

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE TEORIA CONSTRUTAL
E ENTRÂNSIA PARA CASOS DE RESFRIAMENTO DE
FONTES DE CALOR EM CAVIDADE**

NATÁLIA BORGES MARCELINO

ORIENTADOR: TITO DIAS JUNIOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO - 2009

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE TEORIA CONSTRUTAL
E ENTRÂNSIA PARA CASOS DE RESFRIAMENTO DE
FONTES DE CALOR EM CAVIDADE**

NATÁLIA BORGES MARCELINO

**RELATÓRIO PARCIAL SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
PRORROGAMENTO DA DATA DE DEFESA DA DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO**

APROVADA POR:

**Prof. Tito Dias Junior, Dr (DPF)
(Orientador)**

**Prof. Antônio Cesar Pinho Brasil Junior, Dr (ENM-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Luiz Fernando Milanez, Dr (FEM-UNICAMP)
(Examinador Externo)
BRASÍLIA/DF, 18 DE DEZEMBRO DE 2009**

FICHA CATALOGRÁFICA

MARCELINO, NATÁLIA BORGES

Estudo Comparativo entre Teoria Construtal e Entrânsia para Casos de Resfriamento de Fontes de Calor em Cavidade. [Distrito Federal] 2009.

viii, 100p, 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2009).

Relatório Parcial de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Dissipação de Calor

2. Entrânsia

3. Volumes Finitos

4. Teoria Construtal

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MARCELINO, N. B. (2009). Estudo Comparativo entre Teoria Construtal e Entrânsia para Casos de Resfriamento de Fontes de Calor em Cavidade. Relatório Parcial de Mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 100p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Natália Borges Marcelino.

TÍTULO: Estudo Comparativo entre Teoria Construtal e Entrânsia para Casos de Resfriamento de Fontes de Calor em Cavidade.

GRAU: Mestre

ANO: 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Natália Borge Marcelino
SAVP Rua 12 chácara 137/1 casa 11, Taguatinga.
72.110-800 Brasília – DF – Brasil.

RESUMO

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE TEORIA CONSTRUTAL E ENTRÂNSIA PARA CASOS DE RESFRIAMENTO DE FONTES DE CALOR EM CAVIDADE

O presente trabalho tratou do resfriamento por convecção natural de uma, três e cinco fontes localizadas em uma parede vertical de uma cavidade retangular. Numericamente foi aproximado o campo de temperatura, no estado estacionário, para diferentes posições em cada caso. A condutância e a dissipação de entrância foram avaliadas em todos os casos e suas predições de ótima configuração foram comparadas. Para as simulações numéricas foi escolhido o método de volumes finitos, função de interpolação Power-Law, acoplamento pressão-velocidade pelo método SIMPLE e solução dos sistemas lineares por TDMA.

SUMMARY

COMPARACTIVE STUDY BETWEEN CONSTRUCTAL THEORY END THE ENTRANSY THEORY FOR THE COOLING CASES OF HEAT SOURCES IN A CAVITY.

In the present work the cooling was treated by natural convection of one, three and five sources localized in a vertical wall of a rectangular cavity. One has approximated numerically the temperature field in the stationary state at different positions for each case. The conductivity and the dissipation of entransy were evaluated in all these cases and their predictions for optimal configuration were compared. In the numerical simulations one has chosen the method of finite volumes, the Power-Law interpolation function, the coupling of the pressure-velocity by SIMPLE method and the solution of linear systems by TDMA.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - OBJETIVO	4
3 - FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	5
3.1 - CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES	5
3.1.1 - Formulação matemática	5
3.1.2 - Análise dimensional	9
3.2 - TEORIA CONSTRUTAL	12
3.3 - ENTRÂNSIA	16
3.3.1 - Princípio extremo de dissipação de entrância	19
3.2.2.1-Princípio da mínima dissipação de entrância	19
3.2.2.1- Princípio da máxima dissipação de entrância.....	20
3.3.2 - Princípio da mínima resistência térmica	19
4 - METODOLOGIA	22
4.1 - MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS	23
4.2 - FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO	27
4.3 - TERMO FONTE	29
4.4 - SIMPLE	29
4.5 -SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	32
4.5.1 - Método de Gauss-Seidel	32
4.5.2 - Método TDMA	33
4.5.3 - Algoritmo Final	35
4.6 - MALHA	35
5 - IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO	37
5.1 - IMPLEMENTAÇÃO	37
5.2 - VALIDAÇÃO	38
6 - RESULTADOS E ANÁLISE	40
6.1 -CAVIDADE QUADRADA COM UMA FONTE DE CALOR	40

6.1.1 - Caso ótimo pela Teoria Construtal.....	44
6.1.2 - Caso ótimo pelo princípio da mínima dissipação de entrância.....	49
6.1.3 - Comparação	52
6.2 -CAVIDADE QUADRADA COM TRÊS FONTES DE CALOR.....	55
6.2.1 - Caso ótimo pela Teoria Construtal.....	55
6.2.2 - Caso ótimo pelo princípio da mínima dissipação de entrância.....	60
6.2.3 - Comparação	64
6.3 -CAVIDADE QUADRADA COM CINCO FONTES DE CALOR.....	68
6.3.1 - Caso ótimo pela Teoria Construtal.....	68
6.3.2 - Caso ótimo pelo princípio da mínima dissipação de entrância.....	72
6.3.3 - Comparação.....	75
7 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	77
8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	78
APÊNDICES	
A – ESTUDO DE CASO PELA ENTRÂNSIA.....	84
B – CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE UM METAL.....	88
C – LINEARIZAÇÃO DO TEMO FONTE.....	100

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1– Diagrama da cavidade para os casos estudados

Figura 3.2 – Exemplos da cópia de estruturas naturais pela engenharia, e a proposta de dedução de tais formas por um princípio. (Bejan. 2006) adaptada.

Figura 3.3 – Feixe de luz atravessando dois meios distintos.

Figura 4.1 – Volume elementar para os balanços de conservação.

Figura 5.1 – Malha com 10.000 volumes utilizada no presente trabalho.

Figura 6.1 – Linhas isotérmicas para $Ra = 50$ e $Ra = 10^6$ com $s = 0.5$.

Figura 6.2 – Número de Nusselt médio em função da localização da fonte.

Figura 6.3 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh para uma fonte.

Figura 6.4 – Número de Nusselt local em função da coordenada da parede vertical em vinte casos distintos.

Figura 6.5 – Condutância Global em função da posição da fonte para $Ra = 10^4$

Figura 6.6 – Condutância Global em função da posição da fonte para $Ra = 10^6$

Figura 6.7 – Condutância Global mínima em função da localização da fonte.

Figura 6.8 – Localização da fonte em função do Número de Rayleigh para os casos ótimos obtidos pela maximização da condutância global.

Figura 6.9 – Faixa de localização da fonte pelo critério da máxima condutância global, em função do Número de Rayleigh.

Figura 6.10 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh para uma fonte.

Figura 6.11 – Dissipação de entrância em função da posição da fonte para valores pequenos do número de Rayleigh

Figura 6.12 – Dissipação de entrância em função da localização da fonte.

Figura 6.13 – Faixa de localização da fonte, pelo critério da mínima dissipação de entrância, em função do Número de Rayleigh.

Figura 6.14 – Faixa de localização da fonte, pelo critério da mínima dissipação de entrância e pelo critério da máxima condutância global mínima, em função do Número de Rayleigh.

Figura 6.15 – Comparação entre os valores do número de Nusselt médio em função do número de Rayleigh para uma fonte.

Figura 6.16 – Representação da cavidade estudada com três fontes.

Figura 6.17 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh.

Figura 6.18 – Perfis de temperatura adimensional na parede que contém as fontes.

Figura 6.19 – isotérmicas para $Ra = 10^3$, $s_0 = 0.15$, $s_1 = 0.30$ e $s_2 = 0.36$.

Figura 6.20 – Distâncias entre as fonte em função do Número de Rayleigh.

Figura 6.21 – Máxima condutância global mínima em função do número de Rayleigh.

Figura 6.22 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh

Figura 6.23 – Perfis de temperatura adimensional na parede que contém as fontes.

Figura 6.24– Distâncias entre as fonte em função do Número de Rayleigh

Figura 6.25 – Dissipação de entrânsia em função do número de Rayleigh

Figura 6.26 – Nusselt em função do número de Rayleigh para a teoria construtal (linha cheia) e para entrânsia (linha tracejada).

Figura 6.27 – Comparativo dos perfis de temperatura.

Figura 6.28 – Comparativo das configurações ótimas.

Figura 6.29 – Representação da cavidade estudada com cinco fontes.

Figura 6.30 – Nusselt médio em função do número de Rayleigh

Figura 6.31 – Perfis de temperatura

Figura 6.32 – Distância entre as fontes em função do número de Rayleigh

Figura 6.33 – Nusselt médio em função do número de Rayleigh

Figura 6.34 – Perfis de temperatura

Figura 6.35 – Distância entre as fontes em função do número de Rayleigh

Figura 6.36 – Nusselt em função do número de Rayleigh para a teoria construtal (linha cheia) e para entrânsia (linha tracejada).

Figura 6.37 – Comparativo dos perfis de temperatura.

Figura A.1 – Diagrama do sistema térmica analisado

Figura B.1 – Representação do modelo de Drude

Figura B.2 – Relação do fluxo de energia e do gradiente de temperatura entre duas extremidades (quente e fria) de uma barra metálica

Figura B.3 – Representação dos elétrons provenientes da extremidade quente, à esquerda, e da fria, à direita.

Figura B.4 – Comportamento do calor específico em relação à temperatura, segundo os modelos de Einstein, Debye e Dulong-Petit

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Analogia entre grandezas térmicas e elétricas.

Tabela 4.1 – Valores de $\tilde{\phi}$, \tilde{I}^ϕ e \tilde{S}^ϕ .

Tabela 5.1 – Comparação dos resultados obtidos com a literatura (Davis, 1983)

Tabela 6.1 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Tabela 6.2 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Tabela 6.3 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Tabela 6.4 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

1 - INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico e a miniaturização, cada vez mais exigida, dos dispositivos eletrônicos (Sathe, S. *et al.*, 1998) surge a dificuldade do resfriamento de seus componentes. O aquecimento de componentes eletrônicos provoca um aumento da resistência elétrica destes agindo de forma inversamente proporcional ao desempenho, além disso, a probabilidade de falha nesses componentes é diretamente proporcional à sua temperatura de trabalho.

O esforço no desenvolvimento de métodos de resfriamento não se concentra apenas na relação entre o calor retirado e a energia consumida para executar esse trabalho. Há, também, a preocupação financeira e com a viabilidade do processo.

A eficiência é um fator importante, porém, na escolha de um processo de resfriamento deve-se levar em conta a melhor relação entre a eficiência, o custo de instalação, manutenção, o espaço físico ocupado pela estrutura necessária para executar a retirada de calor, confiabilidade e o ruído sonoro produzido.

O fenômeno da transferência de calor por convecção natural é um mecanismo presente em diversas aplicações de engenharia além de atuar em uma série de processos naturais. A ausência de ruídos mecânicos e eletromagnéticos, baixo consumo de energia e confiabilidade, uma vez que não possui elementos para falhar, são características atrativas para o resfriamento de equipamentos eletrônicos.

Além de sua importância em processos da engenharia, devido ao acoplamento do escoamento de massa e energia, o fenômeno da convecção natural ou forçada ainda é um importante campo de pesquisas.

Na literatura existem inúmeros estudos relativos à convecção natural em cavidades (Ostrach, S., 1988), em tubos (Higuera, F.J. & Ryazantsev, Y. S., 1977) e em placas (Hatami, N. & Bahadorinejad, M. 2008). No entanto, trabalhos sobre otimização do resfriamento por convecção natural são escassos (Landon, M.D. & Campo, A., 1999; Milanez, L.F. & Bergles, A. E., 1986; Ravine, T.L. & Richards, D. E., 1990), provavelmente por ser um processo cujo escoamento possui natureza não linear.

O *hardware* de um equipamento eletrônico, em geral, é composto por placas com dispositivos eletrônicos fixados, como resistências, diodos, capacitores e outros. A disposição destes influencia seu arrefecimento por convecção natural.

Uma maneira didática de visualizar essa relação é imaginando uma placa com todos os seus dispositivos concentrados em um lado e outra placa com o mesmo número de

dispositivos distribuídos por toda sua superfície. A segunda opção apresentará pontos de temperaturas máximas menores do que a primeira.

Estudos interessados no melhor posicionamento de fontes de calor pontuais podem ser encontrados com abordagens experimentais (Carey & Mollendorf, 1977), teóricas (Fujii, 1963) e numéricas (Dias & Milanez, 2004).

Trabalhos com três e cinco fontes pontuais de calor verificaram que quando as distâncias entre as fontes respeitam uma progressão geométrica obtém-se uma melhor redução da temperatura relativa máxima indicando um resfriamento mais homogêneo e mais eficiente comparado ao obtido para fontes equidistantes (Liu & Phan Tien, 2000), entretanto, outros trabalhos mostraram que nem a progressão geométrica e nem a equidistância no posicionamento entre as fontes determinam a melhor distribuição entre elas (Silva & Bejan, 2004; Dias & Milanez, 2004).

Apesar de não serem os casos ótimos, a disposição das fontes em progressão geométrica proporciona melhorias no processo de resfriamento. Resultados numéricos prevêem uma redução de 10 % da temperatura relativa máxima quando três fontes são dispostas em progressão geométrica do que quando estão equidistantes entre si (Liu & Phan-Thien, 2000). Para cinco fontes a queda foi de 20% (Liu *et al.*, 1999).

Em sequência, a abordagem experimental dos mesmos casos supracitados mostra uma redução de 27.62% para o estudo de três fontes (Chen & Liu, 2002) e uma queda de 32.1% no experimento com cinco fontes (Chen *et al.*, 2001).

A procura por métodos para otimizar sistemas termodinâmicos fez surgir nas últimas décadas duas novas abordagens; A teoria construtal (Bejan, 2006) e o novo conceito físico denominado *Entransy* (Guo & Chen, 2007).

Com um foco maior na formulação matemática da melhor estrutura para um sistema de escoamento de massa, momento ou calor (Bejan, 2000), a teoria construtal representa uma nova extensão da termodinâmica que estuda sistemas termodinâmicos fora do equilíbrio considerando suas configurações geométricas.

As aplicações para a teoria construtal são numerosas (Bejan, 2006), como transporte massa por dutos, estrutura de escoamento turbulento, árvores para distribuição de calor e outros.

A estrutura obtida pela teoria construtal para o escoamento de massa entre um ponto e um volume foi estudada experimentalmente até o quarto nível de bifurcação (Fan, 2008) e apresentou considerável confiabilidade mesmo quando ramos de sua estrutura

eram bloqueados. Outro estudo interessante foi a confirmação, pela teoria construtal, dos 23 níveis de bifurcação do pulmão humano (Reis *et al*, 2004), anteriormente já verificados por estudos experimentais de anatomia (Brad *et al*, 2003).

A otimização do resfriamento por convecção natural por intermédio da disposição das fontes pontuais de calor em uma parede vertical tem sido abordada para casos com um grande número de pequenas fontes ou poucas fontes de tamanhos finitos (da Silva *et al*, 2004) como também para casos com uma única fonte de tamanho variável (da Silva *et al*, 2005). O foco está na maximização da condutância global.

O conceito denominado *Entransy* mensura a energia potencial de transferência de calor de um corpo em analogia à energia potencial elétrica de uma capacitor. Em inglês, esta definição é dada por “*energy transfer efficiency*” originando o nome *Entransy*. Em português, essa grandeza será denominada por Entrânsia.

Os conceitos de entrânsia e dissipação de entrânsia são utilizados no desenvolvimento do princípio extremo de dissipação de entrânsia e no princípio da menor resistência térmica (Guo *et al*, 2007) a fim de otimizar processos de transferência de calor por intermédio destes.

Com base nesses princípios foram feitos estudos para maximizar a transferência de calor em uma convecção turbulenta (Chen *et al*, 2007), desenvolver as equações de continuidade para transporte de massa, calor e momento, otimizar a convecção de calor em tubo e tanque, gerar a melhor configuração para distribuição de material com alta condutividade térmica em uma placa com fonte uniforme de calor (Guo & Chen, 2007) e gerar a melhor configuração para distribuição de material com alta condutividade térmica em uma placa para proporcionar a melhor transferência de calor entre ponto e volume (Chen *et al*, 2008).

O presente trabalho analisou, numericamente, a dissipação de calor por convecção natural para todas as possíveis posições para uma, três e cinco fontes de calor em uma parede vertical.

Para cada posição foram calculadas a dissipação da entrânsia e a condutância global e seus máximos foram comparados e analisados. A disposição relativa entre as fontes também foi estudada.

2 – OBJETIVO

No presente trabalho foi escolhido o caso de fontes de calor fixadas em uma parede vertical de uma cavidade quadrada resfriada por convecção natural em ar. Serão analisados casos com uma, três e cinco fontes de calor uniformes.

O objetivo é realizar um estudo comparativo entre resultados de otimização obtidos numericamente com as predições fornecidas pela teoria construtal e pelo conceito físico de entrância.

3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As equações governantes para os casos estudados originam-se no estudo do escoamento do ar por convecção natural em uma cavidade com fontes de calor em uma parede vertical. Em seguida, com os resultados dos campos de temperatura obtidos numericamente, a partir destas equações, no regime estacionário, são calculados os parâmetros de otimização utilizados por dois recentes estudos.

O primeiro é a teoria construtal, que defende que a solução ótima é obtida quando a condutância global é máxima. O segundo é o novo conceito físico denominado entrânsia, em que os princípios de extrema dissipação de entrânsia e da mínima resistência térmica conduzem às melhores configurações de transmissão de calor a depender das condições de contorno.

Nesta seção serão apresentadas as teorias necessárias tanto para a formulação matemática usada na simulação numérica quanto para o estudo comparativo posterior.

3.1 – CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES

Na presença de um gradiente de temperatura, o ar, como a maioria dos fluidos, apresenta variações locais de densidade. Porções que recebem mais calor aumentam sua energia interna e conseqüentemente a distância média intermolecular. Como efeito, a densidade nesta porção cai, visto que o volume expande e a massa permanece constante, comparado ao restante do fluido. O gradiente de densidade dá origem às forças de empuxo contrárias a ação da gravidade. O balanço de forças gera o movimento convectivo.

3.1.1 – Formulação Matemática

Adotando o ar como um fluido newtoniano e utilizando sistema de coordenadas ortogonais, onde o eixo y possui mesma direção que a gravidade porém sentido oposto, podemos escrever a equação da continuidade, que para fluidos representa a equação de conservação de massa.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1.1)$$

A equação do movimento, ou de Navier-Stokes, que traz o balanço da quantidade de movimento.

Direção x

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + v \frac{\partial}{\partial y}(\rho u) + w \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} & \quad (3.1.2) \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Direção y

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + v \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + w \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
 + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} & \quad (3.1.3) \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \rho g
 \end{aligned}$$

Direção z

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial}{\partial x}(\rho w) + v \frac{\partial}{\partial y}(\rho w) + w \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\
 + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} & \quad (3.1.4) \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

E por fim, a equação da conservação da energia.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p v T) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho c_p w T) &= \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) & \quad (3.1.5)
 \end{aligned}$$

Algumas hipóteses simplificadoras serão assumidas. Em se tratando de convecção natural, as velocidades são baixas, podendo o escoamento ser considerado incompressível.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1.6)$$

É adotada a aproximação de Boussinesq, em que todas as propriedades são assumidas constantes exceto a densidade somente no termo relacionado ao empuxo. Essa aproximação é válida quando as variações das propriedades são desprezíveis em relação à variação da densidade no termo fonte. Tomando a densidade como uma função da temperatura,

$$\rho = f(T) \quad (3.1.7)$$

e expandindo-a em torno de uma temperatura de referencia T_o usando a série de Taylor, temos.

$$\rho = f(T_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T=T_o} (T - T_o) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right|_{T=T_o} \frac{(T - T_o)^2}{2} + \dots \quad (3.1.8)$$

Com o coeficiente de expansão volumétrica dado por

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (3.1.9)$$

Substituindo (3.1.9) na aproximação de primeira ordem de (3.1.8) temos.

$$\rho = \rho_o [1 - \beta(T - T_o)] \quad (3.1.10)$$

Usando (3.1.10) nos termos relacionados ao empuxo da equação (3.1.3) encontramos

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_o g + \rho_o g \beta (T - T_o) \quad (3.1.11)$$

Definindo uma pressão mecânica P igual a

$$P = p + \rho_o g y \quad (3.1.12)$$

e substituindo adequadamente em (3.1.11) temos,

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = \frac{\partial P}{\partial y} + \rho_o g \beta(T - T_o) \quad (3.1.13)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras adotadas, a equação (3.1.6) e (3.1.13) nas equações (3.1.1-3.1.5) podemos reescrever:

a equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1.14)$$

as equações do momento

Direção x

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.1.15)$$

Direção y

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho_o g \beta(T - T_o) \quad (3.1.16)$$

Direção z

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.1.17)$$

e a equação da energia

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.1.18)$$

3.1.2 – Análise Dimensional

Existem duas grandes vantagens na adimensionalização das equações que regem um problema. Em primeiro lugar, ela amplia a visão das relações entre as variáveis. Em segundo lugar, ela reduz o número de parâmetros do problema.

Outra utilização para a análise dimensional é a possibilidade de efetuarmos em laboratório, experimentos com modelos que são menores que o protótipo a ser construído ou aparelho real. Isso reduz substancialmente os custos quando comparados aos estudos em escala plena e permite a análise de várias configurações ou condições de escoamento.

Para iniciarmos a análise dimensional do problema, devemos conhecê-lo. No presente trabalho a estrutura base dos casos analisados é representada na figura 1.

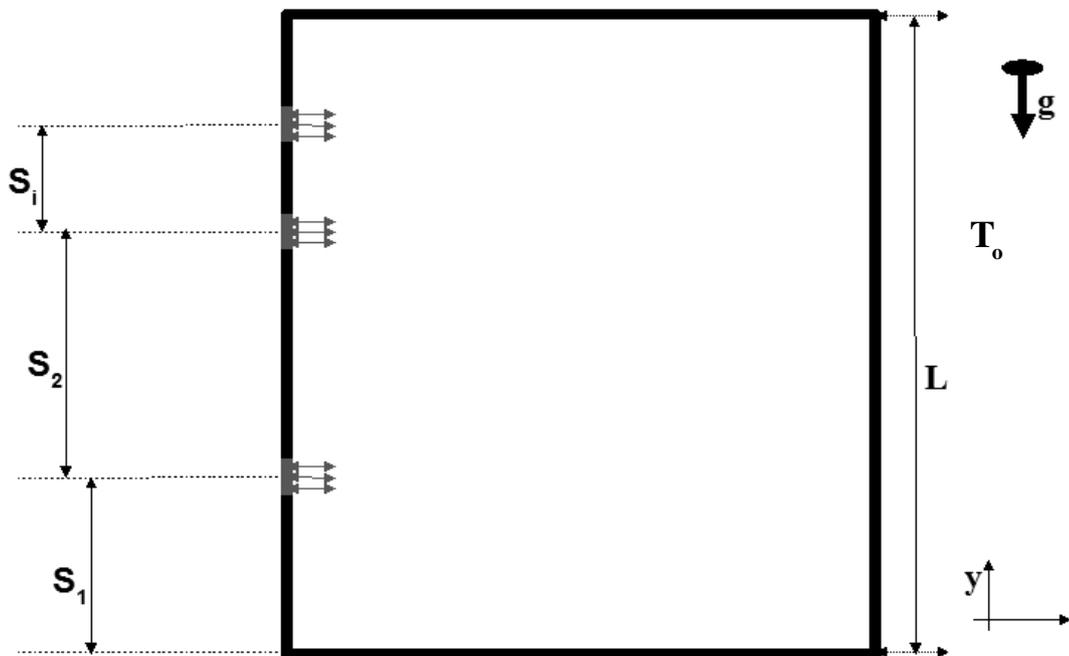


Figura 3.1– Diagrama da cavidade quadrada para os casos estudados

As grandezas de comprimento foram adimensionalizadas pela altura da parede vertical onde posicionam-se as fontes,

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{s}_i = \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \frac{s_i}{L} \quad (3.1.19)$$

e as de velocidade foram adimensionalizadas pela difusividade térmica α [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$] dividida pela altura da parede vertical,

$$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} = \frac{u}{\alpha/L}, \frac{v}{\alpha/L}, \frac{w}{\alpha/L} \quad (3.1.20)$$

Antes de escolhermos o que irá adimensionalizar a pressão, devemos examinar sua unidade.

$$[P] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{[m][a]}{[A]} = \frac{[m][L]^2}{[V][t]^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad (3.1.21)$$

Conclui-se que um bom parâmetro para adimensionalizar a pressão é densidade de referência multiplicada pelo quadrado da difusividade térmica dividida pela altura da parede vertical

$$\tilde{P} = \frac{P}{\rho_o(\alpha/L)^2} \quad (3.1.22)$$

A temperatura adimensionalizada, na verdade, será uma temperatura relativa adimensionalizada por conveniência.

$$\tilde{T} = \frac{T - T_o}{\dot{q} L/k} \quad (3.1.23)$$

em que \dot{q} é o fluxo de calor por unidade de área [$\text{W}.\text{m}^{-2}$] e k é a condutividade térmica [$\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$].

Isolando as variáveis dimensionais nas equações (3.1.19) a (3.1.23) e substituindo nas equações (3.1.14) a (3.1.18) obtemos, na forma adimensional, a equação da continuidade,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (3.1.24)$$

as equações do momento,

Direção x

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + Pr \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (3.1.25)$$

Direção y

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + Pr \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + RaPr \tilde{T} \quad (3.1.26)$$

Direção z

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} + Pr \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (3.1.27)$$

e a equação da energia

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (3.1.28)$$

Surgiram dois números notáveis, o número de Prandtl, que proporciona uma medida da transferência convectiva de calor na superfície, sendo definido como

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.1.29)$$

e o número de Rayleigh modificado

$$Ra = \frac{g \beta q L^4}{\alpha k \nu} \quad (3.1.30)$$

O número de Rayleigh é uma medida do balanço entre as forças que promovem a convecção, provenientes da diferença de densidade entre o fluido quente e o frio, e as que se opõem tal como a fricção devido à viscosidade e à difusão térmica, que opera no sentido de anular o gradiente de temperatura.

3.2 – TEORIA CONSTRUTAL

Para o início do estudo da teoria construtal podemos propor algumas questões. Por que a geometria caracteriza os sistemas naturais de escoamento? Qual é a base para hierarquia, evolução temporal, complexidade e ritmo para estruturas naturais? Existe um único princípio físico capaz de deduzir de qual forma e em que ritmo as estruturas naturais são construídas sem o uso do empirismo? (Bejan 2006)

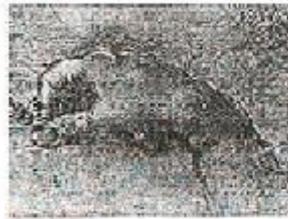
Estes questionamentos não são recentes, porém suas respostas comumente são não-determinísticas. Democritus (aproximadamente 460-370 a.C) atribuiu as formações geométricas presentes na natureza à “mudança e necessidade”. Essa linha de raciocínio em que as formas oriundas da natureza são aceitas, observadas e copiadas perdura até a atualidade. A teoria construtal propõe o pensamento inverso.

Observação e cópia

Natureza

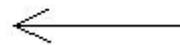


Engenharia



Teoria construtal

Natureza



Princípio

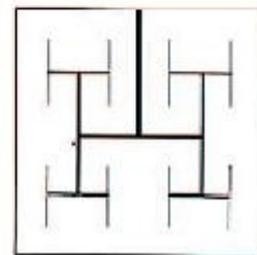
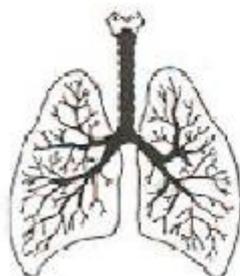


Figura 3.2 – Exemplo da cópia de estruturas naturais pela engenharia, e a proposta de dedução de tais formas por um princípio. (Bejan. 2006) adaptada.

Quatro observações empíricas iniciam o raciocínio desenvolvido por Bejan (2000). Primeira, a forma geométrica é gerada em sistemas naturais que, internamente, possuem a necessidade de escoar e são orientados por gradientes, como temperatura e pressão. Segunda, somente três formatos cobrem o mundo vivo ao nosso redor: rede de distribuição em forma de árvore, como o pulmão e bacias hidrográficas, cortes transversais aproximadamente circulares, como veias, e cortes transversais semi-circulares, como nos rios. A teoria construtal não aborda a forma esférica, por que esse sistema não tem escoamento interno.

Terceira, as formas podem ter mesmo formato, mas jamais idênticas. Quarta, essas poucas formas surgem tanto em sistemas de escoamento inanimados quanto animados. Se existir um único princípio responsável pela geração de todas essas formas, então esse princípio se manifesta em todos os lugares.

Na teoria construtal, esse princípio é chamado de Lei Construtal para a geração de configuração de escoamento. O princípio diz que “para que um sistema de escoamento persista no tempo (sobreviva), o mesmo deve evoluir pela forma mais fácil e proporcionar o acesso mais fácil às correntes que fluem através dele.”

