

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DO EFEITO DA TENSÃO MÉDIA NA  
RESISTÊNCIA À FADIGA POR *FRETTING*  
DA LIGA Al 7050-T7451**

**ALLISSON RIBEIRO FIGUEIREDO**

**ORIENTADOR: FÁBIO COMES DE CASTRO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**PUBLICAÇÃO: ENM. DM -153A/2010**

**BRASÍLIA/DF: JULHO – 2010**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DO EFEITO DA TENSÃO MÉDIA NA RESISTÊNCIA À  
FADIGA POR *FRETTING* DA LIGA Al 7050-T7451**

**ALLISSON RIBEIRO FIGUEIREDO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE  
BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Fábio Comes de Castro, D. Sc. (ENM-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Jorge Luiz de Almeida, D. Sc. (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Luiz Carlos Rolim Lopes, Ph. D. (UFF-Volta Redonda/RJ)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, 08 DE JULHO DE 2010.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

FIGUEIREDO, A. R.,

Análise do Efeito da Tensão Média na Resistência à Fadiga por *Fretting* na Liga Al 7050-T7451. [Distrito Federal] 2010.

xxv, 123p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2010).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Fadiga por *Fretting*

2. Crescimento de Trinca

3. Efeito da Tensão Média

4. Liga de Alumínio

I. ENM/FT/UnB

II. ENM.DM-153A / 2010

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FIGUEIREDO, A. R., (2010) Análise do Efeito da Tensão Média na Resistência à Fadiga por *Fretting* da Liga Al 7050-T7451. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM-153A / 2010, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília,DF, 123p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Allisson Ribeiro Figueiredo

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Análise do Efeito da Tensão Média na Resistência à Fadiga por *Fretting* na Liga Al 7050-T7451

GRAU / ANO: Mestre / 2010

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir, emprestar ou vender cópias desta dissertação de mestrado somente para propósitos acadêmicos e científicos.

O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Allisson Ribeiro Figueiredo

Correio Eletrônico: allisson.go@gmail.com

## **DEDICATÓRIA**

A Deus, por estar sempre presente em minha vida.



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, pela realização de mais esse sonho. a minha mãe, por todo o amor dedicado e por ser um exemplo de superação, trabalho e perseverança. A todos do Grupo GAMMA: Prof. Fábio Comes, Prof. José Alexander, Prof. Jorge Luiz, Luiz Homero, Luciana Sgarbi (USP/EESC), Rodolfo Fleury, Thiago Doca, Marquito, Arthur, Tales Brito e Túlio não apenas pela ajuda prestada na realização deste trabalho mas também pelos momentos de amizade compartilhados. A todos os funcionários do ENM/UnB, em especial aos técnicos do SG-09.

A meus amigos e familiares de Goiânia, minha querida e amada cidade natal, e também a meus amigos espalhados por Brasília, Rio de Janeiro e Macaé, cidades que aprendi a gostar e pelas quais tenho imenso carinho.

A todos os meus amigos e companheiros de Engenharia Mecânica e equipe CT 21 de Aerodesign.

Agradeço também à USP/EESC, pela parceria nesse projeto; À EMBRAER, por ter cedido parte do material para fabricação dos CPs; e ao CNPq/UnB pela bolsa de iniciação científica, que deu origem a este projeto.

## RESUMO

### ANÁLISE DO EFEITO DA TENSÃO MÉDIA NA RESISTÊNCIA À FADIGA POR FRETTING DA LIGA Al 7050-T7451

Este trabalho apresenta um estudo experimental e teórico do efeito da tensão média na resistência à fadiga por fretting da liga aeronáutica Al 7050-T7451. Os ensaios de fadiga por fretting foram realizados no regime de escorregamento parcial, por meio de um dispositivo acoplado a uma máquina de ensaios universal MTS 810. Os ensaios foram realizados com os mesmos parâmetros, exceto a tensão média do carregamento cíclico aplicado ao corpo de prova, que variou de um valor trativo para um compressivo. Os dados experimentais observados, e outros disponíveis na literatura, foram comparados com as estimativas de dois modelos de fadiga multiaxial baseados na Teoria das Distâncias Críticas. Em um dos modelos a amplitude das tensões cisalhantes é definida em termos do conceito de plano crítico, enquanto no outro esta medida baseia-se no conceito de amplitude da história das tensões desviadoras. Os resultados mostram que os modelos de fadiga estimaram corretamente a inicialização de trincas em todos os ensaios; entretanto, eles não foram capazes de prever o estado final dos corpos de prova que quebraram.

**Palavras-chave:** Fadiga por *fretting*, crescimento de trinca, efeito da tensão média, liga de alumínio.

## **ABSTRACT**

### **AN ANALYSIS OF MEAN STRESS EFFECT ON FRETTING FATIGUE STRENGTH OF Al 7050-T7451 ALLOY**

This work presents an experimental and theoretical assessment of the mean stress effect on fretting fatigue strength of aeronautical Al 7050-T7451 alloy. All tests were conducted in the partial slip regime, by means of a fretting device connected to a MTS 810 universal testing machine. From test to test, all parameters were kept constant, except the mean bulk stress which varied from a tensile to a compressive value. The observed experimental data, and other ones available in the literature, were compared with the estimations of two multiaxial fatigue models based on the Theory of Critical Distances. In one of the models the shear stress amplitude is based on the critical plane concept, while in the other this measure is defined in terms of the amplitude of the stress history projected into the deviatoric space. The fatigue models satisfactorily estimated crack initiation in all tests; however, they were incapable of estimating the final state of the broken specimens.

**Key Words:** Fretting Fatigue, crack arrest, mean stress effect, aluminum alloy.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
1.1	OBJETIVO.....	17
1.2	MOTIVAÇÃO.....	17
1.3	ESTADO DA ARTE.....	19
<b>2</b>	<b>CÁLCULO DAS TENSÕES EM CONTATOS SOB REGIME DE ESCORREGAMENTO PARCIAL.....</b>	<b>24</b>
2.1	REGIME DE ESCORREGAMENTO PARCIAL.....	24
2.2	FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO.....	26
2.2.1	CARGA NORMAL.....	27
2.2.2	CARGA TANGENCIAL.....	28
2.2.3	CARGA REMOTA DE FADIGA.....	32
2.2.4	CAMPO DE TENSÃO NA REGIÃO DO CONTATO.....	33
<b>3</b>	<b>MODELOS PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA MULTIAXIAL.....</b>	<b>36</b>
3.1	INTRODUÇÃO.....	36
3.2	MODELOS LOCAIS PARA FADIGA MULTIAXIAL.....	36
3.3	MODELOS NÃO-LOCAIS PARA FADIGA MULTIAXIAL.....	37
3.3.1	FORMULAÇÃO NÃO-LOCAL DO MODELO DE FADIGA DE SUSMEL-LAZZARIN.....	39
3.3.2	FORMULAÇÃO NÃO-LOCAL DO MODELO DE FADIGA DO ENVELOPE PRISMÁTICO.....	44
<b>4</b>	<b>O DISPOSITIVO DE <i>FRETTING</i> DO ENM/UnB.....</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA NUMÉRICA-EXPERIMENTAL PARA ANÁLISE DA FADIGA POR <i>FRETTING</i>.....</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>65</b>
6.1	PROPRIEDADES BÁSICAS DA LIGA AI 7050 T7451.....	65
6.1.1	MICRODUREZA.....	67
6.1.2	TRAÇÃO.....	68
6.1.3	FADIGA UNIAXIAL.....	69
6.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE FADIGA POR <i>FRETTING</i> .....	70
6.2.1	PARÂMETROS E RESULTADOS DOS ENSAIOS REALIZADOS POR ROSSINO (2008).....	71
6.2.2	PARÂMETROS E RESULTADOS DOS ENSAIOS REALIZADOS NESTE TRABALHO.....	73
6.3	ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM AS ESTIMATIVAS DOS MODELOS DE FADIGA.....	74

<b>7 CONCLUSÕES.....</b>	<b>85</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>86</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>89</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Exemplo de montagens ilustrando possíveis pontos de formação de trincas. (a) Junta rebitada e (b) conexão tipo “rabo de andorinha” .....	18
Figura 1.2: Arranjos típicos de juntas flangeadas parafusadas. (a) Turbina a gás e (b) Tubulações industriais.....	19
Figura 1.3: Sapatas (a) do tipo ponte e (b) cilíndricas. ....	21
Figura 1.4: Esquema do aparato de fadiga por <i>fretting</i> para juntas biaxiais. ....	22
Figura 1.5: Espécime trincado da máquina de fadiga de juntas axiais. ....	22
Figura 2.1: Contato normal entre dois corpos. ....	24
Figura 2.2: Zonas de adesão e escorregamento na superfície de contato. ....	26
Figura 2.3: Contato entre dois corpos elasticamente similares, sujeitos a uma carga normal $P$ e uma tangencial $Q$ . ....	27
Figura 2.4: Zonas de escorregamento e de adesão em um regime de escorregamento parcial entre cilindros.....	28
Figura 2.5: Perfil da distribuição de pressão e tensão cisalhante superficial para uma configuração típica de carregamento $Q/fP = 0,59$ e $\sigma_B/fP_o = 0$ .....	29
Figura 2.6: Variação da carga tangencial $Q$ com o tempo. ....	30
Figura 2.7: Distribuição de tensão cisalhante superficial para um problema de contato plano entre cilindros com $ Q_{\max}/fP  \leq 0,6$ .....	32
Figura 2.8: Efeito da carga remota média na distribuição de tensão cisalhante superficial para um problema de contato plano entre cilindros com $ Q_{\max}/fP  \leq 0,6$ e $ \sigma_B/P_o  \leq 0,59$ .....	33
Figura 3.1: (a) Componente com entalhe submetido a um carregamento cíclico e (b) aplicação de um modelo de fadiga multiaxial considerando o Método do Ponto. ....	39
Figura 3.2: (a) Plano Material $\Delta$ e vetor tensão de Cauchy $T(t)$ e (b) rotação do plano..	41
Figura 3.3: (a) História das tensões desviadoras $S(t)$ e o envelope convexo correspondente; (b) envelope prismático com orientação $\theta$ e os pontos de tangência $p_i$ , $q_i$ . ....	46

Figura 4.1: Configuração idealizada do problema de fadiga por <i>fretting</i> . .....	51
Figura 4.2. (a) Corpo de Prova tipo <i>dog bone</i> , (b) sapata cilíndrica de <i>fretting</i> , (c). montagem do CP e sapatas e (d). marcas do alinhamento das sapatas: 1- alinhado; 2- desalinhado. ....	52
Figura 4.3: (a) Dispositivo de <i>fretting</i> do ENM/UnB e (b) seus componentes. ....	53
Figura 4.4: Sistema hidráulico auxiliar: (a) Bomba manual (em amarelo) e acumulador de pressão (em preto); (b) Cilindro auxiliar (em amarelo) e válvula de retenção (em preto). ....	55
Figura 4.5: Aplicação da carga de pressão: (a) Calço; (b) <i>Load Washer</i> de 1000 lbf da Interface; (c) Calço e <i>Load Washer</i> montadas no dispositivo; (d) Sistema de aquisição de dados (ADS 2000 Lynx). ....	56
Figura 4.6: (a) Região do contato no dispositivo e (b) Esquematização das forças atuantes no sistema. ....	57
Figura 4.7: Associação de molas equivalente ao sistema de <i>fretting</i> . ....	58
Figura 5.1: Dispositivo de <i>fretting</i> acoplado a máquina de ensaios universais MTS 810. .....	60
Figura 5.2: Metodologia dos modelos não-locais de fadiga multiaxial associada ao MP para problemas de fadiga sob condições de <i>fretting</i> com contato entre cilindros e CP's planos. ....	62
Figura 5.3: Programa de carregamento dos ensaios de fadiga por <i>fretting</i> . ....	62
Figura 5.4: Exemplo de diagrama para os modelos não-locais de fadiga aplicados na distância $L_c$ .....	64
Figura 6.1: Tratamento térmico empregado na liga de alumínio 7050-T7451. ....	65
Figura 6.2: Sentidos de análise do material conforme corte feito na placa. ....	66
Figura 6.3: Micrografia de regiões cristalizadas da liga Al7050-T7451 no plano S, atacada com reagente Keller. ....	66
Figura 6.4: Micrografia de grãos encontrados na liga Al7050-T7451 no plano T, atacada com reagente $(NH_4)_2S_2O_8$ . ....	67
Figura 6.5: Dimensões do Corpo de Prova para o ensaio de Tração Uniaxial. ....	68
Figura 6.6: (a) Corpo de Prova para fadiga uniaxial e (b) curvas S-N para carregamento completamente reversível e carregamento flutuante. ....	70

Figura 6.7: Curvas S-N para os dados da 1ª bateria de ensaios de (a) fadiga por <i>fretting</i> e (b) comparação entre fadiga convencional e por <i>fretting</i> .....	72
Figura 6.8: Curva S-N para os dados da 2ª bateria de ensaios de fadiga por <i>fretting</i> .....	74
Figura 6.9: Curva S-N comparativa entre fadiga convencional e por <i>fretting</i> para (I) vida finita e (II) vida infinita. ....	75
Figura 6.10: Seções de Corpos de Prova quebrados da 1ª bateria de ensaios fotografadas com MEV (Microscópio Eletrônico de Varredura), sendo (a) Vista Superior de CP quebrado com $\sigma_m = 15$ MPa e (b) Vista a 45° de CP quebrado com $\sigma_m = 0$ MPa. ....	78
Figura 6.11: Para um CP da 1ª bateria de ensaios com $\sigma_m = 0$ MPa: (a) visão da superfície fraturada, por microscópio estereoscópico, indicando a direção do crescimento da trinca; (b) detalhe dos múltiplos sítios de fadiga no lado A; (c) estrias de fadiga e (d) crescimento de trinca de fadiga pelo lado B e região de ruptura plástica. .	80
Figura 6.12: Aplicação dos modelos de fadiga de (a) Susmel-Lazzarin e (b) Envelope Prismático para a 1ª bateria de ensaios. ....	82
Figura 6.13: Aplicação dos modelos de fadiga de (a) Susmel-Lazzarin e (b) Envelope Prismático para a 2ª bateria de ensaios. ....	83
Figura 6.14: Análise pós-falha de CP não rompido da 1ª bateria de ensaios, com $\sigma_m = -92,7$ MPa: várias nucleações e propagações de trincas.....	84
Figura I.1: Semi-plano submetido às forças normal e tangencial.....	90
Figura I.2: Contato entre dois corpos elasticamente similares sujeitos a forças normal, $P$ , e tangencial, $Q$ . ....	91
Figura I.3: Semi-plano carregado normal e tangencialmente na superfície, aplicado sobre o contato.....	94
Figura III.1 – Curva tensão x deformação da liga Al7050-T7451 .....	102
Figura III.2: Curva $\sigma_a \times N$ para Al 7050-T7451 com $\sigma_m = 0$ MPa . ....	102
Figura III.3: Curva $\sigma_a \times N$ para Al 7050-T7451 com $\sigma_m = 120$ MPa.....	103
Figura III.4: Curva $\sigma_{max} \times N$ comparativa entre fadiga convencional e por <i>fretting</i> para Al 7050-T7451. ....	103



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Tensões cisalhantes superficiais para cada zona de aplicação. ....	31
Tabela 6. 1: Composição Química (% em peso) da liga de alumínio 7050-T7451 [ASM].....	65
Tabela 6.2: Microdureza Vickers (HV) da liga Al7050-T7451 segundo o sentido de laminação .....	67
Tabela 6.3: Propriedades médias de tração da liga Al7050-T7451 .....	68
Tabela 6.4: Parâmetros para a 1ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de <i>fretting</i> .....	71
Tabela 6.5: Resultados da 1ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de <i>fretting</i> .....	71
Tabela 6.6: Parâmetros para a 2ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de <i>fretting</i> .....	73
Tabela 6.7: Resultados da 2ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de <i>fretting</i> .....	73
Tabela 6.8: Comparativo entre resistências à fadiga convencional e por <i>fretting</i> .....	76
Tabela III.1: Medidas de microdureza Vickers (HV 25gf) apresentadas pela liga Al7050- T7451 .....	101
Tabela III.2: Propriedades de tração da liga Al7050-T7451 .....	101
Tabela III.3: Amplitude de Tensão e vida para tensão média de 0 MPa. ....	102
Tabela III.4: Amplitude de Tensão e vida para tensão média de 120 MPa. ....	103

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$A$	flexibilidade
$a$	metade do tamanho do contato
$B$	carga remota de fadiga
$c$	metade da zona de adesão para máxima e mínima carga cisalhante
$c'$	metade da zona de adesão durante o escorregamento reverso
$e$	deslocamento da zona de adesão máxima tensão remota
$e'$	deslocamento da zona de adesão pra carregamento e descarregamento
$E$	módulo de elasticidade
$E^*$	módulo de elasticidade equivalente
$F_B$	força remota de fadiga
$F_m$	força remota média
$f$	coeficiente de atrito
$g(x)$	deslocamento relativo na direção $x$
$h(x)$	quantidade de interpenetração na direção $y$
$N_f$	número de ciclos de vida
$P$	carga normal por unidade de comprimento
$p_o$	pressão de pico no contato
$p(x)$	distribuição de pressão de contato
$Q$	carga tangencial por unidade de comprimento
$Q_{\max}$	carga tangencial máxima
$q(x)$	distribuição de tensão cisalhante superficial
$q'(x)$	perturbação na distribuição da tensão cisalhante superficial
$q''(x)$	termo de correção para a distribuição de tensão cisalhante superficial
$R$	razão entre tensões
$R$	raio equivalente
$R_1 e R_2$	raios dos cilindros em contato
$r$	coordenada radial do sistema de coordenada polar
$t$	tempo

$k$	parâmetro do material
$S$	tensor desviador
$I$	matriz identidade
$N_i$	base desviadora (componentes com traço nulo e ortonormais)
$k_D$	semi rigidez do dispositivo
$k_A$	rigidez do porção do corpo de prova acima do contato
$l_{sa}$	comprimento do corpo de prova acima do contato
$k_1, k_2, k_3$	rigidez das colunas verticais, das vigas em balanço e dos diafragmas, respectivamente
$A, B, C$	comprimento, largura e altura da viga flexível, respectivamente
$A_1, l_1$	área da seção e comprimento da coluna vertical, respectivamente
$A_3, l_3$	área da seção e comprimento dos diafragmas, respectivamente

### Símbolos Gregos

$\kappa, \lambda$	parâmetros do material obtidos pelo critério de Mamiya & Araújo
$\mu$	módulo de rigidez
$\nu$	razão de poisson
$\sigma$	tensor tensão
$\mu$	módulo de rigidez
$\nu$	razão de poisson
$\sigma_0$	tensão remota de fadiga
$\Delta\sigma$	faixa de tensão
$\sigma_{ar}$	resistência a fadiga equivalente do material testado com tensão média nula
$\sigma'_f$	resistência a fadiga
$\sigma_h$	tensão hidrostática
$\sigma_{h,max}$	tensão hidrostática máxima
$\sigma_m$	tensão remota média
$\sigma_{-1}$	resistência a fadiga sob carregamento alternado
$\tilde{\sigma}_a$	resistência a fadiga sob carregamento flutuante
$\tilde{\sigma}_m$	tensão média do carregamento flutuante

$\delta^t$	deslocamento tangencial
$\delta^n$	deslocamento normal
$\tau_a$	amplitude de tensão cisalhante equivalente
$\phi$	envelope convexo com todos os pontos de $S$
$\theta$	orientação arbitrária dos prismas no critério de Mamiya & Araújo
$\partial\phi$	contorno do envelope convexo com todos os pontos de $S$
$\gamma$	fator de alinhamento entre a carga $Q$ e os diafragmas

### Subscritos

$max$	máximo valor para as cargas senoidais no ciclo
$min$	mínimo valor para as cargas senoidais no ciclo
$m$	valor médio para as cargas senoidais no ciclo
$a$	amplitude de cargas
$xx,yy,zz,xy$	componentes do tensor tensão

### Siglas

MP	Método do Ponto
ML	Método da Linha
MDC	Método da Distância Crítica
PRH	Modelo do Envelope Prismático ( <i>Prismatic Hull</i> )
SL	Modelo de Susmel-Lazzarin

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 OBJETIVO

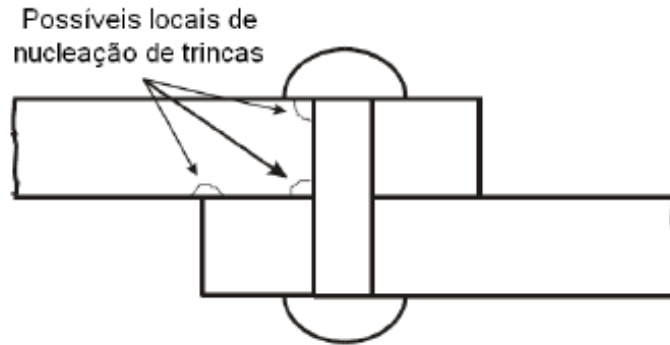
Esta dissertação tem o objetivo geral de apresentar uma análise experimental e teórica da resistência a fadiga sob condições de *fretting* da liga aeronáutica Al 7050-T7451. Para a realização da parte experimental, foi utilizado um dispositivo de *fretting* acoplado a máquina de ensaios universal MTS 810 do Laboratório de Ensaios Mecânicos do ENM/UnB. Os ensaios de fadiga por *fretting* tiveram o objetivo específico de avaliar o efeito da tensão média sobre a resistência a fadiga por *fretting*. Para isso, os ensaios foram realizados sob condições idênticas, exceto a tensão média do carregamento cíclico aplicado aos corpos de prova. Outro objetivo específico desta dissertação foi confrontar os dados experimentais obtidos com as predições de modelos de fadiga multiaxial baseados no conceito de plano crítico (Susmel e Lazzarin, 2002) e na amplitude da história das tensões desviadoras (Mamiya et al., 2009). Ambos os modelos utilizaram a Teoria das Distâncias Críticas (Taylor, 1999; Castro et al., 2008) para incorporar o efeito do gradiente de tensão na resistência à fadiga.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

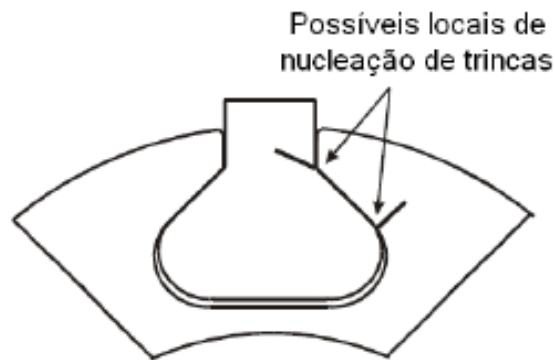
O processo de fadiga sob condições de *fretting* é caracterizado pelo movimento relativo de baixa amplitude (da ordem de microns) entre duas superfícies em contato induzido por cargas vibratórias ou carregamentos cíclicos. Dentre outros processos de degradação, este deslizamento tende a provocar desgaste superficial que pode levar ao surgimento prematuro de micro-trincas na região do contato.

Falhas oriundas de um processo de fadiga por *fretting* vêm se mostrando um desafio crescente em projetos de engenharia, principalmente os relacionados à indústria aeronáutica. Uma pesquisa sobre acidentes envolvendo *fretting* pode ser encontrada na seção de aviação do sítio da NTSB (*National Transportation Safety Board's*), que mostra inúmeros relatos de falhas por *fretting* em aviões e helicópteros. Exemplos clássicos deste tipo de falha são observados na conexão tipo rabo de andorinha entre a pá e o rotor do *fan* de motores a jato e em juntas rebitadas da fuselagem das aeronaves, como mostrado na Fig (1.1). Outros exemplos de situações onde existe a possibilidade

de falha por *fretting* são encontrados nas juntas flangeadas de turbinas a gás e de tubulações industriais (veja Fig. (1.2)), nas indústrias ferroviária, automobilística, de transmissão de energia e em implantes ortopédicos.



(a)



(b)

Figura 1.1: Exemplo de montagens ilustrando possíveis pontos de formação de trincas. (a) Junta rebitada e (b) conexão tipo "rabo de andorinha".

Neste contexto, entender o processo de fadiga por *fretting* é fundamental para prevenção e redução de acidentes. Portanto, o significado desse estudo pode ter um efeito extensivo, atingindo principalmente áreas relacionadas ao custo econômico e segurança de um projeto.



(a)



(b)

Figura 1.2: Arranjos típicos de juntas flangeadas parafusadas. (a) Turbina a gás e (b) Tubulações industriais.

### 1.3 ESTADO DA ARTE

Os primeiros relatos de falha por *fretting* ocorreram no início do século XX, por meio da observação de trincas na região de contato entre o corpo de prova e as garras de uma máquina de ensaios de fadiga (Eden et al., 1911). Tomlinson (1927) propôs que o

principal responsável por esse fenômeno era o movimento tangencial entre as superfícies em contato. Warlow-Davis (1941) relatou que os componentes que eram submetidos à condição de *fretting* e depois a carregamentos cíclicos apresentavam uma redução em torno de 13 a 17% de sua resistência a fadiga.

Existem várias formas e procedimentos utilizados para avaliar a resistência a fadiga por *fretting*. Até o início da década de 90, era muito comum o uso de sapatas de *fretting* do tipo ‘ponte’, como mostrado na Fig. (1.3a) a seguir. A principal vantagem nesse tipo de configuração é que um corpo de prova na fadiga convencional pode ser utilizado tanto em flexão quanto em tensão cíclica. As pontes são apertadas ao redor do corpo de prova por meio de um anel e a deformação cíclica no corpo de prova causa um movimento relativo entre as faces da ponte e do corpo de prova na região em contato. Porém, esse arranjo simplificado traz uma série de limitações. As condições do contato nos pés das sapatas são difíceis de caracterizar, principalmente se existir flexão na ponte. Além disso, não se consegue garantir que as condições em cada sapata sejam idênticas, podendo uma começar a deslizar antes da outra, mesmo admitindo-se condições teóricas de simetria. Assim, o regime de deslizamento durante o ensaio se mostra constantemente desconhecido. Vários trabalhos realizados por Nishioka e Hirakawa nas décadas de 60 e 70 (Nishioka e Hirakawa, 1968, 1969a-69d, 1972) passaram a adotar uma configuração de contato diferente, onde sapatas cilíndricas são pressionadas em uma superfície plana (veja Fig. (1.3b)). Esse tipo de geometria possibilita um melhor alinhamento da sapata e as tensões podem ser previstas analiticamente utilizando a teoria do contato desenvolvida por Hertz (1882) e Mindlin (1949) (ver **Anexo II**). Além disso, a carga normal  $P$ , a carga tangencial  $Q(t)$  e a tensão cíclica aplicada ao corpo de prova  $\sigma_b(t)$ , podem ser medidas e controladas. Essa geometria tem sido utilizada desde então por vários pesquisadores, dentre eles Bramhall (1973), Hills et al. (1988) e Szolwiski & Farris (1998).



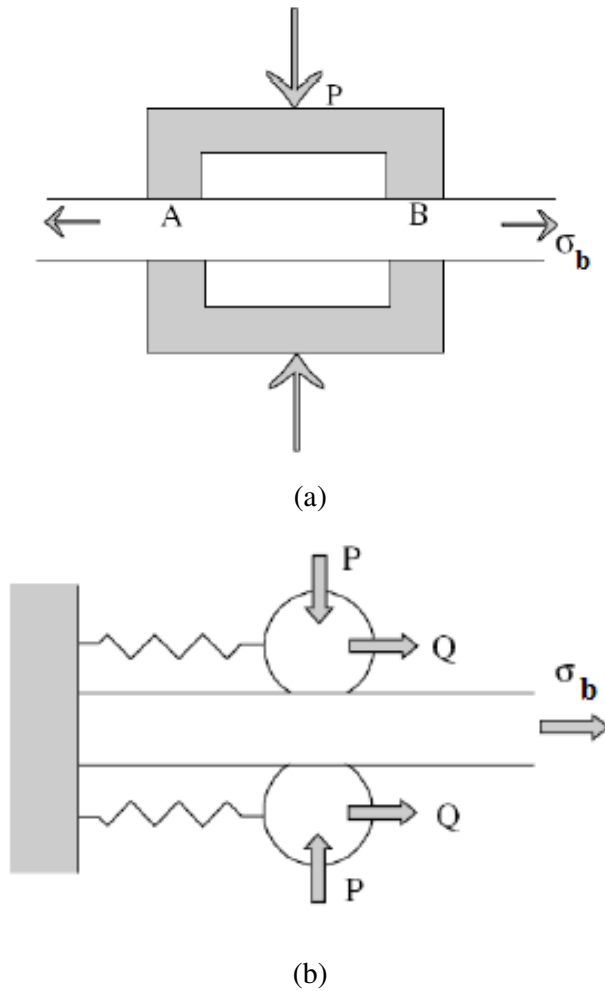


Figura 1.3: Sapatas (a) do tipo ponte e (b) cilíndricas.

Outros experimentos visam aproximar e relacionar melhor a geometria real do componente em estudo. Ruiz et al. (1984) e Papaniknos & Meguid (1994) realizaram ensaios cuja configuração de contato reproduz uma conexão tipo rabo de andorinha. A Fig. (1.4) mostra um dispositivo baseado no aparato de Ruiz construído na Universidade de Oxford. Neste experimento, as cargas aplicadas às sapatas representam a força centrífuga exercida pelo motor. Estas são montadas em um corpo de prova de disco central, também sujeito à carga, simulando o efeito da expansão do disco sob carregamento centrífugo. Isto se mostra importante, pois permite uma representação do deslizamento relativo no motor, que pode ser relevante para o desgaste do contato. A Fig. (1.5) mostra a foto de uma junta, onde observa-se a trinca por fadiga na extremidade do contato.

