,a) = 1$, então φ é uma bijeção. Portanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta(i + ka, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta(k, \xi) = \overline{\xi}.$$

(ii) Como $(\tau^{\xi j})_i = (\tau^{\xi})_i (\tau^{\xi})_{\overline{i+\xi}} \cdots (\tau^{\xi})_{\overline{i+(j-1)\xi}}$, então $\tau^{\frac{j\xi - \overline{j\xi}}{n} + \delta(i, j\xi)} = \tau^{j\left(\frac{\xi - \overline{\xi}}{n}\right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i+k\xi, \xi)}$.

Logo

$$\frac{j\xi - \overline{j\xi}}{n} + \delta(i, j\xi) = j\left(\frac{\xi - \overline{\xi}}{n}\right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i + k\xi, \xi), \forall i, \xi \in \mathbb{Z}$$

□

Definição 5. *A partir do Polarizador da máquina de adição n-ádica podemos definir, para cada $s \in \mathbb{Z}$, uma função $\Delta_s : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ dada por*

$$\Delta_s(i,t) = \delta(i, t-i) - \delta(i-s, t-i)$$

que chamaremos de **Indutor da máquina de adição n-ádica.**

Proposição 14 (Propriedades do Indutor da máquina de adição n-ádica). *Se $\Delta_s(i,t) = \delta(i, t-i) - \delta(i-s, t-i)$, então*

(i) $\Delta_s(i,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{t}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{t}, \overline{i} < \overline{s} \\ 1, & se\ \overline{t} < \overline{s} \leq \overline{i} \\ -1, & se\ \overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t} \end{cases}$

(ii) $\Delta_s(i,t) = -\Delta_s(t,i)$

(iii) $\Delta_s(i+s, t+s) = -\Delta_{-s}(i,t)$

(iv) $\Delta_s(i,t) = \Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t)$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{(s,n)}-1} \Delta_s(i+ks, t+ks) = 0$

(vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_s(k,t) = \begin{cases} n-\overline{s}, & se\ \overline{t} < \overline{s} \\ -\overline{s} & se\ \overline{t} \geq \overline{s} \end{cases}$

para todos $i, t, z \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

(i) Por (2.5) temos que

$$\delta(i, t-i) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{t} \geq \overline{i} \\ 1, & \text{se } \overline{t} < \overline{i} \end{cases}$$

Assim,

$$\delta(i-s, t-i) = \delta(i-s, (t-s)-(i-s)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{t-s} \geq \overline{i-s} \\ 1, & \text{se } \overline{t-s} < \overline{i-s} \end{cases}$$

Analisando os intervalos,

$$\left(\overline{t}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{t} \geq \overline{i} \geq \overline{s}\right)$$

$$\left(\overline{t}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{s} \leq \overline{t} < \overline{i}\right)$$

$$\left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} \geq \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t} \text{ e } \overline{t} - \overline{s} \geq n + \overline{i} - \overline{s}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t} \text{ e } \overline{t} \geq n + \overline{i}\right), \text{impossível}$$

$$\left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} \geq \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t} \text{ e } \overline{t} - \overline{s} < n + \overline{i} - \overline{s}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t}\right)$$

$$\left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} < \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} < \overline{s} \text{ e } n + \overline{t} - \overline{s} \geq n + \overline{i} - \overline{s}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\overline{s} > \overline{t} \geq \overline{i}\right)$$

$$\left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} < \overline{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s},\ \overline{t} < \overline{s} \text{ e } n + \overline{t} - \overline{s} < n + \overline{i} - \overline{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{t} < \bar{i} < \bar{s}\right)$$

$$\left(\bar{i} \geq \bar{s},\ \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} \geq \bar{i} - \bar{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i}\right)$$

$$\left(\bar{i} \geq \bar{s},\ \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}\right) \Leftrightarrow \left(\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} < \bar{i} - \bar{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} < \bar{i}\right), \text{impossível}$$

Portanto, $\delta(i-s,t-i) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{i} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{i} \leq \bar{t} < \bar{s} \text{ ou } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ 1, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{t} < \bar{i} \text{ ou } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{t} < \bar{i} < \bar{s} \end{cases}$

Logo, $\Delta_s(i,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{i} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{i} \leq \bar{t} < \bar{s} \text{ ou } \bar{s} \leq \bar{t} < i \text{ ou } \bar{t} < \bar{i} < \bar{s} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ -1, & \text{se } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{i} < \bar{s} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ -1, & \text{se } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \end{cases}$$

(ii) Segue de (i).

(iii) $\Delta_s(i+s,t+s) = \delta(i+s,t-i) - \delta(i,t-i) = -\left(\delta(i,t-i) - \delta(i+s,t-i)\right) = -\Delta_{-s}(i,t)$

(iv) Observe, primeiramente, que $\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) \neq 2$ e $\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) \neq -2$, pois

$$(\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = 2) \Leftrightarrow \left(\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{z}\right)$$

e

$$(\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = -2) \Leftrightarrow \left(\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{z} \text{ e } \bar{z} < \bar{s} \leq \bar{t}\right),$$

por (i).

Utilizando (i) novamente, observe que

$$(\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = 1)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big((\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{i}) \text{ e } (\bar{t}, \bar{z} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{z} < \bar{s})\big)$$

$$\text{ou } \big((\bar{z}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{z}, \bar{i} < \bar{s}) \text{ e } (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{z})\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{t} < \overline{s} \leq \overline{i}\right)$$

$$(\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = -1)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big((\overline{z}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{z}, \overline{i} < \overline{s}) \text{ e } (\overline{z} < \overline{s} \leq \overline{t})\big)$$

$$\text{ou } \big((\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{z}) \text{ e } (\overline{t}, \overline{z} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{t}, \overline{z} < \overline{s})\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{t}\right)$$

$(\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = 0)$

$$\Leftrightarrow \Big(\big((\overline{z}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{z}, \overline{i} < \overline{s}) \text{ e } (\overline{t}, \overline{z} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{t}, \overline{z} < \overline{s})\big)$$

$$\text{ou } \big((\overline{z} < \overline{s} \leq \overline{i}) \text{ e } (\overline{z} < \overline{s} \leq \overline{t})\big)$$

$$\text{ou } \big((\overline{i} < \overline{s} \leq \overline{z}) \text{ e } (\overline{t} < \overline{s} \leq \overline{z})\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{t}, \overline{i} \geq \overline{s} \text{ ou } \overline{t}, \overline{i} < \overline{s}\right)$$

Logo, $\Delta_s(i,z) + \Delta_s(z,t) = \Delta_s(i,t)$.

(v) Observe primeiramente que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{(n,s)}-1} \delta(i+ks, t-i) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{(n,s)}-1} \delta(i+(k-1)s, t-i)$.

Assim, para $m = \frac{n}{(s,n)}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_s(i+ks, t+ks) &= \sum_{k=0}^{m-1} [\delta(i+ks, t-i) - \delta(i+(k-1)s, t-i)] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i+ks, t-i) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i+(k-1)s, t-i) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i+ks, t-i) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i+ks, t-i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(vi) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_s(k,t) = \sum_{k=0}^{\overline{s}-1} \Delta_s(k,t) + \sum_{k=\overline{s}}^{n-1} \Delta_s(k,t) \overset{(i)}{=} \begin{cases} n - \overline{s}, & \text{se } \overline{t} < \overline{s} \\ -\overline{s}, & \text{se } \overline{t} \geq \overline{s} \end{cases}$

$\square$

2.4 O Normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle\tau\rangle}$

Proposição 15. *Seja N o normalizador do grupo $\widehat{\langle\tau\rangle}$ em $\mathrm{Aut(T_n)}$, então $N' \leq C(\tau)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in N$, então existem $\eta, \xi \in U(\mathbb{Z}_n)$ tais que $\tau^\alpha = \tau^\xi$ e $\tau^\beta = \tau^\eta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \tau^\alpha &= \tau^\xi \\ \Rightarrow \tau &= (\tau^\xi)^{\alpha^{-1}} \\ \Rightarrow \tau &= (\tau^{\alpha^{-1}})^\xi \\ \Rightarrow \tau^{\xi^{-1}} &= \tau^{\alpha^{-1}} \end{aligned}$$

Da mesma forma $\tau^{\eta^{-1}} = \tau^{\beta^{-1}}$.

Portanto, $\tau^{[\alpha,\beta]} = \tau^{\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta} = (\tau^{\xi^{-1}})^{\beta^{-1}\alpha\beta} = (\tau^{\xi^{-1}\eta^{-1}})^{\alpha\beta} = \tau^{\xi^{-1}\eta^{-1}\xi\eta} = \tau$

Logo, $N' \leq C(\tau)$. □

A seguinte proposição nos diz quem são os elementos do normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle\tau\rangle}$:

Proposição 16. *Sejam τ a máquina de adição n-ádica e $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$ satisfazendo $\tau^\alpha = \tau^\xi$, com $\xi \in U(\mathbb{Z}_n)$. Assim*

$$\alpha = \alpha_0^{(1)} \left(e, \tau^{\frac{(\xi-\overline{\xi})}{n}+\delta(v(\alpha)\xi,\xi)}, \cdots, \tau^{i\frac{(\xi-\overline{\xi})}{n}+\sum_{k=0}^{i-1}\delta((v(\alpha)+k)\xi,\xi)}, \cdots, \tau^{(n-1)\frac{(\xi-\overline{\xi})}{n}+\sum_{k=0}^{n-2}\delta((v(\alpha)+k)\xi,\xi)}\right)\sigma_\alpha \tag{2.7}$$

com $\tau^{\alpha_0} = \tau^\xi$ e $\sigma_\alpha \in S_n$ satisfazendo $(j)^{\sigma_\alpha} = \overline{(v(\alpha)+j)\xi}$ para algum $v(\alpha) \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Demonstração. Observe primeiro que $\sigma_\tau^\xi = (0, \overline{\xi}, \cdots, \overline{(n-1)\xi})$ e $\sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi$ implicam em $(0^{\sigma_\alpha}, 1^{\sigma_\alpha}, \cdots, (n-1)^{\sigma_\alpha}) = (0, \overline{\xi}, \overline{2\xi}, \cdots, \overline{(n-1)\xi})$. Portanto, existe $v(\alpha) \in \{0, \cdots, n-1\}$ tal que $0^{\sigma_\alpha} = \overline{v(\alpha)\xi}$. Logo $(j)^{\sigma_\alpha} = \overline{(v(\alpha)+j)\xi}, j = 0, \cdots, n-1$.

Agora,

$$\begin{aligned} &\tau^\alpha = \tau^\xi \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi \text{ e } \alpha_{i^{\sigma_\tau^s}} = (\tau^s)_i^{-1}\alpha_i(\tau^{\xi s})_{i^{\sigma_\alpha}}, \\ \forall i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z}, \text{ pela Proposição 6(iii)} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi,\ \alpha_0 = \alpha_{0^{\sigma_\tau^n}} = (\tau^n)_0^{-1}\alpha_0(\tau^{\xi n})_{0^{\sigma_\alpha}} \\ \text{e } \alpha_i = \alpha_{0^{\sigma_\tau^i}} = (\tau^i)_0^{-1}\alpha_0(\tau^{\xi i})_{0^{\sigma_\alpha}}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi, \ \ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_0\tau^\xi \\ \text{e} \ \ \alpha_i = \alpha_0\tau^{\frac{\xi i - \overline{\xi i}}{n} + \delta(v(\alpha)\xi, \xi i)}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi, \ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_0\tau^\xi \\ \text{e} \ \ \alpha_i = \alpha_0\tau^{i\left(\frac{\xi - \overline{\xi}}{n}\right) + \sum_{k=0}^{i-1}\delta((v(\alpha)+k)\xi, \xi)}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, \text{pela Eq. (2.6)} \end{array} \right)$$

□

Corolário 9. *Seja* $\widehat{\langle\tau\rangle} = \{\tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n\}$ *o fecho topológico de* $\langle\tau\rangle$ *em* $\mathcal{A}$*. Então* $C(\tau) = \widehat{\langle\tau\rangle}$*. Em particular, o normalizador de* $\widehat{\langle\tau\rangle}$ *é metabeliano.*

Demonstração. Se $\alpha \in C(\tau)$, então $\tau^\alpha = \tau$. Fazendo $\xi = 1$ na proposição anterior teremos

$$\alpha = \alpha_0^{(1)}\tau^{v(\alpha)},$$

onde $\alpha_0 \in C(\tau)$,i.e,

$$\alpha = \tau^{v(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} v(\alpha_{0^k})n^k} \in \widehat{\langle\tau\rangle}$$

Logo $C(\tau) = \widehat{\langle\tau\rangle}$.

Assim, se N é o normalizador de $\widehat{\langle\tau\rangle}$, temos que

$$N' \overset{\text{Prop.15}}{\leq} C(\tau) = \widehat{\langle\tau\rangle},$$

ou seja, N é metabeliano. □

Corolário 10. *Seja* $\mathbb{Z}_n^1 = \{\xi \in \mathbb{Z}_n \mid \overline{\xi} = 1\}$*. Se* $\xi \in \mathbb{Z}_n^1$*, então*

$$\lambda_\xi = \lambda_\xi^{(1)}(e, \tau^{\frac{\xi-1}{n}}, \tau^{2\frac{\xi-1}{n}}, \cdots, \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}})$$

satisfaz

$$\tau^{\lambda_\xi} = \tau^\xi.$$

Proposição 17. *Seja* $\Lambda = \{\lambda_\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1\}$*, então* Λ *é um grupo (abeliano) isomorfo a* $\mathbb{Z}_n^1$*.*

Demonstração. Sejam $\xi, \theta \in \mathbb{Z}_n^1$. Assim, como $\lambda_\xi, \lambda_\theta$ e $\lambda_{\xi\theta}$ são inativos, segue que

$$(\lambda_\xi\lambda_\theta\lambda_{\xi\theta}^{-1})_i = (\lambda_\xi)_i(\lambda_\theta)_i(\lambda_{\xi\theta}^{-1})_i = (\lambda_\xi)_i(\lambda_\theta)_i(\lambda_{\xi\theta}^{-1})_i = (\lambda_\xi)_i(\lambda_\theta)_i(\lambda_{\xi\theta})_i^{-1}$$

$$= \lambda_\xi\tau^{i\frac{\xi-1}{n}}\lambda_\theta\tau^{i\frac{\theta-1}{n}}\left(\lambda_{\xi\theta}\tau^{i\frac{\xi\theta-1}{n}}\right)^{-1} = \lambda_\xi\lambda_\theta\lambda_\theta^{-1}\tau^{i\frac{\xi-1}{n}}\lambda_\theta\tau^{i\frac{\theta-1}{n}}\tau^{-i\frac{\xi\theta-1}{n}}\lambda_{\xi\theta}^{-1}$$

$$= \lambda_\xi\lambda_\theta\tau^{i\theta\frac{\xi-1}{n}}\tau^{i\frac{\theta-1}{n}}\tau^{-i\frac{\xi\theta-1}{n}}\lambda_{\xi\theta}^{-1} = \lambda_\xi\lambda_\theta\lambda_{\xi\theta}^{-1}, \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

Logo $\lambda_\xi\lambda_\theta = \lambda_{\xi\theta}$. □

Proposição 18. *Sejam $\xi \in \mathbb{Z}_n^1$ e $\alpha \in \operatorname{Aut}(T_n)$ satisfazendo $\tau^\alpha = \tau^\xi$. Então $\alpha = \lambda_\xi \tau^m$ para algum $m \in \mathbb{Z}_n$.*

Demonstração. De fato, como $\tau^{\lambda_\xi} = \tau^\xi$ e $\tau^\alpha = \tau^\xi$, então, $\tau^{\lambda_\xi^{-1}\alpha} = \tau$. Portanto, pelo Corolário 9, existe $m \in \mathbb{Z}_n$ tal que ${\lambda_\xi}^{-1}\alpha = \tau^m$.