Essa lei é a base da teoria construtal, que hoje representa uma nova extensão da termodinâmica: a termodinâmica de sistemas fora do equilíbrio e com configurações. Pela abordagem da teoria construtal, parâmetros geométricos são usados como critério para maximizações e minimizações em um sistema de escoamento.

Um exemplo simples, que mostra como a teoria construtal é aplicada, é a dedução da lei de Snell. Considere o caminho ARB percorrido por um feixe de luz mostrado na figura 3.3, onde a luz possui velocidades diferentes em cada meio

O tempo total da travessia de A até B é

$$t = \frac{1}{V_0} [L^2 + (L+x)^2]^{1/2} + \frac{1}{V_1} [L^2 + (L-x)^2]^{1/2} \quad (3.2.1)$$

ou, em termos adimensionais,

$$\frac{tV_0}{L} = [1 + (1+\xi)^2]^{1/2} + \frac{V_0}{V_1} [1 + (1-\xi)^2]^{1/2} \quad (3.2.2)$$

onde

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.2.3)$$

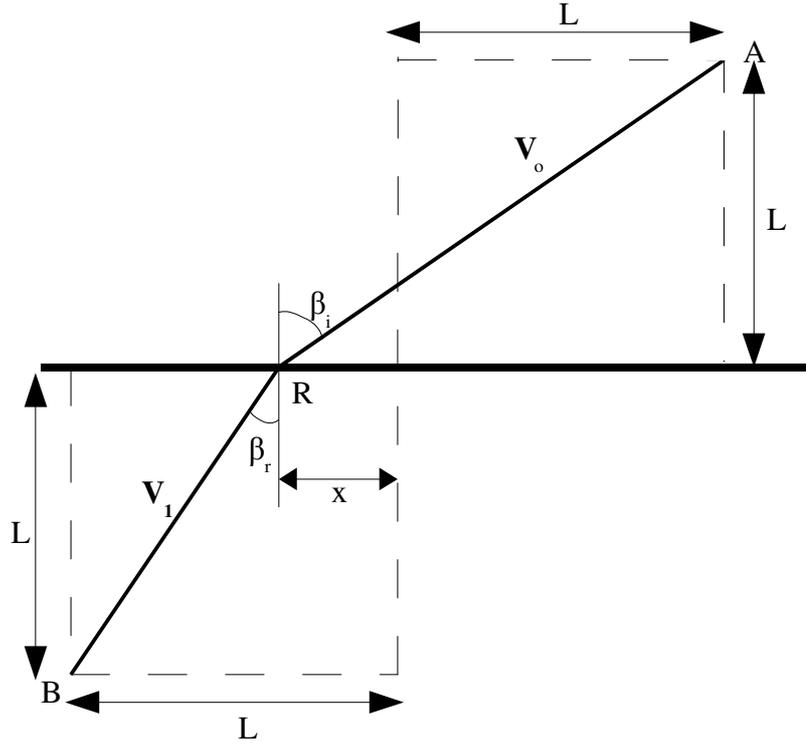


Figura 3.3 – Feixe de luz atravessando dois meios distintos.

Para minimizar o tempo de travessia faz-se $\partial(t V_0/L)/\partial \xi = 0$,

$$\frac{1 + \xi}{[1 + (1 + \xi)^2]^{1/2}} = \frac{V_0}{V_1} \frac{1 - \xi}{[1 + (1 - \xi)^2]^{1/2}} \quad (3.2.4)$$

Em seguida, introduzem-se as definições geométricas

$$\sin \beta_i = \frac{L + x}{[L^2 + (L + x)^2]^{1/2}} \quad (3.2.5)$$

$$\sin \beta_r = \frac{L - x}{[L^2 + (L - x)^2]^{1/2}} \quad (3.2.6)$$

as quais, podem ser combinadas com equação (3.2.4) para chegarmos na lei de Snell

$$\frac{\sin \beta_i}{\sin \beta_r} = \frac{V_0}{V_1} \quad (3.2.7)$$

O estudo, pela teoria construtal, da distribuição de fontes de calor em uma parede vertical resfriada por convecção natural (da Silva *et al*, 2004; da Silva *et al* 2005) tem como formulação base a mesma apresentada na seção 3.1.1 desta dissertação. A

contribuição está no parâmetro usado para otimizar o processo de transferência de calor.

O objetivo em cada configuração a ser analisada será maximizar a condutância térmica global expressa por

$$C = \frac{Q'}{k(T_{max} - T_{\infty})} \quad (3.2.8)$$

em que Q' é a corrente total de calor através das fontes, k é a condutividade térmica do meio, T_{max} é a máxima temperatura encontrada na cavidade e T_{∞} é a temperatura da parede oposta a que contém as fontes.

A condutância global é um parâmetro adimensional local que mensura a contribuição de um ponto para o transporte de calor no meio.

Com fontes de calor constantes, maximizar a condutância térmica global significa minimizar a diferença de temperatura entre o referencial frio e a temperatura máxima na cavidade, pois, pela teoria construtal, o sistema atinge a configuração ótima quando todos os pontos contribuem de forma semelhante para o processo de transferência de calor.

3.3 – ENTRÂNSIA

Estudos experimentais na década de cinquenta (Schneider, 1955) comumente utilizavam a condução elétrica como análoga a condução térmica a fim de resolver problemas transientes de condução de calor ou cujo estado estacionário era muito complexo. A inexistência de bons computadores na época e a dificuldade inerente aos experimentos em transferência de calor motivaram tal analogia.

A base matemática que sustenta estes estudos comparativos é a relação entre a lei de Fourier para a condução de calor com a lei de Ohm para circuitos elétricos.

As equiparações entre os parâmetros térmicos e elétricos estão listadas na tabela 3.1

Tabela 3.1 – Analogia entre grandezas térmicas e elétricas

Q_{ve} [C]	→	$Q_{vh} = Mc_v T$ [J]	U_e [V]	→	T [K]
Carga elétrica armazenada em um capacitor.		Calor armazenado em um corpo	Potencial Elétrico		Potencial Térmico
I [C/s]	→	\dot{Q}_h [J/s]	q_e [C/m ² s]	→	q_h [J/m ² s]
Corrente elétrica		Fluxo de calor	Densidade de corrente elétrica		Densidade de fluxo de calor
R_e [Ω] = [sV/C]	→	R_h [Ω] = [sK/J]	$q_e = -k_e \frac{\partial U_e}{\partial n}$	→	$q_h = -k_h \frac{\partial T}{\partial n}$
Resistência elétrica		Resistência térmica	Lei de Ohm		Lei de Fourier
$C_e = \frac{Q_{ve}}{U_e}$ [C/V]	→	$C_h = \frac{Q_{vh}}{T}$ [J/K]	$E_{ve} = \frac{1}{2} Q_{ve} U_e$ [J]	→	?
Capacitância		Capacidade térmica	Energia potencial elétrica em um capacitor		

A temperatura representa o potencial térmico pois a troca de calor só ocorre de forma espontânea se houver diferenças de temperatura, assim como a corrente elétrica só surge naturalmente se houver diferença de potencial elétrico.

É notório que a intensidade do fluxo de calor depende do meio e da diferença de temperatura, exatamente como a intensidade do fluxo de carga, corrente, depende do meio, representado pela da resistência elétrica, e da diferença de potencial.

A lacuna para o correspondente térmico à energia potencial elétrica foi preenchida por Zeng-Yuan Guo, Hong-Ye Zhu e Xin-Gang Liang com a criação de um novo conceito físico chamado de entrânsia (Guo *et al*, 2007). Assim como a energia potencial elétrica representa o potencial que o corpo tem para fornecer energia elétrica por intermédio da corrente elétrica, a entrânsia representa a capacidade de um corpo de fornecer energia térmica pela transmissão de calor.

Adotado um corpo termicamente isolado, ao se adicionar uma quantidade infinitesimal de calor ao mesmo, o incremento em sua energia potencial térmica, ou seja, em sua entrânsia, pode ser representado matematicamente por

$$dE_{vh} = Q_{vh} dT \quad (3.3.1)$$

No estado termodinâmico onde $T=0K$ o sistema não conterà energia alguma, portanto sua capacidade de transferir calor será nula, logo $E_{vh}=0$.

$$E_{vh} = \int_0^T Q_{vh} dT = \int_0^T Mc_v T dT = \frac{Mc_v T^2}{2} \quad (3.3.2)$$

ou ainda

$$E_{vh} = Mc_v T \frac{T}{2} = \frac{Q_{vh} T}{2} \quad (3.3.3)$$

A equação (3.3.3) traz a entrânsia armazenada em um corpo. Tomando as relações estabelecidas pela tabela 3.1, é possível transformar a equação da energia potencial elétrica na equação obtida para entrânsia por simples analogia. Sendo assim, a equação (3.3.3) substitui a interrogação em nossa tabela.

Como uma grandeza do sistema, torna-se interessante entender seu comportamento em processos térmicos. Em um processo de condução térmica na ausência de fontes de

calor, a equação de conservação da energia térmica será

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \dot{q} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3.3.4)$$

Multiplicando (3.3.4) por T teremos

$$T \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -T \nabla \cdot \dot{q} \quad (3.3.5)$$

mas

$$\nabla \cdot (T \dot{q}) = T \nabla \cdot \dot{q} + \dot{q} \cdot \nabla T \rightarrow -T \nabla \cdot \dot{q} = \dot{q} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (T \dot{q}) \quad (3.3.6)$$

portanto

$$T \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (T \dot{q}) \quad (3.3.7)$$

O termo do primeiro membro da equação (3.3.7) é a variação da entrância armazenada por unidade de volume

$$T \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = T \frac{M}{V} c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M c_v T^2}{2} \right) = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Q_{vh} T \right) = \frac{1}{V} \frac{\partial E_{vh}}{\partial t} \quad (3.3.8)$$

O segundo termo do segundo membro da equação (3.3.7) está relacionado com a transferência de entrância

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\dot{q} T) &= \nabla \cdot \left(\frac{\dot{Q}_{vh}}{V} T \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} T M c_v \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Q_{vh} T \right) \right) \\ \nabla \cdot (\dot{q} T) &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \frac{\partial E_{vh}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Assim, a equação (3.3.7) pode ser reescrita como

$$\frac{d \epsilon_h}{dt} = -\nabla \cdot \dot{\epsilon}_h - \phi_h \quad (3.3.10)$$

em que ϵ_h é a densidade volumétrica de entrância, $\dot{\epsilon}_h$ é o fluxo de entrância e ϕ_h é a função dissipação de entrância.

$$\phi_h = -\dot{q} \cdot \nabla T = k(\nabla T)^2 \quad (3.3.11)$$

O processo de transferência de calor é irreversível do ponto de vista da termodinâmica. A dissipação de entrância ocorre tais processos e surge como uma medida da irreversibilidade da transferência de calor associada a resistência térmica do meio.

3.3.1 – Princípio extremo de dissipação de entrância

Prigogine (1967) desenvolveu o princípio da mínima produção entropia baseado na idéia de que a produção térmica de entropia de um sistema em estado estacionário deve ser a mínima. No entanto, há um grande número de processos de transferência de calor, massa ou momento, que não estão relacionados com a conversão entre calor e trabalho.

Exemplos como problemas de transferência de calor ou massa em que as condições de contorno de temperatura ou concentração são fixas não produzem bons resultados quando otimizados pelo princípio da mínima produção entropia. O estado de mínima produção de entropia corresponde ao menor fluxo de calor ou fluxo de massa, exatamente o oposto do que se deseja nestes processos.

Situações como estas mostram que a irreversibilidade e otimização de uma certa gama de processos de transporte devem ser reexaminadas. Pelas lentes dos conceitos de entrância e dissipação de entrância é possível gerar mecanismos capazes de otimizar processos de transferência de calor e massa. Nesta seção, o foco estará nos processos de transferência de calor.

Em sua tese de pós-doutorado pela Tsinghua University, Beijing, China, Cheng X. G. usa o método de resíduos ponderados na forma diferencial da equação de condução de calor no estado estacionário e origina os princípios extremos da dissipação de entrância. Por estar em chinês, o estudo para o presente trabalho baseou-se nas informações referentes a esta tese em publicações internacionais (Guo et al, 2007; Guo & Chen, 2007).

3.3.1.1 – Princípio da mínima dissipação de entrância

Em situações onde o fluxo de calor é constante, o objetivo é transportar o calor fornecido de forma mais eficiente possível. Em uma situação ideal e hipotética, o transporte seria instantâneo e a diferença de temperatura nula entre os terminais analisados.

O princípio da mínima dissipação de entrância mostra que, quando as condições de

contorno para o fluxo de calor forem fixas, a mínima diferença entre as temperaturas das fronteiras é obtida para o processo de transporte de calor que provoque a menor dissipação de entrância no domínio. O princípio pode ser expresso como

$$\dot{Q}_h \delta(\Delta T) = \delta \int_V \frac{1}{2} k (\Delta T)^2 dV = 0 \quad (3.3.12)$$

Integrando a função dissipação de entrância em todo o volume do domínio é possível mensurar o valor total da entrância dissipada.

Quanto maior for a entrância dissipada, menor será a quantidade de energia térmica que atingirá a extremidade do domínio oposta a fonte. Como é essa energia térmica recebida que aumenta a temperatura local, a dissipação de entrância aumenta a diferença de temperatura entre a fonte e a região do domínio analisada.

3.3.1.2 – Princípio da máxima dissipação de entrância

Nos casos em que as condições de contorno prescrevem diferenças de temperatura fixas, otimizar o processo de transferência de calor significa gerar o maior fluxo de calor possível.

Para o princípio da máxima dissipação de entrância, a melhor condução de calor, ou fluxo máximo, se dará quando a dissipação da entrância for máxima. Matematicamente temos

$$\Delta T \delta(\dot{Q}_h) = \delta \int_V \frac{1}{2} k (\Delta T)^2 dV = 0 \quad (3.3.13)$$

3.3.2 – Princípio da mínima resistência térmica

A resistência térmica para casos unidimensionais é definida como a razão entre a diferença de temperatura e o fluxo de calor, porém resistência térmica para casos multidimensionais não é de fácil definição. Contudo, uma resistência térmica equivalente pode ser definida baseada nos conceitos de entrância, mesmo para problemas multidimensionais e com complexas condições de contorno.

Em analogia direta com a dissipação de energia potencial elétrica por efeito joule, a dissipação de entrância é dada por

$$\dot{E}_{h\phi} = \dot{Q}_h^2 R_h \rightarrow R_h = \frac{\dot{E}_{vh\phi}}{\dot{Q}_h^2} \quad (3.3.14)$$

em que R_h é a resistência térmica equivalente.

No caso unidimensional, a diferença de temperatura pode ser escrita em um análogo à diferença de potencial elétrico

$$\Delta T = R_h \dot{Q}_h \quad (3.3.15)$$

Reescrevendo (3.3.14)

$$\dot{E}_{vh\phi} = \left(\frac{\Delta T}{R_h} \right)^2 R_h \rightarrow R_h = \frac{(\Delta T)^2}{\dot{E}_{vh\phi}} \quad (3.3.16)$$

Em um domínio multidimensional, a resistência térmica equivalente é dada pela equação (3.3.14) e (3.3.16) para os casos onde as condições de contorno são dadas por duas isotérmicas. Quando as condições de contorno não são dadas por isotérmicas a equação (3.3.14) permanece e temos também

$$R_h = \frac{(\overline{\Delta T})^2}{\dot{E}_{vh\phi}} \quad (3.3.17)$$

A variação de temperatura $\overline{\Delta T}$ representa uma variação média na temperatura no domínio estudado.

A relevância e a originalidade na abordagem desenvolvida dentro do conceito de entrância são notórias, contudo, deve-se ressaltar que o conceito de potencial térmico não é novo na literatura, como afirmam seus elaboradores.

Drude (1900), físico no campo de estado sólido, atualmente conhecido como matéria condensada, desenvolveu uma abordagem microscópica para o estudo dos metais e definiu o potencial térmico Q . Com o advento da mecânica quântica estatística, a definição do potencial térmico foi corrigida resultando em

$$Q = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B}{e} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) \quad (3.3.18)$$

Tanto na proposta de Drude quanto na correção posterior, a idéia qualitativa do

potencial térmico é muito semelhante com a entrância. Na definição matemática, ambos descrevem uma dependência linear com a temperatura local.

No apêndice B é explicado com mais detalhes toda a evolução da abordagem física de Drude resultando na elaboração do conceito de potencial térmico, bem como sua correção pela mecânica quântica estatística (Ashcroft & Mermin, 1976).

4 – METODOLOGIA

Ao se abordar um problema físico, a melhor forma de entendê-lo é compreendendo as equações que o regem. No âmbito geral, o início do raciocínio para solução e compreensão de um acontecimento físico se dá pela busca de grandezas físicas que se conservem com o tempo.

Os princípios de conservação representam a lei física de preservação da integridade de uma dada grandeza, ao longo de um processo. Quando um princípio de conservação é expresso de forma matemática para uma região infinitesimal de um dado meio, obtém-se uma equação diferencial, que é a chamada equação de conservação da grandeza envolvida.

O conjunto das equações de conservação compõem a formulação matemática a ser resolvida. Um método analítico com habilidade de resolver tais equações nos daria a solução em uma forma fechada, e seria possível, então, calcular os valores das variáveis dependentes em nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos. Nem sempre a solução analítica é possível ou de fácil obtenção.

A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita (Maliska, 2004). A escolha por uma solução numérica acarreta em uma solução para um número discretos de pontos, e conseqüentemente, com um determinado erro.

Quanto maior o número de pontos calculados menor será o erro e mais perto da solução exata estaremos. Se optarmos por calcular N valores da variável no domínio, teremos N incógnitas, sendo necessárias o mesmo número de equações algébricas para o fechamento do sistema linear a ser resolvido. Torna-se perceptível que não é conveniente adotar valores excessivamente grandes para N pois, apesar de reduzirmos o erro, o esforço computacional crescerá assustadoramente.

Os métodos tradicionais para a solução numérica de equações diferenciais são os Métodos de Diferenças Finitas (MDF), de Elementos Finitos (MEF) e de Volumes Finitos (MVF).

Simplificadamente o MDF é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas por intermédio da série de Taylor da função derivada.

No MEF, o problema é tratado dividindo o domínio em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos, onde as equações diferenciais são

aproximadas por polinômios de comportamento suave.

Tanto o MDF como o MEF não trabalham com volumes de controle e sim apenas com pontos da malha, e, como consequência, não são conservativos em níveis discretos.

No presente trabalho o método adotado foi o MVF o qual divide o domínio em volumes de controle e obtém as aproximações das equações diferenciais por intermédio dos balanços de conservação das propriedades físicas em questão para cada volume de controle.

No decorrer das soluções, o acoplamento pressão-velocidade foi feito pelo algoritmo SIMPLE, as funções de interpolação adotadas baseiam-se em leis de potência e os sistemas lineares resolvidos por uma adaptação do método TDMA.

4.1 – MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

Sempre que as equações algébricas que aproximarão as derivadas das equações conservativas na análise numérica forem obtidas satisfazendo a conservação da propriedade no volume de controle estaremos usando o método dos volumes finitos.

A fim de formularmos as equações algébricas aproximadas pelo método dos volumes finitos, podemos optar por dois caminhos diferentes. O primeiro é fazer o balanço da propriedade estudada no volume elementar, ou seja, a soma dos fluxos de entrada subtraída pela soma dos fluxos de saída será nulo se não houver termos fonte ou dissipativos no interior do volume. O segundo consiste em integrar sobre o volume de controle, no espaço e no tempo, as equações na forma conservativa.

As equações conservativas, também chamadas de divergentes, são aquelas em que os fluxos estão dentro dos sinais de derivadas, assim, após a primeira integração, surgem os fluxos nas fronteiras do volume de controle. Os dois caminhos são equivalentes e resultam nas mesmas equações de balanço, sua escolha irá depender da formulação matemática disponível.

No intuito de elucidar a relação entre a equação diferencial na forma conservativa e as equações algébricas aproximadas usadas no método dos volumes finitos, assumiremos um volume bidimensional representado na figura 4.1

O balanço de massa no volume de controle estudado será

$$\dot{m}_w - \dot{m}_l + \dot{m}_s - \dot{m}_n = 0 \quad (4.1.1)$$

note que o índice referente a face oeste foi trocado pela inicial em inglês (*west*) para evitar confusões com os valores de referência.

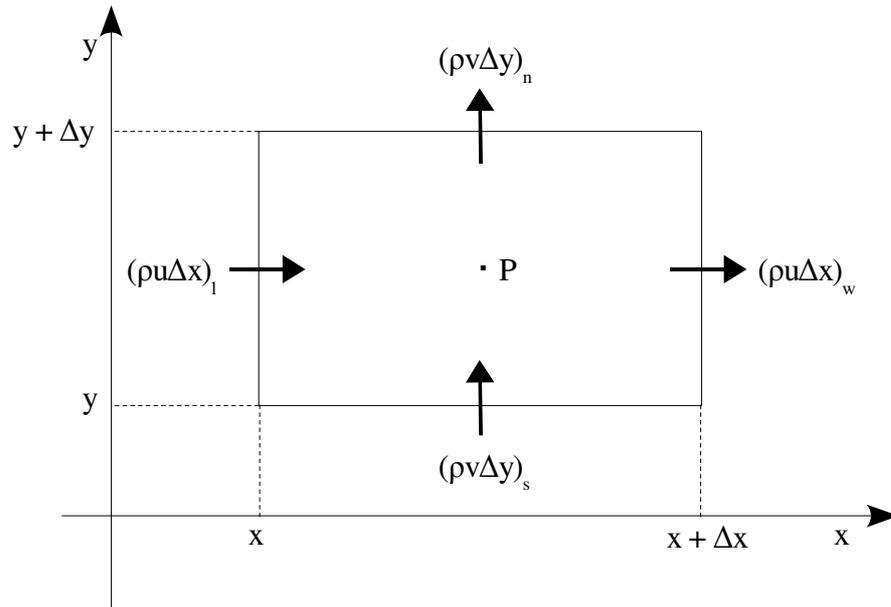


Figura 4.1 – Volume elementar para os balanços de conservação.

Sendo ρ a densidade superficial de massa, haja visto que estamos trabalhando em duas dimensões, temos

$$\frac{m_w}{t} - \frac{m_l}{t} + \frac{m_s}{t} - \frac{m_n}{t} = \frac{(\rho \Delta x \Delta y)_w}{t} - \frac{(\rho \Delta x \Delta y)_l}{t} + \frac{(\rho \Delta x \Delta y)_s}{t} - \frac{(\rho \Delta x \Delta y)_n}{t} = 0$$

$$(\rho u \Delta y)_w - (\rho u \Delta y)_l + (\rho v \Delta x)_s - (\rho v \Delta x)_n = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(\rho u)_w - (\rho u)_l}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_s - (\rho v)_n}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{(\rho u)_w - (\rho u)_l}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_s - (\rho v)_n}{\Delta y} \right] = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \quad (4.1.2)$$

Assumindo um escoamento permanente onde as velocidade não dependem do tempo, vamos integrar 4.1.2 em todo o espaço do volume de controle.

$$\int_w^l \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dx dy = \int_w^l [(\rho u)_l - (\rho u)_w] dy + \int_s^n [(\rho v)_n - (\rho v)_s] dx = 0$$

$$(\rho u \Delta y)_l - (\rho u \Delta y)_w + (\rho v \Delta x)_n - (\rho v \Delta x)_s = \dot{m}_l - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (4.1.3)$$

Multiplicando (4.1.3) por (-1) recupera-se a equação algébrica obtida pelo balanço dos fluxos de massa (4.1.1). Essa equivalência já era esperada, visto que, como já foi dito, a escolha do caminho não interfere na equação algébrica aproximada final.

Nesse trabalho foi escolhido integrar as equações de equilíbrio para obter as equações algébricas aproximadas. Assumindo as equações (3.1.26), (3.1.27) e (3.1.29) em duas dimensão temos:

Direção x

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + Pr \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (4.1.4)$$

Direção y

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + Pr \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + RaPr \tilde{T} \quad (4.1.5)$$

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (4.1.6)$$

Podemos escrever todas as equações acima em uma única forma geral dada por

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) = \tilde{\Gamma}^\Phi \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{S}^\Phi \quad (4.1.7)$$

em que $\tilde{\Phi}$ é a variável em questão, e os valores de $\tilde{\Gamma}^\Phi$ e \tilde{S}^Φ são dados na tabela 4.1.

Da equação (3.1.25) para o caso bidimensional podemos escrever que

$$\tilde{\Phi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\Phi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (4.1.8)$$

Tabela 4.1 – Valores de $\tilde{\phi}$, $\tilde{\Gamma}^\phi$ e \tilde{S}^ϕ .

Equação de conservação	$\tilde{\phi}$	$\tilde{\Gamma}^\phi$	\tilde{S}^ϕ
Quantidade de movimento em x	\tilde{u}	Pr	$-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}}$
Quantidade de movimento em y	\tilde{v}	Pr	$-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + RaPr \tilde{T}$
Energia	\tilde{T}	1	0

Somando a equação (4.1.8) com a (4.1.7) e usando a regra da cadeia, podemos reescrever (4.1.7) na forma conservativa.

$$\left(\frac{\partial \tilde{u} \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right) = \tilde{\Gamma}^\phi \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{S}^\phi \quad (4.1.9)$$

Integrando (4.1.9) no espaço

$$\int_w^l \int_s^n \frac{\partial \tilde{u} \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} dx dy + \int_w^l \int_s^n \frac{\partial \tilde{v} \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} dx dy = \quad (4.1.10)$$

$$\tilde{\Gamma}^\phi \left(\int_w^l \int_s^n \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} dx dy + \int_w^l \int_s^n \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} dx dy \right) + \int_w^l \int_s^n \tilde{S}^\phi dx dy$$

$$[(\tilde{u} \tilde{\phi})_l - (\tilde{u} \tilde{\phi})_w] \Delta y + [(\tilde{v} \tilde{\phi})_n - (\tilde{v} \tilde{\phi})_s] \Delta x =$$

$$\Gamma^\phi \left\{ \left[\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)_l - \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)_w \right] \Delta y + \left[\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)_n - \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)_s \right] \Delta x \right\} + L[\tilde{S}^\phi] \Delta x \Delta y \quad (4.1.11)$$

Simplificando a notação com

$$F_l = (\tilde{u} \Delta y)_l \quad F_w = (\tilde{u} \Delta y)_w \quad F_n = (\tilde{v} \Delta x)_n \quad F_s = (\tilde{v} \Delta x)_s$$

$$D_l = (\tilde{\Gamma}^\phi \Delta y)_l \quad D_w = (\tilde{\Gamma}^\phi \Delta y)_w \quad D_n = (\tilde{\Gamma}^\phi \Delta x)_n \quad D_s = (\tilde{\Gamma}^\phi \Delta x)_s \quad (4.1.12)$$

obtemos

$$\tilde{F}_l \phi_l - F_w \tilde{\phi}_w + F_n \tilde{\phi}_n - F_s \tilde{\phi}_s =$$

$$D_l \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)_l - D_w \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)_w + D_n \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)_n - D_s \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)_s + L[\tilde{S}^\phi] \Delta x \Delta y \quad (4.1.13)$$

O termo $L[\tilde{S}^\phi]$ significa a aproximação numérica do termo entre colchetes. Tal

aproximação irá depender da expressão o termo fonte \tilde{S}^ϕ . Discussões sobre o tratamento dado aos termos fonte do presente trabalho são apresentadas futuramente.

Tanto a variável $\tilde{\phi}$ quanto suas derivadas devem ser avaliadas no passo do tempo. Essa análise pode ser: totalmente implícita, implícita e explícita. Para a formulação totalmente implícita os valores de $\tilde{\phi}$ para cada volume de controle são calculados no mesmo nível de tempo, em contra partida, na formulação explícita, os valores calculados em uma nova iteração são obtidos usando os valores encontrados na iteração anterior. A formulação implícita faz uso tanto dos valores da iteração passada quanto da decorrente. No presente trabalho foi adotado a formulação implícita.

4.2 – FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

Na equação (4.1.11) ainda temos derivadas que devem ser substituídas por aproximações algébricas. Para tanto é necessário a escolha de uma função de interpolação para $\tilde{\phi}$.

Para um problema unidimensional sem o termo fonte, em que para $\tilde{x}=0$ temos $\tilde{\phi}=\tilde{\phi}_o$ e para $\tilde{x}=1$ temos $\tilde{\phi}=\tilde{\phi}_f$ a equação (4.1.9) possui como solução exata

$$\tilde{\phi} = \frac{e^{\tilde{P}e\tilde{x}} - 1}{e^{\tilde{P}e} - 1} (\tilde{\phi}_o - \tilde{\phi}_f) \quad (4.2.1)$$

em que $\tilde{P}e^i = \tilde{u}_i / \Gamma^\phi$ é o número de Peclet expresso por variáveis adimensionais.

Usando a solução exata do caso unidimensional como estimativa para o caso bidimensional temos para o vizinho situado ao leste do volume analisado

$$\tilde{\phi}_l = \frac{e^{\tilde{P}e^l\tilde{x}} - 1}{e^{\tilde{P}e^l} - 1} (\tilde{\phi}_L - \tilde{\phi}_P) \quad (4.2.2)$$

note que o índice minúsculo refere-se a fronteira e o maiúsculo refere-se ao centro do volume de controle.