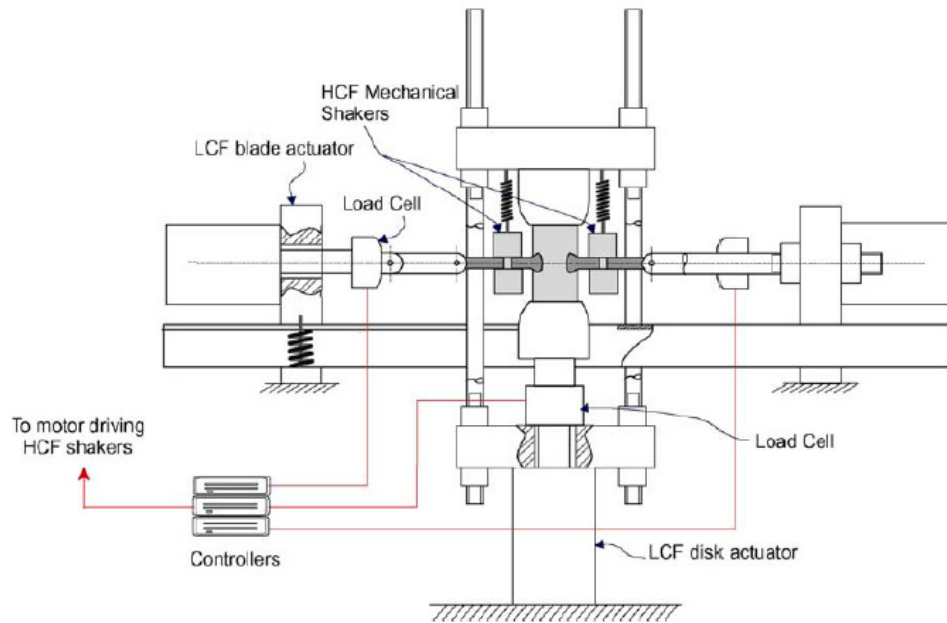


Figura 1.4: Esquema do aparato de fadiga por *fretting* para juntas biaxiais.

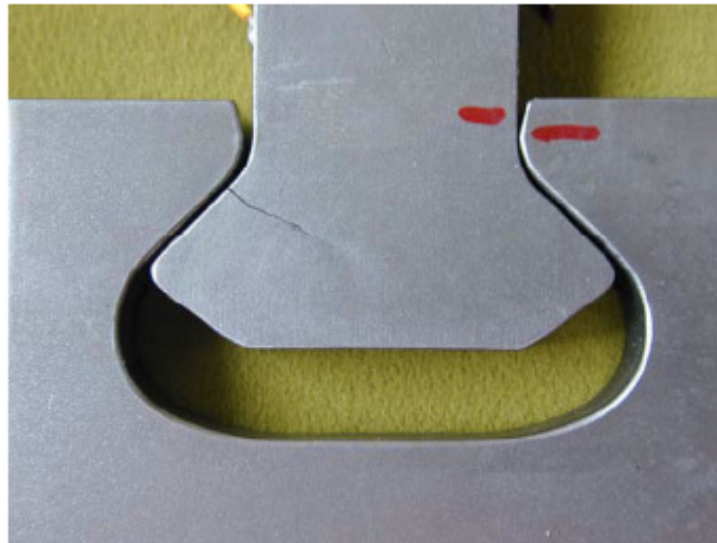


Figura 1.5: Espécime trincado da máquina de fadiga de juntas axiais.

Um aspecto muito abordado nessa área atualmente é o monitoramento do surgimento e da propagação de trincas. Fouvry (2004) usou o critério de *Smith-Watson-Topper* (SWT) para a previsão da iniciação da trinca em ligas de Ti-6Al-4V sobre condições de carregamento por *fretting*. Neste, o critério de plano crítico adotado considerava o cálculo da máxima tensão normal e da máxima amplitude de deformação no plano. Muñoz e Fouvry (2006) apresentaram uma análise experimental do comportamento da trinca em um carregamento de fadiga sob condições de *fretting* para

duas ligas de alumínio: 2024-T351 e 7075 T651. Experimentos sistemáticos e controlados com contato de cilindros planos em condições de escorregamento parcial de *fretting* foram considerados, e um modelo que combina tanto a iniciação quanto a propagação de trinca foi usado para prever a extensão da trinca durante a vida do componente. Rossino (2008) e Castro et al. (2009) também analisaram a resistência a fadiga por *fretting* em uma liga de Al, a 7050-T7451. Usando um modelo de fadiga baseado em plano crítico, confrontaram os dados experimentais com as estimativas do modelo e verificaram a iniciação e propagação de trincas mesmo em componentes que não apresentaram falha durante os ensaios.

## 2 CÁLCULO DAS TENSÕES EM CONTATOS SOB REGIME DE ESCORREGAMENTO PARCIAL

### 2.1 REGIME DE ESCORREGAMENTO PARCIAL

Na formulação do problema de contato mecânico, é apropriado examinar a origem e a distribuição das tensões superficiais cisalhantes, e em seguida, sua influência na distribuição de pressão no contato. Os princípios gerais das equações envolvidas são associados ao plano (bidimensional), axi-simétrico, formas de contato arbitrárias. Supondo-se dois corpos com mesmas propriedades elásticas (elasticamente similares), submetidos a uma carga normal, observa-se que uma pressão de contato se desenvolve e o volume de cada corpo é deslocado paralelamente à superfície livre, como mostrado na Fig. (2.1):

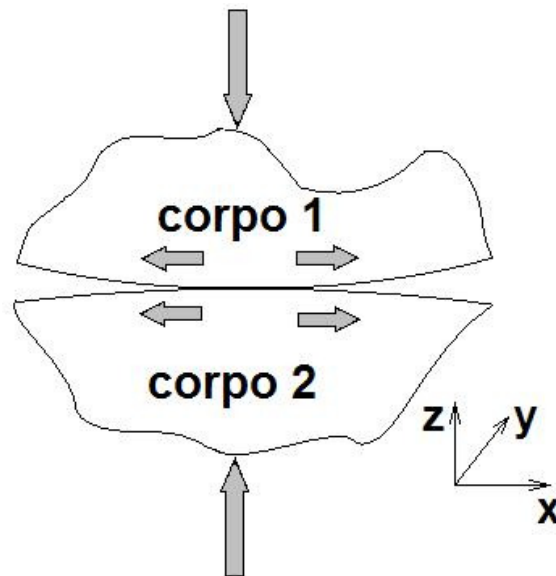


Figura 2.1: Contato normal entre dois corpos.

Todavia, como os corpos são elasticamente similares, o deslocamento do volume de um corpo em relação ao outro será o mesmo, não havendo, portanto, tendência a um escorregamento relativo. Agora, se for introduzida uma força tangencial, então tensões de cisalhamento surgem e são determinadas por:

$$|q(x, y)| = |fp(x, y)|, \quad (2.1)$$

onde  $q$  é a tensão de cisalhamento,  $f$  é o coeficiente de atrito, e  $p$  é a magnitude da tensão normal (ou pressão de contato). Cabe notar que a presença de tensões cisalhantes provoca um deslocamento tangencial de cada um dos pontos em contato, mas como essas tensões atuam em sentidos opostos e os dois corpos são elasticamente similares, o deslocamento de cada superfície é o mesmo fazendo com que a pressão de contato permaneça inalterada. Sendo assim, os efeitos de cargas normais e cisalhantes são inteiramente separáveis, tornando o problema desacoplado. No problema de *fretting*, assume-se que a força tangencial  $Q$  é pequena o suficiente para não causar *deslizamento total* dos corpos em contato. Essa condição é garantida se

$$|Q| < |fP|. \quad (2.2)$$

onde  $P$  é a magnitude da força normal. Neste caso, a região de contato é formada por zonas de adesão, onde as partículas se aderem, e por zonas de escorregamento, onde há movimento relativo tangencial, conforme ilustrado na Fig. (2.2). A distribuição de tensões nas zonas de adesão e escorregamento é dada pelas seguintes considerações: na zona de adesão, as tensões cisalhantes são definidas pela Eq. (2.1) e a direção é definida pelo requerimento que se opõe a direção do incremento de deslocamento relativo das superfícies, induzido pelo último carregamento. Dentro das zonas de escorregamento, a tensão de cisalhamento não pode ser menor que seu valor limite, isto é

$$|q(x, y)| < |fp(x, y)|. \quad (2.3)$$

Novamente, nota-se que as tensões cisalhantes de cada corpo são iguais em magnitude mas diferentes em direção, o que mostra que os deslocamentos normais induzidos em cada corpo são os mesmos. Não há diferença entre a curvatura relativa e a pressão de contato não é afetada.

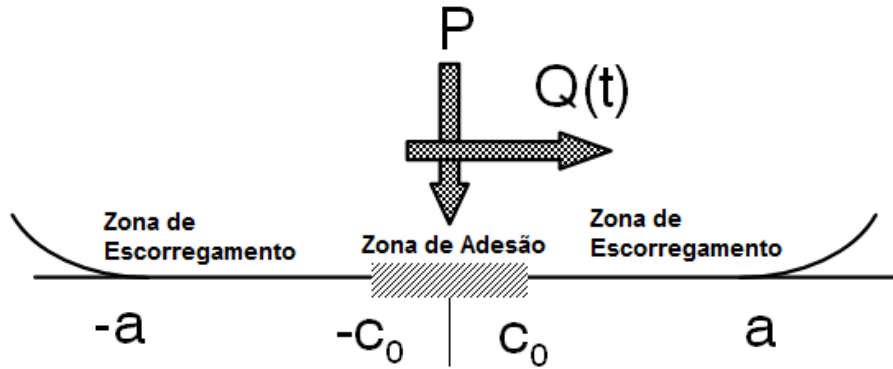


Figura 2.2: Zonas de adesão e escorregamento na superfície de contato.

## 2.2 FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO

A solução de um problema de contato mecânico é obtida usualmente em duas etapas: o primeiro passo consiste na determinação das tensões superficiais e, posteriormente, determina-se o campo de tensões nos corpos em contato. De acordo com Hills & Nowell (1994), as equações integrais que regem o problema de contato são dadas por

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (2.5)$$

onde  $h(x)$  e  $g(x)$  são os deslocamentos normal e tangencial,  $p(x)$  e  $q(x)$  são as distribuições de pressão e de tensão cisalhante e  $A$  é a flexibilidade definida por

$$A = 2 \left( \frac{\kappa + 1}{4\mu} \right), \quad (2.6)$$

onde  $k = 3 - 4\nu$ , sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\mu$  o módulo de rigidez. As equações acima são mostradas com mais detalhes no Anexo I.

## 2.2.1 CARGA NORMAL

A configuração dos ensaios de fadiga por *fretting* utilizada neste trabalho é a mesma adotada por Nowell (1988) e Araújo (2000), conforme ilustra a Fig (2.3).

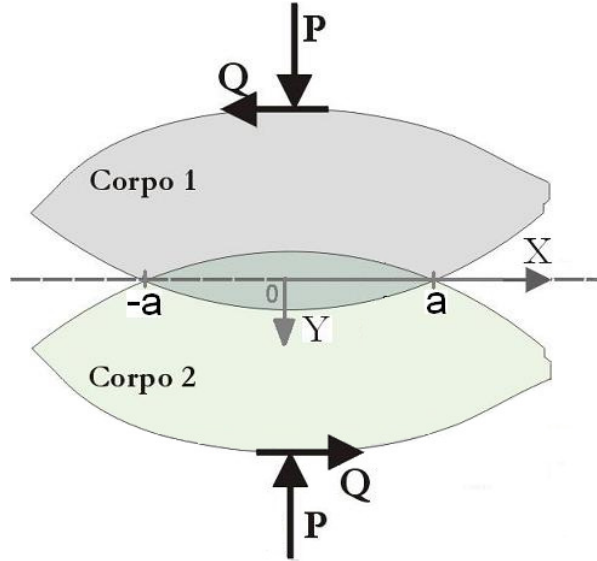


Figura 2.3: Contato entre dois corpos elasticamente similares, sujeitos a uma carga normal  $P$  e uma tangencial  $Q$ .

O raio da sapata,  $R$ , e a carga normal por unidade de comprimento,  $P$ , foram definidos considerando cada corpo como um semi-plano. A distribuição de pressão foi obtida utilizando a solução de Hertz (1882):

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (2.7)$$

que representa uma distribuição elíptica, onde  $p_0$  é a pressão de pico e  $a$  é a metade da largura da região de contato. As expressões para essas grandezas são dadas, respectivamente, por:

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a}, \quad (2.8)$$

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}}. \quad (2.9)$$

onde

$$R = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}. \quad (2.10)$$

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Nas expressões acima os subscritos 1 e 2 referem-se aos corpos 1 e 2 e  $E$  é o módulo de elasticidade.

### 2.2.2 CARGA TANGENCIAL

A carga tangencial dá origem às tensões cisalhantes, e na fadiga por *fretting* o carregamento aplicado é geralmente menor que o limite de escorregamento total. Dessa forma, desenvolve-se um regime de escorregamento parcial, com duas zonas simétricas de escorregamento bem definidas  $c \leq |x| < a$ , e uma de adesão  $|x| < c$ , como esquematizado na Fig. (2.4).

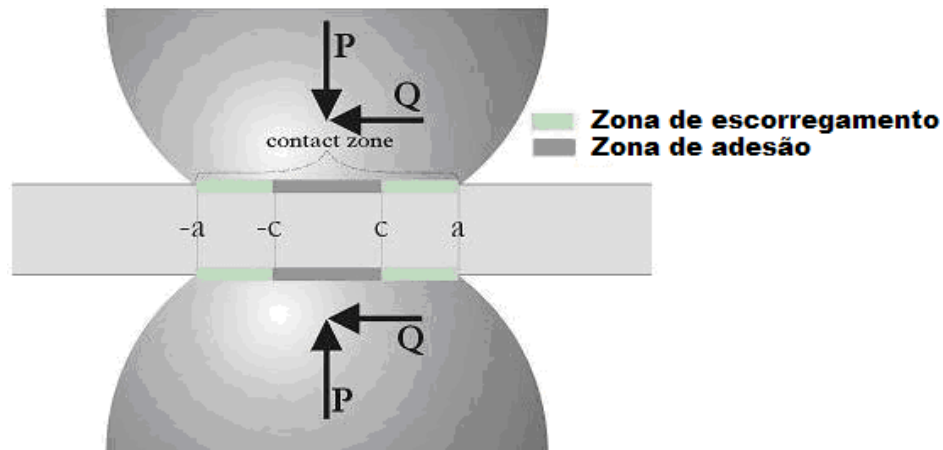


Figura 2.4: Zonas de escorregamento e de adesão em um regime de escorregamento parcial entre cilindros.

Sendo assim, podem-se modelar as tensões cisalhantes superficiais como uma perturbação da solução para deslizamento total:

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2} - q'(x). \quad (2.12)$$



Resolvendo-se (2.12) e considerando que não há movimento relativo entre os corpos na zona de adesão, ou seja,  $g(x) = 0$  para  $|x| < c$ , obtém-se que

$$q'(x) = fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad |x| < c. \quad (2.13)$$

E na zona de escorregamento como não há perturbação na solução completa:

$$q'(x) = 0 \quad c \leq |x| < a. \quad (2.14)$$

O tamanho da zona de adesão,  $c$ , considerando-se equilíbrio tangencial, é dado por

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{fP}\right)}. \quad (2.15)$$

As distribuições de pressão e tensão cisalhante na superfície de contato são ilustradas na Fig. (2.5). Consegue-se identificar facilmente a zona de adesão, pois nela as tensões cisalhantes são reduzidas por causa da perturbação na solução para deslizamento total.

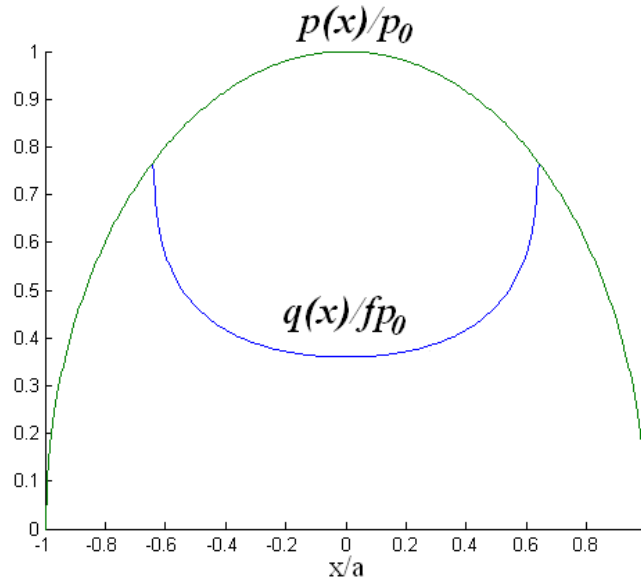


Figura 2.5: Perfil da distribuição de pressão e tensão cisalhante superficial para uma configuração típica de carregamento  $Q/fP = 0,59$  e  $\sigma_B/fp_0 = 0$ .

As expressões apresentadas até aqui são válidas para uma história da força tangencial monotonamente crescente. Consideraremos agora a solução para carregamento decrescente, conforme ilustrado na Fig. (2.6).

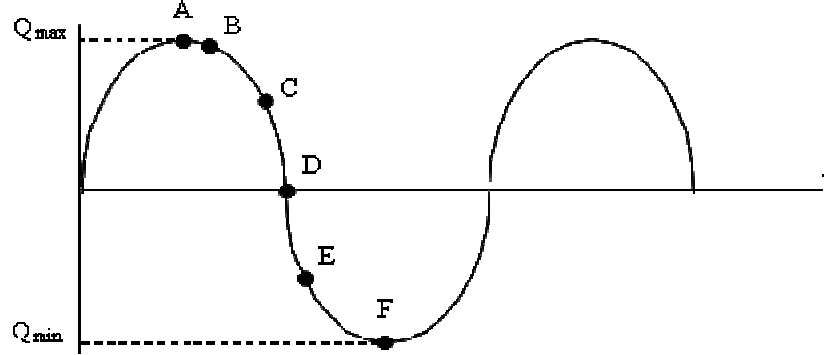


Figura 2.6: Variação da carga tangencial  $Q$  com o tempo.

Como mostrado anteriormente, para uma posição dentro da zona de escorregamento, tem-se que

$$|q(x)| = |fp(x)|, \quad (2.16)$$

e vale lembrar também que na zona de adesão, tem-se que

$$|q(x)| < |fp(x)|. \quad (2.17)$$

Quando o carregamento parte do zero até seu valor máximo, o ponto A da figura, as equações (2.13) a (2.14) descrevem apropriadamente a variação de  $q(x)$ . Durante o descarregamento do ponto A para o ponto B, o deslocamento relativo muda de sinal provocando a violação da equação (2.16) e a adesão em todo o contato. Continuando o descarregamento até o ponto C, verifica-se escorregamento reverso nas extremidades do contato. Nesta nova zona de escorregamento  $c' \leq |x| < a$ , as tensões superficiais mudam de direção. Sendo assim, por analogia, a tensão necessária para ocorrer escorregamento na superfície é dada por:

$$q''(x) = 2fp_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2}. \quad (2.18)$$

O fator de dois deve cancelar o deslocamento relativo quando as tensões superficiais na zona de escorregamento mudam de  $fp(x)$  para a  $-fp(x, y)$ . As distribuições de tensões cisalhantes para cada zona durante o descarregamento são mostradas na Tab.(2.1):

Tabela 2.1: Tensões cisalhantes superficiais para cada zona de aplicação.

<b>Tensão Cisalhante adimensional (<math>q(x)/fp_0</math>)</b>	<b>Zona de Aplicação</b>
$-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$	$c' <  x  \leq a$
$-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{c'}\right)^2}$	$c <  x  \leq c'$
$-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{c'}\right)^2} - \frac{c}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}$	$ x  \leq c$

O tamanho da nova zona de adesão, obtido na condição de equilíbrio é:

$$\frac{c'}{a} = \sqrt{1 - \left( \frac{Q_{\max} - Q}{2fP} \right)^2} . \quad (2.19)$$

A Fig. (2.7) mostra a distribuição das tensões de cisalhamento superficiais pra diversos valores de  $Q$ , correspondentes aos pontos A, C, D, E e F do ciclo mostrado na Fig. (2.6). Percebe-se que os valores extremos são iguais e opostos (pontos A e F). No ponto D, quando a carga tangencial é nula, nota-se a presença de tensões superficiais de cisalhamento não nulas. Isso mostra que o fenômeno de contato com atrito é um processo irreversível e, portanto, dependente da história de carregamento. Dessa forma, o princípio da superposição tem de ser aplicada com cuidado em problemas que envolvam contato com atrito.

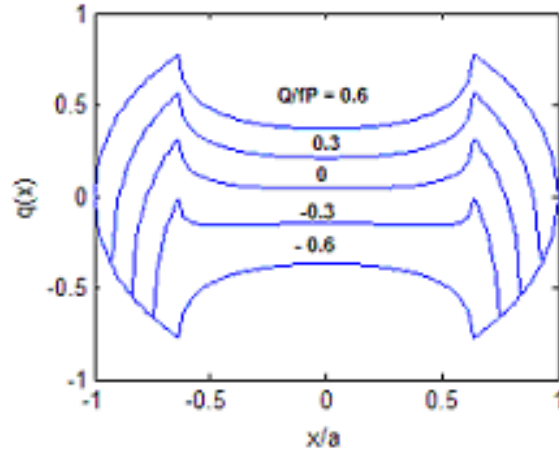


Figura 2.7: Distribuição de tensão cisalhante superficial para um problema de contato plano

entre cilindros com  $|Q_{\max}/fP| \leq 0,6$ .

### 2.2.3 CARGA REMOTA DE FADIGA

Se uma carga remota de fadiga  $\sigma_B$  é aplicada em fase com a carga tangencial, verifica-se um deslocamento da zona de adesão,  $e$ , nos pontos de pico e vale do carregamento, ou  $e'$ , durante o descarregamento ou recarregamento, é verificado. As expressões para esses deslocamentos são mostradas a seguir:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sigma_{\max}}{4fp_0}, \quad (2.20)$$

$$\frac{e'}{a} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma}{8fp_0}. \quad (2.21)$$

onde  $\sigma_{\max}$  é o valor máximo da história da carga de fadiga.

A Fig. (2.8) mostra claramente o deslocamento na zona de adesão devido a presença da carga remota. Cabe notar que as expressões acima são válidas apenas para pequenos valores da carga de fadiga ou, em outros termos, as condições  $e+c < a$  e  $e'+c' < a$  devem ser satisfeitas.

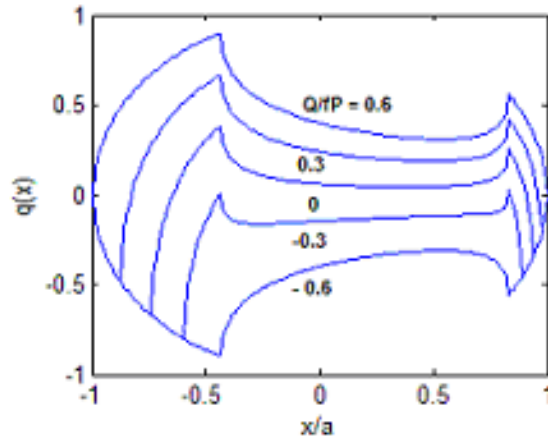


Figura 2.8: Efeito da carga remota média na distribuição de tensão cisalhante superficial para um problema de contato plano entre cilindros com  $|Q_{\max}/fP| \leq 0,6$  e  $|\sigma_B/p_o| \leq 0,59$ .

## 2.2.4 CAMPO DE TENSÃO NA REGIÃO DO CONTATO

O campo de tensão resultante pode ser obtido pela superposição dos campos de tensões provocados por  $p(x)$  e  $q(x)$ , levando-se em conta os termos de perturbação  $q'(x)$  e  $q''(x)$ . Quatro combinações de superposição serão necessárias para compor o campo de tensão nos estados de carregamento máximo, mínimo, descarregamento e recarregamento. Estes tensores podem ser avaliados na condição de estado plano de deformação usando-se os potenciais de Muskhelishvili (Muskhelishvili, 1953, Hills et al., 1993). Essa é uma análise clássica e complexa para a solução do problema de contato entre cilindros planos. Maiores detalhes sobre as equações para o cálculo do campo de tensão podem ser verificados no Anexo II do presente trabalho, ou então nas referências associadas. Tomando a componente adimensionalizada  $\sigma_{xx}/p_o$  como exemplo, tem-se que:

- Carga máxima

$$\frac{\sigma_{xx}(x, y)}{p_o} = \left( \frac{\sigma_{xx}^n \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_o} \right) + f \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{fp_o} \right) - f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{fp_o} \right) + \frac{\sigma_B}{p_o}. \quad (2.22)$$

- Descarregamento

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}(x, y)}{p_o} = & \left( \frac{\sigma_{xx}^n \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_o} \right) - f \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{fp_o} \right) + 2f \frac{c'}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e'}{c'}, \frac{y}{c'} \right)}{fp_o} \right) - \\ & - f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{fp_o} \right) + \frac{\sigma_B}{p_o}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Carga mínima

$$\frac{\sigma_{xx}(x, y)}{p_o} = \left( \frac{\sigma_{xx}^n \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_o} \right) - f \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{fp_o} \right) + f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{fp_o} \right) + \frac{\sigma_B}{p_o}. \quad (2.24)$$

- Recarregamento

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}(x, y)}{p_o} = & \left( \frac{\sigma_{xx}^n \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_o} \right) + f \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{fp_o} \right) - 2f \frac{c'}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e'}{c'}, \frac{y}{c'} \right)}{fp_o} \right) + \\ & + f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{xx}^t \left( \frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{fp_o} \right) + \frac{\sigma_B}{p_o}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde os sobrescritos  $n$  e  $t$  referem-se aos tensores de tensão produzidos pelos carregamentos normal e tangencial, respectivamente.

No cálculo do tensor das tensões deve-se prestar atenção em dois aspectos:

- 1) Prevenir para que as cargas aplicadas, em qualquer instante de tempo  $t$ , não provoquem um regime de escorregamento total na região de contato e nem escorregamento reverso, ou seja, deve-se introduzir na rotina computacional utilizada critérios de parada de modo a garantir que:

$$\left| \frac{Q}{fP} \right| < 1 \quad (2.26)$$

$$\frac{c}{a} + \frac{e}{a} \leq 1 \quad (2.27)$$

- 2) As tensões não devem produzir o escoamento do material.

## 3 MODELOS PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA MULTIAXIAL

### 3.1 INTRODUÇÃO

Existem vários exemplos práticos de componentes mecânicos submetidos a histórias de carregamento multiaxial. A fuselagem de uma aeronave, por exemplo, está submetida a um tipo de carregamento multiaxial causado pela pressurização e despressurização. Vasos de pressão e tubulações, devido a pressão interna, encontram-se submetidos a um estado de tensão biaxial, enquanto eixos de transmissão de veículos estão sujeitos a carregamento combinados de flexão e torção.

### 3.2 MODELOS LOCAIS PARA FADIGA MULTIAXIAL

Modelos para o limite de fadiga multiaxial procuram generalizar a descrição do fenômeno de vida infinita em fadiga uniaxial para casos de carregamentos multiaxiais. No contexto uniaxial o limite de resistência é convencionado como a amplitude da história de tensão abaixo do qual não há o aparecimento de trincas macroscópicas após um grande número de ciclos (tipicamente, acima de  $10^6$  ciclos). A generalização deste conceito para o caso multiaxial é feita assumindo-se a existência de um domínio de resistência à fadiga envolvendo histórias de tensão multiaxiais. A formulação geral destes modelos pode ser escrita na forma

$$F(\tau_a, \sigma_n) \leq 0, \quad (3.1)$$

onde  $\tau_a$  é uma medida associada a amplitude das tensões cisalhantes,  $\sigma_n$  é uma medida associada as tensões normais e a função  $F(\cdot)$  descreve a relação entre essas medidas. Modelos descritos pela Eq. (3.1) serão denominados *locais*, pois são aplicados em pontos materiais do componente. A diferença entre os vários modelos de fadiga propostos na literatura é a maneira como são definidas as medidas  $\tau_a$  e  $\sigma_n$ .

As abordagens baseadas no conceito de plano crítico (Socie & Marquis, 2000) consideram que as trincas de fadiga têm origem em determinados planos materiais, onde as combinações de tensões ou deformações cisalhantes e normais são mais severas.



Neste contexto, as medidas  $\tau_a$  e  $\sigma_n$  são calculadas considerando-se respectivamente as tensões cisalhantes e normais que atuam nos planos materiais. Cabe notar que modelos deste tipo são capazes de prever não só a resistência do material à fadiga e o local de iniciação da trinca, como também o plano de iniciação da trinca, chamado *plano crítico*. Dentre os modelos de plano crítico mais conhecidos, podem-se citar os propostos por Brown & Miller (1973), McDiarmid (1974 e 1991), Mataka (1977), Socie (1987), Fatemi & Socie (1988) e Susmel & Lazzarin (2002).

