

# CÁLCULO 1

Derivada e Integral  
em uma variável





**Fundação Universidade de Brasília**

**Reitor** José Geraldo de Sousa Junior  
**Vice-Reitor** João Batista de Sousa

**EDITORA**

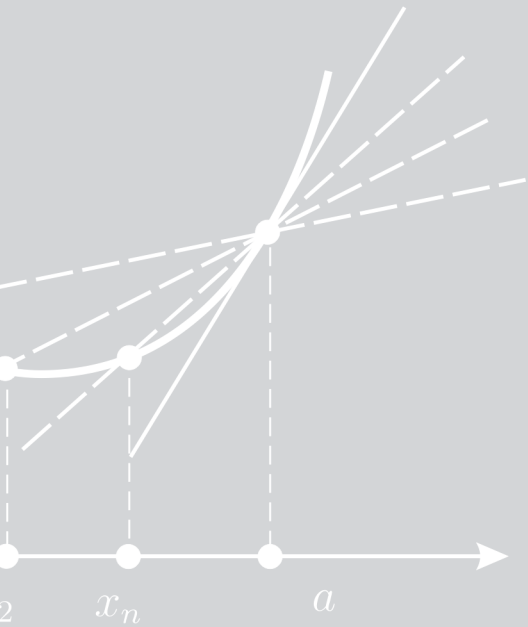


**UnB**

**Diretora** Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino

**Conselho Editorial** Angélica Madeira  
Deborah Silva Santos  
Denise Imbroisi  
José Carlos Córdova Coutinho  
Lúcia Helena Cavasin Zabotto Pulino - *Pres.*  
Roberto Armando Ramos de Aguiar  
Sely Maria de Souza Costa

**abdr**   
ASSOCIAÇÃO  
BRASILEIRA  
DE DIREITOS  
REPROGRÁFICOS  
Respeite o direito autoral

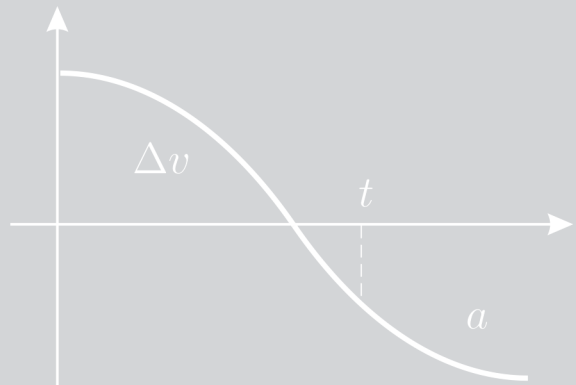


# CÁLCULO 1

Derivada e Integral  
em uma variável



Mauro Patrão



EDITORA  
UnB

***Equipe editorial***

<b>Acompanhamento editorial</b>	Mariana Carvalho
<b>Editora de publicações</b>	Nathalie Letouzé Moreira
<b>Coordenação de produção gráfica</b>	Marcus Polo Rocha Duarte
<b>Coordenação de revisão</b>	Ramiro Galas Pedrosa
<b>Capa</b>	Marcus Polo Rocha Duarte
<b>Supervisão gráfica</b>	Elmano Rodrigues Pinheiro e Luiz A. R. Ribeiro

Copyright © 2011 by  
Editora Universidade de Brasília

Impresso no Brasil  
Direitos exclusivos para esta edição:  
Editora Universidade de Brasília  
SCS, quadra 2, bloco C, no 78, edifício OK,  
2o andar, CEP 70302-907, Brasília, DF  
Telefone: (61) 3035-4200  
Fax (61) 3035-4230  
Site: [www.editora.unb.br](http://www.editora.unb.br)  
E-mail: [contato@editora.unb.br](mailto:contato@editora.unb.br)

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta  
publicação poderá ser armazenada ou reproduzida por  
qualquer meio sem a autorização por escrito da Editora.

---

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília

---

Patrão, Mauro.

P314 Cálculo 1 : derivada e integral em uma variável / Mauro Patrão. – Brasília :  
Editora Universidade de Brasília, 2011.

319 p. ; 23 cm. (Série Ensino de Graduação)

ISBN 978-85-230-1285- 4

1. Sequências. 2. Derivada. 3. Gráficos. 4. Otimização. 5. Integral. 6.  
Velocidade. 7. Aceleração. 8. Sistema massa-mola-amortecimento. 9. Sistema  
pistão- virabrequim. 10. Sistema balístico. 11. Pêndulo sem atrito. I. Título.

---

CDU 517

---

# SUMÁRIO

	5
<b>Prefácio</b>	<b>7</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Números reais . . . . .	11
1.2 Funções reais . . . . .	21
1.3 Funções inversas . . . . .	28
<b>2 Limite</b>	<b>31</b>
2.1 Aproximação da origem . . . . .	31
2.2 Limite de sequências . . . . .	41
2.3 Função exponencial . . . . .	50
2.4 Limite de funções . . . . .	57
2.5 Continuidade de funções . . . . .	70
2.6 Teorema do Valor Intermediário . . . . .	77
2.7 Continuidade de funções inversas . . . . .	81
2.8 Funções trigonométricas . . . . .	85
Exercícios . . . . .	96
<b>3 Derivada</b>	<b>101</b>
3.1 Reta tangente e velocidade . . . . .	101
3.2 Função derivada e aceleração . . . . .	114
3.3 Derivada da função exponencial . . . . .	128
3.4 Derivada de funções trigonométricas . . . . .	132
3.5 Derivada de funções compostas . . . . .	139
3.6 Derivada de funções inversas . . . . .	147
Exercícios . . . . .	153

<b>4</b>	<b>Gráficos</b>	<b>157</b>
4.1	Otimização . . . . .	157
4.2	Crescimento e concavidade . . . . .	172
4.3	Assíntotas horizontais e verticais . . . . .	183
4.4	Método de esboço de gráficos . . . . .	198
	Exercícios . . . . .	208
<b>5</b>	<b>Integral</b>	<b>213</b>
5.1	Área líquida e variação . . . . .	213
5.2	Teorema Fundamental . . . . .	222
5.3	Substituição . . . . .	233
5.4	Substituição trigonométrica . . . . .	240
5.5	Integração por partes . . . . .	245
5.6	Frações parciais . . . . .	250
5.7	Volumes, comprimentos e áreas . . . . .	261
5.8	Pêndulo sem atrito . . . . .	273
	Exercícios . . . . .	278
<b>6</b>	<b>Gabaritos de Fixação</b>	<b>283</b>
<b>A</b>	<b>Apêndices</b>	<b>291</b>
A.1	Progressões geométricas . . . . .	291
A.2	Binômio de Newton . . . . .	293
A.3	Limite e monotonicidade . . . . .	295
A.4	Derivada de funções compostas . . . . .	298
A.5	Propriedades da área . . . . .	299
A.6	Método da exaustão . . . . .	304
	Exercícios . . . . .	311
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>313</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>315</b>
	<b>Sobre o autor</b>	<b>319</b>

## PREFÁCIO

Esse livro de Cálculo foi concebido com a intenção de se desenvolver livros de Matemática apoiados em dois eixos que o autor considera estratégicos.

Um deles é a adequação desses materiais à realidade educacional brasileira, uma vez que grande parte das opções disponíveis atualmente foi concebida para lidar com a realidade educacional de países muito diversos do Brasil. Nesse sentido, esse livro se preocupa em estabelecer uma conexão próxima entre o Cálculo e alguns exemplos paradigmáticos da Mecânica, ensinados nos cursos de Física do ensino médio brasileiro. A partir do exemplo básico do lançamento vertical de um objeto na Lua, onde inexistente o atrito com a atmosfera, apresentamos o conceito cinemático de velocidade e seu correlato matemático, a derivada da função quadrática. Posteriormente, trazemos esse mesmo experimento para a Terra, onde introduzimos os efeitos da resistência do ar, o que nos permite motivar o estudo da derivada da função exponencial. Por sua vez, o problema da descrição do movimento de uma massa presa a uma mola motiva o estudo das derivadas das funções trigonométricas. Esses exemplos paradigmáticos, presentes na origem mesma da formulação do Cálculo, acompanham cada novo tópico que vai sendo introduzido e desenvolvido ao longo do texto. Isso fornece a possibilidade dos leitores experimentarem algumas das mesmas intuições vividas pelos primeiros formuladores do Cálculo.

Aliás, esse é o segundo dos eixos considerado estruturantes: oferecer abordagens múltiplas de um mesmo tópico, ora geométricas, ora algébricas, ora dinâmicas. Isso dá oportunidade ao estudante de se apoiar, em alguns momentos, nas intuições em que ele se sente mais confortável, mas também o ajuda a explorar suas habilidades ainda pouco desenvolvidas. A abordagem dinâmica está presente na definição do conceito de limite, feito através de sequências e cujo emprego já se fazia presente no método grego da obtenção de áreas por exaustão, como também no estudo da cinemática realizado pela mecânica moderna. Por sua vez, a abordagem algébrica é empregada na famosa fórmula do binômio de Newton, que é utilizada na definição da função exponencial. Já a abordagem geométrica aparece logo na definição dos números e das funções reais, bem como na definição da medida de ângulo através de áreas e dos conceitos de derivada e de integral.

## ESTRUTURA DO LIVRO

O conteúdo do livro é dividido em cinco capítulos e complementado por apêndices. No final de cada capítulo, existe uma lista de exercícios dividida entre exercícios de demonstração, destinados a exercitar a capacidade dedutiva dos estudantes, e exercícios de aplicação, destinados a apresentar mais exemplos significativos da teoria desenvolvida no capítulo. No final da maioria das seções, existe uma lista de exercícios de fixação, cujo gabarito se encontra no Capítulo 6.

No Capítulo 1, apresentamos as preliminares indispensáveis a qualquer livro de Cálculo. Os números reais e suas operações, bem como as funções reais e suas inversas, são apresentados de um ponto de vista geométrico que enfatiza a importância do plano Cartesiano nas principais definições da matemática moderna.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de limite de funções através do conceito de limite de sequências. Essa abordagem é a mais adequada aos modernos métodos numéricos de aproximações sucessivas, implementados atualmente em qualquer calculadora ou computador. Além disso, essa abordagem de limite ajuda a explorar as intuições dinâmicas por trás do conceito de limite, já presentes nos gregos desde os tempos de Zeno. Também permite oferecer demonstrações mais simples de resultados sofisticados como o Teorema do Valor Intermediário, que é provado através do Método da Bissecção. Com essa abordagem, definimos a função exponencial de modo bastante ri-



goroso e demonstramos suas propriedades fundamentais já no início do livro. As funções trigonométricas também são apresentadas de modo bastante rigoroso e se estabelece ao longo do livro um paralelo entre suas propriedades e as da função exponencial.

No Capítulo 3, o conceito de derivada é introduzido a partir do problema geométrico de definir a reta tangente e aplicamos esse conceito no estudo das antenas parabólicas. A derivada também é apresentada em conexão com o conceito de velocidade. Os conceitos de função derivada e de função derivada segunda são introduzidos de modo a se compreender os conceitos de função velocidade e de função aceleração. A derivada da função exponencial é motivada pelo estudo da velocidade de um trem-bala sendo freado pela resistência do ar. Já a derivada das funções trigonométricas é introduzida através da análise do movimento no sistema massa-mola. O estudo do movimento do pistão e do virabrequim de um motor à explosão motiva a obtenção da denominada regra da cadeia.

No Capítulo 4, é introduzida a análise do formato do gráfico de funções reais. Iniciamos esse estudo com o problema de se determinar a altura máxima de uma bola arremessada verticalmente. Através da teoria de otimização, demonstramos o Teorema do Valor Médio e o utilizamos para obter a famosa Regra de L'Hospital. Essa última é utilizada para se determinar o que ocorre no arremesso vertical com atrito à medida que o ar vai ficando cada vez mais rarefeito. Posteriormente, obtemos a relação entre o crescimento e o sinal da derivada primeira e a relação entre a concavidade e o sinal da derivada segunda de uma função. Analisamos as denominadas retas assíntotas de uma função através dos conceitos de limite no infinito e de limite infinito, que são introduzidos através do conceito de limite infinito de seqüências. No final desse capítulo, apresentamos um método passo a passo para se obter o esboço do gráfico de funções deriváveis por partes.

No Capítulo 5, introduzimos o conceito de integral a partir do conceito de área líquida. No caso do arremesso vertical sem atrito, fazemos conexão da integral com o conceito de variação do espaço e variação da velocidade. Essa conexão para movimentos gerais é estabelecida através do famoso Teorema Fundamental do Cálculo. A partir desse teorema e de suas consequências, introduzimos o conceito de integral indefinida e as denominadas técnicas de integração. Através do método de substituição, obtemos a lei da conservação da energia no sistema massa-mola. A partir da conservação da energia, utilizamos o método de substituição trigonométrica para determinarmos o movimento do sistema massa-mola. Depois de apresentarmos o método de

integração por partes, utilizamos o método das frações parciais para determinamos o movimento da suspensão de um veículo, o denominado sistema massa-mola-amortecimento. Fechamos esse capítulo determinando o movimento do pêndulo sem atrito e como utilizar a integral para obter fórmulas para volumes de sólidos de revolução, comprimentos de gráficos e áreas de superfícies de revolução.

Nos apêndices, apresentamos complementos de conteúdos utilizados na parte principal do livro. Demonstramos a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, a fórmula do binômio de Newton, a existência de limite de sequência monótonas limitadas, as propriedades da área e calculamos a área do círculo unitário através do Método de Exaustão.

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer às seguintes pessoas, ressaltando que eventuais falhas remanescentes no livro são de minha inteira responsabilidade. Agradeço ao amigo e professor Lucas Seco por ter ajudado na primeira revisão geral do livro e pelas inúmeras conversas que já tivemos relativas às melhorias do ensino do Cálculo 1. Agradeço aos meus orientandos André Caldas e Fernando Lucatelli pela ajuda com relação a formatação do livro. Agradeço ao meu estudante do Cálculo 1 Jean Carlos Neri Cardoso por sua disposição em ajudar na revisão do livro. Finalmente quero agradecer aos professores João Carlos de Pádua, Lineu Araújo, Lucas Seco e Raderson Silva por terem ajudado na elaboração da lista de exercícios de fixação.

# PRELIMINARES

## 1.1 NÚMEROS REAIS

Nesta primeira seção, indicamos como construir os números e suas operações a partir de conceitos e propriedades puramente geométricas. Para isso fazemos uso dos resultados da geometria plana euclideana. Iniciamos com a reta  $\mathbb{R}$  determinada pelos dois pontos distintos 0 e 1, garantidos pelos postulados de existência e determinação, como mostra a Figura 1.1. O ponto 0 é denominado *zero* ou *origem* e o ponto 1 é denominado *um* ou *unidade*. Os pontos sobre a reta  $\mathbb{R}$  são denominados *números reais*.



Figura 1.1: Reta real definida pelos pontos 0 e 1.

Existe uma ordem entre pares de números reais, denotada por  $<$  e denominada *à esquerda de* ou *menor que*. Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos intuitivamente que  $a < b$  se  $a$  está à esquerda de  $b$ , como ilustrado pela Figura 1.1. Podemos definir a partir da ordem  $<$  as seguintes ordens:

- (1)  $a > b$  se e só se  $b < a$ .
- (2)  $a \leq b$  se e só se  $a < b$  ou  $a = b$ .
- (3)  $a \geq b$  se e só se  $b \leq a$ .

Existe também uma relação entre pares de segmentos, denotada por  $\equiv$  e denominada *congruência de segmentos*. De maneira intuitiva, temos que dois segmentos são congruentes se cada uma das duas pontas de um *compasso* com sua abertura fixada podem ser colocadas sobre cada um dos dois extremos de cada segmento.



Figura 1.2: Adição de  $a$  mais  $b$ .

Podemos então, como ilustrado na Figura 1.2 e a partir dos conceitos de ordem e congruência e de suas propriedades, definir a operação de *adição* de números reais, para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$a + b = \begin{cases} c: & c \geq b \text{ e } bc \equiv 0a, \text{ se } a \geq 0 \\ c: & c \leq b \text{ e } bc \equiv 0a, \text{ se } a \leq 0 \end{cases}$$

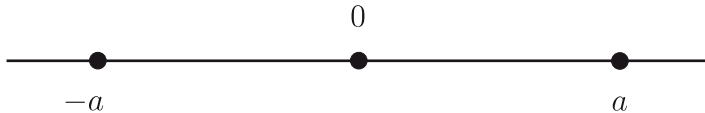


Figura 1.3: O inverso aditivo de  $a$ .

Podemos também definir, como ilustrado na Figura 1.3, o oposto ou inverso aditivo, para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$-a = \begin{cases} c: & c \leq 0 \text{ e } 0c \equiv 0a, \text{ se } a \geq 0 \\ c: & c \geq 0 \text{ e } 0c \equiv 0a, \text{ se } a \leq 0 \end{cases}$$

A partir das definições e das propriedades da ordem e da congruência, pode-se mostrar que a adição satisfaz, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

(A1) **Associatividade:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;

(A2) **Neutro:**  $a + 0 = a$ ;

(A3) **Inverso:**  $-a + a = 0$ ;

(A4) **Comutatividade:**  $a + b = b + a$ .

As propriedades da adição fazem com que a estrutura aditiva dos reais seja denominada de *grupo comutativo*.

Vamos agora construir um dos objeto mais importantes da matemática moderna, o *plano Cartesiano*. Como ilustrado pela Figura 1.4, denote por  $0y$  a única reta perpendicular a reta  $\mathbb{R}$ , passando pelo ponto  $0$ , chamada de *eixo vertical*.

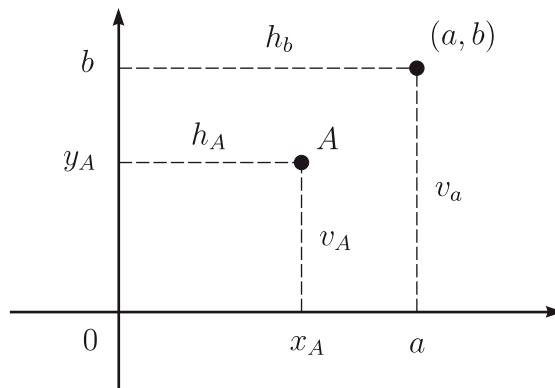


Figura 1.4: Plano Cartesiano.

Neste contexto, a reta  $\mathbb{R}$  também é denotada por  $0x$ , denominado *eixo horizontal*, e um ponto  $a \in 0x$  é também denotado por  $(a, 0)$ . O ponto  $0 = (0, 0)$  é denominado *origem do plano Cartesiano*. Escolhemos em  $0y$  um ponto, denotado por  $(0, 1)$ , tal que sua distância à origem  $0$  seja igual a 1. Para cada ponto  $a \in 0x = \mathbb{R}$  associamos o ponto  $(0, a)$  em  $0y$ , tal que as distâncias desses dois pontos à origem  $0$  sejam iguais e de modo que ambos sejam maiores que

0 ou ambos menores que 0. A reta  $0y$  é então uma cópia da reta  $\mathbb{R}$  e também é denotada por  $\mathbb{R}$ . Frequentemente, denotaremos  $(x, 0) \in 0x$  e também  $(0, y) \in 0y$  serão denotados apenas por  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , respectivamente.

Uma reta paralela ao eixo horizontal é denominada *reta horizontal* e uma reta paralela ao eixo vertical é denominada *reta vertical*. Uma reta horizontal e uma reta vertical possuem um único ponto em comum, pois os eixos são retas concorrentes. Dado qualquer ponto  $A$  no plano, denote por  $h_A$  a única reta horizontal passando por  $A$  e denote por  $v_A$  a única vertical que passa por  $A$ , como ilustrado pela Figura 1.4. A *abscissa* ou *coordenada horizontal* do ponto  $A$  é o único ponto  $x_A$  que está simultaneamente sobre  $v_A$  e sobre  $0x$ . A *ordenada* ou *coordenada vertical* de  $A$  é o único ponto  $y_A$  que está simultaneamente sobre  $h_A$  e sobre  $0y$ . Vice-versa, dado um ponto  $a$  sobre  $0x$  e um ponto  $b$  sobre  $0y$ , associamos o único ponto, denotado pelo par ordenado  $(a, b)$ , que está sobre  $v_a$  e sobre  $h_b$ . Não é difícil notar que  $A = (x_A, y_A)$ . Portanto, para cada ponto  $A$  do plano, associamos o par ordenado  $(x_A, y_A)$  das suas coordenadas.

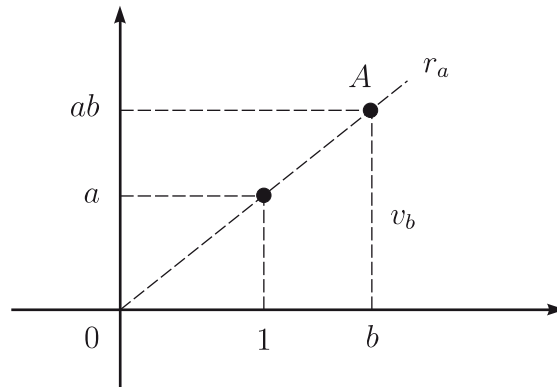


Figura 1.5: Multiplicação de  $a$  vezes  $b$ .

Vamos então definir a operação de *multiplicação* de números reais, como ilustrado pela Figura 1.5. Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , considere a reta  $r_a$  determinada pela origem  $(0, 0)$  e pelo ponto  $(1, a)$ . Como a reta  $r_a$  e o eixo  $0y$  são concorrentes, cada reta vertical possui um único ponto em comum com  $r_a$ . Dado  $b \in \mathbb{R}$ , seja  $A$  o único ponto que está sobre  $r_a$  e  $v_b$ . A *multiplicação de  $a$  por  $b$*  é definido como a coordenada vertical de  $A$  e é denotado por  $ab$ .

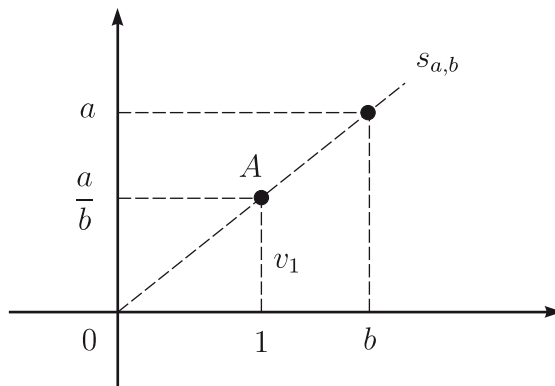


Figura 1.6: Divisão de  $a$  por  $b$ .

Consideraremos agora o conceito de divisão entre números reais, como ilustrado pela Figura 1.6. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $b \neq 0$ . Seja  $s_{a,b}$  a reta determinada pela origem  $(0,0)$  e pelo ponto  $(b, a)$ . Como  $b \neq 0$ , temos que  $s_{a,b}$  e o eixo  $0y$  são concorrentes e, portanto, cada reta vertical possui um único ponto em comum com  $s_{a,b}$ . Seja  $A$  o único ponto que está sobre  $s_{a,b}$  e a reta vertical  $v_1$ . A *divisão de  $a$  por  $b$*  é definida como a coordenada vertical de  $A$  e é denotada por  $\frac{a}{b}$ . É imediato que  $s_{a,b} = r_{\frac{a}{b}}$  e, portanto, que  $\frac{a}{b} b = a$ .

Pode-se mostrar que a multiplicação satisfaz, para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

(M1) **Associatividade:**  $(ab)c = a(bc)$ ;

(M2) **Neutro:**  $a1 = a$ ;

(M3) **Inverso:**  $\frac{1}{a} a = 1$ , para todo  $a \neq 0$ ;

(M4) **Comutatividade:**  $ab = ba$ .

Essas propriedades fazem com que a estrutura multiplicativa dos reais seja também um grupo comutativo.

Pode-se mostrar que vale a propriedade fundamental que conecta as estruturas aditivas e multiplicativas dos reais, denominada *Distributividade* e mais conhecida como *Regra do Chuveirinho*. Para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , temos que

(D) **Distributividade:**  $a(b + c) = ab + ac$ .

A propriedade enunciada acima é denominada *Distributividade à esquerda*. Sua análoga, a *Distributividade à direita*, é consequência imediata da comutatividade do produto.

Pode-se mostrar também que valem as seguintes propriedades na relação entre a ordem, a adição e a multiplicação,

(P1) **Fechamento aditivo:** se  $a, b > 0$ , então  $a + b > 0$ .

(P2) **Fechamento multiplicativo:** se  $a, b > 0$ , então  $ab > 0$ .

Por satisfazer as Propriedades A1-A4, M1-M4, D e P1-P2, a estrutura conjunta aditiva e multiplicativa dos reais é denominada um *corpo ordenado*. Num corpo ordenado, valem também as seguintes propriedades com relação às desigualdades.

**Proposição 1.1:** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Temos então que*

$$(1) \quad a < b \Leftrightarrow c + a < c + b.$$

$$(2) \quad a < b \Leftrightarrow -b < -a.$$

$$(3) \quad a < b \text{ e } c < d \implies a + c < b + d.$$

e que

$$(4) \quad a < b \Leftrightarrow ca < cb, \text{ para cada } c > 0.$$

$$(5) \quad 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

$$(6) \quad 0 < a < b \text{ e } 0 < c < d \implies 0 < ac < bd.$$

## SUBCONJUNTOS NUMÉRICOS

O conjunto dos *números naturais*  $\mathbb{N}$  é o **menor** subconjunto de  $\mathbb{R}$  satisfazendo

(N1) **Unidade:**  $1 \in \mathbb{N}$  e

(N2) **Recursividade:** Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n + 1 \in \mathbb{N}$ .



O conjunto dos números naturais é o menor no sentido que ele está contido em qualquer conjunto satisfazendo essas duas propriedades, como por exemplo a reta  $\mathbb{R}$  e a semirreta real positiva. Podemos agora enunciar o denominado *Princípio de Indução*.

**Proposição 1.2: (Indução)** *Para mostrarmos que uma determinada fórmula  $F(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , basta verificarmos que*

(I1) *vale  $F(1)$  e*

(I2) *se vale  $F(m)$  para um determinado  $m \in \mathbb{N}$ , então vale também  $F(m+1)$ .*

**Prova:** Primeiro observamos que mostrar que  $F(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  é o mesmo que mostrar que o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \text{vale } F(n)\}$$

é igual ao conjunto dos naturais. Por um lado, se verificamos I1, obtemos que  $1 \in S$ , o que mostra que  $S$  satisfaz a propriedade N1. Por outro lado, suponha que verificamos I2. Neste caso, se  $m \in S$ , então vale  $F(m)$ , pela definição de  $S$ . Por I2 segue que vale  $F(m+1)$ . Pela definição de  $S$ , segue que  $m+1 \in S$ . Logo,  $S$  satisfaz também a propriedade N2. Como  $S$  satisfaz ambas as propriedades N1 e N2, pela discussão acima, segue que  $\mathbb{N}$  está contido em  $S$ . Por outro lado, por definição,  $S$  está contido em  $\mathbb{N}$ , o que mostra que  $S = \mathbb{N}$  e que, portanto,  $F(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Utilizando o Princípio de Indução, vamos mostrar que a fórmula

$$n < 2^n$$

é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para verificar I1, note que a fórmula vale para  $n = 1$ , uma vez que  $1 < 2^1$ . Para verificar I2, considere  $m \in \mathbb{N}$  tal que vale  $m < 2^m$ . Segue então que

$$m+1 \leq m+m = 2m < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1},$$

mostrando que  $m+1 < 2^{m+1}$  e que a fórmula também vale para  $n = m+1$ . Pelo Princípio de Indução, como verificamos ambas I1 e I2, segue que a fórmula acima é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

O conjunto dos *números inteiros*  $\mathbb{Z}$  é obtido a partir dos naturais adicionando-se os inversos aditivos e o elemento neutro.

$$\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N} \text{ ou } k = 0 \text{ ou } -k \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto dos *números racionais*  $\mathbb{Q}$  é a coleção de todas as frações de números inteiros

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \in \mathbb{R} : r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Temos claramente que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pode-se mostrar que o conjunto dos racionais é fechado sob as operações da adição e da multiplicação e também é um corpo ordenado.

Vamos mostrar agora que, entre dois números reais distintos quaisquer, sempre existe um número racional. Essa propriedade de  $\mathbb{Q}$  é denominada *densidade*. Para isso, necessitamos de dois fatos. O primeiro, denominado *Princípio da Boa Ordenação*, é consequência do Princípio de Indução e afirma que qualquer subconjunto não vazio dos naturais possui o menor elemento. O segundo fato é a denominada *Propriedade Arquimediana* de  $\mathbb{R}$ .

**Arquimediana:** Para todo  $L > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < L < n$ .

Pela Proposição 1.1, temos que

$$0 < L < n \quad \text{se e só se} \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}.$$

Escolhendo  $\varepsilon = 1/L$ , temos então a seguinte formulação equivalente.

**Arquimediana:** Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Proposição 1.3:** Se  $a < b$ , então existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < r < b$ .

**Prova:** Pela Propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < \frac{1}{n} < b - a. \tag{1.1}$$

Se  $m$  é o primeiro natural tal que  $a < \frac{m}{n}$ , temos que

$$\frac{m-1}{n} < a. \quad (1.2)$$

Pelas desigualdades (1.1) e (1.2), segue que

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Escolhendo  $r = \frac{m}{n}$ , concluímos a demonstração.  $\square$

Após notarmos a densidade do conjunto dos racionais no conjunto dos números reais, podemos nos perguntar se esses dois conjuntos não são de fato iguais. A resposta é negativa, o que parece ter custado a vida de um dos membros da *Escola Pitagórica*. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento  $d$  da diagonal do quadrado unitário é tal que  $d^2 = 2$ , ou seja, temos que  $d = \sqrt{2}$ , como ilustrado pela Figura 1.7. Essa diagonal pode ser escrita como um quociente de números naturais?

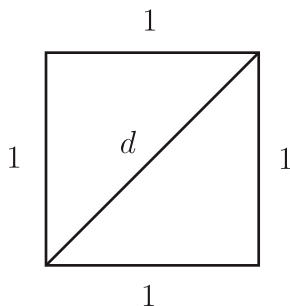


Figura 1.7: Diagonal do quadrado unitário.

**Proposição 1.4:**  $\sqrt{2}$  não é racional.

**Prova:** Vamos utilizar o seguinte fato, que é deixado como exercício,  $n \in \mathbb{N}$  é par se e só se  $n^2$  é par. Vamos demonstrar essa proposição por contradição. Suponha que  $d = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ . Após cancelamento, podemos supor

que  $m$  e  $n$  não possuem nenhum fator comum. Neste caso, temos que  $2 = d^2 = \frac{m^2}{n^2}$  e, portanto, que  $m^2 = 2n^2$ . Como  $m^2$  é par, temos que  $m$  é par. Logo,  $m = 2k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , e então  $4k^2 = m^2 = 2n^2$ . Portanto,  $2k^2 = n^2$ , mostrando que  $n^2$  é par e conseqüentemente  $n$  também é par. Mas isso é uma contradição, pois  $m$  e  $n$  não possuem nenhum fator comum.  $\square$

Concluimos esta seção com a última propriedade dos números reais, a *Completeness*. Essa propriedade diz de maneira intuitiva que a reta não possui buracos. Dados  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , dizemos que  $A$  é menor ou igual a  $B$  e denotamos  $A \leq B$ , se  $a \leq b$ , para todos  $a \in A$  e  $b \in B$ .

(C) **Completeness:** Se  $A \leq B$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $A \leq c \leq B$ .

A propriedade da Completeness não é verificada nos conjunto dos números racionais. Definindo os conjuntos

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\} \quad e \quad B = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > 2\},$$

temos claramente que  $A \leq B$ , mas o único  $c$  tal que  $A \leq c \leq B$  é o número  $\sqrt{2}$ , que no entanto não pertence a  $\mathbb{Q}$ . Devido a essa propriedade, pode-se demonstrar que existem muito mais números reais que números racionais, ou seja, que é impossível estabelecer uma correspondência *um a um* entre os números reais e os números racionais. Por outro lado, de maneira surpreendente, existem tantos números racionais quanto números reais, por mais incrível que isso possa parecer, como indica a seguinte enumeração dos racionais

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \dots; \frac{1}{n+m-1}, \frac{2}{n+m-2}, \dots, \frac{m}{n}, \dots, \frac{n+m-1}{1}; \dots$$

Pode-se mostrar que a fração  $\frac{m}{n}$  está localizada nessa lista na posição

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} + m.$$

Devido a essa lista, o conjunto dos racionais é denominado *enumerável*. Por sua Completeness, o conjunto dos reais não é enumerável.

## 1.2 FUNÇÕES REAIS

Assim como no caso dos números e de suas operações, introduzimos o conceito de função real a partir de uma perspectiva puramente geométrica. Uma *função real* é um conjunto de pontos do plano Cartesiano satisfazendo o denominado *teste da reta vertical*: se  $f$  é uma função real, cada reta vertical possui no máximo um ponto em comum com  $f$ , como ilustrado pela Figura 1.8.

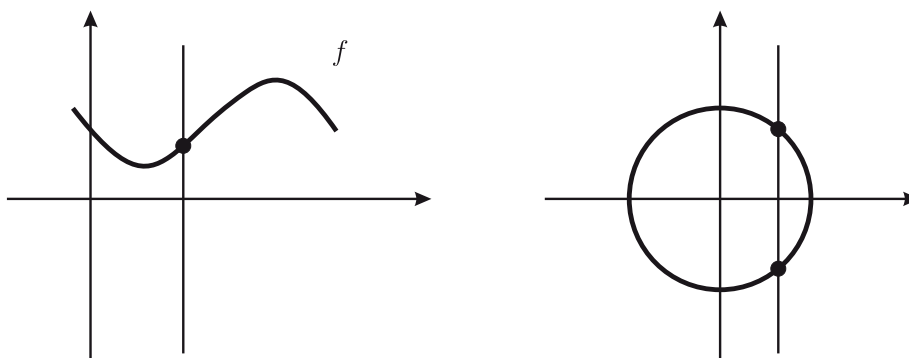


Figura 1.8: Teste da reta vertical:  $f$  satisfaz, o círculo não.

O *domínio da função*  $f$  é sua projeção vertical sobre o eixo  $0x$

$$\text{dom}(f) = \{x_A : A \in f\}$$

onde  $A$  é um ponto de  $f$  e  $x_A$  sua coordenada horizontal (Seção 1.1). A Figura 1.9 ilustra o domínio de  $f$  como a sombra que  $f$  projetaria no eixo  $0x$  sob o sol de meio-dia. De forma análoga, a *imagem da função*  $f$  é a sua projeção horizontal sobre o eixo  $0y$

$$\text{im}(f) = \{y_A : A \in f\}$$

onde  $y_A$  é a coordenada vertical do ponto  $A$  (Seção 1.1). A Figura 1.9 descreve a imagem de  $f$  como a sombra que  $f$  projetaria no eixo  $0y$  sob o nascer do sol.

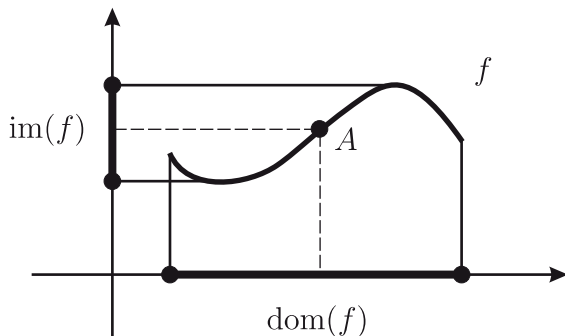


Figura 1.9: O domínio e imagem da função  $f$ .

Em geral, quando queremos enfatizar o domínio e a imagem de uma dada função  $f$ , denotamos a função por  $f : \text{dom}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ . Quando desconhecemos a imagem de  $f$ , mas sabemos que a imagem está contida num conjunto  $A$ , denominado *um contra-domínio de  $f$* , denotamos isso por  $f : \text{dom}(f) \rightarrow A$ . Observamos que a reta  $\mathbb{R}$  é sempre um contra domínio para qualquer função real.

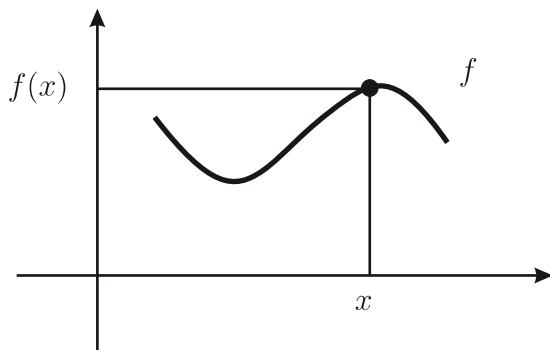


Figura 1.10: O valor de  $f$  em  $x$ .

Para cada  $x \in \text{dom}(f)$ , definimos  $f(x) \in \mathbb{R}$ , denominado *valor de  $f$  em  $x$*  ou também *expressão algébrica de  $f$* , como a coordenada vertical do único ponto comum a  $f$  e à reta vertical  $v_x$ . A Figura 1.10 representa o valor de  $f$  em  $x$  como a altura de  $f$  sobre o ponto  $x$ . Com essas definições, a função  $f$  pode

ser descrita por

$$f = \{(x, y) : y = f(x) \text{ e } x \in \text{dom}(f)\}$$

também chamado de gráfico de  $f$ , e sua imagem pode ser descrita por

$$\text{im}(f) = \{f(x) : x \in \text{dom}(f)\}$$

A equação

$$y = f(x)$$

é denominada *equação do gráfico de  $f$* .

Se  $f$  é uma reta, ela satisfaz o teste da reta vertical se e só se ela não é uma reta vertical. Portanto, se  $f$  é uma reta não vertical, ela é uma função real, denominada *função afim*. Se  $f$  é uma função afim, então seu domínio e sua imagem coincidem com a reta  $\mathbb{R}$ , como é mostrado pela Figura 1.11.

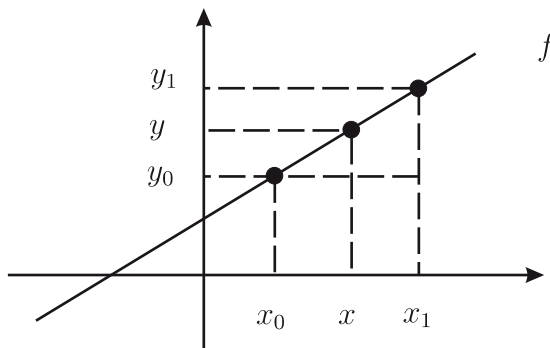


Figura 1.11: Exemplo de uma função afim.

Em geral, se os pontos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x, y)$  pertencem à função afim  $f$ , utilizando semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $m$  é denominado *coeficiente angular*. Temos então que

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

que é a famosa equação da reta passando por  $(x_0, y_0)$  com inclinação  $m$ . Isolando  $y$  como função de  $x$ , obtemos a expressão algébrica de  $f$  dada por

$$y = f(x) = y_0 + m(x - x_0).$$

que nada mais é que a equação do gráfico de  $f$ . A expressão algébrica de  $f$  também pode ser dada por

$$f(x) = mx + b$$

onde

$$b = f(0) = y_0 - mx_0$$

No exemplo seguinte, vamos mostrar que uma *parábola* é de fato uma função real. Uma parábola é o conjunto dos pontos  $p$  cuja distância é constante em relação a uma dada reta horizontal  $h_g$ , denominada *reta geratriz*, e a um dado ponto  $F$  fora dela, denominado *ponto focal*, como ilustrado pela Figura 1.12.

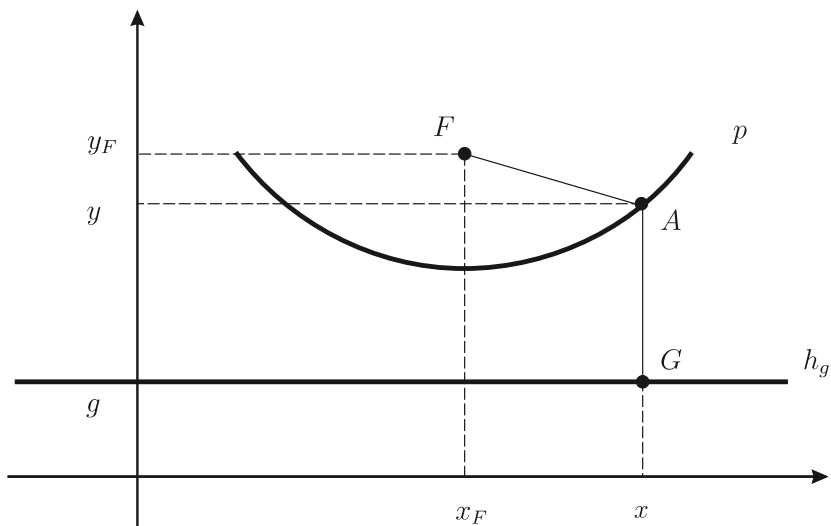


Figura 1.12: A parábola é uma função.



Se o ponto  $A = (x, y)$  pertence a  $p$ , então  $d(A, F) = d(A, h_g)$ . Pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre  $A$  e  $F$ , em termos de suas coordenadas, satisfaz a equação

$$d(A, F)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 \quad (1.3)$$

e, pela definição de distância de um ponto a uma reta, temos que

$$d(A, h_g)^2 = (y - g)^2. \quad (1.4)$$

Igualando os termos à direita das equações (1.3) e (1.4), desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos que

$$2(y_F - g)y = (x - x_F)^2 + y_F^2 - g^2.$$

Como o ponto focal  $F$  não está sobre a geratriz  $h_g$ , temos que  $y_F - g \neq 0$  e podemos obter a seguinte expressão para a coordenada vertical do ponto  $A$

$$y = \frac{1}{2(y_F - g)} \left( (x - x_F)^2 + y_F^2 - g^2 \right), \quad (1.5)$$

o que mostra claramente que  $A$  é o único ponto de  $p$  que está sobre a reta vertical que passa por  $x_A$ . Portanto, temos que  $p$  é de fato uma função real e  $A = (x, p(x))$ . Desenvolvendo a equação (1.5), obtemos que

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

onde

$$a = \frac{1}{2(y_F - g)}, \quad \frac{b}{a} = -2x_F \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = x_F^2 + y_F^2 - g^2.$$

Como a expressão algébrica de  $p(x)$  é um polinômio em  $x$ , a parábola  $p$  é denominada *função polinomial*. Quando  $F = (0, \frac{1}{4})$  e  $g = -\frac{1}{4}$ , temos que

$$a = 1 \quad \text{e} \quad b = c = 0.$$

Neste caso,

$$p(x) = x^2$$

e a parábola  $p$  é chamada de *potência quadrática*.

Dado um polinômio em  $x$

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

temos que o conjunto

$$p = \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

é uma função, denominada *função polinomial*. E quando  $p(x) = x^n$  também dizemos que  $p$  é uma *potência  $n$ -ésima*.

Em geral, dada uma expressão algébrica  $f(x)$  de  $x$ , definimos a função

$$f = \{(x, f(x)) : x \in \text{dom}(f(x))\} \quad (1.6)$$

onde  $\text{dom}(f(x))$ , denominado *domínio natural de  $f(x)$* , é o maior conjunto de números reais onde a expressão algébrica  $f(x)$  está definida. Esse procedimento é uma das maneiras mais utilizadas para se construir funções reais. Frequentemente, por economia de notação, denotamos a função  $f : \text{dom}(f(x)) \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela equação (1.6) simplesmente pela expressão algébrica  $f(x)$  utilizada em sua definição.

Por exemplo, se  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios em  $x$ , a função  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  é o conjunto

$$r = \{(x, r(x)) : q(x) \neq 0\}$$

e é denominada *função racional*. O domínio de  $r(x)$  é o maior conjunto de números reais onde a expressão algébrica  $r(x)$  está definida, ou seja, todos os  $x$  tais que  $q(x)$  é diferente de zero.

Em certas situações, é necessário considerar funções definidas por expressões algébricas em domínios que são distintos do seu domínio natural. Sabemos do ensino médio que a altura  $s(t)$  de um corpo caindo sob a ação da gravidade, após ser solto do estado de repouso de uma altura  $s_0$ , na ausência de atrito com o ar, é dada por

$$s(t) = s_0 - g \frac{t^2}{2}$$

onde  $g$  é aceleração da gravidade. O domínio algébrico dessa expressão é a reta  $\mathbb{R}$ , mas evidentemente essa expressão descreve o movimento do corpo apenas enquanto este se move livremente no ar. Denotando por  $t_A$  o instante de aterrissagem do corpo, no qual  $s(t_A) = 0$ , o domínio algébrico deve ser substituído pelo intervalo fechado

$$[0, t_A] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq t_A\}$$

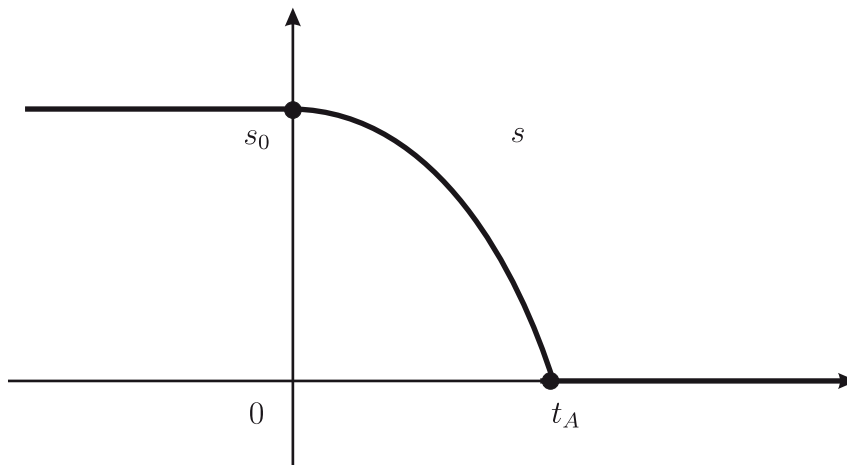


Figura 1.13: Altura de um corpo em queda na ausência de atrito do ar.

e devemos denotar explicitamente a função movimento por  $s : [0, t_A] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Considere agora a seguinte situação mais realista, ilustrada pela Figura 1.13. Um corpo, que se encontrava suspenso em posição de repouso na altura  $s_0$ , é solto no instante  $t = 0$  e permanece em repouso após atingir o solo no instante de aterrisagem  $t = t_A$ . Nesta situação, a expressão algébrica da função posição se altera de uma parte para a outra do seu domínio e é dada por

$$s(t) = \begin{cases} s_0, & \text{se } t \leq 0 \\ s_0 - g \frac{t^2}{2}, & \text{se } 0 \leq t \leq t_A \\ 0, & \text{se } t \geq t_A \end{cases}$$

Uma função com uma expressão desse tipo é denominada *definida por partes*.

Concluiremos esta seção definindo as principais operações entre funções reais. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais. A função

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

é denominada *soma de f mais g* e seu domínio natural é a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ . De forma análoga, definimos o *produto de f vezes g* por

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

onde seu domínio natural é também a interseção dos domínios de  $f$  e  $g$ . No caso do *quociente de  $f$  por  $g$* , definido por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

o domínio natural são os pontos comuns aos domínios de  $f$  e  $g$ , excluindo-se os pontos tais que  $g(x) = 0$ . Finalmente, definimos a *composição de  $f$  com  $g$*  por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

cujo domínio são os pontos  $x \in \mathbb{R}$  que pertencem ao domínio de  $g$  tais que suas imagens  $g(x)$  pertencem ao domínio de  $f$ . Enquanto a soma e o produto de funções são operações comutativas, o mesmo não ocorre com o quociente e a composição de funções.

### 1.3 FUNÇÕES INVERSAS

Assim como no caso de funções, introduzimos o conceito de função inversa a partir de uma perspectiva puramente geométrica.

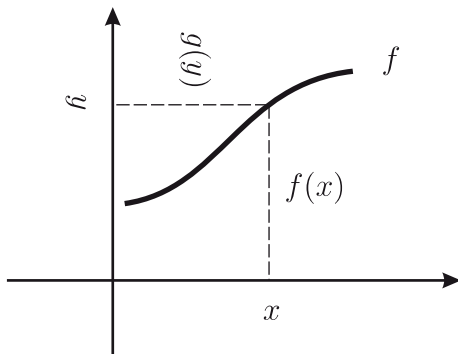


Figura 1.14: Função injetiva  $f$ .

Na Seção 1.2, definimos uma função real como um conjunto de pontos do plano Cartesiano satisfazendo o denominado teste da reta vertical. Uma função  $f$  é denominada *injetiva* se ela também satisfaz o denominado teste

*da reta horizontal*: cada reta horizontal possui no máximo um ponto em comum com  $f$ , como ilustrado pela Figura 1.14. Uma função  $f$  é denominada *monótona* se ela é *crescente* ou ela é *decrecente*. Se  $f$  é monótona, então ela é injetiva, pois claramente satisfaz o teste da reta horizontal. Neste caso, para cada  $y$  na sua imagem, existe um único  $x$  no seu domínio tal que  $y = f(x)$ . A sua *inversa*  $g$  é definida de modo que  $g(y) = x$ , como ilustrado pela Figura 1.14. Temos que o domínio de  $g$  é a imagem de  $f$  e que a imagem de  $g$  é o domínio de  $f$ . Além disso, temos que

$$y = f(x) \quad \text{se e só se} \quad x = g(y)$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda, obtemos que

$$x = g(f(x))$$

Por outro lado, substituindo a segunda igualdade na primeira, obtemos que

$$y = f(g(y))$$

Essa é a razão de  $g$  ser denominada de inversa de  $f$ , uma vez que elas se cancelam quando compomos uma com a outra.

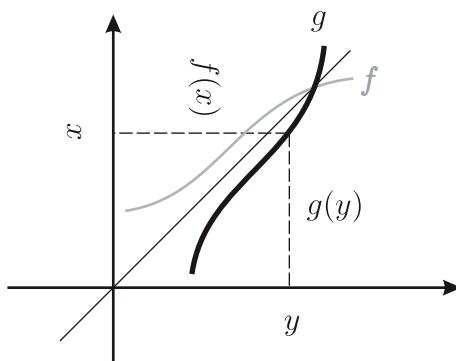


Figura 1.15: Função inversa  $g$ .

O gráfico de  $g$  pode ser melhor visualizado fazendo a reflexão do gráfico da  $f$  em relação a reta bisetriz, como ilustrado pela Figura 1.15. Essa reflexão

leva retas verticais em retas horizontais e vice-versa, de modo que o eixo vertical é levado no eixo horizontal. Além disso, como  $f$  satisfaz os testes da reta vertical e da reta horizontal, temos que  $g$  também satisfaz esses dois testes, sendo portanto uma função injetiva e é evidente que  $f$  é a inversa de  $g$ .

Para determinarmos a expressão algébrica de  $g$ , devemos resolver para  $x$  a equação  $y = f(x)$ . Por exemplo, se  $f$  é uma reta não vertical, ela é uma função, cuja expressão algébrica é dada por  $f(x) = mx + b$ . Se  $f$  é também uma reta não horizontal, ela é injetiva, e isso ocorre se e só  $m \neq 0$ . Para obtermos a expressão algébrica da função inversa, devemos então resolver a seguinte equação

$$f(x) = mx + b = y,$$

de modo que

$$g(y) = x = \frac{1}{m}y - \frac{b}{m}.$$

Portanto, a função inversa  $g$  de uma função afim  $f$  é também uma função afim, cujo coeficiente angular é o inverso do coeficiente angular de  $f$ .

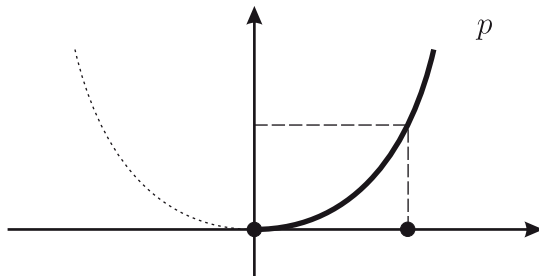


Figura 1.16: Potência quadrática e um pedaço injetivo.

Agora vamos considerar a inversa da função potência quadrática. Seja  $p(x) = x^2$  ilustrada pela Figura 1.16. Uma vez que  $p(-x) = p(x)$ , temos que  $p$  não é injetiva. Por outro lado, para  $x \geq 0$ ,  $p$  é uma função crescente e, portanto, satisfaz o teste da reta horizontal. Vamos mostrar mais adiante que a imagem de  $p$  no intervalo  $[0, \infty)$  é o intervalo  $[0, \infty)$ . Segue que sua função inversa  $q$  possui domínio e imagem iguais a  $[0, \infty)$ . A expressão algébrica de  $q$  é obtida resolvendo para  $x$  a equação

$$p(x) = x^2 = y,$$

de modo que  $q(y) = x = \sqrt{y}$ .

## LIMITE

## 2.1 APROXIMAÇÃO DA ORIGEM

Sabemos que a posição vertical  $s(t)$  de um corpo caindo sob a ação da gravidade, após ser solto do estado de repouso de uma altura  $s_0$ , na ausência de atrito com o ar, é dada por

$$s(t) = s_0 - g \frac{t^2}{2}$$

onde  $g$  é aceleração da gravidade. Esse movimento é ilustrado pela Figura 2.1. Nesta situação, a velocidade inicial é nula. Podemos nos perguntar: o que significa a velocidade num dado instante  $\tau > 0$  após o corpo abandonar o estado de repouso? No intervalo entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , sabemos que a velocidade média é dada pela proporção

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}$$

uma vez que  $s(t) - s(\tau)$  é a variação do espaço e  $t - \tau$  é a variação do tempo entre esses instantes, como ilustrado na Figura 2.1. A velocidade no instante

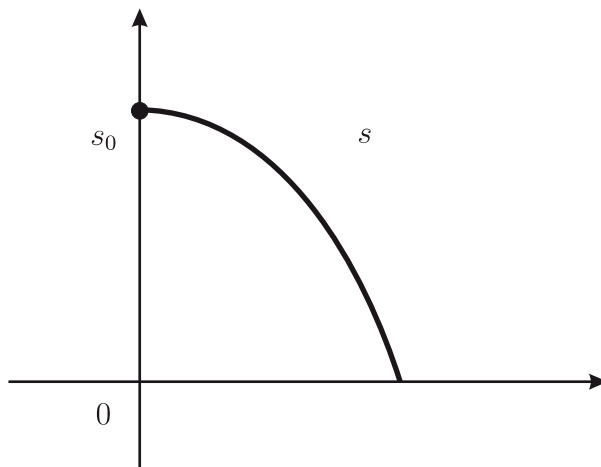


Figura 2.1: Posição e variações do espaço e do tempo.

$\tau$  deveria ser obtida como a velocidade média no intervalo entre os instantes  $t$  e  $\tau$ . No entanto, isso não é possível, uma vez que, neste caso,  $\Delta t = 0$  e a velocidade média deixa de fazer sentido. O que podemos então fazer é investigar se a velocidade média se aproxima de um valor  $v$  à medida que  $t$  se aproxima de  $\tau$ . Se isso ocorre, dizemos que  $v$  é a velocidade no instante  $\tau$ .

Para organizar melhor as ideias, podemos fazer isso passo a passo, considerando uma sequência de instantes de tempo diferentes de  $\tau$ , mas cada vez mais próximos de  $\tau$

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$$

e considerar a sequência das respectivas velocidades médias

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$$

onde

$$v_n = \frac{s(t_n) - s(\tau)}{t_n - \tau}$$

é a velocidade média no intervalo entre  $\tau$  e  $t_n$ . Se a sequência de velocidades médias  $v_n$  se aproxima de um valor  $v$ , dizemos que esse valor é a velocidade no instante  $\tau$ , o que nos fornece o conceito de velocidade instantânea.



Nosso primeiro passo no Cálculo será tornar mais preciso o conceito de uma sequência de números reais se aproximar de um dado ponto da reta. Uma sequência é uma lista infinita de números reais

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Denotamos a sequência acima simplesmente pelo seu *termo geral*  $a_n$ , que aparece na lista na posição  $n$ . Devemos pensar numa sequência de números reais como uma progressão infinita de pontos da reta real  $\mathbb{R}$  evoluindo no tempo em passos sucessivos. Primeiro consideramos sequências que se aproximam da origem, como por exemplo a *sequência harmônica*  $\frac{1}{n}$ , dada pela seguinte lista infinita

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Neste caso, o ponto  $\frac{1}{n}$  é alcançado no  $n$ -ésimo passo.

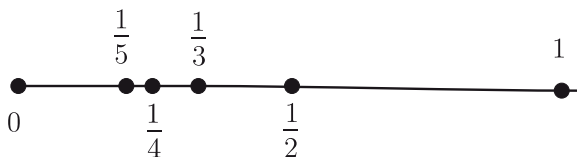


Figura 2.2: Sequência harmônica se aproximando da origem.

Como ilustra a Figura 2.2, é intuitivo que, à medida que o tempo passa, a sequência harmônica se aproxima de 0. Neste caso, dizemos que 0 é o limite da sequência  $\frac{1}{n}$ .

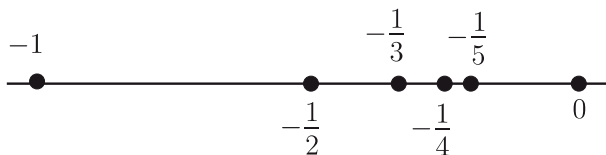


Figura 2.3: Sequência anti-harmônica se aproximando da origem.

Um outro exemplo de sequência que se aproxima da origem é a denominada *sequência anti-harmônica*, ilustrada pela Figura 2.3 e dada por  $-\frac{1}{n}$ . Um último exemplo de sequência se aproximando da origem, a *sequência harmônica alternada*, é ilustrada pela Figura 2.4 e dada por  $\frac{(-1)^n}{n}$ .

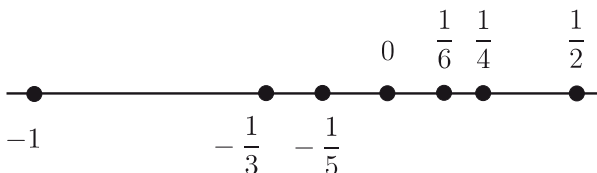


Figura 2.4: Sequência harmônica alternada se aproximando da origem.

Mas o que significa, de maneira mais precisa, que uma sequência  $a_n$  se aproxima da origem? A ideia básica é sermos cada vez mais rigorosos quanto a proximidade de  $a_n$  da origem. Para isso, considerarmos intervalos de erro arbitrariamente pequenos  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , com *margem de erro*  $\varepsilon > 0$ , como ilustra a Figura 2.5. Se a sequência  $a_n$  se aproxima da origem, a partir de um determinado passo, a sequência passa a ficar dentro desse intervalo de erro. Mas e se considerarmos um intervalo com margem de erro menor? Provavelmente teremos que esperar um pouco mais para que a sequência passe a ficar dentro desse novo intervalo de erro. Ou seja, para cada margem de erro  $\varepsilon > 0$ , deve existir um passo  $n(\varepsilon)$ , denominado *tempo de espera*, a partir do qual a sequência fica dentro do intervalo de erro de margem  $\varepsilon$ . Neste caso, isso é denotado por

$$a_n \rightarrow 0$$

Assim, quanto mais rigorosos formos, adotando margens de erro  $\varepsilon$  menores, mais pacientes deveremos ser, aguardando um tempo de espera  $n(\varepsilon)$  maior.



Figura 2.5: Intervalos de margem de erro  $\varepsilon$  e  $\delta$  em torno da origem.

Em outras palavras, a sequência  $a_n$  se aproxima da origem se, para cada margem de erro  $\varepsilon > 0$ , existir um tempo de espera  $n(\varepsilon)$  de modo que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

ou de modo equivalente

$$n \geq n(\varepsilon) \implies |a_n| < \varepsilon,$$

como ilustrado pela Figura 2.5. Observe que, adotando uma outra margem de erro  $\delta > 0$ , o tempo de espera muda para  $n(\delta)$  e as condições acima ficam

$$n \geq n(\delta) \implies -\delta < a_n < \delta$$

ou de modo equivalente

$$n \geq n(\delta) \implies |a_n| < \delta.$$

como ilustrado pela Figura 2.5. Observe também que, uma vez que  $a_n$  e  $|a_n|$  possuem a mesma distância até a origem, segue que  $a_n \rightarrow 0$  se e só se  $|a_n| \rightarrow 0$ .

Nos exemplos anteriores de sequências, temos que a distância do termo geral até a origem diminui à medida que o tempo passa. Quando isso acontece, a situação é mais simples: o primeiro passo em que a sequência entra no intervalo de margem de erro  $\varepsilon > 0$  serve como tempo de espera  $n(\varepsilon)$ . De fato, como a distância do termo geral até a origem  $|a_n|$  diminui com o tempo e como  $|a_{n(\varepsilon)}| < \varepsilon$ , segue então que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies |a_n| < |a_{n(\varepsilon)}| < \varepsilon.$$

Como nos exemplos anteriores  $|a_n| = \frac{1}{n}$ , o primeiro natural  $n$  tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

serve como tempo de espera  $n(\varepsilon)$  dessas sequências. Resolvendo para  $n$  temos que

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

de modo que

$$n(\varepsilon) = \text{primeiro } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

é um tempo de espera dessas sequências para a margem de erro  $\varepsilon$ . A tabela abaixo apresenta alguns dos seus valores:

$\varepsilon$	$1/\varepsilon$	$n(\varepsilon)$
0,5	2	3
0,4	2,5	3
0,3	3,333...	4
0,2	5	6

No caso da sequência harmônica, as primeiras linhas dessa tabela são ilustradas pela Figura 2.6.

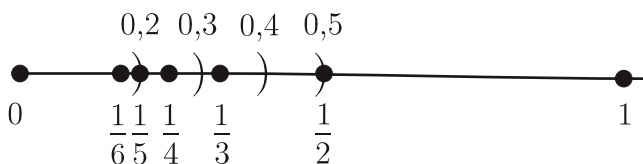


Figura 2.6: Algumas margens de erro para a sequência harmônica.

Em geral, duas sequências podem se aproximar da origem com tempos de espera distintos. Por exemplo, denotando o tempo de espera de  $a_n = \frac{1}{n}$  por  $n_a(\varepsilon)$  e o tempo de espera de  $b_n = \frac{1}{n^2}$  por  $n_b(\varepsilon)$ , temos que

$$n_a(\varepsilon) = \text{primeiro } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

como vimos acima e também que

$$n_b(\varepsilon) = \text{primeiro } n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

uma vez que esse tempo de espera é o primeiro natural  $n$  tal que

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

A tabela abaixo compara alguns dos seus valores:

$\varepsilon$	$1/\varepsilon$	$n_a(\varepsilon)$	$\sqrt{1/\varepsilon}$	$n_b(\varepsilon)$
0,5	2	3	1,414...	2
0,4	2,5	3	1,581...	2
0,3	3,333...	4	1,825...	2
0,2	5	6	2,236...	3
0,1	10	11	3,162...	4
0,01	100	101	10	11
0,001	1000	1001	31,622...	32

Não é difícil perceber que os tempos de espera para  $a_n$  são muito maiores que os tempos de espera para  $b_n$ .