Tomando o analgo para os demais vizinhos, podemos reescrever (4.1.13) como

$$A_p \tilde{\phi}_P = A_l \tilde{\phi}_L + A_w \tilde{\phi}_W + A_n \tilde{\phi}_N + A_s \tilde{\phi}_S - L[\tilde{S}^\phi] \Delta x \Delta y \quad (4.2.3)$$

em que

$$A_l = \frac{F_l}{e^{\tilde{P}e^l} - 1} \quad (4.2.4)$$

$$A_w = \frac{F_w e^{\tilde{P}e}}{e^{\tilde{P}e^w} - 1} \quad (4.2.5)$$

$$A_n = \frac{F_n}{e^{\tilde{P}e^n} - 1} \quad (4.2.6)$$

$$A_s = \frac{F_s e^{\tilde{P}e}}{e^{\tilde{P}e^s} - 1} \quad (4.2.7)$$

$$A_p = A_l + A_w + A_n + A_s + (F_l - F_w) + (F_n - F_s) \quad (4.2.8)$$

Como custo computacional para o cálculo de exponenciais é alto, compensa aproximar as exponenciais por funções potenciais que se comportem como exponenciais no domínio estudado. Proposto por Patankar (Patankar 1980), o método *Power-Law* redefine os coeficientes de (4.2.3) seguindo esta idéia.

Por (4.1.12) e pela definição do número de Peclet temos

$$F = \tilde{P}e D \quad (4.2.9)$$

assim

$$\frac{A_n}{D_n} = \frac{\tilde{P}e^n}{e^{\tilde{P}e^n} - 1} \quad (4.2.10)$$

$$\frac{A_s}{D_s} = \frac{\tilde{P}e e^{\tilde{P}e^s}}{e^{\tilde{P}e^s} - 1} \quad (4.2.11)$$

As expressões propostas pelo método *Power-Law* são:

Para $Pe < -10$,

$$\frac{A_n}{D_n} = -\tilde{P}e^n \quad (4.2.12)$$

Para $-10 \leq Pe < 0$,

$$\frac{A_n}{D_n} = (1 + 0.1 \tilde{P}e^n)^5 - \tilde{P}e^n \quad (4.2.13)$$

Para $0 \leq Pe \leq 10$,

$$\frac{A_n}{D_n} = (1 - \tilde{P}e^n)^5 \quad (4.2.14)$$

Para $Pe > 10$,

$$\frac{A_n}{D_n} = 0 \quad (4.2.15)$$

As aproximações para os demais coeficientes são análogas as adotadas para A_n .

4.3 – TERMO FONTE

Quando se escreve as equações governantes no formato da equação (4.1.7), termos importantes são deslocados para o termo fonte. Nos casos em que a variável principal aparece dentro do termo fonte, o mesmo deve ser linearizado. Como os casos estudados no presente trabalho não possui tal dependência, o processo de linearização é explicado em mais detalhes no anexo C.

Nesta dissertação, os termos fontes carregam os gradientes de pressão e um termo dependente da temperatura. Este último pode ser encarado como uma constante se a equação da energia for resolvida antes das demais, fornecendo o valor da variável T ou se o valores de T forem tratados explicitamente, em outras palavras, se o campo de temperatura usado na solução da equação do movimento assumir o valor da interação passada.

Com respeito aos gradientes de pressão, será necessária uma abordagem mais cuidadosa quanto ao seu acoplamento com o campo de velocidade. Esse assunto é tratado a seguir.

4.4 – SIMPLE

Após todas as análises provenientes das seções anteriores, se substituirmos os

valores da tabela 4.1 na equação (4.2.3) e tomando, também, a equação (4.1.1), as equações aproximadas para o problema em estudo serão

$$A_p \tilde{u}_p = A_l \tilde{u}_L + A_w \tilde{u}_w + A_n \tilde{u}_N + A_s \tilde{u}_S - L[\tilde{P}^u] \Delta x \Delta y \quad (4.4.1)$$

$$A_p \tilde{v}_p = A_l \tilde{v}_L + A_w \tilde{v}_w + A_n \tilde{v}_N + A_s \tilde{v}_S - L[\tilde{P}^v] \Delta x \Delta y + (RaPr \Delta x \Delta y) \tilde{T}_p \quad (4.4.2)$$

$$A_p \tilde{T}_p = A_l \tilde{T}_L + A_w \tilde{T}_w + A_n \tilde{T}_N + A_s \tilde{T}_S \quad (4.4.3)$$

$$\dot{m}_w - \dot{m}_l + \dot{m}_s - \dot{m}_n = (\rho \tilde{u} \Delta y)_w - (\rho \tilde{u} \Delta y)_l + (\rho \tilde{v} \Delta x)_s - (\rho \tilde{v} \Delta x)_n = 0 \quad (4.4.4)$$

Note que no segundo membro da equação (4.4.4) as velocidades foram adimensionalizadas, para tanto, bastou dividir toda a equação por α/L , o que não alterou a igualdade.

Os termos $L[\tilde{P}^u]$ e $L[\tilde{P}^v]$ significam as aproximação numérica dos gradientes de pressão nas direções x e y respectivamente.

As aproximações adotadas foram

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_l - P_w}{\Delta x} \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P_n - P_s}{\Delta y} \quad (4.4.6)$$

As equações algébricas aproximadas podem ser resolvidas simultaneamente, no que chamamos de solução acoplada porém a matriz dos coeficientes gerada por esta opção é colossal. Para elucidar, imagine um problema tridimensional e incompressível com uma malha de 50.000 volumes. São 250.000 incógnitas, originando uma matriz de 62.500.000.000 elementos dos quais apenas 0,0028% são não-nulo (Maliska, 2004).

Optando por uma solução segregada diminui-se os tamanhos das matrizes. Contudo, torna-se necessária uma equação evolutiva para cada incógnita. Como a nossa equação de estado (3.1.7) independe de P , a pressão passa a não possuir uma equação evolutiva.

O foco está em determinar uma equação evolutiva capaz de fornecer um campo de pressão que, quando substituído nas equações (4.4.1) e (4.4.2), origine um campo de velocidade que satisfaça a equação (4.4.4).

No método SIMPLE a pressão é dada pela soma da melhor estimativa conhecida P^m mais uma correção P^c , resumindo, de forma adimensionalizada

$$\tilde{P} = \tilde{P}^m + \tilde{P}^c \quad (4.4.7)$$

Devido a esse novo tratamento da pressão, as velocidade terão tratamento similar, ou seja, o valor de uma componente da velocidade será dado pela melhor estimativa somada a uma correção. As equações de correção proposta por Patankar quando desenvolveu este método foram

$$\tilde{u}_p = \tilde{u}_p^m - \frac{\Delta y}{A_p} (\tilde{P}_L^c - \tilde{P}_W^c) \quad (4.4.8)$$

$$\tilde{v}_p = \tilde{v}_p^m - \frac{\Delta x}{A_p} (\tilde{P}_N^c - \tilde{P}_S^c) \quad (4.4.9)$$

Agora devemos obter uma equação para \tilde{P}^c que corrija as velocidades de tal forma que as mesmas satisfaçam a equação de conservação de massa. Escrevendo as equações (4.4.8) e (4.4.9) para as velocidades nas interfaces e substituindo em (4.4.4) teremos

$$B_p \tilde{P}_p^c = B_l \tilde{P}_L^c + B_w \tilde{P}_W^c + B_n \tilde{P}_N^c + B_s \tilde{P}_S^c + b \quad (4.4.10)$$

onde

$$B_p = \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_l} + \frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_s} \quad (4.4.11)$$

$$B_l = \frac{1}{A_l}, \quad B_w = \frac{1}{A_w}, \quad B_n = \frac{1}{A_n}, \quad B_s = \frac{1}{A_s} \quad (4.4.12)$$

$$b = \frac{\tilde{u}_W^c - \tilde{u}_L^c}{\Delta x} + \frac{\tilde{u}_S^c - \tilde{u}_N^c}{\Delta y} \quad (4.4.13)$$

É notório que a equação (4.4.7) não possui qualquer significado físico, foi uma escolha matemática simples com o intuito de avançar com a pressão. Para que seja possível a convergência do sistema de equações, introduz-se um coeficiente de sub-relaxação em \tilde{P}^c .

$$\tilde{P} = \tilde{P}^m + \alpha \tilde{P}^c \quad (4.4.10)$$

O método SIMPLE pode ser aplicado pelo seguinte algoritmo:

- Estimar os campos de velocidade e a pressão \tilde{P}^m .
- Resolver as equações do movimento com \tilde{P}^m e obter \tilde{v}^m e \tilde{u}^m .
- Resolver a equação (4.4.10) e obter \tilde{P}^c .
- Corrigir as velocidades com (4.4.8) e (4.4.9).
- Calcular \tilde{P} por (4.4.14).
- Resolver as demais equações do sistema.
- Fazer $\tilde{P}^m = \tilde{P}$ e voltar ao segundo comando até a convergência.

4.5 – SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Após a aplicação do método dos volumes finitos e da resolução do problema de acoplamento pressão-velocidade, surge o sistema de equações lineares a ser resolvido que trará a solução numérica final para o problema proposto.

A escolha de um método para a solução do sistema de equações lineares deve ser extremamente cuidadosa, visto que é neste passo que se concentra a maior parte do esforço computacional, considerando o campo de mecânica dos fluidos computacional.

A solução pode ser obtida de forma direta em que se trabalha com a matriz completa dos coeficiente e com processos que equivalem a inversão da mesma gerando a solução exata para o sistema linear, ou de forma indireta onde é proposto uma solução aleatória inicial e por sucessivas iterações obtém-se uma aproximação satisfatória da solução final.

O método adotado no presente trabalho é uma combinação do método iterativo denominado Gauss-Seidel e do direto conhecido como TDMA (*tridiagonal-matrix algorithm*). Por motivos didáticos vou apresentar cada um dos métodos escolhidos e em seguida mostrar o algoritmo usado para a junção dos mesmo e resolução do sistema.

4.5.1 – Método de Gauss-Seidel

Neste método o valor da variável é resolvido ponto a ponto na malha. Após uma estimativa inicial, o valor da variável em cada volume de controle é calculada a partir da

respectiva equação do sistema, utilizando-se os valores obtidos na iteração anterior, quando essas ainda não foram calculadas na iteração corrente, e os valores obtidos na iteração corrente, no caso contrário.

Dado um sistema linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

o método de Gauss-Seidel consiste em resolver (4.5.2) para cada volume de controle, em que o índice k remete à interação corrente e $k-1$ à interação anterior.

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad (4.5.2)$$

Para garantir a convergência, a matriz dos coeficientes deverá ser diagonal dominante. Matematicamente, isso significa que para todas as linhas da matriz, o módulo do valor da matriz na diagonal é maior que a soma dos módulos de todos os demais valores (não-diagonais) daquela linha. O mesmo raciocínio se aplica para as colunas, e para uma matriz ser estritamente dominante basta que seja por linhas ou por colunas.

Por ser um método ponto a ponto, o Gauss-Seidel possui uma convergência lenta, por esse motivo não é adotado como único caminho para a soluções no presente trabalho.

4.5.2 – Método TDMA

O algoritmo de Thomas, também conhecido por TDMA, é uma forma especial do método de eliminação de Gauss que pode ser usada para resolver sistemas constituídos por matrizes tridiagonais, como a representada na equação (4.2.3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2 \ n-2} & a_{n-2 \ n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1 \ n-2} & a_{n-1 \ n-1} & a_{n-1 \ n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n \ n-1} & a_{n \ n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ \vdots \\ b'_{n-2} \\ b'_{n-1} \\ b'_n \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

ou ainda, de uma maneira mais simples

$$x_i = b'_i - \left(\frac{a_{i \ i-1}}{a_{ii}} \right) x_{i-1} - \left(\frac{a_{i \ i+1}}{a_{ii}} \right) x_{i+1} = b_i + c_i x_{i-1} + d_i x_{i+1} \quad (4.5.4)$$

Como não existem nem x_{-1} e nem x_{n+1} , Devemos definir, nas fronteiras $c_1=0$ e $d_n=0$.

Para $i=1$ temos

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 = Q_1 + P_1 x_2 \quad (4.5.5)$$

Para $i=2$ temos

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} \right) x_1 - \left(\frac{a_{23}}{a_{22}} \right) x_3 \quad (4.5.6)$$

Substituindo (4.5.5) em (4.5.6) temos

$$x_2 = \left[\left(\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21} Q_1}{a_{22}} \right) \left(1 - \frac{P_1 a_{21}}{a_{22}} \right)^{-1} \right] - \frac{a_{23}}{a_{22}} \left(1 - \frac{P_1 a_{21}}{a_{22}} \right)^{-1} x_3 = Q_2 + P_2 x_3 \quad (4.5.7)$$

Repetindo esse processo concluímos por indução que:

$$x_i = Q_i + P_i x_{i+1} \quad (4.5.8)$$

em que

$$Q_i = \left(\frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{a_{i \ i-1} Q_{i-1}}{a_{ii}} \right) \left(1 - \frac{P_{i-1} a_{i \ i-1}}{a_{ii}} \right)^{-1} \quad (4.5.9)$$

$$P_i = \frac{a_{i \ i+1}}{a_{ii}} \left(1 - \frac{P_{i-1} a_{i \ i-1}}{a_{ii}} \right)^{-1}$$

ressaltando que

$$x_n = Q_n \quad (4.5.9)$$

Para solucionar o sistema linear, segue-se o algoritmo abaixo:

- calcule os valores de P_1 e Q_1 pela equação (4.5.5)
- use (4.5.9) para encontrar todos P_i e Q_i .
- faça $x_n = Q_n$
- use (4.5.8) para calcular todos os x_i

4.5.2 – Algoritmo Final

Tendo em mente os procedimentos tanto do método iterativo de Gauss-Seidel quanto do método direto TDMA, torna-se possível uni-los para a solução do nosso caso.

Tomando uma linha i em nossa malha, cada equação terá a variável no ponto e a variável nos seus quatro vizinhos, norte, sul, leste e oeste. Isso acarreta em uma matriz com cinco diagonais não nulas, impossibilitando a solução pelo método direto.

A fim de se eliminar duas diagonais da matriz dos coeficiente, usa-se o método de Gauss-Seidel em que os valores da variável nas linhas $i-1$ e $i+1$ são inseridos dentro das equações da linha i e incorporá-se esses termos nas constantes b_n . Os valores colhidos nas linhas vizinhas podem ser oriundos da interação anterior ou da corrente, caso já tenha sido calculado.

Agora com a matriz tridiagonal formada aplica-se o método TDMA para a solução na linha. Esses procedimentos são repetidos para todas as linhas e quantas vezes forem necessárias até a convergência da solução.

Como critérios de parada neste trabalho, foram adotados um número máximo de iterações e um erro máximo, sendo esses avaliados em cada ciclo para a temperatura.

4.6 – MALHA

É válido, neste ponto do trabalho, um curto comentário sobre a malha usada. A malha escolhida foi retangular adaptada.

Quanto mais pontos a malha possuir melhor será a aproximação numérica, contudo o esforço computacional cresce em proporções além da linear com o aumento destes pontos. Tal relação impulsiona o uso de malhas com refinamento não uniforme, onde seu

refinamento está em regiões com maiores gradientes das propriedades envolvidas.

Uma malha não refinada pode ser usada inicialmente para se observar de maneira grosseira o comportamento a ser estudado e assim refinar a malha só onde é necessário. Outra maneira de decidir o formato da malha é o conhecimento prévio de processos semelhantes e a dedução de possíveis resultados, que foi o caso desta dissertação.

5 – IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO

5.1 – IMPLEMENTAÇÃO

A implementação no presente trabalho inicia-se na construção da malha por um programa próprio nomeado malha.for, na leitura da mesma pelo pacote computacional principal e na definição de parâmetros a fim de adequar ao modelo teórico proposto.

A figura 5.1 representa a malha adotada. Optou-se por uma malha retangular, com 10.000 volumes, estruturada e não uniforme, com refinamento próximo às paredes verticais onde o gradiente de temperatura é mais acentuado.

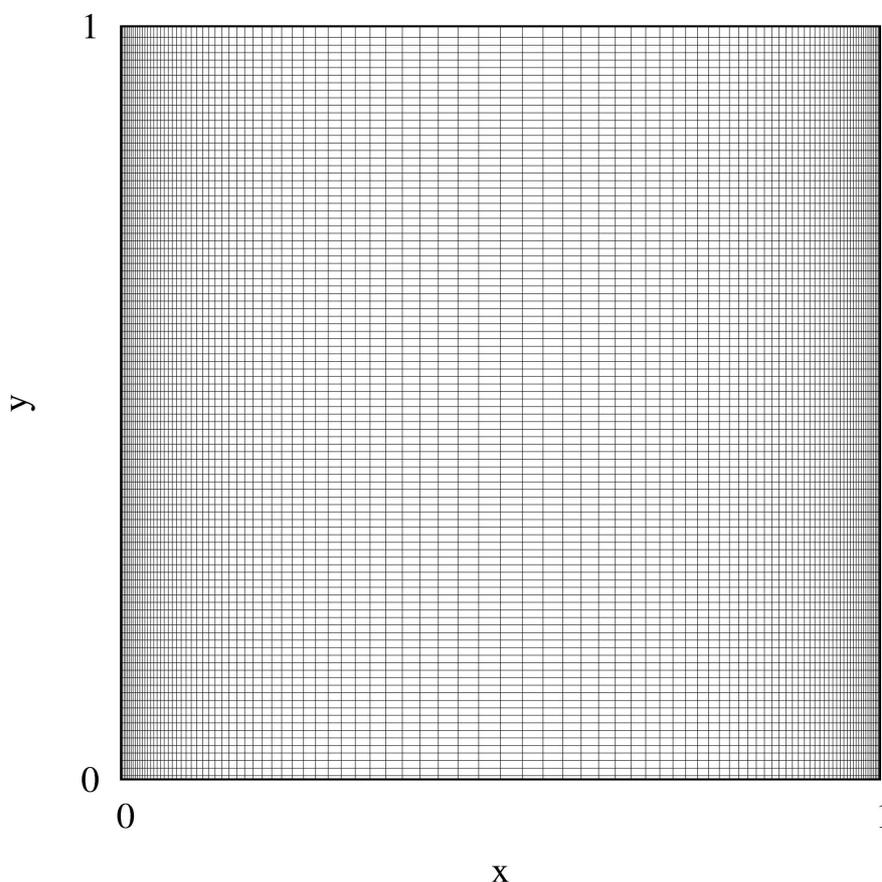


Figura 5.1 – Malha com 10.000 volumes, 100 x 100 utilizada no presente trabalho.

O pacote computacional principal resolve as equações governantes referentes ao problema em questão via equações algébrica geradas pelo método dos volumes finitos. Durante o processo de transformação das equações diferenciais em algébricas, a função de interpolação Power-Law foi usada na aproximação de algumas derivadas para equações

algébricas. No tratamento do acoplamento pressão-velocidade optou-se pelo método SIMPLE dada a hipótese previamente estabelecida de escoamento incompressível. A solução do sistema algébrico de equações lineares foi feita pelo método de Gauss-Seidel em associação com o método TDMA.

As simulações do presente trabalho resultam de um código fonte onde tanto as equações quanto os parâmetros de entrada já estão adimensionalizados não requisitando quaisquer manipulações de dados posterior às simulações.

5.1 – VALIDAÇÃO

Tendo em vista que todos os métodos aqui escolhidos e implementados já são de uso frequente na literatura e de funcionalidade largamente verificada, apenas dois casos foram escolhidos para a validação do pacote computacional.

Consideramos uma cavidade quadrada, preenchida por ar, com paredes horizontais adiabáticas e verticais submetidas a temperaturas diferentes. Em grandezas adimensionais temos uma parede com temperatura unitária e outra parede com temperatura nula. O escoamento foi considerado laminar, incompressível e com todas as propriedades constantes com a temperatura exceto a densidade no termo de empuxo, onde é considerada a aproximação de Boussinesq.

Foram escolhidos dois valores distintos para o número de Rayleigh. Os dois casos foram comparados com as soluções numéricas do *benchmark* proposto por Davis (1983).

A tabela 5.1 relaciona os valores encontrados em simulações obtidas neste trabalho utilizando-se a malha mostrada na seção 5.1 e os valores apresentados na literatura (Davis, 1983).

Tabela 5.1 – Comparação dos resultados obtidos com a literatura (Davis, 1983)

	$Ra = 10^3$			$Ra = 10^4$		
	Presente Trabalho	Davis (1983)	Desvio (%)	Presente Trabalho	Davis (1983)	Desvio (%)
Nu_{med}	1.118	1.122	0.360	2.240	2.244	0.223
Nu_{max}	1.465	1.505	2.657	3.466	3.532	1.869
Nu_{min}	0.707	0.692	2.167	0.584	0.586	0.341

A concordância entre a solução trazida da literatura e a encontrada neste trabalho é muito boa. Os desvios percentuais apresentados pela soluções do presente trabalho estão abaixo de 3%.

Esse desvio pode ser decorrente da diferença de refinamento na malha, do erro associado às aproximações algébricas das equações governantes ou ainda do erro inerente aos critérios de convergência adotados.

Os fatores acima citados, exceto o erro inerente à escolha do método dos volumes finitos, poderiam ser melhorados para que a solução se tornasse mais acurada. Uma vez que o presente estudo prevê uma varredura exaustiva para todas as posições possíveis de uma, três e cinco fontes, o aumento do custo computacional decorrente de tais mudanças não compensaria a redução no desvio percentual.

6 – RESULTADOS E ANÁLISE

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos por solução numérica das equações governantes para o escoamento em uma cavidade quadrada com uma, três e cinco fontes. Em cada caso foi feita uma varredura exaustiva de todas as combinações possíveis para a disposição das fontes em uma das paredes verticais da cavidade. Para todos os casos simulados as condições de contorno foram:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{para } 0 \leq \tilde{x}, \tilde{y} \leq 1 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -1 \quad \text{sob as fontes} \quad (6.2)$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{em todas as paredes} \quad (6.3)$$

Sob o critério da mínima dissipação de entrância, foram identificadas as configurações ótimas e interpretadas. Em seguida, pela maximização da condutância global mínima, são selecionados os casos ótimos de acordo com a teoria construtal e analisados.

6.1 – CAVIDADE QUADRADA COM UMA FONTE DE CALOR

No estudo com uma fonte, os valores do número de Rayleigh escolhida foi $Ra = 5 \cdot 10^1, 10^2, 5 \cdot 10^2, 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6, 5 \cdot 10^6, 10^7, 5 \cdot 10^7, 10^8, 5 \cdot 10^8$. Para cada número de Rayleigh adotado foram resolvidos 91 casos, em que cada caso representa uma nova posição da fonte. Para os dados analisados nesta seção foram processados 1365 casos.

A larga faixa do número de Rayleigh foi adotada no intuito de visualizar o comportamento dos critérios de otimização próximos às regiões de transição do escoamento laminar. É importante ressaltar que o pacote computacional usado no presente trabalho não utiliza modelo de turbulência e portanto não há uma boa aproximação para os casos em altos números de Rayleigh. O objetivo em explorar tais números de Rayleigh está em avaliar a sensibilidade dos critérios de otimização quanto à proximidade da região de transição do regime de escoamento.

O efeito da variação do número de Rayleigh para o escoamento pode ser visualizado na figura 6.1. Com um número de Rayleigh baixo, a parte da equação da

energia que corresponde ao transporte de calor por convecção, equação 3.1.27 tende a zero fazendo que a solução para a condução de calor seja a do laplaciano.

A condução se dá pela transferência de energia via colisão entre as moléculas do fluido. Por ser um fenômeno na escala molecular fortemente relacionado com o movimento Browniano, a condução não adota uma direção inicial preferencial e o calor flui com simetria radial a partir da fonte.

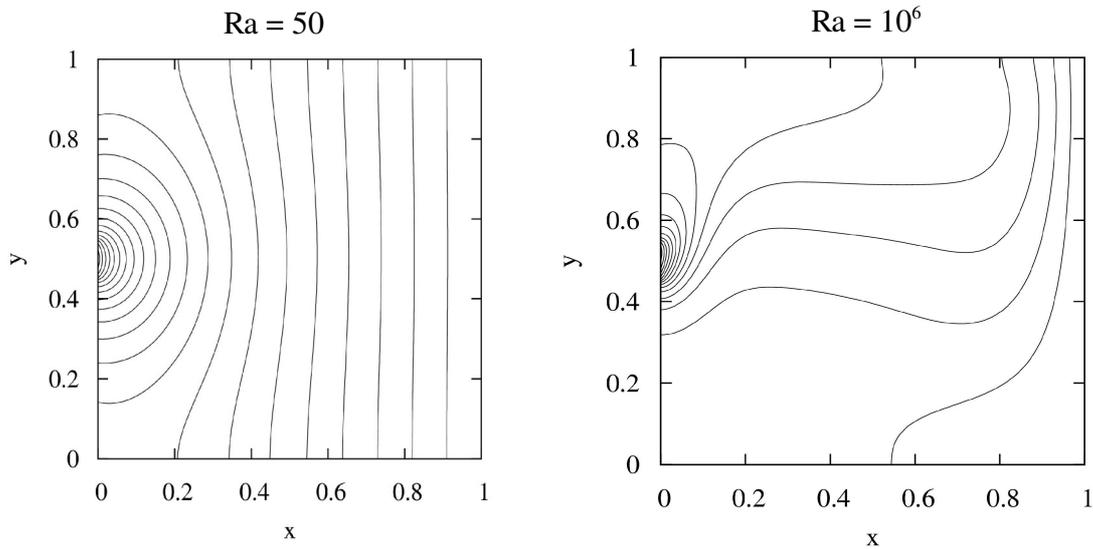


Figura 6.1 – Linhas isotérmicas para $Ra = 50$ e $Ra = 10^6$ com $s = 0.5$.

Com o aumento do número de Rayleigh o processo convectivo torna-se mais intenso no interior da cavidade. A força motora da convecção natural é resultante do equilíbrio entre o peso das partículas fluidas e o empuxo gerado pelo gradiente de temperatura. Dessa forma, há uma orientação preferencial para as porções quentes e frias do fluido e portanto há perda de simetria, tal como se pode observar na figura 6.1.

Outro parâmetro adimensional útil na compreensão de escoamentos com transporte de calor é o número de Nusselt. O número de Nusselt é uma relação entre o gradiente de temperatura no fluido imediatamente em contato com a superfície e a variação entre a temperatura no ponto estudado e a temperatura de referência.

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial n} \frac{H}{(T_s - T_\infty)} \quad (6.1.1)$$

em que H é a medida característica na direção n , T_s é a temperatura no ponto avaliado e T_∞ é a temperatura de referência.

A equação (6.1.1) fornece o número de Nusselt local. O Nusselt médio avalia a mesma relação, porém para uma superfície. Estes parâmetros adimensionais proporcionam uma medida da transferência convectiva de calor no ponto ou na superfície. Uma vez que as paredes onde se localizam as fontes são isoladas, o número de Nusselt médio é calculado somente sobre as fontes de calor.

A figura 6.2 traz a relação entre o Número de Nusselt médio e a posição da fonte para diferentes números de Rayleigh

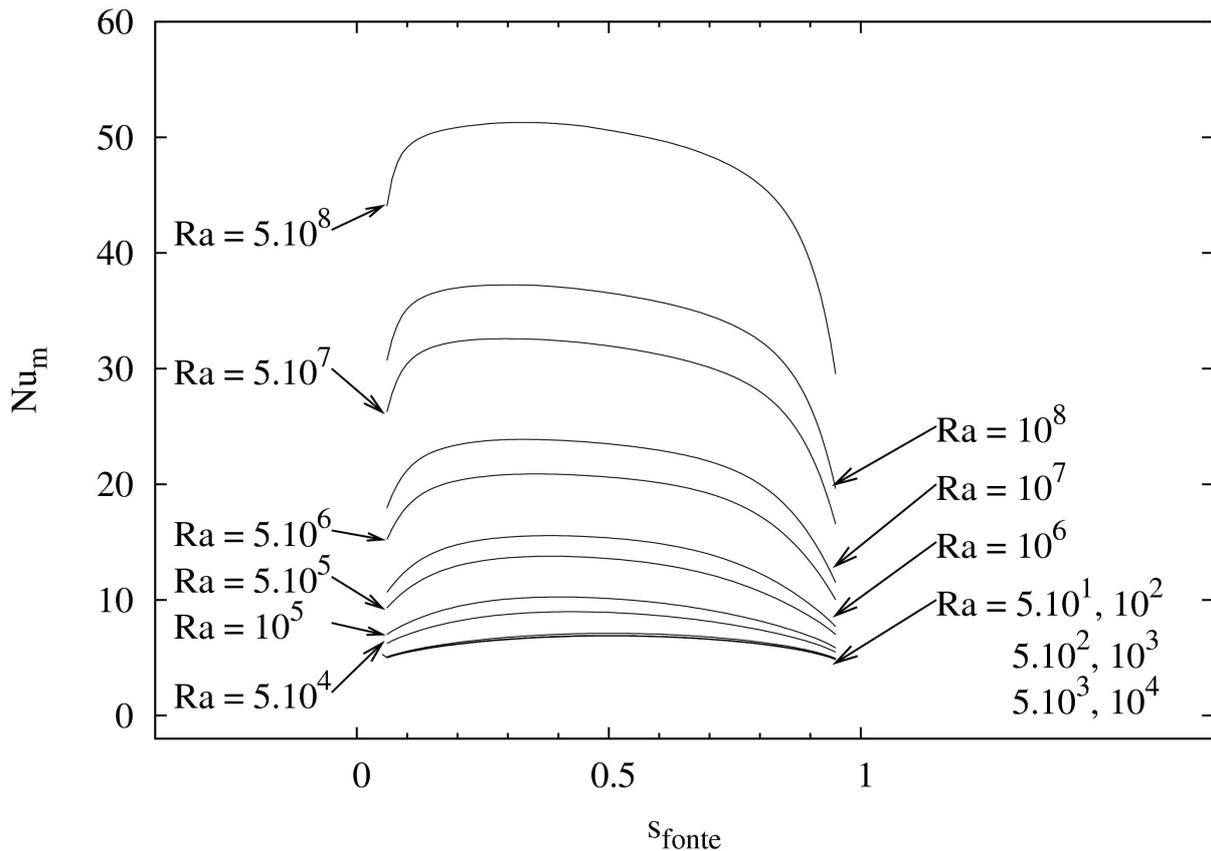


Figura 6.2 – Número de Nusselt médio em função da localização da fonte.