Uma outra abordagem para a formulação dos modelos de fadiga define a amplitude das tensões cisalhantes,  $\tau_a$ , a partir de uma medida associada a amplitude da história do tensor das tensões desviadoras, enquanto a medida  $\sigma_n$  é definida como sendo o valor máximo da tensão hidrostática ao longo da história de carregamento. Crossland (1956) define a amplitude das tensões cisalhantes como sendo o raio da menor esfera que envolve a história das tensões desviadoras. Uma forte crítica a esse modelo é a sua incapacidade de diferenciar o dano por fadiga produzido por histórias de tensões proporcionais e não-proporcionais. Por este motivo, novas propostas para a amplitude das tensões desviadoras foram propostas: Bin Li et al. (2000) define  $\tau_a$  a partir da norma euclidiana associada aos semi-eixos da menor elipse que circunscreve as tensões desviadoras; Mamiya & Araújo (2002), por sua vez, propuseram uma medida para a amplitude das tensões cisalhantes baseada no valor máximo da norma euclidiana associada aos semi-eixos de todos os envelopes prismáticos que envolvem a história das tensões desviadoras.

Neste trabalho serão considerados os modelos de fadiga multiaxiais propostos por Susmel & Lazzarin (2002), que é baseada no conceito de plano crítico, e por Mamiya e Araújo (2002), formulado no espaço das tensões desviadoras.

### **3.3 MODELOS NÃO-LOCAIS PARA FADIGA MULTIAXIAL**

Na grande maioria dos problemas de fadiga, a iniciação de trincas acontece em regiões onde há a presença de gradientes de tensão, tais como em entalhes e contatos mecânicos. Sabe-se, a partir dos trabalhos pioneiros realizados por Neuber (1958) e Peterson (1959), que modelos de fadiga locais fornecem estimativas muito conservativas para o limite de fadiga. Neste contexto, surgiram os chamados modelos

de fadiga não-locais que assumem que a resistência a fadiga depende de uma média das tensões em um volume finito de material ao invés de um ponto material.

Taylor (1999) propôs uma nova metodologia para a formulação não-local de modelos de fadiga, chamada Teoria da Distância Crítica (TDC). A novidade deste método reside no procedimento para identificação do tamanho do volume de material considerando o ensaio da Mecânica da Fratura para determinação do limiar de propagação de uma trinca. Embora seja possível formular este modelo considerando uma média volumétrica das tensões, Taylor (1999) propôs modelos simplificados (de engenharia) onde a média volumétrica é substituída por uma média em uma linha (Método da Linha) ou, simplesmente, considerando a aplicação do critério de fadiga em um ponto a uma certa distância do ponto mais solicitado do componente (Método do Ponto).

Neste trabalho será adotado o Método do Ponto, que pode ser formulado como

$$F(\tau_a, \sigma_n) \leq 0 \quad em \quad x = L_c, \quad (3.2)$$

onde  $\tau_a$  e  $\sigma_n$  são definidos da mesma forma que na expressão (3.1), porém o modelo é aplicado a uma distância  $L_c$ , chamada *distância crítica*, do ponto mais solicitado do componente (usualmente denominado *hot spot*). A Fig. (3.1) ilustra a aplicação desse modelo em um componente entalhado.

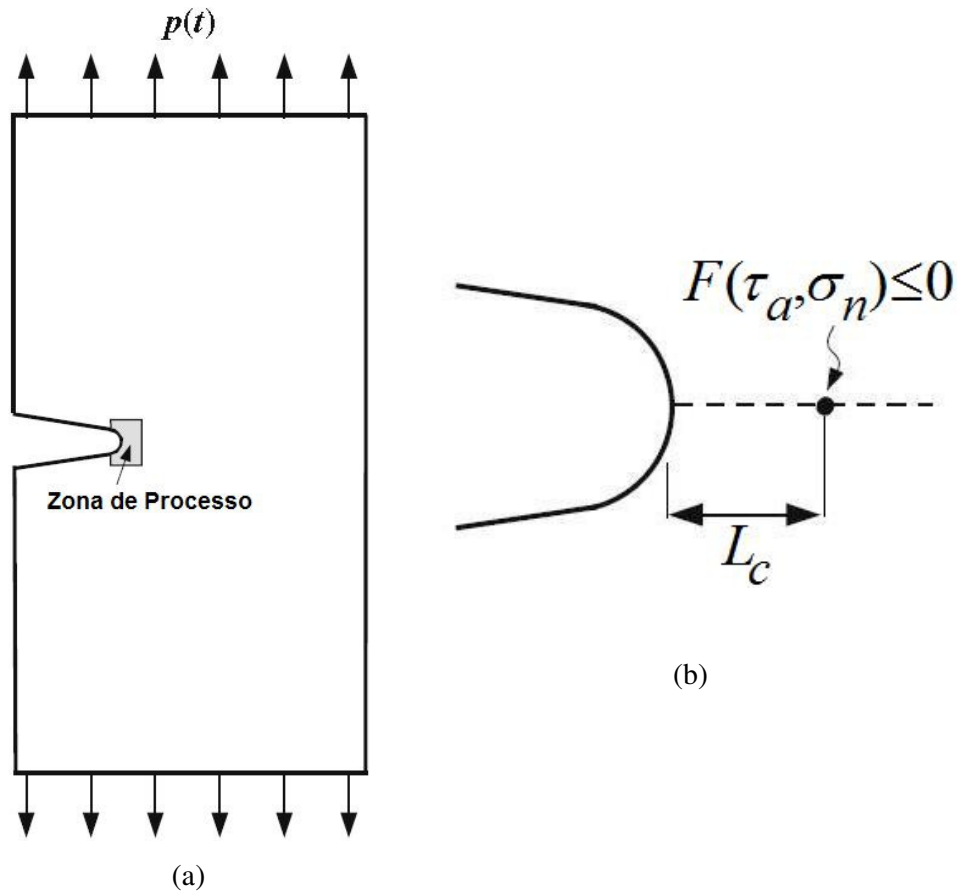


Figura 3.1: (a) Componente com entalhe submetido a um carregamento cíclico e (b) aplicação de um modelo de fadiga multiaxial considerando o Método do Ponto.

### 3.3.1 FORMULAÇÃO NÃO-LOCAL DO MODELO DE FADIGA DE SUSMEL-LAZZARIN

Esta seção apresenta inicialmente o modelo para o limite de fadiga multiaxial proposto por Susmel & Lazzarin (2002). Em seguida, uma formulação não-local para este modelo é apresentada tendo como base os trabalhos de Susmel (2004) e Castro et al. (2008).

O modelo de Susmel-Lazzarin (SL) baseia-se no conceito de plano crítico. De acordo com esta abordagem, em nível de tamanho de grão, o estado de tensão cíclico leva à formação de bandas de escorregamento persistente paralelas à um certo plano denominado *plano de escorregamento*. Após certo número de ciclos, devido aos efeitos de concentração de tensão causados pela presença de intrusões, ocorre a iniciação de

uma micro-trinca, causada predominantemente por tensões cisalhantes. Considerando-se agora um agregado de grãos é possível assumir que, de um ponto de vista estatístico, o plano material de iniciação da trinca – denominado *plano crítico* – coincide com o plano de escorregamento. Com base nesta hipótese, e considerando-se que tensões macroscópicas são puramente elásticas, assume-se que o plano crítico é que aquele que possui a maior amplitude associada à história do vetor tensão cisalhante em um plano material.

Tendo em vista a formulação do presente modelo, introduziremos agora algumas definições. O vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , expresso em coordenadas esféricas, é escrito como

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

O vetor tensão de Cauchy  $\mathbf{T}$  neste plano é

$$\mathbf{T}(t, \phi, \theta) = \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  é o tensor tensão de Cauchy em um instante  $t$ . A tensão normal a este plano é obtida pelo produto escalar de  $\mathbf{T}(t)$  por  $\mathbf{n}$ :

$$\sigma(t, \phi, \theta) = \mathbf{T}(t, \phi, \theta) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.5)$$

Por sua vez, o vetor tensão cisalhante é obtido pela expressão

$$\boldsymbol{\tau}(t, \phi, \theta) = \mathbf{T}(t, \phi, \theta) - \sigma_n \mathbf{n}. \quad (3.6)$$

A amplitude das tensões cisalhantes  $\tau_a(\phi, \theta)$  em um plano material é definida como o raio da menor circunferência que envolve a história do vetor tensão cisalhante. Neste trabalho, o cálculo deste raio foi realizado utilizando o algoritmo proposto por Dang Van (1989) (veja **Anexo IX**).

O modelo de fadiga de Susmel-Lazzarin assume que o plano crítico, denotado por  $(\phi^*, \theta^*)$ , é aquele onde o valor de  $\tau_a(\phi, \theta)$  é máximo:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) = \max_{\phi, \theta} (\tau_a(\phi, \theta)). \quad (3.7)$$

Para incorporar o efeito das tensões normais na resistência à fadiga, Susmel e Lazzarin consideraram a tensão normal máxima,  $\sigma_{n,\max}$ , que ocorre no plano crítico. Finalmente, assumiu-se que a relação entre a amplitude das tensões cisalhantes e a tensão normal máxima, na condição de limite de fadiga é dada por

$$F(\tau_a, \sigma_n) := \tau_a(\phi^*, \theta^*) + \kappa \rho(\phi^*, \theta^*) - \lambda = 0, \quad (3.8)$$

onde  $\kappa$  e  $\lambda$  são parâmetros materiais e  $\rho$  é definido como

$$\rho = \frac{\sigma_{n,\max}}{\tau_a}. \quad (3.9)$$

A Fig. (3.2) ilustra as definições apresentadas acima.

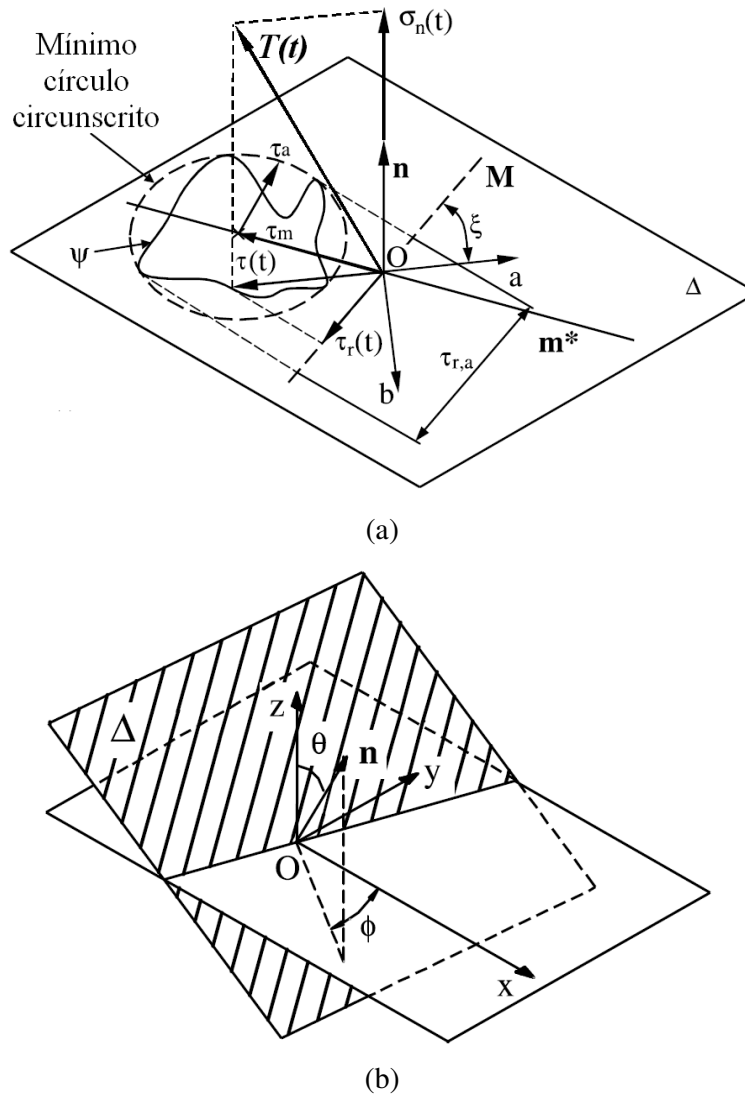


Figura 3.2: (a) Plano Material  $\Delta$  e vetor tensão de Cauchy  $\mathbf{T}(t)$  e (b) rotação do plano.

No presente trabalho foi feita uma modificação do modelo original com o objetivo de verificar a existência de planos materiais com valores próximos da amplitude da tensão de cisalhamento máximo. Adotou-se uma tolerância de 1% de  $\tau_a(\phi^*, \theta^*)$ , de modo que se pudessem observar as diferenças significativas para os valores dos campos de tensão, a depender do valor da máxima tensão normal (veja o algoritmo correspondente no **Anexo IX**).

No que se segue, será apresentada uma estratégia para identificação dos parâmetros materiais da formulação não-local do modelo de Susmel-Lazzarin conforme o Método do Ponto apresentado na Seção 3.1.2. Com efeito, este modelo requer a identificação de três parâmetros materiais,  $\kappa$ ,  $\lambda$  e  $L_c$ , que serão identificados por meio de ensaios uniaxiais, completamente reversível e com tensão média, e do ensaio de limiar de propagação de trinca.

Para o ensaio uniaxial completamente reversível, com limite de fadiga denotado por  $\sigma_{-1}$ , a história de tensões é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{-1} \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Neste caso, as medidas da amplitude de tensão cisalhante e máxima tensão normal valem, respectivamente,

$$\begin{aligned} \tau_a &= 0.5\sigma_{-1}, \\ \sigma_{n,\max} &= 0.5\sigma_{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

cuja substituição no modelo (3.8) fornece

$$0.5\sigma_{-1} + \kappa - \lambda = 0. \quad (3.12)$$

Para um ensaio de tração com carregamento flutuante, com amplitude  $\tilde{\sigma}_a$  e tensão média  $\tilde{\sigma}_m$ , a história de tensões é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

e as medidas de tensões equivalentes valem

$$\begin{aligned}\tau_a &= 0.5\tilde{\sigma}_a, \\ \sigma_{n,\max} &= 0.5(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a),\end{aligned}\tag{3.14}$$

cuja substituição no modelo (3.8) fornece

$$0.5\tilde{\sigma}_a + \kappa \frac{(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a)}{\tilde{\sigma}_a} - \lambda = 0.\tag{3.15}$$

Por fim, resolvendo o sistema formado pelas Eqs. (3.12) e (3.15) obtém-se os seguintes parâmetros:

$$\kappa = 0.5\tilde{\sigma}_a (\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_a) / \tilde{\sigma}_m;\tag{3.16}$$

$$\lambda = \kappa + 0.5\sigma_{-1}.\tag{3.17}$$

A seguir, será considerada a identificação do parâmetro material utilizando um ensaio de limiar de propagação de uma trinca submetida a um carregamento flutuante em modo I. Neste ensaio, o fator de intensidade de tensão é dado por

$$2K_I(t) = \frac{1+R}{1-R} \Delta K_I + \Delta K_I \text{sen}(\omega t),\tag{3.18}$$

onde  $R = K_{I,\min} / K_{I,\max}$  é a razão de carregamento e  $\Delta K_I$  é a faixa de variação do fator de intensidade de tensão. O valor limiar de propagação de uma trinca, observado experimentalmente, será denotado por  $\Delta K_{th}^{Exp}$ .

A história de tensão a uma distância  $L_c$  da ponta da trinca é (veja, e. g., Anderson, 1995):

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+R}{1-R} + \text{sen}(\omega t) \right] \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi L_c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.19}$$

Neste caso, as medidas de tensões equivalentes valem

$$\tau_a = \frac{1}{4} \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi \ell}}, \quad \rho = \frac{2}{1-R},\tag{3.20}$$

cuja substituição na expressão (3.8) fornece a seguinte estimativa teórica para o limiar de propagação de uma trinca:

$$\Delta K_{th}^{Teor}(R) = 4 \left( \lambda - \frac{2\kappa}{1-R} \right) \sqrt{2\pi L_c}.\tag{3.21}$$

Por fim, impondo que esta estimativa é igual ao valor obtido experimentalmente, isto é,

$$\Delta K_{ih}^{Teor} = \Delta K_{ih}^{Exp}, \quad (3.22)$$

obtém-se a seguinte expressão para a distância crítica:

$$L_c = \frac{1}{32\pi} \left[ \frac{1-R}{\lambda(1-R)-2\kappa} \right] (\Delta K_{ih}^{Exp})^2. \quad (3.23)$$

### 3.3.2 FORMULAÇÃO NÃO-LOCAL DO MODELO DE FADIGA DO ENVELOPE PRISMÁTICO

Esta Seção apresenta o modelo de limite de fadiga multiaxial proposto por Mamiya e colaboradores em Mamiya & Araújo (2002) e Mamiya et al. (2009).

Em primeiro lugar serão introduzidas algumas definições. A história do tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  admite a decomposição aditiva

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{S}(t) + \sigma_h(t)\mathbf{I}, \quad (3.24)$$

onde a tensão hidrostática  $\sigma_h(t)$  é definida por

$$\sigma_h(t) = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{1}{3} [\sigma_{xx}(t) + \sigma_{yy}(t) + \sigma_{zz}(t)], \quad (3.25)$$

sendo  $tr(\boldsymbol{\sigma}(t))$  o traço do tensor tensão; o tensor desviador  $\mathbf{S}(t)$  é calculado segundo

$$\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - \sigma_h(t)\mathbf{I}, \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

É conveniente representar o tensor desviador com relação a seguinte base:



$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
(3.27)

Note que esta base é ortonormal segundo o produto escalar usual entre matrizes ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}$ ). Considerando-se esta base, o tensor desviador é escrito como

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^5 s_i(t) \mathbf{N}_i,$$
(3.28)

onde

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{xx}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2\sigma_{xx}(t) - (\sigma_{yy}(t) + \sigma_{zz}(t))],$$

$$s_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{yy}(t) - S_{zz}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}),$$

$$s_3(t) = \sqrt{2} S_{xy}(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t),$$

$$s_4(t) = \sqrt{2} S_{xz}(t) = \sqrt{2} \tau_{xz}(t),$$

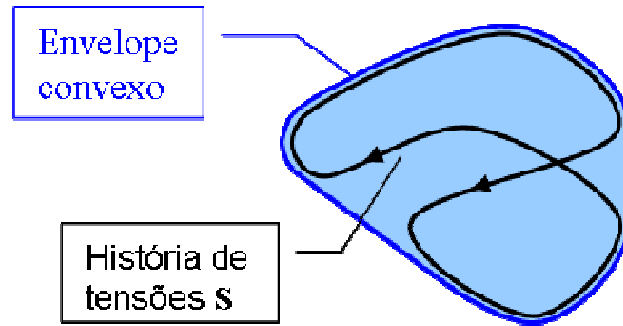
$$s_5(t) = \sqrt{2} S_{yz}(t) = \sqrt{2} \tau_{yz}(t).$$
(3.29)

O presente modelo assume que o limite de fadiga multiaxial é dado pela expressão

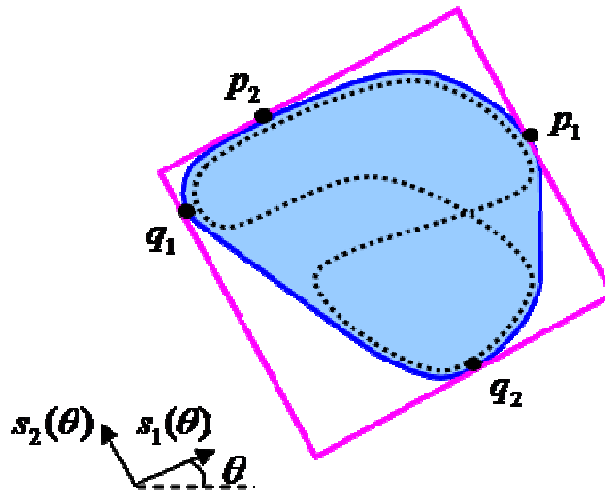
$$F(\tau_a, \sigma_n) := \tau_a + \kappa \sigma_{h,max} - \lambda = 0,$$
(3.30)

onde  $\tau_a$  é chamado *amplitude da tensão cisalhante*,  $\sigma_{h,max}$  é o valor máximo da história da tensões hidrostáticas, enquanto  $\kappa$  e  $\lambda$  são parâmetros materiais. A característica fundamental deste modelo é a utilização de uma nova medida para a amplitude da tensão cisalhante baseada no *maior envelope prismático* associado a história das tensões desviadoras, cuja formulação é apresentada a seguir.

Em analogia com a definição da amplitude de solicitações uniaxiais, uma medida de amplitude de tensão para carregamentos multiaxiais deve contemplar a idéia de tamanho da história de tensões  $\sigma(t)$ . Seja  $\mathbf{S}(t)$  a projeção de  $\sigma(t)$  sobre o espaço das tensões desviadoras, tal como ilustrado na Fig. (3.3a) e seja um envelope convexo correspondente (isto é, o menor conjunto convexo contendo todos os pontos de  $\mathbf{S}(t)$ ).



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) História das tensões desviadoras  $\mathbf{S}(t)$  e o envelope convexo correspondente; (b) envelope prismático com orientação  $\theta$  e os pontos de tangência  $p_i, q_i$ .

No presente estudo assume-se que apenas os estados de tensão de  $\sigma(t)$  pertencentes ao contorno do envelope convexo precisam ser considerados para a determinação do “tamanho” da história das tensões desviadoras  $\mathbf{S}(t)$ . Esses estados de tensão podem ser caracterizados como se segue: considere um envelope prismático com orientação arbitrária  $\theta$  circunscrevendo a história de tensões, tal como ilustrado na Fig.

(3.3b). A história das tensões desviadoras  $\mathbf{S}(t)$  é tangente ao prisma retangular nos seguintes pontos pertencentes ao contorno do envelope convexo (veja Fig. 3.3):

$$\begin{aligned} p_i(\theta) = \mathbf{S}(t_{p,i}^*) \quad t_{p,i}^*(\theta) = \arg \max_t s_i(\theta, t) \quad i = 1, \dots, 5, \\ q_i(\theta) = \mathbf{S}(t_{q,i}^*) \quad t_{q,i}^*(\theta) = \arg \min_t s_i(\theta, t) \quad i = 1, \dots, 5, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $s_i(\theta, t)$  representa a  $i$ -ésima componente da tensão desviadora  $\mathbf{S}$ , no instante  $t$ , descrita em termos de uma base com orientação  $\theta$ . Considerando-se todas as possíveis orientações  $\theta$  do envelope prismático (no contexto do espaço desviador 5-dimensional) recupera-se através da identificação dos pontos  $p_i(\theta)$  e  $q_i(\theta)$  pertencentes ao contorno do envelope convexo. Assim, é estabelecida uma relação direta entre o envelope convexo e os envelopes prismáticos que o circunscrevem. O próximo passo consiste em definir, para cada orientação  $\theta$  do envelope prismático, a  $i$ -ésima componente  $a_i(\theta)$  da amplitude da história de tensões segundo

$$a_i(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \max_t s_i(\theta, t) - \min_t s_i(\theta, t) \right]. \quad (3.32)$$

Finalmente, a amplitude da tensão cisalhante é definida por

$$\tau_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)}. \quad (3.33)$$

Assim como no modelo de Susmel-Lazzarin, no que se segue será apresentada uma estratégia para identificação dos parâmetros materiais,  $\kappa$ ,  $\lambda$  e  $L_c$  considerando a formulação não-local para o modelo do Envelope Prismático (*PRH*). Para isso consideram-se os ensaios uniaxiais, completamente reversível e com tensão média, e o ensaio de limiar de propagação de trinca em modo I.

Para o ensaio uniaxial completamente reversível, com limite de fadiga denotado por  $\sigma_{-1}$ , a história de tensões é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{-1} \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Neste caso, conforme definido nas Eqs (3.27), (3.28) e (3.29), as componentes da tensão desviadora  $\mathbf{S}(t)$  valem

$$s_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_{-1} \sin(\omega t), \quad (3.35)$$

$$s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

Assim, de acordo com a Eq. (3.32) obtém-se a componente referente à amplitude da história de tensões:

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_{-1}. \quad (3.36)$$

Dessa forma, as medidas da amplitude de tensão cisalhante equivalente e máxima tensão hidrostática valem, respectivamente,

$$\tau_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}, \quad (3.37)$$

$$\sigma_{h,\max} = \frac{1}{3} \sigma_{-1},$$

cujas substituições no modelo (3.30) fornece

$$\frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}} + \kappa \frac{1}{3} \sigma_{-1} - \lambda = 0. \quad (3.38)$$

Para um ensaio uniaxial com carregamento flutuante, com amplitude  $\tilde{\sigma}_a$  e tensão média  $\tilde{\sigma}_m$ , a história de tensões é dada por

$$\mathbf{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

As componentes da tensão desviadora  $\mathbf{S}(t)$  valem

$$s_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} (\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a \sin(\omega t)), \quad (3.40)$$

$$s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0,$$

e o valor para a componente  $a_1$  é

$$a_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \tilde{\sigma}_a. \quad (3.41)$$

Assim, as medidas das tensões equivalentes valem

$$\begin{aligned}\tau_a &= \frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{3}}, \\ \sigma_{h,\max} &= \frac{1}{3}(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a),\end{aligned}\tag{3.42}$$

cuja substituição no modelo (3.30) fornece

$$\frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{3}} + \kappa \frac{1}{3}(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a) - \lambda = 0.\tag{3.43}$$

Resolvendo, por fim, o sistema formado pelas Eqs. (3.38) e (3.43) obtém-se os seguintes parâmetros:

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}(\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_a)}{(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a - \sigma_{-1})};\tag{3.44}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{-1}\tilde{\sigma}_m}{\sqrt{3}(\tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_a - \sigma_{-1})}.\tag{3.45}$$

Da mesma forma como feito anteriormente para o modelo SL, a seguir será considerado a identificação do parâmetro material utilizando um ensaio de limiar de propagação de uma trinca submetida a um carregamento flutuante em modo I. Neste ensaio, o fator de intensidade de tensão é dado por

$$2K_I(t) = \frac{1+R}{1-R}\Delta K_I + \Delta K_I \text{sen}(\omega t),\tag{3.46}$$

e a história de tensão a uma distância  $L_c$  da ponta da trinca é:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+R}{1-R} + \text{sen}(\omega t) \right] \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi L_c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.47}$$

Sendo assim, neste caso as medidas de tensões equivalentes valem

$$\begin{aligned}\tau_a &= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi \ell}}, \\ \sigma_{h,\max} &= \frac{2}{3(1-R)} \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi \ell}},\end{aligned}\tag{3.48}$$

cuja substituição na expressão (3.30) fornece a seguinte estimativa teórica para o limiar de propagação de uma trinca:

$$\Delta K_{th}^{Teor}(R) = \frac{6\lambda}{\sqrt{3+4\kappa(1-R)^{-1}}} \sqrt{2\pi L_c}. \quad (3.49)$$

Impondo que esta estimativa é igual ao valor obtido experimentalmente,

$$\Delta K_{th}^{Teor} = \Delta K_{th}^{Exp}, \quad (3.50)$$

obtém-se a seguinte expressão para a distância crítica:

$$L_c = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{3+4\kappa(1-R)^{-1}}}{6\lambda} \right]^2 (\Delta K_{th}^{Exp})^2. \quad (3.51)$$

## 4 O DISPOSITIVO DE *FRETTING* DO ENM/UnB

Na realização da parte experimental deste trabalho utilizou-se o dispositivo de *fretting* projetado por Martins (2008) que adota uma configuração de contato clássica, como ilustrado na Fig. (4.1). Dessa forma, as equações governantes do processo de fadiga por *fretting* podem ser resolvidas analiticamente e, assim, a análise torna-se mais ágil, acurada e também mais fácil de reproduzir.

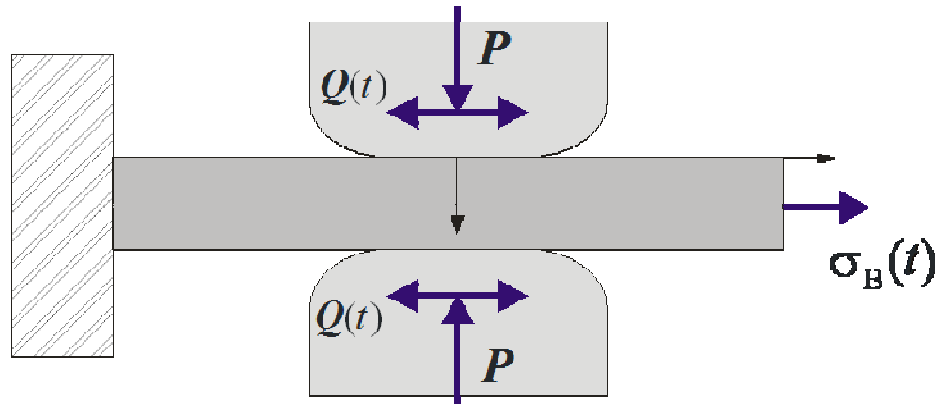


Figura 4.1: Configuração idealizada do problema de fadiga por *fretting*.

Na realização dos ensaios o dispositivo é montado em uma base acoplada a máquina MTS 810 de ensaios universais. Para isso, um Corpo de Prova (CP) foi projetado tomando-se por base o curso do atuador da Máquina MTS e seu custo econômico, pois sabe-se de antemão que ligas de alumínio aeronáutico possuem um preço bem elevado e são difíceis de encontrar no mercado. Na definição do raio das sapatas cilíndricas levou-se em consideração a faixa de operação das cargas normais e sem violar a formulação de semi-plano infinito. A configuração, montagem e alinhamento do CP e das sapatas são ilustradas na Fig. (4.2).