Logo $\alpha = \lambda_\xi \tau^m$. $\square$

Proposição 19. *Seja $\Psi = \{\lambda_\xi \tau^t \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1 \text{ e } t \in \mathbb{Z}_n\}$, então Ψ é um grupo metabeliano satisfazendo*

(i) $\Psi = \Lambda \ltimes \widehat{\langle \tau \rangle} \cong \mathbb{Z}_n^1 \ltimes \mathbb{Z}_n$

(ii) $\Psi' = \widehat{\langle \tau^n \rangle}$

Demonstração. (i) Dados $\lambda_\xi \tau^t,\ \lambda_\theta \tau^k \in \Psi$, $(\lambda_\theta \tau^k)^{-1} = \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}}$, pois

$$\lambda_\theta \tau^k \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}} = \lambda_\theta \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{k\theta^{-1} - k\theta^{-1}} = \lambda_1 = 1.$$

Assim $\lambda_\xi \tau^t \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}} = \lambda_\xi \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{t\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}} = \lambda_{\xi\theta^{-1}} \tau^{(t-k)\theta^{-1}} \in \Psi$.

Portanto Ψ é subgrupo de $\mathcal{A}$.

Além disso, como $\Lambda \leq N_{\mathcal{A}}(\widehat{\langle \tau \rangle})$ e $\Lambda \cap \widehat{\langle \tau \rangle} = 1$, segue que $\Psi = \Lambda \ltimes \widehat{\langle \tau \rangle} \cong \mathbb{Z}_n^1 \ltimes \mathbb{Z}_n$.

(ii) Como $[\lambda_\xi \tau^t, \lambda_\theta \tau^k] = \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}} \lambda_\xi \tau^t \lambda_\theta \tau^k$

$$= \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}\xi} \tau^t \lambda_\theta \tau^k = \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}\xi} \lambda_\theta \tau^{\theta t} \tau^k$$

$$= \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_\xi \tau^{\theta t + k} = \tau^{-t} \tau^{-\xi k} \tau^{\theta t + k} = \tau^{t(\theta-1) - k(\xi-1)} \in \widehat{\langle \tau^n \rangle}$$

e $[\tau, \lambda_\xi] = \tau^{\xi - 1}$, então $\Psi' = \widehat{\langle \tau^n \rangle}$.

$\square$

Proposição 20. *Para cada $k \in \mathbb{Z}_n$, defina $H_k = \{\lambda_\xi \tau^{k\left(\frac{\xi-1}{n}\right)} \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1\}$. Então*

(i) H_k é um subgrupo abeliano de Ψ isomorfo a $\mathbb{Z}_n^1$;

(ii) Se $k, r \in \mathbb{Z}_n$ e $k \neq r$, então $H_k \cap H_r = e$.

Demonstração. (i) Basta notar que a aplicação $\varphi_k : \mathbb{Z}_n^1 \to H_k$ definida por $\varphi_k(\xi) = \lambda_\xi \tau^{k\left(\frac{\xi-1}{n}\right)}$ é um isomorfismo.

(ii) Sejam $k, r \in \mathbb{Z}_n$ com $k \neq r$ e $\xi, \theta \in \mathbb{Z}_n^1 \setminus \{1\}$.

Assim $[\lambda_\xi \tau^{k\left(\frac{\xi-1}{n}\right)}, \lambda_\theta \tau^{r\left(\frac{\theta-1}{n}\right)}] = \tau^{k\left(\frac{\xi-1}{n}\right)(\theta-1) - r\left(\frac{\theta-1}{n}\right)(\xi-1)} = \tau^{(k-r)\left(\frac{\xi-1}{n}\right)(\theta-1)} \neq e$.

Portanto um elemento não trivial de H_k não comuta com nenhum elemento não trivial de H_r. Em particular, $H_k \cap H_r = e$.

$\square$

Proposição 21. *Se* $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathrm{Aut}(T_n)$ *safisfaz* $\tau^\alpha = \lambda_\xi \tau^{1+kn}$, *para algum* $\xi \neq 1$, *então*

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1)\right]}, i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \tau^{\alpha_0} = \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^n-1}{\xi-1}\right]} \end{cases}$$

Demonstração. De $\tau^\alpha = \lambda_\xi \tau^{1+kn}$, obtemos

$$[(e, e, \cdots, e, \tau)\sigma_\tau]^{(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})} = (\lambda_\xi \tau^k, \lambda_\xi \tau^{\frac{\xi-1}{n}+k}, \cdots, \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k+1})\sigma_\tau$$

Pela Proposição 6,

$$\begin{cases} \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k} = \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}, \text{ se } i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k} = \alpha_{n-1}^{-1}\tau\alpha_0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_i \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k}, \text{ se } i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_{n-1}\lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_\xi \tau^k \lambda_\xi \tau^{\frac{\xi-1}{n}+k} \cdots \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k}, \text{ se } i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_{n-1}\lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{k\sum_{j=0}^{i}\xi^j + \frac{\xi-1}{n}\xi^i \sum_{j=1}^{i} j(\xi^{-1})^j}, \text{ se } i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_{n-1}\lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1)\right]}, i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_{n-1}\lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1)\right]}, i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}(\alpha_0 \lambda_{\xi^{n-1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{n-1}-1}{\xi-1} - (n-1)\right]})\lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1)\right]}, i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_0 \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{\xi}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{n-1}-1}{\xi-1} - (n-1)\right]} \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1)\right]}, i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \tau^{\alpha_0} = \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{1}{n}\left[(1+kn)\frac{\xi^n-1}{\xi-1}\right]} \end{cases}$$

□

A seguinte proposição caracteriza grupos nilpotentes que contêm a máquina de adição:

Proposição 22. *Seja G um subgrupo nilpotente de $\mathrm{Aut}(T_n)$ contendo a máquina de adição n-ádica. Então G é um grupo abeliano livre de torção contido em $\widehat{\langle\tau\rangle}$.*

Demonstração. Suponhamos que G seja um grupo nilpotente de classe $k > 1$ contendo a máquina de adição n-ádica.

Considere a *série central descendente de G*, definida por

$$G = \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \cdots \geq \Gamma_n(G) \geq \Gamma_{n+1}(G) \geq \cdots$$

onde $\Gamma_{t+1}(G) = [\Gamma_t(G), G]$ para todo $t \in \mathbb{N}$ maior que 1.

Como G é nilpotente de classe $k > 1$, então k é o menor inteiro positivo tal que $\Gamma_{k+1}(G) = 1$. Além disso, como $\widehat{\langle\tau\rangle}$ é abeliano e G é nilpotente de classe $k > 1$, existe $\alpha \in G - \widehat{\langle\tau\rangle}$.

Considere agora a seqüência de elementos de G definida recursivamente por:

$$\theta(1) = \alpha,\ \theta(2) = [\alpha, \tau], \cdots, \theta(t+1) = [\theta(t), \tau], \cdots .$$

Deste modo, como $\theta(t) \in \Gamma_t(G), \forall t \in \mathbb{N}$ e G é nilpotente de classe $k > 1$, então existe um menor inteiro positivo m tal que $\theta(m) = e$ e $2 < m \leq k+1$.

Desta forma,

$$e = \theta(m) = [\theta(m-1), \tau].$$

Pelo Corolário 9, existe $\xi \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que

$$\theta(m-1) = \tau^{\xi}.$$

Logo

$$\theta(m-1) = [\theta(m-2), \tau] = \tau^{\xi}$$
$$\Rightarrow \theta(m-2)^{-1}\tau^{-1}\theta(m-2)\tau = \tau^{\xi}$$
$$\Rightarrow \tau^{\theta(m-2)} = \tau^{1-\xi}$$

Como G é nilpotente de classe $k > 1$, temos que

$$[\Gamma_k(G), \langle\tau\rangle] \leq [\Gamma_k(G), G] = \Gamma_{k+1}(G) = e$$

com $\Gamma_k(G) \neq e$.

Desta forma, existe $s \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $\tau^s \in \Gamma_k(G)$.

Assim,

$$[\tau^s, \theta(m-2)] = \tau^{-s}(\tau^s)^{\theta(m-2)} = \tau^{-s}\tau^{s(1-\xi)} = \tau^{-s\xi} \in \Gamma_{k+1}(G) \setminus \{e\},$$

o que é impossível.

Logo $G \leq \widehat{\langle\tau\rangle}$ $\square$

Capítulo 3

Construção de Grupos Solúveis

Neste capítulo apresentamos algumas construções de grupos solúveis a partir de um automorfismo de $Aut(T_n)$. As idéias aqui apresentadas podem ser combinadas para auxiliar na construção de grupos solúveis mais complexos.

Teorema 1. *Sejam* $\alpha \in Aut(T_n), t \in \mathbb{Z}$ *e* $\sigma_\alpha^t = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ *a decomposição de* σ_α^t *em ciclos disjuntos nos símbolos em* $Y = \{0, \cdots, n-1\}$.

Assim, se $T = \{\sigma_i \mid i \in \{1, \cdots, k\}\}$ *e para cada* $S \subset T$, *definirmos um automorfismo*

$$\gamma_S = ((\gamma_S)_0, \cdots, (\gamma_S)_{n-1}) \prod_{\sigma \in S} \sigma,$$

onde

$$(\gamma_S)_j = \begin{cases} (\alpha^t)_j, & \text{se } j \text{ é um símbolo que} \\ & \quad \text{aparece em algum elemento de } S. \\ e & \quad \text{c. c.} \end{cases},$$

então

(i) $H = \langle \gamma_S, \alpha \mid S \subset T \rangle$ *é um grupo metabeliano.*

(ii) $N = \langle \gamma_S \mid S \subset T \rangle$ *é um subgrupo normal e abeliano de* H.

(iii) $\frac{H}{N} = \frac{N\langle\alpha\rangle}{N} = \frac{\langle\alpha\rangle}{N \cap \langle\alpha\rangle}$ *é um grupo cíclico de ordem divisora de* t.

Demonstração. Sejam $\gamma_{S_1}, \gamma_{S_2} \in N$.

Assim,

$$\sigma_{\gamma_{S_1}\gamma_{S_2}} = \sigma_{\gamma_{S_1}}\sigma_{\gamma_{S_2}} = \sigma_{\gamma_{S_2}} \cdot \sigma_{\gamma_{S_1}} = \sigma_{\gamma_{S_2}\gamma_{S_1}}$$

e

$$(\gamma_{S_1}\gamma_{S_2})_j = (\gamma_{S_1})_j(\gamma_{S_2})_{j^{\gamma_{S_1}}} = \begin{cases} (\alpha^{2t})_j, & \text{se } j \text{ é símbolo que aparece em} \\ & \text{algum elemento de } S_1 \cap S_2. \\ (\alpha^t)_j, & \text{se } j \text{ é símbolo que aparece em} \\ & \text{algum elemento de } S_1 \cup S_2 \text{ mas} \\ & \text{não aparece em elementos de } S_1 \cap S_2. \\ e, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Logo $\gamma_{S_1}\gamma_{S_2} = \gamma_{S_2}\gamma_{S_1}$ e N é abeliano.

Como

$$((\gamma_S)^\alpha)_j = (\alpha^{-1})_j(\gamma_S)_{j^{\alpha^{-1}}}\alpha_{j^{\alpha^{-1}\gamma_S}}$$

$$= \begin{cases} (\alpha^{-1})_j(\alpha^t)_{j^{\alpha^{-1}}}\alpha_{j^{\alpha^{-1}\alpha^t}} = (\alpha^t)_j, & \text{se } j^{\alpha^{-1}} \text{ é um símbolo que} \\ & \text{aparece em algum elemento de } S \\ (\alpha^{-1})_j e \alpha_{j^{\alpha^{-1}\gamma_S}} = (\alpha^{-1})_j\alpha_{j^{\alpha^{-1}}} = e & \text{c.c.} \end{cases},$$

então

$$((\gamma_S)^\alpha)_{j^\alpha} = \begin{cases} (\alpha^t)_{j^\alpha} = (\alpha^t)_{j^{\sigma_\alpha}} & \text{se } j \text{ é um símbolo que} \\ & \text{aparece em algum elemento de } S \\ e & \text{c.c.} \end{cases},$$

Além disso, como σ_α age sobre T por conjugação, existe $S' \subset T$ com a mesma quantidade de elementos de S de tal forma que

- $S' = S^{\sigma_\alpha}$
- Se j é símbolo de algum elemento de S, então $j^\alpha = j^{\sigma_\alpha}$ é símbolo de algum elemento de S'.
- Se $\sigma \in S$, então $\sigma^{\sigma_\alpha} \in S'$.

Assim, $((\gamma_S)^\alpha)_j = (\gamma_{S'})_j$ e $\sigma_{\gamma_S^\alpha} = (\sigma_{\gamma_S})^{\sigma_\alpha} = \left(\prod_{\sigma\in S}\sigma\right)^{\sigma_\alpha} = \prod_{\sigma\in S}\sigma^{\sigma_\alpha} = \prod_{\sigma\in S'}\sigma = \sigma_{\gamma_{S'}}$.