Com o aumento do número de Rayleigh, podemos observar, pela figura 6.2, um aumento no número de Nusselt que representa o crescimento da convecção como mecanismo de troca de calor. Essa relação é representada na figura 6.3.

Ao observarmos uma fonte em particular e representar graficamente o número de Nusselt local de cada ponto da fonte, obteremos o que vamos chamar de perfil de Nusselt. Os perfis de Nusselt local para fontes localizadas em $s = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35,$

$0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95$ com $Ra = 10^4$ e 10^6 são representados no mesmo sistema de coordenadas na figura 6.4

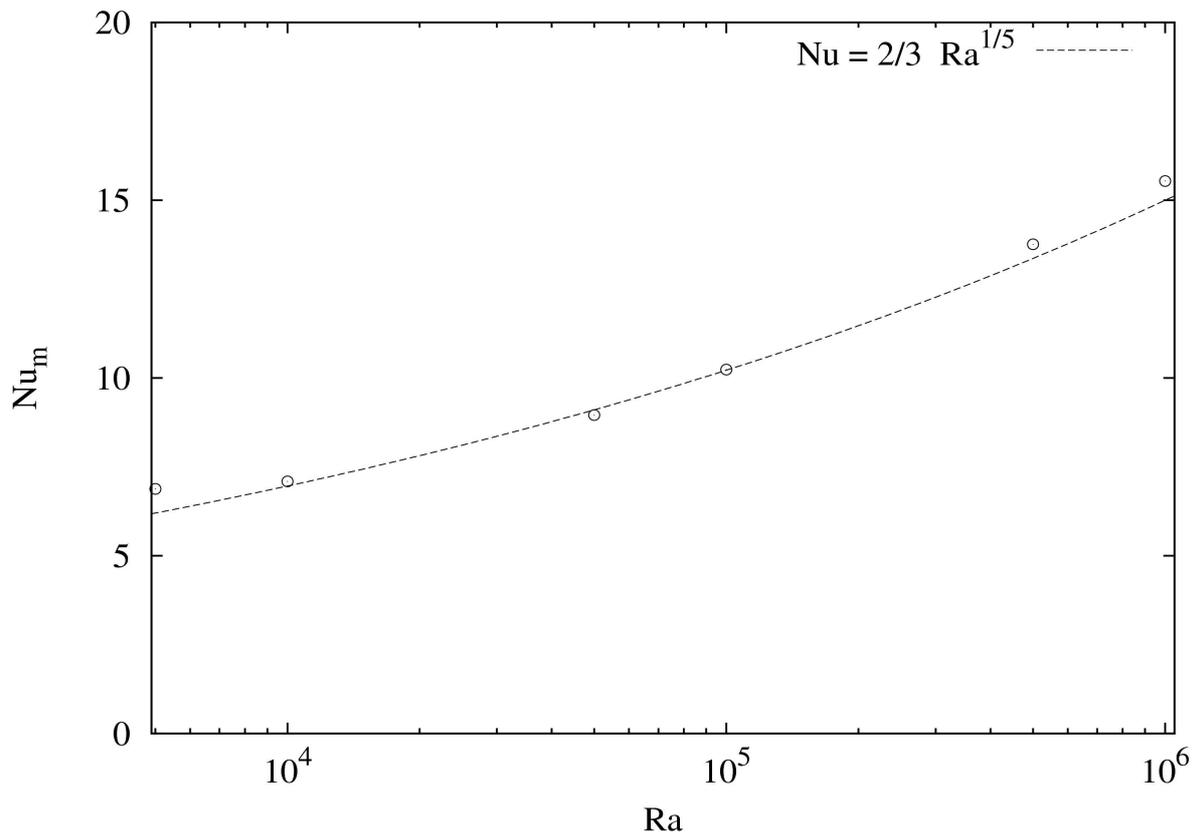


Figura 6.3 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh para uma fonte.

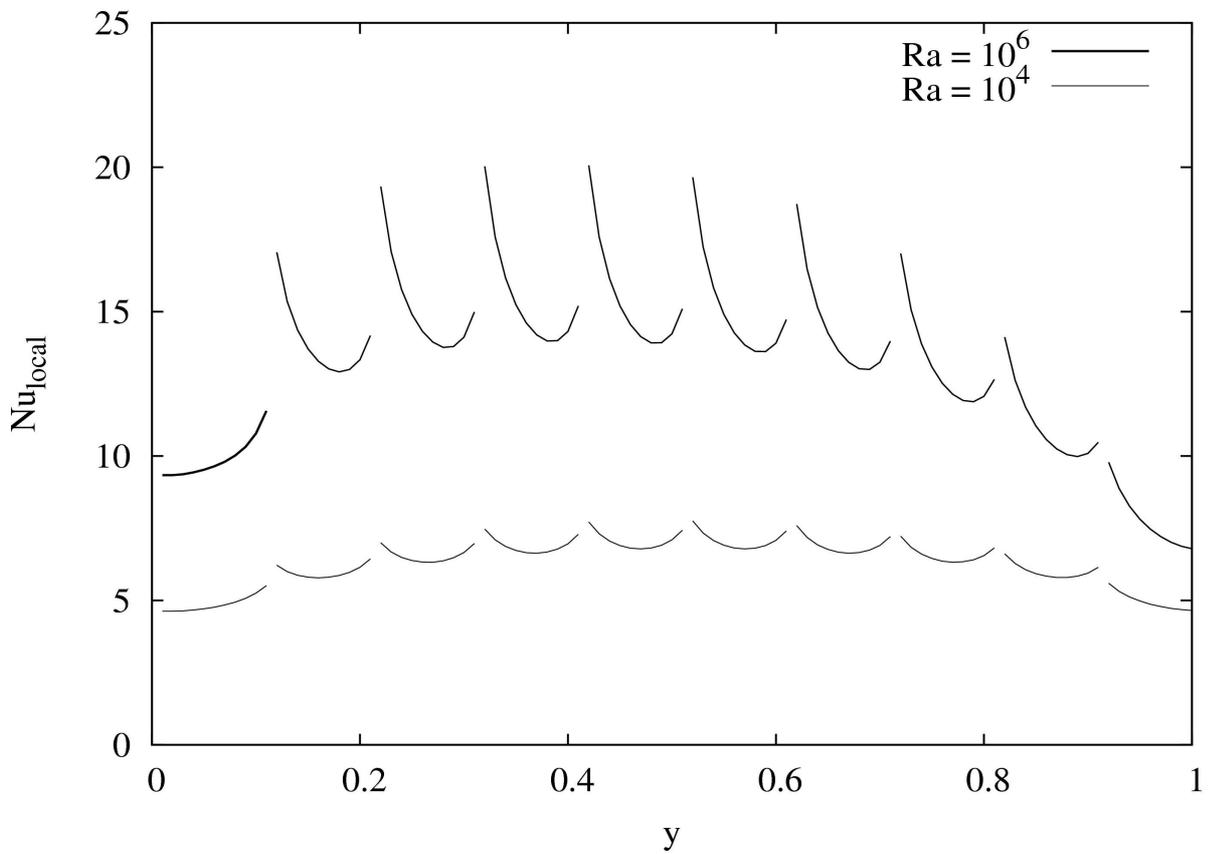


Figura 6.4 – Número de Nusselt local em função da coordenada da parede vertical em vinte casos distintos.

Cada curva na figura 6.4 representa os valores dos números de Nusselt locais encontrados após o escoamento ter atingido o regime estacionário com apenas uma fonte de calor na parede. As coordenadas indicam a região ocupada pela fonte em cada caso e a abscissa traz os valores do número de Nusselt local sobre a fonte.

É notório que, em uma convecção natural no interior de uma cavidade, o número de Nusselt depende da velocidade com que o fluido escoia próximo a superfície. As regiões da parede vertical próximas as paredes horizontais superior e inferior constituem áreas onde a velocidade do fluido é pequena, mesmo para altos números de Rayleigh.

Isso se reflete tanto no decaimento do número de Nusselt para essas regiões, mostrado na figura 6.2, quanto nos perfis das fontes localizadas no começo e no fim da parede vertical na figura 6.4. Observando tais perfis, vemos que não apenas o valor do número de Nusselt é menor quando comparado com as demais posições como também seu valor varia pouco ao longo da fonte.

No caso em que o número de Rayleigh é pequeno, $Ra = 10^4$, o perfil de Nusselt mostra uma simetria. Visto que as extremidades da fonte possuem um espaço angular mais amplo para dissipar o calor, as mesmas atingem temperaturas inferiores e assim possuem o número de Nusselt local superior quando comparadas com a região central.

Com o aumento do número de Rayleigh, $Ra = 10^6$, a convecção intensifica-se. A região inicial da fonte entra em contato com porções do fluido proveniente da parede fria. Em seu movimento ascendente, o fluido retira calor da fonte conforme passa por esta.

Durante esse processo, a diferença de temperatura entre o fluido e a fonte decai e conseqüentemente a eficiência da retirada de calor pela convecção também. Como resultado, a temperatura da fonte em seus pontos iniciais são menores quando comparadas aos pontos finais.

Se só o processo convectivo agisse na fonte, o perfil de Nusselt seria estritamente decrescente, mas como o processo de condução é presente, pontos na região final da fonte possuem mais facilidade em eliminar calor por condução comparado com os centrais gerando um pequeno crescimento no número de Nusselt nas porções finais.

6.1.1 – Caso ótimo pela Teoria Construtal

Quando todos os pontos do domínio estiverem contribuindo de forma mais equivalente possível, obtém-se a melhor configuração conforme a teoria construtal. Até

$Ra = 10^4$ a posição ótima para a fonte é $S_{opt} = 0.5$. Conforme a fonte se afasta da posição central, regiões do domínio passam a ser menos utilizadas no processo de transferência de calor enquanto outras são sobrecarregadas. Essa heterogeneidade diminui a condutância global no domínio. Na figura 6.5 é possível observar esse comportamento.

A partir de $Ra = 5 \cdot 10^4$ a convecção aumenta gradativamente modificando a solução do laplaciano da temperatura. Ao ser aquecido pela fonte, o fluido acelera tornando-se mais rápido na parte superior a fonte. A figura 6.6 mostra que, na busca pela igualdade de contribuição dos pontos do domínio para o transporte de calor, a condutância global passa a ser maior quando a fonte encontra-se abaixo da posição central, porém não muito próxima à parede horizontal inferior.

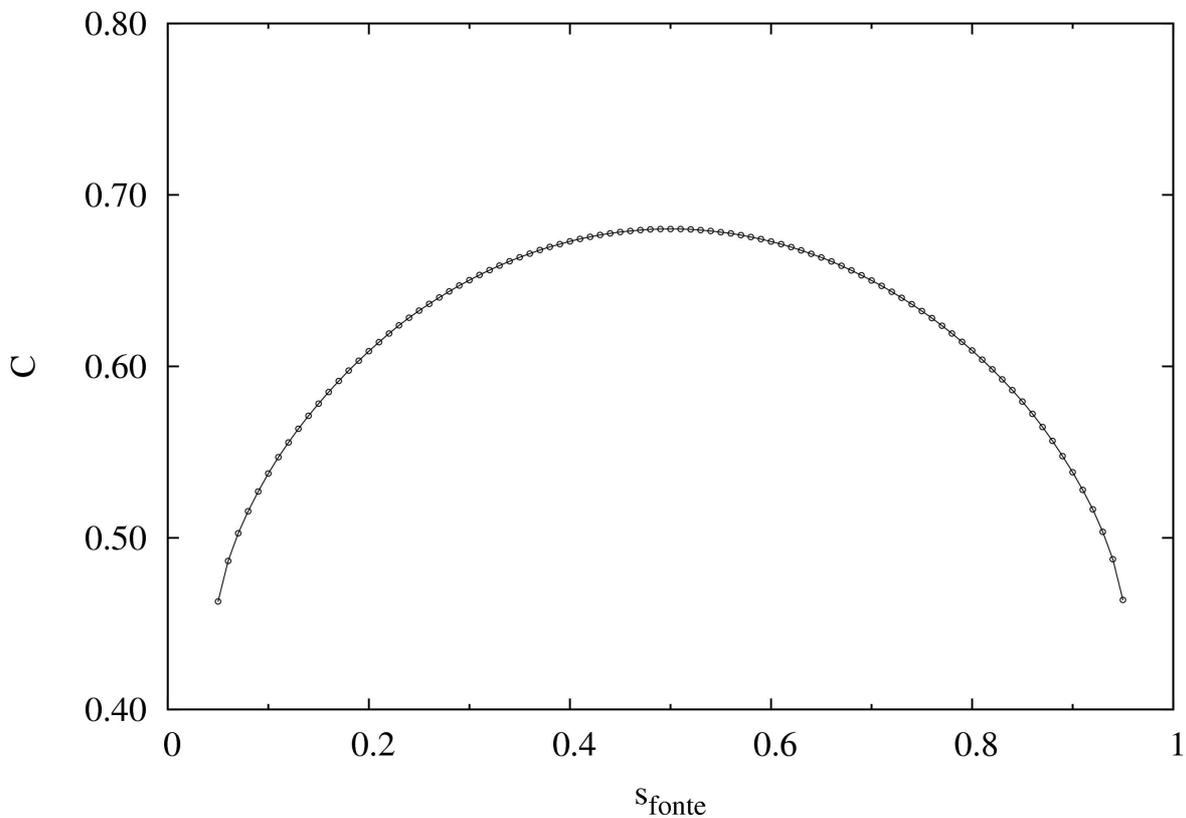


Figura 6.5 – Condutância Global em função da posição da fonte para $Ra = 10^4$

A descida da fonte proporciona maior espaço para que o fluido acelerado escoe e ganhe velocidade antes de ser redirecionado pela parede superior e em seguida resfriado pela parede oposta a fonte. Como o escoamento nas proximidades do canto inferior é lento, a condutância global decai na região inicial da parede.

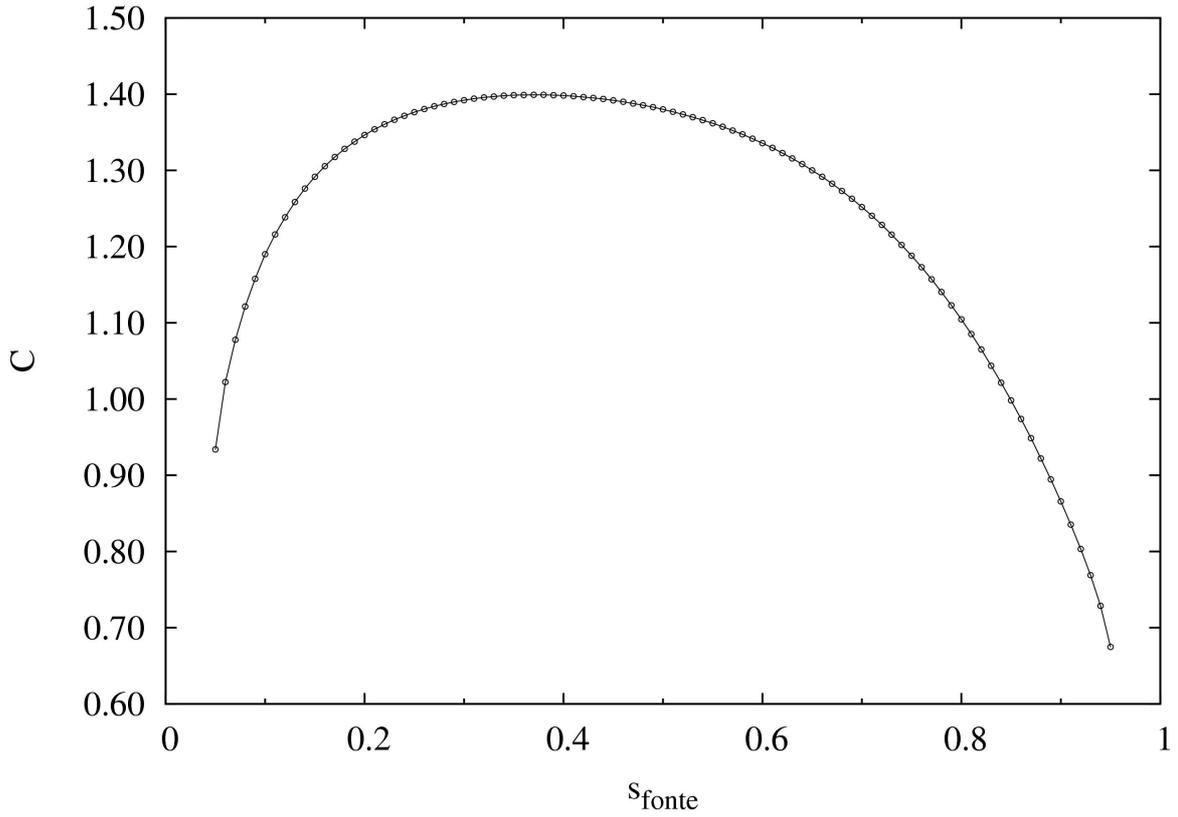


Figura 6.6 – Condutância Global em função da posição da fonte para $Ra = 10^6$

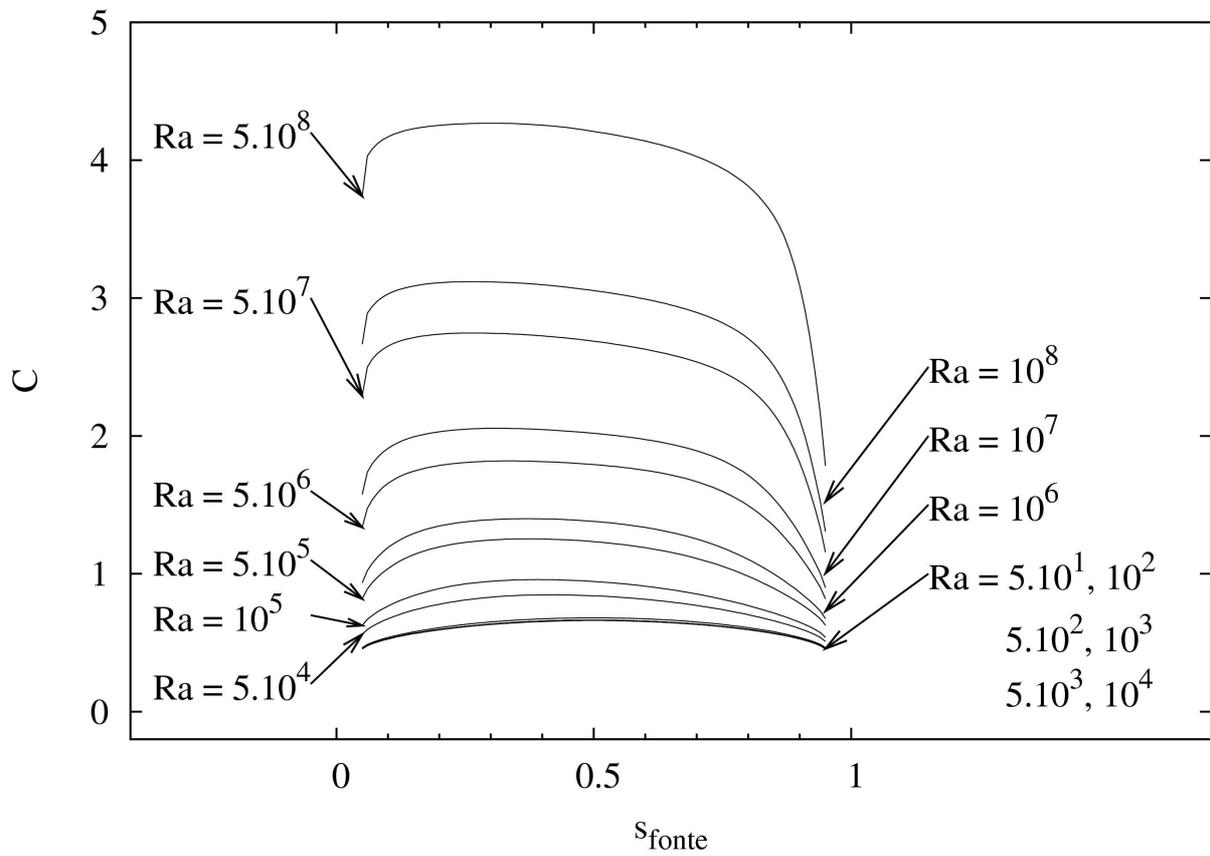


Figura 6.7 – Condutância Global em função da localização da fonte.

De forma comparativa, a figura 6.7 traz o comportamento da condutância global em função da localização da fonte em diferentes números de Rayleigh. Na faixa que se estende de $Ra = 5 \cdot 10^1$ até 10^4 não há diferença significativa entre os casos. A condutância global nessa região com baixo poder convectivo comporta-se sem variações qualitativas ou quantitativas significantes.

Devido ao aumento da condutância global decorrente do crescimento da convecção, podemos prever, qualitativamente, que na faixa acima de $Ra = 5 \cdot 10^6$, os pontos do domínio passam a contribuir de forma mais homogênea e eficiente no transporte de calor.

Mesmo trazendo significados físicos diferentes, a semelhança entre a figura 6.7 e a figura 6.2 merece ser analisada. Tanto o número de Nusselt quanto a condutância global são inversamente proporcionais à temperatura da fonte, o que explica a semelhança no comportamento. Podemos concluir que, como o número de Nusselt e a Condutância são proporcionais, então quanto mais forte for a convecção em função da posição da fonte de calor, melhor requisitado será o domínio.

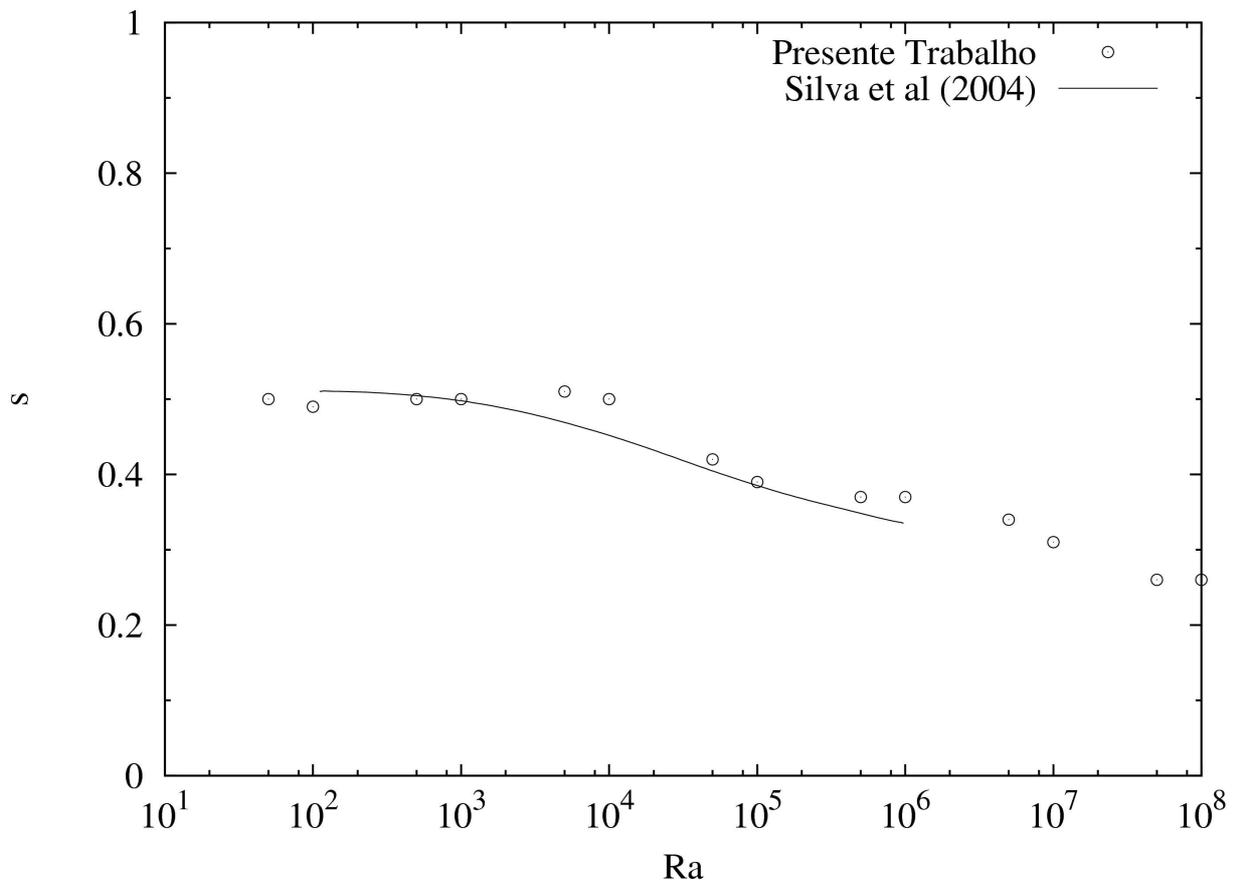


Figura 6.8 – Localização da fonte em função do Número de Rayleigh para os casos ótimos obtidos pela maximização da condutância global.

A figura 6.8 mostra o decaimento da posição ótima da fonte com o aumento do número de Rayleigh. É possível notar uma boa concordância com a função prevista por Silva *et al* (2004).

Adotando um desvio de 0.5% nos valores máximos da condutância global, obtemos uma região para o melhor posicionamento da fonte. A figura 6.9 traz os mesmos dados da figura 6.8 com curvas limitando a região ótima para o posicionamento da fonte. A linha tracejada determina o limite superior e a linha contínua, o limite inferior.

Com o aumento do número de Rayleigh a região onde a fonte pode ser colocada sem ultrapassar o desvio estipulado na condutância global cresce. Para os menores números de Rayleigh, essa região equivale a 13% do comprimento total da parede vertical. Já para os valores finais, a região chega a compreender 20%.

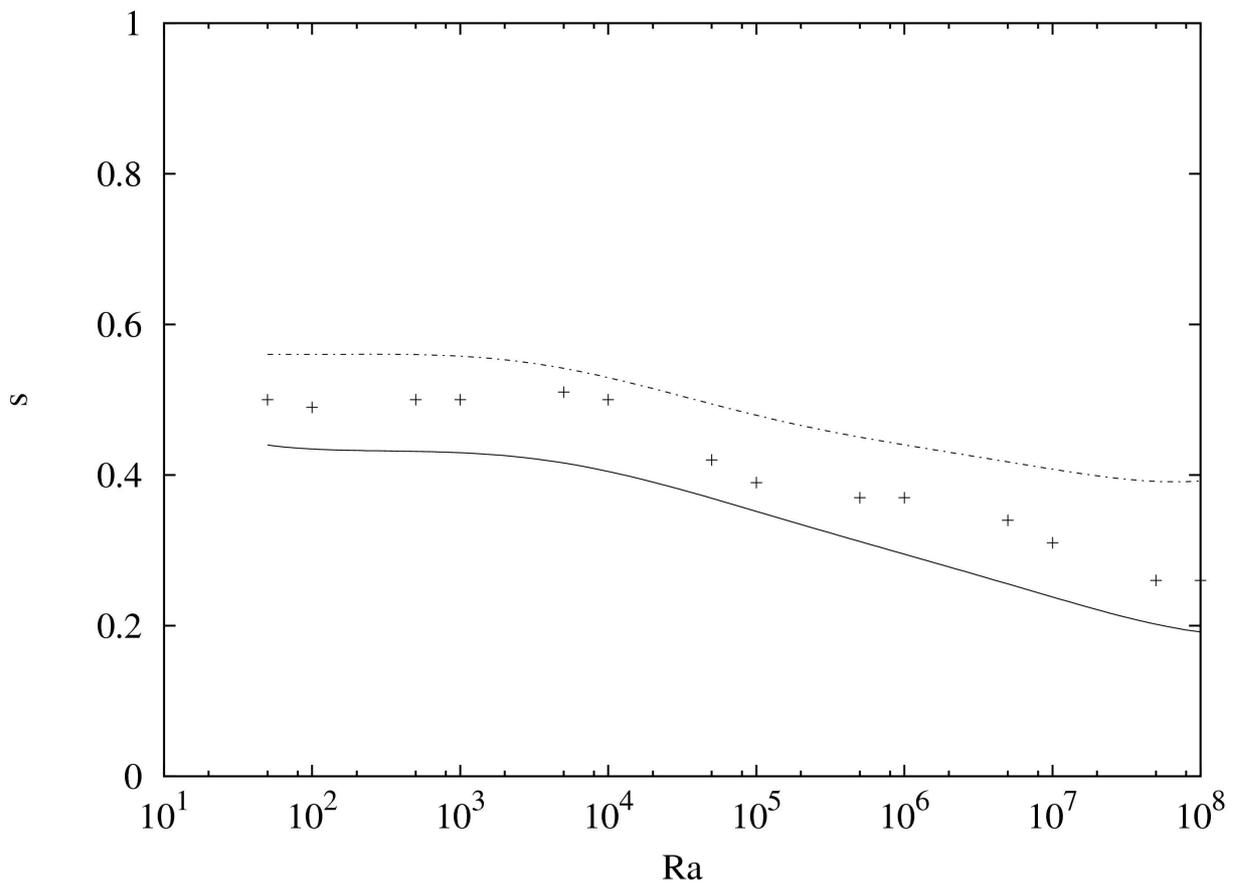


Figura 6.9 – Faixa de localização da fonte pelo critério da máxima condutância global, em função do Número de Rayleigh.

