

**PROPOSTA ALTERNATIVA PARA CÁLCULO DA
AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE E USO DE
ALGORITMOS GENÉTICOS PARA DETERMINAÇÃO
DO PLANO CRÍTICO EM FADIGA MULTIAXIAL**

Alberto Pinheiro Dantas

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROPOSTA ALTERNATIVA PARA AMPLITUDE DA
TENSÃO CISALHANTE E USO DE ALGORITMOS
GENÉTICOS PARA DETERMINAÇÃO DO PLANO
CRÍTICO EM FADIGA MULTIAXIAL

ALBERTO PINHEIRO DANTAS

ORIENTADOR: JOSÉ ALEXANDER ARAÚJO

CO-ORIENTADOR: TITO DIAS JÚNIOR

TESE DE DOUTORADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.TD-003/2009
BRASÍLIA/DF:DEZEMBRO – 2009.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**PROPOSTA ALTERNATIVA PARA AMPLITUDE DA TENSÃO
CISALHANTE E USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS PARA
DETERMINAÇÃO DO PLANO CRÍTICO EM FADIGA
MULTIAXIAL**

ALBERTO PINHEIRO DANTAS

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

APROVADO POR:

Prof. José Alexander Araújo, D.Phil (ENM-FT-UnB)
(Orientador)

Prof. Marcelo Amorim Savi, D.Sc. (COPPE-UFRJ)
(Examinador Externo)

Prof. Heraldo Silva da Costa Mattos, D.Sc. (UFF)
(Examinador Externo)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, D.Sc. (ENM-FT-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Fábio Comes de Castro, D.Sc. (ENM-FT-UnB)
(Examinador Interno)

FICHA CATALOGRÁFICA

DANTAS, ALBERTO PINHEIRO

Proposta Alternativa para Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial [Distrito Federal] 1999.

xv, 142p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Ciências Mecânicas, 2009).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Fadiga de Metais

2. Plano Crítico

3. Amplitude da tensão cisalhante

4. Algoritmos genéticos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANTAS, A. P. (2009). Proposta Alternativa para Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial, Publicação ENM.TD-003/2009, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 142p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Alberto Pinheiro Dantas.

TÍTULO: Proposta Alternativa para Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial.

GRAU / ANO: Doutor / 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Alberto Pinheiro Dantas

À minha família.

Agradecimentos

À minha querida esposa e aos meus filhos que durante muitos períodos críticos e cruciais me forneceram apoio decisivo para que alcançasse o meu objetivo.

Ao meu pai que me inspirou a buscar novos desafios e me ensinou a nunca desistir de sonhos e determinações; aos apoios incondicionais de minha mãe e irmãos.

Ao Prof. José Alexander Araújo que por meio dos seus ensinamentos e orientações, me conduziu ao sucesso desse trabalho.

Ao Prof. Tito Dias Junior que me fez vislumbrar novos horizontes para serem aplicados à engenharia.

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília por me proporcionarem um ambiente propício de aprendizagem e sã camaradagem.

RESUMO

Esta tese apresenta uma nova alternativa para calcular a amplitude da tensão cisalhante em critérios de fadiga multiaxial baseados na abordagem de *plano crítico*. Essa nova medida foi aplicada aos critérios de Findley e de Susmel & Lazzarin e os resultados comparados com dados experimentais sob carregamentos combinados disponíveis na literatura para condições limite de fadiga. Os resultados obtidos pela nova medida denominada de Máximo Retângulo Circunscrito (MRC) foram também comparados com os resultados obtidos pelo Método do Mínimo Círculo Circunscrito (MCC), mostrando que o MRC é mais eficiente e mais preciso que o MCC. Uma nova definição para o plano crítico foi proposta, pois observou-se que a definição clássica não possui unicidade e não considera explicitamente a influência da tensão normal máxima na localização do plano crítico. Aplicou-se algoritmos genéticos, um método de otimização, para reduzir o custo computacional tornando viável o uso de critérios de fadiga multiaxial baseados em abordagens plano críticos no âmbito da engenharia.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to propose a new alternative to compute the amplitude of the shear stress on *critical plane* based multiaxial fatigue approaches. This new measure was applied to Findley and Susmel & Lazzarin criteria and compared with 42 experimental data taken from the literature. The estimates provided by this measure, here on denominated the Maximum Circumscribed Rectangle (MCR) were also compared with results obtained by the celebrated Minimum Circumscribed Circle (MCC) method. Results showed that the MCR is more efficient and more accurate than the MCC to estimate multiaxial fatigue strength. A new definition of critical plane is presented as the classic one proved to be an ill posed problem and does not take in account the influence of the maximum normal stress on the critical plane localization. It was applied genetic algorithms, an optimization method, to reduce the computational cost associated with the material search process. The use of genetic algorithms turns feasible the use of multiaxial fatigue criteria based on critical plane approaches in the engineering framework, where real components are usually modeled by means of Finite Element Methods (FEM).

Sumário

1	INTRODUÇÃO	
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .	1
1.2	PANORAMA HISTÓRICO DA FADIGA .	1
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.	4
1.4	OBJETIVOS E ESTRUTURA DA TESE.	7
2	DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS	
2.1	VETOR TENSÃO.	9
2.2	HISTÓRIAS DE CARREGAMENTO .	10
2.2.1	Estado Uniaxial de Tensão.	12
2.2.2	Estado Multiaxial de Tensões.	13
3	FADIGA	
3.1	MECANISMO DA FADIGA.	17
3.2	FADIGA UNIAXIAL.	18
3.3	MODELOS DE FADIGA MULTIAXIAL.	22
3.3.1	Modelos Empíricos.	23
3.3.2	Modelos Baseados no Invariante do Tensor Tensão.	24
3.3.3	Modelos Baseados em Médias Tensões e/ou Deformações em Volume Material.	26
3.3.4	Modelos Baseados na Energia Acumulada de Material.	27
3.3.5	Modelos Baseados na Determinação de Planos Críticos.	27
3.4	VALIDAÇÃO DE UM CRITÉRIO DE FADIGA MULTIAXIAL .	35
4	AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIA- XIAL	
4.1	INTRODUÇÃO.	37
4.2	CONCEITOS ENVOLVENDO A AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE.	38
4.3	MÉTODOS PARA DETERMINAR A MÁXIMA TENSÃO CISALHANTE.	40
4.3.1	Método da Maior Projeção.	40
4.3.2	Método da Maior Corda.	41
4.3.3	Método do Mínimo Círculo Circunscrito.	42
4.3.4	Método da Mínima Elipse.	47
4.3.5	Método do Maior Retângulo Circunscrito – MRC.	49
4.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS.	52
5	ALGORITMOS GENÉTICOS	
5.1	INTRODUÇÃO.	64
5.2	O MÉTODO DO ALGORITMO GENÉTICO.	65
5.2.1	Uma visão geral.	65
5.2.2	Função de avaliação.	67
5.2.3	Seleção dos pais.	67
5.2.4	Operador crossover.	70
5.2.5	Operador de mutação.	71
5.2.6	Módulo de população e elitismo.	71

5.3	CODIFICANDO UM PROBLEMA PARA ALGORITMO GENÉTICO.	72
5.4	UMA APLICAÇÃO PRÁTICA.	74
6	RESULTADOS	
6.1	INTRODUÇÃO.	82
6.2	DADOS EXPERIMENTAIS.	82
6.3	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	89
6.3.1	Processo convencional.	89
6.3.2	Algoritmos genéticos.	93
6.4	ANÁLISE CRÍTICA DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO PLANO CRÍTICO E SUA DETERMINAÇÃO NUMÉRICA.	98
6.5	AVALIAÇÃO COMPARATIVA.	104
6.5.1	Validação do método do maior retângulo circunscrito (MRC).	105
6.6	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.	119
6.6.1	Obtendo a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico.	119
6.6.2	Comparação entre o processo de busca incremental com o algoritmo gené- tico.	122
6.6.3	Índices de erro.	127
6.6.4	Tempo de processamento.	129
7	CONCLUSÕES	130
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132
	ANEXO	
I	VALORES LÍMITES PARA O MODELO DE SUSMEL & LAZZARIN.	140

Lista de Figuras

2.1	Forças externas atuando em um corpo material e um plano de corte passando pelo ponto O.	9
2.2	Histórias de tensões proporcional e não proporcional para carregamentos combinados de flexão e torção.	12
2.3	Diagramas de fase no espaço das tensões $\sigma(t) \times \tau(t)$ para carregamentos assíncronos.	13
2.4	Corpo submetido a um estado de tensão uniaxial.	14
2.5	Carregamentos cíclicos (a) Totalmente alternado (b) Repetido (c) Flutuante	14
2.6	Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas Oxyz pela suas coordenadas esféricas θ e ϕ	15
2.7	(a) Vetor tensão \mathbf{t} e suas componentes normal σ e cisalhante τ referenciados no sistema de coordenadas Oxyz. (b) Projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre num plano material Ψ para um período de um ciclo de carregamento complexo gerando uma curva fechada.	16
3.1	Nucleação de trincas no interior dos grãos de parte de uma estrutura cristalina	17
3.2	Curva S-N esquemática	19
3.3	Curva S-N esquemática para diferentes tensões medias para uma mesma amplitude de tensão σ_a	19
3.4.	Laço de histerese no gráfico tensão-deformação	20
3.5	Curva deformação-vida	21
3.6	Elipse de Gough.	24
3.7	Gráfico do critério de Dang Van com o domínio de tolerância para as histórias de carregamento Γ_1 e Γ_2	31
3.8	Curvas Modificadas de Wöhler para flexão ($\rho = 1$), torção ($\rho = 0$) e uma história de tensões geral (ρ_i).	34
3.9	Gráfico τ_a vs. $\sigma_{n;\max}$ para o critério de Susmel e Lazzarin.	35
4.1	Projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre num plano material Δ para um período de um ciclo de carregamento complexo gerando uma curva fechada	39
4.2	(a) Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio de acordo com o método da maior projeção (b) inconsistência do método da maior projeção.	41
4.3	(a) Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio de acordo com o método da maior corda (b) inconsistência do método da maior corda.	42
4.4	Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio para o método do mínimo círculo.	43
4.5	Gráfico para o problema de min-max para o método do mínimo círculo	45
4.6	Tolerância do método do mínimo círculo para uma dada história de tensão cisalhante.	47
4.7	Cálculo da amplitude da tensão cisalhante equivalente τ_a para carregamentos proporcionais e não proporcionais pelo método do mínimo círculo (hiperesfera).	48
4.8	Menor elipse contendo a história de tensões projetada no plano de corte Δ	48
4.9	(a) Inconsistência da proposta de Bin Li et al. [39] para obter os semieixos maiores das duas histórias das tensões cisalhantes. (b) Elipses envolvendo corretamente as duas histórias das tensões cisalhantes.	49
4.10	Retângulo de lados a_i ; $i = 1; 2$ circunscrevendo a projeção da história de tensões com as faces tangentes em p_i e q_i ; $i = 1; 2$	50

4.11	Amplitude das componentes $\tau_i(t)$ para uma história de carregamentos não proporcional, fora de fase e síncrona.	51
4.12	Sistema Oxyz referencial de um plano de corte Δ definido por seus vetores unitários \mathbf{n} , \mathbf{l} e \mathbf{r}	53
4.13	Carregamento proporcional para uma história de tensões normal biaxial.	54
4.14	História das componentes da tensão cisalhante e o respectivo diagrama de fases para um dado plano Δ e para um carregamento proporcional apresentado na figura 4.13.	55
4.15	Carregamento afim para uma história de tensões normal biaxial.	57
4.16	História das componentes da tensão cisalhante e o respectivo diagrama de fases em um dado plano Δ para um carregamento afim apresentado na figura 4.15.	57
4.17	Carregamento normal biaxial gerando um diagrama de fase triangular.	58
4.18	História das componentes da tensão cisalhante e o correspondente diagrama de fases para o plano Δ para a história de tensões descrita na figura 4.17.	59
4.19	História das componentes da tensão cisalhante circunscritas pelos métodos do mínimo círculo e do maior retângulo.	60
4.20	Carregamento normal biaxial gerando um diagrama de fases triangular.	61
4.21	História das componentes da tensão cisalhante e o correspondente diagrama de fases para o plano Δ para a história de tensões descrita na figura 4.20.	61
4.22	Diagramas de fase $\tau_l \times \tau_r$ para as histórias de tensões dos exemplos 3 e 4 cujas histórias das tensões cisalhantes estão circunscritas com os métodos do (a) mínimo círculo (MCC) (b) e do maior retângulo (MRC).	62
5.1	Representação gráfica do esquema de um algoritmo genético.	66
5.2	Representação de um cromossomo de genes binários.	66
5.3	Sorteio de indivíduos para a operação de cruzamento.	69
5.4	Operação de Cruzamento.	71
5.5	Operação de Mutação.	72
5.6	Gráfico da função $f(x, y) = xy \sin(y\pi/4) $	75
5.7	Gráfico da função $f(x, y) = xy \sin(y\pi/4) $ apresentando a 1ª população gerada aleatoriamente.	78
5.8	Roleta cuja área representa o índice de aptidão para cada indivíduo.	78
5.9	Operação de cruzamento aplicada aos pais selecionados.	79
5.10	Conjunto de gerações para $f(x, y)$:	80
6.1	Gráficos referentes aos testes 01, 02 e 04 da tabela 6.2. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$). (b) histórias de tensões.	84
6.2	Gráficos referentes aos testes nos 11, 19 e 21 da tabela 6.3. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$). (b) histórias de tensões.	86
6.3	Gráficos referentes aos testes nos 29, 34 e 39 da tabela 6.4. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$). (b) histórias de tensões.	88
6.4	Gráficos referentes aos testes nos 40, 41 e 42 da tabela 6.5. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$). (b) histórias de tensões.	88
6.5	(a) Gráfico dos incrementos de $\Delta\phi$ e $\Delta\phi$ para a determinação da amplitude da tensão cisalhante em função de τ_a (b) Gráfico relacionando a média do tempo decorrido e os incrementos de $\Delta\phi$ e $\Delta\phi$ na determinação da amplitude da tensão cisalhante.	91
6.6	(a) Amplitude da tensão cisalhante em função dos incrementos em ϕ (b) Gráfico relacionando a média do tempo decorrido e os incrementos em ϕ na determinação da amplitude da tensão cisalhante.	92
6.7	Comportamento do <i>Fit</i> e <i>Fit Médio</i> em função do operador indivíduos.	95

6.8	Comportamento do <i>Fit</i> e <i>Fit Médio</i> em função do operador gerações.	96
6.9	História das máximas tensões cisalhantes nos planos de corte para o teste no 38.	99
6.10	Comparação dos valores próximos a máxima amplitude da tensão cisalhante com a tensão normal para o teste nº 38.	100
6.11	História das máximas tensões cisalhantes nos planos de corte para o teste nº 11. .	100
6.12	Comparação dos valores próximos a máxima amplitude da tensão cisalhante com a tensão normal para o teste nº 11.	101
6.13	Influência das tolerâncias em torno da máxima sobre o índice de erro.	103
6.14	Nuvem de pontos representando a amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal em todos os planos de corte para o teste no 1.	104
6.15	Resultados para o critério de Susmel e Lazzarin para os testes 1 a 10, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (a) Amplitudes da tensão cisalhante nos planos críticos (b) Índices de Erro.	107
6.16	Resultados para o critério de Findley para os testes 1 a 10, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (a) Amplitudes da tensão cisalhante nos planos críticos (b) Índices de Erro.	108
6.17	(a) Amplitudes da tensão cisalhantes dos testes 28 a 39, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (b) Índices de Erro dos testes 28 a 39 referentes aos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC).	112
6.18	Gráfico comparativo do tempo médio de processamento nos processos convencional e algoritmo genético para os métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC).	115
6.19	Saída gráfica de um AG apresentando a população nas 1ª(a), 8ª(b), 24ª(c) e 40ª(d) gerações na busca da solução para o teste nº 38.	116
6.20	Histograma dos índices de erro de fadiga para o critério de Susmel e Lazzarin para os métodos do MCC e do MRC.	119
6.21	Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste nº 01 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.	120
6.22	Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste nº 21 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.	121
6.23	Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste nº 29 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.	123
6.24	Fluxograma para obtenção do plano crítico (a) processo incremental (b) algoritmo genético.	125
6.25	(a) gráfico das amplitudes das tensões cisalhantes dos testes 1 ao 42 executado pelo processo convencional nos métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC) (b) gráfico das amplitudes das tensões cisalhantes dos testes 1 ao 42 executado pelo algoritmo genético nos métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC)	127
6.26	Índices de erro para o critério de Susmel e de Lazzarin obtidos pelos métodos do menor círculo (MCC) e do maior retângulo (MRC).	128

Lista de Tabela

4.1	Valores de τ_l e τ_r para uma história de tensão proporcional.	56
4.2	Valores de τ_l e τ_r para o exemplo com história de tensão fora de fase mostrada na figura 4.15.	58
4.3	Valores de τ_l e τ_r para o exemplo da história de tensões mostrada na figura 4.17.	59
4.4	Valores de τ_a obtidos pelo MRC para rotações de ' referente à história representada na figura 4.19.	60
4.5	Valores de τ_l e τ_r para o exemplo da história de tensões mostrada na figura 4.20.	61
4.6	Valores de τ_a obtidos pelo MCC e MRC para duas histórias de tensões distintas.	63
5.1	Exemplo de uma população com os respectivos graus de aptidão.	68
5.2	Precisão do ponto conforme o tamanho da cadeia de bits.	76
5.3	População Inicial.	77
5.4	Sorteio pela roleta.	79
6.1	Limite de escoamento, limites de fadiga para flexão e torção totalmente alternados e razão de fadiga para os aços.	83
6.2	Testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase.	84
6.3	Testes no estado plano de tensões para tensões harmônicas e síncronas.	85
6.4	Testes de flexão e torção, harmônicos, síncronos e assíncronos.	87
6.5	Testes biaxiais com tensões harmônicas assíncronas.	87
6.6	Resultados do método convencional para os testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.	106
6.7	Resultados do método convencional para os testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro obtidos por meio do critério de Findley.	107
6.8	Resultados do método convencional para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.	109
6.9	Resultados do método convencional para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase obtidos por meio do critério de Findley.	110
6.10	Resultados do método convencional em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.	111
6.11	Resultados do método convencional em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço obtidos por meio do critério de Findley.	113
6.12	Resultados do método convencional em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços Aço 34Cr4 (b) e Aço St35 obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin. ...	114

6.13	Resultados do método convencional em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços Aço 34Cr4 (b) e Aço St35 obtidos por meio do critério de Findley.	114
6.14	Resultados aplicando algoritmo genético nos testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro.	115
6.15	Resultados aplicando algoritmo genético para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase.	116
6.16	Resultados aplicando algoritmo genético em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço.	117
6.17	Resultados aplicando algoritmo genético em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços Aço 34Cr4 (b) e Aço St35.	117
6.18	Resultados para os testes 1 e 8 executados por três vezes pelo processo do algoritmo genético.	126
I.1	Limites de fadiga para flexão e torção totalmente alternado	140
I.2	Valores de ρ de ρ_{lim} obtidos pelo MCC e MRC para o modelo de Susmel & Lazzarin.	141

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

A	razão de amplitude
a	parâmetro do material
b	parâmetro do material
c	expoente de ductibilidade a fadiga
E	módulo de elasticidade
f_0	limite de resistência a fadiga para flexão repetida
f_{-1}	limite de resistência a fadiga para flexão alternada
g_x, g_y, g_z	funções periódicas
J_2	segundo invariante do tensor tensão
k	constante de proporcionalidade
l	comprimento da cadeia de bits de um cromossomo
n	vetor unitário de um plano
n_x, n_y, n_z	componentes do vetor unitário n
N_f	número de ciclos
p_i, q_i	pontos de tangência do retângulo na história de tensões cisalhantes
r	razão de carregamento
t	vetor tensão
$t_{A,B}$	limite de resistência para trincas no caso A e B
T	tensor de tensões segunda ordem
t	variável tempo
t	limite de resistência à torção
t_{-1}	limite de resistência à torção alternada

Símbolos Gregos

$\Delta \mathbf{T}_{i,j}$	variação do componente tensor das tensões de 2ª ordem
$\Delta \mathbf{T}_{\text{oct},a}$	amplitude da tensão cisalhante na forma octaédrica
$\Delta \phi, \Delta \theta$	incrementos das coordenadas esféricas dos planos de corte
ϵ_a	amplitude da deformação
ϵ_{ea}	amplitude da deformação elástica
ϵ_{pa}	amplitude da deformação plástica
ϵ'_f	coeficiente de ductibilidade a fadiga
λ_i	eixos principais de um elipsóide
$\lambda_{xx}, \lambda_{xy}$	relação de frequência entre componentes da tensão
κ_τ	inverso da razão de tensão
ρ	razão de tensão
ρ_{lim}	limite máximo da razão de tensão
θ, ϕ	coordenadas esféricas do vetor unitário
θ^c, ϕ^c	coordenadas esféricas do plano crítico
σ'_f	coeficiente de resistência a fadiga
σ_1, σ_3	tensões principais nas direções 1 e 3
σ_a	amplitude da tensão
σ_m	tensão média
$\sigma_{n,max}$	máxima tensão normal

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$	tensão normal na direção x, y, z
$\sigma_{xx,a}$	tensão normal alternada na direção x
$\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{zz}$	tensão normal média na direção x, y, z
σ_{max}	tensão máxima
σ_{min}	tensão mínima
σ_{UTS}	limite de resistência
$\boldsymbol{\tau}$	vetor tensão cisalhante
τ_a	amplitude da tensão cisalhante
$\tau_{A,REF}$	tensão cisalhante de referência
τ_m	tensão cisalhante média
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz},$	tensões cisalhantes
χ	coeficiente de expansão do raio no MCC
Ψ	projeção da história de tensões cisalhante no plano de corte
ω	freqüência de aplicação das cargas periódicas

Subscritos

-1	relativo a carregamento periódico alternado
0	relativo a carregamento periódico repetido
a	relativo a amplitude
max	relativo ao máximo valor
min	relativo ao mínimo valor
n	relativo à tensão normal
xx	relativo à componente do tensor tensão
yy	relativo à componente do tensor tensão
zz	relativo à componente do tensor tensão
xy	relativo à componente do tensor tensão
x, y, z	relativo aos eixos coordenados nos sistema O_{xyz}
m	relativo a médio
φ	relativo à rotação do retângulo no plano de corte

Sobrescritos

MCC	relativo ao método do mínimo círculo circunscrito
MRC	relativo ao método do maior retângulo circunscrito
c	relativo ao plano crítico

Siglas

AG	Algoritmo Genético
AGs	Algoritmos Genéticos
MCC	Método do Mínimo Círculo Circunscrito
MRC	Método do Maior Retângulo Circunscrito

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Há várias motivações que levam pesquisadores a estudar os fenômenos físicos da natureza entre as quais, a ambição de compreendê-la. Um outra motivação pode estar relacionada com a responsabilidade de projetar uma estrutura, um equipamento ou simplesmente um produto que deve funcionar sem qualquer falha durante um certo período de tempo, pois essa falha, muitas vezes imprevisível, pode causar danos à pessoas e ao patrimônio. No dias atuais, o fenômeno denominado fadiga de materiais é um dos principais causadores de tais danos. Uma estrutura ou um equipamento sob um processo de carregamento mecânico (cíclico) pode ficar submetido a um determinado nível de tensões de maneira que, sem aviso prévio, pode sofrer uma falha catastrófica. Portanto, esse fenômeno perfeitamente possível de se manifestar deve ser profundamente estudado.

Outro grande motivo está relacionado com perdas econômicas de grandes proporções. Estudos realizados por Fatemi & Zourif [1] revelam que os Estados Unidos em 1978 amargaram uma perda de aproximadamente US\$119 bilhões (4% do PIB) relacionada com a manutenção de estruturas, equipamentos ou componentes cujos danos foram provocados por fadiga. A fadiga de materiais está intimamente relacionada com a questão de como algumas ligações em nível atômico são desfeitas, após uma série de intervenções (carregamentos cíclicos) em nível macroscópico. No mundo macroscópico, grandes estruturas tais como usinas de energia, pontes, guindastes, veículos de qualquer natureza ou meros componentes como placas de circuitos eletrônicos estão expostos à cargas cíclicas. É de responsabilidade dos engenheiros garantir um período de operação seguro para esses materiais.

1.2 PANORAMA HISTÓRICO DA FADIGA

As primeiras observações sobre fadiga de materiais foram realizadas ao final da primeira metade do século XIX ao se constar que equipamentos em serviço falharam repentinamente quando submetidos a ciclos repetidos de tensão mesmo inferior ao limite de resistência do material. Até o meio do século XIX, problemas de engenharia envolvendo tensões e deformações eram resolvidos considerando apenas as teorias clássicas da mecânica estática pois, naquela época, havia poucas informações envolvendo carregamentos variáveis no tempo, principalmente porque a grande maioria das máquinas operava em velocidades relativamente pequenas e com carregamentos pouco expressivos. Além disso, o peso e tamanho não eram críticos e os fatores de

segurança eram elevados ou seja, caso algum componente de uma máquina quebrasse em serviço era, normalmente, substituído por um outro de maior porte e de maior peso.

Com o advento das máquinas a vapor, a velocidade em serviço aumentou, bem como surgiram carregamentos cíclicos com maior magnitude levando a ocorrência de falhas catastróficas (quebra de componentes em pleno serviço), cujas causas, naquela época, não se sabia explicar. No início da era da locomotiva, imagine a situação de um engenheiro projetista ao verificar que um eixo falhou depois de poucas centenas de quilômetros após entrar em operação. Esse engenheiro, embora tenha aplicado e calculado as dimensões do eixo de maneira correta, baseando-se nos critérios de falha existentes para a época, identificou que os eixos funcionaram adequadamente até um determinado período e, de repente, partiram-se em dois, mesmo estando submetidos apenas às cargas para as quais foram projetadas. Além disso, os eixos eram fabricados com uma liga de ferro de razoável ductibilidade, enquanto que a fratura observada era de comportamento de um material frágil. E, para complicar mais ainda, quando colocadas juntas as duas partes quebradas, pareciam não terem sofridos qualquer deformação, denotando que de fato ocorreu uma fratura típica de material frágil. Para piorar a situação, os testes indicavam que cada metade quebrada apresentava comportamento dúctil, tal qual como um novo eixo.

No século XIX, as falhas por fadiga freqüentemente estavam associadas às máquinas a vapor, locomotivas e bombas hidráulicas, tanto que, um dos mais famosos acidentes de grande proporção aconteceu em 8 de maio de 1842 quando uma locomotiva proveniente de Versailles em direção à Paris descarrilou e em seguida pegou fogo, causando a morte de mais de 50 pessoas.

Em meados do século XX, Peterson em 1950 [2] e Timoshenko em 1954 [3] analisaram o entendimento do fenômeno fadiga desde as primeiras observações ocorridas há aproximadamente 100 anos antes até aqueles dias. A análise de Peterson faz referência as idéias da fadiga como um fenômeno do material mencionando os estudos realizados por Gough e colaboradores nos anos 30. Timoshenko investigou a fadiga sob o ponto de vista das tensões e concluiu que, até o final do século XIX, os engenheiros tinham ciência da importância das tensões no fenômeno da fadiga mas, só a partir do início do século XX que os estudos sobre a distribuição de tensões foram refinados, principalmente pela análise teórica e testes experimentais.

Desde o início, as investigações relativas à falha por fadiga foram orientadas para duas vertentes. Primeiro, estudos teóricos têm sido realizados para determinar o mecanismo básico da fadiga com objetivo de obter a compreensão do que acontece com as numerosas variáveis (propriedades estáticas do material, acabamento superficial, estrutura metalográfica, tipos de carregamento, natureza da variação dos carregamentos, tamanho e forma geométrica das partes, tensões residuais, ambientes atmosféricos, etc) que afetam esse mecanismo. Segundo, formar um grande banco de dados por meio da realização de inúmeros testes de fadiga e, a partir dessas informações, buscar, empiricamente, outras propriedades que afetam o comportamento do material,

notadamente naquelas que influenciam a vida de um material sob influência de carregamentos cíclicos.

Segundo Juvinal [4], o desenvolvimento do nosso entendimento teórico da fadiga surgiu quando Reusche em 1867 realizou as primeiras observações sobre bandas de deslizamento em minerais cristalinos e, Ewing e Rosenhain, em 1900, nos metais. A teoria das discordâncias e escoamento em cristais que é a base da maioria das teorias relativas à fadiga, foi introduzida por Volterra em 1907 e Prandt em 1909. A evolução dos métodos de difração por raio X, os estudos e pesquisas em cristais desenvolvidas por Bragg, 1912 e Czochralski, 1918 forneceram ferramentas vitais para pesquisas posteriores. Como resultado da contribuição de muitos investigadores, a teoria da discordância começou a desenvolver-se fortemente a partir do início de 1940. Em 1950, Frank e Read realizaram uma importante contribuição para essa teoria ao apresentar considerações sobre a geração de novos deslocamentos em materiais quando submetidos a carregamentos cíclicos, cuja teoria ficou conhecida como *Efeito Frank-Read*. Nos anos recentes, técnicas efetivas foram desenvolvidas para examinar as micro estruturas dos materiais devido ao extremo aumento da capacidade de observação por meio da utilização de microscópios eletrônicos e atômicos.

Após 1945, cresce exponencialmente as publicações sobre fadiga, em parte, por causa das poucas publicações entre 1920 a 1945, mas principalmente devido a ocorrência de vários acidentes cujas suspeitas recaiam sobre a fadiga. Após a segunda guerra mundial, acidentes em pleno vôo com aviões Havilland Comet de fabricação inglesa, tornaram-se um clássico no estudo de fadiga.

A partir de 1955 surgem os conceitos de “*falha segura*” e “*vida segura*”. Os projetos deveriam ser realizados para uma falha segura e os componentes não podiam ultrapassar a vida segura quando estivessem em serviço. Mesmo tomando essas precauções, acidentes aéreos devido à fadiga ainda continuavam a ocorrer.

O período que vai de 1960 a 1994 é caracterizado por um grande desenvolvimento e impulso no estudo e conhecimento da mecânica da fratura, isto é, o estudo da propagação da trinca após a ocorrência do dano por fadiga no material. Houve, também, um maior entendimento do mecanismo de fadiga motivado pelo estudo em estruturas aeronáuticas, citando como exemplo, a propagação de trincas por fadiga em presença de carregamentos de amplitudes variáveis.

Ainda, na década de 70, a grande contribuição para os problemas de fadiga surgem dos requisitos obrigatórios estabelecidos pela Força Aérea Americana (USAF) que estabeleceu o famoso *Damage Tolerance Requirements* [5], denominado genericamente de *D. T. Specifications* que considerava que as trincas surgiam durante o processo de fabricação e, portanto, deveria ser de responsabilidade do fabricante comprovar por intermédio de testes e cálculos que os produtos manufaturados detinham as condições seguras de vida (durabilidade) e de resistência (tolerância ao dano). Estas especificações foram estendidas para outros equipamentos, como por exemplo, he-

licópteros, turbinas à gás, rolamentos, engrenagens etc. Juntamente com essas D.T. surgem uma série de publicações condensadas no famoso “Damage Tolerance Design Handbook” que continha uma grande quantidade de informações sobre os limites de resistência a fadiga e de propagação de trincas para os materiais utilizados na indústria aeronáutica. Esses requerimentos, inicialmente exigidos na fabricação de aviões militares, foram estendidos para a aviação comercial. Mesmo assim, apesar das precauções, não foram suficientes para evitar um acidente causado por fadiga com um avião Boing 737 da companhia Aloha Airlines, em abril de 1988.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A maioria dos componentes de engenharia estão submetidos a carregamentos multiaxiais cíclicos. A iniciação e propagação da trinca como consequência de carregamentos multiaxiais apresentam comportamentos diferentes quando comparados com carregamentos uniaxiais. Fadiga multiaxial está relacionada com os efeitos de tensões e deformações na orientação e crescimento de trincas durante a vida útil de um componente. Por exemplo, em carregamentos do tipo torção, as trincas se propagam ao longo da superfície, enquanto que para carregamento de flexão alternada, as trincas se propagam ao longo da espessura e, portanto, uma falha desse tipo é bem mais perigosa.

Pesquisas realizadas por Brown e Miller [6], Krempl [7], Lee [8] e Garud [9] indicaram que as informações obtidas a partir de teorias uniaxiais não são adequadas quando aplicadas à situações complexas de fadiga multiaxial, principalmente para carregamentos não proporcionais. Muitas teorias ou critérios de fadiga multiaxial tem sido propostos, mas nenhum é consensualmente aceito (Garud [9] e Lee[10]).

Modelos de danos por fadiga podem ser divididos em três grupos: i) modelos baseados nas deformações; ii) modelos baseados nas tensões; e iii) modelos baseados na energia de deformação. Desde que o foco principal deste trabalho está baseado nas abordagens das tensões, iremos apresentar as principais teorias que envolvem fadiga multiaxial de alto ciclo. Os critérios das tensões podem ser divididas em quatro grupos a saber: a) tensões equivalentes empíricas; b) invariante das tensões; c) tensões médias; e d) planos críticos.

Os trabalhos relevantes para critérios empíricos foram desenvolvidos por Gough e Pollard [11; 12; 13] que sugeriram uma fórmula empírica de uma elipse para o critério de fadiga multiaxial. Sines [14] foi um dos pioneiros a utilizar os invariantes das tensões e estabeleceu um critério tendo por alicerce o primeiro e o segundo invariante do tensor tensão. Langer [15] propôs um critério com base na tensão equivalente de Tresca. A American Society of Mechanical Engineers, ASME [16], usou o método modificado de Langer associado à tensão equivalente de Von Mises. Lee [17] propôs fórmula empírica baseada no modelo de Gough. Outros critérios de fadiga multiaxial

baseados nos invariantes das tensões podem ser obtidos em [18] e [19].

Papadopoulos *et al.* [20] propuseram um critério de fadiga com base no levantamento da média das tensões para um volume elementar. Esse critério sofreu críticas por possuir a limitação de não considerar os efeitos de carregamentos não proporcionais, o que é conflitante quando comparado com observações experimentais [21].

Nos últimos anos, os critérios baseados na abordagem do plano crítico para a avaliação de fadiga multiaxial tem ganhando popularidade [21], [22]. Em geral, considera-se o plano onde ocorre a iniciação da trinca como plano crítico, porém, o modo de como determiná-lo não é padronizado dando oportunidade para o aparecimento de várias propostas e, por conseqüência, resultados distintos.

Findley [23] propôs a localização do plano crítico com base na combinação linear da amplitude da tensão de cisalhamento com a tensão normal máxima atuando no plano crítico, enquanto que Matake [24] propôs um critério de fadiga usando uma combinação linear entre a máxima amplitude da tensão cisalhante observado no plano crítico com a máxima tensão normal para esse plano.

McDiarmid [25] utiliza o conceito de trincas do tipo Modo A e Modo B (Brown e Miller [26]). No modo A, as trincas se propagam ao longo da superfície do componente, enquanto que no modo B, as trincas propagam-se na direção da espessura. Nesse caso, o plano crítico corresponde aquele onde se observa a trinca nos dois casos.

Carpinteri e Spagnoli [27] propuseram um critério baseado no plano crítico para metais duros, de modo que o cálculo do plano crítico é feito em duas etapas. Primeiro, deve-se obter uma direção média ponderada da tensão máxima principal [28] [29]. Em seguida, uma fórmula empírica é utilizada para correlacionar a direção determinada na etapa anterior e obter o plano crítico. Após a determinação do plano crítico, o critério de fadiga é expresso por uma combinação linear da tensão normal máxima e amplitude de tensão de cisalhamento atuando nesse plano.

Susmel e Lazzarin [30] apresentaram um método para estimar a resistência à fadiga de alto ciclo em condições de carregamento multiaxial. A interpretação física dos danos por fadiga é baseada na teoria de deformação cíclica em cristais. Essa teoria também é usada para destacar as componentes da tensão que podem ser consideradas significativas para a nucleação e crescimento de uma trinca na fase I. Estimativas de vida à fadiga são realizadas por meio de uma curva de Wölher que pode ser aplicada tanto para componentes com ou sem entalhes submetidos a carregamentos em fase ou fora-de-fase. As curvas modificadas de Wölher são gráficos que relacionam a resistência a fadiga com a máxima amplitude da tensão de cisalhamento macroscópica. O plano onde se observa a máxima amplitude da tensão cisalhante é considerado um plano coincidente com aquele onde inicia uma microtrinca e, portanto, crítico. As curvas modificadas de

Wölher levam em conta a componente normal da tensão nesse plano, assim como os ângulo de fase.

Ainda, na abordagem do plano crítico, Liu Y. e Mahadevan S. [31] propõem um novo critério de fadiga para alto ciclo. Diferente dos demais critérios existentes, os autores definem um novo plano denominado *plano de fratura* por fadiga que é diferente do plano crítico. O plano crítico é o plano material onde se observa que o dano por fadiga ocorre devido às bandas de deslizamentos, enquanto que o plano de fratura refere-se ao plano da trinca observado em níveis microscópicos. Segundo os autores, pode acontecer que os dois planos sejam coincidentes e propõem uma fórmula baseada numa relação não linear entre a tensão normal, a amplitude da tensão cisalhante e a amplitude da tensão hidrostática agindo no plano crítico e, portanto, o dano de fadiga multiaxial é a soma dos danos causados por essas três quantidades.

Em se tratando de fadiga multiaxial, pode-se afirmar que mesmo nos dias atuais, não há um critério amplamente aceito e, portanto, constantemente, surgem novas propostas, como o critério recentemente proposto por Jing Li *et al.* [32], onde os autores se baseiam em parâmetros de tensão e deformação aplicados em um plano crítico como previsão de dano por fadiga.

Na bibliografia analisada, percebemos que os critérios baseados em plano crítico têm aumentado de interesse, em parte, pela interpretação física e observações experimentais que indicam que a trinca inicia em planos preferenciais. Uma das limitações dessa abordagem é definir o plano onde o material sofre mais dano quando submetido a carregamentos complexos. Além disso, para uma dada uma história de tensões cíclicas, obter a amplitude da tensão cisalhante não é uma tarefa trivial, tanto que muitos pesquisadores ainda consideram que o método proposto por Dang Van *et al.* [33] em 1984 e aperfeiçoado por Papadopoulos [34] em 1987, representa o estado da arte quanto a um procedimento para obter a amplitude da tensão cisalhante em histórias de carregamentos multiaxiais.

As primeiras tentativas para calcular a amplitude da tensão cisalhante em histórias de tensão multiaxiais são devidas ao Grubisic e Simbürger [35] que propuseram o método da maior projeção da história de tensões cisalhantes e Lemaitre e Chaboche [36], Fuchs e Stephens [37], o método da maior corda. Segundo Papadopoulos [38], esses métodos podem fornecer resultados inconsistentes para histórias de tensões não proporcionais.

Em 2000, Bin Li *et al.* [39] apresentaram, no contexto das tensões desviadoras (invariantes da tensão), um método denominado mínimo elipsóide circunscrito para avaliar a amplitude da tensão efetiva de cisalhamento sob carregamento multiaxial complexo. Segundo Gonçalves *et al.* [40], apesar da medida da amplitude da tensão cisalhante por esse método ser adequado e permitir obter bons resultados, a sua implementação foi equivocada e, para alguns tipos de histórias de tensões, os resultados não se mostraram adequados à metodologia proposta. Assim, Gonçalves *et al.* propuseram um método para a medida da tensão cisalhante equivalente para carregamentos

não proporcionais, em fase e fora de fase, mas síncronos. Em 2006, Zouain *et al.* [41] propuseram uma medida escalar para a amplitude da tensão cisalhante baseada na definição do menor elipsóide de norma de Frobenius que envolve as tensões no espaço das tensões desviadoras corrigindo o erro de Bin Li *et al.* [39]. Em 2009, no contexto das tensões desviadoras, Mamiya *et al.* [42] propuseram como uma medida adequada da amplitude da tensão equivalente em fadiga multiaxial para qualquer carregamento, inclusive os assíncronos, o maior envelope prismático. Ainda nesse mesmo ano, Zouain *et al.*[43] publicaram um artigo onde chamam a atenção que embora os resultados obtidos pelos métodos do envelope prismático e do elipsóide para a medida da tensão equivalente na maioria das vezes são equivalentes, as duas abordagens não são iguais, pois em algumas situações os resultados diferem.

1.4 OBJETIVOS E ESTRUTURA DA TESE

Neste trabalho, utilizaremos pela primeira vez, o método do maior envelope prismático para obter a máxima amplitude tensão cisalhante no plano crítico. Ainda, em relação à localização do plano crítico, iremos realizar um estudo exploratório sobre a sua localização e propor uma nova definição para essa localização, pois o conceito atual sobre a definição de plano crítico nos parece imprecisa, porque permite obter mais de uma solução para uma mesma história de tensões.

O Método dos Elementos Finitos está disseminado tanto no meio acadêmico quanto no setor produtivo e a sua aplicação exige que um sistema mecânico (estrutura, equipamento, peça, etc) a ser analisado seja discretizado em milhares de pontos. Qualquer procedimento de investigação de fadiga em que um ponto material venha demandar um elevado tempo para apresentar uma solução, está predestinado a ser desprezado e até mesmo inviabilizado pelo elevado custo computacional.

Conceitualmente, a abordagem do plano crítico impõe a necessidade que cada ponto material seja avaliado em planos de corte para que venha produzir resultados adequados. A quantidade a ser gerada desses planos não pode ser pequena demais para não comprometer a qualidade dos resultados e não tão grande para não impactar o custo de processamento e, portando, em ambas as situações pode inviabilizar o seu uso prático. Desta forma, buscamos um procedimento numérico otimizado para obter resultados satisfatório sem comprometer o tempo de processamento e a qualidade desses resultados. Pesquisas apontaram que um processo de otimização denominado Algoritmo Genético tem crescido de importância e se tornando a solução para muitos problemas até bem pouco tempo insolúveis pelos métodos convencionais ou quando possível, demandavam um grande esforço computacional. Neste trabalho, iremos propor esse método de otimização que é baseado em algoritmos evolucionários que usam modelos computacionais dos processos naturais de evolução como uma ferramenta para resolver problemas. Algoritmos genéticos (AG) pertencentes ao ramo dos algoritmos evolucionários, definidos como uma técnica de busca baseada

numa metáfora do processo biológico da evolução natural, são métodos robustos e adaptativos para resolver problemas de otimização no contexto do domínio global (Golberg [44]). Assim, utilizaremos os AG como uma técnica de otimização para a determinação do plano crítico cujos resultados serão comparados com o método convencional.

Este trabalho está formatado da seguinte forma: no capítulo Introdução, foi apresentado um panorama histórico da fadiga e uma revisão bibliográfica da fadiga multiaxial. No segundo capítulo, denominado Conceitos Básicos, serão apresentados os principais conceitos necessários à caracterização da fadiga. No cap. 3 será apresentado um estudo da fadiga nos seguintes aspectos: como se processa o mecanismo da fadiga, conceitos envolvendo fadiga uniaxial e multiaxial, as principais abordagens e modelos de fadiga multiaxial, o conceito de plano crítico e os procedimentos para validar um critério de fadiga multiaxial. O 4º capítulo denominado Amplitude da Tensão Cisalhante apresenta os principais processos para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante em um dado plano. Será apresentado o algoritmo para o método do mínimo círculo (MCC) que será comparado com um algoritmo do método do maior retângulo (MRC) e pioneiramente será utilizado na pesquisa da amplitude da tensão cisalhante em modelos de plano crítico. Os conceitos, as principais funções e exemplos numéricos para melhor entendimento do Algoritmo Genético estão expostos no capítulo 5. O capítulo 6 será dedicado a apresentação dos resultados e por meio de 42 dados experimentais extraídos da literatura, o MRC e o MCC serão analisados e avaliados comparando-os por meio dos resultados da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico e dos índices de erros obtidos pelos critérios de Findley [23] e de Susmel e Lazzarin [30]. Apresentaremos, ainda, um estudo investigativo e exploratório sobre a localização do plano crítico e iremos propor uma alternativa para uma definição do plano crítico. Ao final, realizaremos uma comparação entre o método convencional e o algoritmo genético para determinar o plano crítico. Por último, o capítulo Conclusão conterà resumidamente as conclusões e sugestões para o prosseguimento desse trabalho.

2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

2.1 VETOR TENSÃO

Considere um corpo Ω submetido a carregamentos externos e nesse corpo em um ponto O qualquer, passa-se um plano de corte conforme mostrado na figura 2.1. Deve-se examinar de que maneira estes carregamentos externos influenciam esse ponto no interior desse corpo.

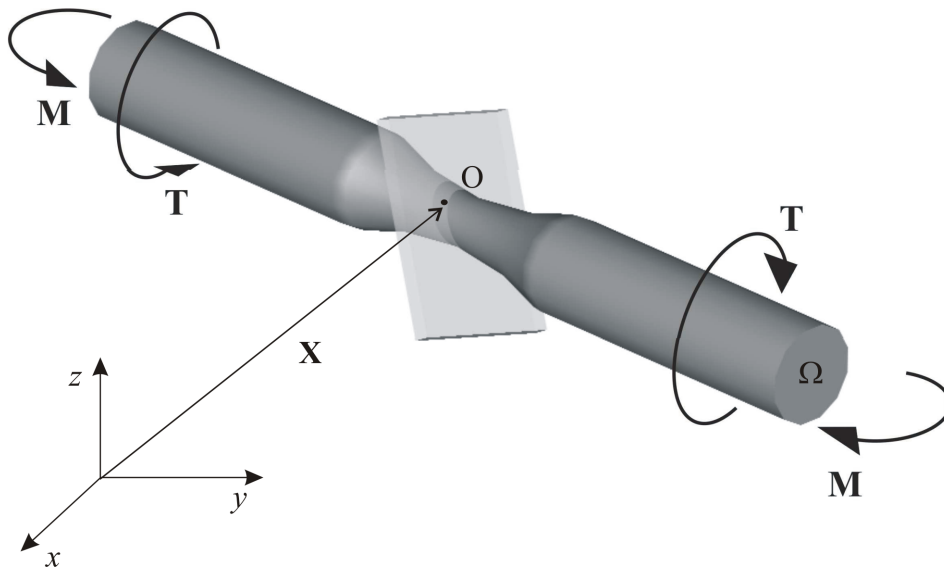


Figura 2.1: Forças externas atuando em um corpo material e um plano de corte passando pelo ponto O

O plano de corte que passa por O é definido pelo seu vetor unitário \mathbf{n} e o vetor tensão \mathbf{t} nesse ponto, como consequência de uma força resultante $\Delta \mathbf{F}$ em um elemento de área ΔA é expresso por:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (2.1)$$

Por conveniência, \mathbf{t} pode ser decomposto em dois vetores: um vetor tensão normal à superfície de corte que será denominado vetor tensão normal e outro paralelo à superfície de corte que será denominado vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$

O vetor tensão normal é definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2.2)$$

O vetor tensão cisalhante é definido como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.3)$$

O vetor tensão \mathbf{t} depende não só do ponto $O \in \Omega$, mas também do plano (de normal \mathbf{n}) sobre o qual atua. Tal fato é conhecido como Hipótese de Cauchy. O modo como o vetor tensão depende de \mathbf{n} é dado pelo *Teorema de Cauchy*:

$$\mathbf{t}(O, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(O)\mathbf{n}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{T}(O)$ é um tensor de segunda ordem, simétrico, conhecido como Tensor Tensão de Cauchy. Se $\mathbf{T}(O)$ é conhecido, o teorema de Cauchy permite determinar vetor tensão \mathbf{t} em qualquer plano normal.

Considerando um sistema de coordenadas ortogonais composto pelos vetores unitários \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y e \mathbf{n}_z , um estado de tensão tridimensional definido pelo Tensor Tensão de Cauchy pode ser representado pela forma matricial:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

onde σ_{ij} , $i = j$ são as componentes normais e σ_{ij} , $i \neq j$ são as componentes cisalhantes do tensor.

Pode-se mostrar, por equilíbrio de momentos no elemento de tensão, que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ de maneira que os tensor tensão \mathbf{T} torna-se simétrico com apenas seis escalares independentes para definir o estado de tensão de um ponto.

2.2 HISTÓRIAS DE CARREGAMENTO

Potencialmente, qualquer carregamento que varia no tempo, pode causar danos por fadiga, embora, as características desses carregamentos possam variar substancialmente. Em máquinas de ensaios rotativas, as histórias de carregamentos, em geral, tendem a ser constantes no tempo e cíclicas com ou sem variação da frequência. Em equipamentos de serviço (aeronaves, tubulações, máquinas em geral), esses carregamentos variam em amplitude e frequência e muitas vezes de forma aleatória. Os fatores significantes em carregamentos cíclicos são a amplitude, os valores médios da tensão (ou deformação) e o número total de ciclos de tensão/deformação. Uma história de tensões é representada de forma geral por:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ & & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,a} \mathbf{g}(\cdot)(\omega t), \\ \sigma'_{ij}(t) &= \bar{\sigma}'_{ij} + \sigma'_{ij,a} \mathbf{g}(\cdot)(\lambda_{ij}\omega t - \beta_{ij}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde:

$\sigma_{ij,a}$ e $\sigma'_{ij,a}$ são as amplitudes das tensões;

$\bar{\sigma}_{ij}$ e $\bar{\sigma}'_{ij}$ são as tensões médias;

λ_{ij} é razão entre as frequências angulares de σ_{ij} e σ'_{ij} ;

β_{ij} é o ângulo de fase entre as tensões σ_{ij} e σ'_{ij} ;

ω é a frequência angular; e

$\mathbf{g}(\cdot)$ são funções periódicas.

As histórias de tensões, ainda, podem classificadas em proporcionais, não proporcionais, síncronas e assíncronas.

Uma história de tensão é proporcional quando suas componentes mantém uma relação fixa ou de proporcionalidade durante toda a evolução dessa história, isto é:

$$\sigma_{ij} = \kappa \sigma'_{ij}, \quad (2.7)$$

onde $\kappa \in \mathcal{R}$ representa o coeficiente ou fator de proporcionalidade.

Carregamentos não proporcionais são aqueles cujas componentes da história de tensões não possuem uma relação de proporcionalidade, ou seja, a relação expressa na equação 2.7 não pode ser atendida. No diagrama de fases no espaço das tensões $\sigma_1(t) \times \sigma_2(t)$ representado pelo gráfico da figura 2.2, há duas possibilidades para as histórias de tensões referentes a um carregamento combinado de tração e torção. O segmento de reta que passa na origem representa uma história de carregamento proporcional, enquanto que a elipse representa um carregamento combinado de tração e torção não proporcional sem tensão média ($\sigma_m = 0$).

A relação entre as frequências angulares λ_{ij} entre as componentes σ_{ij} e σ'_{ij} (equação 2.6) de uma história de tensões é outro fator que pode influenciar a vida a fadiga do material. Uma história de tensões é dita síncrona quando as componentes do tensor das tensões estão na mesma frequência ou seus períodos são iguais e, caso contrário, é chamada de assíncrona. Considerando um estado plano de tensões, a figura 2.3 apresenta algumas possibilidades do diagrama de fases para casos onde se observa assincronismos entre duas componentes das tensões, genéricas, σ e τ .