Portanto $(\gamma_S)^\alpha = \gamma_{S'}$, i.e., N é um subgrupo normal de H.

Para o restante da demonstração, basta observar que $H = N\langle\alpha\rangle$, pois N é normal em H. Assim, pelo *Teorema do isomorfismo,*

$$\frac{H}{N} = \frac{N\langle\alpha\rangle}{N} \cong \frac{\langle\alpha\rangle}{N \cap \langle\alpha\rangle}$$

é um grupo cíclico.

Além disso, como

$$\gamma_{\{\sigma_1\}}\gamma_{\{\sigma_2\}}\cdots\gamma_{\{\sigma_k\}} = \alpha^t,$$

então

$$\left\langle \alpha^t \right\rangle \subset N \cap \langle \alpha \rangle .$$

Logo

$$[\langle \alpha \rangle : \left\langle \alpha^t \right\rangle] = [\langle \alpha \rangle : N \cap \langle \alpha \rangle] \cdot [N \cap \langle \alpha \rangle : \left\langle \alpha^t \right\rangle]$$

e como $[\langle \alpha \rangle : \left\langle \alpha^t \right\rangle]$ é um divisor de t, segue que $[H : N] = [\langle \alpha \rangle : N \cap \langle \alpha \rangle]$ também é um divisor de t. $\square$

Teorema 2. *Dados $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$ e $t \in \mathbb{N}$, sejam m o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\varphi(\alpha, u) \in \mathrm{Stab}_n(|u|)$ tal que para cada $w \in \mathcal{M}$ com $|w| = |u|$,*

$$\varphi(\alpha, u)_w = \begin{cases} \left(\alpha^{m^{|u|}}\right)_u, & se\ w = u \\ e, & se\ w \neq u \end{cases}$$

Assim,

$$G(\alpha, t) = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle$$

é um grupo solúvel com comprimento derivado menor ou igual a $t+1$ contendo α.

Demonstração. Sejam $u, v, w \in \mathcal{M}$ tais que $|v| \leq |u| = |w|$. Assim,

$$\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)} \in \mathrm{Stab}_n(|u|)$$

e

$$\left(\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)}\right)_w = \left(\varphi(\alpha, v)^{-1}\right)_w \varphi(\alpha, u)_{w^{\varphi(\alpha,u)^{-1}}} \varphi(\alpha, v)_{w^{\varphi(\alpha,v)^{-1}\varphi(\alpha,u)}}$$

$$= \begin{cases} \left(\varphi(\alpha, v)^{-1}\right)_{u^{\varphi(\alpha,v)}} \varphi(\alpha, u)_u \varphi(\alpha, v)_u, & \text{se } w^{\varphi(\alpha,v)^{-1}} = u \\ e, & \text{se } w^{\varphi(\alpha,v)^{-1}} \neq u \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\alpha^{m^{|u^{\varphi(\alpha,v)}|}}\right)_{u^{\varphi(\alpha,v)}}, & \text{se } w = u^{\varphi(\alpha,v)} \\ e, & \text{se } w \neq u^{\varphi(\alpha,v)} \end{cases}$$

$$= \varphi(\alpha, u^{\varphi(\alpha,v)})_w.$$

Portanto, para $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|v| \leq |u|$,

$$\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)} = \varphi(\alpha, u^{\varphi(\alpha,v)}) \tag{3.1}$$

Para cada $k \in \{0, \cdots, t\}$, considere os seguintes subgrupos de $G(\alpha, t)$:

$$H_k = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| = k \rangle$$

e

$$N_k = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, k \leq |u| \leq t \rangle .$$

Assim, pela Equação (3.1), H_k é abeliano, N_k é um subgrupo normal de $G(\alpha, t)$,

$$N_k = N_{k+1} H_k, \forall k \in \{0, \cdots, t-1\}$$

$$N_0 = G(\alpha, t) \text{ e } N_t = H_t$$

satisfazem

$$\frac{N_k}{N_{k+1}} \cong \frac{N_{k+1} H_k}{N_{k+1}} \cong \frac{H_k}{N_{k+1} \cap H_k} \cong H_k, \ \forall k \in \{0, \cdots, t-1\}$$

e

$$G(\alpha, t) = N_0 \rhd N_1 \rhd N_2 \rhd \cdots \rhd N_t \rhd 1.$$

Logo $G(\alpha, t)$ é solúvel de comprimento derivado menor ou igual a $t+1$.

$\square$

Corolário 11. *Sejam $\tau \in \mathrm{Aut}(T_n)$ a máquina de adição n-ádica e*

$$G_t = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle .$$

Então G_t é um grupo solúvel de comprimento derivado $t+1$ isomorfo ao produto entrelaçado

$$(\cdots((\langle \tau \rangle \wr C_n) \wr C_n) \wr \cdots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece t vezes á direita de $\langle \tau \rangle$ no produto entrelaçado.

Corolário 12. *Sejam $\tau \in \mathrm{Aut}(T_n)$ a máquina de adição n-ádica. Então*

$$G_\infty = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M} \rangle$$

é um grupo localmente solúvel que contém subgrupos solúveis com comprimento solúvel t para cada $t \in \mathbb{N}$.

Corolário 13. *Sejam p primo e $\tau \in \mathrm{Aut}(T_p)$ a máquina de adição p-ádica. Então*

$$G_t = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle$$

contém um subgrupo isomorfo a um Sylow p-subgrupo de S_{p^t}.

Demonstração 1. Seja $u \in \mathcal{M}$, então $\varphi(\tau, u) \in \mathrm{Stab}_p(|u|)$ satisfaz

$$\varphi(\tau, u)_v = \begin{cases} \tau, & \text{se } v = u \\ e, & \text{se } v \neq u \end{cases}$$

para cada $v \in \mathcal{M}$ com $|v| = |u|$.

Para cada $w \in \mathcal{M}$ com $|w| < t$, seja $\gamma(w) \in \mathrm{Stab}_p(|w|)$ tal que para $v \in \mathcal{M}$ com $|v| = |w|$,

$$\gamma(w)_v = \begin{cases} (0, 1, \cdots, p-1), & \text{se } v = w \\ e, & \text{se } v \neq w \end{cases}$$

Mostraremos que $\gamma(w) \in G_t$.

Como $\varphi(\tau, w), \varphi(\tau, w(p-1)) \in G_t$, então $\varphi(\tau, w(p-1))^{-1}\varphi(\tau, w) = \gamma(w) \in G_t$.

Assim, $\langle \gamma(w) \mid w \in \mathcal{M}, |w| < t \rangle \cong (\cdots((C_p \wr C_p) \wr C_p) \wr \cdots) \wr C_p$, onde C_p aparece t vezes no produto entrelaçado.

Portanto, $\langle \gamma(w) \mid w \in \mathcal{M}, |w| < t \rangle$ é isomorfo a um subgrupo de Sylow de S_{p^t}.

□

Demonstração 2. Basta utilizar o Corolário 11 e notar que

$$(\cdots((C_p \wr C_p) \wr C_p) \wr \cdots) \wr C_p$$

é um subgrupo de

$$(\cdots((\langle \tau \rangle \wr C_p) \wr C_p) \wr \cdots) \wr C_p,$$

onde C_p aparece t vezes nos produtos entrelaçados. □

Um subgrupo de $\mathrm{Aut}(T_n)$ que fixa todos os vértices que estão fora da subárvore com vértices $u\mathcal{M}$ e se projeta em um grupo H no vértice u é indicada por $u * H$ e seus elementos são denotados por $u * \alpha$, onde $\alpha \in H$. Assim,

$$(u * \alpha)_v = \begin{cases} \alpha_w, & \text{se } v = uw \text{ para algum } w \in \mathcal{M}. \\ e, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, se $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_n)$, então $\varphi(\alpha, u) = u * (\alpha^{m^{|u|}})_u$, onde m é o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$.

Seja $\Psi = \{\lambda_\xi \tau^t \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1, t \in \mathbb{Z}_n\}$ como na Seção 2.4 e seja $(\Psi(t))_{t \in \mathbb{N}}$ a sequência de grupos:

$$\Psi(0) = \Psi, \ \Psi(1) = \langle 0 * \Psi, \Psi(0) \rangle$$

$$\Psi(t) = \left\langle 0^t * \Psi, \Psi(t-1) \right\rangle,$$

$$\Psi(\omega) = \cup\{\Psi(t) \mid t \geq 0\}.$$

Denotando $\Upsilon = \widehat{\langle\tau\rangle}$, podemos construir a seguinte seqüência de subgrupos de $\Psi(\omega)$:

$$\Upsilon(0) = \Upsilon, \;\; \Upsilon(1) = \langle 0 * \Upsilon(0), \Upsilon(0)\rangle,$$

$$\Upsilon(t) = \left\langle 0^t * \Upsilon(0),\; \Upsilon(t-1)\right\rangle,$$

$$\Upsilon(\omega) = \cup\{\Upsilon(t) \mid t \geq 0\}$$

de forma que $\Upsilon(t) = G_t$ e $\Upsilon(\omega) = G_\infty$.

Além disso, chamando de P_0 o grupo gerado pelo n-ciclo $(0, 1, \cdots, n-1)$ e P_t o produto entrelaçado

$$(\cdots((C_n) \wr C_n) \wr \cdots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece $t+1$ vezes no produto entrelaçado, então, $\Upsilon(t) = (\times_{n^t}\Upsilon)P_{t-1}$, que é uma extensão do grupo abeliano livre de torção $\times_{n^t}\Upsilon$ pelo grupo P_{t-1}, solúvel de grau t. Da mesma forma, como $\Psi(t) = (\times_{n^t}\Psi)P_{t-1}$ é uma extensão do grupo metabeliano livre de torção $\times_{n^t}\Psi$ pelo grupo finito P_{t-1}, solúvel de grau t, então $\Psi(t)$ é solúvel de comprimento derivado $t+2$.

3.1 Grupos Estruturais

Uma classe de grupos metabelianos que aparecem naturalmente quando estudamos a solubilidade de grupos que contém a máquina de adição é a classe dos *Grupos estruturais.*

Definição 6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, o grupo*

$$J(n,t) = \left\langle b_0, \cdots, b_{n-1} \mid b_i b_{\overline{j+t}} = b_j b_{\overline{i+t}}, \forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}\right\rangle,$$

onde $\overline{z}$ é o resto da divisão inteira de z por n será chamado de **grupo estrutural.**

Teorema 3. *Seja $G = C \wr C_n$, então $J(n,t)$ é isomorfo a um subgrupo normal livre de torção de índice n em G. Além disto, valem*

(i) $b_i^{\frac{n}{(t,n)}} \in Z\left(J(n,t)\right)$;

(ii) Se $(t,n) = 1$, *então* $J(n,t)$ *é 2-gerado;*

(iii) $[b_j, b_i]^{b_k} = [b_{\overline{j+t}}, b_{\overline{i+t}}]$;

Demonstração. O grupo G tem a seguinte apresentação:

$$\left\langle a, u \mid a^n = e,\ u^{a^i}u^{a^j} = u^{a^j}u^{a^i}, \forall i \in \mathbb{Z} \right\rangle \tag{3.2}$$

Introduzindo um gerador $b = a^t u^{-1}$,

$$\begin{aligned}
& u^{a^i}u^{a^j} = u^{a^j}u^{a^i} \\
\Rightarrow\ & (b^{-1}a^t)^{a^i}(b^{-1}a^t)^{a^j} = (b^{-1}a^t)^{a^j}(b^{-1}a^t)^{a^i} \\
\Rightarrow\ & (a^{-t}b)^{a^j}(a^{-t}b)^{a^i} = (a^{-t}b)^{a^i}(a^{-t}b)^{a^j} \\
\Rightarrow\ & (a^{-t})^{a^j}b^{a^j}(a^{-t})^{a^i}b^{a^i} = (a^{-t})^{a^i}b^{a^i}(a^{-t})^{a^j}b^{a^j} \\
\Rightarrow\ & b^{a^j}a^{-t}b^{a^i} = b^{a^i}a^{-t}b^{a^j} \\
\Rightarrow\ & b^{a^j}b^{a^{i+t}} = b^{a^i}b^{a^{j+t}}
\end{aligned}$$

Utilizando Transformações de Tietze, a apresentação (3.2) é transformada em:

$$\left\langle b, a \mid a^n = e,\ b^{a^i}b^{a^{j+t}} = b^{a^j}b^{a^{i+t}} \right\rangle. \tag{3.3}$$

Por fim, adicionando os geradores $b_i = b^{a^i},\ i = 0, \cdots, n-1$ a apresentação (3.3) e aplicando o processo de Transformação de Tietze, obtemos

$$\left\langle b_0, \cdots, b_{n-1}, a \mid a^n = e, b_i = b_0^{a^i}, b_i b_{\overline{j+t}} = b_j b_{\overline{i+t}}, \forall i \in \{0, \cdots, n-1\} \right\rangle = J(n,t) \rtimes \langle a \rangle, \tag{3.4}$$

ou seja, $J(n,t)$ é isomorfo a um subgrupo normal livre de torção de índice n em $G = C \wr C_n$.

Sejam $i, j, k \in \{0, \cdots, n-1\}$.

(i)

$$\begin{aligned}
b_i b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}}^{-1} = b_j \quad & \Rightarrow \quad \underbrace{b_i \cdots b_i}_{m \text{ termos}} b_{\overline{j+mt}} \underbrace{b_{\overline{i+t}}^{-1} \cdots b_{\overline{i+t}}^{-1}}_{m \text{ termos}} = b_j \\
& \Rightarrow \quad b_i^{\frac{n}{(t,n)}} b_j b_{i+j}^{-\frac{n}{(t,n)}} = b_j \\
& \Rightarrow \quad b_{i+t}^{\frac{n}{(t,n)}} = \left(b_i^{\frac{n}{(t,n)}}\right)^{b_j} \\
& \Rightarrow \quad b_{i+t}^{\frac{n}{(t,n)}} = b_i^{\frac{n}{(t,n)}} \in Z\left(J(n,t)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Observe que $b_i b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}}^{-1} = b_j \Rightarrow \underbrace{b_i \cdots b_i}_{m \text{ termos}} b_{\overline{j+mt}} \underbrace{b_{i+t}^{-1} \cdots b_{i+t}^{-1}}_{m \text{ termos}} = b_j$.

Desta forma, como $(t,n) = 1$, então existe $r(j) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$j + r(j)t \equiv i \bmod n.$$

Portanto, $b_i^{r(j)} b_{\overline{j+r(j)t}} b_{i+t}^{-r(j)} = b_j \Rightarrow b_j = b_i^{r(j)+1} b_{i+t}^{-r(j)}$.