6.1.2 – Caso ótimo pelo Princípio da Mínima Dissipação de Entrância

No presente trabalho, o fluxo de calor é constante e o objetivo é transportar o calor fornecido pela fonte de forma mais eficiente possível. Pelo princípio da mínima dissipação de entrância a melhor configuração será aquela que provoque a menor dissipação de entrância no domínio.

Para todos os valores do número de Rayleigh adotado foi calculado o número de Nusselt médio nos casos em que o princípio da mínima dissipação de entrância foi satisfeito. A figura 6.10 ilustra a relação entres esses parâmetros adimensionais.

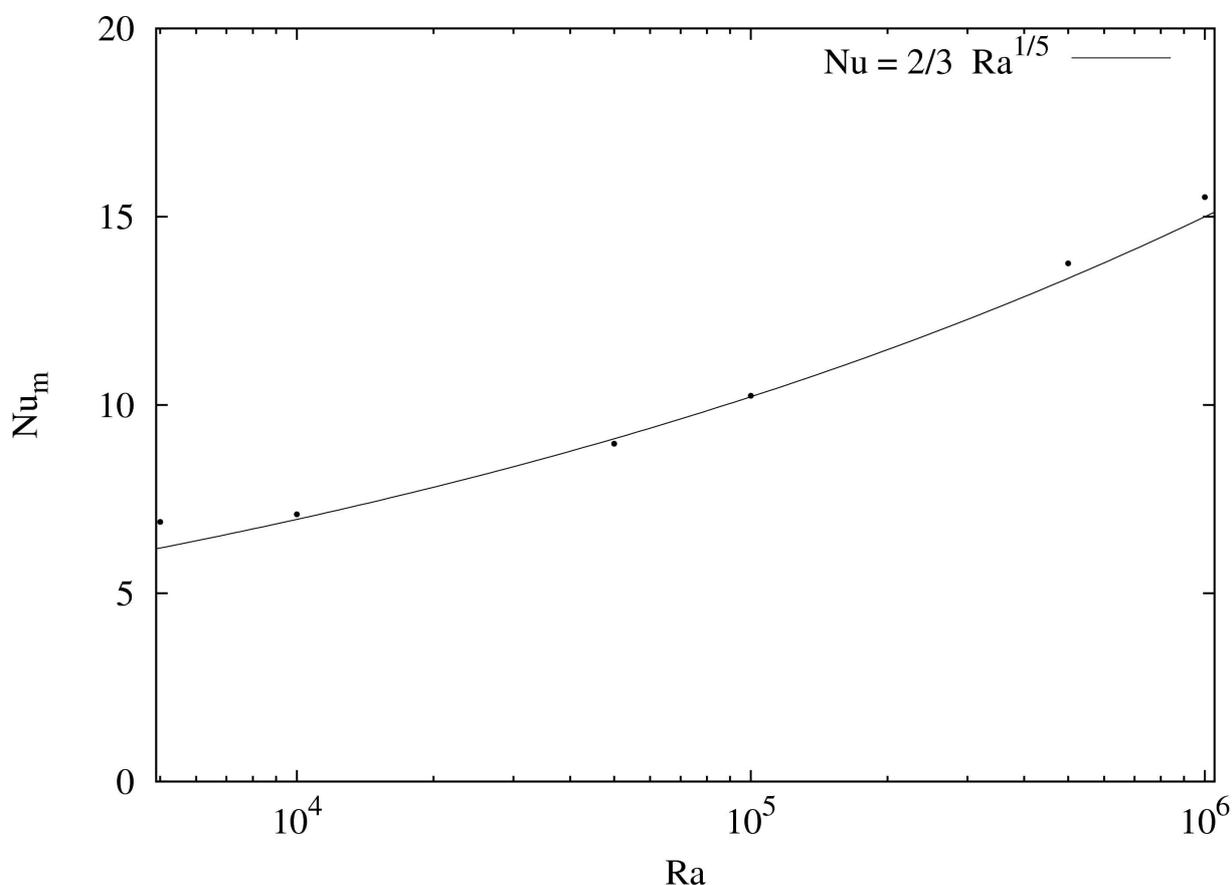


Figura 6.10 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh para uma fonte.

A relação entre a entrância e a posição da fonte para números de Rayleigh até $Ra = 10^3$ mostra que a posição ótima é no centro da parede vertical. Na figura 6.11 vemos que para essa faixa inicial de número de Rayleigh, a dissipação de entrância apresenta o mesmo comportamento qualitativo e quantitativo. Entre $Ra = 5 \cdot 10^1$ e $Ra = 10^3$, com $s = 0.5$, a entrância dissipada varia menos de 0.8%.

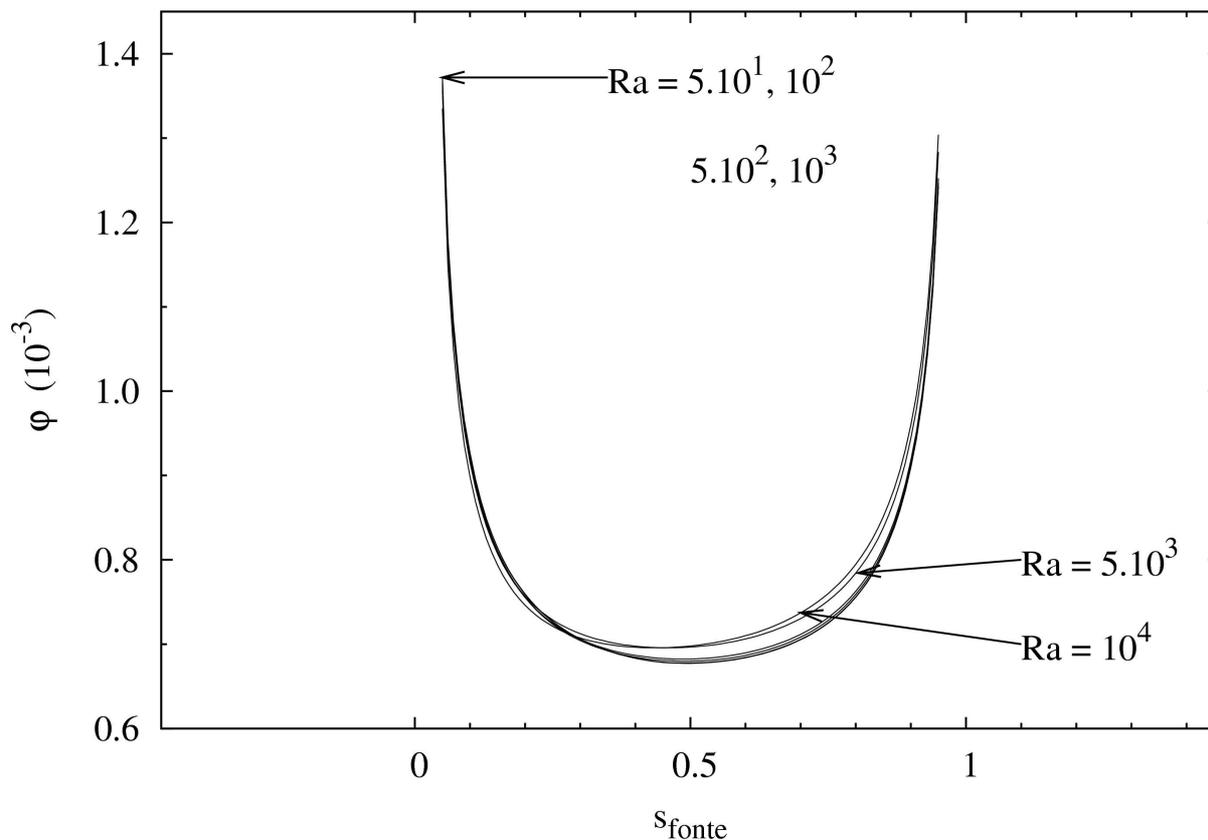


Figura 6.11 – Dissipação de entrância em função da posição da fonte para valores pequenos do número de Rayleigh.

O deslocamento da posição ótima para regiões inferiores à localização central inicia-se discretamente com $Ra = 5 \cdot 10^3$ acentuando-se apenas em $Ra = 5 \cdot 10^4$. Observa-se, na figura 6.11 a perda da simetria dos gráfico para esses números de Rayleigh bem como o aumento no valor entrância dissipada, resultado do crescimento da convecção no processo de transferência de calor.

A preferência por regiões abaixo da posição central mantêm-se por toda a faixa de número de Rayleigh porém torna-se mais sutil após $Ra = 5 \cdot 10^5$. A figura 6.12 retrata essa evolução.

A dissipação de entrância é uma grandeza escalar média que traduz a resistência do meio à transferência de calor. Mesmo não tendo uma relação direta com a intensidade da convecção no domínio, é notório que a dissipação de entrância é influenciada pela convecção. Quanto maior a convecção no meio, menor será a dissipação de entrância, dado que a convecção facilita o transporte de calor.

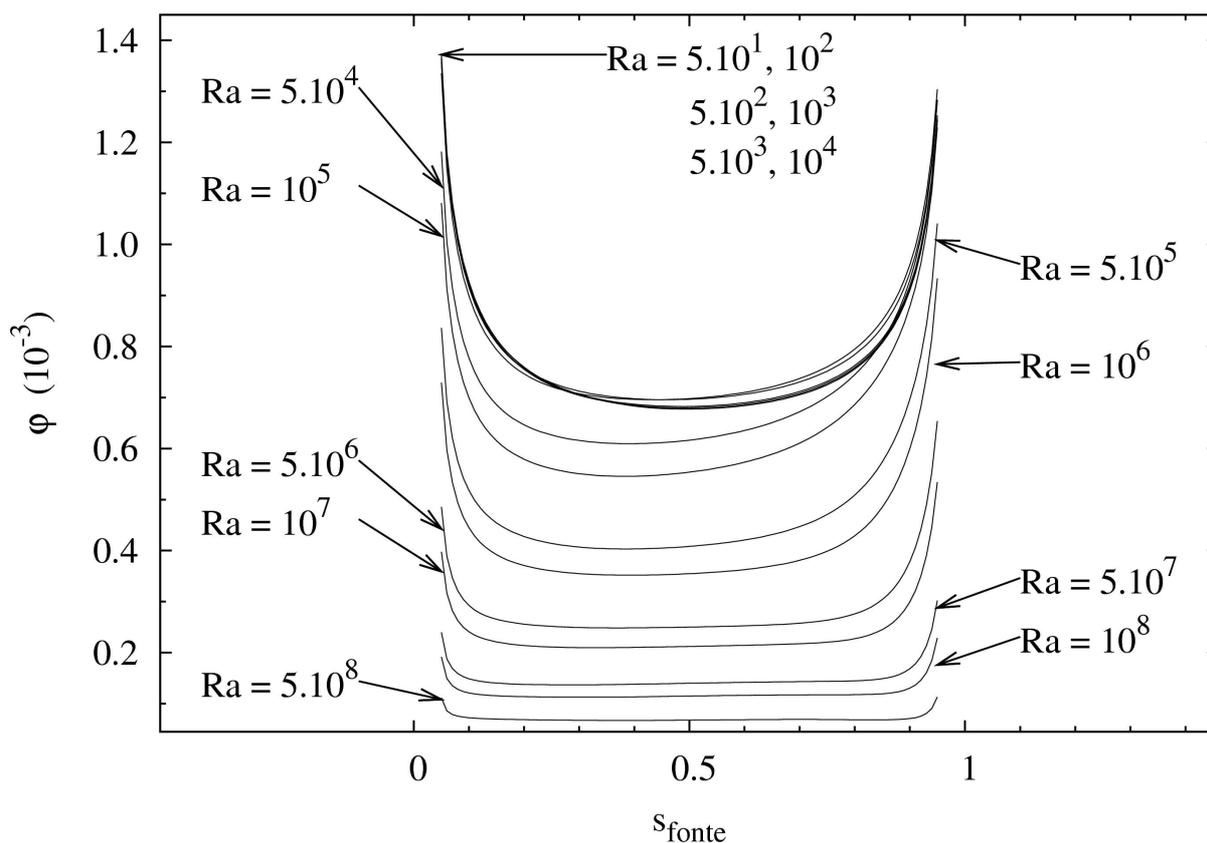


Figura 6.12 – Dissipação de entrância em função da localização da fonte.

Pela figura 6.12 há a impressão de que para altos valores do número de Rayleigh a posição da fonte não influencia na dissipação de entrância. Ao analisarmos o desvio, em porcentagem, da dissipação de entrância em função da posição da fonte, iremos esclarecer este comportamento.

A mobilidade, dentro de uma margem de segurança, da posição da fonte com o número de Rayleigh pode ser observado na figura 6.13. A linha pontilhada determina a posição limite superior onde a fonte pode ser alocada sem que a dissipação de entrância atinja uma variação superior a 0.5 % e a linha contínua marca o limite inferior sob o mesmo critério.

Com o aumento do número de Rayleigh a região onde a fonte pode ser colocada cresce discretamente. Para os menores valores do número de Rayleigh, essa região equivale a 14% do comprimento total da parede vertical. Já para os valores finais, a região chega a compreender 17%

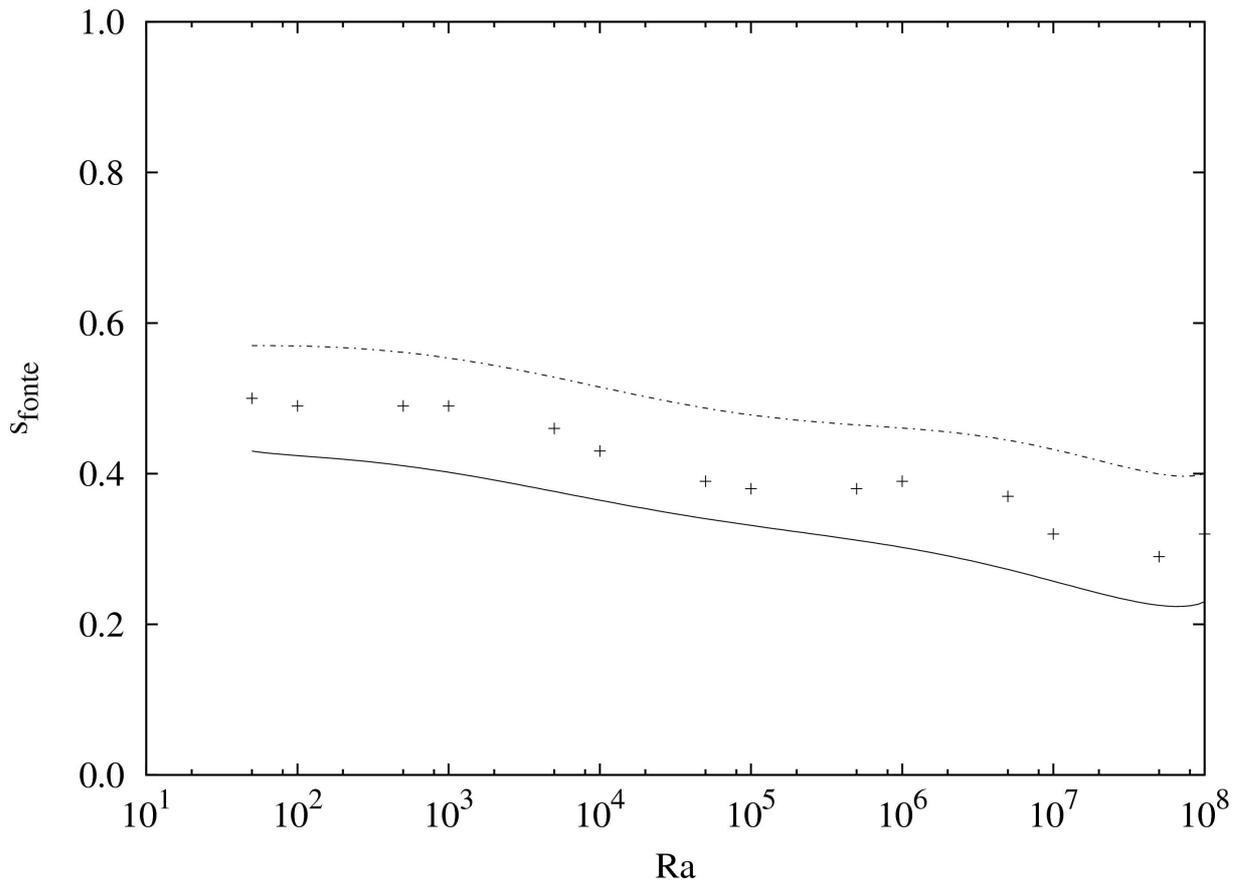


Figura 6.13 – Faixa de localização da fonte, pelo critério da mínima dissipação de entrância, em função do Número de Rayleigh.

6.1.3 – Comparação

A figura 6.14 compara as posições ótimas obtidas pelos pelos parâmetros escolhidos neste trabalho, bem como suas faixas de posição para fonte onde o erro não ultrapassa 0.5%. As linhas tracejadas representam os limites superiores e as contínuas, os inferiores. As linhas em negrito trazem os limites para os casos escolhidos pelo princípio da mínima dissipação de entrância enquanto as linhas mais finas delimitam as possibilidades nos casos avaliados pela teoria construtal.

Tanto pelo critério da condutância global mínima quanto para pelo princípio da mínima dissipação de entrância, a posição central para a fonte é escolhida como ótima para $Ra = 5 \cdot 10^1, 10^2, 5 \cdot 10^2, 10^3$. Nesse intervalo as duas teorias escolhem a mesma posição ótima.

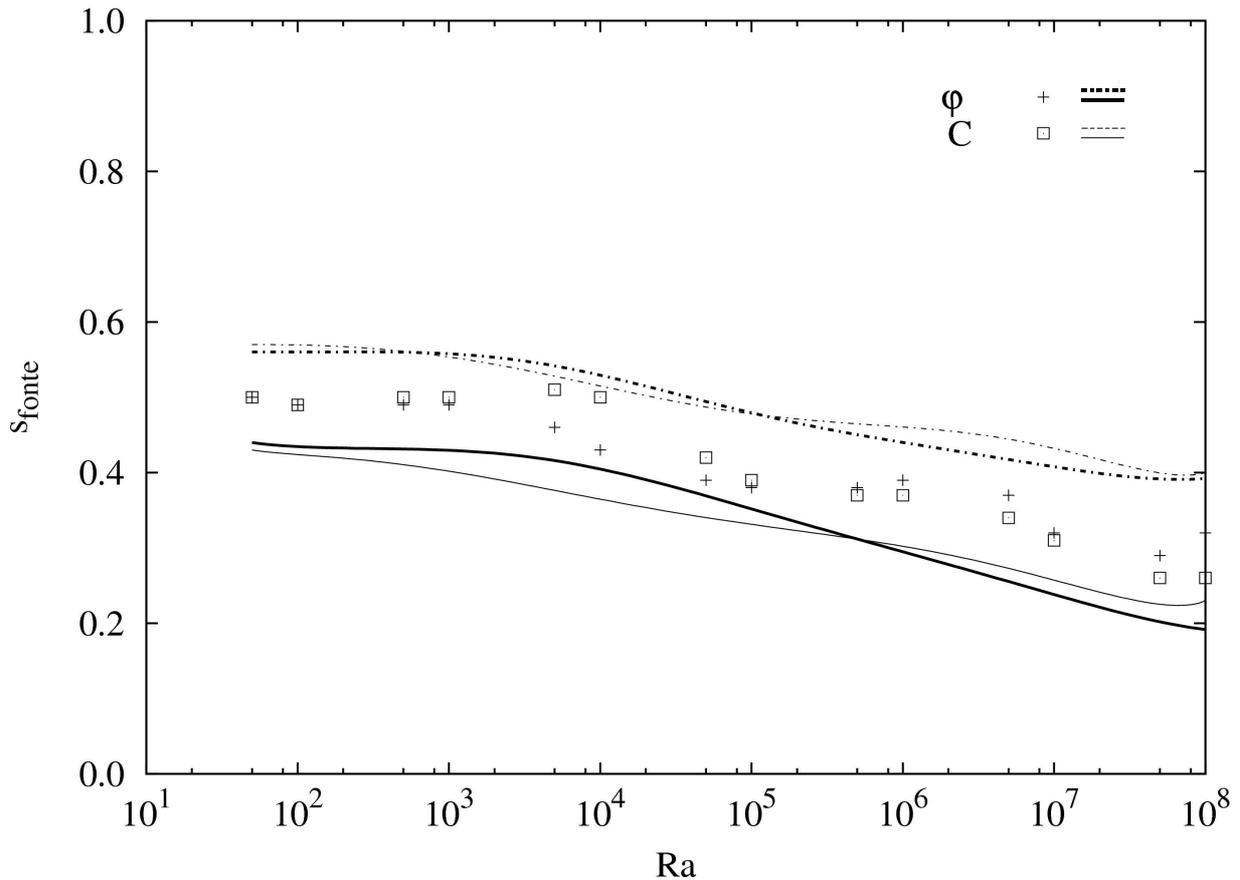


Figura 6.14 – Faixa de localização da fonte, pelo critério da dissipação de entrância e pelo critério da máxima condutância global mínima, em função do Número de Rayleigh.

Ao avaliarmos $Ra = 5 \cdot 10^3, 10^4$ a teoria construtal mantém a fonte na região central enquanto para obtermos a menor dissipação de entrância a fonte deve ser posicionada em $s_{opt} = 0.46$ e 0.43 respectivamente. É válido ressaltar que são esses pontos que divergem da curva proposta por Silva e apresentada na figura 6.7.

Vemos que as duas teorias abordadas neste trabalho resultam em posições bem semelhantes para uma fonte de calor na cavidade. O descolamento da posição ótima da fonte para valores abaixo do central pelo critério da dissipação de entrância mostra que esse parâmetro é um pouco mais refinado na percepção da participação da convecção no transporte de calor.

A semelhança entre os resultados obtidos pela maximização da condutância global e pelo princípio da mínima dissipação de entrância é mais evidente quando comparamos os números de Nusselt médio para os casos ótimos em função do número de Rayleigh.

A faixa de Rayleigh adotada nesse trabalho para avaliar a relação entre este e o número de Nusselt foi $Ra = 5 \cdot 10^3 \rightarrow 10^6$, que é a faixa onde se concentra grande parte dos resultados da literatura. Outra motivação para essa delimitação é que para menores valores de número de Rayleigh a convecção é fraca e portanto o número de Nusselt é praticamente constante. Para altos valores entramos em uma região de transição que não interessa ao presente estudo.

Todavia, na figura 6.15 todos os valores de número de Rayleigh foram utilizados no intuito de mostrar a concordância dos critérios de otimização em todo o âmbito estudado.

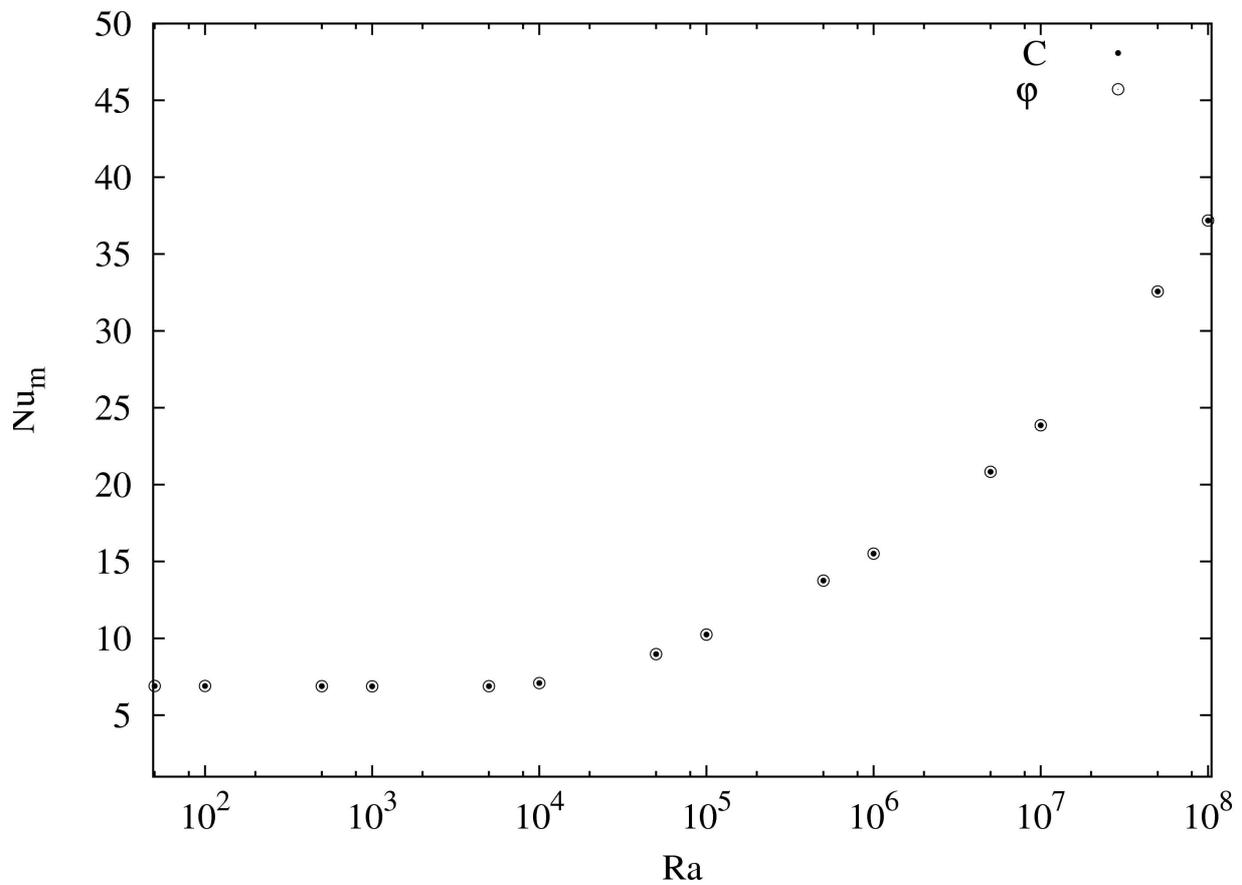


Figura 6.15 – Comparação entre os valores do número de Nusselt médio em função do número de Rayleigh para uma fonte

6.2 – CAVIDADE QUADRADA COM TRÊS FONTES DE CALOR

No trabalho com três fontes, a cavidade estudada e as referências de medidas estão representadas na figura 6.16. As fontes de calor não são protuberantes e as distâncias entre as fontes foram tomadas centro a centro. O eixo y tem a mesma direção da gravidade porém em sentido oposto.

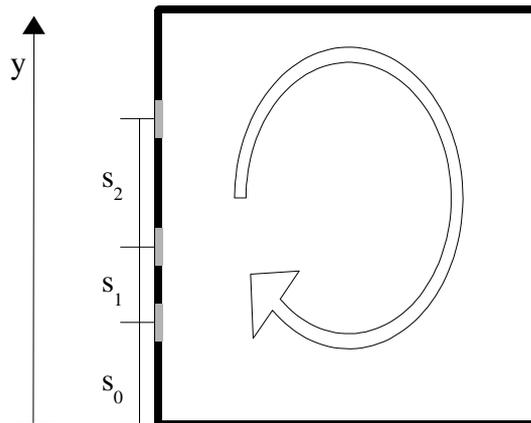


Figura 6.16 – Representação da cavidade estudada com três fontes.

Os valores escolhida para número de Rayleigh foi $Ra = 10^3, 5 \cdot 10^3, 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6$. Para cada número de Rayleigh adotado foram resolvidos 8.436 casos, em que cada caso representa uma nova configuração das fontes. Para os dados analisados nesta seção foram processados 59.052 casos.

6.2.1 – Caso ótimo pela Teoria Construtal

Em cada número de Rayleigh adotado, o número de Nusselt médio foi calculado para o caso onde a condutância global é máxima.

Compreende-se da figura 6.17 que com o aumento do número de Rayleigh aumenta-se o valor do número de Nusselt indicando que o transporte de calor e a convecção intensificaram-se.

