



**Universidade de Brasília**

**FACE - Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e  
Ciência da Informação e Documentação**

**Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação**

---

**Instabilidade financeira internacional em uma economia de Diamond &  
Dybvig com jogo global**

**Aluno:** Alfredo Eric Romminger

**Orientador:** Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza

Brasília, 2009



**Universidade de Brasília**

**FACE - Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e  
Ciência da Informação e Documentação**

**Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação**

---

## **Instabilidade financeira internacional em uma economia de Diamond & Dybvig com jogo global**

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, sob a orientação do Professor Dr. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

**Aluno:** Alfredo Eric Romminger

**Orientador:** Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza

Brasília, 2009

**“Instabilidade financeira internacional em uma economia de Diamond & Dybvig com jogo global”**

ALFREDO ERIC ROMMINGER

Dissertação apresentada como exigência do Curso de  
Mestrado em Economia da Universidade de Brasília.

**Avaliação**  
**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza, PhD  
Orientador

---

Prof. José Guilherme de Lara Resende, PhD  
Membro Interno

---

Prof. Paulo Cesar Coutinho, PhD  
Membro Externo

Brasília - DF, junho de 2009.

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos ou científicos. São reservados os direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Alfredo Eric Romminger

A minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que me ajudaram de alguma forma a concluir essa longa fase e, também, esta dissertação. Em especial agradeço a minha família que sempre me apoiou; meu orientador, professor Rodrigo Peñaloza, cuja ajuda e sugestões permitiram resolver todos os problemas que surgiram durante a elaboração deste trabalho; meus amigos, particularmente, a Iansã que me ajudou a revisar meu texto cansativo e a minha namorada, Priscila, pelo apoio e encorajamento para continuar trabalhando.

“If knowledge can create problems, it is not  
through ignorance that we can solve them.”

*Isaac Asimov (1920 - 1992)*

## RESUMO

Esta dissertação estuda as causas das crises financeiras internacionais por meio da modelagem em jogos globais de uma economia aberta de Diamond & Dybvig (1983). Uma pesquisa nesse sentido é relevante dada a importância da compreensão sobre causas da instabilidade financeira internacional, permitindo a formulação de políticas para evitá-las. A partir de Diamond & Dybvig, Chang & Velasco (2001) modelam crises financeiras e mostram razões para a instabilidade financeira. No entanto, a seleção de equilíbrio nesse modelo é complicada, pois depende de “profecias auto-realizáveis”. O instrumental de jogos globais traz uma nova interpretação sobre o funcionamento do sistema financeiro, ao introduzir incerteza no *payoff* dos agentes, tornando relevante o papel das crenças na seleção do equilíbrio. Essa modificação garante que apenas um equilíbrio seja selecionado. A partir da estratégia ótima, é analisada a relação entre ela e as variáveis do modelo, estudando-se, particularmente, o impacto do consumo antecipado na seleção dos equilíbrios. Assim, mostra-se que, se existe uma pressão muito grande de consumo, a probabilidade de ocorrer uma crise financeira aumenta. Com isso, este trabalho permite uma melhor compreensão das causas de uma crise, ponto crucial no processo formulação das políticas.

Palavras-Chave: Crises financeiras, corridas bancárias, jogos globais.



## **ABSTRACT**

The present work studies the causes of international financial crises applying global games models to an open economy of Diamond & Dybvig (1983). Such a work is important to better understand the causes of instability in financial markets, enabling the design of more efficient policies to avoid them. Using Diamond & Dybvig, Chang & Velasco (2001) drew computational models of financial crises and showed the reasons for the financial instability. Furthermore, choosing an equilibrium in such models faces problems concerning self-fulfilling prophecies. Global game modeling sets a new interpretation for the financial system performance as it introduces uncertainty to agent's payoffs, underlining the role of beliefs on the choice of an equilibrium and allowing it to be unique. We analyze the relation between the optimal strategy and the variables of interest, outlooking, particularly, the impact of projected consumption on the selection of equilibria. Here, we are able to demonstrate that great consumption pressures are likely to generate financial crises. In this sense, this thesis provides us with a better understanding of crises, what help to build policies aiming to avoid them.

Key-words: Financial crisis, bank runs, global games.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	10
1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	15
1.1 Crises financeiras.....	15
1.2 Modelo de corridas bancárias de Diamond & Dybvig .....	18
1.3 O modelo de Chang e Velasco. ....	21
2. JOGOS GLOBAIS: TEORIA E APLICAÇÕES.....	25
2.1 O modelo clássico de jogos globais.....	26
2.2 Aplicações e jogos globais .....	29
2.2.1 Corridas Bancárias.....	29
2.2.2 Crises cambiais .....	36
2.2.3 Crises da dívida .....	39
3. MODELO DE INSTABILIDADE FINANCEIRA INTERNACIONAL COMO JOGOS GLOBAIS .....	41
3.1 O modelo com um equilíbrio em jogos globais.....	42
3.2 Estudo do equilíbrio $\theta^*(x)$ .....	53
CONCLUSÃO .....	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	72
ANEXO 1 - Demonstração do Teorema 1 .....	74

## INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos é uma ferramenta poderosa para a ciência econômica e para a criação de modelos. Particularmente, em situações de assimetria de informação, caso em que um ou mais agentes possuem uma informação privada que lhes traz vantagens estratégicas sobre os outros, e a ordenação temporal das ações dos agentes estão envolvidos (RASMUSEN, 1994). Com a evolução da teoria econômica, aumenta a complexidade dos modelos, pois a cada refinamento novas características são agregadas, para melhor representar a realidade.

Um exemplo de fenômeno complexo em economia é o funcionamento do sistema financeiro internacional. Esse sistema possui falhas de mercado, não podendo ser descrito por um modelo de competição perfeita. A origem de tais falhas encontra-se, muitas vezes, na instabilidade do sistema, em problemas de informações e em choques externos. O fato é que ele é instável e, logo, sujeito a crises, devido, principalmente, a interações estratégicas, que podem ser melhor compreendidas por meio da teoria dos jogos.

A origem das crises financeiras é uma preocupação constante. O estudo de crises econômicas remonta ao começo do século passado com o estudo dos ciclos. Muitas teorias foram criadas, mas poucas respostas se mostraram eficazes à medida que as crises passaram por transformações, devido ao aumento da complexidade nas relações econômicas.

Na década de 1980, fundamentos macroeconômicos sólidos eram vistos como uma arma contra as crises. Mais recentemente, em momentos como os das crises financeiras na Ásia (1994; 1997-98), a estabilidade macroeconômica não foi capaz de debelar os problemas. Percebeu-se então que essa interpretação de que as crises sejam causadas apenas por macrofundamentos fracos gera políticas inadequadas para solucioná-las. É preciso entender as crises financeiras, suas origens e seu funcionamento, para então elaborar políticas que possam evitá-las ou contê-las sem causar mais estragos.

Diversos modelos foram elaborados com o intuito de explicar as crises financeiras internacionais, como os da chamada “primeira geração”, entre estes o de Krugman, o qual introduziu a teoria de crises nos fundamentos na análise das antecipações privadas no mercado financeiro, especialmente o comportamento de ataques especulativos. Os chamados modelos de “segunda geração” foram um refinamento dos modelos da primeira, que eram lineares e não explicavam crises em países com economias sólidas. Os modelos da segunda geração admitiam funções reativas não-lineares e permitiam que a autoridade monetária

dispusesse de diferentes opções de políticas, admitindo múltiplos equilíbrios e apresentando uma explicação para crises em países com fundamentos sólidos, devido à revisão das expectativas dos agentes privados (LENAIN, 2004).

Após as crises financeiras da década de 1990 surgiram novas teorias. Esta nova “geração” de modelos analisou as crises que surgiram de “profecias auto-realizáveis”. Muitos se basearam em Diamond & Dybvig (1983) e seu modelo de corridas bancárias.

Corrida bancária é a situação em que os correntistas de um banco não acreditam que este tenha dinheiro para cobrir os saques de todos os clientes, então resolvem sacar seus depósitos antes que o banco se torne ilíquido. Porém, o simples fato deles anteciparem em massa seus saques faz com que o banco não seja capaz de honrar seus compromissos. Fazendo uma analogia, crise financeira seria uma corrida em que os investidores acreditam que seus investimentos não serão liquidados devidamente pelo país antes que sofra um ataque especulativo, assim eles antecipam seus resgates, causando crises de liquidez e o fim dos investimentos (SPIEGEL, 2005).

O modelo de Diamond & Dybvig (1983) ressalta os ganhos de bem-estar trazidos pela existência de bancos. E, ao mesmo tempo, os riscos que estes trazem. Ele se baseia em um jogo com dois equilíbrios de Nash, um positivo, Pareto-dominado, onde todos os agentes ganham e outro negativo, Pareto-dominante, representando a situação de corrida bancária onde todos perdem.

Neste modelo, os autores não explicam o que levaria um equilíbrio a ser selecionado, em detrimento do outro, apenas afirmam que ambos podem ocorrer. O equilíbrio seria selecionado devido a *sunspots*, fenômenos aleatórios que inserem incerteza extrínseca ao modelo, gerando situações conhecidas como profecias auto-realizáveis (CASS & SHELL, 1983). Os principais modelos sobre *sunspots* baseiam-se em pressupostos que geram múltiplos equilíbrios, de modo que as crises apresentam suas origens em incertezas extrínsecas ao modelo, não ficando claro o mecanismo pelo qual ocorrem.

As crises financeiras nos últimos anos possuem um caráter comportamental muito forte. Suas causas não estão relacionadas a fundamentos macroeconômicos, mas sim ao comportamento dos agentes econômicos no sistema financeiro, que, por desconfiança ou por motivos não tão claros, retiram seus recursos dos países ameaçados.

Podemos, então, descrever o problema a ser abordado na presente pesquisa por meio do seguinte questionamento: como modelar o comportamento dos agentes econômicos, envolvidos em situação de crises financeiras, sem gerar múltiplos equilíbrios e encontrar uma explicação mais realista para estas crises?

O problema apresentado é pertinente, principalmente, se considerarmos o momento atual, quando a maior economia do mundo enfrenta uma crise que parece longe de uma solução definitiva. Qual a origem desta crise? Seriam problemas nos fundamentos macroeconômicos dos Estados Unidos?

É possível constatar que a origem está na falta de liquidez dos principais ativos da economia norte-americana. Sem dúvida, esta situação é agravada, pelo fato de os agentes interpretarem as informações recebidas como um sinal para iniciar uma corrida bancária naquele país. As ações e a ajuda financeira realizadas pelo governo parecem incapazes de recuperar a confiança dos investidores, que, apesar de tudo, ainda não adquiriram um comportamento de manada realizando uma corrida em massa aos bancos.

As relações presentes no sistema financeiro atual são muito mais complexas do que as descritas em modelos como o de Diamond & Dybvig. Assim, é possível refinar esse modelo agregando novos pressupostos sobre as crenças dos agentes econômicos e seu entendimento sobre o conhecimento comum. Modelar de forma mais realista as relações existentes entre os agentes traria grandes vantagens para o sistema financeiro e, conseqüentemente, para as economias nacionais.

Evitar situações com múltiplos equilíbrios fornece uma melhor previsão acerca da ocorrência de crises. Além disso, se compreendermos como os agentes formulam suas estratégias será mais fácil definir políticas que induzam alterações positivas de comportamento. Dessa forma, poder-se-ia evitar situações como a enfrentada atualmente, onde as ações do governo, que visam a recuperar a credibilidade do sistema financeiro, possam miná-la. Agir com maior precisão pode ser uma solução ótima para evitar crises ainda no princípio.

Um modelo que explora as questões de equilíbrios múltiplos e de expectativas auto-realizáveis é o modelo de jogos globais. Segundo Carlsson & van Damme (1993), autores do artigo seminal sobre esse tema, essa modalidade de jogos permite encontrar um equilíbrio único em jogos com múltiplos equilíbrios, onde exista um equilíbrio *payoff*-dominante e outro risco-dominante. Os autores demonstraram que é possível chegar a um único equilíbrio em jogos dois por dois, com dois equilíbrios de Nash, onde um seja Pareto-inferior e outro Pareto-superior. Mostram ainda que, de acordo com a realização dos *payoffs*, qualquer dos dois equilíbrios é possível.

Como visto, existe uma relação entre as crises financeiras recentes e o modelo de corrida bancária de Diamond & Dybvig (1983). Apesar disso, explicar uma corrida bancária por *sunspots* em modelo com múltiplos equilíbrios não é satisfatório. Logo, o objetivo deste

trabalho é adaptar o modelo de Diamond & Dybvig para crises financeiras, mas modelar seu jogo em um jogo global, verificando a possibilidade de se explicar essas crises por meio de situações onde o equilíbrio risco-dominante é escolhido em detrimento do equilíbrio *payoff*-dominante.

Para este fim, dois trabalhos têm papel importante: Chang & Velasco (2001) e Goldstein & Pauzner (2005). O primeiro artigo adiciona a possibilidade de tomada de empréstimos no sistema financeiro internacional, transformando a corrida bancária clássica em uma crise financeira. Já Goldstein & Pauzner (2005) usam a teoria de jogos globais para modelar o jogo de corrida bancária de Diamond & Dybvig.

Ou seja, Chang & Velasco (2001) modelam crises financeiras com base no arcabouço teórico de Diamond & Dybvig, apresentando também múltiplos equilíbrios, um sem e outro com crise. Assim seu modelo apresenta a característica necessária para a aplicação de jogos globais, a saber: a existência, com dominância solucionável, de sub-classes do jogo em que o argumento de iteração de dominância entre risco e *payoff* afete remotamente os equilíbrios múltiplos do jogo (CARLSSON & VAN DAMME, 1993). A partir do trabalho de Goldstein & Pauzner (2005) seria possível resolver o problema de múltiplos equilíbrios.

Pretende-se nesta dissertação investigar a relação entre crise bancária e crise financeira, verificar se é possível utilizar o modelo Diamond & Dybvig para explicar essas crises e, por meio da classe de jogo global, resolver o problema de múltiplos equilíbrios e *sunspots*. Além disso, também se objetiva avaliar o impacto do consumo antecipado sobre o equilíbrio selecionado em jogos globais e assim entender qual a relação desse consumo com as crises financeiras.

Felizmente, com base na literatura de corridas bancárias e jogos globais é possível construir um modelo onde as crises sejam uma resposta racional dos agentes econômicos aos riscos existentes no sistema financeiro. Além disso, com a mudança do jogo Pareto-ordenado de Diamond & Dybvig para um jogo global, encontra-se apenas um equilíbrio que pode ser tanto o com, como o sem corrida. Desse modo, a partir do trabalho de Goldstein & Pauzner (2005), nesta dissertação adapta-se o modelo de Chang & Velasco (2001) para o uso de jogos globais.

Cabe ressaltar que Takeda (2001) realizou um trabalho semelhante, demonstrando inclusive um equilíbrio único com jogos globais para o modelo de Chang & Velasco (2001). No entanto, a demonstração do equilíbrio ficou relegada para um segundo plano, para o caso específico em que o erro entre o sinal recebido e o estado da economia real tende a zero, uma

vez que o artigo focou o impacto dos empréstimos estrangeiros sobre a probabilidade de crises financeiras.

Aqui, a demonstração para o equilíbrio único do jogo de crise financeira é estendida seguindo os passos de Goldstein & Pauzner (2005), usando o atributo de Complementaridade Estratégica “local”. Além disso, também é estudado o impacto da demanda por saques antecipados dos depositantes sobre a probabilidade de crise, ou seja, preocupa-se em entender o risco de instabilidade financeira associado à liquidação antecipada de investimentos de longo prazo para atender a uma euforia de consumo.

Para esse fim, este estudo está dividido em três capítulos além desta introdução e da conclusão. O primeiro capítulo faz uma breve revisão bibliográfica sobre crises financeiras e modelos de corrida bancária. Aborda principalmente os modelos de Diamond & Dybvig (1983) e Chang & Velasco (2001), isto é, no primeiro, o trabalho original sobre corridas bancárias e, no segundo, sua modificação para crises financeiras.

O segundo capítulo apresenta o modelo de jogos globais criado por Carlsson & van Damme (1993). Este modelo introduz um jogo no qual os agentes observam o *payoff* com ruído, recebendo um sinal de qual seria o *payoff* verdadeiro. Além disso, são apresentadas três aplicações para jogos globais, focando principalmente o trabalho de Goldstein & Pauzner (2005).

O terceiro capítulo, que é a nossa contribuição, apresenta o modelo de instabilidade financeira em uma economia de Diamond & Dybvig com jogo global. Nele verifica-se a existência de um único equilíbrio no modelo de crise financeira com jogo global, mas, principalmente, estuda-se o impacto dos saques antecipados sobre a estratégia de equilíbrio e sobre a probabilidade de crise financeira, demonstrando que, se o pagamento de saques antecipados for muito elevado, aumenta-se a chance de crise.

Por fim, apresentam-se as conclusões da dissertação, revisitando os principais pontos nela abordados.

## **1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O estudo de crises financeiras não é recente. A economia se preocupa há muitos anos em entendê-las para poder prevêê-las e evitá-las. As teorias existentes sobre crises são as mais diversas e surgem como consequência da evolução das crises e em resposta ao aumento da complexidade da economia mundial, particularmente do sistema financeiro internacional.

Como reflexo do processo de liberalização dos países em desenvolvimento, as crises financeiras tornaram-se mais constantes na última década. Estudos apontam que durante a década de 1970 crises bancárias eram raras, sendo mais frequentes as crises monetárias e cambiais. No período pós-liberalização financeira (a partir da década de 1980), as crises bancárias passaram a ser muito mais frequentes, enquanto as cambiais mantiveram-se no mesmo patamar (LOPES, 2004). Além do aumento na frequência das crises nos anos recentes, seus efeitos têm se mostrado mais amplos, afetando todo o sistema financeiro e, por isso mesmo, causando maiores danos.

### **1.1 Crises financeiras**

A teoria clássica sobre crises financeiras relaciona três tipos mais comuns de crises que podem ocorrer dentro de um país de modo a afetar toda a economia: 1) a crise do balanço de pagamentos, quando o governo não consegue mais lidar com a dívida externa e enfrenta problemas na conta de capital; 2) a crise cambial, que ocorre quando os agentes econômicos perdem a confiança na moeda nacional e buscam adquirir moeda estrangeira e; 3) a crise bancária, quando os bancos não conseguem rolar suas dívidas e se tornam ilíquidos. As causas mais comuns para as crises encontram-se nos choques externos, choques de políticas, exaustão dos limites de empréstimos e pânico auto-realizáveis, além de políticas econômicas equivocadas, as quais também tornam países mais suscetíveis às crises (SACHS, 1996).

Esse é um resumo simplista. Existem diversas teorias sobre crises financeiras, das quais podem ser citadas: as de visão monetarista; as da informação assimétrica; e as da hipótese de instabilidade financeira. Embora cada uma delas apresente uma explicação distinta para crises, todas possuem pontos em comum, seja um problema de credibilidade da moeda, risco moral ou ciclos econômicos. Todos esses fatores precisam ser considerados no estudo de crises (NOHARA, 1997).



As primeiras crises financeiras de amplo alcance pós Sistema Bretton Woods ocorreram depois da adoção, em 1981, de políticas monetárias restritivas pelo *Federal Reserve* (FED) dos Estados Unidos. A elevação das taxas de juros americana pelo FED derrubou os preços das *commodities*, tornando os investimentos realizados na década anterior, em países da América Latina, entre outros, sem rentabilidade, deixando esses países impossibilitados de pagarem suas dívidas e fazendo com que muitos ameaçassem declarar moratória (LENAIN, 2004).

Embora os modelos de “primeira geração” conseguissem interpretar bem as crises daquela década, em 1994 uma nova série de crises se abateu sobre o mundo. A crise mexicana (1994) mostrou o quão integrado estava o sistema financeiro internacional e o quão frágil ele era. Após a posse de um novo governo mexicano, em dezembro daquele ano, o peso foi desvalorizado gerando desconfiança para os capitais especulativos, que passaram a fugir do país ameaçando alastrar a crise para outros países em desenvolvimento (LENAIN, 2004).

Em 1997, foi a vez dos países do Leste Asiático, onde a crise fugia mais uma vez dos antigos padrões. Nas quatro décadas anteriores, os países dessa região apresentavam bons fundamentos macroeconômicos e economia equilibrada. Mas o modelo liberal, que parecia funcionar bem até aquela época, começou a dar sinais de problema devido a desequilíbrios microeconômicos relacionados ao crédito e aos riscos associados ao câmbio, os quais criavam bolhas especulativas. Os fracos mecanismos de regulação levaram à instabilidade que causou a crise (BOTARO, 2000). Summers (2004) identifica alguns fatores comuns às principais crises financeiras que ocorreram na década de 1990, são eles: inversões negativas na conta corrente, grande depreciação real e queda significativa no produto real.

Uma explicação para o funcionamento das crises recentes é apresentada no modelo de Chang & Velasco (2001). O objetivo dos autores é criar um modelo que explique as crises financeiras recentes que não seguiram o previsto por nenhuma teoria anterior<sup>1</sup>. Assim, o modelo proposto precisa se diferenciar dos anteriores e responder as novas questões que as crises recentes trouxeram, diferindo dos modelos de primeira ou segunda geração e não tentando explicar as crises por políticas econômicas inadequadas, nem determinar um padrão absoluto para a sua ocorrência.

O que as experiências recentes mostram é que uma crise pode ocorrer mesmo em um país com fundamentos macroeconômicos sólidos. Assim como dois países podem apresentar

---

<sup>1</sup> Dois pontos importantes que os autores consideram no modelo são a correlação entre colapso das taxas de câmbio e crise financeira e como algumas políticas para controlar crises podem ser mais prejudiciais do que as próprias crises (CHANG & VELASCO, 2001)

as mesmas características, como problemas na conta corrente, mas só um deles entrar em crise. É o caso dos países do sudeste asiático, que enfrentaram uma crise entre 1997-1998, apesar de serem considerados países com fundamentos sólidos. Enquanto países com situação semelhante, como alguns da América Latina, não sofreram crises no período.

Segundo Stiglitz & Greenwald (2004), a crise asiática não foi prevista porque, os países da região adotavam políticas macroeconômicas estáveis desde a década de 1970. Além disso, a crise asiática e as que a seguiriam não poderiam ser corrigidas ou evitadas por pacotes padrão do Fundo Monetário Internacional (FMI). O sudeste asiático era um exemplo de como proceder com relação a políticas econômicas, por isso o mercado não acreditava que houvesse como corrigir o problema rapidamente por meio de pacotes econômico. Durante a crise, o risco de se investir na região era muito grande e nenhuma taxa de juros compensaria.

Segundo Krugman (1998), todos os fatores macroeconômicos normalmente considerados a causa das crises, como balanço fiscal, inflação, desemprego, estavam em ordem quando do início da crise asiática. Ainda segundo o autor, a crise deveu-se a um colapso financeiro causado pelo excesso de empréstimos gerados pela bolha especulativa nos preços dos ativos, sendo a explosão dessa uma “profecia auto-realizável” que causou o rápido alastramento da crise.

Profecias auto-realizáveis, causadas por *sunspots*, ocorrem quando os agentes econômicos antecipam expectativas relativas a uma incerteza extrínseca causando pânico. *Sunspots* não afetam os fundamentos econômicos, mas sim o comportamento dos agentes (CASS & SHELL, 1983). O problema está nas crenças dos indivíduos e como eles prevêem o comportamento uns dos outros. Se acreditam que as outras pessoas tirarão seus investimentos de um país, a melhor opção é retirar os seus próprios recursos antes que os bancos se tornem ilíquidos. É essa ação que, se repetida por todos, deflagra a crise. Assim, se todos mantivessem seus investimentos no país, possivelmente a crise nunca ocorreria e todos estariam em situação melhor.

O que é esse *sunspot* que faz os agentes preferirem uma situação pior, no caso, a crise financeira? Novamente, o problema está nas crenças e na informação disponível para os agentes. Cada agente dispõe de informações privadas sobre a economia, mas todos dispõem do chamado conhecimento comum, que em modelos como o de Diamond & Dybvig para corridas bancárias, inclui os fundamentos econômicos e a crença de como os outros agentes agiriam em uma situação de equilíbrio (MORRIS & SHIN, 2000).

Segundo Morris & Shin (2000), o problema dessa modelagem é que ela permite a existência de múltiplos equilíbrios, pois assume que os agentes agem de modo perfeitamente

coordenado, sempre adotando as mesmas ações. Tal comportamento não representa bem a realidade uma vez que, de fato, nem todos os agentes agem da mesma forma, pois não dispõem das mesmas informações, nem interpretam o conhecimento comum da mesma maneira.

Assim, as teorias que justificam crises com base em profecias auto-realizáveis não explicam o que causa a antecipação das expectativas, ou o que faz com que os agentes creiam que a crise ocorrerá. Uma resposta a essas dúvidas pode vir do modelo de Carlsson & van Damme (1993), que aprofunda a interpretação sobre as crenças dos agentes, indicando que estes também formulam crenças sobre as crenças dos outros agentes e sobre as crenças de outros agentes sobre as crenças dos outros agentes, atingindo ordens superiores de crenças (MORRIS & SHIN, 2000).

Esta interpretação sobre as crenças e comportamentos dos agentes permite situações onde os agentes reagem exageradamente a informações públicas como, por exemplo, anúncios de reafirmação política e econômica do Banco Central (MORRIS & SHIN, 2000). A necessidade de formular crenças em ordens superiores faz com que os agentes não definam seu comportamento racionalmente apenas para o equilíbrio prevalecente (crise ou não), mas também para todas as situações possíveis, um comportamento passível de ser modelado por jogos globais (CARLSSON & VAN DAMME, 1993).