Neste aparato, mostrado na Fig. (4.3), a carga  $P$  é aplicada por pistões hidráulicos, acionados por uma bomba manual e um acumulador de pressão conectado ao circuito hidráulico, o que confere maior confiabilidade na aplicação da carga normal do que molas, eliminando fontes de erro secundárias. A tensão remota  $\sigma_B$  é aplicada pelo atuador hidráulico da máquina MTS 810. A aplicação da carga normal juntamente a uma carga oscilante de fadiga no corpo de prova de tração faz surgir na superfície do espécime uma carga cisalhante  $Q$  também oscilante. A monitoração da carga  $Q$  é feita

tomando-se a diferença das indicações de força entre as células de carga superior e inferior, instaladas nas garras da máquina MTS.

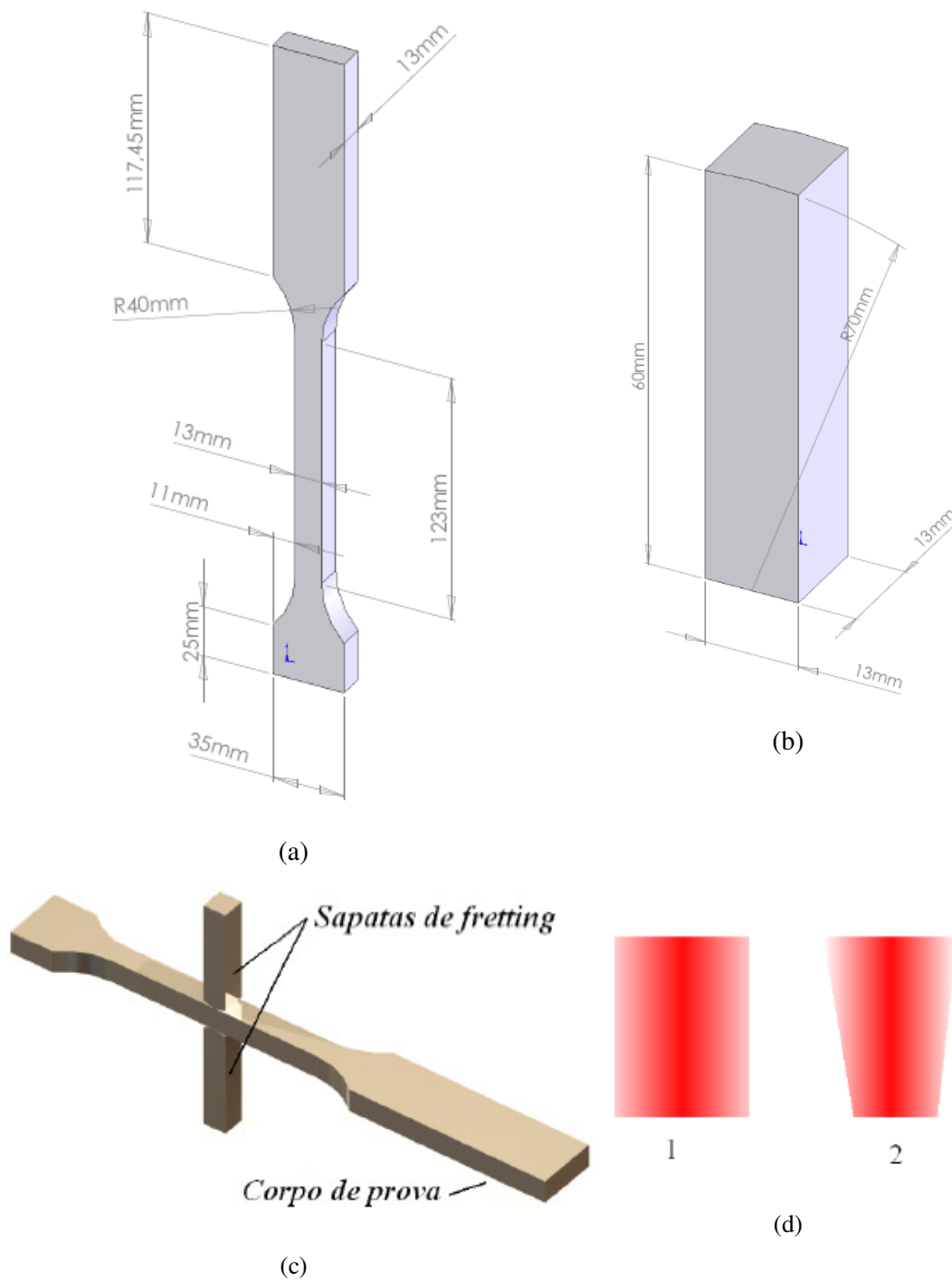
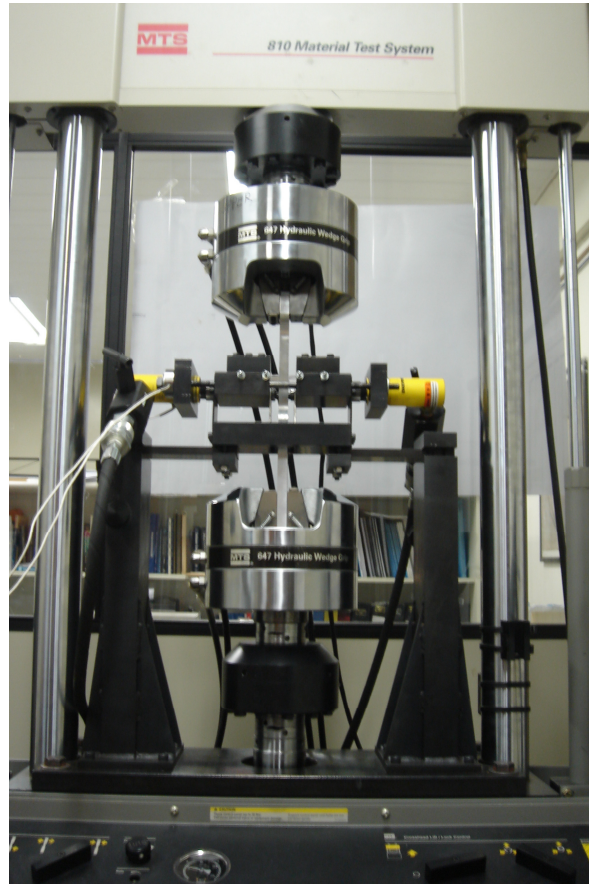
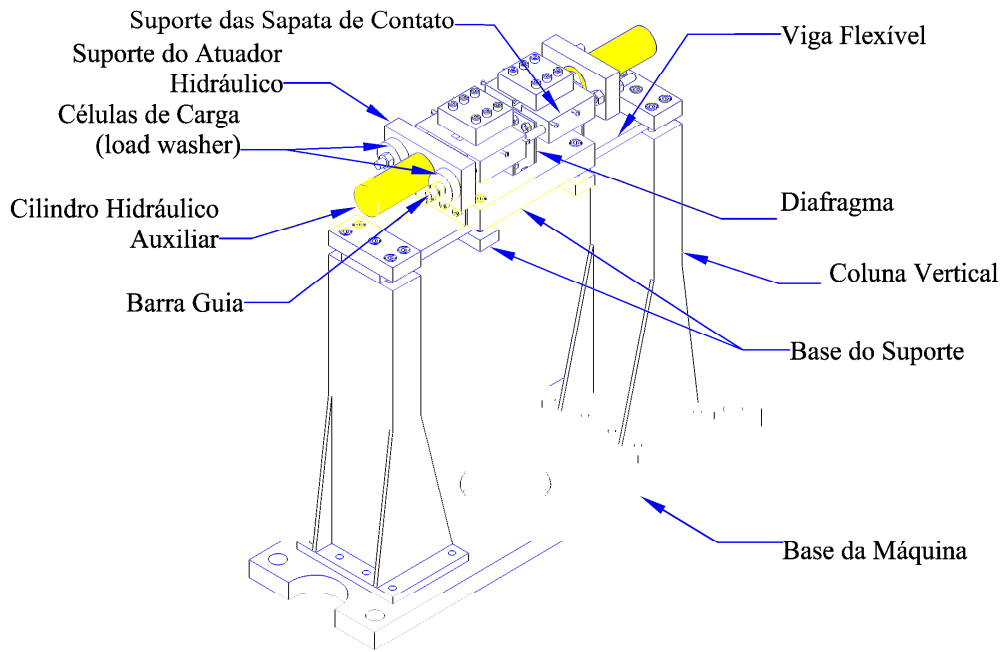


Figura 4.2. (a) Corpo de Prova tipo *dog bone* , (b) sapata cilíndrica de *fretting*, (c). montagem do CP e sapatas e (d). marcas do alinhamento das sapatas: 1- alinhado; 2- desalinhado.





(a)



(b)

Figura 4.3: (a) Dispositivo de *fretting* do ENM/UnB e (b) seus componentes.

A base do dispositivo é feita em uma chapa de aço, suficientemente robusta, acoplada por parafusos à mesa da máquina de ensaios universais. As colunas verticais funcionam como elementos de tração, possuindo cantoneiras em suas bases de forma a impedir sua flexão lateral.

As vigas flexíveis são fixadas à base do suporte e a parte superior das colunas verticais. Na base do suporte estão fixados os diafragmas flexíveis que ligam o suporte da base ao suporte das sapatas de contato. Os suportes da base e das sapatas são considerados rígidos em sua concepção. Para alinhar as sapatas de contato com o corpo de prova utiliza-se um sistema de parafusos de passo fino, situados na lateral da base das sapatas, em ambos os lados.

O sistema hidráulico auxiliar é formado por uma bomba manual, um acumulador de pressão com manômetro acoplado, uma mangueira Y, um par de válvulas de retenção de refluxo e um par de cilindros hidráulicos, como mostrado na Fig. (4.4).



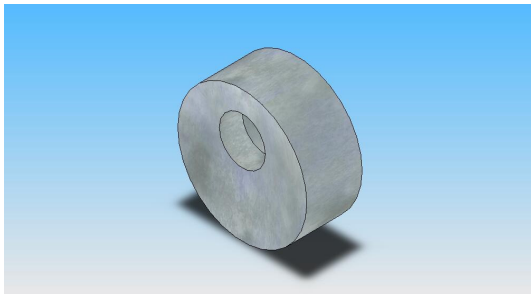
(a)



(b)

Figura 4.4: Sistema hidráulico auxiliar: (a) Bomba manual (em amarelo) e acumulador de pressão (em preto); (b) Cilindro auxiliar (em amarelo) e válvula de retenção (em preto).

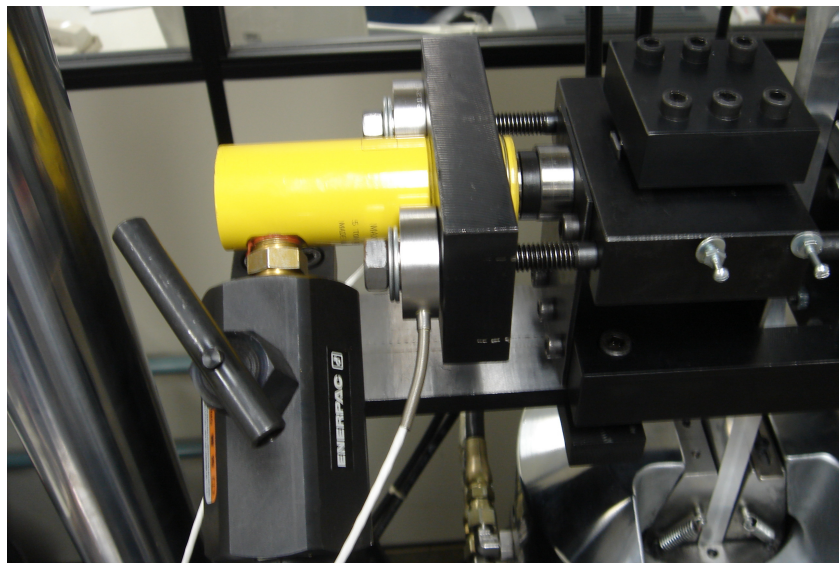
Para se obter uma melhor distribuição de pressão no suporte das sapatas, foi projetado um calço circular com raio externo de 28 mm e um furo de 10 mm com excentricidade de 4,5 mm do centro da peça. Para monitoramento da carga  $P$  aplicada pelas sapatas ao corpo de prova foram instaladas duas células de carga, ou *load washers*, de baixa capacidade ( $1000\text{ lbf} \approx 4,45\text{ kN}$ ) da Interface. Essas células de carga são conectadas a um sistema de aquisição de dados, ADS 2000 da Lynx Tecnologia, e fazem a medição da força resistente atuante nas barras guias, descontadas as perdas, devido à aplicação da carga  $P$  no suporte das sapatas. Estes itens podem ser observados na Fig. (4.5).



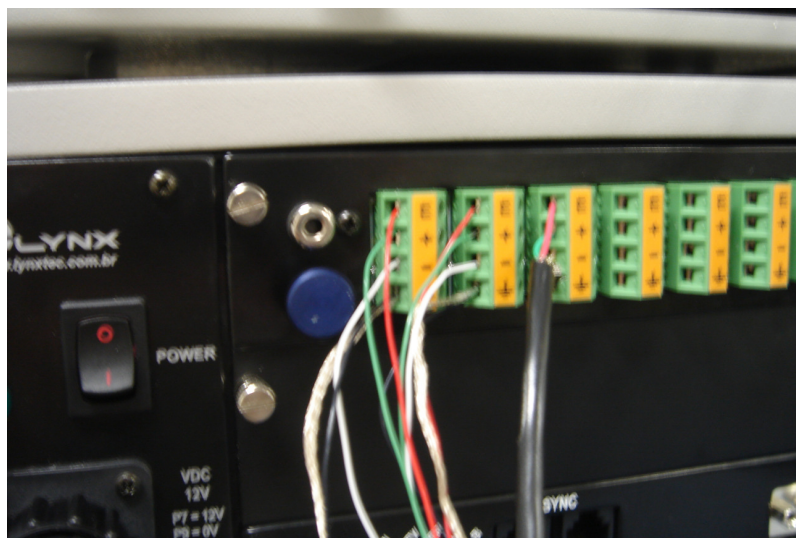
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.5: Aplicação da carga de pressão: (a) Calço; (b) *Load Washer* de 1000 lbf da Interface; (c) Calço e *Load Washer* montadas no dispositivo; (d) Sistema de aquisição de dados (ADS 2000 Lynx).

As cargas envolvidas no teste são esquematizadas na Fig. (4.6) a seguir, lembrando:

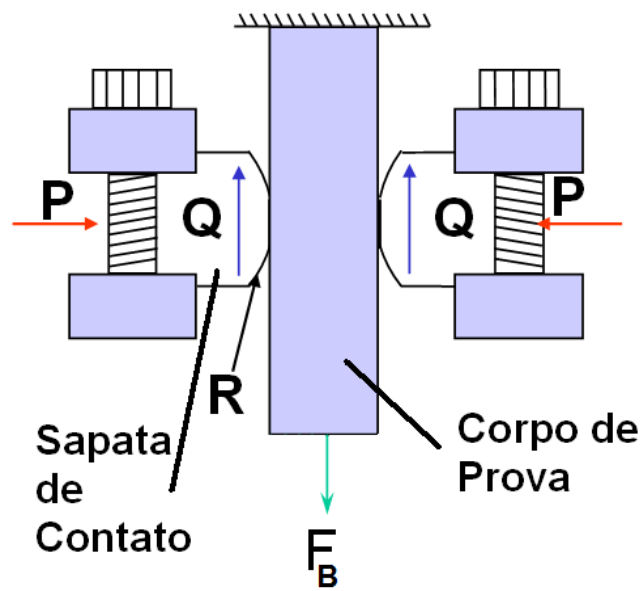
$P$ : Carga normal, aplicada pelos cilindros hidráulicos;

$Q$ : Carga de cisalhamento, originada pela reação do dispositivo ao deslocamento do contato;

$F_B$ : Carga remota de fadiga aplicada pelo atuador hidráulico da máquina de ensaios universais.



(a)



(b)

Figura 4.6: (a) Região do contato no dispositivo e (b) Esquematização das forças atuantes no sistema.

A parte do corpo de prova na região do contato que está ligada a outros membros pode ser modelada como um esquema simplificado de associação de molas, como mostrado na Fig. (4.7) a seguir. Assim, é possível correlacionar as forças  $F_B$  e  $Q$  com  $k_D$  e com  $k_A$ , sendo que:

$k_D$ : Semi-rigidez global do dispositivo;

$k_A$ : Rigidez do Corpo de Prova acima do contato.

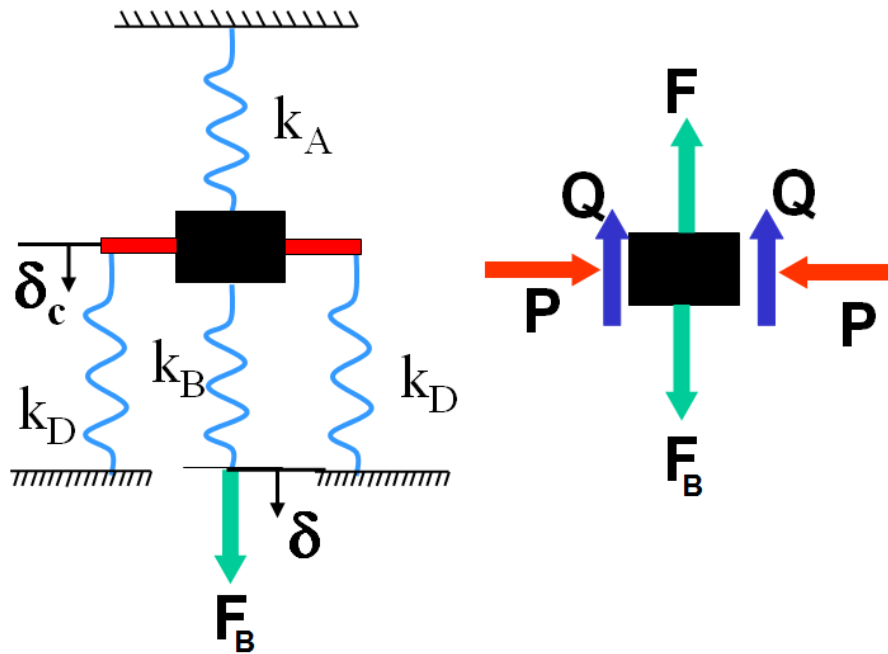


Figura 4.7: Associação de molas equivalente ao sistema de *fretting*.

Correlacionando as forças aos deslocamentos das molas, tem-se que

$$\begin{aligned}
 F_B &= k_B(\delta - \delta_c), \\
 F &= k_A \delta_c, \\
 2Q &= 2k_D \delta_c,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

e fazendo um balanço de forças verticais, tem-se que

$$2Q = F_B - F.
 \tag{4.2}$$

Substituindo as Eqs. de (4.1) em (4.2), obtém-se que a relação entre a carga remota e carga cisalhante fornecida pelo dispositivo é dada por

$$\frac{F_B}{Q} = \frac{k_A}{k_D} + 2 \quad (4.3)$$



## 5 METODOLOGIA NUMÉRICA-EXPERIMENTAL PARA ANÁLISE DA FADIGA POR *FRETTING*

Na realização da parte experimental deste trabalho, o dispositivo de *fretting* projetado por Martins (2008) e apresentado no capítulo anterior, é acoplado a máquina de ensaios universais MTS 810 do Laboratório de Ensaios Mecânicos do ENM/UnB, conforme mostrado na Fig. (5.1).

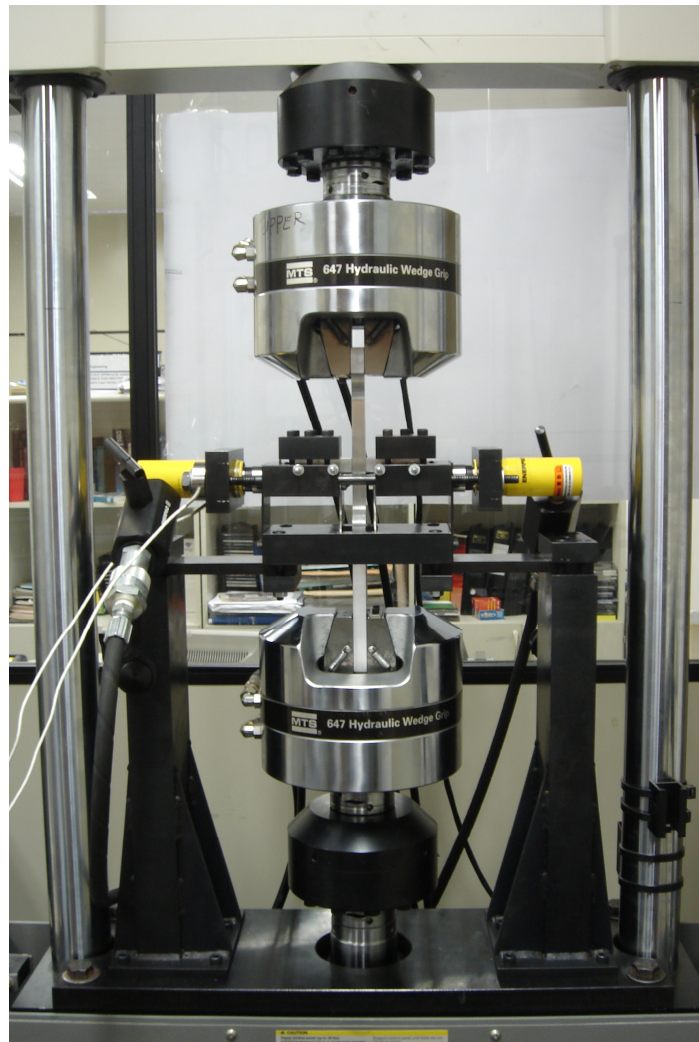


Figura 5.1: Dispositivo de *fretting* acoplado a máquina de ensaios universais MTS 810.

Os ensaios foram planejados visando à análise do efeito da carga remota média na resistência a fadiga sob condições de *fretting*, fazendo-se uso, para isso, dos modelos de fadiga não-locais apresentados no Capítulo 3. Nesta análise foram consideradas as seguintes etapas:



1. **Escolha da configuração do dispositivo para ensaio de fadiga por *fretting*.**  
Conforme detalhado no Capítulo 4, este dispositivo permite a realização de ensaios controlados onde uma sapata cilíndrica é pressionada contra uma superfície plana;
2. **Determinação das propriedades mecânicas básicas da liga de alumínio aeronáutico Al 7050-T7451 cedida pela EMBRAER.** Foram obtidas propriedades tais como módulo de Young, tensão de escoamento, limites de resistência a fadiga para carregamentos uniaxiais completamente reversíveis e com tensão flutuante;
3. **Desenvolvimento de uma rotina em MATLAB para o cálculo das tensões na superfície de contato e no interior do corpo de prova.** As tensões superficiais foram obtidas utilizando a teoria de contato de Hertz (1882) e Mindlin (1949), enquanto as tensões sub-superficiais foram calculadas por meio das funções potenciais de Muskhelishvili (1953);
4. **Aplicação dos modelos não-locais de fadiga multiaxial de *SL* e *PRH*.** Conforme apresentados no Capítulo 3, cabe notar que esses modelos foram aplicados no ponto  $(x, y) = (-a, L_c)$ , pois na configuração de *fretting* estudada o *hot spot* está localizado em  $(x, y) = (-a, 0)$ , conforme ilustrado na Fig. (5.2);

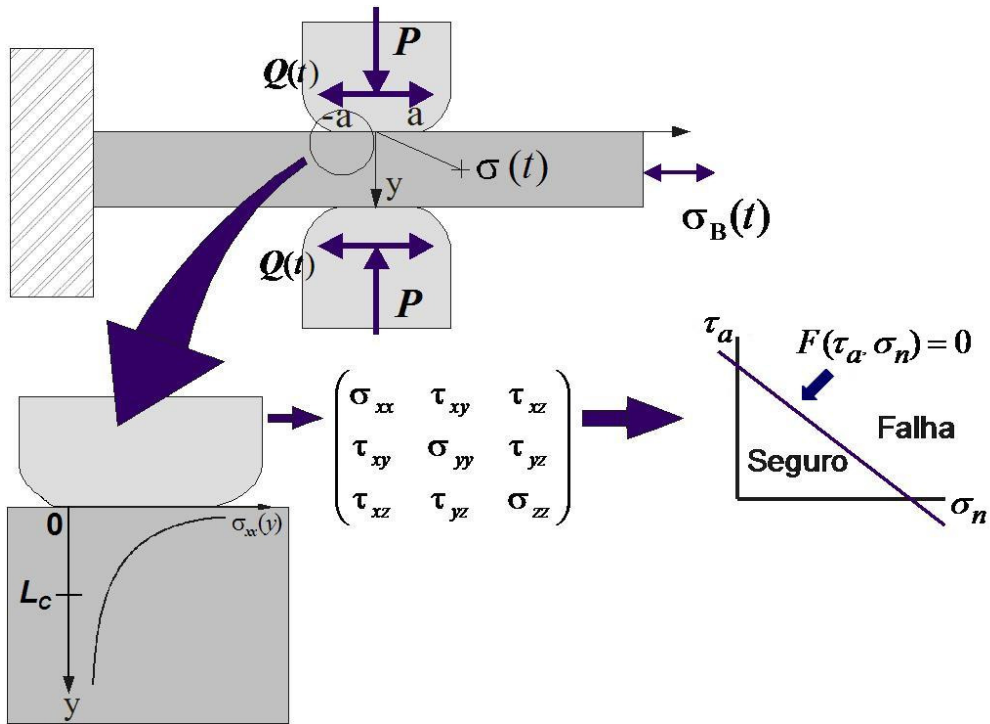


Figura 5.2: Metodologia dos modelos não-locais de fadiga multiaxial associada ao MP para problemas de fadiga sob condições de *fretting* com contato entre cilindros e CP's planos.

5. **Escolha do programa de carregamento.** Tendo em vista avaliar o efeito da tensão média na resistência a fadiga por *fretting*, optou-se pela história de carregamento ilustrada na Fig. (5.3). A seguir apresenta-se uma breve descrição das cargas envolvidas bem como o procedimento utilizado para controle dos ensaios.

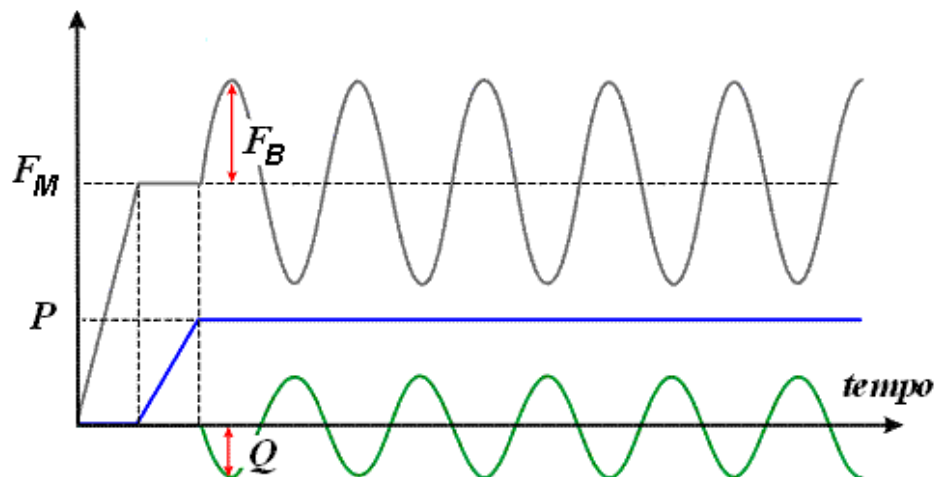


Figura 5.3: Programa de carregamento dos ensaios de fadiga por *fretting*.

- a) *Carga remota média ( $F_M$ ):* Para verificar-se o efeito da carga média na resistência a fadiga por *fretting*, varia-se esta em cada teste a ser realizado, mantendo-se todos os demais parâmetros de ensaio constantes; Em geral, realizaram-se dois experimentos para cada nível de tensão média.
  - b) *Carga normal ( $P$ ):* Conhecendo-se a pressão de pico ( $p_o$ ) escolhida, pode-se determinar a carga normal ( $P$ ) a ser aplicada na bomba manual do sistema hidráulico auxiliar, através da Eq. (2.7). Essa carga normal é obtida tomando-se o produto entre a pressão lida pelo manômetro, acoplado à bomba manual, e a área efetiva do cilindro pneumático. Como já foi dito, a carga normal pode ser obtida também através da leitura de *Load Washers*, conectadas ao sistema de aquisição de dados da Lynx. Neste caso, nota-se uma pequena perda de carga, quando comparada ao primeiro método, decorrente da flexão dos diafragmas na aplicação da carga;
  - c) *Carga remota ( $F_B$ ):* Nos testes de comissionamento, definiu-se a altura da viga flexível a ser usada nos ensaios, e dessa forma também se sabe de antemão a faixa de operação, ou qual razão  $F_B/Q$  a ser usada. Tendo-se uma estimativa da carga cisalhante praticada pelo dispositivo, através da razão  $Q/P$ , se tem uma estimativa da carga remota a ser aplicada nos ensaios;
  - d) *Carga tangencial ( $Q$ ):* Surge como uma resposta do dispositivo à aplicação da carga remota de fadiga. É obtida por meio das leituras feitas pelas células de carga superior e inferior da máquina de ensaios universais MTS 810, conforme a Eq. (4.2) e esquematizado na Fig. (4.6).
  - e) *Procedimento para controle do ensaio:* Nessa etapa, faz-se uso do software da máquina MTS de ensaios universais. Deve-se colocar a máquina em controle de força, atentando para a posição de montagem do CP e o deslocamento do atuador hidráulico com relação ao dispositivo. Para isso, restringe-se o movimento do atuador hidráulico inferior por meio de um controle de deslocamento, chamado *interlock*. Por experiência com o aparato experimental aconselha-se que a carga  $F_B$  deva ser aumentada em 5 passos, nesse caso de 200 ciclos cada, até a carga remota indicada para os ensaios. É importante também que a frequência do ensaio cresça gradualmente com esses passos, chegando a uma ordem de 10 Hz, e que se observe o comportamento da carga cisalhante com os incrementos de  $F_B$ .
6. **Planejamento dos dados experimentais.** O planejamento dos ensaios visa obter três conjuntos de dados:

- a) Corpos de prova que quebram, ou seja sofrem fratura, pela incidência e propagação de trincas na superfície;
- b) Corpos de prova que não quebram, mas com a nucleação e posterior parada de trincas observáveis;
- c) Corpos de prova que não quebram, nos quais não há a nucleação de trincas.