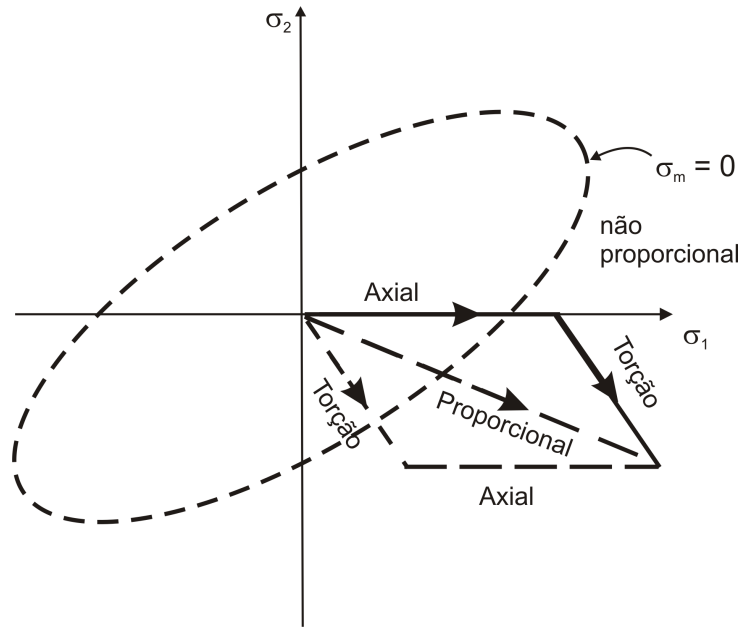


Figura 2.2: Histórias de tensões proporcional e não proporcional para carregamentos combinados de flexão e torção

2.2.1 Estado uniaxial de tensão

Considere um corpo (figura 2.4) submetido a um carregamento externo periódico de maneira que no ponto O, o estado de tensão seja:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx}(t) = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a} \text{sen}(\omega t), \quad (2.8)$$

onde t é o tempo, ω é a velocidade angular, $\bar{\sigma}_{xx}$ e $\sigma_{xx,a}$ são os valores médio e a amplitude da componente da tensão $\sigma_{xx}(t)$, respectivamente.

Muitas aplicações envolvem histórias de tensões uniaxiais e periódicas. Nesses casos, os valores máximo e mínimo das componentes do tensor tensão (Equação 2.8) são definidos por:

$$\sigma_{\max} = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a}, \quad \sigma_{\min} = \bar{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx,a}. \quad (2.9)$$

A diferença entre as tensões é dada por:

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}. \quad (2.10)$$

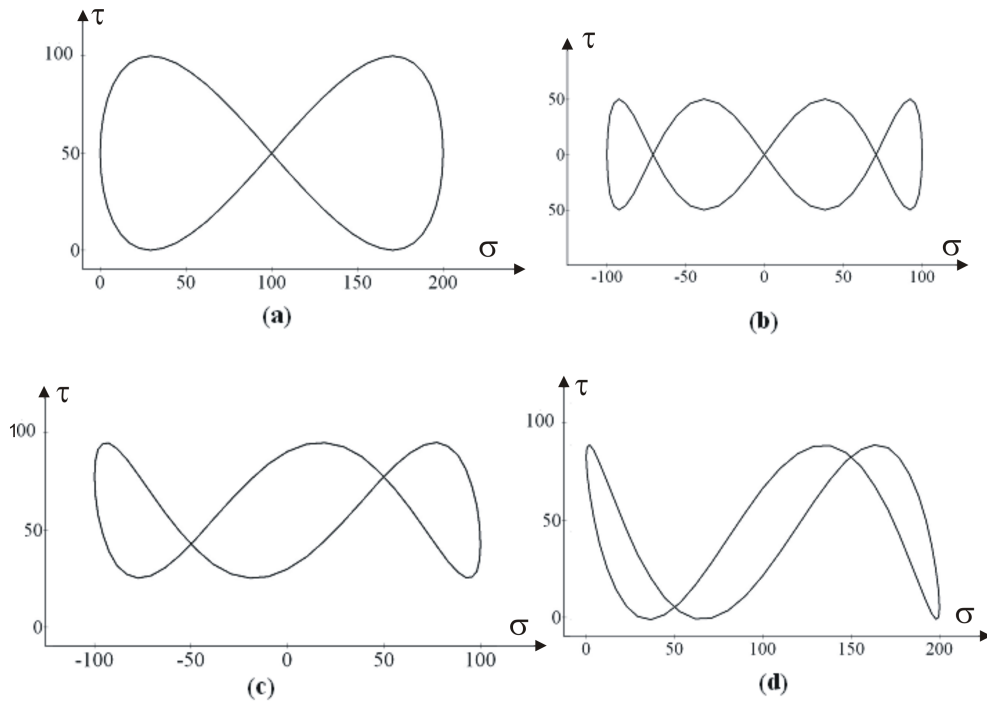


Figura 2.3: Diagramas de fase no espaço das tensões $\sigma(t) \times \tau(t)$ para carregamentos assíncronos

Em problemas de fadiga, a razão de carregamento, R e a razão de amplitude, A são parâmetros importantes que devem ser consideradas na análise da fadiga, expressas por:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{e} \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}. \quad (2.11)$$

A figura 2.5 (a)–(c) apresenta os casos mais comuns para histórias de tensões submetidas a carregamentos cíclicos uniaxiais. Uma história de tensões é denominada completamente alternada quando o valor médio da tensão é zero ($R = -1$), representada na figura 2.5(a). Um carregamento periódico de tensão mínima zero é dito repetido [$R = 0$, figura 2.5(b)]. A figura 2.5(c) caracteriza uma história de tensões flutuantes, onde a razão de fadiga, R ($R \neq 0$ e $R \neq -1$).

No contexto uniaxial, obter a amplitude da tensão e o valor médio da tensão é processo trivial, ou seja, são calculados a partir de:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \quad (2.12)$$

2.2.2 Estado Multiaxial de Tensões

Os componentes de máquinas, veículos e estruturas estão constantemente submetidos a carregamentos do tipo tração, compressão, flexão, rotação, pressão ou a combinação desses. Como resultado, são observados estados complexos de tensão cujos componentes podem variar em direção e magnitude. No projeto de qualquer um desses componentes deve-se assegurar que o

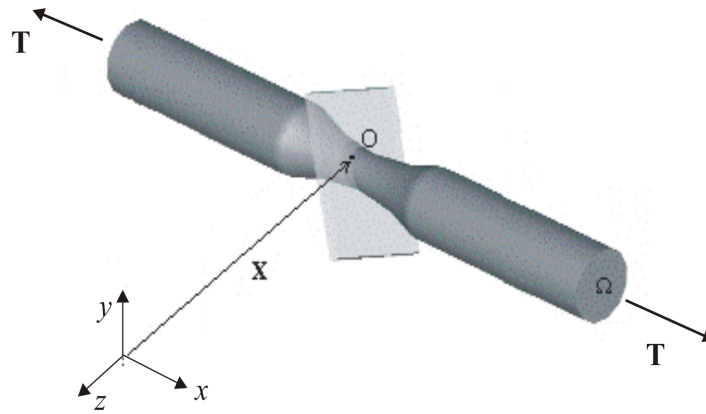


Figura 2.4: Corpo submetido a um estado de tensão uniaxial

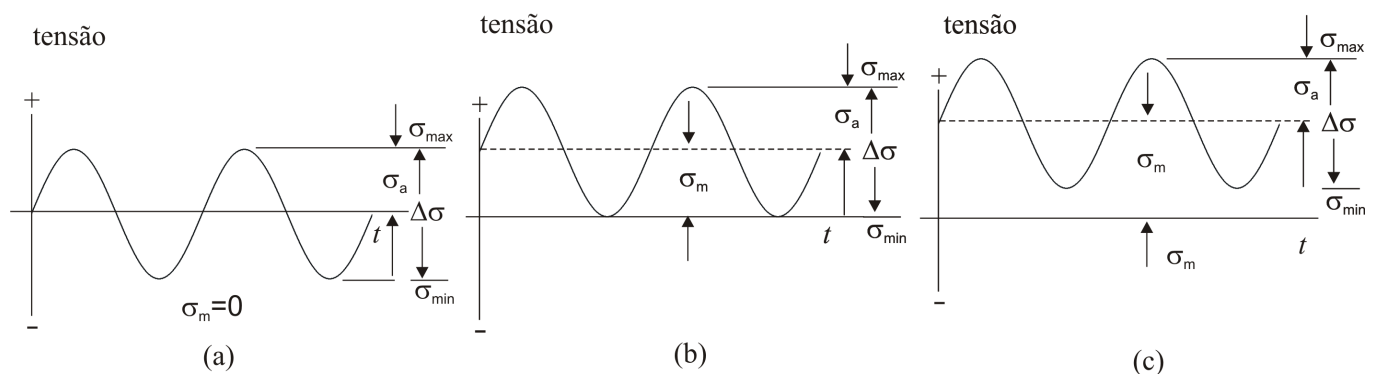


Figura 2.5: Carregamentos cíclicos (a) Totalmente alternado (b) Repetido (c) Flutuante

material não irá falhar, para tal, é necessário identificar os esforços e verificar onde eles são mais severos.

Embora seja mais comum o uso do círculo de Mohr para determinar as componentes da tensão em um estado plano de tensões submetido a carregamentos estáticos, ele pode ser usado para situações mais gerais, até mesmo para investigar carregamentos triaxiais. Porém, para os casos envolvendo histórias de tensões cíclicas, será exposto detalhadamente, formulações generalizadas e mais apropriadas para determinar as componentes de tensão em um plano genérico.

Considere o ponto material O pertencente ao corpo da figura 2.1, de maneira que esse ponto pertença a um plano Δ qualquer referenciado pelo sistema de eixos coordenados $Oxyz$. Em um ponto de interesse de um corpo, a magnitude, o sentido e a direção do vetor tensão depende da orientação do plano que passa por esse ponto. Para caracterizar um plano de corte que passa por esse ponto, basta determinar o vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ normal a esse plano que pode ser referenciado pelas suas coordenadas esféricas θ e ϕ (figura 2.6).

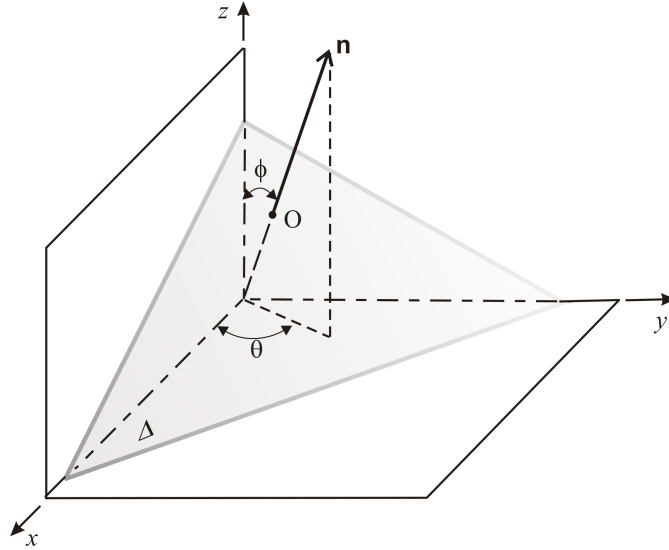


Figura 2.6: Vetor unitário \mathbf{n} referenciado em um sistema de coordenadas $Oxyz$ pela suas coordenadas esféricas θ e ϕ .

De acordo com esse esquema, todos os planos materiais que passam no ponto O podem ser investigados por meio da variação de θ e ϕ entre 0 a 2π , porém, devido a propriedade de simetria observada entre as componentes da tensão, consideraremos a variação de $\phi, \theta \in [0; \pi]$.

Nessas condições, o vetor unitário \mathbf{n} que passa pelo ponto O do plano Δ , no sistema de eixos coordenados $Oxyz$, é definido por:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Em carregamentos cíclicos complexos, para um período, o vetor tensão \mathbf{t} descreve uma curva fechada Φ , de maneira que a relação expressa pela equação 2.2 nos indica que o vetor tensão normal σ que é a projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre o vetor unitário \mathbf{n} no plano Δ , conserva invariante a sua direção, alterando apenas o seu tamanho [figura 2.7(a)].

Para um vetor tensão cíclico, as definições da amplitude e do valor médio da tensão normal σ_a e σ_m podem ser baseadas apenas no valor de $(\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})$, que é um escalar. Em um ciclo da história de carregamento, a amplitude e a média são dadas por:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) - \min_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) \right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) + \min_{t \in P} (\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) \right).$$

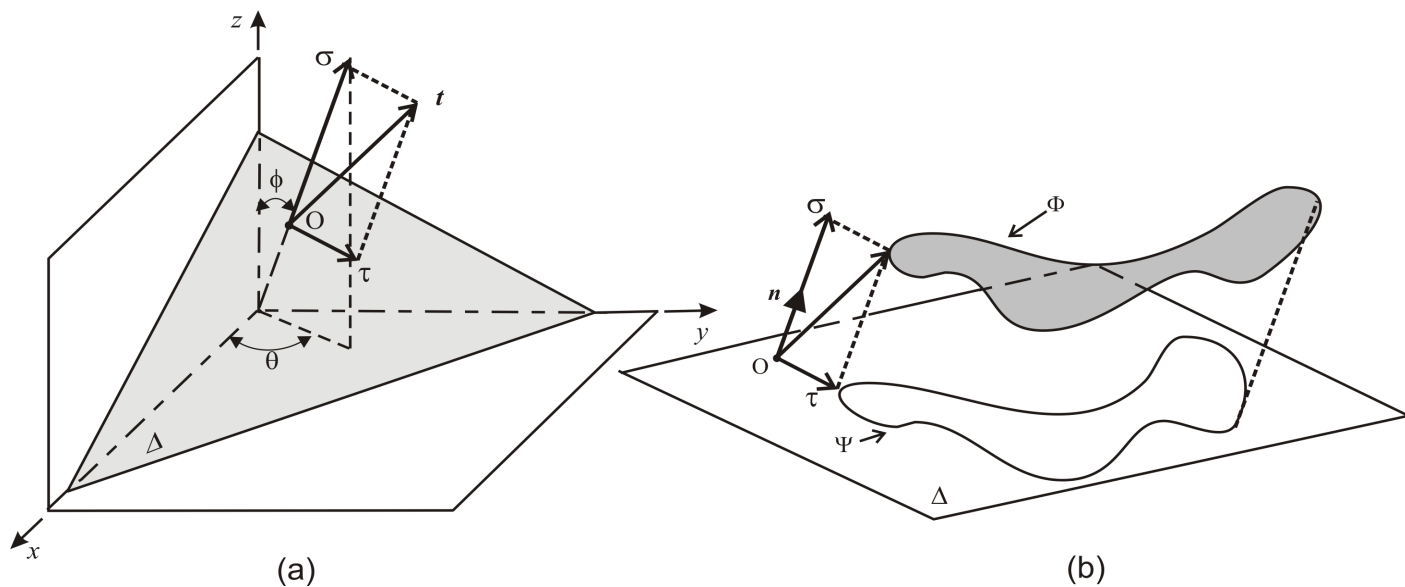


Figura 2.7: (a) Vetor tensão \mathbf{t} e suas componentes normal σ e cisalhante τ referenciados no sistema de coordenadas $Oxyz$. (b) Projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre um plano material Δ para um período de um ciclo de carregamento complexo gerando uma curva fechada Ψ .

Determinar a amplitude e o valor médio da tensão cisalhante é um problema bem mais difícil. A história do vetor de cisalhamento τ formada pelas projeções cíclicas do vetor tensão \mathbf{t} sobre o plano Δ forma a curva projetada Ψ [figura 2.7(b)]. Por consequência, o vetor tensão cisalhante varia em direção, sentido e magnitude, de maneira que para calcular a amplitude e o valor médio da tensão cisalhante é necessário obter a amplitude e o valor médio de uma função vetorial.

A curva fechada Ψ formada pela projeção do vetor tensão \mathbf{t} é diferente em cada plano de corte passando pelo ponto O , o que leva a concluir que a amplitude da tensão cisalhante τ_a depende da orientação do plano em que atua, isto é, ela é função do vetor unitário \mathbf{n} definida pelas suas coordenadas esféricas θ e ϕ [$\tau_a = \tau(\theta, \phi)$].

A amplitude da tensão cisalhante τ_a pode ser calculada de várias maneiras. Como esse cálculo é uma parte de interesse fundamental nesse trabalho, no capítulo 4 será apresentado em detalhes algumas das propostas mais relevantes para esse cálculo, bem como, uma nova proposta desenvolvida nessa tese que será utilizada pioneiramente em modelos baseados em planos críticos.

3 FADIGA

3.1 MECANISMO DA FADIGA

Fadiga é um processo de dano no material de forma progressiva, localizada e permanente que ocorre quando um componente ou estrutura está submetido a ciclos repetidos de tensão e que pode levar a falha sob tensões bem mais baixas do que o limite de resistência de ruptura e, freqüentemente, abaixo da tensão de escoamento do material.

O dano por fadiga é caracterizado pela nucleação, coalescência e crescimento estável de trincas até a fratura do material. Ewing e Humfrey [45] descreveram pela primeira vez o processo de iniciação da trinca. Considere a ilustração esquemática da figura 3.1 como parte da estrutura cristalina de um material submetido a um carregamento de tração periódico $\sigma(t)$ de maneira que a maior tensão cisalhante é observada à 45° em relação à direção axial de um carregamento de tração. Após um certo número de ciclos, deformações plásticas devido à tensão de cisalhamento causam o aparecimento de bandas de escorregamento (linhas no interior dos hexágonos da ilustração).

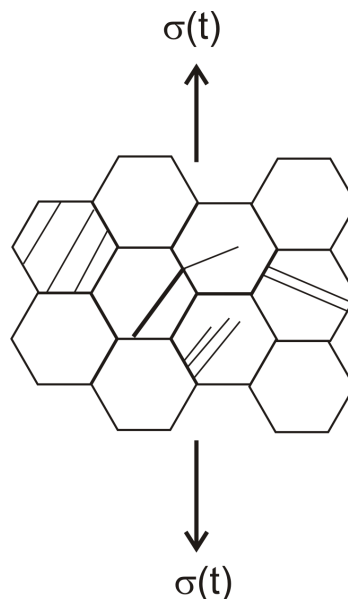


Figura 3.1: Nucleação de trincas no interior dos grãos de parte de uma estrutura cristalina

Os grãos onde os planos de escorregamentos cristalográficos e direções são favoráveis à tensão cisalhante, serão os primeiros a formar bandas de escorregamento. Devido as propriedades anisotrópicas do material, cada grão pode ter diferentes orientações preferenciais quando submetido a tensões. Durante carregamentos cíclicos de carregamento, essas bandas de escorrega-

mento crescem em uma única trinca dominante (linha mais espessa da figura 3.1). Esses deslocamentos, na mesma direção dos planos de escorregamento, surgem devido as tensões cisalhantes cíclicas.

Quando essas tensões ultrapassam um valor máximo suportado pelo material, ocorrem deformações plásticas permanentes nos contornos de grãos. Em razão dos carregamentos repetidos, eventualmente pode surgir bandas de escorregamentos por intrusões ou extrusões. Materiais dotados de grãos menores são mais resistentes à fadiga e inclusões no material podem levar a fadiga precocemente e com um menor nível de tensão. O processo de aparecimento de trinca é essencialmente um fenômeno que aparece na superfície do material.

3.2 FADIGA UNIAXIAL

O estudo da fadiga é realizado em duas fases: até a ocorrência do início da trinca e após, a fratura que é estudada pela mecânica da fratura. Neste trabalho, avaliaremos o comportamento do material considerando que não há nenhuma trinca preexistente e que necessita-se obter um nível da história de tensões que levaria o material a falhar por fadiga. O estudo da fadiga é dividido em fadiga de alto ciclo e fadiga de baixo ciclo.

Considera-se alto ciclo quando o dano por fadiga é observado para tensões abaixo do limite de escoamento do material e, em geral, é observado para um número superior a 10^2 a 10^4 ciclos. São exemplos desse tipo de falha, todos os sistemas rotativos como rodas, eixos, componentes do motor, etc.

Por meio de dados experimentais é possível relacionar o número de ciclos até a falha (N_f) com a amplitude de tensão (σ_a) para um dado material pela seguinte relação:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b. \quad (3.1)$$

onde:

N_f é o número de ciclos até a falha; b expoente de resistência a fadiga; e σ'_f coeficiente de resistência à fadiga.

A relação 3.1, é conhecida como equação de Basquin, é aplicada em vários materiais metálicos de engenharia não entalhados submetidos apenas a histórias de carregamentos uniaxiais de alto ciclo sem tensões médias ($\sigma_{max} = -\sigma_{min}$).

Para os casos unidimensionais de alto ciclo, é possível estudar o comportamento de um material submetido a condições cíclicas de carregamento para diferentes de níveis de tensão por meio de um gráfico. Este gráfico denominado *curva de vida a fadiga* ou curva S-N permite identificar o número de ciclos associado a um nível de tensão que leva o material a falhar (Figura 3.2).

A figura 3.2 descreve uma curva S-N típica com o limite de resistência à fadiga ocorrendo

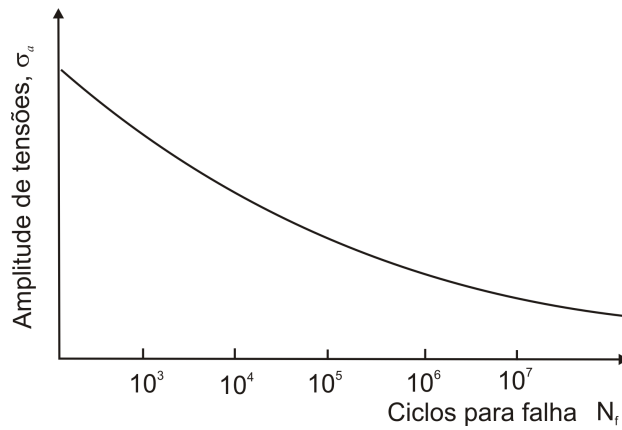


Figura 3.2: Curva S-N esquemática

aproximadamente a 10^6 ciclos. O número de ciclos para vida infinita estabelece um limite denominado resistência à fadiga que é a tensão máxima ou a amplitude da tensão abaixo da qual não será observado o fenômeno da fadiga, mesmo quando o material estiver submetido a um número infinito de ciclos.

Um aspecto fundamental a ser considerado no estudo da fadiga é a influência das tensões médias na determinação da resistência à fadiga. Para uma mesma amplitude de tensões, quanto maior a tensão média normal observada na história de tensões, menor será o número de ciclos necessários para que o material se degrade, isto porque, maior será a tensão máxima para uma mesma amplitude e, conseqüentemente, maior será a sollicitação sobre microtrincas eventualmente orientadas ortogonalmente a estas tensões.

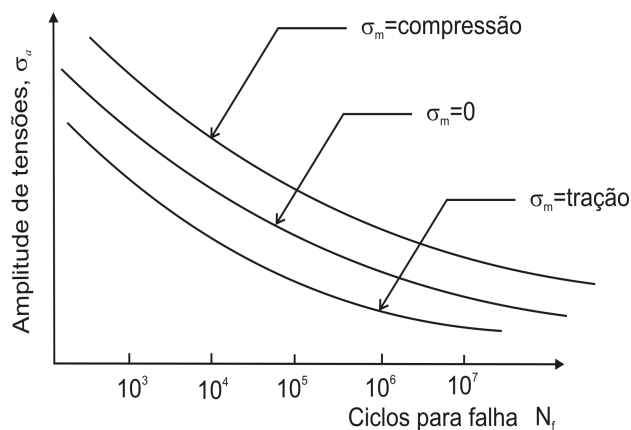


Figura 3.3: Curva S-N esquemática para diferentes tensões médias para uma mesma amplitude de tensão σ_a

Uma modificação da relação de Basquin, equação 3.1, foi proposta por Morrow [46] considerando os efeitos da tensão média na vida à fadiga:

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m)(2N_f)^b. \quad (3.2)$$

O estudo da fadiga de baixo ciclo surgiu na década de 50, pela necessidade de analisar falhas ocasionadas por fadiga por baixo número de ciclos que estavam ocorrendo em reatores nucleares, principalmente quando estes componentes estavam associados à outros tipos de ciclos, como por exemplo, ciclos devido à tensões térmicas. Este critério surgiu a partir das equações desenvolvidas por L. F. Coffin e S. S. Manson [47] ao relacionarem as deformações elásticas e plásticas.

Na fadiga de alto ciclo empregam-se as tensões nominais, em baixo ciclo prioriza-se as deformações locais, onde as histórias de carregamento são aplicadas para obter uma relação de dependência entre *deformações* \times *ciclos*.

A equação utilizada para a determinação da curva de deformação é baseada na amplitude da deformação que pode ser dividida em deformações elástica e plástica:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa}, \quad (3.3)$$

onde a amplitude da deformação elástica é representada por $\varepsilon_{ea} = \sigma_a/E$. A amplitude da deformação plástica ε_{pa} é a medida da largura do laço de histerese da curva tensão-deformação estabilizada (Figura 3.4).

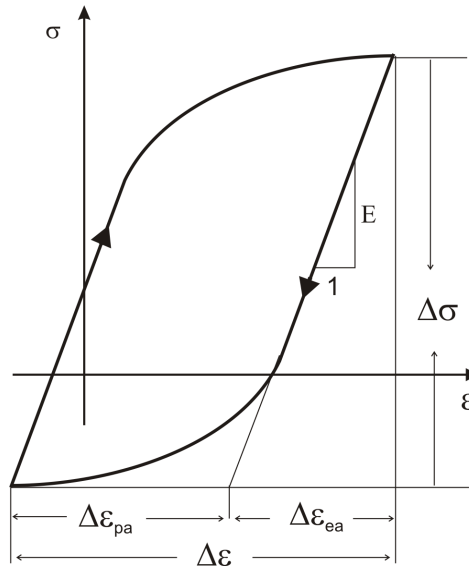


Figura 3.4: Laço de histerese no gráfico tensão-deformação

A parcela elástica do processo de fadiga, ε_{ea} sendo E , o módulo de elasticidade do material pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ea} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b, \quad (3.4)$$

enquanto que a parcela plástica da deformação ε_{pa} foi proposta inicialmente por Coffin e Manson [47], como:

$$\varepsilon_{pa} = \varepsilon'_f(2N_f)^c. \quad (3.5)$$

Os fatores c e ε'_f representam o expoente de ductibilidade e o coeficiente de ductibilidade à fadiga, respectivamente.

A deformação total baseada no diagrama de Wöhler pode ser descrita matematicamente pela superposição das equações que relacionam as parcelas elástica e plástica. Levando em consideração os efeitos da tensão média apresentado por Morrow, a amplitude total de deformação relaciona-se com o número de ciclos N_f para iniciação da trinca, na seguinte forma:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c. \quad (3.6)$$

Segundo Dowling [48], em grande parte dos carregamentos cíclicos em fadiga de baixo ciclo, o expoente b assume valores aproximados de -0.1 e o expoente c fica em torno de -0.6. Por esse motivo a componente plástica possui uma inclinação maior do que a componente elástica (Figura 3.5).

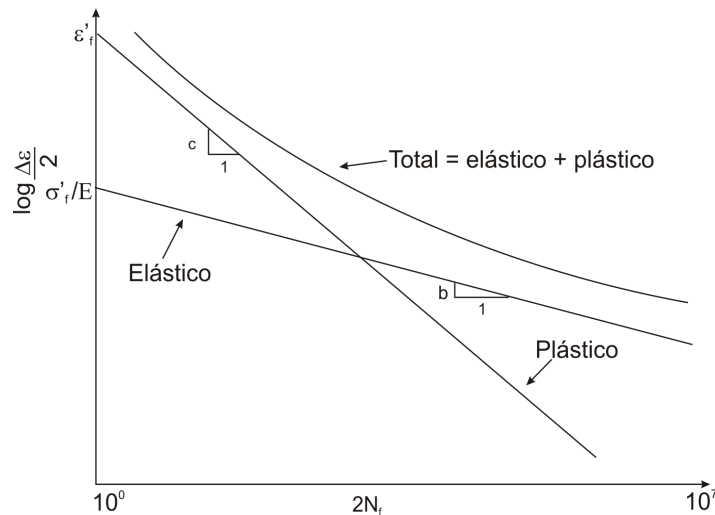


Figura 3.5: Curva deformação-vida

O ponto de intersecção entre as parcelas plástica e elástica torna-se uma fronteira onde a deformação total adotará predominantemente uma das duas formas de deformação. A esquerda desse

ponto tem-se a vida em fadiga afetada pela parcela plástica da deformação apresentando assim baixos ciclos, enquanto pontos a direita indicam a vida em fadiga subordinada às deformações elásticas com pequenas amplitudes e alto número de ciclos.

No caso uniaxial, a metodologia $\varepsilon - N$ considera o comportamento real do material estabelecendo mais precisamente a relação tensão-deformação. Essa abordagem permite analisar situações que envolvem geometrias complicadas, além disso, a presença de deformações plásticas pode envolver situações com níveis elevados de solicitações locais.

3.3 MODELOS DE FADIGA MULTIAXIAL

Menos de 30 anos após Wöhler estabelecer o conceito de segurança para um nível de tensões onde não deveria ocorrer falhas por fadiga, engenheiros começaram a pesquisar questões relativas a carregamentos multiaxiais. Em 1887, Lanza relatou os primeiros resultados de testes para carregamentos envolvendo torção e flexão. Os primeiros modelos para previsão de falhas por fadiga multiaxial era baseados nas deformações elásticas combinadas com tensões aplicadas, na realidade extensões das teorias de escoamento estático adaptadas para tensões combinadas.

Em 1949, Gough [49] em seu artigo afirmou que praticamente todos os mecanismos de engenharia estão submetidos à combinação tensões de flexão e torção, atuando de forma conjunta ou não, com um maior ou menor grau de importância das seguintes variáveis: tensões de flexão alternadas, tensões de torção alternadas, tensões de flexão estática e tensões de torção estática. Em 1955, Sines desenvolveu uma teoria multiaxial que era muito similar a tensões octaédricas (Von Mises) para falhas estáticas, mas incluiu um termo hidrostático.

Os primeiros critérios baseados nas deformações e na energia acumulada surgiram em 1950 quando Coffin e Manson [47] demonstraram, uma relação de energia entre a deformação plástica e a vida a fadiga para regimes de baixo ciclos. Essa descoberta veio de encontro à necessidade de analisar e projetar novas classes de estruturas (vasos de pressão, estruturas aviônicas, etc) cuja estratégia de vida infinita não era adequada. Os modelos baseados nas deformações e na energia acumulada estão associados a fadiga de baixo ciclo onde significantes deformações plásticas podem ocorrer, e portanto, não serão tratados nesse trabalho.

Ao final da década de 70 foram desenvolvidas teorias baseadas em planos críticos, cuja premissa é que a falha ocorre devido a danos desenvolvidos num determinado plano chamado de *plano crítico*. Nesse período ocorre um incremento maior no estudo de fadiga multiaxial, de maneira que muitas teorias extrapolaram o conceito do relacionamento das quatro variáveis para um estado complexo de tensões citado por Gough [49].

Até a presente data, os esforços continuam para o entendimento do problema de fadiga e o desenvolvimento nessa área tem sido fundamental para a compreensão desse fenômeno. Após

mais de um século do continuados estudos em fadiga, pode-se considerar que os critérios para a compreensão fenomenológica e filosófica obedecem a um dos seguintes modelos:

- Modelos empíricos
- Modelos baseados nos invariantes do tensor tensão;
- Modelos baseados em médias tensões e/ou deformações em volume material;
- Modelos baseados na energia acumulada no material;
- Modelos baseados na determinação de planos críticos.

A seguir serão apresentadas as principais características de cada uma dessas diferentes abordagens para o problema de fadiga multiaxial, bem como, apresentado resumidamente um ou mais critérios clássicos para cada modelo.

3.3.1 Modelos empíricos

Os modelos empíricos são frutos de observações experimentais e surgiram como uma tentativa de adaptar a teoria da análise estática e fadiga uniaxial em problemas de fadiga multiaxial. Nessa abordagem, as teorias de falha de Tresca e Von Mises foram aplicadas para análise da fadiga multiaxial e, embora os resultados destas teorias geravam resultados não conservativos, foram utilizadas por conveniência. Para minimizar os problemas provenientes de resultados não conservativos, surgiram algumas tentativas de melhorar esses resultados pela introdução de fatores adicionais que refletissem o comportamento a fadiga de materiais sob a influência de histórias multiaxiais.

Entre os primeiros pesquisadores de fadiga multiaxial, destaca-se Gough que testou vários materiais sob diferentes razões de tensão normal e torção para estabelecer um limite de resistência à fadiga para carregamentos combinados.

Gough

Gough e Pollard [13; 12] propuseram duas formulações para materiais metálicos submetidos a carregamentos combinados em fase de flexão e torção. Para material dúctil, o gráfico da equação descrita na figura 3.6 é conhecida como *Quadrante de Elipse* representada pela seguinte relação:

$$\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{t_a}{t_{-1}}\right)^2 = 1 \quad (3.7)$$

Para materiais frágeis, o arco da elipse no 1º quadrantes é representado pelas curvas formadas pelas linhas pontilhadas da figura 3.6 e a sua equação é formulada da seguinte forma:

$$\left(\frac{t_a}{t_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{t_a}{t_{-1}}\right)^2 \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right) + \left(\frac{t_a}{t_{-1}}\right) \left(2 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right) = 1 \quad (3.8)$$

Nas relações 3.7 e 3.8, f_a e t_a são as amplitudes das tensões devido a flexão e torção e f_{-1} e t_{-1} são os limites de resistência a fadiga para flexão e torção alternadas, respectivamente.

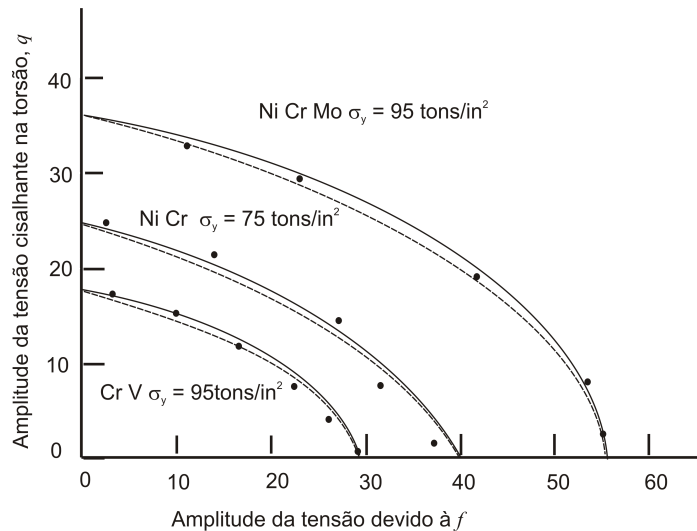


Figura 3.6: Elipse de Gough

A principal motivação de Gough foi estabelecer um processo que pudesse ser aplicado em projetos de eixos veiculares submetidos a carregamento de flexão e torção. As elipses no primeiro quadrante são empíricas e foram obtidas por meio de curvas que melhor se adaptassem aos dados experimentais.

Considerando o ângulo de fase entre carregamentos, Lee [10] modificou a idéia de Gough. Carpinteri e Spagnoli [27] substituíram os parâmetros de Gough pelas tensão normal e máxima amplitude da tensão cisalhante.

3.3.2 Modelos baseados no invariante do tensor tensão

Nessa abordagem, a tensão cisalhante e a tensão normal a um plano crítico são substituídas pelo segundo invariante do tensor desviador e pela pressão hidrostática, respectivamente, ou seja critérios baseados nessa abordagem não fornecem indicação do plano (direção) de iniciação das trinca de fadiga.

Sines

Sines [50] considerou os dados experimentais de Gough para carregamentos de flexão e torção. Após o estudo de vários critérios, ele propôs que a tensão de cisalhamento no plano octaédrico podia ser usado como um critério de dano por fadiga. O significado físico da tensão de cisalhamento octaédrica é que ela expressa a média dos efeitos dos movimentos de escorregamentos das discordâncias em diferentes planos e em diferentes direções para todos os cristais do agregado.

Sines, observando que a torção estática não influencia os limites de fadiga para carregamentos cíclicos de flexão e de torção e, ainda, que tração e compressão estática alteram o limite de fadiga, concluiu que a tensão hidrostática média tem influência na vida a fadiga de um material. Assim, expressou:

O critério proposto por Sines é, talvez, o mais popular dos critérios de fadiga multiaxial. Este critério é escrito como:

$$\sqrt{J_{2a}} + a \sigma_{H,m} \leq b \quad (3.9)$$

onde J_{2a} é o segundo invariante da tensão desviadora; $\sigma_{H,m}$ é a tensão hidrostática média; a, b são parâmetros do material.

Os parâmetros a e b podem ser obtidos por meio de dois testes de torção e flexão alternada e repetida e são expressos por:

$$a = \frac{3t_{-1}}{f_0} - \sqrt{3} \quad \text{e} \quad b = t_{-1} \quad (3.10)$$

onde f_0 é limite de resistência a fadiga a flexão alternada; f_{-1} é limite de resistência a fadiga a flexão repetida; e t_{-1} é limite de resistência a torção repetida.

Crossland

O critério formulado por Crossland [51] difere do critério de Sines somente no que concerne a influência da tensão hidrostática. No critério de fadiga formulado por Crossland, a tensão hidrostática deve ser a máxima e não a média como no critério de Sines:

$$\sqrt{J_{2a}} + a \sigma_{H,max} \leq b \quad (3.11)$$

onde J_{2a} é o segundo invariante da tensão desviadora; $\sigma_{H,m}$ é a tensão hidrostática máxima; e a, b são parâmetros materiais.

Os parâmetros a e b podem ser encontrados por intermédio dos limites de fadiga f_{-1} e t_{-1} e são dados por:

$$a = \frac{3t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \quad \text{e} \quad b = t_{-1} \quad (3.12)$$

onde f_{-1} é limite de resistência a fadiga a flexão repetida; e t_{-1} é limite de resistência a torção repetida.

3.3.3 Modelos baseados em médias tensões e/ou deformações em volume material

Nos casos de alto ciclo, Papadopoulos [52] afirmou que as microdeformações acumuladas ao longo das direções de escorregamento de uma estrutura cristalina de um metal submetido a deformações ocasionadas por carregamentos cíclicos seriam aproximadamente proporcionais à amplitude de uma média das tensões cisalhantes. O modelo do Papadopoulos foi escrito como:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} + a \max_t \langle N \rangle \leq b, \quad (3.13)$$

onde $\langle T_a^2 \rangle$ é a média das quantidades das tensões do volume elementar referente a um ponto em pesquisa, $\max_t \langle N \rangle$ é o maior valor que a tensão normal média $\langle N \rangle$ alcança durante a história de carregamentos. Os parâmetros a e b podem ser obtidos por meio de testes de fadiga uniaxial, como por exemplo limite de fadiga para carregamentos alternados de tração (f_{-1}) e torção (t_{-1}) alternadas.

Este modelo é limitado para materiais cujo valor de t_{-1}/f_{-1} esteja situado entre 0.577 e 0.8. Outra limitação do modelo está no fato que carregamentos não proporcionais não produzem efeitos na equação 3.13 o que é conflitante quando comparado com observações experimentais [21].

Para materiais submetidos a baixos ciclos, Sonsino e Grubisic [53] investigaram o comportamento da fadiga em aços submetidos a carregamentos multiaxiais. Por meio destes testes, observou-se que a diminuição da vida a fadiga sob deformações fora de fase foi causada pela mudança da direção principal de deformação resultante da interação das deformações em todas as direções na superfície do material. Sonsino e Grubisic propuseram que esta interação pode ser obtida pelo cômputo aritmético do valor médio da amplitude da tensão cisalhante média agindo em todos os planos de corte. Entretanto, a proposta de Sonsino e Grubisic está limitada a carregamentos periódicos de maneira que carregamentos mais complexos como por exemplo trian-

gulares, trapezoidais podem causar algum tipo de problema na análise de fadiga multiaxial devido ao fato de serem considerados apenas os valores médios.

3.3.4 Modelos baseados na energia acumulada de material

O método consiste em computar o trabalho plástico realizado em cada ciclo sob um estado multiaxial de tensões. A abordagem da energia tem sido modificada para incluir o trabalho no comportamento elástico que será armazenado como energia potencial. Esta energia interna de deformação pode ser separada em uma parte associada à mudança de volume e a outra à deformação na forma do material. Tensões hidrostáticas estão associadas com a energia de deformação volumétrica e desde que as tensões hidrostáticas por si só, não podem causar a falha (escoamento), a energia remanescente da energia interna de deformação é a base dos critérios baseados nesse modelo.

Entre os modelos de energia, os modelos de Garud [54], Nadai[55] e Boresi [56] contém mais detalhes para critérios baseados nesse modelo.

3.3.5 Modelos baseados na determinação de planos críticos

Um ponto material quando submetido a uma história de tensões pode gerar níveis de amplitudes de tensão (maiores ou menores) em planos de corte distintos. Haverá um plano onde esse nível de tensão será maior e que ocasionará o dano por fadiga. Esse plano é denominado Plano Crítico.

Na abordagem do plano crítico, em nível de grão, o estado de tensão cíclico induz a formação preferencial de bandas de escorregamento persistente em um dado plano. Após um certo número de ciclos, devido aos efeitos de concentração de tensão causados por defeitos no material (intrusões, extrusões), ocorre a iniciação de uma micro-trinca, causada predominantemente por tensões cisalhantes.

No caso de estado multiaxial, deve-se adotar duas hipóteses simplificadoras: (1) as trincas ocorrem no modo transcrystalino nas bandas de escorregamentos persistentes e; (2) o material é homogêneo e isotrópico. Desta forma, sob o ponto de vista estatístico, cada plano material possui a mesma quantidade de grãos, inclusive aquele que experimenta o maior nível de tensão e, portanto, nesse caso será o plano mais frágil dentre todos os planos investigados. Ainda, considerando o regime macroscópico puramente elástico, sugere-se que o processo de iniciação de trincas por fadiga é governado pela máxima amplitude da tensão cisalhante τ_a que ocorre para um estado de tensão.

Segundo Carpinteri [27], critérios de Plano Crítico são caracterizados pela determinação do

dano por fadiga em um plano onde a amplitude ou o valor de alguma das componentes da tensão ou a combinações dessas alcança um máximo. Alternativamente, a localização do plano crítico pode estar relacionada com os eixos principais, desde que seja reconhecida que a mudança da direção dos eixos principais influencia o fenômeno da fadiga.

De acordo com a abordagem do plano crítico, o comportamento da fadiga sob condições de carregamentos multiaxiais deve ser analisado em dois passos. Primeiro, o plano crítico é teoricamente determinado pela maximização da amplitude e/ou de alguns valores escolhidos da tensão. Segundo, a falha por fadiga será determinada pelo emprego das tensões ou dos valores determinados no primeiro passo.

Como essa tese tem foco na abordagem do plano crítico, serão detalhados quatro modelos bastante citados na literatura

Findley

Embora Findley [23],[57],[58] tenha utilizado os testes de Sines, ele propôs um critério baseado na relação linear entre a amplitude da tensão cisalhante, τ_a e da máxima tensão normal $\sigma_{n,max}$:

$$\max(\tau_a + a\sigma_{n,max}) = b, \quad (3.14)$$

onde a e b são parâmetros materiais a serem determinados.

Este modelo difere dos critérios de Gough e Sines pois, nesse critério há necessidade de determinar as tensões que atuam em um determinado plano. Este plano denominado Plano Crítico pode ser definido como o plano material onde se observa o máximo valor para um dano, ou seja, a vida a fadiga é controlada pela combinação de tensões atuando em um plano crítico. A ação combinada de tensões cisalhante e normal é responsável pelo dano por fadiga e o valor máximo da relação 3.14 é usado ao invés do plano onde se observa a máxima amplitude da tensão cisalhante e que pode ser reescrita como:

$$(\theta^c, \phi^c) : \max_{(\theta, \phi)} \{\tau_a(\theta, \phi) + a\sigma_{n,max}(\theta, \phi)\} \quad (3.15)$$

onde o subscrito c em θ e ϕ significa as coordenadas esféricas do plano crítico.

Uma falha por fadiga, ocorrerá se a expressão a seguir não for atendida:

$$\tau_a(\theta, \phi) + a\sigma_{n,max}(\theta, \phi) \leq b \quad (3.16)$$

onde os parâmetros de material a e b são dados por

$$a = \frac{2 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}}}{2\sqrt{\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1}}; \quad b = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \quad (3.17)$$

Dang Van

Considere-se um volume de um corpo onde as tensões existentes sejam constantes e que esse volume contenha um número de grãos com diferentes orientações. Considere-se, também, que a história de tensões nesse volume seja conhecida. Dang Van [59] assumiu que o material falhará por iniciação de uma trinca por fadiga se um estado de tensões microscópicas, em algum grão, e com uma orientação favorável, permanecer em regime cíclico de plasticidade. Dessa forma, o material falhará por fadiga quando no nível mesoscópico, os grãos não conseguem atingir uma adaptação elástica.

Deve-se notar que o estado de tensão microscópico no grão está relacionado com o estado de tensão macroscópico da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}(t) - \boldsymbol{\rho}(t), \quad (3.18)$$

onde \mathbf{A} é um tensor de localização de tensões e $\boldsymbol{\rho}(t)$ é um estado de tensão residual no grão.

Mesmo que as tensões macroscópicas permaneçam no regime elástico, podem ocorrer tensões num regime plástico num determinado grão e em planos de escorregamento devidamente orientados.

Embora se disponha das tensões microscópicas no tempo, não é possível determinar as propriedades de falha para cada grão, ou seja, não se pode precisar quando ocorrerá de fato o início da trinca. A falha ocorrerá de fato, quando:

$$f\{\boldsymbol{\sigma}(t)\} \geq 0, \quad (3.19)$$

onde $f\{\boldsymbol{\sigma}(t)\}$ é uma função apropriada para o estado de tensão local.

Supõe-se que a trinca se inicie nas bandas de deslizamento intergranulares e a tensão cisalhante nesses planos será um parâmetro importante. Supõe-se, ainda, que a iniciação da trinca seja afetada pela tensão hidrostática $\rho(t)$, mas as tensões e deformações nos grãos de orientações críticas devem se estabilizar por um processo de acomodação elástica (*elastic shakedown*), evitando o crescimento da trinca na vizinhança desse grão. Essa hipótese significa que após um determinado número de carregamentos cíclicos, $\rho(t)$ permanece constante de acordo com a teoria de Mandel [60]. Daí, $\rho(t) = \rho^*$. Assim, o critério de Dang Van pode ser expresso como:

$$f\{\boldsymbol{\tau}(t)\} = \tau(t) + a\rho^* - b, \quad (3.20)$$

onde a tensão máxima cisalhante é obtida a partir das tensões principais locais utilizando o critério da máxima tensão de cisalhamento (*critério de Tresca*):

$$\tau(t) = \frac{1}{2}[\sigma_1(t) - \sigma_3(t)]. \quad (3.21)$$

Para identificar os parâmetros a e b consideram-se os limites de fadiga para flexão alternada f_{-1} e para torção alternada t_{-1} . Assim para torção pura:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = t_{-1}. \quad (3.22)$$

Daí, para $\rho^* = 0$ tem-se:

$$\sigma(t) = t_{-1} \Rightarrow b = t_{-1}. \quad (3.23)$$

Para o teste de flexão alternada uniaxial onde $\sigma_a = \sigma_{xx} \sin \omega t$, tem-se:

$$\sigma_{xx} = f_{-1}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{f_{-1}}{2}, \quad (3.24)$$

$$\rho^* = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{f_{-1}}{3} \text{ e } \tau(t) = \frac{f_{-1}}{2}. \quad (3.25)$$

Aplicando 3.23 no critério em $f\{\tau(t)\} = \tau(t) + a\rho^* - b$ obtém-se

$$a = \frac{3t_{-1}}{f_{-1}} - \frac{3}{2}. \quad (3.26)$$

Como os valores correspondentes ao critério de Tresca sempre são positivos, ou seja, serão considerados apenas os valores positivos de $\tau(t)$. Substituindo-se os parâmetros a e b na equação 3.20 que no limite será reescrita como:

$$\tau(t) + \left(\frac{3t_{-1}}{f_{-1}} - \frac{3}{2} \right) \rho(t) - t_{-1} \leq 0. \quad (3.27)$$

A avaliação de tensor hidrostático $\rho(t)$ ou tensor desviador residual da região estabilizada microscópica é a parte crítica deste modelo, pois o domínio dessa região corresponde a uma superfície de uma hipersfera S com centro ρ^* no espaço das tensões desviadoras. Esta propriedade permite estimar a história de tensões locais que pode levar a falha por fadiga sem o conhecimento preciso das equações constitutivas locais. O algoritmo para obter essa quantidade está detalhadamente apresentado em [61].

A relação 3.27 por ser linear permite representar com facilidade o limite de resistência, onde o eixo das abscissas é a tensão hidrostática e das ordenadas, a tensão cisalhante. Uma história de tensões falha quando a representação de $\tau(t) = -a\rho(t) - b$ ultrapassar os limites das linhas D e D' simétricas em relação ao eixo das tensões hidrostáticas. Nessa figura, Γ_1 e Γ_2 representam duas histórias de tensões de maneira que, embora, ambas tenham a mesma amplitude da tensão cisalhante e o mesmo valor médio para a tensão hidrostática, apenas Γ_2 está sujeito a falha por fadiga.

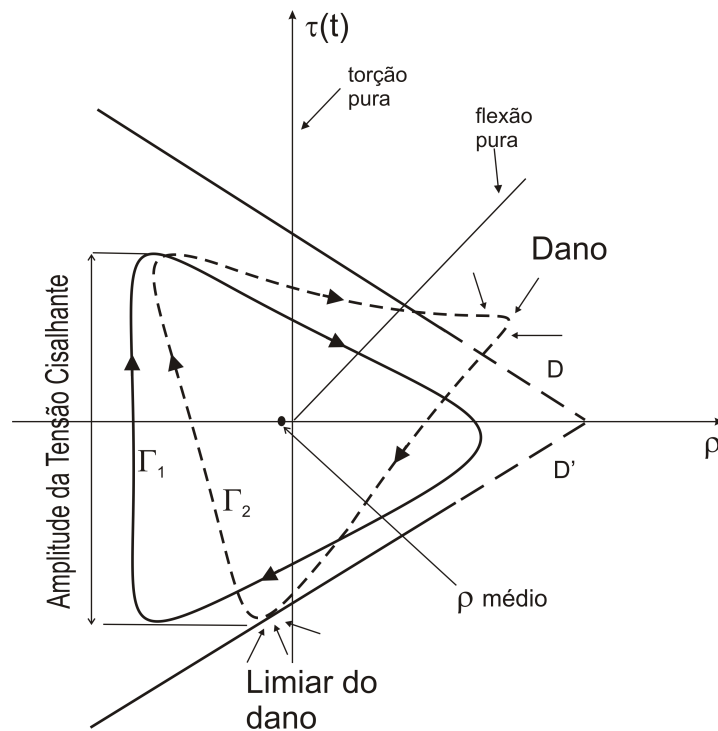


Figura 3.7: Gráfico do critério de Dang Van com o domínio de tolerância para as histórias de carregamento Γ_1 e Γ_2 .

Susmel e Lazzarin

Alguns critérios são baseados na máxima amplitude da tensão cisalhante como são os critérios de McDiarmid [62; 63] e de Susmel e Lazzarin [30]. Considere um plano material qualquer Δ de vetor unitário \mathbf{n} definido por seus ângulos esféricos (ϕ, θ) segundo um sistema de eixos coordenados de referência xyz [Figura 2.7(a)]. Nesse plano, atua um vetor tensão \mathbf{t} de maneira que o vetor tensão normal, σ , coincide com o vetor unitário \mathbf{n} do plano Δ e, sobre a superfície desse plano atua a componente cisalhante, τ . Na figura 2.7(b), a curva fechada Φ é a história do vetor tensão \mathbf{t} para um período, enquanto que a curva fechada Ψ é a projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre o plano Δ .

Considere também que, de alguma forma, saibamos determinar a amplitude da tensão cisa-

lhante τ_a atuando em um plano arbitrário Δ . Obviamente, a curva Ψ descrita por τ é diferente em cada plano. Em conseqüência, a máxima amplitude da tensão cisalhante τ_a depende da orientação do plano onde atua, isto é, é função de \mathbf{n} .

Para um sistema de referência xyz , o plano crítico será localizado pelas suas coordenadas esféricas (ϕ^c, θ^c) que representam a solução de maximização da equação 3.28, ou seja, o plano crítico será definido entre todos os planos de uma dada história de tensões cisalhantes, apresentar a maior amplitude da tensão cisalhante:

$$\tau_a = \max_{\theta, \phi} \{\tau(\theta, \phi)\} = \tau(\phi^c, \theta^c). \quad (3.28)$$

Susmel e Lazzarin [30] propõem um critério baseado nas curvas modificadas de Wöhler para estimar a resistência a fadiga sob condições de carregamentos multiaxiais considerando que o dano por fadiga está baseado na deformação cíclica de um cristal do material constituinte. Essa teoria é a mesma utilizada para determinar as tensões críticas que podem iniciar um trinca por fadiga no Modo I.