Portanto, se os fatores macroeconômicos não são a justificativa final para surgimento de crises, mas sim os problemas de crenças, então um modelo para explicar crises precisa considerar essas crenças. Nesse sentido, Diamond & Dybvig (1983) desenvolveram um modelo onde abordam as vantagens associadas a contratos, depósitos e bancos com o objetivo de mostrar como seguros depósitos poderiam trazer um maior bem-estar ao sistema financeiro, justificando uma intervenção do governo nesse sistema em prol do fortalecimento institucional dos bancos. Apesar disso, esse modelo apresenta dois equilíbrios, um com o resultado positivo e o outro com o resultado negativo, onde há corrida bancária, significando crise do sistema bancário nacional.

## **1.2 Modelo de corridas bancárias de Diamond & Dybvig**

Ao longo dos anos, assim como novos modelos foram desenvolvidos, as crises financeiras também sofreram modificações. Modelos como os de “primeira geração” já não

são capazes de explicar as crises financeiras mais recentes, de modo que um novo instrumental se faz necessário para entender essas novas crises.

Para melhor compreender crises financeiras, um modelo que se mostra particularmente útil é de corrida bancária, desenvolvido por Diamond & Dybvig (1983). A partir dele é possível fazer uma associação entre crise financeira (investimentos afluindo de um país) e corrida bancária.

O modelo clássico sobre contratos depósitos desenvolvido no artigo de Diamond & Dybvig é importante porque trata das corridas bancárias como algo intrínseco ao modelo. Nele é apresentado um jogo com dois equilíbrios de Nash, um bom (Pareto-dominado) e outro ruim (com corrida bancária), onde ambos são passíveis de ocorrer. Os autores abordam as vantagens associadas a contratos, depósitos e bancos com o objetivo de mostrar como seguros depósitos poderiam trazer um maior bem-estar ao sistema financeiro, justificando uma intervenção do governo que fortaleça as instituições bancárias.

Em seu modelo, Diamond & Dybvig (1983) tratam de uma economia com três períodos, um banco, dois tipos de agentes – um paciente e outro impaciente – e um bem homogêneo. A inovação apresentada por eles está na demanda por liquidez de cada agente que, sendo uma informação privada, pode levar à corrida bancária.

Segundo esse modelo, os agentes não conhecem o próprio tipo no período  $t=0$ , quando investem sua riqueza, e só o descobrem no período  $t=1$  quando, munidos dessa informação privilegiada, decidem se querem reaver o capital investido e aplicá-lo em consumo ou se são pacientes e, nesse caso, preferem esperar o período  $t=2$  para receber  $r_1 > 1$ , que é o consumo dos agentes no primeiro período.

O jogador pode escolher sacar em  $t=1$  ou esperar. Se sacar antes e todos os outros esperarem, ele deixa de ganhar  $R$ , para ganhar  $r_1$ , o mesmo que os agentes impacientes, e perde bem-estar. Se ele esperar o período  $t=2$  para sacar, mas todos os outros sacarem no período  $t=1$  tem-se uma corrida bancária e ele perde seus investimentos recebendo zero. Assim, o jogo proposto por Diamond & Dybvig (1983) tem dois equilíbrios de Nash possíveis: um onde todos os agentes pacientes sacam e outro em que os agentes pacientes esperam.

Diamond & Dybvig (1983) não apresentam uma explicação do porquê a corrida bancária seria selecionada, apenas afirma que essa possibilidade é intrínseca à existência de um banco. Se o banco não estivesse sujeito à corrida, ele agiria intermediando trocas financeiras, como se fosse um mercado de títulos sem intermediadores, fazendo as trocas entre agentes pacientes e impacientes diretamente, não trazendo melhorias de bem-estar.

Para Bhattacharya & Jacklin (1988), no modelo de Diamond & Dybvig as corridas bancárias são causadas por *sunspots*. Os autores afirmam que existe uma explicação para a corrida bancária, que a origem dela estaria na possibilidade de alguns agentes pacientes receberem um sinal (bom ou ruim) sobre o resultado do banco no período  $t=2$  e a possibilidade deste conseguir pagar os depósitos de longo prazo.

O modelo de 1988 tem uma explicação diferente da de jogos globais: nele a corrida bancária não tem origem no pânico dos agentes, mas é baseada em informação. Assim, ele é importante porque introduz a assimetria de informação na explicação de corridas bancárias. Bhattacharya & Jacklin (1988) também utilizam informação privada sobre os *payoffs* esperados dos agentes pacientes, mas para eles, essa informação não afeta a crença sobre o que os outros agentes farão. Um agente que recebe um sinal de que o resultado do banco será ruim sempre sacará antecipadamente.

Oh & Wrase (1991) argumenta que seriam possíveis três tipos de corridas bancárias. Uma seria a apresentada no modelo Diamond & Dybvig, corrida especulativa onde os agentes pacientes sacam antes, especulando que outros também o farão. Outra, com causas especulativas e nos fundamentos, onde o número de agentes impacientes seria grande o suficiente, tal que seus saques impediriam o banco de cobrir os saques dos agentes pacientes no período 2. O terceiro caso ocorre quando os agentes pacientes recebem uma informação de que o banco terá retornos baixos no período 2, sinalizando ser melhor sacar antecipadamente.

Apesar de não serem o foco deste modelo, essas visões sobre corridas bancárias fornecem uma melhor compreensão do jogo modelado em Diamond & Dybvig. Como foi visto, existe um equilíbrio de Nash Pareto-inferior que pode ocorrer. O modelo original atribuía essa ocorrência a um *sunspot*, mas é mais plausível a existência de informações privadas que alterem as crenças dos jogadores e os levem a preferir o equilíbrio de Nash com corrida bancária.

Existem outras interpretações sobre como são definidos os equilíbrios desse modelo. Por exemplo, Peck & Shell (2003) argumentam que não é preciso construir modelos que eliminem a probabilidade de corrida bancária: existem economias que são capazes de tolerar uma probabilidade positiva de corrida. Eles explicam, ainda, que os equilíbrios do modelo de Diamond & Dybvig podem ser divididos em equilíbrio pré e equilíbrio pós-depósito, de forma que a corrida bancária não é necessariamente um equilíbrio pré-depósito. Com isso, eles buscam justificar a existência de múltiplos equilíbrios, diferente do modelo de jogos globais, onde o objetivo é encontrar um equilíbrio único.

Outro problema percebido por alguns autores é que o modelo Diamond & Dybvig não explica com que frequência acontecem as corridas. Isso significa que não é possível saber se a existência de bancos traz ganhos de bem-estar, uma vez que se corridas bancárias ocorrem com frequência as perdas seriam maiores que os ganhos (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005). Nesse sentido, modificar o jogo existente em Diamond & Dybvig para a metodologia de jogos globais, além de trazer a vantagem de uma explicação para corrida, a existência do equilíbrio de Nash risco-dominante tornaria possível probabilizar a chance corrida.

### **1.3 O modelo de Chang e Velasco.**

O trabalho de Chang & Velasco (2001) expande o modelo de Diamond & Dybvig de modo que seu foco é uma crise financeira internacional, não mais uma corrida bancária. O modelo segue a mesma estrutura de Diamond & Dybvig, com algumas modificações e, principalmente, novos pressupostos essenciais para explicar as crises.

O modelo é voltado para sistemas financeiros em países em desenvolvimento, apesar de crises também ocorrerem em países desenvolvidos. O ponto é que análises são mais relevantes para países em desenvolvimento por dois motivos: primeiro, bancos têm um papel mais importante em países emergentes, já que neles não há mercados de *equities* desenvolvidos; segundo, problemas de liquidez são mais comuns nestes países, que em situações de turbulência não conseguem acesso ao crédito internacional, enquanto que bancos de países desenvolvidos tem acesso facilitado às reservas de emergência internacionais (CHANG & VELASCO, 2001).

Chang & Velasco (2001) buscam capturar características comuns às crises recentes nos países em desenvolvimento. Para os autores, a presença destas características em maior ou menor grau influencia a ocorrência de crises. Entre essas características estão: aumento dos fluxos de capital estrangeiro causados pela abertura da conta de capital; processo de liberalização financeira impactando o problema de liquidez dos bancos, por causar descasamento na maturação de empréstimos e investimentos; desequilíbrio dos preços com oferta inelástica causado por especulação; garantias governamentais levando a empréstimos excessivos; entre outras.

O modelo considera uma pequena economia aberta com uma grande população, *ex ante*, de agentes idênticos, dois períodos e apenas um bem, trocado livremente no mercado e que pode ser consumido ou investido. O preço do consumo no mercado mundial é de uma

unidade de moeda estrangeira, fixo e normalizado (dólar). Residentes nacionais nascem com dotação  $e > 0$  unidades do bem em dólares.

Cada agente tem acesso a uma tecnologia de longo prazo que rende, por dólar investido em  $t=0$ ,  $r < 1$  se liquidado no período  $t=1$  e  $R > 1$  se liquidado no período  $t=2$ . Ou seja, a tecnologia é ilíquida no curto prazo, havendo uma perda de riqueza de  $(1-r) > 0$  por dólar investido se ocorrer liquidação antecipada. Apenas residentes nacionais têm acesso à tecnologia.

Além disso, existe um mercado de capitais mundial onde um dólar investido em  $t=0$  rende um dólar nos períodos  $t=1$  ou  $t=2$ . Os agentes nacionais podem investir o quanto quiserem neste mercado, mas podem tomar empréstimos somente até um máximo de  $f > 0$  dólares. Este limite é definido exogenamente, mas pode ser justificado teoricamente por vários motivos, como por exemplo, uma conta de capital regulada. Observa-se que o consumo é crescente em  $f$ , pois o retorno da tecnologia de longo prazo é maior do que a taxa de juros internacional (o empréstimo tomado no exterior tem custo zero). Assim, quando o agente investe toda sua riqueza e tudo que pode tomar emprestado na tecnologia de longo prazo ele recebe, no período  $t=2$ ,  $eR + fR$  de retorno, dos quais paga  $f$  do empréstimo, ficando com  $eR + f(r-1) > eR > 0$  para consumir, com  $R > 1$ .

Apesar disso, a escolha dos agentes não é trivial, pois no período  $t=1$  eles podem descobrir ser agente impaciente, ou agente paciente. Se seu tipo revelado for impaciente, o que ocorre com probabilidade  $\lambda$ , o agente deriva utilidade apenas do consumo em  $t=1$ . Com probabilidade  $(1-\lambda)$  o agente é paciente e deriva utilidade apenas do consumo em  $t=2$ . A distribuição por tipo dos agentes é *iid*, não há incerteza agregada e a informação do tipo do agente é privada para aquele agente.

Com esta estrutura, o agente enfrenta um dilema de consumo, pois há incerteza em  $t=0$  sobre o momento em que eles preferirão consumir e o tipo de investimento preferido pelos agentes, nos moldes de Diamond & Dybvig. Se os agentes agirem individualmente, cada um enfrentará um risco idiossincrático e a probabilidade de alguém liquidar antecipadamente, com custos, a tecnologia de longo prazo será positiva e haverá perda de bem-estar. Se os agentes agirem coletivamente, formando um banco, suas dotações serão alocadas de forma a atender às necessidades de cada parcela da população de cada tipo. Se o banco agir com o objetivo de maximizar o bem-estar do agente representativo haverá ganho de bem-estar social (CHANG & VELASCO, 2001).

No modelo de Chang & Velasco (2001) uma primeira restrição é que, com os contratos de depósitos, os agentes entregam suas dotações iniciais e o direito de tomar empréstimos no exterior ao banco no período  $t=0$ . Em troca recebem o direito de sacar  $x$  unidade de consumo no período  $t=1$  ou  $y$  unidades de consumo no período  $t=2$ . A decisão de saque é tomada de acordo com o tipo do agente. Os agentes não sabem seu tipo verdadeiro até o começo de  $t=1$ . Agentes impacientes só consomem no primeiro período, logo sacam  $x$ . Já os agentes pacientes só consomem no segundo período, no entanto podem sacar em qualquer dos períodos.

Nessa estrutura do sistema de contratos de depósitos os agentes pacientes precisam tomar decisões estratégicas, uma vez que eles só extraem utilidade do consumo em  $t=2$ . Se o agente sacar em  $t=1$  receberá  $x$ , que precisará transferir para  $t=2$  por meio do mercado de capitais, para então consumir. Por outro lado se ele esperar para sacar em  $t=2$  poderá receber  $y$ ,  $y > x$ . Mas isso só é possível se o banco continuar existindo em  $t=2$ . Caso o banco desapareça, ele receberá nada em  $t=2$  e sua utilidade será zero, de modo que teria sido melhor sacar antecipadamente.

Tal decisão estratégica sobre quando é melhor para o agente paciente sacar seu depósito significa que ele está envolvido em um jogo com os outros agentes pacientes, que podem afetar a continuidade de existência do banco. O jogo é realizado entre todos esses agentes. Cada um deles precisa escolher entre sacar no período  $t=1$  ou esperar até  $t=2$ . Um agente paciente que saca em  $t=1$  recebe  $x$  de *payoff*, que transferirá, sem custo, para o período  $t=2$ . Se ele esperar para sacar em  $t=2$  e o banco estiver aberto seu *payoff* será  $y$ ,  $y > x$ , mas se o banco desapareceu, seu *payoff* será  $0$ ,  $0 < x$ . O banco fechará dependendo de quantos agentes pacientes sacarem antecipadamente em  $t=1$ , se for um número suficientemente grande para que a demanda por depósitos em  $t=1$  ultrapasse  $(f - d) + rl^+$ , o banco deixará de existir, portanto seria melhor sacar antecipado. Se, por outro lado, o banco não fechar seria melhor esperar até o segundo período.

Logo, este jogo depende da idéia de crenças. Cada depositante paciente formula crenças sobre como os outros depositantes irão jogar. São duas as crenças possíveis:

1. O depositante paciente típico acredita que somente os depositantes impacientes sacarão em  $t=1$ , ou seja, nenhum agente tipo 2 sacarão em  $t=1$ ;
2. O consumidor paciente típico acredita que todos os agentes pacientes sacarão em  $t=1$ , ou pelo menos um número tão grande que o banco será obrigado a fechar suas portas.



A partir dessas crenças constrói-se um jogo com dois equilíbrios de Nash possíveis. Um equilíbrio com corrida bancária (risco-dominante) e outro equilíbrio sem corrida (*payoff*-dominante). A existência do equilíbrio *payoff*-dominante no modelo de Chang & Velasco (2001) mostram que o sistema de contrato de depósitos pode realizar o ótimo social, contanto que todos os agentes ajam honestamente de acordo com seu tipo, de modo que apenas os agentes impacientes saquem em  $t=1$  e o banco não feche. Por outro lado, uma corrida pode acontecer se todos os agentes decidirem sacar seus depósitos em  $t=1$ , por acreditar que os outros agentes também o farão.

Os autores concentram seu foco principalmente na causa da crise financeira, ou seja, na falta de liquidez dos bancos. Eles mostram que a crise ocorre quando o banco está sem liquidez e que isso pode ocorrer devido à estrutura do modelo. Apesar disso, não é dito quando o banco ficará ilíquido ou o que é preciso para que isso aconteça. No entanto, eles observam situações em que a iliquidez bancária é algo mais fácil de ocorrer, como quando um país inicia um processo de liberalização financeira.

Nesta dissertação, a preocupação principal é resolver a questão dos múltiplos equilíbrios e então analisar o impacto do consumo em  $t=1$  nesse equilíbrio. Uma vez que o modelo de Chang & Velasco (2001) apresentam um jogo semelhante ao de Diamond & Dybvig, é possível, baseado nas crenças dos jogadores, adaptá-lo a um jogo global e assim encontrar um único equilíbrio, como será visto nos próximos capítulos.

## 2. JOGOS GLOBAIS: TEORIA E APLICAÇÕES

A teoria dos jogos estuda as escolhas dos agentes em ambientes interativos onde o resultado dessas escolhas depende das escolhas realizadas pelos outros. Além disso, a teoria dos jogos trata das escolhas dos jogadores quando estes precisam tomar suas decisões com base no que acreditam que os outros jogadores escolherão (HARSANYI, 1995). Nesse sentido, ela pode ser aplicada em diversas áreas. Em economia, ela tem papel importante em modelos que explicam o funcionamento de mercado de ações, leilões, organização industrial, etc. (SCHALK, 2003).

A estrutura dos jogos requer a presença de jogadores, estratégias relacionadas às possíveis escolhas e o *payoff*. Na década de 1950, Nash já havia demonstrado a existência de equilíbrio em jogos não cooperativos, mas o aparecimento de problemas de assimetria de informação fez com que esses jogos fossem aprimorados.

A assimetria de informação começou a ser estudada para explicar situações onde o mercado parecia não funcionar como previsto pela microeconomia clássica. A constatação desse problema ajudou a melhorar os modelos, tornando-os mais próximos à realidade, apesar de elevar seu grau de dificuldade.

Em jogos é possível acrescentar assimetria informacional à modelagem. Podem-se criar jogos onde os agentes escolhem ao mesmo tempo (jogos simultâneos); jogos em que apenas um jogador sabe o que o outro jogou (jogos sequenciais); ou mesmo um jogo onde o agente esquece suas ações anteriores.

A hipótese de conhecimento comum, pressuposto segundo o qual todos os agentes conhecem as regras do jogo, como estratégias, *payoffs* e racionalidade, é comumente usada na teoria dos jogos. Contudo, é possível imaginar situações onde os jogadores podem não dispor de informações completas sobre essas regras (CARLSSON & VAN DAMME, 1993).

Carlsson & van Damme (1993) desenvolveram um modelo em jogos para analisar situações de informação incompleta, onde os jogadores observam seus *payoffs* de forma imprecisa. Esse modelo foi chamado jogos globais, pois para escolherem sua estratégia de forma racional não basta aos jogadores analisar a estrutura de equilíbrio do jogo, mas é preciso pensar em ações consistentes para todas as situações que poderiam ter ocorrido dentro da classe do jogo.

Esse ruído na observação dos *payoffs* introduz risco ao modelo. Ele faz com que os agentes precisem escolher entre um equilíbrio que os proteja dos riscos ou o equilíbrio com

maior *payoff* do jogo, mas mais arriscado. Jogos globais podem ser aplicados nestas situações onde os agentes desejam se proteger de riscos, como no mercado financeiro ou em situações que ocorram ataques especulativos etc.

## 2.1 O modelo clássico de jogos globais

O modelo de jogos globais foi desenvolvido para estudar o efeito da ausência de conhecimento comum na seleção de equilíbrios em teoria dos jogos. Consiste em um jogo de informação incompleta onde a estrutura de *payoffs* é determinada aleatoriamente em um conjunto, ou classe, de jogos onde os jogadores observam, com ruído, o jogo selecionado (MORRIS & SHIN, 2000). Assim, todo jogador interpreta seu *payoff* como variável aleatória e recebe incentivo para a coordenação com o que outros jogadores fizerem, globalmente.

Em seu artigo seminal de 1993, Carlsson & van Damme estudaram a seleção de equilíbrios em jogos  $2 \times 2$  com perturbação nos *payoffs*. Neste caso, o jogador observa com algum ruído o jogo selecionado pela Natureza e então escolhe sua ação. Caso a subclasse de jogos possíveis seja grande e o jogo escolhido envolva dois equilíbrios de Nash, os jogadores podem ser levados a escolher o equilíbrio risco-dominante. Neste equilíbrio o jogador se protege do risco de ter um retorno ruim, escolhendo um *payoff* menor do que o ótimo, mas maior do que outros existentes. Isso ocorre porque o sinal que os jogadores recebem lhes permite formar crenças sobre como os outros participantes jogarão, havendo incentivo para a coordenação em um ou outro equilíbrio, de acordo com o sinal recebido.

Harsanyi havia investigado, em 1973, jogos onde os *payoffs* eram perturbados aleatoriamente, mas a conclusão a que ele chegou é oposta à de Carlsson & van Damme (1993). Pelo modelo de Harsanyi qualquer equilíbrio de Nash pode ser alcançado com equilíbrios de jogos com *payoff* perturbável aleatoriamente. Já no modelo de jogos globais chega-se a um equilíbrio único, que pode ser o equilíbrio risco-dominante ou o equilíbrio *payoff*-dominante (CARLSSON & VAN DAMME, 1993).

Esta diferença vem da construção das crenças dos jogadores. Para Harsanyi as crenças de um jogador sobre as crenças de outros eram fundamentais para se chegar ao equilíbrio (MORRIS & SHIN, 2000), mas em seu modelo, as observações não tinham correlação, assim as crenças eram de conhecimento comum. Já em jogos globais, o ruído da observação do jogo completo faz com que as crenças tenham correlação, de modo que dependam de cada observação (CARLSSON & VAN DAMME, 1993).

Morris & Shin (2000) ressaltam a importância das conclusões do modelo de jogos globais relativas a informações públicas. Um exemplo que citam é o da reação exagerada do mercado financeiro a anúncios de bancos centrais reafirmando o óbvio. Essa reação pode ser explicada por um jogo global. Como os jogadores mudam suas crenças de acordo com o que acham que os outros crêem, informações públicas têm mais efeito do que apenas o de informar, também alteram a percepção que se tem da crença de outros jogadores.

É essa intuição que Carlsson e van Damme modelaram em seu jogo global. Eles desenvolveram um jogo 2x2 onde os jogadores não conhecem seus *payoffs* com certeza. Será apresentado abaixo um modelo de jogo global 2x2 baseado no artigo de Carlsson & van Damme (1993) e no *survey* de Morris & Shin (2000).

A interpretação de Morris & Shin (2000) para o jogo apresentado por Carlsson & van Damme é de um jogo  $G(\theta)$  2x2, onde os jogadores têm uma escolha de risco – investir – e outra sem risco – não investir – na forma abaixo (Quadro 1):

**Quadro 1**

	Investir (I)	Não Investir (NI)
Investir (I)	$\theta, \theta$	$\theta-1, 0$
Não Investir (NI)	$0, \theta-1$	$0, 0$

Fonte: Morris & Shin (2000)

Considere a classe de jogos  $\{g(\theta)\}$ , com  $\theta$  pertence ao conjunto dos números Reais. Percebe-se que  $g(\theta)$  tem solução estritamente dominante  $I = \{I, I\}$  para  $\theta > 1$  e  $NI = \{NI, NI\}$  para  $\theta < 0$ . Quando  $\theta$  pertence ao intervalo  $(0, 1)$  temos duas estratégias puras como equilíbrio de Nash:  $\{I, I\}$  e  $\{NI, NI\}$ .

O modelo supõe informação incompleta sobre o  $\theta$ . Os jogadores observam a subclasse de jogo selecionada com ruído, por meio do sinal privado  $x_i = \theta + \varepsilon_i$  para cada jogador  $i$  ( $i=1,2$ ), com  $\varepsilon_i$  independente e distribuído uniformemente em torno de  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , com média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Assume-se, então, que  $\theta$  é escolhido aleatoriamente na reta Real, com cada valor igualmente possível. Assume-se ainda que o jogador que observa  $x_i$  considera que  $\theta$  tem distribuição normal com média  $x$  e desvio padrão  $\sigma$ . Além disso, o jogador acredita que seu oponente observa o sinal  $x_j'$ , com distribuição normal, com média  $x_i$  e desvio padrão  $\sqrt{2}\sigma$ , uma vez que  $x_j'$  tem suporte  $[x_i - 2\varepsilon, x_i + 2\varepsilon]$  (CARLSSON & VAN DAMME, 1993; MORRIS & SHIN, 2000).

Portanto, a estratégia de investimento passa a ser uma função do sinal privado recebido. Faz sentido, então, pensar tal função estratégia de modo que o jogador escolha investir (ou correr risco) quando o sinal que ele observa ultrapassa certo ponto de inversão, representado por  $k$ :

$$s(x) = \begin{cases} \text{Investir, se } x > k \\ \text{Não investir, se } x \leq k \end{cases}$$

A estratégia,  $s(x)$ , é chamada de estratégia de inversão em  $k$ .

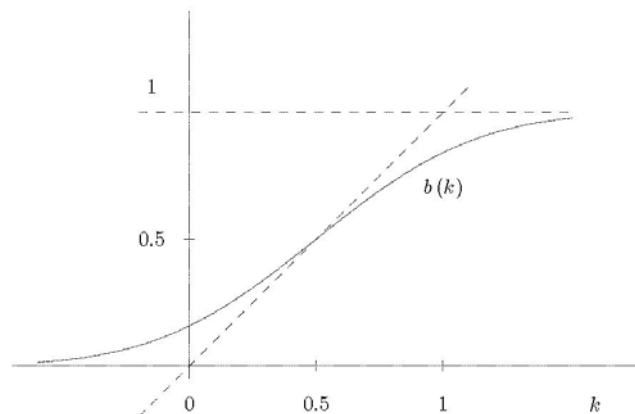
Suponha que um jogador observa o sinal  $x$  e acredita que seu oponente está seguindo uma estratégia com ponto de inversão em  $k$ . Sua crença é que  $x$  seja igual a  $\theta$ , então ele supõe uma probabilidade  $x - \Phi[(1/\sqrt{2}\sigma) \cdot (k - x)]$  de que seu oponente observa um sinal menor do que  $k$  ( $\Phi$  é a função de distribuição acumulada, Gaussiana). Além disso, quando o jogador observa  $x$  igual ao  $k$  de seu oponente, temos que  $\Phi = 1/2$ .