## PROPRIEDADES DA APROXIMAÇÃO DA ORIGEM

Agora vamos considerar o que acontece com a soma de duas sequências que se aproximam da origem.

**Proposição 2.1:** Se  $a_n, b_n \rightarrow 0$ , então  $a_n + b_n \rightarrow 0$ .

**Prova:** A ideia da demonstração se baseia no seguinte fato: se  $a_n$  e  $b_n$  estão no intervalo de erro  $(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ , então sua soma  $a_n + b_n$  está no intervalo de erro  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Sejam  $n_a(\varepsilon)$  e  $n_b(\varepsilon)$  os tempos de espera, respectivamente, de  $a_n$  e  $b_n$ . Temos então que

$$n \geq n_a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

e também que

$$n \geq n_b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escolhendo  $n(\varepsilon)$  como o maior dentre os tempos  $n_a(\frac{\varepsilon}{2})$  e  $n_b(\frac{\varepsilon}{2})$ , somando as desigualdades acima, teremos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n + b_n < \varepsilon,$$

mostrando que  $n(\varepsilon)$  é um tempo de espera de  $a_n + b_n$  para a margem de erro  $\varepsilon$ .  $\square$

Para ilustrar o resultado acima, considere a sequência  $a_n + b_n$ , que é a soma, respectivamente, das sequências harmônica  $a_n$  e harmônica alternada  $b_n$ . Temos que

$$a_n + b_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ é ímpar} \\ 0, & n \text{ é par} \end{cases}$$

como ilustrado pela Figura 2.7. O resultado acima garante que  $a_n + b_n \rightarrow 0$ .

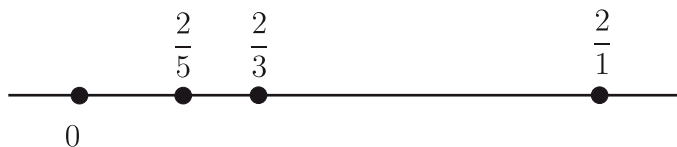


Figura 2.7: Soma das sequências harmônica e harmônica alternada.

A próxima proposição é uma versão mais restrita do famoso Teorema do Sanduíche.

**Proposição 2.2:** Se  $0 \leq a_n \leq b_n$  e  $b_n \rightarrow 0$ , então  $a_n \rightarrow 0$ .

**Prova:** Uma vez que  $0 \leq a_n \leq b_n$ , podemos adotar para  $a_n$  o mesmo tempo de espera para  $b_n$ . De fato, seja  $n(\varepsilon)$  um tempo de espera de  $b_n$ . Então temos que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \implies \quad a_n \leq b_n < \varepsilon.$$

Uma vez que  $|a_n| = a_n$ , isso mostra que  $n(\varepsilon)$  é um tempo de espera de  $a_n$  para a margem de erro  $\varepsilon$ .  $\square$

Uma exemplo de aplicação do resultado acima é mostrar que a progressão geométrica com razão  $r = 1/2$  se aproxima da origem. Na Seção 1.1, mostramos por indução que  $2^n > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso, invertendo ambos os lados dessa desigualdade, segue que

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

Como  $0 \rightarrow 0$  e também  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , temos que

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

Dizemos que uma sequência  $b_n$  é *limitada* quando ela não se afasta muito da origem. Em outras palavras, existe uma constante  $R$  tal que  $|b_n| < R$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como ilustra a Figura 2.8.

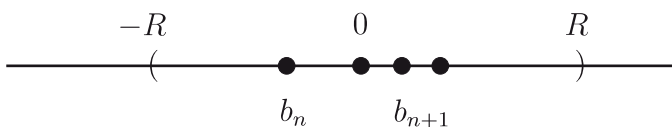


Figura 2.8: Uma sequência limitada.

É intuitivo que toda sequência que se aproxima da origem é limitada. A *sequência alternada*, dada por  $(-1)^n$  e ilustrada pela Figura 2.9, é um exemplo de uma sequência limitada, mas que não se aproxima da origem. Como mostramos a seguir, o produto de uma sequência limitada por uma sequência que se aproxima da origem também se aproxima da origem. Um exemplo disso é a sequência harmônica alternada que é o produto da sequência harmônica, que se aproxima da origem, pela sequência alternada, que é apenas limitada.

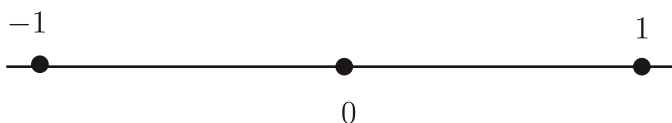


Figura 2.9: Sequência alternada é limitada, mas não se aproxima da origem.

**Proposição 2.3:** Se  $a_n \rightarrow 0$  e  $b_n$  é limitada, então  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

**Prova:** A ideia dessa demonstração se baseia no seguinte fato: se  $b_n$  está no intervalo  $(-R, R)$  e  $a_n$  está no intervalo de erro  $(-\frac{\epsilon}{R}, \frac{\epsilon}{R})$ , então  $a_n b_n$  está no

intervalo de erro  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Seja  $n_a(\varepsilon)$  o tempo de espera de  $a_n$ . Temos então que

$$n \geq n_a\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) \quad \implies \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{R}$$

Escolhendo  $n(\varepsilon)$  igual a  $n_a\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$  e multiplicando a desigualdade acima por  $R$ , teremos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \implies \quad |a_n b_n| \leq |a_n| R < \varepsilon,$$

mostrando que  $n(\varepsilon)$  é um tempo de espera de  $a_n b_n$  para a margem de erro  $\varepsilon$ .  
□

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

2.1.1 Considere a sequência  $\frac{2}{n}$ .

(i) O primeiro passo tal que  $\frac{2}{n} < 0,1$  é

(a) 11    (b) 21    (c) 31    (d) 41

(ii) O primeiro passo tal que  $\frac{2}{n} < 0,01$  é

(a) 11    (b) 101    (c) 21    (d) 201

(iii) O primeiro passo tal que  $\frac{2}{n} < \varepsilon$  é

(a) primeiro  $n > 1/2\varepsilon$     (b) primeiro  $n > 1/\varepsilon$

(c) primeiro  $n > 2/\varepsilon$     (d) primeiro  $n > 4/\varepsilon$

2.1.2 Considere a sequência  $\frac{1}{n^2}$ .

(i) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{n^2} < 0,1$  é

(a) 21    (b) 11    (c) 3    (d) 4

(ii) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{n^2} < 0,01$  é

(a) 21    (b) 11    (c) 3    (d) 4



- (iii) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$  é
- (a) primeiro  $n > 1/\varepsilon^2$     (b) primeiro  $n > 1/\varepsilon$   
 (c) primeiro  $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$     (d) primeiro  $n > 1/2\varepsilon$

2.1.3 Considere a seqüência  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

- (i) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,1$  é
- (a) 21    (b) 11    (c) 201    (d) 101
- (ii) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01$  é
- (a) 20001    (b) 10001    (c) 2001    (d) 1001
- (iii) O primeiro passo tal que  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  é
- (a) primeiro  $n > 1/\varepsilon^2$     (b) primeiro  $n > 1/\varepsilon$   
 (c) primeiro  $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$     (d) primeiro  $n > 2/\varepsilon$

## 2.2 LIMITE DE SEQUÊNCIAS

Uma vez que definimos com precisão o que significa uma seqüência se aproximar da origem, podemos considerar o caso geral de uma dada seqüência se aproximar de um dado ponto qualquer. Dizemos que  $a_n$  se aproxima de  $a \in \mathbb{R}$  quando a diferença  $a_n - a$  se aproxima da origem, ou de modo equivalente, quando

$$|a_n - a| \rightarrow 0$$

Neste caso, escrevemos

$$a_n \rightarrow a$$

e dizemos que a seqüência  $a_n$  é *convergente* e que o ponto  $a$  é seu *limite*. Temos então a seguinte relação entre seqüências limitadas e seqüências convergentes.

**Proposição 2.4:** Se  $b_n \rightarrow b$ , então

(A)  $b_n$  é limitada e

(B)  $\frac{1}{b_n}$  é limitada, caso  $b > 0$ .

**Prova:** Vamos usar o seguinte fato, cuja demonstração deixamos ao leitor: para que uma sequência  $a_n$  seja limitada basta que, a partir de um certo passo  $n$ , os termos da sequência se encontrem num intervalo  $(L, M)$ .

(A) Temos que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon,$$

uma vez que  $b_n - b \rightarrow 0$ . Logo

$$n \geq n(\varepsilon) \implies b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon, \quad (2.1)$$

mostrando que  $b_n$  é limitada.

(B) Escolhendo  $\varepsilon = \frac{b}{2}$  na equação (2.1), temos que

$$n \geq n\left(\frac{b}{2}\right) \implies \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}.$$

Invertendo os três membros da desigualdade acima, segue que

$$n \geq n\left(\frac{b}{2}\right) \implies \frac{2}{3b} < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b},$$

mostrando que  $\frac{1}{b_n}$  é limitada.

□

A sequência alternada, ilustrada pela Figura 2.9, apesar de limitada, não se aproxima de nenhum ponto da reta. De fato, quando  $n$  é ímpar,  $(-1)^n$  se mantém distante de qualquer número positivo e, quando  $n$  é par,  $(-1)^n$  se mantém distante de qualquer número negativo.

Agora consideramos um exemplo bastante curioso, a denominada *sequência de Fibonacci* dada por  $a_n$  da seguinte maneira: seus dois primeiros passos são iguais a um, ou seja,  $a_1 = a_2 = 1$ . Para obtermos os demais passos, utilizamos a seguinte fórmula

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Os 10 primeiros passos dessa seqüência são apresentados na seguinte lista

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Essa seqüência claramente não possui limite. Entretanto é possível mostrar que a *seqüência das razões de Fibonacci*

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

dada pelas razões

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

é de fato convergente e que seu limite é igual a

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

denominado *razão áurea*. Esse número mágico, conhecido desde a antiguidade, é obtido geometricamente dividindo-se um dado segmento em dois pedaços, de modo que a proporção do todo  $\phi$  sobre a parte maior 1 coincida com a proporção da parte maior 1 sobre a parte menor  $\phi - 1$ , como ilustrado na Figura 2.10. A razão áurea  $\phi$  é então qualquer uma destas duas proporções idênticas e satisfaz

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$

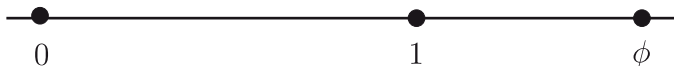


Figura 2.10: Razão áurea em segmento.

## PROPRIEDADES DO LIMITE DE SEQUÊNCIAS

Para determinarmos que o limite da sequência das razões de Fibonacci é de fato a razão áurea, precisamos considerar o comportamento do limite em relação às operações de soma, produto e quociente de sequências, as conhecidas *regras de limite*.

**Proposição 2.5:** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , então*

$(S) \quad a_n + b_n \rightarrow a + b$ $(P) \quad a_n b_n \rightarrow ab$ $(Q) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}, \quad \text{se } b_n, b \neq 0$
--

**Prova:** Pela definição, temos que  $a_n - a \rightarrow 0$  e  $b_n - b \rightarrow 0$ .

(S) A regra da soma segue então da Proposição 2.1, uma vez que

$$a_n + b_n - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b) \rightarrow 0.$$

(P) Para a regra do produto, primeiro observamos que  $b_n$  é limitada, pela Proposição 2.4. Pelas Proposições 2.1 e 2.3, segue que

$$\begin{aligned} a_n b_n - ab &= a_n b_n - ab_n + ab_n - ab, \\ &= (a_n - a) b_n + a(b_n - b) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(Q) Para a regra do quociente, primeiro observamos que, pela regra do produto, como  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ , basta mostrarmos que  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Para isso, consideramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} &= \frac{b - b_n}{b_n b} \\ &= \frac{1}{b b_n} (b - b_n). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.4, temos que  $\frac{1}{b b_n}$  é limitada, uma vez que  $b b_n \rightarrow b^2 > 0$ , pela regra do produto. O resultado segue então da Proposição 2.3.

□

Uma das propriedades fundamentais do limite é a sua *unicidade*, o fato de que uma dada seqüência  $a_n$  só pode se aproximar de no máximo um número  $a \in \mathbb{R}$ . Tal fato é uma consequência direta de uma outra propriedade muito importante do limite, denominada *monotonicidade*.

**Proposição 2.6: (Monotonicidade)** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ . Se  $a_n \leq b_n$ , então  $a \leq b$ .*

**Prova:** Primeiro vamos mostrar que se  $c_n \rightarrow c$  e  $c_n \leq 0$ , então  $c \leq 0$ . Se  $c > 0$ , podemos escolher  $\varepsilon = c$ . Desse modo, segue que

$$n \geq n(c) \quad \implies \quad -c < c_n - c < c$$

e então

$$n \geq n(c) \quad \implies \quad 0 < c_n < 2c,$$

o que é uma contradição, uma vez que estamos supondo que  $c_n \leq 0$ . Agora considere  $c_n = a_n - b_n \leq 0$ . Pelas regras de limite, temos que  $c_n \rightarrow a - b$ . Pela primeira parte da demonstração, temos que  $a - b \leq 0$ , ou seja,  $a \leq b$ . □

**Corolário 2.7: (Unicidade)** *Sejam  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ . Se  $a_n = b_n$ , então  $a = b$ .*

**Prova:** Como  $a_n \leq b_n$  e também  $b_n \leq a_n$ , pela monotonicidade, temos por um lado que  $a \leq b$  e por outro lado que  $b \leq a$ , o que mostra que de fato  $a = b$ . □

O seguinte teorema é uma ferramenta básica no estudo do comportamento de seqüências e é conhecido pelo sugestivo nome de *Teorema do Sanduíche para seqüências*.

**Teorema 2.8: (Sanduíche)** *Se  $a_n \leq c_n \leq b_n$  e  $a_n, b_n \rightarrow c$ , então  $c_n \rightarrow c$ .*

**Prova:** Como  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , segue que

$$0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n.$$

Pelas regras de limite, temos que  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , uma vez que  $a_n, b_n \rightarrow c$ . Pela Proposição 2.2, segue que  $c_n - a_n \rightarrow 0$ , mostrando que

$$c_n = (c_n - a_n) + a_n \rightarrow c.$$

□

Vamos agora utilizar as propriedades de limite para mostrar que a sequência das razões de Fibonacci converge para a razão áurea. De fato, vamos supor que  $r_n \rightarrow \phi$ , onde

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{e} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

e mostrar que

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Em primeiro lugar observamos que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= 1 + \frac{1}{r_n}, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$$

Por outro lado, utilizando a mesma função tempo de espera de  $r_n \rightarrow \phi$ , concluímos que  $r_{n+1} \rightarrow \phi$ . Pela unicidade do limite e pelas regras da soma e do quociente, segue que

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Multiplicando a igualdade acima por  $\phi$ , temos que esse limite é solução da seguinte equação quadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

cuja única solução positiva é de fato a razão áurea

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## SEQUÊNCIA DOS SEMIPERÍMETROS

Concluimos esta seção com a clássica seqüência dos semiperímetros  $SP(I_n)$  dos polígonos regulares inscritos  $I_n$ , cujo número de lados é igual a  $2^{n+1}$ . A Figura 2.11 ilustra o semicírculo e os três primeiros polígonos,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , que são, respectivamente, o quadrado, o octógono e o hexadecágono inscritos. O comprimento dos lados de  $I_n$  é denotado por  $l_n$ .

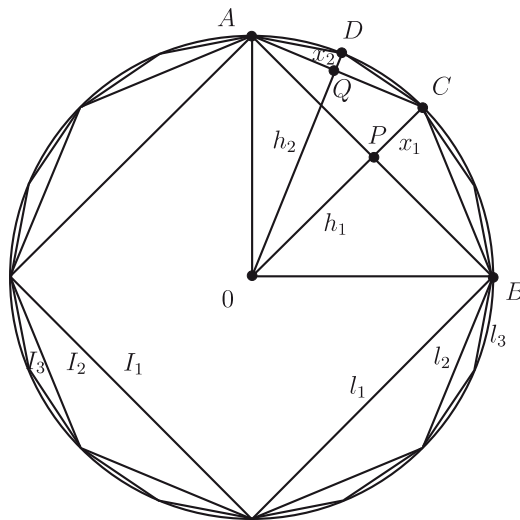


Figura 2.11: Seqüência de polígonos inscritos.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que  $l_1 = \sqrt{2}$ . Para calcularmos  $l_2$ , consideramos os triângulos retângulos  $\triangle ACP$  e  $\triangle AP0$ , onde 0 é o centro do círculo unitário. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} l_2^2 &= x_1^2 + \frac{l_1^2}{4}, \\ 1 &= h_1^2 + \frac{l_1^2}{4} \quad \text{e} \\ 1 &= x_1 + h_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $h_1$  é a altura do triângulo  $\triangle AB0$  de base  $l_1$ . Pela última equação de (2.2), temos que  $h_1 = 1 - x_1$ . Substituindo na segunda equação de (2.2) e simplificando, obtemos

$$x_1^2 - 2x_1 + \frac{l_1^2}{4} = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara e o fato de que  $0 < x_1 < 1$ , temos que

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - l_1^2}}{2}$$

e, portanto, que

$$x_1^2 = \frac{4 - 4\sqrt{4 - l_1^2} + (4 - l_1^2)}{4}.$$

Substituindo esse valor na primeira equação de (2.2), obtemos que

$$l_2^2 = 2 - \sqrt{4 - l_1^2}. \tag{2.3}$$

Além disso, temos também que  $h_1 < h_2$ , onde  $h_2$  é a altura do triângulo  $\triangle AC0$  de base  $l_2$ , pois  $h_2$  é maior que a hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle QP0$ .

Para se obter o lado  $l_3$  a partir do lado  $l_2$ , realiza-se um procedimento análogo. Como mostra a Figura 2.11, considerando os triângulos retângulos  $\triangle ADQ$  e  $\triangle AQ0$  e aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} l_3^2 &= x_2^2 + \frac{l_2^2}{4}, \\ 1 &= h_2^2 + \frac{l_2^2}{4} \quad \text{e} \\ 1 &= x_2 + h_2 \end{aligned}$$



onde em todas as equações de (2.2) substituímos  $l_1$  por  $l_2$ ,  $l_2$  por  $l_3$ ,  $x_1$  por  $x_2$  e  $h_1$  por  $h_2$ . Isso mostra que a relação entre o lado  $l_3$  e o lado  $l_2$  deve ser a similar à relação entre o lado  $l_2$  e o lado  $l_1$  dada pela equação (2.3), de modo que

$$l_3^2 = 2 - \sqrt{4 - l_2^2}$$

e novamente temos também que  $h_2 < h_3$ . De maneira geral, procedendo-se de modo análogo, obtemos que a relação entre o lado  $l_{n+1}$  e o lado  $l_n$  é dada pela equação

$$l_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - l_n^2},$$

que  $h_n < h_{n+1}$  e, portanto, que  $h_1 < h_n$ .

A tabela abaixo mostra os 10 primeiros passos do processo descrito acima.

$n$	$2^n$	$l_n^2$	$l_n$	$SP(I_n)$
1	2	2	1,414214	2,828427
2	4	0,585786	0,765367	3,061467
3	8	0,152241	0,390181	3,121445
4	16	0,0384294	0,196034	3,136548
5	32	0,00963055	0,0981353	3,140331
6	64	0,00240909	0,0490825	3,141277
7	128	0,000602363	0,0245431	3,141514
8	256	0,000150596	0,0122718	3,141573
9	512	0,0000376494	0,00613591	3,141588
10	1024	0,00000941238	0,00306796	3,141591
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	$\infty$	0	0	$\pi$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

2.2.1 Utilizando as regras de limite, temos que

(i) O limite da seqüência  $\frac{n+2}{2n}$  é

- (a) 1    (b) 1/2    (c) 3/2    (d) 5/4

- (ii) O limite da sequência  $\frac{3n^2 + 4}{2n^2}$  é  
 (a) 1 (b) 1/2 (c) 3/2 (d) 5/4
- (iii) O limite da sequência  $\frac{n}{n+1}$  é  
 (a) 1 (b) 1/2 (c) 3/2 (d) 5/4
- (iv) O limite da sequência  $\frac{5n^2}{4n^2 + 6n}$  é  
 (a) 1 (b) 1/2 (c) 3/2 (d) 5/4

2.2.2 Suponha que  $a_n \rightarrow a$ , onde  $a > 0$  e que

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n}.$$

Usando a unicidade, o limite  $a$  é igual a

- (a) 1/2 (b) 1 (c) 2 (d) 3

## 2.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos introduzir a função exponencial a partir do seguinte problema de matemática financeira. Suponhamos que necessitemos tomar um empréstimo de um banqueiro de  $y$  unidades monetárias por um dado período. No contrato básico, o banqueiro tem o direito de pedir o empréstimo de volta a qualquer momento e devemos pagar juros proporcionais ao tempo em que o dinheiro ficar conosco. A taxa básica de juros pelo período todo é igual a  $x$ , de modo que o banqueiro receberia

$$y(1+x)$$

se devolvêssemos o empréstimo apenas ao final do período. Como só poderemos devolver o empréstimo ao final do período, precisamos de uma garantia do banqueiro que ele não peça o pagamento do empréstimo antes que o período termine. Então, o banqueiro pondera que, como o período é muito grande, existem custos de oportunidade a serem acrescidos. De fato, se ele requisitasse a devolução do empréstimo ao final da primeira metade do período, ele receberia  $y(1+x/2)$ , onde  $x/2$  é a taxa de juros para metade

do período. O banqueiro poderia então emprestar, para nós ou para outros,  $y(1 + x/2)$  pela segunda metade do período, com a mesma taxa de juros  $x/2$  e, ao final do período, ele receberia

$$y\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) = y\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

Em seguida o banqueiro pondera que, como uma metade do período ainda é muito grande, ainda existem custos de oportunidade a serem acrescidos. De fato, se ele requisitasse a devolução do empréstimo ao final de cada quarto de período e em seguida reemprestasse todo o valor, como  $x/4$  é a taxa de juros em cada quarto de período, ele receberia  $y(1 + x/4)$  ao final do primeiro quarto,  $y(1 + x/4)^2$  ao final do segundo quarto,  $y(1 + x/4)^3$  ao final do terceiro quarto e, finalmente,

$$y\left(1 + \frac{x}{4}\right)^4$$

ao final do período. O banqueiro poderia reaplicar esse raciocínio  $n$  vezes, dividindo cada subperíodo anterior em dois novos subperíodos com taxa de juros dividida pela metade. Neste caso, ele receberia ao final do período

$$y\left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$$

onde

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$$

é o fator de juros compostos de  $x$  em  $2^n$  subperíodos. O próximo resultado mostra que, quanto mais o banqueiro raciocina, maior fica o fator de juros compostos e, portanto, maior fica a nossa dívida ao final do período.

**Proposição 2.9:** Para cada  $x > 0$ , temos que  $x_{n+1} > x_n$ .

**Prova:** Temos que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}} &= \left(\left(1 + \frac{x}{2^{n+1}}\right)^2\right)^{2^n} \\ &= \left(1 + 2\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x^2}{2^{2n+2}}\right)^{2^n} \\ &> \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}. \end{aligned}$$

□

Precisamos também do seguinte resultado.

**Proposição 2.10:** Para cada  $x, y \geq 0$ , temos que

$$(x + y)_n \leq x_n y_n \leq (x + y)_{n+1}$$

**Prova:** Temos que

$$(x + y)_n = \left(1 + \frac{x + y}{2^n}\right)^{2^n} \leq \left(1 + \frac{x + y}{2^n} + \frac{xy}{2^{2n}}\right)^{2^n} = x_n y_n,$$

mostrando a primeira desigualdade. Para a segunda desigualdade, primeiro observamos que, uma vez que

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy,$$

segue que

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 x_n y_n &= \left(1 + \frac{x+y}{2^n} + \frac{xy}{2^{2n}}\right)^{2^n} \\
 &\leq \left(1 + \frac{x+y}{2^n} + \frac{(x+y)^2}{4 \cdot 2^{2n}}\right)^{2^n} \\
 &= \left(1 + 2 \frac{x+y}{2^{n+1}} + \left(\frac{x+y}{2^{n+1}}\right)^2\right)^{2^n} \\
 &= \left(\left(1 + \frac{x+y}{2^{n+1}}\right)^2\right)^{2^n} \\
 &= (x+y)_{n+1}.
 \end{aligned}$$

□

Mas será que nossa dívida pode crescer ilimitadamente, após sucessivos raciocínios do banqueiro? O próximo resultado mostra que podemos ficar um pouco tranquilos, pois a ganância do banqueiro estará sempre limitada.

**Proposição 2.11:** Para cada  $0 \leq x < l$ , onde  $l \in \mathbb{N}$ , temos que

$$x_n \leq \left(\frac{1}{1 - x/l}\right)^l$$

**Prova:** Primeiro vamos provar o caso em que  $0 \leq x < 1$ . Por simplicidade, denotamos  $m = 2^n$ , de modo que

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

Pela Proposição A.3, temos que

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} \frac{x}{m} + \cdots + \binom{m}{k} \frac{x^k}{m^k} + \cdots + \binom{m}{m} \frac{x^m}{m^m} \\
 &\leq 1 + x + \cdots + x^k + \cdots + x^m \\
 &\leq \frac{1}{1 - x}.
 \end{aligned}$$

onde utilizamos que  $\binom{m}{k} \leq m^k$  (ver Proposição A.3) e a soma dos termos da progressão geométrica infinita (ver Proposição A.2). Quando  $0 \leq x < l$ , temos que  $0 \leq x/l < 1$  e então que

$$(x/l)_n \leq \frac{1}{1 - x/l}.$$

Utilizando a Proposição 2.10, segue que

$$x_n = (x/l + \dots + x/l)_n \leq (x/l)_n \cdots (x/l)_n \leq \left( \frac{1}{1 - x/l} \right)^l.$$

□

## PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dado  $x \geq 0$ , existe um natural  $l$  tal que  $x < l$ . Pelas Proposições 2.9 e 2.10, segue que a ganância do banqueiro  $x_n$  é uma sequência monótona e limitada. Pela Proposição A.5, seu limite existe e é denominado de *exponencial de  $x$* , de modo que

$$x_n = \left( 1 + \frac{x}{2^n} \right)^{2^n} \rightarrow e^x$$

Para cada  $x \geq 0$ , definimos

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

A próxima proposição apresenta as propriedades básicas da exponencial.

**Proposição 2.12:** *Temos que*

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x}$$

onde a primeira desigualdade vale para todo  $x$  e segunda desigualdade vale para todo  $-1 < x < 1$ . Além disso, para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos que

<p>(A) <math>e^{x+y} = e^x e^y</math></p> <p>(B) <math>e^n = e \cdots e</math>, <math>n</math>-vezes</p> <p>(C) <math>x &lt; y \Rightarrow e^x &lt; e^y</math></p>
--

**Prova:** Temos que

$$1 + x = x_0 \leq x_n \leq \frac{1}{1-x},$$

onde a primeira desigualdade vale para todo  $x \geq 0$  (ver Proposição 2.9) e a segunda para todo  $0 \leq x < 1$  (ver Proposição 2.11). Pela monotonicidade do limite, temos que

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x},$$

onde novamente a primeira desigualdade vale para todo  $x \geq 0$  e a segunda para todo  $0 \leq x < 1$ . Portanto

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{e^x} \geq 1-x,$$

o que mostra que

$$1 + (-x) \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1-(-x)},$$

onde agora a primeira desigualdade vale para todo  $0 \leq x < 1$  e a segunda para todo  $x \geq 0$ . A primeira desigualdade também vale para  $x \geq 1$ , uma vez que  $e^{-x}$  é sempre positivo.

- (A) Para  $x, y \geq 0$ , é consequência imediata da Proposição 2.10, da regra do produto e da monotonicidade do limite. A demonstração do caso geral é deixado como exercício.
- (B) Este item é consequência imediata do item (A) e também é deixada como exercício.
- (C) Como  $1 + x \leq e^x$ , segue que  $e^x > 1$ , quando  $x > 0$ . Portanto, pelo item (A), quando  $y - x > 0$ , segue que

$$e^y = e^{y-x} e^x > e^x.$$



A base neperiana é a exponencial para a taxa de juros  $x = 1$

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \rightarrow e.$$

A tabela abaixo mostra alguns passos da sequência que se aproxima da base neperiana.

$n$	1	2	3	...	20	...	$\infty$
$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$	2,2500...	2,4414...	2,5657...	...	2,7182...	...	$e$

## FUNÇÃO LOGARITMO

Denotamos por  $\exp(x) = e^x$  a *função exponencial*, que é crescente com domínio igual a  $\mathbb{R}$ , pela Proposição 2.12. Portanto  $\exp$  possui uma função inversa com imagem igual a  $\mathbb{R}$ , que é denominada *função logaritmo* e denotada por  $\log$ . Vamos mostrar mais adiante que a imagem de  $\exp$  é o intervalo  $(0, \infty)$ . Segue que sua função inversa  $\log$  possui domínio  $(0, \infty)$ . A expressão algébrica do logaritmo é obtida resolvendo para  $y$  a equação

$$e^x = y, \tag{2.4}$$

onde a incógnita é  $x = \log(y)$ . A partir das propriedades da exponencial, obtemos propriedades análogas para o logaritmo.

**Proposição 2.13:** *Para todos  $x, y > 0$ , temos que*

$$\begin{aligned} (A) \quad \log(xy) &= \log(x) + \log(y) \\ (B) \quad \log(x^n) &= n \log(x) \end{aligned}$$

**Prova:**



- (A) Definimos  $u = \log(x)$  e também  $v = \log(y)$ . Temos então que  $x = e^u$  e que  $y = e^v$ . Pela Proposição 2.12, segue então que

$$xy = e^u e^v = e^{u+v}$$

o que mostra que

$$\log(xy) = u + v = \log(x) + \log(y)$$

- (B) A demonstração deste item é consequência imediata do item (A) e é deixada como exercício.

□

Vamos agora definir a exponencial com numa base  $a > 0$ . Uma vez que

$$a^n = e^{\log(a^n)} = e^{n \log(a)}.$$

Definimos então a *exponencial com base a* por

$$a^x = e^{x \log(a)}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.4 LIMITE DE FUNÇÕES

Um corpo é solto no instante  $t = 0$  de uma altura  $s_0 = 1$  e permanece em repouso após atingir o solo. Utilizando a expressão geral apresentada na Seção 1.2, na ausência de atrito com o ar e supondo uma aceleração da gravidade  $g = 2$ , o instante de aterrissagem é  $t_A = 1$  e sua função posição vertical é dada por

$$s(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Na Seção 2.1, discutimos sobre o que seria a velocidade de um movimento desse tipo num instante fixado  $\tau$ . Aqui vamos retomar essa discussão sob o ponto de vista de funções. Fixando o instante  $\tau$ , a velocidade média  $v_\tau$  entre os instantes  $\tau$  e  $t$  é uma função de  $t$  dada por

$$v_\tau(t) = \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau},$$

(2.5)

uma vez que  $s(t) - s(\tau)$  é a variação do espaço e  $t - \tau$  é a variação do tempo entre esses instantes. A velocidade no instante  $\tau$  deveria ser obtida como a velocidade média  $v_\tau(\tau)$  no intervalo entre os instantes  $\tau$  e  $\tau$ . No entanto, isso não é possível, pois a função  $v_\tau$  claramente não está definida em  $t = \tau$ , uma vez que, neste caso,  $t - \tau = 0$  e a velocidade média deixa de fazer sentido. O que podemos fazer então é investigar se os valores  $v_\tau(t)$  da função velocidade média se aproximam de um valor  $v$  à medida que  $t$  se aproxima de  $\tau$ . Se isso ocorre, dizemos que esse valor é a velocidade no instante  $\tau$ .

Na Seção 2.1, fizemos  $t$  se aproximar  $\tau$  passo a passo, considerando uma sequência particular de instantes  $t_n \rightarrow \tau$ . Quando a sequência das respectivas velocidades médias  $v_\tau(t_n)$  se aproximava de um valor  $v$ , esse valor era adotado como velocidade no instante  $\tau$ . Mas... será que nos aproximando de  $\tau$  com uma outra sequência de instantes, não poderíamos obter um outro valor para a velocidade no instante  $\tau$ ? O seguinte exemplo mostra que isso pode ocorrer.

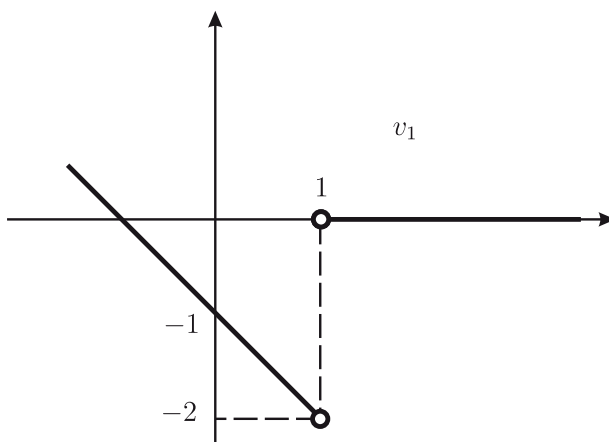


Figura 2.12: Função velocidade média  $v_1$ .

Vamos tentar calcular a velocidade do corpo no instante de aterrissagem  $\tau = 1$ . Pela equação (2.5), a função velocidade média entre 1 e  $t$  é dada por

$$v_1(t) = \begin{cases} \frac{1-t^2}{t-1}, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

como ilustrado pela Figura 2.12.

Tomando a sequência de instantes  $t_n = 1 - \frac{1}{n}$  se aproximando de  $\tau = 1$ , como  $t_n < 1$ , temos que

$$v_1(t_n) = \frac{1 - t_n^2}{t_n - 1} = \frac{(1 + t_n)(1 - t_n)}{t_n - 1} = -(1 + t_n) \rightarrow -2,$$

onde utilizamos a regra do limite da soma. Por outro lado, tomando agora outra sequência de instantes  $t_n = 1 + \frac{1}{n}$  se aproximando de  $\tau = 1$ , como  $t_n > 1$ , temos que

$$v_1(t_n) = 0 \rightarrow 0.$$

Então, imediatamente antes e imediatamente depois do instante de aterrissagem, as velocidades do corpo são diferentes, mostrando que a velocidade no instante  $\tau = 1$  não está bem definida.

Para definirmos a velocidade no instante  $\tau$ , devemos então considerar todas as maneiras possíveis de nos aproximar de  $\tau$ . Mais precisamente, dizemos que  $v$  é a velocidade no instante  $\tau$  se

$$v_\tau(t_n) \rightarrow v$$

para *toda* sequência de instantes  $t_n \rightarrow \tau$ , com  $t_n \neq \tau$ . Neste caso, dizemos que  $v$  é o limite de  $v_\tau(t)$  quando  $t$  tende a  $\tau$  e denotamos isso por

$$\lim_{t \rightarrow \tau} v_\tau(t) = v$$

De maneira mais geral, dada uma função real  $f$ , dizemos que  $L$  é o *limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$* , e denotamos isso por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

quando

$$f(x_n) \rightarrow L$$

para *toda* sequência  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , como ilustrado pela Figura 2.13.

Exigimos que  $x_n \neq a$ , pois não nos interessa saber o que acontece exatamente em cima do ponto  $a$  considerado, mas apenas em pontos arbitrariamente próximo ao ponto  $a$ . Portanto, o ponto  $a$  pode nem sequer estar no

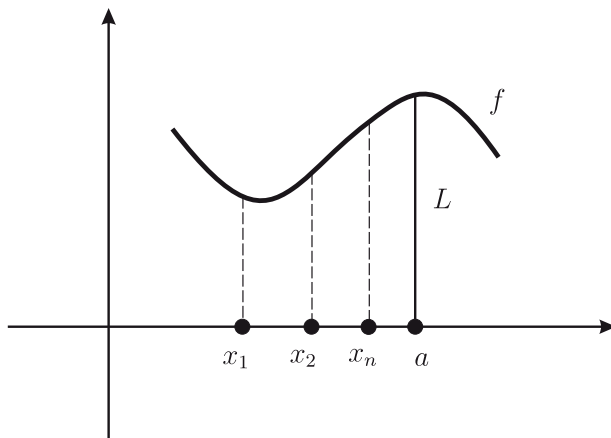


Figura 2.13: Limite de  $f$  no ponto  $a \in \mathbb{R}$ .

domínio da função  $f$ , como no problema da velocidade instantânea no começo desta seção. Notamos que esse ponto  $a$  deve satisfazer à seguinte condição para podermos realizar essa análise: é necessário que exista pelo menos uma sequência  $x_n$  de pontos no domínio de  $f$  se aproximando do ponto  $a$ .

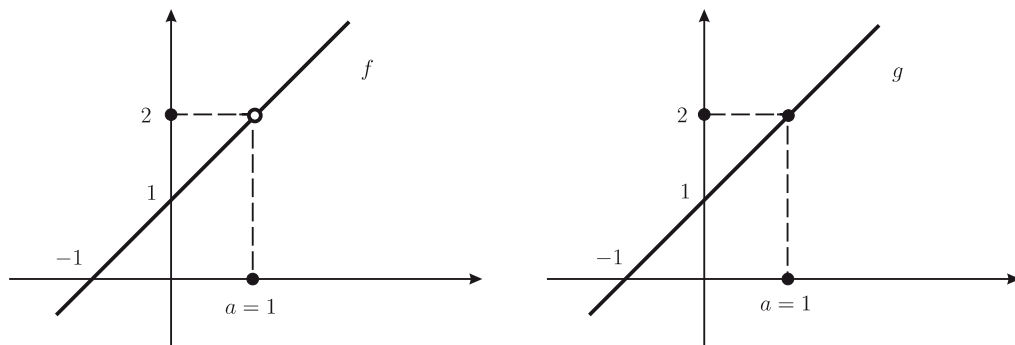


Figura 2.14: Limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $a = 1$ .

Uma consequência da definição de limite de função é que ele depende apenas do comportamento da função nas proximidades do ponto considerado, o que é ilustrado no seguinte exemplo. Sejam  $f$  e  $g$  funções reais dadas

por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1.$$

Observe na Figura 2.14 que  $f$  e  $g$  coincidem em todos os pontos, exceto em  $x = 1$ , onde  $f$  nem mesmo está definida. Seja agora  $x_n \rightarrow 1$  com  $x_n \neq 1$ . Temos então que

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1 = g(x_n),$$

o que implica que  $f(x_n), g(x_n) \rightarrow 2$ . Isso mostra que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2,$$

o que justifica simplificarmos expressões algébricas dentro do limite.

## PROPRIEDADES DO LIMITE DE FUNÇÕES

Consideraremos agora algumas propriedades do limite de funções que são análogas a propriedade do limite de seqüências. Assim como no caso do limite de seqüências, o limite e os limites laterais de funções se comportam muito bem em relação às operações de soma, produto e quociente de funções.

**Proposição 2.14:** *Se existem*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então

$(S) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
$(P) \quad \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$
$(Q) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Como caso particular das regras do produto e do quociente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{c} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{c}$$

ou seja, "a constante multiplicando ou dividindo sai do limite".

**Prova:** Denotando

$$L_f = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad L_g = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

temos que se  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , então

$$f(x_n) \rightarrow L_f \quad \text{e} \quad g(x_n) \rightarrow L_g.$$

Pelas regras de limite de sequência, temos que

(S)

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow L_f + L_g$$

(P)

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow L_f L_g$$

(Q)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{L_f}{L_g},$$

o que demonstra a proposição. □

Por exemplo, temos que

$$\lim_{y \rightarrow 3} y^2 = \left(\lim_{y \rightarrow 3} y\right) \left(\lim_{y \rightarrow 3} y\right) = 3^2 = 9$$

e também que

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 3^2 + 1 = 10.$$

Vale também a *monotonicidade* para o limite de funções.

**Proposição 2.15: (Monotonicidade)** Se  $f \leq g$  e existem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**Prova:** Utilizando a mesma notação empregada na demonstração das regras de limite, temos que se  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , então  $f(x_n) \rightarrow L_f$  e também que  $g(x_n) \rightarrow L_g$ . Como  $f \leq g$ , temos que  $f(x_n) \leq g(x_n)$ . Pela monotonicidade do limite de seqüências, segue que  $L_f \leq L_g$ , o que demonstra o resultado.  $\square$

O seguinte teorema é uma ferramenta básica no estudo do comportamento das funções reais, conhecido pelo sugestivo nome de *Teorema do Sanduíche para funções*.

**Teorema 2.16: (Sanduíche)** Se  $f \leq h \leq g$  e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**Prova:** Utilizando a mesma notação empregada na demonstração da monotonicidade, temos que se  $x_n$  é tal que  $x_n \rightarrow a$ , então  $f(x_n) \rightarrow L_f$  e também que  $g(x_n) \rightarrow L_g$ . Como  $f \leq h \leq g$ , temos que  $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ . Pelo Teorema do Sanduíche para seqüências, segue que  $h(x_n) \rightarrow L_f = L_g$  e demonstra o resultado.  $\square$

## LIMITES LATERAIS

Vamos definir agora os conceitos de limites laterais, respectivamente, esquerdo e direito de uma dada função num dado ponto. Para isso, precisamos da seguinte definição de limite de seqüências. Se  $a_n \rightarrow a$  e  $a < a_n$ , para todo

$n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $a_n$  *tende (ou converge) para a pela direita* e denotamos isso por  $a_n \downarrow a$ . De maneira análoga, se  $a_n \rightarrow a$  e  $a_n < a$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $a_n$  *tende (ou converge) para a pela esquerda* e denotamos isso por  $a_n \uparrow a$ . Enquanto a sequência harmônica se aproxima com pontos localizados apenas à direita da origem, a sequência anti-harmônica se aproxima à esquerda da origem e a sequência harmônica alternada por ambos os lados, como ilustram as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4.

Intuitivamente, o *limite lateral esquerdo de  $f$  em um ponto  $a \in \mathbb{R}$* , quando existe, é o número real denotado por

$$L_e = \lim_{x \uparrow a} f(x)$$

tal que se  $x$  se aproxima de  $a$  pela esquerda, então  $f(x)$  se aproxima de  $L_e$ . Mais precisamente, para toda sequência  $x_n$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \uparrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow L_e$ . O *limite lateral direito de  $f$  em um ponto  $a \in \mathbb{R}$*  é definido de forma análoga como o número real denotado por

$$L_d = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

tal que se  $x$  se aproxima de  $a$  pela direita, então  $f(x)$  se aproxima de  $L_d$ , ou de modo mais preciso, para cada sequência  $x_n$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \downarrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow L_d$ .

Uma notação alternativa muito utilizada para limites laterais é  $x \rightarrow a^+$  significando  $x \downarrow a$  e  $x \rightarrow a^-$  significando  $x \uparrow a$ . Com essa notação, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$$

É importante observar que, no caso em que o domínio da função  $f$  é o intervalo limitado  $[a, b]$ , os conceitos de limite e de limite lateral coincidem nos pontos da fronteira do intervalo, como ilustra a Figura 2.15, onde temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \uparrow b} f(x),$$

pois no primeiro caso não faz sentido o limite lateral esquerdo e no segundo caso não faz sentido o limite lateral direito.



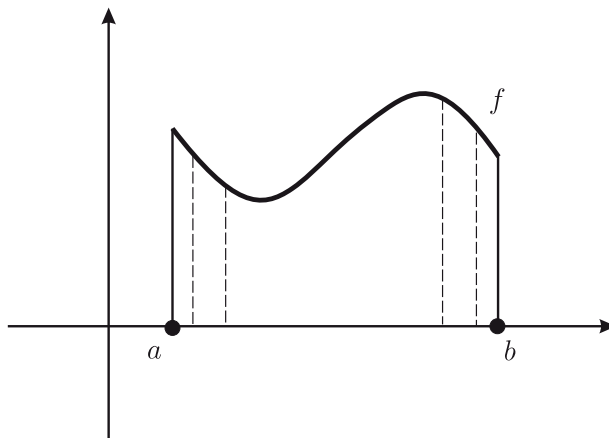


Figura 2.15: Limites de  $f$  nos extremos de  $[a, b]$ .

Pode acontecer também que a função possua os dois limites laterais em um dado ponto, mas não o limite, como mostra o seguinte exemplo. Seja  $f$  a função real dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

e ilustrada pela Figura 2.16.

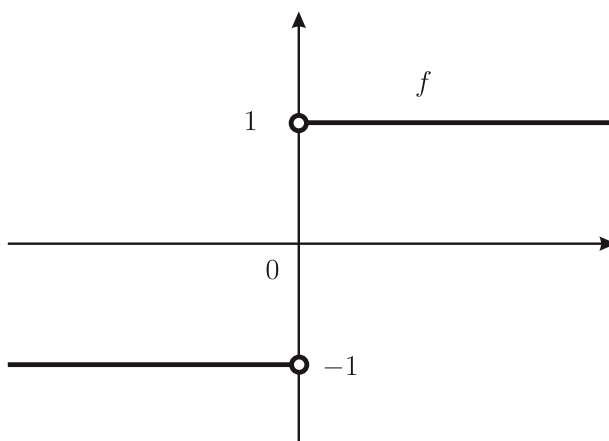


Figura 2.16: Limites laterais de  $f$  são distintos na origem.

Se  $x_n$  é a sequência harmônica alternada, apresentada na Seção 2.1, então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é a sequência alternada, que não possui limite algum, como mostrado na Seção 2.1. Isso mostra que não existe o limite de  $f$  no ponto 0, uma vez que  $x_n \rightarrow 0$ . Por outro lado, para toda sequência  $x_n$  convergindo a 0 pela direita, a sequência das suas imagens é a sequência constante (1), mostrando que o limite lateral direito existe e é de fato igual a 1. Analogamente, temos que o limite lateral esquerdo existe e é igual a  $-1$ .

O exemplo seguinte apresenta uma função que não possui, num dado ponto limite, sequer um dos limites laterais. Considere a função real  $f$  dada por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad (2.7)$$

ilustrada pela Figura 2.17, cujo domínio são os números reais não nulos.

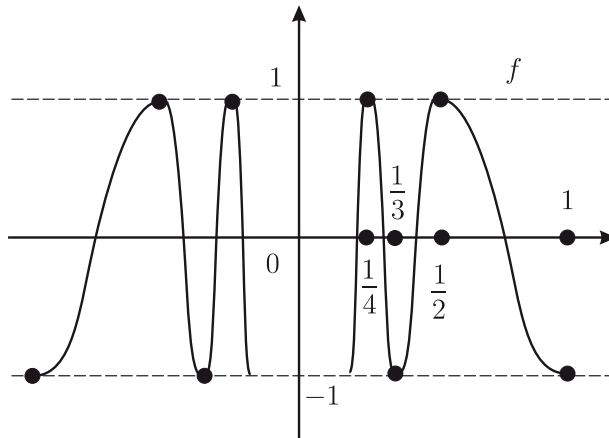


Figura 2.17: Limites laterais de  $f$  não existem na origem.

Se  $x_n$  é a sequência harmônica, apresentada na Seção 2.1, então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é a sequência alternada. Isso mostra que não existe o limite lateral direito de  $f$  no ponto 0, uma vez que  $x_n \downarrow 0$  e que, como já mencionamos, a sequência alternada não possui limite algum. Considerando a sequência anti-harmônica, apresentada na Seção 2.1, e argumentando de maneira análoga, obtemos que também não existe o limite lateral esquerdo de  $f$  no ponto 0.

Agora considere uma função cujo domínio é um intervalo aberto. Vamos mostrar que o limite existe em um dado ponto do domínio se e só se os limites laterais existem e são iguais.

**Proposição 2.17:** *Seja  $f$  tal que  $\text{dom}(f)$  é um intervalo aberto. Para todo  $a \in \text{dom}(f)$ , temos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = L = \lim_{x \downarrow a} f(x).$$

**Prova:** Vamos primeiro supor que o limite de  $f$  em  $a$  existe e é igual a  $L$ . Neste caso, se  $x_n \uparrow a$  ou  $x_n \downarrow a$ , temos que  $f(x_n) \rightarrow L$ , o que mostra que os limites laterais existem e são iguais a  $L$ . Agora supomos que os limites laterais existem e são iguais a  $L$ . Seja  $x_n \rightarrow a$  uma sequência qualquer tal que  $x_n \neq a$ . Definimos

$$y_n = a - |a - x_n| \quad \text{e} \quad z_n = a + |x_n - a|.$$

Neste caso, temos que  $y_n \uparrow a$  e que  $z_n \downarrow a$ . Logo, segue que  $f(y_n), f(z_n) \rightarrow L$ . Como  $x_n = y_n$ , quando  $x_n < a$ , ou  $x_n = z_n$ , quando  $x_n > a$ , segue que

$$0 \leq |f(x_n) - L| \leq |f(y_n) - L| + |f(z_n) - L|.$$

O resultado segue então do Teorema do Sanduíche. □

Esse resultado é extremamente útil para se analisar a existência do limite nos pontos onde uma dada função muda sua expressão algébrica. Por exemplo, seja  $f$  uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Temos que

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} \frac{x}{4} = \frac{2}{4},$$

pois, pela regra do quociente, se  $x_n \uparrow 2$ , então  $\frac{x_n}{4} \rightarrow \frac{2}{4}$ . Por outro lado temos que

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

pois, novamente pela regra do quociente, se  $x_n \downarrow 2$ , então  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ . Portanto, concluímos que os limites laterais de  $f$  no ponto  $x = 2$  existem e coincidem, mostrando que o limite de  $f$  no ponto  $x = 2$  também existe e que

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

2.4.1 Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Podemos afirmar que

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- (a) não existe, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) > 0$
  - (b) não existe, pois  $f(1)$  não está definido
  - (c) é igual a  $-1$
  - (d) é igual a  $1$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  é igual a
- (a) é igual a  $f(1)$
  - (b) não existe, pois  $f(1)$  não está definido
  - (c) é igual a  $-2$
  - (d) é igual a  $2$

**Sugestão:** divida os polinômios.

2.4.2 Podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

- (a) é igual a  $0$ , pois  $x^3 + 1 = 0$  quando  $x = -1$
- (b) não existe, pois  $x + 1 = 0$  quando  $x = -1$
- (c) é igual  $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x + 1$
- (d) é igual a um número par

**Sugestão:** divida os polinômios.

2.4.3 Podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 11x + 2}{x - 2}$

- (a) é igual a  $0$ , pois  $x^3 + 3x^2 - 11x + 2 = 0$  quando  $x = 2$
- (b) não existe, pois  $x - 2 = 0$  quando  $x = 2$
- (c) é igual a um número primo
- (d) é igual a um número par

**Sugestão:** divida os polinômios.

2.4.4 Podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

- (a) não existe, pois  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 1 > \lim_{x \rightarrow 2} x - 1$
- (b) é igual ao quociente dos limites  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} x - 1$
- (c) é igual a um número irracional maior que 2
- (d) é igual a um número par

2.4.5 Podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$

- (a) é igual a 0, pois  $x^3 - a^3 = 0$  quando  $x = a$
- (b) não existe, pois  $x - a = 0$  quando  $x = a$
- (c) é igual  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 - ax + a^2$
- (d) é igual a  $3a^2$

**Sugestão:** divida os polinômios.

2.4.6 Considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- (a) é igual a 1
- (b) não existe, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- (c) não existe, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$
- (d) só existe quando  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

2.4.7 Considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 1/x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

- (a) é igual a 1, pois  $f(1) = 1$
- (b) é igual a 1, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$
- (c) não existe, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- (d) não existe, pois  $f$  não está definida em 1

## 2.5 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

A partir do conceito de limite de funções reais, podemos definir outra noção fundamental para a análise das funções reais. De maneira intuitiva, uma função real  $f$  é *contínua em um ponto*  $a \in \mathbb{R}$ , se  $f(x)$  se aproxima de  $f(a)$ , quando  $x$  se aproxima de  $a$ . De maneira mais precisa, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para que  $f$  seja contínua num ponto  $a \in \mathbb{R}$ , ambos os lados da equação acima devem existir e serem iguais. Quando  $f$  não é contínua num ponto  $a$ , dizemos que  $f$  é *descontínua em  $a$*  e que  $a$  é um *ponto de descontinuidade de  $f$* . Vale a seguinte caracterização da continuidade num ponto  $a$  em termo de sequências.

**Proposição 2.18:** *Temos  $f$  é contínua em  $a$  se e só se*

$$f(x_n) \rightarrow f(a)$$

para toda sequência  $x_n \rightarrow a$ .

**Prova:** Primeiro note que, na condição acima, incluímos todas as sequências que se aproximam de  $a$ , inclusive as tais que  $x_n \neq a$ , que aparecem na definição de limite. Isso mostra que essa condição implica que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

e, portanto, que  $f$  é contínua em  $a$ .

Por outro lado, se  $f$  é contínua em  $a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

de modo que existe  $y_n \rightarrow a$  com  $y_n \neq a$ . Dado  $x_n \rightarrow a$ , defina a sequência

$$z_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } x_n \neq a \\ y_n, & \text{se } x_n = a \end{cases}$$

Como  $z_n = x_n$  ou  $z_n = y_n$ , segue que

$$0 \leq |z_n - a| \leq |x_n - a| + |y_n - a|$$

e, pelo Teorema do Sanduíche, temos que  $z_n \rightarrow a$ . Como  $z_n \neq a$ , pela definição de limite, segue então que  $f(z_n) \rightarrow f(a)$ . Como  $f(x_n) = f(a)$  ou  $f(x_n) = f(z_n)$ , segue que

$$0 \leq |f(x_n) - f(a)| \leq |f(z_n) - f(a)|$$

e, pelo Teorema do Sanduíche, segue que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .  $\square$

As funções constantes e a função identidade são exemplos de funções contínuas em todo ponto  $a \in \mathbb{R}$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

A continuidade se comporta bem em relação às operações entre funções, o que é consequência da Proposição 2.14.

**Corolário 2.19:** Se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $a \in \mathbb{R}$ , então

(S) a função soma  $f + g$  é contínua em  $a$ .

(P) a função produto  $fg$  é contínua em  $a$ .

(Q) a função quociente  $f/g$  é contínua em  $a$ , desde que  $g(a) \neq 0$ .

Além disso, se  $g$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $g(a)$ , então

(C) a função composta  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

**Prova:** Vamos mostrar apenas o caso da soma e da composição de funções.

(S) Utilizando a Proposição 2.14, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

mostrando que a função  $f + g$  é contínua em  $a$ .

- (C) Para a composição, vamos utilizar a Proposição 2.18. Se  $x_n \rightarrow a$ , pela continuidade de  $g$  em  $a$ , temos que  $g(x_n) \rightarrow a$ . Então, pela continuidade de  $f$  em  $g(a)$ , segue que  $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(a))$ . O resultado segue, pois mostramos que  $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(a))$ , para toda sequência  $x_n \rightarrow a$ .

□

Se  $p$  é a função polinomial dada por

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

então  $p$  é contínua em todos os pontos. Isso segue a partir das regras da soma e do produto e do fato que as funções constantes e a função identidade serem contínuas em todos os pontos. Dizemos que uma função real  $f$  é *contínua*, se  $f$  é contínua em todos os pontos do seu domínio. Pela observação acima, temos que as funções polinomiais são contínuas.

Se  $r$  é uma função racional dada por

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios, temos, pela regra do quociente, que

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a),$$

para todo  $a$  tal que  $q(a) \neq 0$ . Isso mostra que as funções polinomiais são contínuas.

Em termos dos limites laterais, temos a seguinte caracterização, que é uma consequência imediata da Proposição 2.17.

**Corolário 2.20:** *Seja  $a \in \text{dom}(f)$ , onde  $\text{dom}(f)$  é um intervalo aberto. Temos que  $f$  é contínua em  $a$  se e só se os limites laterais de  $f$  em  $a$  são iguais a  $f(a)$ .*

Existem três possibilidades para que uma função  $f$  seja descontínua num dado ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Uma primeira possibilidade é o limite de  $f$  no ponto  $a$  nem sequer existir, como nos exemplos ilustrados pelas Figuras 2.16 e 2.17, onde  $a = 0$ . Uma outra possibilidade é, apesar do limite de  $f$  no ponto  $a$  existir, a função  $f$  não estar definida em  $a$ , como ilustrado pela Figura 2.14, onde



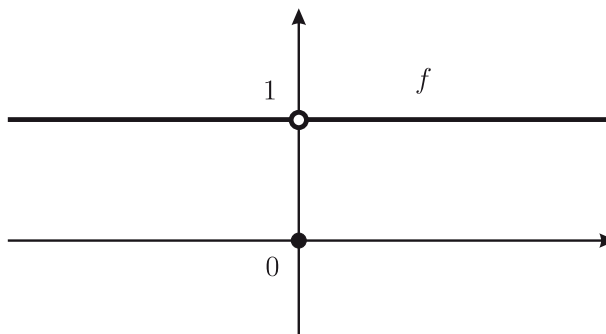


Figura 2.18: Limite existe mas não coincide com altura dada por  $f$  na origem.

$a = 1$ . Uma última possibilidade é, o limite de  $f$  no ponto  $a$  existir, a função  $f$  estar definida em  $a$ , mas esses valores não coincidirem, como é ilustrado pela Figura 2.18.

Neste exemplo, a função  $f$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Concluiremos esta seção mostrando que a função exponencial é contínua no seu domínio natural. Antes necessitamos da seguinte proposição.

**Proposição 2.21:** *Temos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h),$$

onde um lado dessa equação existe se e só se o outro também existe. Em particular,  $f$  é contínua em  $a$  se e só se

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

**Prova:** O resultado segue do fato de que  $x_n = h_n + a \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , se e só se  $h_n = x_n - a \rightarrow 0$ , com  $h_n \neq 0$ .  $\square$

Vamos agora mostrar que a função exponencial é contínua.

**Proposição 2.22:** *A função exponencial é contínua.*

**Prova:** Primeiro vamos mostrar que a exponencial é contínua na origem, ou seja, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^0 = 1. \quad (2.8)$$

Pela Proposição 2.12, temos que

$$1 + h \leq e^h \leq \frac{1}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ . A equação (2.8) segue então do Teorema do Sanduíche. Novamente, pela Proposição 2.12, temos que

$$e^{a+h} = e^a e^h,$$

para todos  $a, h \in \mathbb{R}$ . Utilizando a regra do produto e a continuidade na origem, obtemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{a+h} = e^a,$$

o que mostra, pela Proposição 2.21, que a função exponencial é contínua em toda reta  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

### 2.5.1 A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$

é contínua em  $x = 0$ ?

(a) Sim, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

(b) Sim, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

(c) Não, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$

(d) Não, pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$

## 2.5.2 A função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 1/x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$$

é contínua em  $x = 1$ ?

- (a) Sim, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- (b) Sim, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$
- (c) Não, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$
- (d) Não, pois  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$

## 2.5.3 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $x = 0$ ?

- (a) nenhum
- (b)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$
- (c)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$
- (d)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

## 2.5.4 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 1 \\ c/x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $x = 1$ ?

- (a) nenhum
- (b)  $c = 2$ , pois  $f(1) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$
- (c)  $c = 2$ , pois  $f(1) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$
- (d)  $c = 1$ , pois  $f(1) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

## 2.5.5 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ c/x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $x = 0$ ?

- (a) nenhum, pois o limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  não existe
- (b)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$
- (c)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$
- (d)  $c = 1$ , pois  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c$

2.5.6 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ c, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $x = 1$ ?

- (a) nenhum, pois o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  não existe
- (b)  $c = 2$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- (c)  $c = 2$ , pois  $f(1) = c$
- (d)  $c = 2$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  e  $f(1) = c$

2.5.7 Considere a função

$$s(t) = \begin{cases} \frac{t^3 + 1}{t + 1}, & \text{se } t > -1 \\ c, & \text{se } t \leq -1. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $t = -1$ ?

- (a) nenhum, pois o limite  $\lim_{t \rightarrow -1^+} s(t)$  não existe
- (b)  $c = 3$ , pois  $\lim_{t \rightarrow -1^+} s(t) = 3$
- (c)  $c = 3$ , pois  $s(-1) = c$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1^-} s(t) = c$  e  $\lim_{t \rightarrow -1^+} s(t) = 3$
- (d)  $c = -1$ , pois  $s(-1) = c$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1^-} s(t) = c$  e  $\lim_{t \rightarrow -1^+} s(t) = 3$

2.5.8 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}, & \text{se } x > 2 \\ c, & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

Para qual valor da constante  $c$  a função é contínua em  $x = 2$ ?

- (a) nenhum, pois o limite  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  não existe
- (b)  $c = 2\sqrt{2}$ , pois  $f(2) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2\sqrt{2}$
- (c)  $c = 2$ , pois  $f(2) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = c$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$
- (d)  $c = 2$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

**Sugestão:** utilize que  $x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$ .

## 2.6 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

O próximo resultado garante a existência de raízes para funções contínuas que mudam de sinal na fronteira de seu domínio.