Susmel e Lazzarin estabelecem uma relação entre a deformação cisalhante elástica macroscópica e a deformação cisalhante plástica microscópica de maneira que a fadiga microscópica ocorre no plano macroscópico de máxima amplitude cisalhante e o máximo dano é observado na direção da máxima tensão cisalhante.

A teoria da deformação cíclica em um simples cristal sugere que o dano de fadiga em um polí-cristal depende da máxima amplitude da tensão cisalhante e a da componente da tensão normal no plano crítico e é válido para descrever o dano por fadiga apenas para a trinca no Modo I.

O critério de Susmel e Lazzarin denominado Método das Curvas Modificadas de Wöhler estabelece um fator referente a um grau de multiaxialidade da tensão para um determinado ponto do material que pode ser avaliado por meio de um razão de tensão ρ no plano crítico, definido por:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}. \quad (3.29)$$

Considerando as relações de tensões expressas no capítulo 2.2.1 para estado uniaxial, a relação 3.29 pode ser reescrita como:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} = \frac{2}{1-r}, \quad (3.30)$$

onde, r é a razão de carregamento ($r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$). A equação I.1 torna evidente que, para carregamentos uniaxiais, a razão de tensão relativa ao plano crítico aumenta quando a razão de carregamento r aumenta. Em particular, sob condições de carregamento alternado, considerando o valor de r podemos identificar que ρ varia de 1 para casos de carregamentos de tração até infinito quando r se aproxima da unidade, no caso de torção pura. No entanto, Susmel e Lazzarin explicam, para fadiga devido a carregamentos por torção pura no regime de fadiga por alto ciclo, no plano crítico, a amplitude da tensão cisalhante, τ_a , é invariavelmente igual à tensão torsional aplicada $\tau_{xy,a}$ e a máxima tensão normal é zero ($\sigma_{n,max} = 0$) dada pela equação 3.29, daí, sob condições de carregamento para torção, ρ é igual a zero, independentemente de se considerar a razão de carregamento ($\rho = f(r)$ da equação I.1).

Para um corpo submetido a carregamentos multiaxiais cíclicos, o plano onde for observado a maior amplitude da tensão cisalhante será considerado um plano crítico, ou seja, o plano de maior possibilidade de se observar o início de uma trinca e a razão de tensão ρ será definido por:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}(\phi^c, \theta^c). \quad (3.31)$$

Na equação 3.31, a amplitude da tensão cisalhante deve ser obtida por um processo ou algoritmo adequado, enquanto que o máximo valor da tensão normal é usado para levar em consideração a influência da tensão média na resistência a fadiga [64].

Considere um gráfico modificado de Wöhler (Figura 3.8) onde a abscissa corresponde ao número de ciclos para a falha e a ordenada, a amplitude da tensão cisalhante $\tau_a(\phi^c, \theta^c)$ calculada no plano crítico. Usualmente, são usadas duas curvas de fadiga para avaliar um material: uma de tração e outra de torsão em histórias de tensões completamente alternadas. Essas curvas quando esboçadas no gráfico modificado de Wöhler ficam representadas por duas retas: uma axial correspondendo a $\rho = 1$ e outra torsional, onde $\rho = 0$. Em geral, os coeficientes angulares dessas retas são diferentes e não possuem o mesmo valor para o fator $k_\tau(\rho) = 1/\rho = \tan(\alpha(\rho))$. As identidades $\tau_{A,Ref}(\rho = 1)$ e $\tau_{A,Ref}(\rho = 0)$ correspondem a valores de referência para um determinado número de ciclos N_{Ref} . Assim, a previsão de vida por fadiga para um estado de tensões multiaxiais pode ser expressa pela seguinte relação:

$$N_f = N_{Ref} \left[\frac{\tau_{A,Ref}(\rho)}{\tau_a(\phi^c, \theta^c)} \right]^{k_\tau(\rho)}. \quad (3.32)$$

Susmel e Lazzarin [30] assumiram que a curva referente a um carregamento geral que produz um estado de tensão $\tau_{A,Ref}(\rho)$ é linear e, portanto, a relação a seguir pode ser estabelecida:

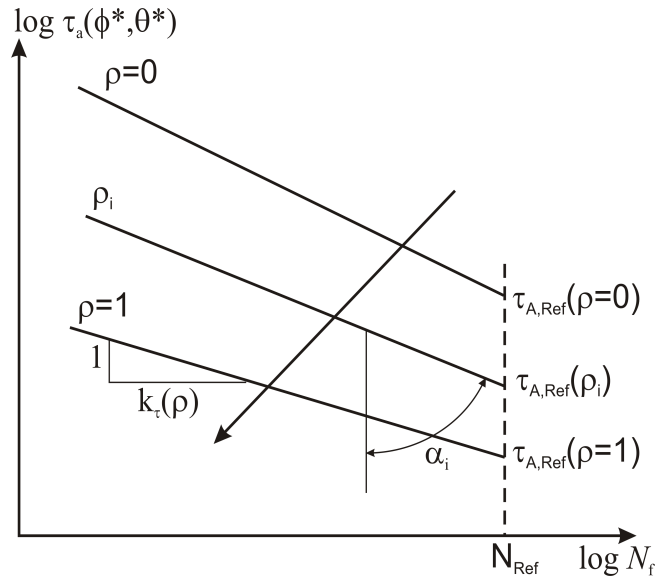


Figura 3.8: Curvas Modificadas de Wöhler para flexão ($\rho = 1$), torção ($\rho = 0$) e uma história de tensões geral (ρ_i)

$$\tau_{A,Ref}(\rho) = \tau_{A,Ref}(\rho = 0) + \rho [\tau_{A,Ref}(\rho = 1) - \tau_{A,Ref}(\rho = 0)]. \quad (3.33)$$

Para o caso de fadiga multiaxial de alto ciclo, deve ser assegurado que:

$$\tau_a(\phi^c, \theta^c) \leq \tau_{A,Ref}(\rho). \quad (3.34)$$

Aplicando as relações 3.34 e I.1 em 3.33 temos:

$$\tau_a(\phi^c, \theta^c) + [\tau_{A,Ref}(\rho = 0) - \tau_{A,Ref}(\rho = 1)] \frac{\sigma_{n,Max}}{\tau_a}(\phi^c, \theta^c) \leq \tau_{A,Ref}(\rho = 0). \quad (3.35)$$

Quando os valores de referência da tensão cisalhante corresponderem aos limites de fadiga, então a equação 3.35 pode ser expressa por:

$$\tau_a(\phi^c, \theta^c) + \left[t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2} \right] \frac{\sigma_{n,Max}}{\tau_a}(\phi^c, \theta^c) \leq t_{-1}, \quad (3.36)$$

onde f_{-1} e t_{-1} são os limites de resistência a fadiga completamente alternada para flexão e torção pura.

Esboçando a equação 3.36 num gráfico τ_a vs. $\sigma_{n,max}$ (Figura 3.9) pode ser observado a partir do valor de $\rho = \sigma_{n,max}/\tau_a = 0$, τ_a diminui a medida que ρ aumenta até um valor limite ρ_{lim}

abaixo do qual essa relação não tem sentido ou os valores encontrados não possuem significados físico e portanto este critério não pode ser aplicado [65]. Este limite depende das propriedades do material e pode ser obtido por:

$$\rho_{lim} = \frac{f_{-1}}{2t_{-1} - f_{-1}}. \quad (3.37)$$

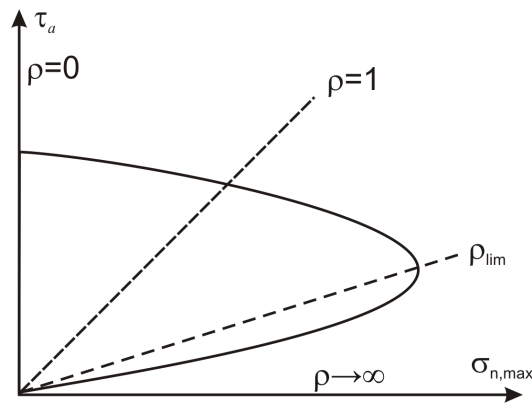


Figura 3.9: Gráfico τ_a vs. $\sigma_{n,max}$ para o critério de Susmel e Lazzarin.

McDiarmid

McDiarmid [62; 63] considera plano crítico aquele onde se observa a maior amplitude da tensão cisalhante, onde a localização das coordenadas que definem a orientação do plano são dadas por

$$(\phi^c, \theta^c) = \arg \left\{ \max_{\phi, \theta} \tau_a(\phi, \theta) \right\}. \quad (3.38)$$

O critério de admissibilidade para ser verificado nesse plano é:

$$\tau_a(\phi^c, \theta^c) + a \sigma_{n,max}(\phi^c, \theta^c) \leq b \quad (3.39)$$

sendo $\sigma_{n,max}$ o valor máximo da tensão normal que ocorre no plano crítico, a e b são parâmetros de material cujos detalhes podem ser obtidos em Papadopoulos [20].

3.4 VALIDAÇÃO DE UM CRITÉRIO DE FADIGA MULTIAXIAL

Para validar um critério é necessário estabelecer um índice de erro que mede o desvio entre a previsão de ocorrência de falha fornecido por um critério de fadiga e a situação limiar fornecida

pelos dados experimentais. De uma forma geral, a grande maioria dos critérios pode ser escrita na forma:

$$f(\tau) + ag(\sigma) \leq b \quad (3.40)$$

onde os parâmetros $f(\tau)$ e $g(\sigma)$ dependem da história de carregamentos enquanto que a e b são constantes que dependem das propriedades de fadiga do material.

A acurácia da previsão de um critério por fadiga multiaxial pode ser quantificada por um índice de erro ($i\%$) definido por:

$$i\% = \frac{f(\tau) + ag(\sigma) - b}{b} \cdot 100 \quad (3.41)$$

Se $i = 0$, a estimativa para a vida a fadiga é exata; se $i < 0$, a previsão é não-conservativa e, finalmente se $i > 0$, a previsão é conservativa. Um índice de erro mede o desvio entre a previsão de ocorrência de falha fornecido por um critério de fadiga e a situação limiar descrita pelos dados experimentais. Assim, quanto o módulo do índice de erro ($|i|$) estiver mais próximo de zero, melhor será a acurácia, já que seus desvios são menores. Um índice de erro com valor positivo ($i > 0$) significa que o limite de resistência a fadiga já foi ultrapassado, ao contrário, ($i < 0$), o limite ainda não foi alcançado, de maneira que, em tese, pode-se aumentar o carregamento ou minimizar as dimensões do equipamento.

Em geral, um grau de acurácia de qualquer critério de fadiga é analisado tendo por base centenas de testes experimentais disponíveis na literatura. Em particular, nesse trabalho serão considerados 42 dados experimentais subdivididos em quatro séries distintas e que serão convenientemente apresentados no capítulo 6.

4 AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL

4.1 INTRODUÇÃO

Nesses últimos anos, entre os critérios de fadiga multiaxial para alto ciclo, aqueles baseados em plano crítico têm crescido de importância. Essas abordagens assumem que o dano por fadiga em um determinado ponto do material ou em um plano qualquer passando por esse ponto é dado pela medida da amplitude da tensão agindo tangencialmente a esse plano com a combinação (linear ou não linear) da tensão normal.

Durante um ciclo de carregamento, a tensão normal que age em um plano material não muda de direção, isto é, permanece perpendicular ao plano, independente se o carregamento é proporcional ou não. Em consequência, para calcular a amplitude, o valor médio ou o valor máximo da tensão normal, basta considerar o seu valor algébrico, pois a variação em função do tempo é uma grandeza escalar.

Por outro lado, a tensão tangencial projetada no plano em função do tempo, não varia apenas na magnitude, mas também na direção e sentido. Por este fato, avaliar a amplitude da tensão cisalhante τ_a é um problema complexo cuja solução não é trivial.

Várias propostas surgiram para calcular a amplitude da tensão projetada no plano de corte, algumas com inconsistências, outras com problemas de não unicidade ou de difícil implementação. No momento, o processo do mínimo círculo que circunscreve uma história de tensões projetada no plano material é a mais utilizada. Nesse capítulo, se fará uma revisão dos principais métodos utilizados para o cálculo de τ_a . Mais ainda, será proposto um novo processo como alternativa a outros existentes, para calcular a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico baseado no método do Maior Envelope Prismático. Esse método foi desenvolvido no âmbito do Grupo de Mecânica dos Materiais da Universidade de Brasília para o cálculo de uma amplitude da tensão cisalhante equivalente no espaço desviador. Nessa tese, extender-se-á esse conceito para o cálculo de τ_a em um plano de corte. Até onde o autor tem conhecimento, essa será a primeira tentativa de se obter τ_a por metodologias distintas da Máxima Corda ou do Mínimo Círculo Circunscrito no contexto de plano crítico.

4.2 CONCEITOS ENVOLVENDO A AMPLITUDE DA TENSÃO CISA- LHANTE

Considere uma estrutura submetida a um carregamento periódico onde para um dado ponto material observa-se um tensor tensão $\mathbf{T}(O, t)$.

Um plano material Δ passando através de um ponto O é identificado pelo seu vetor unitário \mathbf{n} conforme a figura 2.9. O *vetor tensão normal* em um instante t é a projeção do vetor tensão $\mathbf{T}(O, t) \mathbf{n}$ sobre \mathbf{n} , conseqüentemente é um vetor que atua perpendicularmente ao plano Δ :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\mathbf{T}(t)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (4.1)$$

Claramente, a amplitude e o valor médio de $\sigma(t)$ são obtidos a partir de:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} \sigma(t) - \min_{t \in P} \sigma(t) \right), \quad (4.2)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in P} \sigma(t) + \min_{t \in P} \sigma(t) \right). \quad (4.3)$$

O *vetor tensão cisalhante* $\boldsymbol{\tau}$ é a projeção do tensor tensão $\mathbf{T}(O, t)\mathbf{n}$ sobre o plano Δ :

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{n} - (\mathbf{T}(t)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (4.4)$$

Da relação 4.4 pode-se identificar que $\boldsymbol{\tau}(t)$ atua tangencialmente ao plano Δ , mas não necessariamente sempre na mesma direção, pois devido as propriedades das histórias de tensões periódicas, o vetor tensão cisalhante quando projetado sobre um plano descreve uma curva fechada Ψ (Figura 4.1).

A definição da amplitude e o valor médio da tensão cisalhante são problemas triviais para carregamentos proporcionais. Considere que uma história de tensões pode ser expressa por:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_a f(t) + \mathbf{T}_m, \quad \mathbf{T}_m = k \mathbf{T}_a. \quad (4.5)$$

onde \mathbf{T}_a é um tensor de tensões constante, $f(t)$ é uma função harmônica cujo domínio pertence ao intervalo $[-1, 1]$ simétrica, isto é, de média zero, i.e $\int_T f(t)dt = 0$ e k é um escalar. Quando \mathbf{T}_m e \mathbf{T}_a não são proporcionais, isto é, $\mathbf{T}_m \neq k \mathbf{T}_a$, então surge um carregamento particular denominado carregamento afim, expresso pela seguinte relação:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_a f(t) + \mathbf{T}_m, \quad \mathbf{T}_m \neq k \mathbf{T}_a. \quad (4.6)$$

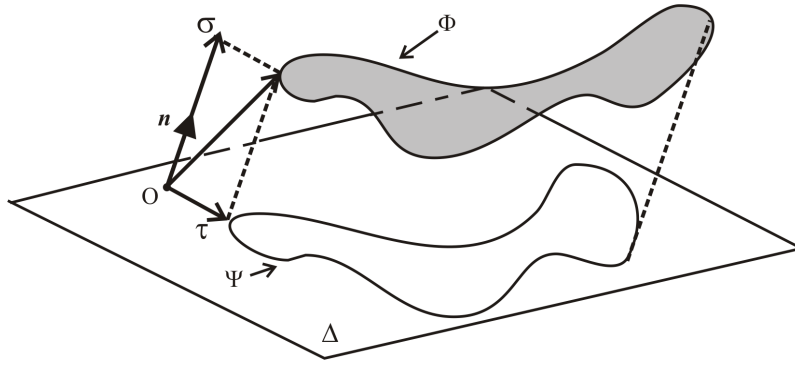


Figura 4.1: Projeção do vetor tensão \mathbf{t} sobre um plano material Δ para um período de um ciclo de carregamento complexo gerando uma curva fechada Ψ .

Para carregamentos proporcionais, aplicando a equação 4.5 na relação 4.4, podemos expressar o vetor tensão cisalhante por:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = [f(t) + k] [\mathbf{T}_a \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_a \mathbf{n}) \mathbf{n}]. \quad (4.7)$$

O primeiro fator do lado direito da relação 4.7 é um escalar e o segundo, um vetor cuja direção é constante. Em consequência, nesse caso, o vetor tensão cisalhante não muda de direção e a curva fechada Ψ [Figura 2.7(b)] que é a projeção do vetor tensão cisalhante no plano de corte fica representado por um segmento de reta passando pelo ponto da origem das tensões. Assim, em carregamentos proporcionais para um dado plano de corte, a amplitude e o valor médio da tensão cisalhante ficam determinados a partir de:

$$\tau_a = \|\mathbf{T}_a \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_a \mathbf{n}) \mathbf{n}\| \quad (4.8)$$

$$\tau_m = k \|\mathbf{T}_a \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_a \mathbf{n}) \mathbf{n}\| \quad (4.9)$$

Em todos os demais casos de não proporcionalidade, a medida da amplitude da tensão cisalhante projetada no plano material Δ é obtida por meio de procedimentos ou métodos particulares.

No início dos estudos de fadiga multiaxial, pesquisadores propuseram meios para obter a amplitude da tensão cisalhante para casos gerais. Em particular, iremos analisar e apresentar resumidamente quatro abordagens e propor nesse trabalho, um método alternativo para obter essa amplitude sendo que o desempenho e a avaliação desse novo procedimento serão analisados no capítulo 6 e comparados com a abordagem clássica do método do menor círculo.

4.3 MÉTODOS PARA DETERMINAR A MÁXIMA TENSÃO CISALHANTE

As primeiras tentativas para avaliar a máxima amplitude da tensão cisalhante em histórias de tensões sob condições de carregamentos biaxiais e não proporcionais foram conduzidas por Little [66; 67] e Little e Little[68]. Esses pesquisadores avaliaram a máxima amplitude da tensão cisalhante para carregamentos de flexão e torção totalmente alternados, síncronos e fora de fase usando uma combinação de procedimentos gráficos e analíticos. Os trabalhos desses autores permaneceram limitados as avaliações particulares de τ_a .

Mais tarde surgiram métodos mais gerais para o cômputo da amplitude e do valor médio da tensão cisalhante para histórias de tensões complexas, entre as quais destacam-se as seguintes:

- Método da maior corda;
- Método da maior projeção;
- Método do mínimo círculo circunscrito; e
- Método da mínima elipse.

Serão apresentados os conceitos fundamentais dos métodos acima citados, bem como, toda a formulação teórica e prática do método do maior retângulo que foi desenvolvido por Mamiya & Araújo [69] para o cálculo de τ_a no espaço desviador e está sendo utilizado pela primeira vez em modelos de plano crítico. Por meio dos resultados de quatro exemplos numéricos iremos comparar os resultados obtidos pelo mínimo círculo e pelo novo método.

4.3.1 Método da maior projeção

A primeira tentativa para obter a amplitude da tensão cisalhante e do seu valor médio foi idealizado por Grubisic e Simbürger [35]. O método consiste em projetar a história de tensões cisalhantes formada pela curva fechada Ψ em segmentos de reta sobre o plano de corte Δ tendo por origem o ponto de aplicação O sobre esse plano (Figura 4.2). A amplitude da tensão cisalhante corresponde a metade da medida do maior segmento de todas as projeções de Ψ sobre o plano Δ e a tensão média é definida pelo módulo do vetor que parte da origem O até o ponto médio da maior projeção.

Note que na figura 4.2(a), a maior projeção é dada pelo segmento de reta $A'Z'$, daí $\tau_a = A'Z'/2$. O valor médio da tensão cisalhante é dado pelo segmento OM' , onde M' é o ponto médio da maior projeção da história das tensões cisalhantes Ψ , i.e. $\tau_m = OM'$.

Este método não é adequado para todos os tipos de histórias de tensão, como a situação a seguir apresentada. Considere a história de tensão cisalhantes sobre o plano Δ descrevendo

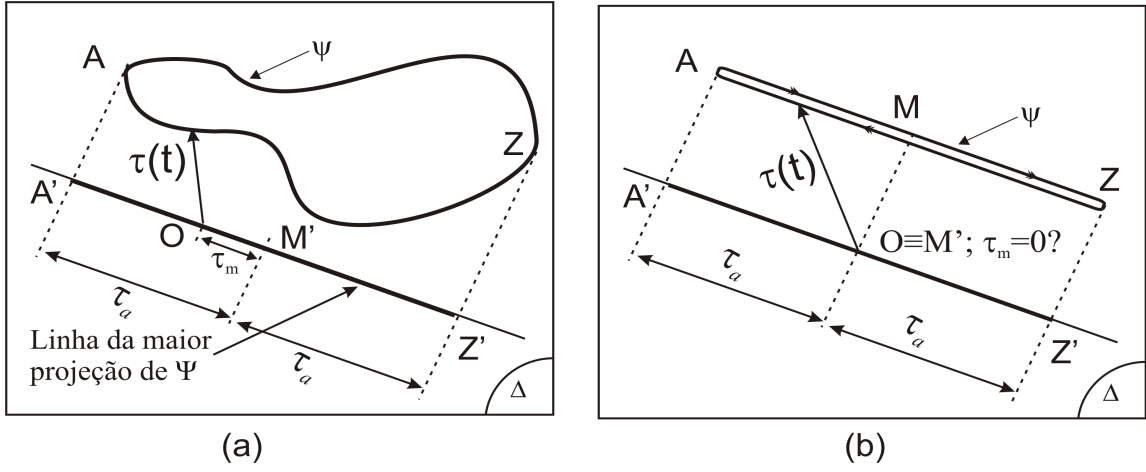


Figura 4.2: (a) Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio de acordo com o método da maior projeção (b) inconsistência do método da maior projeção.

o percurso $A \rightarrow Z \rightarrow A$ que na realidade é o segmento de reta AZ [Figura 4.2(b)]. Este segmento AZ está localizado de maneira que a origem do vetor tensão cisalhante O coincide com o ponto médio da maior projeção da história da tensão cisalhante. De acordo com a proposta da maior projeção, a amplitude da tensão cisalhante equivale a metade do segmento $A'Z'$, isto é, $\tau_a = A'Z'/2 = AZ/2$ e o valor médio da tensão cisalhante, dado pela medida OM' é zero, $\tau_m = 0$, o que seria uma inconsistência, pois o valor da tensão média deveria ser $\tau_m = OM$. Segundo Papadopoulos [38], existem ainda outras situações onde essa proposta leva a resultados ambíguos.

4.3.2 Método da maior corda

A segunda proposta para obter a amplitude da tensão cisalhante é baseada no conceito da maior corda da curva fechada Ψ e foi proposto por Lemaitre e Chaboche [36], Fuchs e Stephens [37]. Este método consiste em obter a maior corda de uma curva fechada, isto é, o maior segmento entre dois pontos pertencentes à curva Ψ . O ponto médio do segmento dessa reta identifica o vetor tensão médio de maneira que o módulo desse vetor corresponde à τ_m , enquanto que a metade da distância da maior corda corresponde a amplitude da tensão cisalhante [Figura 4.3(a)].

A amplitude de tensão cisalhante τ_a é dada por:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t_i \in P} \left\{ \max_{t_j \in P} \|\tau(t_i) - \tau(t_j)\| \right\}. \quad (4.10)$$

onde, o símbolo $\|\cdot\|$ denota a norma de um vetor.

Se o t_i^* e t_j^* forem os instantes de tempo que correspondem à solução do processo de dupla

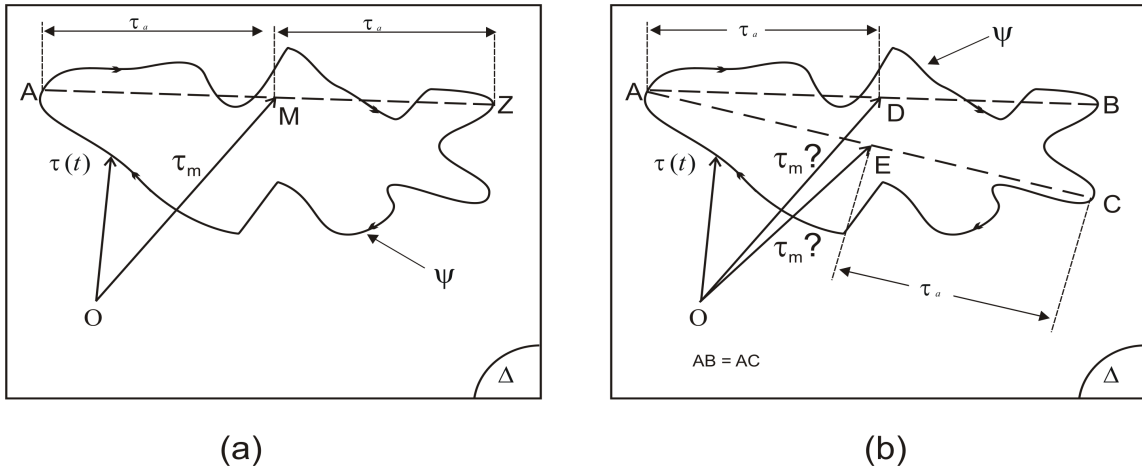


Figura 4.3: (a) Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio de acordo com o método da maior corda (b) inconsistência do método da maior corda.

maximização, então o valor médio τ_m poderia ser definido como o comprimento do vetor que aponta para o meio da corda definido por $\tau(t_i^*)$ e $\tau(t_j^*)$ isto é:

$$\tau_m = \frac{1}{2} \|\tau(t_i^*) + \tau(t_j^*)\|. \quad (4.11)$$

Entretanto, as definições constantes nas equações 4.10 e 4.11 podem conduzir à resultados ambíguos, porque o problema de dupla maximização admite mais de uma solução (isto é, mais de um par t_i^* e t_j^*). Isto significa que, não há unicidade na determinação do valor médio da tensão cisalhante τ_m .

Para exemplificar este caso, vamos admitir que a história das tensões cisalhante projetadas sobre o plano Δ é a curva Ψ mostrada na figura 4.3(b) onde observamos que essa história admite duas cordas de iguais dimensões máximas representadas pelos segmentos de reta AB e AC . Embora este fato não venha comprometer o valor de τ_a que é dado por $\tau_a = \overline{AB}/2 = \overline{AC}/2$, o valor médio da tensão não pode ser obtido de modo inequívoco. Se os pontos D e E são os pontos médios de AB e AC , então qual dos segmentos OD ou OE deveria ser utilizado para calcular o valor médio da tensão cisalhante τ_m ?

4.3.3 Método do mínimo círculo circunscrito

Vamos assumir que para uma dada história de tensões cisalhante Ψ projetada em um plano Δ de alguma maneira o vetor tensão médio está localizado sobre esse plano conforme a figura 4.4. Assim, a amplitude da tensão cisalhante é igual à dimensão do segmento que une o vetor tensão médio à maior distância de um ponto da curva Ψ .

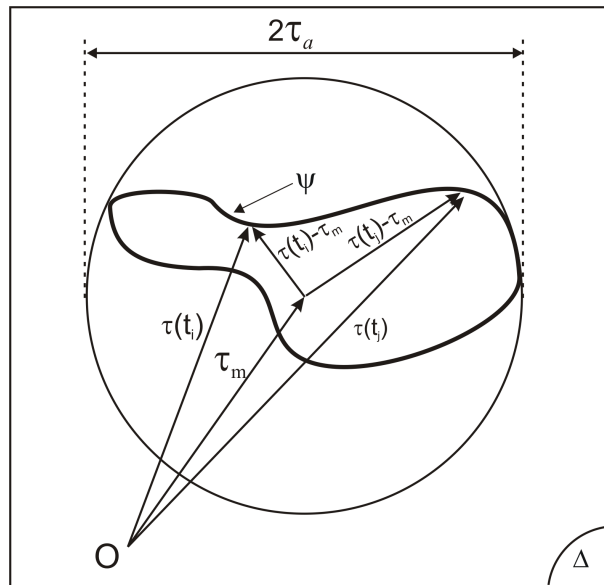


Figura 4.4: Definição da amplitude da tensão cisalhante e valor médio para o método do mínimo círculo.

Para tal, deve-se localizar o vetor τ_m que aponta para o centro desse círculo que circunscrive a curva Ψ e a amplitude da tensão cisalhante será igual ao raio desse círculo. Este método é denominado método do mínimo círculo circunscrito (MCC).

Em aplicações práticas de critérios de fadiga, a expressão analítica da história de tensões geralmente é desconhecida. Ao invés disso, a história de tensões é discretizada numa seqüência de componentes da tensão cisalhante no plano de corte e a curva contínua Ψ fica aproximada por uma curva poligonal cujos vértices formam um conjunto de m pontos. O problema para determinar o MCC da curva Ψ é equivalente a um problema de geometria para obter um menor círculo que circunscrive todos os pontos de um polígono de m vértices.

Existem inúmeras abordagens para obter esse mínimo círculo, dentro das quais as seguintes se destacam:

- Algoritmo de combinação de pontos [70];
- Algoritmos aleatórios [71];
- Algoritmo incremental [34; 38]; e
- Algoritmos pré-definidos em pacotes comerciais [72].

Considerando que o algoritmo incremental é o mais utilizado e amplamente aceito para obter a amplitude e a média da tensão cisalhante, nesse trabalho iremos apresentá-lo e implementá-lo numericamente com o propósito de compará-lo com o método a ser apresentado nesse trabalho.

Os demais algoritmos para o MCC não serão apresentados, mas estão à disposição do leitor na referência [73].

O algoritmo incremental foi proposto inicialmente por Dang Van *et al.* [33] inspirado nos métodos empregados na teoria da plasticidade. Papadopoulos [34], também, apresentou com sucesso o método do mínimo círculo com algoritmo incremental para obter os valores médio e da amplitude da tensão cisalhante.

Para entender como funciona este método, inicialmente, considere um plano Δ definido pelo seu vetor unitário \mathbf{n} e obtenha as componentes do vetor tensão cisalhante (Equação 4.4) sobre esse plano para um número finito de instantes $t_i, i = 1, 2, \dots, m$ do carregamento periódico. Desta forma, o conjunto $\tau(t_i), i = 1, 2, \dots, m$ formado pela curva Ψ descrita por τ sobre Δ fica discretizado por um polígono Pol de m vértices. Após esta discretização, o problema fica restrito em obter o menor círculo que circunscreve essa curva poligonal composta por m vértices que correspondem ao conjunto das componentes do vetor cisalhante, $\tau(t_i), i = 1, 2, \dots, m$. Nesse contexto, pode-se obter infinitos círculos circunscritos à história da tensão cisalhante discretizada no plano Δ , porém, o menor dos círculos será único [74]. O centro desse círculo determina o valor da tensão média τ_m no plano Δ . Matematicamente, o problema em obter τ_m é formulado por:

$$\tau_m = \min_w \left\{ \max_{t_i} \|\tau(t_i) - w\| \right\}, \quad (4.12)$$

onde $\tau(t_i)$ é um elemento do conjunto de m vértices de Pol e w é um ponto de Δ .

A relação *min-max* dada pela equação 4.12 é obtida da seguinte maneira: assuma que inicialmente, escolhe-se arbitrariamente um ponto w' pertencente ao plano Δ como um candidato para ser o centro do mínimo círculo que circunscreve a curva poligonal Pol (Figura 4.5).

Ainda assim, o número de círculos que contém essa curva com centro em w' é infinito, mas apenas um deles, o menor dos círculos conterá todos os vértices da curva poligonal Pol . O raio desse círculo é igual a mais longa corda entre todos os segmentos que une w' a todos os vértices de Pol . Para um dado w' , o raio R' do menor círculo com centro em w' e circunscrito a Pol é igual a:

$$R' = \max_{t_i} \|\tau(t_i) - w'\|. \quad (4.13)$$

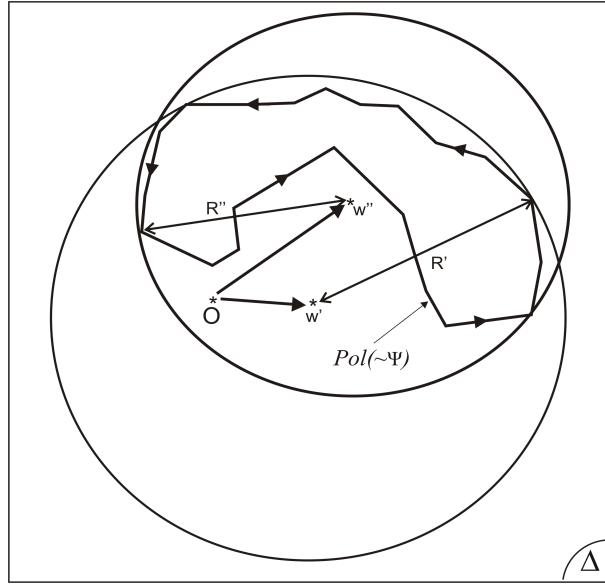


Figura 4.5: Gráfico para o problema de *min-max* para o método do mínimo círculo.

Uma vez determinado o centro τ_m , a amplitude da tensão cisalhante no plano de corte é obtida por:

$$\tau_a = \max_{t_i} \|\tau(t_i) - \tau_m\|. \quad (4.14)$$

A parte da minimização pode ser entendida da seguinte forma: após determinado o menor círculo circunscrito centrado no candidato w' , pode-se escolher um outro candidato, digamos w'' para determinar um outro círculo de raio R'' , menor que o anterior mas também circunscrito à curva poligonal Pol . Desta forma, obtendo novos w procura-se entre todos os candidatos, o centro de um círculo que fornece o menor raio. Em outras palavras, procura-se minimizar a quantidade $\max_{t_i} \|\tau(t_i) - w\|$ variando w .

A solução do problema de *min-max* dada pela equação 4.12 está baseada no teorema estabelecido e convenientemente demonstrado em [34], expresso como:

Teorema 1: *o mínimo círculo circunscrito a uma polígono Pol é dado por qualquer um dos círculos cujo diâmetro é igual ao segmento de reta que une dois vértices qualquer de Pol ou um dos círculos circunscritos para todos os triângulos gerados a partir de três vértices de pol .*

O algoritmo para achar o mínimo círculo circunscrito ao polígono Pol em um plano qualquer é sintetizado da integralmente na próxima página.

Algoritmo 4.1: Algoritmo Incremental (MCC)

InícioAlgoritmo

$\tau_a \leftarrow 0$ /* Inicialização da amplitude da tensão cisalhante */

Para cada $\theta_r, \phi_s, r = 1, \dots, m, s = 1, \dots, v$ **faça**

$\tau_k \leftarrow \tau(t_k, \theta_i, \phi_j), k = 1, \dots, n$ /* Discretização da história de tensões cisalhantes em um período */

$\rho_k \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$ /* Determinação inicial de um centro do círculo (ρ). A escolha natural é a média

de todos os vértices referentes à discretização da história das tensões cisalhantes no plano de corte */

$R_0 \leftarrow$ Valor Inicial /* valor inicial do raio do círculo, cujo valor deve ser extremamente pequeno*/

Para cada τ_k **faça**

$D_k \leftarrow \|\tau_k - \rho_{k-1}\|$ /* Distância do centro do círculo ρ_{k-1} até os pontos τ_k */

$P_k \leftarrow D_k - R_{k-1}$ /* valor referente o valor de quanto P_i estão fora do círculo*/

Se $P_k \leq tol$

$R_k \leftarrow R_{k-1}$ /* Raio do círculo permanece inalterado*/

$\rho_k \leftarrow \rho_{k-1}$ /* Localização do centro do círculo permanece inalterado*/

senão

$R_k \leftarrow R_{k-1} + \chi P_k$ /* Incremento de um valor χ no raio do círculo anterior */

$\rho_k \leftarrow \rho_{k-1} + (D_k - R_k) \frac{\tau_k - \rho_{k-1}}{D_k}$ /* Mudança da localização do centro do círculo */

FimSe

Até $D_k \leq tol$ /* tolerância máxima de quanto P_i estão fora do círculo */

Se $R_k > \tau_a$

$\tau_a \leftarrow R_k$ /* Armazena o maior valor da amplitude da tensão cisalhante*/

FimSe

Até a avaliação de todos os planos θ_r, θ_s

FimAlgoritmo

O processo inicia com um raio cujo valor inicial deve ser muito próximo de zero. O fator de expansão do raio do círculo e o incremento da translação do centro de círculo devem possuir um valor de modo ser pequeno o suficiente para manter uma precisão adequada, mas grande também para permitir que computacionalmente o resultado seja apresentado dentro de um número adequado de repetições. Esta tolerância, representada por $\chi = 0.05$ é considerada um valor adequado entre o tempo computacional e a convergência [75]. A tolerância χ mostrada na figura 4.6 (tol) significa a menor distância entre todos os vértices da curva poligonal Ψ ao menor círculo. No cálculo numérico, o tempo de processamento está diretamente relacionada com o fator de expansão do raio (χ) e a precisão da amplitude máxima da tensão cisalhante vai depender da

tolerância tol .

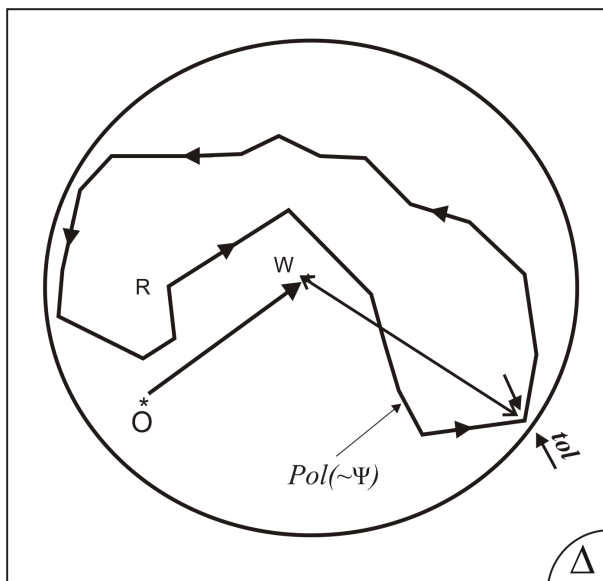


Figura 4.6: Tolerância do método do mínimo círculo para uma dada história de tensão cisalhante.

4.3.4 Método da mínima elipse

O método do mínimo elipsóide circunscrito foi inicialmente proposto por Bin Li *et al.* [39] como alternativa ao método da mínima hiperesfera proposto por Dang Van e Papadopolous [61]. Para Bin Li *et al.*, o raio da menor hiperesfera que contém o tensor desviador como medida equivalente para a amplitude da tensão cisalhante, não é suficiente para diferenciar histórias de tensões proporcionais e não proporcionais, fato esse que explicaria os elevados índices de erro da hiperesfera para os casos não proporcionais (Figura 4.7).

Esse método propõe uma definição alternativa para o cômputo da tensão cisalhante equivalente por meio do menor elipsóide (espaço das tensões desviadoras) ou a menor elipse que contenha uma curva Ψ (história de tensões cisalhantes no plano de corte Δ).

Nessa abordagem, a elipse é construída em dois estágios. Primeiro, deve-se obter o raio do menor círculo (Equação 4.12 e 4.13) que corresponderá ao semi-eixo maior do elipsóide, λ_1 (ou da elipse, no caso de plano crítico). Após esse cálculo, o semi-eixo menor, λ_2 será obtido pelo seguinte procedimento:

$$\lambda_2 : \max_{t_i} \|\tau(t_i) - \tau_m\| \leq \lambda_1. \quad (4.15)$$

onde τ_m é o centro do MCC para a história de tensões cisalhantes, e $\tau(t_i)$ são as componentes do

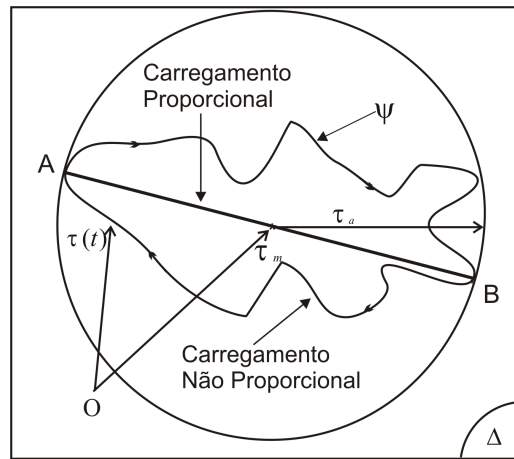


Figura 4.7: Cálculo da amplitude da tensão cisalhante equivalente τ_a para carregamentos proporcionais e não proporcionais pelo método do mínimo círculo (hiperesfera).

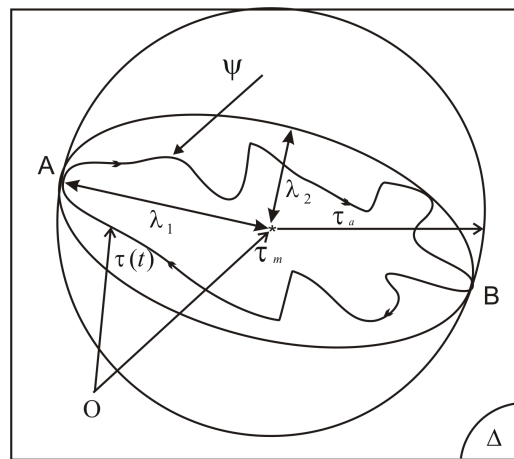


Figura 4.8: Menor elipse contendo a história de tensões projetada Ψ no plano de corte Δ .

vetor tensão cisalhante projetadas no plano de corte para um número finito de instantes de tempo t_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Assim, τ_a pode ser obtida por meio da seguinte expressão:

$$\tau_a = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (4.16)$$

onde λ_i , $i = 1, 2$, são as magnitudes dos semi-eixos da menor elipse que circunscreve a trajetória das tensões cisalhantes projetadas no plano de corte Δ .

O método de Bin Li *et al.* [39] pode levar a resultados ambíguos (Gonçalves *et al.* [40]). Note que na figura 4.9(a) embora se observe duas histórias de tensões distintas, pelo método proposto, os dois semi-eixos maiores têm o mesmo valor, quando, na realidade deveriam ser diferentes

como representados na figura 4.9(b).

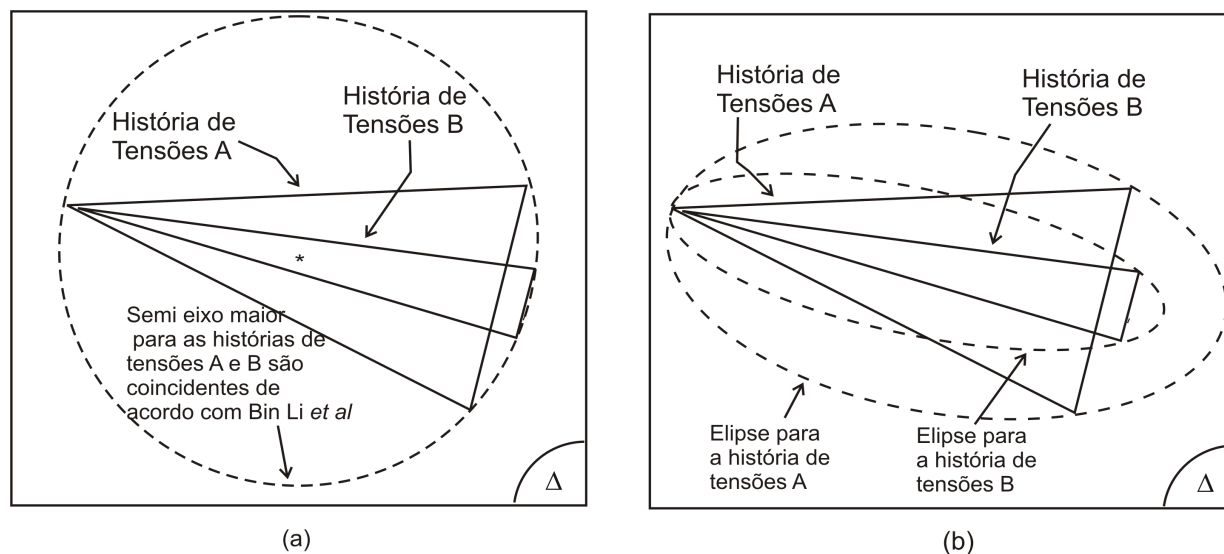


Figura 4.9: (a) Inconsistência da proposta de Bin Li *et al.* [39] para obter os semi-eixos maiores das duas histórias das tensões cisalhantes. (b) Elipses envolvendo corretamente as duas histórias das tensões cisalhantes.

Para evitar o erro apontado na figura 4.9(a) e obter os verdadeiros valores dos semi-eixos de uma elipse (ou elipsóide) que circunscreve uma dada história de tensões cisalhantes como a expressa na figura 4.9(b), Zouain *et al.* [41] propuseram uma medida escalar para a medida da tensão cisalhante equivalente baseado na definição de um hiper-elipsóide fechado que circunscreve uma história de tensões cisalhante de menor norma de Frobenius. O método é detalhado em [41] e fornece a medida correta do mínimo elipsóide em contraste com o proposto por Bin Li *et al.* [39].

4.3.5 Método do maior retângulo circunscrito - MRC

Nessa seção, iremos apresentar o método proposto por Mamiya *et al.* [69] que possui uma implementação numérica bastante simplificada e será uma alternativa ao método proposto por Zouain *et al.* [41] para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante em modelos de plano crítico. Cabe ressaltar que não há, até onde o autor tenha conhecimento, o cálculo da amplitude da tensão cisalhante em modelos de fadiga multiaxial baseado na abordagem de plano crítico que tenha sido realizado por medidas diferentes do raio do mínimo círculo ou da amplitude da máxima corda.

Por outro lado, assim como Bin Li *et al.* [39] e Gonçalves *et al.* [40] observaram, também já relatado nesse trabalho (ver seção 4.3.4), há carregamentos proporcionais e não proporcionais que provocam diferentes níveis de danos no materiais para os quais esses métodos fornecem o mesmo valor de τ_a .

Nesse sentido, propõe-se o uso do maior retângulo como alternativa capaz de computar τ_a para os diferentes tipos de carregamentos. A solicitação dessa hipótese será conduzida no capítulo resultados confrontando-se as estimativas obtidas contra dados experimentais. No que segue, se apresentará em detalhes, a forma de se calcular para a história do vetor tensão projetado no plano de corte oriundo de carregamentos quaisquer e uma forma mais simplificada apenas para carregamentos proporcionais e não proporcionais em fase e fora de fase, síncronos.

A proposta do maior retângulo considera que apenas os estados de tensão pertencentes ao contorno de uma curva fechada são relevantes para caracterizar o “tamanho” da história de tensões cisalhantes no plano crítico. Considere uma figura geométrica retangular com orientação arbitrária circunscrevendo a história de tensões, tal como ilustrado na figura 4.10.

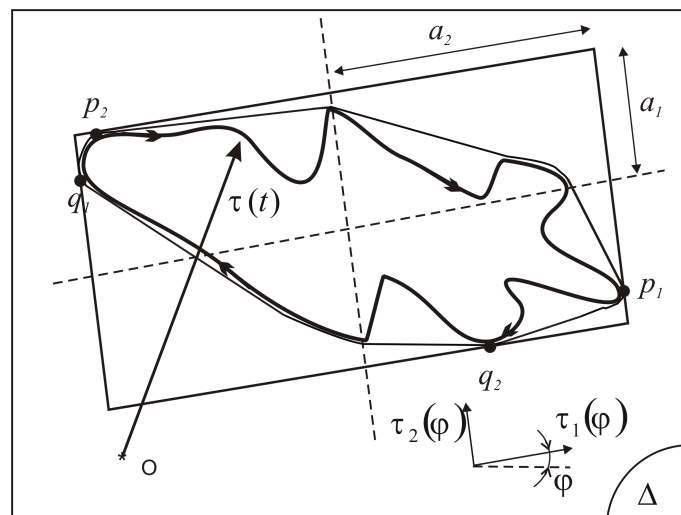


Figura 4.10: Retângulo de lados $a_i, i = 1, 2$ circunscrevendo a projeção da história de tensões com as faces tangentes em p_i e $q_i, i = 1, 2$.

O retângulo é tangente à história de tensões nos pontos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(\varphi) &= \mathbf{p}(t^*) \in \tau; \arg(\max_t \tau_i(\varphi, t)), \\ & i = 1, 2, \\ \mathbf{q}_i(\varphi) &= \mathbf{q}(t^*) \in \tau; \arg(\min_t \tau_i(\varphi, t)), \end{aligned} \quad (4.17)$$

pertencentes ao contorno $\partial\tau$, onde $\tau_i(\varphi, t), i = 1, 2$ representam a i -ésima componente da tensão cisalhante τ projetada no plano de corte no instante t , descrita em termos de uma base com orientação φ (4.10).

Considerando-se todas as possíveis orientações φ do retângulo, recupera-se por meio da identificação de todos os pontos $p_i(\varphi)$ e $q_i(\varphi)$ correspondentes, o contorno $\partial\tau$ da curva poligonal de m vértices. Assim, estabelece-se uma relação direta entre a curva poligonal e os retângulos que o circunscrevem.

Para cada orientação φ do retângulo, define-se a amplitude da i -ésima componente $a_i(\varphi)$ da história de tensões cisalhantes (metade dos lados do retângulo) como:

$$a_i(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\max_t \tau_i(\varphi, t) - \min_t \tau_i(\varphi, t) \right] \quad i = 1, 2. \quad (4.18)$$

e a amplitude da tensão cisalhante é, finalmente, definida como:

$$\tau_a = \max_{\varphi} \sqrt{a_1^2(\varphi) + a_2^2(\varphi)}. \quad (4.19)$$

Deve-se observar que para carregamentos multiaxiais senoidais, em fase e fora de fase, mas síncronos, há uma invariância do retângulo, ou seja, a medida de τ_a obtida pela avaliação da equação 4.18 é sempre a mesma para qualquer rotação φ do retângulo, daí:

$$\tau_a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad (4.20)$$

onde a_i , $i = 1, 2$ são as amplitudes dos componentes $\tau(t)$ definidas pela equação 4.18. A figura 4.11 ilustra o cálculo de a_1 e a_2 para um carregamento não proporcional síncrono mas, fora de fase.

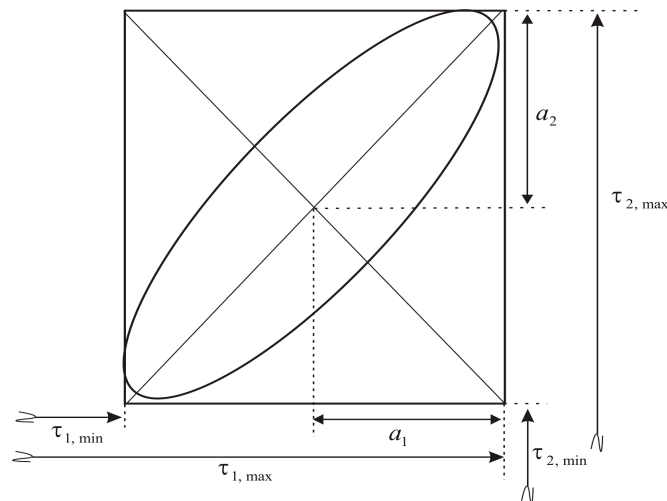


Figura 4.11: Amplitude das componentes $\tau_i(t)$ para uma história de carregamentos não proporcional, fora de fase e síncrona.

O algoritmo a seguir sintetiza o cálculo da amplitude cisalhante para um período de uma história de tensões, considerando-se as discretizações desses planos fornecidos por θ_i e ϕ_j e as orientações do retângulo φ_i que circunscrevem a história de tensões projetada nos planos de corte.