Para encontrarmos o equilíbrio desse jogo podemos definir  $b(k)$  como a função melhor resposta, que define para cada vetor de estratégia dos outros jogadores qual a estratégia ótima para o jogador  $i$ , de modo a resolver a equação:

$$x - \Phi[(1/\sqrt{2}\sigma) \cdot (k - x)] = 0.$$

Essa função tem como única solução  $k = 1/2$ , como pode ser vista no figura 1 abaixo:

**Figura 1**



Fonte: Morris & Shin (2000)

Como  $b(k)$  é a função melhor resposta para  $k$ , podemos achar essa solução repetindo o jogo  $n$  vezes, verificando se a estratégia  $s(x)$  resiste ao processo repetido de eliminação de estratégias estritamente dominadas. Sabe-se que não investir é estritamente dominante se  $\theta < 0$ , para  $n = 1$ . Se um jogador sabe que o outro escolherá não investir ao receber um sinal

menor do que  $b^n(k)$ , ele preferirá jogar “não investir” ao receber um sinal  $x$ ” menor do que  $b(b^n(k))$ . A estratégia iterada do jogo será:

$$s(x) = \begin{cases} \text{Investir, se } x > b^{n-1}(0) \\ \text{Não investir, se } x \leq b^{n-1}(0) \end{cases}$$

Como  $b(\cdot)$  é estritamente crescente e tem como ponto fixo  $1/2$ ,  $b^n(0) \rightarrow 1/2$  se  $n \rightarrow \infty$  e  $b^n(1) \rightarrow 1/2$  se  $n \rightarrow \infty$ . Assim, o único equilíbrio com os dois jogadores investindo ocorre se ambos observam um sinal maior que  $1/2$ , jogando com a estratégia  $s(x)$  e  $k=1/2$ :

## 2.2 Aplicações e jogos globais

A teoria de jogos globais permite que este seja aplicado em diferentes situações, onde há hipótese de conhecimento comum sobre a crença dos agentes. Além disso, também permite a realização de trabalhos empíricos que testem essa hipótese. Por exemplo, o trabalho de Heinemann, Nagel & Ockenfels (2004) discorre sobre a validade da estratégia de ponto de inversão, mesmo na existência de informações comuns (diferente de conhecimento comum).

Para jogos globais, não é adequada esta ausência de conhecimento comum, pois ela gera múltiplos equilíbrios, que em outros modelos são explicados por *sunspots*. Em jogos globais, a ausência de conhecimento comum sobre as crenças de outros jogadores é a origem das profecias auto-realizáveis. Uma vez que os jogadores não sabem como os outros escolherão, eles precisam antecipar essas jogadas. Isso faz com que os resultados pareçam aleatórios e, assim, surjam múltiplos equilíbrios.

Desse modo, aplicar jogos globais resolve o problema de múltiplo equilíbrio, pois os jogadores passam a montar sua estratégia como resposta a todas as situações possíveis. Morris & Shin (2000) apresentam aplicações para jogos globais relevantes ao objetivo desta pesquisa. São três as situações estudadas que apresentam múltiplos equilíbrios cuja causa pode ser explicada por profecias auto-realizáveis. São elas: corridas bancárias, crises cambiais e crises da dívida.

### 2.2.1 Corridas Bancárias

A primeira aplicação do modelo de jogos globais a ser estudada é uma situação de corridas bancárias. O modelo clássico para corridas bancárias foi desenvolvido por Diamond

& Dybvig (1983) e trata delas como um fenômeno intrínseco ao modelo de contratos de depósitos. Nele é apresentado um jogo com dois equilíbrios de Nash, um bom (*payoff*-dominante) e outro ruim, com corrida bancária (risco-dominante), onde ambos são passíveis de ocorrer.

Diamond & Dybvig (1983) abordam as vantagens associadas a contratos, depósitos e bancos com o objetivo de mostrar como seguros para depósitos poderiam trazer um maior bem-estar ao sistema financeiro, justificando uma intervenção do governo nesse sistema em prol do fortalecimento institucional dos bancos.

O problema desse jogo é que o equilíbrio de Nash com corrida bancária é *payoff*-inferior em relação ao equilíbrio sem a corrida. Isso acontece porque se todos os agentes sacarem seus depósitos antecipadamente, não haverá maturação dos investimentos nem transferência de renda, de modo que todos os agentes estariam melhor ao esperar. No entanto, para que esse equilíbrio ocorra, foi necessária a adição de crenças ao modelo

Diamond & Dybvig (1983) não apresentam uma explicação sobre as condições necessárias para a corrida bancária acontecer, apenas afirmam que essa possibilidade é intrínseca à existência de um banco. Contudo, se o banco não estivesse sujeito à corrida, ele estaria intermediando trocas financeiras como se tratasse de um mercado de títulos sem intermediadores, não trazendo melhorias de bem-estar.

Assim, a corrida bancária seria explicada por profecias auto-realizáveis, ou seja, por uma ausência de conhecimento comum sobre o estado da economia. Os jogadores agem de acordo com suas crenças sobre as crenças dos outros jogadores, algo que pode ser modelado como jogos globais. Tal aplicação do modelo de jogos globais ao modelo de Diamond & Dybvig requer algumas adaptações. O modelo original de Carlsson & van Damme foi desenhado para jogos  $2 \times 2$ , enquanto o de Diamond & Dybvig, para jogos  $n \times n$ . Morris & Shin (2000) demonstram a existência de equilíbrio para  $n$  jogadores em jogos globais, mas a interpretação das estratégias é diferente em Diamond & Dybvig, como será visto a seguir.

O modelo desenvolvido por Carlsson & van Damme (1993) demonstra que é possível existir um único equilíbrio em jogos com *sunspots*, bastando, para isso, introduzir incerteza sobre os *payoffs* e uma estratégia onde há incentivos “globais” para a coordenação. O equilíbrio encontrado poderá ser o *payoff*-dominante ou o risco-dominante, dependendo dos valores envolvidos no modelo.

Foi visto também que o modelo Diamond & Dybvig apresenta dois equilíbrios, sendo o equilíbrio com corridas bancárias *payoff*-dominado. As evidências históricas mostram que corridas bancárias ocorrem, mesmo não sendo a melhor opção. A proposta de Diamond &

Dybvig (1983) é apresentar uma solução para evitar essas corridas e não as explicar. No artigo seminal dos autores a causa que leva a corridas bancárias, *sunspots*, é exógena ao modelo.

Vários autores abordaram as possíveis causas de corridas bancárias, como por exemplo Bhattacharya & Jacklin (1988). Nem todos mantiveram a característica original das corridas descritas por Diamond e Dybvig, de que elas ocorreriam devido a profecias auto-realizáveis, pois o que leva um jogador a sacar antes é que ele crê que todos os outros jogadores também sacarão.

Nesse sentido, o modelo de Carlsson e van Damme se adequa bem, pois seu jogo é baseado na coordenação entre os agentes, onde existem incentivos para realizar a mesma ação que os outros jogadores. Ou seja, se um jogador paciente acredita que os outros depositantes pacientes irão sacar seus depósitos antecipadamente, o melhor é sacar antes também. Logo, existe compatibilidade de incentivos para a coordenação global dos agentes.

Um primeiro problema na adaptação do modelo de Diamond & Dybvig é a existência de  $n$  agentes, enquanto o modelo original de jogos globais supõe apenas dois agentes. No entanto, Morris & Shin (2000) demonstram que a existência de um único equilíbrio é válida também para jogos  $n \times n$ , onde o *payoff* de investir é dado por  $\theta - l + l$ , onde  $l$  é a proporção de outros jogadores que também investem. Ou seja, o *payoff* de investir é crescente no número de jogadores que investem, havendo incentivos para seguir a mesma estratégia.

Pode-se, então, adaptar o modelo de Diamond & Dybvig a jogos globais de modo a se ter uma explicação endógena para corridas bancárias. Haverá apenas um equilíbrio, mas ele poderá ser com ou sem corrida bancária, ambos com probabilidade positiva, possível de ser calculada.

Goldstein & Pauzner (2005) desenvolvem esse modelo. Eles assumem as mesmas características iniciais do modelo de Diamond & Dybvig: 3 períodos, 1 bem de consumo e um contínuo de agentes  $[0,1]$ . Os agentes nascem no primeiro período  $t=0$  com riqueza 1 e o consumo ocorre apenas nos períodos  $t=1$  e  $t=2$  ( $c_1$  e  $c_2$  são os níveis de consumo em cada período). Existem dois tipos de agente: o paciente, que prefere consumir no período  $t=2$ ; e o impaciente, que prefere sacar no período  $t=1$ . Os agentes só descobrem seus tipos no período 1, sendo  $\lambda$  a probabilidade de um agente ser impaciente.

A utilidade do agente impaciente é dada por  $u(c_1)$ , pois ele só consome no período 1, enquanto a do agente paciente é  $u(c_1+c_2)$ , pois ele pode sacar e consumir nos dois períodos. Assume-se que  $u(\cdot)$  é duas vezes diferenciável, crescente, e para qualquer  $c \geq 1$  o coeficiente relativo de aversão ao risco é  $-cu''(c)/u'(c) > 1$ ,  $u(0)=0$ .



Existe uma tecnologia produtiva que rende  $R$  unidades para cada unidade de riqueza investida com probabilidade  $p(\theta)$  e zero com probabilidade  $1-p(\theta)$ . Se o capital investido for sacado antecipadamente, no período  $t=1$ , o retorno recebido é de uma unidade para cada unidade investida.

Até o momento tem-se o modelo de Diamond & Dybvig, com exceção do parâmetro  $\theta$ . O  $\theta$  representa os fundamentos da economia, a garantia de retorno do investimento (no modelo original ele seria igual a 1). Supõe-se que  $\theta$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre  $[0,1]$  e seu valor é desconhecido antes do período  $t=2$ . A probabilidade  $p(\theta)$  é crescente com  $\theta$  e satisfaz  $E_\theta[p(\theta)]u(R) > u(1)$ , de modo que os agentes pacientes preferem esperar.

Mesmo com essa mudança é possível usar a análise de Diamond & Dybvig para a solução autárquica. Se houvesse um planejador, ele maximizaria o bem-estar social, dado pela função  $\lambda u(c_1) + (1-\lambda)u([(1-\lambda c_1)/(1-\lambda)]R)E_\theta[p(\theta)]$ .

A condição de primeira ordem é:

$$u'(c_1^{FB}) = Ru'(R(1-\lambda c_1^{FB})/(1-\lambda))E_\theta[p(\theta)]$$

Este é o resultado de *first best*, quando todos os agentes conhecem seus tipos. No artigo de Diamond & Dybvig (1983) é mostrado que ao se introduzir a assimetria sobre os tipos dos agentes, abre-se espaço para criação de bancos. Os bancos permitiriam um ganho de bem-estar para todos os agentes, compartilhando riscos e transferindo riqueza dos agentes pacientes para os impacientes.

Com a existência de contratos de depósitos, os agentes do tipo impaciente podem sacar  $r_1 \geq 1$  no período  $t=1$ . Enquanto os agentes pacientes recebem  $r_2 \leq R$  no período  $t=2$ , se o resultado for bom e 0 se o resultado for ruim (corrida bancária). O banco pagará  $r_1$  aos agentes que sacam no período  $t=1$  até que seus recursos se esgotem. De posse dessas informações, podemos definir o jogo global adaptado ao modelo de Diamond & Dybvig (Quadro 2):

## Quadro 2

Proporção de jogadores sacando	$n < 1/r_1$	$n \geq 1/r_1$
Período do saque		
1	$r_1$	$\left\{ \begin{array}{l} r_1, \text{ com prob. } 1/nr_1 \\ 0, \text{ com prob. } 1-1/nr_1 \end{array} \right.$
2	$\left\{ \begin{array}{l} [(1-nr_1)/(1-n)]R, \text{ com prob. } p(\theta) \\ 0, \text{ com prob. } 1-p(\theta) \end{array} \right.$	0

Fonte: GOLDSTEIN & PAUZNER (2005)

Agora assumamos que os agentes pacientes recebem um sinal  $\theta_i = \theta + \varepsilon_i$  sobre o estado  $\theta$  da economia, onde  $\varepsilon_i$  é um erro independente e uniformemente distribuído entre  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . O sinal  $\theta_i$  é uma informação privada e afeta a decisão do agente paciente entre correr ou não, atuando de duas maneiras sobre a escolha do depositante paciente.

O sinal realizado no começo do período  $t=1$  reflete o estado da natureza  $\theta(r_1)$ , não conhecido. Assim, pode-se esperar que para um valor muito baixo do sinal  $\theta_i$  o agente acredite que o valor verdadeiro do estado da natureza também seja baixo, preferindo sacar antecipadamente, indiferente ao que os outros jogadores farão. Isso, pois  $\theta(r_1)$  faz com que  $u(r_1) = p(\theta)u(R(1-\lambda)r_1)/(1-\lambda)$ , ou seja, a utilidade esperada de sacar em  $t=1$  seja igual à utilidade esperada de sacar em  $t=2$ . Então para um sinal  $\theta_i < \underline{\theta} - \varepsilon_i$  o intervalo de  $\theta_i \in [0, \underline{\theta}]$  seria a Região de Dominância Inferior. Nessa região os agentes pacientes sempre anteciparão seus saques e a crise terá origem nos fundamentos.

Um raciocínio semelhante vale para um sinal,  $\theta_i$ , muito próximo de 1. Se o agente acredita que os fundamentos estão na região  $\theta_i \in [\bar{\theta}, 1]$  ele não corre, pois o pagamento de uma unidade de investimento ( $R$ ) vai exceder  $r_1$  ( $r_1 = \min\{1/\lambda, R\}$ , ou seja,  $R \geq r_1$ ). Não haveria, então, necessidade de liquidar mais de uma unidade depositada para pagar os saques de uma unidade no período  $t=1$ , se o agente sabe que receberá seu retorno no período  $t=2$  (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

A segunda maneira pela qual o sinal influencia a escolha do agente está ligada ao intervalo  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ . Nesta região a preferência do depositante paciente dependerá do que os outros agentes farão. Pela lógica de jogos globais é possível imaginar que dado o sinal que o agente recebe ele acredita que, se for inferior a certo ponto de inversão  $\theta^*(r_1)$ , o número de agentes que correrão será tão grande que o melhor para ele é correr também. Agora, se  $\theta_i \geq \theta^*(r_1)$ , ele acredita que o número de pessoas que correrão não será o bastante para impedir

que ele receba  $r_2$  no período  $t=2$ , ele preferirá não correr (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

Goldstein & Pauzner (2005) demonstram isso da seguinte forma: como o número de agentes é um contínuo, pode-se definir uma função  $n(\theta, \theta')$  que determina a proporção de agentes que correm quando os fundamentos são  $\theta$ , de modo que todos os agentes correm quando o sinal é abaixo de  $\theta'$  e nunca correm quando o sinal é acima de  $\theta'$ . Assim, no equilíbrio a proporção de agentes que correm a cada nível dos fundamentos é dada por  $n(\theta, \theta^*) = \lambda + (1-\lambda) \cdot \text{prob}[\varepsilon_i < \theta^* - \theta]$ . Quando  $\theta_i < \theta^* - \varepsilon$  seu valor será 1, já que todos correrão (região de dominância inferior); se  $\theta_i > \theta^* + \varepsilon$ , então a proporção de agentes sacando no período  $t=1$  será  $\lambda$ , ou seja, só os agentes impacientes sacarão.

Na região intermediária, a corrida bancária só ocorrerá em caso de pânico, caso um agente paciente ache que o número de pessoas que correrão é grande o bastante para prejudicar seu resultado no período  $t=2$ . Assim, existe incentivo para a coordenação dos agentes e, a um dado  $\theta_i$  – abaixo do valor  $\theta^*$  – os agentes crêem que o número de pessoas que correm será grande o bastante e, portanto, o melhor é correr também, resultando em pânico.

Assim, o equilíbrio será único (seja correr ou esperar), pois o jogo, como construído, possui a propriedade de *complementaridade estratégica global*. Isso significa que quanto mais jogadores escolherem uma ação, maior será o incentivo para que os outros jogadores escolham a mesma ação (CARLSSON & VAN DAMME, 1993). Goldstein & Pauzner (2005) identificaram um problema em sua adaptação do modelo de Diamond & Dybvig, pois, nesse caso, essa propriedade não está presente para todas as proporções de agentes sacando em  $t=1$ , não sendo válida para quando ocorre uma corrida bancária.

Em modelos com corrida bancária, o incentivo para o agente correr é máximo quando  $n=1/r_1$  – onde  $n$  é o número de pessoas sacando no período  $t=1$  – e não quando  $n=1$ . Isso ocorre por que quando  $n > 1/r_1$ , o valor que os agentes receberão sacando no período 1 será menor do que  $r_1$  – o valor sacado na ausência de corrida. Mesmo assim, ainda é possível provar a existência de um equilíbrio único. Isso ocorre porque é preferível sacar um valor menor do que  $r_1$ , mas maior, do que receber zero – ao esperar para sacar no período  $t=2$ . O incentivo para correr diminui depois de certo valor de  $n$ , mas não se dissolve. Assim, a diferença entre as utilidades do agente paciente de sacar no período  $t=2$  e sacar no período  $t=1$  é dada por:

$$v(\theta, n) = \int p(\theta) u(R(1-nr_1)/(1-n)) - u(r_1), \text{ se } 1/r_1 \geq n \geq \lambda$$

$$0 - (1/nr_1)u(r_1), \text{ se } 1 \geq n \geq 1/r_1$$

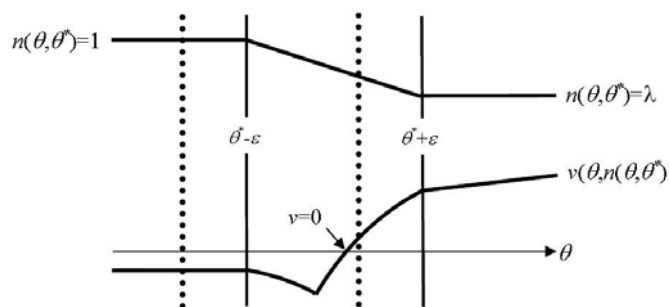
De qualquer modo, o modelo possui um lado onde a complementaridade estratégica está presente. Assim, ainda é possível mostrar que existe um equilíbrio único. Goldstein & Pauzner (2005) demonstram a existência de um único equilíbrio em duas partes: primeiro mostrando que existe equilíbrio quando todos os agentes adotam a estratégia de ponto de inversão – sempre correr se o sinal que recebem for inferior a certo ponto de inversão e nunca correr caso contrário –; e depois mostrando que todo equilíbrio deve ser um equilíbrio com ponto de inversão.

Para mostrar que existe equilíbrio com estratégias de ponto de inversão, os autores assumem que todos os agentes utilizam essa estratégia, correndo quando o sinal for abaixo de um valor  $\theta'$ . Sabe-se que quando a utilidade diferencial esperada dos agentes, entre sacar no período  $t=2$  ou sacar no período  $t=1$ , for negativa, é melhor para os agentes pacientes correrem, pois teriam maior utilidade no período  $t=1$ . Se, por outro lado, for positiva, o melhor é esperar (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

É possível calcular o valor esperado dessa diferença de utilidades  $v(\theta, n)$  – pertencente ao intervalo  $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ . Como essa função é contínua e o agente prefere correr se  $\theta_i$  for menor  $\theta'$  e esperar caso  $\theta_i$  maior que  $\theta'$ , ele deverá ser indiferente quando  $\theta_i$  for igual a  $\theta'$ . Assim, um equilíbrio com o ponto de inversão  $\theta'$  só pode existir se  $\Delta(\theta', \theta') = 0$ , onde  $\Delta$  é a função de utilidade esperada da diferença entre sacar no período  $t=2$  e sacar no período  $t=1$ . Isso acontece no ponto  $\theta^*(r_1)$ , porque o valor de  $\Delta(\theta', \theta')$  é negativo quando  $\theta' < \theta - \varepsilon$  e positivo quando  $\theta' > \theta + 2\varepsilon$ . Como  $\Delta(\theta', \theta')$  é contínuo e crescente em  $\theta'$ , ele deve passar por um ponto  $\theta^*(r_1)$  onde  $\Delta(\theta^*(r_1), \theta^*(r_1)) = 0$  e esse é o único candidato a equilíbrio (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

Basta agora mostrar que  $\Delta(\theta_i, \theta^*(r_1))$  é negativo para  $\theta_i < \theta^*(r_1)$  e positivo para  $\theta_i > \theta^*(r_1)$ . Se o modelo tivesse complementaridades estratégicas globais seria fácil provar isso, pois se o sinal,  $\theta_i$ , fosse alto, por exemplo, poucas pessoas sacariam antes, e de fato o melhor seria esperar. Como nesse modelo, no caso de corrida bancária, a complementaridade é apenas parcial, pode haver dúvida sobre o que fazer quando muitos indivíduos sacaram antecipadamente. Mas, na verdade o melhor é correr também, pois apesar de se receber menos do que  $r_1$ , a probabilidade de receber mais que zero é positiva. Isso é representado pela propriedade da diferença entre as utilidades de cruzar o eixo  $\theta$  uma única vez. Graficamente (Figura 2):

**Figura 2**



Fonte: GOLDSTEIN & PAUZNER (2005)

Esta figura mostra a função  $n(\theta, \theta^*)$ , que é a proporção de agentes que correm; e a função  $v(\theta, n(\theta, \theta^*))$ , a diferença de utilidade entre sacar no período  $t=2$  e sacar no período  $t=1$ . A diferença esperada das utilidades é calculada pela integral de  $v(\theta, n(\theta, \theta^*))$  no intervalo  $[\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$ . Sabe-se que  $\Delta(\theta^*(r_1), \theta^*(r_1)) = 0$ , pois é a integral entre as duas linhas sólidas. Ao se considerar a integral de  $v$  entre as linhas pontilhadas (espaço  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$ ), por exemplo, referente a um  $\theta_i < \theta^*(r_1)$ , é visível que a  $\Delta(\theta_i, \theta^*(r_1))$  é negativa, sendo preferível para o agente correr. Se  $\theta_i$  fosse maior que  $\theta^*(r_1)$ , o preferível seria esperar (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

Com isso os autores demonstram que a estratégia do ponto de inversão em  $\theta^*$  é um equilíbrio único. Desse modo, desenvolve-se uma explicação para a corrida bancária do modelo de Diamond & Dybvig. Antes, o evento de uma corrida bancária era algo exógeno ao modelo. Logo, apesar de verificável na realidade, não havia uma justificativa para se iniciar um pânico, sempre faz mais sentido coordenar para o equilíbrio Pareto-Dominante. O trabalho de Goldstein & Pauzner (2005), adapta a metodologia de jogos globais para o modelo de Diamond & Dybvig de modo a justificar a existência do equilíbrio de corrida bancária, e torná-lo parte inerente ao modelo.

### 2.2.2 Crises cambiais

Ataques especulativos a moedas é outro exemplo de evento onde as profecias auto-realizáveis são um fator relevante. Por causa dessas profecias ataques especulativos ocorrem, muitas vezes, sem aviso. Mesmo quando não há mudanças aparentes nos fundamentos da economia. Os agentes sofrem uma crise de confiança e realizam o ataque especulativo à moeda, mesmo sem um motivo aparente, por acharem que ele ocorreria de qualquer maneira.

Morris & Shin (1998) argumentaram que apenas verificar que as profecias auto-realizáveis acontecem não ajuda a aumentar a estabilidade dos sistemas financeiros. É importante responder perguntas como: porque os ataques especulativos ocorrem e quando eles ocorrem? Que tipos de políticas podem ser usadas para deter os ataques especulativos? Como são formadas as crenças dos agentes que causam esses ataques?

A incerteza a respeito das crenças dos outros jogadores cria os múltiplos equilíbrios, segundo Morris & Shin (1998). Assim, mesmo se todos souberem que a economia encontra-se numa situação estável e que a moeda está garantida, nem todos sabem que isso é de conhecimento comum. Essa incerteza sobre as crenças dos outros agentes é a origem da falha de coordenação entre os jogadores que por sua vez é a causa da ocorrência ou não do ataque especulativo. Assim, qualquer resultado é possível (MORRIS & SHIN, 1998).

Percebe-se que esta situação está ligada ao modelo de jogos globais. Existem dois equilíbrios possíveis neste jogo. Um deles é o *payoff* dominado, onde o ataque especulativo ocorre quando os agentes buscam se defender do risco de os outros agentes atacarem a moeda (risco-dominante). No outro, o equilíbrio ocorre na ausência de ataque especulativo, e todos os agentes ficam em situação melhor – equilíbrio *payoff*-dominante.

Na modelagem criada por Morris & Shin (1998), o jogo ocorre entre o governo e um conjunto de especuladores. Os especuladores precisam decidir se atacam a taxa de câmbio, enquanto o governo precisa decidir se a defende ou não. A taxa de câmbio é dada por uma função  $f(\theta)$  dos fundamentos verdadeiros  $\theta$  da economia, caso o governo não intervenha no mercado de câmbio. Quando o governo intervém, ela será dada por  $e^*$ . O parâmetro  $\theta$  é distribuído uniformemente entre  $[0,1]$ , sendo  $\theta=0$  o pior estado da economia e  $\theta=1$  seu melhor estado.