Logo, se $(n,t) = 1$, então $J(n,t)$ é 2-gerado

(iii)

$$\begin{aligned}
[b_j, b_i]^{b_k} &= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_j b_i b_k \\
&= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_j b_{\overline{k-t}} b_{\overline{i+t}} \\
&= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_{\overline{k-2t}} b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}} \\
&= b_k^{-1} b_j^{-1} b_{\overline{k-t}} b_{\overline{i+t}}^{-1} b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}} \\
&= b_k^{-1} b_k b_{\overline{j+t}}^{-1} b_{\overline{i+t}}^{-1} b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}} \\
&= b_k^{-1} b_k b_{\overline{j+t}}^{-1} b_{\overline{i+t}}^{-1} b_{\overline{j+t}} b_{\overline{i+t}} \\
&= [b_{\overline{j+t}}, b_{\overline{i+t}}]
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Grupos abelianos normalizados pela máquina de adição

Neste capítulo analisaremos os elementos de subgrupos abelianos B de $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$ normalizados por τ. Em particular, se $\beta \in B$, estudaremos a solubilidade ou não do grupo $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para alguns casos particulares.

Se B é abeliano e τ normaliza B, então $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\beta \in B$ e para todo ξ inteiro. Assim, se $\beta \in B$ então a seguinte proposição nos proporciona relações na apresentação de $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$:

Proposição 23. *Seja $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $\xi, k \in \mathbb{Z}$.*

(I) $$(\tau^\xi)^{-1}_{i^{\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}} \beta_{i^{\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}} (\tau^\xi)_{i^{\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}\sigma_\beta}} \beta_{i^{\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}\sigma_\beta\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}}$$
$$= \beta_i (\tau^\xi)^{-1}_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}} \beta_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}} (\tau^\xi)_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}\sigma_\beta}} \ e \ [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}] = e$$

(II) $[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_{i^{\sigma_\beta}}} = [\beta_{i^{\sigma_\beta}}, \tau^\xi]$

(III) $[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_{i\sigma_\beta}\beta_{i^{\sigma_\beta^2}}\cdots\beta_{i^{\sigma_\beta^{s_i}}}} = [\beta_i, \tau^\xi]$, *onde* $s_i = \left|\mathrm{Orb}_{\sigma_\beta}(i)\right|$

(IV) $[[\beta_i, \tau^k], [\beta_i, \tau^\xi]] = e$

Demonstração. (I) $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$

$$\Leftrightarrow \left(e = \beta^{-1}_{i^{\sigma_{\beta^{\tau^\xi}}}} (\beta^{\tau^\xi})^{-1}_i \beta_i (\beta^{\tau^\xi})_{i^{\sigma_\beta}} \text{e } [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}] = e, \text{ pela Proposição 7}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left((\beta^{\tau^\xi})_i \beta_{i^{\sigma_{\beta^{\tau^\xi}}}} = \beta_i (\beta^{\tau^\xi})_{i^{\sigma_\beta}} \text{e } [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}] = e\right)$$
$$\Leftrightarrow \Bigg((\tau^\xi)^{-1}_{i^{\sigma^{-1}_{\tau^\xi}}} \beta_{i^{\sigma^{-1}_{\tau^\xi}}} (\tau^\xi)_{i^{\sigma^{-1}_{\tau^\xi}\sigma_\beta}} \beta_{i^{\sigma_{\beta^{\tau^\xi}}}}$$
$$= \beta_i (\tau^\xi)^{-1}_{i^{\sigma_\beta\sigma^{-1}_{\tau^\xi}}} \beta_{i^{\sigma_\beta\sigma^{-1}_{\tau^\xi}}} (\tau^\xi)_{i^{\sigma_\beta\sigma^{-1}_{\tau^\xi}\sigma_\beta}} \text{ e } [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}] = e, \text{ pela Proposição 6}\Bigg)$$

$\Leftrightarrow \Big((\tau^{\xi})^{-1}_{i^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} \beta_{i^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} (\tau^{\xi})_{i^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}\sigma_\beta}} \beta_{i^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}\sigma_\beta\sigma_\tau^{\bar{\xi}}}}$

$= \beta_i (\tau^{\xi})^{-1}_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} \beta_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} (\tau^{\xi})_{i^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}\sigma_\beta}}$ e $[\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{\bar{\xi}}}] = e \Big)$

(II) Trocando ξ por $n\xi$ em (I), obtemos:

$\big(\tau^{-\xi}\beta_i\tau^{\xi}\beta_{i^{\sigma_\beta}} = \beta_i\tau^{-\xi}\beta_{i^{\sigma_\beta}}\tau^{\xi}\big)$

$\Leftrightarrow \big((\beta_{i^{\sigma_\beta}}^{-1}\beta_i^{-1})\tau^{-\xi}\beta_i\tau^{\xi}\beta_{i^{\sigma_\beta}} = (\beta_{i^{\sigma_\beta}}^{-1}\beta_i^{-1})\beta_i\tau^{-\xi}\beta_{i^{\sigma_\beta}}\tau^{\xi}\big)$

$\Leftrightarrow \big([\beta_i, \tau^{\xi}]^{\beta_{i^{\sigma_\beta}}} = [\beta_{i^{\sigma_\beta}}, \tau^{\xi}]\big)$

(III) Utilizando (II), temos

$[\beta_i, \tau^{\xi}]^{\beta_{i^{\sigma_\beta}}\beta_{i^{\sigma_\beta^2}}\cdots\beta_{i^{\sigma_\beta^{s_i}}}} = [\beta_{i^{\sigma_\beta}}, \tau^{\xi}]^{\beta_{i^{\sigma_\beta^2}}\cdots\beta_{i^{\sigma_\beta^{s_i}}}} \cdots [\beta_{i^{\sigma_\beta^{s_i}}}, \tau^{\xi}] = [\beta_i, \tau^{\xi}]$

(IV) Trocando i por $i\sigma_\beta^{-1}$ em (II) obtemos

$$[\beta_i, \tau^{\xi}]^{\beta_i^{-1}} = [\beta_{i^{\sigma_\beta^{-1}}}, \tau^{\xi}] \tag{4.1}$$

Além disso, pelas propriedades dos comutadores, temos

$$[\beta_i, \tau^{\xi+k}] = [\beta_i, \tau^k][\beta_i, \tau^{\xi}]^{\tau^k}, \forall \xi, k \in \mathbb{Z} \tag{4.2}$$

Portanto, utilizando alternadamente as equações (4.1) e (4.2),

$[\beta_i, \tau^{\xi}]^{[\beta_i, \tau^k]} = [\beta_i, \tau^{\xi}]^{\beta_i^{-1}\tau^{-k}\beta_i\tau^k} = [\beta_{i^{\sigma_\beta^{-1}}}, \tau^{\xi}]^{\tau^{-k}\beta_i\tau^k}$

$= ([\beta_{i^{\sigma_\beta^{-1}}}, \tau^{-k}]^{-1}[\beta_{i^{\sigma_\beta^{-1}}}, \tau^{\xi-k}])^{\beta_i\tau^k} = ([\beta_i, \tau^{-k}]^{-1}[\beta_i, \tau^{\xi-k}])^{\tau^k} = [\beta_i, \tau^{\xi}]$ $\square$

A seguinte observação servirá de ajuda na escolha de σ_β, onde $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ satisfaz $[\beta, \beta^{\tau^{\xi}}] = e$ para todo ξ inteiro:

Observação 2. *Sejam $\sigma = (0, 1, 2, \cdots, k-1) \in \mathrm{S}_n$ e $\sigma^j = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_{(j,k)}$ a representação permutacional de σ^j em produtos de ciclos disjuntos de comprimento $k/(j,k)$, então $K = \langle \sigma_i \mid 1 \le i \le (j,k)\rangle$ é abeliano. Em particular, como $K^{\sigma} \subset K$, então $[x, x^{\sigma^{\xi}}] = 1$ para todo $x \in K$ e para todo ξ inteiro.*

4.1 Elementos com atividade 2-ciclo

Nesta seção mostraremos que todo elemento β de um subgrupo abeliano de $\mathrm{Aut}(T_n)$ normalizado por τ com σ_β 2-ciclo nos proporciona $\langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle$ metabeliano.

Teorema 4. *Sejam n par e $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ com $\sigma_\beta = (0, \frac{n}{2})$. Se $[\beta, \beta^{\tau^{\xi}}] = e$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $H = \langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle$ é metabeliano.*

Demonstração. Fazendo $j = i^{\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}$ em (I) da proposição anterior, obtemos

$$(\tau^\xi)_j^{-1}\beta_j(\tau^\xi)_{j^{\sigma_\beta}}\beta_{j^{\sigma_\beta\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}} = \beta_{j^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}}}(\tau^\xi)^{-1}_{j^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}}\beta_{j^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}}}(\tau^\xi)_{j^{\sigma_\tau^{\overline{\xi}}\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\overline{\xi}}\sigma_\beta}} \tag{4.3}$$

para todos $\xi \in \mathbb{Z}$ e $j \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Fazendo $\xi = kn + r$ com $r = \overline{\xi}$ em (4.3) e lembrando que $\sigma_\beta = (0, \frac{n}{2})$ e $\sigma_\tau = (0, 1, \cdots, n-1)$, obtemos

$$\tau^{-k-\delta(j,r)}\beta_j\tau^{k+\delta(j^{(0,\frac{n}{2})},r)}\beta_{(\overline{j+r})^{(r,\overline{\frac{n}{2}+r})}} = \beta_{\overline{j+r}}\tau^{-k-\delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}\beta_{j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})}}\tau^{k+\delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})(0,\frac{n}{2})},r)}, \tag{4.4}$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r, j \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Analisaremos agora 3 casos:

$\boxed{\text{1º Caso:}}$ $j = 0$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k}\beta_0\tau^{k+\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}} = \beta_r\tau^{-k-\delta(0^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}\beta_{0^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})}}\tau^{k+\delta(\frac{n}{2}^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}, \tag{4.5}$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Assim,

- Se $r = 0$,

  $\left(\tau^{-k}\beta_0\tau^k\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0\tau^{-k}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\beta_0[\beta_0, \tau^k]\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k],\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$[\beta_0, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k],\ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.6}$$

- Se $r = \frac{n}{2}$,

  $\left(\tau^{-k}\beta_0\tau^{k+1}\beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\beta_0[\beta_0, \tau^k]\tau\beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k],\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$\beta_0\tau\beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}} \tag{4.7}$$

  e

$$[\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.8}$$

- Se $r \neq 0$ e $r \neq \frac{n}{2}$,

  $\left(\tau^{-k}\beta_0\tau^{k+\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}} = \beta_r\tau^{-k}\beta_0\tau^{k+\delta(\frac{n}{2},r)},\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0\beta_0^{-1}\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0\tau^{k+\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}} = \beta_r\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0\beta_0^{-1}\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0\tau^{k+\delta(\frac{n}{2},r)}, \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0[\beta_0, \tau^k]\beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}} = \beta_r\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0[\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0\beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}} = \beta_r\tau^{\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_0, \forall r \in \{1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \cdots, n-1\} \tag{4.9}$$

  e

$$[\beta_0, \tau^k]^{\beta_r} = [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in \{1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \cdots, n-1\} \tag{4.10}$$

$\boxed{\text{2º Caso:}}$ $j = \dfrac{n}{2}$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k\beta_r = \beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}}\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2}^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}\beta_{\frac{n}{2}^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})}}\tau^{k+\delta(0^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}, \tag{4.11}$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Assim,

- Se $r = 0$,

  $\left(\tau^{-k}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k\beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-k}\beta_0\tau^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]\beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0[\beta_0, \tau^k],\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} = [\beta_0, \tau^k],\ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.12}$$

- Se $r = \frac{n}{2}$,

  $\left(\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0\tau^{-k}\beta_0\tau^{k+1},\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0^2[\beta_0, \tau^k]\tau,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2 = \beta_0^2\tau \tag{4.13}$$

  e

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}} = [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.14}$$

- Se $r \neq 0$ e $r \neq \frac{n}{2}$,

  $\left(\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k\beta_r = \beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}}\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}},\tau^k]\beta_r = \beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}}\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}[\beta_{\frac{n}{2}},\tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_r = \beta_{\overline{\frac{n}{2}+r}}\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)}\beta_{\frac{n}{2}}, \forall r \in \{1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\} \tag{4.15}$$

  e

$$[\beta_{\frac{n}{2}},\tau^k]^{\beta_r} = [\beta_{\frac{n}{2}},\tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in \{1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\} \tag{4.16}$$

$\boxed{\text{3º Caso:}}$ $j \neq 0$ e $j \neq \frac{n}{2}$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k-\delta(j,r)}\beta_j\tau^{k+\delta(j,r)}\beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}}\tau^{-k-\delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}\beta_{j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})}}\tau^{k+\delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)}, \tag{4.17}$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0,\cdots,n-1\}$.