Com esses dados pôde-se elaborar um diagrama conforme o ilustrado na Fig. (5.4), onde se percebe que o aumento da carga média coincide com crescimento da componente de carga normal do carregamento, no eixo das abscissas. Essa curva de resistência permite observar o efeito da carga média na resistência a fadiga por *fretting*, além de possibilitar também uma análise do crescimento e propagação de uma trinca. Essa avaliação é importante, pois permite uma posterior análise de durabilidade do espécime de fadiga quando submetido a condições de *fretting*, além da comparação das estimativas calculadas numericamente e os resultados obtidos experimentalmente.

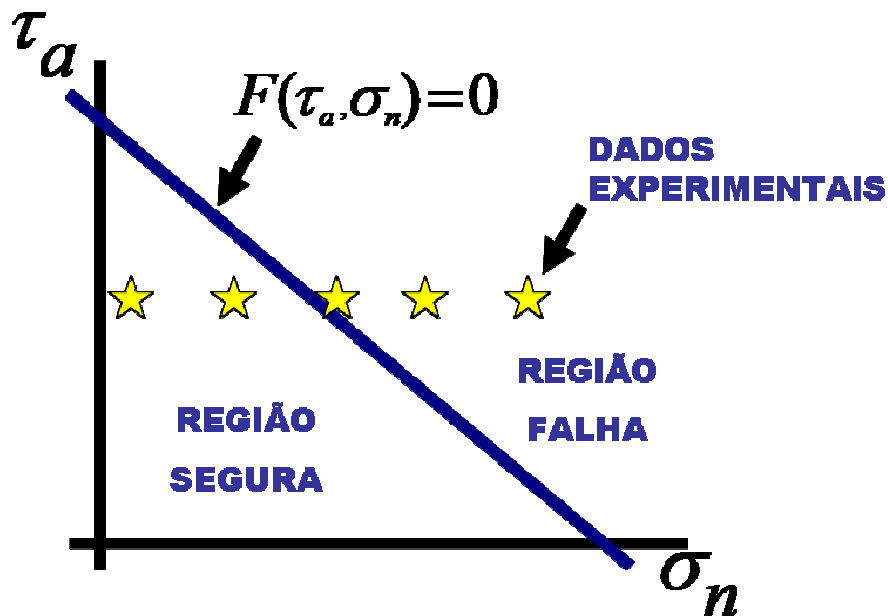


Figura 5.4: Exemplo de diagrama para os modelos não-locais de fadiga aplicados na distância  $L_c$ .

## 6 RESULTADOS

### 6.1 PROPRIEDADES BÁSICAS DA LIGA Al 7050 T7451

O material utilizado no desenvolvimento deste trabalho foi a liga de alumínio 7050, uma liga quaternária Al-Zn-Mg-Cu, na condição T7451, de aplicação estrutural. A condição T7451 indica o tratamento térmico sofrido pela liga, na condição de solubilização seguida de duplo envelhecimento com alívio de tensão, como esquematizado na Fig. (6.1). O material foi fornecido pela EMBRAER na forma de placas laminadas. A análise para determinar a composição química da liga foi realizada pelo Grupo LABMAT da USP/São Carlos e os resultados estão apresentados na Tab. (6.1).

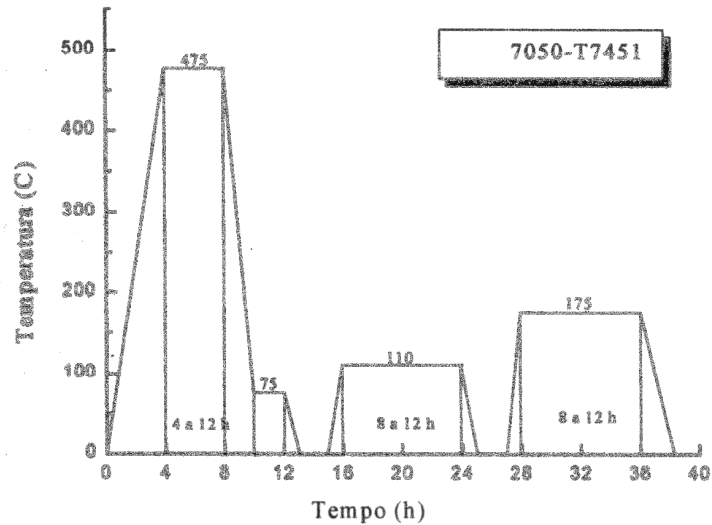


Figura 6.1: Tratamento térmico empregado na liga de alumínio 7050-T7451.

Tabela 6.1: Composição Química (% em peso) da liga de alumínio 7050-T7451 [ASM]

	Zn	Ti	Mg	Cu	Zr	Fe	Mn	Cr	Si
<b>Norma ASM (%)</b>	5,7-6,7	0,06	1,9-2,6	2,0-2,6	0,08-0,15	0,15	0,1	0,04	0,12
<b>Observado (%)</b>	5,85	0,024	1,96	2,11	0,12	0,07	0,01	-	0,03

Para a caracterização microestrutural da liga em estudo realizou-se preparação metalográfica em amostras do material nos sentidos de laminação S e T, conforme ilustrado na Fig. (6.2), atacadas com Keller e  $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$ , respectivamente. A Fig. (6.3) ilustra a textura dos grãos, sendo longitudinalmente alongados, orientados no sentido de laminação do material. Os pontos pretos correspondem a partículas inter-metálicas  $\text{Al}_7\text{Cu}_2\text{Fe}$  e  $\text{Mg}_2\text{Si}$ , características da liga Al7050-T7451 [ASM].

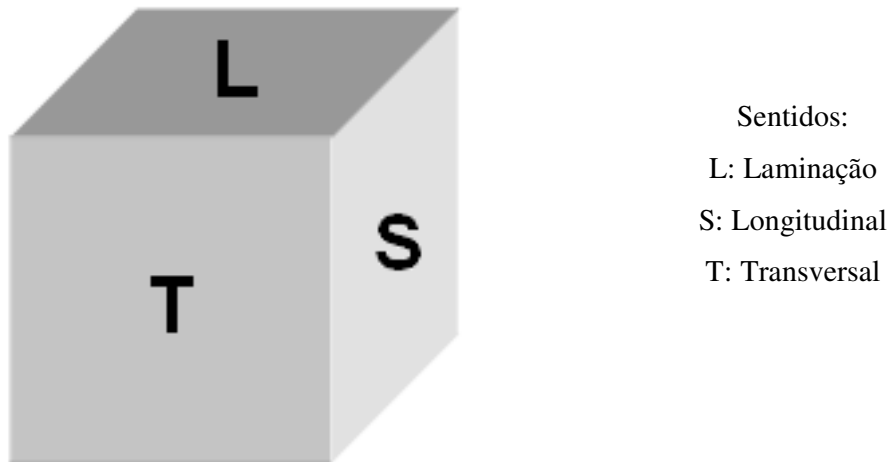


Figura 6.2: Sentidos de análise do material conforme corte feito na placa.

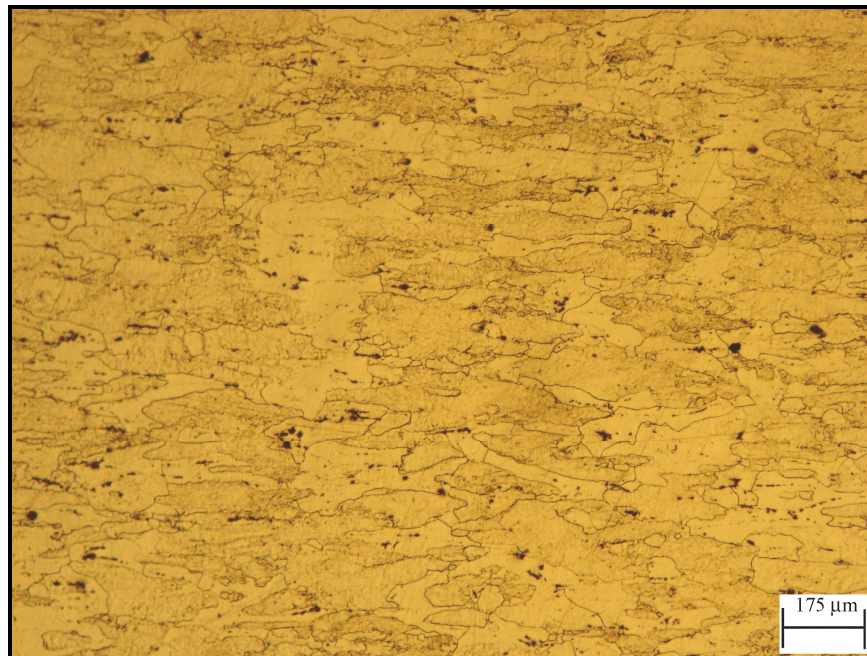


Figura 6.3: Micrografia de regiões cristalizadas da liga Al7050-T7451 no plano S, atacada com reagente Keller.

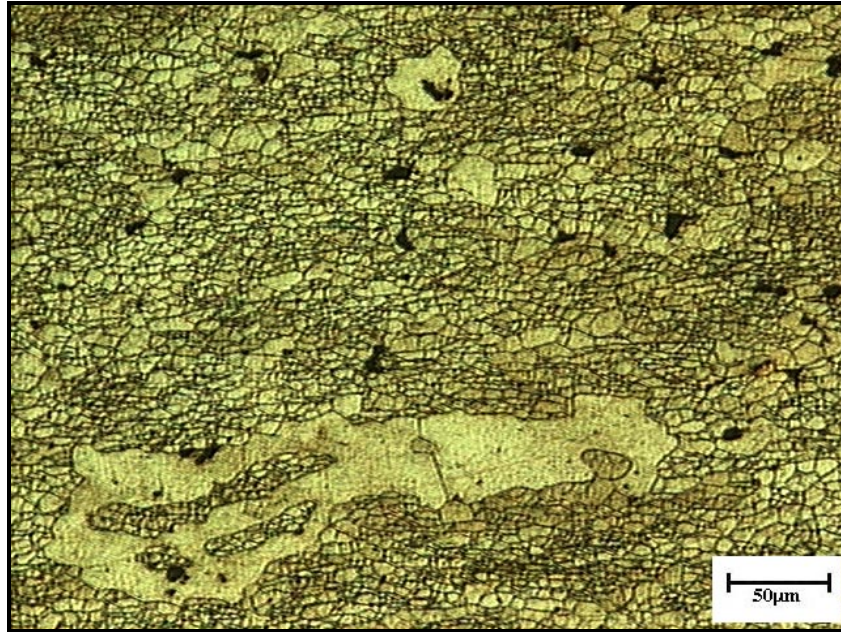


Figura 6.4: Micrografia de grãos encontrados na liga Al7050-T7451 no plano T, atacada com reagente  $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$ .

A Figura (6.4) ilustra a microestrutura típica de regiões da liga Al7050-T7451, formada por pequenos grãos obtidos pelo tratamento térmico de recristalização. As regiões não recristalizadas são grandes áreas claras e alongadas de grãos grosseiros cercados de regiões mais escuras de grãos finos. As regiões não recristalizadas têm uma forma alongada que acompanham o sentido do processo de laminação. Observou-se um tamanho médio de grão igual a 5,5  $\mu\text{m}$ , conforme a norma ASTM E 1382-97 (ASTM (1994)).

### 6.1.1 MICRODUREZA

Os valores médios das medidas de microdureza Vickers apresentadas pela liga Al7050-T7451, nos três sentidos de laminação, estão apresentados na Tab. (6.2).

Tabela 6.2: Microdureza Vickers (HV) da liga Al7050-T7451 segundo o sentido de laminação

Sentido	S	L	T
Dureza (HV)	153,6	164,0	163,4

## 6.1.2 TRAÇÃO

O levantamento das propriedades mecânicas do material, tais como limite de escoamento, limite de resistência e módulo de elasticidade, foram obtidos através do ensaio de tração uniaxial realizado em uma máquina de Tração EMIC pertencente ao Departamento de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, da USP/EESC. Estes resultados são apresentados na Tab. (6.3). As dimensões do corpo de prova de são mostradas na Fig. (6.5), e estes foram fabricados no sentido de laminação S da liga Al7050-T7451.

Tabela 6.3: Propriedades médias de tração da liga Al7050-T7451

<b>Limite de Resistência ao Escoamento (MPa)</b>	<b>Limite de Resistência à Tração (MPa)</b>	<b>Módulo de Elasticidade (GPa)</b>
453,78	513,25	73,4

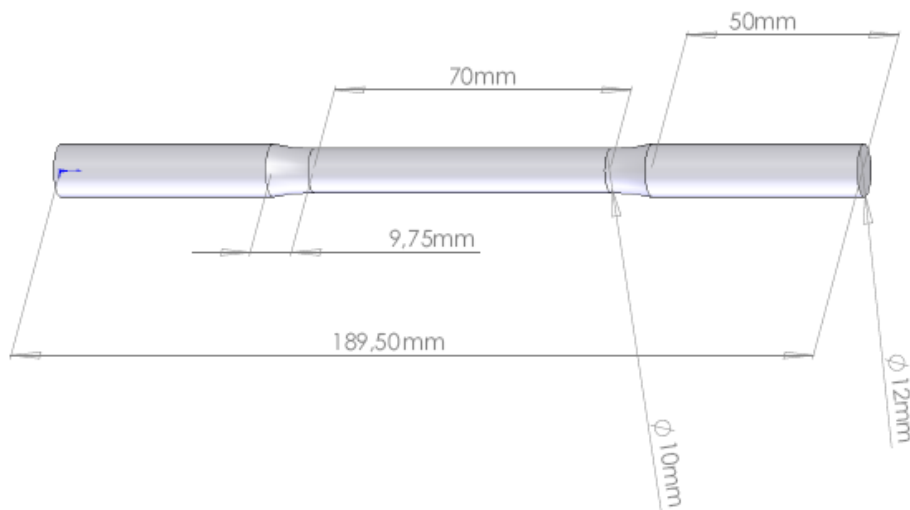


Figura 6.5: Dimensões do Corpo de Prova para o ensaio de Tração Uniaxial.

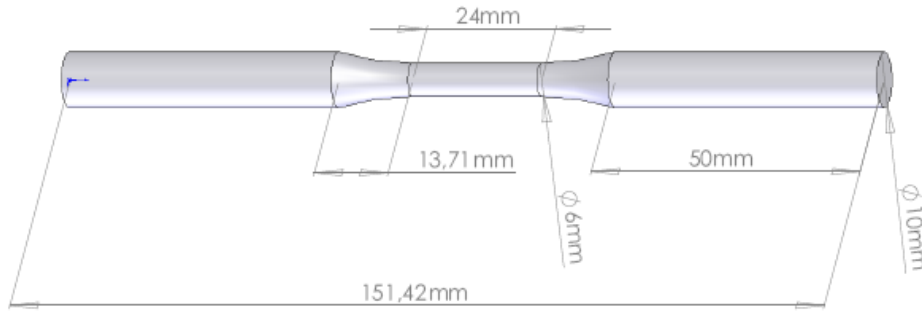


### 6.1.3 FADIGA UNIAXIAL

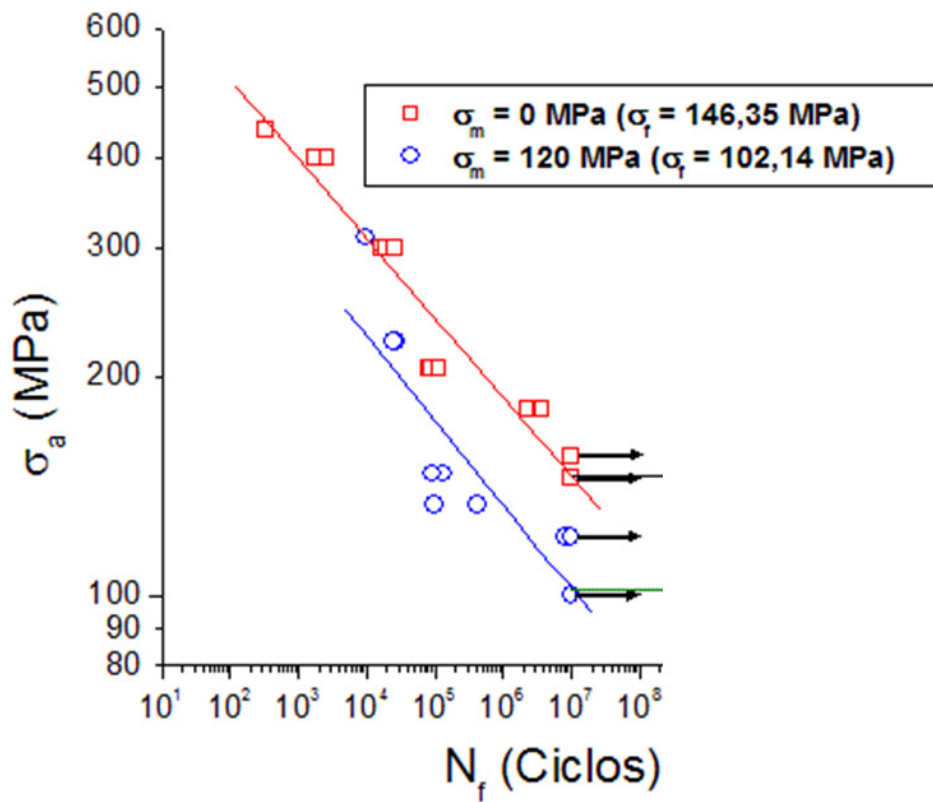
Para a realização dos ensaios de fadiga, os corpos-de-prova tiveram suas superfícies preparadas, com lixamento (lixas 400, 600, 800 e 1200) e polimento (óxido de cromo). Este procedimento é importante para a retirada das marcas da ferramenta, consequência do processo de fabricação dos corpos-de-prova, os quais poderiam induzir a nucleação de trincas precoces, mascarando os resultados encontrados.

Os limites de fadiga foram determinados para tensões médias de 0 e 120 MPa. A Fig. (6.6). ilustra as dimensões do corpo-de-prova para os ensaios, bem como as curvas S-N para cada caso. Os valores dos limites de fadiga determinados são necessários na análise de fadiga multiaxial. Os ensaios foram realizados no sentido L de laminação do material, em uma máquina servo-hidráulica MTS modelo 810.23M, com capacidade de 250 kN, pertencente ao Departamento de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, da USP/EESC. O critério de falha utilizado foi ruptura do material, sendo determinada vida infinita para  $10^7$  ciclos alcançados sem a ruptura do material.

É importante observar que foi utilizada uma única curva de Basquin (1910) para se obter uma primeira aproximação da resistência à fadiga para  $10^7$  ciclos. A fim de se obter uma descrição mais realista da resistência desta liga, seriam necessários mais ensaios para levantamento das curvas de fadiga. Entretanto, na época da realização destes ensaios havia uma restrição quanto à quantidade de CPs disponíveis para ensaio.



(a)



(b)

Figura 6.6: (a) Corpo de Prova para fadiga uniaxial e (b) curvas S-N para carregamento completamente reversível e carregamento flutuante.

## 6.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE FADIGA POR *FRETTING*

Esta seção apresenta os resultados experimentais obtidos nesta dissertação e, ainda, para comparação, os resultados observados por Rossino (2008). O objetivo dos

ensaios realizados foi avaliar o efeito da tensão remota média na resistência à fadiga por *fretting* da liga Al 7050 T7451.

### 6.2.1 PARÂMETROS E RESULTADOS DOS ENSAIOS REALIZADOS POR ROSSINO (2008)

Os ensaios realizados por Rossino (2008) adotaram a mesma metodologia descrita no Capítulo 4. Os parâmetros e valores observados nesta primeira bateria são apresentados nas Tabs. (6.4) e (6.5), respectivamente. Estes dados possibilitaram a construção das curvas S-N mostradas na Fig. (6.7), nas quais se pode notar a severidade do *fretting* sobre o carregamento de fadiga em comparação aos processos convencionais.

Tabela 6.4: Parâmetros para a 1ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de *fretting*.

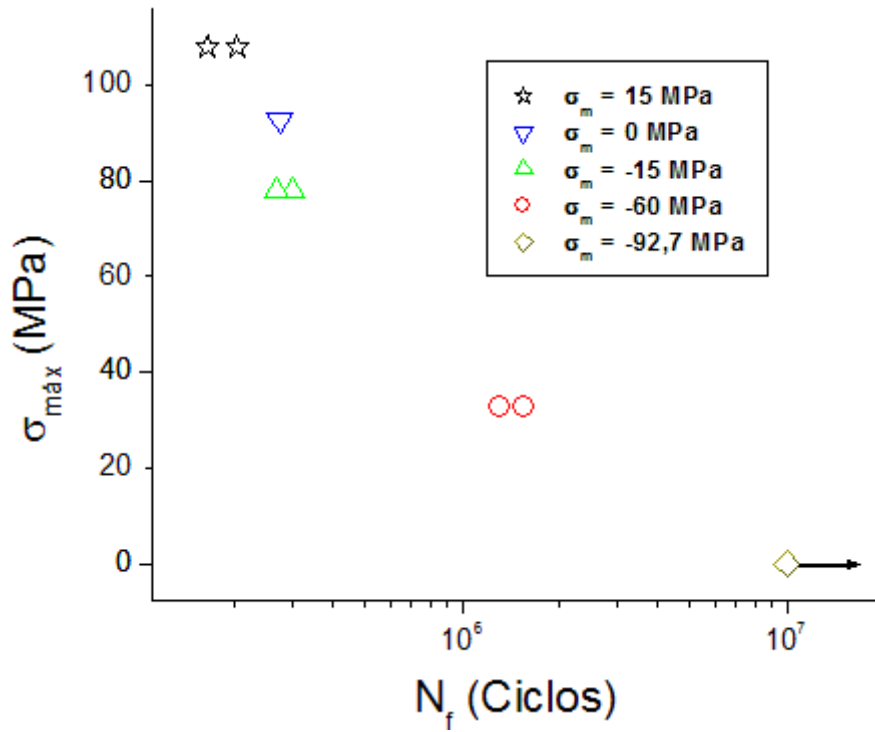
Parâmetros	$p_0$	$P$	$f$	$Q/P$	$Q$	$FB/Q$	$FB$	$\sigma_a$	$a$
Valores	350 MPa	8,50 kN	0,54	0,25	2,13 kN	7,29	15,5 kN	92,7 MPa	1,19 mm

Tabela 6.5: Resultados da 1ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de *fretting*.

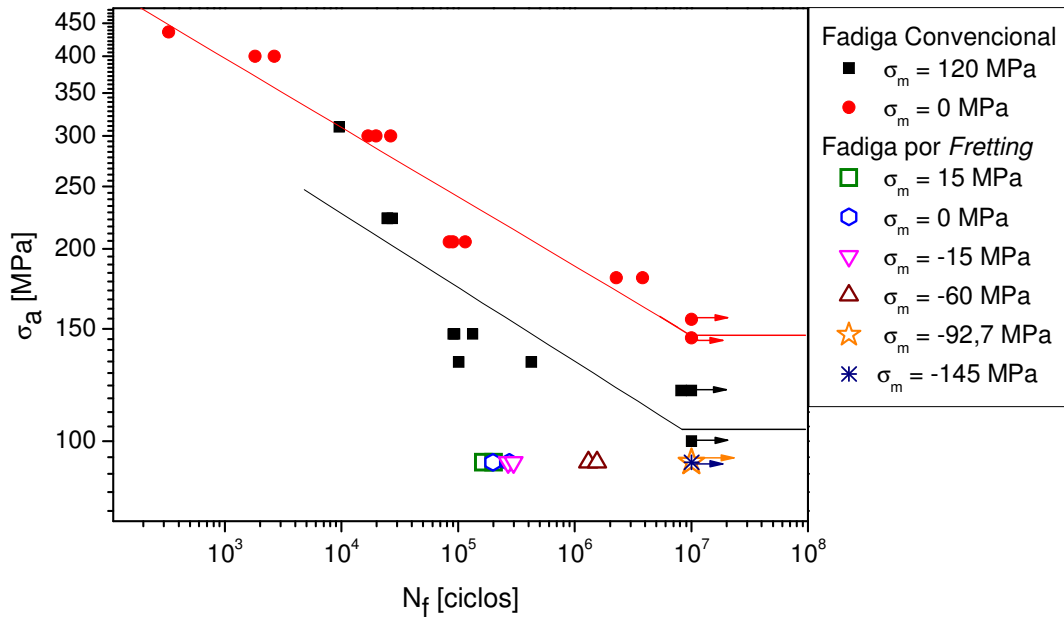
Testes	$F_m$ (kN)*	$\sigma_m$ (MPa)	$\sigma_{max}$ (MPa)	N (Ciclos)
1	2,51	15	107,7	164 662
2	2,41	15	107,7	202 609
3	0	0	92,7	198 686
4	0	0	92,7	274 248
5	-2,46	-15	77,7	268 230
6	-2,44	-15	77,7	299 568
7	-9,94	-60	32,7	1 304 620
8	-9,90	-60	32,7	1 552 270
9	-14,95	-92,7	0	$1 \times 10^7$
10	-24,74**	-145	-238	$1 \times 10^7$

(\*) Repare que nem sempre as mesmas magnitudes de tensão média correspondem a mesma a magnitude de força média. Isso ocorre devido às variações encontradas nas dimensões da área de seção transversal dos CP's, e a força média aplicada é estipulada por  $F_m = \sigma_m \cdot A$ .

(\*\*) Este dado não foi apresentado nos gráficos. Isso porque o ponto anterior, para uma tensão média de -92,7 MPa, já havia alcançado a vida de  $1 \times 10^7$  ciclos.



(a)



(b)

Figura 6.7: Curvas S-N para os dados da 1ª bateria de ensaios de (a) fadiga por *fretting* e (b) comparação entre fadiga convencional e por *fretting*.

## 6.2.2 PARÂMETROS E RESULTADOS DOS ENSAIOS REALIZADOS NESTE TRABALHO

Para essa 2ª bateria de ensaios foram propostos novos valores para a tensão remota de fadiga, além de outros níveis para a tensão média. Os novos parâmetros e resultados com a redução nos valores de  $Q/fP$ ,  $F_m$  e  $F_B$  em relação a 1ª bateria são mostrados nas Tabs. (6.6) e (6.7), e a curva S-N para esses dados é mostrada na Fig. (6.8) a seguir.

Tabela 6.6: Parâmetros para a 2ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de *fretting*.

Parâmetros	$p_0$	$P$	$f$	$Q/P$	$Q$	$FB/Q$	$FB$	$\sigma_a$	$a$
Valores	350 MPa	8,50 kN	0,54	0,13	1,16 kN	7,29	8,45 kN	50 MPa	1,19 mm

Tabela 6.7: Resultados da 2ª bateria de ensaios de fadiga sob condições de *fretting*.

Testes	$F_m$ (kN)	$\sigma_m$ (MPa)	N (Ciclos)
1	-3,38	-20	2 286 084
2	-3,38	-20	4 400 000
3	-3,38	-20	3 595 294
4	0	0	1 860 874
5	0	0	1 666 332
6	0	0	1 211 563
7	25,53	150	232 951
8	25,53	150	351 947
9	25,53	150	230 094

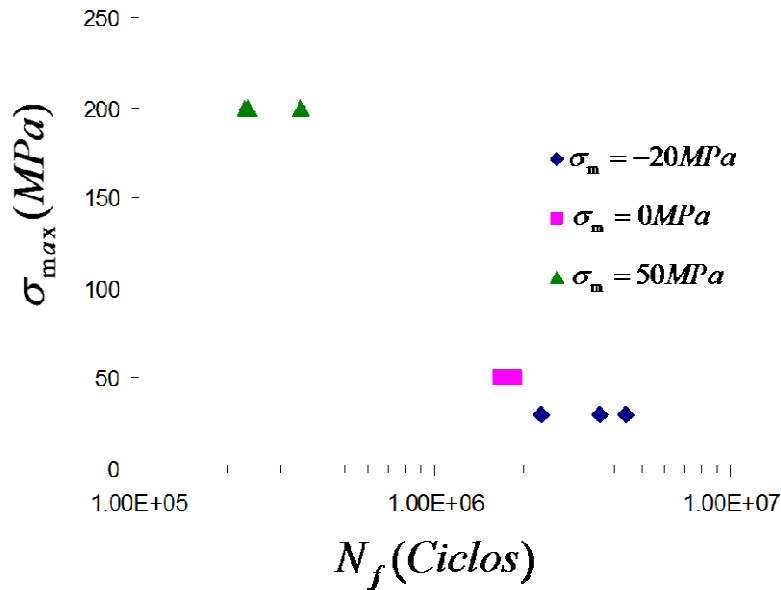


Figura 6.8: Curva S-N para os dados da 2ª bateria de ensaios de fadiga por *fretting*.