**Proposição 2.23:** *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$  com*

$$f(a) < 0 \quad \text{e} \quad f(b) \geq 0.$$

*Então  $f(c) = 0$  para algum  $c \in [a, b]$ .*

**Prova:** Vamos aplicar o denominado *método da bissecção*, construindo seqüências cujo limite é uma raiz  $c$  de  $f$ , como ilustrado pela Figura 2.19. Vamos proceder passo a passo. Iniciamos com os pontos da fronteira, definindo  $x_1 = a$  e também  $y_1 = b$ , de modo que

$$f(x_1) < 0 \quad \text{e} \quad f(y_1) \geq 0.$$

No segundo passo, queremos definir  $x_2$  e  $y_2$  de modo que

$$f(x_2) < 0 \quad \text{e} \quad f(y_2) \geq 0$$

e que

$$y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

Para isso, consideramos então o ponto médio entre  $x_1$  e  $y_1$ , dado por

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2},$$

e analisamos as duas possibilidades. Se  $f(z_1) < 0$ , então escolhemos

$$x_2 = z_1 \quad \text{e} \quad y_2 = y_1,$$

como ilustrado pela Figura 2.19. Caso contrário, se  $f(z_1) \geq 0$ , então escolhemos

$$x_2 = x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = z_1.$$

Nas duas possibilidades, é imediato que

$$x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1.$$

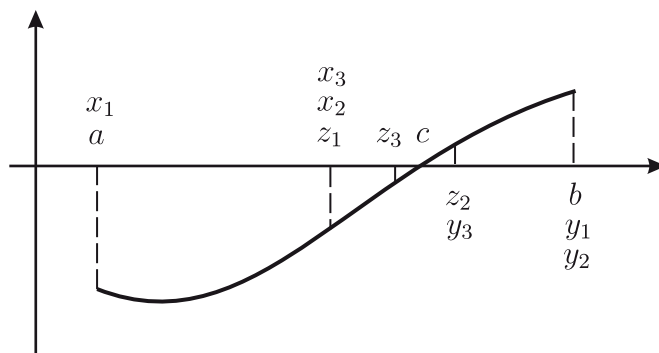


Figura 2.19: Raiz de função contínua que muda de sinal

Repetindo o processo anterior até o  $n$ -ésimo passo, obtemos  $x_n$  e  $y_n$  de modo que

$$f(x_n) < 0 \quad \text{e} \quad f(y_n) \geq 0 \quad (2.9)$$

e que

$$y_n - x_n = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} = \frac{b - a}{2^{n-1}}. \quad (2.10)$$

Além disso, obtemos que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1.$$

Repetindo o processo indefinidamente, obtemos seqüências  $x_n$  e  $y_n$  monótonas limitadas. Pela Proposição A.5, segue que existem  $c$  e  $d$  tais que

$$x_n \uparrow c \quad \text{e} \quad y_n \downarrow d,$$

de modo que  $a \leq c \leq d \leq b$ . Pela unicidade do limite, segue que  $c = d$ , uma vez que, por um lado, temos que  $y_n - x_n \rightarrow d - c$  e, por outro lado, temos que  $y_n - x_n \rightarrow 0$ , como mostra a equação (2.10). Segue então que

$$x_n, y_n \rightarrow c$$

e, pela continuidade de  $f$ , obtemos que

$$f(x_n), f(y_n) \rightarrow f(c).$$

Pela monotonicidade do limite e pelas desigualdades (2.9), segue que

$$f(c) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(c) \geq 0,$$

mostrando que  $f(c) = 0$ . □

O método da bissecção, utilizado na demonstração do resultado acima, fornece uma maneira de se obter aproximações para o valor da raiz quadrada de um dado número. Como exemplo, vamos obter aproximações de  $\sqrt{2}$ , determinando os quatro primeiros passos do método aplicado à função  $f(x) = x^2 - 2$  no intervalo  $[1, 2]$ . Iniciamos com

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2 \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5.$$

No segundo passo, como

$$f(z_1) = (1,5)^2 - 2 > 0,$$

escolhemos

$$x_2 = x_1 = 1, \quad y_2 = z_1 = 1,5 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25.$$

No terceiro passo, como

$$f(z_2) = (1,25)^2 - 2 < 0,$$

escolhemos

$$x_3 = z_2 = 1,25, \quad y_3 = y_2 = 1,5 \quad \text{e} \quad z_3 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375.$$

Finalmente, no quarto passo, como

$$f(z_3) = (1,375)^2 - 2 < 0,$$

escolhemos

$$x_4 = z_3 = 1,375, \quad y_4 = y_3 = 1,5 \quad \text{e} \quad z_4 = \frac{1,375+1,5}{2} = 1,4375.$$

O próximo resultado, conhecido como *Teorema do Valor Intermediário*, garante que qualquer ponto que esteja entre dois valores da imagem de uma função contínua é também um valor da imagem (ver Figura 2.20).

**Teorema 2.24: (TVI)** *A imagem de função contínua  $f$  num intervalo também é um intervalo.*

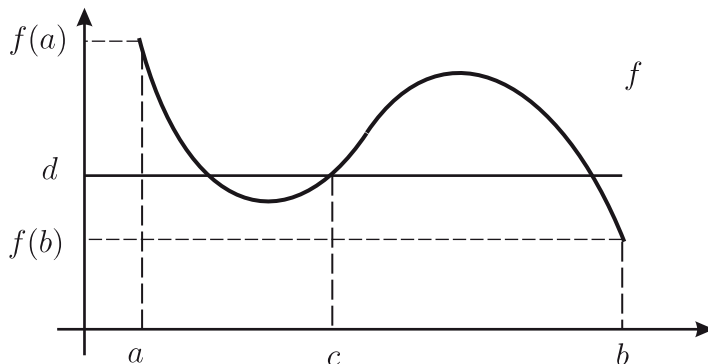


Figura 2.20: Teorema do Valor Intermediário.

**Prova:** Dado qualquer número  $d$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , devemos mostrar que  $d$  está na imagem de  $f$ , ou seja, existe  $c$  tal que  $d = f(c)$ . Suponha inicialmente que  $f(a) < d < f(b)$ . Definindo

$$g(x) = f(x) - d,$$

temos que  $g$  é contínua em  $[a, b]$  com  $g(a) < 0$  e  $g(b) > 0$ . Pela Proposição 2.23, temos que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$g(c) = f(c) - d = 0,$$

logo  $f(c) = d$ . Se  $f(b) < d < f(a)$ , o mesmo argumento funciona tomando

$$g(x) = d - f(x).$$

□

Graficamente, o TVI nos diz que, ao desenhar o gráfico de uma função contínua num intervalo, não podemos tirar o lápis do papel.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

2.6.1 Considere a sequência dos pontos médios  $z_n \rightarrow \sqrt{2}$  obtida pela aplicação do método da bissecção para encontrar uma raiz da função  $f(x) = x^2 - 2$  no intervalo  $[1, 2]$ .



(i) O termo  $z_5$  é igual a

(a) 1,41421 (b) 1,41425 (c) 1,41025 (d) 1,40625

(ii) O termo  $z_7$  é igual a

(a) 1,4140625 (b) 1,4141025 (c) 1,4142135 (d) 1,4142136

2.6.2 Considere a sequência dos pontos médios  $z_n \rightarrow \sqrt{3}$  obtida pela aplicação do método da bissecção para encontrar uma raiz da função  $f(x) = x^2 - 3$  no intervalo  $[1, 2]$ .

(i) O termo  $z_3$  é igual a

(a) 1,625 (b) 1,732 (c) 1,525 (d) 1,605

(ii) O termo  $z_4$  é igual a

(a) 1,6875 (b) 1,7320 (c) 1,5225 (d) 1,6055

2.6.3 Considere a sequência dos pontos médios  $z_n \rightarrow \sqrt[3]{2}$  obtida pela aplicação do método da bissecção para encontrar uma raiz da função  $f(x) = x^3 - 2$  no intervalo  $[1, 2]$ .

(i) O termo  $z_3$  é igual a

(a) 1,259 (b) 1,375 (c) 1,260 (d) 1,325

(ii) O termo  $z_4$  é igual a

(a) 1,2625 (b) 1,2599 (c) 1,3125 (d) 1,3025

## 2.7 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES INVERSAS

Nesta seção, vamos analisar a continuidade de funções inversas definidas em intervalos. Primeiro observamos que, se  $f$  é monótona, então ela é injetiva, pois claramente satisfaz o teste da reta horizontal. Entretanto, existem funções injetivas que não são monótonas, como mostra o seguinte exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ x-1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

ilustrado pela Figura 2.21. Esse tipo de situação não pode ocorrer quando  $f$  é contínua e seu domínio é um intervalo.

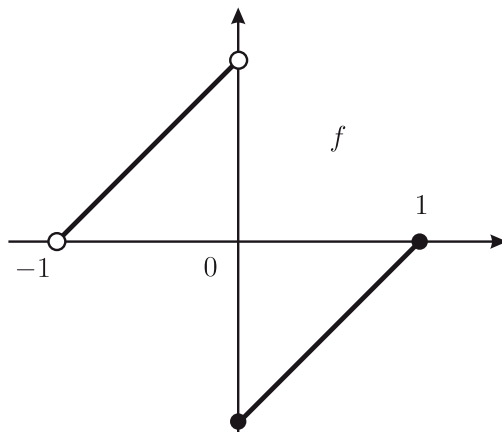


Figura 2.21: Uma função injetiva que não é monótona.

**Proposição 2.25:** *Seja  $f$  uma função contínua cujo o domínio é um intervalo. Então  $f$  é injetiva se e só se  $f$  é monótona.*

**Prova:** Já observamos acima que se  $f$  é monótona, então  $f$  é injetiva. Resta portanto mostrarmos que se  $f$  é injetiva, então  $f$  é monótona. Se  $f$  fosse injetiva, mas não fosse monótona, então existiriam  $x < y < z$ , pontos no domínio de  $f$ , satisfazendo a uma das seguintes possibilidades: (1)  $f$  cresce de  $x$  para  $y$  mas decresce de  $y$  para  $z$  ou (2)  $f$  decresce de  $x$  para  $y$  mas cresce de  $y$  para  $z$ , como ilustra a Figura 2.22.

Vamos analisar possibilidade 1). Neste caso, temos que  $f(x) < f(y)$  e também que  $f(y) > f(z)$  e então teríamos mais dois casos: (A)  $f(z) < f(x)$  ou (B)  $f(z) > f(x)$ , como mostra a Figura 2.23. No caso (A), teríamos que  $f(z) < f(x) < f(y)$ . Pelo TVI, existiria  $c \in \text{dom}(f)$ , onde  $y < c < z$  e tal que  $f(c) = f(x)$ . Mas isso seria uma contradição com o fato de supormos que  $f$  é injetiva. No caso (B), teríamos que  $f(y) > f(z) > f(x)$ . Pelo TVI, existiria  $c \in \text{dom}(f)$ , onde  $x < c < y$  e tal que  $f(c) = f(z)$ . Novamente, isso seria uma contradição com o fato de supormos que  $f$  é injetiva.

Analisando a possibilidade (2) de maneira análoga, o que é deixado como exercício, obteríamos mais uma vez uma contradição. Portanto, concluímos que se  $f$  é injetiva, então  $f$  só pode ser monótona.  $\square$

O resultado seguinte garante a continuidade da inversa de funções contí-

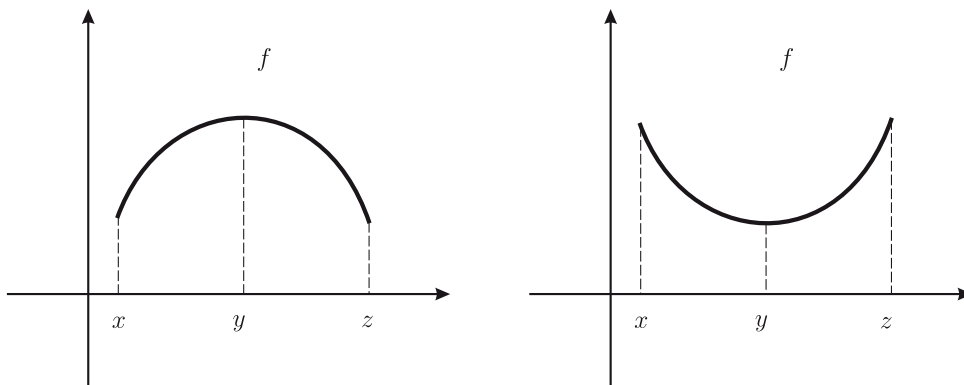


Figura 2.22: Possibilidades (1) e (2).

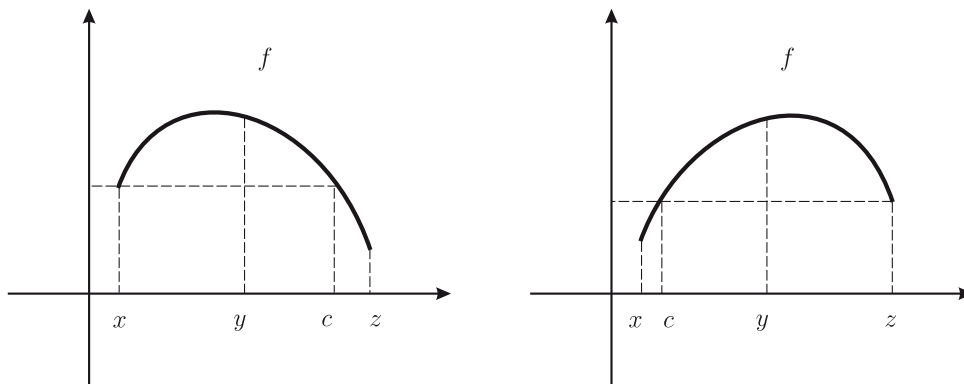


Figura 2.23: Casos (A) e (B).

nuas em intervalos.

**Proposição 2.26:** *Se  $f$  é uma função contínua e injetiva definida num intervalo, então sua função inversa também é contínua e definida num intervalo.*

**Prova:** Pela Proposição 2.25, temos que  $f$  é monótona. Primeiro vamos mostrar que a inversa  $g$  de  $f$  é monótona. De fato, vamos mostrar que se  $f$  é crescente, então a inversa  $g$  também é crescente. O caso em que  $f$  é decrescente é análogo e deixado como exercício. Se  $f$  fosse uma função crescente, mas sua

inversa  $g$  não fosse crescente, então existiriam  $c < d$ , pontos do domínio da inversa  $g$  tais que  $g(d) \leq g(c)$ . Como  $f$  é crescente, teríamos que

$$d = f(g(d)) \leq f(g(c)) = c$$

o que seria uma contradição. Portanto, concluímos que se  $f$  é uma função crescente, então sua inversa  $g$  só pode ser uma função crescente.

Para mostrar a continuidade num ponto  $a$  do domínio de  $g$ , pela Proposição 2.20, basta mostrar que os limites laterais, quando fizerem sentido, são iguais a  $g(a)$ . Pela Proposição A.3, o seguinte limite existe

$$L = \lim_{x \downarrow a} g(x).$$

Por definição, se  $x_n \downarrow a$ , então  $g(x_n) \rightarrow L$ . Como a função  $f$  é contínua, segue que

$$x_n = f(g(x_n)) \rightarrow f(L).$$

Pela unicidade do limite, temos que  $a = f(L)$ . Portanto  $L = g(a)$ . No caso do limite lateral esquerdo, o procedimento é análogo e deixado como exercício.

Uma vez que  $f$  é contínua e definida num intervalo, pelo TVI, sua imagem, que é o domínio de  $g$ , é um intervalo.  $\square$

Esse resultado é extremamente útil no estudo da continuidade das funções inversas. Por exemplo, como as funções quadrática e exponencial são contínuas e definidas em intervalos, temos imediatamente que as funções raiz quadrada e logaritmo são também contínuas e definidas em intervalos. Vamos encerrar esta seção determinando o domínio dessas funções inversas.

**Proposição 2.27:** *As funções inversas abaixo são contínuas e vale*

	<i>domínio</i>	<i>imagem</i>
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$\log(x)$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$

**Prova:** Pela Proposição 2.26, essas funções inversas são contínuas. As imagens dessas funções inversas são os maiores domínios onde as respectivas

funções originais são injetivas, como visto nas Seções 1.3 e 2.3. Para determinar os domínios dessas funções inversas, basta determinar as imagens das funções originais, que são intervalos pelo TVI.

Como  $p(x) = x^2 \geq 0$ , temos que  $p(0) = 0$  e, para  $x > 1$ , que  $p(x) > x$ . Como a imagem da função  $p$  é um intervalo, isso mostra que 0 e todo  $x > 1$  está na imagem de  $p$ , que é então igual a  $[0, \infty)$ .

Como  $\exp(x) > 0$ , temos que  $\exp(0) = 1$  e, para  $x > 0$ , que  $\exp(x) > x + 1$  (ver Proposição 2.12). Como a imagem da função  $\exp$  é um intervalo, isso mostra que 1 e todo  $x > 1$  está na imagem de  $\exp$ , que então contém  $[1, \infty)$ . Agora, como  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ , segue que a imagem de  $\exp$  contém  $(0, 1]$ , uma vez que  $y \in [1, \infty)$  se e só se  $1/y \in (0, 1]$ .  $\square$

## 2.8 FUNÇÕES TRIGONÔMETRICAS

Agora vamos considerar as *funções trigonométricas* e também as denominadas *funções arco-trigonométricas*. Primeiro necessitamos medir ângulos utilizando números reais. A medida de um ângulo positivo será feita em radianos, considerando o comprimento do arco determinado por ele no círculo trigonométrico, como listrado na Figura 2.24.

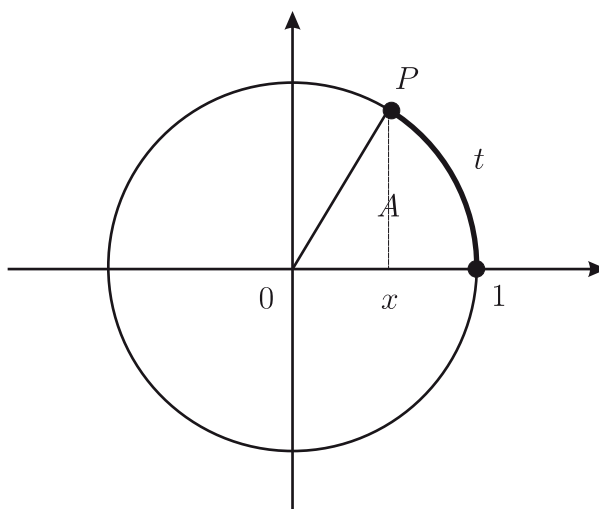


Figura 2.24: Função arco-cosseno.

Dado  $x$  em  $[-1, 1]$ , a função *arco-cosseno* é definida por

$$\text{acos}(x) = t$$

onde  $t$  é o comprimento do arco  $1P$  e  $P$  é ponto acima de  $x$  no círculo. Temos que  $t$  é proporcional a  $A$ , onde  $A$  é a área do setor circular  $01P$ . De fato, essa proporção é de um para dois, uma vez que o comprimento da circunferência unitária é  $2\pi$ , enquanto a área do círculo unitário é igual a  $\pi$ . Temos então que

$$t = 2A$$

(2.11)

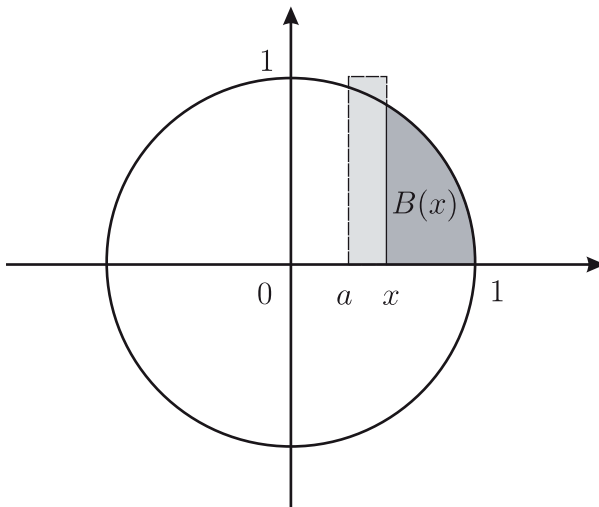


Figura 2.25: Continuidade da função  $B$ .

**Proposição 2.28:** *A função arco-cosseno é contínua.*

**Prova:** Pela equação (2.11), temos que

$$\text{acos}(x) = x\sqrt{1-x^2} + 2B(x),$$

onde  $x\sqrt{1-x^2}/2$  é mais ou menos a área do triângulo  $xOP$ , dependendo de  $x$  ser positivo ou negativo, e  $B(x)$  é a área da região delimitada pelo arco  $1P$  e pelos segmentos  $1x$  e  $xP$ . Temos que  $x\sqrt{1-x^2}$  é contínua, pois é produto e composição de funções contínuas. Basta então mostrar que  $B$  é contínua. Pela Figura 2.25, temos que

$$|B(x) - B(a)| \leq |x - a|,$$

onde  $|x - a|$  é a área do triângulo de altura um cuja base é o segmento  $xa$ . Pelo Teorema do Sanduíche, se  $x_n \rightarrow a$ , então  $B(x_n) \rightarrow B(a)$ , mostrando que  $B$  é contínua.  $\square$

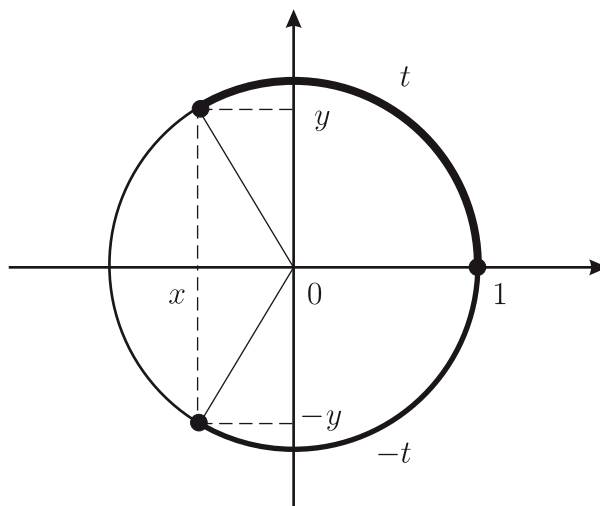


Figura 2.26: Funções cosseno e seno.

Como ilustrado pela Figura 2.26, podemos definir as funções *cosseno* e *seno*, para  $t$  em  $[0, \pi]$ , por

$$\cos(t) = x \quad \text{e} \quad \sin(t) = y = \sqrt{1-x^2}$$

onde  $x$  é tal que  $\arccos(x) = t$ , cuja existência é garantida pelo TVI, uma vez que arco-cosseno é contínua e

$$\arccos(1) = 0 \quad \text{e} \quad \arccos(-1) = \pi$$

Temos de fato que cosseno e arco-cosseno são funções inversas. Estendemos essas funções para o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , fazendo

$$\cos(-t) = x = \cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(-t) = -y = -\text{sen}(t)$$

como ilustrado pela Figura 2.26. As funções cosseno e seno em  $[-\pi, \pi]$  são ilustradas pela Figura 2.27.

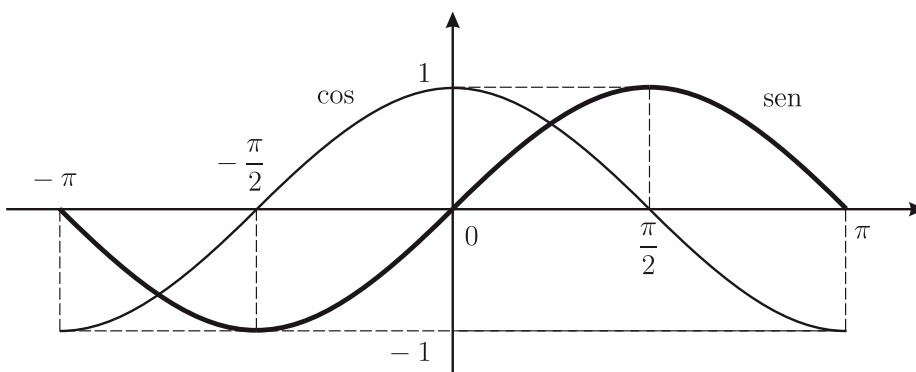


Figura 2.27: As funções seno e cosseno em  $[-\pi, \pi]$ .

A extensão dessas funções para toda a reta é feita de modo que essas funções sejam periódicas de período  $2\pi$ , de modo que

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t) \quad \text{e} \quad \text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}(t)$$

onde  $t$  está em  $[-\pi, \pi]$  e  $k$  é um número inteiro. A *função tangente* é então definida por

$$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\text{cos}(t)}$$

Como ilustrado pela Figura 2.28, as funções *arco-seno* e *arco-tangente* são dadas por

$$\text{asen}(y) = t = \text{atg}(z) \quad \text{e} \quad \text{asen}(-y) = -t = \text{atg}(-z)$$



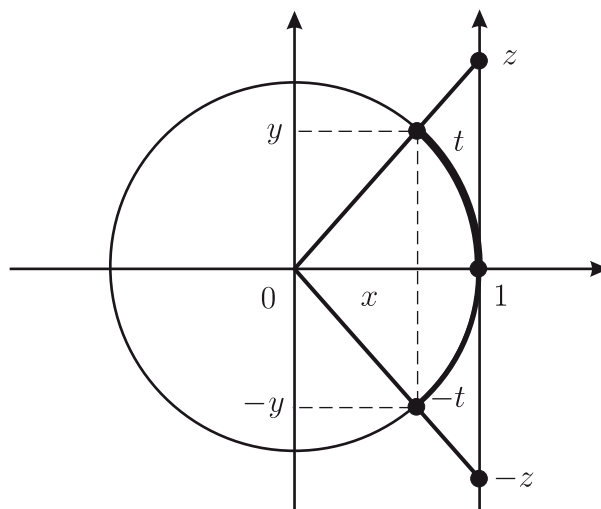


Figura 2.28: Funções arco-seno e arco-tangente.

Note que elas são funções inversas, respectivamente, do seno e da tangente. No caso da tangente, note que para

$$\operatorname{tg}(t) = \frac{y}{x} = z$$

uma vez que o triângulo  $01z$  é semelhante ao triângulo de base  $x$  e altura  $y$ .

Mais adiante, mostraremos que as funções trigonométricas e arco-trigonométricas são contínuas e que vale

	domínio	imagem
$\operatorname{asen}(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\operatorname{acos}(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{atg}(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

## PROPRIEDADES DA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos encerrar esta seção demonstrando algumas propriedades das funções trigonométricas.

**Proposição 2.29:** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$(A) \quad \cos(-t) = \cos(t)$$

$$(B) \quad \text{sen}(-t) = -\text{sen}(t)$$

$$(C) \quad \text{tg}(-t) = -\text{tg}(t)$$

Em outras palavras, a função cosseno é par, enquanto as funções seno e tangente são ímpares.

**Prova:** Para  $t$  em  $[-\pi, \pi]$  e  $k$  inteiro, temos que  $-t$  também está em  $[-\pi, \pi]$  e  $-k$  também é inteiro, de modo que

(A)

$$\cos(-(2k\pi + t)) = \cos(2(-k)\pi + (-t)) = \cos(-t) = \cos(t) = \cos(2k\pi + t)$$

(B)

$$\text{sen}(-(2k\pi + t)) = \text{sen}(2(-k)\pi + (-t)) = \text{sen}(-t) = -\text{sen}(t) = -\text{sen}(2k\pi + t).$$

(C)

$$\text{tg}(-t) = \frac{\text{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\text{sen}(t)}{\cos(t)} = -\text{tg}(t).$$

□

Agora vamos demonstrar as formulas trigonométricas da soma.

**Proposição 2.30:** Para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ , temos que

$$(A) \quad \cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \text{sen}(s)\text{sen}(t)$$

$$(B) \quad \text{sen}(s+t) = \cos(s)\text{sen}(t) + \text{sen}(s)\cos(t)$$

$$(C) \quad \text{tg}(s+t) = \frac{\text{tg}(s) + \text{tg}(t)}{1 - \text{tg}(s)\text{tg}(t)}$$

**Prova:** Primeiro vamos relacionar o comprimento  $d$  da corda  $1P$  com o cosseno  $x$  do seu respectivo ângulo, como ilustrado pela Figura 2.29. Em todos os casos, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$d^2 = (1 - x)^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2.$$

Como  $x^2 + y^2 = 1$ , segue que

$$d^2 = 2 - 2x.$$

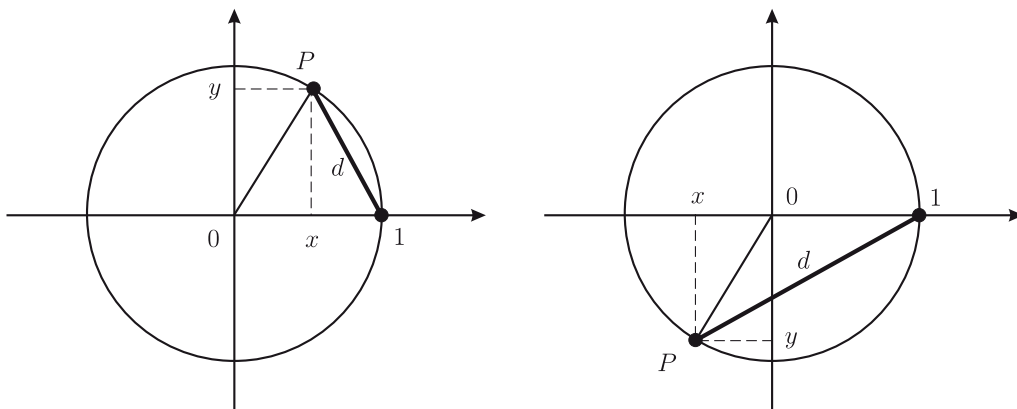


Figura 2.29: Comprimento  $d$  da corda e cosseno  $x$ .

Agora observamos que  $\cos(s - t)$  é o cosseno do ângulo determinado pelo arco  $PQ$ , como ilustrado pela Figura 2.30. Temos então que a corda  $PQ$  tem comprimento dado por

$$d^2 = 2 - 2 \cos(s - t). \quad (2.12)$$

Por outro lado, denote por

$$x_s = \cos(s) \quad \text{e} \quad y_s = \text{sen}(s)$$

e também

$$x_t = \cos(t) \quad \text{e} \quad y_t = \text{sen}(t).$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_t - x_s)^2 + (y_s - y_t)^2 \\ &= (x_t^2 - 2x_t x_s + x_s^2) + (y_s^2 - 2y_s y_t + y_t^2) \\ &= (x_s^2 + y_s^2) + (x_t^2 + y_t^2) - 2x_t x_s - 2y_s y_t \\ &= 2 - 2(x_t x_s + y_s y_t). \end{aligned}$$

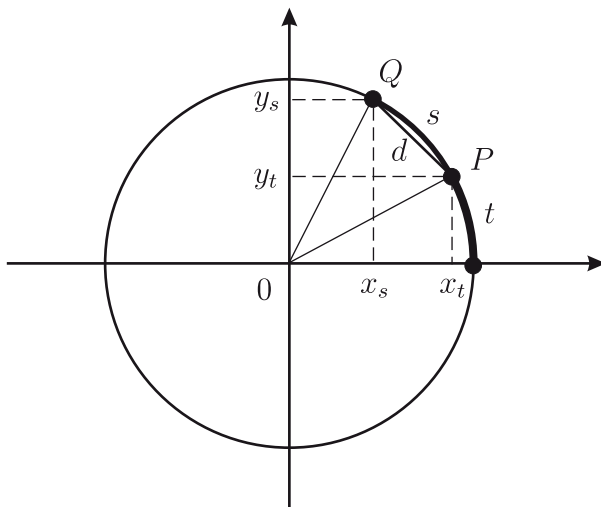


Figura 2.30: Cosseno da diferença.

Igualando esse resultado com o da equação (2.12), obtemos que

$$\cos(s - t) = x_t x_s + y_s y_t = \cos(s) \cos(t) + \operatorname{sen}(s) \operatorname{sen}(t).$$

(A) Segue então que

$$\begin{aligned} \cos(s + t) &= \cos(s - (-t)) \\ &= \cos(s) \cos(-t) + \operatorname{sen}(s) \operatorname{sen}(-t) \\ &= \cos(s) \cos(t) - \operatorname{sen}(s) \operatorname{sen}(t), \end{aligned}$$

uma vez que o cosseno é par e o seno é ímpar.

(B) Temos agora que

$$\cos(t - \pi/2) = \cos(t) \cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\pi/2) = \operatorname{sen}(t),$$

uma vez que  $\cos(\pi/2) = 0$  e que  $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t - \pi/2) &= \cos(t - \pi) \\ &= \cos(t) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\pi) \\ &= -\cos(t), \end{aligned}$$

uma vez que  $\cos(\pi) = -1$  e que  $\sin(\pi) = 0$ . Segue então que

$$\begin{aligned}\sin(s+t) &= \cos(s+t-\pi/2) \\ &= \cos(s)\cos(t-\pi/2) - \sin(s)\sin(t-\pi/2) \\ &= \cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t).\end{aligned}$$

(C) Finalmente, temos que

$$\operatorname{tg}(s+t) = \frac{\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)}{\cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)}$$

e o resultado segue, dividindo-se o numerador e o denominador por  $\cos(s)\cos(t)$ .

□

**Proposição 2.31:** *Temos que*

$$0 < \sin(h) < h < \operatorname{tg}(h)$$

para todo  $0 < h < \pi/2$ . Além disso, as funções seno e cosseno são contínuas.

**Prova:** Para obtermos a desigualdade, considere os triângulos  $01P$  e  $01T$ , onde  $P = (\cos(h), \sin(h))$  e  $T = (1, \operatorname{tg}(h))$ , como ilustra a Figura 2.31. Pela monotonicidade da área, temos a seguinte desigualdade

$$\frac{\sin(h)}{2} < A < \frac{\operatorname{tg}(h)}{2}$$

onde  $A$  é a área do setor circular e

$$\frac{\sin(h)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{tg}(h)}{2}$$

são, respectivamente, as áreas dos triângulos  $01P$  e  $01T$ . Como  $h = 2A$ , segue então que

$$0 < \sin(h) < h < \operatorname{tg}(h), \quad (2.13)$$

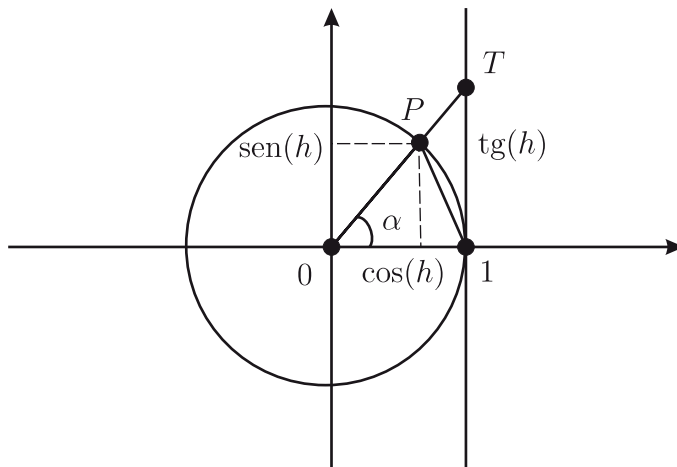


Figura 2.31: Derivada da função seno na origem.

para todo  $0 < h < \pi/2$ . Pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{sen}(h) = 0 = \text{sen}(0).$$

Por outro lado, multiplicando a desigualdade (2.14) por menos e utilizando que seno é ímpar, segue que

$$0 > \text{sen}(-h) > -h, \quad (2.14)$$

para todo  $0 < h < \pi/2$ , de modo que

$$\lim_{h \uparrow 0} \text{sen}(h) = \lim_{h \downarrow 0} \text{sen}(-h) = 0 = \text{sen}(0),$$

mostrando que seno é contínua na origem. Por outro lado,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1 - \text{sen}^2(h)} = 1 = \cos(0),$$

mostrando que cosseno é contínua na origem. Finalmente, temos então que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\text{sen}(a) \cos(h) + \text{sen}(h) \cos(a)) \\ &= \text{sen}(a) \cos(0) + \text{sen}(0) \cos(a) \\ &= \text{sen}(a) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \cos(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos(a)\cos(h) - \operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}(a)) \\ &= \cos(a)\cos(0) - \operatorname{sen}(0)\operatorname{sen}(a) \\ &= \cos(a)\end{aligned}$$

o que mostra, pela Proposição 2.21, que as funções seno e cosseno são contínuas em toda reta  $\mathbb{R}$ .  $\square$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

O objetivo dos exercícios abaixo é relacionar os quadrados do seno e do cosseno de um ângulo com o seno e o cosseno do ângulo duplicado.

2.8.1 Temos que  $\operatorname{sen}(2t)$  é dado por

- (a)  $\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$     (b)  $2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$   
 (c)  $\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t)$     (d)  $-2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$

2.8.2 Temos que  $\cos(2t)$  é dado por

- (a)  $\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$     (b)  $2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$   
 (c)  $\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t)$     (d)  $-2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$

Utilize abaixo as fórmulas obtidas acima e também que

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1,$$

2.8.3 Temos que  $\cos(t)^2$  é dado por

- (a)  $\frac{1 + \cos(2t)}{2}$     (b)  $1 + \cos(2t)$     (c)  $\frac{1 - \cos(2t)}{2}$     (d)  $1 - \cos(2t)$

2.8.4 Temos que  $\operatorname{sen}(t)^2$  é dado por

- (a)  $\frac{1 + \cos(2t)}{2}$     (b)  $1 + \cos(2t)$     (c)  $\frac{1 - \cos(2t)}{2}$     (d)  $1 - \cos(2t)$

## EXERCÍCIOS

### DE DEMONSTRAÇÃO

- 2.1 Mostre por indução e pela regra do produto que  $\lim_{x \rightarrow a} cx^n = ca^n$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .
- 2.2 Mostre por indução e pela regra do produto que as funções polinomiais são contínuas em qualquer ponto da reta  $\mathbb{R}$ .
- 2.3 Complete a demonstração do item (A) da Proposição 2.12.
- 2.4 Vamos calcular a soma dos termos da progressão geométrica infinita com razão  $1/2$ . A soma dos  $n$  primeiros termos é dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

(i) Observe que, por um lado, temos

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

e que, por outro, temos

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}s_n.$$

Igualando os lados direitos e resolvendo para  $s_n$ , obtenha que

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

(ii) Mostre por indução que  $n < 2^n$  e conclua que

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O que podemos concluir utilizando o Teorema do Sanduíche?

- (iii) Utilizando os itens anteriores e as propriedades do limite de seqüências, determine o limite da seqüência  $s_n$ . Por definição, esse limite é a soma dos termos da progressão geométrica infinita com razão  $1/2$ .



2.5 A sequência  $r_n$  das razões dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci satisfaz a equação

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Por outro lado, a razão áurea  $\phi > 1$  satisfaz uma equação parecida

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

O objetivo deste exercício é mostrar que  $r_n \rightarrow \phi$ .

(i) Subtraindo as equações acima, mostre que

$$r_{n+1} - \phi = \frac{\phi - r_n}{r_n \phi}.$$

(ii) Usando o item acima e que  $r_n > 1$ , mostre que

$$|r_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{\phi} |r_n - \phi|.$$

(iii) Usando o item acima, mostre por indução que

$$|r_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{\phi^n} |r_1 - \phi|.$$

(iv) Usando o item acima e que  $1/\phi^n \rightarrow 0$ , conclua que  $r_{n+1} \rightarrow \phi$ , mostrando que  $r_n \rightarrow \phi$ .

2.6 Considere as funções *coseno* e *seno hiperbólicos* dadas por

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Lembre que  $e^{x+y} = e^x e^y$ .

(i) Mostre que

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

Fazendo  $x = \cosh(t)$  e  $y = \sinh(t)$ , isso mostra que o ponto  $(x, y)$  está sobre a hipérbole unitária dada por

$$x^2 - y^2 = 1.$$

(ii) Verifique a fórmula do cosseno hiperbólico da soma

$$\cosh(s+t) = \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t).$$

(iii) Verifique também a fórmula do seno hiperbólico da soma

$$\sinh(s+t) = \sinh(s)\cosh(t) + \sinh(t)\cosh(s).$$

## 2.7 Utilize as identidades

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 1 &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha),\end{aligned}$$

para mostrar que

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

e também que

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

## DE APLICAÇÃO

2.1 Um dos elevadores mais rápidos do mundo, localizado no Taipei Financial Center, subia com velocidade constante de 10 m/s, quando subitamente, após 5 segundos de sua partida, suas cordas de sustentação se partem. Felizmente, nesse momento, não há ninguém em seu interior. A função que descreve a altura do elevador em relação ao solo é dada então pela seguinte expressão

$$s(t) = \begin{cases} 10t + 100, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 150 + 10(t-5) - 5(t-5)^2, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

onde  $t_A$  é o tempo de aterrissagem, a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos. Em cada item, escolha uma das opções e justifique suas respostas.

(i) O limite lateral direito de  $s$  em  $t = 5$  é igual a:

- (a) 100      (b) 120      (c) 150      (d) 180.

(ii) A função  $s$  é contínua em  $t = 5$ ?

(a) *Falso*      (b) *Verdadeiro*.

(iii) O limite lateral direito

$$\lim_{t \downarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$$

é igual a:

(a) 10      (b) 20      (c) 5      (d) 8.

2.2 Suponha que um fio retilíneo, de seção transversal circular de raio  $r_0$ , seja percorrido por uma corrente estacionária. Essa corrente gera um campo magnético cuja intensidade  $I$ , em um ponto do espaço, depende da distância  $r$  do ponto ao eixo do fio. Assim,  $I = I(r)$ , e pode-se mostrar que, em um sistema de unidades apropriado, a função  $I(r)$  é dada por

$$I(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_0^2}, & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

Em cada item, escolha uma das opções e justifique suas respostas.

(i) O limite lateral direito de  $I$  em  $r = r_0$  é igual a:

(a)  $r_0$       (b)  $1/r_0$       (c)  $r_0^2$       (d)  $1/r_0^2$ .

(ii) A função  $I$  é contínua em  $r = r_0$ ?

(a) *Falso*      (b) *Verdadeiro*.

(iii) O limite lateral direito

$$\lim_{r \downarrow r_0} \frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0}.$$

é igual a:

(a)  $1/r_0^2$       (b)  $1/r_0$       (c)  $-1/r_0^2$       (d)  $-1/r_0$ .



## DERIVADA

### 3.1 RETA TANGENTE E VELOCIDADE

Introduzimos o conceito de derivada a partir de uma perspectiva puramente geométrica. A origem do conceito de derivada está relacionada com o problema de se determinar a reta tangente a uma dada função  $f$  em  $a$ , como ilustrado pela Figura 3.1.

Como o único ponto que sabemos pertencer à reta tangente a  $f$  em  $a$  é o ponto  $(a, f(a))$ , para determinar a equação da reta tangente, devemos determinar o seu coeficiente angular  $m$ . Para determinarmos esse coeficiente angular, devemos primeiro calcular o coeficiente angular de uma reta secante passando pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$ , onde  $x \neq a$ , como mostra a Figura 3.1. Tal coeficiente angular, denominado *quociente de Newton de  $f$  em  $a$* , é dado pela seguinte expressão

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Vamos agora analisar o que acontece quando o ponto  $(x, f(x))$  se aproxima do ponto  $(a, f(a))$ . Vamos proceder passo a passo e, para isso, consideremos uma sequência qualquer tal que  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \neq a$ .

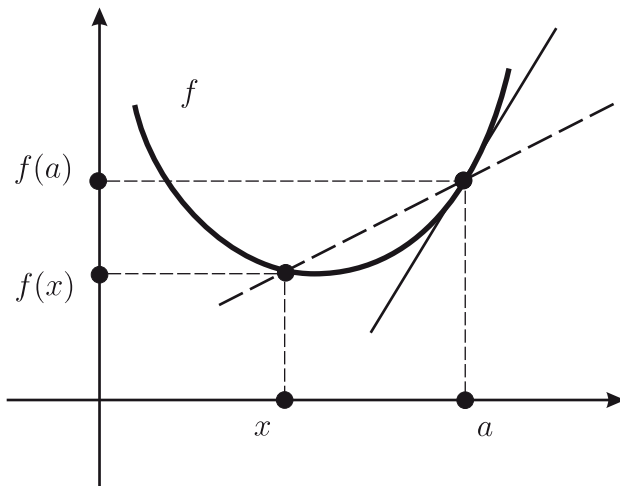


Figura 3.1: Reta tangente a  $f$  passando pelo ponto  $(a, f(a))$ .

A medida que  $x_n$  se aproxima do ponto  $a$ , temos que o ponto  $(x_n, f(x_n))$  se aproxima do ponto  $(a, f(a))$ . A reta secante determinada por esses dois pontos está cada vez mais próxima da reta tangente, como ilustrado pela Figura 3.2.

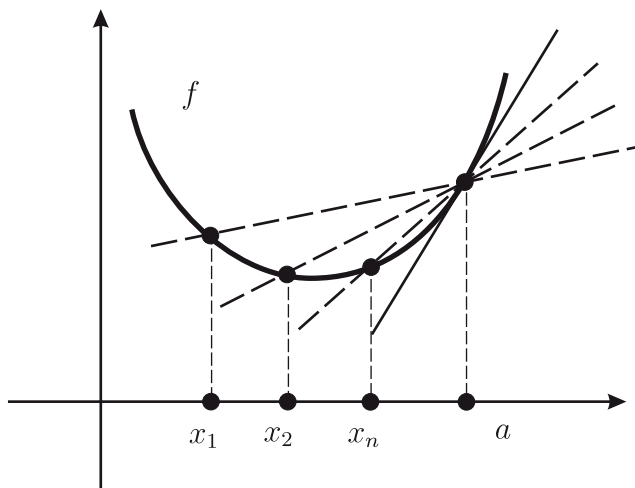


Figura 3.2: Retas secantes se aproximando da reta tangente.

Temos então que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \rightarrow m,$$

ou seja, a medida que  $x_n$  se aproxima do ponto  $a$ , os coeficientes angulares das retas secantes se aproximam do coeficiente angular da reta tangente. Como isso deve ocorrer para qualquer sequência tal que  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \neq a$ , temos que

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Sempre que esse limite existe, dizemos que a função  $f$  é *derivável no ponto  $a$* . A partir de agora, denotamos esse limite por  $f'(a)$ , ou seja, temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

denominado de *derivada de  $f$  no ponto  $a$* .

Seja  $p(x) = x^2$ . Vamos então determinar o coeficiente angular da reta tangente de  $p$  em  $a$ . Pela definição, temos que

$$\begin{aligned} p'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar qual a razão das antenas possuírem formato parabólico. Suponha que o perfil de uma dada antena é descrito pela função  $p(x) = x^2$ . Na Seção 1.2, vimos que  $p$  é a parábola cujo ponto focal é  $F = (0, \frac{1}{4})$  e cuja reta geratriz é a reta horizontal passando por  $g = -\frac{1}{4}$ , conforme ilustrado pela Figura 3.3. Suponha que ela tenha que captar sinais eletromagnéticos emitidos por um satélite, localizado em algum ponto do espaço acima da antena. Como o satélite está bastante distante, pode-se supor que esses sinais se propagam paralelamente, como ilustrado pela Figura 3.3.

A superfície da antena atua como um espelho, refletindo os raios eletromagnéticos. Observe que bem próximo ao ponto  $A = (a, a^2)$ , onde o raio incidente  $i_a$  é refletido, a antena tem um formato bem próximo da reta tangente

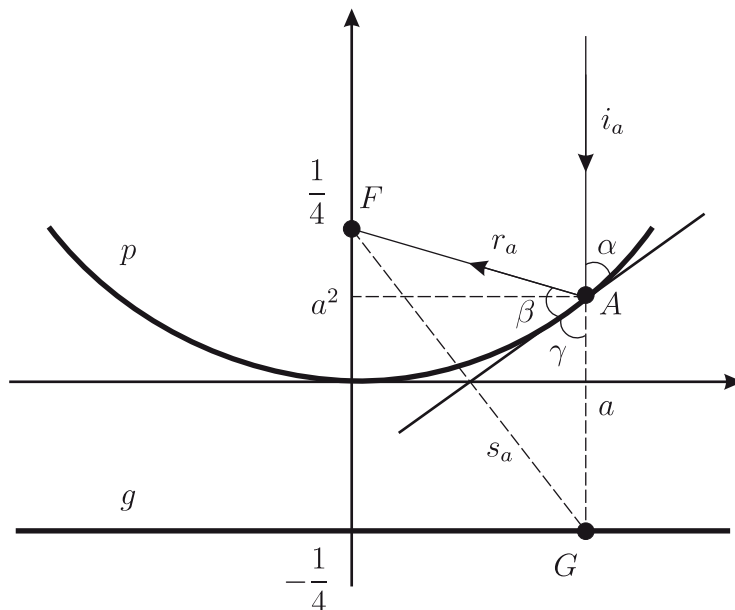


Figura 3.3: Antena parabólica e sua propriedade do foco.

em  $a$ . Como no caso de espelhos planos, o ângulo de incidência  $\alpha$ , formado pelo raio incidente  $i_a$  e pela reta tangente em  $a$ , deve ser congruente ao ângulo de reflexão  $\beta$ , formado pelo raio refletido  $r_a$  e pela reta tangente em  $a$ . Vamos mostrar que o raio refletido  $r_a$  passa sempre pelo ponto focal  $F = (0, \frac{1}{4})$ , independentemente do ponto  $a$ . Esse é o motivo para o perfil parabólico das antenas, pois os raios paralelos vindos do satélite são todos refletidos para o ponto focal, onde, é claro, fica localizado o receptor da antena. Isso provoca uma concentração dos sinais emitidos, melhorando a qualidade da recepção. Para mostrarmos essa propriedade fundamental da antena parabólica, primeiro consideramos a reta  $s_a$  passando pelo ponto focal  $F$  e pelo ponto  $G = (a, -\frac{1}{4})$ . O coeficiente angular de  $s_a$  é igual a

$$\frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{a - 0} = -\frac{1}{2a}$$

e, portanto,  $s_a$  é perpendicular à reta tangente em  $a$ , uma vez que o produto dos coeficientes angulares dessas duas retas é igual a  $-1$ . Como  $d(A, F) = d(A, G)$ , pela definição da parábola, segue que os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  são



congruentes. Mas os ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  também são congruentes, pois são opostos pelo vértice  $A$ . Concluímos então que os seus ângulos de incidência  $\alpha$  e de reflexão  $\beta$  em relação a reta tangente em  $a$  são realmente congruentes. O sistema de faróis utilizados em automóveis também baseia-se nessa prodigiosa propriedade. Neste caso, a fonte luminosa é colocada no ponto focal para se produzir um feixe de raios luminosos paralelos.

Até agora nos concentramos em determinar o coeficiente angular da reta tangente a  $f$  em  $a$ . Vimos que esse coeficiente angular é a derivada de  $f$  em  $a$ , que é dada pelo limite do quociente de Newton de  $f$  em  $a$ . Se quisermos determinar a equação da reta tangente a  $f$  em  $a$ , basta utilizarmos a famosa equação

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

da reta passando por um dado ponto  $(x_0, y_0)$  com uma dada inclinação  $m$ , que obtivemos na Seção 1.2. Na reta tangente a  $f$  em  $a$ , temos que  $x_0 = a$ , que  $y_0 = f(a)$  e que  $m = f'(a)$ , de modo que sua equação é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

No caso da antena parabólica, temos que  $p(a) = a^2$  e que  $p'(a) = 2a$ , de modo que a reta tangente a  $p$  em  $a$  tem equação dada por

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

que descreve o espelho plano que melhor aproxima a antena parabólica próxima ao ponto  $A = (a, a^2)$ , como ilustrado pela Figura 3.3.

## VELOCIDADE

Outra motivação que esteve presente nas origens do conceito de derivada é o conceito de velocidade num determinado instante. Essa questão foi discutida na Seção 1.2 sob ponto de vista de limite de funções. Aqui vamos ver qual a relação da velocidade num instante  $\tau$  com a derivada da função posição  $s$ . No intervalo entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , temos que a velocidade média é dada pela proporção

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}$$

onde  $\Delta s = s(t) - s(\tau)$  é a variação do espaço e  $\Delta t = t - \tau$  é a variação do tempo entre esses instantes. Geometricamente, a velocidade média é um quociente de Newton da função posição  $s(t)$ . A *velocidade  $v$  no instante  $\tau$*  é por definição o limite da velocidade média entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , quando  $t$  tende a  $\tau$ , ou seja,

$$v(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Esse limite nos lembra algo visto anteriormente? A velocidade no instante  $\tau$  é de fato a derivada da função posição no instante  $\tau$ , uma vez que

$$s'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}$$

Geometricamente, temos que a velocidade no instante  $\tau$  é a inclinação da reta tangente à função posição no ponto  $\tau$ .

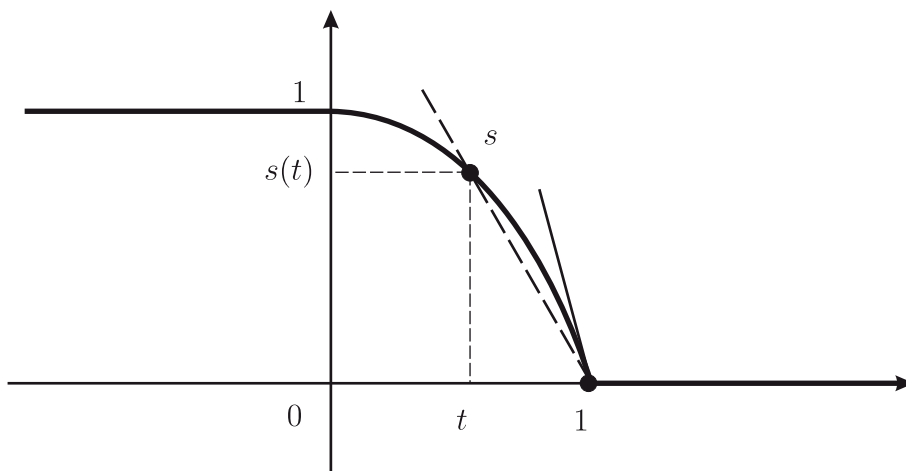


Figura 3.4: Função posição do exemplo.

Vamos ilustrar essa relação com o seguinte exemplo. Um corpo, que se encontrava suspenso em posição de repouso na altura  $s_0 = 1$ , é solto no instante  $\tau = 0$  e permanece em repouso após atingir o solo no instante de aterrissagem  $\tau = 1$ . Na ausência de atrito com o ar e com aceleração da gravidade  $g = 2$ , sua

função posição vertical é dada por

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

como ilustrado pela Figura 3.4. Primeiro vamos verificar que a velocidade no instante  $\tau = 0$  é nula, calculando o seguinte limite

$$s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t - 0}.$$

Como vimos anteriormente, para que esse limite exista, é necessário que os limites laterais existam e sejam iguais. O limite lateral esquerdo é dado por

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - 1}{t - 0} = 0$$

enquanto o limite lateral direito é igual a

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} &= \lim_{t \uparrow 0} \frac{1 - t^2 - 1}{t - 0} \\ &= \lim_{t \uparrow 0} \frac{-t^2}{t} \\ &= \lim_{t \uparrow 0} -t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como os limites laterais do quociente de Newton são iguais, temos que o limite do quociente de Newton existe e é igual a 0. Isso mostra que a velocidade  $s'(0)$  é nula. Geometricamente, o gráfico de  $s$  possui reta tangente horizontal em  $\tau = 0$ .

Mas... qual a velocidade do corpo no instante de aterrissagem  $\tau = 1$ ? Isso é o mesmo calcular o seguinte limite

$$s'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1}.$$

Como vimos anteriormente, para que esse limite exista, é necessário que os limites laterais existam e sejam iguais. O limite lateral esquerdo é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{1 - t^2 - 0}{t - 1} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{(1 - t)(1 + t)}{t - 1} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} -(t + 1) \\ &= -2, \end{aligned}$$

enquanto o limite lateral direito é igual a

$$\lim_{t \downarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \downarrow 1} \frac{0 - 0}{t - 1} = 0.$$

Como os limites laterais do quociente de Newton são diferentes, temos que o limite do quociente de Newton não existe e, portanto, a função posição não é derivável nesse instante, conforme ilustra a figura (3.4). Cinematicamente, temos que, imediatamente antes e imediatamente depois do instante de aterrissagem, as velocidades do corpo são diferentes, mostrando que a velocidade no instante  $\tau = 1$  não está bem definida. Geometricamente, o gráfico de  $s$  não possui reta tangente em  $\tau = 1$ . Na próxima seção, vamos determinar a velocidade em instantes  $\tau$  entre 0 e 1.

## DERIVADAS LATERAIS

Os limites laterais do quociente de Newton são denominados derivadas laterais. A *derivada lateral esquerda de  $f$  no ponto  $a$*  é definida por

$$f'(a \uparrow) = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a *derivada lateral direita de  $f$  no ponto  $a$*  é definida por

$$f'(a \downarrow) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em termos das derivadas laterais, temos a seguinte caracterização, que é uma consequência imediata da Proposição 2.17.

**Corolário 3.1:** Temos que  $f$  é derivável em  $a$  se e só se as suas derivadas laterais em  $a$  são iguais.

No exemplo anterior, temos que as derivadas laterais em  $t = 0$  são dadas por

$$s'(0 \uparrow) = 0 = s'(0 \downarrow)$$

mostrando que  $s$  é derivável em  $\tau = 0$  com  $s'(0) = 0$ . Já as derivadas laterais em  $t = 1$  são dadas por

$$s'(1 \uparrow) = -2 \neq 0 = s'(1 \downarrow),$$

mostrando que  $s$  não é derivável em  $\tau = 1$ .

## PROPRIEDADES DA DERIVADA

Vamos mostrar agora a relação entre ser derivável e ser contínua num determinado ponto.

**Proposição 3.2:** Se  $f$  é derivável no ponto  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

**Prova:** Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= 0 f'(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos a regra do limite do produto. Segue então que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

□

Concluimos esta seção com algumas das principais *regras de derivação*. É importante ressaltar que apesar da derivada da soma ser a soma das derivadas, o mesmo não é verdadeiro nem no caso do produto e nem no caso do quociente.

**Proposição 3.3:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis no ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Temos então que as funções soma, produto e quociente são deriváveis em  $a$  e*

$$\begin{aligned} (S) \quad (f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\ (P) \quad (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + g'(a)f(a) \\ (Q) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}, \quad \text{se } g(a) \neq 0 \end{aligned}$$

**Prova:** Temos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

(S) Temos que

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de soma de funções e a regra do limite da soma.

(P) Temos que

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a},\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de produto de funções e também somamos e subtraímos no numerador a expressão  $f(a)g(x)$ . Logo obtemos que

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} f(a) \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) f(a) \\ &= f'(a)g(a) + g'(a)f(a)\end{aligned}$$

onde as regras do limite da soma e do produto e também que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a),$$

pois, pela Proposição 3.2, se uma função é derivável num ponto, ela é contínua nesse ponto.

(Q) Primeiro notamos que a derivada da função  $\frac{1}{g}$  no ponto  $a$  é dada por

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{g(a) - g(x)}{x - a} \frac{1}{g(x)g(a)} \right)\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de quociente de funções. Segue então que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} -\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \\ &= -g'(a) \frac{1}{g(a)^2} \\ &= -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

onde utilizamos as regras do limite do produto e do quociente e novamente a continuidade de  $g$  no ponto  $a$ . Finalmente, como  $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ , podemos utilizar a regra da derivada do produto para obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + \left(\frac{1}{g}\right)'(a) f(a) \\ &= f'(a) \frac{1}{g(a)} + \left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) f(a) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.1.1 A derivada de  $2x^2$  nos pontos  $a = -1, 0, 1$  é dada, respectivamente, por

- (a) 4, 0, 4    (b) 3, 0, 3    (c) -4, 0, 4    (d) -3, 0, 3

3.1.2 Se a posição no instante  $t$  é dada por  $t^3$ , então a velocidade nos instantes  $a = -1, 0, 1$  é dada, respectivamente, por

- (a) 4, 0, 4    (b) 3, 0, 3    (c) -4, 0, 4    (d) -3, 0, 3

3.1.3 Considere uma função posição que no instante  $t$  é dada por  $\sqrt{t}$ ,  $t > 0$ .

(i) Sua taxa de velocidade média entre os instantes  $t$  e  $a$  é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{a}}.$$

- (a) Verdadeiro    (b) Falso



(ii) Sua taxa de velocidade no instante  $a$  é igual a

(a)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$    (b)  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$    (c)  $-\frac{1}{2\sqrt{a}}$    (d)  $\frac{1}{2}\sqrt{a}$

**Sugestão:** na taxa de variação média, utilize que  $t - a = (\sqrt{t} - \sqrt{a})(\sqrt{t} + \sqrt{a})$ .

3.1.4 Considere a função  $f(x) = 1/x$ ,  $x \neq 0$ .

(i) Seu quociente de Newton em  $a$  é dado por  $\frac{a-x}{\frac{xa}{x-a}}$ .

(a) Verdadeiro   (b) Falso

(ii) Sua derivada em  $a$  é igual a

(a)  $\frac{1}{a^2}$    (b)  $2\frac{1}{a^2}$    (c)  $-\frac{1}{a^2}$    (d)  $\frac{1}{2a^2}$

3.1.5 A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

é derivável em  $x = 0$ ?

(a) Verdadeiro   (b) Falso

3.1.6 A função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 1/x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

é derivável em  $x = 1$ ?

(a) Verdadeiro   (b) Falso

3.1.7 Considere a equação da reta tangente a  $f(x) = 2x^2$ .

(i) No ponto  $a = -1$  ela é dada por

(a)  $y = -4x - 2$    (b)  $y = 4x - 2$    (c)  $y = -2x$    (d)  $y = -4x + 2$

(ii) No ponto  $a = 1$  ela é dada por

(a)  $y = -4x - 2$    (b)  $y = 4x - 2$    (c)  $y = -2x$    (d)  $y = -4x + 2$

3.1.8 Considere a função  $f(x) = 1/x$ .

- (i) Para quais valores de  $a$  temos que  $f'(a) = -1/4$ ?  
 (a)  $-2$  (b)  $-1, 1$  (c)  $-1$  (d)  $-2, 2$
- (ii) Para quais valores de  $a$  a equação da reta tangente em  $a$  é dada por  $y = -\frac{x}{4} - 1$ ?  
 (a)  $-2$  (b)  $-1, 1$  (c)  $-1$  (d)  $-2, 2$

### 3.2 FUNÇÃO DERIVADA E ACELERAÇÃO

Seja  $f$  uma função real. A *função derivada de  $f$* , denotada por  $f'$ , é a função que associa para cada  $x$ , onde  $f$  é derivável, a respectiva derivada  $f'(x)$ . O domínio natural da função derivada são os pontos onde a função  $f$  é derivável. Para obter a expressão da função derivada de  $f$ , primeiro obtemos a derivada  $f'(a)$  num ponto  $a$  onde  $f$  é derivável e depois trocamos  $a$  por  $x$  na expressão obtida.

Por exemplo, na seção passada, vimos que a derivada de  $p(x) = x^2$  num ponto  $a$  qualquer é dada por  $p'(a) = 2a$ . Portanto sua função derivada é dada por

$$p'(x) = 2x$$

Um outro exemplo é a função  $f(x) = x^3$ . Temos que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + xa + a^2) \\ &= 3a^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos que

$$x^3 - a^3 = (x^2 + xa + a^2)(x - a).$$

Temos então que a função derivada de  $f(x) = x^3$  é a função

$$f'(x) = 3x^2$$

É importante notar que o gráfico da função derivada não possui muita semelhança com o gráfico da função original, como mostram os exemplos acima. A relação entre os gráficos de  $f$  e de  $f'$  é ilustrada na Figura 3.5.

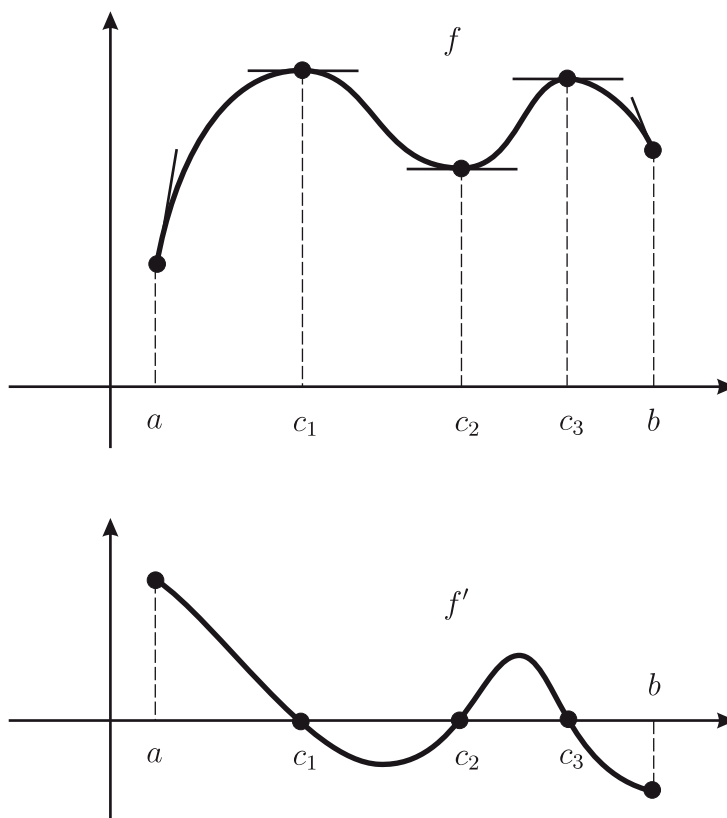


Figura 3.5: Gráfico de  $f$  e de sua derivada  $f'$ .