Algoritmo 4.2: Algoritmo do Maior Retângulo (MRC)

InícioAlgoritmo

$\tau_a \leftarrow 0$ /* Inicialização da amplitude da tensão cisalhante */

Para cada $\theta_i, \phi_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ **faça**

$\tau_k \leftarrow \tau(t_k, \theta_i, \phi_j), k = 1, \dots, n$ /* Discretização da história de tensões cisalhantes em um número finito de instantes do carregamento periódico */

$\tau_{ar} \leftarrow 0$ /* Inicialização da amplitude da tensão cisalhante em cada plano de corte */

Para cada $\varphi_i, i = 1 \dots n_{rot}$ **faça**

$\tau_\varphi \leftarrow \tau_k(\varphi_i)$ /* Descreve a história da tensão cisalhante na base de rotação */

Para $l = 1, 2$ **faça**

$p_l \leftarrow \max_l \tau_\varphi$ /* Valor máximo de τ_k */

$q_l \leftarrow \min_l \tau_\varphi$ /* Valor mínimo de τ_k */

$a_l \leftarrow \frac{1}{2} [p_l - q_l]$ /* Calcula a amplitude de cada componente */

Até $l = 2$

$\tau_a \leftarrow \sqrt{\sum_{l=1}^2 a_l^2}$ /* Calcula a amplitude da tensão cisalhante para as orientações φ_i */

Se $\tau_a > \tau_{ar}$

$\tau_{ar} \leftarrow \tau_a$ /* Amplitude da tensão cisalhante no plano de corte */

FimSe

Até avaliar todos os ângulos de rotação φ_i

Se $\tau_{ar} > \tau_a$

$\tau_a \leftarrow \tau_{ar}$ /* Armazena o maior valor da amplitude da tensão cisalhante */

FimSe

Até a avaliação de todos os planos de corte θ_i, ϕ_j

FimAlgoritmo

4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Por meio de quatro exemplos de crescente complexidade, ainda que extremamente simples, serão mostrados passo a passo, o cálculo da amplitude da tensão cisalhante em um plano de corte pelos métodos do mínimo círculo e do maior retângulo.

Para calcular a amplitude da tensão cisalhante, primeiramente é necessário obter, criteriosamente, a localização de um plano de corte Δ . Para um sistema de coordenadas $Oxyz$ essa localização será por meio dos seus vetores unitários \mathbf{n} , \mathbf{l} e \mathbf{r} , mostrada na figura 4.12, onde \mathbf{n} é um

vetor normal unitário ao plano Δ de componentes:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

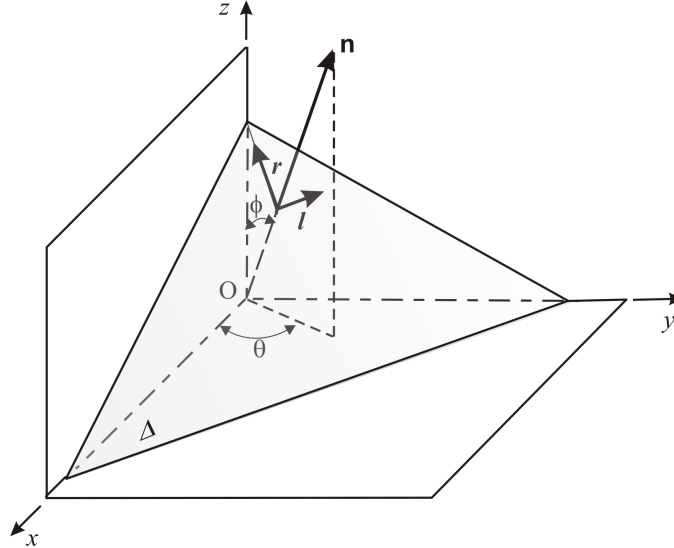


Figura 4.12: Sistema $Oxyz$ referencial de um plano de corte Δ definido por seus vetores unitários \mathbf{n} , \mathbf{l} e \mathbf{r} .

Os vetores unitários \mathbf{l} e \mathbf{r} pertencem ao plano Δ e foram escolhidos de forma que \mathbf{r} aponte para o eixo z e \mathbf{l} é paralelo ao plano xy (Figura 4.12). Suas componentes são:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

O vetor tensão $\boldsymbol{\tau}$ agindo no plano Δ pode ser decomposto por suas componentes τ_l e τ_r ao longo dos eixos \mathbf{r} e \mathbf{l} . O vetor normal ao plano Δ também é ortogonal à \mathbf{l} e \mathbf{r} (i.e. $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$), então:

$$\begin{aligned} \tau_l &= \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \tau_l = \mathbf{l} \cdot [\mathbf{T} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}) \mathbf{n}] \Rightarrow \tau_l = \mathbf{l} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}, \\ \tau_r &= \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \tau_r = \mathbf{r} \cdot [\mathbf{T} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}) \mathbf{n}] \Rightarrow \tau_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Expressando as relações de 4.23 em função das componentes da tensão projetadas no plano de corte:

$$\tau_l = l_x n_x \sigma_{xx} + l_y n_y \sigma_{yy} + l_z n_z \sigma_{zz} + (l_x n_y + l_y n_x) \sigma_{xy} + (l_x n_z + l_z n_x) \sigma_{xz} + (l_y n_z + l_z n_y) \sigma_{yz}, \quad (4.24)$$

$$\tau_r = r_x n_x \sigma_{xx} + r_y n_y \sigma_{yy} + r_z n_z \sigma_{zz} + (r_x n_y + r_y n_x) \sigma_{xy} + (r_x n_z + r_z n_x) \sigma_{xz} + (r_y n_z + r_z n_y) \sigma_{yz}.$$

Um estado de tensão biaxial normal será o primeiro exemplo a ser analisado onde as duas componentes normais σ_{xx} e σ_{yy} estão em fase e são proporcionais.[Figura4.13(a)].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2a f(t) + 3a, \\ f(t) &= f(t + P), \quad -1 \leq f(t) \leq 1 \\ \sigma_{yy} &= a f(t) + 3a/2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

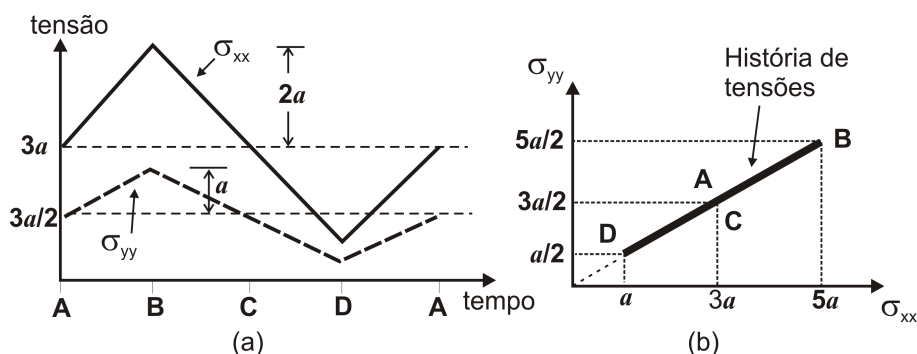


Figura 4.13: Carregamento proporcional para uma história de tensões normal biaxial.

Por questões de simplicidade, a forma do sinal $f(t)$ é considerada triangular e as letras A, B, C, D e E são atribuídas aos instantes de tempo (iP) , $(iP + P/4)$, $(iP + P/2)$, $(iP + 3P/4)$ respectivamente com $i = 0, 1, 2, \dots$. A figura 4.13(b) descreve a história de tensões A–B–C–D–A no plano σ_{xx} – σ_{yy} . No diagrama de fase (espaço das tensões) esta história é um segmento de reta que passa pela origem das tensões porque se trata de um carregamento proporcional. Em consequência, a equação 4.24 se reduz à:

$$\tau_l = l_x n_x \sigma_{xx} + l_y n_y \sigma_{yy}, \quad (4.26)$$

$$\tau_r = r_x n_x \sigma_{xx} + r_y n_y \sigma_{yy}.$$

Assuma que queiramos calcular a amplitude no plano Δ definido pelo seu vetor unitário \mathbf{n} definido pelas suas coordenadas esféricas $\phi = 30^\circ$ e $\theta = 45^\circ$. A partir das equações 4.21 e 4.22 temos que:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Aplicando os valores da relação 4.27 em 4.26 determinamos as componentes τ_l e τ_r :

$$\tau_l = -\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}),$$

$$\tau_r = -\frac{\sqrt{3}}{8}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (4.28)$$

Com as relações 4.28 e usando os valores de σ_{xx} e σ_{yy} para os instantes A–B–C–D–A pode-se obter a história de tensões cisalhantes τ_l e τ_r projetada no plano de corte Δ . A história de tensões cisalhantes Ψ (i.e. A–B–C–D–A) é um segmento de reta com extremidades em B e D sobre uma reta L que passa pela origem, característica de um carregamento proporcional.

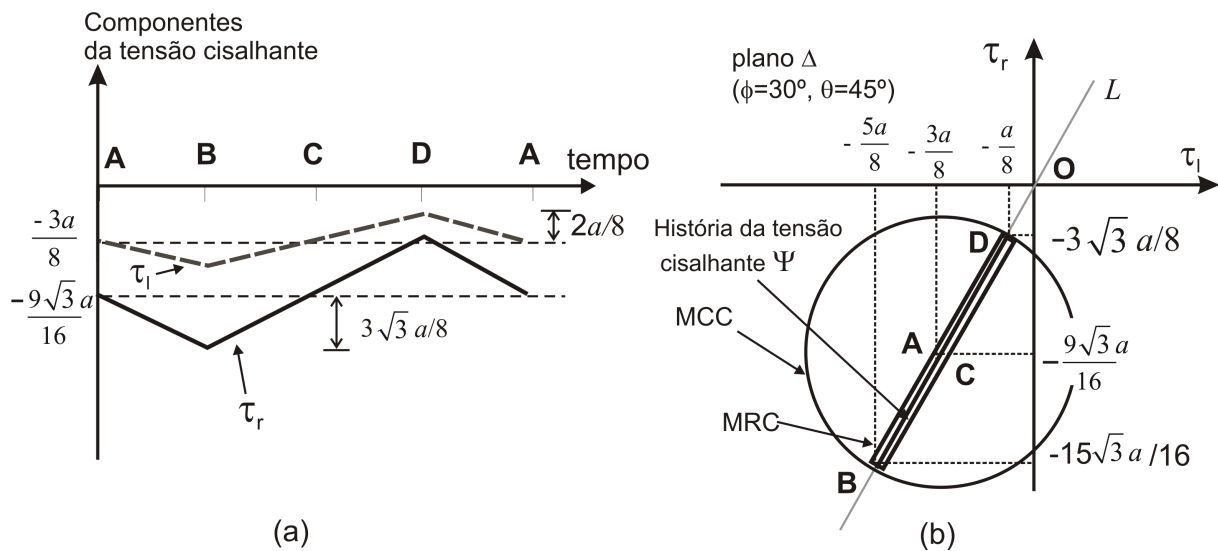


Figura 4.14: História das componentes da tensão cisalhante e o respectivo diagrama de fases para um dado plano Δ e para um carregamento proporcional apresentado na figura 4.13.

Aplicando os métodos do mínimo círculo e do maior retângulo sobre a história de tensões cisalhantes Ψ para obter a amplitude da tensão cisalhante, claramente observamos que o raio do

círculo que circunscribe a história de tensões cisalhantes Ψ desse exemplo corresponde a metade do segmento BD, e portanto seu raio é igual a $BD/2$. A partir das coordenadas (τ_r, τ_l) de B e D fornecidas pela tabela 4.1, torna-se uma tarefa simples calcular a dimensão BD e consequentemente τ_a :

$$\tau_a = \frac{1}{2} \sqrt{(\tau_l^D - \tau_l^B)^2 + (\tau_r^D - \tau_r^B)^2} \Rightarrow \tau_a = a\sqrt{31}/8, \quad (4.29)$$

Tabela 4.1: Valores de τ_l e τ_r para uma história de tensão proporcional.

	A	B	C	D	A
τ_l	$-3a/8$	$-5a/8$	$-3a/8$	$-a/8$	$-3a/8$
τ_r	$-9\sqrt{3}a/16$	$-15\sqrt{3}a/16$	$-9\sqrt{3}a/16$	$-3\sqrt{3}a/16$	$-9\sqrt{3}a/16$

Considerando o método do maior retângulo (MRC) para a história de tensões desse exemplo, podemos observar que um dos lados do retângulo que circunscribe a história de tensões Ψ é zero enquanto que a outra dimensão é dada pelo segmento de reta BD ($a_1 = \overline{BD}/2$, $a_2 = 0$).

Pela definição da amplitude da tensão cisalhante, equação 4.19 para o MRC:

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{\tau_l^D - \tau_l^B}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_r^D - \tau_r^B}{2}\right)^2}; \quad a_2 = 0 \Rightarrow \tau_a = \sqrt{\sum_{i=1}^2 a_i} = a\sqrt{31}/8. \quad (4.30)$$

Pode-se concluir, então, que carregamentos para proporcionais, os dois métodos fornecem os mesmos resultados para τ_a .

O segundo exemplo corresponde a um estado de tensões biaxial onde as duas tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} não mantêm relação de proporcionalidade e a amplitude para cada componente é igual a a . Como anteriormente afirmado, a forma do sinal para cada componente é triangular e a história de tensões para essas duas componentes está apresentada na figura 4.15(a) e o diagrama de fases na figura 4.15(b). Esta história de tensões corresponde a um carregamento afim, ou seja, embora no diagrama de fases as componentes das tensões descrevam um segmento reto, ela não passa pela origem das tensões. Vamos considerar a mesma orientação do plano de corte Δ do exemplo anterior, ou seja, um plano definido pelas suas coordenadas esféricas $\phi = 30^\circ$ e $\theta = 45^\circ$. Como a localização desse plano de corte é igual ao exemplo anterior, pode-se aplicar a equação 4.28 à história de tensões da figura 4.15(a) para obter a história de tensões das componente τ_l e τ_r (Figura 4.16 e tabela 4.2).

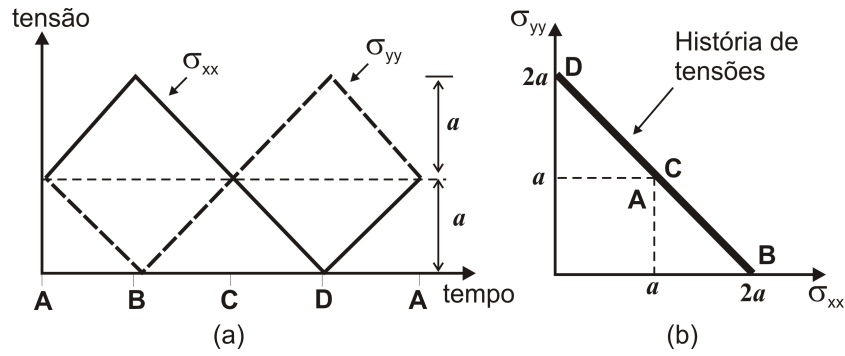


Figura 4.15: Carregamento afim para uma história de tensões normal biaxial

Nessa história, τ_r é constante e igual a $-\sqrt{3}a/4$, enquanto que τ_l alterna com valor médio igual a zero e amplitude igual a $a/2$ [Figura 4.16(a)]. Com os valores das componentes τ_l e τ_r disponíveis, pode-se construir o diagrama de fases $\tau_l \times \tau_r$ e obter a história das tensões cisalhantes Ψ projetada no plano de corte escolhido (Figura 4.16(b) e tabela 4.2).

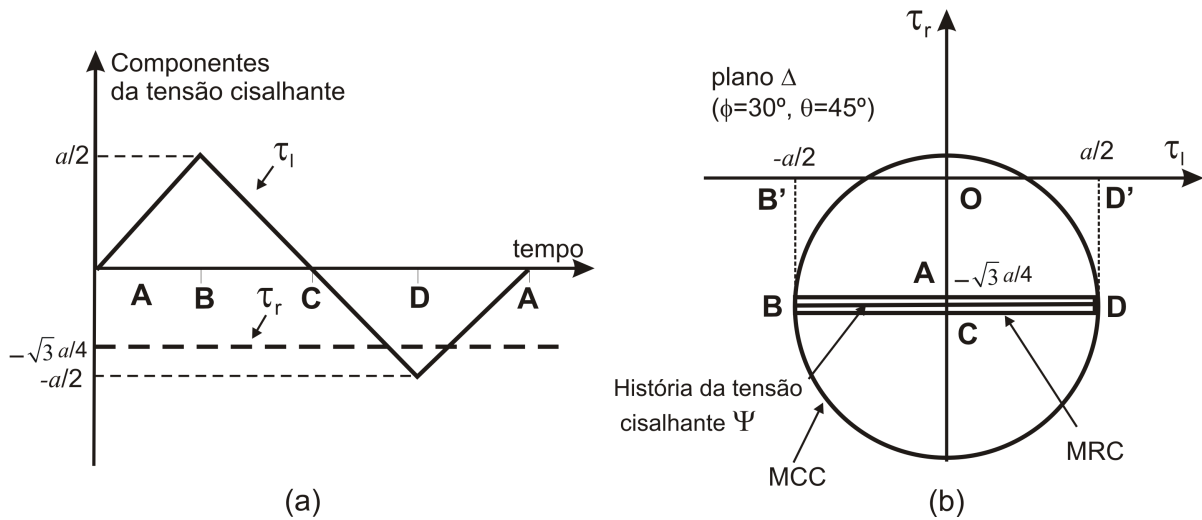


Figura 4.16: História das componentes da tensão cisalhante e o respectivo diagrama de fases em um dado plano Δ para um carregamento afim apresentado na figura 4.15.

A história de tensões cisalhantes Ψ (i.e. A–B–C–D–A) é um segmento de reta com extremidades em B e D, paralelo ao eixo τ_l e seu ponto médio cruza o eixo τ_r em $-\sqrt{3}a/4$.

Nessas condições, o centro do mínimo círculo circunscrito à Ψ está localizado no ponto A (ou C, $A \equiv C$) de coordenadas $(0, -\sqrt{3}a/4)$ e o raio equivale à $a/2$. A amplitude da tensão cisalhante no plano de corte Δ é:

$$\tau_a = a/2. \tag{4.31}$$

Tabela 4.2: Valores de τ_l e τ_r para o exemplo com história de tensão fora de fase mostrada na figura 4.15

	A	B	C	D	A
τ_l	0	$-a/2$	0	$a/2$	0
τ_r	$-\sqrt{3}a/4$	$-\sqrt{3}a/4$	$-\sqrt{3}a/4$	$-\sqrt{3}a/4$	$-\sqrt{3}a/4$

Embora este exemplo não seja referente a um carregamento proporcional, a projeção da história cisalhante no plano de corte é um segmento de reta e, portanto, para o MRC, um dos lados do retângulo que circunscreve a história projetada Ψ é zero e, por consequência, o método conduz a resultados idênticos ao MCC [Equação 4.31 e figura 4.16(b)].

No próximo exemplo, a história de tensões é constituída por duas tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} variando de 0 até um valor máximo $2a$. A forma da onda de cada tensão é triangular, mas σ_{xx} alcança o máximo em $2a$ após um quarto do período ($P/4$), enquanto que o máximo de σ_{yy} é observado a três quartos do período ($3P/4$), onde P é um período cíclico [Figura 4.17(a)].

A priori, o diagrama das tensões $\sigma_{xx} \times \sigma_{yy}$ deveria ser um polígono com quatro vértices, A, B, C, e D, porém observa-se no gráfico da figura 4.17(b) que o vértice C pertence ao segmento de reta BD, reduzindo dessa forma a história de tensões para a figura (curva fechada) de um triângulo.

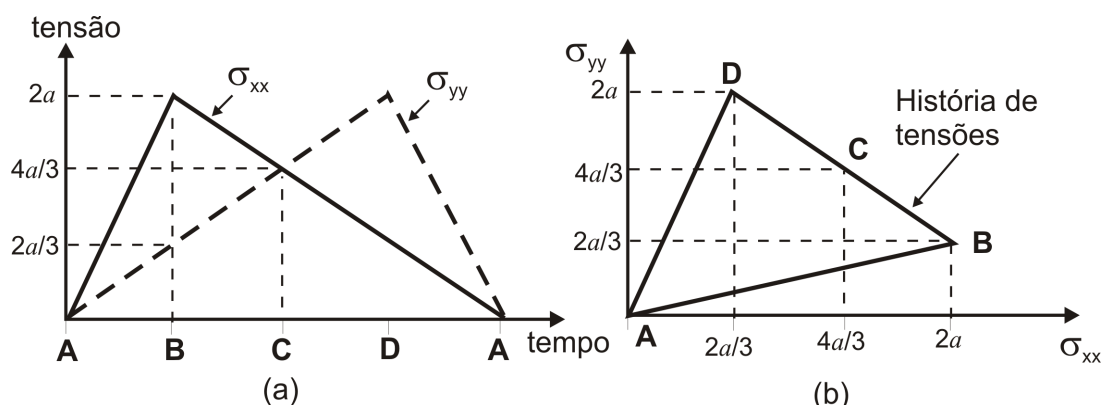


Figura 4.17: Carregamento normal biaxial gerando um diagrama de fase triangular.

Vamos considerar o mesmo plano de corte dos exemplos anteriores (i.e $\phi = 30^\circ$ e $\theta = 45^\circ$). Da equação 4.28 e da história de tensões expressa pela figura 4.17(a), pode construir a história para as componentes τ_l e τ_r atuando no plano escolhido Δ (Tabela 4.3)

A história de tensões cisalhantes projetada τ_l e τ_r está apresentada no gráfico da figura 4.18(a), enquanto o diagrama de fases de $\tau_l \times \tau_r$ representado pela história de tensões cisalhantes no plano Ψ está descrita na figura 4.18(b). A história de tensões cisalhantes deveria ser um polígono de quatro vértices ABCD, porém, devido ao fato de que τ_l não varia de B até D (Tabela 4.3), o

Tabela 4.3: Valores de τ_l e τ_r para o exemplo da história de tensões mostrada na figura 4.17.

	A	B	C	D	A
τ_l	0	$-a/3$	0	$a/3$	0
τ_r	0	$-a/\sqrt{3}$	$-a/\sqrt{3}$	$-a/\sqrt{3}$	0

vértice C pertence a segmento de reta BD. Além disso, BD é paralelo ao eixo τ_l de maneira que seu comprimento é igual $2a/3$, i.e., $BD = 2a/3$. O comprimento do segmento AC é $a/\sqrt{3}$, i.e., $AC = a/\sqrt{3}$ e, portanto, o triângulo ABD é equilátero de lados $2a/3$.

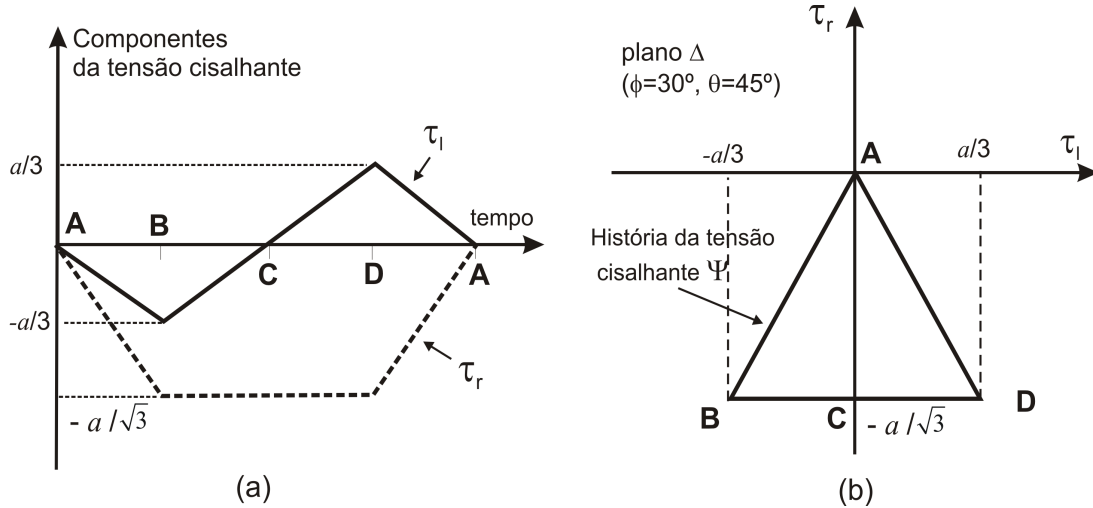


Figura 4.18: História das componentes da tensão cisalhante e o correspondente diagrama de fases para o plano Δ para a história de tensões descrita na figura 4.17.

De acordo com o teorema exposto na seção 4.3.3, o mínimo círculo que circunscreve a história de tensões cisalhantes projetada em Ψ [Figura 4.19(a)], possui raio igual $2a/3\sqrt{3}$ e coordenadas $(0, -2a/3\sqrt{3})$. A amplitude da da tensão cisalhante é:

$$\tau_a = \frac{2a}{3\sqrt{3}} = 0.385a. \quad (4.32)$$

No MRC, a história das tensões cisalhantes projetada no plano de corte é circunscrita por retângulos cujos lados são tangentes a essa história e a amplitude da tensão cisalhante é obtida por meio da equação 4.19, onde φ são ângulos de rotação do retângulo para o sistema de referência $\tau_l \times \tau_r$ [Figura 4.19(b)].

Vamos considerar que o retângulo executa cinco rotações sobre a história de tensões cisalhantes Ψ . Para cada rotação, obtemos um valor da amplitude da tensão cisalhante (Tabela 4.4). Observe que o maior valor de τ_a é observado quando $\varphi = 45^\circ$ e portanto, a amplitude da tensão

cisalhante e tensão média serão:

$$\tau_a = 0,455a. \quad (4.33)$$

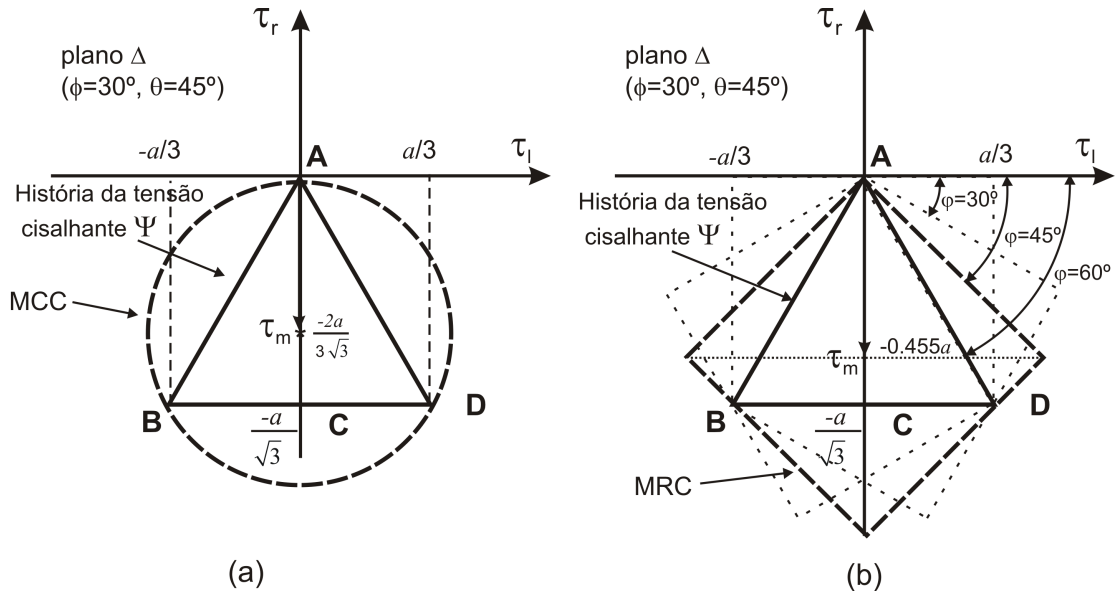


Figura 4.19: História das componentes da tensão cisalhante circunscritas pelos métodos do mínimo círculo e do maior retângulo.

Tabela 4.4: Valores de τ_a obtidos pelo MRC para rotações de φ referente à história representado na figura 4.19

φ	0	30°	45°	60°	90°
τ_a	$a\sqrt{7}/6$	$a\sqrt{7}/6$	0.455a	$a\sqrt{7}/6$	$a\sqrt{7}/6$

Neste exemplo, os valores para a tensão cisalhante são diferentes quando obtidos pelos métodos do mínimo círculo e do maior retângulo. O MRC obteve uma amplitude da tensão cisalhante maior que o do MCC:

$$\tau_a^{MCC} = \frac{2a}{3\sqrt{3}} = 0.385a \quad \text{e} \quad \tau_a^{MRC} = 0,455a, \quad (4.34)$$

onde os índices MCC e MRC significam métodos mínimo círculo circunscrito e maior retângulo circunscrito, respectivamente.

Semelhante ao anterior, o quarto exemplo ainda é constituído por duas tensões biaxiais σ_{xx} e σ_{yy} variando também de zero ao máximo valor de $2a$. A forma da sua onda também triangular e σ_{xx} alcança máximo valor em um quarto do período cíclico ($P/4$) e σ_{yy} em três quartos desse período ($3P/4$) [Figura 4.20(a)]. Como no exemplo três, a história de tensões no plano deveria ser

um polígono de quatro vértices, mas em $P/2$ os valores de σ_{xx} e σ_{yy} coincidem [Figura 4.20(a)] e o vértice C pertence ao segmento de reta BD [Figura 4.20(b)].

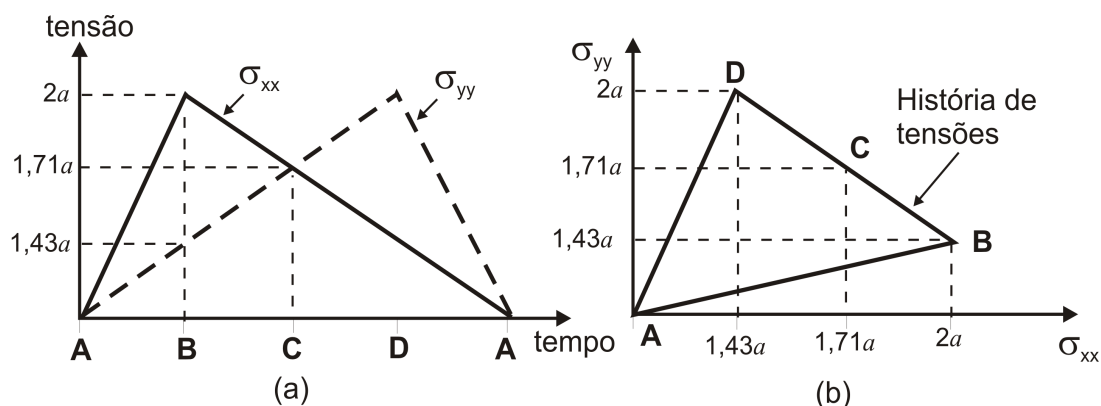


Figura 4.20: Carregamento normal biaxial gerando um diagrama de fases triangular.

A localização do plano de corte Δ será o mesmo, (i.e $\phi = 30^\circ$ e $\theta = 45^\circ$) e, conseqüentemente, usando a relação da equação 4.28 e a história de tensões indicada pela figura 4.20(a) obtém-se a história de tensões cisalhantes sobre o plano de corte Δ [Figura 4.21(a)] e o respectivo diagrama de fases para as componentes τ_l e τ_r [Tabela 4.5 e figura 4.21(b)].

Tabela 4.5: Valores de τ_l e τ_r para o exemplo da história de tensões mostrada na figura 4.20

	A	B	C	D	A
τ_l	0	$-0,14a$	0	$0,14a$	0
τ_r	0	$-0,7a$	$-0,7a$	$-0,7a$	0

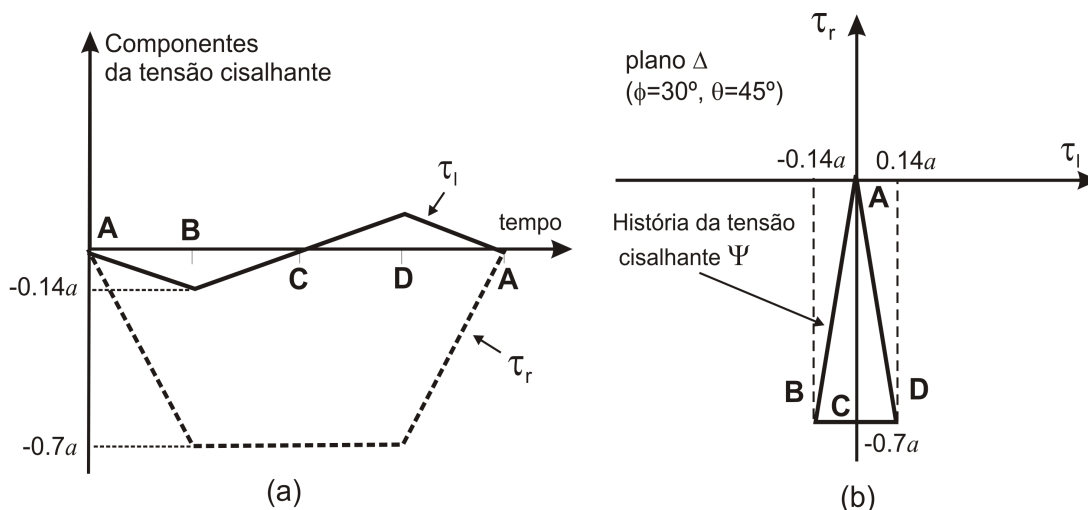


Figura 4.21: História das componentes da tensão cisalhante e o correspondente diagrama de fases para o plano Δ para a história de tensões descrita na figura 4.20.

A componente τ_l não varia de B a D e seu comprimento é $0.28a$. A projeção da história cisalhante sobre o plano Δ forma um triângulo isósceles ABD. O método do mínimo círculo é aplicado sobre essa história e obtém-se para a amplitude da tensão cisalhante, o seguinte valor:

$$\tau_a = 0.385a. \quad (4.35)$$

Note que para o MCC o resultado expresso em 4.35 é o mesmo constante em 4.32. No entanto, considerando-se o MRC, o resultado da história de tensões do exemplo 4 foi diferente do exemplo 3 (Equação 4.33), ou seja, a amplitude da tensão cisalhante possui a seguinte medida:

$$\tau_a = 0.443a. \quad (4.36)$$

Aqui também, o máximo valor da amplitude da tensão cisalhante foi encontrado quando o retângulo faz um ângulo de 45° com o eixo τ_l ($\varphi = 45^\circ$).

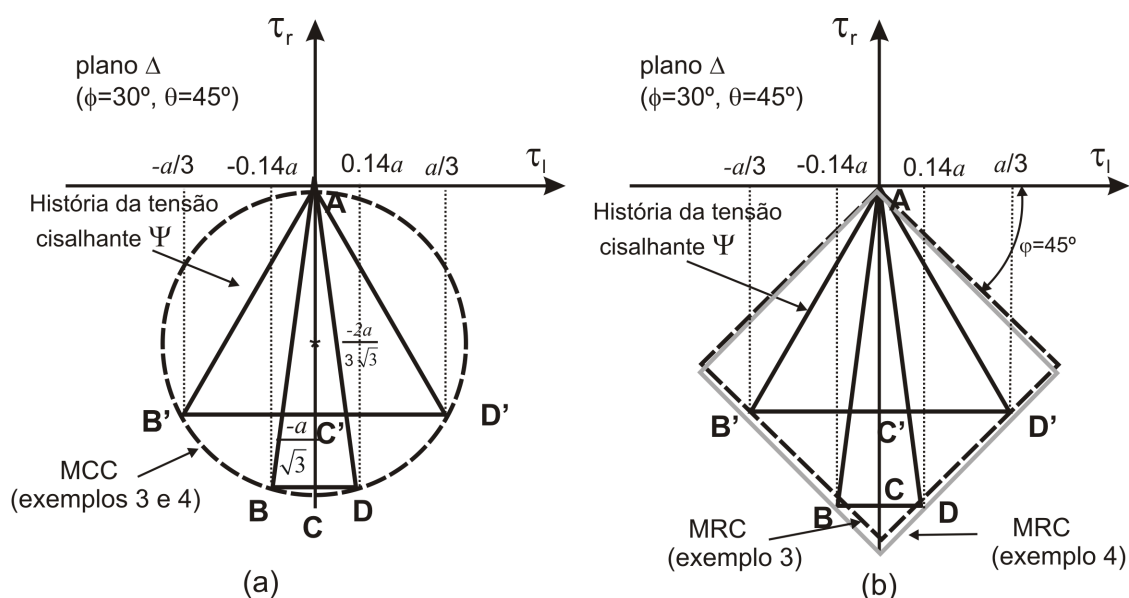


Figura 4.22: Diagramas de fase $\tau_l \times \tau_r$ para as histórias de tensões dos exemplos 3 e 4 cujas histórias das tensões cisalhantes estão circunscritas com os métodos do (a) mínimo círculo (MCC) (b) e do maior retângulo (MRC).

Os exemplos 3 e 4 são histórias de tensões diferentes e que geram histórias de tensões cisalhantes distintas no plano Δ explicitadas pelos triângulos isósceles ABD e equilátero $AB'D'$, cujas histórias estão superpostas nos gráficos (a) e (b) da figura 4.22. O método do mínimo círculo quando aplicado às histórias dos exemplos 3 e 4, forneceu os mesmos resultados para a amplitude da tensão cisalhante [Equação 4.32, 4.35 e figura 4.22(a)], pois os circuncentros das duas histórias de tensões caracterizadas pelos triângulos equilátero [Figura 4.19(a)] e isósceles [Figura

4.22(a)] são coincidentes. No método do maior retângulo, ao contrário, forneceu resultados diferentes [Equação 4.33, 4.36 e Figura 4.22(b)]. Para as duas histórias, a tabela 4.6 resume os valores obtidos pelos dois métodos.

Tabela 4.6: Valores de τ_a obtidos pelo MCC e MRC para duas histórias de tensões distintas

História	Método do Mínimo Círculo	Método do Maior Retângulo
Exemplo 3	$\tau_a = 0.385a$	$\tau_a = 0,455a$
Exemplo 4	$\tau_a = 0.385a$	$\tau_a = 0.443a$

Modelos de planos críticos para a avaliação do comportamento de fadiga de alto ciclo envolvem o cálculo do valor máximo da tensão normal e da máxima amplitude da tensão cisalhante atuando nos planos de corte. Os exemplos apresentados nessa seção, mostraram o cálculo das componentes da tensão cisalhante para casos mais simples (histórias proporcionais e afim) e para casos complexos (histórias não proporcionais).

A determinação do máximo valor da tensão normal é um problema de simples solução, enquanto que a amplitude da tensão cisalhante é complexo, pois ela varia em direção e magnitude, descrevendo em cada plano de corte uma curva fechada diferente. Os resultados dos exemplos considerados nessa seção foram idênticos para histórias proporcional e afim, mas diferentes para histórias mais complexas. Nos exemplos não proporcionais (exemplos 3 e 4), o método do maior retângulo obteve valores maiores para as amplitudes da tensão cisalhante, indicando que, a priori, para critérios baseados em planos críticos baseados na forma $f(\tau_a, \sigma_{n,max})$, quanto maior o valor de τ_a maior será o cálculo do dano em critérios que utilizam a combinação (linear ou não linear) dessas componentes. Este fato poderá fornecer melhores resultados quando comparado com os valores experimentais e será objeto de avaliação no cap. 6 quando utilizaremos uma série de dados experimentais para avaliar o MRC.

Ainda, com relação aos exemplos 3 e 4, embora as duas histórias de tensões tenham sido distintas, o método do mínimo círculo encontrou os mesmos resultados para as duas histórias (Tabela 4.6), indicando que para algumas situações, o MCC não consegue distinguir histórias de tensões diferentes e, portanto, pode apresentar resultados não satisfatórios.

5 ALGORITMOS GENÉTICOS

5.1 INTRODUÇÃO

A resolução de problemas complexos, na maioria das vezes, não pode ser efetuada sendo necessário o uso de algoritmos numéricos que, embora possibilite uma solução, pode se tornar inviável por um elevado custo.

No final da década de 60, Holland [76] estudou formalmente a evolução das espécies e propôs um modelo heurístico computacional que poderia oferecer boas soluções para problemas extremamente difíceis que eram praticamente insolúveis computacionalmente. Em 1975, Holland publicou seu livro, “Adaptation in Natural and Artificial Systems” onde faz um estudo dos processos evolutivos em vez de projetar novos algoritmos. O trabalho de Holland apresenta os algoritmos genéticos como uma metáfora para os processos evolutivos de forma que ele pudesse estudar a adaptação e evolução no mundo real, simulando-a dentro de uma linguagem computacional. Entretanto, os algoritmos genéticos transcenderam o papel originalmente imaginado por Holland e transformaram-se em uma ferramenta de uso disseminado em todos os campos da ciência, mas seu pleno desenvolvimento só ocorreu a partir da década de 80, por intermédio do trabalho de Goldberg [44], em 1989. Genericamente, pode-se afirmar que algoritmos genéticos são técnicas heurísticas de otimização global, isto é, se opõem à técnicas de gradientes (*hill climbing*) que seguem a derivada de uma função até encontrar seu máximo ou mínimo de uma função e, por essa razão podem ficar retidos em extremos locais.

Os algoritmos genéticos (AGs) funcionam com uma população de “indivíduos” onde cada um representa uma possível solução do problema. Cada indivíduo recebe um “grau de aptidão” de acordo como suas características se aproximam da solução. Aqueles que possuem melhores aptidões tem maiores chances de reproduzir com outros indivíduos da população. Com isso surgem novos indivíduos como “filhos” que transmitem e dividem características de cada “pai”. Os mais fracos, ou seja, aqueles com “graus de aptidão” baixos, possuem menores chances de serem selecionados e se reproduzirem e, portanto, estatisticamente estão predestinados a “morrerem”. Resumidamente, definem-se AGs como algoritmos de busca inspirados na Teoria da Seleção Natural que atuam sobre uma população de indivíduos, baseados no fato de que indivíduos com boas características genéticas têm maiores chances de sobrevivência e de reproduzir indivíduos cada vez mais aptos, enquanto indivíduos menos aptos tendem a desaparecer. Os indivíduos mais aptos são soluções para o problema.

5.2 O MÉTODO DO ALGORITMO GENÉTICO

5.2.1 Uma visão geral

Os algoritmos genéticos são um ramo da computação evolucionária e portanto sua técnica computacional é inspirada na teoria da evolução onde todos os indivíduos dentro de um ecossistema competem entre si por recursos limitados. Aqueles indivíduos que não obtêm êxito tendem a ter uma prole menor e esta descendência reduzida faz com que a probabilidade dos seus genes serem propagados ao longo de sucessivas gerações seja menor.

Abaixo segue um pseudo-código de alto nível e a respectiva representação gráfica do esquema de um algoritmo genético (Algoritmo 5.1 e figura 5.1)

Algoritmo 5.1: Algoritmo Genético típico

Seja $S(t)$ a população de cromossomos na geração t .

InícioAlgoritmo

$t \leftarrow 0$

inicializar $S(t)$

avaliar $S(t)$

enquanto o critério de parada não for satisfeito **faça**

$t \leftarrow t + 1$

selecionar $S(t)$ a partir de $S(t - 1)$

aplicar *crossover* sobre $S(t)$

aplicar *mutação* sobre $S(t)$

avaliar $S(t)$

fimEnquanto

FimAlgoritmo

O algoritmo é iniciado com a geração de uma **população inicial** que é formada por um conjunto aleatório de cromossomos que representam possíveis soluções do problema. Durante o **processo evolutivo**, esta população é avaliada e cada cromossomo recebe uma nota (denominada de **aptidão**) que reflete a qualidade da solução que ela representa. Na seqüência, imitando o processo evolutivo proposto por Darwin, os mais capazes são mantidos, enquanto os demais são descartados (Teoria da Evolução). Os indivíduos selecionados são levados para uma bacia de acasalamento (*matting pool*) para gerar novos descendentes por meio de uma operação de **crossover** e uma pequena parcela desses descendentes pode estar sujeita a alterações em suas características iniciais por intermédio de uma operação denominada **mutação**. Todo este processo é

repetido até que uma condição de parada seja estabelecida ou imposta que pode ser uma solução satisfatória, um número máximo de gerações ou até mesmo o tempo de máximo de processamento.

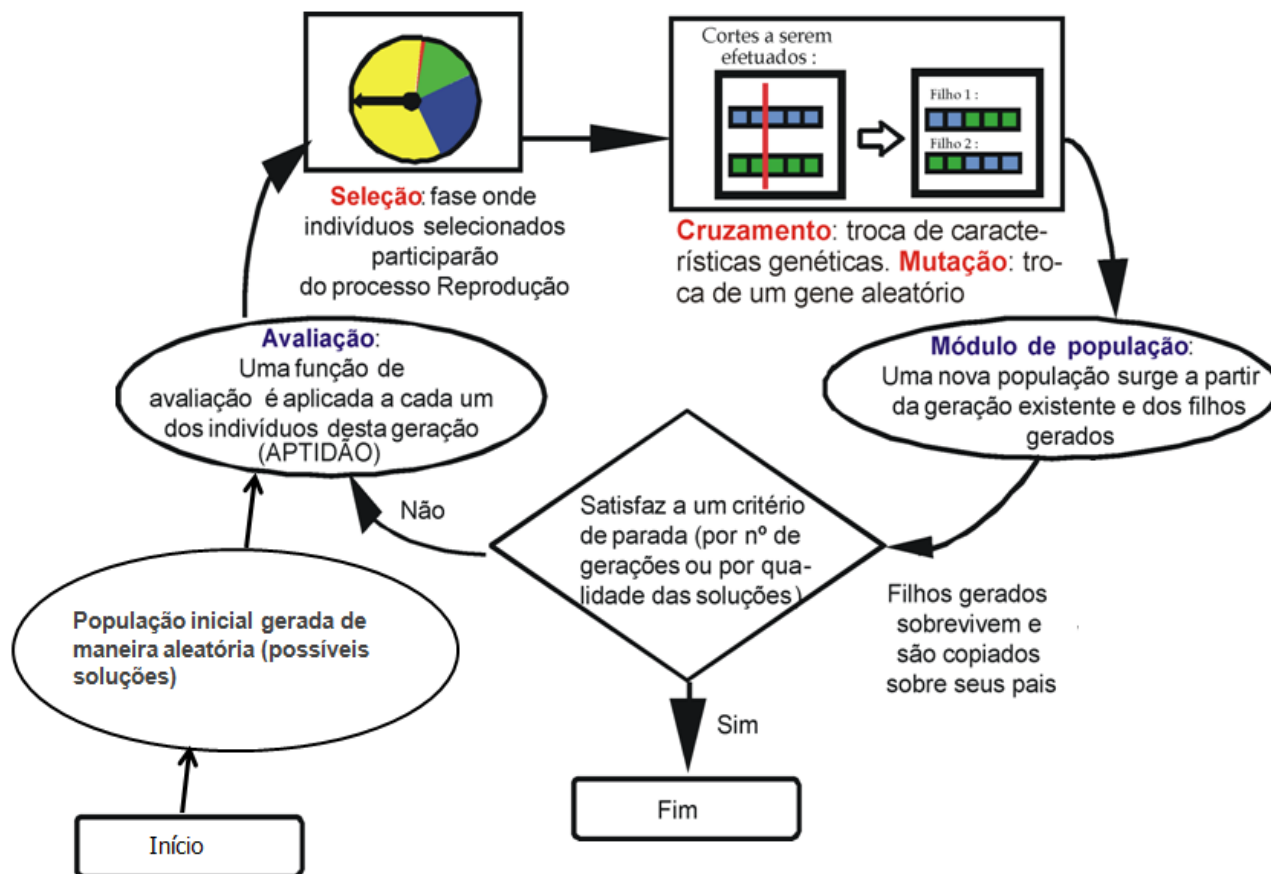


Figura 5.1: Representação gráfica do esquema de um algoritmo genético.

Num algoritmo genético clássico, o indivíduo é representado por uma sequência de caracteres binários ou simplesmente *string* binária (0,1) e, cada elemento desta string é considerada um *gene* (Figura 5.2) que indica a presença (1) ou ausência (0) de uma determinada característica conhecida. Os elementos combinados formam as características reais do indivíduo ou o seu *fenótipo*.

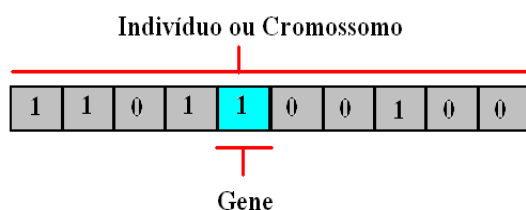


Figura 5.2: Representação de um cromossomo de genes binários.

5.2.2 Função de avaliação

A função avaliação calcula um valor numérico que reflete quão bons os parâmetros representados no cromossomo resolvem o problema, isto é, ela usa todos os valores armazenados nos cromossomos e retorna um valor numérico, cujo significado é uma métrica da qualidade da solução obtida por aqueles parâmetros.

A função de avaliação ou função objetivo fornece uma medida de desempenho em relação a um determinado conjunto de parâmetros. A função *fitness* transforma aquela medida de desempenho em uma alocação de oportunidades de reprodução. A avaliação de uma cadeia de caracteres (string) que representa um conjunto de parâmetros é independente da avaliação de qualquer outra cadeia de caracteres. A aptidão daquela cadeia de caracteres, no entanto, é sempre definida com relação aos outros membros da população atual. No algoritmo genético, a aptidão é definida por: $f(x_i) / \sum_{i=1}^N f(x_i)$ onde $f(x_i)$ é a avaliação associada à cadeia de caracteres i e $\sum_{i=1}^N f(x_i)$ é o somatório da avaliação de toda a população, onde x_i representa o i -ésimo indivíduo e N , a população.

A função *fitness* também pode ser atribuída com base no grau de aptidão de um indivíduo em relação à população ou por métodos de amostragem, como seleção por torneio. A execução do algoritmo genético é um processo de dois estágios. O AG começa com uma população inicial gerada aleatoriamente e um processo de seleção é aplicado na população para criar uma população intermediária. Em seguida, recombinações (cruzamentos) e mutações são aplicados na população intermediária para criar a próxima geração. No algoritmo genético, o processo de passar da população atual para a população seguinte constitui uma geração.

5.2.3 Seleção dos pais

Todo AG inicia com a geração de uma **população inicial** de N indivíduos representados por cromossomos. Esta população inicial corresponde à possíveis soluções aleatórias. Os cromossomos na forma binária são gerados aleatoriamente pois não há nenhum conhecimento prévio sobre a função na região do espaço onde está a solução do problema.

O método da seleção de pais deve simular o mecanismo da seleção natural da mesma maneira que as espécies biológicas, onde pais mais capazes geram mais filhos, embora, os menos aptos também geram descendentes. Deve-se privilegiar os indivíduos com função de avaliação alta, mas não podemos desprezar indivíduos com baixa grau de avaliação, pois muitas vezes, esses indivíduos possuem características genéticas imprescindíveis para a solução do problema.

Indivíduos com maior valor serão considerados mais aptos, portanto receberão uma nota maior ou terão maior probabilidade de transmitirem seus genes para a geração seguinte. Inspirado no

processo de seleção natural dos seres vivos, o Algoritmo Genético seleciona os melhores cromossomos da população inicial (aqueles de alta aptidão) para gerar cromossomos filhos (variantes dos pais) gerados pelos operadores de *crossover* e *mutação*. Uma população intermediária (*matting pool*) é utilizada para alocar cromossomos de pais selecionados. Geralmente, os pais são selecionados com probabilidade proporcional à sua aptidão. Portanto, a probabilidade de seleção p_i de um cromossomo S_i com aptidão $f(x_i)$ é dada por:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}. \quad (5.1)$$

Tabela 5.1: Exemplo de uma população com os respectivos graus de aptidão.