Existe um custo fixo de transação,  $t$ , quando o jogador decide atacar. O retorno de um ataque quando a taxa de câmbio é abandonada pelo governo é dado pela diferença entre a taxa de câmbio inicial ( $e^*$ ) e a taxa de câmbio dada pelos fundamentos ( $f(\theta)$ ), subtraída do custo de transação,  $[e^* - f(\theta)] - t$ . Quando o governo defende a taxa de câmbio, o *payoff* do jogador é  $-t$  caso o jogador ataque, e seu *payoff* será zero toda vez que ele não atacar. Por outro lado, o governo enfrenta um custo  $c(\alpha, \theta)$ , onde  $\alpha$  é a proporção de jogadores que atacam a moeda quando o governo defende a taxa de câmbio, assim como também deriva um valor  $v > 0$  quando a defende. Logo, o governo só irá defender a moeda caso  $v - c(\alpha, \theta) > 0$ .

Assumindo que  $c(\alpha, \theta)$  é crescente em  $\alpha$  e decrescente em  $\theta$ , Morris & Shin (1998) assumem outras três condições para dar mais sentido econômico ao modelo. Primeiro,

$c(0,0) > v$ , ou seja, no pior estado dos fundamentos, o custo de defender a taxa de câmbio é sempre maior do que o benefício para o governo em defendê-la. Segundo,  $c(1,1) > v$ , o que significa que quando todos os especuladores atacam a moeda, nem no melhor estado da economia o benefício da defesa da moeda compensa seu custo para o governo. Terceiro e último,  $e^* - f(1) < t$ , quando no melhor estado da economia, a diferença entre a taxa de câmbio determinada pelo governo e a taxa de câmbio flutuante, que é o retorno do especulador, é menor que o custo de transação, não sendo interessante, portanto, atacar a taxa de câmbio fixada pelo governo.

Com base nisso, é possível dividir os estados da economia em três intervalos, assumindo  $\underline{\theta} < \bar{\theta}$ . No intervalo de  $[\underline{\theta}, \underline{\theta}]$  todo agente terá como estratégia dominante atacar a moeda, pois o custo para o governo defendê-la é muito alto e ele não o fará, e a taxa de câmbio será instável. No intervalo de  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ , o benefício para o governo de defender a moeda é maior do que o custo, desde que o número de jogadores atacando seja pequeno o suficiente. Neste intervalo, há múltiplos equilíbrios, um em que os jogadores atacarão a moeda, e outro em que não a atacarão. No intervalo de  $[\bar{\theta}, 1]$ , o custo de atacar a moeda será maior do que a utilidade derivada de atacá-la, de modo que os jogadores terão como estratégia dominante não atacar (MORRIS & SHIN, 2000).

É no intervalo  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  que as crenças sobre as escolhas dos jogadores criam profecias auto-realizáveis. Se  $\theta$  for observado com ruído, podemos modelar este jogo por jogos globais. Com a natureza escolhendo  $\theta$ , os especuladores observariam um sinal  $\theta_i$ , uma variável aleatória distribuída idêntica, independente e uniformemente no intervalo  $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ , para  $\varepsilon > 0$ . O governo, por sua vez, observa a proporção de agentes que ataca a moeda  $\alpha$  e o estado dos fundamentos  $\theta$ .

Morris & Shin (1998) mostram como é encontrado o equilíbrio em seu artigo. Para encontrar as estratégias ótimas do governo e dos especuladores, os autores separam primeiro o jogo realizado entre estes especuladores de modo a encontrar a estratégia ótima deles e, a partir daí, definir a estratégia ótima do governo ao final. Eles demonstram o seguinte resultado: “há um único  $\theta^*$  que, em qualquer equilíbrio do jogo com informação imperfeita sobre os fundamentos, o especulador com sinal  $\theta_i$  ataca a moeda se e apenas se  $\theta_i < \theta^*$ ” (Lema 3, MORRIS & SHIN, 1998:592-593). Ou seja, a estratégia ótima dos especuladores, quando  $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ , é atacar a moeda se o sinal recebido for menor do que  $\theta^*$ , o ponto de inversão para o *payoff* do especulador, a partir do qual esse *payoff* fica negativo se os

fundamentos forem muito fortes e positivos caso sejam fracos. Por outro lado, se os especuladores usam essa estratégia de atacar quando o sinal,  $\theta_i$ , é  $\theta_i < \theta^*$ , a proporção de agentes atacando será tal que  $\theta \leq \theta^*$ , ponto a partir do qual é melhor para o governo não defender a taxa de câmbio.

Esses resultados permitem encontrar um único equilíbrio para o modelo de crise cambial, dado o estado dos fundamentos ( $\theta$ ). Isso é particularmente importante em termos de definição de políticas. O problema da existência de ruídos na observação dos fundamentos é que os agentes não têm conhecimento comum sobre esses fundamentos e farão suas escolhas de acordo com o sinal recebido. Se todos receberem um sinal inferior – por exemplo, uma notícia de que um banco está ameaçado – isso pode dar início a uma reação em cadeia que leve a uma profecia auto-realizável.

Em termos de política econômica, defender a taxa de câmbio não é sempre uma opção, como analisado acima. Uma estratégia para evitar crises seria restabelecer a confiança no mercado. Em outras palavras, criar uma situação em que haja conhecimento comum sobre os fundamentos da economia. Para fazer isso, uma opção seria reunir todos os agentes e passar tal informação para eles de forma simultânea. Na prática, no mercado financeiro internacional, isto é inviável. Uma alternativa a essa opção é a divulgação aberta das políticas do governo, recuperando a transparência no sistema e evitando a perda de confiança (MORRIS & SHIN, 1998).

### **2.2.3 Crises da dívida**

O problema analisado aqui diz respeito a empréstimos cujos credores resolvem encerrar antecipadamente, criando uma situação onde o tomador de empréstimo pode não ter liquidez para pagar a dívida. Se tal situação ocorre em larga escala, tem-se uma situação de crise da dívida, algo crucial para a gravidade de crises financeiras como a asiática, entre 1997 e 1998 (MORRIS & SHIN, 2006; STIGLITZ, 2004).

O problema de coordenação nesse caso é semelhante ao do modelo de Diamond & Dybvig (1983). No modelo de corridas bancárias, mesmo que o estado de natureza fizesse com que o banco estivesse solvente para pagar os depósitos no segundo período, os depositantes podem sacar antecipadamente causando uma crise de liquidez no primeiro período, obrigando o banco a fechar suas portas no último período. Agora, o que ocorre é que apesar de os projetos financiados serem capazes de chegar a um valor de maturação suficiente



para pagar o empréstimo, os emprestadores podem querer encerrar o empréstimo antes da hora causando o problema de liquidez (MORRIS & SHIN, 2006).

Neste modelo, um grupo de agentes financia um projeto. A cada um deles cabe uma parte pequena do valor financiado, insignificante frente ao total. Ao final do projeto, seu valor de liquidação é  $v$  e cada agente recebe uma proporção  $L$  desse valor como pagamento pelo empréstimo, se  $v$  for grande o bastante para pagar toda a dívida. Existe um período intermediário no qual os emprestadores podem decidir se querem antecipar a liquidação do projeto ou rolar o empréstimo até o seu final. Caso resolvam antecipar, os agentes recebem uma proporção do colateral, com valor de liquidação  $\bar{K} < L$ . Caso o projeto falhe no final, os agentes também recebem o colateral, mas com um valor de liquidação menor  $\underline{K}$ , de modo que  $\underline{K} < \bar{K} < L$ . O sucesso do projeto depende da quantidade de agentes que continuam a financiá-lo e do estado da economia  $\theta$  em que se realize.

Inserindo ruído na observação do estado da economia  $\theta$  pelos agentes, estes não sabem mais qual a escolha que os outros jogadores farão e, desse modo, obtemos um jogo global. Morris & Shin (2006) demonstram, a partir daí, que existe uma estratégia de inversão que permite um único equilíbrio. O ponto de inversão neste modelo é uma relação da precisão na distribuição de  $\theta$ , *ex ante*, e a precisão do sinal recebido frente à incerteza existente. O aspecto relevante do modelo é permitir verificar melhor o efeito da transparência, ou seja, o efeito da informação tendendo ao conhecimento comum sobre o equilíbrio do modelo.

Outra importante análise possível usando esse modelo refere-se ao impacto do colateral sobre o equilíbrio. Se por um lado o colateral faz com que os emprestadores confiem mais no projeto para manter seu dinheiro nele, ao mesmo tempo ele representa um custo maior para o projeto. Assim, o colateral tem um lado positivo, pois dá certa segurança de retorno mínimo aos agentes, caso o projeto falhe, mas ele também tende a aumentar o alcance do  $\theta$  em que os agentes preferem antecipar a liquidação do projeto, causando a moratória (MORRIS & SHIN, 2000).

### 3. MODELO DE INSTABILIDADE FINANCEIRA INTERNACIONAL COMO JOGOS GLOBAIS

O objetivo deste capítulo é reconstruir o modelo de Chang & Velasco (2001) como um jogo global, eliminando os equilíbrios múltiplos, mas sem perder a qualidade do modelo em explicar crises financeiras e seus agravantes. Em jogos globais, os agentes observam com ruído os resultados do jogo, assim eles não sabem o que esperar da ação dos outros jogadores. Eles sabem, apenas, que sua escolha pode estar sujeita aos riscos do mercado, fazendo com que muitas vezes prefiram antecipar suas ações e, assim, acabam causando a crise financeira.

No modelo de Chang & Velasco (2001), o jogo existente ocorre entre os depositantes pacientes. Eles precisam escolher se vão sacar seus depósitos em  $t=1$  ou em  $t=2$ . Quando eles sacam no período  $t=1$  diz-se que os agentes correm, quando sacam em  $t=2$ , eles esperam. Se os outros jogadores pacientes sacarem em  $t=1$ , é melhor correr também, se ninguém correr é melhor esperar. Assim, existem dois equilíbrios: um onde todos correm e outro onde todos esperam.

Esse jogo é bastante semelhante ao jogo de corridas bancárias de Diamond & Dybvig (1983). A principal diferença é que o banco pode tomar empréstimos no exterior, aumentando sua liquidez em  $t=1$ . Goldstein & Pauzner (2005) adaptaram o modelo de Diamond & Dybvig (1983) para jogos globais. De modo similar, é possível adaptar também o modelo de Chang & Velasco (2001) para jogos globais.

No capítulo anterior argumentamos que corridas bancárias existem por causa do sistema de crenças dos agentes. As crenças fazem com que eles corram se acham que outros agentes correrão. Assim, cada agente antecipa as ações dos outros para não se prejudicar e isso causa a corrida bancária, mesmo que não haja motivo real para ela.

A questão é: o que leva um agente a acreditar que os outros correrão ou esperarão? Há incerteza para os agentes quanto à liquidez do banco no segundo período. Os depositantes querem sacar no período em que o retorno lhes traga maior utilidade.

No modelo original de Diamond & Dybvig, não é possível prever qual equilíbrio será realizado. Mas ao introduzir um sinal que indique aos jogadores que o banco terá liquidez em  $t=2$ , a estratégia mais eficiente passará a ser determinada segundo esse sinal. Assim, os agentes conseguem antecipar as ações dos demais jogadores, fazendo com que seja possível determinar o equilíbrio de acordo com o sinal recebido, não mais causado por um *sunspot* (CARLSSON & VAN DAMME, 1993).

Acrescenta-se ao modelo, assim, o conceito de “Estado da Economia”, que representa o nível de liquidez do sistema financeiro, de modo que quanto mais líquido for o banco ao chegar ao período  $t=2$  melhor a situação. Este estado da natureza é realizado em  $t=1$ , mas os agentes não têm conhecimento completo sobre ele: Eles recebem apenas um sinal privado sobre esse estado, um sinal com ruído. Este sinal altera o resultado do modelo, pois agora os agentes formulam suas crenças de acordo com ele. A importância desse sinal está na informação que ele revela. Além de indicar o possível nível de liquidez em  $t=2$ , ele também revela informação sobre o sinal que os outros agentes receberam. Se receberem um sinal alto, por exemplo, maior a chance de que os outros agentes também tenham recebido um sinal alto, fazendo com que a chance de uma corrida bancária acontecer seja menor, diminuindo, conseqüentemente, os incentivos para correr.

Com base nos trabalhos de Carlsson & van Damme (1993) e Goldstein & Pauzner (2005), pretende-se mostrar que, para o modelo de crises financeiras de Chang & Velasco (2001), também é possível encontrar um equilíbrio único baseado nos sinais recebidos. Além disso, o modelo com o equilíbrio único também reproduz as características do modelo original, sendo possível verificar que situações podem tornar uma crise mais provável ou não. Dessa forma, neste capítulo o modelo básico de Chang & Velasco (2001) é reescrito como um jogo global, demonstrando que é possível chegar a um único equilíbrio de ponto de inversão, permitindo análises posteriores. Para este fim, também se utiliza o trabalho de Takeda (2001), que faz uma abordagem diferente de Goldstein e Pauzner para mostrar o equilíbrio no modelo de Chang & Velasco e se concentra no estudo do impacto dos empréstimos sobre este equilíbrio. Desta forma, o estudo sobre o modelo desses autores é expandido ainda mais com este trabalho.

### **3.1 O modelo com um equilíbrio em jogos globais**

Existem três períodos,  $t=0,1,2$ , um bem comercializado livremente no mundo, com preço fixo e normalizado em um “dólar” e um *continuum*  $[0,1]$  de agentes racionais que nascem com dotação inicial  $e$  do bem.

O consumo ocorre apenas nos períodos  $t=1$  e  $t=2$  e são representados por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Cada agente pode ser de dois tipos: com probabilidade  $\lambda$  o agente é paciente e com probabilidade  $(1-\lambda)$  o agente é impaciente. Os tipos de agentes têm distribuição *iid*, não há incerteza agregada e a realização de seu tipo em  $t=1$  é informação

privada. No período  $t=0$  eles podem escolher investir em uma tecnologia de longo prazo ou então transferir sua renda ao período seguinte usando o mercado internacional. Essa transferência não traz custos e tem taxa de juros constante igual a um. Agentes impacientes consomem apenas em  $t=1$ , agentes pacientes consomem apenas em  $t=2$ , mas podem liquidar seus investimentos em  $t=1$  e transferir os recursos sem perda para o período  $t=2$ . A função de utilidade do agente representativo é dada por  $\lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ , em que  $u(\cdot)$  é utilidade com *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA), com  $\sigma > 1$ , região onde há múltiplos equilíbrios<sup>2</sup>. Sem perda de generalidade, pode-se normalizar  $u(\cdot)$ , tal que  $u(0)=0$ .

O problema é que a escolha do agente paciente não é trivial, ao liquidar antecipadamente um investimento ele incorre em perda de liquidez de  $r < 1$ . Como um agente não conhece seu tipo até o período  $t=1$ , todos os agentes correm um risco idiossincrático. No entanto, pela distribuição dos agentes, não há incerteza agregada, assim, se os agentes agirem como um só, é possível haver ganho de bem-estar. Para permitir isso, surge o banco e o contrato de depósitos, pelo qual no período  $t=0$  os agentes depositam todas as suas dotações no banco e abrem mão do seu direito de tomar emprestado no mercado internacional de capitais (CHANG & VELASCO, 2001).

O banco, então, passa a ter acesso à tecnologia com alta taxa de retorno no longo prazo,  $R > 1$ , mas com perda de liquidez de  $r < 1$  para cada dólar investido, se resgatado antecipadamente. Ele pode transferir os recursos depositados para  $t=2$  atuando no mercado internacional de capitais. Ou então, pode atuar no mercado internacional transferindo seus recursos entre períodos ao custo de uma unidade por unidade transferida. Também é possível tomar empréstimos no exterior em  $t=0$  e  $t=1$ , até o máximo de  $f, f > 0$  dólares.

A tecnologia de longo prazo introduz a incerteza a respeito do resultado do investimento em  $t=2$ . Ao liquidar o investimento no último período, o retorno será de  $R > 1$  com probabilidade  $p(\theta)$  ou 0 com probabilidade  $(1-p(\theta))$ . O parâmetro  $\theta$  representa o estado da economia. Ele tem distribuição uniforme em  $[0,1]$ , i.e.,  $\theta \sim U[0,1]$ , e é realizado em  $t=1$ , embora desconhecido pelos agentes até  $t=2$ . Assume-se ainda que o  $p(\theta)$  é estritamente crescente em  $\theta$ .

A nova restrição de compatibilidade de incentivos é dada por  $E_{\theta} [p(\theta)u(y)] \geq u(x)$ , ou seja, o retorno esperado do agente paciente é pelo menos tão bom quanto o do agente impaciente. O problema do banco no tempo é definido como:

---

<sup>2</sup> Chang & Velasco (2001, p. 498) observam que se  $\sigma < 1$  corridas não podem ocorrer, como consequência das suposições do modelo por eles proposto. Essa condição também é assumida neste trabalho, uma vez que o problema do banco trabalhado nesta dissertação é análogo ao de Chang & Velasco (2001).

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)E_{\theta}[p(\theta)] & (3.1^a) \\
\text{sa.} \quad & k \leq d + e & (3.1^b) \\
& \lambda x \leq b + rl & (3.1^c) \\
& (1 - \lambda)y + d + b \leq R(k - l)p(\theta) & (3.1^d) \\
& d + b \leq f & (3.1^e) \\
& y \geq x & (3.1^f) \\
& x, y, b, k, l \geq 0 & (3.1^g)
\end{aligned}$$

A equação (3.1<sup>b</sup>) restringe o investimento de longo prazo à soma da dotação inicial com os empréstimos líquidos tomados em  $t=0$ , onde  $k$  é o investimento na tecnologia de longo prazo,  $d$  é o empréstimo tomado no exterior no período  $t=0$  e  $e$  é a dotação inicial; a restrição (3.1<sup>c</sup>) é a restrição de participação do agente impaciente e diz que para financiar o consumo em  $t=1$  é possível tomar emprestado no exterior e liquidar parte do investimento de longo prazo, nela  $b$  é o empréstimo internacional tomado em  $t=1$ ,  $l$  é a parcela do investimento de longo prazo liquidada antecipadamente e  $r$  a taxa de liquidação em  $t=1$ . A equação (3.1<sup>d</sup>) é a restrição de participação para o agente paciente, segundo ela o consumo em  $t=2$  e os empréstimos tomados no exterior em  $t=1$  e  $t=0$  precisam ser financiados pelo investimento de longo prazo liquidado em  $t=2$ ; pela restrição (3.1<sup>e</sup>) os empréstimos totais tomados nos dois períodos não podem ultrapassar o limite de crédito disponível no exterior,  $f$ .

Já (3.1<sup>f</sup>) é a restrição de compatibilidade de incentivos, que garante que os agentes revelem seus verdadeiros tipos. Se  $x > y$ , então para o agente paciente é melhor mentir sobre seu tipo e receber  $x$  unidades de consumo do período  $t=1$ , as quais ele pode trocar no mercado internacional por  $x$  unidades de consumo do período  $t=2$ . Se  $x < y$  e o agente paciente mentir sobre seu tipo, ele recebe apenas  $x$  no período  $t=1$  e ao trocar por consumo no período  $t=2$  terá menos do que receberia caso tivesse esperado para sacar em  $t=2$ . Assim, não há incentivo para o agente paciente mentir. Para o agente impaciente não faz sentido mentir, pois não é possível transformar consumo do período  $t=2$  em consumo do período  $t=1$ , portanto caso ele mentisse, sua utilidade seria sempre 0,  $0 < x$ . Esta restrição é necessária, pois o banco só monitora transações do sistema bancário nacional, não observando o consumo dos agentes ou suas transações com o exterior, logo ela garante que os depositantes pacientes não mentirão.

Por fim, a restrição (3.1<sup>g</sup>) representa as restrições de não negatividade do modelo. Observa-se que  $d$  pode ser negativo, significando que houve transferência de recurso para o mercado externo em  $t=0$ . Normalmente  $d$  será positivo, com  $f$  suficientemente grande em relação a  $e$ , pois o investimento na tecnologia de longo prazo utilizará toda a dotação inicial.

Se  $f$  for pequeno em relação à dotação inicial, recursos precisam ser transferidos ao período  $t=1$  para pagar os saques dos agentes impacientes, de modo que  $d$  ficaria negativo.

Assume-se, no ótimo, que:

1.  $l=0$ , o que significa que o banco não liquida os investimentos antecipadamente, de modo que  $\lambda x=b$ ;
2.  $d+b=f$ , ou seja, o banco toma o máximo de empréstimo possível, de modo que  $(1-\lambda)y+d+b=Rkp(\theta)$ .

Portanto, temos que  $(1-\lambda)y+f=R(d+e)p(\theta)$ , passando  $f$  para o lado direito, fica  $(1-\lambda)y=(Rd+Re)p(\theta)-f \xrightarrow{d=f-b} (1-\lambda)y=Rp(\theta)(f-b)+Rp(\theta)e-f$ . Assim, colocando  $f$  em evidência, temos  $(1-\lambda)y-bRp(\theta)=(Rp(\theta)-1)f+Rp(\theta)e$ . Como  $\lambda x=b$ , então:

$$(1-\lambda)y+\lambda xRp(\theta)=p(\theta)Rw_{\theta} \quad (3.2)$$

Essa última equação pode ser interpretada como a curva de transformação social, onde  $w_{\theta}=e+\frac{(p(\theta)R-1)}{p(\theta)R}f$ , i.e., a riqueza da economia;

3. Assim, utilizando a equação (3.2), é possível encontrar a curva de indiferença social e também a taxa de substituição social entre consumo no período  $t=1$  e consumo no período  $t=2$ , que é igual à taxa de retorno no período 2,  $R$ , dado pela equação (3.3):

$$\left(\frac{x_{\theta}}{y_{\theta}}\right)^{-\sigma}=R \quad (3.3)$$

ou então  $x=R^{\frac{-1}{\sigma}}y$ . Substituindo (3.3) em (3.2) tem-se que:

$$(1-\lambda)y+\lambda R^{\frac{-1}{\sigma}}yRp(\theta)=p(\theta)Rw_{\theta}, \text{ donde } (1-\lambda)y+\lambda R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}p(\theta)y=p(\theta)Rw_{\theta} \text{ e,}$$

portanto  $[\lambda R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}p(\theta)+(1-\lambda)]y=p(\theta)Rw_{\theta}$ , o que implica:

$$(1-\lambda)y=\frac{(1-\lambda)}{\lambda p(\theta)R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\lambda)}p(\theta)Rw_{\theta} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2) encontra-se  $(1-\lambda)y+\lambda xRp(\theta)=p(\theta)Rw_{\theta}$ , donde:

$$\frac{(1-\lambda)}{\lambda p(\theta)R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+(1-\lambda)}p(\theta)Rw_{\theta}+\lambda xRp(\theta)=p(\theta)Rw_{\theta}, \text{ o que implica:}$$

$$\frac{(1-\lambda)}{\frac{\sigma-1}{\lambda p(\theta)R^\sigma + (1-\lambda)}} w_\theta + \lambda x = w_\theta, \text{ portanto:}$$

$$\lambda x = w_\theta - \frac{(1-\lambda)}{\frac{\sigma-1}{\lambda p(\theta)R^\sigma + (1-\lambda)}} w_\theta, \text{ isto é:}$$

$$\lambda x = \frac{\lambda p(\theta)R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\frac{\sigma-1}{\lambda p(\theta)R^\sigma + (1-\lambda)}} w_\theta ; \quad (3.5)$$

$$4. \quad \Phi_\theta = \frac{\lambda p(\theta)R^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\frac{\sigma-1}{\lambda p(\theta)R^\sigma + (1-\lambda)}} \quad (3.6)$$

Logo, a solução autárquica para o problema é  $y_a$  e  $x_a$  dados implicitamente por:

$$(1-\lambda)y_a = (1-\Phi_\theta)p(\theta)Rw_\theta \quad (3.4^a)$$

$$\lambda x_a = \Phi_\theta w_\theta \quad (3.5^a)$$

Substituindo nas restrições, encontra-se os valores para  $b_a$ ,  $k_a$  e  $d_a$ :

$$b_a = \Phi_\theta w_\theta \quad (3.7^a)$$

$$k_a = \frac{f}{p(\theta)R} + (1-\Phi_\theta)w_\theta \quad (3.7^b)$$

$$d_a = k_a - e \quad (3.7^c)$$

Esses resultados são encontrados reescrevendo (3.4) e (3.5) utilizando (3.6), definindo os valores ótimos de  $y_a$ , e  $x_a$  para a solução autárquica.

Aqui novamente tem-se uma situação em que os agentes pacientes subsidiam os impacientes devido à alta aversão ao risco  $\sigma > 1$ . Ou seja, há distribuição de risco no modelo.

A alocação autárquica segue a mesma lógica do modelo apresentado em Chang & Velasco (1998). Mas quando os tipos possuem informação privada, o planejador social (ou o banco) não pode fazer pagamentos contingentes ao tipo. A alternativa segundo Diamond & Dybvig (1983) é oferecer contratos de depósito.

Cada agente deposita sua dotação no banco em  $t=0$  e abre mão de seus direitos de tomar emprestado no mercado mundial de capital. Se o depositante deseja sacar em  $t=1$ , a ele é prometido um pagamento fixo de  $x$ . Se desejar esperar até  $t=2$ , ele receberá um pagamento estocástico (*payoff* estocástico)  $y_\theta$ , que vem dos investimentos não liquidados restantes após pagamentos de empréstimos, dividido entre os depositantes que sobraram. O *payoff*  $y_\theta$

também pode ser definido como o que resta da riqueza ( $w_\theta$ ) do país não liquidado do pagamento de saques ( $nx$ ) no período  $t=1$  multiplicado pelo retorno de longo prazo ( $R$ ), dividido entre os agentes que sacam no último período ( $1-n$ ). No período,  $t=1$  o banco ainda segue a restrição de serviço sequencial de só liquidar investimentos até o mínimo para pagar suas dívidas adquiridas no mercado de capital externo:

$$l^+ = \frac{Rk_a - f}{R}$$

Ou seja, o banco paga  $x$  aos agentes até seu limite de empréstimos e esgotamento de recursos, salvo o necessário para pagar a dívida externa. O pagamento para os depositantes, portanto, segue o seguinte quadro 3:

**Quadro 3**

Condição	$n < \frac{b + rl^+}{x}$	$n \geq \frac{b + rl^+}{x}$
Período do Saque		
$t=1$	$x$	$x \cdot \left(\frac{1}{nx}\right) + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{nx}\right)$
$t=2$	$y = \left(\frac{w_\theta - nx}{1-n}\right) R \cdot p(\theta) + 0 \cdot (1 - p(\theta))$	0

em que  $n$  é a fração de agentes que sacam em  $t=1$ .