Nos pontos  $x$  onde  $f(x)$  é um pico ou um vale da função  $f$ , temos que  $f'(x) = 0$ , uma vez que a reta tangente nesses pontos é horizontal e seu coeficiente angular é nulo. Onde a função  $f$  é crescente, o coeficiente angular das suas retas tangente é positivo e então a função derivada  $f'$  é positiva. Já onde a função  $f$  é decrescente, o coeficiente angular das suas retas tangente é negativo e então a função derivada  $f'$  é negativa.

Uma outra maneira de obter a função derivada é dada pela seguinte proposição.

**Proposição 3.4:** Temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para todo  $x$  onde esse limite existe.

**Prova:** Usando que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e fazendo  $x = a + h$ , temos que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

uma vez que  $x - a = h$  e que  $x \rightarrow a$  se e só se  $h \rightarrow 0$ . O resultado segue substituindo  $a$  por  $x$  em ambos os lados da equação acima.  $\square$

Quando lidamos com funções definidas por suas expressões algébricas, uma ferramenta particularmente útil para os cálculos de funções derivadas é o conceito de derivada de uma expressão algébrica. A *derivada da expressão algébrica*  $f(x)$ , denotada por  $(f(x))'$ , é por definição a expressão algébrica da função derivada, ou seja,

$$(f(x))' = f'(x)$$

Por exemplo, no caso da função  $p(x) = x^2$ , temos que

$$(x^2)' = 2x$$

e no caso da função  $f(x) = x^3$ , temos que

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Com essa notação, a derivada de  $f$  em  $a$  é dada por

$$f'(a) = (f(x))'_{x=a}$$

onde calculamos primeiro  $(f(x))'$  e depois substituímos  $x$  por  $a$ . A equação da reta tangente a  $f(x)$  em  $a$  é então dada por

$$y - f(a) = (f(x))'_{x=a} (x - a)$$

A equação da reta tangente a  $x^2$  e  $a$  é então dada por

$$\begin{aligned} y - a^2 &= (x^2)'_{x=a} (x - a) \\ &= (2x)_{x=a} (x - a) \\ &= 2a(x - a) \end{aligned}$$

e a equação da reta tangente a  $x^3$  e  $a$  é dada por

$$\begin{aligned} y - a^3 &= (x^3)'_{x=a} (x - a) \\ &= (3x^2)_{x=a} (x - a) \\ &= 3a^2(x - a). \end{aligned}$$

## PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DERIVADA

A aplicação das regras de derivação também fica extremamente simplificada.

**Corolário 3.5:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções reais. Temos então que*

$$\begin{aligned} (C) \quad & (c)' = 0 \\ (S) \quad & (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))' \\ (P) \quad & (f(x)g(x))' = (f(x))'g(x) + (g(x))'f(x) \\ (Q) \quad & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f(x))'g(x) - (g(x))'f(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Como caso particular das regras do produto e do quociente, temos que

$$(cf(x))' = c(f(x))' \quad e \quad \left(\frac{f(x)}{c}\right)' = \frac{(f(x))'}{c}$$

ou seja, “a constante multiplicando ou dividindo sai da derivada”.

**Prova:** Utilizando a Proposição 3.3 e a notação definida acima, obtemos que

(C) Definindo  $f(x) = c$ , segue que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

e então  $(c)' = f'(x) = 0$ .

(S)

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= (f + g)'(x) \\ &= f'(x) + g'(x) \\ &= (f(x))' + (g(x))'. \end{aligned}$$

(P)

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= (fg)'(x) \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ &= (f(x))'g(x) + (g(x))'f(x). \end{aligned}$$

(Q)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{(f(x))'g(x) - (g(x))'f(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando as regras do produto e do quociente e o fato que a derivada da função constante é nula, obtemos

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= (c)'f(x) + (f(x))'c \\ &= c(f(x))' \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{c}\right)' &= \frac{(f(x))'c - (c)'f(x)}{c^2} \\ &= \frac{(f(x))'c}{c^2} \\ &= \frac{(f(x))'}{c}. \end{aligned}$$

□

Por exemplo, se  $f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{5} + 2$ , então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^3 + \frac{x^2}{5} + 2\right)' \\ &= 2(x^3)' + \frac{(x^2)'}{5} + (2)' \\ &= 2(3x^2) + \frac{2x}{5} + 0 \\ &= 6x^2 + \frac{2x}{5}. \end{aligned}$$

Se  $g(x) = x^{-2}$ , então

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^{-2})' \\ &= \left(\frac{1}{x^2}\right)' \\ &= \frac{(1)'(x^2) - (x^2)'1}{(x^2)^2} \\ &= \frac{0(x^2) - (2x)}{x^4} \\ &= -\frac{2x}{x^4} \\ &= -2x^{-3}, \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} (x^2)' &= 2x \\ (x^3)' &= 3x^2 \\ (x^{-2})' &= -2x^{-3} \end{aligned} \tag{3.1}$$

são casos particulares da denominada *regra da potência*, obtida a partir das regras das derivadas da soma e do produto.

**Proposição 3.6:** Para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

**Prova:** Vamos demonstrar por indução que a fórmula  $(x^n)' = nx^{n-1}$  é verdadeira para todos os naturais. Temos que quando  $n = 1$  a fórmula é verdadeira, pois  $(x)' = 1 = 1x^{1-1}$ . Se ela é verdadeira, para  $n = m$ , vamos mostrar que ela também é verdadeira para  $n = m + 1$ . Temos de fato que

$$\begin{aligned}(x^{m+1})' &= (x^m x)' \\ &= (x^m)' x + (x)' x^m \\ &= mx^{m-1} x + x^m \\ &= mx^m + x^m \\ &= (m + 1)x^{(m+1)-1},\end{aligned}$$

onde utilizamos a regra da derivada do produto. Temos que a fórmula é válida para  $n = 0$ , pois

$$(x^0)' = (1)' = 0 = 0x^{0-1}.$$

Se  $k = -n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned}(x^k)' &= (x^{-n})' \\ &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' \\ &= \frac{(1)' x^n - (x^n)' 1}{(x^n)^2} \\ &= \frac{0x^n - (nx^{n-1})}{x^{2n}} \\ &= -n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}},\end{aligned}$$

onde utilizamos a regra da derivada do quociente. Como

$$\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = x^{n-1} x^{-2n} = x^{-n-1},$$

segue que

$$(x^k)' = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}.$$

□

A derivada da função derivada  $f'$  é denominada *função derivada segunda* de  $f$  e denotada por  $f''$ . Por exemplo, se  $p(x) = x^2$ , temos que

$$(x^2)'' = \left((x^2)'\right)' = (2x)' = 2,$$



logo  $p''(x) = 2$ . Por outro lado, se  $f(x) = x^3$ , segue que temos que

$$(x^3)'' = \left((x^3)'\right)' = (3x^2)' = 3(2x) = 6x,$$

logo  $f''(x) = 6x$ .

## FUNÇÕES VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Agora vamos considerar o conceito de função velocidade  $v$  e função aceleração  $a$  de uma função posição  $s$ . Na Seção 3.1, vimos que velocidade num instante  $\tau$  é dada pela derivada de  $s$  no instante  $\tau$ . A *função velocidade* é então a função derivada da posição

$$v = s'$$

ou seja

$$v(t) = s'(t)$$

Vamos ver agora qual a relação da aceleração num instante  $\tau$  com a derivada da função velocidade  $v$ . No intervalo entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , temos que a aceleração média é dada pela proporção

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(\tau)}{t - \tau},$$

onde  $\Delta v = v(t) - v(\tau)$  é a variação do espaço e  $\Delta t = t - \tau$  é a variação do tempo entre esses instantes. A *aceleração no instante*  $\tau$  é por definição o limite da aceleração média entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , quando  $t$  tende a  $\tau$ , ou seja,

$$a(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração no instante  $\tau$  é de fato a derivada da função velocidade no instante  $\tau$ , uma vez que

$$v'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{v(t) - v(\tau)}{t - \tau}$$

A *função aceleração* é então a função derivada da velocidade e portanto é a função derivada segunda da posição

$$a = v' = s''$$

ou seja

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Se  $s$  é a função posição de um corpo de massa  $m$  submetido a uma força resultante  $F$ , a segunda Lei de Newton nos diz que

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= mv' \\ &= ms'' . \end{aligned}$$

Temos que as expressões das funções velocidade e aceleração também podem ser dadas por

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \quad \text{e} \quad a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

## FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

A seguir mostramos como obter a função derivada de funções definidas por partes.

**Proposição 3.7:** *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \text{se } x < c \\ L, & \text{se } x = c \\ q(x), & \text{se } x > c \end{cases} ,$$

onde  $p$  e  $q$  são deriváveis. Se  $p(c) = L = q(c)$  e também  $p'(c) = q'(c)$ , então

$$f'(x) = \begin{cases} p'(x), & \text{se } x < c \\ q'(x), & \text{se } x > c \end{cases} .$$

Caso contrário

$$f'(x) = \begin{cases} p'(x), & \text{se } x < c \\ q'(x), & \text{se } x > c \end{cases}.$$

**Prova:** Temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que esse limite exista. Primeiro vamos considerar  $f'(x)$  para  $x \neq c$ . Se  $x < c$ , então  $x+h < c$  para  $h$  suficientemente pequeno. Neste caso,

$$f(x) = p(x) \quad \text{e} \quad f(x+h) = p(x+h)$$

de modo que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = p'(x).$$

Para  $x > c$ , o argumento é análogo.

Agora vamos considerar  $f'(c)$ . Se essa derivada existe, então  $f$  tem que ser contínua em  $c$  (ver Proposição 3.2). Temos então que

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) = f(c) = \lim_{x \downarrow c} f(x),$$

o que é equivalente a  $p(c) = L = q(c)$ , uma vez que  $p$  e  $q$  são contínuas, pois são deriváveis. Vamos então analisar as derivadas laterais em  $c$ . Se  $h < 0$ , então  $c+h < c$ , de modo que  $f(c+h) = p(c+h)$  e que

$$f'(c \uparrow) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{p(c+h) - p(c)}{h} = p'(c).$$

Para  $h > 0$ , por um argumento análogo obtemos que

$$f'(c \downarrow) = q'(c).$$

Segue daí que  $f'(c)$  existe se e só se  $p(c) = L = q(c)$  e também  $p'(c) = q'(c)$ . Neste caso, temos que  $f'(c) = p'(c) = q'(c)$ .  $\square$

É importante notar que, se uma das duas condições na proposição acima não for satisfeita, então a função  $f$  não é derivável em  $c$ , como ilustram as figuras a seguir. Caso  $p(c) = L = q(c)$ , mas  $p'(c) \neq q'(c)$ , então  $f$  apresenta um bico em  $c$  e não é derivável nesse ponto, como lustrado pela Figura 3.6.

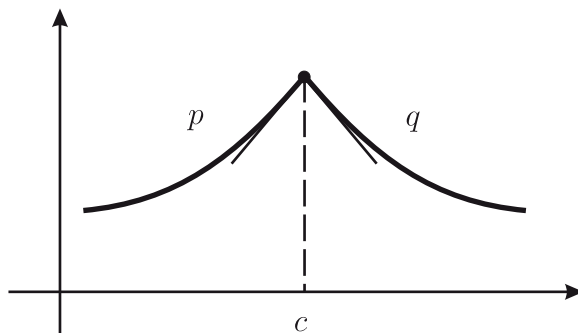


Figura 3.6: Função  $f$  apresenta um bico em  $c$ .

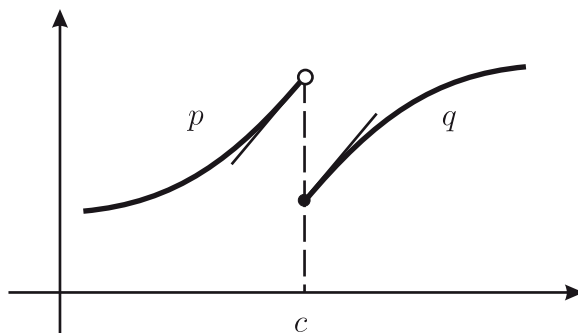


Figura 3.7: Função  $f$  é descontínua em  $c$ .

Por outro lado, caso  $p'(c) = q'(c)$ , mas  $p(c) \neq q(c)$ , então  $f$  é descontínua em  $c$  e não é derivável nesse ponto, como lustrado pela Figura 3.7.

Vamos aplicar a Proposição 3.7 no seguinte exemplo. Um corpo, que se encontrava suspenso em posição de repouso na altura  $s_0 = 1$ , é solto no instante  $\tau = 0$  e permanece em repouso após atingir o solo no instante de aterrissagem  $\tau = 1$ . Na ausência de atrito com o ar e com aceleração da gravidade  $g = 2$ , sua função posição vertical é dada por

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

como ilustrado pela Figura 3.4.

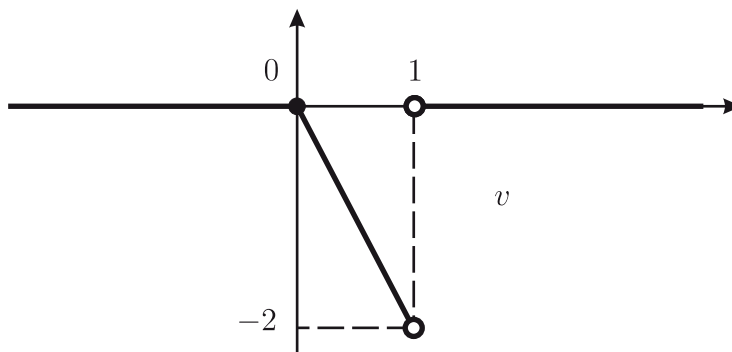


Figura 3.8: Função velocidade do exemplo.

Pela Proposição anterior, temos que a função velocidade, ilustrada na Figura 3.8, é dada por

$$v(t) = \begin{cases} (1)' = 0, & \text{se } t \leq 0 \\ (1 - t^2)' = -2t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (0)' = 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

Temos que  $v(0) = 0$ , pois as expressões  $1$  e  $1 - t^2$  são ambas iguais a  $1$  em  $t = 0$  e as expressões  $0$  e  $-2t$  são ambas iguais a  $0$ . Por outro lado, temos que  $v(1)$  não está definido, pois as expressões  $-2t$  e  $0$  tem valores diferentes em  $t = 1$ .

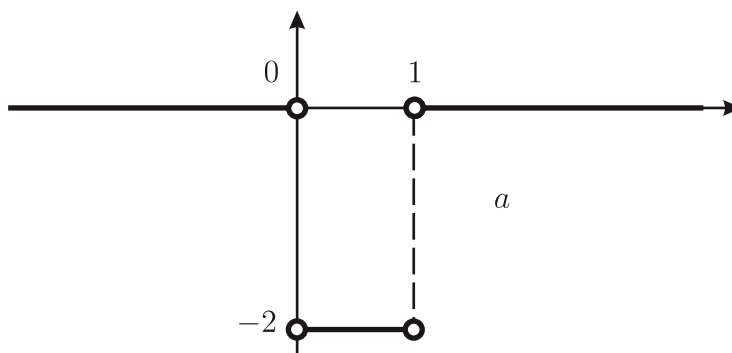


Figura 3.9: Função aceleração do exemplo.

Temos que a função aceleração, ilustrada na Figura 3.9, é dada por

$$a(t) = \begin{cases} (0)' = 0, & \text{se } t < 0 \\ (-2t)' = -2, & \text{se } 0 < t < 1 \\ (0)' = 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

onde  $a(0)$  e  $a(1)$  não estão definidos, pois as expressões  $0$  e  $-2$  são diferentes.

Observamos que, se o corpo possui massa  $m$ , pela segunda Lei de Newton

$$F(t) = ma(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ -2m, & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

mostrando que, durante a queda livre do corpo, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 1$ , a força resultante sobre o corpo é a força peso  $P = -mg$ , onde  $g = 2$ .

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.2.1 A função derivada de  $2x^2 + 3$  é dada por

- (a)  $2x$    (b)  $4x + 3$    (c)  $4x$    (d)  $4x^2$

3.2.2 Considere que a posição no instante  $t$  é dada pela função  $t + t^{-1}$ .

(i) A função velocidade é dada por

- (a)  $1 - t^{-2}$    (b)  $1 + t^{-2}$    (c)  $1 - 2t^{-2}$    (d)  $1 + 2t^{-2}$

(ii) A função aceleração é dada por

- (a)  $-2t^{-3}$    (b)  $2t^{-3}$    (c)  $-t^{-3}$    (d)  $t^{-3}$

3.2.3 A função derivada de  $(x^2 + x + 1)(x^3 - 2x - 1)$  em  $x = 0$  é igual a

- (a)  $2$    (b)  $3$    (c)  $-2$    (d)  $-3$

3.2.4 Considere que a posição no instante  $t$  é dada pela função  $\frac{1}{t^2 + 1}$ .

(i) A função velocidade é dada por

- (a)  $-(t^2 + 1)^{-2}$    (b)  $(t^2 + 1)^{-2}$   
(c)  $-(t^2 + 1)^{-2}2t$    (d)  $(t^2 + 1)^{-2}2t$

(ii) A função aceleração é dada por

- (a)  $2(t^2 + 1)^{-3}$    (b)  $-2(t^2 + 1)^{-3}$   
(c)  $2(t^2 + 1)^{-3}(3t^2 - 1)$    (d)  $2(t^2 + 1)^{-3}(t^2 - 2t + 1)$

3.2.5 O valor de  $(x^{-3} - x)'$  em  $x = 1$  é igual a

- (a) -4   (b) -3   (c) 2   (d) 3

3.2.6 O valor de  $\left(\frac{2x^2 + 3}{x + 1}\right)'$  em  $x = 0$  é igual a

- (a) -3   (b) 0   (c) 3   (d) 6

3.2.7 Considere a equação da reta tangente a  $f(x) = x^{-3} - x$ .

(i) No ponto  $a = -1$  ela é dada por

- (a)  $y = -4(x - 1)$    (b)  $y = -4(x + 1)$   
 (c)  $y - 2 = -4(x - 1)$    (d)  $y - 2 = -4(x + 1)$

(ii) No ponto  $a = 1$  ela é dada por

- (a)  $y = -4(x - 1)$    (b)  $y = -4(x + 1)$   
 (c)  $y - 2 = -4(x - 1)$    (d)  $y - 2 = -4(x + 1)$

3.2.8 Considere a equação da reta tangente a  $\frac{1}{x^2 + 1}$ .

(i) No ponto  $a = -1$  ela é dada por

- (a)  $y = -\frac{1}{2}x + 1$    (b)  $y = -\frac{1}{2}x - 1$   
 (c)  $y = \frac{1}{2}x + 1$    (d)  $y = \frac{1}{2}x - 1$

(ii) No ponto  $a = 1$  ela é dada por

- (a)  $y = -\frac{1}{2}x + 1$    (b)  $y = -\frac{1}{2}x - 1$   
 (c)  $y = \frac{1}{2}x + 1$    (d)  $y = \frac{1}{2}x - 1$

3.2.9 Considerando as funções

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

temos que  $g$  é a função derivada de  $f$ ?

- (a) Verdadeiro   (b) Falso

3.2.10 Considerando as funções

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 1/x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1 \\ -1/x^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

temos que  $g$  é a função derivada de  $f$ ?

- (a) Verdadeiro   (b) Falso

### 3.3 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos agora considerar a seguinte situação, descrita pela Figura 3.10, onde um trem-bala se desloca sobre um trilho supercondutor a uma velocidade constante  $v_0$ . No instante  $t = 0$ , o empuxo horizontal do motor do trem subitamente se anula e sua velocidade vai sendo reduzida gradualmente devido à força de resistência do ar  $R$ .

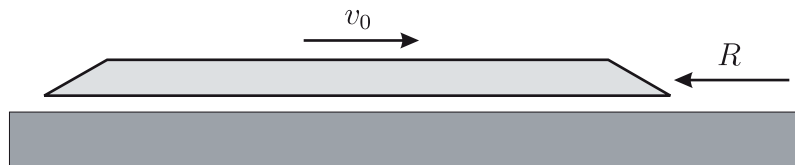


Figura 3.10: Trem-bala se deslocando sobre um trilho supercondutor.

A força de resistência do ar  $R$  depende da velocidade  $v$  do trem, tem mesma direção de  $v$ , mas com sentido oposto a esta. Além disso, o valor absoluto de  $R$  é proporcional ao valor absoluto da velocidade  $v$ . De fato, isso é o que percebemos quando colocamos nossa mão para fora da janela de um carro em movimento. Portanto, segue que

$$R = -bv$$

onde a constante  $b$  é o coeficiente de resistência do ar, que depende do formato do trem e da atmosfera local. Observe que o sinal negativo é devido ao fato de  $R$  ser uma força de resistência ao movimento. Temos que a força resultante  $F = R$ , uma vez que o trilho supercondutor não oferece resistência ao deslocamento do trem. Pela segunda Lei de Newton, temos que  $F = mv'$  e portanto

$$mv' = -bv$$

ou seja

$$mv'(t) = -bv(t)$$

relacionando a função  $v$  e sua função derivada. No caso em que  $m = b$ , temos que

$$v'(t) = -v(t)$$

(3.2)



ou seja, a função aceleração é igual a menos a função velocidade. Vamos mostrar que, neste caso, o movimento do trem é dado através da função exponencial.

Para isso, devemos determinar sua função derivada. Vamos iniciar calculando a sua derivada na origem.

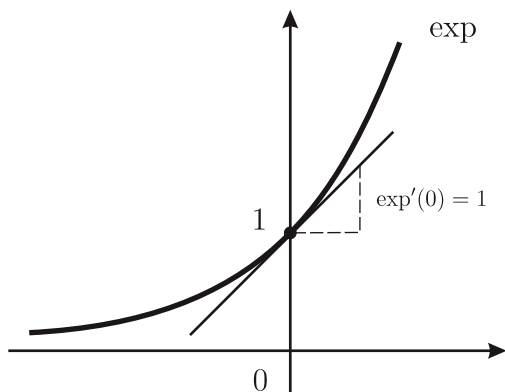


Figura 3.11: Reta tangente de  $\exp$  na origem.

**Proposição 3.8:** *Temos que*

$$\exp'(0) = 1$$

**Prova:** Pela Proposição 2.12, temos que

$$1 + h \leq e^h \leq \frac{1}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ . Segue então que

$$h \leq e^h - 1 \leq \frac{h}{1 - h},$$

para todo  $-1 < h < 1$ , uma vez que

$$\frac{1}{1 - h} - 1 = \frac{h}{1 - h}.$$

Para todo  $0 < h < 1$ , dividindo todos os termos da desigualdade acima por  $h$ , obtemos que

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{1}{1 - h}.$$

Por sanduíche, segue que

$$\exp'(0 \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

De modo análogo, considerando o caso em que  $-1 < h < 0$ , podemos mostrar que

$$\exp'(0 \uparrow) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

o que é deixado como exercício. □

Vamos mostrar que a função derivada da exponencial é a própria função exponencial.

**Proposição 3.9:** *Temos que*

$$\exp' = \exp$$

*Em outras palavras, temos que*

$$(e^x)' = e^x$$

*Temos também que*

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

**Prova:** Pela Proposição 3.8, temos que  $\exp'(0) = 1$  e, pela Proposição 2.12,

temos que  $e^{x+h} = e^x e^h$ . Pela Proposição 2.21, segue então que

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \exp'(0) \\ &= e^x.\end{aligned}$$

Agora, pela regra do quociente, temos

$$(e^{-x})' = \left( \frac{1}{e^x} \right)' = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}.$$

□

Agora vamos verificar que a função

$$v(t) = v_0 e^{-t}$$

é uma solução da equação (3.2), que descreve a velocidade de um trem bala de massa  $m$ , partindo da velocidade inicial  $v_0$ , na ausência de empuxo e na presença de resistência do ar, no caso em que o coeficiente de resistência do ar  $b$  coincide com  $m$ . Temos que

$$\begin{aligned}v'(t) &= (v_0 e^{-t})' \\ &= v_0 (e^{-t})' \\ &= v_0 (-e^{-t}) \\ &= -v_0 e^{-t} \\ &= -v(t).\end{aligned}$$

Além disso, temos que  $v(0) = v_0$  é a velocidade inicial.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.3.1 A função derivada de  $e^{2x} = e^x e^x$  é dada por

- (a)  $e^{2x}$    (b)  $2e^{2x}$    (c)  $2xe^{2x}$    (d)  $e^x$

3.3.2 Considere que a posição no instante  $t$  é dada pela função  $te^{2t}$ .

(i) A função velocidade é dada por

(a)  $(1 + 2t)e^{2t}$    (b)  $(1 + t)e^{2t}$    (c)  $(1 + 2t^2)e^{2t}$    (d)  $e^{2t}$

(ii) A função aceleração é dada por

(a)  $(3 + 4t)e^{2t}$    (b)  $(4 + 4t)e^{2t}$    (c)  $(4t^2 + 4t + 2)e^{2t}$    (d)  $2e^{2t}$

3.3.3 A função derivada de  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  é dada por

(a)  $e^{-x}$    (b)  $-e^x$    (c)  $-e^{-x}$    (d)  $e^x$

3.3.4 A equação da reta tangente a  $e^x$  no ponto  $a = 0$  é dada por

(a)  $y = x + 1$    (b)  $y = x$    (c)  $y = -x$    (d)  $y = x - 1$

### 3.4 DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos agora considerar o sistema massa-mola, ilustrado pela Figura 3.12, onde um corpo de massa  $m$  é arrastado até a posição  $s_0$  de um sistema de referência cuja origem se localiza na *posição natural* da mola, ou seja, na posição onde a mola não está nem estendida nem contraída.

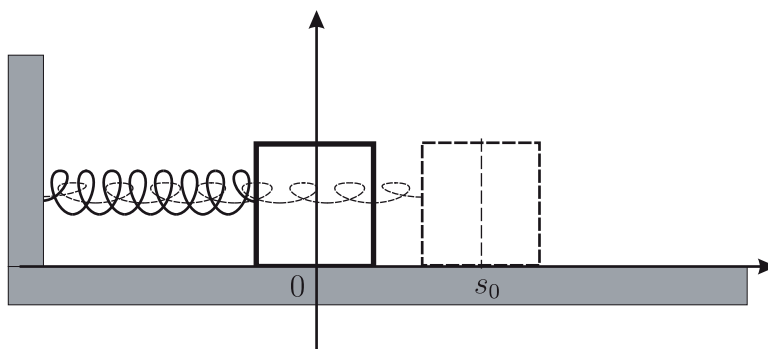


Figura 3.12: Sistema massa-mola sem atrito.

Se o corpo é solto no tempo  $t = 0$  com velocidade inicial  $v_0 = 0$ , utilizando princípios da Física, podemos obter uma relação precisa entre as funções po-

sição  $s$  e aceleração  $a$ . Supondo que a resistência do ar e o atrito com a superfície possam ser desprezadas, pela *Lei de Hooke*, temos que

$$F = -ks$$

onde  $k$  é a constante de rigidez da mola, que depende do seu material e da sua geometria. O sinal negativo aparece devido à direção e ao sentido da força, como mostra a Figura 3.12. Pela segunda Lei de Newton temos que  $F = ms''$  e portanto

$$ms'' = -ks$$

ou seja

$$ms''(t) = -ks(t)$$

relacionando a função  $s$  e sua função derivada segunda. No caso em que  $m = k$ , temos que

$$s''(t) = -s(t)$$

(3.3)

ou seja, a função aceleração é igual a menos a função posição. Vamos mostrar que as funções seno e cosseno satisfazem a essa curiosa propriedade. Para isso, devemos primeiro calcular suas derivadas primeiras. Vamos iniciar calculando as suas derivadas no zero.

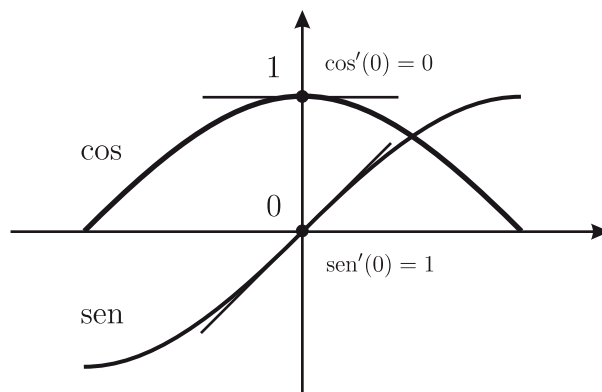


Figura 3.13: Retas tangentes de sen e cos na origem.

**Proposição 3.10:** Temos que

$$\boxed{\text{sen}'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \text{cos}'(0) = 0}$$

**Prova:** Para mostrarmos que  $\text{sen}'(0) = 1$ , primeiro notamos que

$$\text{sen}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}.$$

Pela Proposição 2.31, temos que

$$0 < \text{sen}(h) < h < \text{tg}(h),$$

para todo  $0 < h < \pi/2$ . Dividindo por  $\text{sen}(h) > 0$ , obtemos que

$$1 < \frac{h}{\text{sen}(h)} < \frac{1}{\cos(h)}.$$

Invertendo todos os membros das desigualdades acima, segue que

$$1 > \frac{\text{sen}(h)}{h} > \cos(h).$$

Pela continuidade do cosseno e pelo Teorema do Sanduíche, segue então que

$$\text{sen}'(0 \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1.$$

Como  $h \downarrow 0$  se e só se  $-h \uparrow 0$ , segue que

$$\text{sen}'(0 \uparrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(-h)}{-h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1,$$

onde utilizamos o fato de que seno é ímpar. Isso mostra que  $\text{sen}'(0) = 1$ .

Para mostrarmos que  $\text{cos}'(0) = 0$ , primeiro notamos que

$$\text{cos}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - \text{cos}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h}.$$

Consideramos então as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \text{cos}'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h} \frac{\text{cos}(h) + 1}{\text{cos}(h) + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}^2(h) - 1}{h} \frac{1}{\text{cos}(h) + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2(h)}{h} \frac{1}{\text{cos}(h) + 1} \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que  $\cos^2(h) - 1 = -\operatorname{sen}^2(h)$ . Temos então que

$$\begin{aligned}\cos'(0) &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h^2} \frac{h}{\cos(h) + 1} \\ &= -\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\cos(h) + 1} \\ &= -(\operatorname{sen}'(0))^2 \frac{0}{\cos(0) + 1} = 0.\end{aligned}$$

□

Vamos mostrar a seguir que a função derivada do seno é a função cosseno e que a função derivada do cosseno é menos a função seno.

**Proposição 3.11:** *Temos que*

$$\operatorname{sen}' = \cos \quad \text{e} \quad \cos' = -\operatorname{sen}$$

*Em outras palavras, temos que*

$$(\operatorname{sen}(t))' = \cos(t) \quad \text{e} \quad (\cos(t))' = -\operatorname{sen}(t)$$

**Prova:** Para mostrarmos que  $\operatorname{sen}' = \cos$ , consideramos então as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(t) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t+h) - \operatorname{sen}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t) \cos(h) + \operatorname{sen}(h) \cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t) (\cos(h) - 1) + \cos(t) \operatorname{sen}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \operatorname{sen}(t) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(t) \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right)\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que  $\operatorname{sen}(t+h) = \operatorname{sen}(t) \cos(h) + \operatorname{sen}(h) \cos(t)$ . Te-

mos então que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(t) &= \operatorname{sen}(t) \left( \lim_{h \downarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \cos(t) \left( \lim_{h \downarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) \\ &= \operatorname{sen}(t) \cos'(0) + \cos(t) \operatorname{sen}'(0) \\ &= \cos(t).\end{aligned}$$

A demonstração de que  $\cos' = -\operatorname{sen}$  é deixada como exercício.  $\square$

Podemos calcular então as derivadas segundas das funções seno e cosseno e mostrar que elas satisfazem a equação (3.3) que descreve o comportamento do sistema massa-mola quando a massa  $m$  é igual a constante de rigidez  $k$ . No caso da função seno, temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'' &= (\operatorname{sen}')' \\ &= (\cos)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\operatorname{sen}\end{aligned}$$

e no caso da função cosseno

$$\begin{aligned}\cos'' &= (\cos)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (-\operatorname{sen})'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\operatorname{sen}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\cos.\end{aligned}$$

Na situação descrita no início desta seção, onde o corpo é arrastado até a posição  $s_0$  e solto no tempo  $t = 0$  com velocidade nula, temos que a função posição é exatamente

$$s(t) = s_0 \cos(t)$$

De fato, temos que as funções velocidade e aceleração são

$$s'(t) = -s_0 \operatorname{sen}(t) \quad e \quad s''(t) = -s_0 \cos(t) = -s(t),$$

satisfazendo portanto a equação (3.3). Além disso, temos que

$$s(0) = s_0 \cos(0) = s_0 \quad e \quad v(0) = -s_0 \operatorname{sen}(0) = 0.$$



Encerramos esta seção mostrando que a função derivada da tangente é a secante ao quadrado e que a função derivada da cotangente é menos a cossecante ao quadrado. Relembramos que

$$\sec = \frac{1}{\cos} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\operatorname{sen}}$$

**Corolário 3.12:** *Temos que*

$$\operatorname{tg}' = 1 + \operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}' = -1 - \operatorname{cotg}^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2}$$

**Prova:** Para mostrarmos que  $\operatorname{tg}' = \sec^2$ , consideramos então as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' &= \left( \frac{\operatorname{sen}}{\cos} \right)' \\ &= \frac{\operatorname{sen}' \cos - \cos' \operatorname{sen}}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos \cos - (-\operatorname{sen}) \operatorname{sen}}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\operatorname{sen}^2}{\cos^2} \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que  $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$ , segue que

$$\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}.$$

A demonstração de que  $\operatorname{cotg}' = -1 - \operatorname{cotg}^2 = -1/\operatorname{sen}^2$  é deixada como exercício.  $\square$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.4.1 A função derivada de  $\cos^2(x) + x^2$  é dada por

- (a)  $-2 \operatorname{sen}(x) + 2x$     (b)  $-2 \cos(x) \operatorname{sen}(x) + 2x$   
 (c)  $2 \operatorname{sen}(x) + 2x$     (d)  $2 \cos(x) \operatorname{sen}(x) + 2x$

3.4.2 A função derivada de  $4 - \operatorname{sen}^2(x)$  é dada por

- (a)  $-2 \cos(x)$     (b)  $-2 \operatorname{sen}(x)$   
 (c)  $-2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$     (d)  $2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$

3.4.3 Considere que a posição no instante  $t$  é dada pela função  $e^{-t} \cos(t)$ .

(i) A função velocidade é dada por

- (a)  $-e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))$     (b)  $-e^{-t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))$   
 (c)  $-e^{-t} \operatorname{sen}(t)$     (d)  $e^{-t} \operatorname{sen}(t)$

(ii) A função aceleração é dada por

- (a)  $2e^{-t} \operatorname{sen}(t)$     (b)  $2e^{-t} \cos(t)$   
 (c)  $e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))$     (d)  $-e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))$

3.4.4 A função derivada de  $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$  é dada por

- (a)  $-\operatorname{cotg}(x)$     (b)  $\operatorname{cossec}^2(x) = 1 + \operatorname{cotg}^2(x)$   
 (c)  $\operatorname{sec}^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$     (d)  $\operatorname{tg}^2(x)$

3.4.5 A função derivada de  $\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$  é dada por

- (a)  $-\operatorname{tg}(x)$     (b)  $-\operatorname{cossec}^2(x) = -1 - \operatorname{cotg}^2(x)$   
 (c)  $\operatorname{sec}^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$     (d)  $\operatorname{cotg}^2(x)$

3.4.6 O valor de  $\left(\frac{e^x}{\cos(x) + 1}\right)'$  em  $x = 0$  é igual a

- (a)  $1/2$     (b)  $1/4$     (c)  $2$     (d)  $1$

3.4.7 A equação da reta tangente a  $\operatorname{tg}(x)$  no ponto  $a = 0$  é dada por

- (a)  $y = x + 1$     (b)  $y = x$     (c)  $y = -x$     (d)  $y = 0$

### 3.5 DERIVADA DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Nas seções anteriores, definimos de maneira precisa os conceitos de velocidade e de aceleração instantâneas e analisamos os comportamentos dinâmico e cinemático de um corpo em queda livre e também de um corpo num sistema massa-mola. Agora analisaremos o movimento do pistão do motor de um automóvel, cuja geometria é descrita pela Figura 3.14.

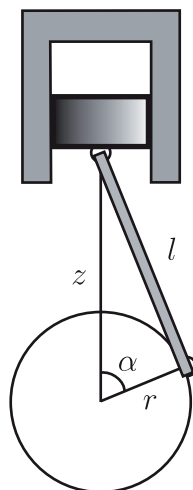


Figura 3.14: Pistão, biela e virabrequim.

Pela Lei do cossenos, temos que

$$l^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos(\alpha) \quad (3.4)$$

onde  $l$  é o comprimento da biela do pistão,  $r$  é raio do virabrequim e  $z$  é a distância da base do pistão ao eixo do virabrequim. Lembrando que  $r$  e  $l$  são constantes, podemos resolver a equação (3.4) para a variável  $z$ , obtendo  $z$  como uma função de  $\alpha$ , dada por

$$z(\alpha) = r \cos(\alpha) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\alpha)} \quad (3.5)$$

Por outro lado, temos também que tanto o ângulo  $\alpha$  quanto a distância  $z$  são funções do tempo  $t$ . Fazendo com que a origem do nosso sistema de coordenadas coincida com o eixo do virabrequim, num determinado instante  $t$ ,

temos que  $\alpha = \alpha(t)$  é a posição angular do virabrequim e que  $z = s(t)$  é a posição do pistão. Mas qual a relação entre essas duas funções do tempo? Se medirmos apenas a posição angular  $\alpha(t)$  do virabrequim, podemos utilizar a equação (3.5) para determinar a posição  $s(t)$  do pistão, de modo que

$$s(t) = z(\alpha(t)) \quad (3.6)$$

mostrando que as duas funções do tempo  $\alpha(t)$  e  $s(t)$  estão relacionada através da função geométrica  $z(\alpha)$ .

Mas e se quiséssemos determinar a relação entre a velocidade do pistão e a velocidade angular do virabrequim? Sabemos que a velocidade  $v(t)$  do pistão é a função derivada da sua posição  $s(t)$ . E quanto à velocidade angular do virabrequim? A velocidade angular do virabrequim está relacionada com a rotação do motor. No intervalo entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , temos que a velocidade angular média é dada pela proporção

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha(t) - \alpha(\tau)}{t - \tau}$$

onde  $\Delta\alpha = \alpha(t) - \alpha(\tau)$  é a variação do ângulo e  $\Delta t = t - \tau$  é a variação do tempo entre esses instantes. A velocidade angular  $\omega$  no instante  $\tau$  é por definição o limite da velocidade angular média entre os instantes  $\tau$  e  $t$ , quando  $t$  tende a  $\tau$ , ou seja,

$$\omega(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

A velocidade angular no instante  $\tau$  é de fato a derivada da função posição angular no instante  $\tau$ , uma vez que

$$\alpha'(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\alpha(t) - \alpha(\tau)}{t - \tau}$$

A função velocidade angular é então a função derivada da posição angular, de modo que

$$\omega = \alpha'$$

ou seja

$$\omega(t) = \alpha'(t)$$

Sabendo que a posição angular  $\alpha(t)$  do virabrequim e a posição  $s(t)$  do pistão estão relacionadas, como podemos relacionar a velocidade angular  $\alpha'(t)$  do virabrequim e a velocidade  $s'(t)$  do pistão? Uma vez que a posição angular do virabrequim e a posição do pistão estão relacionadas por uma composição de funções dada pela equação (3.6), é necessário obtermos uma regra para a derivação de funções compostas, que é conhecida por *regra da cadeia*.

**Proposição 3.13:** *Se  $g$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  é derivável em  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é derivável no ponto  $a$  e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

**Prova:** A prova é dividida em dois casos, sendo que o caso em que  $g'(a) = 0$  é demonstrado no Apêndice A.4. Vamos supor aqui que  $g'(a) \neq 0$ . Neste caso, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x$  onde  $0 < |x - a| < 1/m$ . De fato, caso contrário, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existiria  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - a| < 1/n$  e também  $g(x_n) = g(a)$ . Logo teríamos que  $x_n \rightarrow a$ , com  $x_n \neq a$ , e também

$$0 = \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

o que implicaria que  $g'(a) = 0$ .

Agora temos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

onde usamos a definição de composição de funções e o fato que  $g(x) - g(a) \neq 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo do ponto  $a$ . Portanto, segue que

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

onde estamos utilizando o fato que

$$f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}$$

uma vez que se  $y = g(x)$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

□

Quando trabalhamos com funções dadas pelas suas expressões expressões algébricas, utilizamos a seguinte forma da regra da cadeia.

**Corolário 3.14:** *Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis, então  $f \circ g$  é derivável e*

$$(f(g(x)))' = (f(y))'_{y=g(x)} (g(x))'$$

**Prova:** Temos que

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= ((f \circ g)(x))' \\ &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x)) g'(x) \\ &= (f(y))'_{y=g(x)} \cdot (g(x))' \end{aligned}$$

uma vez que

$$(f(y))'_{y=g(x)} = f'(g(x)) \quad \text{e} \quad (g(x))' = g'(x).$$

□

Temos então que a expressão algébrica  $(f(g(x)))'$ , para a derivada da composição, é dada pelo produto da expressão  $(f(y))'_{y=g(x)}$ , que é a derivada da “de fora” calculada na “de dentro”, pela expressão  $(g(x))'$ , da derivada da “de dentro”. O exemplo seguinte ilustra a aplicação da regra da cadeia. Sejam

$f(y) = y^2$  e  $g(x) = x^3 + 1$ . Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \left( (x^3 + 1)^2 \right)' &= (f(y))'_{y=g(x)} \cdot (g(x))' \\ &= (y^2)'_{y=x^3+1} (x^3 + 1)' \\ &= (2y)_{y=x^3+1} (3x^2) \\ &= 2(x^3 + 1)(3x^2). \end{aligned}$$

Por um lado, temos que  $(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$  e portanto temos que

$$\left( (x^3 + 1)^2 \right)' = (x^6 + 2x^3 + 1)' = 6x^5 + 6x^2,$$

que é de fato a mesma expressão obtida pela regra da cadeia. O exemplo seguinte ilustra a utilidade da regra cadeia

$$\begin{aligned} \left( (x^2 + 1)^{100} \right)' &= (y^{100})'_{y=x^2+1} (x^2 + 1)' \\ &= (100y^{99})_{y=x^2+1} (2x) \\ &= 200x(x^2 + 1)^{99}. \end{aligned}$$

É bastante evidente que seria muito mais difícil primeiro obtermos a expressão polinomial de  $(x^2 + 1)^{100}$  para somente depois derivarmos.

Agora vamos aplicar a regra da cadeia para determinar a relação entre a velocidade  $v(t) = s'(t)$  do pistão e a velocidade angular  $\omega(t) = \alpha'(t)$  do virabrequim. Pela equação (3.6), temos que  $s(t) = z(\alpha(t))$ . Pela regra da cadeia, segue que

$$\boxed{v(t) = (z(\alpha))'_{\alpha=\alpha(t)} \omega(t)} \quad (3.7)$$

de modo que  $v(t)$  e  $\omega(t)$  são denominadas *taxas relacionadas*, uma vez que as derivadas de funções do tempo são taxas de variação instantâneas. Observem que o fator de proporcionalidade depende da derivada da função geométrica  $z(\alpha)$ , que relaciona as funções do tempo  $s(t)$  e  $\alpha(t)$ . Vamos então calcular a expressão da derivada de  $z(\alpha)$ , no caso em que o raio do virabrequim é  $r = 1$  e o comprimento da biela é  $l = 2$ . Neste caso,

$$\boxed{z(\alpha) = \cos(\alpha) + \sqrt{4 - \sin^2(\alpha)}}$$

e então temos que

$$\begin{aligned}(z(\alpha))' &= (\cos(\alpha))' + \left(\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}\right)' \\ &= -\operatorname{sen}(\alpha) + (\sqrt{y})'_{y=4-\operatorname{sen}^2(\alpha)} (4 - \operatorname{sen}^2(\alpha))'\end{aligned}$$

Pelo exercício de fixação 3.1.3, temos que

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

e portanto

$$(z(\alpha))' = -\operatorname{sen}(\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}} (4 - \operatorname{sen}^2(\alpha))'$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}(4 - \operatorname{sen}^2(\alpha))' &= -(\operatorname{sen}^2(\alpha))' \\ &= -(y^2)'_{y=\operatorname{sen}(\alpha)} (\operatorname{sen}(\alpha))' \\ &= -(2y)'_{y=\operatorname{sen}(\alpha)} (\cos(\alpha)) \\ &= -2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Temos então que

$$(z(\alpha))' = -\operatorname{sen}(\alpha) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}}$$

Utilizando a equação (3.7), segue que

$$v(t) = \left( -\operatorname{sen}(\alpha(t)) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha(t)) \cos(\alpha(t))}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(\alpha(t))}} \right) \omega(t).$$

Agora mostraremos como a regra da cadeia pode nos auxiliar na obtenção da solução geral do sistema trem bala-ar e também na solução geral do sistema massa-mola. Para isso, enunciaremos a seguinte consequência imediata da regra da cadeia.



**Corolário 3.15:** Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}(cx))' &= c \cos(cx) \\(\operatorname{cos}(cx))' &= -c \operatorname{sen}(cx) \\(e^{cx})' &= ce^{cx} \\(a^x)' &= \log(a) a^x\end{aligned}$$

**Prova:** Pela regra da cadeia, segue que

$$(\operatorname{sen}(cx))' = (\operatorname{sen}(y))'_{y=cx} (cx)' = (\operatorname{cos}(y))_{y=cx} c = c \operatorname{cos}(cx)$$

e também que

$$(\exp(cx))' = (\exp(y))'_{y=cx} (cx)' = (\exp(y))_{y=cx} c = c \exp(cx).$$

A última afirmação segue disso, usando a definição  $a^x = e^{cx}$ , com  $c = \log(a)$  (ver Seção 2.3). A derivada de  $\operatorname{cos}(cx)$  é deixada como exercício.  $\square$

Retornamos agora à Segunda Lei de Newton

$$mv'(t) = -bv(t), \tag{3.8}$$

que descreve a velocidade de um trem bala de massa  $m$ , partindo da velocidade inicial  $v_0$ , na ausência de empuxo e na presença de resistência do ar, onde  $b$  é o coeficiente de resistência do ar (ver Seção 3.3). Seja  $c = b/m$  o coeficiente de resistência do ar por unidade de massa. Vamos mostrar que a função velocidade

$$v(t) = v_0 e^{-ct}$$

satisfaz à equação (3.8).

$$\begin{aligned}mv'(t) &= m(v_0 e^{-ct})' \\&= mv_0 (e^{-ct})' \\&= mv_0 (-ce^{-ct}) \\&= -mc(v_0 e^{-ct}) \\&= -bv(t).\end{aligned}$$

Além disso, temos que  $v(0) = v_0$  é a velocidade inicial.

Por último, retornamos à Segunda Lei de Newton

$$ms''(t) = -ks(t), \quad (3.9)$$

que descreve a posição do sistema massa-mola, onde  $m$  é a massa do corpo e  $k$  é a constante de rigidez da mola (ver Seção 3.4). Seja  $c = \sqrt{k/m}$  de modo que  $c^2 = k/m$ . Se no tempo  $t = 0$  o corpo é arrastado até a posição  $s_0$  e solto com velocidade inicial  $v_0 = 0$ , vamos mostrar que a função posição

$$s(t) = s_0 \cos(ct)$$

satisfaz à equação (3.9). De fato, temos que as funções velocidade e aceleração são

$$s'(t) = -s_0 c \sin(ct) \quad e \quad s''(t) = -s_0 c^2 \cos(ct) = -\frac{k}{m} s(t).$$

Além disso, temos que

$$s(0) = s_0 \cos(0) = s_0 \quad e \quad v(0) = -s_0 c \sin(0) = 0.$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.5.1 A derivada de  $e^{2x} = f(g(x))$ , onde  $f(y) = e^y$  e  $g(x) = 2x$ , é dada por

(a)  $e^{2x}$    (b)  $2e^{2x}$    (c)  $2xe^{2x}$    (d)  $2e^x$

3.5.2 A derivada de  $\sin(2t)$ , é dada por

(a)  $\cos(2t)$    (b)  $-\cos(2t)$    (c)  $2\cos(2t)$    (d)  $-2\cos(2t)$

3.5.3 A derivada de  $e^{-x^2} = f(g(x))$ , onde  $f(y) = e^y$  e  $g(x) = -x^2$ , é dada por

(a)  $e^{-2x}$    (b)  $e^{-x^2}$    (c)  $-2e^{-x^2}$    (d)  $-2xe^{-x^2}$

3.5.4 A derivada de  $\operatorname{tg}(x^2 + 7)$  é dada por

(a)  $2x \sec^2(x^2 + 7)$    (b)  $\sec^2(2x)$    (c)  $2x \sec^2(2x)$    (d)  $(x^2 + 7) \sec^2(2x)$

3.5.5 A derivada de  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = f(g(x))$ , onde  $f(y) = \sqrt{y}$  e  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ , é dada por

(a)  $\frac{1}{2\sqrt{2x-2}}$    (b)  $\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$    (c)  $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$    (d)  $\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$

3.5.6 Se  $f(y) = \sqrt{y}$  e  $g(x) = 10 + x^3$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{3x^2}{2\sqrt{10+x^3}}, \frac{3\sqrt{y}}{2} & \text{(b)} \frac{1}{2\sqrt{10+x^3}}, 3y \\ \text{(c)} \frac{1}{2\sqrt{10+x^3}}, \frac{3\sqrt{y}}{2} & \text{(d)} \frac{1}{2\sqrt{10+x^3}}, \frac{3\sqrt{y}}{2} \end{array}$$

3.5.7 Se  $f(y) = \sqrt{y}$  e  $g(x) = x^3$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

$$\text{(a)} \frac{3}{2}\sqrt{x}, 3y \quad \text{(b)} 3x, 3y \quad \text{(c)} \frac{3}{2}\sqrt{x}, \frac{3}{2}\sqrt{y} \quad \text{(d)} 3x, \frac{3}{2}\sqrt{y}$$

3.5.8 Se  $f(y) = e^y$  e  $g(x) = \sin(x) + 1$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \cos(x)e^{\sin(x)+1}, e^y \cos(e^y) & \text{(b)} e^{\sin(x)+1}, \cos(e^y) \\ \text{(c)} e^{\cos(x)}, \cos(e^y) & \text{(d)} (\sin(x) + 1)e^{\cos(x)}, e^y \cos(e^y) \end{array}$$

3.5.9 Se  $f(y) = y^{42}$  e  $g(x) = \cos(x) - 3$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 42(\cos(x) - 3)^{41}, -\sin(y^{42}) & \\ \text{(b)} 42 \sin(x)^{41}, -\sin(42y^{41}) & \\ \text{(c)} 42 \sin(x)(\cos(x) - 3)^{41}, 42y^{41} \sin(y^{42}) & \\ \text{(d)} -42 \sin(x)(\cos(x) - 3)^{41}, -42y^{41} \sin(y^{42}) & \end{array}$$

## 3.6 DERIVADA DE FUNÇÕES INVERSAS

Como veremos no próximo capítulo, as soluções do sistema trem bala-ar e também do sistema massa-mola são unicamente determinadas pela posição e pela velocidade iniciais. Para mostrarmos isso, será necessário sabermos calcular as derivadas de funções inversas.

Como vimos na Seção 2.7, a função inversa  $g$  de uma dada função  $f$  pode ser visualizada através da reflexão de  $f$  em torno da reta bissetriz  $y = x$ . Se  $f$  é derivável num ponto  $a \in \mathbb{R}$  e a reta tangente é não horizontal, temos que a reflexão dessa reta em torno da reta bissetriz é a reta não vertical tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $b = f(a)$ , como ilustra a Figura 3.15. Temos então que o coeficiente angular dessa reta refletida é  $g'(b)$ , mostrando que a função inversa é derivável no ponto  $b = f(a)$ . Na Seção 2.7, vimos que o coeficiente

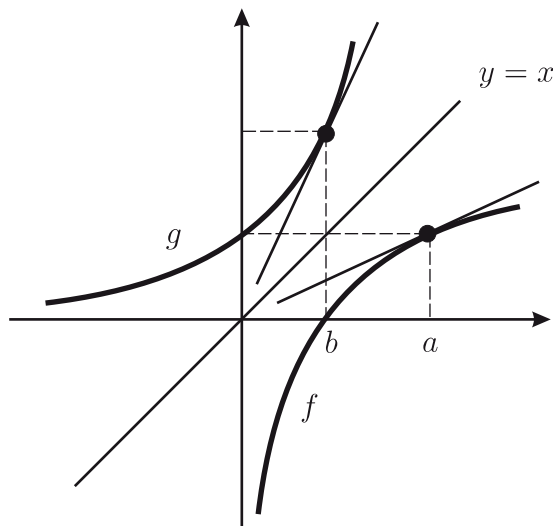


Figura 3.15: Retas tangentes a  $f$  e a  $g$ .

angular de uma dada reta é o inverso do coeficiente angular da reta refletida em torno da bissetriz, de modo que

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Vamos agora dar uma demonstração desse fato utilizando a definição de derivada e as propriedades do limite.

**Proposição 3.16:** Se  $f$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  e  $f'(a) \neq 0$ , então  $g$  é derivável em  $b = f(a)$  e

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

**Prova:** Seja  $y_n \rightarrow b = f(a)$ , com  $y_n \neq b$ . Pela Proposição 2.26,  $g$  é contínua em  $b$  e, portanto,  $g(y_n) \rightarrow g(b) = a$ . Definindo-se  $x_n = g(y_n)$ , segue que  $x_n \rightarrow a$  e

que

$$\begin{aligned}\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} &= \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \rightarrow \frac{1}{f'(a)}.\end{aligned}$$

Isso mostra que

$$g'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Uma maneira alternativa e geralmente mais prática de se encontrar a derivada da inversa é utilizar a regra da cadeia. Se  $f$  e  $g$  são inversas, temos que

$$f(g(x)) = x,$$

para todo  $x \in \text{dom}(g)$ . Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(g(x))g'(x) = 1,$$

o que mostra que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Utilizando apenas as expressões algébricas, temos que

$$g'(x) = \frac{1}{(f(y))'_{y=g(x)}}$$

Vamos agora calcular a deriva da função logarítmica.

**Proposição 3.17:** *Temos que*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

**Prova:** Pela Proposição 3.9, temos que  $\exp' = \exp$ . Pela regra da cadeia, como

$$\exp(\log(x)) = x,$$

segue que

$$\exp(\log(x)) \log'(x) = 1.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{\exp(\log(x))} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

□

Relembramos que, para  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$x^c = e^{c \log(x)}$$

para todo  $x > 0$  (ver Seção 2.3). Temos então que vale a regra da potência neste contexto mais geral.

**Proposição 3.18:** Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , temos que

$$(x^c)' = cx^{c-1}$$

**Prova:** Como  $x^c = \exp(c \log(x))$ , segue que

$$\begin{aligned} (x^c)' &= (\exp(c \log(x)))' \\ &= \exp(c \log(x)) c \log'(x) \\ &= x^c c \frac{1}{x} \\ &= cx^{c-1}. \end{aligned}$$

□

Vamos concluir esta seção aplicando esse procedimento para calcular as derivadas das inversas das funções trigonométricas.

**Proposição 3.19:** Temos que

$$\operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{acos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{atg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

**Prova:** Pela Proposição 3.11, temos que

$$\operatorname{sen}'(y) = \cos(y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)}.$$

Pela regra da cadeia, como

$$\operatorname{sen}(\operatorname{asen}(x)) = x,$$

segue que

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{asen}(x))} \operatorname{asen}'(x) = 1.$$

Uma vez que

$$\operatorname{sen}^2(\operatorname{asen}(x)) = x^2,$$

temos que

$$\sqrt{1 - x^2} \operatorname{asen}'(x) = 1,$$

mostrando que

$$\operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

O cálculo da derivada da função arco-cosseno é similar e será deixada como exercício.

Pelo Corolário 3.12, temos que

$$\operatorname{tg}'(y) = 1 + \operatorname{tg}^2(y).$$

Pela regra da cadeia, como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{atg}(x)) = x$$

segue que

$$(1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{atg}(x))) \operatorname{atg}'(x) = 1.$$

Uma vez que

$$\operatorname{tg}^2(\operatorname{atg}(x)) = x^2,$$

temos que

$$(1 + x^2) \operatorname{atg}'(x) = 1,$$

mostrando que

$$\operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

3.6.1 A derivada de  $\log(x^2 + 1) = f(g(x))$ , onde  $f(y) = \log(y)$  e  $g(x) = x^2 + 1$ , é dada por

(a)  $\frac{1}{x^2+1}$    (b)  $\frac{2}{x^2+1}$    (c)  $\frac{2x+1}{x^2+1}$    (d)  $\frac{2x}{x^2+1}$

3.6.2 A derivada de  $\operatorname{asen}(2t)$ , é dada por

(a)  $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$    (b)  $\frac{1}{1-4t^2}$    (c)  $\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}$    (d)  $\frac{2}{1-4t^2}$

3.6.3 A derivada de  $\operatorname{acos}(-x^2) = f(g(x))$ , onde  $f(y) = \operatorname{acos}(y)$  e  $g(x) = -x^2$ , é dada por

(a)  $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$    (b)  $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$    (c)  $\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$    (d)  $-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$

3.6.4 A derivada de  $\operatorname{atg}(x^3)$  é dada por

(a)  $\frac{1}{1+x^6}$    (b)  $\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$    (c)  $\frac{3x^2}{1+x^6}$    (d)  $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}$

3.6.5 A derivada de  $(\log(x))^{\frac{5}{2}} = f(g(x))$ , onde  $f(y) = y^{\frac{5}{2}}$  e  $g(x) = \log(x)$ , é dada por

(a)  $\frac{5}{2}(\log x)^{3/2}$    (b)  $\frac{5}{2}(\log x)^{3/2} \left(\frac{1}{x}\right)$    (c)  $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$    (d)  $\frac{5}{2}(\log x)^{3/2} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

3.6.6 Se  $f(y) = \sqrt{y}$  e  $g(x) = \log(x)$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

(a)  $\frac{1}{2}(\log x)^{-1/2}$ ,  $\frac{1}{2y}$    (b)  $\frac{1}{2x}(\log x)^{-1/2}$ ,  $\frac{1}{2y}$   
 (c)  $\frac{1}{2}(\log x)^{-1/2}$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{y}}$    (d)  $\frac{1}{2x}(\log x)^{-1/2}$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{y}}$

3.6.7 Se  $f(y) = \operatorname{atg}(y)$  e  $g(x) = e^x$ , então as derivadas de  $f(g(x))$  e  $g(f(y))$  são dadas, respectivamente, por

(a)  $\frac{1}{1+e^{2x}} e^x$ ,  $e^{\operatorname{atg}(y)} \frac{1}{1+y^2}$    (b)  $\frac{1}{1+e^{2x}}$ ,  $e^{\operatorname{atg}(y)} \frac{1}{1+y^2}$   
 (c)  $\frac{1}{1+e^{2x}} e^x$ ,  $e^{\operatorname{atg}(y)}$    (d)  $\frac{1}{1+e^{2x}}$ ,  $e^{\operatorname{atg}(y)}$



3.6.8 Usando que  $2^x = e^{x \log(2)}$ , temos que a derivada de  $2^x$  é dada por

(a)  $2^x$    (b)  $x2^{x-1}$    (c)  $\log(2)2^x$    (d)  $x \log(2)2^x$

## EXERCÍCIOS

### DE DEMONSTRAÇÃO

3.1 Utilizando o fato de que

$$x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

e calcule

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a},$$

onde  $f(x) = \sqrt{x}$ .

3.2 Utilizando o fato que  $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$ , complete a demonstração da Proposição 3.11, mostrando que de fato  $\cos' = -\sin$ .

3.3 Utilizando a regra da derivada do quociente e o fato que  $\cotg = \frac{\cos}{\sin}$ , complete a demonstração do Corolário 3.12, mostrando que de fato  $\cotg' = -1 - \cotg^2 = -1/\sin^2$ .

3.4 Complete a demonstração da Proposição 3.19, mostrando que de fato

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.5 Neste exercício, vamos calcular as derivadas das funções trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh}(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}.$$

Mostre que

$$\cosh'(t) = \sinh(t), \quad \sinh'(t) = \cosh(t) \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh}'(t) = 1 - \operatorname{tgh}^2(t).$$

## DE APLICAÇÃO

3.1 Um dos elevadores mais rápidos do mundo, localizado no Taipei Financial Center, subia com velocidade constante de 10 m/s, quando subitamente, após 5 segundos de sua partida, suas cordas de sustentação se partem. Felizmente, nesse momento, não há ninguém em seu interior. A função que descreve a altura do elevador em relação ao solo é dada então pela seguinte expressão

$$s(t) = \begin{cases} 10t + 100, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 150 + 10(t - 5) - 5(t - 5)^2, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

onde  $t_A$  é o tempo de aterrissagem, a altura é dada em metros e o tempo é dado em segundos. Em cada item, escolha uma das opções e justifique suas respostas.

(i) A derivada lateral direita de  $s$  em  $t = 5$  é igual a:

- (a) 10      (b) 20      (c) 5      (d) 8.

(ii) A função  $s$  é derivável em  $t = 5$ .

- (a) *Falso*      (b) *Verdadeiro*.

(iii) A função velocidade é dada por:

$$(a) v(t) = \begin{cases} 10, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 10 - 10(t - 5), & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

$$(b) v(t) = \begin{cases} 5, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 5 - 5(t - 5), & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

$$(c) v(t) = \begin{cases} 10, & \text{se } 0 < t < 5 \\ 5 - 5(t - 5), & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

$$(d) v(t) = \begin{cases} 5, & \text{se } 0 < t < 5 \\ 10 - 10(t - 5), & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

(iv) A função aceleração é dada por:

$$(a) a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ -10, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases} \quad (b) a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ -5, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

$$(c) a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < t < 5 \\ -5, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases} \quad (d) a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < t < 5 \\ -10, & \text{se } 5 < t < t_A \end{cases}$$

3.2 Suponha que um fio retilíneo, de seção transversal circular de raio  $r_0$ , seja percorrido por uma corrente estacionária. Essa corrente gera um campo magnético cuja intensidade  $I$ , em um ponto do espaço, depende da distância  $r$  do ponto ao eixo do fio. Assim,  $I = I(r)$ , e pode-se mostrar que, em um sistema de unidades apropriado, a função  $I(r)$  é dada por

$$I(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_0^2}, & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

Em cada item, escolha uma das opções e justifique suas respostas.