### 6.3 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS COM AS ESTIMATIVAS DOS MODELOS DE FADIGA

Nos processos de fadiga é conhecido que, de uma forma geral, as tensões médias de compressão são benéficas enquanto que as de tração são maléficas para a vida em fadiga convencional em uma mesma amplitude de tensão. Isso ocorre porque as tensões de tração ( $\sigma_m > 0$ ) favorecem a abertura e conseqüentemente a propagação de trincas, enquanto que as de compressão ( $\sigma_m < 0$ ) têm o efeito contrário. Este efeito é bem conhecido para os casos de fadiga convencional. Pode-se observar pela Fig. (6.6) que o aumento na tensão média diminui a vida do material também para os casos de fadiga por *fretting*, correspondendo a condições mais severas de carregamento. Mesmo com a diminuição significativa da tensão média para valores negativos, ocorre a iniciação de trincas devido a severidade das condições de carregamento causadas pelo *fretting*, e as cargas de fadiga, que inicialmente seriam muito baixas para causar a iniciação de trincas, são capazes de propagá-la, levando o material à ruptura. Este resultado foi encontrado para o caso de tensão média de até -60 MPa, em que uma pequena tensão máxima trativa foi aplicada no material. Quando a tensão média de fadiga é suficientemente negativa, mantendo o material em condições de carregamento cíclico compressivos, observada para o caso de tensão média de -92,7 MPa, ocorre a iniciação

de trincas devido ao alto campo de tensão gerado em *fretting*, porém esta não se propaga, levando o material a alcançar vida infinita.

Um comparativo entre a resistência à fadiga convencional e por *fretting* é proposto pela Fig. (6.9) e mostrado na Tab. (6.8). Comparando-se essas tensões nominais de falha necessárias para causar a quebra dos espécimes, pode-se perceber que a resistência à fadiga do espécime é da ordem de duas vezes superior do que sua resistência quando considerado o processo de *fretting*, e cerca de sessenta por cento maior do que a do *fretting* com uma tensão média compressiva de -92,7MPa, o que denuncia a severidade do carregamento nesse tipo de processo.

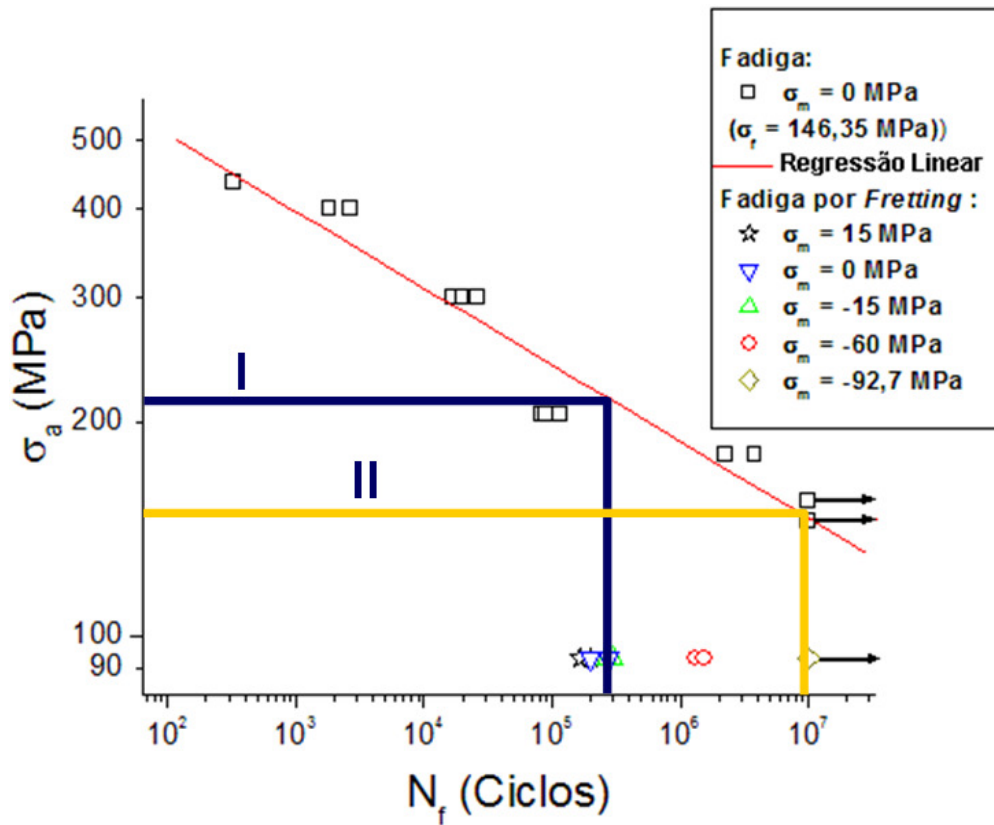


Figura 6.9: Curva S-N comparativa entre fadiga convencional e por *fretting* para (I) vida finita e (II) vida infinita.

Tabela 6.8: Comparativo entre resistências à fadiga convencional e por *fretting*.

Condição	$\sigma_a(\text{Fretting})$	$\sigma_a(\text{Convencional})$	$\sigma_a(\text{Convencional})/\sigma_a(\text{Fretting})$
(I)*	92,7 MPa	219,5	2,4
(II)**	92,7 MPa	146,3 MPa	1,6

(\*) Condição (I) -  $\sigma_m = 0\text{MPa}$  e  $N = 2,37 \times 10^5$  Ciclos ;

(\*\*) Condição (II) -  $\sigma_m = -92,7\text{MPa}$  e  $N = 1 \times 10^7$  Ciclos .

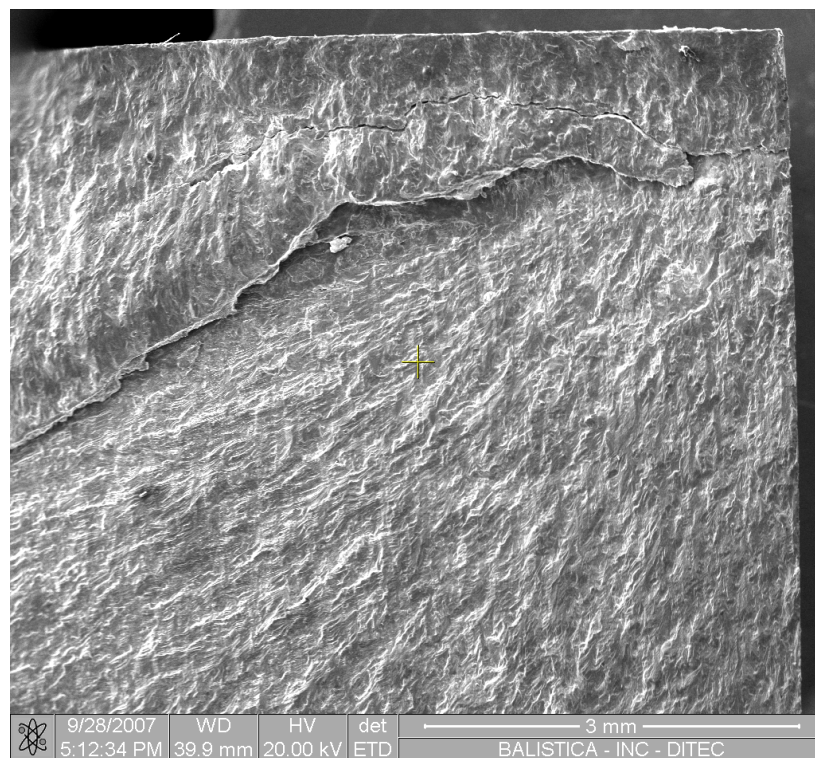
Sabe-se também que o contato por *fretting* gera um gradiente de tensão localizado que decresce a partir da superfície. A iniciação de trincas em materiais sujeitos à fadiga por *fretting* é influenciada por este campo de tensão, e sua conseqüente propagação é determinada pela tensão local presente na ponta da trinca, sendo diretamente influenciada pela carga remota. Para os casos onde as cargas de contato são altas, a iniciação da trinca é inevitável, e sua propagação dependerá do campo de tensão na ponta da trinca gerado devido as cargas de fadiga aplicadas. Neste caso, observa-se a existência de trincas paradas (*crack arrest*) para as condições em que as cargas de fadiga aplicadas são menores que as condições necessárias para causar o crescimento desta. Um outro caso corresponde àquele em que as cargas de contato são menores, e toda trinca iniciada irá se propagar devido às altas cargas de fadiga aplicada no material. Esta condição é basicamente governada pelas cargas de fadiga, e não se observa a existência de trincas paradas no material. Foi determinada também a existência de um caso intermediário, em que a combinação das cargas de contato e das cargas de fadiga aplicada determinará o comportamento da resposta do material frente a este tipo de sollicitação.

O campo de tensão gerado devido ao *fretting* para as condições de ensaios aplicadas neste trabalho são severas o suficiente para causar a iniciação de trincas, independente das cargas de fadiga aplicadas. Deve-se lembrar aqui que a magnitude do campo de tensão foi diretamente influenciada pela carga remota média aplicada. A trinca irá se propagar como conseqüência da influência do campo de tensão gerado na ponta desta, e sua magnitude para profundidades em que as cargas de contato deixam de ser significantes devem ser suficientes para causar o crescimento desta. Assim, a magnitude da tensão média é o fator crucial na determinação da ruptura do material.

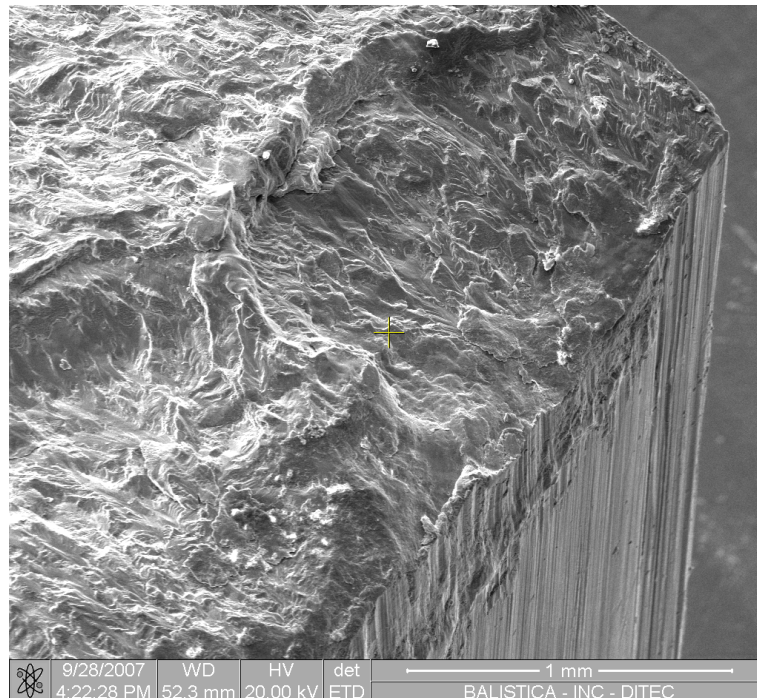


Dessa forma, mesmo nos ensaios em que não se observou a ruptura do material, o campo de tensão em torno do contato foi severo o suficiente para iniciar trincas, as quais atingiram uma distância suficiente da superfície a não sofrer mais a influência do campo de tensão gerado por *fretting*. Porém, estas trincas só se propagarão sobre a influência do carregamento de fadiga aplicado, onde cargas compressivas tendem a impedir o crescimento das trincas iniciadas. Assim, mesmo para condições de tensões máximas menores, comprova-se que o *fretting* aumenta a severidade do dano causado no material, reduzindo consideravelmente a vida em fadiga do Al 7050-T7451, como observado na Fig. (6.9).

A Fig. (6.10) mostra duas fotos de seções de CP's quebrados da 1ª bateria dos ensaios de *fretting*, obtidas por meio de MEV (Microscópio Eletrônico de Varredura), disponibilizado pelo INC (Instituto Nacional de Criminalística) da Polícia Federal.



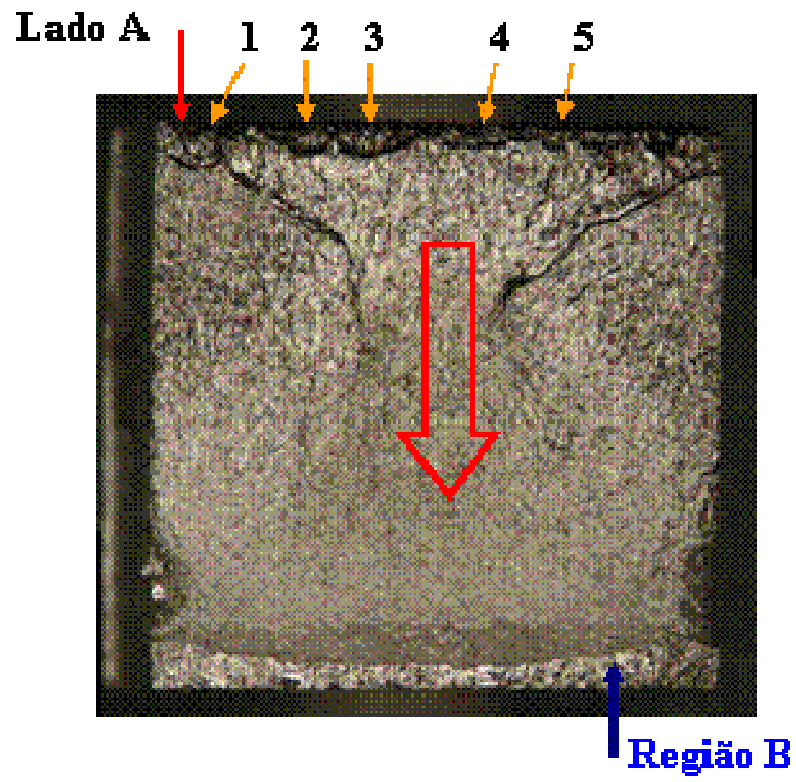
(a)



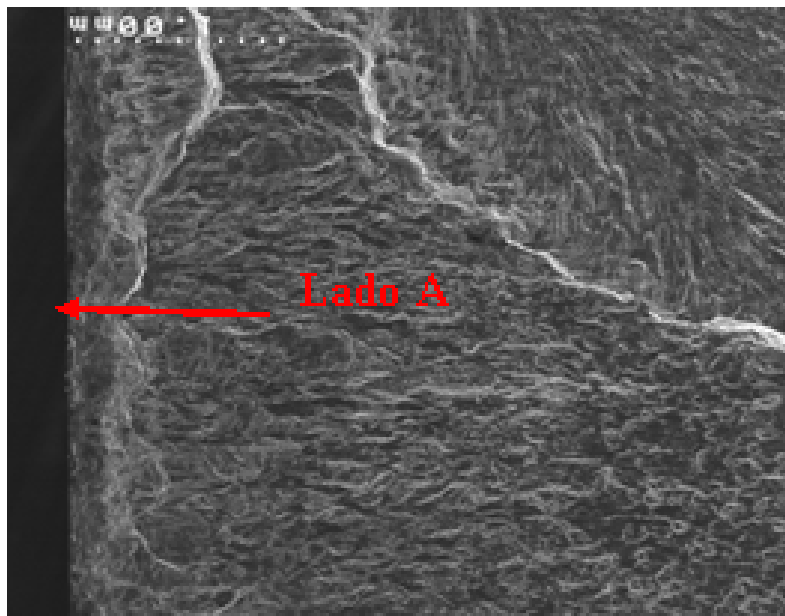
(b)

Figura 6.10: Seções de Corpos de Prova quebrados da 1ª bateria de ensaios fotografadas com MEV (Microscópio Eletrônico de Varredura), sendo (a) Vista Superior de CP quebrado com  $\sigma_m = 15$  MPa e (b) Vista a 45° de CP quebrado com  $\sigma_m = 0$  MPa.

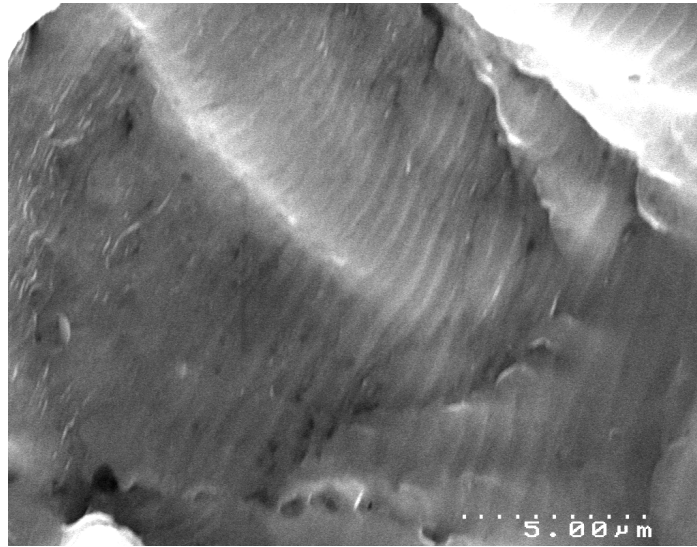
Fazendo-se uma análise de falha, percebe-se pela Fig. (6.11a) que a trinca partiu do lado A, iniciando a partir de múltiplos sítios (1, 2,3 .....) formados a partir do contato entre a sapata e o CP. Estas trincas, inicialmente da ordem de alguns microns, propagaram por fadiga em uma superfície a 45° da direção de carregamento, até formarem uma única frente que se propagou perpendicular a superfície de carregamento principal, Fig (6.11b). À medida que a trinca crescia, aumentava o valor do fator intensidade de tensão, possibilitando a observância de estrias de fadiga, Fig. (6.11c). No lado B, como a secção remanescente foi diminuindo, a tensão foi aumentando significativamente e antes da ruptura final por colapso plástico, uma única trinca iniciou e propagou-se rapidamente por fadiga, Fig. (6.11d), até que a ruptura final acontecesse e encontrasse esta outra frente de propagação.



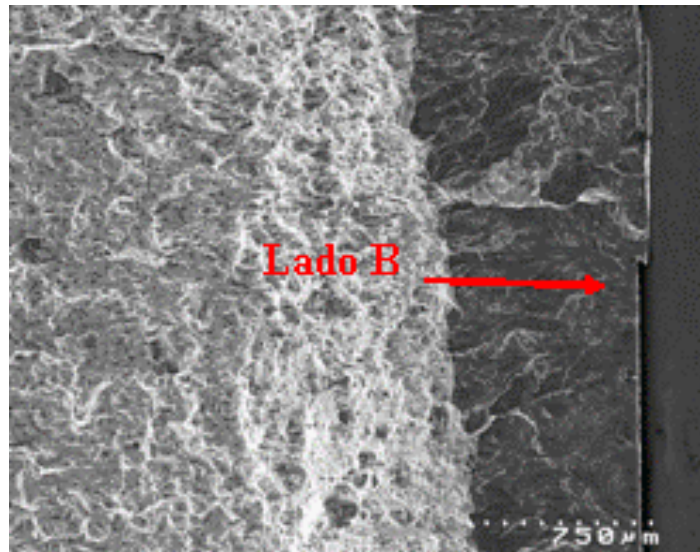
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.11: Para um CP da 1ª bateria de ensaios com  $\sigma_m = 0$  MPa: (a) visão da superfície fraturada, por microscópio estereoscópico, indicando a direção do crescimento da trinca; (b) detalhe dos múltiplos sítios de fadiga no lado A; (c) estrias de fadiga e (d) crescimento de trinca de fadiga pelo lado B e região de ruptura plástica.

As Figs. (6.12) e (6.13) mostram as previsões dos modelos não locais de fadiga multiaxial no ponto  $(x, y) = (-a, L_c)$  para os ensaios de fadiga por *fretting* executados. Os modelos são representados por uma linha de falha, que divide o diagrama em uma região segura (abaixo da linha) e outra de falha (acima da linha), enquanto cada teste de fadiga por *fretting* é representado por um ponto. Pode-se notar, em cada modelo, que a variável de tensão cisalhante

(no eixo das ordenadas) permanece a mesma para todos os testes, enquanto a variável de tensão normal (no eixo das abscissas) varia. De fato, a história de carregamento em  $(x, y) = (-a, L_c)$  é a mesma para todos os testes, exceto pela superposição da carga remota média. Isto produz unicamente um deslocamento da história de carregamento cisalhante sobre um ponto material de teste para teste, de modo que não se alteram os semi-eixos dos prismas, para o modelo PRH, e o raio da menor circunferência circunscrita é sempre o mesmo, para o modelo SL.

Da Fig. (6.12) pode-se observar que os dois modelos prevêem falhas dos espécimes, mesmo sabendo-se que os testes sob tensão média de -92,7MPa e -145MPa não falharam. Uma possível explicação para este comportamento pode ser o fato dos modelos de fadiga não locais serem calculados a uma distância muito pequena da superfície, de modo que a influência do alto gradiente de tensão ainda não tenha desaparecido. No entanto, os modelos de fadiga não locais previram corretamente a iniciação de trincas em todos os testes, sendo que mesmo nos testes que não falharam foram observadas trincas propagadas, conforme mostra a Fig. (6.14).

Da Fig. (6.13) pode-se observar que na 2ª bateria de ensaios ambos os modelos previram falha, assim como na 1ª bateria de testes, e também que o modelo *SL* se mostrou mais coerente com a teoria de resistência a fadiga do que o *PRH*. Isso porque o modelo de *SL* para as tensões médias de 0MPa e -20MPa prevê os ensaios em uma região mais próxima a linha de falha, se mostrando um critério mais conservativo que o *PRH* que indicou vida finita para os testes, o que não acabou ocorrendo.

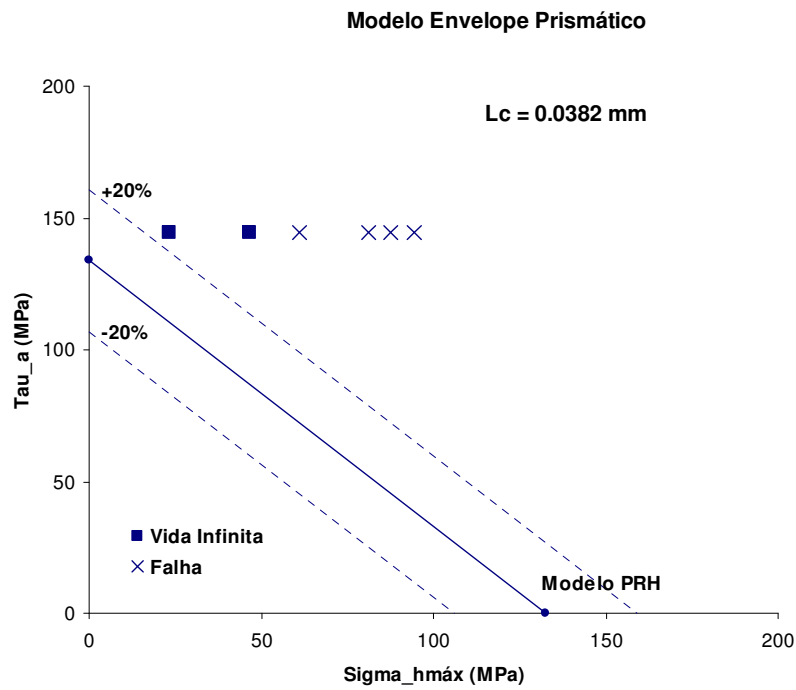
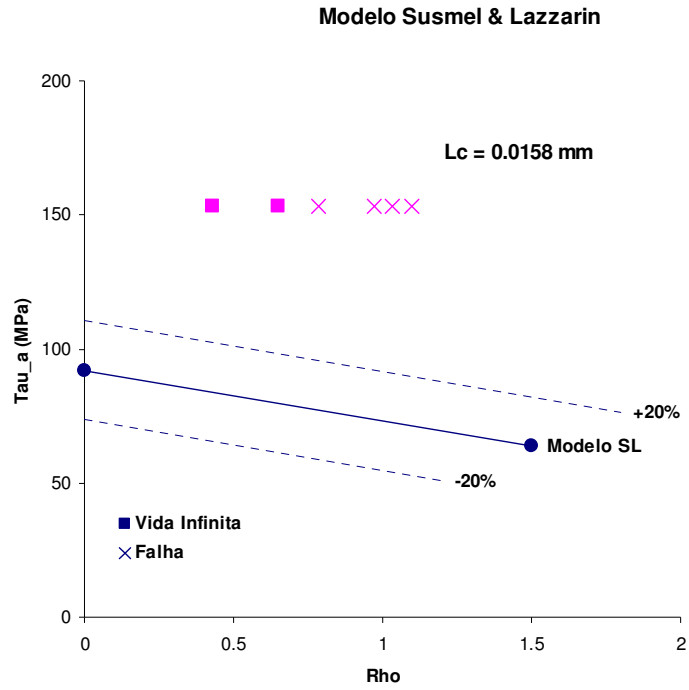


Figura 6.12: Aplicação dos modelos de fadiga de (a) Susmel-Lazzarin e (b) Envelope Prismático para a 1ª bateria de ensaios.

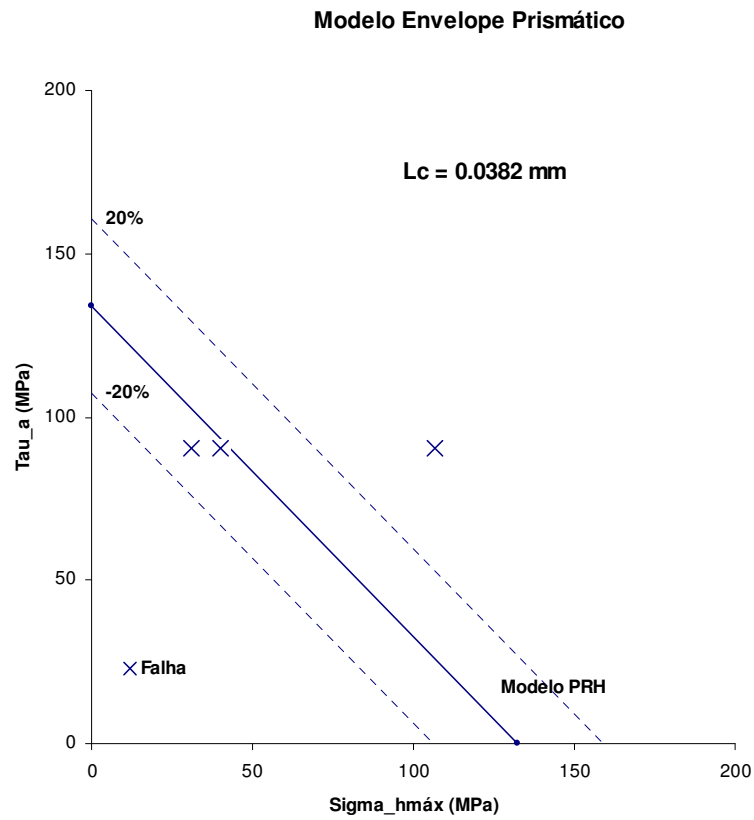
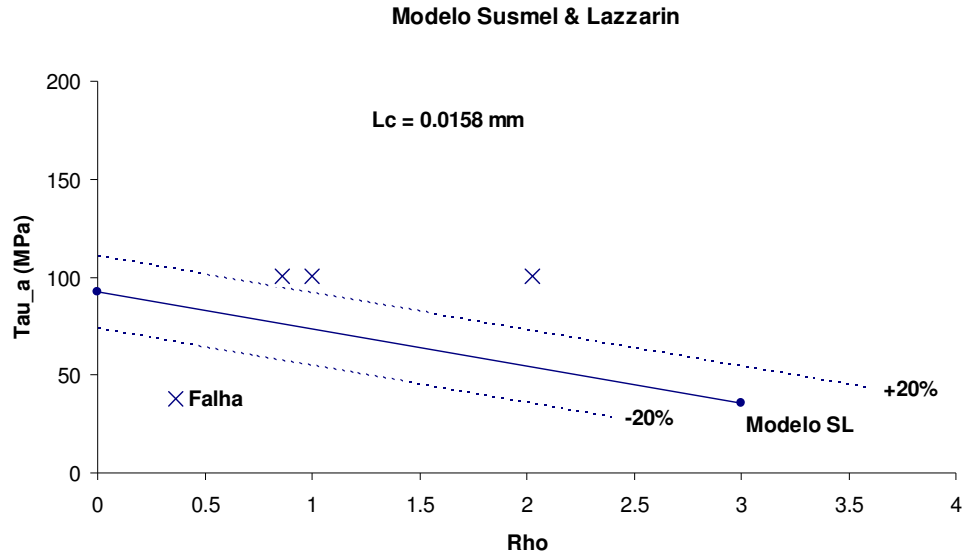


Figura 6.13: Aplicação dos modelos de fadiga de (a) Susmel-Lazzarin e (b) Envelope Prismático para a 2ª bateria de ensaios.