Observe que para  $t=2$ , o quadro 2 de *payoffs* apresenta valores maiores ou iguais a zero. Isso parece contradizer as restrições de que empréstimos tomados no exterior sempre são pagos e de que  $R$  é maior do que 1 com probabilidade  $p(\theta)$  ou zero com probabilidade  $(1-p(\theta))$ . O problema está no fato de que se  $R$  for uma função de  $\theta$ , em situações ruins, o *payoff* poderá ser negativo, pois se o investimento do banco não tiver retorno, o único jeito de pagar o que tomou emprestado no exterior será fazer com que os depositantes entreguem mais dinheiro. Isso seria impossível, considerando que não há produção no modelo e todos os agentes depositaram suas dotações iniciais ao banco em  $t=0$ . Desse modo, para que os empréstimos tomados sejam pagos,  $R$  precisa ter um valor positivo mesmo na situação ruim. De modo que, na construção do modelo, o que de fato é igual a zero com probabilidade  $(1-p(\theta))$  é a utilidade do agente paciente que espera o segundo período para sacar quando o estado da natureza for ruim.

Com base na estrutura de *payoffs* dessa economia com livre entrada de bancos, todos tendo acesso ao mercado mundial de capital e à tecnologia, os bancos não têm lucros, eles oferecem o mesmo contrato que seria oferecido se houvesse apenas um banco maximizando o



bem-estar dos depositantes. Se o banco escolher  $x=x_a$ , enquanto  $E_\theta(p(\theta)) \cdot y > x$  nessa economia haverá apenas um equilíbrio onde todos os agentes pacientes esperam para sacar apenas em  $t=2$ . Mas caso  $E_\theta(p(\theta)) \cdot y \leq x$ , ocorre o equilíbrio com crise financeira, onde todos os agentes sacam em  $t=1$ , com pagamento de  $x$ , com probabilidade  $(1/nx)$ , em  $t=1$  e zero em  $t=2$ , sendo ótimo sacar em  $t=1$ .

Para resolver este problema de múltiplos equilíbrios, acrescenta-se ao modelo um sinal que cada agente paciente recebe em  $t=1$  sobre o estado da natureza,  $\theta$ . Este sinal ajudará os agentes a coordenar suas ações. Por exemplo, se os fundamentos estão indicando que a economia está em um estado bom, o equilíbrio bom é o escolhido, se indicar o oposto, o equilíbrio com corrida é preferido. Isto também permite calcular a probabilidade de haver uma corrida bancária.

Assume-se que  $\theta$  é realizado no começo do período  $t=1$ , mas não é revelado publicamente. No entanto, os depositantes recebem um sinal  $\theta_i = \theta + \varepsilon_i$ , onde  $i=1,2,3,\dots$  indica o agente e  $\varepsilon_i$  é um erro pequeno, independente e uniformemente distribuído entre  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Este sinal é interpretado como informação privada e nenhum agente tem vantagem a respeito da qualidade da informação, ou seja, nenhum agente sabe com certeza o estado real da economia.

A introdução do sinal, mesmo com ruído, altera o resultado do modelo, pois a decisão do agente paciente depende agora do sinal recebido. O sinal tem dois efeitos sobre a escolha do depositante. Primeiro, quanto maior o sinal, maior a probabilidade que o agente paciente atribui ao saque do depósito em  $t=2$  ser  $y$  ao invés de  $0$  e, conseqüentemente, menor o incentivo para correr. Segundo, o sinal também traz informações sobre o sinal que os outros agentes receberam, ajudando a formar crenças mais consistentes. Quanto maior o sinal recebido, maior o número de agentes que o depositante acredita terem recebido também um sinal alto; assim, menor a chance de ocorrer corrida e menor ainda o incentivo para correr e causar crises financeiras.

Assume-se que o contrato de depósito realizado em  $t=0$  faz com que todos os agentes depositem suas dotações no banco e abram mão de seu direito de atuar no mercado internacional de capitais em troca do direito de sacar  $x$  em  $t=1$  e  $y$  em  $t=2$ . Assim, para o período  $t=1$ , o valor de  $x$  precisa ser maior ou igual a  $e$  (dotação inicial), ou então os agentes impacientes não terão interesse no contrato de depósito. Esse resultado é garantido com uma aversão ao risco elevada,  $\sigma > 1$ , pois isso faz com  $\Phi_\theta > \lambda$ , donde:

$$\frac{\Phi_{\theta} w_{\theta}}{\lambda} > l = w_{\theta} - f\left(\left(\frac{R-1}{R}\right)p(\theta)\right).$$

Pela restrição do modelo,  $x$  precisa ser menor ou igual a  $\min\{(b + rl)/\lambda, eR\}$ , pois se  $x$  é maior do que  $eR$ , então o *payoff* em  $t=1$  seria maior do que o *payoff* máximo que pode ser alcançado se o saque em  $t=1$  fosse zero, de modo que os agentes pacientes prefeririam sacar em  $t=1$  sempre.

Com  $x$  dentro destes limites, todos os agentes impacientes demandarão em  $t=1$ , enquanto os agentes pacientes vão comparar seus *payoffs* esperados entre os períodos  $t=1$  e  $t=2$  para decidir quando sacar. O *payoff* dos agentes pacientes depende de  $\theta$  e da proporção de agentes pacientes sacando em  $t=1$ , conforme a quadro 3. O agente paciente não conhece esses valores, mas o sinal  $\theta_i$  revela informações parciais tanto sobre  $\theta$  quanto sobre  $n$ , de modo que suas ações dependem do sinal.

Assumindo que o sinal pode ser extremamente ruim, ou extremamente bom, é possível prever alguns comportamentos com base nos seus sinais extremos. Tome, inicialmente, uma situação em que o sinal é muito ruim, ou seja,  $\theta_i$  é pequeno. Nesse caso, a chance de haver corrida bancária é muito alta, fazendo com que a utilidade esperada de sacar em  $t=2$  seja menor que em  $t=1$ , mesmo que todos os agentes pacientes esperem. Se para um dado sinal o agente está certo de que a crise ocorrerá, então sua escolha ótima é correr. Com base nisso, é possível determinar o sinal a partir do qual é melhor sempre correr, ou seja, o valor  $\underline{\theta}(x) < \theta(x)$ ,  $\theta(x)$  faz com que:

$$u(x) = p(\theta)u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n}R\right).$$

O intervalo  $[\underline{\theta}, \theta(x))$  é chamado de Região de Dominância Inferior (RDI). Uma vez que a diferença entre o sinal do agente e o verdadeiro  $\theta$  não é maior que  $\varepsilon$ , quando o agente observa  $\theta_i < \underline{\theta}(x) - \varepsilon$ , ele sempre saca antecipadamente. Assim, também é possível encontrar valores de  $\theta$  para os quais todos os agentes sacarão em  $t=1$ , pois têm certeza que estão na região de dominância inferior.

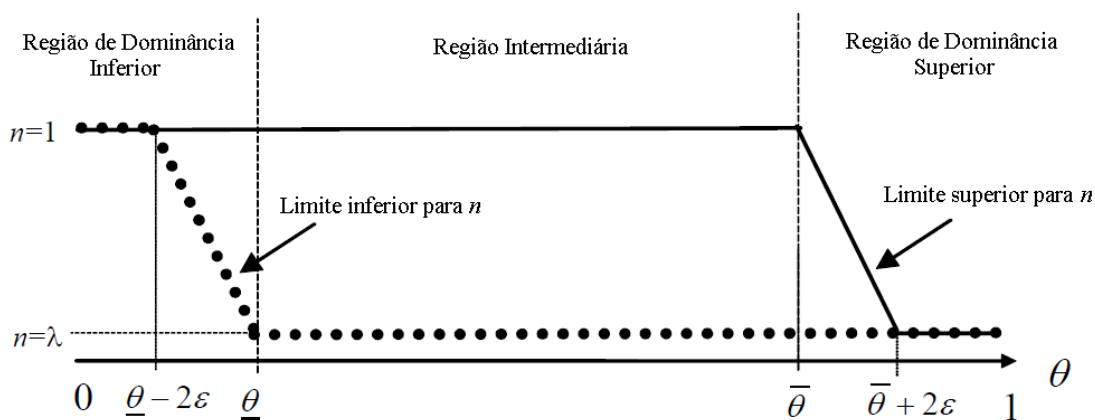
Para identificar essa região, considere inicialmente  $\theta=0$ , isso significa que todos os agentes receberiam um sinal  $\theta_i < \varepsilon_i$ . Assim, para  $x > e$  e  $\underline{\theta}(x)$  crescente em  $x$ , se o agente receber um sinal  $\theta_i = \varepsilon$  ele acredita que os demais agentes também receberam um sinal abaixo  $\underline{\theta}$ , sabendo estar na região de  $\underline{\theta}$ , de modo que  $\varepsilon < \underline{\theta}(x) - \varepsilon$ , ou seja,  $\underline{\theta}(x) > 2\varepsilon$ .

Assim, quando o sinal recebido for menor que  $2\varepsilon$ , todos os agentes correrão e haverá crise financeira baseada nos fundamentos.

Analogamente, pode-se estabelecer uma Região de Dominância Superior (RDS) entre  $(\bar{\theta}(x), 1]$ , na qual todo agente paciente espera até  $t=2$ , independente de sua crença quanto ao que os outros agentes farão. Assume-se que  $\bar{\theta} < 1 - 2\varepsilon$ , pois quando  $\theta > 1 - 2\varepsilon$ , todos os agentes estarão na zona de dominância superior e escolherão esperar. Para facilitar a análise, assume-se que  $p(\theta) = 1$ , quando  $\theta \in (\bar{\theta}, 1]$ . Isso garante que nesta região os pagamentos em  $t=2$  ocorrerão.

Essas duas regiões são casos extremos para os níveis de fundamentos nos quais se conhece o comportamento dos agentes. Existe também uma região intermediária onde qualquer equilíbrio pode ocorrer. No caso, se houver uma corrida nesse intervalo ela será classificada como *panic-based*. É possível ilustrar tais regiões graficamente colocando a parcela de agentes “correndo” em função dos fundamentos (Figura 3):

**Figura 3**



Fonte: GOLDSTEIN & PAUZNER (2005)

A linha pontilhada na figura representa o limite inferior de quantas pessoas sacam em  $t=1$ . Quando um agente paciente está na RDI ele sacará em  $t=1$ . Se  $\theta \leq \underline{\theta} - 2\varepsilon$ , então todos os agentes sacam em  $t=1$ . A linha sólida representa o limite superior de agentes sacando em  $t=1$ , até chegar em  $\bar{\theta}$  é possível que todos os agentes saquem, a partir de  $\bar{\theta}$  o número máximo de agentes que gostariam de sacar começa a cair até  $\bar{\theta} + 2\varepsilon$ , quando apenas os agentes impacientes sacam em  $t=1$ .

Apesar de as regiões de dominância estarem bem definidas, o intervalo entre elas não é claro, podendo ser proporcionalmente extenso. O equilíbrio nessa região depende das

crenças dos agentes, que dependem dos sinais com ruídos por eles observados. Com essa informação falha, os agentes não têm como ter certeza dos sinais observados pelos outros ou as ações que eles realizariam. Precisam, portanto, levar em consideração quais seriam as ações eficientes para sinais próximos. Só que essas ações precisam considerar outros sinais e assim por diante, até tais ações serem consistentes com o equilíbrio das regiões de dominância. Esta estrutura de informações impõe restrições às estruturas das estratégias de equilíbrio e crenças, permitindo estabelecer o seguinte teorema:

**TEOREMA 1:** *Existe um único equilíbrio no qual o agente paciente corre apenas se observar um sinal abaixo do sinal de inversão  $\theta^*(x)$  e espera quando o sinal for acima deste ponto.*

Para demonstrar este teorema é preciso usar a propriedade de Complementaridades Estratégicas Globais, desenvolvida por Carlsson & van Damme (1993). Esta propriedade diz que os incentivos dos agentes para tomar uma determinada ação aumentam na medida em que mais agentes tomam esta mesma ação.

Porém, Goldstein & Pauzner (2005) observaram que em modelos baseados na corrida bancária de Diamond & Dybvig (1983) essa propriedade não está presente em todo o espectro do modelo. Isso ocorre, porque o incentivo para correr é crescente na medida em que aumenta a proporção de agentes pacientes correndo, mas o incentivo máximo é atingido antes que todos os agentes pacientes consigam antecipar seu saque. O máximo ocorre no momento em que há a crise, isto é, quando  $n = (f - d) + rl^+ / x$ . Se  $n$  passar dessa porcentagem o *payoff* dos agentes começa a cair e conseqüentemente o incentivo a corrida.

Apesar disso, é possível demonstrar o Teorema 1, pois apesar do *payoff* diminuir à medida que mais pessoas correm, o *payoff* esperado ao correr ainda será maior do que o de esperar. Assim, é possível demonstrar o teorema com complementaridade estratégica parcial, ou então apenas com a condição de que a utilidade diferencial do agente cruze o zero uma única vez.

A primeira etapa na demonstração é definir a proporção de agentes que correm para um dado estado da economia. Isto é descrito pela função  $n(\theta, \theta')$ , que especifica a proporção de agentes que correm quando os fundamentos são  $\theta$ , de modo que, dado o *continuum* de agentes, todos correm se o sinal for abaixo de  $\theta'$  e ninguém corre se for acima de  $\theta'$ .

No equilíbrio, esta proporção é dada por  $\lambda$ , se  $\theta > \theta^* + \varepsilon$ , pois todos os agentes observam um sinal maior ou igual a  $\theta^*$ , de modo que apenas os impacientes correm. Se  $\theta < \theta^* - \varepsilon$  ela é 1, pois todos os agentes recebem um sinal menor que  $\theta^*$  e todos correm. Lembrando que a estratégia é correr se  $\theta_i < \theta^*(x)$ , não correr se  $\theta_i > \theta^*(x)$ , sendo indiferente apenas se  $\theta_i = \theta^*(x)$ . Se  $\theta \in [\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$ ,  $n(\theta, \theta^*)$  é dada por:

$$n(\theta, \theta^*) = \lambda + (1 - \lambda) \text{prob}[\varepsilon_i < \theta^* - \theta]. \quad (3.8)$$

Como  $\text{prob}[\varepsilon_i < \theta^* - \theta] = \int_{-\varepsilon}^{\theta^* - \theta} z dFz = (1/2) + (\theta^*(x) - \theta/2\varepsilon)$ , pois é distribuída uniformemente. Então, temos que:

$$n(\theta, \theta^*(x)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \leq \theta^*(x) - \varepsilon \\ \lambda + (1 - \lambda) \left( \frac{1}{2} + \frac{\theta^*(x) - \theta}{2\varepsilon} \right), & \text{se } \theta^*(x) - \varepsilon \leq \theta \leq \theta^*(x) + \varepsilon \\ \lambda, & \text{se } \theta \geq \theta^*(x) + \varepsilon \end{cases} \quad (3.9)$$

As estratégias de correr se  $\theta \leq \theta^*(x) - \varepsilon$  e não correr caso  $\theta > \theta^*(x) + \varepsilon$  são dominantes. O problema está, novamente, na região intermediária. Nela o  $\theta$  só determina quantos correrão, mas a causa para muitos correrem nessa região pode não ser as expectativas negativas sobre o futuro, mas a crença de que os outros correrão. É na região intermediária que se definem as crises baseadas em pânico.

Os fundamentos servem como um mecanismo de coordenação entre os agentes. Os sinais recebidos pelos agentes refletem esses fundamentos. Assim, suas expectativas são formadas de modo semelhante, pois ao receber o sinal, os agentes conseguem inferir limites máximos e mínimos para os sinais recebidos pelos outros agentes e, assim, é possível antecipar quantos agentes correrão. Portanto, este mecanismo de coordenação não é um *sunspot*, mas sim uma variável *payoff*-relevante. Ao contrário de *sunspots*, não há equilíbrio em que os sinais são ignorados, o equilíbrio único do modelo é reflexo do mecanismo complementaridade estratégica e das regiões de dominância (GOLDSTEIN & PAUZNER, 2005).

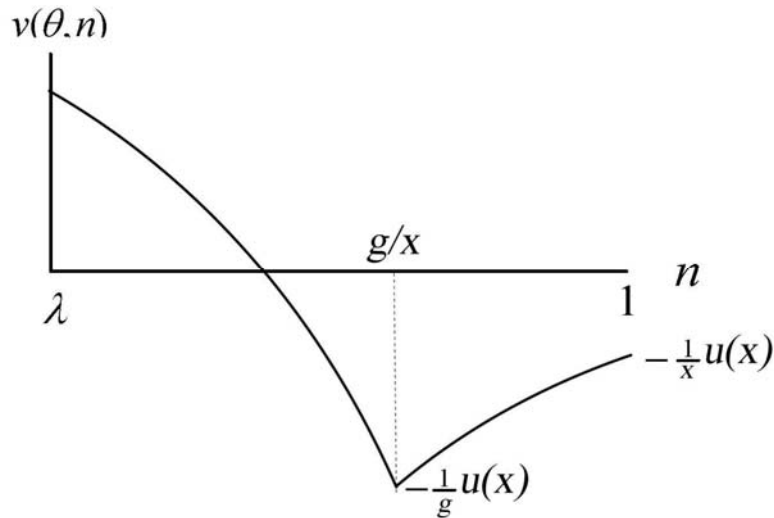
O ideal seria usar o mecanismo de estratégias globais complementares desenvolvido por Carlsson & van Damme (1993). Mas, isso não é possível, como já foi dito, neste modelo. Tal mecanismo diz que o incentivo de se tomar uma ação deve ser maior na medida que outros agentes tomam a mesma ação. Isso não ocorre no modelo quando o banco quebra, porque a partir daí o incentivo para correr diminui, apesar de ainda ser melhor correr do que esperar, pois o *payoff* de correr quando há crise é maior do que 0, o que fica evidenciado ao

calcular a diferença das utilidades dos agentes entre sacar em  $t=2$  ou  $t=1$ , dada por  $v(\theta, n)$ , definida a seguir:

$$v(\theta, n) = \begin{cases} p(\theta)u\left(\frac{w_\theta - nx}{1-n}R\right) - u(x), & \text{se } (f-d) + rl^+ / x \geq n \geq \lambda \\ 0 - \frac{1}{nx}u(x), & \text{se } 1 \geq n \geq (f-d) + rl^+ / x \end{cases} \quad (3.10)$$

Esta função mostra a perda do agente paciente ao sacar antecipadamente. Essa perda é decrescente à medida que  $n$ , a massa de agentes que saca em  $t=1$ , cresce, pois aumenta a chance de corrida bancária. A partir do momento em que há corrida bancária, quando  $n > g/x$ , a função  $v(\theta, n)$  se torna crescente, pois à medida que mais pessoas correm, diminui o incentivo para correr. A figura 4 apresenta graficamente a função  $v(\theta, n)$ :

**Figura 4**



Fonte: GOLDSTEIN & PAUZNER (2005)

Mesmo com a não validade do mecanismo de *complementaridade estratégica global*, é possível demonstrar o teorema proposto. A demonstração é feita no ANEXO 1.

### 3.2 Estudo do equilíbrio $\theta^*(x)$

O Teorema 1 mostra ser possível modelar o jogo de crises financeiras proposto por Chang & Velasco (2001) como um jogo global. Isso permite determinar o equilíbrio

resultante do modelo, trazendo uma melhor compreensão sobre o funcionamento de crises financeiras.

Além disso, o modelo como jogo global traz outra vantagem, que é a possibilidade de inferir a probabilidade de ocorrência de crises financeiras. Takeda (2001) fez um estudo semelhante ao feito aqui, mas fazendo uma demonstração para o equilíbrio único no caso particular de  $\varepsilon$  ir para zero. Uma vez que demonstrou o equilíbrio de ponto de inversão, ele avaliou o impacto dos empréstimos externos sobre a probabilidade de corrida, por meio da análise das mudanças do ponto de equilíbrio.

Assim, esse estudo sobre crises financeiras permite verificar de forma melhor quantificada os resultados de Chang & Velasco (2001), uma vez que existe uma probabilidade associada à estratégia de equilíbrio. Em outras palavras, esta teoria permite prever a mudança na probabilidade de corrida causada por políticas econômicas como diminuição no crédito internacional, ou uma maior abertura econômica, entre outras.

Portanto, é interessante verificar se o equilíbrio em jogos globais se mantém nas extensões propostas por Chang & Velasco (2001) em seu artigo original. Isso pode não ser complicado, sendo necessário verificar os impactos das mudanças das variáveis sobre as expectativas dos agentes em  $n(\theta)$  e os novos  $\theta$ 's possíveis.

A questão é como o equilíbrio de ponto de inversão será afetado caso hajam mudanças nas variáveis envolvidas no modelo. Quais as variáveis que afetam a definição da estratégia de equilíbrio “correr quando  $\theta < \theta^*(x)$ ”? Takeda (2001) responde essa pergunta para mudanças no limite de empréstimos  $f$ , mostrando que  $\theta^*(x)$  é crescente em  $f$ , de modo que o sinal  $\theta_i$  recebido para que o equilíbrio não envolva corrida, precisa ser maior, ou seja, a probabilidade de acontecer uma corrida cresce, na medida em que  $f$  aumenta.

Além dessa variável, limite de empréstimos, também é importante observar o impacto da variável  $x$  sobre  $\theta^*(x)$ . A variável  $x$  representa o pagamento feito para os agentes em  $t=1$ , influenciando diretamente o nível de liquidez do banco no período  $t=2$ . A teoria diz que quanto mais o banco precisar pagar em  $t=1$ , menos ele terá disponível para pagar em  $t=2$ . Isso significa que a utilidade no período  $t=1$  pode se tornar grande o bastante para incentivar os agentes pacientes a anteciparem seus saques, alterando o equilíbrio. Dessa forma, o  $\theta^*(x)$  necessário para que os agentes sejam indiferentes entre correr ou não precisa ser maior.

**TEOREMA 2:** *Suponha que:*

a)  $\lambda x \leq 1$ ;

b)  $\lambda > 1 - \left[ \frac{(b + rl^+)}{x} \right]$ ;

c)  $\frac{x}{w_\theta} > \frac{1}{2 \left( \frac{(b + rl^+)^2}{x^2} - \lambda^2 \right)}$ ;

d)  $\varepsilon \approx 0$ .

Então  $\theta^*(x)$  é crescente em  $x$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** O Teorema 2 traz à tona a questão de como  $\theta^*(x)$  se comporta se ocorrem mudanças no pagamento feito aos agentes que sacam no primeiro período. Como dito, o que se espera é que se o pagamento em  $t=1$  crescer também irá aumentar o número de agentes pacientes sacando em  $t=1$ , o que aumenta a chance de acontecer uma corrida bancária. Assim, o  $\theta^*(x)$  de equilíbrio será maior.

A primeira etapa na demonstração do teorema é definir  $\theta^*(x)$  em função de  $x$ . Para isso, é preciso rever o que define  $\theta^*(x)$ . Primeiro, o agente paciente deve ser indiferente entre sacar em  $t=1$  ou  $t=2$ , quando recebe o sinal  $\theta^*(x)$ , com distribuição uniforme entre  $[\theta^*(x) - \varepsilon, \theta^*(x) + \varepsilon]$ . Além disso, o agente acredita que a percentagem de agentes que corre é uma função de  $\theta^*(x)$  e  $n(\theta, \theta^*(x))$ , com os agentes pacientes sacando também em  $t=1$  se  $n > \lambda$  e havendo corrida para  $n > (b + rl^+)/x$ , de modo que  $n$  tem distribuição uniforme entre  $[\lambda, 1]$ .

Pode-se calcular a condição de indiferença gerada por  $\theta^*(x)$  como:

$$\int_{\lambda}^{\frac{b+rl^+}{x}} u(x)dn + \int_{\frac{b+rl^+}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x)dn = \int_{\lambda}^{\frac{b+rl^+}{x}} p(\theta^*(x))u\left(\frac{w_\theta - nx}{1-n}R\right) + (1 - p(\theta^*(x)))u(0)dn + \int_{\frac{b+rl^+}{x}}^1 (1 - p(\theta^*(x)))u(0)dn$$

Para simplificar, faça  $b + rl^+ = g$ , então:

$$\int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u(x)dn + \int_{\frac{g}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x)dn = \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta^*(x))u\left(\frac{w_\theta - nx}{1-n}R\right) + 0dn + \int_{\frac{g}{x}}^1 0dn$$

Portanto:



$$\int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u(x) dn + \int_{\frac{g}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x) dn = \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta^*(x)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \quad (3.11)$$

Onde o lado esquerdo é a utilidade esperada de sacar em  $t=1$  e o lado direito é a utilidade esperada de sacar em  $t=2$ .