(i) A derivada lateral direita de  $I$  em  $r = r_0$  é igual a:

$$(a) 1/r_0^2 \quad (b) 1/r_0 \quad (c) -1/r_0^2 \quad (d) -1/r_0.$$

(ii) A função  $I$  é derivável em  $r = r_0$ .

$$(a) \text{ Falso} \quad (b) \text{ Verdadeiro.}$$

(iii) A função derivada é dada por

$$I'(r) = \begin{cases} 1/r_0^2, & \text{se } 0 \leq r < r_0 \\ -1/r^2, & \text{se } r \geq r_0 \end{cases} ?$$

$$(a) \text{ Falso} \quad (b) \text{ Verdadeiro.}$$

3.3 Considere um motor cujo virabrequim tem raio  $r = 1$  e a biela comprimento  $l = 2$ . Se o virabrequim está em rotação constante  $\alpha = 3t$ , então a função posição vertical do pistão é dada por

$$s(t) = z(3t) = \cos(3t) + \sqrt{4 - \sin^2(3t)}.$$

- (i) Obtenha a função velocidade vertical  $v(t)$  do pistão.
- (ii) Obtenha a função aceleração vertical  $a(t)$  do pistão.

## GRÁFICOS

### 4.1 OTIMIZAÇÃO

Um corpo é lançado no instante  $t = 0$  de uma altura inicial positiva  $s_0$  com velocidade inicial positiva  $v_0$  e atinge o solo no instante de aterrissagem  $t_A$ . Na ausência de atrito com o ar, sua função posição vertical é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

onde  $t \in [0, t_A]$  e  $g$  é aceleração da gravidade. Esse movimento é ilustrado pela Figura 4.1.

Estamos interessados em encontrar os instantes  $t$  em  $[0, t_A]$  quando o corpo atinge as alturas mínima e máxima. Como a velocidade de lançamento e a altura inicial são positivas, a altura mínima é atingida no instante de aterrissagem  $t = t_A$ . E a altura máxima, quando é atingida? Antes de o corpo chegar a altura máxima, ele está subindo e possui velocidade positiva e, depois de chegar a altura máxima, ele está descendo e possui velocidade negativa. É intuitivo então que, no instante  $t_M$  em que o corpo atinge a altura máxima, sua velocidade é nula. Na Figura 4.1, esse é precisamente o instante  $t_M \in (0, t_A)$  em que a reta tangente ao gráfico de  $s$  é horizontal. Para encontrar o instante

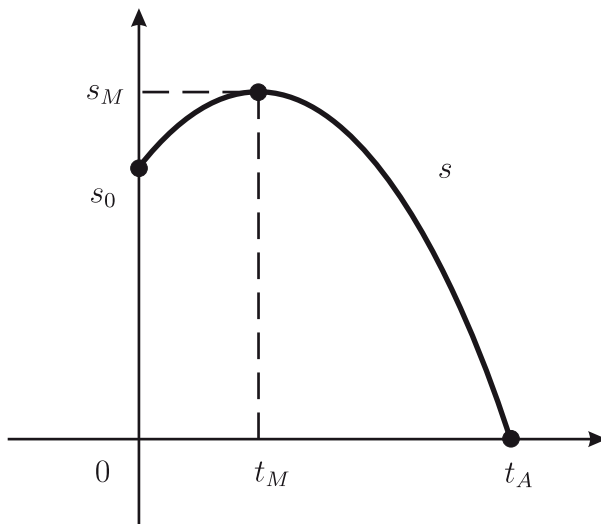


Figura 4.1: Alturas máximas e mínimas.

de altura máxima  $t_M$ , basta então resolver a equação  $s'(t) = 0$  dada por

$$v_0 - gt = 0$$

cuja solução é

$$t_M = \frac{v_0}{g}$$

Segue que a altura máxima é dada por  $s_M = s(t_M)$  e então

$$s_M = s_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

que é a equação de Torricelli no caso em que a velocidade final é nula.

Em geral, dada uma função  $f$ , estamos interessados em encontrar os pontos  $c$  em seu domínio onde a função atinge os valores  $f(c)$  mínimos e máximos. Esses pontos  $c$  são denominados *pontos de extremo de  $f$* , enquanto os valores  $f(c)$  são denominados *valores extremos de  $f$* . Quando  $f(c)$  é mínimo, temos que  $c$  é denominado *ponto de mínimo*. Analogamente, quando  $f(c)$  é

máximo, temos que  $c$  é denominado *ponto de máximo*. A obtenção dos pontos e valores extremos é denominada *otimização*. Por exemplo, se estamos preocupados com o desenvolvimento sustentável do ambiente, muitas vezes, queremos maximizar a eficiência energética de um determinado processo e, em outras oportunidades, desejamos minimizar a quantidade de recursos naturais utilizado na produção de um determinado produto.

No exemplo acima, o domínio da função  $s$  é o intervalo  $[0, t_A]$ . Vimos que o ponto de mínimo  $t_A$  está na fronteira desse intervalo, enquanto o ponto de máximo  $t_M$  está no interior e que, nesse ponto, a derivada de  $s$  se anula. Em geral, os pontos extremos de uma função  $f$  podem estar na fronteira ou no interior do seu domínio. Um ponto  $c$  onde

$$f'(c) = 0$$

é denominado *ponto crítico de  $f$* . Temos a seguinte relação entre pontos críticos e pontos extremos no interior do domínio.

**Proposição 4.1:** *Seja  $f$  uma função derivável em  $(a, b)$ . Se  $c \in (a, b)$  é ponto extremo de  $f$ , então  $c$  é ponto crítico de  $f$ .*

**Prova:** Vamos supor que  $c$  é ponto de máximo, sendo que a demonstração do caso em que  $c$  é ponto de mínimo é análoga e deixada como exercício. Como  $c$  é ponto de máximo, temos que  $f(c) - f(x) \geq 0$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ . Como  $c$  está no interior do domínio de  $f$ , podemos considerar ambos os limites laterais. Logo temos que

$$0 \leq \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c \uparrow) = f'(c) = f'(c \downarrow) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pois no primeiro limite  $x - c > 0$  e no segundo limite  $x - c < 0$ . Portanto, segue que  $f'(c) = 0$ , ou seja, que  $c$  é ponto crítico de  $f$ .  $\square$

Agora voltamos ao exemplo acima, considerando a situação em que a posição inicial é positiva, mas a velocidade inicial é negativa. Neste caso, a função posição  $s$  não possui ponto crítico no intervalo  $[0, t_A]$ , uma vez que a velocidade nunca se anula nesses instantes. Assim, ela não possui ponto de extremo no interior  $(0, t_A)$ . De fato, ela possui o ponto máximo em  $t = 0$  e ponto de mínimo em  $t = t_A$ .

Isso nos sugere o seguinte *método de otimização de funções deriváveis*, ilustrado pela Figura 4.2.

- (1) Obtenha a expressão de  $f'(x)$ .
- (2) Encontre os pontos críticos de  $f$  resolvendo para  $c$  a equação

$$f'(c) = 0$$

- (3) Calcule os valores de  $f$  em cada ponto crítico  $c$ .
- (4) Calcule os valores de  $f$  em cada ponto da fronteira de  $[a, b]$ .
- (5) Compare os valores obtidos nos itens (3) e (4):

O maior valor será o máximo e os pontos onde ele é atingido serão os pontos de máximo.

O menor valor será o mínimo e os pontos onde ele é atingido serão os pontos de mínimo.

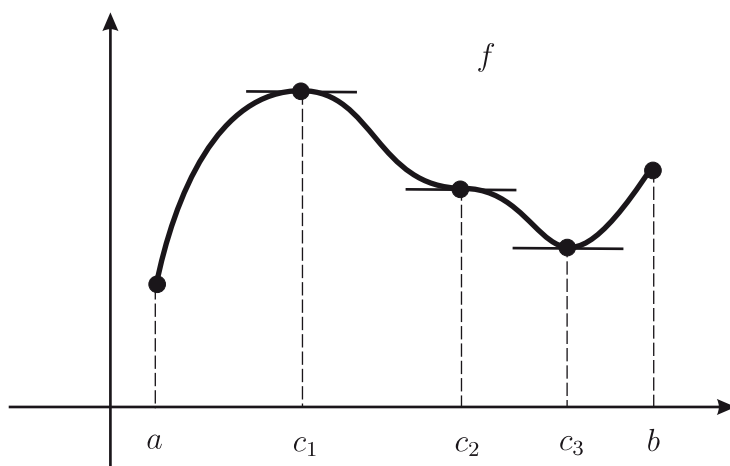


Figura 4.2: Algoritmo de otimização para  $f$ .

O algoritmo acima só funciona se a função possui um número finito de pontos críticos, ou seja, quando a equação  $f'(x) = 0$  possui um número finito



de soluções. Esse é o caso de funções polinomiais  $p$ , uma vez que  $p'$  é também uma função polinomial e, portanto, possui um número finito de raízes.

O resultado seguinte, conhecido como *Teorema de Weierstrass* e cuja demonstração está fora do escopo deste livro, garante a existência de pontos de extremo para funções contínuas em intervalos fechados.

**Teorema 4.2:** *Seja  $f$  uma função contínua definida num intervalo fechado. Então existem pontos de máximo e de mínimo de  $f$ .*

Os exemplos seguintes mostram que as duas hipóteses presentes no resultado acima são realmente essenciais. Primeiro considere a função  $f(x) = x$ , onde  $\text{dom}(f) = (-1, 1)$ , como ilustrado pela Figura 4.3.

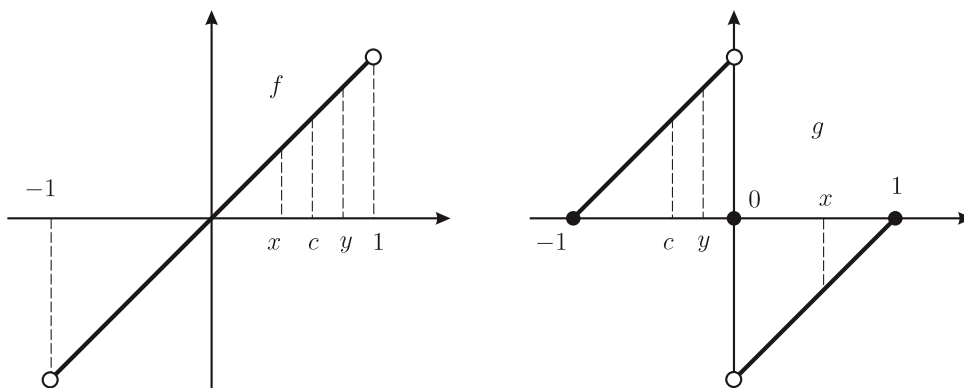


Figura 4.3: Funções  $f$  e  $g$  não possuem pontos de extremo.

Note que ela é contínua, mas está definida apenas no intervalo aberto  $(-1, 1)$ , e não no intervalo fechado  $[-1, 1]$ . Existe algum  $c \in (-1, 1)$  que seja ponto de extremo de  $f$ ? A resposta é negativa, pois existem  $x, y \in (-1, 1)$  tais que  $x < c < y$  e, portanto, temos que  $f(x) < f(c) < f(y)$ , mostrando que  $f(c)$  não é nem valor máximo nem valor mínimo. Consideramos agora a função  $g$ , ilustrada pela Figura 4.3 e definida por partes

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ x - 1, & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Note que está definida no intervalo fechado  $[-1, 1]$ , mas não é contínua. Novamente podemos perguntar se existe algum  $c \in [-1, 1]$  que seja ponto de extremo de  $g$ ? E novamente a resposta é negativa. Por exemplo, se  $c \in [-1, 0)$ , existem  $x, y \in [-1, 1]$  tais que  $c < y < 0 < x$  e, portanto, temos que  $f(x) < f(c) < f(y)$ , mostrando que  $f(c)$  não é nem valor máximo nem valor mínimo. Analogamente podemos mostrar que se  $c \in (0, 1]$ , então  $f(c)$  também não é nem valor máximo nem valor mínimo. Como  $c = 0$  claramente não é ponto de extremo, concluímos que esses não existem no caso da função  $g$ .

## TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Nesta seção, vamos usar algumas ideias de otimização para demonstrar o *Teorema do Valor Médio*. Ele será usado aqui e na próxima seção para obtermos mais aplicações da derivada.

Primeiro vamos demonstrar um resultado, conhecido como *Teorema de Rollê*, que garante a existência de ponto crítico para uma função cujos valores coincidem na fronteira, como ilustrado pela Figura 4.4.

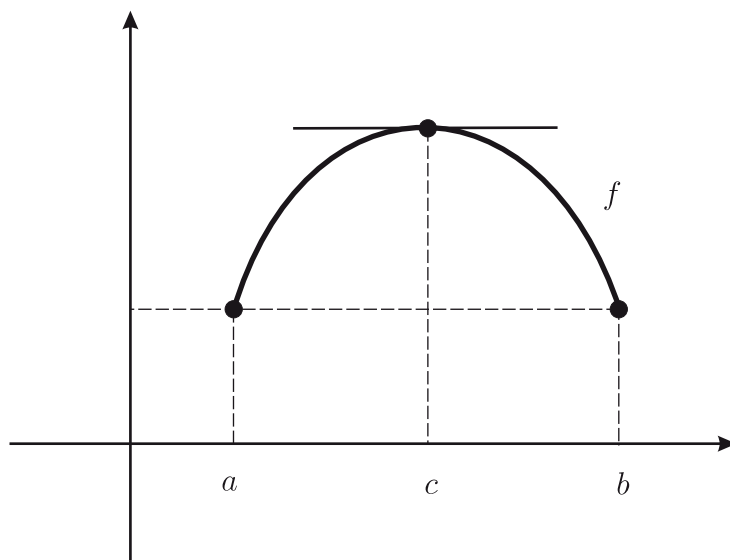


Figura 4.4: Teorema de Rollê.

**Teorema 4.3:** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $(a, b)$  e tal que  $f(a) = f(b)$ . Então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

**Prova:** Pelo Teorema de Weierstrass, existem pontos de máximo e de mínimo de  $f$  em  $[a, b]$ . Se  $f$  é constante, temos que  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Caso contrário, existe  $c \in (a, b)$  que é ponto de extremo de  $f$ , ou  $c$  é um ponto de máximo ou é um ponto de mínimo. Pela Proposição 4.1, segue que  $f'(c) = 0$ .  $\square$

Demonstramos a seguir o Teorema do Valor Médio.

**Teorema 4.4: (TVM)** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$ . Se  $g'(x) \neq 0$ , para todo  $x \in (a, b)$ , então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Prova:** Considere a função

$$h(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) (g(x) - g(a)),$$

definida para  $x \in [a, b]$ , cuja função derivada em  $(a, b)$  é dada por

$$h'(x) = f'(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(x).$$

Temos que  $h(a) = f(a) = h(b)$ . Pelo Teorema de Rollê, segue que existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ , de modo que

$$0 = f'(c) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) g'(c).$$

O resultado é obtido dividindo-se a equação acima por  $g'(c)$ .  $\square$

O próximo resultado afirma que se a função for derivável, existe um ponto  $c$  entre os pontos  $a$  e  $b$  tal que a reta tangente em  $(c, f(c))$  é paralela à reta

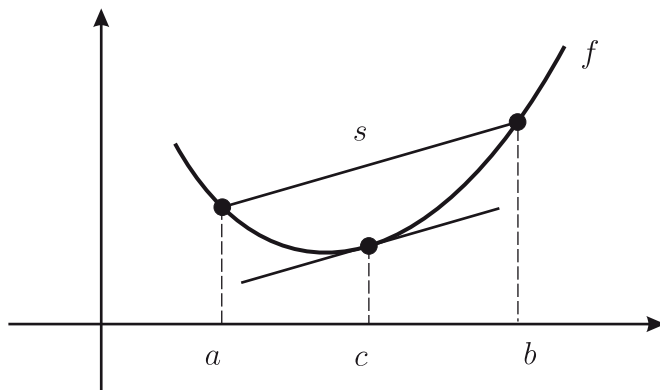


Figura 4.5: Reta tangente paralela à reta secante.

secante passando por  $(a, f(a))$  e por  $(b, f(b))$ , como ilustra a Figura 4.5. Esse resultado, que também é conhecido como TVM, é uma consequência imediata do resultado acima, bastando escolher  $g(x) = x$ .

**Corolário 4.5: (TVM)** Se  $f$  é uma função derivável no intervalo fechado  $[a, b]$ , então existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cinematicamente, aplicando esse resultado para a função posição  $s$  num intervalo  $[t_1, t_2]$ , temos que existe um instante  $\tau \in (t_1, t_2)$  tal que

$$s'(\tau) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ou seja, no instante  $\tau$ , a velocidade coincide com a velocidade média entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

## INDETERMINAÇÕES DO TIPO ZERO SOBRE ZERO

Uma outra consequência relevante do TVM é a denominada *Regra de L'Hospital* para o cálculo de limites de quociente onde o numerador e o denominador tendem ambos para zero. Por exemplo, se quisermos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2},$$

não podemos usar a regra do quociente, pois temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + 1 - e^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Essa situação é denominada *indeterminação do tipo*  $\frac{0}{0}$ .

**Proposição 4.6:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas num dado intervalo e deriváveis nesse intervalo, com exceção talvez do ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Se  $g(x), g'(x) \neq 0$ , para todo  $x \neq a$ , e também  $f(a) = 0 = g(a)$ , então*

$$\lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \square a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

caso o segundo limite exista, onde  $\square$  pode ser substituído, de maneira uniforme, por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ .

**Prova:** Vamos fazer a demonstração no caso em que  $\square$  é igual a  $\downarrow$ , sendo que os outros casos são similares e deixados como exercício. Pelo TVM, para cada  $x > a$ , existe  $c(x)$  com  $a < c(x) < x$ , tal que

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (4.1)$$

onde utilizamos o fato de que  $f(a) = 0 = g(a)$ . Temos então que

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Resta então mostrar que

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, temos que se  $x \downarrow a$ , então  $y = c(x) \downarrow a$ . Portanto

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \downarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

□

Aplicando a Regra de L'Hospital, obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x},$$

onde novamente surgiu uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Podemos então aplicar mais uma vez a regra de L'Hospital para obter que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Vamos apresentar agora uma aplicação interessante da regra de L'Hospital. Uma bola é arremessada verticalmente diversas vezes dentro de uma caixa hermeticamente fechada, onde é possível controlar a quantidade de ar presente no seu interior. Em cada arremesso, a velocidade inicial  $v_0$  é sempre a mesma, mas diminui-se um pouco a quantidade de ar no interior da caixa. A progressiva diminuição da quantidade do ar provoca uma diminuição do coeficiente de atrito com o ar  $b$  e também uma diminuição do coeficiente  $c = b/m$ , uma vez que a massa da bola permanece inalterada. Além disso, em cada arremesso, registra-se a posição  $s_c(t)$  da bola sempre num mesmo instante de tempo  $t$  pré-fixado. A medida que  $c$  se aproxima de 0, o que ocorre a posição  $s_c(t)$ ? Para um dado coeficiente  $c$ , a posição da bola no instante de tempo  $t$  é dada por

$$s_c(t) = s_0 - \frac{g}{c}t + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-ct}}{c}\right)$$

Vamos mostrar a seguir que solução do problema balístico com atrito se aproxima da solução ideal dada por

$$s(t) = s_0 + v_0t - g\frac{t^2}{2}$$

onde a resistência do ar é desconsiderada. Fixando o instante  $t$ , temos que

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0} s_c(t) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left( s_0 - \frac{g}{c} t + \left( \frac{g}{c} + v_0 \right) \left( \frac{1 - e^{-ct}}{c} \right) \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \left( s_0 + v_0 \left( \frac{1 - e^{-tc}}{c} \right) - \frac{g}{c} \left( \frac{tc - 1 + e^{-tc}}{c} \right) \right) \\ &= s_0 + v_0 \left( \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-tc}}{c} \right) - g \left( \lim_{c \rightarrow 0} \frac{tc - 1 + e^{-tc}}{c^2} \right)\end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital e lembrando que o instante  $t$  está fixo e que o coeficiente  $c$  é quem está variando, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-tc}}{c} &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-tc})'}{(c)'} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{te^{-tc}}{1} \\ &= t\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0} \frac{tc - 1 + e^{-tc}}{c^2} &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(tc - 1 + e^{-tc})'}{(c^2)'} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{t - te^{-tc}}{2c} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(t - te^{-tc})'}{(2c)'} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{t^2 e^{-tc}}{2} \\ &= \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\lim_{c \rightarrow 0} s_c(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2},$$

concluindo que

$$\lim_{c \rightarrow 0} s_c(t) = s(t)$$

Como ilustrado pela Figura 4.6, a medida que  $c$  se aproxima de 0, a solução do problema balístico com atrito se aproxima progressivamente da solução ideal, onde a resistência do ar é desconsiderada.

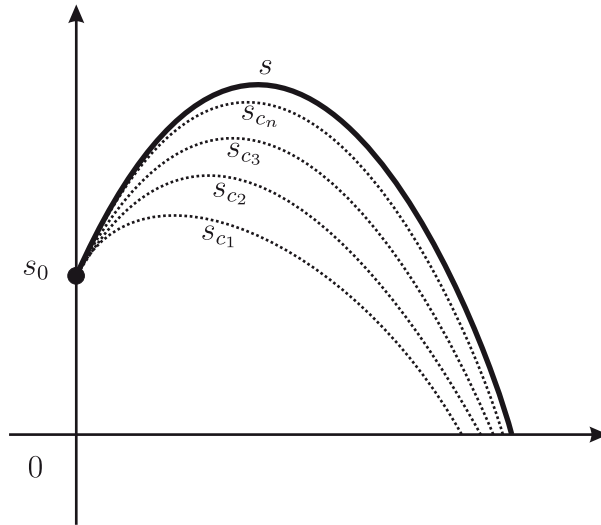


Figura 4.6: Soluções  $s_{c_n}$  se aproximam de  $s$ , quando  $c_n \rightarrow 0$ .

## LEI DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Vamos encerrar esta seção mostrando que a energia mecânica num sistema sem atrito se conserva ao longo do tempo. Primeiro vamos mostrar o seguinte resultado, que implica que dois corpos com a mesma função velocidade permanecem a uma distância constante um do outro.

**Proposição 4.7:** *Temos que  $f' = g'$  se e só se  $f = g + C$ , para algum  $C \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $f(a) = g(a)$  e  $f' = g'$  se e só se  $f = g$ .*

**Prova:** Se  $f = g + c$ , então claramente  $f' = g'$ , pois a derivada da função constante é nula. Por outro lado, se  $f' = g'$ , definimos  $h = f - g$ . Temos que  $h' = f' - g' = 0$ . Pelo TVM (Corolário 4.5), se  $x < y$ , temos que existe uma constante  $c \in (x, y)$  tal que

$$\frac{h(y) - h(x)}{y - x} = h'(c) = 0,$$

o que mostra que  $h(y) = h(x)$ . Segue portanto que  $h$  é constante, pois os pontos  $x, y$  são arbitrários. Note que se  $f(a) = g(a)$ , então  $C = 0$ .  $\square$



Sejam dois corpos com funções posição  $s_1$  e  $s_2$ . Se eles tem a mesma função velocidade, então  $s'_1 = s'_2$ . Pela proposição anterior, segue que  $s_1 - s_2 = c$ , mostrando que a distância entre os corpos é constante.

Agora vamos obter a Lei da Conservação da Energia para os denominados *sistemas mecânicos conservativos*, onde a força  $F$  depende apenas da posição e é dada por

$$F(s) = -V'(s)$$

e  $V$  é denominado o *potencial do sistema*. Por exemplo, no sistema massa-mola o potencial é dado por

$$V(s) = \frac{ks^2}{2}$$

onde  $k$  é a constante de Hooke, de modo que

$$-V'(s) = -ks$$

é a força da mola. Outro exemplo ocorre na teoria de gravitação de Newton, cujo potencial é dado por

$$V(s) = -\frac{mMG}{s}$$

onde  $m$  é a massa do planeta que órbita em torno do Sol de massa  $M$  e  $G$  é a constante de gravitação de Newton. Neste caso,

$$-V'(s) = -\frac{mMG}{s^2}$$

é a força de atração gravitacional. Para sistemas conservativos, a Segunda Lei de Newton é dada por

$$ma(t) = -V'(s(t))$$

A energia mecânica do sistema no instante  $t$  é dada por

$$E(t) = \frac{mv(t)^2}{2} + V(s(t))$$

onde  $mv(t)^2/2$  é denominada *energia cinética* e  $V(s(t))$  é denominada *energia potencial*. Vamos mostrar que a função  $E$  é constante, isto é, que a energia mecânica do sistema se conserva. De fato, pelas regras da soma e da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \left( \frac{mv(t)^2}{2} + V(s(t)) \right)' \\ &= \frac{m}{2} (v(t)^2)' + (V(s(t)))' \\ &= \frac{m}{2} 2v(t)v'(t) + V'(s(t))s'(t). \end{aligned}$$

Usando que  $v' = a$ , que  $s' = v$  e também a Segunda Lei de Newton, segue que

$$\begin{aligned} E'(t) &= ma(t)v(t) + V'(s(t))v(t) \\ &= -V'(s(t))v(t) + V'(s(t))v(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.7, isso mostra que

$$E = \frac{mv(t)^2}{2} + V(s(t))$$

onde  $E$  é uma constante, como havíamos afirmado.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

4.1.1 Considere a função  $f(x) = x^3 - 12x + 11$ , com  $x \in [-3, 4]$ .

(i) Seus pontos críticos são

(a) não existem   (b)  $-1, 1$    (c)  $-2, 2$    (d)  $-1, 2$

(ii) Seus pontos de máximo são

(a) não existem   (b)  $-2, 4$    (c)  $-1, 4$    (d)  $-1$

(iii) Seus pontos de mínimo são

(a) não existem (b)  $-3, 1$  (c)  $-3, 2$  (d)  $2$

4.1.2 Considere a função  $s(t) = -2t^3 + 6t + 4$ , com  $t \in [-2, 2]$ .

(i) Seus pontos críticos são

(a) não existem (b)  $-1, 1$  (c)  $-2, 2$  (d)  $-1, 2$

(ii) Seus pontos de máximo são

(a) não existem (b)  $-2, 1$  (c)  $-1, 2$  (d)  $1$

(iii) Seus pontos de mínimo são

(a) não existem (b)  $-2, 1$  (c)  $-1, 2$  (d)  $-1$

4.1.3 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , com  $x \in [-2, 2]$ .

(i) Seus pontos críticos são

(a) não existem (b)  $0$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

(ii) Seus pontos de máximo são

(a)  $-2, 2$  (b)  $0$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

(iii) Seus pontos de mínimo são

(a)  $-2, 2$  (b)  $0$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

4.1.4 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , com  $x \in [-2, 2]$ .

(i) Seus pontos críticos são

(a) não existem (b)  $0$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

(ii) Seus pontos de máximo são

(a)  $-2, 2$  (b)  $-1$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

(iii) Seus pontos de mínimo são

(a)  $-2, 2$  (b)  $-1$  (c)  $1$  (d)  $-1, 1$

4.1.5 Considere a função  $s(t) = te^{-2t}$ , com  $t \in [0, 1]$ .

(i) Seus pontos críticos são

(a) não existem (b)  $0$  (c)  $1$  (d)  $\frac{1}{2}$

- (ii) Seus pontos de máximo são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $\frac{1}{2}$  (d) 1
- (iii) Seus pontos de mínimo são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $\frac{1}{2}$  (d) 1

## 4.2 CRESCIMENTO E CONCAVIDADE

Nesta seção, vamos mostrar como podemos obter o formato do gráfico das funções reais a partir do conhecimento das suas funções derivadas primeira e segunda. Uma consequência imediata do TVM é a relação entre o sinal da derivada num dado intervalo e o crescimento ou decréscimo da função.

**Proposição 4.8:** *Seja  $f$  uma função derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

- (A) *se  $f' > 0$ , então  $f$  é crescente e*
- (B) *se  $f' < 0$ , então  $f$  é decrescente.*

**Prova:**

- (A) Se  $f' > 0$ , dados  $x, y \in (a, b)$ , com  $x < y$ , então  $f'(c) > 0$  para todo  $c \in (x, y)$ . Pelo TVM, temos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0,$$

o que mostra que  $f(y) > f(x)$ , uma vez que escolhemos  $y > x$ . Segue portanto que  $f$  é crescente, pois os pontos  $x, y \in (a, b)$  são arbitrários.

- (B) A demonstração deste item é análoga à do item (A) e é deixada como exercício.

□

Vamos determinar os intervalos de crescimento para cima e para baixo da função  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ . Como  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , temos que

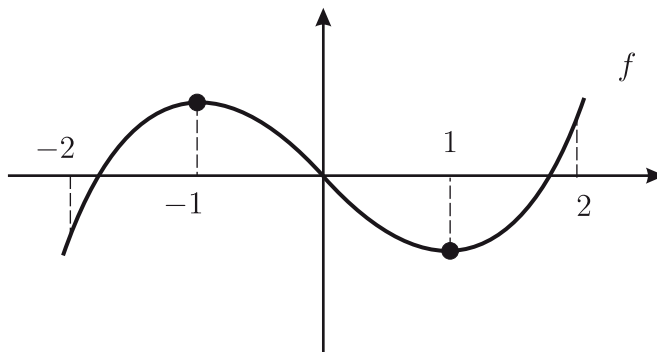


Figura 4.7: Crescimento para cima e para baixo da função  $f$ .

$f'(x) > 0$ , caso  $x \in (-2, -1)$  ou  $x \in (1, 2)$ , e temos também que  $f'(x) < 0$  se  $x \in (-1, 1)$ , como mostra a Figura 4.7. Portanto  $f$  é crescente nos intervalos  $(-2, -1)$  e  $(1, 2)$  e é decrescente no intervalo  $(-1, 1)$ , como ilustrado pela Figura 4.7.

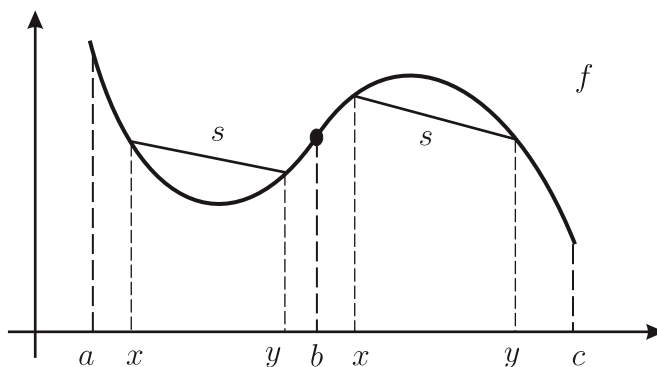


Figura 4.8: Concavidade para cima e para baixo da função  $f$ .

Outro aspecto importante para o esboço do gráfico de funções reais é determinar os intervalos onde a concavidade da função está para cima e os intervalos onde a concavidade está para baixo, como ilustrado pela Figura 4.8. Uma função  $f$  possui *concavidade para cima num dado intervalo*  $(a, b)$  se, para todos  $x, y \in (a, b)$ , a reta secante  $s$  passando pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  fica acima do gráfico de  $f$  no intervalo  $(x, y)$ . Por outro lado, uma

função  $f$  possui *concauidade para baixo* num dado intervalo  $(b, c)$  se, para todos  $x, y \in (b, c)$ , a reta secante  $s$  passando pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  fica abaixo do gráfico de  $f$  no intervalo  $(x, y)$ .

O resultado seguinte relaciona o sinal da segunda derivada com a concauidade da função e também é uma consequência do TVM.

**Proposição 4.9:** *Seja  $f$  uma função derivável duas vezes no intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos então que*

- (A) *Se  $f'' > 0$ , então  $f$  possui concauidade para cima e*
- (B) *Se  $f'' < 0$ , então  $f$  possui concauidade para baixo.*

**Prova:**

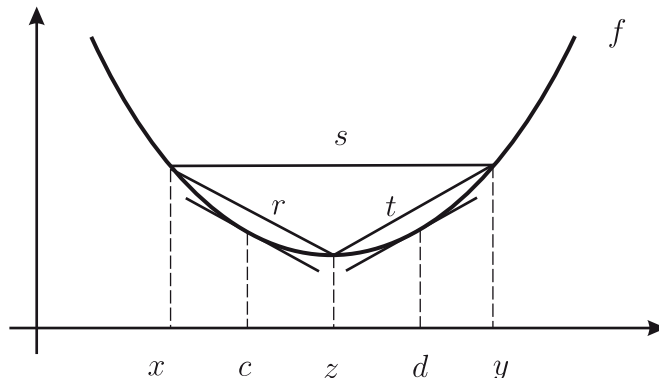


Figura 4.9: Se  $f'$  é crescente, então  $f$  possui concauidade para cima.

- (A) Se  $f'' > 0$ , pela Proposição 4.8, segue  $f'$  é crescente, pois temos que  $(f')' = f''$ . Agora, pela definição, para mostrar que  $f$  tem concauidade para cima, vamos verificar que, dados  $x, y \in (a, b)$ , a reta secante  $s$  passando por  $(x, f(x))$  e por  $(y, f(y))$  se situa acima do gráfico de  $f$  entre esses dois pontos. Seja  $z \in (x, y)$  e denote por  $r$  e  $t$  as retas secantes ilustradas pela Figura 4.9, com inclinações, respectivamente,  $m_r$  e  $m_t$ . Pelo TVM, existe  $c \in (x, z)$  tal que  $f'(c) = m_r$  e também existe  $d \in (z, y)$  tal que  $f'(d) = m_t$ . Como  $c < d$  e  $f'$  é crescente, temos que  $f'(c) < f'(d)$ , o

que implica que  $m_r < m_t$ . Portanto, o ponto  $(z, f(z))$  se situa abaixo da reta secante  $s$ , como ilustrado pela Figura 4.9, mostrando que  $f$  possui concavidade para cima.

(B) A demonstração deste item é análoga a do item (A) e é deixada como exercício.

□

Voltando ao exemplo da função  $f(x) = x^3 - 3x$ , onde  $x \in [-2, 2]$ , vamos determinar os intervalos onde a concavidade está para cima e onde ela está para baixo. Como  $f''(x) = 6x$ , temos que  $f'' > 0$  no intervalo  $(0, 2)$  e que  $f'' < 0$  no intervalo  $(-2, 0)$ . Portanto,  $f$  possui concavidade para cima no intervalo  $(0, 2)$  e concavidade para baixo no intervalo  $(-2, 0)$ , como ilustrado pela figura (4.7).

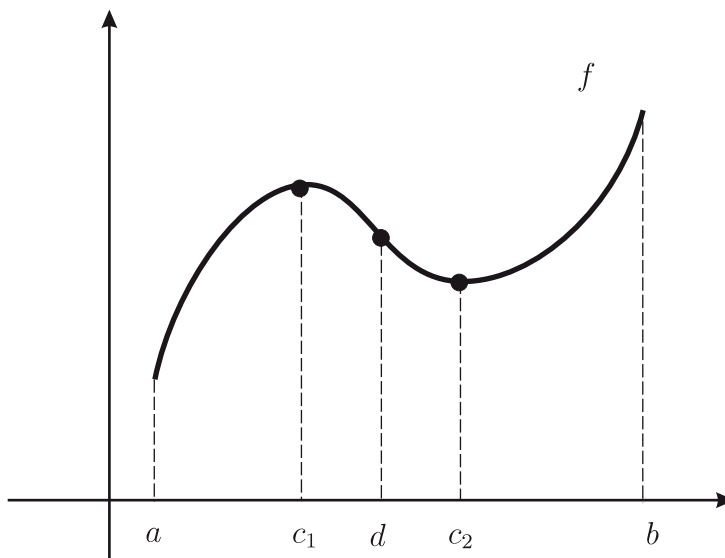


Figura 4.10: Pontos notáveis no gráfico de  $f$ .

Da noção de crescimento e concavidade do gráfico de  $f$ , surgem dois tipos de pontos notáveis no interior de seu domínio, ilustrados pela Figura 4.10

- (1) os *pontos de extremo local*, onde ocorrem mudança de crescimento,
- (2) os *pontos de inflexão*, onde ocorrem mudança na concavidade.

Vamos agora justificar a nomenclatura *ponto de extremo local*. Suponha, por exemplo, que  $f$  é crescente num intervalo  $(a, c_1]$  à esquerda de  $c_1$  e que  $f$  é decrescente num intervalo  $[c_1, d)$  à direita de  $c_1$ , como ilustrado pela Figura 4.10. Temos que  $c_1$  é um ponto de extremo local e, claramente, temos que  $f(c_1)$  é o valor máximo de  $f$  restrita ao intervalo  $(a, d)$  e, por isso,  $c_1$  é chamado de *ponto de máximo local* de  $f$ . Por outro lado, considere  $c_2$  um ponto de extremo local tal que  $f$  é decrescente num intervalo à esquerda de  $c_2$  e é crescente num intervalo à direita de  $c_2$ , como ilustrado pela Figura 4.10. Então obtemos que  $c_2$  é ponto de mínimo de  $f$  restrita a um intervalo ao redor de  $c_2$  e, por isso, chamado de *ponto de mínimo local* de  $f$ . Em ambos os casos, um ponto de extremo local é um ponto de extremo de  $f$  restrita a um intervalo ao redor desse ponto. Note que nem todo ponto de extremo local de  $f$  é um ponto de extremo de  $f$ , como mostra a Figura 4.10, onde os pontos extremos estão na fronteira do domínio de  $f$ .

Lembramos que um ponto crítico de  $f$  é um ponto onde a derivada de  $f$  se anula. Um ponto  $d$  onde

$$f''(d) = 0$$

é denominado *ponto degenerado* de  $f$ .

**Proposição 4.10:** *Seja  $f$  uma função cuja derivada segunda  $f''$  é contínua num intervalo aberto contendo  $c \in \mathbb{R}$ . Temos então que*

(A) *Se  $c$  é um ponto de extremo local, então  $c$  é um ponto crítico, ou seja*

$$f'(c) = 0$$

(B) *Se  $d$  é um ponto de inflexão, então  $d$  é um ponto degenerado, ou seja*

$$f''(d) = 0$$

**Prova:**

(A) Na discussão acima, vimos que um ponto de extremo local de  $f$  é um ponto de extremo de  $f$  no interior do domínio. Este item segue então da Proposição 4.1.



- (B) Seja  $d$  um ponto de inflexão. Suponha que  $f''(d) < 0$ . Pela continuidade de  $f''$ , teríamos que  $f'' < 0$  num intervalo ao redor de  $d$ . Pela Proposição 4.9, a concavidade estaria para baixo nesse intervalo, o que não acontece. Por outro lado, suponha que  $f''(d) > 0$ . Novamente pela continuidade de  $f''$ , teríamos que  $f'' > 0$  num intervalo ao redor de  $d$ . Pela Proposição 4.9, a concavidade estaria para cima nesse intervalo, o que também não acontece. Como  $f''(d)$  não é nem negativo, nem positivo, segue  $f''(d) = 0$ .

□

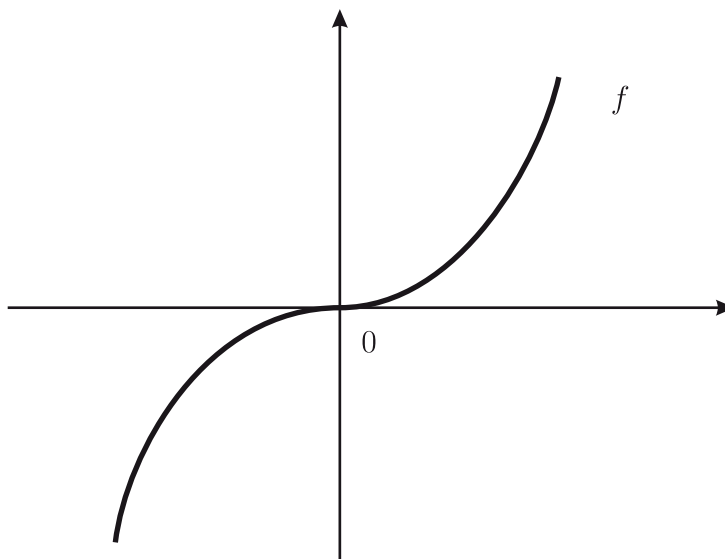


Figura 4.11: A origem é um ponto crítico que não é ponto extremo local.

A Proposição anterior mostra que todo ponto de extremo local é um ponto crítico. Mas a recíproca não é verdadeira, como ilustra o seguinte exemplo. Seja  $f(x) = x^3$ , onde  $x \in [-1, 1]$ . Temos que  $x = 0$  é ponto crítico de  $f$ , pois  $f'(x) = 3x^2$ , mas claramente ele não é um ponto de extremo local de  $f$ , como mostra a Figura 4.11. De fato, como  $f''(x) = 6x$ , é positivo à direita de  $x = 0$  e negativo à sua esquerda, segue que  $x = 0$  é ponto de inflexão. Um ponto crítico de  $f$  que é também ponto de inflexão é denominado *ponto de sela*.

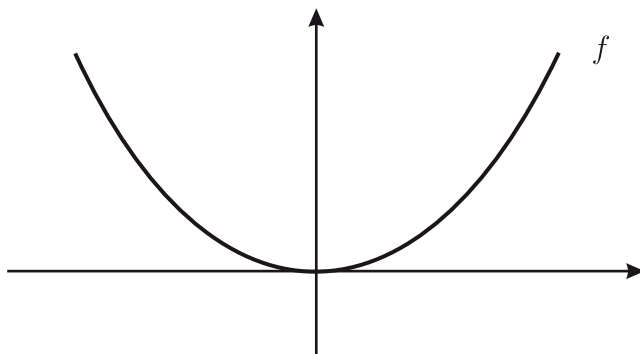


Figura 4.12: A origem é um ponto degenerado que não é ponto de inflexão.

A Proposição anterior também mostra que todo ponto de inflexão é um ponto degenerado. Mas a recíproca não é verdadeira, como ilustra o seguinte exemplo. Seja  $f(x) = x^4$ , onde  $x \in [-1, 1]$ . Temos que  $x = 0$  é ponto degenerado de  $f$ , pois  $f''(x) = 12x^2$ . Mas claramente ele não é um ponto de inflexão de  $f$ , como mostra a Figura 4.12.

Agora consideramos o denominado *teste da derivada segunda*, que relaciona o sinal da derivada segunda aos pontos de extremo local.

**Corolário 4.11:** *Seja  $f$  uma função cuja derivada segunda  $f''$  é contínua num intervalo aberto contendo  $c \in \mathbb{R}$ , um ponto crítico de  $f$ . Temos então que*

(A) *se  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$  e*

(B) *se  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é ponto de máximo local  $f$ .*

*Em particular, um ponto crítico não-degenerado é um extremo local.*

**Prova:**

(A) Como  $f''$  é contínua e  $f''(c) > 0$ , temos que  $f'' > 0$  num intervalo aberto contendo  $c$ . Pela Proposição 4.9, temos que a concavidade da  $f$  é voltada para cima nesse intervalo. Como  $c$  é ponto crítico de  $f$ , temos que  $f'(c) = 0$ , o que mostra que  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$ , como ilustrado pela Figura 4.13.

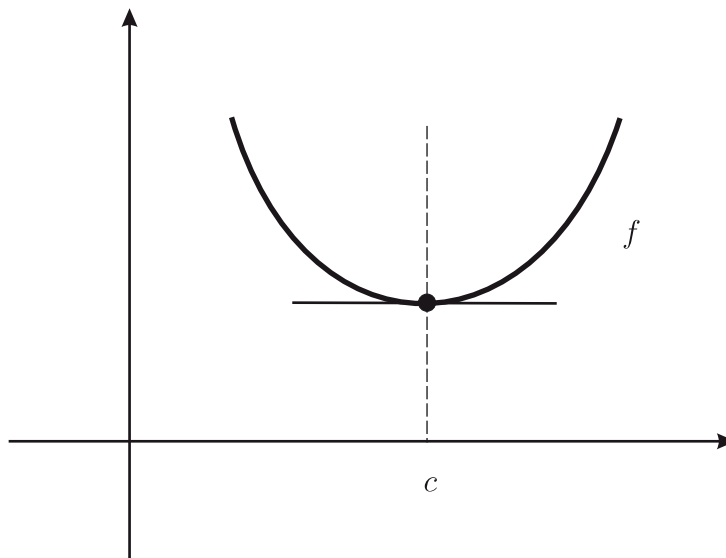


Figura 4.13: Teste da derivada segunda.

(B) A demonstração deste item é análoga a do item anterior e é deixada como exercício.

□

Vamos considerar o formato do gráfico da função seno no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , como ilustrado pela Figura 4.14. Como  $\text{sen}' = \text{cos}$  e  $\text{sen}'' = -\text{sen}$ , temos que o formato do gráfico da função seno possui quatro intervalos com comportamentos qualitativamente distintos. O primeiro é o intervalo  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ , onde a função é decrescente com concavidade para cima, uma vez que  $\text{sen}' < 0$  e  $\text{sen}'' > 0$ . O segundo intervalo é  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , onde a função passa a ser crescente e a concavidade continua para cima, uma vez que a derivada primeira mudou de sinal,  $\text{sen}' > 0$ , enquanto a derivada segunda manteve o mesmo sinal,  $\text{sen}'' > 0$ . No terceiro intervalo,  $(0, \frac{\pi}{2})$ , é o sinal da derivada segunda que muda,  $\text{sen}'' < 0$ , enquanto o sinal da derivada primeira se mantém,  $\text{sen}' > 0$ . Nesse intervalo, a função continua crescendo, mas agora com concavidade para baixo. No quarto e último intervalo,  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , é a derivada primeira que muda de sinal,  $\text{sen}' < 0$ , enquanto o sinal da derivada segunda se mantém,  $\text{sen}'' < 0$ . Nesse intervalo, a função passa a decrescer, mantendo a

concauidade para baixo.

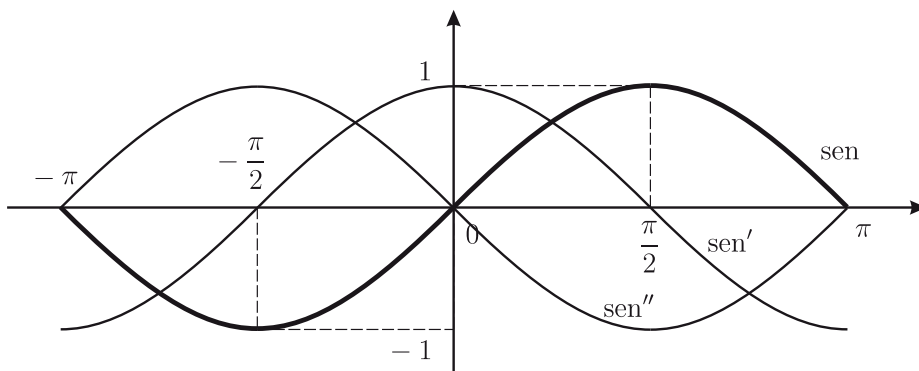


Figura 4.14: A função seno e suas derivadas em  $[-\pi, \pi]$ .

É importante notar que a mudança de concavidade coincide com a mudanças de sinal da função pelo fato de que  $\text{sen}'' = -\text{sen}$ . Portanto, o ponto de inflexão coincide com a raiz da função.

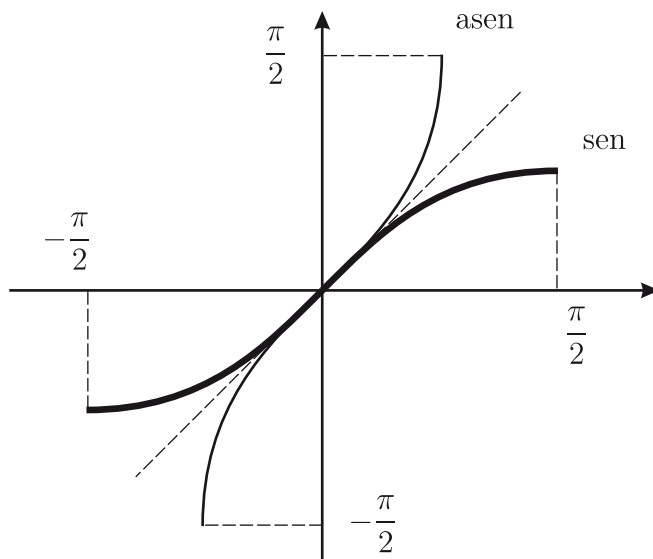


Figura 4.15: Função seno e sua inversa arco-seno.

Vamos agora determinar o formato do gráfico da função inversa do seno no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , a função arco-seno. No caso da função  $\text{asen} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que

$$\text{asen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \text{asen}''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Logo,  $\text{asen}$  é crescente em  $(-1, 1)$ , uma vez que  $\text{asen}' > 0$  nesse intervalo. Além disso, temos que  $\text{asen}$  possui concavidade para baixo em  $(-1, 0)$ , pois  $\text{asen}'' < 0$  nesse intervalo, e possui concavidade para cima em  $(0, 1)$ , pois  $\text{asen}'' > 0$  nesse intervalo. O esboço do gráfico da função  $\text{asen}$  é apresentado na Figura 4.15 com a linha mais fina. Observe que esse esboço é consistente com o fato do gráfico do arco-seno ser a reflexão em relação à bissetriz do gráfico do seno, que é apresentado na Figura 4.15 com a linha mais grossa.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

4.2.1 Considere a função  $f(x) = x^3 - 3x$

(i) Além de  $x = 0$ , suas outras raízes são

(a) não existem   (b)  $-\sqrt{3}$    (c)  $\sqrt{3}$    (d)  $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

(ii) Positiva em

(a) nenhum lugar   (b)  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$    (c)  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$    (d)  $(\sqrt{3}, \infty)$

(iii) Seus pontos críticos são

(a) não existem   (b) 0   (c)  $-1, 0, 1$    (d)  $-1, 1$

(iv) Crescimento em

(a) nenhum lugar   (b)  $(-\infty, 0)$    (c)  $(-1, 1)$    (d)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(v) Seus pontos degenerados são

(a) não existem   (b) 0   (c)  $-1, 0, 1$    (d)  $-1, 1$

(vi) Concavidade para baixo em

(a) nenhum lugar   (b)  $(-\infty, 0)$    (c)  $(-1, 1)$    (d)  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

4.2.2 Considere a função  $s(t) = -2t^3 + 6t + 4$

(i) Além de  $t = 2$ , suas outras raízes são

(a) não existem   (b) 1   (c)  $-1$    (d)  $-1, 1$

- (ii) Positiva em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(+2, \infty)$  **(c)**  $(-\infty, 2)$  **(d)**  $(-1, 2)$
- (iii) Seus pontos críticos são  
**(a)** não existem **(b)** 1 **(c)**  $-1$  **(d)**  $-1, 1$
- (iv) Crescimento em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(-1, \infty)$  **(c)**  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  **(d)**  $(-1, 1)$
- (v) Seus pontos degenerados são  
**(a)** não existem **(b)** 0 **(c)**  $-1, 0$  **(d)**  $-1, 0, 1$
- (vi) Concavidade para baixo em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(0, \infty)$  **(c)**  $(-1, 0)$  **(d)**  $(0, 1)$

4.2.3 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

- (i) Suas raízes são  
**(a)** não existem **(b)**  $-1$  **(c)** 1 **(d)**  $-1, 1$
- (ii) Positiva em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $\mathbb{R}$  **(c)**  $(-\infty, -1)$  **(d)**  $(1, \infty)$
- (iii) Seus pontos críticos são  
**(a)** não existem **(b)**  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$  **(c)** 0 **(d)**  $-1$
- (iv) Crescimento em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(-\infty, 0)$  **(c)**  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  **(d)**  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
- (v) Seus pontos degenerados são  
**(a)** não existem **(b)**  $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$  **(c)** 0 **(d)**  $-1$
- (vi) Concavidade para baixo em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(-\infty, 0)$  **(c)**  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  **(d)**  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$

4.2.4 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

- (i) Suas raízes são  
**(a)** não existem **(b)** 0 **(c)**  $-1, 1$  **(d)**  $-1, 0, 1$
- (ii) Positiva em  
**(a)** nenhum lugar **(b)**  $(0, \infty)$  **(c)**  $(-1, 0)$  **(d)**  $(-1, 1)$

- (iii) Seus pontos críticos são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $-1, 1$  (d)  $-1, 0, 1$
- (iv) Crescimento em  
 (a) nenhum lugar (b)  $(0, \infty)$  (c)  $(-1, 0)$  (d)  $(-1, 1)$
- (v) Seus pontos degenerados são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$  (d)  $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$
- (vi) Concavidade para baixo em  
 (a) nenhum lugar (b)  $(-\infty, 0)$  (c)  $(\sqrt{3}, \infty)$  (d)  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

4.2.5 Considere a função  $s(t) = te^{-2t}$ .

- (i) Suas raízes são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $0, \frac{1}{2}$
- (ii) Positiva em  
 (a) nenhum lugar (b)  $(0, \frac{1}{2})$  (c)  $(-\infty, \frac{1}{2})$  (d)  $(0, \infty)$
- (iii) Seus pontos críticos são  
 (a) não existem (b) 0 (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $0, \frac{1}{2}$
- (iv) Crescimento em  
 (a) nenhum lugar (b)  $(0, \frac{1}{2})$  (c)  $(-\infty, \frac{1}{2})$  (d)  $(0, \infty)$
- (v) Seus pontos degenerados são  
 (a) não existem (b) 1 (c) 0 (d)  $0, 1$
- (vi) Concavidade para baixo em  
 (a) nenhum lugar (b)  $(-\infty, 1)$  (c)  $(0, \infty)$  (d)  $(0, 1)$

### 4.3 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Nesta seção, vamos analisar o denominado *comportamento assintótico* de uma função, que é a propriedade do seu gráfico se aproximar de retas, que são então denominadas *assíntotas*. Por exemplo, o gráfico da função  $f(x) = 1/x$  se aproxima do eixo horizontal ( $y = 0$ ), a medida que  $x$  cresce, como ilustrado pela Figura 4.16. De maneira semelhante, o gráfico de  $f$  também se aproxima do eixo horizontal, a medida que  $x$  se torna cada vez mais negativo. Em ambos os casos, denominamos a reta  $y = 0$  de *assíntota horizontal*. Por

outra lado, a medida que  $x$  se aproxima da origem pela direita, o gráfico de  $f$  sobe, aproximando-se do eixo vertical ( $x = 0$ ), como ilustrado pela Figura 4.16. Quando  $x$  se aproxima da origem pela esquerda, o gráfico de  $f$  desce e também se aproxima do eixo vertical. Nesses dois casos, denominamos a reta  $x = 0$  de *assíntota vertical*.

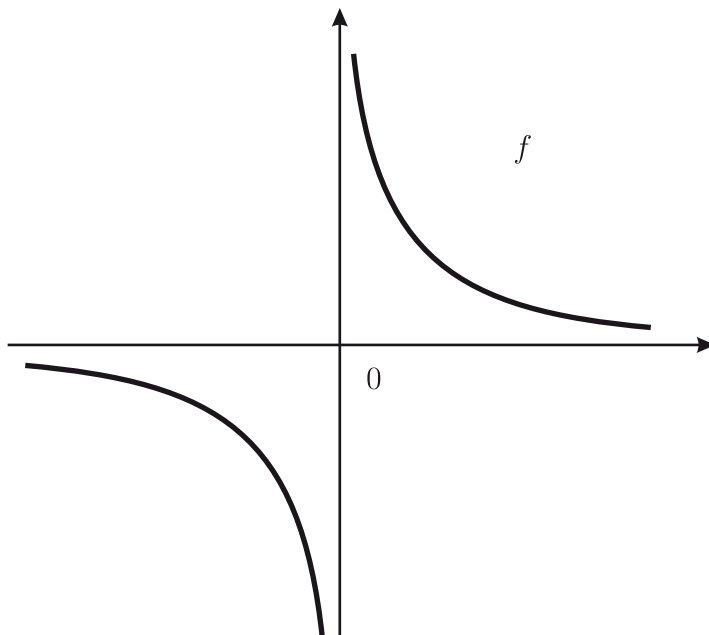


Figura 4.16: Eixos coordenados são assíntotas da função  $f$ .

## LIMITE INFINITO DE SEQUÊNCIAS

Para tornar preciso o conceito do gráfico de uma da função se aproximar de uma dada reta, devemos introduzir os conceitos de *limite infinito* e também de *limite no infinito*. Assim como no conceito de usual de limites, primeiro consideramos limites de seqüências. De maneira intuitiva, uma seqüência  $a_n$  tende para o infinito se ela fica cada vez maior, a medida que o tempo passa. De maneira precisa, dado um raio  $R > 0$ , deve existir um passo  $n(R)$ , denominado *tempo de espera*, de modo que

$$n \geq n(R) \implies R < a_n$$



Neste caso, dizemos que  $a_n$  se aproxima de mais infinito e denotamos isso por  $a_n \rightarrow \infty$ . Por exemplo, consideremos a função

$$n(R) = \text{primeiro natural} > R$$

onde  $R > 0$ . A tabela abaixo apresenta os valores de  $n(R)$  para alguns valores de  $R > 0$ .

$R$	$n(R)$
$\pi$	4
$10\pi$	32
$100\pi$	315

Temos que essa é uma função de aproximação da *sequência dos números naturais*, onde  $a_n = n$ , pois de fato

$$n \geq n(R) \quad \Rightarrow \quad R < n,$$

como ilustra a Figura 4.17.

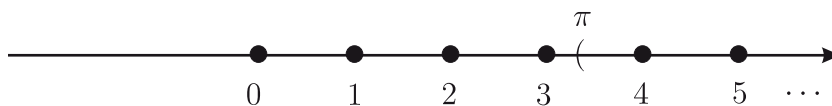


Figura 4.17: Sequência dos números naturais.

Por outro lado, dizemos que  $b_n$  se aproxima de menos infinito e denotamos isso por  $b_n \rightarrow -\infty$ , quando  $-b_n \rightarrow \infty$ . Temos então que a *sequência dos números inteiros negativos*, onde  $b_n = -n$ , se aproxima de menos infinito, como ilustra a Figura 4.18.

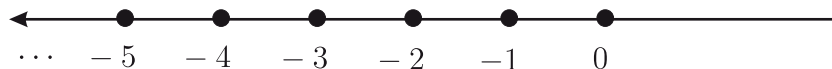


Figura 4.18: Sequência dos números inteiros negativos.

O resultado seguinte mostra a relação entre sequências que se aproximam da origem com sequências que se aproximam de mais ou de menos infinito.

**Proposição 4.12:** Temos que

$$(A) \text{ Se } a_n \rightarrow \infty, \text{ então } \frac{1}{a_n} \rightarrow 0.$$

$$(B) \text{ Se } a_n \downarrow 0, \text{ então } \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty.$$

$$(C) \text{ Se } a_n \rightarrow \infty \text{ e } a_n \leq b_n, \text{ então } b_n \rightarrow \infty.$$

**Prova:** Para o item (A), escolhendo  $R = 1/\varepsilon$ , temos que

$$n \geq n_a(1/\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < a_n.$$

Definindo  $n(\varepsilon) = n_a(1/\varepsilon)$ , temos que

$$n \geq n(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

Para o item (B), escolhendo  $\varepsilon = 1/R$ , temos que

$$n \geq n_a(1/R) \quad \Rightarrow \quad 0 < a_n < \frac{1}{R}.$$

Definindo  $n(R) = n_a(1/R)$ , temos que

$$n \geq n(R) \quad \Rightarrow \quad R < \frac{1}{a_n}.$$

Finalmente para o item (C), escolhendo  $n_b(R) = n_a(R)$ , temos que

$$n \geq n_b(R) \quad \Rightarrow \quad R < a_n \leq b_n.$$

□

## ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Vamos agora definir o conceito preciso de limite de função associado a assíntotas horizontais. Suponha que o domínio de uma dada função  $f$  contenha

um intervalo da forma  $(a, \infty)$ . O *limite de  $f$  em mais infinito*, quando existe, é o número real denotado por

$$H^+ = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

tal que se  $x_n$  é uma sequência de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \rightarrow \infty$ , então a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow H^+$ . Quando  $H^+$  é finito, dizemos que a reta  $y = H^+$  é uma *assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  pela direita*, como ilustra a Figura 4.19. De modo análogo, definimos o conceito de *limite de  $f$  em menos infinito*, que é denotado por

$$H^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Quando  $H^-$  é finito, dizemos que a reta  $y = H^-$  é uma *assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  pela esquerda*, como ilustra a Figura 4.19.

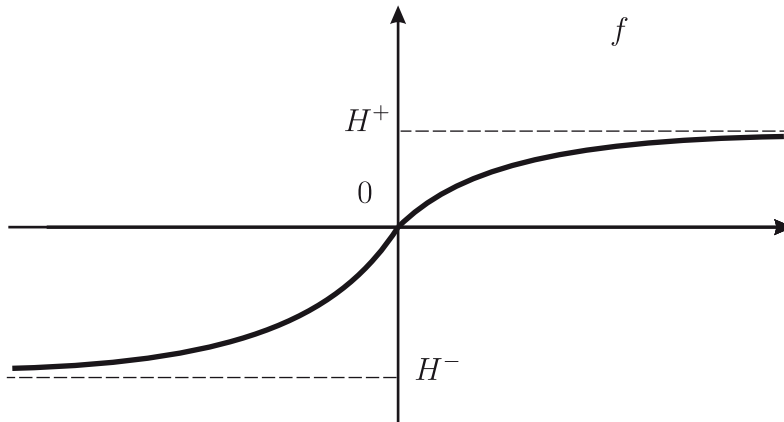


Figura 4.19: Assíntotas horizontais  $y = H^+$  e  $y = H^-$ .

As regras do limite da soma, do produto e do quociente são também válidas para limites de função no infinito, sendo que as demonstrações de tais propriedades são idênticas às demonstrações apresentadas no caso de limite de função num dado ponto. Além disso, temos o seguinte resultado utilizado para se detectar assíntotas horizontais.

**Proposição 4.13:** Se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

**Prova:** Se  $x_n \rightarrow \pm\infty$ , então  $f(x_n) \rightarrow \infty$  e, pela Proposição 4.12, segue que

$$\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow 0,$$

concluindo a demonstração. □

Desse modo, pela Proposição 4.13, segue que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

como ilustra a a Figura 4.16), uma vez que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$ .

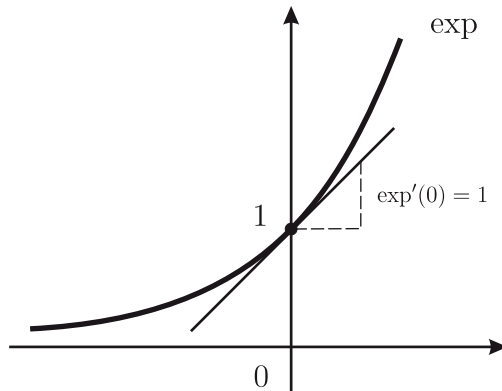


Figura 4.20: Esboço do gráfico da exponencial.