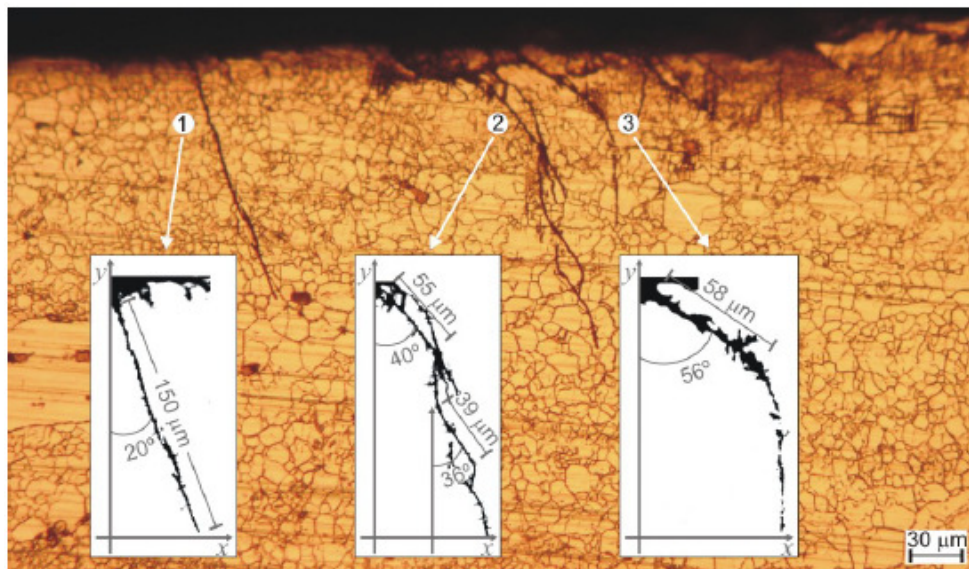


Figura 6.14: Análise pós-falha de CP não rompido da 1ª bateria de ensaios, com  $\sigma_m = -92,7$  MPa: várias nucleações e propagações de trincas.



## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho realizou-se um estudo experimental e teórico do efeito da tensão média na resistência à fadiga por *fretting*, considerando-se para isso o contato entre cilindros planos sob regime de escorregamento parcial. Para esta análise foram usados dois modelos não-locais de fadiga multiaxial, sendo um baseado no critério do plano crítico (Susmel-Lazzarin) e outro no espaço das tensões desviadoras (Envelope Prismático). Nos ensaios de *fretting* foram usados CPs e sapatas na liga Al 7050-T7451, e também um dispositivo acoplado a máquina de Ensaios Universais do Laboratório de Ensaios Mecânicos do ENM/UnB. Todos os parâmetros de controle dos ensaios foram mantidos constantes, a menos da tensão remota média aplicada que variou de valores compressivos para trativos.

As observações experimentais mostraram que a presença de tensões médias influencia diretamente a vida do componente. De forma similar ao processo de fadiga convencional, tensões médias trativas, superpostas ao campo de tensão devido as cargas de contato, têm a tendência de propagar micro-trincas que surgem na região de contato mecânico. Por outro lado, esse efeito pode ser benéfico caso se tenha tensões remotas médias compressivas, que impedem a propagação das trincas, tentando “fechá-las”, o que favorece a segurança e aumenta a vida à fadiga por *fretting* do componente.

Dois modelos de fadiga baseados na Teoria das Distâncias Críticas foram formulados: um deles baseado no conceito de plano crítico e o outro formulado no espaço das tensões desviadoras. O procedimento para a identificação da distância crítica levou em consideração o valor limiar para a propagação de trinca em modo I de carregamento. Comparando-se os dados experimentais com as estimativas dos modelos obtidas para as duas baterias de ensaios, pode-se perceber, de uma maneira geral, que apesar de não se mostrarem coerentes na previsão de falha dos espécimes, os modelos previram de forma satisfatória a inicialização de trincas, mesmo nos corpos de provas que não quebraram.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, T.L., 2005, **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**, CRC Press.
- ASM Handbook. **Properties and selection: nonferrous alloys and special purpose materials, alloy and temper designation system for aluminum and aluminum alloys**. 10.ed. Ohio: ASTM International, 1990. v. 2.
- ASM Handbook. **Metallography and microstructures: metallographic techniques for aluminum and its alloys**. Ohio: ASTM International, 1994. v. 9. p. 711-751.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Designation ASTM E 1382-1397: Standard test methods for determining average grain size using semiautomatic and automatic image analysis**. Ohio, 1994. ASTM International Handbook
- Araújo, J. A., 2000, **On the Initiation and Arrest of Fretting Fatigue Cracks**, D.Phil.thesis, University of Oxford.
- Basquin, O. H., 1910, **Proceeding of American Society of Testing Materials ASTEA**, (10), 625.
- Bin Li, Santos J. L. T., & Freitas, M., 2000, **A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation**, Mech. Struct. & Mach, 28(1), pp. 85-103.
- Bramhall, R., 1973, **Studies in fretting fatigue**, D. Phil. thesis, University of Oxford, Oxford.
- Brown, M. W., & Miller, K. J., 1973, **A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions**, Proc. I. Mech E, 187, pp. 745-755.
- Castro, F.C., Araújo, J.A. and Zouain, N., 2008, **On the application of multiaxial high-cycle fatigue criteria using the theory of critical distances**, Engineering Fracture Mechanics, Vol.76(4), pp. 512-524.
- Crossland, B., 1956, **Proc. Int. Conf. on Fat. of Metals**, Proc. Inst. Mech., London, pp. 138-149.
- Dang Van, K., Griveau, B., & Message, O., 1989, **On a new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application**, Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF 3, Mech. Engng Publications, London, pp. 479-496.
- Eden, E. M., Rose, W. N., & Cunningham, F. L., 1911, **Endurance of Metals**, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 4, pp. 839-974.
- El Haddad, M. H., Topper, T. H., & Smith, K. N., 1979, **Fatigue crack propagation of short cracks**, F. Engng Mater. Tech. (ASME Trans.), 101, pp. 42-45.
- Farris, T. N., Szolwinski, M. P., & Harish, G., 2000, **Fretting in aerospace structures and materials fatigue**, In: Hoepfner, D. W., Chandrasekaran, V., Elliot, C. B., editors, Fretting fatigue: current technology and practices, ASTM STP 1367, West Conshohocken, PA: ASTM 2000, pp. 523-537.
- Fatemi, A., & Socie, D. F., 1988, **A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out of phase loading**, F. Fract. Engng Mater. Struct., Vol. 11, pp. 149-165.
- Fouvry, S., Duóa, P., Perruchaut, P., **A Quantitative approach of Ti6Al4V fretting damage: friction wear and crack nucleation**. Wear, v. 257, n. 9-10, p. 916-929, 2004.
- Hertz, H., 1882, **Über die Berührung fester elastischer Körper**, Jnl Reine und angewandte Mathematik, 92, pp. 156-171.
- Hills, D. A., Nowell, D., & Sackfield, A., 1993, **Mechanics of Elastic Contacts**, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Hills, D. A., & Nowell, D., 1988, **Mechanics of Fretting Fatigue, Solid Mechanics and its Applications**, Kluwer Academic Publishers.
- Hills, D. A., & Nowell, D., 1994, "Mechanics of Fretting Fatigue, Solid Mechanics and its Applications", luwer Academic Publishers.
- Johnson, K. L., 1985, **Contact Mechanics**, Cambridge University Press.
- Mamiya, E. N., & Araújo, J. A., 2002, **Fatigue limit under muliaxial loading: on the definition of the equivalent shear stress**, Mechanics Research Communications, 29, pp. 141-151.

- Mamiya, E. N., Castro, F. C., & Araújo, J. A., 2009, **Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue**, International Journal of Fatigue, 31, pp. 1144-1153.
- Martins, L. H. L., 2008, **Projeto de aparato experimental e avaliação da resistência à fadiga sob condições de fretting**. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM-125A/08, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 118 p.
- Matake, T., **An explanation on fatigue limit under combined stress**, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering, v. 20, p. 257-263, 1977.
- McDiarmid, D. L., 1974, **A new analysis of fatigue under combined bending and twisting**, Aeronautical Journal, Vol. 78, No. 763, pp. 5.1-5.12.
- McDiarmid, D. L., 1991, **Mean stress effects in biaxial fatigue where the stresses are out-of-phase and at different frequencies**, In: Fatigue under Biaxial/Multiaxial loading, ESIS 10.
- Mindlin, R. D., 1949, **Compliance of elastic bodies in contact**, Jnl. App. Mech., 16, pp. 259-268.
- Mugadu, A., & Hills, D. A., 2002, **A generalized stress intensity approach to characterizing the process zone in complete fretting contacts**, International Journal of Solids and Structures, 39.5/2002, pp. 1327-1335.
- Munoz, S. *et al*, **Prediction of the crack extension under fretting wear loading conditions**, International Journal of Fatigue, v. 28, n. 3, p. 1769-1779, 2006.
- Muskhelishvili, N. I., 1953, **Some basic problems of Mathematical theory of elasticity**, Noordho, Groningen, 36, pp. 99-107.
- Neuber, H., 1958, **Theory of notch stress**, Springer Publishers, Berlin.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K., 1969a, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 2) – Fretting fatigue test machine and some results**, Bull, JSME, Vol. 12, No. 50, pp. 180-187.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K., 1969b, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 3) – Some phenomena and mechanisms of surface cracks**, Bull, JSME, Vol. 12, No. 51, pp. 397-407.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K., 1969c, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 4) – The effect of mean stress**, Bull, JSME, Vol. 12, No. 52, pp. 408-414.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K., 1969c, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 5) – The effect of relative slip amplitude**, Bull, JSME, Vol. 12, No. 52, pp. 692-697.
- Nishioka, K., & Hirakawa, K., 1972, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 6)**, Bull, JSME, Vol. 15, No. 80, pp. 135-144.
- Nishioka, K., Nishimura, S., & Hirakawa, K., 1968, **Fundamental investigations of fretting fatigue (part. 1) – On the relative slip amplitude of press-fitted axle assemblies**, Bull, JSME, Vol. 11, No. 45, pp. 437-445.
- Nowell, D., 1988, **An analysis of fretting fatigue**, D. Phil. thesis, Oxford University.
- Papanikos, P., Meguid, S., A., **Theoretical and experimental studies of fretting initiation fatigue failure of aeroengine compressor discs**, Fatigue Fracture of Engineering Materials and Structures, v. 17, n. 5, p. 539-550, 1994
- Peterson, R. E., 1959, **Notch sensitivity**, Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, pp. 293-306.
- Rossino, L.S., 2008, **Estudo do comportamento em fadiga por fretting da liga Al 7050-T7451**, Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação Interunidades em Ciência e Engenharia dos Materiais. Área de Concentração: Desenvolvimento, Caracterização e Aplicação de Materiais) - Escola de Engenharia de São Carlos, Instituto de Física de São Carlos, Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo, 232 p.
- Ruiz, C., Boddington, P. H. B., & Chen, K. C., 1984, **An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint**, Exp. Mech., 24.3, pp. 208-217.
- Smith, R. A., Liu, Y., & Grabowski, L., 1996, **Short fatigue crack growth behaviour in Waspaloy at room and elevated temperatures**, Engng. Mater. Struct., Vol. 19 No. 12, pp. 1505-1514.
- Socie, D., 1987, **Multiaxial fatigue damage models**, J. Engng. Mater. Tech., Vol. 109, pp. 293-298.
- Socie, D. F., Marquis, G. B., 2000, **Multiaxial Fatigue**. Society of Automotive Engineers, Inc.

- Susmel, L., & Lazzarin, P., 2002, **A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment**, Fatigue and Fract Engng Mater. Struct., 25, pp. 66-78.
- Susmel, L., 2004, **A unifying approach to estimate the high-cycle fatigue strength of notched components subjected to both uniaxial and multiaxial cyclic loadings**. Fatigue Fract Engng Mater Struct; 27, pp. 391–411.
- Szolwinski, M. P., & Farris, T. N., **Observation analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-t351 aluminum alloy**. Wear, v. 221, n. 1, p. 2-36, 1998
- Taylor, D., 1999, **Geometrical effects in fatigue: A unifying theoretical model**, Int. J. Fract., 21, 413-420.
- Timoshenko, S., P., Goodier, J. N., **Teoria da elasticidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545p.
- Tomlinson, G. A., 1927, **The rusting of steel surfaces in contact**, Proceedings of the Royal Society, Vol. 115, pp. 472-483.
- Warlow-Davis, F. J., 1941, **Fretting corrosion and fatigue strength**, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 146, pp. 32.

## **ANEXOS**

<b>ANEXO I: Formulação para o problema plano de contato mecânico .....</b>	<b>90</b>
<b>ANEXO II: Solução Hertziana para o problema plano de contato mecânico entre cilindros.....</b>	<b>96</b>
<b>ANEXO III: Propriedades do Al 7050-T7451.....</b>	<b>101</b>
<b>ANEXO IV: Rotina para calculo dos índices de resistência a fadiga PRH e SL .....</b>	<b>104</b>
<b>ANEXO V: Sub-rotina para cálculo do campo de tensão .....</b>	<b>110</b>
<b>ANEXO VI: Sub-rotina para solução da função potencial de Muskhelishvili .....</b>	<b>114</b>
<b>ANEXO VII: Sub-rotina para cálculo da tensão de Von Mises .....</b>	<b>116</b>
<b>ANEXO VIII: Sub-rotina para aplicação do modelo PRH .....</b>	<b>117</b>
<b>ANEXO IX: Sub-rotina para aplicação do modelo SL .....</b>	<b>119</b>

## ANEXO I: Formulação para o problema plano de contato mecânico

A figura (1) mostra um semi-plano sujeito a uma força por unidade de comprimento com componentes normal,  $P$ , e tangencial,  $Q$

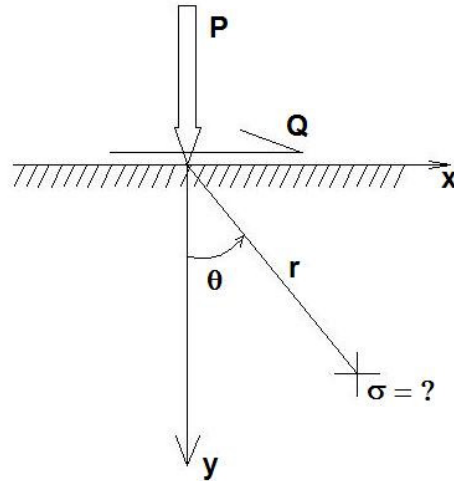


Figura I.1: Semi-plano submetido às forças normal e tangencial.

Assumi-se que o semi-plano está num estado plano de deformação, o estado de tensão pode ser dado como a solução da função de Airy na equação biharmônica (Timoshenko e Goodier, 1951).

$$\phi(r, \theta) = -\frac{r\theta}{\pi} (P \sin \theta + Q \cos \theta), \quad (1)$$

Substituindo na equação biharmônica tem-se o campo de tensão:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{\pi r} (P \cos \theta - Q \sin \theta), \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \tau_{r\theta}. \quad (3)$$

e utilizando a Lei de Hooke obtém-se o campo de deformação correspondente:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{8\mu} \{ \sigma_{rr}(1 + \kappa) + \sigma_{\theta\theta}(\kappa - 3) \},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{8\mu} \{ \sigma_{\theta\theta}(1 + \kappa) + \sigma_{rr}(\kappa - 3) \}, \quad (4)$$

$$\gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta} / \mu$$

Uma vez que o campo de deformação é conhecido, o deslocamento é descoberto pela integração e fazendo  $\theta = \pm \pi/2$ . Convertendo-se para coordenadas cartesianas obtêm-se as equações de deslocamento,  $u(x)$  e  $v(x)$ , mas pelo aparecimento de constantes arbitrárias inconvenientes, é normalmente preferível trabalhar em termos de derivadas de  $u(x)$  e  $v(x)$  ao longo das superfícies. Levando em conta a diferenciação e substituindo a força pela distribuição de tensões na superfície acha-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\kappa - 1}{4\mu} p(x) + \frac{\kappa - 1}{4\pi\mu} \int \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\kappa - 1}{4\mu} q(x) + \frac{\kappa - 1}{4\pi\mu} \int \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (6)$$

onde  $k = 3 - 4\nu$  no plano de deformação e  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  no plano de tensão,  $\mu$  é o módulo de rigidez,  $\nu$  é a razão de Poisson. As equações (5) e (6) dão as derivadas do deslocamento na superfície em qualquer ponto devido a distribuição de tensões normais e cisalhantes,  $(p(\xi), q(\xi))$ , aplicada sobre a superfície.

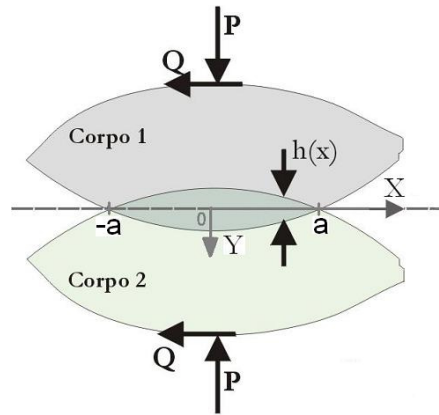


Figura I.2: Contato entre dois corpos elasticamente similares sujeitos a forças normal,  $P$ , e tangencial,  $Q$ .

Suponha agora que tenha dois corpos trazidos ao contato pela aplicação de forças normais e cisalhantes,  $P$  e  $Q$ , Fig. (2). Dois pontos correspondentes na superfície terão agora uma componente de deslocamento na direção  $y$  dada por  $v_1(x) - v_2(x)$ . Empregando a equação (8) para cada corpo, com uma mudança apropriada do sinal para o corpo 1, na área de contato, acha-se:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\xi) d\xi}{\xi + x} - \beta q(x), \quad (7)$$

onde  $h(x) = v_1(x) - v_2(x)$  que é a quantia da superposição que ocorrerá se os corpos em contato pudessem interpenetrar livremente um ao outro. Similarmente, se o deslocamento tangencial relativo dos pontos correspondentes em contato é  $g(x)$ , então:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} + \beta p(x), \quad (8)$$

onde  $g(x) = u_1(x) - u_2(x)$  é o deslocamento relativo das superfícies em contato e sendo

$$A = \frac{\kappa_1 - 1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2 - 1}{4\pi\mu_2} = 2 \left\{ \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2} \right\}, \quad (9)$$

$$\beta = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)} = \frac{1}{A} \left\{ \frac{(1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)}{E_1} + \frac{(1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2)}{E_2} \right\}, \quad (10)$$

$$\Gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (11)$$

onde  $E_i$  é o módulo de Young do corpo  $i$ ,  $A$  é a flexibilidade composta e  $\beta$  é o parâmetro de Dundurs (Dundurs, 1989).

Para quando não existe tensão cisalhante na superfície, isto é, materiais elasticamente similares ou por o contato ser sem atrito, a equação (10) é simplificada ( $\beta = 0$ ). E a inversão dessa equação (Muskhelishvili(1953), Hills, Nowell e Sackfield(1993)), é a solução para  $p(x)$ , dado  $h(x)$ .



$$p(x) = -\frac{w(x)}{A\pi} \int \frac{h'(\xi)d\xi}{w(x)(\xi-x)} + Cw(x), \quad (12)$$

onde o contato estende-se de  $x = -a$  até  $x = a$ ,  $h' = \partial h / \partial x$  é a função fundamental e  $w(x)$  pode ter uma das quatro formas (tabela 1), dependendo do comportamento requerido de  $p(x)$  no ponto final do contato.

Tabela I.1: funções fundamentais para a inversão das equações integrais singulares de primeiro tipo.

<i>Comportamento na extremidade do contato</i>		$w(x)$	$C$
$x=-a$	$x=a$		
N	S	$\sqrt{\frac{(a+x)}{(a-x)}}$	0
S	N	$\sqrt{\frac{(a-x)}{(a+x)}}$	0
S	S	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	Não zero
N	N	$\sqrt{a^2-x^2}$	0*
S = singular, N = não-singular			
*Condição de consistência $\int_{-a}^a \frac{h'(\xi)}{w(x)} d\xi = 0$ adicional tem que ser imposto.			

Para problemas planos o campo de tensão interno e o deslocamento na superfície é deduzido pelo potencial de Muskhelishvili (Muskhelishvili,(1953), Glandwell,(1980), Hills, Nowell e Sackfield,(1993)).

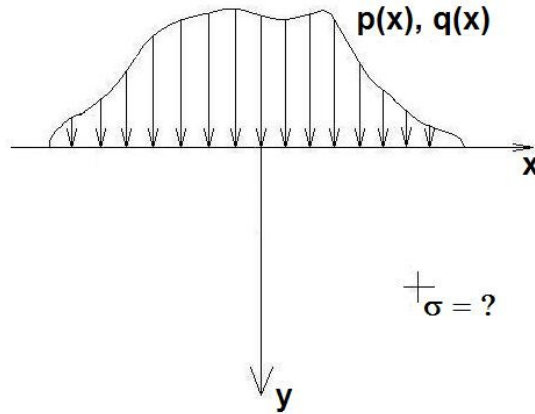


Figura I.3: Semi-plano carregado normal e tangencialmente na superfície, aplicado sobre o contato.

O potencial,  $\phi$ , é uma função de posição,  $z$ , que é uma coordenada complexa ( $= x+iy$ ). A geometria e a coordenada é mostrada na Fig. (3), e o potencial é achado levando em conta a seguinte integral de contorno ao longo da linha de contato com deslizamento, então:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{contato}} \frac{p(t) - iq(t)}{t - z} dt, \quad (13)$$

onde,  $p(t)$  e  $q(t)$  são distribuições de tensão na superfície. Para a região de escorregamento, admitindo-se  $|q(x)| = -fp(x)$ :

$$\phi(z) = \frac{1-2if}{2\pi i} \int_{\text{contato}} \frac{p(t)}{t - z} dt, \quad (14)$$

Uma vez que o potencial é descoberto as componentes de tensão são definidas por:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})), \quad (15)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2((\bar{z} - z)\phi'(z) - \bar{\phi}(z) - \phi(z)). \quad (16)$$

Em operações seguintes com o potencial  $\phi$  serão necessários:  $\phi'(z)$  que implica na diferenciação em relação a  $z$ , e a notação  $\bar{\phi}(\bar{z})$  que implica determinar o conjugado de  $\phi$  e

substituir o argumento por  $\bar{z}$ ,  $\bar{\phi}(z)$  que implica determinar o conjugado da função. Assim, uma vez que  $\phi$  é conhecido obtém-se diretamente as outras funções necessárias. Os campos de deslocamento também são requeridos, mas por conveniência somente suas derivadas são importantes para o problema plano. Empregando a Lei de Hooke (Eq. 4) em conjunto com as equações Eqs. (14) e (15):

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\bar{z} - z) \bar{\phi}'(\bar{z}) + \phi(\bar{z}) + \kappa \phi(z). \quad (17)$$

## ANEXO II: Solução Hertziana para o problema plano de contato mecânico entre cilindros

O problema de contato clássico e bem definido que admite uma solução exata é o que ocorre entre dois cilindros infinitamente longos e paralelos. Na prática o problema ideal não ocorre por causa dos efeitos do fim do contato que gera uma concentração local de tensão severa. Mas, longe do fim do contato o estado de tensão ocasionado nesse caso, é próximo ao bidimensional, assim sendo a solução para o plano uma aproximação satisfatória.

A solução descrita é aplicada se ambos os corpos forem curvados com perfil circular (côncavo ou convexo) sendo que o raio da curvatura é muito maior em comparação com o tamanho do contato,  $2a$ , para alcançar a não conformabilidade. Isso é necessário para que ambos os elementos possam ser aproximados por semi-planos, mas tem a implicação adiante de que o perfil relativo local no ponto do contato pode ser idealizado como uma parábola, o que permite  $h'(x)$  na Eq. (15) ser escrita em uma forma simples e o resultado integral ser avaliado analiticamente. A equação que obtém a superposição na livre interpenetração dos corpos (Fig. (2)) é:

$$h(x) = \Delta - \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow \frac{dh}{dx} = -kx, \quad (18)$$

onde  $k$  é a curvatura relativa, dada por

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (19)$$

e  $R_1, R_2$  são os raios das superfícies em contato. Note que se um dos corpos é côncavo, o raio de curvatura correspondente tem que ser considerado como negativo.

Pela tabela (1) a Eq. (12) torna-se

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{k\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - x^2}(\xi - x)}. \quad (20)$$

Resolvendo a integral singular de Cauchy de 1ª ordem, tem-se:

$$p(x) = -\frac{k}{A} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (21)$$

A distribuição de pressão resultante é elíptica, mas o resultado é de uso limitado nessa forma, quando a metade do tamanho do contato,  $a$ , é desconhecido. Isso pode ser remediado garantindo equilíbrio entre a pressão no contato e a carga aplicada,  $P$ , isto é:

$$P = -\int_{-a}^a p(\xi) d\xi = \frac{\pi k a^2}{2A}, \quad (22)$$

$$p(x) = -p_o \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}. \quad (23)$$

sendo

$$-p_o = \frac{2P}{\pi a}, \quad (24)$$

onde  $p_o$  é o pico da pressão no contato. Com a distribuição de tensão na superfície resolvida, pode se encontrar os campos de tensão e deslocamento através da função potencial de Muskhelishvili, obtida substituindo a Eq.(23) na Eq. (14):

$$\phi(z) = \frac{-(1-if)}{2\pi i} \frac{p_o}{a} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x - z} dx, \quad (25)$$

$$\phi(z) = -\frac{p_o}{2a} (i + f) \left( z - \sqrt{z^2 - a^2} \right). \quad (26)$$

E com isso pode-se determinar:

$$\phi'(z) = -\frac{p_o}{2a} (i + f) \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right), \quad (27)$$

$$\bar{\phi}(z) = -\frac{p_o}{2a}(-i+f)\left(z - \sqrt{z^2 - a^2}\right), \quad (28)$$

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = -\frac{p_o}{2a}(-i+f)\left(\bar{z} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}\right), \quad (29)$$

Das Eqs. (26) a (29) o campo de tensão e deslocamento podem ser encontrados pelas Eqs. (15), (16) e (17). Pode-se também trabalhar com variáveis reais ao invés de complexas, e para isto tem-se que (ver Smith e Liu, 1953, Poritsky, 1950 e M'Ewan, 1949):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^n}{p_o} &= \frac{y}{a} \left\{ 2 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - \frac{x^2 s^3 a^2}{(a^2 + s^2)^{3/2} (s^4 + y^2 a^2)} \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}^n}{p_o} &= -\frac{2\nu y}{a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - 1 \right\}, \\ \tau_{xz}^n &= \tau_{yz}^n = 0, \\ \frac{\sigma_{yy}^n}{p_o} &= \frac{-y^3 a \sqrt{a^2 + s^2}}{s(s^4 + y^2 a^2)}, \\ \frac{\tau_{xy}^n}{p_o} &= -\frac{xy^2 sa}{\sqrt{a^2 + s^2} (s^4 + y^2 a^2)}, \\ \frac{\sigma_{xx}^t}{fp_o} &= -\frac{2x}{a} \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right) + \frac{xy^2 sa}{\sqrt{a^2 + s^2} (s^4 + y^2 a^2)}, \\ \frac{\sigma_{zz}^t}{fp_o} &= -\frac{2\nu x}{a} \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right), \\ \frac{\sigma_{yy}^t}{f} &= \tau_{xy}^n, \\ \frac{\tau_{xy}^t}{f} &= \sigma_{xx}^t, \\ \tau_{xz}^t &= \tau_{yz}^t = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

onde os subscritos  $n$  e  $t$  denotam tensões devido as componentes normal e tangencial na superfície do carregamento, respectivamente, e  $\nu$  a razão de Poisson, e sendo:

$$\frac{x^2}{a^2 + s^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1, \quad (31)$$

$$s^2 = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 - x^2 - y^2) + \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2} \right\}.$$

Pode-se notar que no interior do contato quando  $y \rightarrow s, s \rightarrow 0$  e então:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y^2}{s^2} \right) = a^2 - x^2, |x| < a. \quad (32)$$

No exterior do contato quando  $y \rightarrow s, s \rightarrow \infty$ , e então:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y}{s} \right) = 0. \quad (33)$$

Dessa forma, no interior do contato as tensões superficiais são dadas por:

$$\frac{\sigma_{xx}^n}{p_o} = \frac{\sigma_{yy}^n}{p_o} = \frac{\tau_{xy}^n}{fp_o} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_{xx}^t}{p_o} = -2 \frac{x}{a} \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^t}{fp_o} = \frac{\tau_{xy}^n}{p_o} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^n}{p_o} = -2\nu \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \quad (37)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^t}{fp_o} = -2\nu \frac{x}{a} \quad (38)$$

No exterior do contato, as componentes de tensão devido a carga normal desaparecem, restando apenas as associadas as tensões tangenciais, que são:

$$\frac{\sigma_{yy}^t}{fp_o} = \frac{\tau_{xy}^n}{p_o} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\sigma'_{xx}}{fp_o} = -\frac{2x}{a} + \frac{2\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \operatorname{sgn}(x) \quad (40)$$

$$\frac{\sigma'_{xx}}{fp_o} = -2\nu \left[ x + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \operatorname{sgn}(x) \right] \quad (41)$$



## ANEXO III: Propriedades do Al 7050-T7451

- **Microdureza:**

Tabela III.1: Medidas de microdureza Vickers (HV 25gf) apresentadas pela liga Al7050-T7451

<b>Sentido</b>	<b>S</b>	<b>L</b>	<b>T</b>
<b>1</b>	158,5	171,3	175,6
<b>2</b>	155,7	160,4	99,8
<b>3</b>	159,4	159,4	174,4
<b>4</b>	153,1	158,5	176,6
<b>5</b>	141,6	165,2	186,8
<b>6</b>	153,1	169,2	167,2
<b>Média</b>	<b>153,6 ± 2,62</b>	<b>164,0 ± 2,21</b>	<b>163,4 ± 12,98</b>

- **Tração:**

Tabela III.2: Propriedades de tração da liga Al7050-T7451

<b>Limite de Escoamento (MPa)</b>	<b>Limite de Resistência (MPa)</b>	<b>Módulo de Elasticidade (GPa)</b>
453,78 ± 2,81	513,25 ± 4,14	73,4 ± 2,0

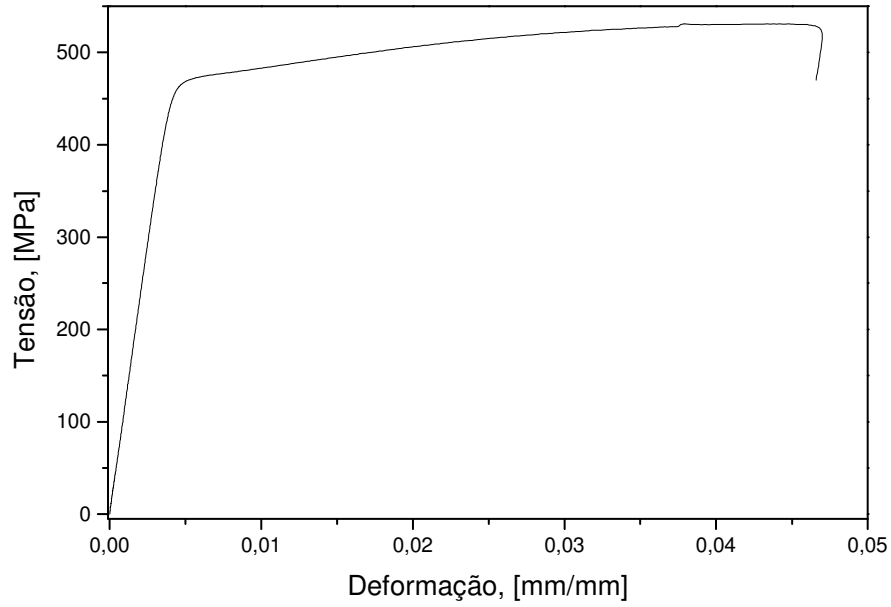


Figura III.1 – Curva tensão x deformação da liga Al7050-T7451

- **Fadiga:**

Tabela III.3: Amplitude de Tensão e vida para tensão média de 0 MPa.