Assim,

- Se $j \neq \overline{-r}$ e $j \neq \overline{\frac{n}{2}-r}$,

  $\left(\tau^{-k-\delta(j,r)}\beta_j\tau^{k+\delta(j,r)}\beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}}\tau^{-k-\delta(j,r)}\beta_j\tau^{k+\delta(j,r)}, \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\beta_j[\beta_j,\tau^{k+\delta(j,r)}]\beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}}\beta_j[\beta_j,\tau^{k+\delta(j,r)}], \forall k \in \mathbb{Z}\right)$

  Logo,

$$\beta_j\beta_t = \beta_t\beta_j, \forall j,t \in \{1,\cdots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\} \tag{4.18}$$

  e

$$[\beta_j,\tau^k]^{\beta_t} = [\beta_j,\tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j,t \in \{1,\cdots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\} \tag{4.19}$$

- Se $j = \overline{-r}$ e $0 < r < \frac{n}{2}$, então $\frac{n}{2}+1 < j \leq n-1$,

$$\delta(j,r) = 1 \text{ e } \delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r) = \delta(\tfrac{n}{2}-r,r) = 0.$$

  Assim, substituindo em (4.17),

  $\left(\tau^{-k-1}\beta_j\tau^{k+1}\beta_0 = \beta_0\tau^{-k}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}}\tau^k, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\}\right)$

  $\Leftrightarrow \left(\tau^{-1}\beta_j[\beta_j,\tau^k]\tau\beta_0 = \beta_0\tau_{\overline{\frac{n}{2}+j}}[\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}},\tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1\}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \tau^{-1}\beta_j\tau\beta_0 = \beta_0\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}} \\ [\beta_j,\tau^k]^{\tau\beta_0} = [\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}},\tau^k], \end{cases}, \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{\tfrac{n}{2}+1,\cdots,n-1\}\right)$$

Logo,

$$\tau^{-1}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau\beta_0 = \beta_0\beta_j, \forall j\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.20}$$

e

$$[\beta_{j+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\tau\beta_0} = [\beta_j,\tau^k], \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.21}$$

- Se $j=\overline{-r}$ e $\frac{n}{2}<r\leq n-1$, então $0<j<\frac{n}{2}$,

$$\delta(j,r)=1 \text{ e } \delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)=\delta(\tfrac{n}{2}-r,r)=1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$\left(\tau^{-k-1}\beta_j\tau^{k+1}\beta_0 = \beta_0\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}\tau^{k+1}, \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\beta_j[\beta_j,\tau^{k+1}]\beta_0 = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}+j}[\beta_{\frac{n}{2}+j},\tau^{k+1}], \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\}\right)$

Logo,

$$\beta_j\beta_0 = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}+j}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.22}$$

e

$$[\beta_j,\tau^k]^{\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}+j},\tau^k], \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.23}$$

- Se $j=\overline{\frac{n}{2}-r}$ e $0<r<\frac{n}{2}$, então $0<j<\frac{n}{2}$,

$$\delta(j,r)=0 \text{ e } \delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)=\delta(n-r,r)=1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$\left(\tau^{-k}\beta_j\tau^k\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}\tau^{k+1}, \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\beta_j[\beta_j,\tau^k]\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}[\beta_{\frac{n}{2}+j},\tau^k]\tau, \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\}\right)$

Logo,

$$\beta_j\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.24}$$

e

$$[\beta_j,\tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}} = [\beta_{\frac{n}{2}+j},\tau^k], \forall k\in\mathbb{Z}, \forall j\in\{1,\cdots,\frac{n}{2}-1\} \tag{4.25}$$

- Se $j=\overline{\frac{n}{2}-r}$ e $\frac{n}{2}<r\leq n-1$, então $\frac{n}{2}<j\leq n-1$,

$$\delta(j,r)=1 \text{ e } \delta(j^{(\overline{-r},\overline{\frac{n}{2}-r})},r)=\delta(n-r,r)=1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$$\left(\tau^{-k-1}\beta_j\tau^{k+1}\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-k-1}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}}\tau^{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\tfrac{n}{2}+1, \cdots, n-1\}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\beta_j[\beta_j, \tau^{k+1}]\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}}[\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}}, \tau^{k+1}], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\tfrac{n}{2}+1, \cdots, n-1\}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \beta_j\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}} \\ [\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}} = [\beta_{\overline{\frac{n}{2}+j}}, \tau^k], \end{cases}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\tfrac{n}{2}+1, \cdots, n-1\}\right)$$

Logo,

$$\beta_{\frac{n}{2}}\beta_j = \beta_{\frac{n}{2}+j}\beta_{\frac{n}{2}}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2}-1\} \tag{4.26}$$

e

$$[\beta_j, \tau^k] = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2}-1\} \tag{4.27}$$

Os seguintes lemas nos ajudarão na demonstração de nosso teorema:

Lema 1.

$$D = \left\langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H.

Demonstração. Para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ defina

$$D_i = \left\langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Assim, $D = \langle D_i \mid i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \rangle$ e cada D_i é abeliano, pela Proposição 23(IV).

Das equações (4.10),(4.16) e (4.19), obtemos que

$$[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^{-1}} = [\beta_i, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \tag{4.28}$$

Temos que $[D_i, D_j] = 1, \forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2}$, pois

$$[\beta_i, \tau^k]^{[\beta_j, \tau^t]} = [\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^{-1}\tau^{-t}\beta_j\tau^t} \overset{(4.28)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{-t}\beta_j\tau^t} \overset{(4.2)}{=} \left([\beta_i, \tau^{-t}]^{-1}[\beta_i, \tau^{k-t}]\right)^{\beta_j\tau^t}$$
$$\overset{(4.28)}{=} \left([\beta_i, \tau^{-t}]^{-1}[\beta_i, \tau^{k-t}]\right)^{\tau^t} \overset{(4.2)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{-t}\tau^t} = [\beta_i, \tau^k], \forall k, t \in \mathbb{Z},$$

$\forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2}$

Além disso, $[D_0, D_{\frac{n}{2}}] = 1$, pois

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{[\beta_0, \tau^t]} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0^{-1}\tau^{-t}\beta_0\tau^t} \overset{(4.8)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau\tau^{-t}\beta_0\tau^t} \overset{(4.2)}{=}$$
$$\left([\beta_0, \tau^{-t}]^{-1}[\beta_0, \tau^{k-t}]\right)^{\tau\beta_0\tau^t} \overset{(4.8)}{=} \left([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{-t}]^{-1}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{k-t}]\right)^{\tau^t}$$
$$\overset{(4.2)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{-t}\tau^t} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \forall k, t \in \mathbb{Z}.$$

Logo D é abeliano.

Da equação (4.2),

$$D_i^{\tau^k} = D_i, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \tag{4.29}$$

Da equação (4.28),

$$D_i = D_i^{\beta_j} = D_i^{\beta_j^{-1}}, \forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \tag{4.30}$$

Das equações (4.2) e (4.6),

$$\begin{cases} D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_0} \\ D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \end{cases} \tag{4.31}$$

Da equação (4.12),

$$\begin{cases} D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_0} \\ D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_0^{-1}} \end{cases} \tag{4.32}$$

Das equações (4.2) e (4.14),

$$\begin{cases} D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases} \tag{4.33}$$

Das equações (4.2) e (4.21),

$$\begin{cases} D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0} \\ D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_0^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1\} \tag{4.34}$$

Da equação e (4.23),

$$\begin{cases} D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_0} \\ D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1\} \tag{4.35}$$

Das equações (4.2) e (4.25),

$$\begin{cases} D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1\} \tag{4.36}$$

Da equação e (4.27),

$$\begin{cases} D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1\} \tag{4.37}$$

As equações (4.29)-(4.37) nos mostram que $D = \langle D_i \mid i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \rangle = \left\langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \right\rangle$ é normal em H.

Portanto D é um subgrupo normal e abeliano de H.

$\square$

Lema 2.

$$L = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H.

Demonstração. O Lema 1 e as equações (4.10), (4.16), (4.18) e (4.19) mostram que L é abeliano.

Além disso, como $D = \langle [\beta_i, \tau^k] \mid \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \rangle$ é normal em H e para todo $t \in \mathbb{Z}$ e todo $j \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1\}$,

(a) $\beta_j^{\tau^t} = \beta_j [\beta_j, \tau^t] \in L$;

(b) $\beta_j^{\beta_0} \overset{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}} \in L$;

(c) $\beta_j^{\beta_0^{-1}} \overset{(4.20)}{=} \tau^{-1} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau] \in L$;

(d) $\beta_j^{\beta_{\frac{n}{2}}} \overset{(4.24)}{=} \tau^{-1} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau] \in L$;

(e) $\beta_j^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \overset{(4.26)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}} \in L$;

(f) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\tau^t} = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^t] \in L$;

(g) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0} \overset{(4.20)}{=} \beta_0^{-1} \tau \beta_0 \beta_j \beta_0^{-1} \tau^{-1} \beta_0 = \left([\beta_0, \tau]^{-1}\right)^{\tau^{-1}} \beta_j^{\tau^{-1}} [\beta_0, \tau]^{\tau^{-1}} \in L$

(h) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \overset{(4.22)}{=} \beta_j \in L$;

(i) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \overset{(4.26)}{=} \beta_j \in L$;

(j) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \overset{(4.24)}{=} \beta_{\frac{n}{2}} \tau \beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \beta_j \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \tau^{-1}} \beta_j^{\tau^{-1}} \left([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{-1}\right)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \tau^{-1}} \in L$;

(k) $\beta_r^{\beta_k} \overset{(4.18)}{=} \beta_r, \forall r, k \in \{1, \cdots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \cdots, n-1\}$;

então L é normal em H.

Logo L é um subgrupo normal e abeliano de H. □

Lema 3.

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j, \beta_{\frac{n}{2}} \beta_0, \tau \beta_0^2 \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H.

Demonstração. Para $j \in \{1, 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1\}$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos

(a) $(\beta_j)^{\beta_{\frac{n}{2}} \beta_0} \overset{(4.24)}{=} (\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\tau \beta_0} \overset{(4.20)}{=} \beta_j$;

(b) $(\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \overset{(4.26)}{=} (\beta_j)^{\beta_0} \overset{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}}$;

(c) $[\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} = [\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0} \overset{(4.25)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0} \overset{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k]$;

(d) $[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \overset{(4.27)}{=} [\beta_j, \tau^k]^{\beta_0} \overset{(4.23)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]$;

(e) $[\beta_0, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \overset{(4.6)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} \overset{(4.12)}{=} [\beta_0, \tau^k]$;

(f) $[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0} \overset{(4.14)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0} \overset{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]$;

(g)
$$(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\tau\beta_0^2} = \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0\tau\beta_0^2 \overset{(4.7)}{=} \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0$$
$$= \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 = (\tau\beta_0^2)^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 \overset{(4.13)}{=} \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0;$$

(h)
$$\beta_j^{\tau\beta_0^2} = (\beta_j[\beta_j, \tau])^{\beta_0^2} = (\beta_j^{\beta_0}[\beta_j, \tau]^{\beta_0})^{\beta_0}$$
$$\overset{(4.22),(4.23)}{=} (\beta_{j+\frac{n}{2}}[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau])^{\beta_0} = \beta_{j+\frac{n}{2}}^{\tau\beta_0} \overset{(4.20)}{=} \beta_j;$$

(i) $(\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\tau\beta_0^2} \overset{(4.20)}{=} \beta_j^{\beta_0} \overset{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}}$;

(j) $[\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \overset{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} \overset{(4.12)}{=} [\beta_0, \tau^k]$;

(k)
$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \overset{(4.2)}{=} ([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{-1}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{k+1}])^{\beta_0^2} \overset{(4.12)}{=} ([\beta_0, \tau]^{-1}[\beta_0, \tau^{k+1}])^{\beta_0}$$
$$\overset{(4.2)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0} \overset{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k];$$

(l)
$$[\beta_j, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \overset{(4.2)}{=} ([\beta_j, \tau]^{-1}[\beta_j, \tau^{k+1}])^{\beta_0^2} \overset{(4.23)}{=} ([\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau]^{-1}[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^{k+1}])^{\beta_0}$$
$$\overset{(4.2)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0} \overset{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k];$$

(m) $[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \overset{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k]^{\beta_0} \overset{(4.23)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]$;

(n) $(\tau\beta_0^2)^{\tau^k} = \tau(\beta_0^2)^{\tau^k} = \tau\beta_0^2[\beta_0^2, \tau^k] = \tau\beta_0^2[\beta_0, \tau^k]^{\beta_0}[\beta_0, \tau^k]$;

(o)
$$(\tau\beta_0^2)^{\beta_0} = \beta_0^{-1}\tau\beta_0^2\beta_0 = \tau\tau^{-1}\beta_0^{-1}\tau\beta_0\beta_0^2 = \tau[\tau, \beta_0]\beta_0^2$$
$$= \tau[\tau, \beta_0]\tau^{-1}\tau\beta_0^2 = ([\beta_0, \tau]^{-1})^{\tau^{-1}}\tau\beta_0^2;$$

(p) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}} = \beta_0\tau\beta_0 = \tau\beta_0[\beta_0, \tau]\beta_0 = \tau\beta_0^2[\beta_0, \tau]^{\beta_0}$;

(q)
$$(\tau\beta_0^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \overset{(p)}{=} \left((\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0}\right)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} = (\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}}$$
$$= (\tau\beta_0^2)^{(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \overset{(g)}{=} \tau\beta_0^2([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}};$$

(r) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}} \overset{(q)}{=} \tau\beta_0^2[\beta_0,\tau]^{\beta_0}$;

(s) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\tau^k} = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0[\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0,\tau^k] = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0[\beta_{\frac{n}{2}},\tau^k]^{\beta_0}[\beta_0,\tau^k]$;

(t) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_0} = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0^2 = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0^2 = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\tau\beta_0^2$

$$= (\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}(\tau\beta_0^2)^2;$$

(u) $\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 \overset{(t)}{=} (\tau\beta_0^2)^2((\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1})^{\beta_0}$;

(v) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_0^{-1}} \overset{(u)}{=} ((\tau\beta_0^2)^2)^{\beta_0^{-1}}(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}$;

(x) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} = \beta_{\frac{n}{2}}^2\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = \beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\tau\beta_0\beta_0\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}$

$$\overset{(4.13)}{=} (\tau\beta_0^2)^2\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = (\tau\beta_0^2)^2(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1};$$

(z) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_{\frac{n}{2}}} \overset{(x)}{=} (\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}((\tau\beta_0^2)^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}}$.

Portanto, pelo Lema 2 e pelas relações acima, temos que M é um subgrupo normal e abeliano de H. □

Pelo Lema 3,

$$M = \left\langle [\beta_i,\tau^k], \beta_j, \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0, \tau\beta_0^2 \mid k \in \mathbb{Z}, i,j \in \{0,1,\cdots,n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H.

Além disso, como $M\tau = M\beta_0^{-2}$ e $M\beta_{\frac{n}{2}} = M\beta_0$, então $H/M = \langle M\beta_0 \rangle$, i.e., H é metabeliano.

□

Teorema 5. *Sejam n par e $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ com atividade $\sigma_\beta = (i, i+\frac{n}{2})$ para algum $i \in \{0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1\}$. Se $[\beta,\beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $H = \langle \beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\tau\rangle$ é metabeliano.*

Demonstração. Como $[\beta,\beta^{\tau^\xi}] = e$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$, então $[\beta^{\tau^{-i}}, (\beta^{\tau^{-i}})^{\tau^\xi}] = e, \forall \xi \in \mathbb{Z}$.