A equação que determina  $\theta^*(x)$  pode ser encontrada por meio da função inversa de (3.11). Para demonstrar o Teorema 2 isso não é necessário, pois podemos definir a função auxiliar  $f(\theta^*(x), x)$  como a diferença entre a utilidade esperada no período 2 e a utilidade esperada no período 1, para  $\theta^*(x)$ , e em seguida utilizar o teorema da função implícita para derivar o sinal de  $\partial\theta^*(x)/\partial x$ . Defina então  $f(\theta^*(x), x)$  como:

$$f(\theta^*(x), x) = \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta^*(x)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u(x) dn + \int_{\frac{g}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x) dn \right) = 0$$

Que equivale a:

$$\hat{f}(\theta^*(x), x) = \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u(x) dn - \int_{\frac{g}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x) dn = 0, \quad (3.12)$$

onde  $\theta(\theta^*, n)$  é a função inversa de  $n(\theta, \theta^*(x))$  para o intervalo  $[\theta^*(x) - \varepsilon, \theta^*(x) + \varepsilon]$ , definido como:

$$n(\theta, \theta^*(x)) = \lambda + (1-\lambda) \left( \frac{1}{2} + \frac{\theta^* - \theta}{2\varepsilon} \right)$$

Então  $\frac{n-\lambda}{(1-\lambda)} = \frac{1}{2} + \frac{\theta^* - \theta}{2\varepsilon}$ , donde  $\frac{n-\lambda}{(1-\lambda)} - \frac{1}{2} = \frac{\theta^* - \theta}{2\varepsilon}$ . Logo:

$$\theta^* - \theta = 2\varepsilon \left( \frac{n-\lambda}{(1-\lambda)} \right) - \varepsilon, \text{ de modo que:}$$

$$\theta(\theta^*, n) = \theta^* + \varepsilon \left[ 1 - 2 \left( \frac{n-\lambda}{(1-\lambda)} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Resolvendo as integrais de  $u(x)$  é possível reescrever (3.12), usando o fato de que:

$$\int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u(x) dn + \int_{\frac{g}{x}}^1 \frac{1}{nx} u(x) dn = u(x) \left( \frac{g}{x} - \lambda \right) + \frac{u(x)}{x} [\ln(1) - \ln\left(\frac{g}{x}\right)].$$

Então:

$$u(x) \left( \frac{g}{x} - \lambda \right) + \frac{u(x)}{x} [0 - \ln\left(\frac{g}{x}\right)] = u(x) \left[ \frac{g}{x} - \lambda - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right]$$

Donde:

$$\frac{u(x)}{x} [g - \lambda - \ln\left(\frac{g}{x}\right)] \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.12):

$$\hat{f}(\theta^*, x) = \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - \frac{u(x)}{x} [g - \lambda x - \ln(\frac{g}{x})],$$

que pode ser reescrito como:

$$\hat{f}(\theta^*, x) = x \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - u(x) [g - \lambda x - \ln(\frac{g}{x})] = 0 \quad (3.15)$$

Assim, uma vez definido  $\hat{f}(\theta^*, x)$ , usando o Teorema da Função Implícita é possível determinar o sinal de  $\partial \theta^*(x)/\partial x$ , bastando encontrar  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial \theta^*$  e  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial x$ . Dessa forma, por exemplo, se  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial \theta^* > 0$  e  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial x < 0$ , então, o Teorema da Função Implícita assegura que  $\partial \theta^*(x)/\partial x > 0$ , o que permitirá demonstrar o Teorema 2 –  $\theta^*(x)$  é crescente em  $x$ .

Assim, o primeiro passo é verificar o sinal de  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial \theta^*$ . Esta derivada é dada por:

$$\frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial \theta^*} = x \frac{\partial \left[ \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \right]}{\partial \theta^*} - \frac{\partial [u(x) [g - \lambda x - \ln(\frac{g}{x})]]}{\partial \theta^*} \quad (3.16)$$

Como o segundo termo é zero, pois a utilidade do agente impaciente não depende da estratégia de ponto de inversão, deriva-se apenas o primeiro termo. A Regra de Leibniz permite passar a derivada para dentro da integral, uma vez que os limites de integração não são função de  $\theta^*$ . Como  $u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right)$  é constante em  $\theta^*$ , apenas a probabilidade de  $p(\theta(\theta^*, n))$  é derivada em relação a  $\theta^*$ , pois  $\theta(\theta^*(x), n)$  é função de  $\theta^*$  e sua derivada é 1. Portanto:

$$\frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial \theta^*} = x \left[ \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \right] \quad (3.17)$$

É fácil verificar que o sinal de (3.17) é positivo. Como tanto  $x$ , quanto os termos dentro da integral são positivos, uma vez que  $u((w_{\theta} - nx)R/1-n) > 0$  e  $\partial p(\theta(\theta^*, n))/\partial \theta > 0$  (dado que  $p(\theta)$  é crescente em  $\theta$  e  $\theta$  é crescente em  $\theta^*$ ), e como a integral de um termo positivo em limites de integração positivos é positiva, então  $\partial \hat{f}(\theta^*, x)/\partial \theta^*$  só pode ser crescente em  $\theta^*$ . Isso era de se esperar, pois esta derivada tem origem na utilidade esperada

de sacar em  $t=2$ , que tem uma probabilidade de um resultado bom maior se  $\theta^*(x)$  for grande, uma vez que o estado da natureza se aproxima da Região de Dominância Superior e menor a massa de agentes pacientes que preferem correr quando o sinal se aproxima desta região.

Agora, basta mostrar que  $\partial \hat{f}(\theta^*, x) / \partial x < 0$ . A derivada de  $\hat{f}(\theta^*, x)$  em relação a  $x$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial x} = & 1 \cdot \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\ & + \frac{\partial \left[ \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \right]}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x} \left[ g - \lambda x - \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] - \frac{u(x)}{x} [1 - \lambda x] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Analisando inicialmente os dois primeiros termos de (3.18), deve-se simplificar a equação para ter seu sinal avaliado. Reescrevendo esses termos na equação (3.19):

$$\int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + x \frac{\partial \left[ \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \right]}{\partial x} \quad (3.19)$$

O segundo termo pode ser reescrito utilizando a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + x \left[ \frac{n(1-n)}{x - w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) \right]_{\lambda}^{\frac{g}{x}} - \\ & - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} \left( \frac{-2\varepsilon}{1-\lambda} \right) \frac{n(1-n)}{x - w_{\theta}} + p(\theta(\theta^*, n)) \left( \frac{(1-2n)}{x - w_{\theta}} \right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolvendo agora os termos dentro de colchetes, encontra-se:

$$\begin{aligned} & x \left[ \frac{n(1-n)}{x - w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) \right]_{\lambda}^{\frac{g}{x}} - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} \left( \frac{-2\varepsilon}{1-\lambda} \right) \frac{n(1-n)}{x - w_{\theta}} + \right. \\ & \left. + p(\theta(\theta^*, n)) \left( \frac{(1-2n)}{x - w_{\theta}} \right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn = \\ & = x \left[ \frac{\frac{g}{x} (1 - \frac{g}{x})}{x - w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1 - \frac{g}{x}} R\right) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{x - w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] + \\ & + \frac{2\varepsilon}{(x - w_{\theta})} \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} \left( \frac{n(1-n)}{1-\lambda} \right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - \\ & - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ p(\theta(\theta^*, n)) \left( \frac{(1-2n)}{x - w_{\theta}} \right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - x \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ p(\theta(\theta^*, n)) \left(\frac{(1-2n)}{x-w_{\theta}}\right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\
& + x \left[ \frac{\frac{g}{x}(1-\frac{g}{x})}{x-w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1-\frac{g}{x}} R\right) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{x-w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] + \quad (3.22) \\
& + \frac{2\varepsilon}{(x-w_{\theta})} \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} \left(\frac{n(1-n)}{1-\lambda}\right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn,
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(1 - \frac{x-2nx}{x-w_{\theta}}\right) p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\
& + x \left[ \frac{\frac{g}{x}(1-\frac{g}{x})}{x-w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1-\frac{g}{x}} R\right) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{x-w_{\theta}} p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] + \\
& + \frac{2x\varepsilon}{(x-w_{\theta})} \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{\partial p(\theta(\theta^*, n))}{\partial \theta} \left(\frac{n(1-n)}{1-\lambda}\right) \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{x-w_{\theta}-x+2nx}{x-w_{\theta}}\right) p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\
& + \frac{x}{x-w_{\theta}} \left[ \frac{g}{x} \left(\frac{x-g}{x}\right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1-\frac{g}{x}} R\right) - \lambda(1-\lambda) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] + \\
& + 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{nx(1-n)(\partial p(\theta(\theta^*, n))/\partial \theta)}{(1-\lambda)(x-w_{\theta})}\right) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{w_{\theta} - 2nx}{x-w_{\theta}}\right) p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\
& + \frac{1}{x-w_{\theta}} \left[ \left(\frac{gx-g^2}{x}\right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1-\frac{g}{x}} R\right) - \lambda x(1-\lambda) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] + \quad (3.23) \\
& + 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{nx(1-n)(\partial p(\theta(\theta^*, n))/\partial \theta)}{(1-\lambda)(x-w_{\theta})}\right) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral do primeiro termo por partes, encontra-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{w_{\theta} - 2nx}{x-w_{\theta}}\right) p(\theta(\theta^*, n)) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn = \\
& = - \left[ (p(\theta(\theta^*, g/x)) - p(\theta(\theta^*, \lambda))) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{w_{\theta} - 2nx}{x-w_{\theta}}\right) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn - \right.
\end{aligned}$$

$$- \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta \left( \frac{-2\varepsilon}{1-\lambda} \right) \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn \right) dn \Bigg]$$

Então:

$$= - \left( p(\theta(\theta^*, g/x)) - p(\theta(\theta^*, \lambda)) \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn -$$

$$- 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{(w_{\theta} - 2nx) \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} (\partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta) dn \right)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} \right] u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23), chega-se a:

$$- \left( p(\theta(\theta^*, g/x)) - p(\theta(\theta^*, \lambda)) \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn -$$

$$- 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{(w_{\theta} - 2nx) \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} (\partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta) dn \right)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} \right] u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn +$$

$$+ \frac{1}{x - w_{\theta}} \left[ \left( \frac{gx - g^2}{x} \right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u \left( \frac{w_{\theta} - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) - \lambda x (1-\lambda) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u \left( \frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R \right) \right] +$$

$$+ 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{nx(1-n) (\partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn$$

Portanto, (3.19) é reescrito como:

$$- \left( p(\theta(\theta^*, g/x)) - p(\theta(\theta^*, \lambda)) \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn +$$

$$+ \frac{x}{x - w_{\theta}} \left[ \left( \frac{gx - g^2}{x^2} \right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u \left( \frac{w_{\theta} - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) -$$

$$- \lambda (1-\lambda) p(\theta(\theta^*, \lambda)) u \left( \frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R \right) \right] + 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{nx(1-n) (\partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} - \right. \quad (3.25)$$

$$\left. - \frac{(w_{\theta} - 2nx) \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} (\partial p(\theta(\theta^*, n)) / \partial \theta) dn \right)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} \right] u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R \right) dn$$

Analisando o sinal de (3.25), encontra-se uma ambiguidade. No primeiro termo, a subtração entre as duas probabilidades, dentro dos parênteses, tem um resultado negativo, pois  $p(\theta(\theta^*, n))$  é decrescente em  $n$ . Como  $n$  é  $\frac{g}{x}$  na primeira probabilidade e na segunda  $n$  é

$\lambda$ , sabendo que  $\frac{g}{x} > \lambda$ , então essa subtração tem sinal negativo. O que multiplicado por -1 faz com que o sinal fique positivo. Desse modo, é preciso identificar o sinal da integral, que pode assumir valor negativo. Disso segue que:

$$\int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left( \frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}} \right) u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn = \left( \frac{w_{\theta}}{x - w_{\theta}} \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn - \left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} nu \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn \quad (3.26)$$

Resolvendo a integral do segundo termo do lado direito para  $n$ :

$$-\left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} nu \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn = -\left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right) \left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right) \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn$$

Portanto (3.26) fica:

$$\left[ \left( \frac{w_{\theta}}{x - w_{\theta}} \right) - \left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right) \left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right) \right] \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} u \left( \frac{w_{\theta} - nx}{1 - n} R \right) dn$$

A integral de (3.26) é positiva, logo é preciso estudar o sinal do termo dentro de colchetes. Para este termo ser negativo, ele deve ser tal que:

$$\left[ \left( \frac{w_{\theta}}{x - w_{\theta}} \right) - \left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right) \left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right) \right] < 0$$

Logo:

$$\left( \frac{w_{\theta}}{x - w_{\theta}} \right) < \left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right) \left( \frac{2x}{x - w_{\theta}} \right)$$

De modo que:

$$\frac{w_{\theta}}{x} < 2 \left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\frac{x}{w_{\theta}} > \frac{1}{2 \left( \frac{g^2}{x^2} - \lambda^2 \right)} \quad (3.27)$$

A inequação (3.27) diz que se a proporção de consumo em relação à riqueza da economia for maior do que um termo  $1/[2(g^2/x^2 - \lambda^2)]$ , que é positivo, o sinal de (3.26) será negativo. Como o termo entre parênteses é menor do que 1, quanto menor for essa diferença, maior precisa ser a proporção de consumo frente à riqueza do país, existindo situações que o consumo no período 1 precisa ser maior do que a riqueza. Isto é possível, pois pela equação

(3.2), quando todo o consumo for realizado em  $t=1$ ,  $\lambda x \leq w_\theta$ , ou seja, a proporção de consumo frente à riqueza pode ser um valor superior a 1. Assim, essa condição é válida, desde que  $1/[2(g^2/x^2 - \lambda^2)] \leq 1/\lambda$ .

Esse resultado é mais provável quando  $g/x$  se distância de  $\lambda$ , ou seja, quando a proporção de agentes que sacam em  $t=1$  para que haja corrida seja bem maior do que a proporção de agentes impacientes, diminuindo os incentivos de se correr e, conseqüentemente, aumentando a região de integração. Particularmente, quando esta diferença for superior a 0,5, a proporção entre consumo no período 1 e riqueza será menor do que 1. Portanto, quanto maior for  $g/x$  em relação à  $\lambda$ , significa que menos necessidade de liquidação antecipada o banco tem e, assim, menor o risco de não sobrar recursos para pagar saques no último período. Portanto, se (3.27) for válido o impacto de aumentos no valor de  $x$  aumentará o  $\theta^*(x)$ . Além disso, se essa proporção for maior do que 1, isso também pode significar que a proporção de agentes pacientes sacando antecipadamente também aumenta, pois  $x$  é muito alto.

O segundo termo de (3.25) também possui um sinal ambíguo. Vamos analisar esse termo agora, estudando o sinal da subtração dentro dos colchetes:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{gx - g^2}{x^2} \right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u \left( \frac{w_\theta - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) - \lambda(1 - \lambda) p(\theta(\theta^*, \lambda)) u \left( \frac{w_\theta - \lambda x}{1 - \lambda} R \right) \right] \leq \\ & \leq \left[ \left( \frac{gx - g^2}{x^2} \right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) - \lambda(1 - \lambda) p(\theta(\theta^*, \lambda)) \right] u \left( \frac{w_\theta - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) \leq \quad (3.28) \\ & \leq \left[ \left( \frac{gx - g^2}{x^2} \right) - \lambda(1 - \lambda) \right] p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u \left( \frac{w_\theta - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) \end{aligned}$$

É fácil verificar que  $p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) \geq p(\theta(\theta^*, \lambda))$  e  $u \left( \frac{w_\theta - g}{1 - \frac{g}{x}} R \right) \geq u \left( \frac{w_\theta - \lambda x}{1 - \lambda} R \right)$ . Dessa forma, se mostrarmos que o termo em colchetes de (3.28) é negativo, o segundo termo de (3.25) também o será. Portanto:

$$\left[ \left( \frac{gx - g^2}{x^2} \right) - \lambda(1 - \lambda) \right] = \frac{g}{x} - \lambda + \lambda^2 - \left( \frac{g}{x} \right)^2 \quad (3.29)$$

Esta é uma equação de segundo grau que só assume valores positivos quando  $\frac{g}{x} < \lambda$  ou quando  $\lambda < 1 - \frac{g}{x}$ . O primeiro caso não é possível pela restrição (3.1<sup>o</sup>) do modelo, já o segundo pode ocorrer. Portanto, sabe-se que (3.29) assumirá valores negativos se

$\frac{g}{x} > \lambda > 1 - \frac{g}{x}$ . Esta é uma situação possível, pois para  $\lambda < 1 - \frac{g}{x}$  ocorrer,  $\lambda$  precisa ser muito pequeno, significando que a quantidade de agentes impacientes seja muito baixa.

Percebe-se que caso a quantidade de agentes impacientes seja muito baixa, significa que a região em que  $v(\theta, n) > 0$  será maior, fazendo com que seja preciso uma proporção muito grande de agentes pacientes antecipando o saque para causar a crise. Assim aumentar o valor de  $x$  não teria grande impacto sobre a probabilidade de corrida, de modo que o valor de  $x$  poderá crescer bastante, antes que uma corrida bancária aconteça. Então poderá existir tal situação, onde um aumento no pagamento em  $t=1$  possa ser interpretado pelo agente paciente como mais recursos disponíveis para serem pagos em  $t=2$ , pois  $y \geq x$ , de modo que poderá existir um incentivo para os agentes pacientes esperarem e assim diminuir a probabilidade de corrida, dado  $\theta^*(x)$ . No entanto, esta situação é um tanto improvável, de modo que podemos assumir a existência de um  $\tilde{\lambda}$  tal que  $\tilde{\lambda} > 1 - \frac{g}{x}$  seja verdade, garantindo que o segundo termo de (3.25) seja negativo.

Por fim, o terceiro termo de (3.25) também não tem o seu sinal claro, pois  $\varepsilon \sim U[-\varepsilon, \varepsilon]$ , de forma que esse sinal pode ser positivo ou negativo e o termo dentro da integral é positivo. De qualquer modo, se o terceiro termo for positivo, ele será pequeno, pois quando  $\varepsilon$  for pequeno, o que é assumido aqui, este termo também será pequeno. Logo, existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , tal que para cada  $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$  o teorema é válido.

Existe mais um problema quanto ao terceiro termo, não mencionado no artigo de Goldstein & Pauzner (2005). O termo  $\varepsilon$  é dividido por  $1 - \lambda$ , um valor que também pode ir para zero à medida que  $\lambda$  se aproxima de um. Se isso acontecer, o termo se torna indeterminado. Felizmente, se o termo virar uma indeterminação, não haverá sentido econômico para esta equação, pois com  $\lambda = 1$ , ou próximo de 1, a massa de agentes impacientes será tão grande que todos os saques serão feitos no período  $t=1$ . Desse modo, não fará sentido utilizar a estratégia de ponto de inversão  $\theta^*(x)$ .

Analisando agora o sinal dos dois últimos termos de (3.18). Para que eles sejam negativos  $\frac{\partial u(x)}{\partial x} \left[ g - \lambda x - \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] + \frac{u(x)}{x} [1 - \lambda x]$  precisa ter sinal positivo. Tanto  $u(x)/x$  quanto a derivada de  $u(x)$  em relação a  $x$  são positivos, pois  $x$  é positivo e  $u(x)$  é crescente em  $x$ . Basta estudar o sinal dos termos em colchetes.

Pela restrição do problema,  $\lambda x \leq b + rl$ , o que significa que  $\lambda x \leq b + rl^+$ , uma vez que  $l^+$  é o máximo possível para  $l$ . Como  $g = b + rl^+$ , então:



$$\left[ g - \lambda x - \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] \geq \left[ \lambda x - \lambda x - \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] = \left[ -\ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] \quad (3.30)$$

Assim, com  $x > g$ ,  $\ln(t/x)$  é o logaritmo natural de um número menor do que um, ou seja, tem valor negativo. Multiplicado por -1, o sinal fica positivo. Portanto, o primeiro termo tem sinal positivo e, quando levado novamente à equação (3.18), seu sinal é trocado para negativo.

A análise do sinal de  $[1 - \lambda x]$  é mais complicada, pois é possível que  $\lambda x \geq 1$ . Pode-se afirmar apenas que  $\lambda x \leq g$ , assim  $[1 - \lambda x] \geq [1 - g]$ . Onde  $g$  representa o máximo de liquidez que o banco consegue levantar no período  $t=1$  para pagar os agentes que sacam no primeiro período. Considerando que existe uma perda de bem-estar  $r$  ao liquidar antecipadamente investimentos na tecnologia de longo prazo feito no período  $t=0$ , seria razoável supor que o máximo que o banco consegue liquidar em  $t=1$  é um valor inferior à dotação inicial dos agentes. De fato,  $g$  pode ser reescrito como:

$$g = b + rl^+ = re - (1-r)d + \left(\frac{R-r}{R}\right)f \quad (3.31)$$

Então, a variável  $g$  é interpretada como o retorno de curto prazo da dotação inicial menos a perda para cada dólar tomado emprestado e liquidado antecipadamente, mais a perda causada pela liquidação antecipada do que foi tomado emprestado trazido para valor presente pelo retorno  $R$ . Assim, à medida que  $r$  aumenta, aumenta o valor de  $g$ . Não foram estabelecidos tetos para  $e$  ou  $f$  e os dois termos mantêm uma relação entre si, de modo que se  $e$  for muito grande em relação a  $f$ , o empréstimo líquido tomado em  $t=0$  será negativo, ou seja, dinheiro será enviado ao exterior, de modo que os termos se compensam. No entanto, não existe um limite claro para  $g$ , que depende da relação entre dotação inicial e limite de crédito. Por exemplo, supondo que a perda por liquidação antecipada seja máxima, ou seja  $r=0$ . Então  $g=b$ , como  $b$  é o que o banco toma emprestado para pagar  $x$  e  $x \geq e$ , então  $g \geq e$ . Ou seja, não é possível afirmar que  $g < 1$ .

Apesar disso, essa análise de  $g$  permite reavaliar a condição  $\lambda x \leq 1$ . Primeiro, deve-se considerar o caso em que  $\lambda x \leq 1$  seja verdade. Essa é uma situação crível, pois  $\lambda \leq 1$  e  $x \geq e$ , sendo que  $e > 0$  e  $x$  próximo de  $e$ , ou seja, é possível supor um valor para a dotação inicial  $\tilde{e}$  tal que  $\lambda x \leq 1$ . Além disso, essa situação tem um significado econômico interessante, pois ela implica  $e \leq 1/\lambda$ , ou seja, que a dotação inicial não possa ter um valor muito elevado. Um valor elevado para a dotação inicial significaria uma probabilidade maior de o banco ter que transferir riqueza do período inicial para o período  $t=1$  usando o mercado de capitais, ou seja,

$d$  seria negativo. Isto significa que o país está emprestando ao exterior e depois tomando emprestado novamente, diminuindo as chances de corrida bancária e tornando sem sentido o modelo.

Segundo, no caso em que  $\lambda x > 1$ , mesmo assim o impacto deste resultado seria pequeno sobre o sinal de  $\frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial x}$ . Ele faria com que o sinal de  $-\frac{u(x)}{x}[1-\lambda x]$  fosse positivo, mas dificilmente ele seria grande o bastante para se sobressair aos outros termos. Além disso,  $\lambda x > 1$  não tem um significado econômico claro, pois o saque que cada agente impaciente realiza em  $t=1$  está relacionado a variáveis não determinadas. E um valor positivo muito elevado para  $-\frac{u(x)}{x}[1-\lambda x]$  que faça com que  $\frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial x} > 0$ , significa que o impacto da utilidade relativa de  $x$  em  $t=1$  seja tal que para cada unidade adicional de consumo de  $x$  o aumento no ganho de bem-estar  $u(x)$  faça com que os agentes pacientes prefiram esperar, ou seja, o incremento em  $x$  torna a utilidade de sacar em  $t=1$  menos atrativa do que sacar em  $t=2$ , o que não faz sentido econômico. Logo, é pouco provável que essa situação ocorra.

Desta forma,  $\frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial x}$  pode ser reescrito em uma única equação como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(\theta^*, x)}{\partial x} = & -\left[p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) - p(\theta(\theta^*, \lambda))\right] \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left(\frac{w_{\theta} - 2nx}{x - w_{\theta}}\right) u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn + \\ & + \frac{1}{x - w_{\theta}} \left[ \left(\frac{gx - g^2}{x}\right) p(\theta(\theta^*, \frac{g}{x})) u\left(\frac{w_{\theta} - g}{1 - \frac{g}{x}} R\right) - \lambda x(1-\lambda) p(\theta(\theta^*, \lambda)) u\left(\frac{w_{\theta} - \lambda x}{1-\lambda} R\right) \right] - \\ & - \frac{\partial u(x)}{\partial x} \left[ g - \lambda x - \ln\left(\frac{g}{x}\right) \right] - \frac{u(x)}{x} [1 - \lambda x] + \\ & + 2\varepsilon \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} \left[ \frac{nx(1-n)(\partial p(\theta(\theta^*, n))/\partial \theta) - (w_{\theta} - 2nx) \left( \int_{\lambda}^{\frac{g}{x}} (\partial p(\theta(\theta^*, n))/\partial \theta) dn \right)}{(1-\lambda)(x - w_{\theta})} \right] u\left(\frac{w_{\theta} - nx}{1-n} R\right) dn \end{aligned}$$

Portanto,  $\partial \hat{f}(\theta^*, x) / \partial x < 0$  para  $x/w_{\theta} > (1/2)[(g^2/x^2) - \lambda^2]^{-1}$ ,  $\tilde{\lambda} > 1 - (g/x)$ ,  $\lambda x \leq 1$ , e  $\varepsilon \approx 0$ . Como  $\partial \hat{f}(\theta^*, x) / \partial \theta^* > 0$ , então  $\partial \theta^*(x) / \partial x > 0$  como queríamos demonstrar. ■

Os dois teoremas mostram a existência de um único equilíbrio para o modelo de Chang & Velasco (1993) adaptado a um jogo global, assim como mostram a manutenção de características importantes sobre a estrutura do equilíbrio e a probabilidade de corridas. No

entanto, diferentemente do trabalho de Goldstein & Pauzner (2005), o resultado demonstrado no Teorema 2, apesar de reforçar uma situação com significado econômico, apresenta alguma ambiguidade.