Podemos então determinar o formato do gráfico da função exponencial. Como

$$\exp'' = \exp' = \exp > 0$$

temos que  $\exp$  é crescente com concavidade para cima. Pela Proposição 2.12, temos que  $1 + x \leq \exp(x)$ , para todo  $x > 0$ . Isso mostra, pela Proposição 4.12, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Pela Proposição 4.13, segue então que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

O esboço do gráfico da função  $\exp$  é apresentado na Figura 4.20, onde também utilizamos o fato de que  $\exp(0) = 1$  e que  $\exp'(0) = 1$ .

## ASSÍNTOTAS VERTICAIS

Podemos agora definir o conceito preciso de limite de função associado a assíntotas verticais. Seja  $v \in \mathbb{R}$  um ponto limite de uma dada função  $f$ . O *limite de  $f$  em  $v$  é mais infinito*, quando para toda sequência  $x_n$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \neq v$  e também que  $x_n \rightarrow v$ , temos que a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Neste caso, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow v} f(x) = \infty$$

De maneira análoga, o *limite lateral esquerdo (ou direito) de  $f$  em  $v$  é mais infinito*, quando para toda sequência  $x_n$  de pontos no domínio  $\text{dom}(f)$  tal que  $x_n \uparrow v$  (ou  $x_n \downarrow v$ ), temos que a sequência  $(f(x_n))$  das suas imagens é tal que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ .

O *limite (ou os limites laterais) de  $f$  em  $v$  é menos infinito* se o limite (ou os limites laterais) de  $-f$  em  $v$  é mais infinito. Neste caso, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow v} f(x) = -\infty$$

Quando o limite (ou os limites laterais) de  $f$  em  $v$  é mais ou menos infinito, dizemos que  $v$  é *um ponto vertical de  $f$*  e que a reta  $x = v$  é uma *assíntota vertical ao gráfico de  $f$* , como ilustram as Figuras 4.16 e 4.21.

O resultado seguinte é utilizado para se detectar assíntotas verticais.

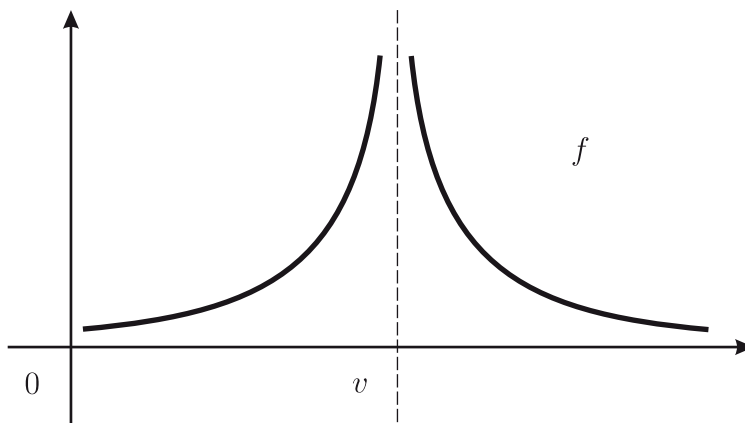


Figura 4.21: Assíntota vertical em  $x = v$ .

**Proposição 4.14:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $v \in \mathbb{R}$  tais que  $f(v) \neq 0$  e  $g(v) = 0$ . Temos então que*

$$(A) \text{ se } \pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ para } x < v, \text{ então } \lim_{x \uparrow v} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

$$(B) \text{ se } \pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ para } x > v, \text{ então } \lim_{x \downarrow v} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty.$$

**Prova:** Vamos demonstrar apenas o item (A), uma vez que a demonstração do item (B) é semelhante e pode ser deixada como exercício. Pela regra do quociente, temos que

$$\lim_{x \uparrow v} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(v)}{f(v)} = 0.$$

Caso  $\pm \frac{f(x)}{g(x)} > 0$  e  $x_n \uparrow v$ , definindo

$$a_n = \pm \frac{g(x_n)}{f(x_n)},$$

temos que

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad a_n > 0.$$

Pela Proposição 4.12, segue que

$$\pm \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty,$$

o que mostra que

$$\lim_{x \uparrow v} \pm \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

concluindo a demonstração.  $\square$

Desse modo, temos que

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

como ilustra a Figura 4.16, uma vez que  $1/x > 0$  em  $(0, \infty)$  e que  $1/x < 0$  em  $(-\infty, 0)$ .

Valem também as seguintes propriedades para o limite infinito da soma e do produto de funções.

**Proposição 4.15:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções reais. Se  $f$  é contínua em  $v$  e*

$$\lim_{x \square v} g(x) = \pm \infty,$$

então

$$\lim_{x \square v} f(x) + g(x) = \pm \infty,$$

onde  $\square$  pode ser substituído, de maneira uniforme, por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ .

Podemos então determinar o formato do gráfico da função  $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Como

$$\text{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad \text{e} \quad \text{tg}''(x) = 2 \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)^3}.$$

Logo,  $\text{tg}$  é crescente em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , uma vez que  $\text{tg}' > 0$  nesse intervalo. Além disso, temos que  $\text{tg}$  possui concavidade para baixo em  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , pois  $\text{tg}'' < 0$  nesse intervalo, e possui concavidade para cima em  $(0, \frac{\pi}{2})$ , pois  $\text{tg}'' > 0$  nesse intervalo. Além disso, temos que a reta  $x = \frac{\pi}{2}$  e a reta  $x = -\frac{\pi}{2}$  são assíntotas verticais do gráfico de  $\text{tg}$ . Como

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad \text{sen}(\pi/2) = 1 \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2) = 0,$$

pela Proposição 4.14, temos que

$$\lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \infty,$$

uma vez que  $\operatorname{tg} < 0$  em  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  e que  $\operatorname{tg} > 0$  em  $(0, \frac{\pi}{2})$ . O esboço do gráfico da função  $\operatorname{tg}$  é apresentado na Figura 4.22, onde também utilizamos o fato de que  $\operatorname{tg}(0) = 0$ .

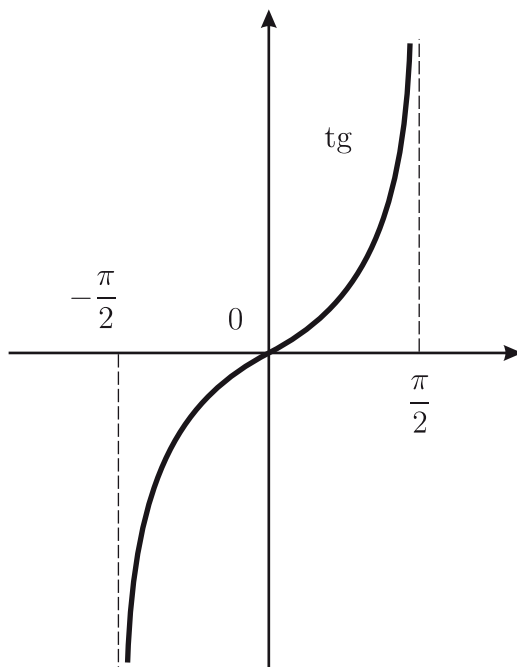


Figura 4.22: Esboço do gráfico da tangente.

## INDETERMINAÇÕES DO TIPO INFINITO SOBRE INFINITO

Encerramos esta seção, apresentando a versão geral da *Regra de L'Hospital* para o cálculo de limites indeterminados, que inclui *indeterminações do tipo infinito sobre infinito*.



**Proposição 4.16:** Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis tais que

$$\lim_{x \square a} f(x) = L = \lim_{x \square a} g(x)$$

então

$$\lim_{x \square a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \square a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(4.2)

caso o segundo limite exista, onde pode haver as seguintes substituições, de maneira uniforme:

$\square$  por  $\rightarrow$ , por  $\uparrow$  ou por  $\downarrow$ ,

$L$  por  $0$ , por  $\infty$  ou por  $-\infty$  e

$a$  por  $\infty$ , por  $-\infty$  ou por um número real.

**Prova:** A regra já foi demonstrada no caso em que  $L = 0$  e  $a$  é um número real. Se  $L = 0$  e  $a = \infty$ , fazendo a mudança de variáveis  $x = 1/y$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} \\ &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{(f(1/y))'}{(g(1/y))'} \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{y \downarrow 0} f(1/y) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \downarrow 0} g(1/y) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

A demonstração do caso em que  $L = \pm\infty$  é mais delicada. Vamos supor, sem demonstrar, que o primeiro limite da equação (4.2) existe, quando o segundo limite existe. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1/g(x))'}{(1/f(x))'}\end{aligned}$$

uma vez que, pela Proposição 4.13,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-g'(x)/g(x)^2}{-f'(x)/f(x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2.\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{\left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

□

Apresentamos agora um esboço da função

$$s(t) = -te^{-t}$$

que, como veremos no próximo capítulo, descreve a posição instantânea de um sistema massa-mola na presença de um amortecedor. Temos que

$$v(t) = -e^{-t}(1-t) \quad \text{e} \quad a(t) = e^{-t}(2-t).$$

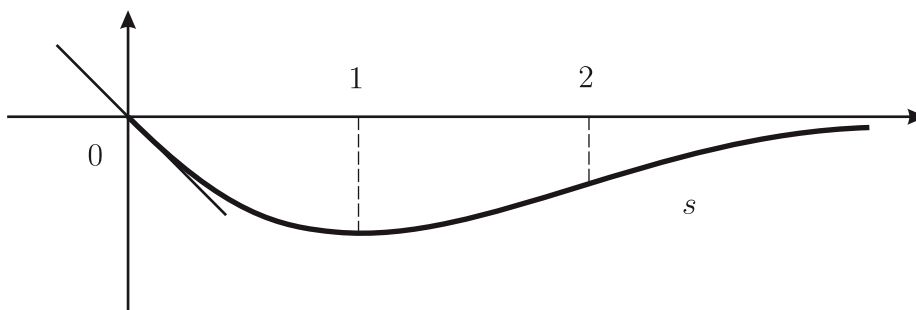


Figura 4.23: Esboço do gráfico da posição instantânea.

Logo,  $s' < 0$  no intervalo  $(0, 1)$  e  $s' > 0$  no intervalo  $(1, \infty)$ , o que mostra que  $s$  é decrescente em  $(0, 1)$  e é crescente  $(1, \infty)$ . Além disso,  $s'' > 0$  no intervalo  $(0, 2)$  e  $s'' < 0$  no intervalo  $(2, \infty)$ , o que mostra que  $s$  possui concavidade para cima em  $(0, 2)$  e possui concavidade para baixo em  $(2, \infty)$ . O único ponto crítico é  $t = 1$  e o único ponto de inflexão é  $t = 2$ . Não há assíntotas verticais, pois  $s$  é contínua em todo  $[0, \infty)$ . Pela Regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^t} = 0,$$

o que mostra que a reta  $y = 0$  é uma assíntota horizontal ao gráfico da posição  $s$ . O esboço do gráfico da função  $s$  é apresentado na Figura 4.23, onde também utilizamos o fato de que  $s(0) = 0$  e que  $v(0) = -1$ .

Vamos concluir esta seção, utilizando a Regra de L'Hospital para mostrar que a função exponencial cresce *mais rápido* do que qualquer potência.

**Proposição 4.17:** Temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** A demonstração é feita por indução. Para  $n = 1$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

onde utilizamos a Regra de L'Hospital. Se a fórmula vale para  $n = m$ , vamos mostrar que vale para  $n = m + 1$ . Temos então que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m+1)x^m}{e^x} = (m+1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0,$$

onde novamente utilizamos a Regra de L'Hospital. □

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

4.3.1 Considere a função  $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = 2$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2, x = 3$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  é igual a

(a)  $+\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $-3$  (d)  $3$

(iii) Sua assíntota horizontal é

(a) nenhuma (b)  $y = 0$  (c)  $y = 1$  (d)  $y = -1$

4.3.2 Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x-3)}$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = 2$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2, x = 3$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  é igual a

(a)  $+\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $-3$  (d)  $3$

(iii) Sua assíntota horizontal é

(a) nenhuma (b)  $y = 0$  (c)  $y = 1$  (d)  $y = -1$

4.3.3 Considere a função  $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = 2$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2, x = 3$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  é igual a

(a)  $+\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $-3$  (d)  $3$

(iii) Sua assíntota horizontal é

(a) nenhuma (b)  $y = 0$  (c)  $y = 1$  (d)  $y = -1$

4.3.4 Considere a função  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = 2$  (c)  $x = 3$  (d)  $x = 2, x = 3$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  é igual a

(a)  $+\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $-3$  (d)  $3$

(iii) Sua assíntota horizontal é

(a) nenhuma (b)  $y = 0$  (c)  $y = 1$  (d)  $y = -1$

4.3.5 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{\text{sen}(x)}$ , com  $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = -\pi, x = \pi$  (c)  $x = \pi$  (d)  $x = -\pi, x = 0, x = \pi$

(ii) Os limites  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$  são, respectivamente, iguais a

(a)  $+\infty, +\infty$  (b)  $-\infty, +\infty$  (c)  $1, +\infty$  (d)  $1, -\infty$

(iii) Sua assíntota horizontal é

(a) nenhuma (b)  $y = 0$  (c)  $y = 1$  (d)  $y = -1$

4.3.6 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

(i) Suas assíntotas verticais são

(a) nenhuma (b)  $x = 0$  (c)  $x = 1$  (d)  $x = -1$

(ii) Suas assíntotas horizontais são

(a) nenhuma (b)  $y = 1$  (c)  $y = -1$  (d)  $y = -1, y = 1$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  é igual a

(a)  $+\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $1$  (d)  $-1$

## 4.4 MÉTODO DE ESBOÇO DE GRÁFICOS

Nesta seção, vamos apresentar um método de esboço do gráfico de funções cuja segunda derivada é contínua na reta toda. Cada etapa será ilustrada aplicando o método à seguinte função

$$f(x) = -xe^{-x}$$

Para determinar o esboço do gráfico nos intervalos onde  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  não mudam de sinal, vamos utilizar a tabela dada pela Figura 4.24, obtida considerando a posição em relação ao eixo das abscissas, o crescimento e a concavidade.


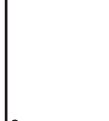

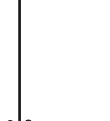



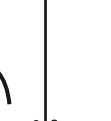
$f$	+	-	+	-	+	-	+	-
$f'$	+	+	-	-	+	+	-	-
$f''$	+	+	+	+	-	-	-	-
								

Figura 4.24: Possibilidades de sinais e esboços de gráficos.

(1) Determine os limites de  $f$  no infinito:

$$H^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad H^+ = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

No nosso exemplo, temos que

$$H^- = \infty \quad \text{e} \quad H^+ = 0$$

(2) Obtenha as expressões de

$$f'(x) \quad \text{e} \quad f''(x)$$

No nosso exemplo, temos que

$$f'(x) = (x-1)e^{-x} \quad \text{e} \quad f''(x) = (2-x)e^{-x}$$

(3) Obtenha os seguintes pontos notáveis de  $f$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Raízes:} & f(r) = 0 \\ \text{Críticos:} & f'(c) = 0 \\ \text{Degenerados:} & f''(d) = 0 \end{array}$$

No nosso exemplo,

$$\begin{array}{ll} \text{Raízes:} & -re^{-r} = 0, \quad r = 0 \\ \text{Críticos:} & (c-1)e^{-c} = 0, \quad c = 1 \\ \text{Degenerados:} & (2-d)e^{-d} = 0, \quad d = 2 \end{array}$$

(4) Determine o sinal de  $f, f', f''$ .

$f$  : uma vez que  $f$  não muda de sinal entre duas raízes consecutivas, basta determinar o sinal de  $f$  num ponto teste em cada intervalo determinado pelas raízes. No nosso exemplo,

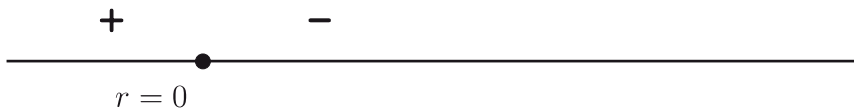
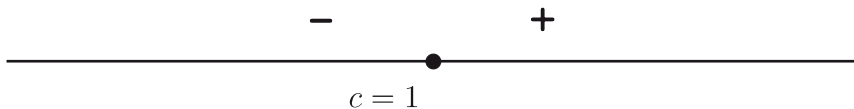
$$f(-1) = e > 0 \quad \text{e} \quad f(1) = -e^{-1} < 0$$

como ilustrado pela Figura 4.25.

$f'$  : uma vez que  $f'$  não muda de sinal entre dois pontos críticos consecutivos, basta determinar o sinal de  $f'$  num ponto teste em cada intervalo determinado pelos pontos críticos. No nosso exemplo,

$$f'(0) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f'(2) = e^{-2} > 0$$

como ilustrado pela Figura 4.26.

Figura 4.25: Sinal de  $f$ .Figura 4.26: Sinal de  $f'$ .

$f''$  : uma vez que  $f''$  não muda de sinal entre dois pontos degenerados consecutivos, basta determinar o sinal de  $f''$  num ponto teste em cada intervalo determinado pelos pontos degenerados. No nosso exemplo,

$$f''(0) = 2 > 0 \quad \text{e} \quad f''(3) = -e^{-3} < 0$$

como ilustrado pela Figura 4.27.

Figura 4.27: Sinal de  $f''$ .

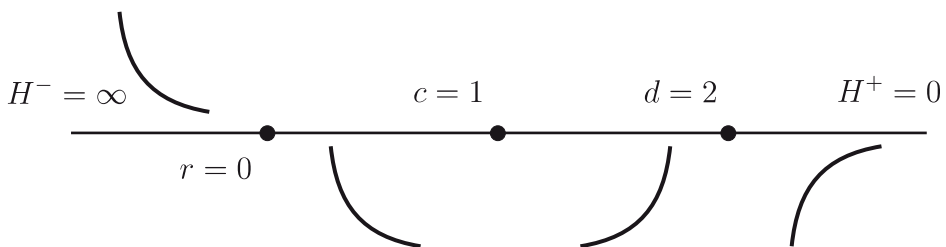
- (5) Alinhe uma acima da outra as informações sobre os sinais de  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ , obtidas no item anterior, mantendo apenas os pontos notáveis e traçando sobre cada um deles uma reta vertical. Nas colunas determinadas pelas retas verticais, coloque sobre cada linha os sinais de  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ . No nosso exemplo, obtemos a seguinte tabela, ilustrada pela Figura 4.28.
- (6) Trace o eixo das abscissas marcando simultaneamente todos os pontos notáveis obtidos no item (3) e também os limites  $H^-$  e  $H^+$  obtido no item



+	-	-	-
$r = 0$			
-	-	+	+
	$c = 1$		
+	+	+	-
		$d = 2$	

Figura 4.28: Sinais de  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ .

(1). Entre cada intervalo determinado pelos pontos notáveis, utilize as informações sobre os sinais em cada coluna da tabela do item (5) para determinar o esboço do gráfico naquele intervalo, de acordo com as possibilidades dadas pela Figura 4.24, obtida considerando a posição em relação ao eixo das abscissas, o crescimento e a concavidade. No nosso exemplo, obtemos o seguinte diagrama, ilustrado pela Figura 4.29.

Figura 4.29: Diagrama para o esboço do gráfico de  $f$ .

(7) Abaixo do diagrama do item anterior, trace um novo eixo das abscissas com todos os pontos notáveis. Com um traçado contínuo, junte os pedaços do gráfico obtidos no item anterior, com os seguintes cuidados:

- as pontas dos pedaços devem ser movimentadas para cima ou para baixo, sem cruzar o eixo das abscissas e sem mudar o crescimento e a concavidade, de modo a se unirem suavemente (sem bicos),
- o gráfico deve cruzar o eixo das abscissas exatamente nas raízes,
- o gráfico deve possuir reta tangente horizontal exatamente em cima dos pontos críticos,
- quando  $H^-$  é finito, a reta assíntota horizontal  $y = H^-$  deve ser desenhada no último intervalo à esquerda. O gráfico deve se aproximar por cima dessa reta, quando a concavidade for pra cima, ou por baixo dessa reta, quando a concavidade for pra baixo.
- quando  $H^+$  é finito, a reta assíntota horizontal  $y = H^+$  deve ser desenhada no último intervalo à direita. O gráfico deve se aproximar por cima dessa reta, quando a concavidade for pra cima, ou por baixo dessa reta, quando a concavidade for pra baixo.

É conveniente assinalar os pontos críticos desenhando um segmento de reta tangente horizontal no respectivo ponto do gráfico. No nosso exemplo, obtemos o esboço do gráfico de  $f$  ilustrado pela Figura 4.30.

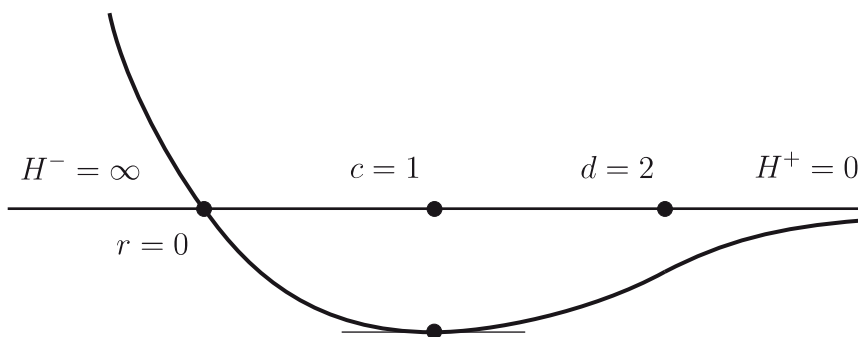


Figura 4.30: Esboço do gráfico de  $f$ .

Observamos que esse método funciona para esboçar o gráfico de funções que tem um número finito de pontos notáveis.

## FUNÇÕES COM ASSÍNTOTAS VERTICAIS

Vamos agora ampliar o método para o esboço do gráfico de funções, incluindo funções que possuam assíntotas verticais. Devemos levar em consideração as seguintes modificações.

- (A) No item (3) do método, acrescente aos pontos notáveis, os pontos verticais.
- (B) No item (4) do método, como  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  não são contínuas nos pontos verticais, elas podem mudar de sinal nesses pontos. Portanto, acrescente os pontos verticais aos respectivos pontos (ou raízes, ou críticos, ou degenerados) que determinam os intervalos onde cada uma dessas funções mantém o seu sinal.
- (C) No item (7) do método, em cada ponto vertical  $v$  desenhe a reta assíntota vertical  $x = v$ . O gráfico deve se aproximar dessa reta para cima (mais infinito), quando a concavidade for pra cima, ou para baixo (menos infinito), quando a concavidade for pra baixo.

Agora vamos aplicar o método à seguinte função

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

levando em conta as modificações acima.

- (1) Temos que

$$H^- = 1 \quad \text{e} \quad H^+ = 1$$

- (2) Temos que

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

(3) Temos que

Raízes:	$\frac{r}{r+1} = 0, \quad r = 0$
Críticos:	$\frac{1}{(c+1)^2} = 0, \quad \text{não existe } c$
Degenerados:	$\frac{-2}{(d+1)^3} = 0, \quad \text{não existe } d$
Verticais:	$v = -1$

(4) Temos que

$f :$

$f(-2) = 2 > 0,$	$f(-1/2) = -1 < 0$	e	$f(1) = 1/2 > 0$
------------------	--------------------	---	------------------

como ilustrado pela Figura 4.31.

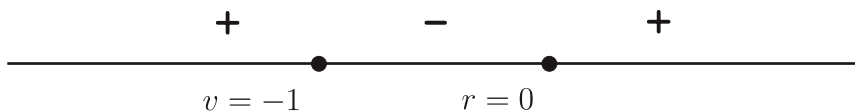


Figura 4.31: Sinal de  $f$ .

$f' :$

$f(-2) = 1 > 0$	e	$f(0) = 1 > 0$
-----------------	---	----------------

como ilustrado pela Figura 4.32.

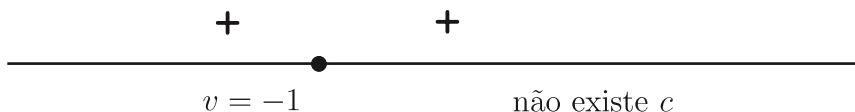


Figura 4.32: Sinal de  $f'$ .

Figura 4.33: Sinal de  $f''$ . $f'' :$ 

$$f(-2) = 2 > 0 \quad \text{e} \quad f(0) = -2 < 0$$

como ilustrado pela Figura 4.33.

(5) Obtemos a seguinte tabela, ilustrada pela Figura 4.34.

$+$		$-$		$+$
$v = -1$	•	$r = 0$	•	
$+$		$+$		$+$
$v = -1$	•		•	
$+$		$-$		$-$
$v = -1$	•		•	

Figura 4.34: Sinais de  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ .

(6) Obtemos o seguinte diagrama, ilustrado pela Figura 4.35.

(7) O esboço do gráfico de  $f$  ilustrado pela Figura 4.36.

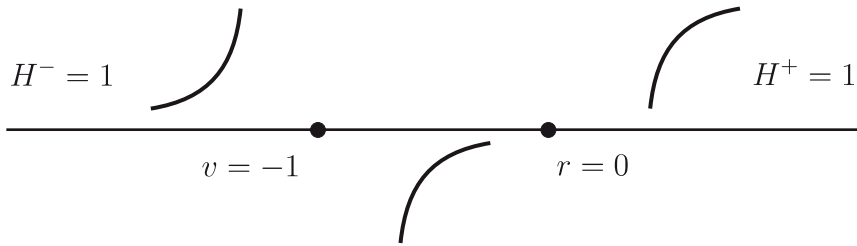


Figura 4.35: Diagrama para o esboço do gráfico de  $f$ .

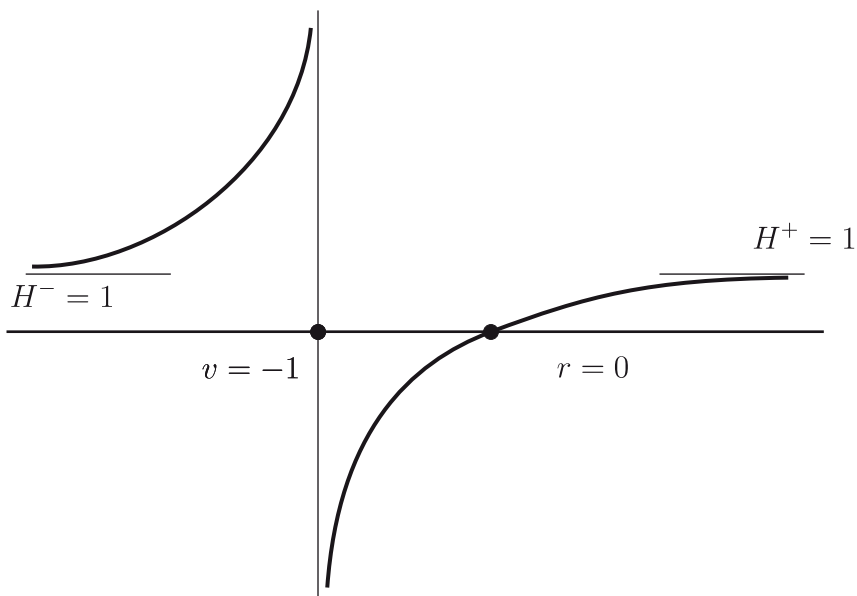


Figura 4.36: Esboço do gráfico de  $f$ .

## FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

Vamos agora completar o método para o esboço do gráfico de funções, incluindo funções definidas por partes. Devemos levar em consideração as seguintes modificações.

- (D) Aplique o método a cada expressão algébrica, restringindo a aplicação do método ao respectivo domínio de definição. No nosso exemplo, te-

mos a expressão algébrica

$$\frac{x}{x+1}$$

no intervalo  $(-\infty, 0)$ , e também a expressão

$$-xe^{-x}$$

no intervalo  $[0, \infty)$ .

(E) Verifique se, em cada ponto  $m$  onde ocorre mudança na expressão algébrica, a função  $f$  é contínua e derivável. No item (7) do método:

- Se  $f$  for descontínua em  $m$ , as pontas devem permanecer separadas. Uma bola fechada deve ser desenhada na ponta do pedaço cuja expressão algébrica está definida em  $m$ . Uma bola aberta deve ser desenhada na ponta do pedaço cuja expressão algébrica não está definida em  $m$ .
- Se  $f$  for contínua, mas não for derivável em  $m$ , as pontas sobre  $m$  devem ser unidas formando um bico.
- Se  $f$  for derivável em  $m$ , as pontas sobre  $m$  devem ser unidas suavemente.

Agora vamos aplicar o método à seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x < 0 \\ -xe^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

levando em conta as modificações acima. O único ponto onde  $f$  muda de expressão algébrica é  $m = 0$ . Nesse ponto, temos que  $f$  é contínua, mas não é derivável. Os itens de (1) a (5) já foram feitos para as duas expressões algébricas de  $f$ . Vamos então apresentar apenas os itens (6) e (7).

(6) Obtemos o seguinte diagrama, ilustrado pela Figura 4.37.

(7) O esboço do gráfico de  $f$  ilustrado pela Figura 4.38.

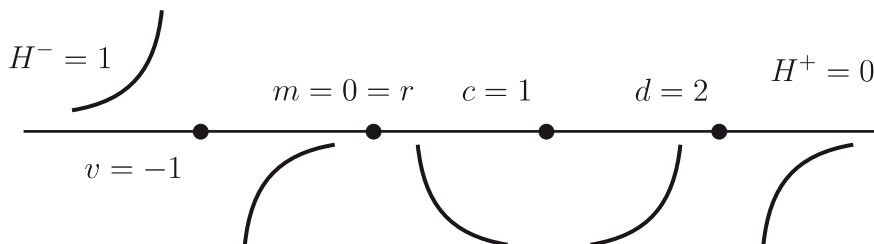


Figura 4.37: Diagrama para o esboço do gráfico de  $f$ .

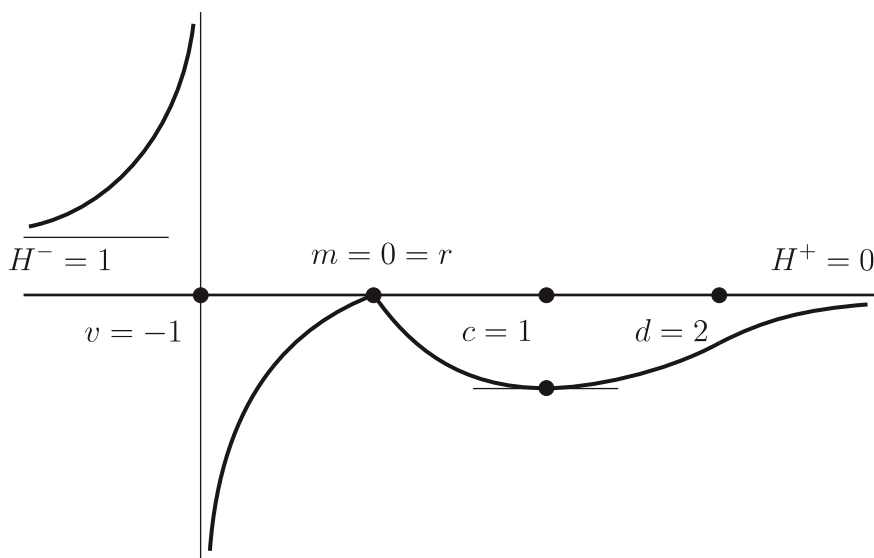


Figura 4.38: Esboço do gráfico de  $f$ .

## EXERCÍCIOS

### DE DEMONSTRAÇÃO

- 4.1 Complete a demonstração das Proposições 4.1 e 4.6.
- 4.2 Complete a demonstração das Proposições 4.8 e 4.9.
- 4.3 Complete a demonstração das Proposições 4.14 e 4.13.



## DE APLICAÇÃO

4.1 Suponha que uma bola  $B$  de massa  $m$  seja lançada verticalmente de uma posição inicial  $s_0$  e com velocidade inicial  $v_0$ . A força resultante é então  $F = P + R$ , onde  $P = -mg$  é a força peso e  $R = -bv$  é a força de resistência do ar, onde a constante  $b$  é o coeficiente de resistência do ar. Dividindo por  $m$ , a Segunda Lei de Newton  $F = ma$  equivale a

$$a(t) = -g - cv(t) \quad (*)$$

onde  $c = b/m$  é o coeficiente de resistência do ar por unidade de massa.

Nos itens a seguir, considere a função posição

$$s(t) = s_0 - \frac{g}{c}t + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-ct}}{c}\right).$$

- (i) Obtenha as expressões algébricas da velocidade  $v(t)$  e da aceleração  $a(t)$  de  $s(t)$ .
- (ii) Mostre que  $v(t)$  e  $a(t)$  obtidas no item anterior satisfazem a equação (\*).
- (iii) Suponha que  $s_0 = 0$ , que  $v_0 = g = 10$  e que  $c = \frac{1}{2}$ . Sabendo que a altura máxima é atingida quando a velocidade se anula, determine o instante quando isso ocorre e calcule a altura máxima atingida pela bola  $B$ . Utilize a aproximação dada por  $\log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,41$ .
- (iv) Suponha novamente que  $s_0 = 0$ , que  $v_0 = g = 10$ , mas que agora  $c = 0$ . Determine novamente a altura máxima atingida pela bola  $B$ , lembrando-se que, neste caso,  $s(t) = s_0 + v_0t - \frac{g}{2}t^2$  e que  $v(t) = v_0 - gt$ . Calcule a diferença entre o valor obtido neste item e o valor obtido no item anterior.

4.2 Denote por  $v(t)$  a velocidade de um corpo de massa  $m = 0,1$  kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial  $v(0) = 63$  m/s e sujeito a uma força de resistência do ar  $FR = -v(t)$ . Neste caso, usando a aproximação  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que  $v(t)$  é solução do problema de valor inicial

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{v'(t)}{1 + v(t)} = -10 \\ v(0) = 63 \end{array} \right.$$

Como ilustra os itens a seguir, o problema (\*) pode ser melhor entendido a partir do fato de que, se a derivada de uma função for idênticamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

- (i) Calcule as derivadas das funções  $\log(1 + v(t))$  e  $-10t$ .
- (ii) Pelo item anterior e a equação (\*), qual a relação entre as funções  $\log(1 + v(t))$  e  $-10t$ ?
- (iii) Use o item anterior e a condição inicial  $v(0) = 63$  para obter a expressão de  $v(t)$ .
- (iv) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima usando a aproximação  $\log(2) = 0,69$ .

4.3 Para um sistema massa-mola na ausência de atrito, temos que a energia mecânica

$$m \frac{v(t)^2}{2} + k \frac{s(t)^2}{2} = E$$

se conserva, onde  $s(t)$  e  $v(t)$  são, respectivamente, a posição e a velocidade instantâneas,  $m$  é a massa do bloco e  $k$  é a constante de Hooke. Supondo que  $m = 1$ ,  $k = 4$  e que  $E = 2$ , temos que  $s(t)$  é solução da seguinte equação

$$(*) \quad \frac{s'(t)}{\sqrt{1 - s(t)^2}} = 2$$

Como ilustra os itens a seguir, a equação (\*) pode ser melhor entendida a partir do fato de que, se a derivada de uma função for idênticamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

- (i) Calcule as derivadas das funções  $\arcsin(s(t))$  e  $2t$ .
- (ii) Pelo item anterior e a equação (\*), qual a relação entre as funções  $\arcsin(s(t))$  e  $2t$ ?
- (iii) Use o item anterior e a condição inicial  $s(0) = 1$  para obter a expressão de  $s(t)$ .
- (iv) Determine a velocidade no instante  $t = 0$ .

4.4 O mecanismo de suspensão dos automóveis consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor. Denotando por  $s(t)$  a posição

vertical de um veículo de massa  $m$  em relação a posição de equilíbrio, temos que a força da mola é dada, pela lei de Hooke, por  $F = -ks(t)$  e a força do amortecedor é dada por  $R = -bv(t)$ , onde  $v(t)$  é a velocidade instantânea e a constante  $b$  é denominada viscosidade do amortecedor. Denotando por  $a(t)$  a aceleração instantânea, pela segunda lei de Newton,

$$(*) \quad ma(t) = -ks(t) - bv(t)$$

para todo tempo  $t \geq 0$ . Suponha que  $m = 1$ ,  $b = 4$  e  $k = 4$  e considere

$$s(t) = -3te^{-2t}.$$

- (i) Calcule  $v(t)$  e  $a(t)$  e verifique que essas expressões juntamente com a expressão de  $s(t)$  realmente satisfazem a equação (\*).
- (ii) Calcule os pontos críticos de  $s(t)$  e determine os extremos locais e os intervalos de crescimento para cima e para baixo.
- (iii) Calcule os pontos degenerados de  $s(t)$  e determine os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade para cima e para baixo.
- (iv) Esboce o gráfico da função  $s(t)$ .
- (v) Refaça os itens anteriores, supondo agora que  $m = 1$ ,  $b = 3$  e  $k = 2$  e que  $s(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ .

4.5 No estudo dos fogos de artifício, suponha que  $v(t)$  seja a velocidade de uma bomba lançada verticalmente com velocidade inicial  $v(0) = 50$  m/s. Suponha ainda que a bomba tenha massa  $m = 0,1$  kg, que a aceleração da gravidade seja  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e que a força de resistência do ar  $F$  seja modelada por  $F = -0,01 v(t)$ . Nessas condições, a Segunda Lei de Newton é equivalente a

$$(*) \quad a(t) = -10 - 0,1v(t).$$

para todo tempo  $t \geq 0$ . Considere

$$v(t) = -100 + 150e^{-0,1t}.$$

- (i) Calcule  $a(t)$  e verifique que essa expressão juntamente com a expressão de  $v(t)$  realmente satisfazem a equação (\*) e a condição inicial  $v(0) = 50$ .
- (ii) Calcule os pontos críticos de  $v(t)$  e determine os extremos locais e os intervalos de crescimento para cima e para baixo.

(iii) Calcule os pontos degenerados de  $v(t)$  e determine os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(iv) Esboce o gráfico da função  $v(t)$ .

4.6 Um modelo para o estudo da velocidade  $v(t)$  de um paraquedista é supor que a força de resistência do ar seja igual a  $bv(t)^2$ , isto é, proporcional ao quadrado da velocidade. A Segunda Lei de Newton fica

$$mv'(t) = -mg + bv(t)^2.$$

Suponha que a aceleração da gravidade é  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a massa conjunta do paraquedas e do paraquedista é  $m = 70 \text{ kg}$  e que  $b = 700 \text{ kg/s}$ . Da Segunda Lei de Newton segue que

$$(*) \quad v'(t) = 10 - 10v(t)^2,$$

para todo tempo  $t \geq 0$ . Suponha que  $v(0) = -9 \text{ m/s}$  e considere

$$v(t) = \frac{8e^{-20t} + 10}{8e^{-20t} - 10}.$$

(i) Calcule  $a(t)$  e verifique que essa expressão juntamente com a expressão de  $v(t)$  realmente satisfazem a equação (\*) e a condição inicial  $v(0) = -9$ .

(ii) Calcule os pontos críticos de  $v(t)$  e determine os extremos locais e os intervalos de crescimento para cima e para baixo.

(iii) Calcule os pontos degenerados de  $v(t)$  e determine os pontos de inflexão e os intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(iv) Esboce o gráfico da função  $v(t)$ .

## INTEGRAL

## 5.1 ÁREA LÍQUIDA E VARIAÇÃO

No Capítulo 3, o conceito de derivada foi introduzido como sendo tanto a inclinação da reta tangente quanto a velocidade e a aceleração, as taxas de variação, respectivamente, do espaço e da velocidade pelo tempo. Assim como no caso da derivada, o conceito de integral surge de tanto de problemas geométricos quanto de problemas dinâmicos.

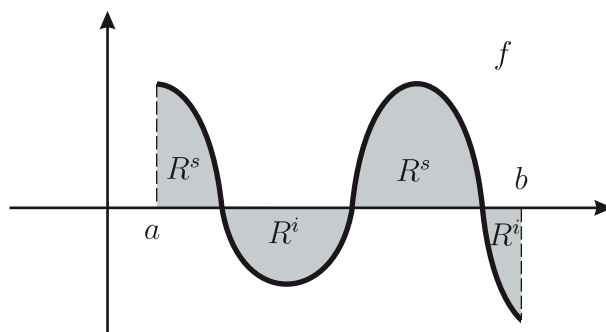


Figura 5.1: Área líquida determinada pela função  $f$ .

Seja  $f$  uma função contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , como apresentada pela Figura 5.1. Do ponto de vista geométrico, a *integral definida de  $f$  da esquerda para a direita em  $[a, b]$*  é definida por

$$\int_a^b f = A^s - A^i$$

onde  $A^s$  é a área da *região superior em  $[a, b]$*  dada por

$$R^s = \{ (x, y) : x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x) \}$$

e  $A^i$  é a área da *região inferior em  $[a, b]$*  dada por

$$R^i = \{ (x, y) : x \in [a, b] \text{ e } f(x) \leq y \leq 0 \}$$

onde ambas regiões são ilustradas pela Figura 5.1. A integral é, portanto, a *área líquida* determinada pela função  $f$  entre os pontos  $a$  e  $b$ . Quando houver possibilidade de ambiguidades com relação a qual função ou qual intervalo estamos considerando, as *áreas superior e inferior* serão denotadas por  $A_f^s[a, b]$  e  $A_f^i[a, b]$ , enquanto as regiões superior e inferior serão denotadas simplesmente por  $R_f^s[a, b]$  e  $R_f^i[a, b]$ .

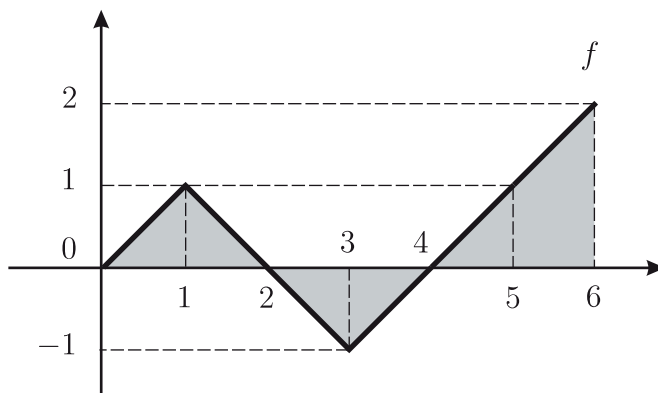


Figura 5.2: Integral definida da função poligonal  $f$ .

No exemplo a seguir, ilustrado pela Figura 5.2, onde  $f$  é uma função poligonal, sua integral entre dois valores pode ser calculada diretamente, através

de resultados elementares de geometria. Temos que

$$\int_0^3 f = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_3^6 f = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

O cálculo da integral de  $f$  de  $a = 0$  para  $b = 6$  é deixado como exercício.

Outro exemplo é ilustrado pela Figura 5.3, onde  $f(x) = x^2$ ,  $a = -1$  e  $b = 1$ .

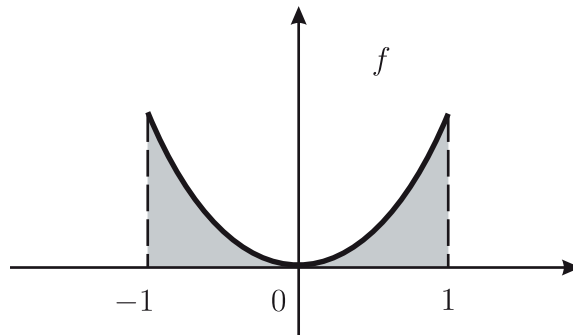


Figura 5.3: Área determinada pela parábola.

Desde os gregos, o valor dessa área já era conhecido como sendo igual a  $2/3$ . Na próxima seção, obteremos esse valor através de um dos resultados mais importantes do cálculo, que estabelece uma maneira de se calcular essa área através do uso do conceito de derivada.

## VARIAÇÕES DO ESPAÇO E DA VELOCIDADE

No Capítulo 3, vimos como obter a velocidade a partir da posição: a velocidade no tempo  $t$  é igual a inclinação da reta tangente ao gráfico da posição no ponto  $t$ . De maneira análoga, vimos como obter a aceleração a partir da velocidade. E quanto ao caminho inverso? Como obter a função posição a partir da função velocidade e, de modo similar, como obter a função velocidade a partir da função aceleração? Do ponto de vista dinâmico, o conceito de integral surgiu para responder esses problemas cinemáticos inversos.

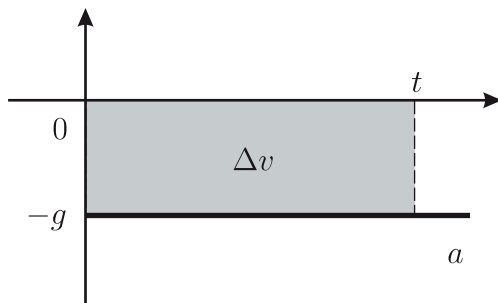


Figura 5.4: Área líquida determinada pela função aceleração.

Por exemplo, num lançamento vertical de corpo, na ausência de atrito, temos que a posição, a velocidade e a aceleração são dadas por

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}, \quad v(t) = v_0 - gt \quad \text{e} \quad a(t) = -g$$

onde  $s_0$  é a posição inicial,  $v_0$  é a velocidade inicial e  $g$  é a aceleração da gravidade local. Primeiramente, temos que

$$\int_0^t a = -gt = v(t) - v_0,$$

onde usamos a fórmula da área do retângulo na primeira igualdade (ver Figura 5.4). Segue que a integral definida da função aceleração entre os instantes 0 e  $t$  é igual a *variação da velocidade entre esses dois instantes*.

Para obter a integral definida da função velocidade entre os instantes 0 e  $t$ , primeiro consideramos o instante  $t_M = v_0/g$  no qual a velocidade se anula (ver Figura 5.5). Para  $t \leq t_M$ , temos que

$$\int_0^t v = \frac{v_0 t_M}{2} - \frac{v(t)(t_M - t)}{2},$$

onde calculamos a diferença entre a área do triângulo maior e a área do triângulo menor para obter a área do trapézio. Para  $t \geq t_M$ , temos que

$$\int_0^t v = \frac{v_0 t_M}{2} - \frac{-v(t)(t - t_M)}{2} = \frac{v_0 t_M}{2} - \frac{v(t)(t_M - t)}{2},$$



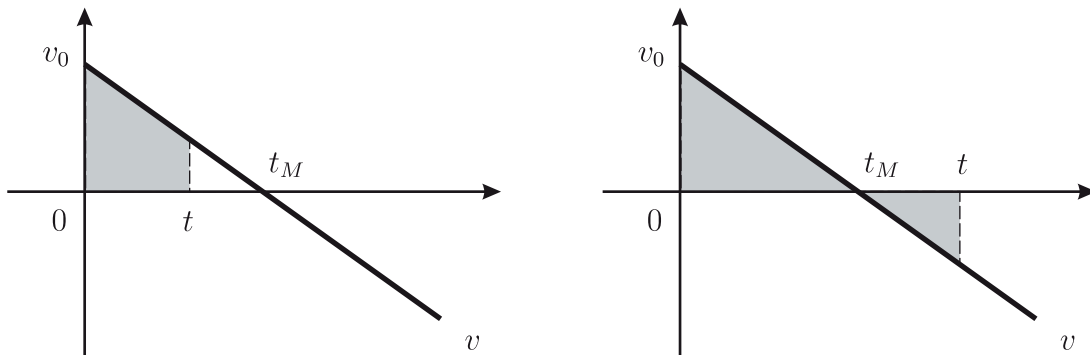


Figura 5.5: Área líquida determinada pela função velocidade.

onde calculamos a diferença entre a área do triângulo de cima e área do triângulo de baixo, que tem altura  $-v(t)$  uma vez que  $v(t)$  é negativo. Usando que  $t_0 = v_0/g$  e que  $v(t) = v_0 - gt$ , temos então que

$$\int_0^t v = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{(v_0 - gt)(v_0/g - t)}{2} = v_0 t - g \frac{t^2}{2} = s(t) - s_0.$$

Isso mostra que a integral definida da função velocidade entre os instantes 0 e  $t$  é igual a *variação da posição entre esses dois instantes*.

Na próxima seção, mostraremos que as identidades

$$\int_0^t a = v(t) - v_0 \quad \text{e} \quad \int_0^t v = s(t) - s_0$$

obtidas no exemplo acima, permanecem válidas em várias outras situações dinâmicas. Esse é um dos resultados mais importantes da história do Cálculo, e sua demonstração depende de algumas propriedades da integral definida que investigaremos a seguir.

## PROPRIEDADES DA INTEGRAL

A proposição seguinte apresenta duas propriedades fundamentais do conceito de integral, a monotonicidade e a decomponibilidade do domínio.

**Proposição 5.1:** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$ . Temos que*

(M) *se  $f \leq g$ , então*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(D) *se  $c \in [a, b]$ , então*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Prova:**

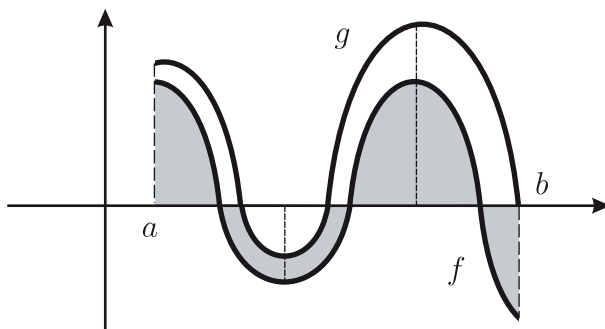


Figura 5.6: Monotonicidade da integral definida.

(M) Se  $f(x) \geq 0$ , então  $0 \leq y \leq f(x) \leq g(x)$ , o que mostra que  $R_f^s \subset R_g^s$ . Por outro lado, se  $g(x) \leq 0$ , então  $f(x) \leq g(x) \leq y \leq 0$ , o que mostra que  $R_g^i \subset R_f^i$ , como ilustrado pela Figura 5.6. Pela monotonicidade da área, temos que

$$A_f^s \leq A_g^s \quad \text{e} \quad A_g^i \leq A_f^i$$

Multiplicamos a segunda desigualdade por  $-1$ , obtemos que

$$A_f^s \leq A_g^s \quad \text{e} \quad -A_f^i \leq -A_g^i$$

o que implica que

$$\int_a^b f = A_f^s - A_f^i \leq A_g^s - A_g^i = \int_a^b g.$$

(D) Se  $c \in [a, b]$ , então

$$R^s[a, b] = R^s[a, c] \cup R^s[c, b] \quad \text{e} \quad R^i[a, b] = R^i[a, c] \cup R^i[c, b].$$

como mostra a Figura 5.7. Utilizando a aditividade da área, segue que

$$A^s[a, b] = A^s[a, c] + A^s[c, b] \quad \text{e} \quad A^i[a, b] = A^i[a, c] + A^i[c, b].$$

Utilizando a aditividade da área, obtemos que

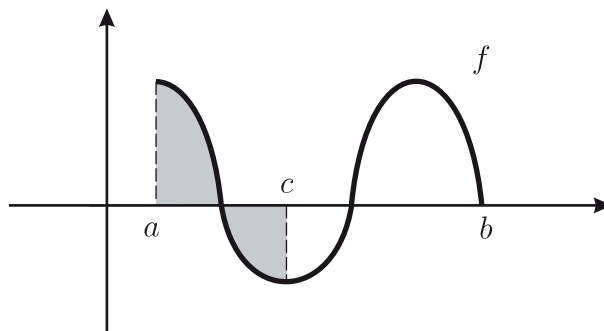


Figura 5.7: Decomponibilidade da integral definida.

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= A^s[a, b] - A^i[a, b] \\ &= (A^s[a, c] + A^s[c, b]) - (A^i[a, c] + A^i[c, b]) \\ &= (A^s[a, c] - A^i[a, c]) + (A^s[c, b] - A^i[c, b]) \\ &= \int_a^c f + \int_c^b f. \end{aligned}$$

□

A integral definida de  $f$  da direita para a esquerda em  $[a, b]$  é definida por

$$\int_b^a f = A^i - A^s$$

Ou seja, da esquerda para a direita, a integral é a área superior menos a área inferior, enquanto, da direita para a esquerda, a integral é a área inferior menos a área superior. Como exemplo, temos que

$$\int_5^2 f = 1 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_6^0 f = -2,$$

onde a função  $f$  é ilustrada pela Figura 5.2. O cálculo da integral de  $f$  de  $a = 6$  para  $b = 1$  é deixado como exercício.

Essa definição possibilita estendermos a propriedade da decomposição do domínio para quaisquer  $c \in \mathbb{R}$ , desde que as integrais estejam bem definidas.

**Corolário 5.2:** *Seja  $f$  uma função contínua. Temos que*

(D)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

desde que todas as integrais estejam bem definidas.

**Prova:** Vamos demonstrar apenas o caso em que  $a \leq b \leq c$ , sendo que o caso em que  $a \leq c \leq b$  foi demonstrado na Proposição 5.1, e a demonstração do caso em que  $c \leq a \leq b$  é similar e deixada como exercício. Utilizando a Proposição 5.1, temos que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^b f = \int_a^b f,$$

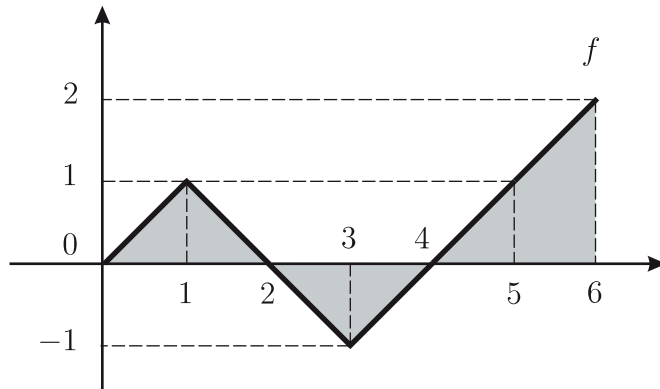
onde utilizamos o fato de que

$$\int_c^b f = -\int_b^c f.$$

□

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Considere a função poligonal ilustrada pela figura abaixo e responda os itens abaixo.



5.1.1 A integral definida  $\int_0^2 f$  é igual a

- (a) -1 (b) 2 (c) 1 (d) -2

5.1.2 A integral definida  $\int_2^4 f$  é igual a

- (a) -1 (b) 2 (c) 1 (d) -2

5.1.3 A integral definida  $\int_4^6 f$  é igual a

- (a) -1 (b) 2 (c) 1 (d) -2

5.1.4 A integral definida  $\int_0^6 f$  é igual a

- (a) -1 (b) 2 (c) 1 (d) -2

5.1.5 A integral definida  $\int_6^5 f$  é igual a

- (a) -2 (b) 0 (c)  $-\frac{1}{2}$  (d)  $-\frac{3}{2}$

5.1.6 A integral definida  $\int_5^0 f$  é igual a

- (a) -2 (b) 0 (c)  $-\frac{1}{2}$  (d)  $-\frac{3}{2}$

5.1.7 A integral definida  $\int_6^0 f$  é igual a

- (a) -2 (b) 0 (c)  $-\frac{1}{2}$  (d)  $-\frac{3}{2}$

5.1.8 A integral definida  $\int_1^3 f$  é igual a

- (a) 0   (b) -1   (c) 1   (d) 2

5.1.9 A integral definida  $\int_5^1 f$  é igual a

- (a) 0   (b) -1   (c) 1   (d) 2

## 5.2 TEOREMA FUNDAMENTAL

Vamos apresentar agora um dos resultados mais importantes do Cálculo, conhecido como *Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)*, que estabelece a ligação entre os conceitos de derivada e integral. Dada uma função contínua  $f$  e um ponto  $a \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\int_a^x f$$

é uma função de  $x$ . Por exemplo, se  $f(x) = x$  e  $a = 0$ , então, pela definição de integral definida (ver Figura 5.8), temos que

$$\int_0^x f = \frac{x^2}{2}.$$

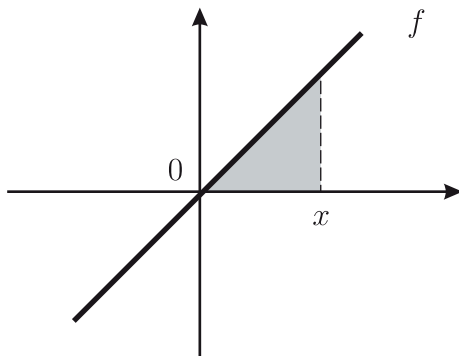


Figura 5.8: Integral de 0 a  $x$  como função de  $x$ .

**Teorema 5.3: (TFC)** Se  $f$  é uma função contínua e  $a \in \mathbb{R}$ , então

$$\left( \int_a^x f \right)' = f(x)$$

**Prova:** Denotando

$$F(x) = \int_a^x f,$$

vamos mostrar que  $F'(x \downarrow) = f(x)$ , sendo que a demonstração para o caso da derivada lateral esquerda é deixada como exercício. Temos que

$$F'(x \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde utilizamos o fato de que

$$\int_a^{x+h} f = \int_a^x f + \int_x^{x+h} f. \quad (5.3)$$

Como  $f$  é contínua, pelo Teorema 4.2, temos que existem  $m(h)$  e  $M(h)$ , respectivamente, o mínimo e o máximo da função  $f$  no intervalo  $[x, x+h]$ . Nesse intervalo, temos que  $m(h) \leq f \leq M(h)$ . Pela monotonicidade da integral, segue que

$$h m(h) = \int_x^{x+h} m(h) \leq \int_x^{x+h} f \leq \int_x^{x+h} M(h) = h M(h), \quad (5.4)$$

como mostra a Figura 5.9.

Dividindo a desigualdade (5.4) por  $h$ , segue que

$$m(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \leq M(h), \quad (5.5)$$

de modo que o termo do meio, que pode ser interpretado geometricamente como a *altura média de  $f$  no intervalo*  $[x, x+h]$ , está entre o máximo e o mínimo de  $f$  nesse intervalo. Como  $m(h)$  é o mínimo de  $f$  em  $[x, x+h]$ , temos que

$$m(h) = f(c(h)),$$

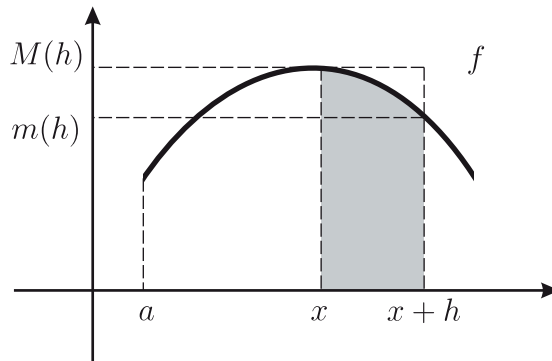


Figura 5.9: Teorema Fundamental do Cálculo.

onde  $x \leq c(h) \leq x+h$ . Pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} c(h) = x,$$

de modo que, pela continuidade de  $f$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c(h)) = f(x).$$

De forma análoga, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = f(x).$$

Aplicando o Teorema do Sanduíche na equação (5.5), segue que

$$F'(x \downarrow) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = f(x).$$

□

Em geral, uma função  $F$  é a *primitiva de uma dada função*  $f$  quando  $F' = f$ . O TFC estabelece uma relação estreita entre as integrais de uma dada função contínua e suas primitivas.

**Corolário 5.4:** *Seja  $F$  uma primitiva de uma função contínua  $f$ . Então*

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$



**Prova:** Duas primitivas de  $f$  diferem por uma constante, pois suas derivadas coincidem com  $f$ . Pelo TFC, temos que

$$\int_a^x f$$

é uma primitiva de  $f$ , de modo que, pela Proposição 4.7, temos que

$$\int_a^x f = F(x) + C,$$

onde  $C$  é uma constante. Fazendo  $x = a$  na equação acima, temos que

$$0 = F(a) + C,$$

o que mostra que a constante  $C$  é igual a  $-F(a)$ . □

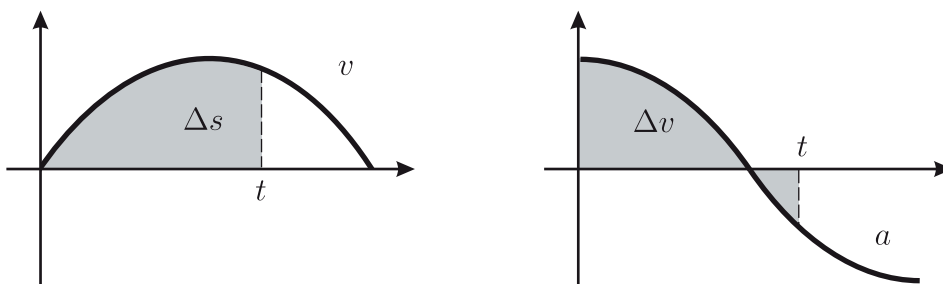


Figura 5.10: Integrais definidas e variações.

Como  $s' = v$  e  $v' = a$ , temos que  $s$  é uma primitiva de  $v$  e que  $v$  é uma primitiva de  $a$ . As identidades

$$\int_0^t v = s(t) - s_0 \quad \text{e} \quad \int_0^t a = v(t) - v_0$$

ilustradas pela Figura 5.10, são então uma consequência do Corolário 5.4, uma vez que

$$s(0) = s_0 \quad \text{e} \quad v(0) = v_0.$$

## INTEGRAL INDEFINIDA

Os resultados anteriores reduzem o cálculo de integrais definidas à determinação de primitivas. Para facilitar o cálculo dessas primitivas, introduzimos o conceito de *integral indefinida* de uma dada função  $f$ , que é o conjunto das expressões algébricas das primitivas de uma dada função  $f$ , denotado por

$$\int f(x) dx$$

onde  $dx$  aparece apenas para indicar que  $x$  é a variável independente. Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  temos que

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

o que é denotado simplesmente por

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária, que percorre todos os números reais. Isso ocorre pois duas primitivas da função  $f$  necessariamente diferem por uma constante e sempre que se adiciona uma constante a uma primitiva de  $f$  obtém-se uma nova primitiva de  $f$ .

Apresentamos a seguir uma lista com as integrais indefinidas de algumas funções elementares. Note que as integrais indefinidas são conjuntos de expressões algébricas e, portanto, não são números reais.

**Proposição 5.5:** Temos que

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

Quando a função é dada por sua expressão algébrica  $f(x)$ , também denotamos a integral de  $f$  de  $a$  para  $b$  por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Quando uma primitiva de  $f$  é dada por sua expressão algébrica  $F(x)$ , o seu colchete de  $a$  para  $b$  é o número real dado por

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Note que o colchete é o mesmo para qualquer primitiva de  $f$ , uma vez que

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Temos então do Corolário 5.4 que

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

Isso nos permite calcular a área delimitada pela parábola  $f(x) = x^2$ . Como

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

temos que

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3},$$

conforme foi afirmado no início da seção anterior.

As propriedades das integrais indefinidas são reflexos das propriedades das derivadas. Por exemplo, como a derivada da soma é a soma das derivadas, temos que a integral indefinida da soma é a soma das integrais indefinidas. Da mesma forma, como constantes saem para fora da derivada, temos que o mesmo ocorre com integrais indefinidas.