$\sigma_a$ (MPa)	$N$ (Ciclos)
436	330
400	1816
400	2650
300	16936
300	19836
300	26391
205	83927
205	89910
205	115007
180	$3,81 \times 10^6$
180	$2,27 \times 10^6$
155	$1 \times 10^7$

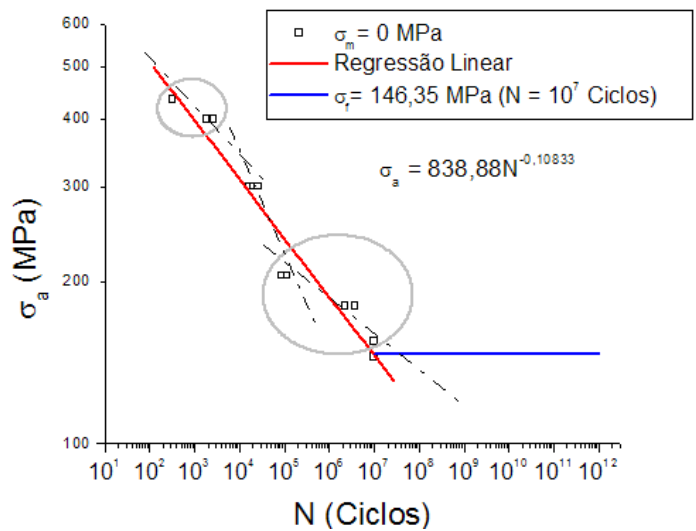


Figura III.2: Curva  $\sigma_a \times N$  para Al 7050-T7451 com

$$\sigma_m = 0 \text{ MPa} .$$

Tabela III.4: Amplitude de Tensão e vida para tensão média de 120 MPa.

$\sigma_a$ (MPa)	$N$ (Ciclos)
120	$8,14697 \times 10^6$
120	$1,00311 \times 10^7$
147	133467
147	93406
147	90548
223	24918
223	27362
223	24681
310	9592
100	$1 \times 10^7$
133	101040
133	423957

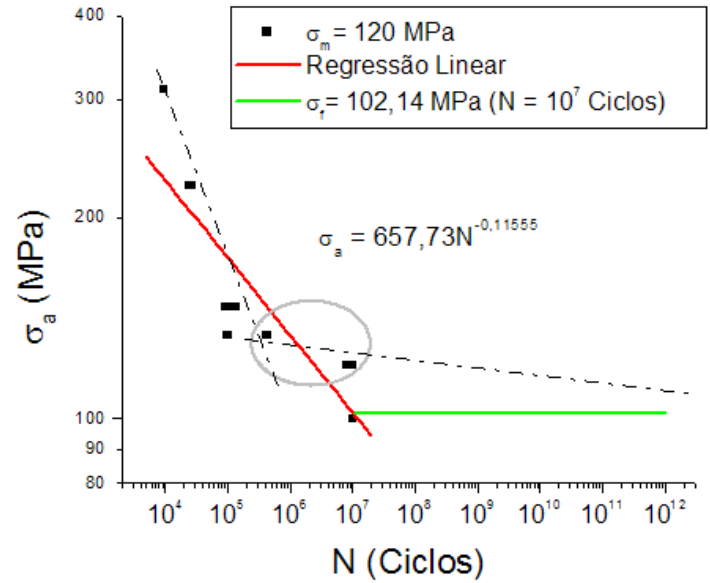


Figura III.3: Curva  $\sigma_a \times N$  para Al 7050-T7451 com  $\sigma_m = 120 \text{ MPa}$ .

• **Fadiga por *Fretting*:**

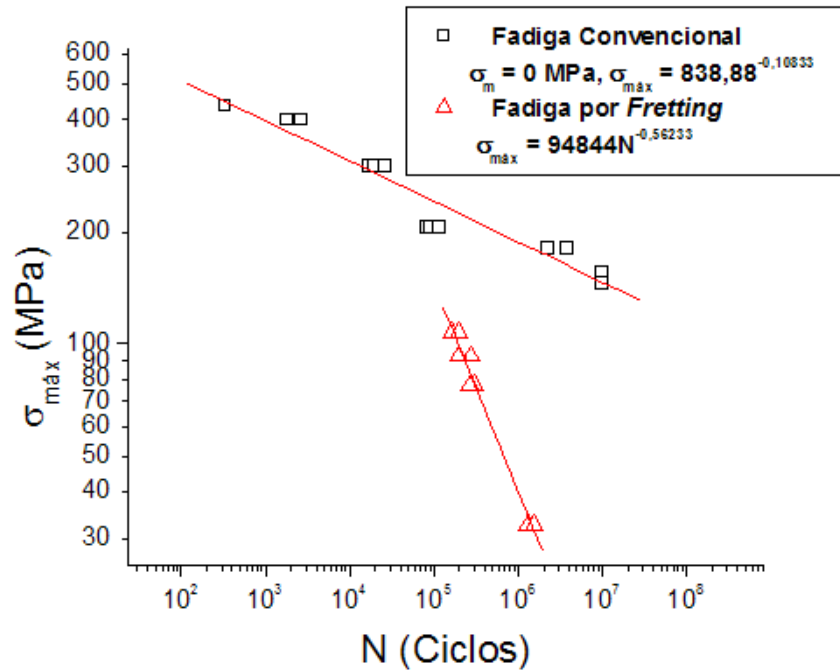


Figura III.4: Curva  $\sigma_{m\acute{a}x} \times N$  comparativa entre fadiga convencional e por *fretting* para Al 7050-T7451.



```

%f=input('Defina o coeficiente de atrito:');

Sy=453.78; % tensao de escoamento do material em MPa

% 3) Limites de Resistencia a Fadiga, considerando N=10^7 Ciclos:
f_1=146.4;  %(MPa) carregamento de flexao alternada (Sigma_m=0)- limite de fadiga
axial (R = -1)
f_120=102.2;  %(MPa) carregamento de flexao flutuante (Sigma_m=120)- limite de
fadiga axial (R > 0)
s_m=120;          %(MPa) Tensao media do carregamento de flexao flutuante
(Sigma_m=120)
DKth = 2.0; R = 0.1;  % limite de propagação (R = 0.1)

% 4) Distancia Critica - Paper Alex (entregue junto com as rotinas titanio dia 24-02-
2006)
%a0=0.015; %(mm)%

%Para PRH
% alpha = sqrt(3)*(f_1-f_120)/(s_m+f_120-f_1);
% beta = (f_1*s_m)/(sqrt(3)*(s_m+f_120-f_1));
% a0 = (1/(2*pi))*((sqrt(3)+4*alpha*(1-R)^-1)/(6*beta))^2*(DKth^2)*10^3 % distancia
critica [mm]

%Para Susmel_Lazzarin
alpha = (f_1*f_120 - f_120^2)/(2*s_m);
beta = alpha + 0.5*f_1;
a0 = ((1/(32*pi))*((1-R)/(beta*(1-R)-2*alpha))^2*(DKth^2)*10^3; % distancia critica
[mm]

% 5) Constantes calculadas:
A=4*(1-v^2)/E;
k=1/R_sapata;
a=A*Po/k;  %(mm)tamanho do contato

```

$b_a=(L/2)/a$ ; %(adimensional) relacao da espessura do CP e o Tamanho do contato

% 6) Carregamentos calculados:

$P_L=(P_o*\pi*a)/2$  ; % (N/mm) carga normal/largura do contato

$P=P_L*L$ ; %(N) carga normal

$Q_{limite}=P*f$  ; %(N) limiar da carga Q para escorregamento total

$Q_{limite}_L=P_L*f$  ; %(N/mm) limiar da carga Q para escorregamento total

%%  
%%  
%%

% 7) Coordenadas do Ponto em Estudo

$x=-1$ ; % x adimensionalizado com relacao a "a"

% 8) Carga cisalhante

% porcentagem=0.5; % Condicao de teste

%  $Q_{max}=porcentagem*f*P$ ;

% $Fo_a=7.29*Q_{max}$ ; %(N) Amplitude de forza remota/Condicao do dispositivo;

$Fo_m=\sigma_{B_m}*L^2$  ; %(N) forza remota media

$Fo_a = \sigma_{B_a} * L^2$ ;

$Fo_{a_Q} = 7.29$ ;

$Q_{max} = (Fo_a) / Fo_{a_Q}$ ;

$\sigma_{B_a}=Fo_a/(L^2)$ ; %(MPa) Tensao remota - amplitude

% 9) Calculo das Cargas Adimensionais

$Q_{max_fP}=Q_{max}/(f*P)$ ;

$Q_{max_P}=Q_{max}/P$ ;

$Q_{max_L}=Q_{max}/L$ ;

$\sigma_{bulk_m}=\sigma_{B_m}/P_o$ ;

$\sigma_{bulk_a}=\sigma_{B_a}/P_o$ ;

$Sy_{Po}=Sy/P_o$ ; %tensao de escoamento normalizada

%%% Funcao de listagem do dados de entrada

dispentrada



```

    end
end

% Criterio da Energia de Distorcao para materiais Ducteis - Von Mises

mises=mises(f,v,Qmax_fP,sigma_bulk_m,sigma_bulk_a,Sy_Po,Po);

M_max=max(max(mises));

    if M_max>=Sy_Po
        escoamento=1;

    else
        escoamento=0;

    end

if escoamento==1
    disp('2. Escoamento Acontecendo!!!')
    disp(['Tensao de mises: ',num2str(M_max*Po),' MPa',' >= ',num2str(Sy),' MPa'])
    break
else

    disp('2. Escoamento nao esta Acontecendo!!!')
    disp(['Tensao de mises: ',num2str(M_max*Po),' MPa',' < ',num2str(Sy),' MPa'])

end

% disp('_____')
%numero de subdivisoes do angulo

nangle=180;

```



```

if CondEscorreg==0

PRH=PRH_v3(f_1/Po,f_120/Po,s_m/Po,sigma_xx,sigma_yy,sigma_zz,sigma_xy,sigma
_xz,sigma_yz);
    disp('_____')
    disp('Resultado da Analise multiaxial pelo Criterio de Mamiya_Araujo:')
    disp(['MA(',num2str(x),',',num2str(y),') =',num2str(PRH)])

%   disp('Processando Susmel. Aguarde...')
%
SU=susmel_v3(f_1/Po,f_120/Po,s_m/Po,nangle,sigma_xx,sigma_yy,sigma_zz,sigma_x
y,sigma_xz,sigma_yz);
%
%   disp('_____')
%   disp('Resultado da Analise multiaxial pelo Criterio de Susmel:')
%       disp(['SU(',num2str(x),',',num2str(y),') =',num2str(SU)])

end

```

## ANEXO V: Sub-rotina para cálculo do campo de tensão

```
function
[tensor,CondEscorreg]=tensor_no_tempo_v4(x,y,f,ni,Qmax_fP,sigma_bulk_m,sigma_b
ulk_a,tempo)

K=12; %Periodo
CondEscorreg=0;
%nas entradas de sigma_bulk deve-se introduzir os valores ja normalizados com
relacao a carga normal P
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Universidade de Brasilia, Departamento de Engenharia Mecanica
%Software usado para calcular as tensoes num contato de Escorregamento Total
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Input : x,y,f,ni,Qmax_fP,sigma_bulk_max,tempo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Lista de Variaveis:
% x      - Coordenada da abcissa
% y      - Coordenada da ordenada
% f      - Coeficiente de atrito
% ni     - Coeficiente de poisson
%sigma_bulk_max - Tensao remota maxima normalizada em relacao a Po
% Qmax_fP - razao entre a carga cisalhante por unidade de comprimento 'Q' e o
produto do coeficiente de atrito 'f' com a Forca normal por unidade de comprimento 'P'.
% tempo  - instante de calculo do tensor tensao (0<=tempo<=K)
% coa    - razao entre o tamanho da zona de adesao e o tamanho do contato
% SxxP   - sigma xx devido a carga normal
% SyyP   - sigma yy devido a carga normal
% TxyP   - tal xy devido a carga normal
% SxxQ   - sigma xx devido a carga de fretting
```

```

% SyyQ      - sigma yy devido a carga de fretting
% TxyQ      - tal xy devido a carga de fretting
% Sxx,Syy,Txy - Componentes da tensao Total
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Output : Sxx , Syy , Txy
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%condicoes de contorno para a funcao tensao2
if x==0
    x=realpow(10,-13);
end
if y==0
    y=realpow(10,-13);
end

Q_fP  = Qmax_fP*sin(2*pi*tempo/K);
sigma_bulk = sigma_bulk_a*sin(2*pi*tempo/K);
%Julga o tempo e aplica o "Lsituation" correto
if tempo==K/4
    Lsituation=1;
elseif tempo>K/4 & tempo<3*K/4
    Lsituation=2;
elseif ((tempo>=0 & tempo<K/4) | (tempo>3*K/4&tempo<=K))
    Lsituation=3;
elseif tempo==3*K/4
    Lsituation=4;
end
if Lsituation==2|Lsituation==4
    s=1;
else
    s=-1;
end

```

```

DQ_fP = abs( Qmax_fP - s*Q_fP );
Dsigma_bulk = abs( sigma_bulk_a - s*sigma_bulk );
coa=sqrt(1-abs(Qmax_fP));
eoa=abs(sigma_bulk_a)/(4*f);

%%%%%%%%%% alerta de escorregamento reverso %%%%%%%%%%%
if coa+eoa>=1
    disp('Escorregamento reverso Acontendo!!!')
    disp('Diminua o valor de Sigma_B_max ou aumente Qmax/fP!!!')
    disp(['c/a+e/a = ',num2str(coa+eoa)])
    CondEscorreg=1;
    break
end

%%%%%%%%%% alerta de escorregamento total %%%%%%%%%%%
if Qmax_fP>=1
    disp('Escorregamento total Acontendo!!!')
    disp('Diminua o valor de Qmax_fP!!!')
    disp(['Qmax_fP = ',num2str(Qmax_fP)])
    CondEscorreg=1;
    break
end

%%%%%%%%%%
if Lsituation==2 | Lsituation==3
    cloa=sqrt( 1 - ( DQ_fP)/2 );
    eloa=abs( Dsigma_bulk )/(8*f);
    [a,b,c,Sxxq1,Syyq1,Txyq1]=tensao2((x-eloa)/cloa,y/cloa,f);
end

[SxxP,SyyP,TxyP,SxxQ,SyyQ,TxyQ]=tensao2(x,y,f);
[a,b,c,Sxxq,Syyq,Txyq]=tensao2((x-eoa)/coa,y/coa,f);

```

% situation	loadsituation	sigma_P	sigma_Q	sigma_q	sigma_ql
sigma_bulk					
% loading and Qmax	1		+	+	- 0
+					
% Qmin	4		+	-	+ 0
+					
% unloading	2	+	-	-	+ +
% reloading	3	+	+	+	- +

if Lsituation==1

Sxx = SxxP + f\*SxxQ - f\*coa\*Sxxq + sigma\_bulk + sigma\_bulk\_m;

Syy = SyyP + f\*SyyQ - f\*coa\*Syyq;

Txy = TxyP + f\*TxyQ - f\*coa\*Txyq;

elseif Lsituation==2

Sxx = SxxP - f\*SxxQ - f\*coa\*Sxxq + 2\*f\*cloa\*Sxxql + sigma\_bulk + sigma\_bulk\_m;

Syy = SyyP - f\*SyyQ - f\*coa\*Syyq + 2\*f\*cloa\*Syyql;

Txy = TxyP - f\*TxyQ - f\*coa\*Txyq + 2\*f\*cloa\*Txyql;

elseif Lsituation==3

Sxx = SxxP + f\*SxxQ + f\*coa\*Sxxq - 2\*f\*cloa\*Sxxql + sigma\_bulk + sigma\_bulk\_m;

Syy = SyyP + f\*SyyQ + f\*coa\*Syyq - 2\*f\*cloa\*Syyql;

Txy = TxyP + f\*TxyQ + f\*coa\*Txyq - 2\*f\*cloa\*Txyql;

elseif Lsituation==4

Sxx = SxxP - f\*SxxQ + f\*coa\*Sxxq + sigma\_bulk + sigma\_bulk\_m;

Syy = SyyP - f\*SyyQ + f\*coa\*Syyq;

Txy = TxyP - f\*TxyQ + f\*coa\*Txyq;

end

Szz = ni\*(Sxx + Syy);

Txz = 0;

Tyz = 0;

tensor=[Sxx Txy Txz;

Txy Syy Tyz;

Txz Tyz Szz];

## ANEXO VI: Sub-rotina para solução da função potencial de Muskhelishvili

```

function [ SxxP , SyyP , TxyP , SxxQ , SyyQ , TxyQ ] = tensao2 ( x , y , f )

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Universidade de Brasilia, Departamento de Engenharia Mecanica
%Software usado para calcular as tensoes num contato de Escorregamento Total
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Input : x , y , f
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Lista de Variaveis:
% x      - Coordenada da abcissa
% y      - Coordenada da ordenada
% f      - coeficiente de atrito
% z , w  - Numero complexo que exprime a posicao do ponto em estudo e o seu
respectivo conjugado
% s      - Variavel que determina o sinal nas expressoes de A , B ,C e D
% A      - Funcao potencial
% B      - Derivada da funcao potencial
% C      - Conjugado da funcao potencial
% D      - conjugado da funcao potencial do argumento
% j      - unidade imaginaria
% SxxP   - sigma xx devido a carga normal
% SyyP   - sigma yy devido a carga normal
% TxyP   - tal xy devido a carga normal
% SxxQ   - sigma xx devido a carga de fretting
% SyyQ   - sigma yy devido a carga de fretting
% TxyQ   - tal xy devido a carga de fretting
% Sxx,Syy,Txy - Componentes da tensao Total

```

```
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%
```

```
%Output : SxxP , SyyP , TxyP, SxxQ , SyyQ , TxyQ
```

```
%%%%%%%%%%
```

```
z=x+y*j;
```

```
w=x-y*j;
```

```
s=sign(x);
```

```
A=-1/2*(j)*(z-s*sqrt(z*z-1));
```

```
B=-1/2*(j)*(1-s*z/sqrt(z*z-1));
```

```
C=-1/2*(-j)*(z-s*sqrt(z*z-1));
```

```
D=-1/2*(-j)*(w-s*sqrt(w*w-1));
```

```
R=(w-z)*B-C+D;
```

```
SyyP=real(R);
```

```
TxyP=imag(R);
```

```
SxxP=2*(A+D)-SyyP;
```

```
SyyQ=TxyP;
```

```
TxyQ=SxxP;
```

```
A=-j*(j+f)*A;
```

```
B=-j*(j+f)*B;
```

```
C=j*(-j+f)*C;
```

```
D=j*(-j+f)*D;
```

```
R=(w-z)*B-C+D;
```

```
Syy=real(R);
```

```
%Txy=imag(R);
```

```
Sxx=2*(A+D)-Syy;
```

```
%Sxx=2*(A+D)-Syy;
```

```
SxxQ=(Sxx-SxxP)/f;
```

## ANEXO VII: Sub-rotina para cálculo da tensão de Von Mises

```
function mises=mises(f,v,Qmax_fP,sigma_bulk_m,sigma_bulk_a,Sy_Po,Po)
n_div=4;
n=2/n_div;
delta=1/n;
y=0;
i=0;
for tempo=0:1:12 %Doze intervalos de tempo
    for x=-1:n:1

[tensor,CondEscorreg]=tensor_no_tempo_v4(x,y,f,v,Qmax_fP,sigma_bulk_m,sigma_bulk_a,tempo);

        sigma_xx(tempo+1)=tensor(1,1);
        sigma_yy(tempo+1)=tensor(2,2);
        sigma_zz(tempo+1)=tensor(3,3);
        sigma_xy(tempo+1)=tensor(1,2);
        sigma_xz(tempo+1)=tensor(1,3);
        sigma_yz(tempo+1)=tensor(2,3);

        %i=(x*delta)+(delta+1);
        i=i+1;

        mises(i,tempo+1)=1/sqrt(2)*((sigma_xx(tempo+1)-
sigma_yy(tempo+1))^2+(sigma_yy(tempo+1)-
sigma_zz(tempo+1))^2+(sigma_zz(tempo+1)-
sigma_xx(tempo+1))^2+6*(sigma_xy(tempo+1)^2+sigma_yz(tempo+1)^2+sigma_xz(t
empo+1)^2))^(1/2);
        end
    end
mises;
```



## ANEXO VIII: Sub-rotina para aplicação do modelo PRH

```
function PRH=PRH_v3(f_1,f_120,s_m,Sxx,Syy,Szz,Txy,Txz,Tyz)
ndiv=180;
Dtheta=(pi/2)/ndiv;

s1=sqrt(3/2)*(2/3*Sxx-1/3*(Syy+Szz));
s2=sqrt(2)/2*(Syy-Szz);
s3=sqrt(2)*Txy;
s4=sqrt(2)*Tyz;
s5=sqrt(2)*Txz;

dime=length(s1);

A1=[s1(1),s2(1),s3(1)];
  A2=[s1(5),s2(5),s3(5)];
  A3=[s1(10),s2(10),s3(10)];

a1=A2-A1;
a2=A3-A2;
a3=[ det([a1([2 3]); a2([2 3])),-det([a1([1 3]); a2([1 3]))] , det([a1([1 2]); a2([1 2]))]);

r1=a1/sqrt(dot(a1,a1));
r3=a3/sqrt(dot(a3,a3));

R2= [ det([r1([2 3]); r3([2 3])),-det([r1([1 3]); r3([1 3]))] , det([r1([1 2]); r3([1 2]))]);
r2=R2/sqrt(dot(R2,R2));

I_R_S=[r1' r2' r3'];
I_S_R=inv(I_R_S);

for t=1:dime
  HC_R(:,t)=I_S_R*[s1(t);s2(t);s3(t)];
```

```

end

i=0;
for theta=0:Dtheta:pi/2
    i=i+1;

    Mrot=[cos(theta) sin(theta) 0; -sin(theta) cos(theta) 0; 0 0 1];

    for t=1:dime
        HC(:,t)=Mrot*HC_R(:,t);
    end
    d(i)=1/2*sqrt( ( max(HC(1,:)) - min(HC(1,:)) )^2 + ( max(HC(2,:)) - min(HC(2,:)) )^2 );
end

tau_a=max(d);
phmax=1/3*max(Sxx+Syy+Szz);

kappa_prh=sqrt(2)*(f_120-f_1)/(f_1-(s_m+f_120))
lambda_prh=sqrt(2/3)*f_1+kappa_prh*f_1/3
    tau_a_ma=tau_a
    phmax_ma=phmax

PRH=(tau_a+kappa_prh*phmax-lambda_prh)/lambda_prh;

```

## ANEXO IX: Sub-rotina para aplicação do modelo SL

```
function
SL=susmel_v3(f_1,f_120,s_m,nangle,sigma_xx,sigma_yy,sigma_zz,sigma_xy,sigma_x
z,sigma_yz)
% Hit 1 to show
plotdistribution=1;

nt=length(sigma_xx);
nsteps=pi/nangle;
sigma_max=0;
tau_a=0;
rho = 0;
k = 1;
%tol = 0.000001;
tol=10^-2;
t=cputime;
if plotdistribution==1
    i=1;
end
for phi=0:nsteps:pi
    if plotdistribution==1
        j=1;
    end
    for theta=0:nsteps:pi

output=calc_teq(sigma_xx,sigma_yy,sigma_zz,sigma_xy,sigma_xz,sigma_yz,theta,phi)
        sigma_n_max_v(k)=output(2);
            tau_a_v(k)=output(1);
            theta_max_v(k)=theta;
            phi_max_v(k)=phi;
        k = k + 1;

        %if output(1) > tau_a
```

```

        %     sigma_n_max_n=output(2);
        %     tau_a_n=output(1);
        %     theta_max_n=theta;
        %     phi_max_n=phi;

% end
    if output(1) > tau_a
        tau_a=output(1);
        sigma_n_max=output(2);
        theta_max = theta;
        phi_max  = phi;
    end

    if plotdistribution==1
        outputtab(i,j,:)=output;
        j=j+1;
    end
%     [sigma_n_max tau_a phi*180/pi theta*180/pi]
    end

    if plotdistribution==1
        i=i+1;
    end
end

% sigma_n_max

for k = 1:length(tau_a_v)
%   if abs(tau_a_v(k) - tau_a) < tol
    if abs((tau_a_v(k) - tau_a)/tau_a) < tol
        if sigma_n_max_v(k) > sigma_n_max
            sigma_n_max = sigma_n_max_v(k);
            tau_a = tau_a_v(k);
            theta_max = theta_max_v(k);
            phi_max = phi_max_v(k);

```

```

        end
    end
end

if plotdistribution==1
    %psus(outputtab,nangle)
    %save 'outputtab' outputtab
end

disp(['Computation Time: ' num2str((cputime-t)/60) 'min.'])

rho=sigma_n_max/tau_a
theta_max;
phi_max;

kappa_su=(f_120-f_1)/(2*(1-(f_120+s_m)/f_120))
lambda_su=kappa_su+f_1/2

tau_a_su=tau_a
sigman_max_su=sigma_n_max

SL=(tau_a+kappa_su*rho-lambda_su)/lambda_su;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function
output=calc_teq(sigma_xx,sigma_yy,sigma_zz,sigma_xy,sigma_xz,sigma_yz,theta,phi)

% for use with susmel.m or opsusmel.m
% theta and phi must be in radian

% Initialilize function parameters
nt=length(sigma_xx);
sigma_n_max=0;

```

```

% Compute vector n
nx=sin(theta)*cos(phi);
ny=sin(theta)*sin(phi);
nz=cos(theta);

n=[nx;ny;nz];

% Compute sigma_n and tau
for t=1:nt
    sigma_t=[sigma_xx(t) sigma_xy(t) sigma_xz(t);
             sigma_xy(t) sigma_yy(t) sigma_yz(t);
             sigma_xz(t) sigma_yz(t) sigma_zz(t)];
    T=sigma_t*n;

    sigma_n(t)=dot(T,n);

    tau(:,t)=T-sigma_n(t)*n;
end
%plot3(tau(1,:),tau(2,:),tau(3,:))
[sigma_n' tau'];
% Compute tau_a
tau_a=hypsphere(tau); % with the hypersphere computation method
%tau_a=ellipsoid(tau); % with the ellipsoid method

sigma_n_max=max(sigma_n);

output=[tau_a sigma_n_max];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function t_eq=hypsphere(vetor)

[dim nt]=size(vetor);

```

```

% Compute vetor_m
for i=1:dim
    vetor_m(i,:)=(1/2)*(max(vetor(i,:))+min(vetor(i,:)));
end
% Calculo de t_eq
% t_eq = 1/2*(S,S) onde (S,S)=||A||^2 -> Norma de Forbenius de A

t_eq=0;
for t=1:nt
    t_eq_aux=(norm(vetor(:,t)-vetor_m,'fro'));
    if t_eq_aux > t_eq
        t_eq=t_eq_aux;% Toma o maior J2A
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```