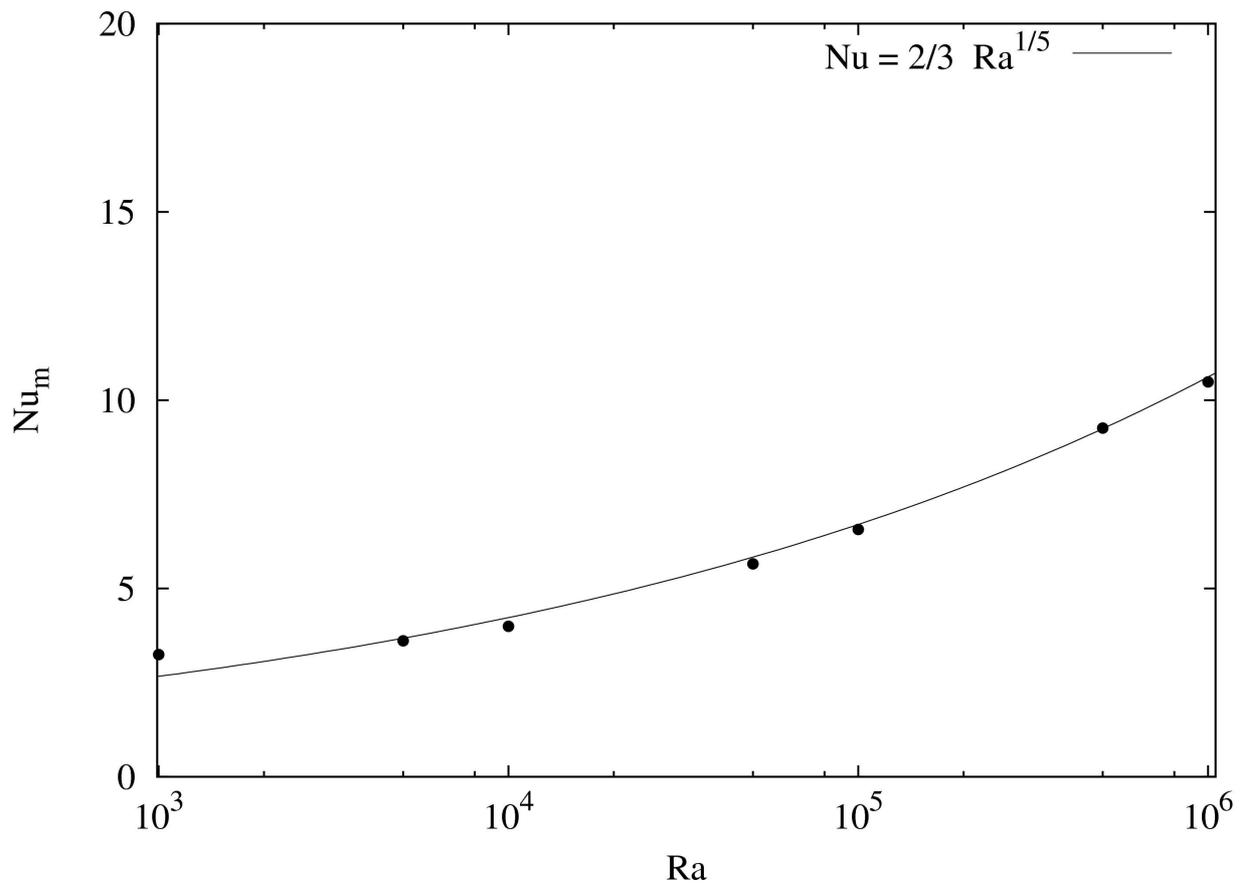


Figura 6.17 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh.

Para menores valores de número de Rayleigh a melhor configuração seria aquela em que as fontes encontram-se equidistantes entre si e afastadas das bordas afim de facilitar ao máximo a condução de calor. Com o aumento do número de Rayleigh a configuração ótima se modifica-se.

O fluido que atinge a segunda fonte já possui uma temperatura mais elevada do que quando passou pela primeira fonte, assim como ao passar pela terceira o fluido encontra-se mais aquecido do que quando passou pelas demais. Desta forma, a transferência de calor nas fontes mais elevadas será menor dado que a diferença de temperatura entre a fonte e o fluido torna-se menor.

Pelo critério da condutância global, a melhor configuração será aquela que contrabalanceará esse efeito e dará a todas as fontes a mesma eficiência na transferência de calor. Os casos ótimos estabelecidos pela teoria construtal são aqueles em que o domínio é requisitado da forma mais homogênea possível. Ao observarmos os perfis de temperatura para alguns casos ótimos, figura 6.18, torna-se notória esse comportamento.

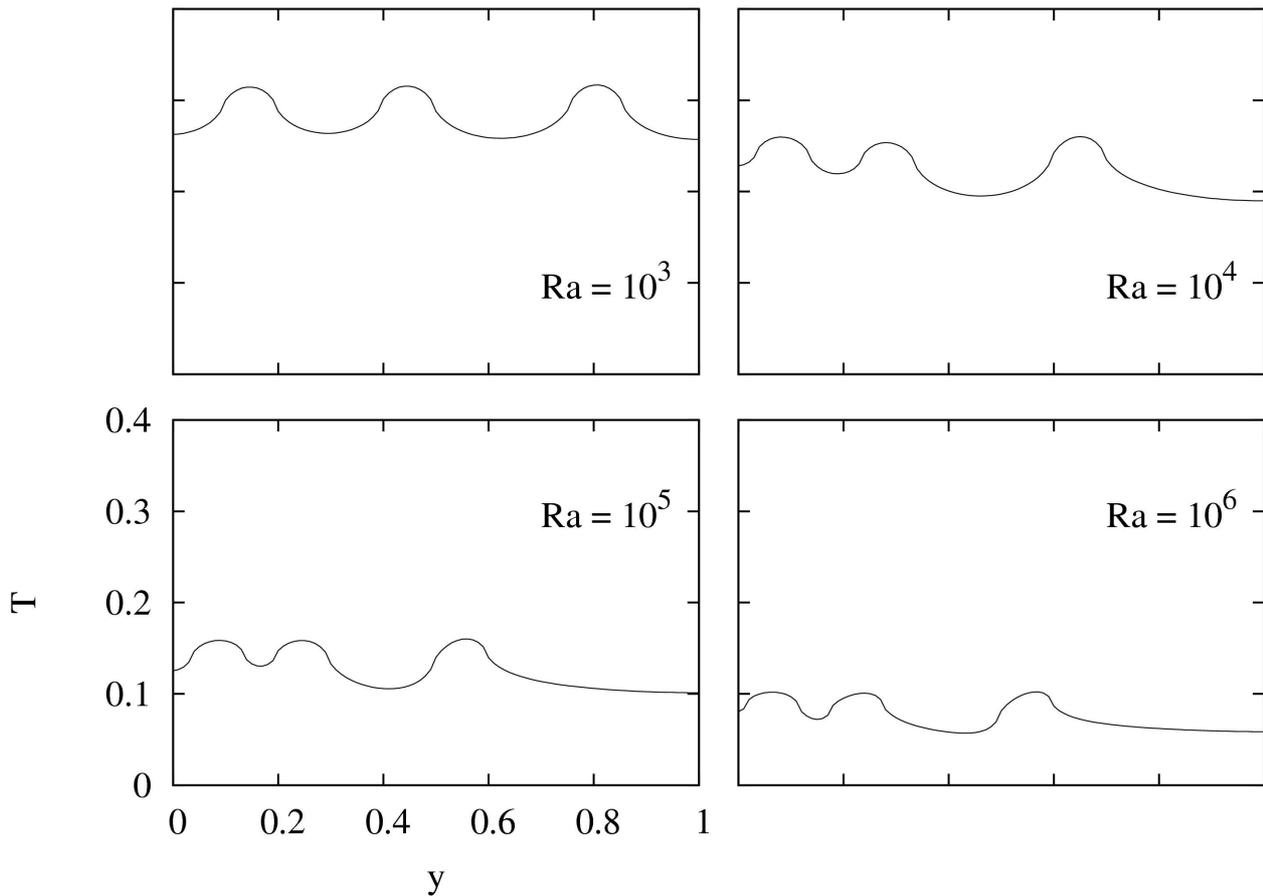


Figura 6.18 – Perfis de temperatura adimensional na parede que contém as fontes para alguns casos ótimos.

Com o aumento do número de Rayleigh, a fonte central se aproxima rapidamente da primeira fonte até o limite $s_1 = 0.16$. Nesse limite as fontes encontram-se bem próximas, suas bordas estão separadas por uma distância de apenas 0.06.

Tabela 6.1 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh para os casos ótimos.

Ra	s_0	s_1	s_2
10^3	0.15	0.30	0.36
$5 \cdot 10^3$	0.13	0.18	0.40
10^4	0.09	0.20	0.36
$5 \cdot 10^4$	0.11	0.14	0.32
10^5	0.09	0.16	0.30
$5 \cdot 10^5$	0.09	0.16	0.30
10^6	0.07	0.16	0.32

Em relação à base da cavidade, a terceira fonte desce consideravelmente, saindo de $y_3 = 0.81$ para $Ra = 10^3$ e terminando em $y_3 = 0.55$ no maior número de Rayleigh adotado. Já a distância entre a terceira e a segunda fontes não varia tanto. O processo convectivo é melhor aproveitado para o transporte de calor quando as fontes estão em regiões mais próximas da parede inferior.

Em $Ra = 10^3$ as distâncias entre a primeira e a segunda fonte e entre a terceira e a segunda fonte não são idênticas indicando o aumento da convecção mesmo para um número de Rayleigh consideravelmente baixo. Ao observarmos as isotérmicas para esse caso, figura 6.19, vemos que há uma suave tendência para direita nas porções superiores das isotérmicas.

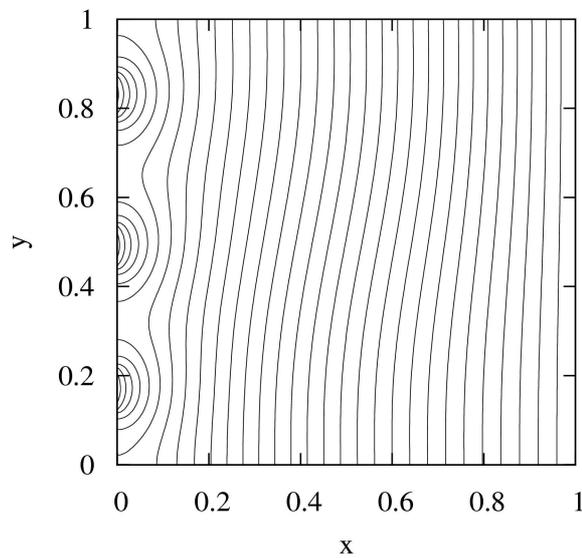


Figura 6.19 – isotérmicas para $Ra = 10^3$, $s_0 = 0.15$, $s_1 = 0.30$ e $s_2 = 0.36$.

Os resultados apresentados na tabela 6.1 estão presentes na figura 6.20 onde apresentam uma boa concordância com o proposto por Silva *et al* (2004). Para que a condutância global seja máxima, as três fontes decaem suas posições com o aumento do número de Rayleigh.

Dois casos se afastaram do comportamento previsto por Silva, $Ra = 5.10^3$ e $Ra = 5.10^4$. No primeiro, a configuração prevista no artigo em questão foi $s_0 = 0.11$, $s_1 = 0.23$ e $s_2 = 0.34$. Comparando a temperatura máxima no caso ótimo proposto pelo presente trabalho com a encontrada para o caso escolhido em Silva *et al* (2004) encontramos uma variação de 0.5%.

De acordo com Silva o segundo caso, $Ra = 5 \cdot 10^4$, seria $s_0 = 0.09$, $s_1 = 0.18$ e $s_2 = 0.32$. A discrepância nos valores da temperatura máxima entre o proposto no artigo e o escolhido no presente trabalho foi de 0.2%.

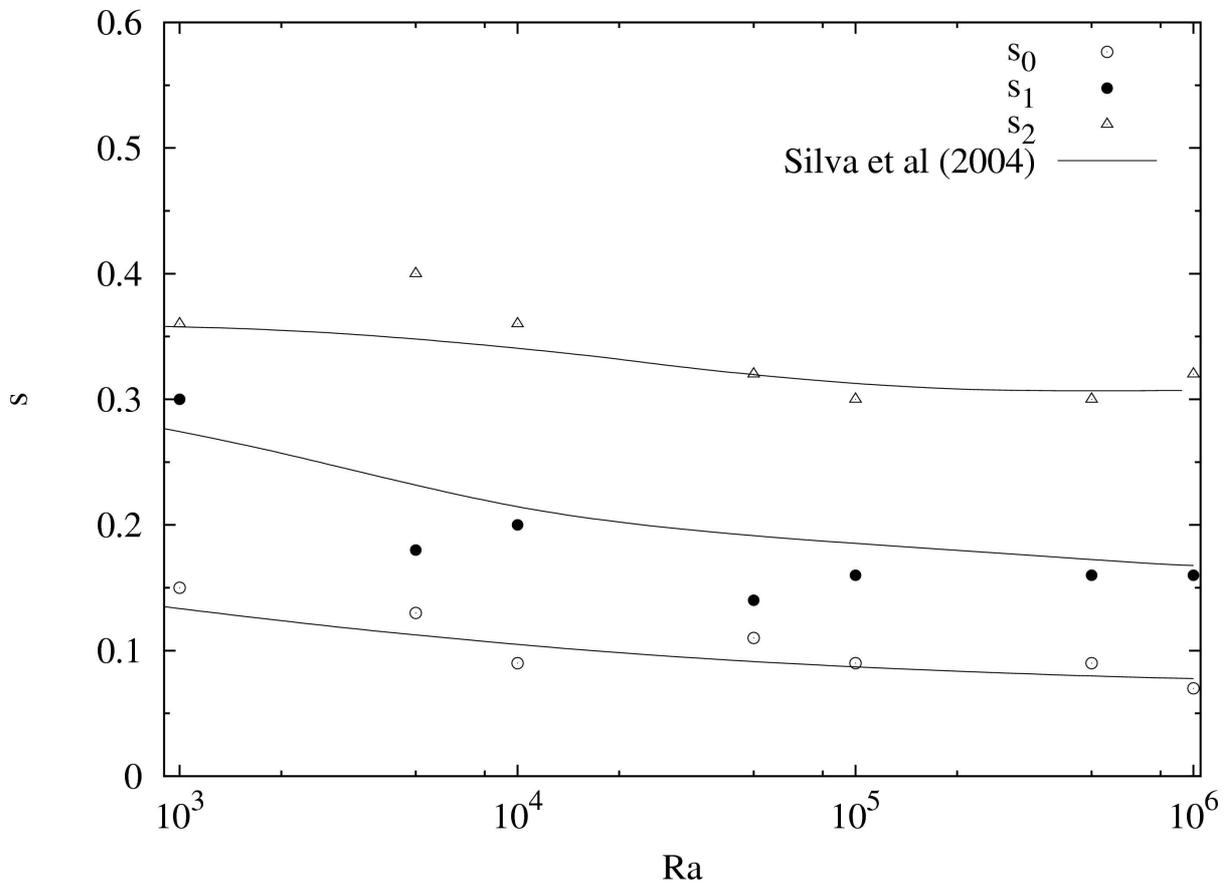


Figura 6.20 – Distâncias entre as fonte em função do Número de Rayleigh.

Tais diferenças podem estar relacionadas com o refinamento da malha e parâmetros de convergência adotados. Como a posição ótima para dispositivos eletrônicos na produção industrial depende de vários outros fatores, tais como logística na disposições de todos os componentes e efeitos tridimensionais, pequenos desvios aqui encontrados não terão grande influência na aplicabilidade das configurações propostas.

Se analisarmos a condutância global em função do número de Rayleigh, figura 6.21, vemos que seu valor cresce com o aumento da convecção. O transporte de calor acoplado ao transporte de massa acelera a homogeneização do domínio. Assim a condutância global calor no domínio cresce com o aumento do valor donúmero de Rayleigh.

Novamente os resultados obtidos por intermédio das simulações numéricas desenvolvidas no presente trabalho concordam com a relação proposta por Silva, em conjunto com Adrian Bejan, (Silva *et al*, 2004).

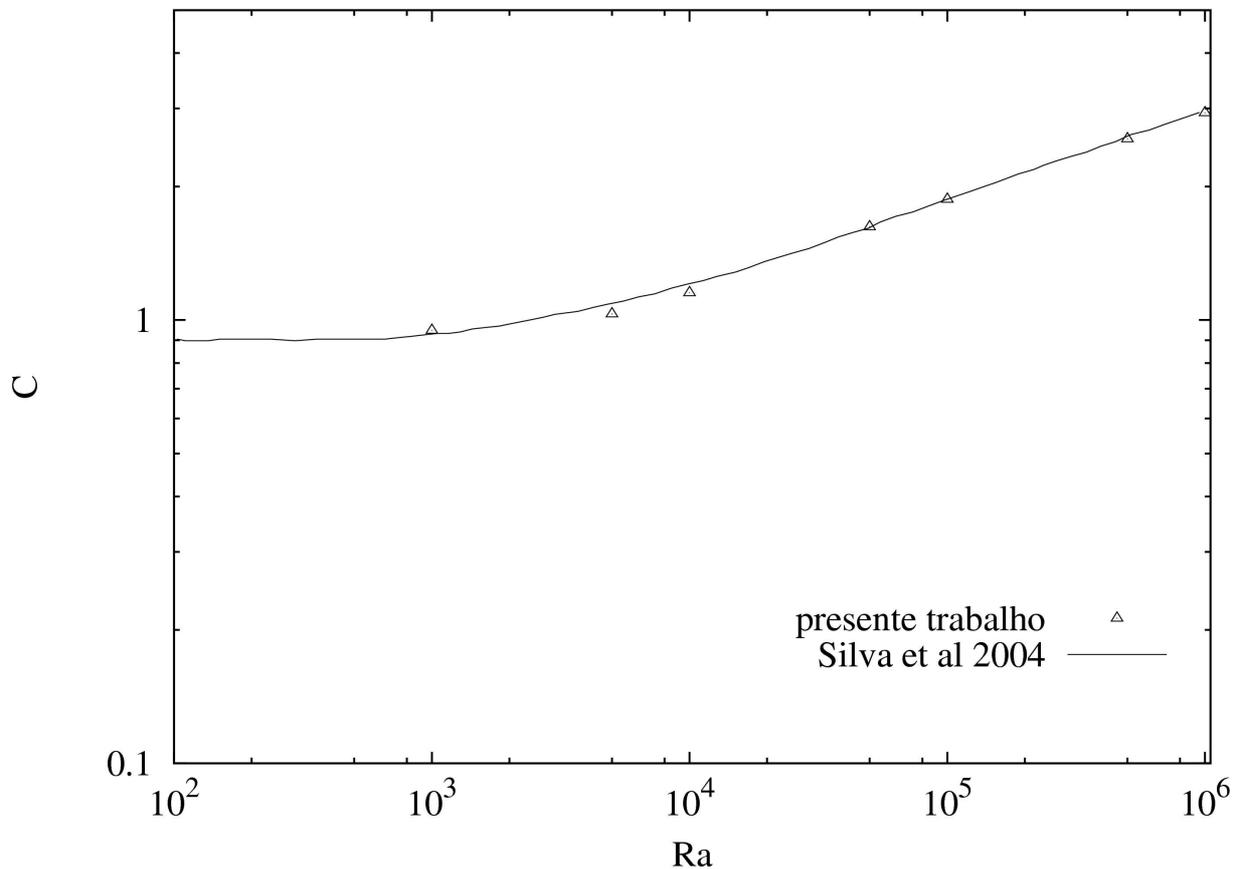


Figura 6.21 – Máxima condutância global em função do número de Rayleigh.

A diferença nas posições das fontes para $Ra = 5.10^3$ e $Ra = 5.10^4$, como podemos ver na figura 6.21, não provocaram uma diferença significativa entre os valores das condutâncias globais encontradas pelo código utilizado e os valores propostos por Silva.

6.2.2 – Caso ótimo pelo Princípio da Mínima Dissipação de Entrância

Nas configurações em que a dissipação de entrância for mínima, a transferência de calor será a mais eficiente possível dentro do domínio trabalhado. Dado que o fluxo de calor nas fontes é fixo, o caso ótimo será aquele que propiciará a menor dissipação de entrância.

A relação entre o número de Nusselt médio e o número de Rayleigh para os casos ótimos sob o critério da mínima dissipação de entrância é apresentada na figura 6.22.

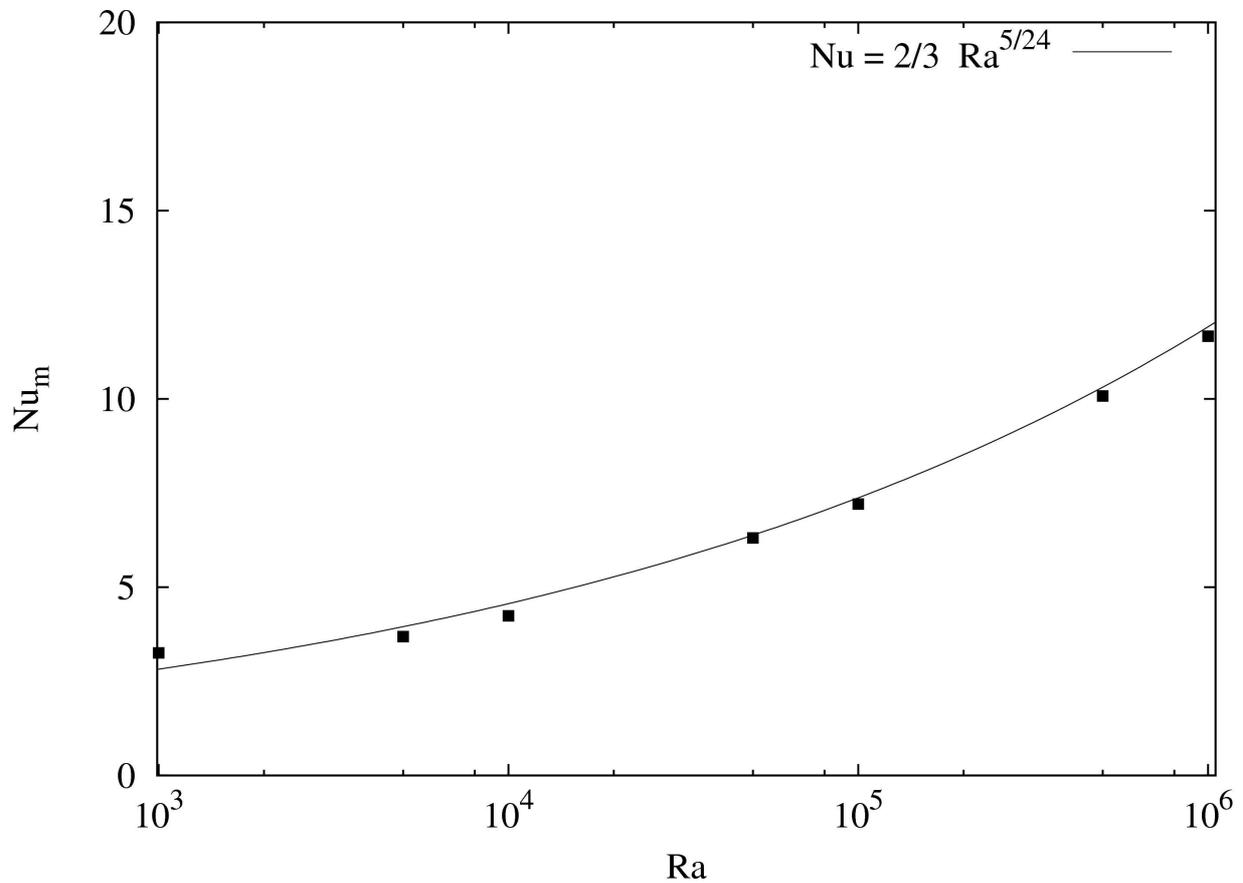


Figura 6.22 – Número de Nusselt médio em função do Rayleigh

Como esperado, o aumento do número de Rayleigh intensifica a convecção, o que resulta no aumento do número de Nusselt, em outras palavras, resulta em uma maior transferência de calor.

O princípio da mínima dissipação de entrância busca a maior eficiência possível no transporte de calor. Como a temperatura na parede oposta faz parte das condições de contorno e portanto é fixa, a melhor configuração será aquela na qual a parede que contém as fontes possuirá a menor temperatura média.

Os perfis de temperatura adimensional para alguns casos ótimos são mostrados na figura 6.23. Estes perfis de temperatura mostram que quanto maior o número de Rayleigh, menores serão os valores das temperaturas adimensionais nos pontos da parede.

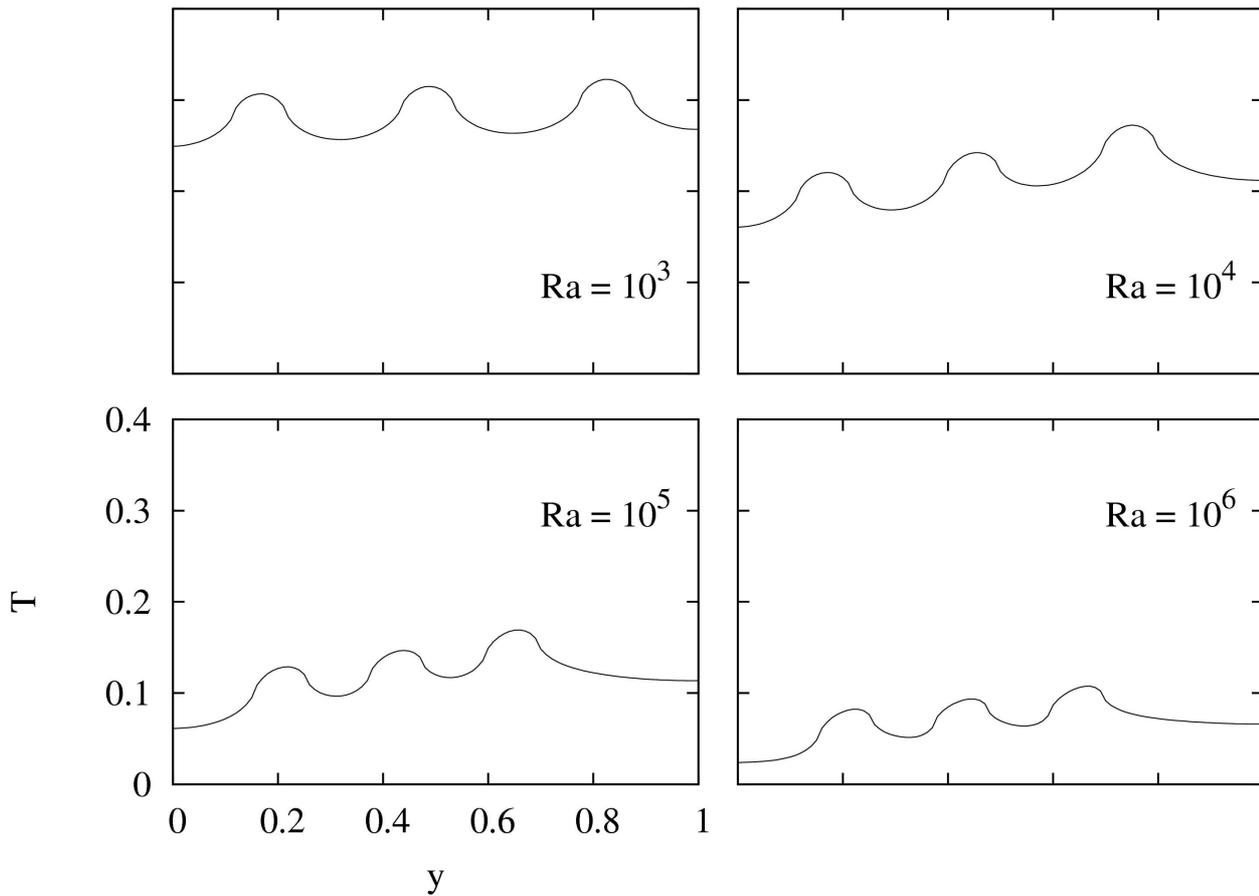


Figura 6.23 – Perfis de temperatura adimensional na parede que contém as fontes.

As configurações ótimas, tabela 6.2, mostram que com o aumento da convecção as fontes tendem a ficar equidistantes entre si mantendo uma preferência por regiões inferiores.

Tabela 6.2 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Ra	s_0	s_1	s_2
10^3	0.17	0.32	0.34
$5 \cdot 10^3$	0.15	0.30	0.34
10^4	0.17	0.28	0.30
$5 \cdot 10^4$	0.19	0.24	0.24
10^5	0.21	0.22	0.22
$5 \cdot 10^5$	0.23	0.22	.018
10^6	0.21	0.22	0.22

Graficamente, figura 6.24, podemos visualizar tanto a convergência das distâncias entre as fontes para o mesmo valor quanto o deslocamento do conjunto para porções inferiores da parede vertical.