Nº	Indivíduo	Aptidão($f(x_i)$)	% total	Área em °
1	10011	361	21	76
2	10101	441	26	94
3	11110	900	52	186
4	00011	0	1	4
$\sum f(x_i)$		1711	100	360

A tabela 5.1 apresenta quatro indivíduos com as suas respectivas aptidões. Percebe-se que o indivíduo nº 3 que tem a maior avaliação (52% de participação da população) e, portanto detém maiores chances de transmitir seus genes para a futura geração que o indivíduo nº 4 com apenas 1%.

A operação seleção para a reprodução pode ser implementada de várias formas, porém, o método mais utilizado é o da roleta onde a probabilidade de um indivíduo contribuir com descendentes para a próxima geração é expressa por um sorteio. A probabilidade de um indivíduo ser selecionado é função do seu valor de aptidão que será expressa por meio da área de uma roleta com todos os demais indivíduos da sua geração. Neste caso, indivíduos com valores de aptidão altos terão uma maior área no interior da roleta enquanto que indivíduos com valores menores estarão representados por áreas menores (Tabela 5.1 e figura 5.3)

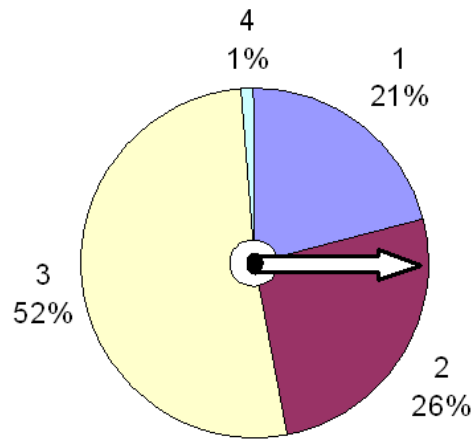


Figura 5.3: Sorteio de indivíduos para a operação de cruzamento.

Para selecionar os indivíduos que deverão compor uma operação de cruzamento (crossover), define-se uma função correspondente ao sorteio por uma roleta, onde o número de vezes que essa roleta gira depende de um número aleatório. A probabilidade de um indivíduo ser sorteado é dependente da sua aptidão e do tamanho da população. Esta operação é executada conforme a linguagem de alto nível a seguir:

1. Calculam-se as aptidões acumuladas $\left(\sum_{k=1}^N f_k\right)$, ordenando-as em ordem crescente, onde a aptidão f_i ou fitness é dada pela seguinte relação:

$$f_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{i=1}^N f(x_i)} \quad (5.2)$$

2. Gera-se um número aleatório r obtido por um distribuição normal, no intervalo $[0, \mathbf{total}]$, onde **total** é a soma de todas as aptidões
3. O cromossomo S_i a ser selecionado deverá estar situado na posição, onde a sua aptidão acumulada deverá ser maior que o valor de r , gerado aleatoriamente.

O algoritmo 5.2 detalha o funcionamento de uma roleta, onde a cada instante é sorteado um número aleatório $r \in [0, 1]$, de forma que um indivíduo (x_i) será selecionado caso a sua aptidão esteja compreendida na área correspondente a probabilidade sorteada (Figura 5.3). Os indivíduos sorteados irão para uma bacia de acasalamento (*matting pool*).

Algoritmo 5.2: Roda da Roleta

InícioAlgoritmo

Repita

$total \leftarrow \sum_{i=1}^N f(x_i)$ /* Soma das aptidões de todos os cromossomos da população */

$r \leftarrow rand(0, total)$

$totalparcial \leftarrow 0$

$i \leftarrow 0$

enquanto ($totalparcial \leq r$) **faça**

$i \leftarrow i + 1$

$totalparcial \leftarrow totalparcial + f_i$

fimenquanto

retorna cromossomo S_i

até completar população intermediária

FimAlgoritmo

5.2.4 Operador crossover

A idéia básica operador crossover (reprodução) é selecionar, em cada geração, os melhores indivíduos da população por meio de uma função de aptidão ou *fitness*. Indivíduos com um elevado valor de aptidão terão maior probabilidade de transmitir seus genes para uma nova geração por meio de um ou mais descendentes.

Na reprodução acontece a troca de características genéticas ou, no caso, a troca de segmentos entre os pares de indivíduos selecionados dando origem a uma nova geração. O objetivo do cruzamento, na realidade troca de genes, é fazer propagar as características dos indivíduos mais aptos da população corrente para futuras gerações.

Os indivíduos selecionados pela roleta serão transferidos para uma bacia de acasalamento (“*mating pool*”) onde o cruzamento é realizado em dois passos. O primeiro consiste em selecionar dois indivíduos de forma aleatória, o segundo em obter a posição de um par cromossomos onde haverá o corte para a troca de informações entre os dois indivíduos. Esta fase é marcada pela troca de segmentos entre “casais” de cromossomos selecionados para dar origem a novos indivíduos que formarão a população da próxima geração (Figura 5.4).

As formas mais comuns de reprodução em AGs são por meio de um ponto de cruzamento ou de dois pontos de cruzamento. No método de um ponto de cruzamento (single-point crossover), o cruzamento é realizado da seguinte forma: o ponto de quebra do cromossomo é escolhido

de forma aleatória ou não (posição fixa) dentro de uma posição do string que o representa, e a partir desse ponto se realiza a troca de material cromossômico entre os dois indivíduos, como representado na figura 5.4, onde, nesse caso, o ponto de cruzamento foi na posição 4 da cadeia de caracteres. Alguns AG são implementados utilizando uma **taxa de crossover** que significa que existe uma probabilidade alta, variando na ordem de 60% a 90% de ocorrer o cruzamento. Não ocorrendo o cruzamento, os filhos serão iguais aos pais (isto permite que algumas soluções sejam preservadas).

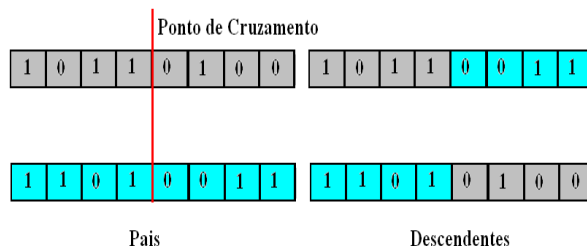


Figura 5.4: Operação de Cruzamento.

5.2.5 Operador de mutação

Depois gerados os filhos ou os descendentes, entra a ação da mutação que tem associada, uma probabilidade extremamente baixa (geralmente menor que 1%). A operação de mutação consiste na troca de um gene aleatório de um indivíduo (Figura 5.5) e evita que uma dada posição fique estagnada em um valor, além de possibilitar que se chegue em qualquer ponto do espaço de busca. O mais comum é estabelecer uma probabilidade de um determinado cromossomo sofrer uma mutação. Se esta probabilidade for menor que o valor pré-estabelecido, então o operador atua sobre o gene em questão alterando-lhe um dos genes (string). Outro tipo de mutação consiste em considerar o número de gerações ou o tempo decorrido, já que em um algoritmo genético, é esperado que ao fim de algumas gerações, os resultados comecem a convergir para valores próximos do ótimo.

5.2.6 Módulo de população e elitismo

O módulo de população é uma parte do algoritmo que executa o controle da população e por uma questão de simplicidade, o tamanho da população permanecerá constante ao longo das gerações. Computacionalmente, significa que a população será armazenada em um vetor de tamanho constante e que os pais terão que ser substituídos conforme seus filhos vão nascendo. Embora possa parecer estranho, no mundo real este fato pode acontecer, pois num ambiente com recursos

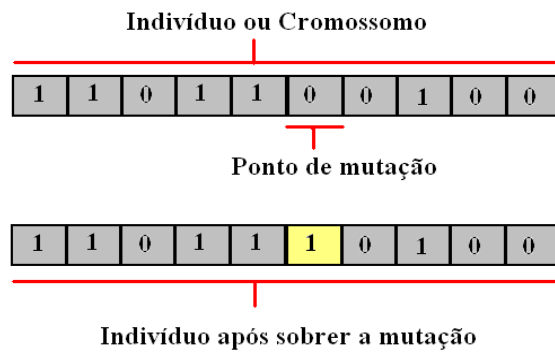


Figura 5.5: Operação de Mutação.

limitados (alimento, condições ambientais, etc), a população se mantém relativamente constante ao longo das gerações.

No módulo de população todos os pais são descartados e os filhos copiados nas posições ocupadas anteriormente pelos pais, tornando-se pais na nova geração. Existem outras maneiras mais produtivas de realizar essa mudança, tais como escolher os sucessores, evitar duplicatas e outras alternativas.

O elitismo é uma pequena alteração no módulo de população que quase não altera o tempo processamento, mas que garante que o desempenho do GA sempre cresce com o decorrer das gerações. Consiste em admitir que os melhores indivíduos de cada geração não devem “morrer” junto com a sua geração, mas sim passar para a próxima geração visando garantir que seus genótipos sejam preservados.

Este procedimento apesar de simples, colabora de forma decisiva para o melhor desempenho do AG, pois mantém-se dentro da população os esquemas responsáveis pelas boas avaliações das melhores soluções.

5.3 CODIFICANDO UM PROBLEMA PARA ALGORITMO GENÉTICO

Antes de um AG ser executado, deve ser planejada uma codificação adequada (ou representação) para o problema. Também é necessário definir uma função que atribui um grau de aptidão para cada indivíduo codificado.

Assume-se que uma solução em potencial para um problema pode ser representada por um conjunto de parâmetros (por exemplo, os parâmetros que maximizam a tensão cisalhante). Estes parâmetros (conhecidos como genes) estão unidos para formar uma cadeia de valores (muitas vezes referida como um cromossomo). Se o problema é maximizar uma função real de duas variáveis, $f(x, y)$, podemos representar cada variável por um binário de n bits. Os cromossomos,

portanto, contém dois genótipos compostos por binários de n dígitos cada. O conjunto específico de genes é chamado de genótipo que contém as informações necessárias à construção de um organismo que é referido como o fenótipo.

A aptidão de um indivíduo depende do desempenho do fenótipo. Isto pode ser inferido a partir do genótipo, isto é, pode ser computado a partir do cromossomo, usando a função fitness. O tamanho do espaço de busca está relacionado ao número de bits utilizado na codificação do problema. Para uma seqüência de bits de codificação de comprimento l , o tamanho do espaço de busca é 2^l .

A representação cromossomial é fundamental para a codificação do algoritmo genético. Basicamente, consiste em traduzir a informação do problema para ser tratado de maneira computacional. Daí, quanto mais ela for adequada ao problema, melhor será a qualidade dos resultados. Muito embora sabe-se que a representação cromossômica deve ser totalmente aleatória deve-se tomar as seguintes precauções:

- A representação deve ser a mais simples possível;
- Se houver soluções proibidas ou que não devem aparecer, então estas não devem possuir representações;
- Se o problema impuser algum tipo de restrição, esta deverá estar implícita na representação.

Estas precauções foram expressas, inicialmente, por Holland em seu livro seminal [76] e hoje em dia, pelos motivos históricos e pelo fato de ser muito simples, é amplamente adotada.

Inicialmente deve-se formar uma população composta por um número de indivíduos (string binária) que configurem valores no domínio do espaço de busca. A técnica mais empregada consiste em realizar uma representação discreta de uma certa quantidade de valores dentro do domínio $[x_{min}, x_{max}]$ de maneira que a distância entre pontos consecutivos seja menor que um valor de tolerância estabelecida (tol):

$$\frac{x_{max} - x_{min}}{2^l - 1} < tol, \quad (5.3)$$

onde:

x_{min} representa o limite inferior no domínio do espaço da busca da solução;

x_{max} representa o limite superior no domínio do espaço da busca da solução;

tol representa a precisão desejada;

l , o comprimento da cadeia de bits (cromossomo).

Portanto, cada ponto do espaço de busca será representado por um número binário de comprimento l , começando por 0...0 que representa x_{min} e terminando por 1...1 que é x_{max} .

O comprimento (l) da cadeia de bits (cromossomo) de indivíduo é obtido por meio da seguinte relação:

$$l = \log_2 \left(1 + \frac{x_{max} - x_{min}}{tol} \right). \quad (5.4)$$

Exemplificando, em um intervalo $x \in [0, 1]$ e uma precisão de $tol = 5 \times 10^{-3}$, o comprimento da cadeia de bits será:

$$l = \log_2 \left(1 + \frac{1 - 0}{0.005} \right) = 8$$

Nesse caso, a população será composta por indivíduos com cromossomos de comprimento 8 bits que corresponde a precisão 0.005 no intervalo $x \in [0, 1]$.

5.4 UMA APLICAÇÃO PRÁTICA

Os AGs possuem inúmeras aplicações, todas relacionadas de uma forma ou de outra a uma análise multidimensional, onde se busca uma solução global. O material genético é utilizado para codificar parâmetros no domínio do espaço da solução, e a partir daí, encontrar a melhor solução por meio de um processo otimizado.

Nesta seção para entender melhor o funcionamento dos algoritmos genéticos, vamos resolver um problema de maximização de uma função $z = f(x, y)$ cujas variáveis independentes x e y pertencentes ao intervalo $[0, 15]$:

$$z = \left| x y \sin \left(\frac{y\pi}{4} \right) \right|. \quad (5.5)$$

Note que a função expressa na equação 5.5 representada no gráfico da figura 5.6 é multimodal onde uma abordagem do tipo *hill climbing* não seria adequada, pois uma inicialização qualquer poderia conduzir a um espaço onde seria computado como solução um dos máximos locais e, portanto, não resolveria o problema.

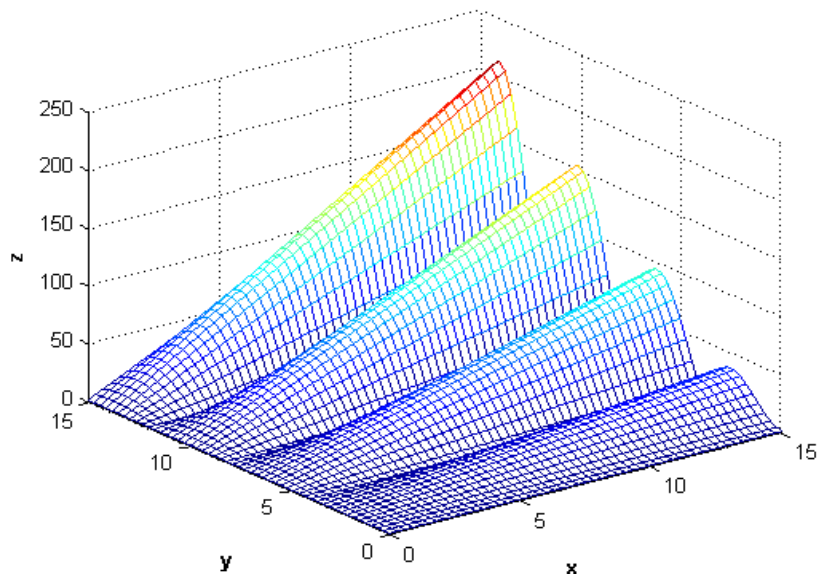


Figura 5.6: Gráfico da função $f(x, y) = |x y \sin(y\pi/4)|$.

Como é possível que esta função retorne um valor igual a zero, usaremos uma função de avaliação $g(x, y) = 1 + f(x, y)$ para evitar que por ocasião do sorteio da roleta no módulo seleção algum indivíduo deixe de ser sorteado. Os resultados serão apresentados na forma $f(x, y) = g(x, y) - 1$.

O primeiro passo consiste em transformar dados do mundo real em uma população composta por cromossomos. Em outras palavras, transformar uma série de pontos ordenados representados na forma real pertencente ao intervalo das soluções, em uma cadeia de bits que é a representação mais tradicional de um AG. Cabe destacar que existem outras maneiras de representação valores em AG, mas neste trabalho será considerado apenas a representação por uma seqüência de caracteres binários ou simplesmente *string* binária (0,1) e, cada elemento desta string é considerado um *gene*.

O espaço de busca é o conjunto de todas as configurações que o cromossomo pode assumir. Se o cromossomo representa n parâmetros de uma função, então o espaço de busca é um espaço de n dimensões.

Quanto maior a precisão, maior será o tamanho da cadeia de bits dos cromossomos que conseqüentemente refletirá no tempo de processamento e, portanto, faz-se necessário estabelecer critérios para não sobrecarregar o AG com operações desnecessárias. Para obter a precisão deve-se considerar o domínio do espaço de busca, no caso desse exemplo, as duas variáveis estão situadas nos intervalos $x \in [0, 15]$ e $y \in [0, 15]$.

Utilizando a equação 5.4 onde x_{max} , x_{min} , y_{max} , y_{min} correspondem aos extremos do intervalo fechado das variáveis x e y , pode-se determinar a quantidade de bits referente à precisão desejada. A tabela 5.2 apresenta um estudo exploratório que relaciona a precisão para o intervalo da função com o tamanho da cadeia de bits. Note que quanto maior a precisão, maior será o número de bits.

Tabela 5.2: Precisão do ponto conforme o tamanho da cadeia de bits.

Precisão Requerida	t (Equação 5.4)	Nº de Bits
0.1	7.2	7
0.01	10.5	10
0.001	13.9	14
0.0001	17.1	17
0.00001	20.5	20
0.000001	23.8	24
0.0000001	27.2	27

Funções objetivos com múltiplos parâmetros ($F = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$) têm seus parâmetros representados na mesma cadeia de bits, com cada uma ocupando uma parte da cadeia, assim, neste exemplo, para uma precisão de 0,001 cada variável será composta por genótipos de 14 *bits*, o que implica em um cromossomo de 28 *bits*.

Após estabelecido o tamanho do cromossomo, para se achar o valor correspondente a uma dada cadeia de caracteres deve-se realizar o seu *mapeamento*, ou seja, determinar a correspondência entre o cromossomo e o intervalo do problema. O processo tem início pela decodificação do cromossomo que consiste em converter S_1 da base 2 para a base 10.

Considere, por exemplo, o seguinte cromossomo:

$S_1 = 1111010101011101110000101110$ que corresponde ao seguinte valor na base 10:

$$b_{10} = (1111010101011101110000101110)_2 = 257285166$$

Como b_{10} é um número pertencente ao intervalo $[2^l - 1]$ onde l é o tamanho da cadeia de bits, então é necessário mapeá-lo para o intervalo do problema $x, y \in [0, 15]$ por meio da seguinte transformação:

$$x_i = x_{min} + (x_{max} - x_{min}) \frac{b_{10}}{2^l - 1} \quad (5.6)$$

Assim, o valor correspondente para S_1 será $x_1 = 14.3769290$ para a precisão escolhida (0.0000001).

Após determinado o comprimento da cadeia, para cada cromossomo S_i atribui-se uma aptidão

f_i que é uma nota que mede o quão boa é a solução codificada em S_i . Este grau de aptidão denominada *fitness* está relacionada com o valor da função objetivo.

Por se tratar de um exemplo e que partes do programa AG para esta função serão apresentados nesse trabalho, consideraremos um espaço de busca com 10 pontos. O conjunto desses pontos formará uma população de 10 indivíduos de maneira que cada um receberá um valor chamado de grau de aptidão que corresponde ao valor da função objetivo. A taxa de mutação será de 1/15.

A população inicial consiste nos indivíduos relacionados na tabela 5.3 e representado por pontos no gráfico da figura 5.7. Nessa tabela, as variáveis x e y foram obtidas aleatoriamente cujos valores reais (base decimal) foram codificados para a base binária representadas por cromossomos compostos por uma cadeia de 28 caracteres, enquanto que a função objetivo $g(x, y)$ será utilizada para obter o *grau de aptidão* de cada cromossomo.

Tabela 5.3: População Inicial.

Nº	Cromossomo S_i	x_i	y_1	$f_i = g(x_i, y_i)$
1	0110000101100100000011000011	5,7	0,2	1,1
2	1001000101011101010110010011	8,5	5,1	32,8
3	0001001101101100101001100001	1,1	2,4	3,6
4	0000110111010011001011010101	0,8	11,9	1,6
5	1000011111100001001111101011	8,0	4,7	19,6
6	1100011101110110000111010011	11,7	7,9	6,2
7	1110111100011000101010011010	14,0	2,5	33,3
8	0010000101000010011010000110	1,9	9,0	13,7
9	1001000110011101000011010100	8,5	3,9	2,5
10	0111100000101010100111011100	7,0	9,8	69,3
Somatório das avaliações ($\sum f_i$)				183,7

Após gerada aleatoriamente a população inicial, cada indivíduo da população é representado na roleta por uma área proporcional ao seu índice de aptidão (Figura 5.8). Assim, indivíduos com alta aptidão são representados uma porção maior da roleta, enquanto os de aptidão mais baixa possuem uma pequena área. Finalmente, a roleta é girada e são sorteados indivíduos que comporão a próxima geração. Cada porção da roleta corresponderá a uma probabilidade de um indivíduo ser sorteado.

Uma seleção composta por 10 indivíduos obtidos a partir da população inicial (Tabela 5.3) foi sorteada entre o intervalo 0 e a soma das avaliações (183,7). Os números sorteados, considerados os filhos (nova geração) são dispostos na tabela 5.4, de maneira que a 1ª e a última posição são ocupadas pelo indivíduo de maior aptidão. Este procedimento chamado de elitismo está sendo

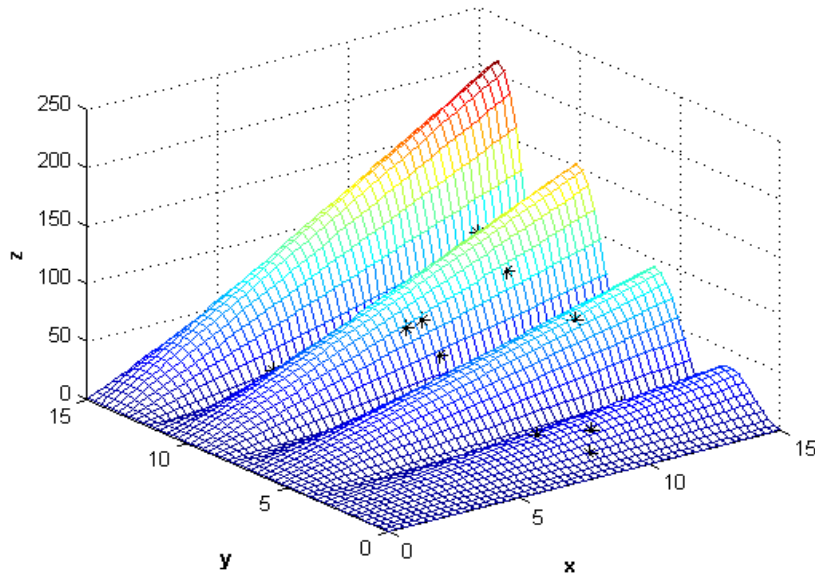


Figura 5.7: Gráfico da função $f(x, y) = |xy \sin(y\pi/4)|$ apresentando a 1ª população gerada aleatoriamente.

Cromossomo	$g(x,y)$	Intervalo
0110000101100100000011000011	1,1	[0;1,1[
1001000101011101010110010011	32,8	[1,1;33,9[
0001001101101100101001100001	3,6	[33,9;37,5[
0000110111010011001011010101	1,6	[37,5;39,1[
1000011111100001001111101011	19,6	[39,1;58,7[
1100011101110110000111010011	6,2	[58,7;64,9[
1110111100011000101010011010	33,3	[64,9;98,2[
0010000101000010011010000110	13,7	[98,2;111,9[
1001000110011101000011010100	2,5	[111,9;114,4[
0111100000101010100111011100	69,3	[114,4;183,7[

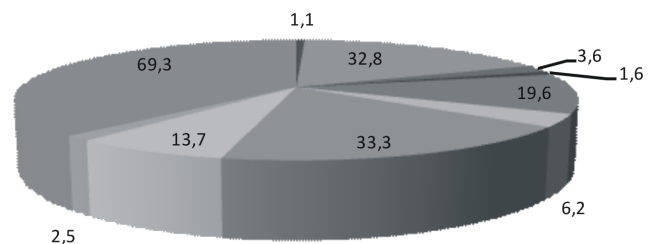


Figura 5.8: Roleta cuja área representa o índice de aptidão para cada indivíduo.

empregado nesse AG e tem por objetivo garantir que melhores indivíduos de uma população não sejam perdidos.

Os indivíduos selecionados na etapa anterior são cruzados da seguinte forma: a lista de indivíduos selecionados é embaralhada aleatoriamente criando-se, desta forma, uma bacia de acasalamento (*matting pool*). Cada indivíduo selecionado é então cruzado com um outro que pertence também a lista dos selecionados. Os pontos de corte são obtidos aleatoriamente e é interessante notar que podem existir filhos iguais aos pais. Não há nenhuma objeção a esse fato, pois pode ocorrer o cruzamento de dois indivíduos idênticos, principalmente após um determinado número

Tabela 5.4: Sorteio pela roleta.

Número sorteado	Cromossomo
154,8	0111100000101010100111011100
112,3	1001000110011101000011010100
38,6	1001000101011101010110010011
23,4	0000110111010011001011010101
154,8	0111100000101010100111011100
71,7	1110111100011000101010011010
89,2	1110111100011000101010011010
35,7	0000110111010011001011010101
123,5	0111100000101010100111011100
154,8	0111100000101010100111011100

de gerações ou quando os pais têm prefixo ou sufixo comuns. A figura 5.9 mostra a bacia de acasalamento representada pela lista de cromossomos à esquerda, onde os “casais” terão parte de seus genes trocados através de cortes aleatórios (representados por segmentos de retas verticais) em suas cadeias de caracteres. A coluna da direita corresponde aos “filhos” ou à 2ª geração desse Algoritmo Genético.

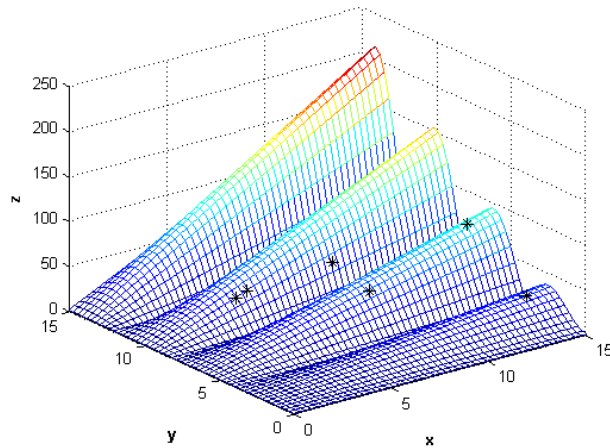


Figura 5.9: Operação de cruzamento aplicada aos pais selecionados.

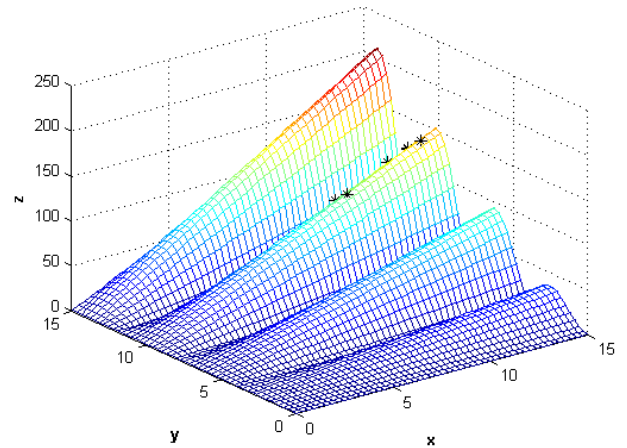
Finalmente, com uma probabilidade de 1/15, a mutação é aplicada para garantir uma maior varredura do espaço de busca e evitar que o algoritmo genético convirja prematuramente para máximos locais. A mutação é efetuada alterando-se o valor de um gene de um indivíduo sorteado aleatoriamente com uma determinada probabilidade, denominada probabilidade de mutação, ou seja, vários indivíduos da nova população podem ter um de seus genes alterado aleatoriamente.

O processo usando os operadores genéticos seleção, cruzamento e mutação é repetido até que

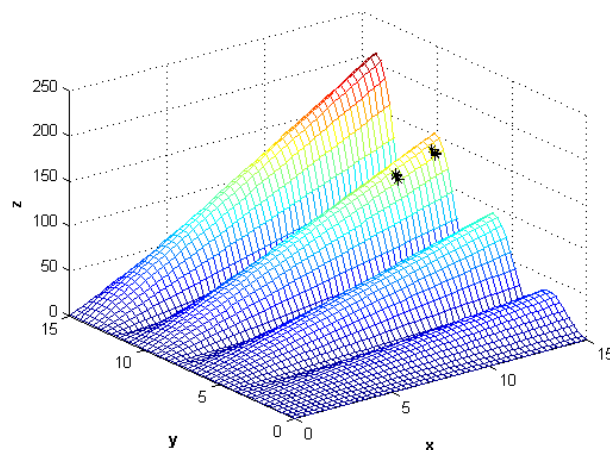
um critério de parada seja alcançado. Um dos critério mais simples consiste em estabelecer um número máximo de gerações, mas existe outras formas, tais como, a aptidão do melhor indivíduo em conjunto com a limitação do número de gerações, um erro abaixo de um valor especificado, entre outros. Nesse exemplo empregamos 20 gerações.



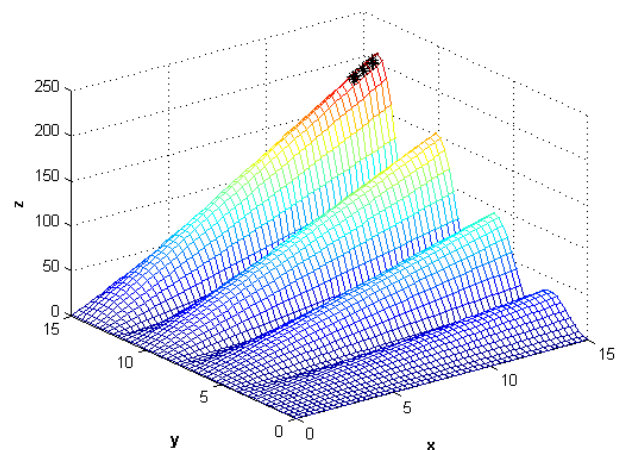
(a) 3ª Geração



(b) 8ª Geração



(c) 10ª Geração



(d) 20ª Geração

Figura 5.10: Conjunto de gerações para $f(x, y)$.

Os gráficos da figura 5.10 apresentam a evolução de uma população, inicialmente gerada aleatoriamente até a 20ª geração. Nesses gráficos podemos perceber nitidamente a migração dos pontos em direção aos máximos. Note que na 10ª geração[Figura 5.10(c)] a maioria dos indivíduos está concentrada em um máximo local, mas graças ao operador de mutação que permite que durante à execução do AG exista mecanismo de busca em todo o domínio do problema, a solução não ficou estagnada no máximo local. Assim, na 20ª geração, a maioria dos indivíduos alcançou o valor máximo da função de maneira que para o exemplo proposto foi: $\max\{f(x, y)\} = 207,8135$.

Concluindo, devemos considerar que um AG pode ser empregado em situações onde a solução por métodos convencionais muitas vezes leva um custo bastante elevado. Não foram considerados, no processo apresentado, questões como envelhecimento, atração sexual e outras características inerentes à condição humana como o conflito de gerações, stress, etc. O algoritmo apresentado neste capítulo é o mais simples dentro dos AGs e muitos melhoramentos podem ser implementados de maneira torná-lo mais eficiente.

6 RESULTADOS

6.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foram apresentados o conceito de plano crítico, os procedimentos usuais para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante no plano de corte contendo uma história de tensão periódica e alguns modelos de fadiga multiaxial clássicos segundo essa abordagem. Mais ainda, propôs-se um novo procedimento para o cálculo da τ_a e descreveu-se uma técnica de otimização baseada no conceito de algoritmos genéticos que pode constituir uma importante ferramenta de busca do plano crítico.

Nesse capítulo, extraiu-se da literatura uma série de quarenta e dois dados experimentais referentes à sete ligas de aço sob condições de limite de fadiga multiaxial, envolvendo carregamentos combinados de flexão/torção; tração/tração e tração/tração/torção com sinais harmônicos em fase e fora de fase, em frequências síncronas e assíncronas.

Esse amplo número de resultados experimentais foi relacionado com o objetivo de comparar as estimativas fornecidas pelo modelos de Findley e de Susmel e Lazzarin quando τ_a é calculada pelos métodos do MCC e MRC. Também, conduziu-se uma avaliação crítica sobre as dificuldades encontradas (de ordem conceitual e numérica) na determinação do plano crítico para os dois modelos considerando condições típicas de carregamentos como os utilizados nos dados coletados. Por fim, o capítulo é encerrado com uma avaliação quantitativa e qualitativamente sobre a eficácia do método de algoritmo genético em determinar τ_a .

6.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais constantes nas tab 6.1-6.5 foram obtidos dos testes descritos na base de dados de Liu [77], exceto os referentes aos aços 30NCD16 e 39NiCrMo3 obtidos de Froustey [78], bem como os produzidos por Bernasconi [79] e de Nishihara e Kawamoto [80]. As referências originais de onde Liu extraiu os dados compilados em sua base estão na tabela 6.1 que também apresenta os limites de resistência de fadiga à flexão e à torção alternada f_{-1} e t_{-1} , respectivamente. Também, relata-se nessa tabela a razão de fadiga $r = \tau_{-1}/\sigma_{-1}$ e a tensão de escoamento σ_y para cada material. Deve-se notar que de acordo com a classificação quanto à resposta a fadiga [20], esses metais são classificados como *metais duros* ($1/\sqrt{3} < r < 0.1$) exceto o aço St35 que é considerado *aço macio* ($r = 1/\sqrt{3}$).

Nas tabela 6.2 - 6.5, os dados foram dispostos de acordo com o tipo das histórias de carrega-

mento adotado em cada investigação experimental. A terminologia é a seguinte:

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t) & \sigma_{xy}(t) & 0 \\ & \sigma_y(t) & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_x(t) &= \bar{\sigma}_x + \sigma_{xa} g_x(\omega t), \\ \sigma_y(t) &= \bar{\sigma}_y + \sigma_{ya} g_y(\lambda_y \omega t - \beta_y), \\ \sigma_{xy}(t) &= \bar{\sigma}_{xy} + \sigma_{xya} g_{xy}(\lambda_{xy} \omega t - \beta_{xy}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde:

$\sigma_{xa}, \sigma_{ya}, \sigma_{xya}$ são as amplitudes das tensões;

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}$ são as tensões médias;

λ_y razão entre as frequências angulares de σ_{xa} e σ_{ya} ;

λ_{xy} razão entre as frequências angulares de σ_{xa} e σ_{xya} ;

β_y ângulo de fase entre as tensões σ_{xa} e σ_{ya} ;

β_{xy} ângulo de fase entre as tensões σ_{xa} e σ_{xya} ;

ω é a frequência angular; e

g_x, g_y e g_{xy} são funções periódicas.

Tabela 6.1: Limite de escoamento, limites de fadiga para flexão e torção totalmente alternados e razão de fadiga para os aços.

Material	f_{-1} [MPa]	t_{-1} [MPa]	r	σ_Y [MPa]	Refer.
Aço Duro	319.9	196.2	0.61	–	[80]
25CrMo4 (a)	340	228	0.67	660	[77; 81; 82]
34Cr4 (a)	415	259	0.62	700	[77; 83]
34Cr4 (b)	343	204	0.59	550	[77; 83]
GGG60	275	249	0.91	516	[77; 83]
25CrMo4 (b)	340	228	0.67	660	[77]
St35	230	130	0.57	340	[77]
30NCD16	585	405	0.69	1020	[78]
39NiCrMo3	367.5	265	0.72	625	[79]

A Tabela 6.2 apresenta os parâmetros para os ensaios de Nishihara & Kawamoto [80] descrevendo ensaios de flexão e torção em situações no limiar da resistência à fadiga para aço “duro” em fase e fora de fase, com mesma frequência de solicitação e sem a presença de carregamentos médios.

As figuras 6.1 a 6.4 apresentam os diagramas de fase (no espaço das tensões) e as histórias de tensões para alguns testes típicos da base de dados do presente trabalho, onde é possível identificar de maneira gráfica informações associadas à forma da onda (harmônica ou não) e das componentes de tensão provocados pelos carregamentos.

Tabela 6.2: Testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase.

Teste	σ_{xa} [MPA]	σ_{xya}	β_{xy} °
<i>Aço Duro</i>			
1	138.1	167.1	0
2	140.4	169.9	30
3	145.7	176.3	60
4	150.2	181.7	90
5	245.3	122.6	0
6	249.7	124.8	30
7	252.4	126.2	60
8	258.0	129.0	90
9	299.1	62.8	0
10	304.5	63.9	90

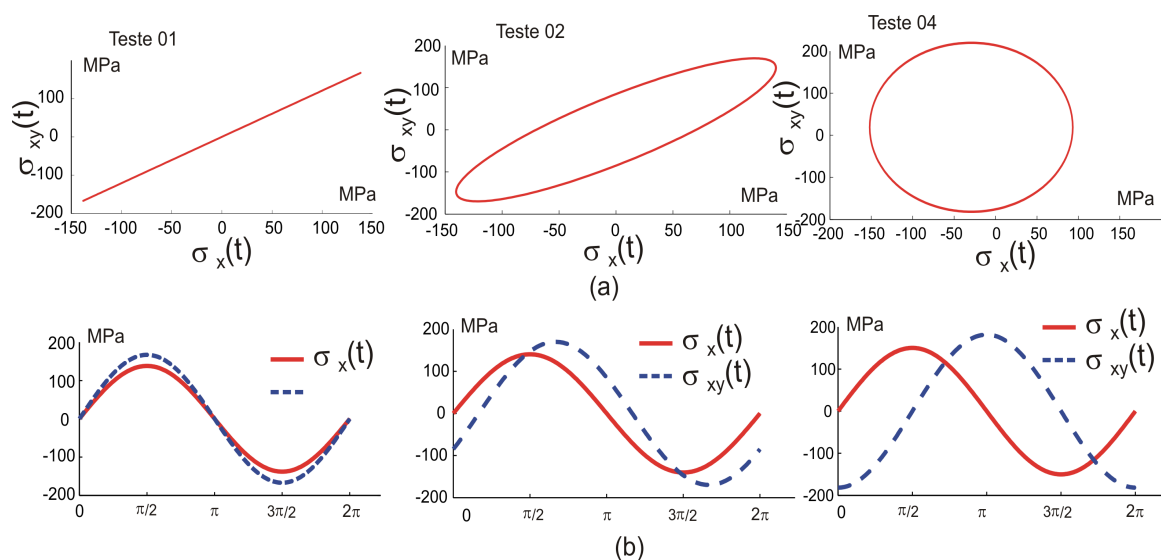


Figura 6.1: Gráficos referentes aos testes 01, 02 e 04 da tabela 6.2. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_{xy}(t)$). (b) histórias de tensões.

Segundo esta lógica, a figura 6.1 apresenta os diagramas de fase entre $\sigma_x(t)$ e $\sigma_{xy}(t)$ e as histórias de tensão $\sigma_x \times t$ e $\sigma_{xy} \times t$ para os testes 1, 2 e 4 relatadas na tabela 6.2. Pode-se notar a existência de carregamentos proporcionais (teste nº 1) e não proporcionais (testes nºs 2 e 4) defasados de 60° e 90°, respectivamente.

Uma série de carregamentos combinados envolvendo histórias axiais e torsional foram aplicados aos aços 34Cr4(b) e 25CrMo4(b) no regime síncrono, porém com existência de ângulos de

Tabela 6.3: Testes no estado plano de tensões para tensões harmônicas e síncronas.

Teste	$\bar{\sigma}_x$	σ_{xa}	$\bar{\sigma}_y$	σ_{ya}	$\bar{\sigma}_{xy}$	σ_{xya}	β_y	β_{xy}
	[MPa]						°	°
<i>Aço 34Cr4 (b)</i>								
11	250	205	250	205	0	96	0	0
12	214	175	214	175	0	82	180	0
13	221	181	221	181	85	85	0	0
14	238	195	238	195	92	92	0	90
15	234	192	234	192	90	90	60	90
16	220	180	220	180	85	85	180	90
<i>Aço 25CrMo4 (b)</i>								
17	240	205	220	205	0	102.5	60	90
18	340	185	220	185	0	92.5	180	90
19	255	208	210	208	0	104	0	90
20	255	212	210	212	0	106	0	180
21	255	225	210	225	0	113	60	90
22	255	222	210	222	0	111	90	45
23	255	205	210	205	0	103	90	90
24	255	215	210	215	0	108	90	135
25	255	188	210	188	0	94	180	0
26	255	224	210	224	0	112	180	90
27	255	215	210	215	90	108	90	135

fase entre os carregamentos e com componentes médios (Tabela 6.3).

Na figura 6.2(a) pode-se observar o diagrama de fase no espaço das tensões $\sigma_x \times \sigma_y \times \sigma_{xy}$ nos testes n^{os} 11, 19 e 21, sendo que no teste 19 há um ângulo de fase (β_{xy}) entre σ_{xa} e σ_{xya} de 90°, enquanto que no teste 21 são observados dois ângulos de fase: 90° (β_{xy}) entre σ_{xa} e σ_{xya} e de 60° (β_y) entre σ_{xa} e σ_{ya} . As histórias de tensões para esses testes estão representados na figura 6.2(b).

A tabela 6.4 descreve os ensaios para cinco ligas de aço submetidas a carregamentos assíncronos com razão de frequência angular entre σ_{xya} e σ_{xa} , denotada por λ_{xy} variando entre 0.25 a 8. Nesse conjunto de experimentos, ressalta-se, no teste n^o 38, a existência do ângulo de fase entre σ_{xya} e σ_{xa} no valor de 90°. Este conjunto de experimentos está representado graficamente pelos testes 29, 34 e 39 cujas figuras 6.3(a) e (b) apresentam os digramas de fase no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_{xy}(t)$ e a história de tensões, respectivamente.

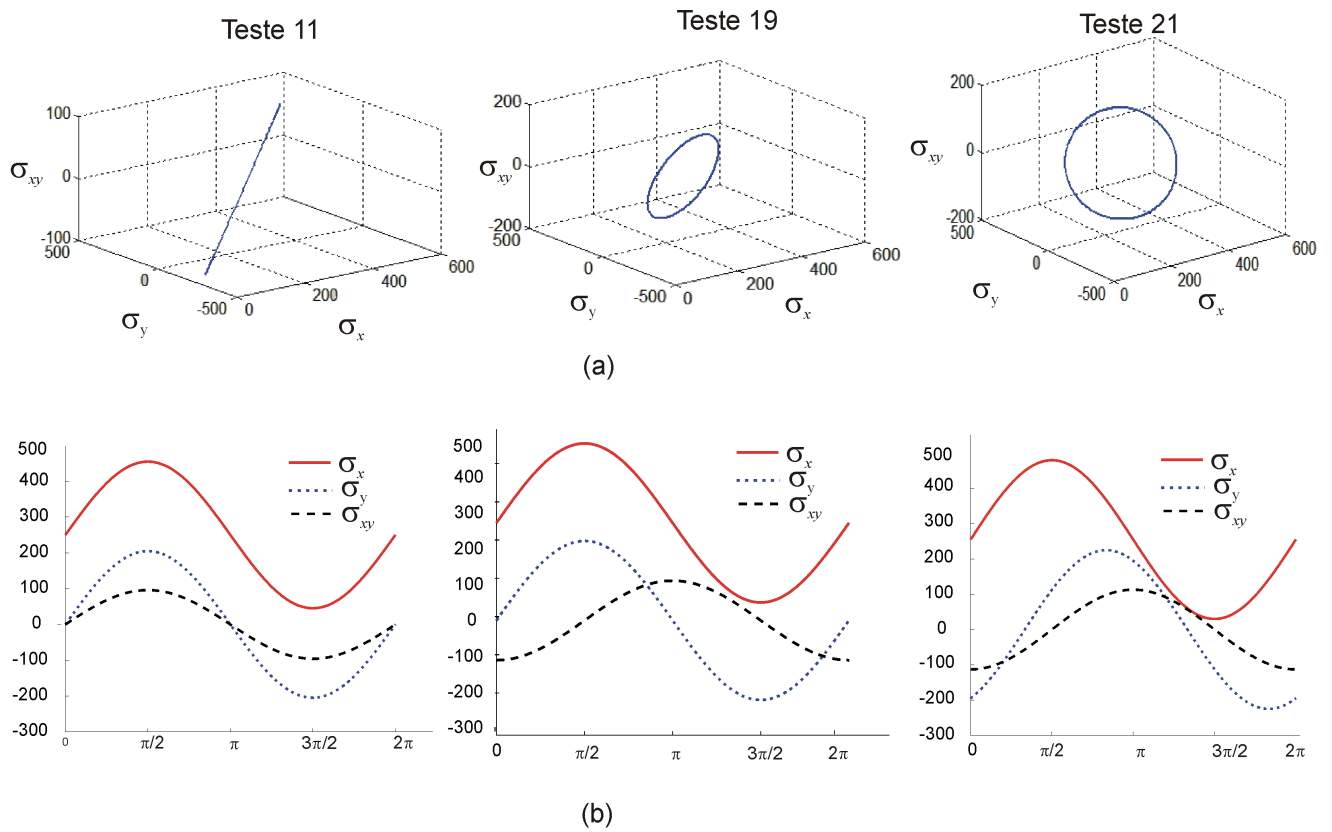


Figura 6.2: Gráficos referentes aos testes n^{os} 11, 19 e 21 da tabela 6.3. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t) \times \sigma_{xy}(t)$). (b) histórias de tensões.

Por fim, experimentos com carregamento tração/tração envolvendo os aços *34Cr4(b)* e *St35* com razão de frequência λ_y entre σ_{xa} e σ_{ya} igual a 2 são descritos na tabela 6.5. No teste n^o 42 podemos identificar na figura 6.4(a), a influência do ângulo de fase ($\lambda_y = 90^\circ$) no diagrama de fases no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$. Ainda são apresentados pela figura 6.4(b) as histórias de tensões para estes testes.

Tabela 6.4: Testes de flexão e torção, harmônicos, síncronos e assíncronos.

Teste	σ_{xa}	σ_{xya}	λ_{xy}	β_{xy}
	[MPa]			°
<i>Aço 34Cr4 (a)</i>				
28	263	132	4	0
<i>Aço GGG60</i>				
29	186	93	0.25	0
30	185	93	4	0
<i>Aço 30NCD16</i>				
31	285	285	0.25	0
32	290	290	4	0
<i>Aço 39NiCrMo3</i>				
33	294.5	170.0	1	0
34	259.5	150.0	2	0
35	266.0	153.6	3	0
<i>Aço 25CrMo4 (a)</i>				
36	210	105	0.25	0
37	220	110	2	0
38	242	121	2	90
39	196	98	8	0

Tabela 6.5: Testes biaxiais com tensões harmônicas assíncronas.

Teste	$\bar{\sigma}_x$	σ_{xa}	$\bar{\sigma}_y$	σ_{ya}	λ_y	β_y
	[MPa]					°
<i>Aço 34Cr4 (b)</i>						
40	244	200	244	200	2	0
<i>Aço St35</i>						
41	143	130	143	130	2	0
42	154	140	154	140	2	90

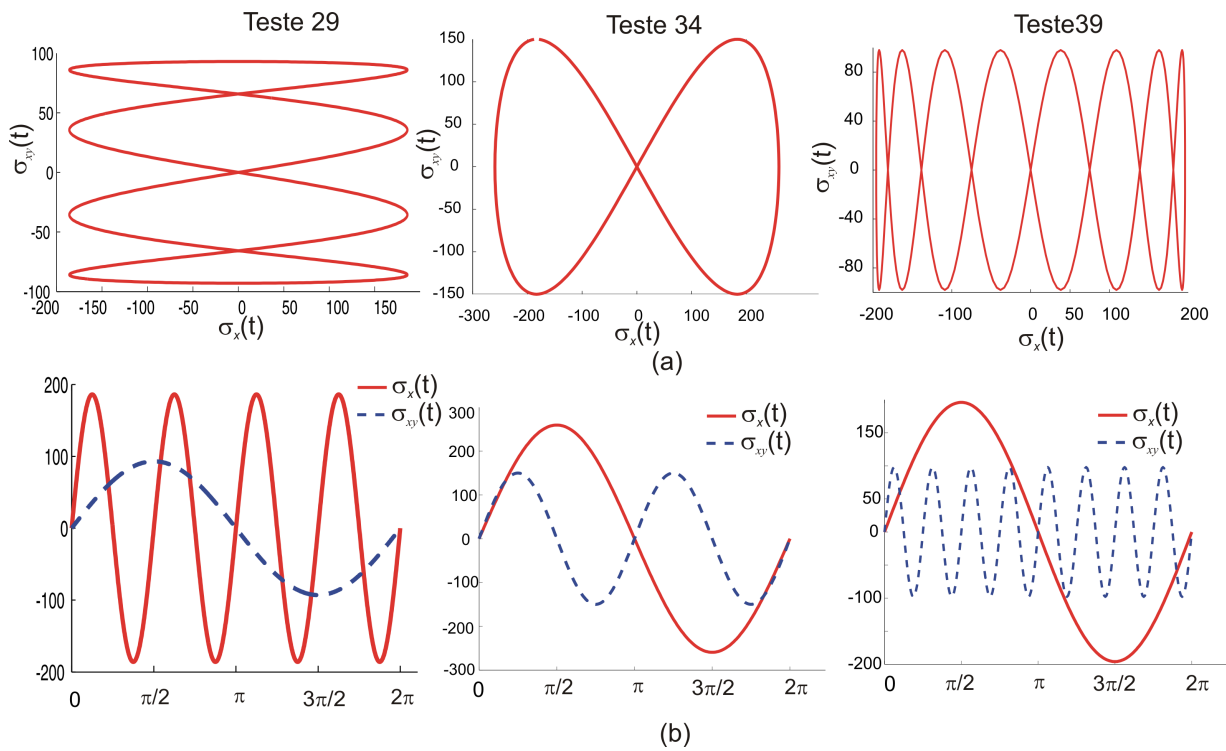


Figura 6.3: Gráficos referentes aos testes n^{os} 29, 34 e 39 da tabela 6.4. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t) \times \sigma_{xy}(t)$). (b) histórias de tensões.

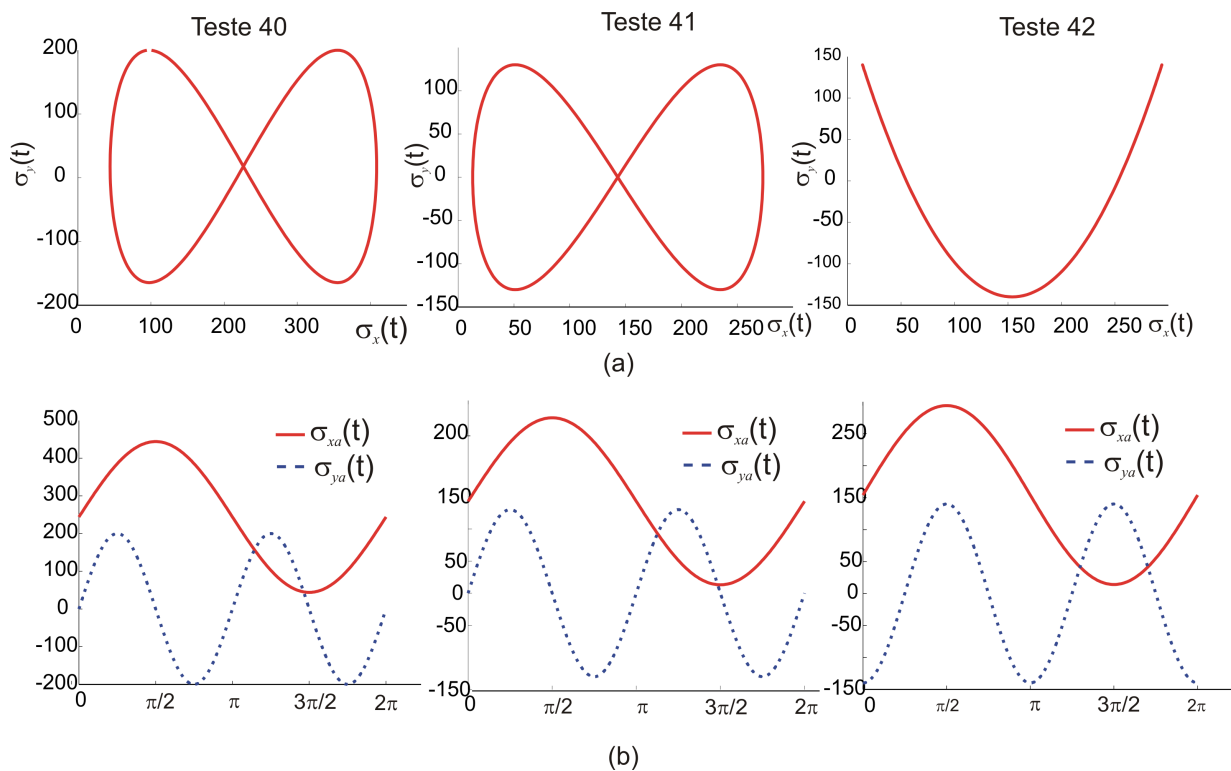


Figura 6.4: Gráficos referentes aos testes n^{os} 40, 41 e 42 da tabela 6.5. (a) diagramas de fase (no espaço das tensões $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t)$). (b) histórias de tensões.