Pela Proposição 6, temos que

$$\sigma_{\beta^{\tau^{-i}}} = (0,\frac{n}{2}) \quad \text{e} \quad (\beta^{\tau^{-i}})_{j^{\sigma_{\tau^{-i}}}} = (\tau^{-i})_j^{-1}\beta_j(\tau^{-i})_{j^{\sigma_\beta}}$$

Utilizando a definição de Polarizador na equação acima, obtemos

$$(\beta^{\tau^{-i}})_{\overline{j-i}} = \left(\tau^{\frac{-i-(n-i)}{n}+\delta(j,-i)}\right)^{-1}\beta_j\tau^{\frac{-i-(n-i)}{n}+\delta(j^{\sigma_\beta},-i)}$$

Assim,

$$(\beta^{\tau^{-i}})_{\overline{j-i}} = \tau^{1-\delta(j,-i)}\beta_j\tau^{-1+\delta(j^{\sigma_\beta},-i)} \tag{4.38}$$

Pelo Teorema 4,

$$\left\langle \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_0, \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_1, \cdots, \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_{n-1}, \tau \right\rangle$$

é metabeliano.

Logo, por (4.38),

$$\langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle = \left\langle \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_0, \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_1, \cdots, \left(\beta^{\tau^{-i}}\right)_{n-1}, \tau \right\rangle$$

é metabeliano. □

4.2 Elementos com atividade em $\langle \sigma_\tau \rangle$

Proposição 24. *Sejam $\beta \in \mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ para algum $s \in \{0, \cdots, n-1\}$. Então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle$ possui um subgrupo normal abeliano*

$$N = \left\langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \cdots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \cdots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Demonstração. Usando que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ e $\xi = kn + \overline{\xi} = kn + r$ em (I) da Proposição 23, obtemos

$$(\tau^\xi)^{-1}_{\overline{j-r}}\beta_{\overline{j-r}}(\tau^\xi)_{\overline{j+s-r}}\beta_{\overline{j+s}} = \beta_j(\tau^\xi)^{-1}_{\overline{j+s-r}}\beta_{\overline{j+s-r}}(\tau^\xi)_{\overline{j+2s-r}}$$

Logo,

$$\tau^{-k-\delta(j-r,r)}\beta_{\overline{j-r}}\tau^{k+\delta(j+s-r,r)}\beta_{\overline{j+s}} = \beta_j\tau^{-k-\delta(j+s-r,r)}\beta_{\overline{j+s-r}}\tau^{k+\delta(j+2s-r,r)},$$

para todos $r, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Fazendo $t = \overline{j+s}, i = \overline{j+s-r}$ e $z = k + \delta(j+s-r, r) = k + \delta(i, t-i)$, obtemos

$$\tau^{-z+\delta(i,t-i)-\delta(i-s,t-i)}\beta_{\overline{i-s}}\tau^z\beta_t = \beta_{\overline{t-s}}\tau^{-z}\beta_i\tau^{z-\delta(i,t-i)+\delta(i+s,t-i)},$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$\tau^{\delta(i,t-i)-\delta(i-s,t-i)}\beta_{\overline{i-s}}[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^z]\beta_t = \beta_{\overline{t-s}}\beta_i[\beta_i, \tau^z]\tau^{-\delta(i,t-i)+\delta(i+s,t-i)}$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Como

$$\Delta_s(i,t) = \delta(i, t-i) - \delta(i-s, t-i)$$

e

$$\Delta_s(i+s, t+s) = \delta(i+s, t-i) - \delta(i, t-i),$$

para todos $i, t \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\tau^{\Delta_s(i,t)}\beta_{\overline{i-s}}[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^z]\beta_t = \beta_{\overline{t-s}}\beta_i[\beta_i, \tau^z]\tau^{\Delta_s(i+s,t+s)}$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Conseqüentemente,

$$\tau^{\Delta_s(i,t)}\beta_{\overline{i-s}}\beta_t = \beta_{\overline{t-s}}\beta_i\tau^{\Delta_s(i+s,t+s)} \tag{4.39}$$

e

$$[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^z]^{\beta_t\tau^{-\Delta_s(i+s,t+s)}} = [\beta_i, \tau^z], \tag{4.40}$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Segue das equações (4.2) e (4.40) que N é subgrupo normal de H. Além disso, aplicando alternadamente estas equações, obtemos

$$\begin{aligned}
[\beta_i, \tau^z]^{[\beta_t, \tau^k]} &= [\beta_i, \tau^z]^{\beta_t^{-1}\tau^{-k}\beta_t\tau^k} = [\beta_i, \tau^z]^{\tau^{-\Delta_s(i+s,t+s)}\tau^{\Delta_s(i+s,t+s)}\beta_t^{-1}\tau^{-k}\beta_t\tau^k} \\
&\overset{(4.2)}{=} \left([\beta_i, \tau^{-\Delta_s(i+s,t+s)}]^{-1}[\beta_i, \tau^{z-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)^{\tau^{\Delta_s(i+s,t+s)}\beta_t^{-1}\tau^{-k}\beta_t\tau^k} \\
&\overset{(4.40)}{=} \left([\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-\Delta_s(i+s,t+s)}]^{-1}[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{z-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)^{\tau^{-k}\beta_t\tau^k}
\end{aligned}$$

$$\overset{(4.2)}{=} \left(\left([\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-k}]^{-1}[\beta_{i-s}, \tau^{-k-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)^{-1}\left([\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-k}]^{-1}[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)\right)^{\beta_t\tau^k}$$

$$= \left([\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-k-\Delta_s(i+s,t+s)}]^{-1}[\beta_{\overline{i-s}}, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)^{\beta_t\tau^k}$$

$$\overset{(4.40)}{=} \left([\beta_i, \tau^{-k-\Delta_s(i+s,t+s)}]^{-1}[\beta_i, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s,t+s)}]\right)^{\tau^{k+\Delta_s(i+s,t+s)}} \overset{(4.2)}{=} [\beta_i, \tau^z]$$

□

Corolário 14. *Sejam* $\beta \in \mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$ *tal que* $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ *para todo* $\xi \in \mathbb{Z}$ *e* $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ *para algum* $s \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. *Então* $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ *possui um subgrupo normal metabeliano*

$$M = \left\langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \cdots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}], \tau \mid k_0, \cdots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Demonstração. De fato, se $N = \left\langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \cdots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \cdots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \right\rangle$, então, pela Proposição 24, N é normal e abeliano.

Além disso, como $N\tau \in Z(H/N)$, então $\frac{N\langle\tau\rangle}{N} \lhd \frac{H}{N}$. Portanto, pelo *Teorema da Correspondência,*

$$M = N\langle\tau\rangle = \left\langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \cdots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}], \tau \mid k_0, \cdots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \right\rangle$$

é um subgrupo normal de H, com $\frac{N\langle\tau\rangle}{N} \cong \frac{\langle\tau\rangle}{N\cap\langle\tau\rangle}$ abeliano. □

Lema 4 (O caso inativo). *Seja $\beta \in \mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = e$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $i, t \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e para todo $\xi \in \mathbb{Z}$:*

(i) $\beta_i\beta_t = \beta_t\beta_i$;

(ii) $[\beta_i, \beta_t^{\tau^\xi}] = e$.

Demonstração.

(i) Basta tomar $s = 0$ em (4.39).

(ii) Basta tomar $s = 0$ em (4.40) e utilizar (i) deste lema.

□

Uma generalização do Lema 4 é dada pela seguinte Proposição:

Proposição 25. *Sejam $\alpha, \gamma \in \mathrm{Stab}_n(1)$ tais que $[\alpha, \gamma^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$[\alpha_i, \gamma_j^{\tau^\xi}] = e, \forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \forall \xi \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}$, sejam $r, k \in \mathbb{Z}$ tais que $\xi = kn + r = kn + \overline{\xi}$.

Assim, pela Proposição 6,

$$\left(\gamma^{\tau^\xi}\right)_{i^{\tau^\xi}} = (\tau^\xi)_i^{-1} \gamma_i (\tau^\xi)_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\gamma^{\tau^\xi}\right)_i = (\tau^\xi)_{\overline{i-\xi}}^{-1} \gamma_{\overline{i-\xi}} (\tau^\xi)_{\overline{i-\xi}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\gamma^{\tau^\xi}\right)_i = (\tau^\xi)_{\overline{i-r}}^{-1} \gamma_{\overline{i-r}} (\tau^\xi)_{\overline{i-r}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\gamma^{\tau^\xi}\right)_i = \tau^{-k-\delta(i-r,r)} \gamma_{\overline{i-r}} \tau^{k+\delta(i-r,r)}$$

Como $[\alpha, \gamma^{\tau^\xi}] = e$ e $\alpha, \gamma^{\tau^\xi} \in \mathrm{Stab}_n(1)$, então,

$$[\alpha_i, (\gamma^{\tau^\xi})_i] = e, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}, \ \forall i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha_i, \gamma_{i-r}^{\tau^{k+\delta(i-r,r)}}] = e, \ \forall r, i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha_i, (\gamma_j)^{\tau^\xi}] = e, \forall i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \forall \xi \in \mathbb{Z}.$$

□

Proposição 26. *Sejam $\alpha, \gamma \in \mathrm{Stab}_n(k)$ tais que $[\alpha, \gamma^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então $[\alpha_u, {\gamma_v}^{\tau^\xi}] = e$ para todos $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|u| = |v| \leq k$.*

Demonstração. Segue da Proposição 25. □

Proposição 27. *Sejam n par, $\Delta(i,j) = \Delta_{\frac{n}{2}}(i,j)$ e $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $k, t \in \mathbb{Z}$ e para todos $i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$:*

(i) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j \tau^t} = [\beta_i, \tau^k]^{\tau^t \beta_j}$;

(ii) $\tau^{\Delta(i,j)} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_j \tau^{\Delta(i,j)} = \beta_{j+\frac{n}{2}} \beta_i$;

(iii) $[\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_j} = [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j,i)}}$;

(iv) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} = [\beta_i, \tau^k]$;

(v) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = [\beta_i, \tau^k]$;

(vi) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^k} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^2$;

(vii) $(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\tau^k} = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k][\beta_j, \tau^k]^{\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$;

(viii) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j} = (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)}}$;

(ix) $\left(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}\right)^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$;

(x) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$;

(xi) $\left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\right)^{\beta_i} = \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}$

(xii) $\left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\right)^{\beta_i^2 \tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}} = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}$.

Demonstração.

(i) Segue da Proposição 24.

(ii) Segue da Proposição 14 e de (4.39).

(iii) Segue da Proposição 14 e de (4.40).

(iv) $$[\beta_i,\tau^k]^{\beta_j\beta_{j+\frac{n}{2}}} \overset{(iii)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}} \overset{(i)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})}}$$
$$\overset{(iii)}{=} [\beta_i,\tau^k]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},i)+\Delta(j,i+\frac{n}{2})}} \overset{\text{Prop.14}}{=} [\beta_i,\tau^k]$$

(v) $$[\beta_i,\tau^k]^{\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} \overset{(iii)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})}\beta_j\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} \overset{(i)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\beta_j\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$
$$\overset{(iii)}{=} [\beta_i,\tau^k]^{\tau^{\Delta(j,i)+\Delta(j,i+\frac{n}{2})-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} \overset{\text{Prop.14}}{=} [\beta_i,\tau^k]$$

(vi) $$(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^k} = \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}[\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k] = \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}[\beta_i,\tau^k]^{\beta_{i+\frac{n}{2}}}[\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]$$
$$\overset{(iii)}{=} \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}[\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\tau^{\Delta(i+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2})}}[\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k] \overset{\text{Prop.14}}{=} \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}[\beta_{i+\frac{n}{2}},\tau^k]^2$$

(vii) $$(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\tau^k} = \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\tau^k] = \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\beta_j^2,\tau^k]^{\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$
$$= \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\left([\beta_j,\tau^k]^{\beta_j}[\beta_j,\tau^k]\right)^{\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$
$$\overset{(iii)}{=} \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\left([\beta_{j+\frac{n}{2}},\tau^k]^{\tau^{\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}[\beta_j,\tau^k]\right)^{\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$
$$= \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\beta_{j+\frac{n}{2}},\tau^k][\beta_j,\tau^k]^{\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$

(viii) $$(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j} = \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_j \overset{(ii)}{=} \beta_j^{-1}\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}\beta_{j+\frac{n}{2}}\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{(ii)}{=} \beta_j^{-1}\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2})}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2})+\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{\text{Prop.14}}{=} \beta_j^{-1}\tau^{-\Delta(j,i)}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$= \tau^{-\Delta(j,i)}[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j]\beta_{i+\frac{n}{2}}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\beta_i\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$= \tau^{-\Delta(j,i)}[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j]\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\beta_i}\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{(iii)}{=} \tau^{-\Delta(j,i)}[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j]\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{(iv)}{=} \tau^{-\Delta(j,i)}\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j][\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{\text{Prop.14}}{=} \tau^{-\Delta(j,i)}\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j][\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]^{\tau^{-\Delta(j,i)}}\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$\overset{\text{Prop.24}}{=} \tau^{-\Delta(j,i)}\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]^{\tau^{-\Delta(j,i)}}[\tau^{-\Delta(j,i)},\beta_j]\tau^{\Delta(j,i)}$$
$$= (\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)}}$$

(ix) $\left(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}\right)^{\beta_j\beta_{j+\frac{n}{2}}} \overset{(viii)}{=} \left(\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i\right)^{\tau^{\Delta(j,i)}\beta_{j+\frac{n}{2}}} = \left(\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i\right)^{\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]}$

$$\overset{(viii)}{=} \left(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}\right)^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2})+\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]} \overset{\text{Prop.14}}{=} \left(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}\right)^{[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]}$$

$$\overset{(iv)}{=} \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}$$

(x) $(\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} \overset{(viii)}{=} (\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)}\beta_j\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$

$$= (\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_i)^{\beta_j\tau^{\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = (\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})+\Delta(j,i)}[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$

$$\overset{\text{Prop.14}}{=} (\beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}})^{[\tau^{\Delta(j,i)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},j)}}} \overset{\text{Prop.24}}{=} \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}$$

(xi) $\left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\right)^{\beta_i} = \beta_i^{-1}\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\beta_i = \beta_i^{-1}\beta_j^2\beta_i\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$

$$= \beta_i^{-1}\beta_j\beta_j\beta_i\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$\overset{(ii)}{=} \beta_i^{-1}\beta_j\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$\overset{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1}\beta_j\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{i+\frac{n}{2}}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$= \beta_i^{-1}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})},\beta_{i+\frac{n}{2}}\big]\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$= \beta_i^{-1}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})},\beta_{i+\frac{n}{2}}\big]^{\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$\overset{(iii)}{=} \beta_i^{-1}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},i)+\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]$$

$$\overset{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})},\beta_i\big]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},j)}}\big[\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_i\big]$$

$$= \beta_i^{-1}\beta_j\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})+\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_i\big]$$

$$\overset{(ii)}{=} \beta_i^{-1}\tau^{\Delta(i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2})}\beta_i\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2})+\Delta(i,j+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})+\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_i\big]$$

$$\overset{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1}\tau^{-\Delta(i,j)}\beta_i\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i\big]$$

$$= \tau^{-\Delta(i,j)}\big[\tau^{-\Delta(i,j)},\beta_i\big]\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\tau^{\Delta(i,j)}\big[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i\big]$$

$$\overset{(v)}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(i,j)},\beta_i\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i\big]$$

$$\overset{\text{Prop.24}}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(i,j)},\beta_i\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i\big]$$

$$= \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}\big[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}\big]^{\tau^{\Delta(i,j)}}$$

$$= \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\big[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}\big]\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(xii)}\quad \left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\right)^{\beta_i^2\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}} &\overset{(xi)}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}\beta_i\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&= \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]\right)^{\beta_i\tau^{\Delta(i,j)}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&= \left(\left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\right)^{\beta_i}[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\beta_i}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&\overset{(iii)}{=} \left(\left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}\right)^{\beta_i}[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&\overset{(xi)}{=} \left(\left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_j]\right)^{\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}}[\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(i,j)}}\right)^{\tau^{\Delta(i,j)}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&= \left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_j][\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(i,j)-\Delta(i,j+\frac{n}{2})}}\right)^{\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})+\Delta(i,j)}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&\overset{\text{Prop.14}}{=} \left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_j][\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_j]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},j)}}\right)^{\tau^{\Delta(i,i+\frac{n}{2})}[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}\\
&= \left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}[\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})},\beta_j][\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2},j)},\beta_j]^{-1}\right)^{[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]^{\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}}\\
&\overset{\text{Prop.14}}{=} \left(\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\right)^{[\tau^{\Delta(i,j)},\beta_i]^{\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}}}\\
&\overset{\text{Prop.24 e }(v)}{=} \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 6. *Sejam n par, $\beta \in \mathcal{A} = \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau\rangle$ é um subgrupo metabeliano de* $\mathrm{Aut}(T_n)$.