**Proposição 5.6:** *Temos que*

$$\begin{aligned} (S) \quad \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ (P) \quad \int cf(x) dx &= c \int f(x) dx \end{aligned}$$

**Prova:** Temos que

$$\int f(x) dx = F(x) + A \quad \text{e} \quad \int g(x) dx = G(x) + B,$$

onde  $F'(x) = f(x)$  e também  $G'(x) = g(x)$ .

(S) Por definição

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$$

onde  $C = A + B$  é uma constante arbitrária, e o resultado segue, pois, pela regra da derivada da soma,

$$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x).$$

(C) Por definição

$$c \int f(x) dx = cF(x) + C,$$

e o resultado segue, pois, como  $c$  é uma constante,

$$(cF(x))' = cf(x).$$



Propriedades análogas são verificadas para as integrais definidas.

**Corolário 5.7:** Temos que

$$(S) \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$(P) \quad \int_a^b cf = c \int_a^b f$$

**Prova:** Sejam

$$\int f(x) dx = F(x) + A \quad \text{e} \quad \int g(x) dx = G(x) + B$$

(S) Pela Proposição 5.7, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

(C) Temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b cf &= [cF(x)]_a^b \\ &= cF(b) - cF(a) \\ &= c(F(b) - F(a)) \\ &= c[F(x)]_a^b \\ &= c \int_a^b f. \end{aligned}$$

□

A aditividade da integral pode ser utilizada para demonstrar o denominado *Princípio de Cavallieri*. Seja  $R$  a região delimitada pelos gráficos das funções  $f$  e  $f + h$ , onde  $h > 0$ , e pelas retas verticais passando pelos pontos  $x = 0$  e  $x = b$ , como apresentada pela Figura 5.11.

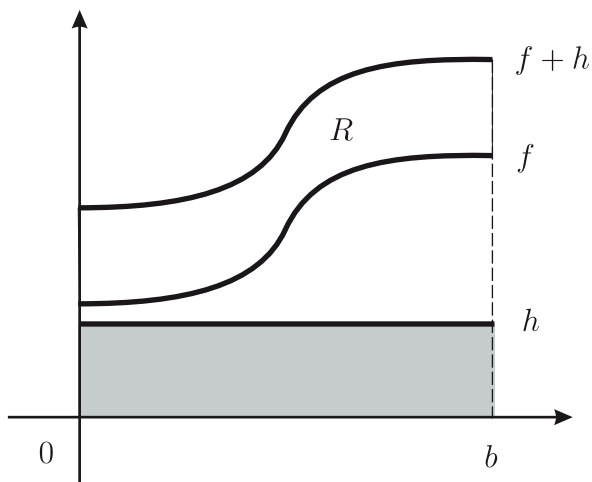


Figura 5.11: Princípio de Cavallieri.

Temos que a área  $A$  da região  $R$  é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b (f + h) - \int_0^b f \\ &= \int_0^b f + \int_0^b h - \int_0^b f \\ &= \int_0^b h, \end{aligned}$$

de modo que

$$A = bh$$

mostrando que essa área é simplesmente a área do retângulo de base  $b$  e altura  $h$ .

## APLICAÇÕES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Vamos agora mostrar, no caso do arremesso vertical de uma bola na ausência de atrito com o ar, como utilizar a integral para obter a posição instantânea, desde que sejam dadas a posição e a velocidade iniciais. Como

$$a(t) = -g$$

temos que

$$\int a(t) dt = \int -g dt.$$

O primeiro lado da igualdade é sempre igual  $v(t) + A$ , pois a aceleração instantânea é, por definição, igual a derivada da velocidade instantânea. O segundo lado da igualdade é igual

$$\int -g dt = -g \int 1 dt = -gt + B,$$

onde utilizamos os resultados da proposição anterior. Temos então que

$$v(t) + A = -gt + B$$

e portanto que

$$v(t) = -gt + C$$

onde  $C = B - A$  é também uma constante arbitrária. Para determinarmos essa constante, temos que conhecer o valor da velocidade em algum instante, por exemplo, o instante inicial. Se a velocidade inicial é  $v(0) = v_0$ , temos que  $C = v_0$ , o que mostra que

$$v(t) = v_0 - gt$$

Logo, temos que

$$\int v(t) dt = \int v_0 - gt dt.$$

O primeiro lado da igualdade é sempre igual  $s(t) + A$ , pois a velocidade instantânea é, por definição, igual a derivada da posição instantânea. O segundo lado da igualdade é igual

$$\int v_0 - gt dt = v_0 \int 1 dt - g \int t dt = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + B,$$

onde utilizamos os resultados da proposição anterior. Temos então que

$$s(t) + A = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + B$$

e portanto que

$$s(t) = v_0 t - g \frac{t^2}{2} + C$$

onde  $C = B - A$  é também uma constante arbitrária. Para determinarmos essa constante, temos que conhecer o valor da posição em algum instante, por exemplo, o instante inicial. Agora, se a posição inicial é  $s(0) = s_0$ , temos que  $C = s_0$ , o que mostra que

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5.2.1 Considere a função  $x^2 + 2x$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x^3 + x^2 + C$    (b)  $\frac{x^3}{3} + x^2 + C$    (c)  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$    (d)  $x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_{-1}^1 x^2 + 2x \, dx$  é igual a

(a)  $\frac{2}{3}$    (b) 2   (c)  $-\frac{2}{3}$    (d) -2

5.2.2 Considere que a função velocidade é dada por  $v(t) = t - 1$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $t^2 - t + C$    (b)  $\frac{t^2}{2} + t^{-1} + C$    (c)  $\frac{t^2}{2} - t + C$    (d)  $t^2 + t^{-1} + C$

(ii) A variação da posição entre 0 e 2, dada por  $\int_0^2 v(t) \, dt$ , é igual a

(a)  $\frac{5}{2}$    (b)  $\frac{9}{2}$    (c) 2   (d) 0

5.2.3 Considere a função  $e^{2x} + 1$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $e^{2x} + x + C$    (b)  $\frac{e^{2x}}{2x} + x + C$    (c)  $\frac{e^{2x}}{2} + x + C$    (d)  $-\frac{e^{2x}}{2} + x + C$



(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 e^{2x} + 1 \, dx$  é igual a

(a)  $e^2 + 1$    (b)  $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$    (c)  $e^2 - 1$    (d)  $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

5.2.4 Considere a função  $\sin(2x)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\cos(2x) + C$    (b)  $-\cos(2x) + C$   
 (c)  $\frac{\cos 2x}{2} + C$    (d)  $-\frac{\cos 2x}{2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx$  é igual a

(a) 1   (b)  $\frac{1}{2}$    (c) -1   (d)  $-\frac{1}{2}$

5.2.5 Considere a função  $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $3x - \frac{2}{x^2} + C$    (b)  $x^3 + 2 \log|x| + C$   
 (c)  $3x + 2 \log|x| + C$    (d)  $x^3 - 2 \frac{2}{x^2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_1^e f(x) \, dx$  é igual a

(a)  $3e - 1$    (b)  $3e + 1$    (c)  $e^3 - 1$    (d)  $e^3 + 1$

5.2.6 Considere a função  $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x^2 + \frac{1}{x} + C$    (b)  $x^2 - \frac{1}{x} + C$    (c)  $2x + \frac{1}{x} + C$    (d)  $2x - \frac{1}{x} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_1^2 f(x) \, dx$  é igual a

(a)  $\frac{5}{2}$    (b)  $-\frac{5}{2}$    (c)  $\frac{3}{2}$    (d)  $-\frac{3}{2}$

## 5.3 SUBSTITUIÇÃO

Outra propriedade fundamental da integral indefinida é a denominada *regra de substituição de variáveis*, que veremos a seguir ser um reflexo da regra da cadeia. Suponha que  $f$  é contínua e que

$$\int f(y) \, dy = F(y) + C$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $C$  é uma constante arbitrária. Para cada função  $g$  derivável, definimos

$$\left( \int f(y) dy \right)_{y=g(x)} = F(g(x)) + C$$

**Proposição 5.8:** Se  $g$  é uma função derivável, fazendo a substituição  $y = g(x)$  obtemos que

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \left( \int f(y) dy \right)_{y=g(x)}$$

**Prova:** Pela regra da cadeia, temos que

$$(F(g(x)))' = (F(y))'_{y=g(x)} (g(x))' = f(g(x)) g'(x).$$

□

Uma maneira bastante conveniente de apresentar a regra da substituição é introduzirmos a seguinte notação para a derivada de uma dada função. Se

$$y = g(x)$$

denotamos

$$dy = g'(x) dx$$

uma vez que a notação

$$\frac{dy}{dx} = g'(x)$$

é justificada por

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Por exemplo, se quisermos calcular

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x dx$$

fazemos a seguinte substituição  $y = x^2 + 1$ , pois então  $dy = 2x dx$ , o que mostra que  $x dx = dy/2$  e portanto

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x dx = \left( \int \sqrt{y} \frac{dy}{2} \right)_{y=x^2+1}.$$

Temos então que

$$\int \sqrt{y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \left( \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) + C = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

e, portanto, segue que

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x dx = \left( \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \right)_{y=x^2+1} + C = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

## APLICAÇÕES DA SUBSTITUIÇÃO

Vamos agora determinar a posição de uma bola de massa  $m$  arremessada verticalmente na presença da resistência do ar. Temos que a força resultante  $F$  sobre a bola é dada pela soma da força peso

$$P = -mg$$

com a força de resistência do ar

$$R = -bv$$

onde  $g$  é a gravidade local e  $b$  é a constante de atrito da bola. Pela segunda lei de Newton, temos que  $F = mv'$  e portanto

$$mv' = -mg - bv$$

ou seja

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

relacionando a função  $v$  e sua função derivada. Dividindo essa equação pela massa  $m$ , obtemos que

$$v'(t) = -g - cv(t)$$

onde  $c = \frac{b}{m}$  é o coeficiente de atrito por unidade de massa da bola. Vamos então determinar a expressão da função velocidade instantânea. Como

$$\frac{v'(t)}{g + cv(t)} = -1,$$

temos que

$$\int \frac{v'(t)}{g + cv(t)} dt = \int -1 dt = -t + A.$$

Fazendo a substituição  $x = g + cv(t)$ , temos que  $dx = cv'(t) dt$ , o que mostra que  $v'(t) dt = dx/c$ . Então

$$\begin{aligned} \int \frac{v'(t)}{g + cv(t)} dt &= \left( \int \frac{1}{x} \frac{dx}{c} \right)_{x=g+cv(t)} \\ &= \frac{1}{c} \left( \int \frac{1}{x} dx \right)_{x=g+cv(t)} \\ &= \frac{1}{c} \log(g + cv(t)) + B, \end{aligned}$$

onde estamos supondo que  $g + cv(t) > 0$ . Logo

$$\log(g + cv(t)) = -ct + D,$$

onde  $D = c(A - B)$ , o que mostra que

$$g + cv(t) = Ce^{-ct}$$

onde  $C = e^D$ . Se  $v_0 = v(0)$  é a velocidade inicial, temos que  $C = g + cv_0$  e, portanto, temos que

$$v(t) = -\frac{g}{c} + \left( \frac{g}{c} + v_0 \right) e^{-ct}$$

Uma vez determinada a expressão da função velocidade, podemos determinar a expressão da função posição. Para isso, utilizaremos o seguinte corolário, que é uma consequência imediata da regra da substituição.

**Corolário 5.9:** *Temos que*

$$\int e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c} + C$$

Vamos agora obter a expressão da posição instantânea da bola arremessada verticalmente com atrito. Pela expressão obtida acima para a velocidade instantânea, segue que

$$\begin{aligned} s(t) + A &= \int v(t) dt \\ &= -\frac{g}{c} \int 1 dt + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \int e^{-ct} dt \\ &= -\frac{g}{c} t + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \frac{e^{-ct}}{-c} + B \end{aligned} \tag{5.6}$$

e portanto

$$s(t) = -\frac{g}{c} t + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \frac{e^{-ct}}{-c} + C,$$

onde  $C = B - A$  é uma constante arbitrária. Se  $s_0 = s(0)$  é a posição inicial, temos que

$$s_0 = \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \frac{1}{-c} + C,$$

o que mostra que

$$s(t) = s_0 - \frac{g}{c} t + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) \left(\frac{1 - e^{-ct}}{c}\right)$$

Outra aplicação da regra da substituição é a obtenção da Lei da Conservação da Energia no caso do sistema massa-mola. Neste caso, a segunda Lei de

Newton é dada por

$$ms''(t) = -ks(t)$$

para todo instante de tempo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $m$  é a massa e  $k$  é a constante de rigidez da mola. Multiplicando a equação acima por  $s'(t)$  e integrando em relação a  $t$ , segue que

$$m \int s'(t) s''(t) dt = -k \int s(t) s'(t) dt. \quad (5.7)$$

Temos que

$$\int s(t) s'(t) dt = \left( \int y dy \right)_{y=s(t)} = \frac{s(t)^2}{2} + A,$$

pois  $dy = s'(t) dt$  e

$$\int s'(t) s''(t) dt = \left( \int z dz \right)_{z=v(t)} = \frac{v(t)^2}{2} + B,$$

pois  $dz = v'(t) dt = s''(t) dt$ . Substituindo as expressões das integrais indefinidas na equação (5.7), segue a equação da conservação da energia

$$m \frac{v(t)^2}{2} + k \frac{s(t)^2}{2} = E$$

onde  $E = -kA - mB$  é a energia mecânica do sistema.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5.3.1 Considere a função  $\sin(2t)$  e utilize a substituição  $x = 2t$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\cos(2t) + C$     (b)  $-\cos(2t) + C$

(c)  $\frac{\cos 2t}{2} + C$     (d)  $-\frac{\cos 2t}{2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^\pi \sin(2t) dt$  é igual a

(a) 0    (b) 1    (c) -1    (d)  $\frac{1}{2}$

5.3.2 Considere a função  $x^2 \sin(x^3 + 1)$  e utilize uma substituição adequada.

(i) Sua integral indefinida é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} -\cos(x^3 + 1) + C & \text{(b)} \cos(x^3 + 1) + C \\ \text{(c)} -\frac{1}{3}\cos(x^3 + 1) + C & \text{(d)} \frac{1}{3}\cos(x^3 + 1) + C \end{array}$$

(ii) Sua integral definida  $\int_{-1}^1 x^2 \operatorname{sen}(x^3 + 1) dx$  é igual a

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 1 - \cos(2) & \text{(b)} \cos(2) - 1 \\ \text{(c)} \frac{1}{3}(1 - \cos(2)) & \text{(d)} \frac{1}{3}(\cos(2) - 1) \end{array}$$

5.3.3 Considere a função  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  e utilize a substituição  $y = 1 - x^2$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} -\sqrt{1-x^2} + C & \text{(b)} \sqrt{1-x^2} + C \\ \text{(c)} -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C & \text{(d)} \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C \end{array}$$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^{1/2} f(x) dx$  é igual a

$$\text{(a)} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \quad \text{(b)} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(c)} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{(d)} \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$$

5.3.4 Considere a função aceleração dada por  $a(t) = \frac{t}{1+t^2}$  e utilize uma substituição adequada.

(i) Sua integral indefinida é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \log(1+t^2) + C & \text{(b)} \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C \\ \text{(c)} -\log(1+t^2) + C & \text{(d)} -\frac{1}{2}\log(1+t^2) + C \end{array}$$

(ii) A variação da velocidade entre 0 e 1, dada por  $\int_0^1 a(t) dt$ , é igual a

$$\text{(a)} -\log(2) + C \quad \text{(b)} -\frac{1}{2}\log(2) \quad \text{(c)} \log(2) \quad \text{(d)} \frac{1}{2}\log(2)$$

5.3.5 Considere a função  $\operatorname{tg}(x)$  e utilize a substituição  $y = \cos(x)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \log|\cos(x)| + C & \text{(b)} -\log|\cos(x)| + C \\ \text{(c)} \sec^2(x) + C & \text{(d)} -\sec^2(x) + C \end{array}$$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x) dx$  é igual a

$$\text{(a)} -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{(b)} \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{(c)} -1 \quad \text{(d)} 1$$

## 5.4 SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

A partir da equação da conservação da energia, podemos determinar a posição  $s(t)$  do sistema massa-mola. Para isso, primeiro isolamos  $v(t)$  na equação da conservação da energia, obtendo

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}s(t)^2}$$

Escrevendo

$$r = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

obtemos

$$s'(t) = c\sqrt{r^2 - s(t)^2}.$$

Logo

$$\frac{s'(t)}{\sqrt{r^2 - s(t)^2}} = c,$$

e então

$$\int \frac{s'(t)}{\sqrt{r^2 - s(t)^2}} dt = \int c dt = ct + A.$$

Fazendo a substituição  $z = s(t)$ , temos que  $dz = s'(t) dt$  e então

$$\left( \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz \right)_{z=s(t)} = ct + A$$

(5.8)

Para resolver essa última integral, apresentamos a regra da substituição inversa.

**Proposição 5.10:** Se  $g$  é uma função derivável com inversa, fazendo a substituição inversa  $z = g(\alpha)$  obtemos que

$$\int f(z) dz = \left( \int f(g(\alpha)) g'(\alpha) d\alpha \right)_{\alpha=g^{-1}(z)}$$



**Prova:** Pela regra da substituição, temos que

$$\left( \int f(z) dz \right)_{z=g(\alpha)} = \int f(g(\alpha)) g'(\alpha) d\alpha.$$

O resultado segue fazendo-se a substituição  $\alpha = g^{-1}(z)$ , pois  $z = g(g^{-1}(z))$ .  
□

Essa maneira de utilizar a regra da substituição está ligada com as denominadas *substituições trigonométricas*. Essas substituições estão relacionadas a funções cujas expressões algébricas contém as expressões

$$\sqrt{r^2 - z^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{r^2 + z^2}$$

O primeiro tipo de substituição trigonométrica relaciona a expressão  $\sqrt{r^2 - z^2}$  ao triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento  $r$  e um dos catetos possui comprimento  $z$ . Neste caso, existem duas possibilidades, como apresentado pela Figura 5.12.

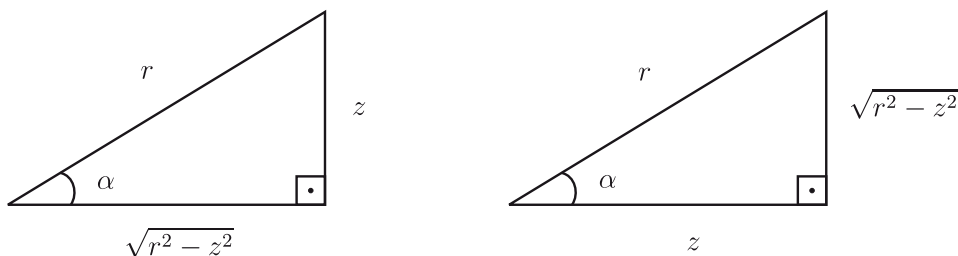


Figura 5.12: Substituições trigonométricas no caso da expressão  $\sqrt{r^2 - z^2}$ .

O valor  $z$  pode ser visto como sendo tanto o comprimento do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  como o comprimento do cateto adjacente. No primeiro caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{z}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}(\alpha) = \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}$$

o que implica que

$$z = r \operatorname{sen}(\alpha), \quad \alpha = \operatorname{asen}\left(\frac{z}{r}\right) \quad \text{e} \quad \sqrt{r^2 - z^2} = r \operatorname{cos}(\alpha)$$

Já no segundo caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\cos(\alpha) = \frac{z}{r} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}$$

o que implica que

$$z = r \cos(\alpha), \quad \alpha = \text{acos}\left(\frac{z}{r}\right) \quad \text{e} \quad \sqrt{r^2 - z^2} = r \text{sen}(\alpha)$$

Vamos utilizar a mudança de variáveis  $z = r \text{sen}(\alpha)$  para determinar a seguinte integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

Temos que  $dz = r \cos(\alpha) d\alpha$ , pois

$$\frac{dz}{d\alpha} = (r \text{sen}(\alpha))' = r \cos(\alpha).$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz &= \left( \int \frac{1}{r \cos(\alpha)} (r \cos(\alpha)) d\alpha \right)_{\alpha=\text{asen}\left(\frac{z}{r}\right)} \\ &= \left( \int 1 d\alpha \right)_{\alpha=\text{asen}\left(\frac{z}{r}\right)} \\ &= (\alpha + C)_{\alpha=\text{asen}\left(\frac{z}{r}\right)} \end{aligned}$$

e portanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = \text{asen}\left(\frac{z}{r}\right) + C$$

Para verificar que esse é o resultado correto, basta derivar a expressão encontrada, o que também é deixado como exercício.

Agora podemos determinar a posição  $s(t)$  do sistema massa-mola, onde  $s(0) = s_0$  é a posição inicial e  $s'(0) = v_0$  é a velocidade inicial. Usando a integral indefinida acima na equação (5.8) e substituindo  $z$  por  $s(t)$ , obtemos

$$\text{asen}\left(\frac{s(t)}{r}\right) + C = ct + A.$$

Fazendo  $B = A - C$  e resolvendo para  $s(t)$ , obtemos

$$s(t) = r \operatorname{sen}(ct + B) \quad \text{e então} \quad s'(t) = rc \cos(ct + B).$$

Calculando em  $t = 0$  temos que

$$s_0 = s(0) = r \operatorname{sen}(B) \quad \text{e} \quad v_0 = s'(0) = rc \cos(B).$$

Usando a lei do seno da soma, temos então que a posição do sistema massa-mola é dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= r \operatorname{sen}(ct + B) \\ &= r \operatorname{sen}(B) \cos(ct) + r \cos(B) \operatorname{sen}(ct) \end{aligned}$$

e portanto

$$s(t) = s_0 \cos(ct) + \frac{v_0}{c} \operatorname{sen}(ct)$$

onde  $c = \sqrt{k/m}$ .

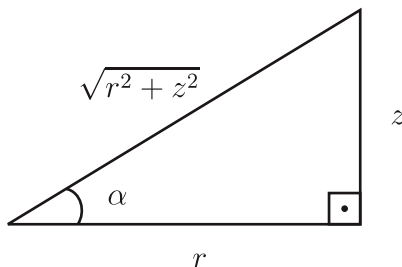


Figura 5.13: Substituição trigonométrica no caso da expressão  $\sqrt{r^2 + z^2}$ .

No segundo tipo de substituição trigonométrica, a expressão  $\sqrt{r^2 + z^2}$  pode ser representada geometricamente pela hipotenusa do triângulo retângulo cujo cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  tem comprimento  $z$  e cujo cateto adjacente possui comprimento  $r$ , como ilustrado pela Figura 5.13. Neste caso, temos as seguintes relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{z}{r}, \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

o que implica que

$$z = r \operatorname{tg}(\alpha), \quad \alpha = \operatorname{atg}\left(\frac{z}{r}\right) \quad \text{e} \quad r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2(\alpha)}$$

Vamos utilizar essa mudança de variáveis para determinar a seguinte integral indefinida

$$\int \frac{1}{r^2 + z^2} dz$$

Temos que  $dz = r \sec^2(\alpha) d\alpha$ , pois

$$\frac{dz}{d\alpha} = (r \operatorname{tg}(\alpha))' = r \sec^2(\alpha).$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{r^2 + z^2} dz &= \left( \int \frac{\cos^2(\alpha)}{r^2} r \sec^2(\alpha) d\alpha \right)_{\alpha=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{r}\right)} \\ &= \left( \int \frac{1}{r} d\alpha \right)_{\alpha=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{r}\right)} \\ &= \left( \frac{1}{r} \alpha + C \right)_{\alpha=\operatorname{atg}\left(\frac{z}{r}\right)} \end{aligned}$$

e portanto

$$\int \frac{1}{r^2 + z^2} dz = \frac{1}{r} \operatorname{atg}\left(\frac{z}{r}\right) + C$$

(5.9)

Mais uma vez, para verificar que esse é o resultado correto, basta derivar a expressão encontrada, o que é deixado como exercício.

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5.4.1 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$  e utilize a substituição trigonométrica  $x = 2 \operatorname{tg}(\alpha)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

- (a)  $\log(x^2 + 4) + C$     (b)  $\frac{1}{4} \operatorname{atg}(x/2) + C$   
 (c)  $\frac{1}{2} \operatorname{atg}(x/2) + C$     (d)  $\frac{1}{4} \log(x^2 + 4) + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^2 f(x) dx$  é igual a

(a)  $\pi/8$  (b)  $\pi/16$  (c)  $\log(\frac{1}{2})$  (d)  $\log(\frac{1}{2})/4$

5.4.2 Considere que a função aceleração é dada por  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$  e utilize a substituição trigonométrica  $t = 2 \sin(\alpha)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{1}{2} \operatorname{asen}(t/2) + C$  (b)  $\operatorname{asen}(t/2) + C$  (c)  $\frac{1}{2} \operatorname{asen}(t) + C$  (d)  $\operatorname{asen}(t) + C$

(ii) A variação da velocidade entre 0 e 1, dada por  $\int_0^1 a(t) dt$ , é igual a

(a)  $\pi/2$  (b)  $\pi/4$  (c)  $\operatorname{asen}(1/2)$  (d)  $\frac{1}{2} \operatorname{asen}(1/2)$

5.4.3 Considere a função  $f(x) = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$  e utilize a substituição trigonométrica  $x = 2 \sin(\alpha)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} + C$  (b)  $\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + C$  (c)  $\frac{2x}{4-x^2} + C$  (d)  $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 f(x) dx$  é igual a

(a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (b)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (c)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (d)  $\frac{2}{3}$

5.4.4 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}}$  e utilize a substituição trigonométrica  $x = 4 \cos(\alpha)$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{\sqrt{16-x^2}}{4x} + C$  (b)  $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$  (c)  $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + C$  (d)  $x\sqrt{16-x^2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_1^4 f(x) dx$  é igual a

(a)  $-\sqrt{15}$  (b)  $\sqrt{15}$  (c)  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$  (d)  $\frac{\sqrt{15}}{16}$

## 5.5 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Outra técnica de integração fundamental é a denominada *regra de integração por partes*, que veremos a seguir ser um reflexo da regra da derivada do produto.

**Proposição 5.11:** Se  $g$  e  $f$  são funções deriváveis, temos que

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int g'(x) f(x) dx$$

**Prova:** Pela regra da derivada da soma e do produto, temos que

$$\begin{aligned} \left( f(x) g(x) - \int g'(x) f(x) dx \right)' &= (f(x) g(x))' - \left( \int g'(x) f(x) dx \right)' \\ &= (f'(x) g(x) + g'(x) f(x)) - g'(x) f(x) \\ &= f'(x) g(x) \\ &= \left( \int f'(x) g(x) dx \right)' \end{aligned}$$

□

Uma aplicação da integração por partes é o cálculo da integral indefinida do logaritmo

$$\int \log(|x|) dx$$

Se  $g(x) = \log(|x|)$  e  $f'(x) = 1$ , temos que  $g'(x) = 1/x$  e podemos escolher  $f(x) = x$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int \log(|x|) dx &= \int f'(x) g(x) dx \\ &= f(x) g(x) - \int g'(x) f(x) dx \\ &= x \log(|x|) - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \log(|x|) - x + C. \end{aligned}$$

e portanto

$$\int \log(|x|) = x \log(|x|) - x + C$$

Uma outra aplicação da integração por partes é o cálculo da integral indefinida do quadrado do seno

$$\int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha$$

Se  $g(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$  e  $f'(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$ , temos que  $g'(\alpha) = \text{cos}(\alpha)$  e podemos escolher  $f(\alpha) = -\text{cos}(\alpha)$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha &= \int f'(\alpha) g(\alpha) d\alpha \\ &= f(\alpha) g(\alpha) - \int g'(\alpha) f(\alpha) d\alpha \\ &= -\text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) - \int \text{cos}(\alpha) (-\text{cos}(\alpha)) d\alpha \\ &= -\text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \int \text{cos}^2(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Como  $\text{cos}^2(\alpha) = 1 - \text{sen}^2(\alpha)$ , segue que

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha &= -\text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \int (1 - \text{sen}^2(\alpha)) d\alpha \\ &= -\text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \int 1 d\alpha - \int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha = -\text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \alpha - \int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha$$

Portanto

$$2 \int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha = \alpha - \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha) + C$$

implicando que

$$\int \text{sen}^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} (\alpha - \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\alpha)) + D$$

onde  $D = C/2$ . Observe que a constante  $C$  surgiu, pois a integral indefinida passou a aparecer apenas em um dos lados da equação. A integral indefinida

do quadrado do cosseno pode ser obtido de maneira similar e é deixada como exercício.

Uma dificuldade para a aplicação desse método é identificar corretamente o produto e quem deve ser a função derivada nesse produto. Quando temos

$$x^n \operatorname{sen}(cx) \quad \text{ou} \quad x^n \operatorname{cos}(cx) \quad \text{ou} \quad x^n e^{cx}$$

sempre escolhemos

$$g(x) = x^n$$

pois a potência diminui seu grau quando é derivada. Por exemplo, vamos calcular a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx$$

Se  $g(x) = x^2$  e  $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$ , temos que  $g'(x) = 2x$  e podemos escolher  $f(x) = -\operatorname{cos}(x)$ . Pela integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= -\operatorname{cos}(x) x^2 - \int 2x(-\operatorname{cos}(x)) dx \\ &= -\operatorname{cos}(x) x^2 + 2 \int x \operatorname{cos}(x) dx. \end{aligned}$$

Novamente aplicamos a integração por partes escolhendo agora  $g(x) = x$  e  $f'(x) = \operatorname{cos}(x)$ . Neste caso, temos que  $g'(x) = 1$  e podemos escolher  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ . Logo

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= -\operatorname{cos}(x) x^2 + 2 \int x \operatorname{cos}(x) dx \\ &= -\operatorname{cos}(x) x^2 + 2 \left( \operatorname{sen}(x) x - \int 1 \operatorname{sen}(x) dx \right) \\ &= -\operatorname{cos}(x) x^2 + 2 (\operatorname{sen}(x) x - (-\operatorname{cos}(x))) + C. \end{aligned}$$

e portanto

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) = -x^2 \operatorname{cos}(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \operatorname{cos}(x) + C$$



## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5.5.1 Considere a função  $te^t$  e utilize  $f'(t) = e^t$  e  $g(t) = t$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{t^2}{2}e^t + C$  (b)  $te^t + C$  (c)  $(t-1)e^t + C$  (d)  $(t+1)e^t + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 te^t dt$  é igual a

(a) 1 (b)  $e$  (c)  $e/2$  (d)  $2e-1$

5.5.2 Considere que a função velocidade é dada por  $v(t) = t^2e^t$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $t^2e^t + C$  (b)  $(t^2 - 2t + 2)e^t + C$  (c)  $(t^2 + 2t - 2)e^t + C$  (d)  $\frac{t^3}{3}e^t + C$

(ii) A variação da posição entre 0 e 1, dada por  $\int_0^1 v(t) dt$ , é igual a

(a)  $e$  (b)  $e/3$  (c)  $e-2$  (d)  $e+2$

5.5.3 Considere a função  $x \sin(x)$  e utilize integração por partes.

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x \cos(x) + \sin(x) + C$  (b)  $-x \cos(x) + \sin(x) + C$   
 (c)  $\frac{x^2}{2} \cos(x) + C$  (d)  $-\frac{x^2}{2} \cos(x) + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^\pi x \sin(x) dx$  é igual a

(a)  $\pi$  (b)  $-\pi$  (c)  $\pi^2/2$  (d)  $-\pi^2/2$

5.5.4 Considere a função  $\log(x)$  e utilize  $f'(x) = 1$  e  $g(x) = \log(x)$

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x(\log(x) - 1) + C$  (b)  $x \log(x) + x + C$  (c)  $x \log(x) + C$  (d)  $\frac{1}{x} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_1^e \log(x) dx$  é igual a

(a)  $2e-1$  (b)  $e-1$  (c)  $e^{-1}-1$  (d) 1

5.5.5 Considere a função  $\sin(x)^2$  e utilize integração por partes.

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{1}{3} \sin(x)^3 + C$  (b)  $\cos(x)^2 + C$   
 (c)  $\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C$  (d)  $\frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx$  é igual a

(a) 0 (b) 1 (c)  $\pi/2$  (d)  $\pi$

5.5.6 Considere que a função aceleração é dada por  $a(t) = \cos(t)^2$  e utilize integração por partes.

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $\frac{1}{3} \cos(t)^3 + C$       (b)  $\sin(t)^2 + C$   
 (c)  $\frac{1}{2}(t - \sin(t) \cos(t)) + C$       (d)  $\frac{1}{2}(t + \sin(t) \cos(t)) + C$

(ii) A variação da velocidade entre 0 e  $\pi$ , dada por  $\int_0^\pi a(t) dt$ , é igual a

(a) 0    (b) 1    (c)  $\pi/2$     (d)  $\pi$

5.5.7 Considere a função  $\operatorname{acos}(x)$ , utilize primeiro integração por partes com  $f'(x) = 1$ ,  $g(x) = \operatorname{acos}(x)$  e depois uma substituição adequada.

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x \operatorname{acos}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$     (b)  $x \operatorname{acos}(x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$   
 (c)  $x \operatorname{acos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C$     (d)  $x \operatorname{acos}(x) - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 \operatorname{acos}(x) dx$  é igual a

(a) 1    (b) -1    (c)  $\frac{1}{2}$     (d)  $-\frac{1}{2}$

5.5.8 Considere a função  $\operatorname{atg}(x)$ , utilize primeiro integração por partes com  $f'(x) = 1$ ,  $g(x) = \operatorname{atg}(x)$  e depois uma substituição adequada.

(i) Sua integral indefinida é dada por

(a)  $x \operatorname{atg}(x) + \log(1+x^2) + C$     (b)  $x \operatorname{atg}(x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$   
 (c)  $x \operatorname{atg}(x) - \log(1+x^2) + C$     (d)  $x \operatorname{atg}(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 \operatorname{atg}(x) dx$  é igual a

(a)  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(2)$     (b)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2)$     (c)  $\frac{\pi}{4} + \log(2)$     (d)  $\frac{\pi}{4} - \log(2)$

## 5.6 FRAÇÕES PARCIAIS

O mecanismo de suspensão de um veículo consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor, como mostra a Figura 5.14. Denotando por  $s$  a posição vertical de um veículo de massa  $m$  em relação a posição de equilíbrio, pela lei de Hooke, temos que a força da mola é dada por

$$F = -ks$$

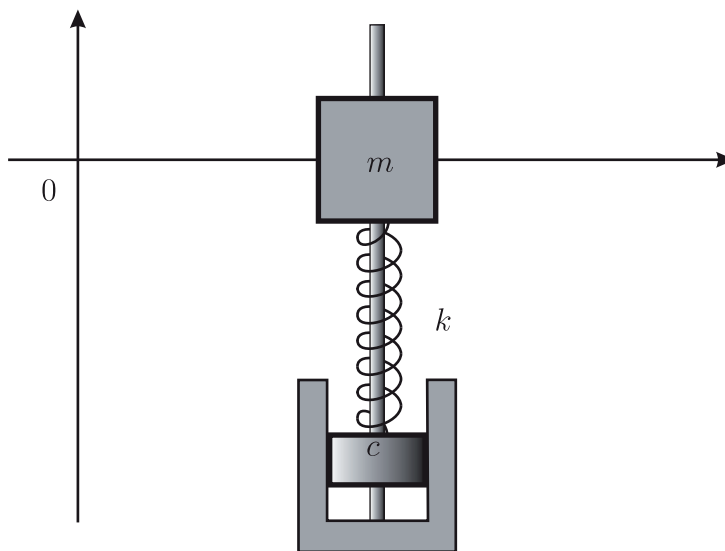


Figura 5.14: Mecanismo de suspensão de um veículo em equilíbrio.

e a força do amortecedor, similar a de resistência do ar, é dada por

$$R = -bs'$$

onde  $b$  é a constante de atrito do amortecedor. Como a força resultante sobre o veículo é a soma das forças da mola e do amortecedor, pela segunda lei de Newton, temos que  $F = ms''$  e, portanto,

$$ms'' = -ks - bs'$$

ou seja

$$ms''(t) = -ks(t) - cs'(t)$$

(5.10)

para todo tempo  $t \geq 0$ . Vamos supor  $s(t)$  é positiva num dado intervalo. Neste caso, podemos escrever  $s(t) = e^{y(t)}$ , onde  $y(t) = \log(s(t))$ . Temos então que

$$v(t) = s'(t) = y'(t)e^{y(t)} \quad \text{e} \quad a(t) = s''(t) = (y''(t) + y'(t)^2)e^{y(t)}.$$

Substituindo na equação (5.10), obtemos que

$$m(y''(t) + y'(t)^2)e^{y(t)} = -ke^{y(t)} - cy'(t)e^{y(t)}.$$

Cancelando o fator comum  $e^{y(t)}$ , obtemos a seguinte equação

$$m(y''(t) + y'(t)^2) = -k - cy'(t) \quad (5.11)$$

que é conhecida como *equação de Riccati* associada à equação (5.10). Podemos isolar o termo em que aparece a derivada de  $y$ , de modo que

$$my''(t) = -k - cy'(t) - my'(t)^2$$

e, portanto, temos que

$$\frac{y''(t)}{my'(t)^2 + cy'(t) + k} = -\frac{1}{m}.$$

Integrando os dois lados dessa equação na variável  $t$ , segue que

$$\int \frac{y''(t)}{my'(t)^2 + cy'(t) + k} dt = -\frac{t}{m} + D.$$

Para calcularmos primeira integral fazemos a substituição  $x = y'(t)$ . Neste caso, temos que  $dx = y''(t) dt$ , o que mostra que

$$\left( \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \right)_{x=y'(t)} = -\frac{t}{m} + D \quad (5.12)$$

denominada *equação integral de Riccati* associada à equação (5.10). A determinação dessa última integral nos permite encontrar  $y'(t)$ , em seguida  $y(t)$  e, finalmente, a posição da suspensão  $s(t) = e^{y(t)}$ .

O problema acima nos motiva a calcular integrais do tipo

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx. \quad (5.13)$$

Veremos que a solução dessa integral depende das raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e, portanto, do sinal de  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

## RAÍZES REAIS DISTINTAS

Neste caso

$$\Delta > 0$$

e utilizamos o denominado *método das frações parciais*. Temos que

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes reais distintas. Primeiro vamos mostrar que existem constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \left( \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2} \right).$$

Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , primeiro colocamos as duas frações do lado direito no mesmo denominador, obtendo a igualdade

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{A(x - r_2) + B(x - r_1)}{a(x - r_1)(x - r_2)},$$

para todo  $x \neq r_1, r_2$ . Como os denominadores são iguais, o mesmo vale para os numeradores, o que mostra que

$$1 = A(x - r_2) + B(x - r_1),$$

para todo  $x \neq r_1, r_2$ . Escrevendo ambos os lados como polinômios em  $x$ , temos que

$$0x + 1 = (A + B)x - Ar_2 - Br_1,$$

de modo que, igualando os respectivos coeficientes dos dois polinômios, obtemos o sistema

$$0 = A + B \quad \text{e} \quad 1 = -Ar_2 - Br_1.$$

Resolvendo para  $A$  e  $B$ , encontramos

$$A = \frac{1}{r_1 - r_2} = -B.$$

A integral (5.13) pode então ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{a} \left( \int \frac{A}{x - r_1} dx + \int \frac{B}{x - r_2} dx \right) \\ &= \frac{1}{a} (A \log(|x - r_1|) + B \log(|x - r_2|)) + C \end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} \log \left( \left| \frac{x - r_1}{x - r_2} \right| \right) + C$$

## UMA ÚNICA RAÍZ REAL

Neste caso

$$\Delta = 0$$

e utilizamos substituição. Temos que

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$$

onde  $r$  é a única raiz real. A integral (5.13) é então dada por

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - r)^2} dx \\ &= \frac{1}{a} \left( \int \frac{1}{u^2} du \right)_{u=x-r} \end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = -\frac{1}{a(x - r)} + C$$

## RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS

Neste caso

$$\Delta < 0$$

e utilizamos substituição trigonométrica. Temos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - (r + i\omega))(x - (r - i\omega)) \\ &= a((x - r) - i\omega)((x - r) + i\omega) \end{aligned}$$

onde  $r \pm i\omega$  são as raízes complexas conjugadas, de modo que

$$ax^2 + bx + c = a((x - r)^2 + \omega^2)$$

A integral (5.13) é então dada por

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - r)^2 + \omega^2} dx.$$

Fazendo a substituição  $z = x - r$ , obtemos que

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{z^2 + \omega^2} dz.$$

Utilizamos então a substituição trigonométrica  $z = \omega \operatorname{tg}(\theta)$ , pela equação (5.9), temos que

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{z^2 + \omega^2} dz = \frac{1}{a\omega} \operatorname{atg}\left(\frac{z}{\omega}\right) + C$$

Retornando à variável  $z$  e depois à variável  $x$ , temos que

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a\omega} \operatorname{atg}\left(\frac{x - r}{\omega}\right) + C$$

## POSIÇÃO DA SUSPENSÃO

Retomando o problema da posição  $s(t)$  da suspensão, vimos que ela pode ser encontrada da seguinte maneira. Encontramos  $y'(t)$  através da equação integral de Riccati

$$\left( \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \right)_{x=y'(t)} = -\frac{t}{m} + D,$$

obtemos  $y(t)$  após uma integração e, finalmente, fazemos  $s(t) = e^{y(t)}$ . Vimos que o cálculo da integral acima depende das raízes da equação

$$mx^2 + cx + k = 0$$

que é denominada *equação característica*. Note que essa equação lembra a Segunda Lei de Newton dada pela equação (5.10), que pode ser reescrita como

$$ms'' + cs' + ks = 0 \quad (5.14)$$

também conhecida como *equação do sistema massa-mola-amortecedor*. Existem então três possibilidades dependendo do sinal de  $\Delta = c^2 - 4mk$ .

Vamos obter  $s(t)$  no caso em que

$$m = 1, \quad c = 3 \quad \text{e} \quad k = 2$$

com as seguintes condições iniciais

$$s(0) = 0 \quad \text{e} \quad s'(0) = 1$$

Neste caso, temos que  $\Delta = 1$  e a equação característica é

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Neste caso, utilizamos o método das frações parciais para obter constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , primeiro colocamos as duas frações do lado direito no mesmo denominador, obtendo a igualdade

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A(x + 1) + B(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)},$$

para todo  $x \neq -1, -2$ . Como os denominadores são iguais, o mesmo vale para os numeradores, e obtemos a seguinte igualdade entre polinômios

$$0x + 1 = (A + B)x + 2A + B,$$

de modo que, igualando os respectivos coeficientes, obtemos o sistema

$$0 = A + B \quad \text{e} \quad 1 = 2A + B.$$

Resolvendo para  $A$  e  $B$ , encontramos

$$A = 1 = -B.$$



A integral (5.13) pode então ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-1}{x+2} dx \\ &= \log(|x+1|) - \log(|x+2|) \\ &= \log\left(\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right) + C. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (5.12) e escolhendo  $K = D - C$ , temos que

$$\log\left(\left|\frac{y'(t)+1}{y'(t)+2}\right|\right) = -t + K.$$

Resolvendo para  $y'(t)$ , temos que

$$\left|\frac{y'(t)+1}{y'(t)+2}\right| = e^K e^{-t},$$

de modo que

$$\frac{y'(t)+1}{y'(t)+2} = L e^{-t},$$

onde  $L = \pm e^K$ , dependendo do sinal do lado esquerdo dessa equação. Temos então que

$$y'(t) + 1 = L e^{-t} y'(t) + 2L e^{-t},$$

de modo que, isolando  $y'(t)$ , obtemos

$$y'(t) = \frac{-1 + 2L e^{-t}}{1 - L e^{-t}}.$$

Integrando para obter  $y(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int \frac{-1 + 2L e^{-t}}{1 - L e^{-t}} dt \\ &= \int \frac{-(1 - L e^{-t}) + L e^{-t}}{1 - L e^{-t}} dt \\ &= \int -1 dt + \int \frac{L e^{-t}}{1 - L e^{-t}} dt \\ &= -t + \left(\int \frac{1}{x} dx\right)_{x=1-L e^{-t}} \\ &= -t + \log(|1 - L e^{-t}|) + M. \end{aligned}$$

(5.15)

Fazendo  $s(t) = e^{y(t)}$ , segue que

$$\begin{aligned}
 s(t) &= e^{-t+\log(|1-Le^{-t}|)+M} \\
 &= e^{-t} e^{\log(|1-Le^{-t}|)} e^M \\
 &= e^{-t} |1-Le^{-t}| e^M \\
 &= e^{-t} (1-Le^{-t}) P
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

onde  $P = \pm e^M$ , dependendo do sinal de  $1 - Le^{-t}$ . Temos então que

$$s(t) = Pe^{-t} + Qe^{-2t}.$$

onde  $Q = -LP$ . Por último, vamos obter as constantes  $P$  e  $Q$  a partir das condições iniciais  $s(0) = 0$  e  $s'(0) = 1$ . Temos que

$$s'(t) = -Pe^{-t} - 2Qe^{-2t}.$$

Assim

$$0 = s(0) = P + Q \quad \text{e} \quad 1 = s'(0) = -P - 2Q$$

e então  $P = 1 = -Q$ , de modo que

$$s(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

é a posição do amortecedor.

## CARGA NUM CIRCUITO ELÉTRICO

Agora vamos ver que a abordagem utilizada no problema da suspensão também resolve o problema de um outro campo das aplicações da física. Dado o circuito elétrico, ilustrado pela Figura 5.15, composto de um indutor, de um resistor e de um capacitor, denotamos por  $q$  a função que fornece a quantidade de carga elétrica no ponto  $A$ .

Da teoria de circuitos elétricos, temos que a função  $q$  satisfaz à seguinte equação

$$Lq'' + Rq' + Cq = 0 \tag{5.17}$$

conhecida como *equação do circuito RLC*, onde  $L$  é a *indutância* do indutor,  $R$  a *resistência* do resistor e  $C$  a *capacitância* do capacitor. A equação (5.17)

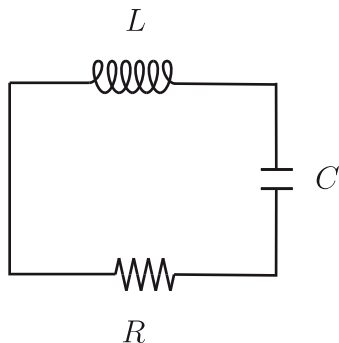


Figura 5.15: Esquema de um circuito RLC.

é idêntica à equação (5.14), do sistema massa-mola-amortecedor. Portanto, essa equação também possui soluções que dependem das raízes da sua equação característica associada

$$Lx^2 + Rx + C = 0$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5.6.1 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + C & \text{(b)} \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C \\ \text{(c)} \frac{1}{(x+1)^2(x-3)^2} + C & \text{(d)} \frac{1}{4x} + C \end{array}$$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 f(x) dx$  é igual a

$$\text{(a)} \frac{1}{4} \log(3) \quad \text{(b)} -\frac{1}{4} \log(3) \quad \text{(c)} \frac{1}{4} \quad \text{(d)} -\frac{7}{36}$$

5.6.2 Considere a função  $f(x) = \frac{3x-4}{(x-3)(x-2)}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

- (a)  $\frac{12x - 16}{(x-3)^2(x-2)^2} + C$   
 (b)  $\frac{6x^2 - 16x}{(x-3)^2(x-2)^2} + C$   
 (c)  $5 \log|x-3| - 2 \log|x-2| + C$   
 (d)  $5 \log|x-3| + 2 \log|x-2| + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 f(x) dx$  é igual a

- (a)  $-\frac{5}{9}$                       (b)  $-\frac{5}{2}$   
 (c)  $7 \log(2) - 5 \log(3)$     (d)  $5 \log(3) + 3 \log(2)$

5.6.3 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 4x - 6}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

- (a)  $\frac{1}{8} \log \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$     (b)  $\frac{1}{8} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + C$   
 (c)  $\frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2} + C$     (d)  $\frac{1}{(x+3)^2(x-1)^2} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 f(x) dx$  é igual a

- (a)  $-\frac{1}{8} \log(3)$     (b)  $\frac{1}{8} \log(3)$     (c)  $\frac{1}{8}$     (d)  $-\frac{7}{72}$

5.6.4 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

- (a)  $2 \log|x-3| + C$     (b)  $2 \log|x+3| + C$   
 (c)  $-\frac{1}{x+3} + C$             (d)  $-\frac{1}{x-3} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_0^1 f(x) dx$  é igual a

- (a)  $\frac{1}{6}$     (b)  $\frac{1}{12}$     (c)  $2 \log(2/3)$     (d)  $2 \log(4/3)$

5.6.5 Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$ .

(i) Sua integral indefinida é dada por

- (a)  $x \operatorname{atg}(x-3) + C$     (b)  $\operatorname{atg}(x-3) + C$   
 (c)  $\frac{3}{x^3 - 9x^2 + 30x} + C$     (d)  $\frac{3x}{x^3 - 9x^2 + 30x} + C$

(ii) Sua integral definida  $\int_2^3 f(x) dx$  é igual a

(a)  $\frac{\pi}{2}$    (b)  $\frac{\pi}{4}$    (c)  $\frac{10}{12}$    (d)  $-\frac{9}{12}$

## 5.7 VOLUMES, COMPRIMENTOS E ÁREAS

Nesta seção, vamos mostrar como podemos utilizar a integral definida de uma dada função  $f$  num dado intervalo  $[a, b]$  para o cálculo de volumes, comprimentos e áreas. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais, temos que a integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  pode ser decomposta da seguinte forma

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f + \cdots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f \quad (5.18)$$

onde

$$x_k = a + (k-1)\Delta x \quad \text{e} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

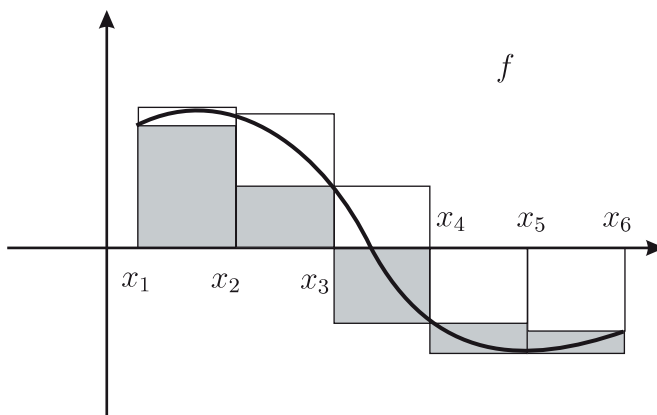


Figura 5.16: Somas superiores e inferiores da função  $f$ .

Denotando por  $M_k$  e por  $m_k$ , respectivamente, o máximo e o mínimo da função  $f$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , pela monotonicidade da integral, temos que

$$m_k \Delta x \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leq M_k \Delta x,$$

como ilustrado pela Figura 5.16. A  $n$ -ésima soma inferior e a  $n$ -ésima soma superior são definidas, respectivamente, por

$$s_n = m_1 \Delta x + \cdots + m_n \Delta x \quad \text{e} \quad S_n = M_1 \Delta x + \cdots + M_n \Delta x$$

Utilizando a equação (5.18), segue que

$$s_n \leq \int_a^b f \leq S_n.$$

(5.19)

É possível mostrar que se  $f$  é contínua as sequências das somas inferiores e das somas superiores se aproximam da integral. Na proposição seguinte, demonstramos esse fato apenas para o caso de funções monótonas.

**Proposição 5.12:** *Se  $f$  é contínua, então*

$$s_n, S_n \rightarrow \int_a^b f$$

**Prova:** Vamos demonstrar a proposição apenas no caso em que  $f$  é monótona. Consideramos o caso em que  $f$  é crescente, deixando o caso em que  $f$  é decrescente como exercício. Primeiro mostramos que  $S_n - s_n \rightarrow 0$ . De fato, como  $f$  é crescente, temos que  $M_k = f(x_{k+1})$  e  $m_k = f(x_k)$ , como ilustra a Figura 5.17. Neste caso, colocando  $\Delta x$  em evidência, temos que

$$S_n = (f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n+1})) \Delta x$$

e

$$s_n = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \Delta x.$$

Segue então que

$$S_n - s_n = (f(x_{n+1}) - f(x_1)) \Delta x$$

e portanto que

$$S_n - s_n = (f(b) - f(a)) \left( \frac{b-a}{n} \right) \rightarrow 0,$$

como ilustrado pela Figura 5.17.

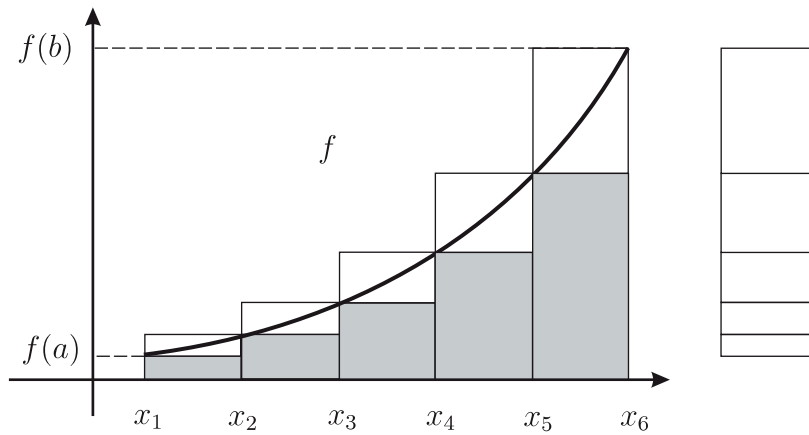


Figura 5.17: Somas superiores e inferiores de uma função monótona.

Subtraindo  $s_n$  nos três termos da desigualdade (5.19), segue que

$$0 \leq \int_a^b f - s_n \leq S_n - s_n.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\int_a^b f - s_n \rightarrow 0,$$

que é o mesmo que

$$s_n \rightarrow \int_a^b f.$$

Finalmente, temos que

$$S_n = (S_n - s_n) + s_n \rightarrow \int_a^b f.$$

□

## VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Os conceitos de somas superior e inferior podem ser utilizado para o cálculo de volumes. Dada uma função geratriz  $g \geq 0$  definida no intervalo  $[a, b]$ , denotamos por  $S$  a superfície obtida pela rotação do gráfico de  $g$  em relação ao eixo horizontal, como ilustrado pela Figura 5.18.

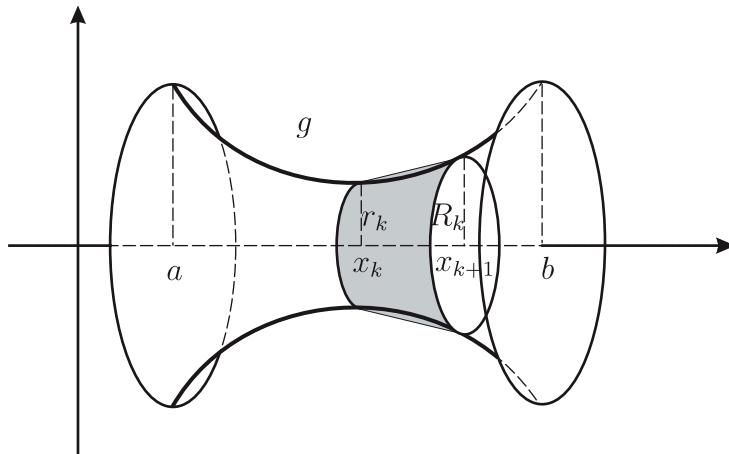


Figura 5.18: Volume de um sólido de rotação em relação ao eixo horizontal.

Denotamos por  $V$  o volume da região interna delimitada pela superfície  $S$  e pelos planos transversais ao eixo horizontal passando, respectivamente, pelo ponto  $x = a$  e pelo ponto  $x = b$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  sub-intervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que o volume  $V$  é dado por

$$V = V_1 + \cdots + V_n$$

onde  $V_k$  é o volume da região delimitada pela superfície  $S$  e pelos planos transversais ao eixo horizontal passando, respectivamente, pelo ponto  $x = x_k$  e pelo ponto  $x = x_{k+1}$ , como ilustrado pela Figura 5.18. Para cada  $k$ , denotando por  $R_k$  e  $r_k$ , respectivamente, o raio máximo e o raio mínimo dados pela função  $g$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , temos que o volume  $V_k$  é menor que o volume do cilindro de altura  $\Delta x$  e raio  $R_k$  e é maior que o volume do cilindro de altura  $\Delta x$  e raio  $r_k$ . Como o volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura, temos que

$$\pi r_k^2 \Delta x \leq V_k \leq \pi R_k^2 \Delta x.$$



Como a área do círculo formado pela interseção da superfície  $S$  como o plano transversal passando por  $x$  é dada pela função

$$f(x) = \pi g(x)^2$$

temos que o mínimo e o máximo da função  $f$  no intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  são dados, respectivamente, por

$$m_k = \pi r_k^2 \quad \text{e} \quad M_k = \pi R_k^2.$$

Temos então que

$$m_k \Delta x \leq V_k \leq M_k \Delta x$$

e, somando todos os volumes  $V_k$ , temos que

$$s_n \leq V \leq S_n, \tag{5.20}$$

onde

$$s_n = m_1 \Delta x + \cdots + m_n \Delta x \quad \text{e} \quad S_n = M_1 \Delta x + \cdots + M_n \Delta x$$

são, respectivamente, a  $n$ -ésima soma inferior e a  $n$ -ésima soma superior da função  $f$ . Pela equação (5.20), pela Proposição 5.12 e pelo Teorema do Sanduíche, temos que

$$V = \int_a^b f(x) dx,$$

de modo que

$$V = \int_a^b \pi g(x)^2 dx$$

(5.21)

ou seja, o volume é a integral da área das seções transversais ao longo da altura do sólido de revolução.

Vamos agora aplicar esses resultados e calcular o volume da esfera de raio  $r$ . Vamos primeiro considerar essa esfera dada pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[-r, r]$ , como mostra a Figura 5.19. Pela equação (5.21), temos então que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r g(x)^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r, \end{aligned}$$

de modo que

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

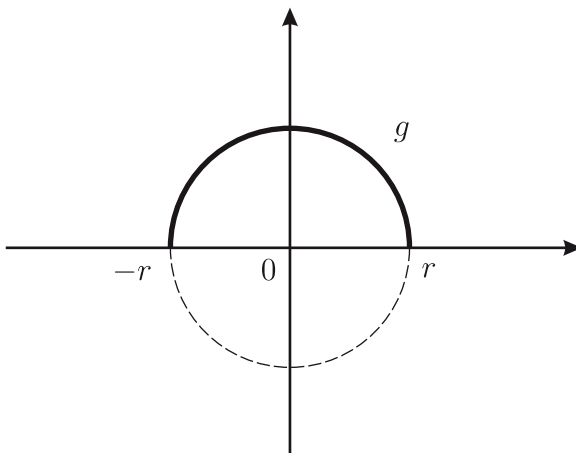


Figura 5.19: Volume da esfera por rotação em relação ao eixo horizontal.

## SOMAS DE RIEMANN

Escolhendo um ponto  $x_k^*$  qualquer do intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , uma *soma de Riemann da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  com  $n$  fatores* é dada por

$$f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

Como  $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$ , segue que

$$s_n \leq f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \leq S_n.$$

Pela Proposição 5.12 e pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \rightarrow \int_a^b f$$

Utilizando a notação para o somatório dos  $n$  primeiros termos de uma sequência  $a_k$  dada por

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

temos então que uma *soma de Riemann da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  com  $n$  fatores* é dada por

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x.$$

Segue então que

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

o que explica a notação de integral, onde a letra grega  $\Sigma$ , que denota somatório, é substituída pela letra latina “S” estilizada  $\int$  e, por outro lado, a letra grega  $\Delta$ , que denota variação, é substituída pela letra latina “d”.

## COMPRIMENTO DE GRÁFICOS

O conceito de soma de Riemann pode ser utilizado para o cálculo tanto de comprimentos quanto de áreas. Vamos primeiro determinar a integral que fornece o comprimento do gráfico de uma função suave  $g$ , definida em  $[a, b]$ , como ilustrado pela Figura 5.20. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que o comprimento  $C$  de  $g$  pode ser aproximada por

$$\sum_{k=1}^n C_k = C_1 + \cdots + C_n$$

que é o comprimento da poligonal ilustrado pela Figura 5.20 que é dado pela soma dos comprimentos  $C_k$  dos segmentos de reta ligando os pontos  $(x_k, g(x_k))$  e  $(x_{k+1}, g(x_{k+1}))$ . Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$C_k^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

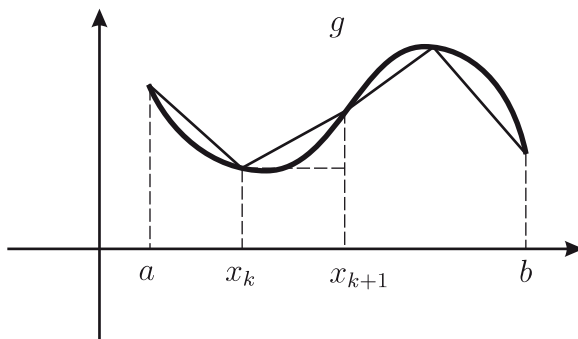


Figura 5.20: Comprimento do gráfico de uma função suave.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe  $x_k^* \in (x_k, x_{k+1})$  tal que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x_k^*).$$

Logo

$$C_k^2 = (\Delta x)^2 + (g'(x_k^*) \Delta x)^2.$$

e portanto

$$C_k = \sqrt{1 + g'(x_k^*)^2} \Delta x.$$

Quanto maior o número de segmentos de reta, mais próximo o comprimento da poligonal vai estar do comprimento de  $g$ , de modo que

$$\sum_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + g'(x_k^*)^2} \Delta x \rightarrow C.$$

Por outro lado, definindo-se

$$f(x) = \sqrt{1 + g'(x)^2}$$

temos que o comprimento aproximado é uma soma de Riemann da função  $f$  e portanto

$$\sum_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Pela unicidade dos limites segue que

$$C = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.22)$$

de modo que

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx \quad (5.23)$$

Vamos aplicar esse resultado para calcular o comprimento de um cabo de energia sustentado por duas torres de alta tensão, como ilustrado pela Figura 5.21. A função que descreve essa curva numa unidade de medida conveniente

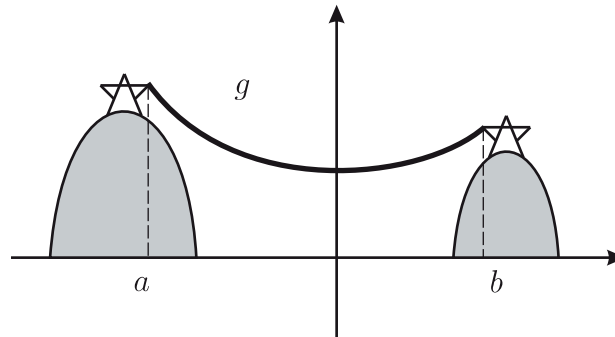


Figura 5.21: Comprimento de um cabo de energia.