6.3 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste trabalho, dois processos para a discretização e busca dos planos de corte foram investigados. O primeiro, denominado busca exaustiva ou método convencional executa uma varredura intensiva dos planos de corte na pesquisa pela maior amplitude da tensão cisalhante. No entanto, a despeito deste procedimento fornecer uma visão mais detalhada da evolução das componentes da tensão plano a plano, ele também pode se tornar excessivamente caro, sob o ponto de vista computacional, em função do aumento geométrico do número desses planos de corte.

Na tentativa de diminuir o elevado tempo de processamento na busca do plano crítico, característico do processo convencional, aplicou-se o Algoritmo Genético (AG) que é um método de otimização baseado nos mecanismos da seleção natural, detalhado no capítulo 5. Ao contrário do método convencional onde a busca dos planos de cortes é discretizada em valores pré-estabelecidos, no AG, os planos de corte são gerados aleatoriamente.

A plataforma computacional utilizada foi um PC, com 2 MB de memória RAM, processador AMD Athlon® 64 X2 Dual Core Processor 3600+. Os algoritmos de busca e rotinas para o MCC e MRC, para os processos convencional e AG foram implementados no pacote comercial Matlab® [72].

6.3.1 Processo Convencional

Neste processo serão considerados, na busca do plano crítico, dado um determinado sistema de referência, valores incrementais pré-estabelecidos para os planos de corte de modo que permitam obter uma boa estimativa da máxima amplitude da tensão cisalhante. Embora o valor obtido seja apenas aproximado, observaremos que uma pesquisa mais elaborada dessa quantidade associaria um custo computacional muito mais elevado, sem um ganho de qualidade correspondente.

Por se tratar de um processo numérico, o primeiro passo foi estabelecer parâmetros que aplicados aos algoritmos do MCC e MRC garantisse a qualidade dos resultados dentro do menor tempo de processamento. Além disso, devemos lembrar que o tempo de processamento para obter a amplitude da tensão cisalhante não depende apenas das discretizações dos planos de corte, mas, também da discretização da história de tensões e das condições restritivas inerentes em cada método (MCC ou MRC). Por exemplo, o tempo de processamento do método do menor círculo sofre influência do fator de expansão do raio do círculo (χ) e de um fator de tolerância (tol). Neste trabalho não se realizou estudos sobre o impacto destes parâmetros no custo computacional e na precisão dos resultados, pois o MCC por ser um método consagrado e amplamente aceito, os valores para o coeficiente de expansão χ igual a 0.05 e a tolerância de $tol \leq 1 \times 10^{-6}$ garantem uma boa relação entre o tempo de processamento e a precisão dos resultados. Nessas condições, para histórias síncronas, o MCC executa em média de 50 a 70 operações no plano de corte, para

obter a amplitude da tensão cisalhante.

No método do maior retângulo(MRC), o tempo de processamento depende, também, do número de retângulos que circunscrevem a história da tensão cisalhante projetada no plano de corte. A rotação do retângulo é definida por φ cujo domínio pertence ao intervalo $[0, \pi/2]$. Inicialmente, na determinação da amplitude da tensão cisalhante pelo MRC, consideramos incrementos de 1° ($\Delta\varphi = 1^\circ$), o que corresponde à 90 rotações do retângulo em cada plano de corte.

No processo tradicional, para cada história de tensões deve-se estabelecer uma quantidade mínima de planos de corte que garanta resultados com qualidade sem o comprometimento do tempo de processamento. Esses planos são definidos em função das discretizações dos ângulos de corte θ e ϕ representados por $\pi/\Delta\theta$ e $\pi/\Delta\phi$, onde $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ são frações de θ e ϕ , respectivamente. A quantidade planos em cada história considerando a simetria das histórias de tensões é dada por $n = \pi/\Delta\theta$ e $m = \pi/\Delta\phi$. Por conveniência, considerou-se $\Delta\theta = \Delta\phi$ que contabiliza para cada história de tensão, n^2 planos de corte. Os incrementos selecionados para avaliação de $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ foram de 10° , 5° , 1° , 0.75° , 0.5° e 0.25° que produzem entre 324 a 518.400 planos de corte para cada história de tensões.

Para a determinação de uma boa relação custo/benefício do tempo computacional e a acurácia dos resultados foram escolhidos testes representativos da base de dados selecionada para esse trabalho. O teste nº 1 da tabela 6.6 contempla uma história de carregamento harmônica, síncrona, proporcional sem a existência de tensões médias. O teste nº 21 da tabela 6.3 foi escolhido por se tratar de um experimento embora síncrono, mas com carregamentos combinados de tração/tração/torção com componentes médios. Finalizando, o teste nº 41 da tabela 6.5 foi acrescentado ao conjunto porque além de possuir característica assíncrona, seu carregamento é biaxial do tipo tração/tração.

Os valores para $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ foram aplicados aos testes 1, 21 e 41 para obter o plano crítico considerando os métodos do menor círculo e do maior retângulo no critério de fadiga multiaxial proposto por Susmel e Lazzarin. O MCC gastou, em média, 7 segundos para executar toda a história de tensões com incrementos de θ e ϕ de 10° e, média de 200 minutos para incrementos de 0.25° , enquanto que nas mesmas condições, o tempo de processamento do MRC foi 40% superior ao MCC. Em ambos os métodos, observou-se que uma quantidade elevada de planos de corte não significou um ganho expressivo na precisão da amplitude da tensão cisalhante, no entanto, o tempo de processamento aumentou exponencialmente. O gráfico da figura 6.5(a) apresenta o valor da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico em função dos incrementos $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ para os testes 1, 21 e 41 obtidos pelo método do menor círculo (MCC). Nesse gráfico percebe-se a pouca variação de τ_a para os três testes, enquanto que, nas mesmas condições, o tempo de processamento aumentou consideravelmente.

Pela análise dos gráficos das figuras 6.5(a) e (b), considerando a qualidade dos resultados no cálculo de τ_a no plano crítico e o tempo de processamento, foi adotado incrementos de 1° ($\pi/180$) em θ e ϕ que produziram 32.400 planos de corte. Incrementos maiores, como por exemplo 5° ou 10° , talvez possam fornecer bons resultados para τ_a a um menor custo computacional. Entretanto, decidiu-se por uma pesquisa mais refinada do plano crítico porque esse é um trabalho de caráter exploratório e possui, também como objetivo, avaliar a eficiência do método algoritmo genético.

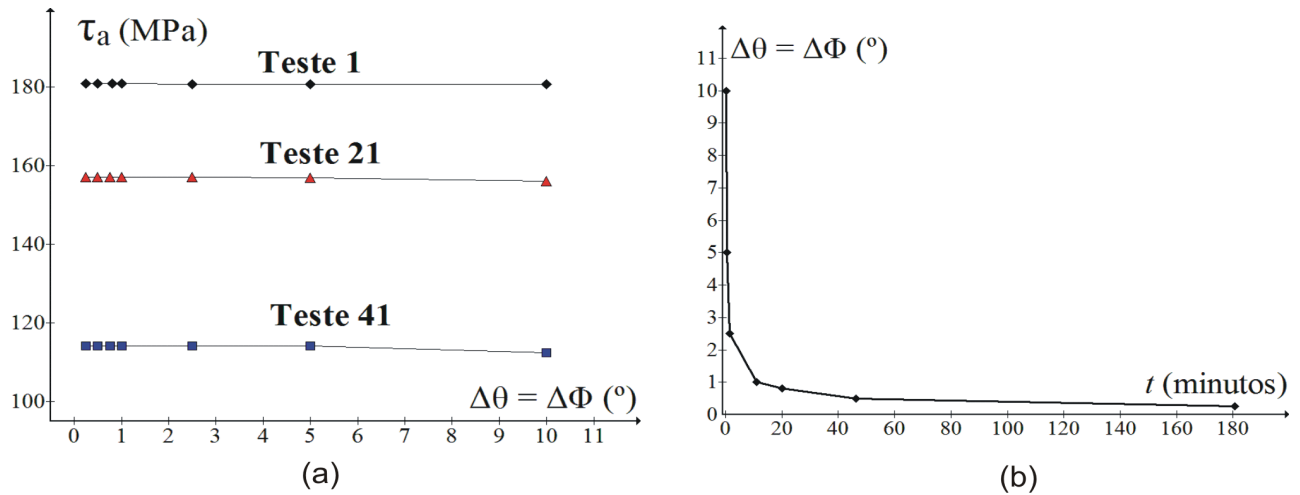


Figura 6.5: (a) Gráfico dos incrementos de $\Delta\phi$ e $\Delta\theta$ para a determinação da amplitude da tensão cisalhante em função de τ_a (b) Gráfico relacionando a média do tempo decorrido e os incrementos de $\Delta\phi$ e $\Delta\theta$ na determinação da amplitude da tensão cisalhante.

Para incrementos de θ e ϕ em 1° e com as 90 rotações do retângulo sobre a projeção da história de tensão cisalhante, o tempo de processamento do MRC foi, em média, 40% superior ao MCC. Desta forma, investigamos a influência do número de rotações do retângulo no plano de corte, sob os pontos de vista da precisão de τ_a e do tempo de processamento. O valor máximo do ângulo de rotação do retângulo, dado um sistema de referência no plano de corte, é $\varphi = \pi/2$ e o número de rotações do retângulo no plano de corte é definido por $n_{rot} = \varphi/\Delta\varphi$, onde $\Delta\varphi$ é uma fração de φ com domínio $\Delta\varphi \in (0, \pi/2]$.

Dada as características de invariância do retângulo, nos casos de carregamentos proporcionais ou quando a elipse é uma boa aproximação para a curva poligonal da história de tensões, nessa avaliação, optamos por realizar essa investigação nos testes 28, 29 e 39 (Tabela 6.4) que são carregamentos harmônicos combinados de $\sigma_x(t) \times \sigma_y(t) \times \sigma_{xy}(t)$ assíncronos. Os valores incrementais de $\Delta\varphi$ foram 1° , 5° , 9° , 30° , 45° , 90° que produziram, nessa ordem, 90, 18, 10, 3, 2 e 1 rotações do retângulo no plano de corte. Estes valores foram aplicados nesses testes, obtendo-se para cada caso, a amplitude da tensão cisalhante e o tempo de processamento, considerando que os planos de corte foram discretizados em todas as situações com os incrementos para $\Delta\theta = \Delta\phi = 1^\circ$ já adotados na análise do MCC.

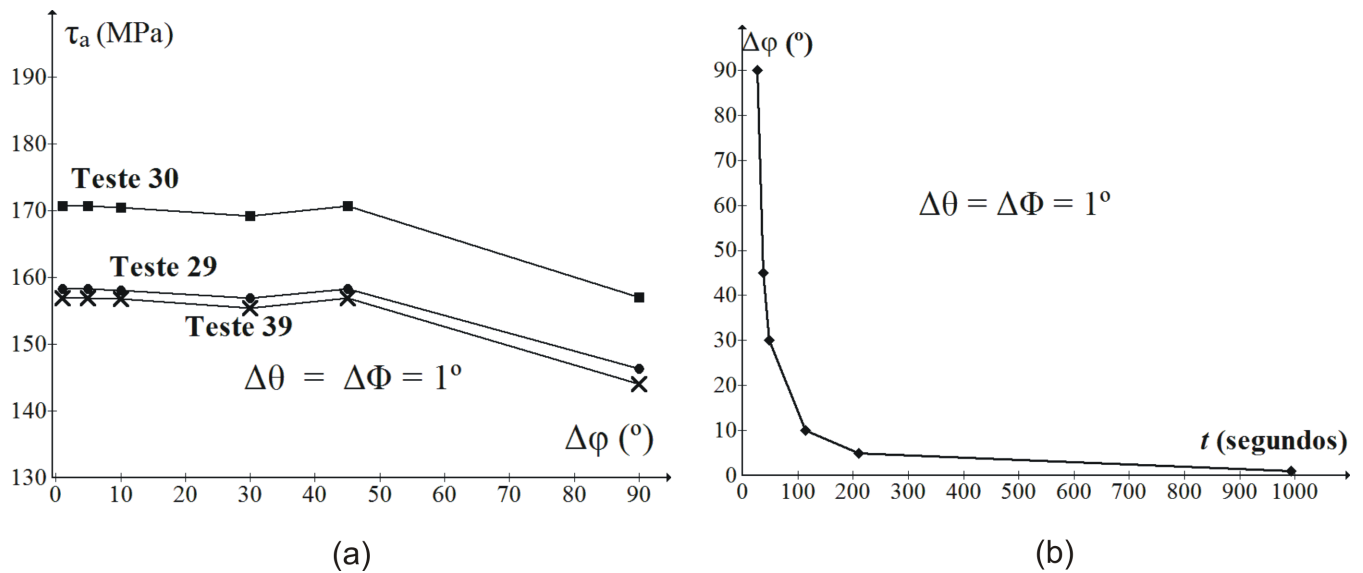


Figura 6.6: (a) Amplitude da tensão cisalhante em função dos incrementos em φ (b) Gráfico relacionando a média do tempo decorrido e os incrementos em φ na determinação da amplitude da tensão cisalhante.

Observe que a variação de τ_a diminui a partir de três rotações ($\Delta\varphi = 30^\circ$) do retângulo no plano de corte [Figura 6.6(a)]. Para valores de $\Delta\varphi$ maiores que 9° (dez rotações), τ_a permanece constante. A figura 6.6(b) ilustra a relação entre o tempo de processamento e o número de rotações para o retângulo para uma história completa de tensões. Para $\Delta\varphi = 90^\circ$, o tempo de processamento depende apenas de $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ já que o retângulo executa uma rotação em cada plano de corte, e, por outro lado, no caso de noventa rotações ($\Delta\varphi = 1^\circ$), o tempo ultrapassa 16 min (1000s). Considerando que a convergência ou a pouca variabilidade de τ_a é a partir de 10 rotações, optamos por estabelecer como padrão esse valor para as rotações do retângulo no plano de corte, por entender que esse parâmetro é suficiente para atender os quesitos de precisão de τ_a e do tempo de processamento (aproximadamente 100 s) para uma dada história de tensões.

Para o teste nº 1 e com esse novo parâmetro, computamos o tempo de 115.8s (1min 55s) que o MRC necessitou para calcular a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico. Nas mesmas condições, o MCC ($\chi = 0.05$ e $tol \leq 1 \times 10^{-6}$) processou em 834.7s (13min 54s). Esta diferença está na quantidade de operações que cada método (MCC e MRC) realiza para obter τ_a . Em cada plano de corte, o MCC processa, em média, [50 a 70] operações, enquanto que o MRC, com valor para $\Delta\varphi = 9^\circ$, executa 10 operações. Nessas condições, considerando discretizações dos planos de corte de $\Delta\phi = \Delta\theta = 1^\circ$, estima-se que para calcular τ_a , o MRC executa 3.24×10^4 operações, enquanto que o MCC realiza, entre 16.2×10^4 a 22.7×10^4 operações.

A discretização do período da história de tensões teve por base a análise realizada por Dantas [84], que concluiu que a discretização do ciclo de carregamento em 16 intervalos de tempo é

suficiente para se obter uma boa descrição da história de tensões. Este valor deve ser aplicado somente para os casos síncronos. Para os casos assíncronos deve-se ter o cuidado de identificar o maior período entre as histórias das tensões e dividi-las adequadamente. Em geral, quando essa relação é maior que 1 ($\lambda > 1$), um período de 2π é suficiente para cobrir a história tensões. No entanto, quando a relação de frequências for menor que 1 ($\lambda < 1$), este período passa a ser $(2\pi/\lambda)$. Procurando garantir a qualidade para qualquer tipo de carregamento multiaxial, optou-se, neste trabalho, por discretizar o ciclo de carregamento em 32 intervalos de tempo para cada 2π .

Resume-se, então, para o método incremental, os parâmetros utilizados para o MCC e MRC:

i) Parâmetros comuns aos MCC e MRC para a localização do plano crítico:

- discretizações dos planos de corte: $\Delta\theta = \Delta\phi = \pi/180$;
- discretização do período em 32 instantes de tempo para cada 2π ;

ii) Parâmetros para o Método do Mínimo Círculo (MCC)

- fator de expansão do raio do círculo: $\chi = 0.05$;
- tolerância entre as tensões cisalhantes discretizadas e o raio círculo:
 $tol \leq 1 \times 10^{-6}$;

iii) Parâmetros para o Método do Maior Retângulo (MRC)

- ângulo de rotação do retângulo: $\Delta\varphi = 9^\circ$.

6.3.2 Algoritmos Genéticos

Alguns aspectos devem ser observados na aplicação dos AGs em uma grande variedade de problemas. O algoritmo genético impõe que variáveis sejam codificadas tomando por base os conceitos de cromossomos, genes, indivíduos e gerações que comporão um elemento ou parte da solução no domínio de busca.

Muitos dos termos biológicos também são aplicados nos AGs. No campo da genética, os cromossomos são formados por genes e podem ter um determinado valor entre os vários possíveis. No AG empregado nesse trabalho, os cromossomos são as codificações binárias que correspondem aos valores reais dos planos de corte ($\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$). A representação numérica se dá por meio de uma cadeia de '0' e '1' formando um *string* (cadeia de bits) significando o mesmo que cromossomo. Um indivíduo é representado por um ou mais fenótipos e, no AG representa a codificação binária do domínio das possíveis soluções. Neste trabalho, um indivíduo será a representação binária concatenada de uma cadeia de bits composta simultaneamente por θ e ϕ que representam os ângulos dos planos de corte (Figura 2.9).

O AG é um método de busca que pode ser usado para resolver problemas onde métodos convencionais se mostram pouco eficientes. De maneira similar a um método numérico de otimização, o AG também necessita de parâmetros adequados para aproveitar a máxima capacidade e eficiência de processamento e funcionamento do método. Assim, analisaram-se variáveis inerentes a esse método que viessem afetar a precisão e o tempo de processamento quais sejam: o comprimento do cromossomo que codifica cada indivíduo representando a localização do plano de corte; a população (quantidade de indivíduos) associada a taxa de mutação que forma o espaço das possíveis soluções; as gerações que representam o número de iterações que o algoritmo deverá ser executado em cada história de tensões; e a taxa de mutação para que o AG não fique estagnado em um máximo local.

O tamanho do cromossomo (cadeia de *string*) está relacionado com a precisão. Neste trabalho, adotamos uma precisão de 0.003° que corresponde à localização dos planos de corte formado pelas coordenadas esféricas de θ e ϕ pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Aplicando os valores de $x_{max} = \pi$, $x_{min} = 0$, e $tol = 0.003$ na relação 5.4 obtivemos uma cadeia de 10 bits que corresponde a um fenótipo. Cada indivíduo (plano de corte) será formado por um cromossomo composto por 20 alelos (cadeia de 20 bits) porque as coordenadas do plano de corte são funções de θ e ϕ e um indivíduo formado por 10 alelos, nesse caso, não seria suficiente para representar uma função de duas variáveis.

A população é formada por indivíduos gerados aleatoriamente e, posteriormente, as gerações seguintes serão frutos do cruzamento entre os indivíduos que possuem melhores características genéticas (possíveis soluções) que deverão ser transmitidas aos seus descendentes. Assumiremos que essa população é composta por um número fixo de indivíduos, o que permite que o armazenamento das possíveis soluções seja realizado em um vetor de tamanho constante ao longo das gerações.

No AG, o tamanho de uma população (número de indivíduos) não pode ser muito pequeno para não comprometer a qualidade dos resultados e nem extremamente grande para não extrapolar o tempo de processamento e invalidar seu emprego como um processo de otimização. Cada indivíduo é avaliado por um valor de *fitness* (*Fit*) que, nesse caso, é função da maior amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal. O conjunto desses indivíduos forma uma população e a maior amplitude da tensão cisalhante será o indivíduo que apresentar a melhor característica genética ao final da última geração. Na pesquisa para definir a quantidade ideal de indivíduos para formar uma população, mediu-se também o *Fit Médio* que representa o valor médio do *Fit* em cada geração (iteração). O gráfico da figura 6.7 representa o comportamento do *Fit* (máximo e médio) em razão do número de indivíduos. Inicialmente estipulamos uma população composta por 2 indivíduos, que foi incrementada até 150 indivíduos. Em termos numéricos, ao final da última geração, o indivíduo que possuir as melhores características genéticas, representa a ampli-

tude da tensão cisalhante combinada com a tensão normal. O gráfico da figura 6.7 nos indica que a partir de uma população composta por mais de 25 indivíduos, a solução começa a convergir, isto é, os valores do *Fit* máximo e médio se aproximam e seus valores permanecem relativamente constantes. Com base nos resultados referentes ao comportamento dos valores máximos e médios do *Fit* e para garantir a qualidade desses resultados, considerou-se adequada uma população composta por 40 indivíduos.

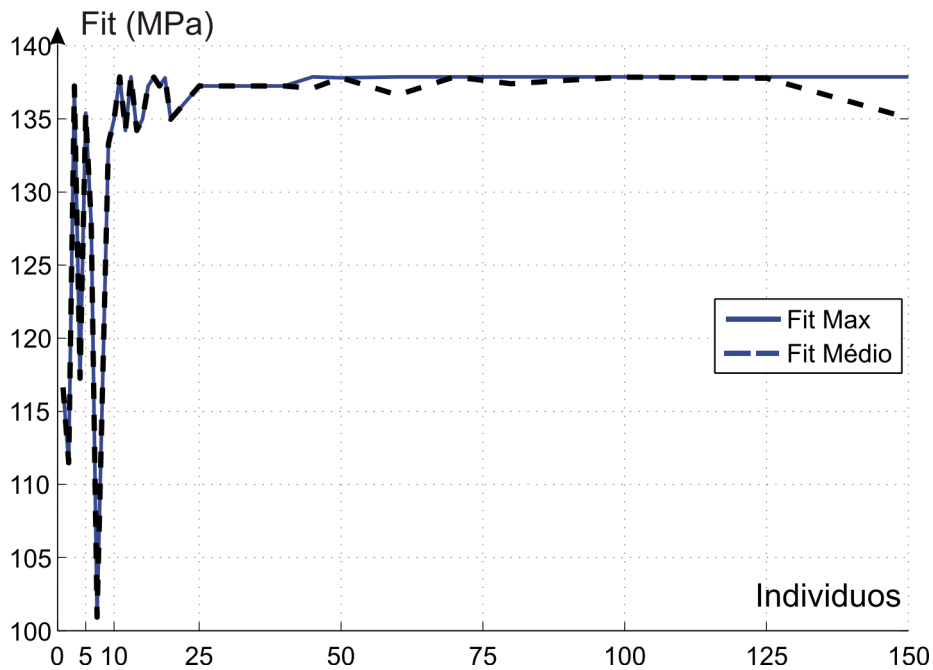


Figura 6.7: Comportamento do *Fit* e *Fit Médio* em função do operador indivíduos.

As gerações representam as iterações ou repetições que o programa executa até que a qualidade dos resultados seja garantida. As gerações ou as iterações são determinadas em função do operador de mutação que é fundamental para um AG, pois é ele quem garante a continuidade da existência de diversidade genética na população. A mutação é uma heurística exploratória, injetando novos cromossomos na população e permitindo que o AG busque soluções fora dos limites definidos pela população inicial [85].

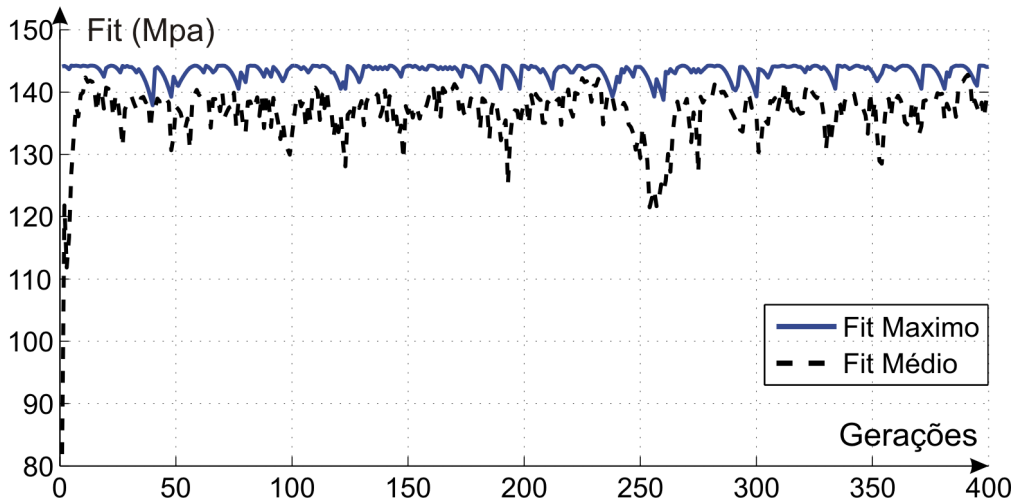


Figura 6.8: Comportamento do *Fit* e *Fit Médio* em função do operador gerações.

O valor da mutação não pode ser alto demais porque o AG agiria como um algoritmo aleatório e nem baixo demais, senão a população não terá diversidade após um certo número de gerações, podendo ficar estagnado em um ponto local (máximo ou mínimo). Aplicamos uma mutação de $1/15$, próximo aos trabalhos citados por Michalewicz [86] que considera que a taxa de mutação ótima para problemas de otimização de cromossomos binários é igual à $1/L$, onde L é o tamanho da cadeia de bits. O gráfico da figura 6.8 apresenta o comportamento do *Fit* e do *Fit Médio* em função do número de gerações. Percebe-se que o *Fit Máximo* permanece relativamente constante para alguns intervalos de gerações, por exemplo $(0, 40]$, $[60, 80]$ e assim sucessivamente, enquanto que *Fit Médio* varia aleatoriamente para garantir a diversidade genética. Em consequência, para aproveitar toda a capacidade de otimização do AG, consideraremos como o número de gerações para o AG a ser aplicado neste trabalho, o valor limite superior do 1º intervalo do gráfico da figura 6.8, $(0, 40]$, ou seja, 40 gerações é um valor adequado para garantir a qualidade dos resultados e a otimização buscada.

Ainda, para garantir que o AG ficasse menos suscetível à convergência prematura, foi implementado no módulo Seleção, o método de Escalonamento Sigma (E) descrito por Mitchell [87]. O princípio do escalonamento sigma é modificar a função de avaliação de um indivíduo ($f(x_i)$) por uma fórmula dependente tanto do indivíduo quanto de toda a população no instante t , dada por:

$$E(i, t) = \begin{cases} 1, & \vartheta(t) = 0 \\ 1 + \frac{f(x_i) - \bar{f}(t)}{2\vartheta(t)}, & \vartheta(t) \neq 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

onde:

$f(x_i)$ é a avaliação do indivíduo i ;

$\bar{f}(t)$ é a avaliação média da população no instante t ;

$\vartheta(t)$ é o desvio padrão das avaliações no instante t .

Se o desvio padrão é igual a zero, então todos os indivíduos têm avaliações iguais, isto é, em qualquer condição eles devem ter a mesma probabilidade de serem submetidos a um operador genético. No caso de $\vartheta \neq 0$ é realizada uma normalização de todo espaço de busca. Este método automaticamente compensa as alterações nas características de toda a população durante a execução do AG.

Considerando que o AG está sendo implementado como um algoritmo de otimização para a busca do plano crítico, todos os procedimentos para determinação da amplitude da tensão cisalhante inerente aos métodos do MCC e do MRC foram mantidos tal como no processo convencional. Ressalta-se, ainda, que deixou-se de utilizar o AG nos métodos do círculo e do retângulo porque além do objetivo ser apenas a otimização da busca do plano crítico, ele não deve apresentar ganho expressivo no tempo de processamento total. No MRC, por exemplo, não se justifica desenvolver qualquer algoritmo de otimização pois, o número de rotações do retângulo sobre a história de tensões cisalhante projetada no plano de corte é pequeno. Neste caso, o AG iria ultrapassar a quantidade de 10 rotações estabelecidas para casos gerais. No MCC, estima-se que o número de operações entre o algoritmo tradicional com repetições estimadas de 50 a 70, seria praticamente o mesmo quando comparado com um algoritmo genético. Portanto, os parâmetros para o processo de otimização baseado em AG ficam assim estabelecidos:

i) Parâmetros comuns aos MCC e MRC para a localização do plano crítico:

- string binária com 10 bits para representar, individualmente, θ e ϕ ;
- 40 indivíduos codificados em função de θ e ϕ para os planos de corte;
- 40 gerações que representam o número total de iterações;
- taxa de mutação: 1/15; e
- discretização do período em 32 instantes de tempo para cada 2π .

ii) Parâmetros para o Método do Menor Círculo (MCC)

- fator de expansão do raio do círculo: $\chi = 0.05$;
- tolerância entre as tensões cisalhantes discretizadas e o raio círculo: $tol \leq 1 \times 10^{-6}$.

iii) Parâmetros para o Método do Maior Retângulo (MRC)

- ângulo de rotação do retângulo: $\varphi = 9^\circ$.

6.4 ANÁLISE CRÍTICA DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO PLANO CRÍTICO E SUA DETERMINAÇÃO NUMÉRICA

Existem várias abordagens para a definição de plano crítico em fadiga multiaxial. Um das primeiras propostas foi idealizada por Findley [58] ao final da década de 50, definindo o plano crítico como aquele onde é observado o máximo valor da combinação linear entre a amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal. Brown e Miller [88] introduziram o conceito de trincas Caso A e Caso B. No Caso A, a trinca se propaga na superfície do material, enquanto que no Caso B, as trincas se propagam da superfície para o interior do material. McDiarmid [62] transferiu o conceito de Brown e Miller para o campo da fadiga de alto ciclo sugerindo que o plano crítico é determinado pela combinação linear da amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal, no plano de máxima amplitude da tensão cisalhante tanto para as trincas de Caso A e B. Susmel e Lazzarin definem o plano crítico pelos efeitos combinados da amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal cujos danos podem ser avaliados simultaneamente por meio de uma razão de plano crítico ρ , definida como $\rho = \sigma_{n,max}/\tau_a$.

A idéia principal para a maior parte das abordagens de plano crítico para fadiga de alto ciclo é que o início da trinca é governado pela máxima amplitude da tensão cisalhante da história de tensões. Esta conclusão é baseada em observações experimentais onde a nucleação de trincas por fadiga aparece devido às sucessivas acumulações de deformações cisalhantes plásticas nas bandas de escorregamento formadas em alguns grãos cristalinos do material. Em consequência, para avaliar a resistência à fadiga de um material metálico, faz-se necessário identificar um plano do material, o plano crítico, onde a amplitude da tensão cisalhante seja máxima.

De acordo com Socie [75] todos os critérios de plano crítico para fadiga de alto ciclo possuem a mesma forma geral, ou seja, levam em consideração os efeitos da amplitude da tensão cisalhante e normal, podendo ser generalizadas como:

$$F(\tau_a, \sigma_{n,max}), \quad (6.3)$$

onde τ_a é máxima amplitude da tensão cisalhante e $\sigma_{n,max}$, a tensão normal no plano crítico.

Todos os modelos, em geral, são baseados nas seguintes observações:

- Tensões cisalhantes cíclicas causam trincas em materiais dúteis;
- Tensões normais de tração diminuem a vida de fadiga do material;
- Tensões médias compressivas aumentam a vida de fadiga do material.

Como consequência do equilíbrio de momentos, embora um estado tridimensional de tensão possua nove componentes, apenas seis dessas são independentes. As tensões de cisalhamento em

planos mutuamente perpendiculares são idênticas. A figura 6.9 ilustra a amplitude das tensões cisalhantes projetadas nos planos de corte para a história de tensões do teste 38 (Tabela 6.4). Nota-se claramente a existência de quatro tensões cisalhantes de máxima amplitude de igual valor, em quatro planos de corte distintos, já considerando a simetria das histórias de tensões.

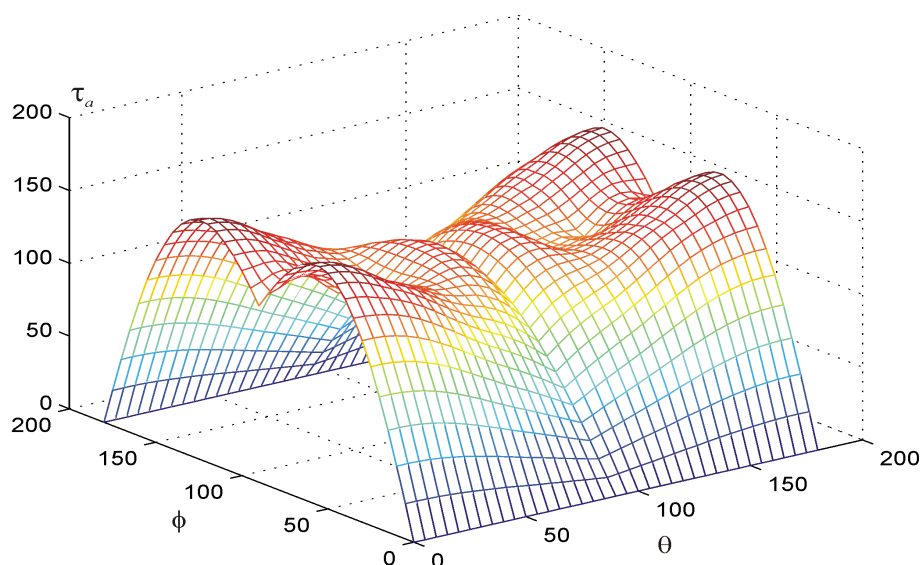


Figura 6.9: História das máximas tensões cisalhantes nos planos de corte para o teste nº 38.

Pelo exposto, considerar a definição do Plano Crítico como aquele onde apenas é observado a maior amplitude da tensão cisalhante não é suficiente para caracterizá-lo unicamente, ou seja, do ponto de vista numérico, a definição clássica de plano crítico é um problema mal posto.

Para exemplificar este argumento, foi pesquisado o que acontece com a tensão normal para uma pequena variação em torno da máxima amplitude da tensão cisalhante para o teste nº 38 onde foi observado quatro valores máximos para τ_a igual a 137.02 MPa para τ_a . Para identificar a variação da tensão normal em relação a tensão cisalhante, arbitramos um intervalo muito menor que a máxima amplitude da tensão cisalhante (0.1 MPa), ou seja, $\tau \in [136.93, 137.02]$ MPa, de maneira que foram obtidos aproximadamente 70 planos de corte pertencentes a esse intervalo, considerando incrementos de 1° para ϕ e θ .

O gráfico da figura 6.10(a) apresenta o comportamento de τ_a e $\sigma_{n,max}$ para esses 70 planos de corte, onde é possível observar uma variação expressiva da tensão normal enquanto que a amplitude da cisalhante permanece praticamente inalterada dentro dessa estreita faixa.

Para obter mais detalhes foi idealizado o gráfico $\sigma_{n,max} \times \tau_a$ para o teste 38 [Figura 6.10(b)], onde o eixo horizontal corresponde a $\sigma_{n,max}$, enquanto que o eixo vertical possui uma variação 0.1 MPa que é o intervalo $\tau_a - 0.1$ MPa. Nesse aspecto, identifica-se detalhadamente a variação expressiva da tensão normal em torno dos quatro valores iguais da tensão cisalhante representados pelos picos do gráfico da figura 6.10(b). Os valores encontrados para τ_a e $\sigma_{n,max}$ foram: [137.02;

64.69] MPa; [137.02; 82.50] MPa; [137.02; 161.58] MPa e [137.02; 287.73] MPa. Nesse caso, deve-se considerar como plano crítico nas histórias de tensões que conduzirem a mais de um valor igual para a amplitude da tensão cisalhante, aquele onde for observado a maior tensão normal entre os mesmos valores de τ_a . No caso do teste 38, o plano crítico está localizado por θ^c , ϕ^c onde $\tau_a = 137.02$ MPa e $\sigma_{n,max} = 287.73$ MPa [Figura 6.10(b)].

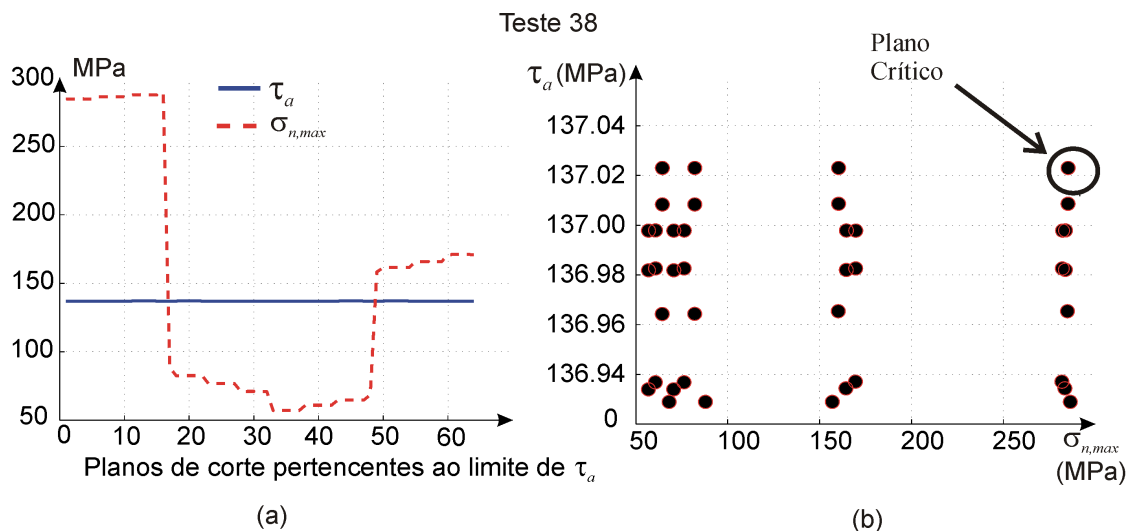


Figura 6.10: Comparação dos valores próximos a máxima amplitude da tensão cisalhante com a tensão normal para o teste nº 38.

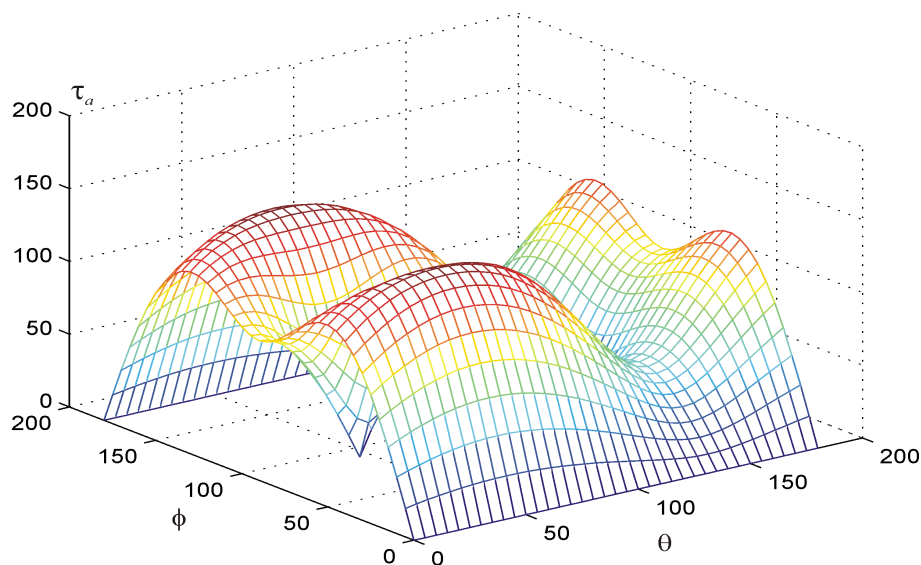


Figura 6.11: História das máximas tensões cisalhantes nos planos de corte para o teste nº 11.

No entanto, isso nem sempre ocorre, ou seja, numa determinada história de carregamento pode haver situações onde a amplitude da tensão cisalhante é única e máxima, e pela definição clássica este seria o plano crítico. Por outro lado, como sabemos que a tensão normal diminui a

resistência à fadiga do material, passamos a analisar, também, a sua variação em outros planos para valores muito próximos de τ_a .

Na base de dados escolhemos o teste 11 com a finalidade de realizar, também, uma investigação sobre o comportamento da tensão normal em torno de uma pequena variação de τ_a . O teste 11 tem por característica possuir apenas um único valor para a máxima amplitude da tensão cisalhante cuja história de tensões cisalhantes máximas projetada nos planos de corte está exposta no gráfico da figura 6.11. Para uma tolerância de 0.1 MPa de τ_a , foram obtidos 20 planos de corte cujos valores da tensão normal e cisalhante estão expressos na figura 6.12(a). Nesse gráfico observa-se uma variação expressiva da tensão normal (na ordem de 20 MPa) enquanto que as amplitudes das tensões cisalhantes nesses planos permanecem constante.

Nesse teste, a amplitude da tensão cisalhante é única, $\tau_a = 150.49$ MPa correspondendo uma tensão normal máxima de $\sigma_{n,max} = 275.50$ MPa. Pela definição clássica, este seria o plano crítico.

No entanto, no gráfico da figura 6.12(b) podemos analisar a variação da tensão normal em torno de uma pequena variação de τ_a ($\tau_a - 0.1$ MPa). Observe que para $\tau = 150.49$ MPa, $\sigma_{n,max}$ corresponde à 275.50 MPa e para $\tau = 150.41$ MPa, o valor de $\sigma_{n,max}$ alcança 285.11 MPa, ou seja, uma variação expressiva da tensão normal (10 MPa) para uma pequena variação em torno da tensão cisalhante (0.1 MPa).

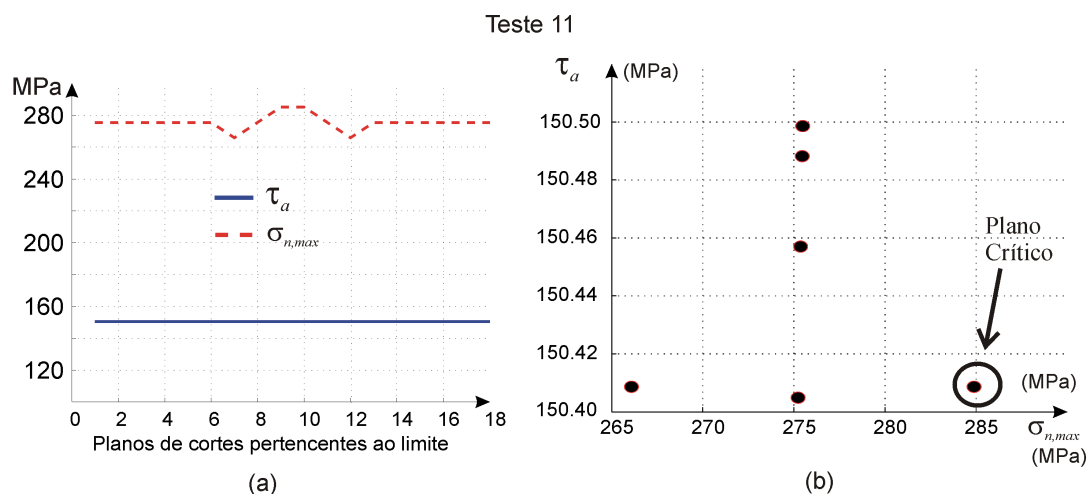


Figura 6.12: Comparação dos valores próximos a máxima amplitude da tensão cisalhante com a tensão normal para o teste n° 11.

Assim, mesmo que uma história de tensões tenha um valor único para a máxima amplitude da tensão cisalhante, vale a pena investigar o comportamento da tensão normal, pois variações expressivas da tensão normal podem alterar os índices de erro do tipo $f(\tau_a, \sigma_{n,max})$. Nesse caso, consideramos que o plano crítico é aquele dentro de uma pequena tolerância em torno de τ_a se

observa a maior tensão normal, como o assinalado na figura 6.12(b).

A tolerância de 0.1 MPa foi escolhida tendo por base índices de erro obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin [30] e a amplitude da tensão cisalhante foi calculada pelo método do mínimo círculo. Uma amostra composta por testes que apresentaram um elevado índice de erro (superior à 10%) e alguns abaixo de 5% para esse critério foram retirados da base de dados desse trabalho. Para cada um desses testes, após obtido a máxima amplitude da tensão cisalhante sem qualquer fator de tolerância, aplicou-se tolerâncias de 0.1 MPa, 1 MPa, e 10 MPa (Figura 6.13). Observamos poucas variações dos índices de erros para tolerâncias de até $\tau_a - 1$ MPa. Por outro lado, tolerâncias igual ou superior à 10 MPa, os IE se afastam quando comparados com valores onde a amplitude da tensão cisalhante é máxima. Deve-se registrar que o programa numérico foi implementado considerando como plano crítico aquele onde se observa a máxima amplitude da tensão cisalhante para a história de tensões cisalhantes projetada no plano de corte e, caso, existam valores iguais, o plano crítico será aquele que possuir a maior tensão normal. Essa fato explica a variação inexpressiva dos IE em tornos de pequenas variações da máxima amplitude da tensão cisalhante. Por outro lado, tolerâncias maiores em torno de τ_a poderia alterar a definição inicial do plano crítico de máxima amplitude da tensão cisalhante para uma combinação linear entre a amplitude da tensão cisalhante e a tensão normal, aproximando-se do critério de Findley [23; 57; 58] que estabelece como plano crítico $\max_{\theta, \phi}(\tau_a, \sigma_{n, \max})$.

Para não descaracterizar a interpretação física para o dano de fadiga que é baseada na teoria da deformação cíclica nos grãos do material cuja resistência a fadiga é avaliada em função das amplitudes macroscópicas máximas das tensões cisalhantes, achamos conveniente aplicar uma tolerância de 0.1 MPa em relação à máxima tensão cisalhante, pois os valores encontrados nesse intervalo para τ estão muito próximos do τ_a , ou seja, representa no máximo, 0.08% da menor amplitude máxima da tensão cisalhante das histórias de tensões utilizadas nesse trabalho. Em compensação, pode-se aplicar nos critérios de fadiga do tipo $F(\tau_a, \sigma_{n, \max})$, valores da tensão normal mais severos [64] sem ter que desconsiderar os limites de resistência a fadiga para flexão e torção (f_{-1} e t_{-1}) obtidos experimentalmente.

A aplicação de um intervalo em um processo convencional numérico é bastante trivial, isto é, o algoritmo deve possuir um comando de comparação para um intervalo de 0.1 MPa em torno de τ_a e o plano crítico será onde for observado a máxima tensão normal. No AG não existem estruturas de comparação, pois a escolha do melhor *indivíduo* (solução) é realizada pela avaliação constante e seleção de um indivíduo que possui as melhores características. Em conseqüência, foi necessário estabelecer uma função que simulasse a variação da tensão cisalhante em níveis bem estreitos em torno do seu valor máximo, além de considerar a contribuição da tensão normal sobre a resistência à fadiga. Para tal, foi implementada uma função denominada função fitness, aptidão ou simplesmente *Fit*, onde $Fit = f(\tau_a, \sigma_{n, \max})$, com as seguintes características:

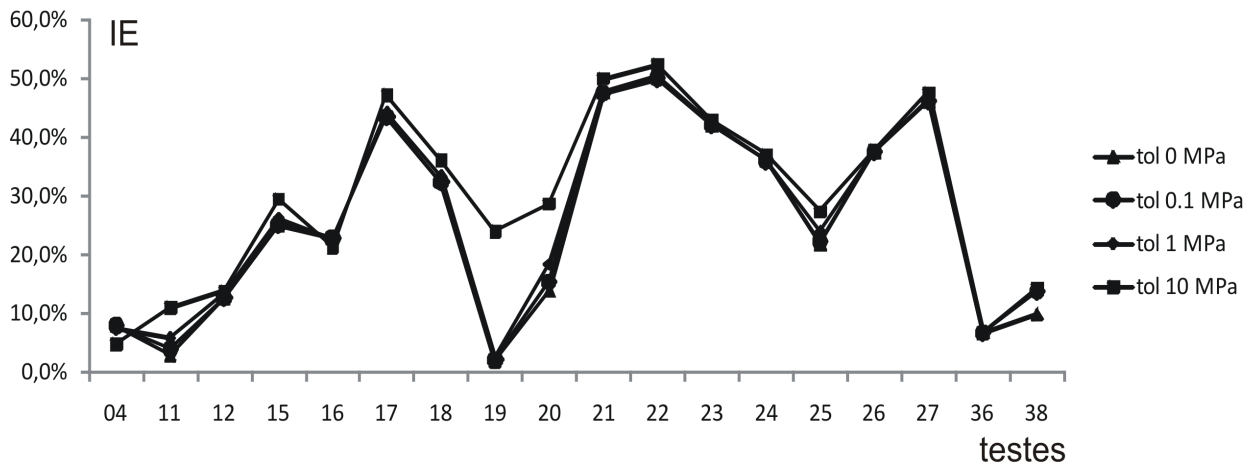


Figura 6.13: Influência das tolerâncias em torno da máxima sobre o índice de erro.

$$Fit(i) = \tau_a(i) + \xi \sigma_{n,max}(i), \quad (6.4)$$

onde: $Fit(i)$ é a avaliação do indivíduo i ;

τ_a é a máxima amplitude da tensão cisalhante i no plano de corte;

$\sigma_{n,max}(i)$ é a maior tensão normal na face onde for observado $\tau_a(i)$; e

ξ é o valor estimado para diferenciar amplitudes de tensões $\tau(i)$ iguais. No AG implementado, utilizamos $\xi = 0.01$ ou 1%.

O parâmetro de ξ foi baseado no trabalho desenvolvido por Inácio [89] que considerou este valor adequado para determinar o plano crítico sem comprometer o valor real da amplitude cisalhante para a história de tensões, pois o algoritmo genético por ser um método com passos aleatórios, a cada nova iteração, não há garantia que os planos investigados sejam os mesmos.

O gráfico da figura 6.14 mostra uma nuvem de pontos referente a todos os valores da máxima tensão normal versus a amplitude da tensão cisalhante em todos os planos de corte considerando incrementos em $\Delta\theta = \Delta\phi = 1^\circ$ para o teste nº 1. Neste gráfico nota-se que a máxima amplitude da tensão cisalhante permanece relativamente constante com valores aproximados de 180 MPa enquanto que a máxima tensão normal sofre uma variação significativa ($\sigma_{n,max} \in [50, 80]$ MPa).