O equilíbrio no modelo aqui proposto está bem definido, mas a mudança na estrutura de *payoffs* altera as relações entre algumas variáveis, permitindo considerações interessantes. O trabalho de Takeda (2001) mostra que a simples inclusão da possibilidade de tomar empréstimos no exterior já altera o equilíbrio proposto por Diamond & Dybvig em 1983. Takeda (2001) mostra que quanto mais os bancos podem tomar emprestado, maior a probabilidade de haver corrida bancária, dentro de certas condições. Esta situação também é válida no modelo aqui apresentado, pois o trabalho usa uma estrutura de *payoffs* equivalente à dos jogos globais.

Neste trabalho estudou-se a relação entre o pagamento dos agentes pacientes com o equilíbrio de jogos globais. A intuição diz que um aumento no pagamento dos saques no período 1 aumentaria o incentivo para os agentes pacientes sacarem antecipadamente. Esse resultado é demonstrado no Teorema 2. Porém, as restrições impostas ao modelo, imitam a região onde um aumento no valor de  $x$  amplia a probabilidade de haver uma corrida. Logo, existe uma região ambígua no modelo, onde poderiam ocorrer situações em que um aumento no  $x$ , na verdade, incentivaria os agentes pacientes a esperar.

Desse modo, o modelo aqui proposto traz algumas contribuições importantes. Primeiro, ele mostra que é possível encontrar um único equilíbrio para uma economia de Diamond & Dybvig aberta ao mercado internacional de capitais, utilizando o instrumental de jogos globais. Neste ponto, o trabalho se diferencia da demonstração de Takeda (2001) por trazer uma demonstração mais geral.

Além disso, o estudo do efeito do consumo no curto prazo sobre o equilíbrio do modelo permitiu avaliar como a probabilidade de crise é alterada quando isso ocorre. O fato de ter uma estrutura de *payoffs* diferente do modelo de Goldstein & Pauzner (2005) traz um resultado distinto, criando uma região de ambiguidade na relação entre o equilíbrio do modelo e o consumo em  $t=1$ . Felizmente, a ambiguidade não impede que o aumento do consumo de  $x$  aumente a chance de crise financeira, mas mostra como a complexidade do sistema financeiro internacional pode enviar sinais contraditórios e afetar uma economia aberta.

De qualquer modo, esta situação onde um aumento no consumo em  $t=1$  diminui as chances de crise é improvável e desconsidera que alguns dos efeitos de  $x$  sobre  $\theta^*(x)$  serão sempre o de aumentar a probabilidade de corrida, caso  $x$  aumente, mostrando que os efeitos

contrários dificilmente os superam. O Teorema 2 reforça o entendimento dado por Chang & Velasco (2001) para as causas de uma corrida bancária. Segundo os autores, a causa da corrida bancária está na iliquidez do banco. Portanto, medindo o grau dessa liquidez é possível dizer se haverá corrida ou não. Esse grau de liquidez é dado por  $z=x-(b+rl^+)$ , de modo que se  $z>0$  o banco estará ilíquido e haverá corrida. Dessa forma, é visível que quanto maior  $x$ , maior a chance do banco se tornar ilíquido, pois tanto  $b$  quanto  $l^+$  são valores limitados.

Dessa forma, esta dissertação mostra que é possível modelar crises financeiras nos moldes de Diamond & Dybvig e, utilizando jogos globais, encontrar um único equilíbrio. Mas, além disso, encontrar um equilíbrio que apresenta características vantajosas na análise da probabilidade de crises, como no caso de aumento no consumo em  $t=1$ . Este tipo de análise permite uma melhor compreensão das causas de uma crise, o que é ponto crucial no processo formulação de políticas para tentar evitá-las.

## CONCLUSÃO

Nesta dissertação discutiu-se a influência do modelo de Diamond & Dybvig (1983) sobre corrida bancária na explicação das crises financeiras atuais. A complexidade do sistema financeiro internacional aumentou a vulnerabilidade de todos os países a crises financeiras, mesmo aqueles que mantêm seus macrofundamentos estáveis.

As crises passaram a ser explicadas por profecias auto-realizáveis, o chamado pânico. Elas ocorrem, porque os agentes acreditam que ela ocorrerá. Dessa forma, a situação atual se enquadra na visão modelada por Diamond & Dybvig (1983). No entanto, o modelo clássico foi desenhado para crises bancárias em economias fechadas, surgindo a necessidade de uma modificação para economias abertas.

Em resposta a essa demanda, o modelo de Chang & Velasco (2001) estuda o comportamento dos depositantes em um sistema bancário com economia aberta. Neste modelo, os bancos podem tomar empréstimos no exterior para pagar os saques dos agentes e a crise financeira ocorre quando há falta de liquidez no sistema bancário, causada por uma corrida em massa dos depositantes

Isto significa que, apesar deste modelo apresentar uma interpretação atual para crises, ele possibilita a existência de múltiplos equilíbrios, porque ele não explica como são formuladas as crenças dos agentes. Um instrumental que ajuda a resolver este problema é a teoria dos jogos globais, criada por Carlsson e van Damme, a qual possui a vantagem de eliminar múltiplos equilíbrios em jogos com equilíbrios *payoff*-dominante e risco-dominante, como no caso do modelo de Chang e Velasco.

Desta forma, esta dissertação começou com uma breve revisão bibliográfica sobre crises financeiras. Neste contexto, foi apresentado o modelo de Diamond & Dybvig (1983) e sua associação com crises financeiras. Além disso, foi feita uma curta discussão sobre outras interpretações de corridas bancárias que surgiram a partir deste modelo. Dentre elas, a de Chang & Velasco que introduz a idéia de economia aberta naquele modelo para explicar crises financeiras.

Novamente, o problema destes modelos é que eles apresentam múltiplos equilíbrios cuja seleção depende de profecias auto-realizáveis. Assim, na sequência, foi estudado o modelo de jogos globais, que transforma jogos com múltiplos equilíbrios em jogos com um único equilíbrio, introduzindo ruído na estrutura de *payoffs*.

Carlsson & van Damme (1993) explicam que, por exemplo, em modelos onde há dois equilíbrios, um com *payoff* alto e outro com *payoff* baixo, o segundo equilíbrio pode vir a ser escolhido caso os agentes busquem se proteger de um *payoff* ainda pior. Isto ocorre devido às crenças dos jogadores sobre as ações dos demais jogadores, o que os leva a escolher o resultado mais seguro.

Desta forma, ao introduzir um ruído na estrutura de *payoffs*, altera-se a formação das crenças dos indivíduos, já que eles recebem um sinal que os permite antecipar a ação dos outros. Assim, eles terão um incentivo para seguir a mesma estratégia dos outros jogadores, incentivo que é crescente na medida em que mais jogadores seguem uma mesma estratégia. Essa propriedade é chamada de complementaridade estratégica global e permite que se chegue ao equilíbrio único.

Além disso, foram apresentadas três aplicações para jogos globais. Dentre elas, a mais importante para esta dissertação é a de Goldstein e Pauzner, que utiliza jogos globais para encontrar um único equilíbrio no modelo de Diamond & Dybvig (1983). A partir do trabalho daqueles autores foi possível encontrar um equilíbrio único para um modelo com economia aberta de Diamond & Dybvig.

A modelagem em jogos globais segue os passos de Goldstein & Pauzner (2005) para demonstrar o equilíbrio único de ponto de inversão  $\theta^*(x)$ . Apesar disso, a inclusão da possibilidade de se tomar empréstimos no exterior cria uma estrutura de *payoffs* completamente diferente do modelo deles, o que traz alguns resultados novos para o nosso modelo.

Antes de analisar os resultados do modelo deve-se ressaltar o trabalho de Takeda (2001), que também buscou modelar as crises financeiras de Chang e Velasco em jogos globais. O autor demonstrou a existência de um único equilíbrio de inversão para um caso mais particular em que  $\varepsilon$  tende a zero. Aqui, ao seguir o modelo de Goldstein e Pauzner, a demonstração é mais geral, com  $\varepsilon$  distribuído uniformemente e com média zero, esperando que  $\varepsilon$  seja pequeno, o que pode não acontecer.

Esta demonstração particular de Takeda (2001) se justifica, pois o foco de seu artigo é explicar o efeito de uma variação do limite de empréstimo  $f$  sobre o equilíbrio  $\theta^*(x)$ , o qual ele demonstra ser crescente dentro de certas condições. Este resultado é interessante, pois mostra que a possibilidade de tomar emprestado no exterior aumenta a chance de uma crise financeira.

Diferentemente, nesta dissertação estudou-se o impacto de variações do consumo  $x$  no período  $t=1$  sobre o equilíbrio  $\theta^*(x)$ . Pelo Teorema 2, demonstrou-se que o  $\theta^*(x)$  é crescente em  $x$ , quando as seguintes condições são satisfeitas:  $\lambda x \leq 1$ ,  $\lambda > 1 - [(b + rl^+)/x]$ ,  $x/w_\theta > (1/2)[(g^2/x^2) - \lambda^2]^{-1}$  e  $\varepsilon \approx 0$ .

O fato de  $\theta^*(x)$  ser crescente em  $x$  significa que quando o valor do saque em  $t=1$  é maior, o sinal que os agentes pacientes recebem para não antecipar seu saque também precisa ser maior, pois a estratégia de equilíbrio aumentou. Isso implica que a probabilidade do sinal recebido ser abaixo do ponto de inversão  $\theta^*(x)$  é maior, ou seja, amplia-se a chance de acontecer uma corrida bancária.

No entanto, deve-se observar que a estrutura de *payoffs* desta economia aberta cria uma região onde há uma ambiguidade sobre a relação entre  $\theta^*(x)$  e  $x$ , que ocorre quando alguma das condições não é atendida. O que significa que um aumento em  $x$  pode causar, na verdade, uma diminuição na chance de haver uma crise financeira. Esta é uma situação difícil de imaginar, precisando que uma congruência de fatores ocorra ao mesmo tempo. Por exemplo, levando em consideração as condições impostas pelo Teorema 2, é necessário que a proporção de agentes pacientes seja muito pequena (para  $\lambda < 1 - [(b + rl^+)/x]$  ser verdade), ao mesmo tempo em que o volume pago em  $t=1$  seja muito alto (fazendo com que  $\lambda x > 1$ ). Mas, para que a relação entre consumo e riqueza da economia seja pequena (de modo que  $x/w_\theta < (1/2)[(g^2/x^2) - \lambda^2]^{-1}$ ), a economia precisaria ser muito rica em relação a  $x$ , que deverá ser um valor alto pela condição anterior. Logo, percebe-se que essa situação é altamente improvável.

Este trabalho mostra que é possível modelar crises financeiras nos moldes de Diamond & Dybvig (1983) e, utilizando jogos globais, encontrar um único equilíbrio. Este equilíbrio é na verdade um reflexo do estado da natureza e da crença dos agentes, podendo ser tanto um equilíbrio com crises, quanto sem crises.

Esta dissertação refina e reforça o resultado de Chang e Velasco, para quem a origem da crise no modelo está na iliquidez do banco, quando  $z = x - (b + rl^+) > 0$ , ou seja, quando o consumo em  $t=1$  é maior do que a quantidade de recursos disponíveis no período. Assim, quanto maior o valor de  $x$ , maior a chance de o banco se tornar ilíquido e haver crise.

Aqui, esta intuição é demonstrada pelo Teorema 2. Apresentam-se também algumas restrições necessárias para que  $\theta^*(x)$  seja sempre crescente em  $x$ , de modo que a região onde tal relação é válida é limitada. Portanto, existe ambiguidade no modelo proposto. Há uma

região onde um aumento em  $x$  poderia incentivar os agentes pacientes a esperar. No entanto, a possibilidade desta situação ocorrer é muito baixa, improvável até, pois ela desconsidera que parte do efeito do consumo no período  $t=1$  sempre será de aumentar a probabilidade de corrida, caso aumente o consumo. Os efeitos contrários precisam atuar conjuntamente para superar a força que incentiva a corrida. Isto faz com que a ambiguidade não impeça que o aumento do consumo de  $x$  aumente a chance de crise financeira, mas não tira sua relevância, pelo menos como um reflexo de quão complexo pode ser o sistema financeiro internacional.

Verifica-se que o modelo proposto aqui obteve um resultado positivo na adaptação de uma economia aberta de Diamond & Dybvig para um jogo global. Inclusive foi possível reproduzir um importante resultado de Chang & Velasco (2001), em um modelo de equilíbrio único. Equilíbrio este que apresenta características vantajosas na análise da probabilidade de crises, como no caso de aumento no consumo em  $t=1$ . Assim, esta análise traz uma melhor compreensão sobre as causas de uma crise financeira, ponto crucial a ser entendido, de modo a possibilitar a formulação de políticas econômicas eficientes para tentar evitá-las ou controlá-las.

Finalmente, a principal lição do modelo que desenvolvemos nesta dissertação, é que a euforia de consumo (em equilíbrio) em  $t=1$  é um fator que contribui para o aumento da chance de instabilidade financeira. Desta forma, bolhas de consumo excessivo são um indicativo de que uma crise financeira é mais provável, o que é condizente com a idéia, pervasiva no meio financeiro, de que é nos momentos de euforia que se deve tomar mais cuidado com esta instabilidade.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BHATTACHARYA, S & C. J. JACKLIN. “Distinguishing panics and information-based bank runs: welfare and policy implications”, in: *The Journal of Political Economy*, Vol. 96, No. 3. Jun., 1988, pp. 568-592.
- BOTARO, R. F. *Crises e contágio no mercado de títulos de países emergentes*. Dissertação de Mestrado do Departamento de Economia da Universidade de Brasília. Brasília: UnB, 2000.
- CHANG, R. & A. VELASCO. “Financial crises in emerging markets” in: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 116, No. 2, maio de 2001, p. 489-517.
- CARLSSON, H. & E. VAN DAMME. “Global games and equilibrium selection”, *Econometrica* 61, 1993, pp. 989-1018.
- CASS, D & K. SHELL. “Do sunspots matter?” in: *Journal of Political Economy*, vol. 91, n. 2, 1983.
- DIAMOND, D. & P. DYBVIIG. “Bank runs, deposit insurance, and liquidity,” *Journal of Political Economy* 91, 1983, pp. 401-419.
- GOLDSTEIN, I. & A. PAUZNER. “Demand deposit contracts and the probability of bank runs”. *The Journal of Finance*, Vol. 60, No. 3, junho de 2005, p. 1293-1327.
- HARSANYI, J.C. “Games with incomplete information”. *The American Economic Review*, Vol. 85, No. 3. Jun., 1995, pp. 291-303.
- HEINEMANN, F., R. NAGEL & P. OCKENFELS. “The theory of global games on test: experimental analysis of coordination games with public and private information”, *Econometrica*, vol. 72, n. 5, Set. 2004, pp. 1583-1599
- KRUGMAN, P. *What happened to Asia?* 1998. Disponível em: <http://web.mit.edu/www/DISINTER.html>. Último acesso: 11 de outubro de 2008.
- LENAIN, P. *O FMI*. 1ª Ed. Barueri/SP: Manole, 2004.
- LOPES, E. DE L. *Liberalização financeira e desenvolvimento econômico: controvérsias teóricas*. Dissertação de Mestrado do Departamento de Economia da Universidade de Brasília. Brasília: UnB, 2002.
- MORRIS, S. & H. S. SHIN. “Unique equilibrium in a model of self-fulfilling currency attacks,” *American Economic Review* 88, 1998, pp 587-597,
- \_\_\_\_\_. “Global games: theory and applications”. *Eighth World Congress of the Econometric Society*. Seattle, EUA: 2000
- \_\_\_\_\_. “Coordination risk and the price of debt”. *Cowles Foundation Paper* no. 1128. Yale, New Haven, Connecticut, EUA: 2006.

NOHARA, J.J. “Crises financeiras: antigas e novas abordagens”, in: *Revista de Economia Política*, v. 17, n. 1(65), janeiro-março de 1997, p.20-39.

OH, S & J. WRASE. “Bank runs: speculative runs and fundamental runs”. in: *Seoul Journal of Economics* 4, No. 3, 1991, p. 199-214.

PECK, J. & K. SHELL. “Equilibrium bank runs”. *Journal of Political Economy*, UChicago Press, 2003.

RASMUSEN, E. *Games and Information: an introduction to game theory*. 2<sup>a</sup> Ed. Oxford, RU: Blackwell, 1994.

SACHS, J. D. “Alternative Approaches to Financial Crises in Emerging Markets”, in: *Revista de Economia Política*, v. 16 n. 2 (62), abril-junho de 1996, p. 40-52.

SCHALK, A. *The theory of games and game models*. Notas de aula, Universidade de Manchester, setembro de 2003.

SPIEGEL, M. M. “Solvency runs, sunspots runs, and international bailouts” in: *Journal of international economics*, n. 65, 2005, p. 203-219.

STIGLITZ, J. & B. GREENWALD. Capítulo 13 – A Crise no Leste Asiático. In: STIGLITZ, J. e GREENWALD, B. *Rumo a um novo paradigma em economia monetária*. São Paulo: Francis, 2004, p. 356-374.

SUMMERS, L. H. “International Financial crises causes, prevention and cures”, in: *AEA Papers and Proceedings, Richard T. Ely Lecture*, maio de 2000. Disponível em: *The American Economic Review*, CD 2004, p. 1-16.

TAKEDA, F. “Bank runs and international financial instability revisited” in: *Economic Letters*, 73, 2001, p. 187-194.

## ANEXO 1 - Demonstração do Teorema 1

Esta demonstração segue os passos elaborados por Goldstein & Pauzner (2005). Denote inicialmente  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  como a diferença esperada na utilidade entre sacar em  $t=2$  e sacar em  $t=1$ , quando o agente observa o sinal  $\theta_i$  e acredita que  $\tilde{n}(\cdot)$  é a proporção de agentes que correrão. Ao observar  $\theta_i$ , sua distribuição *ex post* para  $\theta$  é uniforme entre  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$ . Assim, para  $\theta$  nesta região,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  é dado por:

$$\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta=\theta_i-\varepsilon}^{\theta_i+\varepsilon} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta \quad (\text{A.1})$$

$$E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] = \int_{n=\lambda}^1 v(\theta, n) dF_\theta(n) \quad (\text{A.2})$$

onde  $F_\theta(n)$  é a função de distribuição cumulativa de  $\tilde{n}(\theta)$ .

$F_\theta(n)$  depende da estratégia dos agentes. No caso de todos os agentes adotarem a mesma estratégia, por exemplo, a estratégia de ponto de inversão, a proporção de agentes que corre em cada estado  $\theta$  é determinística. Assim, pode-se tratar  $\tilde{n}(\theta)$  como um número entre  $\lambda$  e 1, ao invés de uma única variável aleatória degenerada, escrevendo  $n(\theta)$  em vez de  $\tilde{n}(\theta)$ , de modo que:

$$\Delta^x(\theta_i, n(\cdot)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta=\theta_i-\varepsilon}^{\theta_i+\varepsilon} v(\theta, n(\theta)) d\theta \quad (\text{A.3})$$

Ou

$$\Delta^x(\theta_i, \theta') = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta=\theta_i-\varepsilon}^{\theta_i+\varepsilon} v(\theta, n(\theta, \theta')) d\theta,$$

se todos os agentes usarem a mesma estratégia de ponto de inversão.

**Lema 1:** (i)  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  é contínuo em  $x$ ;

(ii)  $\Delta^x(\theta_i + a, (\tilde{n} + a)(\cdot))$  é contínuo e não decrescente em  $a$ ;

(iii)  $\Delta^x(\theta_i + a, (\tilde{n} + a)(\cdot))$  é estritamente crescente em  $a$  se  $\theta_i + a < \bar{\theta} + \varepsilon$  e se  $\tilde{n}(\theta) < 1/x$  com probabilidade positiva para  $\theta \in [\theta_i + a - \varepsilon, \theta_i + a + \varepsilon]$ .

**Demonstração:** O Lema 1 traz algumas propriedades de  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$ . Ele diz que  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  é contínuo em  $\theta$ . Uma vez que  $\theta$  é contínuo, a continuidade de  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  existe,

pois mudanças em  $\theta_i$  apenas alteram o limite de integração  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$  no cálculo de  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$ , já que esta é uma integral limitada.

Por (ii) e (iii),  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  é contínua crescente para saltos positivos em  $\theta$ . Isso, pois  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  é contínuo em  $a$ , devido a  $v(\theta, \tilde{n})$  ser limitada e o  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  ser uma integral de segmentos de  $\theta$  e  $E \Delta^x(\theta_i + a, (\tilde{n} + a)(\cdot))$  não decrescente em  $a$ , uma vez que a distribuição  $n$  não se altera para os agentes com o aumento de  $a$ , mas eles esperam um  $\theta$  maior. Assim, a única diferença entre  $\Delta^x(\theta_i + a, (n + a)(\cdot))$  e  $\Delta^x(\theta_i + a', (n + a')(\cdot))$  é que em uma se usa  $v(\theta + a, n)$  e em outra se usa  $v(\theta + a', n)$  para calcular a integral. Como  $v(\theta, n)$  é não decrescente em  $\theta$ ,  $\Delta^x(\theta_i + a, (n + a)(\cdot))$  é não decrescente em  $a$ , provando (ii). Continuando, se  $n < 1/x$  com probabilidade positiva e  $\theta < \bar{\theta}$  com probabilidade positiva, aumentar  $\theta$  faz com que  $v(\theta, n)$  aumente, pois menos pessoas irão correr. Assim,  $v(\theta, n)$  é estritamente crescente em  $\theta$ , nestas condições e seguindo a lógica de (ii),  $\Delta^x(\theta_i + a, (n + a)(\cdot))$  é estritamente crescente em  $a$ . ■

Pelo Lema 1 é possível mostrar que existe apenas um equilíbrio com ponto de inversão. No equilíbrio bayesiano, cada agente escolhe como perfil de estratégia a melhor ação para cada sinal, dada a estratégia dos outros agentes. Assim, no equilíbrio um agente paciente escolhe correr se  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) < 0$ , escolhe esperar quando  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) > 0$  e pode escolher qualquer ação quando  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) = 0$ . Assim sendo, a estratégia para todos os agentes é a mesma, menos quando  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) = 0$ .

Um equilíbrio com ponto de inversão  $\theta^*(x)$  funciona de forma semelhante. Ele existe se e somente se, dado que todos os outros agentes pacientes usam a estratégia de ponto de inversão  $\theta^*(x)$ , para cada agente paciente é ótimo correr se observar um sinal menor do que  $\theta^*(x)$  e é ótimo esperar se o sinal observado for maior do que  $\theta^*(x)$ , de tal modo que:

$$\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) < 0, \text{ para todo } \theta < \theta^*(x) \quad (\text{A.4}^a)$$

$$\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) > 0, \text{ para todo } \theta > \theta^*(x) \quad (\text{A.4}^b)$$

Uma vez que  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  é contínuo, segundo Lema 1, então o agente paciente é indiferente quando observa  $\theta^*(x)$  tal que:

$$\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = 0. \quad (\text{A.4}^c)$$

Sabe-se que pelo Lema 1, parte (ii)  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  é contínuo em  $\theta^*(x)$ . Considerando que existem as regiões de dominância,  $\Delta^x(\theta(x) - \varepsilon, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) < 0$  e  $\Delta^x(\theta(x) + \varepsilon, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) > 0$ . Logo, existe algum  $\theta^*(x)$  para o qual  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = 0$  e este  $\theta^*(x)$  é único. Isto ocorre, pois pelo Lema 1 parte (iii)  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  é estritamente crescente enquanto  $\theta^*(x) < \bar{\theta} + \varepsilon$ . Como para  $\bar{\theta} + \varepsilon$ ,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) > 0$ , para  $\theta^*(x) < \bar{\theta} + \varepsilon$ ,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  é estritamente crescente. Logo,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  só cruza a origem uma única vez.

Deste modo, existe apenas um valor  $\theta^*(x)$  que funciona como equilíbrio de ponto de inversão. Para mostrar que  $\theta^*(x)$  é um equilíbrio, é preciso mostrar que dado que (A.4<sup>c</sup>) ocorre, (A.4<sup>a</sup>) e (A.4<sup>b</sup>) também ocorrem.