Demonstração. De fato, pela Proposição 27,

$$N = \left\langle \beta_i\beta_{i+\frac{n}{2}}, \beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, [\beta_t, \tau^k] \mid i,j,t \in \{0,\cdots,n-1\} \text{ e } k \in \mathbb{Z}\right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H.

Além disso, como

$$
\begin{aligned}
N\beta_iN\beta_j = N\beta_i\beta_j &\overset{\text{Prop.27}}{=} N\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})}\beta_{j+\frac{n}{2}}\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})} = N\beta_{j+\frac{n}{2}}\beta_{i+\frac{n}{2}}\tau^{2\Delta(j,i+\frac{n}{2})}\\
&= N\beta_j^{-1}\beta_i^{-1}\tau^{2\Delta(j,i+\frac{n}{2})} = N\beta_j^{-1}\beta_j^2\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}\beta_i^{-1}\beta_i^2\tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}\tau^{2\Delta(j,i+\frac{n}{2})}\\
&= N\beta_j\beta_i\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})-\Delta(i,i+\frac{n}{2})+2\Delta(j,i+\frac{n}{2})} \overset{\text{Prop.14}}{=} N\beta_j\beta_i = N\beta_jN\beta_i
\end{aligned}
$$

e

$$N\beta_i = N\beta_{i+\frac{n}{2}}^{-1}, \quad N\beta_i^2 = N\tau^{\Delta(i,i+\frac{n}{2})}, \forall i,j \in \{0,\cdots,n-1\},$$

então $\dfrac{H}{N}$ é imagem homomórfica de

$$\mathbb{Z} \times \underbrace{C_2 \times \cdots \times C_2}_{\frac{n}{2}\ \text{termos}}$$

□

Teorema 7. *Seja $\beta \in \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e, \forall \xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ para algum $t \in \{0, \cdots, n-1\}$. Então $H = \langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ é metabeliano-por-finito.*

Demonstração. Como $[\sigma_\beta, \sigma_\tau] = e$, então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ e $i^{\sigma_\beta} = \overline{i+t}$.

Se $N = \left\langle [\beta_0, \tau^{k_0}], \cdots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \cdots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \right\rangle$, então, pela Proposição 24, N é um subgrupo normal e abeliano de H.

Seja $m = \frac{n}{(n,t)}$ e considere

$$K = N \left\langle \beta_0 \beta_{\overline{0+t}} \cdots \beta_{0+(m-1)t}, \beta_1 \beta_{\overline{1+t}} \cdots \beta_{1+(m-1)t}, \cdots, \beta_{n-1} \beta_{\overline{n-1+t}} \cdots \beta_{n-1+(m-1)t} \right\rangle$$

Por (4.40), temos que

$$\begin{aligned}
[\beta_i, \tau^z]^{\beta_j \beta_{\overline{j+t}} \cdots \beta_{\overline{j+(m-1)t}}} &= [\beta_{i+t}, \tau^z]^{\tau^{\Delta_t(i+2t, j+t)} \beta_{\overline{j+t}} \cdots \beta_{\overline{j+(m-1)t}}} \\
&= [\beta_{i+2t}, \tau^z]^{\tau^{\Delta_t(i+2t,j+t) + \Delta_t(i+3t, j+2t)} \beta_{\overline{j+2t}} \cdots \beta_{\overline{j+(m-1)t}}} \\
&= [\beta_i, \tau^z]^{\tau^{\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_t(i+(k+1)t, j+kt)}} \\
&\overset{\text{Prop.14}(v)}{=} [\beta_i, \tau^z]
\end{aligned}$$

Como $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$, então $\theta = \beta^m$ satisfaz

$$[\theta_i, \theta_j] = e, \forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\},$$

pelo Lema 4.

Daí,

$$[(\beta^m)_i, (\beta^m)_j] = e, \forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$$

Portanto,

$$[\beta_i \beta_{\overline{i+t}} \cdots \beta_{i+(m-1)t}, \beta_j \beta_{\overline{j+t}} \cdots \beta_{j+(m-1)t}] = e, \forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$$

Isto mostra que K é abeliano.

Como N é normal,

$$(\beta_i \beta_{\overline{i+t}} \cdots \beta_{\overline{i+(m-1)t}})^\tau = \beta_i \beta_{\overline{i+t}} \cdots \beta_{\overline{i+(m-1)t}} [\beta_i \beta_{\overline{i+t}} \cdots \beta_{\overline{i+(m-1)t}}, \tau]$$

e

$$\beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t} \beta_j$$

$$= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-2)t} \tau^{-\Delta_t(i,j)} \beta_{j-t} \beta_i \tau^{\Delta_t(i+t, j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-2)t} \beta_{j-t} \tau^{-\Delta_t(i,j)} [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}] \beta_i \tau^{\Delta_t(i+t, j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-2)t}\beta_{j-t}\tau^{-\Delta_t(i,j)}\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-3)t}\beta_{j-2t}\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}\beta_{i-t}[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}}\tau^{\Delta_t(i,j)}\tau^{-\Delta_t(i,j)}$$

$$\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-3)t}\beta_{j-2t}\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}\beta_{i-t}[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}}$$

$$\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-3)t}\beta_{j-2t}\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}\beta_{i-t}\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}\beta_i}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-4)t}\beta_{j-3t}$$

$$\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}\beta_{i-2t}[\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)},\beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t}}\tau^{\Delta_t(i-t,j-t)}\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}\beta_{i-t}\beta_i$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}\beta_i}[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-4)t}\beta_{j-3t}$$

$$\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}\beta_{i-2t}[\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)},\beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t}}\beta_{i-t}\beta_i$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}\beta_i}[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \beta_j^{-1}\beta_i\beta_{i+t}\cdots\beta_{i+(m-4)t}\beta_{j-3t}$$

$$\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}\beta_{i-2t}\beta_{i-t}\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)},\beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t}\beta_{i-t}\beta_i}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}\beta_i}[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)}$$

$$= \tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)}\beta_{i+t}\beta_{i+2t}\cdots\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)},\beta_j]^{\beta_{i+t}\beta_{i+2t}\cdots\beta_i}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i+2t,j+2t)},\beta_{j+t}]^{\beta_{i+2t}\beta_{i+3t}\cdots\beta_i}\cdots[\tau^{-\Delta_t(i+(m-1)t,j+(m-1)t)},\beta_{j+(m-2)t}]^{\beta_{i+(m-1)t}\beta_{i+mt}}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i+mt,j+mt)},\beta_{j+(m-1)t}]^{\beta_{i+mt}}\tau^{\Delta_t(i+(m+1)t,j+(m+1)t)}$$

$$= \tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)}\beta_{i+t}\beta_{i+2t}\cdots\beta_i[\tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)},\beta_j]^{\beta_{i+t}\beta_{i+2t}\cdots\beta_i}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i+2t,j+2t)},\beta_{j+t}]^{\beta_{i+2t}\beta_{i+3t}\cdots\beta_i}\cdots[\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)},\beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}\beta_i}$$

$$[\tau^{-\Delta_t(i,j)},\beta_{j-t}]^{\beta_i}\tau^{\Delta_t(i+t,j+t)},$$

então K é subgrupo normal e abeliano de H.

Além disso, se $M = K\langle\tau\rangle$, então,

$$\frac{M}{K} = \frac{K\langle\tau\rangle}{K} \cong \frac{\langle\tau\rangle}{K\cap\langle\tau\rangle}$$

é abeliano.

Portanto,

$$M = \left\langle [\beta_i,\tau^\xi], \beta_j\beta_{\overline{j+t}}\cdots\beta_{\overline{j+(m-1)t}}, \tau \mid i,j\in\{0,\cdots,n-1\}, \xi\in\mathbb{Z}\right\rangle$$

é metabeliano.

Considere agora o grupo

$$G = \left\langle b_0,\cdots,b_{n-1} \mid b_ib_{\overline{j+t}} = b_jb_{\overline{i+t}}, b_ib_{\overline{i+t}}\cdots b_{\overline{i+(m-1)t}} = e, \forall i,j\in\{0,\cdots,n-1\}\right\rangle$$

As equações (4.39) e (4.40) mostram que $\dfrac{H}{M}$ é imagem homomórfica de G.

Mostraremos que G é isomorfo a um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

De fato, uma apresentação para $C_m \wr C_n$ é

$$\left\langle u,a \mid u^m = e, a^n = e, u^{a^i}u^{a^j} = u^{a^j}u^{a^i}\right\rangle$$

Introduzindo um gerador $b = a^tu^{-1}$,

$$\begin{aligned} u^m = e \quad &\Rightarrow u^{-m} = e \\ &\Rightarrow (u^{-1})^m = e \Rightarrow (a^{-t}b)^m = e \\ &\Rightarrow \underbrace{a^{-t}b\cdots a^{-t}b}_{m \text{ termos}} = e \\ &\Rightarrow (\underbrace{a^{-t}b\cdots a^{-t}b}_{m \text{ termos}})^{a^{-t+i}} = e \\ &\Rightarrow b^{a^i}b^{a^{i+t}}\cdots b^{a^{i+(m-1)t}} = e \end{aligned}$$

e

$$u^{a^i}u^{a^j} = u^{a^j}u^{a^i}$$

$$\Rightarrow \ (b^{-1}a^t)^{a^i}(b^{-1}a^t)^{a^j} = (b^{-1}a^t)^{a^j}(b^{-1}a^t)^{a^i}$$
$$\Rightarrow \ (a^{-t}b)^{a^j}(a^{-t}b)^{a^i} = (a^{-t}b)^{a^i}(a^{-t}b)^{a^j}$$
$$\Rightarrow \ (a^{-t})^{a^j}b^{a^j}(a^{-t})^{a^i}b^{a^i} = (a^{-t})^{a^i}b^{a^i}(a^{-t})^{a^j}b^{a^j}$$
$$\Rightarrow \ b^{a^j}a^{-t}b^{a^i} = b^{a^i}a^{-t}b^{a^j}$$
$$\Rightarrow \ b^{a^j}b^{a^{i+t}} = b^{a^i}b^{a^{j+t}}$$

Utilizando Transformações de Tietze podemos obter a seguinte apresentação para $C_m \wr C_n$:

$$\left\langle a, b \mid a^n = e, b^{a^j}b^{a^{i+t}} = b^{a^i}b^{a^{j+t}}, b^{a^i}b^{a^{i+t}}\cdots b^{a^{i+(m-1)t}} = e, \forall i,j \in \{0,\cdots,n-1\}\right\rangle$$

Por fim, adicionando os geradores $b_i = b^{a^i}, i = 0, \cdots, n-1$, obtemos, por Transformações de Tietze, a seguinte apresentação para $C_m \wr C_n$:

$$\Big\langle a, b_0, \cdots, b_{n-1} \mid a^n = e, b_i = b_0^{a^i},\ b_j b_{\overline{i+t}} = b_i b_{\overline{j+t}},\ b_i b_{\overline{i+t}} \cdots b_{\overline{i+(m-1)t}} = e,$$
$$\forall i,j \in \{0,\cdots,n-1\}\rangle$$

Portanto, G é finito, já que é isomorfo a um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

Logo $\dfrac{H}{M}$ é finito, já que é imagem homomórfica de um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

□

O caso binário

Em [8] Said Sidki demonstrou os seguintes resultados:

Resultado 1. *Seja $\beta = (\beta_0, \beta_1)\sigma$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^i}] = e$ para todo inteiro i. Então β é um conjugado de τ e existe uma unidade 2-ádica ξ tal que $\beta^\tau = \beta^\xi$.*

Resultado 2. *Seja B um subgrupo abeliano de $\mathrm{Aut}(T_2)$, normalizado por τ. Então existe μ um conjugado de τ, e um nível t tal que*

(i) τ normaliza $\widehat{\langle\mu\rangle}$;

(ii) B é um subgrupo de $\times_{2^t}\widehat{\langle\mu\rangle}$.