Independente do método de busca do plano crítico (convencional ou AG), a definição clássica de plano crítico como sendo aquele onde é observado a máxima amplitude da tensão cisalhante, além de tornar sua determinação numérica um problema inconsistente (sem unicidade), pode subestimar a severidade da sollicitação do componente. Em resumo, uma estrutura pode possuir diversos planos materiais em que a máxima amplitude da tensão cisalhante é essencialmente a mesma com diferentes tensões normais máximas [Figura 6.9 e 6.10(b)], ou então, apesar de possuir uma única amplitude máxima da tensão cisalhante, para valores muito próximos de τ_a , a

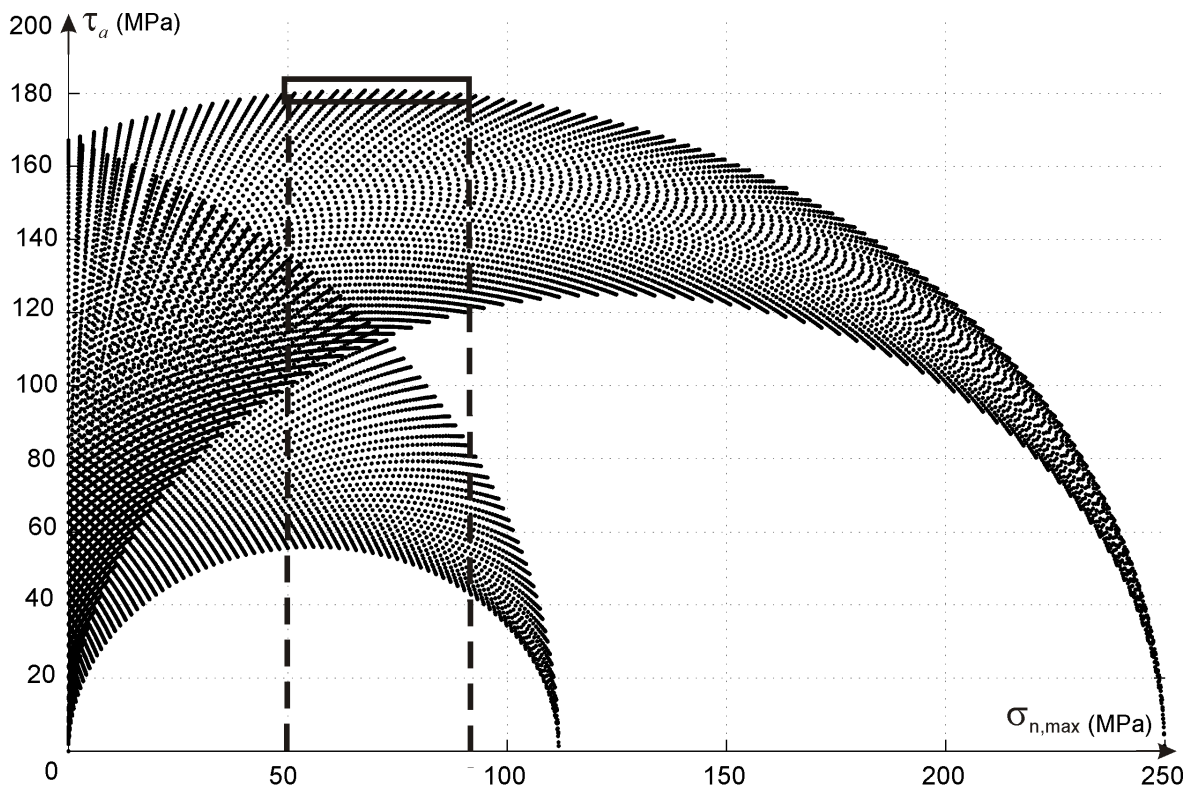


Figura 6.14: Nuvem de pontos representando a amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal em todos os planos de corte para o teste nº 1.

tensão normal varia significativamente [Figura 6.11 e 6.12(b)].

6.5 AVALIAÇÃO COMPARATIVA

Os resultados serão apresentados segundo duas perspectivas com o objetivo de interpretar, analisar e obter conclusões, primeiramente, sobre o método para a obtenção da amplitude máxima da tensão cisalhante onde serão comparados os modelos do mínimo círculo (MCC) e do maior retângulo (MRC). Segundo, serão comparados os dois métodos de busca do plano crítico: o método convencional e o algoritmo genético.

As tabelas 6.6–6.17 descrevem os resultados para os métodos convencional e algoritmo genético obtido com os parâmetros estabelecidos na seção 6.3.1. Cada tabela apresenta, nessa ordem, os resultados de amplitude da tensão cisalhante no plano crítico, τ_a^c ; a tensão normal máxima no plano crítico, $\sigma_{n,max}^c$; a localização do plano crítico, ϕ^c , θ^c ; e o índice de erro, i , para os métodos do mínimo círculo (MCC) e do maior retângulo (MRC), dispostos de acordo com o tipo das histórias de carregamento adotado em cada investigação experimental já mostradas nas tabelas 6.2–6.5.

Para comparar os resultados experimentais com os resultados teóricos obtidos, utilizamos

índices de erro tomando por base os critérios de Findley [58] e de Susmel e Lazzarin [30].

Um índice de erro tem por objetivo medir os desvios entre a previsão de ocorrência de falha fornecido por um critério de fadiga e a situação limiar descrita pelos dados experimentais. Para Findley i , é dado por:

$$i = \frac{\tau_a^c + a\sigma_{n,max}^c - b}{b}. \quad (6.5)$$

O critério de Susmel e de Lazzarin que considera os efeitos combinados da amplitude da tensão cisalhante, o índice de erro é expresso por:

$$i = \frac{\tau_a^c + \frac{a\sigma_{n,max}^c}{\tau_a^c} - b}{b}. \quad (6.6)$$

Em ambos os índices, temos que:

τ_a^c é a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico;

$\sigma_{n,max}^c$ é a máxima tensão normal no plano crítico;

a e b são parâmetros de material envolvendo os limite de resistência a fadiga para a flexão (f_{-1}) e torção (t_{-1}) alternadas.

6.5.1 Validação do Método do Maior Retângulo Circunscrito (MRC)

Quatro conjuntos de testes (Tabelas 6.2–6.5) para sete ligas de aços diferentes (Tabela 6.1) com experimentos no limite de resistência à fadiga foram utilizados para validar o novo processo de obtenção da máxima amplitude da tensão cisalhante no plano crítico. τ_a foi obtida pelo já consagrado método do mínimo círculo circunscrito (Papadopoulos [38]) cujos resultados foram comparados com o método proposto nesse trabalho (MRC). Índices de erro foram usados para comparar os resultados dos critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin considerando os valores obtidos para τ_a e $\sigma_{n,max}$ em cada método (MCC e MRC). O principal objetivo dessa comparação foi validar a aplicabilidade do novo processo para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante para diferentes materiais e carregamentos. As figuras 6.15–6.17 comparam os resultados do método convencional obtidos usando os critério de Findley e de Susmel e Lazzarin.

Adicionalmente, utilizou-se o Algoritmo Genético como processo de otimização para calcular a amplitude da tensão cisalhante que foi aplicado apenas ao critério de Susmel e Lazzarin tendo em vista a grande dispersão apresentada pelos IE do critério de Findley. As previsões dos critérios estão listadas nas tabelas 6.6–6.13 para todos os conjuntos de dados rodados por meio do processo convencional para os critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin. As tabelas 6.14–6.17 apresen-

tam os resultados para o critério de Susmel e Lazzarin executados pelos métodos do círculo e do retângulo para o AG formatados de maneira idêntica ao método convencional.

O primeiro conjunto de experimentos é referente à testes de flexão e torção, proporcionais e não proporcionais, harmônicas e síncronos realizados por Nishihara e Kawamoto [80] representados pelos testes de 1 ao 10 que foram rodados para os critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin cujos resultados estão expressos nas tabelas 6.6 e 6.7.

Observe que, como explicado no cap. 4, para histórias de tensões proporcionais, o MCC e o MRC obtém valores iguais de τ_a e, portanto nos testes 1, 5 e 9, os resultados são iguais. Nos casos não proporcionais onde se observaram resultados diferentes, o MRC obteve a máxima amplitude da tensão cisalhante maior do que o MCC, como é o caso dos testes 7, 8 e 10 para os critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin e que podem ser observados nos gráficos das figuras 6.15(a) e 6.16(a). Os índices de erro para os dois critérios estão mostrados nas figuras 6.15(b) e 6.16(b) e, de um modo geral, nessa base de dados, o critério de Susmel e Lazzarin foi melhor que o critério de Findley (IE mais próximos dos dados experimentais).

Tabela 6.6: Resultados do método convencional para os testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.

Teste	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
1	180.80	70.48	90	169	-0.7	180.80	70.48	90	169	-0.7
2	180.74	90.58	90	170	1.4	180.74	90.58	90	170	1.4
3	180.49	129.58	90	174	5.3	180.49	129.58	90	174	5.3
4	181.70	150.20	90	0	7.9	181.70	150.20	90	0	7.9
5	173.39	125.71	90	158	1.8	173.39	125.71	90	158	1.8
6	170.42	146.15	90	158	2.7	170.42	146.15	90	158	2.7
7	154.51	185.74	90	157	1.0	159.68	160.62	58	169	0.0
8	129.00	258.00	90	0	2.7	161.25	160.21	52	0	0.5
9	162.19	151.75	90	56	-0.1	162.19	151.75	90	56	-0.1
10	152.16	157.56	0	134	3.3	158.91	162.87	133	0	-0.1

O segundo conjunto de testes reproduz estados de tensões gerais composto por duas tensões normais e uma cisalhante com a presença de tensões médias e ângulos de fases entre as componentes.

Tabela 6.7: Resultados do método convencional para os testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro obtidos por meio do critério de Findley.

Teste	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
1	175.8	111.4	90	72	2.8	175.8	111.4	90	72	2.8
2	178.0	114.7	90	175	4.3	178.0	114.7	90	175	4.3
3	179.8	134.3	90	176	7.6	179.8	134.3	90	176	7.6
4	181.7	150.2	90	0	10.4	181.7	150.2	90	0	10.4
5	169.0	161.7	90	164	5.3	169.0	161.7	90	164	5.3
6	167.6	171.5	90	163	5.7	167.6	171.5	90	163	5.7
7	151.9	208.0	90	164	2.1	155.9	194.6	70	168	2.5
8	129.0	258.0	90	0	-3.6	157.2	197.4	61	0	3.5
9	157.9	186.7	90	153	2.6	157.9	186.7	90	153	2.6
10	148.5	198.9	90	142	-0.7	155.0	194.2	53	0	2.0

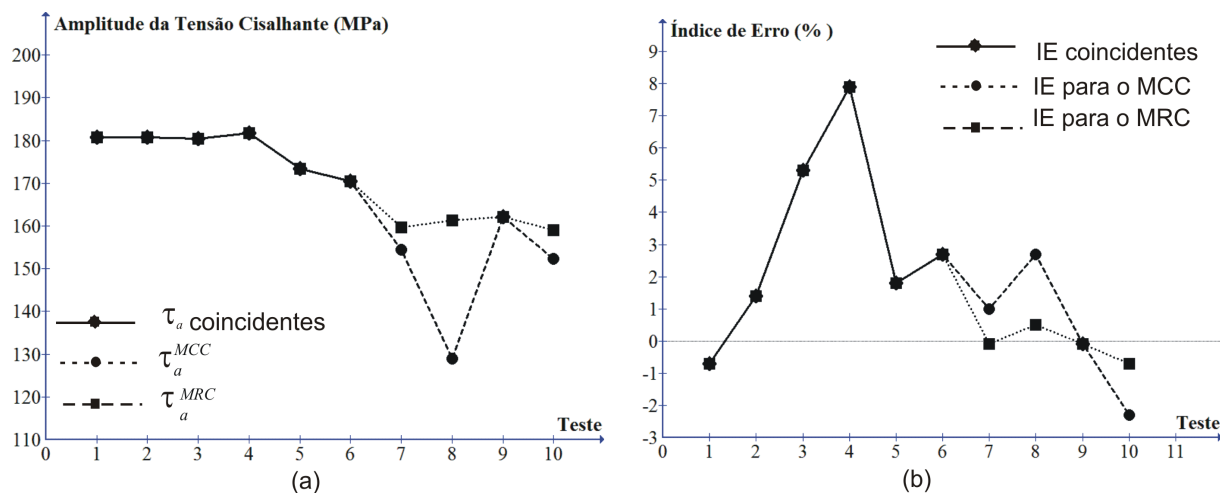


Figura 6.15: Resultados para o critério de Susmel e Lazzarin para os testes 1 a 10, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (a) Amplitudes da tensão cisalhante nos planos críticos (b) Índices de Erro.

Estes experimentos, numerados de 11 a 27, estão apresentados na tabela 6.3 e os resultados dos cálculo do plano crítico pelos métodos do círculo e do retângulo para os critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin estão expressos nas tabelas 6.8 e 6.9.

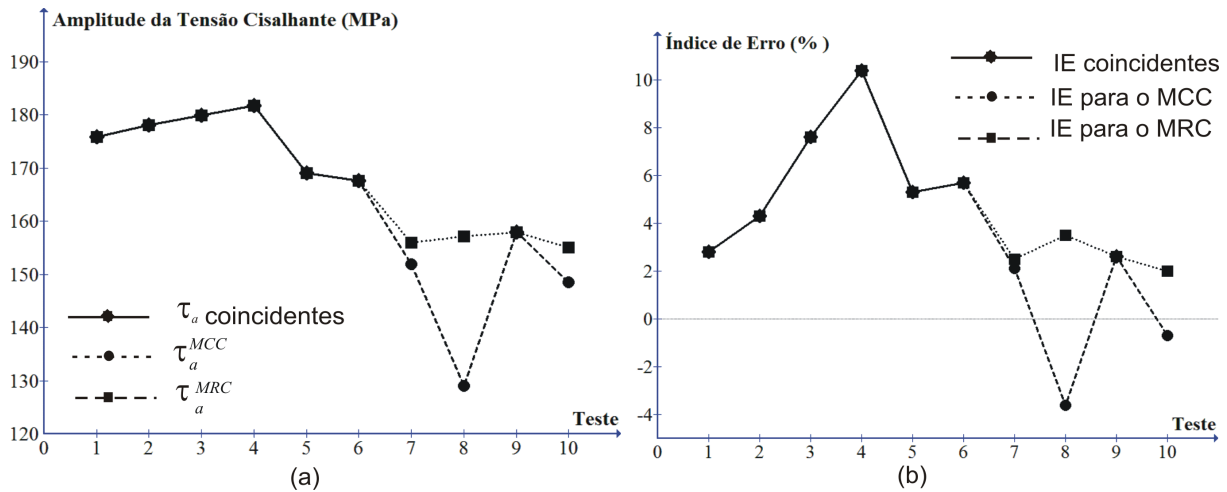


Figura 6.16: Resultados para o critério de Findley para os testes 1 a 10, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (a) Amplitudes da tensão cisalhante nos planos críticos (b) Índices de Erro.

Este complexo estado de tensões como consequência de carregamentos triaxiais síncronos, periódicos e fora de fase produziram resultados com índices de erro bastante elevados. Aproximadamente 50% dos resultados aplicados à formulação de Susmel e Lazzarin [65] deixaram de ser considerados para a validação do novo processo porque o critério só pode ser aplicado caso um limite (Equação 3.31) que depende das propriedades do material, da amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal máxima da história de tensões, não seja ultrapassado. Os experimentos que ultrapassaram esse limite estão convenientemente indicados na tabela 6.8. No caso do critério de Findley, embora não haja a limitação do critério de Susmel e Lazzarin, grande maioria dos índices de erro ultrapassou em 40% tanto pelo MCC quanto pelo MRC (Tabela 6.9).

O terceiro conjunto de experimentos numerados de 28 a 39 e exposto na tabela 6.4 é caracterizado por cinco ligas de aço submetidos a carregamentos de flexão e torção, não proporcionais e assíncronos, com exceção do teste 33 que é proporcional. Não se observa ângulo de fase entre as componentes da tensão normal e cisalhante, exceto o teste 38 que é de 90° . Os índices de erro obtidos pelo critério de Susmel e de Lazzarin (Tabela 6.10) mostraram estar mais próximos dos valores experimentais, enquanto que observou-se uma grande variação do critério de Findley (Tabela 6.11), com IE superiores a 50% (testes 29 e 30, tabela 6.11). Os valores obtidos para τ_a , $\sigma_{n,max}$ que compõem o índice de erro permite identificar a diferença entre os dois métodos (MCC e MRC). Para os casos onde se observou valores diferentes, a figura 6.17(b) nos permite identificar que os índices de erro obtidos pelo método do maior retângulo (MRC) apresentam melhor desempenho quando comparados com o método do menor círculo.

Por fim, o último conjunto de experimentais representado por apenas três experimentos, nu-

Tabela 6.8: Resultados do método convencional para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.

Teste	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
Aço 34Cr4 (b)										
11	150.50	275.50	135	45	2.9	150.50	275.50	135	45	2.9
12	193.24	217.01	90	58	12.6	193.24	217.01	90	58	12.6
13	133.00	286.00	135	45	-0.5	133.00	286.00	135	45	-0.5
14	107.62	282.20	45	46	-5.5	119.16	270.87	128	89	-5.4
15	127.11	500.70	90	24	25.1*	140.70	358.36	57	27	9.5
16	180.00	390.00	90	45	22.8	180.00	390.00	90	45	22.8
Aço 25CrMo4 (b)										
17	139.94	451.47	90	23	43.4*	153.35	319.37	57	26	20.2*
18	185.00	372.50	90	45	32.4*	185.00	372.50	90	45	32.4*
19	115.62	217.94	135	141	-1.3*	129.97	295.31	53	0	14.8*
20	159.00	275.25	135	135	13.8	159.00	275.25	135	135	13.8
21	153.93	483.76	90	23	47.5*	168.56	341.65	57	26	25.5*
22	156.98	500.48	90	45	50.0*	179.97	335.83	55	45	26.4
23	165.94	451.78	90	30	42.0*	170.26	371.54	115	31	30.2*
24	186.47	397.75	90	27	36.0*	186.47	397.75	90	27	36.0*
25	210.18	244.44	90	148	21.8	210.18	244.44	90	148	21.8
26	224.00	344.50	90	45	37.4	224.00	344.50	90	45	37.4
27	186.47	470.56	90	27	46.0*	186.47	470.56	90	27	46.0*

* O valor de ρ para este ensaio ultrapassa o ρ_{lim} para o modelo de Susmel.

merados de 40 a 42 são biaxiais, caracterizados por duas tensões normais, assíncronos para as ligas de aço Aço 34Cr(b) e Aço St35 (Tabela 6.5) cujos resultados, independente do método (MCC e MRC) e dos critérios aplicados, foram rigorosamente iguais (Tabela 6.12 e 6.13).

Paralelamente à validação do MRC com um método confiável para obter a máxima amplitude da tensão cisalhante no plano crítico, desenvolveu-se um método numérico de otimização denominado algoritmo genético e cujas bases teóricas foram apresentadas no Cap. 5. Esse método foi implementado, pois percebeu-se que os tempos de processamentos no MCC e no MRC estavam muito elevados (na ordem de 540s para o MCC e 115s para o MRC).

Tabela 6.9: Resultados do método convencional para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase obtidos por meio do critério de Findley.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
Aço 34Cr4 (b)										
11	141.4	369.7	125	45	4.3	141.4	369.7	55	45	4.3
12	189.8	250.5	90	63	16.7	189.8	250.5	90	63	16.7
13	123.3	393.1	56	45	-2.4	123.3	393.1	56	45	-2.4
14	90.0	453.1	90	6	-13.0	107.3	392.6	67	9	-10.3
15	126.3	509.5	90	27	10.1	126.5	508.6	85	28	10.1
16	180.0	390.0	90	45	25.1	180.0	390.0	90	45	25.1
Aço 25CrMo4 (b)										
17	139.8	452.3	90	24	33.3	139.8	452.3	90	24	33.3
18	175.0	412.7	90	34	42.5	175.0	412.7	90	34	42.5
19	104.0	463.0	90	0	19.3	104.0	463.0	90	0	19.3
20	131.7	434.7	63	150	26.9	131.7	434.7	63	150	26.9
21	153.8	484.4	90	24	44.6	153.8	484.2	91	24	44.6
22	156.2	503.4	90	41	48.6	156.6	502.4	89	42	48.7
23	165.9	451.8	90	30	44.7	165.9	451.8	90	30	44.7
24	185.9	399.7	90	25	45.2	185.9	399.7	90	25	45.2
25	195.7	326.0	90	159	37.7	195.7	326.0	90	159	37.7
26	221.4	353.3	90	40	53.4	221.4	353.3	90	40	53.4
27	185.7	474.7	90	30	57.0	185.7	474.7	90	30	57.0

Como os resultados do método convencional para o critério de Findley apresentaram uma grande dispersão em relação aos dados experimentais, optamos em não implementá-lo no AG. Em consequência, a base de dados para esse trabalho usando algoritmo genético foi executado apenas para o critério de Susmel e Lazzarin, obtendo o plano crítico por meio dos métodos do mínimo círculo e do máximo retângulo. Cabe ressaltar que enquanto no método da busca exaustiva, os planos de corte foram discretizados com incrementos de 1° , no AG, pela sua característica, esses planos são obtidos aleatoriamente. Além disso, a precisão dos planos de corte foi fixada em 0.003° (seção 6.3.2) que podem ser identificados nas tabelas 6.14–6.17, devidamente arredondados para 0.1° . As tabelas para a apresentação dos dados obedeceu ao mesmo formato do processo

Tabela 6.10: Resultados do método convencional em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	$\phi^{c,MCC}$ °	$\theta^{c,MCC}$ °	i^{MCC} %	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	$\phi^{c,MRC}$ °	$\theta^{c,MRC}$ °	i^{MRC} %
<i>Aço 34Cr4 (a)</i>										
28	179.39	300.96	90	21	-6.2	222.33	172.14	54	0	4.5
<i>Aço GGG60</i>										
29	126.85	219.41	90	23	28.4	158.06	127.28	54	3	-0.5
30	126.6	212.62	90	21	26,0	156.74	126.69	55	3	-0.9
<i>Aço 30NCD16</i>										
31	303.01	386,00	90	13	10.2	352.96	227.27	120	178	5.0
32	319.42	374.49	90	12	11.4	367.25	221.84	119	0	7.5
<i>Aço 39NiCrMo3</i>										
33	224.88	150.78	90	160	5.4	224.88	150.78	90	160	5.4
34	178.05	279.04	90	17	15.2	215.06	178.36	56	0	6.6
35	203.16	236.08	90	20	12.3	225.85	166.91	57	5	7.9
<i>Aço 25CrMo4 (a)</i>										
36	143.22	247.72	90	23	6.8	178.68	133.94	53	0	-2.6
37	137.37	229.77	90	19	2.8	169.19	147.62	55	0	-3.6
38	137.02	287.73	90	16	13.5	164.01	178.65	123	3	-0.4
39	137.26	233.33	90	22	3.4	170.70	135.51	55	0	-5.0

convencional, ou seja, constam, para cada método (MCC e MRC), os valores da amplitude da tensão cisalhante (τ_a), da tensão normal máxima ($\sigma_{n,max}$), a localização do plano crítico de acordo com o sistema de referência adotado (ϕ^c, θ^c) e os índices de erro para o critério de Susmel e Lazzarin.

Os resultados obtidos pelo AG para os mesmos conjuntos de testes quando comparados aos resultados obtidos pelo método convencional, mostraram-se praticamente idênticos. As pequenas diferenças dos valores entre os mesmos testes podem ser atribuídas a maior precisão dos planos de corte no AG e pelos procedimentos diferentes na obtenção do plano crítico (Equação 6.4).

Considerando que os resultados do processo convencional e do AG foram concordantes entre si, a maior diferença eles não está explicitada nas tabelas, mas representada pela média dos tempos de processamento. Entre os mecanismos de busca do plano crítico identifica-se uma superior vantagem do AG sobre o processo convencional em relação ao custo computacional. Em média,

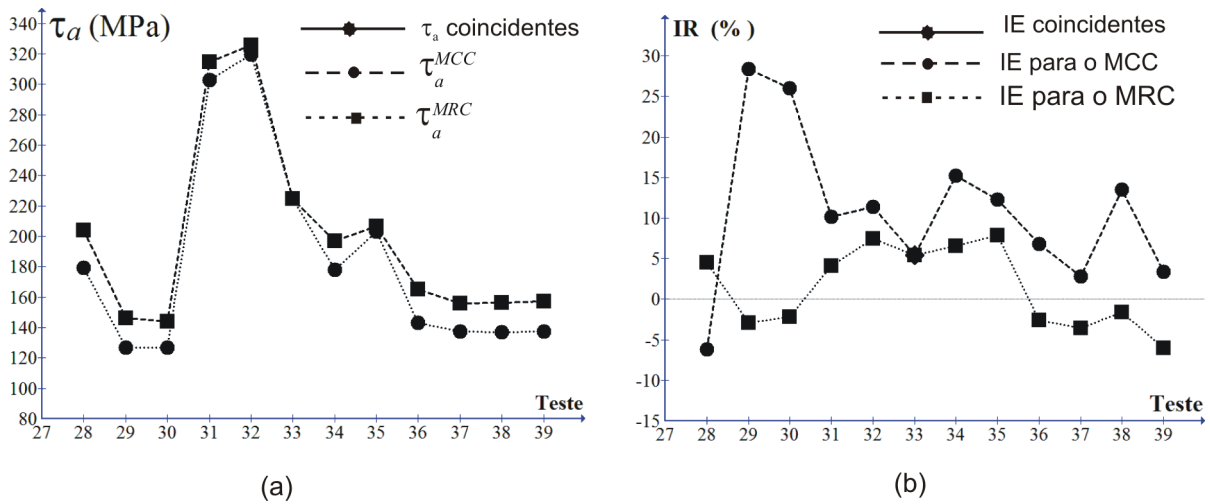


Figura 6.17: (a) Amplitudes da tensão cisalhantes dos testes 28 a 39, determinados pelos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC) (b) Índices de Erro dos testes 28 a 39 referentes aos métodos do círculo (MCC) e retângulo (MRC).

o AG leva aproximadamente 8% do tempo gasto pelo método convencional e o MRC é quase quatro vezes mais rápido que o MCC para obter a amplitude da tensão cisalhante. Os valores das médias dos tempos para cada um deles (busca do plano crítico) pode ser identificado na figura 6.18.

No método convencional, o tempo médio de processamento do MCC e do MRC para calcular o plano crítico foi de 9min30s e 1min55s, respectivamente, enquanto que o AG apresentou um tempo médio de processamento bem inferior, isto é, em média, 42.5s para o MCC e de apenas 10.5s para o MRC.

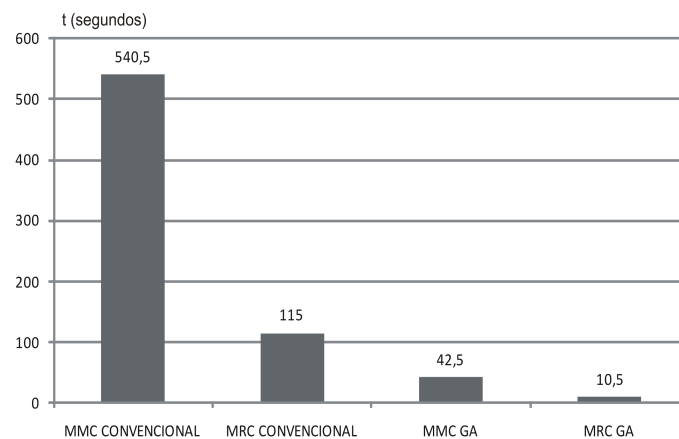


Figura 6.18: Gráfico comparativo do tempo médio de processamento nos processos convencional e algoritmo genético para os métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC).

Tabela 6.11: Resultados do método convencional em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço obtidos por meio do critério de Findley.

Teste	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	$\phi^{c,MCC}$ °	$\theta^{c,MCC}$ °	i^{MCC} %	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	$\phi^{c,MRC}$ °	$\theta^{c,MRC}$ °	i^{MRC} %
Aço 34Cr4 (a)										
28	179.4	301.0	90	21	-8.2	221.3	189.7	57	4	5.3
Aço GGG60										
29	126.7	219.6	90	158	73.1	126.7	219.6	90	22	73.1
30	126.6	212.7	90	158	69.2	126.6	212.7	90	22	69.2
Aço 30NCD16										
31	297.5	417.3	90	161	16.4	325.9	359.6	108	165	17.5
32	313.4	412.8	90	18	19.8	338.3	361.2	107	15	20.7
Aço 39NiCrMo3										
33	200.6	249.0	90	173	22.0	200.6	249.0	90	173	22.0
34	177.7	281.4	90	161	19.4	196.5	249.2	72	14	20.5
35	166.2	329.2	90	163	24.0	200.3	278.8	69	167	27.5
Aço 25CrMo4 (a)										
36	143.2	247.7	90	157	2.2	166.1	204.8	66	16	5.5
37	137.3	230.1	90	20	-3.1	160.7	187.2	66	9	0.3
38	136.7	290.0	90	18	6.1	149.5	260.3	107	14	7.0
39	137.3	233.3	90	22	-2.7	159.1	191.6	66	16	0.3

A superfície dos gráficos da figura 6.19(a)-(d) gerada por $(\theta \times \phi \times \tau_a)$ representa a história das amplitudes das tensões cisalhantes (τ_a) nos planos de corte (θ, ϕ) para o teste n° 38, o mesmo utilizado na seção 6.4, onde foi observado que a história de tensões cisalhantes possui quatro valores máximos iguais para a amplitude da tensão cisalhante, porém com variações expressivas da tensão normal [Figura 6.9 e 6.10(b)]. Nos gráficos da figura 6.19, os pontos na superfície da história das amplitudes das tensões cisalhantes mostram a evolução dos indivíduos (possíveis soluções) para as 1ª, 8ª, 24ª e 40ª gerações, considerando o processo de otimização AG. Na 1ª geração [Figura 6.19(a)], os indivíduos são gerados aleatoriamente, e partir daí, uma sequência de gráficos mostra a evolução dessa população [Figura 6.19(b)–(d)] ao longo do tempo (gerações), onde os indivíduos que possuem melhores características genéticas [maior valor para a função $Fit = f(\tau_a, \sigma_{n,max})$] aproximam para uma posição de maior elevação na superfície desses gráficos. Observe que na 40ª geração, a grande maioria dos indivíduos (soluções) está concentrada

Tabela 6.12: Resultados do método convencional em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços Aço 34Cr4 (b) e Aço St35 obtidos por meio do critério de Susmel e Lazzarin.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
Aço 34Cr4 (b)										
40	175.53	419.53	90	45	24.1	175.53	419.53	90	45	24.1
Aço St35										
41	114.10	257.10	90	45	13.8	114.10	257.10	90	45	13.8
42	109.26	294.00	90	45	15.1	109.26	294.00	90	45	15.1

Tabela 6.13: Resultados do método convencional em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços Aço 34Cr4 (b) e Aço St35 obtidos por meio do critério de Findley.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ$					$\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\phi = 1^\circ, \Delta\varphi = 9^\circ$				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%	
Aço 34Cr4 (b)										
40	175.4	420.1	90	134	25.7	175.4	420.1	90	46	25.7
Aço St35										
41	114.1	257.1	90	135	13.8	114.1	257.0	89	45	13.8
42	109.3	294.0	90	45	13.8	109.3	294.0	90	45	13.8

em torno da posição onde está localizada a maior amplitude da tensão cisalhante, considerando também a influência da tensão normal. O indivíduo que possuir o maior valor para *Fit* será a solução do problema. Nessas condições, a posição $(\theta, \phi, \tau_a) = (11.3^\circ, 90.5^\circ, 136.16 \text{ MPa})$ e $\sigma_n = 287.96 \text{ MPa}$ representa o plano crítico.

Tabela 6.14: Resultados aplicando algoritmo genético nos testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para o aço duro.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
	(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%
1	180.70	74.94	90.5	169.7	-0.3	180.71	74.87	90.5	169.7	-0.3
2	180.73	91.84	90.0	170.3	1.5	180.73	91.37	90.5	170.2	1.4
3	180.51	128.96	90.5	173.7	5.2	179.70	134.89	89.7	176.2	5.5
4	181.69	150.19	90.5	0.0	7.9	181.70	150.20	90.0	180.0	7.9
5	173.33	128.03	90.5	158.4	2.0	173.39	120.03	90.8	67.9	1.2
6	170.38	148.13	90.5	158.4	2.9	170.41	146.63	90.5	158.1	2.8
7	154.34	191.67	90.0	158.8	1.6	159.56	158.26	56.5	170.4	-0.3
8	128.99	256.71	90.7	5.7	2.5	160.18	179.72	56.6	180.4	2.4
9	162.19	151.41	90.0	146.7	-0.1	162.15	153.41	90.2	147.1	0.1
10	152.24	166.44	90.5	135.3	-2.2	158.94	160.63	46.6	180.3	-0.3

Tabela 6.15: Resultados aplicando algoritmo genético para os testes experimentais no limiar de resistência à fadiga envolvendo carregamentos combinados tração/tração/torção síncronos em fase e fora de fase.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	$\phi^{c,MCC}$ °	$\theta^{c,MCC}$ °	i^{MCC} %	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	$\phi^{c,MRC}$ °	$\theta^{c,MRC}$ °	i^{MRC} %
11	150.48	280.27	45.5	45.0	3.4	150.44	281.98	134.3	43.8	3.6
12	192.86	226.41	89.8	59.4	13.2	193.25	216.21	90.0	57.9	12.6
13	132.97	291.94	45.6	45.3	0.2	132.97	291.94	45.6	45.0	0.2
14	107.65	279.71	45.7	45.1	-5.8	119.17	271.50	52.3	180.4	-5.3
15	127.03	496.41	89.9	22.6	24.5*	140.52	369.25	121.6	26.9	10.7
16	180.00	390.00	90.1	45.1	22.8	179.99	389.96	90.6	45.3	22.7
17	139.95	451.14	90.2	22.6	43.4*	153.27	309.27	124.5	26.7	18.6*
18	185.00	372.72	90.1	135.1	32.4*	185.00	372.77	89.9	135.1	32.4*
19	116.21	237.41	45.6	44.8	2.9*	129.97	266.71	127.0	90.0	9.2*
20	158.98	279.16	45.4	135.0	14.4	158.98	280.02	134.5	135.4	14.5
21	153.93	483.49	89.7	22.6	47.4*	168.52	335.85	56.2	26.7	24.6*
22	156.98	500.48	89.8	45.0	50.0*	179.93	342.18	124.2	45.3	27.3
23	165.97	451.67	90.2	29.5	42.0*	170.14	382.52	113.1	30.7	31.8*
24	186.46	397.84	89.8	26.9	36.1*	186.38	396.92	90.0	28.3	35.9*
25	210.18	245.08	90.0	148.6	21.8	209.98	250.93	90.5	147.0	22.5
26	224.00	344.52	90.0	135.0	37.4	223.99	344.26	89.8	45.3	37.3
27	186.48	471.00	90.5	27.4	46.0*	186.48	471.24	90.0	27.6	46.1*

* O valor de ρ para este ensaio ultrapassa o ρ_{lim} para o modelo de Susmel.

Tabela 6.16: Resultados aplicando algoritmo genético em testes de flexão e torção, harmônicos não proporcionais, assíncronos para 5 ligas de aço.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	$\phi^{c,MCC}$ °	$\theta^{c,MCC}$ °	i^{MCC} %	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	$\phi^{c,MRC}$ °	$\theta^{c,MRC}$ °	i^{MRC} %
<i>Aço 34Cr4 (a)</i>										
28	179.40	301.03	90.0	21.4	-6.2	222.05	175.95	54.6	178.2	4.5
<i>Aço GGG60</i>										
29	126.85	219.36	90.5	156.9	28.5	158.01	128.27	54.5	2.7	-0.2
30	126.55	212.34	87.7	158.4	26.0	156.73	127.10	55.2	2.9	-0.7
<i>Aço 30NCD16</i>										
31	303.02	389.14	90.5	166.5	10.5	352.95	222.44	59.4	1.7	4.7
32	319.44	378.57	90.0	167.4	11.8	366.74	229.16	61.1	2.1	7.9
<i>Aço 39NiCrMo3</i>										
33	224.50	160.41	90.9	67.9	6.6	224.52	160.46	90.0	69.5	6.6
34	178.05	278.98	90.0	17.0	15.2	214.95	180.73	123.5	1.6	6.9
35	203.17	236.72	90.6	20.4	12.4	225.27	181.18	56.6	1.1	9.7
<i>Aço 25CrMo4 (a)</i>										
36	143.23	247.58	89.8	156.6	6.8	178.39	144.81	53.9	176.3	-1.1
37	137.36	229.82	90.5	160.8	2.8	169.02	147.12	125.2	2.9	-3.7
38	136.16	287.96	90.5	11.3	11.9	163.99	171.75	124.4	2.6	-1.4
39	137.27	233.36	90.0	157.8	3.5	170.43	134.37	125.7	3.6	-5.2

Tabela 6.17: Resultados aplicando algoritmo genético em testes com carregamentos tração/tração, harmônicas, não proporcionais e assíncronos para os aços *Aço 34Cr4 (b)* e *Aço St35*.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	$\phi^{c,MCC}$ °	$\theta^{c,MCC}$ °	i^{MCC} %	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	$\phi^{c,MRC}$ °	$\theta^{c,MRC}$ °	i^{MRC} %
<i>34Cr4 (b) steel</i>										
40	175.52	419.61	90.3	45.3	24.1	175.53	419.61	89.8	45.3	24.1
<i>Aço St35</i>										
41	114.09	257.15	90.0	45.3	13.8	114.10	257.06	90.5	135.1	13.8
42	109.26	294.00	90.0	135.0	15.1	109.26	294.00	89.9	44.9	15.1

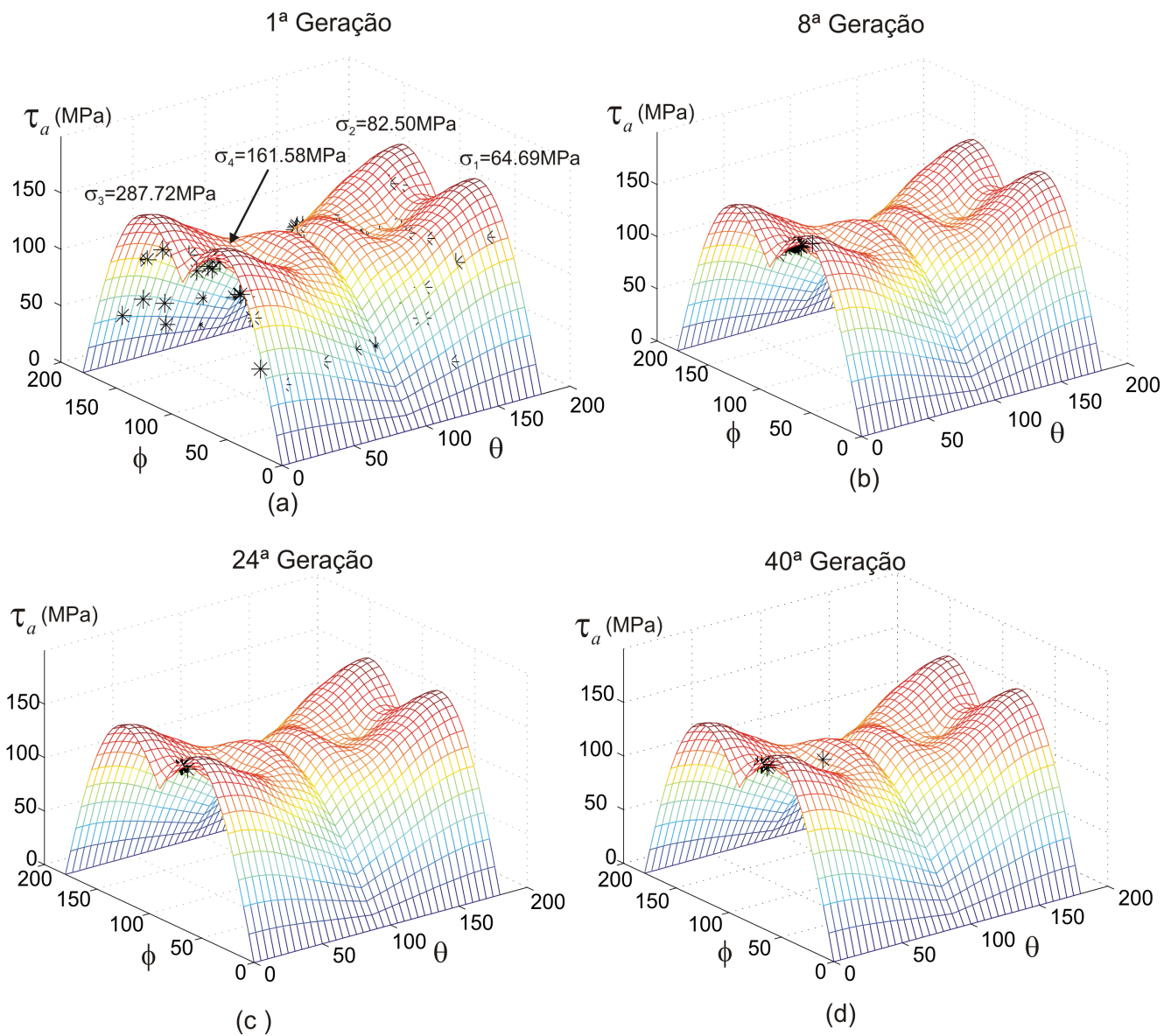


Figura 6.19: Saída gráfica de um AG apresentando a população nas 1ª(a), 8ª(b), 24ª(c) e 40ª(d) gerações na busca da solução para o teste nº 38.

6.6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico obtidos pelo novo método são encorajadores. Dos quarenta e dois testes avaliados, doze ultrapassaram o limite ρ estabelecido para o critério de Susmel e Lazzarin (Equação 3.31) quando calculados com os resultados do MCC e seis para os valores determinados pelo MRC. Em consequência, extraídos os resultados da base de dados onde esse limite foi ultrapassado para o MCC, restaram trinta observações que foram usadas para comparar os métodos do mínimo círculo e do maior retângulo.

Os índices de erro obtidos para o critério de Susmel e Lazzarin, aplicando valores do plano crítico obtido pelo MCC e MRC estão condensados no histograma da figura 6.20. No método proposto observou-se que 46.6% dos índices de erro pertencem ao intervalo $IE \in [-2.5\%; 2.5\%]$, enquanto para esse mesmo intervalo, o MCC computou 36.6%. A média dos IE obtidos pelo MCC foi 7,9%, enquanto que para o MRC foi de 6,7%, indicando que os índices de erro do MRC estão mais próximos dos dados experimentais. O desvio padrão para ambos os métodos apresentaram basicamente mesmo grau de dispersão, 9.8% para o MCC e 9.9% para o MRC.

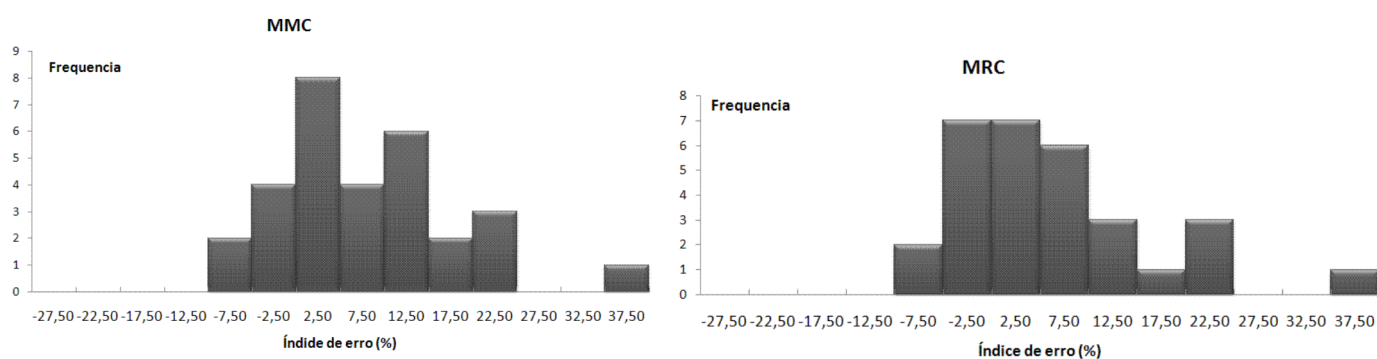


Figura 6.20: Histograma dos índices de erro de fadiga para o critério de Susmel e Lazzarin para os métodos do MCC e do MRC.

6.6.1 Obtendo a Amplitude da Tensão Cisalhante no Plano Crítico

O método do mínimo círculo (MCC) e do maior retângulo circunscrito (MRC) utilizam processos diferentes para obter a amplitude da tensão cisalhante nos planos de corte. No MCC, o processo é iniciado ao arbitrar um centro para um círculo e por meio de sucessivas iterações de um fator de expansão desse raio (também arbitrado), uma seqüência de novos raios e novas localizações do centro do círculo são estabelecidos até que o processo é finalizado quando, para uma dada tolerância, um menor círculo conter toda a história de tensões cisalhantes projetada no plano de corte. O raio desse círculo é a amplitude da tensão cisalhante.

No MRC, ao contrário, não há necessidade de arbitrar-se qualquer valor inicial ou fixar uma

tolerância. Inicialmente, se estabelece um retângulo cujos lados devem ser tangentes à história de tensões cisalhantes projetada no plano de corte e, um desses lados, inicialmente, deve formar um ângulo de zero grau para uma dada base. Por meio de sucessivas rotações referenciadas nessa base, constroem-se retângulos tangentes à projeção das componentes da história de tensões cisalhantes no plano de corte. Esses diferentes retângulos são caracterizados por orientações φ que devem circunscrever essa história de tensões e a amplitude da tensão cisalhante no plano de corte será obtido pelo maior retângulo, calculado em função da medida dos seus lados a_i , dada por $\sqrt{\sum_{i=1}^2 a_i^2}$, onde a_i representa a metade dos lados desse retângulo.

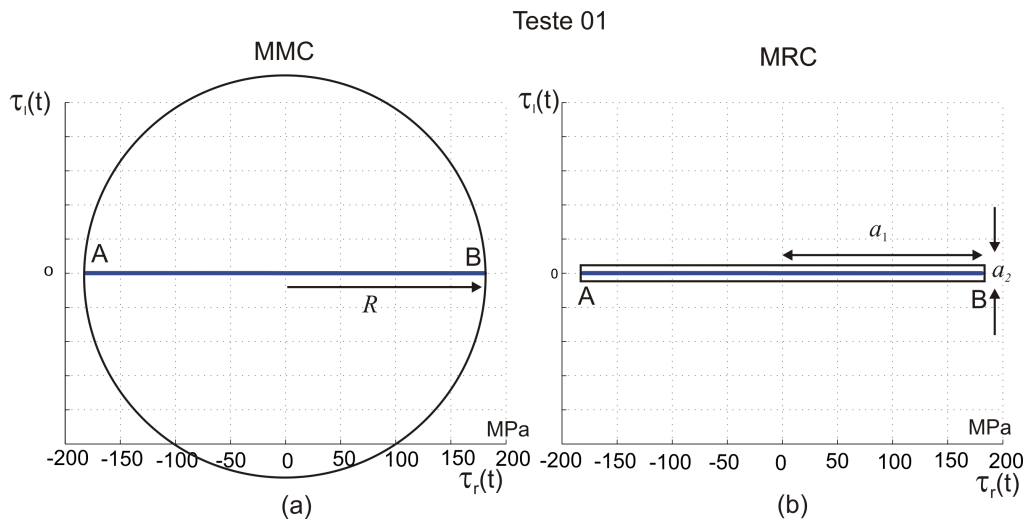


Figura 6.21: Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste n° 01 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.

Nos carregamentos proporcionais e não proporcionais afins, as componentes da tensão cisalhante projetadas nos planos de corte formam segmentos de retas e a máxima amplitude da tensão cisalhante é obtida no plano que conter a maior corda. Esses tipos de situações já foram exploradas nos exemplos 1 e 2 da seção 4.4 onde, nesses casos, a amplitude da tensão cisalhante é idêntica no plano crítico para ambos os métodos como as histórias dos experimentos 1, 5, 9, 33. Para esses casos, como no teste 1 onde o diagrama de fase $\tau_r(t) \times \tau_l(t)$ está representada na da figura 6.21, a amplitude da tensão cisalhante no MCC e MRC é expressa por:

$$\tau_a^{c,MCC} = \tau_a^{c,MRC} = R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad a_2 = 0, \quad (6.7)$$

onde:

$\tau_a^{c,MCC}$ é a amplitude da tensão cisalhante para o método do menor círculo (MCC);

$\tau_a^{c,MRC}$ é a amplitude da tensão cisalhante para o método do maior retângulo (MRC);

R , é o raio do círculo no MCC;

a_1, a_2 são as dimensões das metades dos lados do retângulo no MRC.

Houveram experimentos onde se observou que o MCC e MRC forneceram localizações diferentes para o plano crítico e para a amplitude da tensão cisalhante como é caso dos testes 7, 8 e 10 que representam histórias de tensões não proporcionais, síncronas. Nesses casos, a amplitude da tensão cisalhante obtido pelo MRC foi maior que o MCC e, por consequência, os índices de erro foram diferentes.

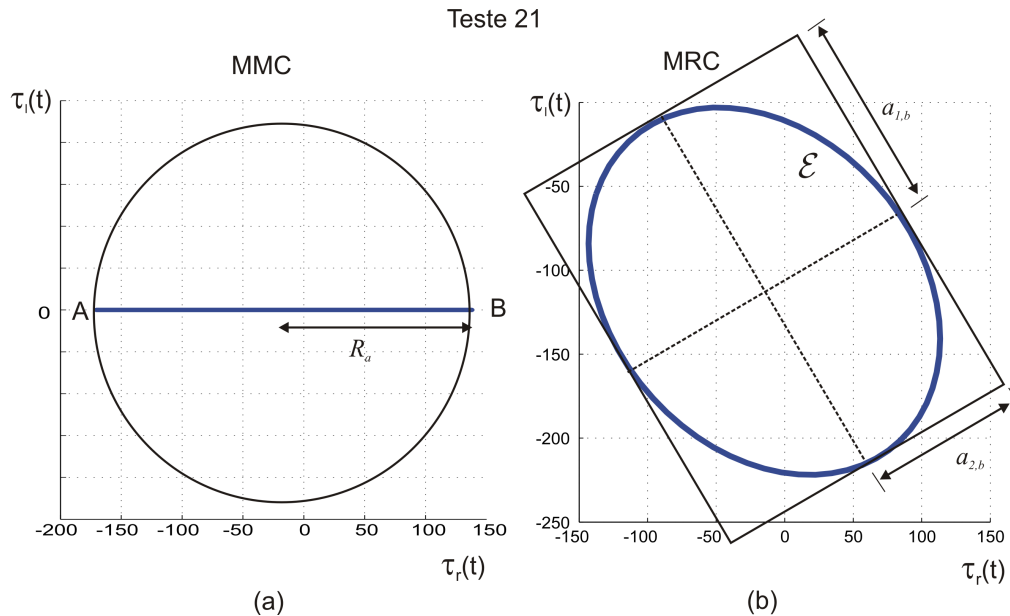


Figura 6.22: Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste nº 21 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.

Os gráficos da figura 6.22 representam o diagrama de fases da tensão cisalhante em dois planos de corte distintos para o teste 21. A figura 6.22(a) é o plano crítico obtido pelo MCC cuja história da tensão cisalhante é representada pelo segmento reta AB. No MRC, para a mesma história de tensão, a elipse \mathcal{E} mostrada na figura 6.22(b) corresponde ao diagrama de fases no plano crítico. Durante o processo de busca, ambos os métodos avaliam as mesmas histórias projetadas nos planos de corte. O MCC calcula o raio da história de tensões da figura 6.22(b) menor que 6.22(a). Na figura 6.22(a), o MRC avalia o mesmo valor para amplitude da tensão cisalhante que o MCC, porém, esse valor é menor que a amplitude calculada na história 6.22(b). Resume-se assim:

- para a história das componentes da tensão cisalhante da figura 6.22(a):

$$\left. \begin{aligned} \tau_a^{a, MCC} &= R_a \\ \tau_a^{a, MRC} &= \sqrt{a_{1,a}^2 + a_{2,a}^2}, \quad a_{2,a} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_a = a_{1,a},$$

onde:

$\tau_a^{a, MCC}$ é a amplitude da tensão cisalhante calculada pelo MCC para a história da figura 6.22(a);

$\tau_a^{a, MRC}$ é a amplitude da tensão cisalhante calculada pelo MRC para a história da figura 6.22(a);

R_a é o raio do MCC que circunscreve a história de tensões cisalhantes para a a história da figura 6.22(a);

$a_{1,a}$, $a_{2,a}$ são os semi lados do retângulo que circunscreve a história da tensão cisalhante para a história da figura 6.22(a);

- para a história das componentes da tensão cisalhante da figura 6.22(b):

$$\left. \begin{array}{l} \tau_a^{b,MCC} = R_b \\ \tau_a^{b,MRC} = \sqrt{a_{1,b}^2 + a_{2,b}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow R_b < R_a < \sqrt{a_{1,b}^2 + a_{2,b}^2}.$$

$\tau_a^{b,MCC}$ é a amplitude da tensão cisalhante calculada pelo MCC para a história da figura 6.22(b);

$\tau_a^{b,MRC}$ é a amplitude da tensão cisalhante calculada pelo MRC para a história da figura 6.22(b);

R_b é o raio do MCC que circunscreve a história de tensões cisalhantes para a a história da figura 6.22(b);

$a_{1,b}$, $a_{2,b}$ são os semi lados do maior retângulo que circunscreve a história da tensão cisalhante para a história da figura 6.22(b).