Para provar (A.4<sup>a</sup>) e (A.4<sup>b</sup>) é preciso decompor os intervalos  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$  e  $[\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$  sobre os quais as integrais  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  e  $\Delta^x(\theta^*, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  são calculadas. Assim,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*))$  pode ser decomposto em  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon] \cap [\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$ , que pode ser um conjunto vazio e será chamado de  $c$ , e  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon] \setminus c$ , que será chamado de  $d^i$ , de modo que  $c \cup d^i = [\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$ . Do mesmo modo,  $[\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon]$  pode ser decomposto em  $c$  e em  $d^* = [\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon] \setminus c$  de modo que  $[\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon] = c \cup d^*$ . Assim, é possível reescrever as integrais na seguintes formas:

$$\Delta^x(\theta^*, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in c} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d^*} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in c} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d^i} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta \quad (\text{A.6})$$

Agora, ao assumir  $\theta_i < \theta^*$ , analisando (A.5) verifica-se que a integral  $\int_{\theta \in c} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta$  é negativa, pois (A.4<sup>c</sup>) ocorre, logo  $\Delta^x(\theta^*, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = 0$ . Como os fundamentos em  $d^*$  são maiores do que em  $c$ , pois  $\theta_i < \theta^*$ , implica se  $c$  não for vazio, os fundamentos presentes nele serão sempre menores que  $\theta^* + \varepsilon$ , assim,  $d^*$  vai conter pelo menos  $\theta^* + \varepsilon$  e outros fundamentos não presentes em  $c$  e maiores do que  $c$ . Dessa forma, a integral  $\int_{\theta \in d^*} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta$  é positiva, enquanto a integral  $\int_{\theta \in c} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta$  deve ser negativa e igual em módulo a outra integral para  $\Delta^x(\theta^*, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) = 0$ .

Analisando (A.6), o primeiro termo do lado direito é negativo. Agora é necessário verificar o sinal do segundo termo. Para isso, basta verificar que o intervalo  $d^i$  está abaixo de

$\theta^* - \varepsilon$ , pois, para  $\theta_i < \theta^*$ , se  $c$  não for vazio, então  $c = [\theta^* - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$ . Logo o complementar de  $[\theta_i - \varepsilon, \theta_i + \varepsilon]$  em  $c$  será  $[\theta_i - \varepsilon, \theta^* - \varepsilon]$ . Pela definição de  $n(\theta, \theta^*)$ , se  $\theta \leq \theta^* - \varepsilon$ ,  $n(\theta, \theta^*) = 1$ , ou seja, todos os agentes correm, logo a integral  $\int_{\theta \in d^i} v(\theta, n(\cdot, \theta^*)) d\theta$  é negativa. Portanto, por (A.6),  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) < 0$  para  $\theta_i < \theta^*$ , de modo que (A.4<sup>a</sup>) é verdade. O raciocínio para provar que (A.4<sup>b</sup>) também ocorre é análogo. Desse modo,  $\theta^*$  é um equilíbrio de ponto de inversão.

A segunda parte da demonstração do teorema consiste em mostrar que a estratégia de  $\theta^*$  de ponto de inversão é o único equilíbrio existente. Para que isso ocorra, qualquer equilíbrio deve ser um equilíbrio de ponto de inversão.

A dificuldade desta etapa está na ausência de complementaridade global. Suponha, inicialmente, que a estratégia  $\{s_i\}_{i \in [0,1]}$  é um equilíbrio e que  $\tilde{n}(\cdot)$  é a distribuição da proporção de agentes que correm em função de  $\theta$ . Para este equilíbrio não ser um equilíbrio de ponto de inversão é preciso assumir duas situações:

Primeiro, seja  $\theta_B$  o maior sinal em que um agente não prefere esperar estritamente:

$$\theta_B = \sup\{\theta_i : \Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) \leq 0\}, \quad (\text{A.7})$$

por continuidade os agentes pacientes são indiferentes em  $\theta_B$ , portanto,  $\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\cdot)) = 0$ . Como existe uma região de dominância superior, então  $\theta_B < 1 - \varepsilon$ , ou o agente nunca correria.

Ainda, como este não é um equilíbrio de ponto de inversão, tem que haver algum sinal  $\theta$  abaixo de  $\theta_B$  para o qual os agentes preferem esperar, ou seja,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot, \theta^*)) \geq 0$ . Seja  $\theta_A$  seu supremo:

$$\theta_A = \sup\{\theta_i < \theta_B : \Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) \geq 0\}. \quad (\text{A.8})$$

Por continuidade, os agentes são indiferentes entre correr e esperar em  $\theta_A$ .

Tem-se, portanto:

$$\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\cdot)) = \Delta^x(\theta_A, \tilde{n}(\cdot)) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Essa situação implica que existe algum  $\theta_i > \theta_B$ , onde  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) > 0$ , mas existe um  $\theta_i$  entre  $\theta_A$  e  $\theta_B$  para o qual  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) < 0$  e um  $\theta_i < \theta_A < \theta_B$  para o qual não é possível determinar  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$ , pois  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  pode ser positivo ou negativo. Assim, este equilíbrio sem ponto de inflexão significa que os agentes correm se  $\theta_i > \theta_B$ , não correm se  $\theta_A \leq \theta \leq \theta_B$ ,

e podem ou não correr se  $\theta_i < \theta_A$ . Para provar o teorema é preciso provar que tal equilíbrio não é possível.

Observa-se que  $\theta_A < \theta_B$ , logo existe um intervalo de sinais  $\theta_i$  para os quais  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) < 0$ , como já estabelecido. Também note que, para  $\theta_i > \theta_B$ ,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) > 0$ . Pelo Lema 1, no intervalo  $[\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon]$ ,  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) > 0$  é crescente e contínuo em  $\theta$  e  $n(\cdot)$ , a fração de agentes pacientes correndo, é decrescente, de modo que quando  $\theta = \theta_B + \varepsilon$  todos os agentes pacientes esperam, fazendo com que  $\tilde{n}(\theta_B + \varepsilon)$  degenere em  $n = \lambda$ , pois todos os depositantes recebem um sinal acima de  $\theta_B$ . Isso está de acordo com a modificação proposta anteriormente, que ao atingir a região de dominância superior, a fração de agentes sacando em  $t=1$  seria igual a  $\lambda$ .

Assim, para qualquer  $n \geq \lambda$ , sabe-se que  $v(\theta_B + \varepsilon, \lambda)$  é maior do que  $v(\theta_B - \varepsilon, n)$ , pois  $v(\theta, n)$  é crescente em  $\theta$  e, dado  $\theta$ , é máximo quando  $n = \lambda$ .

Decompondo os intervalos sobre os quais  $\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\cdot))$  e  $\Delta^x(\theta_A, \tilde{n}(\cdot))$  são integrados em um intervalo com as duas partes e outros dois intervalos disjuntos das integrais, isto é:

$$c = (\theta_A - \varepsilon, \theta_A + \varepsilon) \cap (\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon);$$

$$d_A = [\theta_A - \varepsilon, \theta_A + \varepsilon] \setminus c;$$

$$d_B = [\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon] \setminus c.$$

Observa-se que  $c$  pode ser vazio se o intervalo entre  $\theta_A$  e  $\theta_B$  for maior do que  $2\varepsilon$ .

O comportamento de  $v(\theta_B, \tilde{n}(\cdot))$  e  $\tilde{n}(\cdot)$  no intervalo  $[\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon]$  é determinado. O mesmo não se pode dizer sobre o intervalo  $[\theta_A - \varepsilon, \theta_A + \varepsilon]$ . O que se observa é que se  $\theta_B > \theta_i > \theta_A$ , então  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) < 0$  e, pelo Lema 1,  $\tilde{n}(\cdot)$  é crescente indo de  $\theta_B$  para  $\theta_A$ . Mas no intervalo  $\theta_i < \theta_A$ , não fica claro o comportamento de  $\tilde{n}(\cdot)$ , pois deveria haver algum  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot)) > 0$ . Esperar-se-ia uma simetria no comportamento de  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$  no intervalo  $[\theta_A - \varepsilon, \theta_A + \varepsilon]$  em relação ao intervalo  $[\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon]$ , no sentido que na medida em que  $\theta$  cresce de  $\theta_B - \varepsilon$  para  $\theta_B + \varepsilon$ , haveria um  $\bar{\theta}$  diminuindo de  $\theta_A + \varepsilon$  para  $\theta_A - \varepsilon$  que apresentaria comportamentos semelhantes para  $\Delta^x(\theta_i, \tilde{n}(\cdot))$ .

Considere, então o intervalo  $d_B$  como  $[\theta_1, \theta_2]$ , e considere a transformação:

$$\bar{\theta} = \theta_A + \theta_B - \theta, \tag{A.10}$$

tal que na medida em que  $\theta$  se move do menor ponto para o maior ponto de  $d_B$ ,  $\bar{\theta}$  se move do maior ponto para o menor ponto de  $d_A$ .

Uma vez que  $\Delta^x(\theta_i, n(\cdot)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta=\theta_i-\varepsilon}^{\theta_i+\varepsilon} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta$ , usando os intervalos

decompostos acima, pode-se reescrever (A.9) como  $\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\cdot)) = \Delta^x(\theta_A, \tilde{n}(\cdot))$ , ou seja:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d_B} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d_A} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d_B} E[v(\bar{\theta}, \tilde{n}(\bar{\theta}))] d\theta + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d_A} E[v(\bar{\theta}, \tilde{n}(\bar{\theta}))] d\theta \\ & = \int_{\theta \in d_B} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta = \int_{\theta \in d_A} E[v(\bar{\theta}, \tilde{n}(\bar{\theta}))] d\theta, \end{aligned}$$

Usando  $d_B = [\theta_1, \theta_2]$  e considerando a transformação  $\bar{\theta}$ , de modo que  $d_A$  também possa ser escrito como  $[\theta_1, \theta_2]$ , tem-se que:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} E[v(\bar{\theta}, \tilde{n}(\bar{\theta}))] d\theta \quad (\text{A.11})$$

O lado esquerdo da equação é a integral da região de  $[\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon]$  que não é comum a  $[\theta_A - \varepsilon, \theta_A + \varepsilon]$  e essa região é determinada, pois sabe-se qual o  $\tilde{n}(\cdot)$  mínimo que é  $n = \lambda$ , para  $\theta_B + \varepsilon$ , assim é possível calcular  $E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))]$ . Pode-se escrever, portanto,  $n(\theta)$  como:

$$n(\theta) = \lambda + \left( \frac{(1-\lambda)(\theta_2 - \theta)}{2\varepsilon} \right), \forall \theta \in d_B = [\theta_1, \theta_2] \quad (\text{A.12})$$

Esta equação vem da definição de  $n(\theta, \theta^*)$ , e verifica-se que, por exemplo, quando  $\theta = \theta_2$ ,  $\theta = \theta_B + \varepsilon$ , faz com que  $n(\theta_2) = \lambda$ . À medida que  $\theta$  decresce de  $\theta_2$  para  $\theta_1$ ,  $n(\theta)$  cresce a taxa  $\frac{\partial n(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1-\lambda}{2\varepsilon}$ .

O lado direito de (3.19) também pode ser reescrito usando a FDC de  $\tilde{n}(\theta)$ :

$$F_\theta(n) = \text{prob}[\tilde{n}(\theta) \leq n] = \text{prob} \left[ \lambda + (1-\lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \varepsilon_i) di \leq n \right] \quad (\text{A.13})$$

Onde  $s_i(\theta + \varepsilon_i)$  representa a estratégia de correr ao receber o sinal  $\theta + \varepsilon_i$ . A inversa dessa FDC é dada por

$$n^z(\theta) = \inf \{ n : F_\theta(n) \leq z \}$$

Substituindo no lado direito (A.11), segue que:



$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} E\left[\frac{v(\bar{\theta}, \tilde{n}(\bar{\theta}))}{n}\right]d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z=0}^1 v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))dzd\theta = \int_{z=0}^1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))d\theta dz \quad (\text{A.14})$$

Assim, para mostrar que (3.19) não ocorre, é preciso mostrar que para todo  $z$ :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta))d\theta > \int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))d\theta \quad (\text{A.15})$$

Para tanto, primeiro é preciso mostrar que  $n(\theta)$  no lado esquerdo de (A.15) muda mais rápido do que  $n^z(\bar{\theta})$  no lado direito. Isto é expresso pelo Lema 2.

$$\text{LEMA 2: } \left| \frac{\partial n^z(\bar{\theta})}{\partial \theta} \right| \leq \left| \frac{\partial n(\theta)}{\partial \theta} \right| = \frac{1-\lambda}{2\varepsilon}$$

**DEMONSTRAÇÃO:** Considere primeiro  $\mu > 0$ , então considere a transformação  $\hat{\varepsilon}_i$  tal que:

$$\hat{\varepsilon}_i = \begin{cases} \varepsilon_i + \mu & \text{se } \varepsilon_i \leq \varepsilon - \mu \\ \varepsilon_i + \mu - 2\varepsilon & \text{se } \varepsilon_i > \varepsilon - \mu \end{cases}$$

Esta transformação adiciona  $\mu$  a  $\varepsilon_i$ , de modo que a probabilidade de que  $\hat{\varepsilon}_i = \mu + \varepsilon_i$  seja  $1 - \mu/2\varepsilon$ , pois  $\varepsilon_i$  tem distribuição uniforme entre  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

Com isso é possível reescrever a FDC de  $\tilde{n}$  em qualquer nível de fundamentos. Assim, a FDC em  $\theta$  seria:

$$F_\theta(n) = \text{prob}\left[\lambda + (1-\lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i)di \leq n\right] \quad (\text{A.16})$$

Enquanto que a FDC em  $\theta + \mu$  seria:

$$F_{\theta+\mu}(n) = \text{prob}\left[\lambda + (1-\lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i)di \leq n\right] \quad (\text{A.17})$$

Considerando a probabilidade de  $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \mu$  e que existe um *continuum* de agentes pacientes, sabe-se que para  $(1 - \frac{\mu}{2\varepsilon})$  deles  $s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) = s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i)$ , enquanto que para os outros  $\frac{\mu}{2\varepsilon}$  agentes,  $s_i$  pode ser qualquer coisa. Assim:

$$\int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i)di = (1 - \frac{\mu}{2\varepsilon}) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i)di + \frac{\mu}{2\varepsilon} \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i - 2\varepsilon)di \quad (\text{A.18})$$

Como  $\varepsilon_i$  é contínuo e crescente, o segundo termo do lado direito é composto de  $\varepsilon_i$  maiores do que os do primeiro termo. Logo, com probabilidade 1:

$$(1 - \frac{\mu}{2\varepsilon}) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i) di + \frac{\mu}{2\varepsilon} \cdot 0 \leq \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \quad (\text{A.19})$$

O que implica:

$$\begin{aligned} & \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda)(1 - \frac{\mu}{2\varepsilon}) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] \geq \\ & \geq \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Pois dado (A.19), a chance do lado esquerdo ser menor do que  $n$  é maior do que a do lado direito. Reescrevendo o lado esquerdo de (A.20) fica:

$$\begin{aligned} & \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda)(1 - \frac{\mu}{2\varepsilon}) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] = \\ & = \text{prob}[\lambda + (1 - \frac{\mu}{2\varepsilon} - \lambda + \lambda \frac{\mu}{2\varepsilon}) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] \end{aligned}$$

Logo:

$$\text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon} \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n]$$

Então:

$$\begin{aligned} & \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon} \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] \leq \\ & \leq \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon}] \\ & \leq \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i) di \leq n + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon}] \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} & \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \hat{\varepsilon}_i) di \leq n + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon}] \geq \\ & \geq \text{prob}[\lambda + (1 - \lambda) \int_{i=0}^1 s_i(\theta + \mu + \varepsilon_i) di \leq n] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Usando em suas respectivas FDC:

$$F_\theta(n + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon}) \geq F_{\theta + \mu}(n) \quad (\text{A.22})$$

Seja  $z = [0, 1]$ , então (3.32) deve ser válido para  $n = n^z(\theta + \mu)$ :

$$F_\theta(n^z(\theta + \mu) + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon}) \geq F_{\theta + \mu}(n^z(\theta + \mu)) \geq z \quad (\text{A.23})$$

O que implica  $n^z(\theta + \mu) + (1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon} \geq n^z(\theta)$ , pois se  $F_A(A+U) \geq F_A(A)$ , então  $a+u \geq a$ ,

já que  $F_A$  é contínua e não decrescente em  $A$ .

Logo:

$$\begin{aligned} n^z(\theta + \mu) - n^z(\theta) &\geq -(1 - \lambda) \frac{\mu}{2\varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{n^z(\theta + \mu) - n^z(\theta)}{\mu} &\geq -\frac{(1 - \lambda)}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

O que no limite de  $\mu \rightarrow 0$ , vale:

$$\frac{\partial n^z(\theta)}{\partial \theta} \geq -\frac{(1 - \lambda)}{2\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial n^z(\theta)}{\partial \theta} \leq \frac{(1 - \lambda)}{2\varepsilon}$$

Repetindo o processo todo, desde definir a transformação  $\hat{e}_i$ , mas agora subtraindo  $\mu$  de  $\varepsilon$ , no segmento  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , se obtém:

$$\frac{n^z(\theta - \mu) - n^z(\theta)}{\mu} \geq -\frac{(1 - \lambda)}{2\varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial n^z(\theta)}{\partial \theta} \leq \frac{(1 - \lambda)}{2\varepsilon}$$

$$\text{Como } \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} = -1, \text{ então } \left| \frac{\partial n^z(\bar{\theta})}{\partial \theta} \right| \leq \left| \frac{\partial n(\theta)}{\partial \theta} \right| = \frac{1 - \lambda}{2\varepsilon}. \blacksquare$$

O Lema 2 diz que  $n(\theta)$  muda a uma taxa mais rápida do que  $n^z(\theta)$ , em  $d_B$ . Além disso, antes de provar (A.15), considere as seguintes proposições:

**Proposição 1** – para qualquer  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $\bar{\theta} < \theta_1$ .

Esta proposição vem da própria definição de  $\bar{\theta}$ .

**Proposição 2** – se  $c$  é não vazio, então para qualquer  $\theta \in c = [\bar{\theta}_1, \theta_1]$ ,  $n^z(\theta) \geq n(\theta_1)$ .

Isto vem da definição da região  $[\theta_B - \varepsilon, \theta_B + \varepsilon]$ , portanto a medida que  $\theta$  vai de  $\theta_1$  para  $\bar{\theta}_1$ , agentes pacientes que recebem sinal acima de  $\theta_B$ , que sempre esperam, são substituídos por agentes que recebem sinal abaixo de  $\theta_A$ , podendo ou não correr, o que significa que todo o suporte de  $\tilde{n}(\theta)$  é acima de  $n(\theta_1)$ .

**Proposição 3** –  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta \geq 0$ .

Quando  $c$  é vazio, isso é verdade, pois a integral é igual a  $\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\theta)) = 0$ . Quando  $c$  é não vazio, se a integral fosse negativa, então haveria algum  $v(\theta, n(\theta)) < 0$ , para  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Como  $n(\theta)$  é decrescente em  $[\theta_1, \theta_2]$  e  $v(\theta, n)$  é crescente em  $\theta$  e cruza zero uma única vez para  $n$ , de modo que se  $n' > n$  e  $v(\theta, n) < 0$ , então  $v(\theta, n') < 0$ , fazendo com que  $v(\theta_1, n(\theta_1))$  seja

negativo. Aplicando então a Proposição 2, a integral em  $c$  também é negativa, mas então haveria uma contradição pois:

$$\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\theta)) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in c} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\theta \in d_B} E[v(\theta, \tilde{n}(\theta))] d\theta = 0.$$

A partir destas proposições inicia-se a última parte da demonstração do teorema. Assuma que para qualquer  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $\underline{n}^z(\bar{\theta})$  seja fracamente decrescente em  $\theta$  (monótono), diferente de  $n^z(\bar{\theta})$  que é estrita, e seja  $\theta^z(n)$  sua função inversa:

$$\begin{aligned} \underline{n}^z(\bar{\theta}) &= \min(n^z(\bar{t}) : \theta_1 \leq \bar{t} \leq \theta_2) \\ \theta^z(n) &= \min(\{\theta \in [\theta_1, \theta_2] : n^z(\bar{\theta}) \leq n\} \cup \{\theta_2\}) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

De modo que se  $n^z(\theta) > n$  para todo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , então  $\theta^z(n)$  é definido como  $\theta_2$ .

Seja ainda,  $A(\theta)$  um indicador para quando  $\underline{n}^z(\bar{\theta})$  for estritamente decrescente em  $\theta$ , pois quando não o é, há um salto em  $\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}))$ .  $A(\theta)$  é dado por:

$$A(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists \partial \underline{n}^z(\bar{\theta}) / \partial \theta \text{ e ela for estritamente negativa} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como  $n^z(\bar{\theta}) \geq n(\theta_1)$ , pela Proposição 2, é possível reescrever o lado direito de (3.25) da seguinte forma:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} &= \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \\ &+ \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) A(\theta) d\theta - \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) A(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Logo:

$$\int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) (1 - A(\theta)) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) A(\theta) d\theta \quad (\text{A.25})$$

É possível expressar a terceira integral em (A.25) em termos de  $\underline{n}^z(\bar{\theta})$ , usando as inversas, de modo que fique como:

$$\begin{aligned} &\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v}(\theta^z(n), n) A(\theta^z(n)) d\theta^z(n), \text{ o que pode ser reescrito como:} \\ &\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v}(\theta^z(n), n) A(\theta^z(n)) d\theta^z(n) + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v}(\theta^z(n), n) A(\theta^z(n)) d\theta(n) - \\ &- \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v}(\theta^z(n), n) A(\theta^z(n)) d\theta(n) \end{aligned}$$

Então:

$$\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d(\theta^z(n) - \theta(n)) + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d\theta(n) \quad (\text{A.26})$$

Onde  $\theta(n)$  é a função inversa de  $n(\theta)$ . Observe que o segundo termo de (A.26) é equivalente à integral simples, pois  $\theta(n)$  é diferenciável e  $A(\theta^z(n))$  é zero um número insuficiente de vezes para pesar no cálculo da integral, de modo que  $\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} A(\theta^z(n)) d\theta(n) \approx 1$ .

Da mesma forma, trabalha-se agora com o lado esquerdo da equação (A.25), reescrevendo-a como:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))} v(\theta, n(\theta)) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta$$

Portanto:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta = \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} v(\theta(n), n) d\theta(n) + \int_{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta \quad (\text{A.27})$$

Pela Proposição 1, tem-se que:

$$\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} v(\theta(n), n) d\theta(n) > \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)} d\theta(n) \quad (\text{A.28})$$

Então, substituindo em (A.25) a (A.27) em (A.15):

$$\begin{aligned} & \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} v(\theta(n), n) d\theta(n) + \int_{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta > \\ & > \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))(1 - A(\theta)) d\theta + \\ & + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d(\theta^z(n) - \theta(n)) + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d\theta(n) \end{aligned}$$

Como (A.28) vale e admitindo que  $\int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} A(\theta^z(n)) d\theta(n) \approx 1$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta > \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))(1 - A(\theta)) d\theta + \\ & + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d(\theta^z(n) - \theta(n)) + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)} d\theta(n) - \\ & - \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} v(\theta(n), n) d\theta(n) \end{aligned}$$

Então, para provar (A.15), é necessário mostrar que:

$$\begin{aligned} & \int_{\theta^z(\underline{n}^z(\bar{\theta}_2))}^{\theta_2} v(\theta, n(\theta)) d\theta > \int_{\theta_1}^{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta})) d\theta + \\ & + \int_{\theta^z(\underline{n}(\theta_1))}^{\theta_2} v(\bar{\theta}, n^z(\bar{\theta}))(1 - A(\theta)) d\theta + \int_{n(\theta_1)}^{\underline{n}^z(\bar{\theta}_2)} \overleftarrow{v(\theta^z(n), n)A(\theta^z(n))} d(\theta^z(n) - \theta(n)) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Duas coisas precisam ser observadas a respeito de (A.29). Primeiro tanto o lado esquerdo quanto o direito são integrais sobre a mesma região, logo, se todos os  $v(\cdot, \cdot)$  fossem iguais a 1, esta equação seria uma igualdade. Segundo, os pesos para os valores de  $v(\theta, n)$  no lado direito são sempre positivos, devido ao Lema 2 que faz com que  $\theta^z(n) - \theta(n)$  seja uma função fracamente decrescente.

Assim, pela Proposição 1 e uma vez que  $v(\theta, n)$  é crescente em  $\theta$ , as diferenças entre os  $\theta$  no lado direito e esquerdo fazem com que o lado direito de (3.39) seja menor que o esquerdo. Quanto à diferença entre as funções  $n$  dos dois lados, o lado direito traz valores de  $v(\theta, n)$  com  $\theta$  em  $d_A$  e  $n$  acima de  $n^z(\bar{\theta}_2)$ , enquanto que o lado esquerdo traz valores de  $v(\theta, n)$  com  $\theta$  em  $d_B$  e  $n$  abaixo de  $n^z(\bar{\theta}_2)$ . Assim, devem-se considerar dois casos: 1) se  $v(\theta, n) < 0$ , então, uma vez que  $v(\theta, n)$  satisfaz cruzar a origem uma única vez, todos os valores de  $\theta$  no lado direito de (A.15) serão negativos, valendo a Proposição 1, o lado esquerdo de (A.15) é sempre positivo, logo (A.15) seria verdade; 2) se  $v(\theta, n) > 0$ , então, uma vez que  $v(\theta, n)$  decresce em  $n$  sempre que é não-negativo, por definição, todos os valores de  $v(\theta, n)$  no lado esquerdo de (A.29) são maiores do que do lado direito. Como a integral dos dois lados recai sobre as mesmas regiões, (A.29) deve ser verdade, logo (A.15) também é verdade. Logo  $\Delta^x(\theta_B, \tilde{n}(\cdot)) = \Delta^x(\theta_A, \tilde{n}(\cdot)) = 0$ , não pode ser um equilíbrio e o único equilíbrio possível é o equilíbrio com ponto de inversão  $\theta^*(x)$ . ■