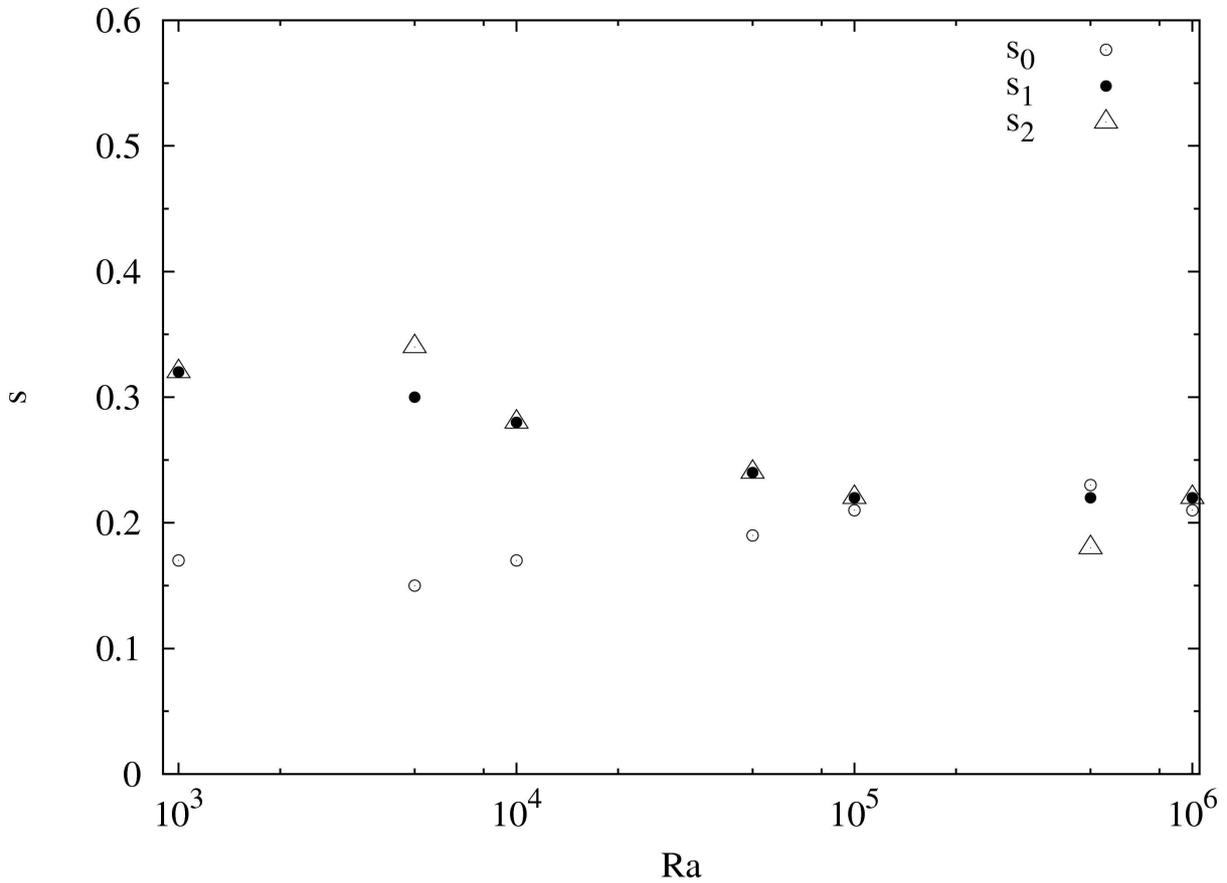


Figura 6.24 – Distâncias entre as fonte em função do Número de Rayleigh

A dissipação de entrância em função do número de Rayleigh é apresentada na figura 6.25. A sua queda com o aumento do poder convectivo do domínio mostra que a eficiência no transporte de calor também aumentou.

Esse crescimento é perceptível, também, pelos perfis de temperatura apresentados na figura 6.23, onde visivelmente as temperaturas adimensionais nas fonte e na parede decaem com o aumento do número de Rayleigh.

Fixando-se o fluxo de calor nas fontes teremos que quanto menor for a dissipação de entrância, maior será a quantidade de calor transportada.

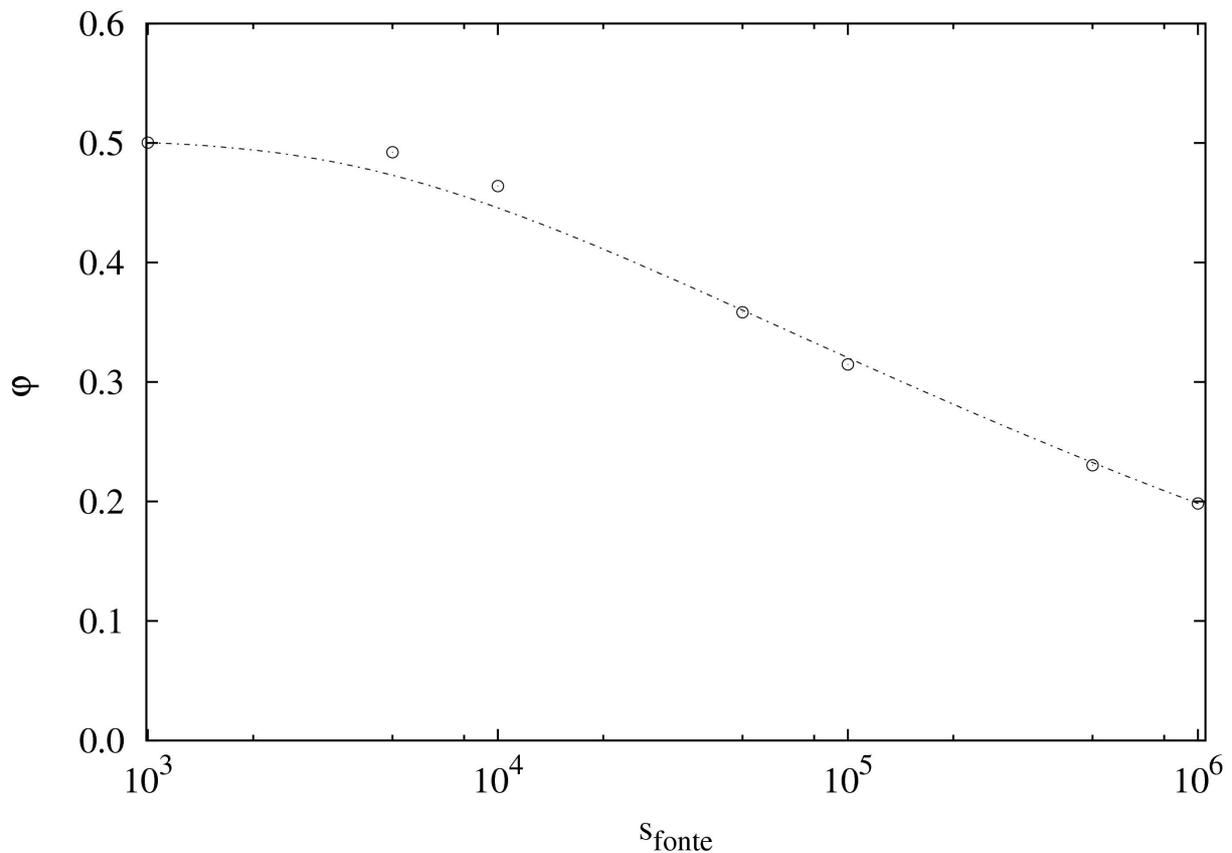


Figura 6.25 – Dissipação de entrância em função do número de Rayleigh

6.2.3 – Comparação

Os comportamentos do Nusselt médio dos casos ótimos com o número de Rayleigh previsto pelas duas teorias aqui abordadas são confrontado na figura 6.26. Interpolando os pontos com lei de potência vemos que o coeficiente é o mesmo para as duas teorias, sendo assim, para baixos valores do número de Rayleigh os valores para o número de Nusselt médio convergem.

Com o aumento do número de Rayleigh a curva encontrada para os casos ótimos previstos pelo princípio da mínima dissipação de entrância possui maior curvatura. Isso significa que o critério de otimização baseado na dissipação de entrância é mais sensível a convecção.

A teoria construtal tem como critério de otimização a maximização da condutância global que se traduz na busca por uma configuração em que o ponto menos requisitado no transporte de calor contribua da melhor forma possível. Por ser inversamente proporcional

a temperatura local, a condutância global será sempre sob uma fonte dando a esse critério de otimização uma característica local.

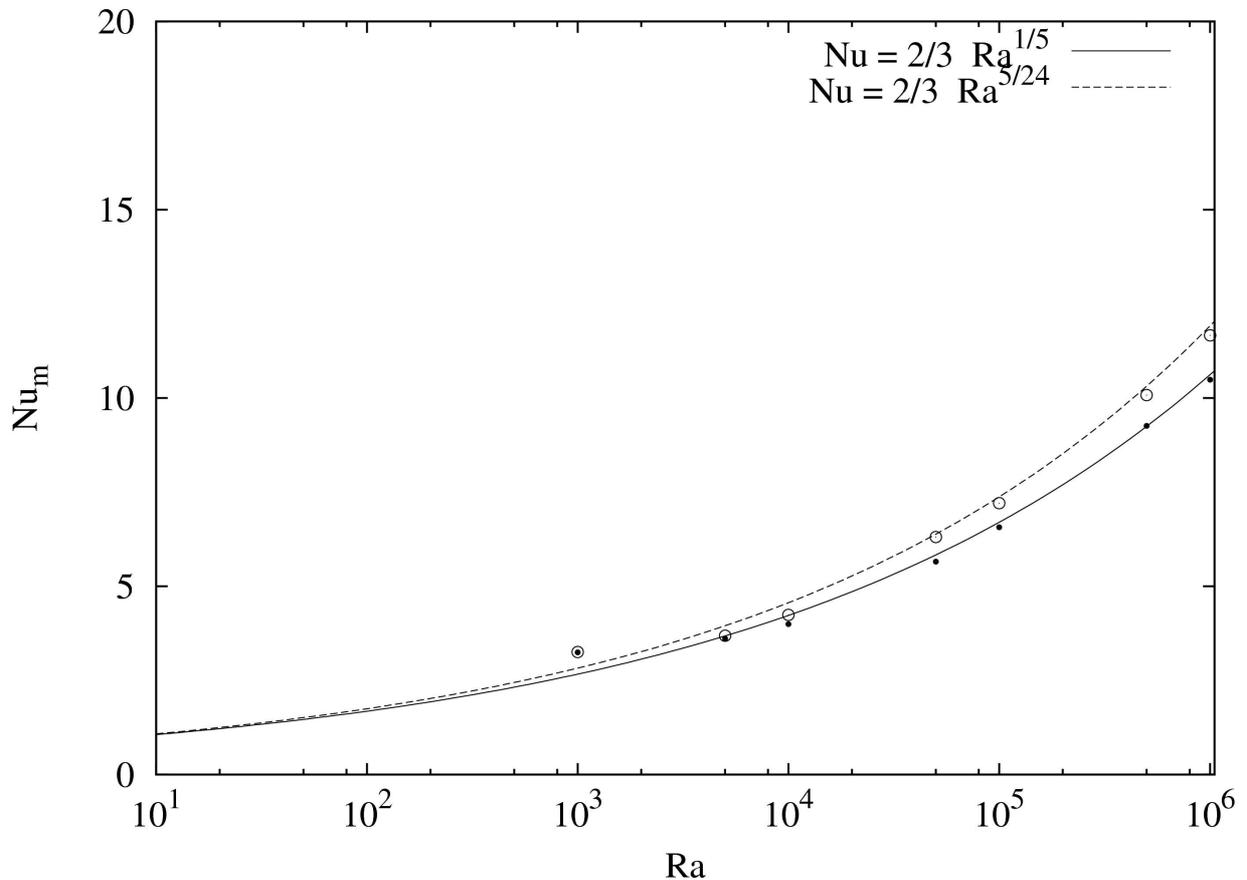


Figura 6.26 - Nusselt em função do número de Rayleigh para a teoria construtal (linha cheia) e para entrância (linha tracejada).

Por outro lado, o princípio da mínima dissipação de entrância avalia a dissipação média em toda a cavidade. Por ter um caráter mais global no domínio é compreensível que a otimização advinda do princípio da mínima dissipação de entrância seja mais influenciada pela convecção do que a otimização pela teoria construtal.

Os perfis de temperatura em que $Ra = 10^3$ mostram que ambas as teorias trazem configurações semelhantes com sutis diferenças. Com o aumento do número de Rayleigh acentua-se a diferença dos quadros propostos.

A teoria construtal dispõem as fontes afim de que todas possuam a mesma temperatura e a menor possível sob essa condição. Já o princípio da mínima dissipação de entrância busca a disposição das fontes que melhor facilita o transporte de calor pela cavidade.

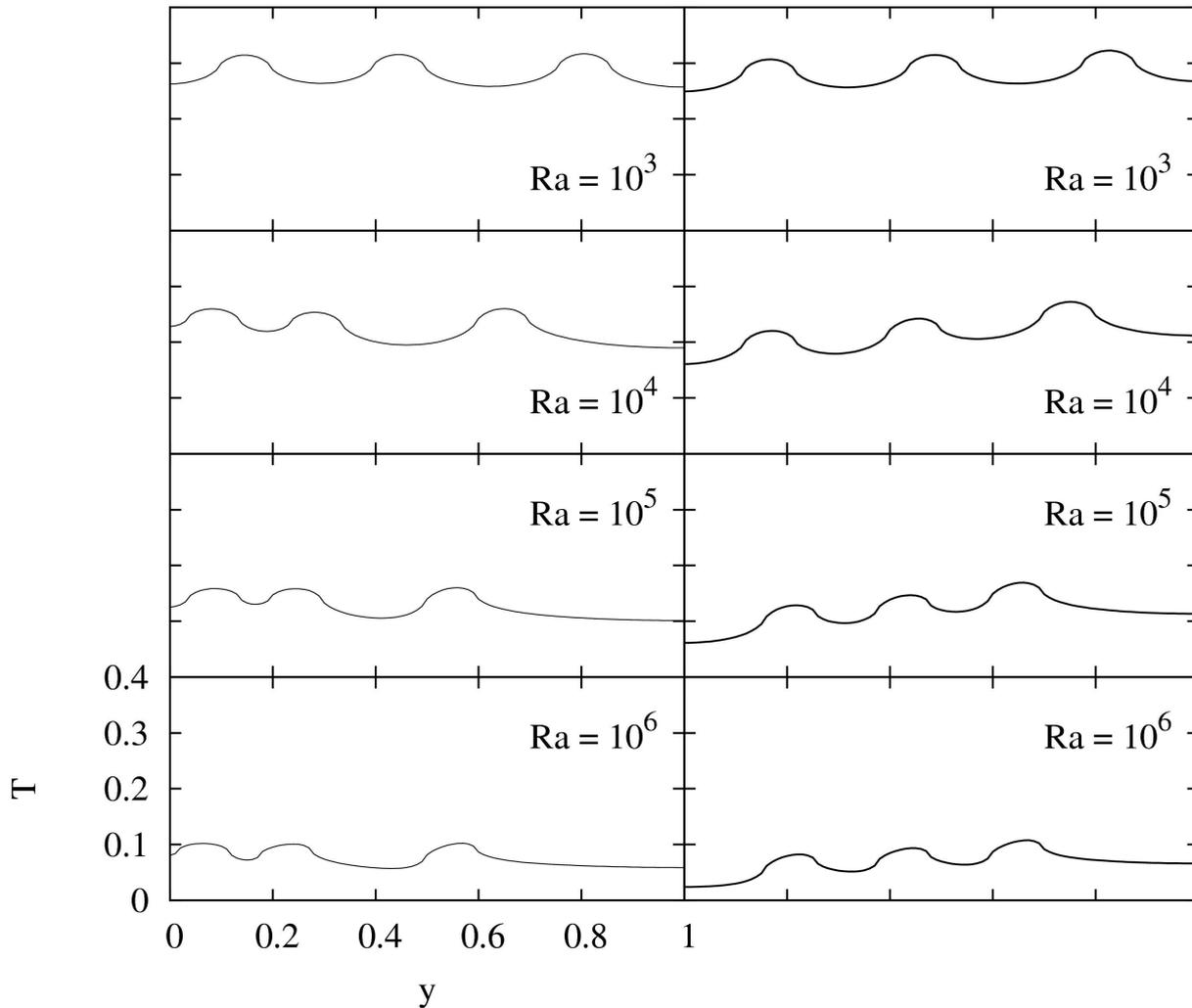


Figura 6.27 – Comparativo dos perfis de temperatura.

Quando distribuídas de forma mais homogênea, a última fonte atinge temperaturas mais elevadas. Ao aproximar as duas primeiras fontes e afastar a terceira, a teoria construtal consegue diminuir a temperatura da última fonte e assim maximizar a condutância global.

Na figura 6.28 os pontos em forma de quadrado indicam as posições ótimas fornecidas pela maximização da condutância global, enquanto os triângulos identificam as posições ótimas pelo princípio da mínima dissipação de entrância.

Definitivamente os dois parâmetros de otimização resultam em configurações distintas. Enquanto o princípio da mínima dissipação de entrância busca a menor perda de capacidade de transporte de calor, a teoria construtal busca a menor temperatura possível para as três fontes simultaneamente.

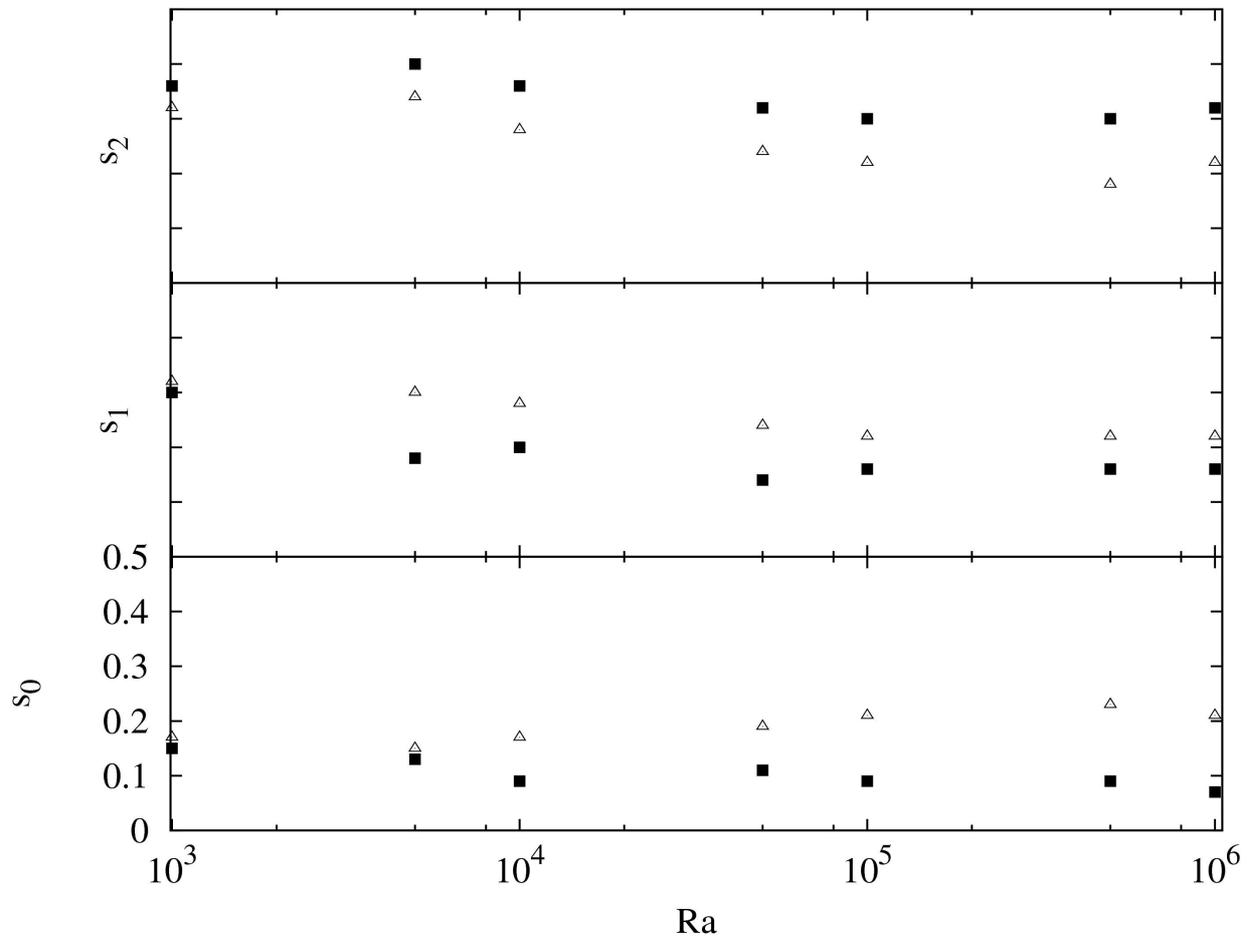


Figura 6.28 – Comparativo das configurações ótimas.

6.3 – CAVIDADE QUADRADA COM CINCO FONTE DE CALOR

No estudo com cinco fonte, a faixa do número de Rayleigh escolhida foi $Ra = 5 \cdot 10^3, 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6$. Para cada número de Rayleigh adotado foram resolvidos 142.506 casos, em que cada caso representa uma nova configuração das fontes. Para os dados analisados nesta seção foram processados 855.036 casos.

A cavidade utilizada, bem como as referências para as medidas, encontram-se na figura 6.29

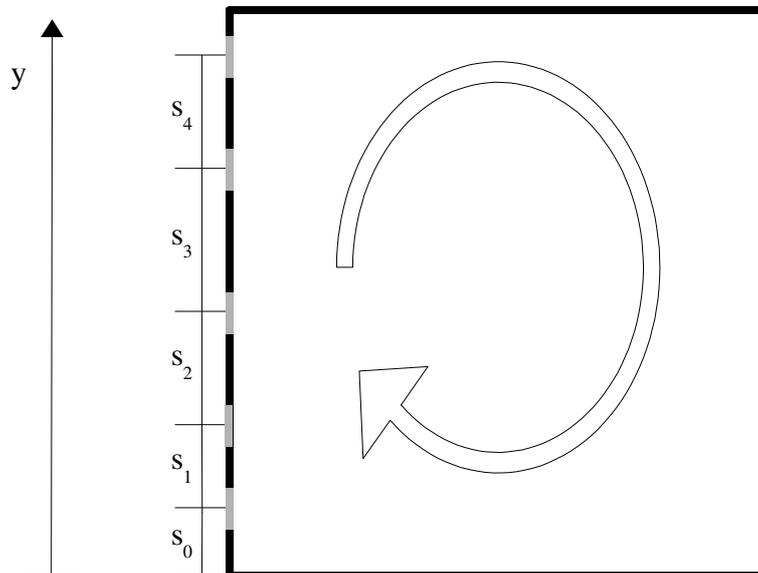


Figura 6.29 – Representação da cavidade estudada com cinco fontes.

Todas as referências aqui utilizadas e todo o processo de análise de dados são semelhantes aos adotados para o estudo da cavidade quadrada com três fontes pontuais.

6.3.1 – Caso ótimo pela Teoria Construtal

A relação entre o número de Nusselt médio e o número de Rayleigh mostrada na figura 6.30 confirma, novamente, que com o aumento do número de Rayleigh a convecção intensifica o processo de transporte de calor na cavidade

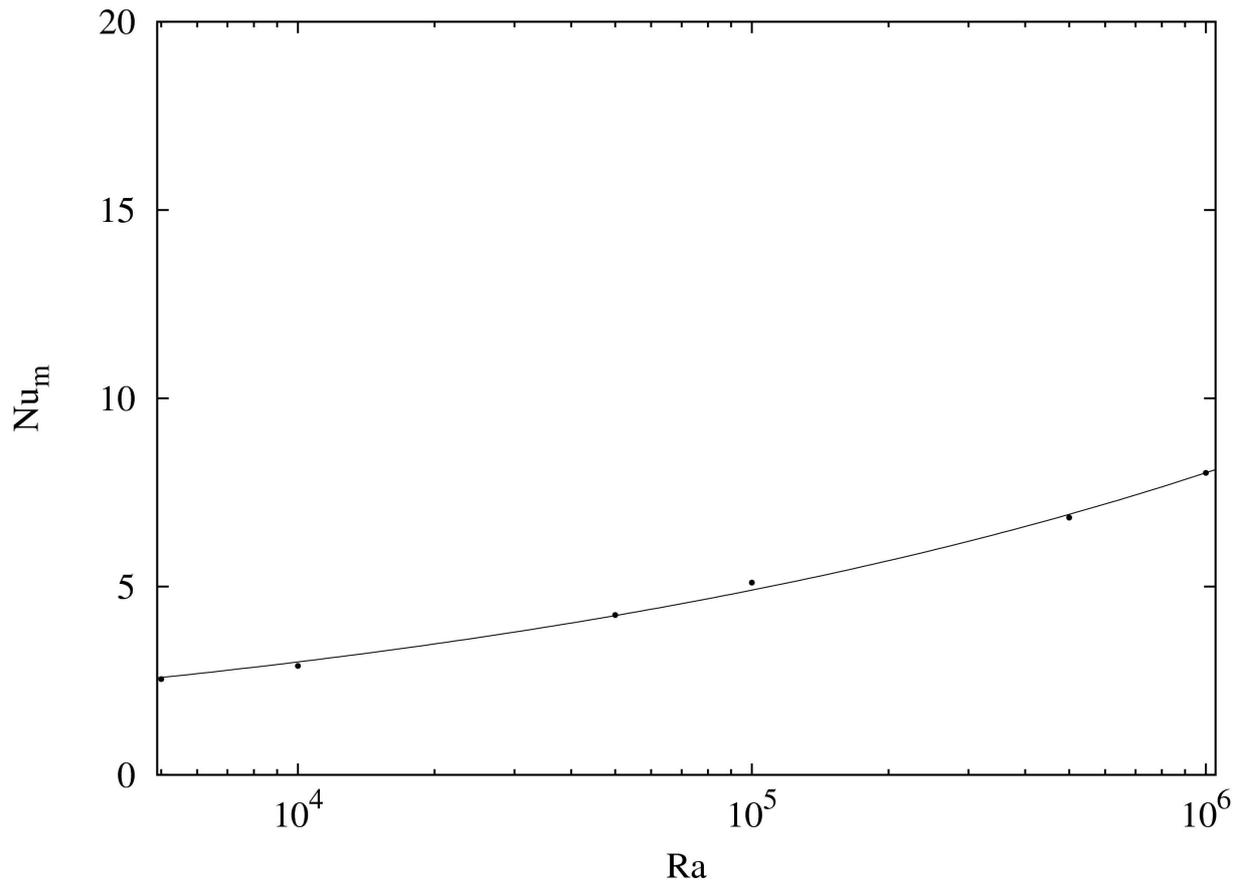


Figura 6.30 – Nusselt médio em função do número de Rayleigh

Com a presença de cinco fontes o fluxo de calor fornecido para a cavidade é maior. Mesmo para números de Rayleigh baixos a configuração proposta pela maximização da condutância global já traz as quatro primeiras fontes para o início da cavidade e afasta a última com o intuito de mantê-las sob a mesma temperatura.

Com o aumento do número de Rayleigh as fontes iniciais aproximam-se ao ponto de se unirem formando uma região inicial contínua de fluxo de calor. Esse comportamento foi previsto por Silva *et al* (2004) em sua discussão a respeito da distribuição de N fontes de calor de tamanho finito em uma parede vertical.

Os perfis de temperatura representados na figura 6.31 confirmam esse comportamento e reafirmam a característica de homogeneidade nas temperaturas das fontes nos casos ótimos selecionados pela teoria construtal.

No presente trabalho a distância entre duas fontes é tomada centro a centro, assim, a menos de s_0 , quando $s_i = 0.1$ significa que as fontes estão unidas formando uma fonte maior e contínua.

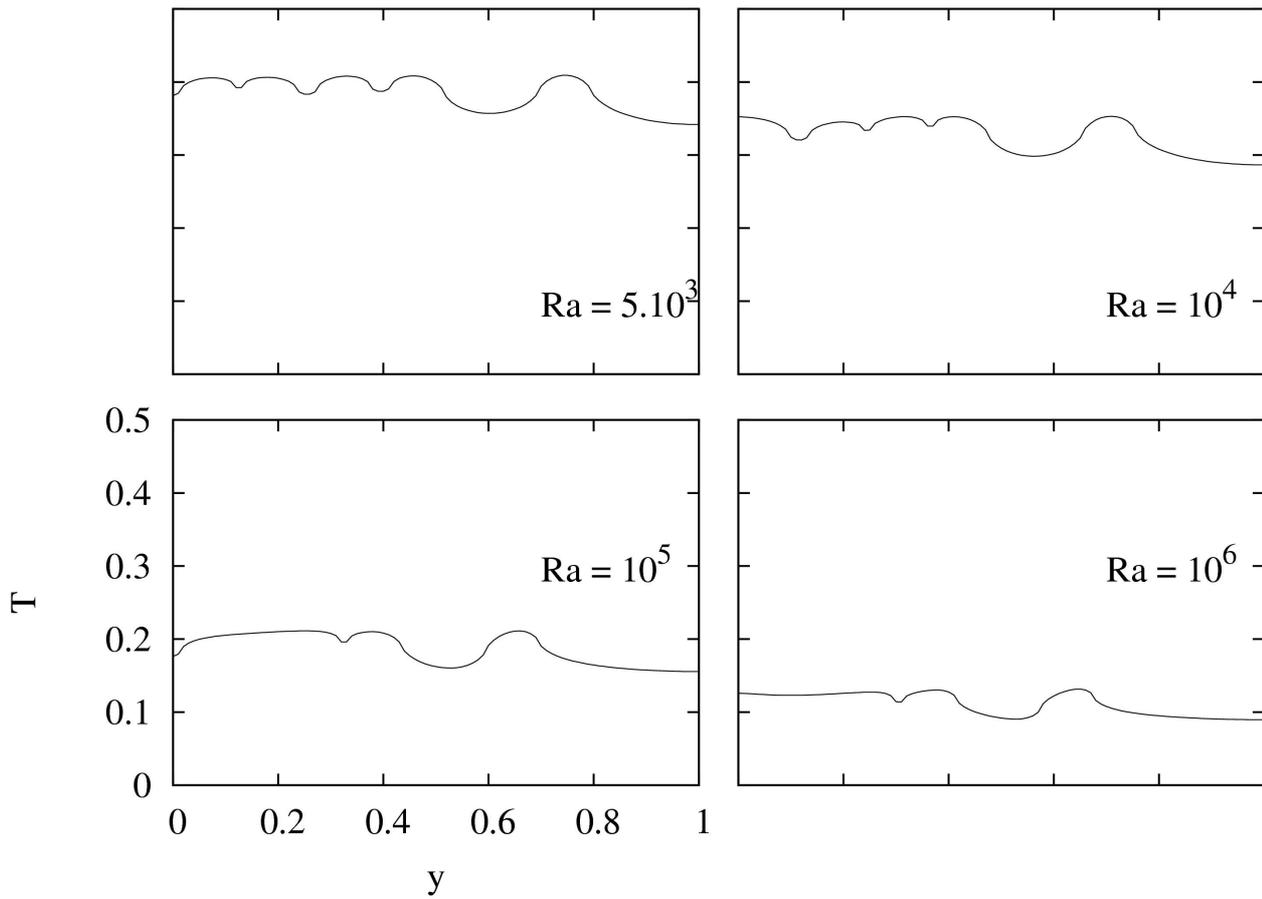


Figura 6.31 – Perfis de temperatura

Observando os valores na tabela 6.3, que mostra os valores das distâncias entre as fontes encontradas no presente trabalho, verifica-se a união das fontes a partir de $Ra = 5 \cdot 10^4$.