é a denominada *catenária* ou *cosseno hiperbólico* cuja expressão é dada por

$$g(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A derivada do cosseno hiperbólico é denominada *seno hiperbólico* e sua expressão é

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Essas funções são denominadas funções trigonométricas hiperbólicas, pois do mesmo modo que as funções trigonométricas clássicas satisfazem equação do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ , ou seja,

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1,$$

elas satisfazem a equação da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ , ou seja,

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

A verificação dessa propriedade é deixada como exercício. Pela equação (5.23), temos então que

$$\begin{aligned} C &= \int_a^b \sqrt{1 + \cosh'(x)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \sinh(x)^2} dx \\ &= \int_a^b \cosh(x) dx \\ &= [\sinh(x)]_a^b, \end{aligned}$$

de modo que

$$C = \sinh(b) - \sinh(a)$$

## ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Vamos encerrar esta seção determinando a integral que fornece a área da superfície  $S$ , obtida pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico de  $g \geq 0$ , definida em  $[a, b]$ , como ilustrado pela Figura 5.22. Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de tamanhos iguais a  $\Delta x$ , temos que a área  $A$  da superfície  $S$  pode ser aproximada por

$$\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + \cdots + A_n$$

que é a soma das áreas

$$A_k = 2\pi \left( \frac{g(x_{k+1}) + g(x_k)}{2} \right) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

das cascas laterais  $L_k$  obtidas pela rotação do segmento de reta que liga o ponto  $(x_k, g(x_k))$  ao ponto  $(x_{k+1}, g(x_{k+1}))$ , como ilustrado pela Figura 5.22.

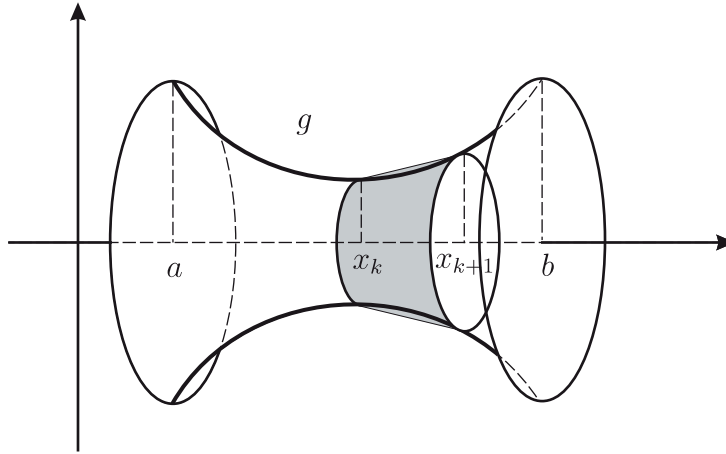


Figura 5.22: Área de uma superfície de rotação em relação ao eixo horizontal.

Para a obtenção da fórmula da área  $A$ , pode analisar os pedaços da superfície  $S$  onde o gráfico do perfil  $g$  não muda de forma. Em cada um desses pedaços,  $g$  pode ser crescente ou decrescente e com concavidade para cima ou para baixo. Vamos analisar o caso em que  $g$  é crescente com concavidade para cima, sendo que nos outros casos a análise é similar. Neste caso, temos que  $g$  e  $g'$  são crescentes, mostrando que

$$2\pi g(x_k) \leq 2\pi \left( \frac{g(x_{k+1}) + g(x_k)}{2} \right) \leq 2\pi g(x_{k+1})$$

e também que

$$\sqrt{1 + g'(x_k)^2} \leq \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \leq \sqrt{1 + g'(x_{k+1})^2},$$

uma vez que, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in (x_k, x_{k+1})$  tal que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(c).$$

Multiplicando-se as duas desigualdades acima, obtemos a desigualdade

$$f(x_k) \leq \frac{A_k}{\Delta x} \leq f(x_{k+1}),$$

onde

$$f(x) = 2\pi g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2}$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$  tal que

$$f(x_k^*) = \frac{A_k}{\Delta x},$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

é uma soma de Riemann da função  $f$ . Portanto

$$\sum_{k=1}^n A_k \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Pela unicidade dos limites segue que

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

de modo que

$$A = 2\pi \int_a^b g(x) \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

(5.24)

Vamos agora aplicar esse resultado e calcular a área da esfera de raio  $r$ . Temos que a esfera é dada pela rotação, em relação ao eixo horizontal, do gráfico da função  $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , definida em  $[-r, r]$ , como mostra a Figura 5.19. Temos que

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

e, pela equação (5.24), segue então que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r dx, \end{aligned}$$



de modo que

$$A = 4\pi r^2$$

## 5.8 PÊNDULO SEM ATRITO

Nesta seção, determinaremos o movimento do pêndulo sem atrito. Em primeiro lugar, vamos determinar sua Lei de Conservação da Energia. Supomos que a haste rígida que sustenta a ponta do pêndulo possui comprimento  $L$  e massa desprezível.

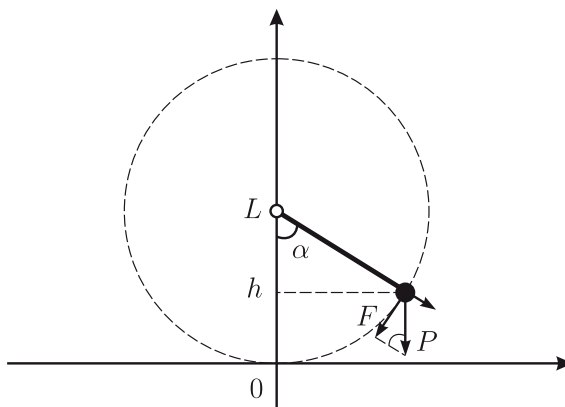


Figura 5.23: Pêndulo sem atrito.

A força tangencial  $F$  atuando na ponta do pêndulo de massa  $m$  é tal que

$$\frac{F}{P} = \text{sen}(\alpha(t))$$

onde  $P = -mg$  é a força peso e o ângulo  $\alpha = \alpha(t)$  é uma função do tempo  $t$  e é ilustrado pela Figura 5.23. Pela Segunda Lei de Newton, temos que  $F = ms''$ , onde a aceleração tangencial é dada por

$$s''(t) = L\alpha''(t)$$

uma vez que a posição tangencial é dada por

$$s(t) = L\alpha(t)$$

Portanto, temos que

$$mL\alpha''(t) = -mg \operatorname{sen}(\alpha(t)) \quad (5.25)$$

Multiplicando a equação (5.25) por  $\alpha'(t)$  e integrando em relação a  $t$ , segue que

$$mL \int \alpha''(t) \alpha'(t) dt = mg \int -\operatorname{sen}(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \quad (5.26)$$

Temos que

$$\int \alpha''(t) \alpha'(t) dt = \left( \int y dy \right)_{y=\alpha'(t)} = \frac{\alpha'(t)^2}{2} + C,$$

pois  $dy = \alpha''(t) dt$  e

$$\int -\operatorname{sen}(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \left( \int -\operatorname{sen}(z) dz \right)_{z=\alpha(t)} = \cos(\alpha(t)) + D,$$

pois  $dz = \alpha'(t) dt$ . Multiplicando a equação (5.26) por  $L$  e substituindo as expressões das integrais indefinidas, segue que

$$m \frac{L^2 \alpha'(t)^2}{2} - mgL \cos(\alpha(t)) = K,$$

onde  $K = D - C$  é uma constante arbitrária. Como a velocidade tangencial é dada por

$$v(t) = s'(t) = L\alpha'(t)$$

e a altura em relação ao solo é dada por

$$h(t) = L - L \cos(\alpha(t)) \quad (5.27)$$

temos que

$$m \frac{v(t)^2}{2} + mgh(t) = E$$

onde  $E = K + mgL$  é a energia mecânica do sistema.

## CONDIÇÕES INICIAIS

Vamos supor que

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = 0$$

Temos então que ponta do pêndulo é solta da altura  $2L$  com velocidade nula, de modo que

$$E = m \frac{0^2}{2} + mg(2L) = 2mgL.$$

Neste caso, segue que

$$m \frac{L\alpha'(t)^2}{2} + mgL(1 - \cos(\alpha(t))) = 2mgL.$$

Isolando  $\alpha'(t)$  e simplificando, obtemos que

$$\alpha'(t)^2 = \frac{2g}{L}(1 + \cos(\alpha(t))).$$

Agora vamos utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$1 + \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha/2)^2,$$

cujas demonstrações são deixadas como exercício. Temos então que

$$\alpha'(t)^2 = \frac{4g}{L} \cos(\alpha(t)/2)^2,$$

o que mostra que

$$\frac{\alpha'(t)}{\cos(\alpha(t)/2)} = 2\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Integrando essa equação na variável  $t$ , segue que

$$\int \frac{\alpha'(t)}{\cos(\alpha(t)/2)} dt = 2\sqrt{\frac{g}{L}}t + R$$

(5.28)

Para calcularmos essa integral, utilizamos a substituição

$$\alpha = \alpha(t)/2 \quad \text{e} \quad 2d\alpha = \alpha'(t) dt$$

de modo que

$$\int \frac{\alpha'(t)}{\cos(\alpha(t)/2)} dt = \left( \int \frac{2}{\cos(\alpha)} d\alpha \right)_{\alpha=\alpha(t)/2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\cos(\alpha)} d\alpha &= \int \frac{2 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} d\alpha \\ &= \int \frac{2 \cos(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)^2} d\alpha \\ &= \left( \int \frac{2}{1 - x^2} dx \right)_{x=\sin(\alpha)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a substituição  $x = \sin(\alpha)$ , de modo que  $dx = \cos(\alpha) d\alpha$ . Vamos agora utilizar o método das frações parciais. Como

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x),$$

temos que existem constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x}.$$

Colocando as frações do lado direito no mesmo denominador, temos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - x^2} &= \frac{A(1 + x) + B(1 - x)}{(1 - x)(1 + x)} \\ &= \frac{(A - B)x + (A + B)}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Como os denominadores são iguais, temos que

$$2 = (A - B)x + (A + B),$$

o que, por igualdade de polinômios, mostra que

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad A + B = 2.$$

Resolvendo esse sistema, obtemos que  $A = B = 1$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1 - x^2} dx &= \int \frac{1}{1 + x} dx + \int \frac{1}{1 - x} dx \\ &= \log(|1 + x|) - \log(|1 - x|) + S \\ &= \log\left(\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|\right) + S. \end{aligned}$$

Como

$$x = \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha(t)/2)$$

Temos que

$$\int \frac{\alpha'(t)}{\cos(\alpha(t)/2)} dt = \log\left(\frac{1 + \text{sen}(\alpha(t)/2)}{1 - \text{sen}(\alpha(t)/2)}\right) + S.$$

Utilizando a equação (5.28), segue que

$$\log\left(\frac{1 + \text{sen}(\alpha(t)/2)}{1 - \text{sen}(\alpha(t)/2)}\right) = 2\sqrt{\frac{g}{L}}t + T$$

onde  $T = R - S$ . Supondo que  $\alpha(0) = 0$ , obtemos que  $T = \log(1) = 0$  e também que

$$\frac{1 + \text{sen}(\alpha(t)/2)}{1 - \text{sen}(\alpha(t)/2)} = e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t}.$$

Isolando  $\text{sen}(\alpha(t)/2)$ , temos que

$$\text{sen}(\alpha(t)/2) = \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} + 1}.$$

Agora vamos utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \text{sen}(\alpha/2)^2,$$

cujas demonstrações são deixadas como exercício. Temos então que

$$1 - \cos(\alpha(t)) = 2 \left( \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} + 1} \right)^2.$$

Pela equação (5.27), segue então que

$$h(t) = 2L \left( \frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{L}}t} + 1} \right)^2$$

## EXERCÍCIOS

### DE DEMONSTRAÇÃO

5.1 Complete a demonstração do Corolário 5.2, no caso em que  $a \leq b \leq c$ .

5.2 Complete a demonstração do TFC, mostrando que  $F'(x \uparrow) = f(x)$ .

5.3 Usando que

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2},$$

mostre que

$$1 + \cos(\beta) = 2 \cos^2(\beta/2).$$

Dica: faça  $\beta = 2\alpha$  na primeira equação.

### DE APLICAÇÃO

4.1 No estudo dos fogos de artifício, suponha que  $v(t)$  seja a velocidade de uma bomba lançada verticalmente com velocidade inicial  $v(0) = 50$  m/s. Suponha ainda que a bomba tenha massa  $m = 0,1$  kg, que a aceleração da gravidade seja  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e que a força de resistência do ar  $F$  seja modelada por  $F = -0,01 v(t)$ . Nessas condições, utilizando a Segunda Lei de Newton,  $v(t)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{v'(t)}{100 + v(t)} = -0,1 & \text{para } t > 0, \\ v(0) = 50. \end{cases}$$

- (i) Supondo  $100 + v(t) > 0$ , use substituição de variáveis para determinar a integral indefinida da função  $\frac{v'(t)}{100 + v(t)}$ .
  - (ii) Use o item anterior e a condição inicial  $v(0) = 50$  para obter a função  $v(t)$ .
  - (iii) Determine o instante  $t_M$  em que a bomba alcança a altura máxima usando as aproximações  $\log(2) = 0,7$  e  $\log(3) = 1,1$ .
- 4.2 Nem tudo o que sobe desce! De fato, pode-se imaginar que um corpo seja lançado com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para se ter uma ideia dessa velocidade, denote por

$v_0$  a velocidade inicial, por  $m$  a massa e por  $s(t)$  a altura do corpo a partir do solo no instante  $t$ . Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional  $F = -mMG/(R+s(t))^2$ , em que  $G$  é constante,  $M$  é a massa e  $R$  é o raio da Terra. Usando a Segunda Lei de Newton  $F = ms''(t)$ , em que  $s''(t)$  é a aceleração do corpo, segue-se que  $s(t)$  satisfaz às condições

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} ms''(t) = -\frac{mMG}{(R+s(t))^2} \\ s(0) = 0 \text{ e } s'(0) = v_0 \end{array} \right.$$

- (i) Cancelando a massa  $m$  e multiplicando a equação em (\*) por  $s'(t)$ , obtém-se que  $s'(t)s''(t) = -MGs'(t)/(R+s(t))^2$ . Use substituição de variáveis para determinar a integral indefinida de cada uma das funções  $s'(t)s''(t)$  e  $-MGs'(t)/(R+s(t))^2$ .
- (ii) Usando o item anterior, verifique que  $s'(t)^2$  pode ser expressa em termos da função  $s(t)$ , das constantes  $M$  e  $G$  e de uma constante arbitrária  $C$ .
- (iii) Use as condições iniciais  $s(0) = 0$  e  $s'(0) = v_0$  para determinar a constante  $C$ .
- (iv) Mostre que, se

$$v_0 \geq v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R}},$$

então a velocidade  $s'(t)$  é sempre positiva. A constante  $v_e$  é denominada a velocidade de escape da Terra.

4.3 Para um sistema massa-mola na ausência de atrito, temos que a energia mecânica

$$\frac{mv(t)^2}{2} + \frac{ks(t)^2}{2} = E$$

se conserva, onde  $s(t)$  e  $v(t)$  são, respectivamente, a posição e a velocidade do bloco,  $m$  é a massa do bloco e  $k$  é a constante de Hooke. Supondo que a massa é  $m = 1$  e a constante de Hooke é  $k = \pi^2$ , a posição inicial é  $s(0) = 0$  e a velocidade inicial é  $v(0) = 2\pi$ , a energia total é então  $E = 2\pi^2$ . A equação da conservação da energia é então equivalente a

$$(*) \frac{s'(t)}{\sqrt{4-s(t)^2}} = \pi.$$

- (i) Use a regra da substituição para transformar a integral  $\int s'(t)/\sqrt{4-s(t)^2} dt$  em uma outra integral na variável  $u$  que não envolva a derivada  $s'(t)$ .
- (ii) Calcule a integral na variável  $u$  do item anterior usando o método da substituição trigonométrica.
- (iii) Use a equação (\*) e os itens anteriores para determinar uma expressão de  $s(t)$  envolvendo uma constante arbitrária  $C$ .
- (iv) Determine  $C$  em função da posição inicial  $s(0)$ .
- 4.4 Um modelo para o estudo da velocidade  $v(t)$  de um paraquedista é supor que a força de resistência do ar seja igual a  $b v(t)^2$ , isto é, proporcional ao quadrado da velocidade. A Segunda Lei de Newton fica

$$m v'(t) = -mg + b v(t)^2.$$

Suponha os valores de  $b = 700$  kg/s, da aceleração da gravidade  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e da massa conjunta do paraquedas e do paraquedista  $m = 70$  kg. Da Segunda Lei de Newton segue que

$$(*) \quad \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1} = -10, \quad t > 0.$$

- (i) Use a substituição  $u = v(t)$  para transformar a integral  $\int v'(t) dt / (v(t)^2 - 1)$  em uma outra que não envolva a derivada  $v'(t)$ .
- (ii) Calcule a integral na variável  $u$  do item anterior usando o método das frações parciais.
- (iii) Supondo  $v(t) - 1 > 0$ , use a equação (\*) e os itens anteriores para determinar uma expressão de  $v(t)$  em termos da função exponencial e uma constante arbitrária  $C$ .
- (iv) Se o salto for efetuado de uma altura suficientemente grande, a velocidade com que o paraquedista alcança o solo é aproximadamente igual ao limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ . Calcule esse limite e verifique que o resultado é independente da constante arbitrária  $C$ .

O mecanismo de suspensão dos automóveis consiste num sistema composto de uma mola e de um amortecedor. Temos, da Segunda Lei de



Newton, que a posição vertical  $s(t)$  de um dado veículo satisfaz a equação

$$ms''(t) + cs'(t) + ks(t) = 0,$$

onde  $m = 1$  é a massa do automóvel,  $c = 4$  é a viscosidade do amortecedor e  $k = 4$  é a constante de Hooke da mola. Se escrevemos  $s(t) = e^{\int y(t) dt}$ , temos que  $y(t)$  satisfaz à equação integral de Ricatti

$$\left( \int \frac{1}{mx^2 + cx + k} dx \right)_{x=y(t)} = -t + D,$$

onde  $D$  é uma constante arbitrária.

- (i) Calcule a integral  $\int 1/(mx^2 + cx + k) dx$  utilizando o método das frações parciais. Esse é um sistema crítico, supercrítico ou subcrítico?
- (ii) Utilize o item anterior e a equação integral de Ricatti para obter a expressão de  $y(t)$ , em função de  $t$  e de uma constante arbitrária.
- (iii) Calcule a integral  $\int y(t) dt$  e obtenha a expressão de  $s(t) = e^{\int y(t) dt}$ , em função de  $t$  e de duas constantes arbitrárias.
- (iv) Se  $s(0) = 0$  e  $v(0) = -1$ , determine o valor das duas constantes arbitrárias do item anterior. Faça o esboço do gráfico de  $s(t)$ .
- (v) Refaça os itens anteriores, exceto o esboço do gráfico, supondo que  $m = 1$ ,  $c = 4$  e que agora  $k = 5$ .



## GABARITOS DE FIXAÇÃO

### 2.1 APROXIMAÇÃO DA ORIGEM

2.1.1 (i) **(b)**, (ii) **(d)**, (iii) **(c)**

2.1.2 (i) **(d)**, (ii) **(b)**, (iii) **(c)**

2.1.3 (i) **(d)**, (ii) **(b)**, (iii) **(a)**

### 2.2 LIMITE DE SEQUÊNCIAS

2.2.1 (i) **(b)**, (ii) **(c)**, (iii) **(a)**, (iv) **(d)**

2.2.2 **(d)**

### 2.4 LIMITE DE FUNÇÕES

2.4.1 (i) **(d)**, (ii) **(d)**

2.4.2 **(c)**

2.4.3 **(c)**

2.4.4 (b)

2.4.5 (d)

2.4.6 (b)

2.4.7 (b)

## 2.5 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

2.5.1 (d)

2.5.2 (b)

2.5.3 (d)

2.5.4 (c)

2.5.5 (a)

2.5.6 (d)

2.5.7 (c)

2.5.8 (b)

## 2.6 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

2.6.1 (i) (d), (ii) (a)

2.6.2 (i) (a), (ii) (a)

2.6.3 (i) (b), (ii) (c)

## 2.8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

2.8.1 (b)

2.8.2 (a)

2.8.3 (a)

2.8.4 (c)

## 3.1 RETA TANGENTE E VELOCIDADE

3.1.1 (c)

3.1.2 (b)

3.1.3 (i) (a), (ii) (b)

3.1.4 (i) (a), (ii) (c)

3.1.5 (a)

3.1.6 (b)

3.1.7 (i) (d), (ii) (b)

3.1.8 (i) (d), (ii) (a)

## 3.2 FUNÇÃO DERIVADA E ACELERAÇÃO

3.2.1 (c)

3.2.2 (i) (a), (ii) (b)

3.2.3 (d)

3.2.4 (i) (c), (ii) (c)

3.2.5 (a)

3.2.6 (a)

3.2.7 (i) (b), (ii) (a)

3.2.8 (i)(c) , (ii) (a)

3.2.9 (a)

3.2.10 (b)

### **3.3 DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL**

3.3.1 **(b)**

3.3.2 *(i)* **(a)**, *(ii)* **(b)**

3.3.3 **(c)**

3.3.4 **(a)**

### **3.4 DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

3.4.1 **(b)**

3.4.2 **(c)**

3.4.3 *(i)* **(b)**, *(ii)* **(a)**

3.4.4 **(c)**

3.4.5 **(b)**

3.4.6 **(a)**

3.4.7 **(b)**

### **3.5 DERIVADA DE FUNÇÕES COMPOSTAS**

3.5.1 **(b)**

3.5.2 **(c)**

3.5.3 **(d)**

3.5.4 **(a)**

3.5.5 **(c)**

3.5.6 **(a)**

3.5.7 **(c)**

3.5.8 **(a)**

3.5.9 **(d)**

## 3.6 DERIVADA DE FUNÇÕES INVERSA

3.6.1 **(d)**

3.6.2 **(c)**

3.6.3 **(a)**

3.6.4 **(c)**

3.6.5 **(b)**

3.6.6 **(b)**

3.6.7 **(a)**

3.6.8 **(c)**

## 4.1 OTIMIZAÇÃO

4.1.1 *(i)* **(c)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(d)**

4.1.2 *(i)* **(b)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(c)**

4.1.3 *(i)* **(b)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(a)**

4.1.4 *(i)* **(d)**, *(ii)* **(c)**, *(iii)* **(b)**

4.1.5 *(i)* **(d)**, *(ii)* **(c)**, *(iii)* **(b)**

## 4.2 CRESCIMENTO E CONCAVIDADE

4.2.1 *(i)* **(d)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(d)**, *(iv)* **(d)**, *(v)* **(b)**, *(vi)* **(b)**

4.2.2 *(i)* **(c)**, *(ii)* **(c)**, *(iii)* **(d)**, *(iv)* **(d)**, *(v)* **(b)**, *(vi)* **(b)**

4.2.3 *(i)* **(a)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(c)**, *(iv)* **(b)**, *(v)* **(b)**, *(vi)* **(c)**

4.2.4 *(i)* **(b)**, *(ii)* **(b)**, *(iii)* **(c)**, *(iv)* **(d)**, *(v)* **(d)**, *(vi)* **(d)**

4.2.5 *(i)* **(b)**, *(ii)* **(d)**, *(iii)* **(c)**, *(iv)* **(c)**, *(v)* **(b)**, *(vi)* **(b)**

### 4.3 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

4.3.1 (i) **(d)**, (ii) **(b)**, (iii) **(b)**

4.3.2 (i) **(c)**, (ii) **(c)**, (iii) **(c)**

4.3.3 (i) **(b)**, (ii) **(a)**, (iii) **(d)**

4.3.4 (i) **(a)**, (ii) **(d)**, (iii) **(a)**

4.3.5 (i) **(b)**, (ii) **(c)**, (iii) **(a)**

4.3.6 (i) **(a)**, (ii) **(d)**, (iii) **(d)**

### 5.1 ÁREA LÍQUIDA E VARIAÇÃO

5.1.1 **(c)**

5.1.2 **(a)**

5.1.3 **(b)**

5.1.4 **(b)**

5.1.5 **(d)**

5.1.6 **(c)**

5.1.7 **(a)**

5.1.8 **(a)**

5.1.9 **(a)**

### 5.2 TEOREMA FUNDAMENTAL

5.2.1 (i) **(b)**, (ii) **(a)**

5.2.2 (i) **(c)**, (ii) **(d)**

5.2.3 (i) **(c)**, (ii) **(b)**



5.2.4 (i) **(d)**, (ii) **(a)**

5.2.5 (i) **(c)**, (ii) **(a)**

5.2.6 (i) **(c)**, (ii) **(c)**

### 5.3 SUBSTITUIÇÃO

5.3.1 (i) **(d)**, (ii) **(a)**

5.3.2 (i) **(c)**, (ii) **(c)**

5.3.3 (i) **(a)**, (ii) **(b)**

5.3.4 (i) **(b)**, (ii) **(d)**

5.3.5 (i) **(b)**, (ii) **(a)**

### 5.4 SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

5.4.1 (i) **(c)**, (ii) **(a)**

5.4.2 (i) **(b)**, (ii) **(c)**

5.4.3 (i) **(d)**, (ii) **(a)**

5.4.4 (i) **(b)**, (ii) **(d)**

### 5.5 INTEGRAÇÃO POR PARTES

5.5.1 (i) **(c)**, (ii) **(a)**

5.5.2 (i) **(b)**, (ii) **(c)**

5.5.3 (i) **(b)**, (ii) **(a)**

5.5.4 (i) **(a)**, (ii) **(d)**

5.5.5 (i) **(c)**, (ii) **(d)**

5.5.6 (i) **(d)**, (ii) **(c)**

5.5.7 (i) **(c)**, (ii) **(a)**

5.5.8 (i) **(d)**, (ii) **(b)**

## 5.6 FRAÇÕES PARCIAIS

5.6.1 (i) **(b)**, (ii) **(b)**

5.6.2 (i) **(c)**, (ii) **(c)**

5.6.3 (i) **(a)**, (ii) **(a)**

5.6.4 (i) **(d)**, (ii) **(a)**

5.6.5 (i) **(b)**, (ii) **(b)**



## APÊNDICES

### A.1 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção, vamos considerar limites relacionados a uma dada *progressão geométrica* ( $r^n$ ). Nosso primeiro resultado afirma que essa progressão se aproxima da origem, desde que  $-1 < r < 1$ .

**Proposição A.1:** Se  $-1 < r < 1$ , então

$$r^n \rightarrow 0$$

**Prova:** Se  $0 \leq r < 1$ , então

$$r = \frac{1}{1+a}$$

onde

$$a = \frac{1}{r} - 1 > 0.$$

Pode-se mostrar por indução, o que é deixado como exercício, que  $(1+a)^n > an$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue então que

$$0 \leq r^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{an}$$

e o resultado segue por sanduíche. Se  $-1 < r < 1$ , então  $0 \leq |r| < 1$  e, pela primeira parte da demonstração, temos que  $|r^n| = |r|^n \rightarrow 0$ , o que completa a demonstração.  $\square$

Agora vamos considerar a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão geométrica  $(r^k)$  partindo de  $k = 0$ , denotada por

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

Vamos mostrar que a sequência  $(s_n)$  possui limite, desde que  $-1 < r < 1$ .

**Proposição A.2:** Se  $-1 < r < 1$ , então

$$s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$$

Além disso, para todo  $0 \leq r < 1$ , temos que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n \leq \frac{1}{1-r}$$

**Prova:** Temos que

$$r s_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1} = s_n - 1 + r^{n+1}.$$

Logo  $r s_n = s_n + r^{n+1} - 1$  e isolando  $s_n$  nessa equação, segue que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

A primeira afirmação segue então da Proposição A.1 e das regras de limite. A segunda afirmação é imediata, pois, para todo  $0 \leq r < 1$ , temos que

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \leq \frac{1}{1 - r}.$$

$\square$

## A.2 BINÔMIO DE NEWTON

Nesta seção, vamos mostrar como relacionar a potência  $(a + b)^n$  com as potências  $a^k$  e  $b^k$ , onde  $0 \leq k \leq n$ . Primeiro vamos considerar o caso particular onde  $a = 1$  e  $b = x$ .

**Proposição A.3:** *Temos que*

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

é o denominado  $(k, n)$ -número binomial. Em particular, temos que

$$\binom{n}{k} \leq n^k$$

**Prova:** Temos que  $(1 + x)^n$  é um polinômio em  $x$  de grau  $n$  cujos coeficientes podem a princípio depender de  $n$  e então

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

onde claramente  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ . Como

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) = (1 + x)^n + (1 + x)^n x,$$

temos que

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{k-1}x^{k-1} + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n \\ &\quad + \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}x^k + \binom{n}{k}x^{k+1} + \cdots + \binom{n}{n}x^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} + \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] x + \cdots + \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k + \cdots + \left[ \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right] x^n + \binom{n}{n}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

para cada  $1 \leq k \leq n$ . Vamos utilizar essa fórmula para provar por indução em  $n$  que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

De fato, para  $n = 1$ , temos que

$$\binom{1}{0} = 1 = \frac{1!}{0!(1-0)!} \quad \text{e} \quad \binom{1}{1} = 1 = \frac{1!}{1!(1-1)!}.$$

Supondo que a fórmula vale para  $n$ , vamos mostrar que também vale para  $n + 1$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}. \end{aligned}$$

Finalmente, uma vez que  $k! \geq 1$ , temos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) \leq n^k.$$

□

A tabela abaixo, conhecida como triângulo de Pascal, mostra os números binomias.

$n$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Encerramos a seção com a famosa fórmula do *binômio de Newton*.

**Proposição A.4:** Temos que

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

**Prova:** Temos que

$$(a + b)^n = a^n (1 + x)^n,$$

onde  $x = b/a$ . Pela Proposição A.3, temos que

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n \right] \\ &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^n x + \cdots + \binom{n}{k}a^n x^k + \cdots + \binom{n}{n}a^n x^n \\ &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \end{aligned}$$

□

### A.3 LIMITE E MONOTONICIDADE

Nesta seção, vamos mostrar dois resultados que garantem tanto a existência do limite de sequências quanto a existência do limite de funções monótonas. A demonstração destes resultados está diretamente ligada à propriedade da completude da reta  $\mathbb{R}$ . O primeiro afirma que uma sequência monótona limitada sempre possui um limite.

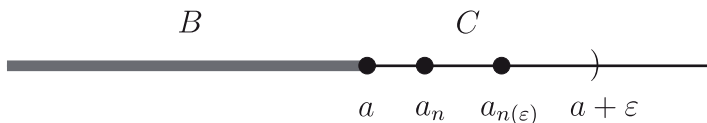
**Proposição A.5:** Se  $a_n$  é monótona e limitada, então  $a_n \rightarrow a$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ .

**Prova:** Vamos supor que  $a_n$  é não-crescente. Definimos o conjunto

$$C = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

Figura A.1: Conjuntos  $B$  e  $C$ .

ilustrados pela Figura A.1.

Temos que  $C$  é não-vazio e, como  $a_n$  é limitada, temos que  $B$  também é não-vazio. Além disso, por definição, temos que  $B \leq C$ . Logo, pela completude de  $\mathbb{R}$ , existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $B \leq a \leq C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $a + \varepsilon$  não pertence a  $B$ . Logo, existe  $n(\varepsilon)$  tal que

$$a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Como  $a \leq C$  e como  $a_n$  é não-crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies a \leq a_n \leq a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \implies 0 \leq a_n - a < \varepsilon,$$

mostrando que  $a_n \rightarrow a$ . O caso em que  $a_n$  é não-decrescente pode ser reduzido ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício.  $\square$

O segundo resultado afirma que uma função monótona sempre possui limite laterais.

**Proposição A.6:** *Se  $f$  é uma função monótona cujo domínio é um intervalo aberto, então os limites laterais existem.*

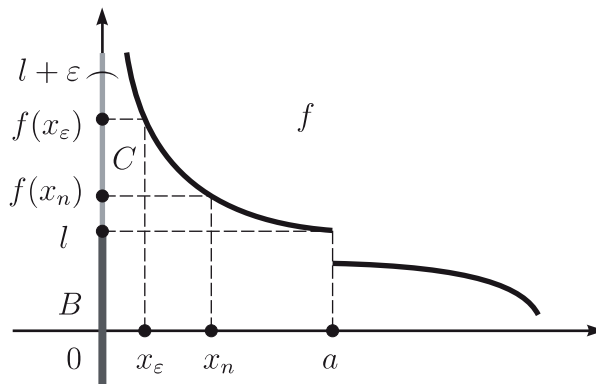
**Prova:** Vamos supor que  $f$  é não-crescente e considerar o limite lateral esquerdo em  $a \in \text{dom}(f)$ . Definimos o conjunto

$$C = \{f(x) : x < a, x \in \text{dom}(f)\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq f(x) \text{ para todo } x < a, x \in \text{dom}(f)\},$$



Figura A.2: Conjuntos  $B$  e  $C$ .

ilustrados pela Figura A.2.

Como domínio de  $f$  é um intervalo aberto, temos que  $C$  é não-vazio e, como  $f$  é não-crescente, temos que  $f(a) \in B$ . Além disso, por definição, temos que  $B \leq C$ . Logo, pela completude de  $\mathbb{R}$ , existe  $l \in \mathbb{R}$  tal que  $B \leq l \leq C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $l + \varepsilon$  não pertence a  $B$ . Logo existe  $x_\varepsilon < a$ ,  $x_\varepsilon \in \text{dom}(f)$ , tal que

$$f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon.$$

Se  $x_n \uparrow a$ , então existe  $n(\varepsilon)$  tal que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies x_\varepsilon < x_n < a.$$

Como  $l \leq C$  e como  $f$  é não-crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies l \leq f(x_n) \leq f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \implies 0 \leq f(x_n) - l < \varepsilon,$$

mostrando que  $f(x_n) \rightarrow l$ . Como  $x_n \uparrow a$  é arbitrária, segue que

$$l = \lim_{x \uparrow a} f(x).$$

Os casos em que  $f$  é não-decrescente e o limite é o lateral direito podem ser reduzidos ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício.  $\square$

## A.4 DERIVADA DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Vamos agora analisar o caso em que  $g'(a) = 0$ , de modo a completarmos a demonstração da Regra da Cadeia.

**Proposição A.7:** *Se  $g$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  e  $f$  é derivável em  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é derivável no ponto  $a$  e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a)$$

**Prova:** Como

$$f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)},$$

existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} \right| \leq m$$

para todo  $y$  onde  $0 < |y - g(a)| < 1/m$ . De fato, caso contrário, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existiria  $y_n$  tal que  $0 < |y_n - g(a)| < 1/n$  e também

$$\left| \frac{f(y_n) - f(g(a))}{y_n - g(a)} \right| > n$$

e, portanto,  $f$  não seria derivável em  $g(a)$ , uma vez que  $y_n \rightarrow g(a)$ , com  $y_n \neq g(a)$ . Temos então que

$$|f(y) - f(g(a))| \leq m|y - g(a)|,$$

para todo  $y$  com distância a  $g(a)$  menor do que  $1/m$ . Portanto

$$\begin{aligned} 0 \leq |(f \circ g)'(a)| &= \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(g(x)) - f(g(a))|}{|x - a|} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{m|g(x) - g(a)|}{|x - a|} \\ &= m \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| \\ &= m|g'(a)| = 0, \end{aligned}$$

mostrando que

$$(f \circ g)'(a) = 0 = f'(g(a))g'(a).$$

□

## A.5 PROPRIEDADES DA ÁREA

Vamos iniciar esta seção apresentando as propriedades fundamentais que caracterizam o conceito de *área de uma região plana*. Antes devemos introduzir os conceitos de *isometria* e de *congruência de figuras planas*. Uma isometria é uma transformação  $T$  do plano Cartesiano nele mesmo que preserva a distância entre pontos. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância  $d(A, B)$  entre os pontos  $A$  e  $B$  satisfaz a seguinte equação

$$d(A, B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

em termos de suas coordenadas.

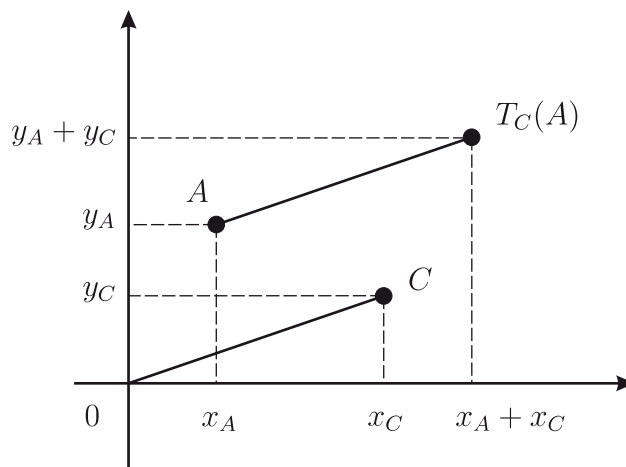


Figura A.3: Translação do ponto  $A$  pelo ponto  $C$ .

A transformação

$$T_C(x, y) = (x + x_C, y + y_C)$$

denominada *translação pelo ponto C*, claramente satisfaz a equação

$$d(T_C(A), T_C(B)) = d(A, B)$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$ . Portanto, a translação pelo ponto  $C$  é uma isometria, ilustrada pela Figura A.3.

Outro exemplo relevante é a transformação  $R_\theta$ , denominada *rotação pelo ângulo  $\theta$* , tal que  $R_\theta(A)$  é a rotação anti-horária de um ponto  $A$  pelo ângulo  $\theta$ , como ilustrado pela Figura A.4.

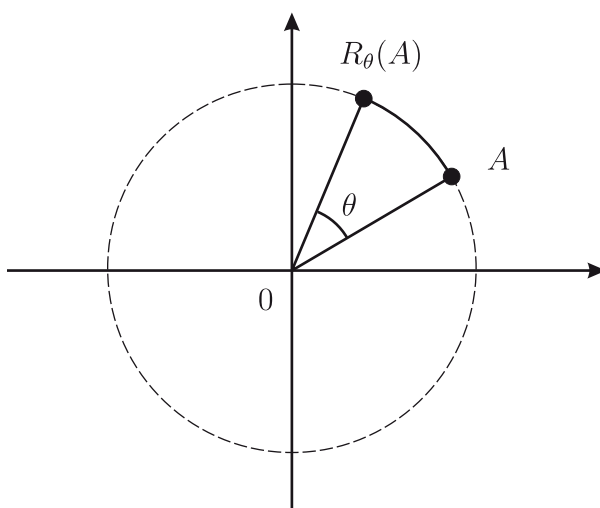


Figura A.4: Rotação do ponto  $A$  pelo ângulo  $\theta$ .

Pelo caso (LAL) da congruência entre triângulos, temos que a rotação pelo ângulo  $\theta$  satisfaz a equação

$$d(R_\theta(A), R_\theta(B)) = d(A, B)$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$  e também é uma isometria.

Um último exemplo de isometria é a *reflexão em torno do eixo  $0y$* , dada por

$$E(x, y) = (-x, y)$$

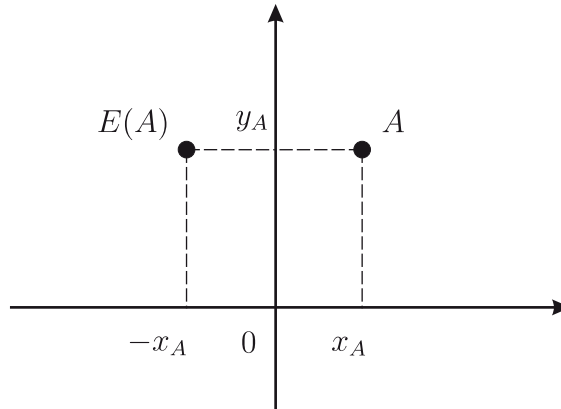


Figura A.5: Reflexão do ponto  $A$  em torno do eixo  $0y$ .

e apresentada pela Figura A.5.

A composição de isometrias é uma isometria, pois se  $T$  e  $S$  são isometrias, então

$$d(T(S(A)), T(S(B))) = d(S(A), S(B)) = d(A, B)$$

para todos os pontos  $A$  e  $B$ . Pode-se mostrar que qualquer isometria é uma composição de uma translação, de uma rotação e de uma reflexão.

Duas regiões  $R_1$  e  $R_2$  do plano Cartesiano são *congruentes* e denota-se  $R_1 \equiv R_2$  se existe uma isometria  $T$  tal que  $R_1 = T(R_2)$ . Como a composição de isometrias é uma isometria, a relação de congruência é transitiva. Claramente ela é reflexiva, pois a transformação identidade é uma isometria. E também simétrica, pois pode-se mostrar que toda isometria possui uma isometria inversa.

A área  $A(R)$  de uma dada região  $R$  do plano cartesiano é um número real maior ou igual a zero satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) **Unidade:** A área de um quadrado unitário é igual a um;

(A2) **Nulidade:** A área de um segmento de reta é nula.

(A3) **Aditividade:** A área do todo é a soma da área das partes, ou seja, se a região  $R$  é a união de duas subregiões disjuntas  $R_1$  e  $R_2$ , então  $A(R) = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$ ;

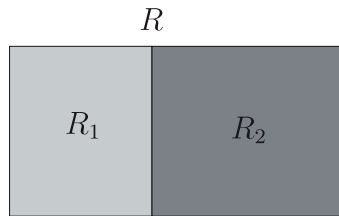


Figura A.6: Aditividade.

- (A4) **Monotonicidade:** A área do todo é maior ou igual a área de cada parte, ou seja, se  $R_1 \subset R_2$  é uma subregião, então  $A(R_1) \leq A(R_2)$ ;

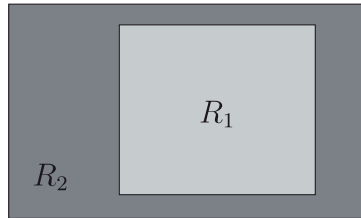


Figura A.7: Monotonocidade.

- (A5) **Invariância:** A área de regiões congruentes é igual, ou seja, se  $R_1 \equiv R_2$  são regiões congruentes, então  $A(R_1) = A(R_2)$ ;

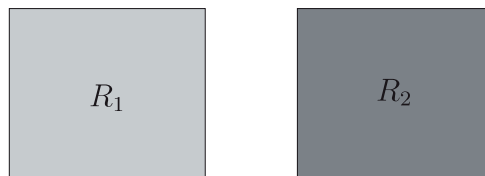


Figura A.8: Invariância.

Como primeira consequência das propriedades A1-A5, obtemos a bem conhecida relação entre as áreas de triângulos e de retângulos. Devido à Propriedade A3, como retângulos de lados iguais são congruentes, eles possuem a mesma área.

**Proposição A.8:** A área de um triângulo de base  $b$  e altura  $h$  é a metade da área de um retângulo de lados  $b$  e  $h$ .

**Prova:** Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e o retângulo  $\square ABEF$ , ilustrados pela Figura A.9, tal que  $\overline{AB}$  é a base comum de comprimento  $b$  e  $\overline{CD}$  é a altura comum de comprimento  $h$ , onde  $D$  está entre  $A$  e  $B$ .

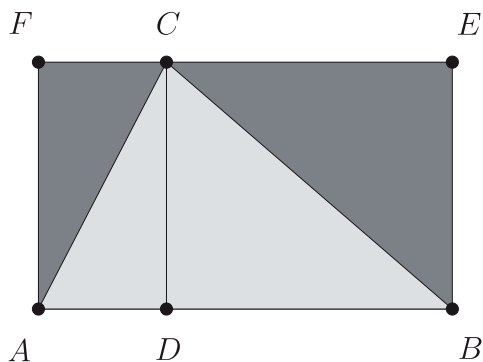


Figura A.9: Ponto  $D$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Pelo caso (LLL) da congruência entre triângulos, temos que o triângulo  $\triangle ADC$  é congruente ao triângulo  $\triangle CFA$  e também que o triângulo  $\triangle DBC$  é congruente ao triângulo  $\triangle ECB$ . Pela Propriedade A5, temos então que

$$A(\triangle ADC) = A(\triangle CFA) \quad \text{e} \quad A(\triangle DBC) = A(\triangle ECB)$$

Além disso, pela Propriedade A3, temos que

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle ADC) + A(\triangle DBC)$$

e também que

$$\begin{aligned} A(\square ABEF) &= A(\triangle ADC) + A(\triangle CFA) + A(\triangle DBC) + A(\triangle ECB) \\ &= 2A(\triangle ADC) + 2A(\triangle DBC) \\ &= 2A(\triangle ABC). \end{aligned}$$

A demonstração do caso em que o ponto  $A$  está entre os pontos  $D$  e  $B$  é análoga e é deixada como exercício.  $\square$

## A.6 MÉTODO DA EXAUSTÃO

Uma consequência das propriedades A1-A5, apresentadas na Seção A.5, é a famosa fórmula da área de um retângulo. Como dois retângulos com lados  $a$  e  $b$  são congruentes, pela propriedade A5, eles tem a mesma área, que será denotada por  $A(a, b)$ , como ilustrado pela Figura A.10.

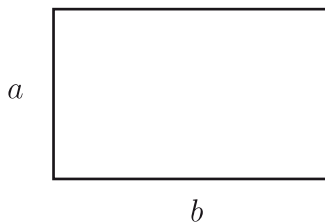


Figura A.10: Retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

A densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$  permite construir sequências de números racionais convergindo para cada número  $a \in \mathbb{R}$ . Esse resultado é uma consequência imediata do Teorema do Sanduíche.

**Corolário A.9:** *Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existem sequências  $(r_n)$  e  $(s_n)$ , onde  $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $r_n \uparrow a \downarrow s_n$ , ou seja,  $r_n \uparrow a$  e também  $s_n \downarrow a$ .*

**Prova:** Pela densidade de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$  tais que

$$a - \frac{1}{n} < r_n < a < s_n < a + \frac{1}{n},$$

como ilustrado pela Figura A.11.

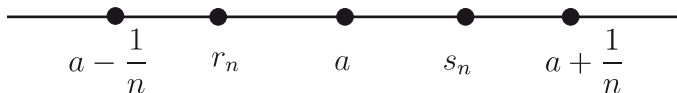


Figura A.11: Sanduíche de sequências de frações.



O resultado segue do Teorema do Sanduíche e da regra da soma, uma vez que

$$a \pm \frac{1}{n} \rightarrow a.$$

□

Vamos demonstrar então a famosa fórmula da área de um retângulo.

**Proposição A.10:** *A área de um retângulo é igual ao produto dos seus lados, ou seja, temos que*

$$A(a, b) = ab$$

**Prova:** Como ilustrado pela Figura A.12, utilizando as Propriedades A3 e A5 e também a definição de soma, obtemos que

$$A(a + b, c) = A(a, c) + A(b, c),$$

para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

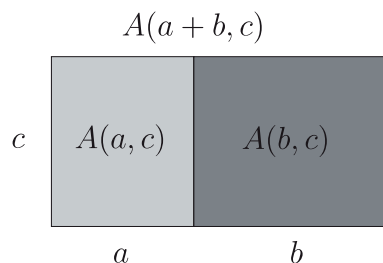


Figura A.12: Retângulos justapostos.

Utilizando o Princípio da Indução, pode-se mostrar que  $A(na, b) = nA(a, b)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que é deixado como exercício. Logo

$$A\left(\frac{a}{n}, b\right) = \frac{1}{n}A(a, b)$$

pois

$$nA\left(\frac{a}{n}, b\right) = A(a, b).$$

Portanto, obtemos que

$$A\left(\frac{m}{n}a, b\right) = \frac{m}{n}A(a, b).$$

Se

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad s = \frac{k}{l},$$

então

$$A(r, s) = A\left(\frac{m}{n}, \frac{k}{l}\right) = \frac{m}{n} \frac{k}{l} A(1, 1) = rs,$$

onde utilizamos que  $A(a, b) = A(b, a)$  e, na última igualdade, a Propriedade A1. Portanto, a fórmula é verdadeira para retângulos de lados racionais.

Agora demonstramos a fórmula para lados  $a$  e  $b$  quaisquer. Pelo Corolário A.9, existem seqüências de racionais  $(r_n)$ ,  $(s_n)$ ,  $(u_n)$  e  $(v_n)$  tais que  $r_n \uparrow a \downarrow u_n$  e que  $s_n \uparrow b \downarrow v_n$ .

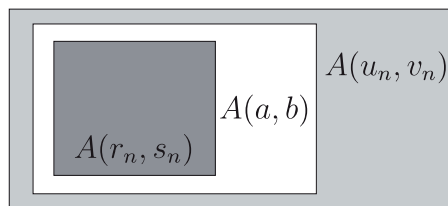


Figura A.13: Sanduíche de retângulos.

Como mostra a Figura A.13, temos então que

$$r_n s_n = A(r_n, s_n) \leq A(a, b) \leq A(u_n, v_n) = u_n v_n.$$

O resultado segue então da regra do produto e do Teorema do Sanduíche.  $\square$

Como consequência imediata das Proposições A.10 e A.8, obtemos a conhecida fórmula para a área de um triângulo.

**Corolário A.11:** *A área do triângulo é metade do produto da base pela altura.*

Uma das mais remotas aplicações do conceito de limite de seqüências é o cálculo da área do círculo trigonométrico  $D$  através do denominado *método*

da exaustão. Tal método baseia-se na aproximação da área do círculo trigonométrico através das sequências das áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos.

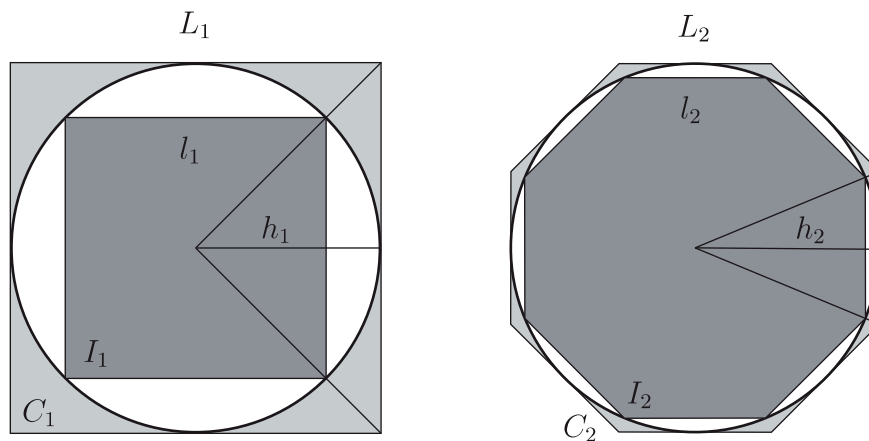


Figura A.14: Sanduíche do círculo com polígonos regulares.

De fato, vamos considerar as sequências  $A(I_n)$  e  $A(C_n)$ , onde  $I_n$  é o polígono regular inscrito de  $2^{n+1}$  lados, descrito anteriormente na Seção 2.2, e  $C_n$  é o polígono regular circunscrito de  $2^{n+1}$  lados. Como ilustrado pela Figura A.14, temos que  $I_1$  e  $C_1$  são, respectivamente, os quadrados inscrito e circunscrito e que  $I_2$  e  $C_2$  são, respectivamente, os octógonos inscrito e circunscrito. Os comprimentos dos lados de  $I_n$  e  $C_n$  são denotados, respectivamente, por  $l_n$  e  $L_n$ .

A Figura A.15 destaca um triângulo elementar que compõe  $I_n$  e também um triângulo elementar associado que compõe  $C_n$ . Enquanto o triângulo elementar de  $C_n$  possui base de comprimento  $L_n$  e altura com comprimento 1, o triângulo elementar de  $I_n$  possui base de comprimento  $l_n$  e altura com comprimento denotado por  $h_n$ , da mesma maneira que na Seção 2.2. Como o número de triângulos elementares é igual ao número de lados, temos então que a área dos polígonos regulares é o produto do número de seus lados pela área comum dos seus triângulos elementares. Após simplificações, obtemos as seguintes expressões para as áreas

$$A(C_n) = 2^n L_n \quad \text{e} \quad A(I_n) = 2^n l_n h_n \quad (\text{A.1})$$

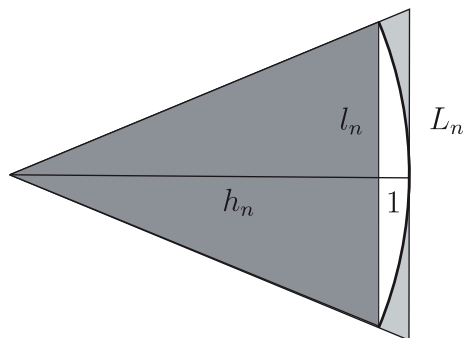


Figura A.15: Triângulos elementares de  $I_n$  e  $C_n$ .

Vamos mostrar em primeiro lugar o seguinte resultado.

**Proposição A.12:**  $A(I_n) \uparrow A(D)$ , onde  $A(D)$  é a área do círculo trigonométrico.

**Prova:** Utilizando o fato de que  $I_n \subset D \subset C_n$  e também a terceira propriedade da área, apresentada na Seção A.5, temos que

$$A(I_n) \leq A(D) \leq A(C_n). \quad (\text{A.2})$$

A partir das desigualdades (A.2), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 \leq A(D) - A(I_n) &\leq A(C_n) - A(I_n) \\ &= A(I_n) \left( \frac{A(C_n)}{A(I_n)} - 1 \right) \\ &\leq A(D) \left( \frac{A(C_n)}{A(I_n)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pelo Teorema do Sanduíche, basta mostrarmos que o último termo das desigualdades (A.3) converge para zero, o que, pelas regras de limite, é o mesmo que mostrar que  $\frac{A(C_n)}{A(I_n)} \rightarrow 1$ . Para isso, consideramos novamente a Figura A.15. Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{1}{h_n}$$

e, pelo Teorema de Pitágoras,  $h_n^2 = 1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$ . Portanto, pelas equações (A.1), segue que

$$\begin{aligned} \frac{A(C_n)}{A(I_n)} &= \frac{L_n}{l_n h_n} \\ &= \frac{1}{h_n^2} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Pelas regras de limite, para mostrarmos que  $\frac{A(C_n)}{A(I_n)} \rightarrow 1$ , basta mostrarmos que  $l_n \rightarrow 0$ . Isso segue mais uma vez do Teorema do Sanduíche e da seguinte desigualdade

$$0 \leq l_n \leq \frac{A(D)}{2^n h_1}, \quad (\text{A.4})$$

que é demonstrada da seguinte maneira. Como  $A(I_n) \leq A(D)$ , pela equação (A.1), temos que

$$0 \leq l_n \leq \frac{A(D)}{2^n h_n}$$

e a desigualdade (A.4) segue do fato de que  $h_1 < h_n$ , o que é demonstrado na Seção 2.2.  $\square$

A Proposição A.12 também implica que a sequência  $SP(I_n)$  dos semiperímetros dos polígonos inscritos é realmente convergente, o que foi indicado apenas numericamente na Seção 2.1.

**Corolário A.13:** *Temos que*

$$SP(I_n) \rightarrow A(D)$$

e que

$$A(D) = \pi = SP(D)$$

onde  $SP(D)$  é o semi-perímetro do círculo trigonométrico.

**Prova:** Como  $SP(I_n) = 2^n l_n = \frac{A(I_n)}{h_n}$ , pela regra do quociente, basta mostrar que  $h_n \rightarrow 1$ . Como  $l_n^2 = 1 - h_n^2$ , temos que

$$0 \leq 1 - h_n = \frac{l_n^2}{1 + h_n} \leq l_n^2.$$

O resultado segue então pelo Teorema do Sanduíche, uma vez que  $l_n \rightarrow 0$ .  $\square$

## EXERCÍCIOS

## DE DEMONSTRAÇÃO

- 5.1 Mostre por indução que  $(1 + a)^n > an$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $a > 0$ .
- 5.2 Complete a demonstração da Proposição A.5, considerando o caso em que  $a_n$  é não-decrescente.
- 5.3 Complete a demonstração da Proposição A.8, como indicado na Figura A.16.

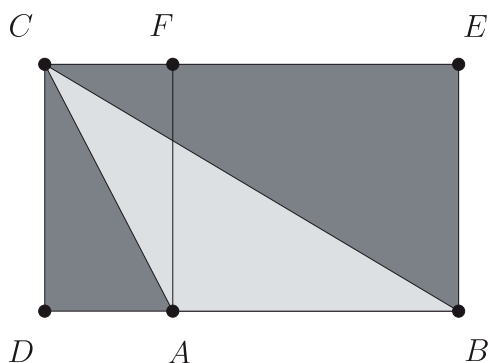


Figura A.16: Ponto  $A$  entre os pontos  $D$  e  $B$ .

- 5.4 Mostre por indução que  $A(na, b) = nA(a, b)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , utilizando que

$$A(a + b, c) = A(a, c) + A(b, c),$$

para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] T. Apostol *Calculus*. Volume 1. New York: John Willey, 1967.
- [2] G. Ávila *Cálculo das funções de uma variável*. Volumes 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- [3] P. Boulos *Introdução ao Cálculo*. Volume 1 e 2. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.
- [4] H. Guidorizzi *Um curso de Cálculo*. Volume 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [5] H. Lopes, I. Malta e S. Pesco *Cálculo a uma variável*. Volumes 1 e 2. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2002.
- [6] M. Spivak *Calculus*. New York: Publish or Perish, 1994.
- [7] P. Táboas *Cálculo em uma variável real*. São Paulo: EDUSP, 2008.



# ÍNDICE REMISSIVO

- área
  - da esfera, 272
  - de região plana, 299
  - de superf. de revolução, 270
  - líquida, 214
  - propriedades, 301
  - superior e inferior, 214
- aceleração, 121
- base neperiana, 56
- binômio de Newton, 295
- catenária, 269
- completude dos reais, 20, 295
- comportamento assintótico, 183
- comprimento
  - da catenária, 269
  - de gráficos, 267
- congruência
  - de figuras planas, 299
  - de segmentos, 12
- continuidade
  - da exponencial, 74
  - da inversa, 83
  - da raiz, 84
  - do arco-cosseno, 86
  - do logaritmo, 84
  - do seno e do cosseno, 93
- densidade dos racionais, 18
- derivada, 103
  - da exponencial, 130
  - da tangente, 137
  - das arco-trigonométricas, 150
  - de expressão algébrica, 116
  - derivadas laterais, 108
  - do logaritmo, 149
  - do seno e do cosseno, 135
  - regra da cadeia, 141
  - regra da potência, 119, 150
  - regras de derivação, 110, 117
- energia
  - cinética, 170
  - mecânica, 170
  - potencial, 170
- equação
  - característica, 256
  - da reta, 24
  - de Ricatti, 252
  - do arremesso com atrito, 235
  - do arremesso sem atrito, 231
  - do circuito RLC, 258
  - do gráfico, 23
  - do sistema massa-mola, 133
  - do sistema MMA, 251, 256
  - do trem bala, 128
  - integral de Ricatti, 252, 255

## função

aceleração, 122  
 afim, 23  
 arco-cosseno, 86  
 arco-seno e arco tangente, 88  
 colchete, 227  
 concavidade, 173  
 contínua, 72  
 cosseno hiperbólico, 269  
 definida por partes, 27  
 derivada, 114  
 derivada segunda, 120  
 exponencial, 56  
 expressão algébrica, 22  
 injetiva, 28  
 inversa, 29  
 logaritmo, 56  
 monótona, 29, 295  
 polinomial, 26  
 primitiva, 224  
 racional, 26  
 real, 21  
 seno e cosseno, 87  
 seno hiperbólico, 269  
 tangente, 88  
 velocidade, 121

## indeterminação do tipo

infinito sobre infinito, 192  
 zero sobre zero, 165

## integral

definida, 214, 220  
 frações parciais, 253  
 indefinida, 226  
 integração por partes, 245  
 soma de Riemann, 266  
 subst. trigonométrica, 241  
 substituição, 233

## isometria, 299

reflexão, 300  
 rotação, 300  
 translação, 300

## Lei

da Conservação da Energia,  
 168, 238, 240, 274  
 de Hooke, 133  
 de Newton (segunda), 122, 126,  
 128, 133, 169, 231, 235, 251

## limite de funções, 59

infinito, 189  
 limites laterais, 64  
 monotonicidade, 62  
 no infinito, 187  
 regras de limite, 61

## limite de sequências, 41

infinito, 185  
 monotonicidade, 45  
 regras de limite, 44  
 unicidade, 45

## método

da bissecção, 77  
 da integração por partes, 245  
 da subst. trigonométrica, 241  
 da substituição, 233  
 das frações parciais, 253  
 de esboço de gráficos, 198  
 de exaustão, 307  
 de otimização, 160

## número binomial, 293

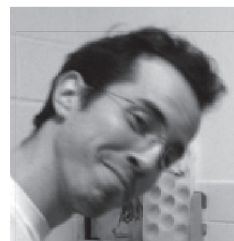
## otimização, 159

## parábola, 24

## plano Cartesiano, 13

- ponto
  - crítico, 159
  - de descontinuidade, 70
  - de extremo, 158
  - de extremo local, 175
  - de inflexão, 175
  - de mínimo, 158
  - de mínimo local, 176
  - de máximo, 159
  - de máximo local, 176
  - de sela, 177
  - degenerado, 176
  - vertical, 189
- Princípio
  - de Cavallieri, 230
  - de Indução, 17
- progressão geométrica, 291
- Propriedade Arquimediana, 18
- quociente de Newton, 101
- razão áurea, 43
- Regra de L'Hospital, 165, 192
- reta
  - assíntota, 183
  - assíntota horizontal, 183, 187
  - assíntota vertical, 184, 189
  - secante, 103, 173
  - tangente, 103, 105, 117
- sequência
  - alternada, 39
  - anti-harmônica, 34
  - convergente, 41
  - de Fibonacci, 42
  - harmônica, 33
  - harmônica alternada, 34
  - limitada, 39
  - margem de erro, 34
  - monótona, 295
  - tempo de espera, 34
  - termo geral, 33
- taxas relacionadas, 143
- Teorema
  - de Rollê, 162
  - de Weierstrass, 161
  - do Sanduíche (funções), 63
  - do Sanduíche (sequências), 45
  - do Valor Intermediário, 79
  - do Valor Médio, 162
  - Fundamental do Cálculo, 222
- teste
  - da derivada segunda, 178
  - da reta horizontal, 29
  - da reta vertical, 21
- valores extremos, 158
- variação
  - da posição, 217
  - da velocidade, 216
- velocidade, 106
- volume
  - da esfera, 265
  - de sólidos de revolução, 264





## SOBRE O AUTOR

Mauro Patrão é professor adjunto do Departamento de Matemática da UnB, tendo completado a graduação no Departamento de Engenharia Mecânica da UnB (2001), o mestrado no Departamento de Matemática da UnB (2003) e o doutorado no Departamento de Matemática da Unicamp (2006). Atua como orientador de doutorado na Pós-graduação do Departamento de Matemática da UnB. Seus interesses em pesquisa incluem, entre outros, tópicos tais como Dinâmica Topológica, Teoria Ergódica e Teoria de Lie, tendo publicado artigos relacionados a esses assuntos em revistas científicas de projeção internacional. É co-fundador do Grupo de Ensino dos Cálculos da UnB, co-fundador do blog Teoria de Lie e Aplicações <<http://teoriadelie.wordpress.com/>> e é um entusiasta da criação colaborativa tanto no ensino quanto na pesquisa em Matemática.