No caso de testes assíncronos, verificou-se também diferenças nos resultados obtidos pelo MCC e MRC (Tabelas 6.4 e 6.10) quanto à localização do plano crítico. Considere, por exemplo, o teste 29 onde a relação de frequência é $\lambda_{xy} = 0.25$. Note que a amplitude da tensão cisalhante calculada pelo MCC ($\tau_a = 126.85$ MPa) é obtida pela maior projeção da história das componentes da tensão cisalhante projetada no plano crítico ($\phi^{c,MCC} = 90^\circ$ $\theta^{c,MCC} = 23^\circ$), representada por um segmento de reta AB [Figura 6.23(a)], enquanto que, nessa mesma história, o MRC obteve a medida da amplitude da tensão cisalhante ($\tau_a = 158.06$ MPa; $\phi^{c,MRC} = 54^\circ$ $\theta^{c,MRC} = 3^\circ$) em função dos lados do maior retângulo que circunscreve a história das componentes das tensões cisalhantes projetadas no plano crítico [$\tau_a = f(a_1, a_2)$ e figura 6.23(b)].

6.6.2 Comparação entre o processo de busca incremental com o algoritmo genético

Sabe-se que o processo convencional ou busca exaustiva, na abordagem do plano crítico, executa uma varredura intensiva (discretizada) dos planos de corte na pesquisa da amplitude da tensão cisalhante. Este processo, embora tenda a ser mais seguro possui limitações quanto à precisão e tempo de processamento. A precisão está diretamente relacionada com a quantidade de planos de corte estipulada para cada história de tensões. No cálculo de τ_a , um número elevado dessa quantidade pode ser, em princípio, proibitivamente dispendioso e, por outro lado, uma pequena quantidade pode fornecer resultados imprecisos ou não adequados. Na seção 6.3 foi realizada uma avaliação entre a qualidade dos resultados e o número de planos de corte na determinação do plano crítico.

No entanto, essa discretização, embora sob o ponto de vista da qualidade dos resultados mostrou-se adequada quando aplicada ao processo convencional, o custo computacional (tempo

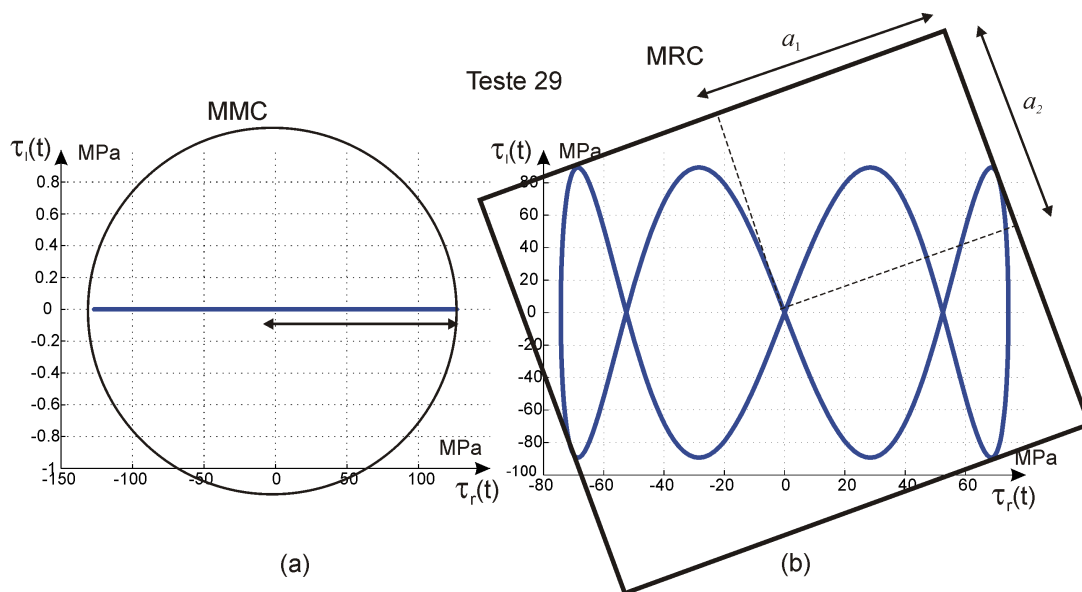


Figura 6.23: Projeção da história de tensões cisalhantes no Plano Crítico para o teste n° 29 (a) Método do Menor Círculo (b) Método do Maior Retângulo.

de processamento) ainda permaneceu elevado, principalmente para histórias assíncronas onde a história de tensões é discretizadas no tempo em função da relação de frequências entre as componentes. Segundo Coello Coello [90] que comparou diversos procedimentos numéricos, os melhores resultados foram os que tiveram um custo computacional bastante elevado e reduzir o domínio de busca em torno de uma região provável pode ser uma das possibilidades para diminuir esse custo. No caso do processo convencional, este procedimento pode ser aplicável ao MCC, já que nesse método, a maioria dos planos críticos foi encontrada para valores de ϕ igual a 90° ou 135° , Sendo assim, ao invés de considerar incrementos de $\phi = 1^\circ$, pode-se aumentar para $\Delta\phi = 5^\circ$. Porém, como observado nos resultados do método do maior retângulo (MRC), previamente, não há como considerar um valor fixo para uma das variáveis de referência dos planos de corte e incrementar somente a outra, porque, em muitos casos, o plano crítico foi observado em várias valores de ϕ .

Com o propósito de usar um método de otimização para obter um valor máximo em um domínio de busca não-linear, procuramos uma técnica de maximização que satisfizesse os seguintes requerimentos:

1. habilidade de obter resultados confiáveis no menor tempo;
2. fácil de usar, ou seja, poucas variáveis de controle para obter a maximização;
3. convergência consistente para o máximo global, independente da quantidade de testes executados.

Para esses requerimentos, o Algoritmo Genético se mostrou bastante adequado porque é um ferramenta de otimização para domínios não convexos e não-lineares. A sua grande aceitação é atribuída à velocidade, à capacidade de obter resultados muito próximos da solução ideal e à habilidade de encontrar soluções ótimas globais sem o perigo de ficar estagnado em algum máximo local.

Como qualquer técnica de otimização numérica, houve a necessidade de estabelecer parâmetros para aproveitar eficientemente o algoritmo genético. O capítulo 6.3.2 apresenta detalhadamente esses procedimentos, de maneira que, resumidamente, foram os seguintes padrões adotados: string binária com 20 bits para representar θ e ϕ , 40 indivíduos que representam a quantidade aleatória de θ e ϕ gerados para formar uma população, 40 gerações para o número de iterações e uma taxa de mutação 1/15. No processo incremental, também foram levantados os requisitos mais adequados que fornecessem bons resultados com o menor custo. Foram os seguintes, os padrões adotados para esse processo: discretizações dos planos de corte: $\Delta\theta = \Delta\phi = \pi/180$.

Nos fluxogramas mostrados na figura 6.24 podemos identificar a diferença conceitual entre o processo convencional [Figura 6.24(a)] e o algoritmo genético [Figura 6.24(b)]. No processo convencional cada laço de repetição que varia de 0 a π com incrementos de $\pi/180$ representa discretizações que perfazem 32.400 planos de corte, enquanto, no AG, inicialmente são gerados 40 planos de corte aleatórios (indivíduos) e o algoritmo executa 40 repetições que correspondem ao número de gerações para cada história de tensões. O AG pesquisa, no máximo, 1.600 planos de corte para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante na abordagem do plano crítico. Este fato explica a diferença no tempo computacional entre os métodos e também atende ao requisito desejado para um método de otimização: fornecer resultados com um custo baixo.

Para validar o terceiro requisito, ou seja, a capacidade de manter a convergência consistente para o máximo global, independente da quantidade de testes rodados optamos por executar dois dados experimentais por três vezes consecutivas. Esta avaliação foi executada nos testes nº 1 que possui uma história proporcional e nº 8, não proporcional.

No processo convencional, independente do número de vezes que um mesmo teste é executado, existe uma invariância no resultado, haja vista que os incrementos dos planos de corte são fixos. Conceitualmente, no AG isso não ocorre, pois os valores iniciais para os planos de corte são gerados de modo aleatório e, em cada iteração, esses valores (aleatórios) que representam indivíduos vão gerar outros valores (possíveis soluções) que representam indivíduos que transmitem suas características genéticas para gerações futuras. Outro fator responsável pela diferença entre os resultados do método convencional e o AG é a precisão para a localização dos planos de corte. No processo convencional, adotou-se um precisão de 1º para manter uma qualidade aceitável dos resultados e para não extrapolar o tempo de processamento. No AG, por não possuir essa limitação, adotou-se precisão de 0.003º para os planos de corte, embora os resultados tenham sido

apresentados com arredondamento de 0.1°.

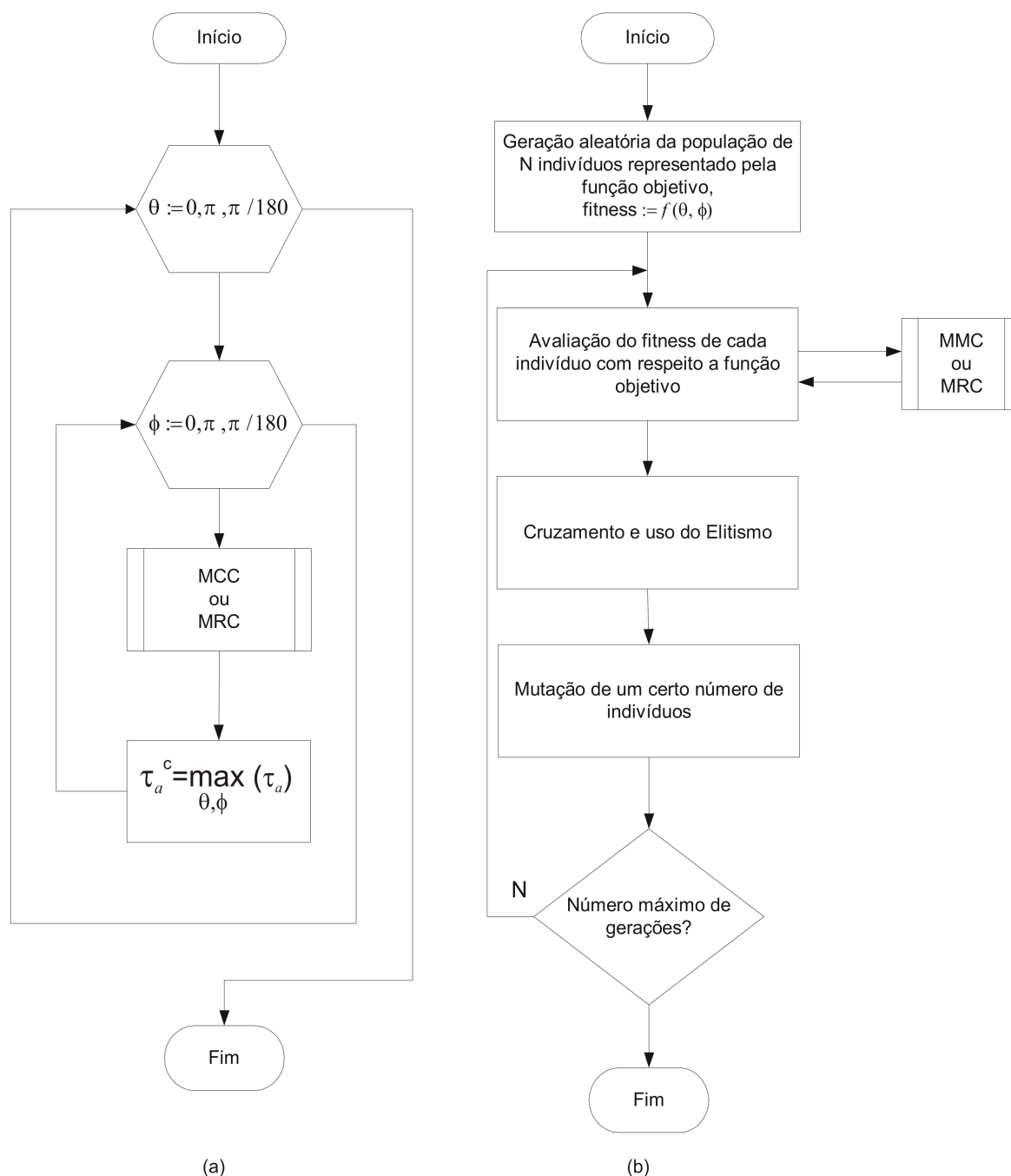


Figura 6.24: Fluxograma para obtenção do plano crítico (a) processo incremental (b) algoritmo genético

Esses fatores podem ser comprovados quando analisamos os resultados para os testes nº 1 e nº 8 executados por 3 vezes consecutivas e apresentados na tabela 6.18. Numa observação mais detalhada, nota-se que os resultados para a máxima amplitude da tensão cisalhante, diferem entre si por valores menores que 0.34 MPa ou 0.045%, enquanto os índice de erro permaneceram com o mesmo valor, exceto para segunda execução do teste nº 1 obtido pelo MRC cujo IE apresentou

Tabela 6.18: Resultados para os testes 1 e 8 executados por três vezes pelo processo do algoritmo genético.

<i>Teste</i>	Método do Menor Círculo					Método do Maior Retângulo				
	$\tau_a^{c,MCC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$	$\phi^{c,MCC}$	$\theta^{c,MCC}$	i^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$	$\phi^{c,MRC}$	$\theta^{c,MRC}$	i^{MRC}
	(MPa)	(MPa)	°	°	%	(MPa)	(MPa)	°	°	%
1	180.70	75.08	90.5	169.7	-0.2	180.70	75.01	90.5	169.7	-0.2
1	180.67	75.42	89.1	169.8	-0.2	180.71	74.88	90.0	169.7	-0.3
1	180.70	75.16	89.9	169.7	-0.2	180.70	75.15	90.5	169.7	-0.2
8	128.99	257.96	90.7	180.1	2.7	161.24	162.92	52.6	0.0	0.9
8	129.00	258.00	90.0	180.0	2.7	161.23	163.47	127.3	179.9	0.9
8	128.99	257.98	90.5	180.0	2.7	161.23	163.56	127.2	180.1	0.9

uma diferença de 0.1% em relação aos dois outros testes.

Quanto à localização do plano crítico, embora não seja relevante para aplicação de um critério de fadiga multiaxial, verificamos que para a primeira execução do teste nº 8, o MRC encontrou as coordenadas esféricas referentes à localização plano crítico ($\theta_{c,MRC} = 0^\circ$) diferentes das 2ª e 3ª execuções ($\theta^{c,MRC} = 179.9^\circ$ para a 2ª execução e $\theta^{c,MRC} = 180.1^\circ$ para a 3ª execução). Esse fato que não comprometeu o IE ou τ_a , pois o plano crítico determinado, embora não seja igual aos outros dois, está de acordo com a teoria da mecânica dos sólidos no que diz a respeito à existência de uma tensão cisalhante em uma face e uma outra de igual valor, mas perpendiculares entre si.

Esta avaliação acrescida dos resultados das tabelas 6.14–6.17 executados por meio do AG quando comparados com os resultados das tabelas 6.6, 6.8, 6.10 e 6.12 que foram executados pelo processo incremental, todos para critério de Susmel e de Lazzarin, nos permite concluir que o algoritmo genético é um processo de otimização robusto e que manteve uma convergência consistente na determinação da maior amplitude da tensão cisalhante e do plano crítico.

Numa investigação detalhada entre os resultados das tabelas do processo convencional podemos notar algumas diferenças, destacando-se a localização do plano crítico fornecido onde os valores de θ e ϕ para o AG possuem precisão de 0.1° enquanto que no processo convencional, essa precisão é dada pela unidade.

Os gráficos da figura 6.25 sintetizam os resultados gerados pelos métodos do menor círculo circunscrito (MCC) e do maior retângulo circunscrito (MRC), ambos executados pelos processos convencional e do algoritmo genético. O gráfico da figura 6.25(a) representa os valores de τ_a obtidos pelo processo convencional, enquanto que a figura 6.25(b), são resultados processados pelo algoritmo genético. Comparando-se os dois gráficos pode-se identificar a total semelhança

entre os dois, mantendo inclusive as diferenças entre o MCC e o MRC quanto à obtenção das máximas amplitudes da tensão cisalhante. Deve-se notar que tanto no processo convencional quanto no AG houve, obrigatoriamente, coincidências nos resultados para os casos de histórias proporcionais expressas pelos teste nº 1, 5, 9 e 33.

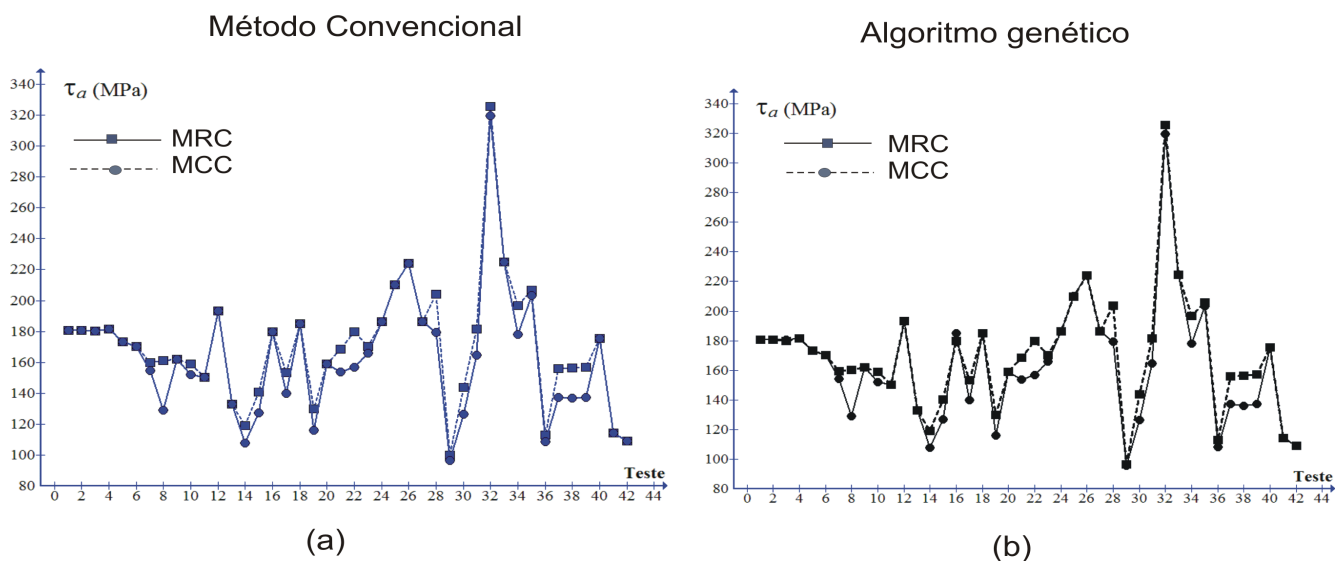


Figura 6.25: (a) gráfico das amplitudes das tensões cisalhantes dos testes 1 ao 42 executado pelo processo convencional nos métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC) (b) gráfico das amplitudes das tensões cisalhantes dos testes 1 ao 42 executado pelo algoritmo genético nos métodos do menor círculo (MCC) e maior retângulo (MRC).

6.6.3 Índices de erro

Um índice de erro (i - Equação 6.6) mede o desvio entre a previsão de ocorrência de falha fornecido por um critério de fadiga e a situação limiar descrita pelos dados experimentais. Assim, quando o módulo do índice de erro ($|i|$) mais próximo estiver de zero, melhor será a acurácia, já que seus desvios são menores. Um índice de erro com valor positivo ($i > 0$) significa que o limite de resistência a fadiga já foi ultrapassado (conservativo), ao contrário, quando negativo ($i < 0$) trata-se de um resultado não conservativo. Os índices de erro implementados neste trabalho tiveram por objetivo medir o grau de dispersão dos resultados fornecidos pelo critério de Susmel e de Lazzarin [30] (Tabelas 6.6, 6.8, 6.10 e 6.12) e de Findley [58] (Tabelas 6.7, 6.9, 6.11 e 6.13) em relação aos dados experimentais que foram obtidos por meio do MCC e do MRC (colunas 6 e 11 dessas tabelas). No AG não foi considerado o critério de Findley para obter os IE, daí, as tabelas 6.14–6.17 expressam apenas os índices de erro obtidos para o critério de Susmel e de Lazzarin [30].

Os índices de erro mostrados no gráfico da figura 6.26 são referentes aos testes cujos valores

não ultrapassaram o ρ_{lim} para o critério de Susmel e de Lazzarin (Equação 3.31). Note que, em muitos experimentos, os índices de erro, independente do método de cálculo da amplitude, foram idênticos. Outros, porém, os índices de erro obtidos pelo MRC se mostraram mais próximos dos dados experimentais.

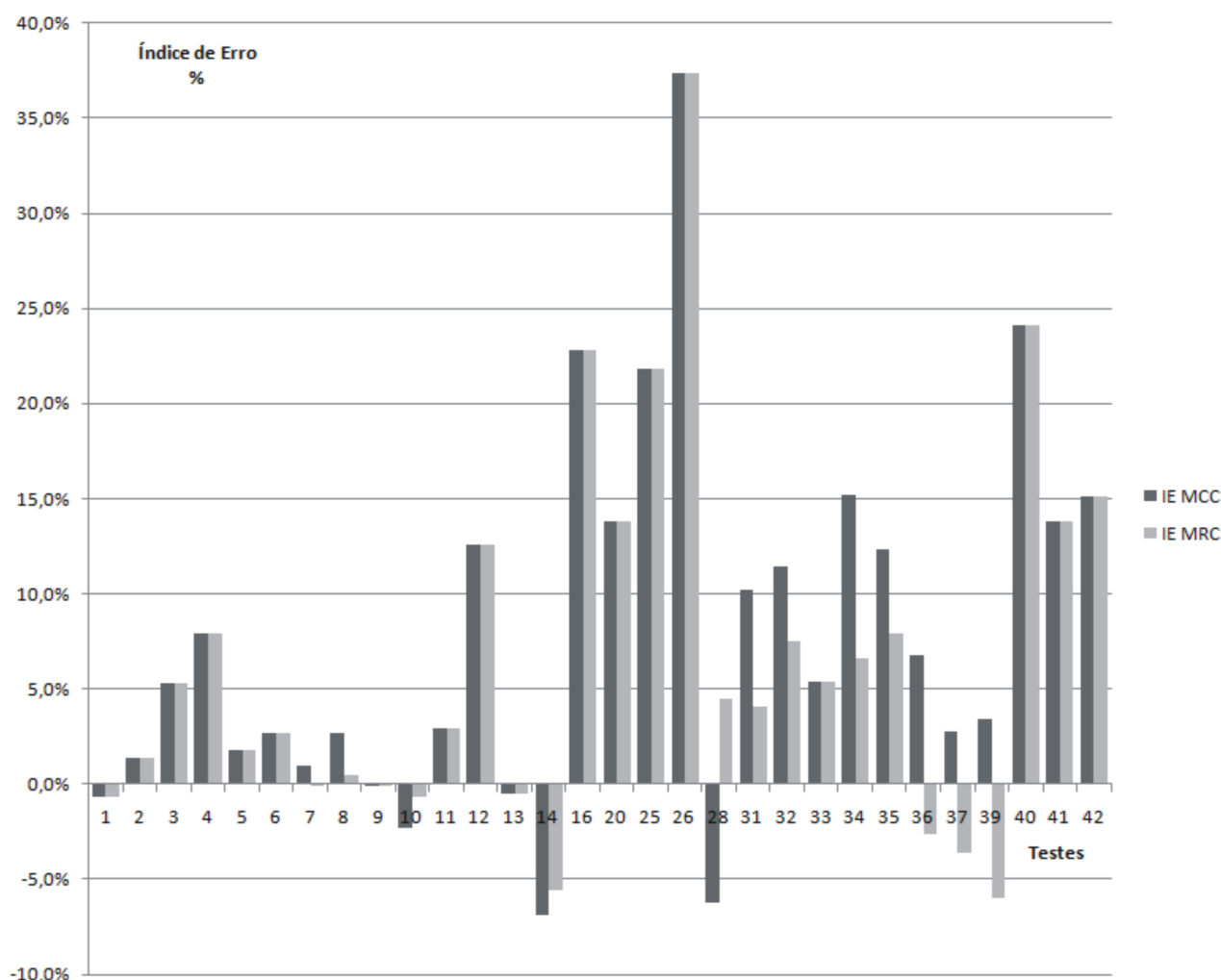


Figura 6.26: Índices de erro para o critério de Susmel e de Lazzarin obtidos pelos métodos do menor círculo (MCC) e do maior retângulo (MRC).

Considerando ainda um estudo estatístico somente para os IE onde se observou valores diferentes quando calculados pelo MCC e MRC, obtivemos a média de 4,2% com desvio padrão de 7,2% para o MCC e média de 1,0% e o desvio padrão de 5,0% para o MRC. Esses valores permitem concluir que, no MCC, aproximadamente 68% dos índices estão compreendidos entre $i^{MCC} \in [-4.0\% \ 11.4\%]$ enquanto no MRC, estão compreendidos entre $i^{MRC} \in [-4\% \ 6\%]$, isto é, a dispersão em torno da média para o MCC é maior quando comparada com o MRC. De um modo geral, os índices de erro aplicando a máxima amplitude da tensão cisalhante obtida pelo MRC forneceram melhores resultados.

6.6.4 Tempo de processamento

O tempo de processamento deve ser analisado quanto ao desempenho do MRC e do MCC na determinação da maior amplitude da tensão cisalhante, com e sem o processo de otimização. Os tempos medidos foram baseados na plataforma computacional mencionada na seção 6.3 e nos parâmetros computacionais definidos nas subseções 6.3.1 e 6.3.2.

Pelos tempos medidos, independente do método de otimização, o MRC foi mais rápido e não comprometeu a qualidade e a precisão dos resultados. Como exemplo, considere o experimento nº 01 (Tabela 6.2) que é uma história de tensões proporcional e portanto, as projeções das componentes da história cisalhante no plano crítico formam uma corda, ou seja, a amplitude da máxima tensão cisalhante em ambos os métodos, possuem o mesmo valor (Tabela 6.6). Nesse teste e para o método convencional, o tempo de processamento foi de 834.7s (13min54s) para MCC e 115.8s (1min55s) para o MRC, ou seja, o método do retângulo executou a mesma história e forneceu o mesmo resultado em apenas 13% do tempo do MCC. Considerando a otimização implementada por meio do algoritmo genético, no experimento nº 1 (Tabela 6.6 e 6.14), o tempo de processamento foi de apenas 49.1s para o MCC e 6.3s para o MRC. De uma forma geral, o tempo de processamento para o algoritmo genético, independentemente do método (MRC ou MCC), equivale aproximadamente a 6% do tempo necessário do método tradicional como já apresentado no gráfico comparativo do desempenho dos métodos do menor círculo e do maior retângulo com e sem o procedimento de otimização mostrado na figura 6.18.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs uma forma alternativa e inédita para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante τ_a em modelos de plano crítico para fadiga multiaxial de alto ciclo. Conduziu-se, também, uma avaliação crítica sobre a definição clássica de plano crítico. Finalmente, aplicou-se algoritmos genéticos para otimizar a busca desse plano. A partir desses estudos pode-se concluir que:

- o método do maior retângulo circunscrito mostrou-se de fácil implementação e é capaz de distinguir os diversos tipos de carregamentos multiaxiais, quer proporcionais ou não, em fase, fora de fase, síncronos e assíncronos;
- considerando as mesmas histórias de carregamentos, os valores de τ_a calculados pelo MRC foram sempre iguais ou maiores que os calculados pelo MCC;
- para os índices de erros onde se observaram valores diferentes, O MRC apresentou a média dos IE mais próxima dos dados experimentais e com menor desvio padrão;
- utilizando o MRC com 10 rotações do retângulo em cada plano de corte e o MCC com coeficiente de expansão χ igual a 0.05 e a tolerância de $tol \leq 1 \times 10^{-6}$ (padrão amplamente aceito na literatura), constatou-se que o MRC levou, em média (para os dados analisados nesse trabalho), 12% do tempo de processamento obtido pelo MCC para o cálculo de τ_a ou seja, o MRC é mais eficiente;
- o uso da definição clássica de plano crítico presente em livros, textos e artigos científicos na área de fadiga não possui unicidade, pois, para determinadas histórias de tensões, múltiplos valores idênticos para a máxima amplitude da tensão cisalhante permitem que se obtenha mais de uma possibilidade para a localização do plano crítico. Assim, neste trabalho, estendeu-se o conceito de plano crítico, considerando-se a influência da tensão normal máxima, quando a máxima amplitude da tensão cisalhante não for única.
- o uso de uma pequena tolerância no cálculo da máxima amplitude da tensão cisalhante permite considerar mais apropriadamente, a influência da tensão normal no processo de dano por fadiga e traz unicidade para a definição de plano crítico;
- introduziu-se um método de otimização baseado em algoritmos genéticos que, comparativamente com o método convencional, apresentou uma redução significativa do tempo de

processamento viabilizando de maneira bastante eficaz, o emprego dessa técnica em modelos de plano crítico. O AG necessita de apenas 6% do tempo de processamento do método convencional para apresentar os mesmos resultados;

- na localização do plano crítico, a precisão no AG é muito maior que o método convencional. Nesse trabalho, o incremento das coordenadas esféricas dos planos de corte no processo convencional foi de 1° contra 0.03° do AG. Isto permite que o AG avalie planos de corte onde o processo convencional não consegue e, embora, seja um processo probabilístico, manteve uma convergência consistente para os casos onde um mesmo resultado foi executado por mais de uma vez, denotando ser uma ferramenta confiável e muito estável.

Como passos subseqüentes de pesquisa, pode-se indicar:

- ensaios em novos materiais e com carregamentos mais gerais são extremamente necessários para ampliar o escopo da validação de critérios de fadiga multiaxial;
- desenvolver critérios para outras classes de material cuja falha por fadiga não seja dominada pela amplitude da tensão cisalhante, por exemplo, para altos níveis de amplitude das tensões principais, como o caso de materiais frágeis, seriam extremamente bem vindos, pois são escassos na literatura;
- Realizar um estudo mais criterioso e mais consistente sobre a localização do plano crítico, relacionando-o, com testes experimentais;
- O algoritmo genético aplicado nesse trabalho foi um método geral, clássico e sem qualquer estudo mais aprofundado da melhor estratégia para a resolução do problema e, mesmo assim, se mostrou uma ferramenta adequada, robusta e, sobretudo, eficiente. Não nos preocupamos com a sua máxima eficiência, mas sim com a sua aplicação no contexto da fadiga multiaxial, devidamente comprovada pelos resultados expostos no capítulo 6. No entanto, existem outras técnicas para produzir um algoritmo mais eficiente, por exemplo, aplicando *esquemas*, técnicas avançadas do operador crossover, mutação dirigida, população de tamanho variável, entre muitos outros procedimentos. Pode-se ainda, implementar o AG em processamento paralelo que será muito útil quando aplicado em conjunto com os métodos de elementos finitos para a análise de fadiga multiaxial em de modelos de plano crítico.

Referências Bibliográficas

- [1] Fatemi, A.; Zoroufi, M. Fatigue performance evaluation of forged versus competing process technologies: a comparative study. In: **24th Forging Industry Technical Structures**. 2002, Cleveland.
- [2] Peterson, R. Discussion of a century ago concerning the nature of fatigue, and review of the subsequent researches concerning the mechanism of fatigue. In: **ASTM Bulletin**, 164. American Society of Testing and Materials. 1950 pp.50–56
- [3] Timoshenko S. Stress concentration in history of strength of materials. The William M. Murray Lecture. **Proc Soc Exp Stress Analysis (SESA)** 1954;12:1–12
- [4] Juvinall, C. Stress, strain and strength. **McGraw-Hill Publishing Company**. 1967, Nova Iorque
- [5] Damage Tolerance Design Handbook. **Metals and Ceramics Information Center**. Vol. 14 (Edited by J. GaUagher). 1983
- [6] Brown, M.W.; Miller, K.J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress strain condition, **Proc Inst Mech Engrs**, 1973 187:745-755
- [7] Krempl E., The Influence of State of Stress on Low Cycle Fatigue of Structural Materials ASTM STP 549, **American Society for Testing and Materials**. 1974, Philadelphia, PA.
- [8] Lee, S.B. Evaluation of Theories on Multiaxial Fatigue with Discriminating Specimen, **Ph.D. thesis**, Stanford University, Stanford, 1980
- [9] Garud, Y.S. Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art. **J. Testing and Evaluation**, Vol. 9, pp. 165–178. 1981
- [10] Lee, S. A Criterion for Fully-Reversed Out-ofphase Torsion and Bending. **Multiaxial Fatigue**, ASTM STP 853, pp.553–568. 1985.
- [11] Gough H.J. and Pollard H.V. The strength of metals under combined alternating stress. **Proc Inst Mech Eng** 131 pp. 3–18. 1935
- [12] Gough H.J. and Pollard H.V. Properties of some materials for cast crankshafts, with special reference to combined alternating stresses. **Proc Inst Automobile Engrs**. 31:821-93. 1937
- [13] Gough H.J. and Pollard H.V. and Clenshaw W.J. Some experiments on the resistance of metals to previous under combined stresses. **Aeronautical research council reports**. R and M 2522, HMSO. Londres. 1951

- [14] Sines G. Behaviour of metals under complex stresses. In: **G. Sines and J.L. Waisman, Editors, Metal previous fatigue, McGraw-Hill** pp. 145–169. Nova Iorque. 1959
- [15] Langer B.F. In: **R.W. Nichols, Editor. Design of pressure vessels involving fatigue, pressure vessel engineering, Elsevier**, pp. 59–100. Amsterdam. 1979
- [16] ASME. Cases of ASME boiler and pressure vessel code, code case N-47-12, **American Society of Mechanical Engineers**. Nova Iorque. 1979.
- [17] Lee S. Out-of-phase bending and torsion fatigue of steels. In: **Brown MW, Miller KJ, editors. Biaxial and multiaxial fatigue, EGF3**. Mechanical Engineering Publications; pp. 612–34. Londres. 1989.
- [18] Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In: **Proceedings of the international conference on fatigue of metals, Institution of Mechanical Engineers**. pp. 138–49. Londres. 1956
- [19] Kakuno H., Kawada Y. A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion. **Fatigue Eng Mater Struct** 2(2):229–36. 1979
- [20] Papadopoulos, I. V.; Davoli, P.; Gorla, C.; Filippini, M., and Bernasconi, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals, **Int. J. Fatigue**. Vol. 19, No. 3, pp. 219–235. 1997
- [21] You B. and Lee S. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals, **International Journal of Fatigue**. Vol 18, Is 4, pp. 235-244. 1996.
- [22] Socie D. A summary and interpretation of the society of automotive engineers' biaxial testing program. In: **Multiaxial fatigue: analysis and experiments**. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, SAE. AE-14; p. 1-11. 1989
- [23] Findley, W.N., Coleman, J.J. and Handley, B.C. Proc. Conf. on the Fatigue of metals. **The Institution of Mechanical Engineers**. pp. 150. Nova Iorque. 1956
- [24] Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress. **Bull. JSME** 20:257-263. 1977
- [25] McDiarmid, D.L. Fatigue under out-of-phase bending and torsion. **Fatigue Eng Mater Struct** 9(6):457–75. 1987;
- [26] Brown M.W. and Miller K.J. Two decades of progress in the assessment of multiaxial low-cycle fatigue life. In: **C. Amzallag, B. Leis and P. Rabbe, Editors, Low-cycle fatigue and life prediction, ASTM STP 770, ASTM**, pp. 482-499. Philadelphia, PA. 1982

- [27] Carpentieri A.; Spagnoli A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals, **Int. J. Fatigue** 23:135-145. 2001
- [28] Carpinteri A.; Macha E.; Brighenti R.; Spagnoli A. Expected fracture plane for multiaxial random stress state. Part I. Theoretical aspects of the weight function method. **Int J Fatigue**; 21:83-8. 1999
- [29] Carpinteri A.; Macha E.; Brighenti R.; Spagnoli A. Expected fracture plane for multiaxial random stress state. Part II. Numerical simulation and experimental assessment through the weight function method. **Int J Fatigue** 21:89-96. 1999
- [30] Susmel L., and Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, Blackwell Science Ltd. **Fatigue Fract Engng Mater Struct** 25, 63-78. 2002
- [31] Liu Y.; Mahadevan S. Multiaxial high-cycle fatigue criterion and life prediction for metals. **International Journal of Fatigue**, Volume 27, Issue 7, Pages 790-800. 2005
- [32] Jing Li; Zhong-ping Zhang; Qiang Sun; Chun-wang Li; Yan-jiang Qiao. A new multiaxial fatigue damage model for various metallic materials under the combination of tension and torsion loadings. **International Journal of Fatigue**, Volume 31, Issue 4, Pages 776-781. 2009
- [33] Dang Van K. Le Douaron A.; Lieurade H.P. Multiaxial fatigue limit: a new approach, in: **Proc. 6th Int. Conf. Fract. Advances in Fracture Research**. Pergamon Press, pp.1879-1885. Oxford. 1984
- [34] Papadopoulos I. V. Fatigue Polycyclique des métaux: une nouvelle approche (**Annexe A-1: La plus**). 1987
- [35] Grubisic V., Simbürger A. Fatigue under combined out of phase multiaxial stress, Proc. **Int. Conf. Fatigue Testing and Design**, Society of Environmental Engineers, 27.1-27.8. London. 1976
- [36] Lemaitre, J. and Chaboche, J.L. *Mecanique des Materiaux Solides*, Dunod, Paris, 1985.
- [37] Fuchs, H. O. and Stephens, R. I. *Metal Fatigue in Engineering*. **John Wiley and Sons**. Nova Iorque. 1980
- [38] Papadopoulos, I. V., Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: On the definition of the amplitude and the mean value of the shear. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**. 21:269-285. 1998
- [39] Bin Li, Santos, J. L. Freitas M. A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. **Fatigue Fract Engng Mater Struct**. 24:165-177. 2000

- [40] Gonçalves C., Araújo J., Mamiya E. Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals. **International Journal of Fatigue**. 27:177-187. 2005
- [41] Zouain N.; Mamiya E.; Comes F. Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria. **European Journal of Mechanics A/Solids** 25:51-71. 2006
- [42] Mamiya E.; Araújo J. Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress. **Mechanics Research Communications**. 29:141-151. 2002
- [43] Zouain N., Mamiya E., J.A. Araújo, F.C. Castro. Remarks on multiaxial fatigue limit criteria based on prismatic hulls and ellipsoids. **International Journal of Fatigue**(in press). 2009
- [44] Goldberg, D. E. Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning, 0201157675, **Addison-Wesley Pub. Co.** 1989
- [45] Ewing, J.A.; and Humfrey, J.C. Fracture of Metals Under Repeated Alternations of Stress. **Philosophical Trans. of the Royal Soc. of London**. Vol 210, Series A, pp.241-253. 1903
- [46] Morrow, J. **Fatigue Design Handbook**. 1968
- [47] Coffin, L.F. Jr., A Study of the Effects of cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal. 1954
- [48] Dowling Norman E. Mechanical Behavior of Materials: engineering methods for deformation. **Prentice Hall, 2ª Edição**. Nova Jersey. 1998
- [49] Gough, H. J. Engineering Steels Under Combined Cyclic and Static Stresses. **Journal of Applied Mechanics**, pp. 113-125 vol. 1950
- [50] Sines G., Behavior of metals under complex static and alternating stresses, In: **Sines, G. & Waisman, eds.: Metal Fatigue, McGraw-Hill**. 145-169. Nova Iorque. 1959
- [51] Crossland B., Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel, **Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, IMechE** 138-149. Londres. 1956
- [52] Papadopoulos I. V., A High-cycle Fatigue Criterion Applied in Biaxial and Triaxial Out-of-phase Stress Conditions, **Fatigue Fract Engng. Struct.** Vol 18, No 1 pp 74-91, 1993
- [53] Sonsino, M. and Grubisic, V. Low-cycle Fatigue and Elasto-Plastic behavior of Materials. **Elsevier Applied Science Publishers** pp. 506, Nova Iorque. 1987
- [54] Garud, Y. S. Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art. **Journal of Testing and Evaluation**. Vol 9 pp 165-178. 1981
- [55] Nadai, A. Theory of Flow and Fracture of Solids. **McGraw-Hill**. Nova Iorque. 1950

- [56] Boresi, A. P., R. J. Schimidt, and O. M. Sidebottom. *Advanced Mechanics of Materials*. **5th ed., John Wiley**. Nova Iorque. 1993
- [57] Findley, W.N. Modified Theories of Fatigue Failure under Combined Stress. **Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis**. Vol 14, No 1, pp. 35-46. 1956
- [58] Findley, W.N. A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending. **Journal of Engineering for Industry** pp. 301-306. 1959
- [59] K. Dang Van. Sur la résistance à la fatigue des métaux. **Sciences et techniques de l'armement**. Vol 47 pp. 429-453.1973
- [60] Mandel, J. Contribution théorique à l'érouissage et de lois de l'encoulement plastic. **Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech.** pp. 502-509. Munique. 1964
- [61] Dang Van, K., Griveau, B. and O. Message, On a New Multiaxial Fatigue Limit Criterion: Theory and Application. In: *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, M. W. Brown and K. J. Miller, eds, **Mechanical Engineering Publications**. 479-496. Londres. 1989
- [62] McDiarmid, D. L. A Shear Stress Based Critical-Plane Criterion of Multiaxial Fatigue Failure for Design and Life Prediction. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**. Vol. 17, No 12, pp. 1475-1485. 1994
- [63] McDiarmid, D.L., A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**. Vol. 14, No 4, pp. 429-453. 1991
- [64] Socie, D. F., Waill, L. A. and Dittmer, D. F. Fatigue of Inconel 718 including mean stress effects. **Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853**, (Edited by M. W. Brown cycle fatigue. on the definition of the amplitude and mean value and K. J. Miller). American Society for Testing and Materials, of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue Fract.* pp. 463-481. Filadélfia, PA. 1985
- [65] Susmel L., Tovo R.,Lazzarin P., The mean stress effect on the high-cycle fatigue strength from a multiaxial fatigue point of view, **International Journal of Fatigue** Volume 27, Issue 8, Pages 928-943, 2005
- [66] R. E. Little. A simplified method for determining fatigue stress using Morh's circle. **Machine Design**. 37:143-148. 1965
- [67] R. E. Little. Fatigue stresses from complex loadings. **Machine Design**.38:145-149. 1966
- [68] R. E. Little and R. W. Little. Analysis of two-dimensional cyclic stresses. In: **Proc. 9th Midwestern Mechanics Conference**. Vol 3, John Wiley, 307-312. 1965

- [69] E.N. Mamiya, J.A. Araújo, F.C. Castro. Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. **International Journal of Fatigue**. Vol 31 pp. 1144-1153. 2009
- [70] B. Weber, B. Keunmeugne, J.C. Clement, J.L. Robert. Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Comp. Mater. Sci.* Vol 15 pp. 381-399. 1999
- [71] M. de , M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. **Springer-Verlag**. Heidelberg, Berlin. 1998
- [72] MATLAB. The language of technical computing. The MathWorks, Inc.
- [73] Bernasconi A. Papadopoulos I.V. Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria, **Computational Materials Science** 34:355-368. 2005
- [74] S. R. Lay. *Convex Set and their Applications*. **John Wiley**, Nova Iorque. 1982
- [75] Socie, Darrel F., Marquis Gary B. *Multiaxial Fatigue*, **Society of Automotive Engineers**, Warrendale, PA. 2000
- [76] Holland, John H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. **Ann Arbor: University of Michigan Press**. 1975
- [77] J. Liu. Beitrag zur Verbesserung der Dauerfestigkeitsberechnung bei mehrachsiger Beanspruchung. Diss, TU Clausthal. 1991
- [78] C. Froustey. *Fatigue Multiaxiale en Endurance de l'Acier 30NCD16*. Docteur de l'E.N.S.A.M., L'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Metiers. 1987
- [79] A. Bernasconi, S. Foletti, and I.V. Papadopoulos. A study on combined torsion and axial load fatigue limit tests with stresses of different frequencies. **International Journal of Fatigue**. Volume 30, Exemplar 8, pp. 1430-1440. 2008
- [80] Nishihara, T. & Kawamoto, M. The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference. **Memoirs of the College of Engineering**. Kyoto Imperial University, 11:85-112. 1945
- [81] Mielke S. Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe unter zweiachsig schwingender Beanspruchung mit verschiedenen Spannungszeitverläufen. **Diss, RWTH Aachen**. 1980
- [82] Kaniut C. Zur Betriebsfestigkeit metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger Beanspruchung. **Diss RWTH Aachen**. 1983

- [83] R. Heidenreich, H. Zenner, and I. Richter. Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. **Forschungshefte FKM**, Heft 105. 1983
- [84] Dantas, A. P. Incorporação de Critérios de Fadiga Multiaxial a um Programa de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, **Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília**. Brasília, DF. 2002
- [85] Vose, M. D. The Simple Genetic Algorithm. **Pretice Hall of India**. Nova Dheli, Índia. 2004
- [86] Michalewicz, Z., FOGEL, D. B. How to Solve It: Modern Heuristics. 1ª Edição, **Springer-Verlag**. Berlim, Alemanha. 2002
- [87] Mitchell, M. An Introduction to Genetic Algorithms. 1ª Edição, **MIT Press**. Cambridge. 1996
- [88] Brown, M.W. and Miller, K.J. A theory for fatigue failure under multiaxial stressstrain condition. **Proc Inst Mech Engrs** 187:745-75. 1973
- [89] Inácio, T.B. Otimização de Modelo de Fadiga Multiaxial por meio de Algoritmo Genético. Dissertação de Mestrado, **Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília**. Brasília, DF. 2008
- [90] Coello Coello C.A. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 191:1245-1287. 2002

ANEXOS

I. VALORES LIMITES PARA O MODELO DE SUSMEL & LAZZARIN

Na tabela I.2 constam os valores da amplitude da tensão cisalhante τ_a , a tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ e ρ obtidos pelos métodos do mínimo círculo (MCC) e do máximo retângulo (MRC) no plano crítico. Também está discriminado o valor de ρ_{lim} para os ensaios e materiais constantes nas tabelas I.1 e 6.1.

Tabela I.1: Limites de fadiga para flexão e torção totalmente alternado.

Material	f_{-1} [MPa]	t_{-1} [MPa]
Aço Duro	319.9	196.2
25CrMo4 (a)	340	228
34Cr4 (a)	415	259
34Cr4 (b)	343	204
GGG60	275	249
25CrMo4 (b)	340	228
St35	230	130
30NCD16	585	405
39NiCrMo3	367.5	265

Os valores de ρ foram obtidos por meio da seguinte relação:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \quad (I.1)$$

onde τ_a é a amplitude da tensão máxima e $\sigma_{n,max}$ no plano crítico.

Os valores de ρ_{lim} são dados por:

$$\rho_{lim} = \frac{f_{-1}}{2t_{-1} - f_{-1}} \quad (I.2)$$

onde f_{-1} e t_{-1} são os limites de resistência a fadiga para flexão e torção pura alternadas.

Tabela I.2: Valores de ρ e de ρ_{lim} obtidos pelo MCC e MRC para o modelo de Susmel & Lazzarin.

Ensaio	Método do Menor Círculo				Método do Maior Retângulo		
	ρ_{lim}	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	ρ^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	ρ^{MRC}
1	2.7062	180.80	70.48	0.3898	180.80	70.48	0.3898
2	2.7062	180.74	90.58	0.5012	180.74	90.58	0.5012
3	2.7062	180.49	129.58	0.7179	180.49	129.58	0.7179
4	2.7062	181.70	150.20	0.8266	181.70	150.20	0.8266
5	2.7062	173.39	125.71	0.7250	173.39	125.71	0.7250
6	2.7062	170.42	146.15	0.8576	170.42	146.15	0.8576
7	2.7062	154.51	185.74	1.2021	159.74	159.61	0.9992
8	2.7062	129.00	258.00	2.0000	161.25	160.21	0.9936
9	2.7062	162.19	151.75	0.9356	162.19	151.75	0.9356
10	2.7062	152.24	165.85	1.0894	158.95	157.56	0.9913
11	3.1385	150.50	275.50	1.8306	150.50	275.50	1.8306
12	3.1385	193.24	217.01	1.1230	193.24	217.01	1.1230
13	3.1385	133.00	286.00	2.1504	133.00	286.00	2.1504
14	3.1385	107.68	272.68	2.5323	119.19	268.88	2.2559
15	3.1385	127.11	500.70	3.9391*	140.70	358.36	2.5470
16	3.1385	180.00	390.00	2.1667	180.00	390.00	2.1667
17	1.9655	139.94	451.47	3.2262*	153.35	319.37	2.0826*
18	1.9655	185.00	372.50	2.0135*	185.00	372.50	2.0135*
19	1.9655	116.22	232.86	2.0036*	130.00	287.50	2.2115*
20	1.9655	159.00	275.25	1.7311	159.00	275.25	1.7311
21	1.9655	153.93	483.76	3.1427*	168.56	341.65	2.0269*
22	1.9655	156.98	500.48	3.1882*	179.97	335.83	1.8660
23	1.9655	165.94	451.78	2.7226*	170.27	371.54	2.1821*
24	1.9655	186.47	397.75	2.1331*	186.47	397.75	2.1331*
25	1.9655	210.18	244.44	1.1630	210.18	244.44	1.1630
26	1.9655	224.00	344.50	1.5379	224.00	344.50	1.5379
27	1.9655	186.47	470.56	2.5235*	186.47	470.56	2.5235*
28	2.5146	179.39	300.96	1.6777	222.33	172.14	0.7743
29	1.1166	126.85	219.41	1.7297*	158.26	118.63	0.7496
30	1.1166	126.60	212.62	1.6795*	156.95	121.74	0.7757

Ensaio	Método do Menor Círculo				Método do Maior Retângulo		
	ρ_{lim}	$\tau_a^{c,MCC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MCC}$ (MPa)	ρ^{MCC}	$\tau_a^{c,MRC}$ (MPa)	$\sigma_{n,max}^{c,MRC}$ (MPa)	ρ^{MRC}
31	1.8000	303.01	386.00	1.2739	353.43	213.75	0.6048
32	1.8000	319.42	374.49	1.1724	367.25	221.84	0.6041
33	1.6308	224.88	150.78	0.6705	224.88	150.78	0.6705
34	1.6308	178.05	279.04	1.5672	215.06	178.36	0.8293
35	1.6308	203.16	236.08	1.1620	225.85	166.91	0.7390
36	1.9655	143.22	247.72	1.7296	178.68	133.94	0.7496
37	1.9655	137.37	229.77	1.6726	169.19	147.62	0.8725
38	1.9655	137.02	287.73	2.0999*	164.24	170.22	1.0364
39	1.9655	137.26	233.33	1.6999	170.70	128.28	0.7515
40	3.1385	175.53	419.53	2.3901	175.56	419.41	2.3890
41	4.3333	114.10	257.10	2.2533	114.11	257.02	2.2524
42	4.3333	109.26	294.00	2.6908	109.27	293.91	2.6898

* O valor de ρ para este ensaio ultrapassa o ρ_{lim} para o modelo de Susmel & Lazzarin.