No Capítulo 3 obtivemos um grupo solúvel $\Psi(t)$ de comprimento derivado $t+2$ normalizado pela máquina de adição n-ádica. Para o caso binário, o principal resultado demonstrado em [8] foi o seguinte:

Resultado 3. *Seja K um grupo solúvel dos automorfismos da árvore binária, contendo a máquina de adição binária τ. Então existe um inteiro t tal que K é conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$.*

Exemplos em subgrupos de $\mathrm{Aut}(T_n)$

Embora os resultados encontrados no caso binário (Veja [8]) não possam ser generalizados para elementos em um subgrupo abeliano arbitrário de $\mathrm{Aut}(T_n)$ normalizado pela máquina de adição n-ádica, quando tratamos de subgrupos abelianos normalizados pela máquina de adição n-ádica cujos elementos estão em

$$G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle, \text{onde } \sigma = (0, 1, \cdots, n-1) \in \mathrm{S}_n,$$

obtemos alguns resultados idênticos ao caso binário para os casos em que n é um primo ímpar, o que nos permite fazer a seguinte conjectura:

Conjectura 1. *Seja K um subgrupo solúvel de*

$$G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle (0, 1, \cdots, n-1) \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle,$$

contendo a máquina de adição n-ádica τ. Então existe um inteiro t tal que K é um conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$ em $\mathrm{Aut}(T_n)$.

Lema 5. *Sejam $\sigma = (0, 1, \cdots, n-1)$, $G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\sigma_\beta \in G$ tal que $\sigma_\beta = \sigma^s$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então, para todos $i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$,*

$$\Delta_s(i, t) + m_{\overline{i-s}} + m_t \equiv m_{\overline{t-s}} + m_i + \Delta_s(i+s, t+s) \bmod n, \tag{4.41}$$

onde $m_i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ satisfaz $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$.

Demonstração. Como $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, então, por (4.39),

$$\sigma^{\Delta_s(i,t) + m_{\overline{i-s}} + m_t} = \sigma^{m_{\overline{t-s}} + m_i + \Delta_s(i+s, t+s)}.$$

Logo $\Delta_s(i, t) + m_{\overline{i-s}} + m_t \equiv m_{\overline{t-s}} + m_i + \Delta_s(i+s, t+s) \bmod n$. □

Teorema 8. *Sejam n impar, $\sigma = (0, \cdots, n-1)$, $G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\sigma \in G$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então β é um conjugado de τ em G.*

Demonstração. Pela Proposição 8,

$$\alpha(1) = (e, \beta_0^{-1}, (\beta_0\beta_1)^{-1}, \cdots, (\beta_0 \cdots \beta_{n-2})^{-1}) \in \mathrm{Stab}_G(1)$$

satisfaz

$$\beta^{\alpha(1)} = (e, \cdots, e, \beta_0 \cdots \beta_{n-1})\sigma.$$

Mostraremos agora que $\sigma_{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}} = \sigma$.

Pelo Lema 5,

$$\Delta_1(i,t) + m_{\overline{i-1}} + m_t \equiv m_{\overline{t-1}} + m_i + \Delta_1(i+1, t+1) \bmod n,$$

onde $i, j \in Y$ e $m_i \in Y$ satisfaz $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$.

Assim,

$$\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \left(\Delta_1(i,t) + m_{\overline{i-1}} + m_t\right) \equiv \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (m_{\overline{t-1}} + m_i + \Delta_1(i+1, t+1)) \bmod n,$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \Delta_1(i,t) &\overset{\text{Prop.14(i)}}{=} \sum_{t=1}^{n-1} \Delta_1(0,t) \overset{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{t=0}^{n-1} \Delta_1(0,t) \\
&\overset{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{t=0}^{n-1} -\Delta_1(t,0) \overset{\text{Prop.14(vi)}}{=} -(n-1), \\
\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \Delta_1(i+1,t+1) &\overset{\text{Prop.14(i)}}{=} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta_1(i+1,0) \overset{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_1(i,0) \\
&\overset{\text{Prop.14(vi)}}{=} (n-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \left(m_{\overline{i-1}} + m_t\right) &= m_{n-1} + m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} \\
&+ m_0 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-1} \\
&+ m_1 + m_3 + m_4 + \cdots + m_{n-1} \\
&+ \cdots \\
&+ m_{n-3} + m_{n-1} \\
&= 2(n-1)m_{n-1} + (n-2) \textstyle\sum_{k=0}^{n-2} m_k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (m_{\overline{t-1}} + m_i) &= (n-1)m_0 + m_0 + m_1 + \cdots + m_{n-2} \\
&+ (n-2)m_1 + m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-2} \\
&+ (n-3)m_2 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-2} \\
&+ \cdots \\
&+ m_{n-2} + m_{n-2} \\
&= n \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k.
\end{aligned}$$

Logo, como n é impar,

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \equiv 1 \bmod n.$$

Portanto, $\sigma_{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}} = \sigma^{\sum_{k=0}^{n-1} m_k} = \sigma$.

Como $\sigma_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}} = \sigma$ e, pela Proposição 25,

$$[(\beta^n)_0, (\beta^n)_0^{\tau^\xi}] = [\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1}, (\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1})^{\tau^\xi}] = e,$$

para todo inteiro ξ, então $\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1}$ satisfaz as hipóteses deste Teorema. Portanto o processo pode ser repetido de modo a obtermos uma seqüência $(\alpha(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta^{\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(k)\cdots} = \tau$, onde $\alpha(k) \in \mathrm{Stab}_G(k)$ satisfaz $\alpha(k)_u = \alpha(k)_v$ para todos $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|u| = |v| = k - 1$. $\square$

A seguinte Corolário é conseqüência do Teorema 8:

Corolário 15. *Sejam n ímpar, $\sigma = (0, \cdots, n-1)$, $G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle\sigma\rangle, \forall u \in \mathcal{M}\rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\sigma^s \in G$ tal que $(s, n) = 1$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então β é um conjugado de τ em $\mathrm{Aut}(T_n)$.*

Demonstração. Como $(s, n) = 1$, existe um menor inteiro positivo k tal que $(k, n) = 1$ e $(\sigma^s)^k = \sigma$

Assim, como $\sigma_{\beta^k} = \sigma$, então β^k satisfaz as hipóteses do Teorema 8, ou seja, existe $\alpha \in G$ tal que $(\beta^k)^\alpha = \tau$. Agora como $(k, n) = 1$, então $\beta^\alpha = \tau^{k^{-1}}$.

Pela Proposição 16, existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(T_n)$ tal que $\tau^\gamma = \tau^{k^{-1}} = \beta^\alpha$. Logo $\alpha\gamma^{-1} \in \mathrm{Aut}(T_n)$ satisfaz $\beta^{\alpha\gamma^{-1}} = \tau$. $\square$

Teorema 9. *Sejam p um primo ímpar, $\sigma = (0, 1, \cdots, p-1)$, $G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_p) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle\sigma\rangle, \forall u \in \mathcal{M}\rangle$ e $\beta \in G$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta \in \times_{p^m}\widehat{\langle\mu\rangle}$ para algum conjugado μ de τ em $\mathrm{Aut}(T_p)$.*

Demonstração. Seja m o menor número natural tal que $\sigma_{\beta_u} \neq e$ para algum $u \in \mathcal{M}$ tal que $|u| = m$.

Como $\beta \in \mathrm{Stab}_G(m) \subset \mathrm{Stab}_n(m)$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $[\beta_w, \beta_v^{\tau^\xi}] = e$ para todos $w, v \in \mathcal{M}$ tais que $|w| = |v| = m$, pela Proposição 25.

Assim, $[\beta_u, \beta_u^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e, como $\sigma_{\beta_u} \neq e$, então $\sigma_{\beta_u} = \sigma^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$ tal que $(s, n) = 1$.

Logo, pelo Corolário 15, $\mu = \beta_u$ é um conjugado de τ em $\mathrm{Aut}(T_p)$ e, portanto, $\beta \in \times_{p^m}\widehat{\langle\mu\rangle}$. $\square$

Um dos resultados principais deste trabalho que generaliza o caso binário (Veja [8]) é o seguinte:

Teorema 10. *Seja p primo e seja K um subgrupo solúvel de*

$$G = \langle \alpha \in \mathrm{Aut}(T_p) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle (0, 1, \cdots, p-1) \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle,$$

contendo a máquina de adição p-ádica τ. Então existe um inteiro t tal que K é um conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$ em $\mathrm{Aut}(T_p)$.

Demonstração. Podemos assumir que K tenha comprimento derivado $d \geq 2$. Seja B o $(d-1)$-ésimo termo da série derivada de K. Então B é um grupo abeliano normalizado por τ. Pelo Teorema 9, existe um nível t tal que B é um subgrupo de $V = \times_{p^t} \widehat{\langle \mu \rangle}$ onde μ é algum conjugado de τ e $\mu^\tau = \mu^\xi$ para algum $\xi \in \mathbb{Z}_p^1$. Além disso, existe $b(i) \in B$ com μ em alguma coordenada i. Como τ é transitivo em qualquer nível, dados $1 \leq j \leq p^t$ podemos conjugar $b(i)$ por uma potência adequada de τ para obtermos $b(j) \in B$ com μ ou μ^τ em sua j-ésima coordenada. Seja T o normalizador de $\widehat{\langle \mu \rangle}$ em G e $R = \times_{p^t} T$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja P_m é o grupo de automorfismos da árvore truncada até o nível m que pertencem a G. Desta forma, todo $c \in K$ pode ser decomposto como $c = \pi c'$, onde $\pi \in P_{t-1}$ e $c' = (c_1, c_2, \cdots, c_{p^t}) \in \mathrm{Stab}_p(t) \cap G$. Seja $(j)\pi = k$. Então $b(j)^c$ tem $(\mu^\eta)^{c_k}$ em sua k-ésima coordenada, onde $\eta = 1$ ou $\eta = \xi$. Em todo caso, já que $(\mu^\eta)^{c_k}$ comuta com μ, existe $\delta_k \in \mathbb{Z}_p^1$ tal que $\mu^{\eta c_k} = \mu^{\delta_k}$. Assim, $c_k \in T$ para todo k e, portanto, $K \leq P_{t-1}R$. Como T é um conjugado de Ψ por algum $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_p)$, então $P_{t-1}R$ é conjugado de $\Psi(t)$ por $(\alpha, \cdots, \alpha) \in \mathrm{Stab}_p(t)$. □

Referências Bibliográficas

[1] H. Bass, O. Espinar, D. Rockmore, C. Tresser, *Cyclic Renormalization and the Automorphism Groups of Rooted Trees,* Lecture Notes in Mathematics 1621, Springer, Berlin, 1995.

[2] A. M. Brunner, S. Sidki, *The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite-state automata,* Int. J. Algebra Comput. **8** (1998), 127-139.

[3] A. M. Brunner, S. Sidki, A. C. Vieira, *A just-nonsolvable torsion-free group defined on the binary tree,* J. Algebra **211** (1999), 99-114.

[4] V. V. Nekrashevych, S. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: State-Closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms,* Proc. Conf. Group Theory, Bielefeld, 1999.

[5] R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrachevych, V. I. Suschanskii, *Automata, dynamical systems, and groups,* Proc. Steklv Institute **231** (2000), 128-203.

[6] S. Sidki, E. F. Silva, *A family of just-nonsolvable torsion-free groups defined on n-ary trees,* In Atas da XVI Escola de Álgebra, Brasília, Matematica Contemporânea **21** (2001).

[7] S. Sidki, *Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure and acyclicity,* Jornal of Mathematical Sciences, Vol. **100**, n$\underline{o}$ 1 (2000), 1925-1943.

[8] S. Sidki, *The Binary Adding Machine and Solvable Groups,* International Journal of Algebra and Computation, Vol. **13**, n$\underline{o}$ 1 (2003), 95-110.

[9] S. Sidki, *Regular Trees and their Automorphisms,* Monografias de Matemática, N$\underline{o}$ **56**, Impa, Rio de Janeiro, 1998.

[10] J.D.P Meldrum, *Wreath Products of Groups and Semigroups,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **74**, Longman, New York, (1995).

[11] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: presentation of groups in terms of generators and relators,* second revised edition, Dover Publications, New York, 1976.

Apêndice A

Tabela de Símbolos

T	árvore regular uni-raiz.
T_n	árvore regular n-ária.
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y)$	monóide livremente gerado por Y.
$\mathcal{A}$	grupos dos automorfismos da árvore regular T (ou T_n).
$\mathrm{Aut}(T)$	grupo dos automorfismos da árvore regular T.
$\mathrm{Stab}_n(k)$	estabilizador de palavras com comprimento k em $\mathrm{Aut}(T_n)$.
$\mathrm{Stab}_G(k)$	estabilizador de palavras com comprimento k em G.
$\mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$	conjunto das funções de Y em $\mathcal{A}$.
S_Y	grupo das permutações do conjunto Y.
S_n	grupo das permutações do conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$.
$\|u\|$	comprimento da palavra u.
$\overline{\xi}$	primeiro dígito de ξ escrito na forma n-ádica.
$\overline{m}$	resto da divisão inteira de m por n.
(m, n)	máximo divisor comum entre m e n.
τ	máquina de adição n-ádica.
Σ_α	conjunto das permutações induzidas pelos estados de α.
$Q(\alpha)$	conjunto dos estados de α.
e	elemento identidade do grupo.
$\boldsymbol{o}(\alpha)$	ordem de α.
$\mathbb{Z}_n$	anel dos inteiros n-ádicos.
$U(\mathbb{Z}_n)$	elementos invertíveis do anel $\mathbb{Z}_n$.
$C(\alpha)$	centralizador de α.
u^α	imagem da palavra u pelo automorfismo α.
$\mathrm{Orb}_\sigma(i)$	órbita do elemento i na permutação σ.

α^β	conjugação $\beta^{-1}\alpha\beta$.
$[\alpha, \beta]$	$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$.
$\Gamma^{(k)}(G)$	termo da série central descendente do grupo G.
$Z(G)$	centro do grupo G.
$H \leq G$	H é um subgrupo de G.
$H \lhd G$	H é um subgrupo normal de G.
$G_1 \ltimes G_2$	produto semidireto de G_1 e G_2.
$G \wr H$	produto entrelaçado de G e H.
G'	subgrupo derivado do grupo G.
$[G, H]$	subgrupo gerado pelos elementos $g^{-1}h^{-1}gh$, onde $g \in G$ e $h \in H$.
$A - B$	conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.
$\dfrac{G}{H}$	grupo quociente de G por H.
$[G : H]$	índice de H em G.
$G_1 \cong G_2$	G_1 é isomorfo a G_2.
$A \times B$	produto cartesiano dos conjuntos A e B.
$G \times H$	produto direto dos grupos G e H.
$\times_k G$	produto direto de k cópias de G.
$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$	grupo gerado por $x_1, \cdots, x_n$.
$\langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_k \rangle$	grupo gerado por $x_1, \cdots, x_n$ com relações $r_1, \cdots, r_k$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
$\varnothing$	conjunto vazio.