Tabela 6.3 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Ra	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$5 \cdot 10^3$	0.07	0.12	0.14	0.14	0.28
10^4	0.05	0.14	0.12	0.12	0.28
$5 \cdot 10^4$	0.07	0.10	0.12	0.12	0.26
10^5	0.07	0.10	0.10	0.12	0.26
$5 \cdot 10^5$	0.05	0.10	0.10	0.12	0.26
10^6	0.05	0.10	0.10	0.12	0.26

Os valores encontrados na tabela 6.3 estão na figura 6.32 onde é possível observar que no geral todas as fontes procuram posições inferiores com o aumento do número de Rayleigh. As distâncias s_1 e s_2 convergem para 0.1 na intenção de se unirem em uma só fonte de largura 0.3

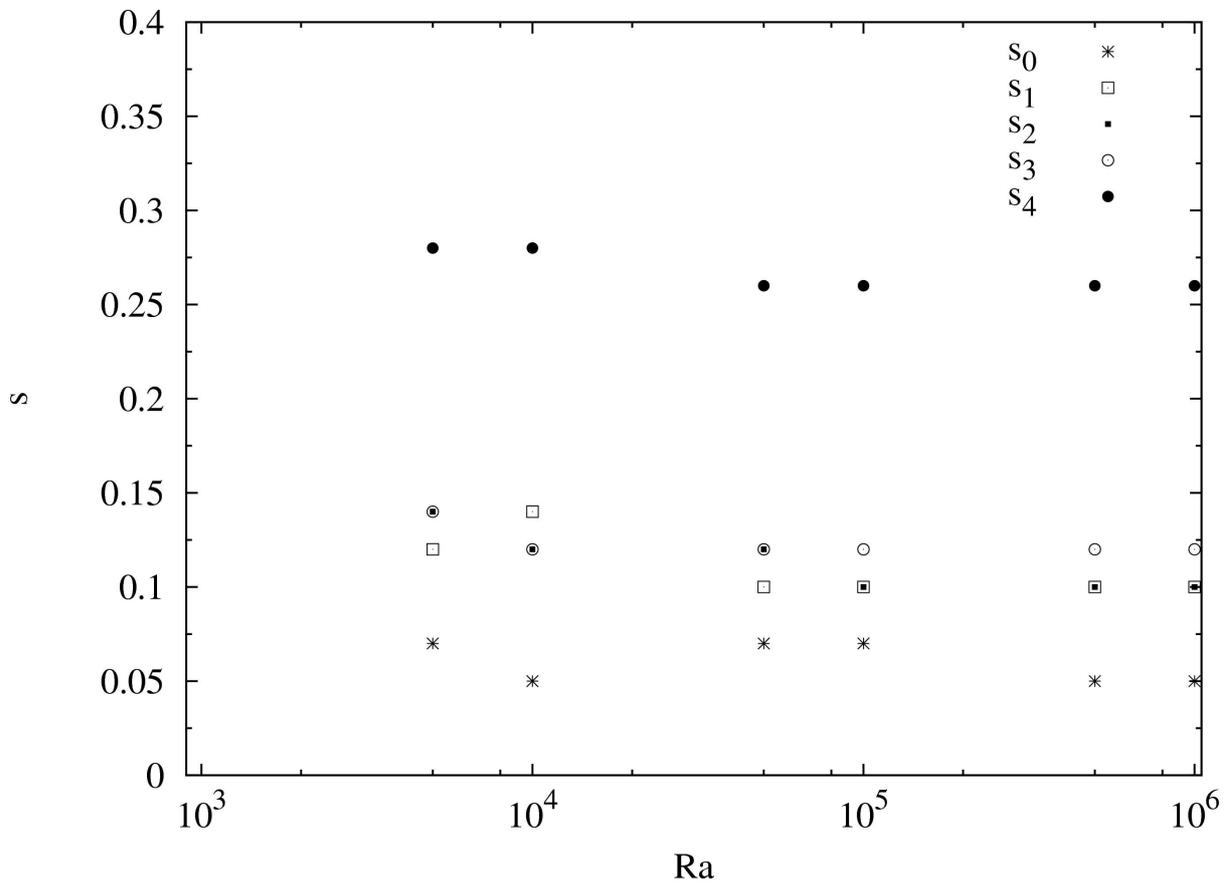


Figura 6.32 – Distância entre as fontes em função do número de Rayleigh

6.3.2 – Caso ótimo pelo Princípio da Mínima Dissipação de Entrância

Os casos selecionados como ótimos pelo princípio da mínima dissipação de entrância resultaram em números de Nusselt médio proporcionais ao número de Rayleigh. Na figura 6.33 a relação entre os esses dois parâmetros adimensionais é mostrada.

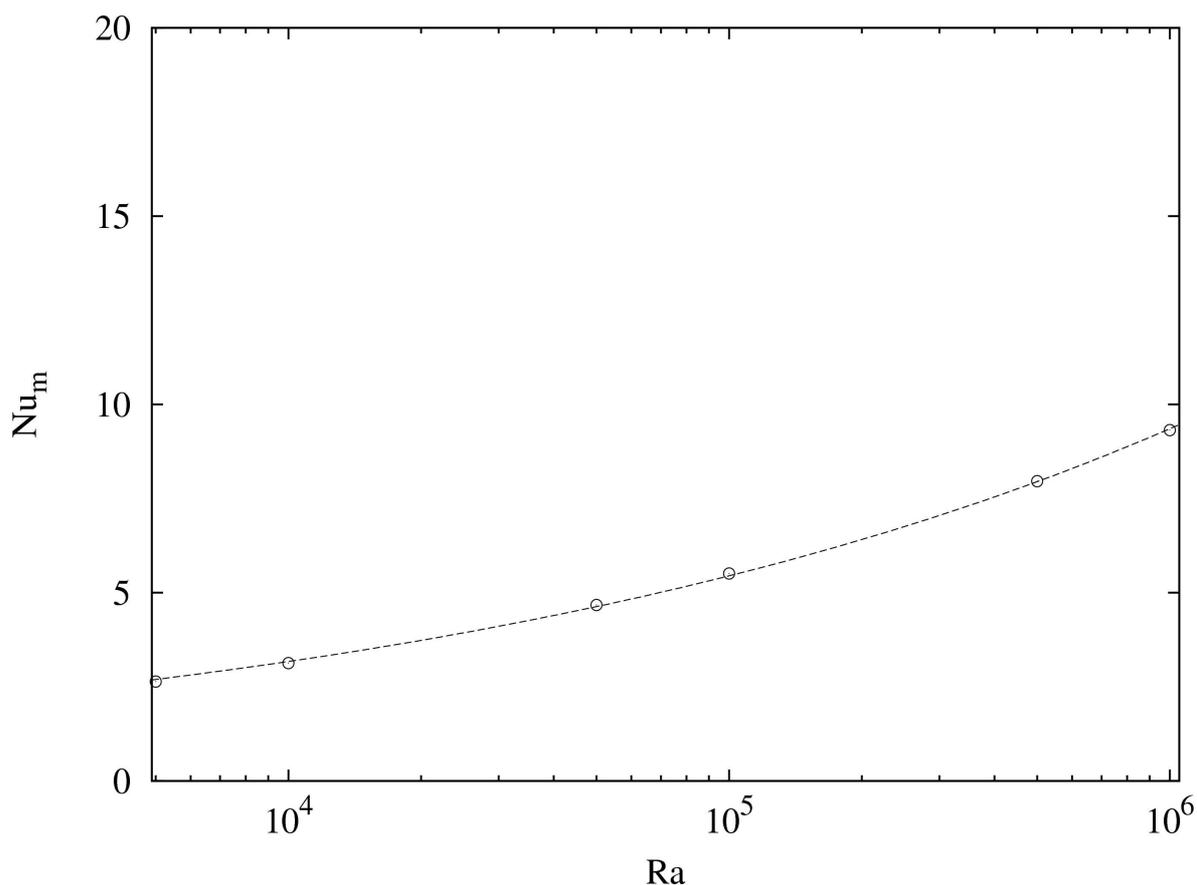


Figura 6.33 – Nusselt médio em função do número de Rayleigh

Com o aumento do poder convectivo do domínio a temperatura das fontes na parede decaem. A figura 6.34 apresenta alguns perfis de casos ótimos onde vemos que as fontes possuem temperaturas diferentes e crescentes com o aumento da ordenada de posição.

O fluido aquecido pelas primeiras fontes não esfria antes de atingir as seguintes, assim, a diferença de temperatura entre o fluido e a fonte decai nas regiões superiores dificultando a troca de calor para as últimas fontes.

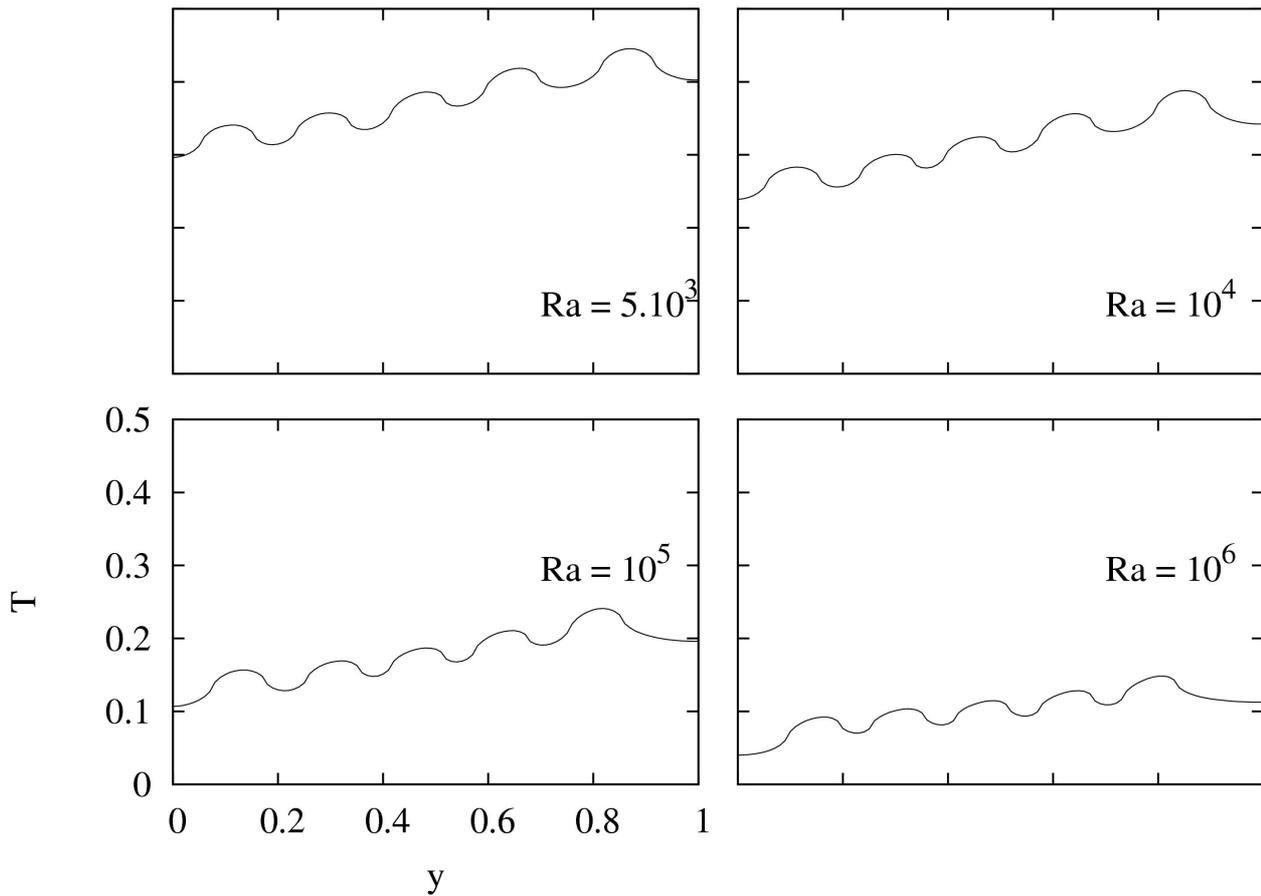


Figura 6.34 – Perfis de temperatura

Tanto pelos perfis de temperatura mostrados na figura 6.34 quanto pelos dados armazenados na tabela 6.3, percebemos que, com o aumento no número de Rayleigh, a dissipação de entrância será mínima quando as fontes estiverem equidistantes entre si.

Nota-se que a otimização pelo princípio da mínima dissipação de entrância não se preocupa com a temperatura de cada fonte e sim com a eficiência do domínio.

Tabela 6.4 – Distâncias entre as fontes em cada número de Rayleigh.

Ra	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$5 \cdot 10^3$	0.11	0.18	0.18	0.18	0.22
10^4	0.11	0.18	0.16	0.18	0.22
$5 \cdot 10^4$	0.11	0.18	0.16	0.16	0.20
10^5	0.13	0.18	0.16	0.16	0.18
$5 \cdot 10^5$	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16
10^6	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16

Ao analisarmos as distâncias entre as fontes em função do número de Rayleigh presentes na tabela 6.4 não é constatado um crescimento em progressão geométrica tal como já foi proposto na literatura (Liu & Phan Tien, 2000).

Graficamente, figura 6.35, fica notória a busca pela equidistância entre as fontes com o aumento do número de Rayleigh.

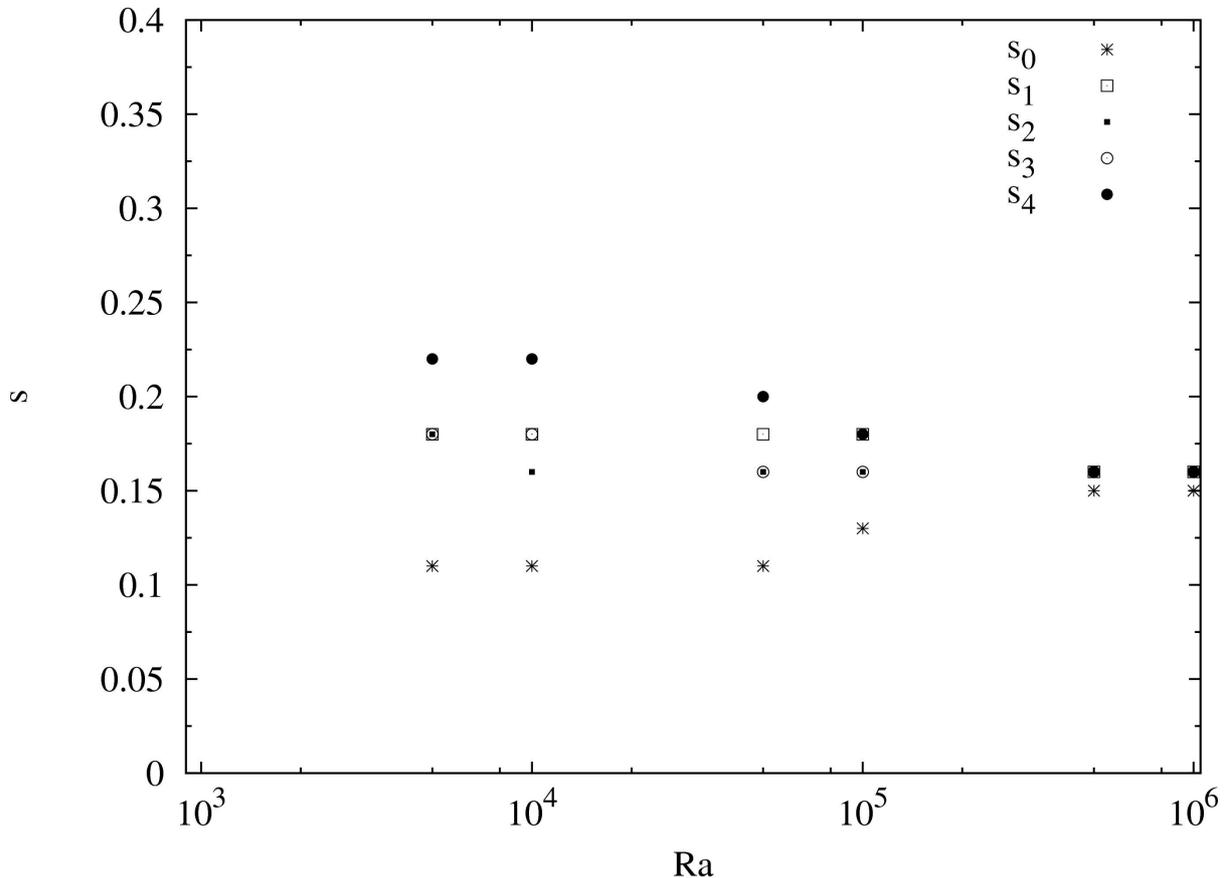


Figura 6.35 – Distância entre as fontes em função do número de Rayleigh

A distribuição perfeitamente uniforme das fontes encontrada para altos números de Rayleigh não é suficiente para afirmarmos que quando a convecção é intensa, a melhor configuração para as fontes é a distribuição uniforme. Os resultados para três fontes confirmam essa conclusão. Mesmo equidistantes entre si, a maior parte das fontes posicionou-se abaixo do ponto central da parede vertical.

Com cinco fontes de largura 0.1 o espaço restante a ser distribuído entre as fontes não é suficiente para as fontes de tal forma que a condução de calor não aqueça a vizinha e ainda colocar o grupo afastado da parede horizontal superior. Isso pode justificar a não preferência por regiões inferiores do grupo de fontes.

6.3.3 – Comparação

Novamente, assim como com três fontes, a relação entre o número de Nusselt médio e o número de Rayleigh mostra que o princípio da mínima dissipação de entrância é mais acurado na percepção da convecção do que o critério de condutância máxima.

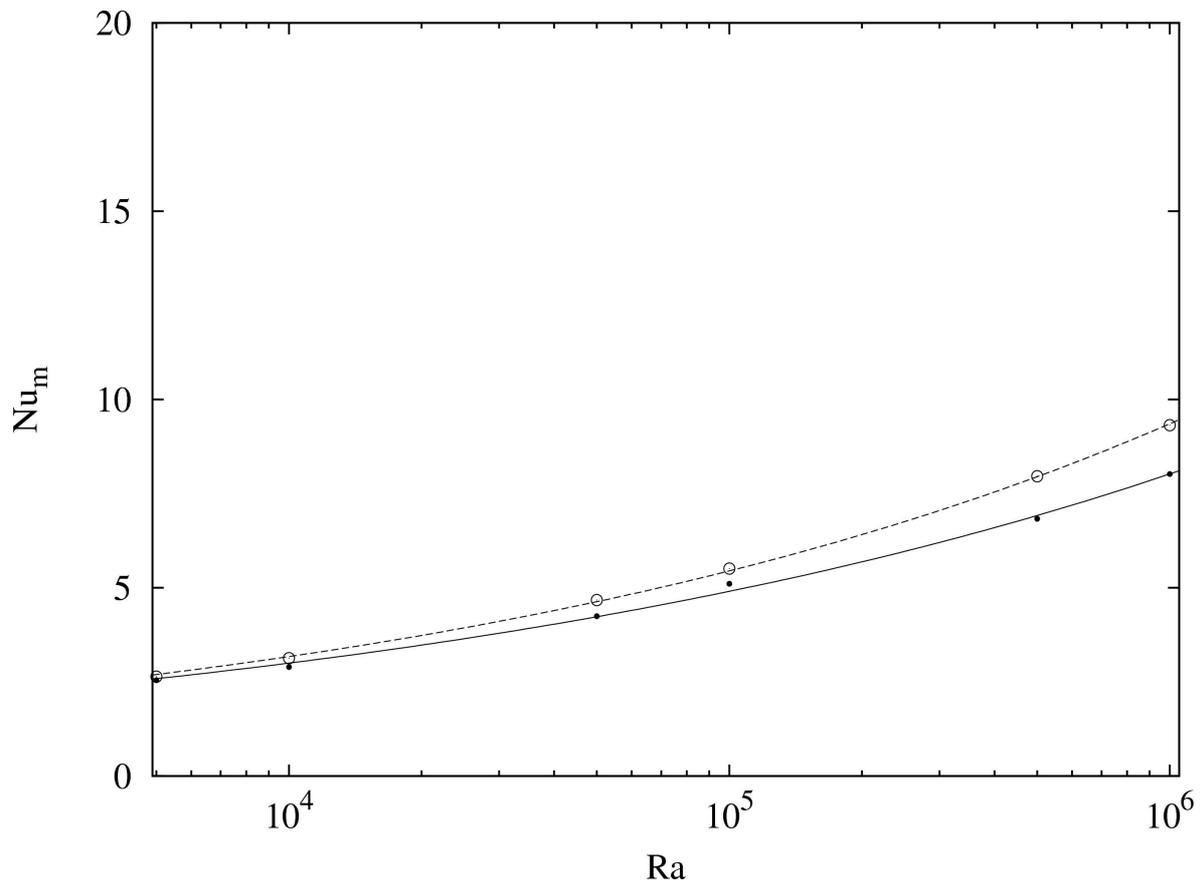


Figura 6.36 – Nusselt em função do número de Rayleigh para a teoria construtal (linha cheia) e para entrância (linha tracejada).

O comportamento observado nos perfis de temperatura para três fontes, figura 6.27, se repete na presença de cinco fontes. Ao passo que a teoria construtal resulta em configurações onde a temperatura das fontes são iguais e menores possíveis, o princípio da mínima dissipação de entrância busca a configuração que possibilite a menor perda de calor, em forma de dissipação de entrância, durante o processo de transporte de calor.

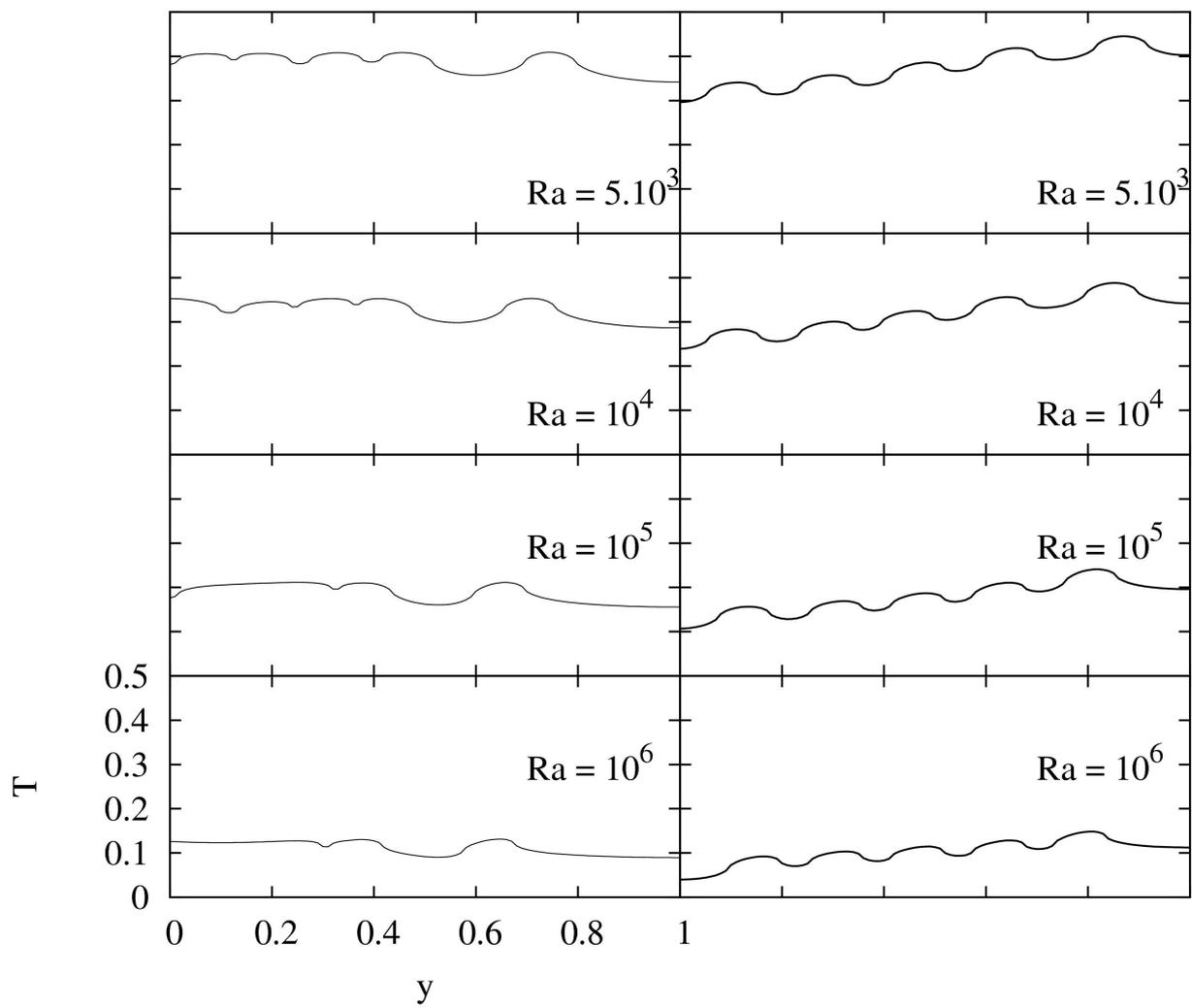


Figura 6.37 – Comparativo dos perfis de temperatura.

7 – CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foi feita uma busca exaustiva percorrendo todas as possíveis configurações, dentro do refinamento da malha, para a disposição de uma, três e cinco fontes de calor finitas no interior de uma cavidade quadrada.

Dois parâmetros de otimização foram utilizados para selecionar casos ótimos. O primeiro, denominado condutância global mínima, surge da predição feita pela teoria construtal de que a melhor configuração de um sistema é aquela em que seus pontos são requisitados da forma mais equivalente possível.

O segundo critério é o princípio da mínima dissipação de entrância que prevê como melhor configuração aquela em que a menor quantidade possível de energia é dissipada durante o transporte de calor pelo domínio.

Comparando os casos obtidos pelas visões anteriormente citadas concluímos que apenas nos casos com uma fonte de calor as teorias convergem. Para as configurações compostas por três ou cinco fontes de calor, os casos escolhidos como ótimos por cada teoria são distintos e essa distinção cresce com o número de Rayleigh.

A depender do uso, cada teoria será mais adequada. Para dispositivos idênticos, a maximização da condutância global é ideal pois mantém todos os dispositivos a mesma temperatura e na menor possível. Quando a um dispositivo principal que deve ser esfriado ao máximo ou quando o objetivo é aquecer a cavidade por intermédio das fontes, o princípio da mínima dissipação de entrância apresenta-se como melhor escolha.

Como trabalho futuro, sugiro uma abordagem experimental dos casos aqui selecionados e o uso do pacote computacional desenvolvido no presente trabalho para estudo de canais abertos cujo abordagem experimental já existe na literatura.

8 – AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, Rosânia Borges, e minhas irmãs, Manuela Borges e Ana Paula Borges, pelo apoio. Agradeço também aos amigos, Washington Carvalho, Giselle Anholeti e Gabriel Ferraz por cederem seus computadores para o meu processamento paralelo.

A todos os integrantes do grupo GAMMA por me acolherem após dificuldades demonstrando respeito e a compromisso com a pesquisa nacional.

Ao meu orientador Tito Dias Junior meus sinceros agradecimentos e parabéns pela coragem.

Aos amigos do Vortex, Daniel Albernaz e Paulo Villafañe, meu muito obrigado pelas agradáveis noites viradas nos laboratórios e pelas produtivas conversas.

Agradeço a Deus por não me deixar desistir.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

8 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ashcroft, N. W., Mermin, D. N., Solid State Physics, Holt-Saunders International Editions, (1976)
- Bejan, A., Shape and Structure, from Engineering to Nature , Cambridge University Press; first edition (2000).
- Bejan, A. Lorente, S., Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering, *Applies Physics Reviews*, 100, 041301, (2006).
- Brad, H. *et al.*, “Bronchial anatomy,” *Virtual Hospital*, <http://www.vh.org/>, University of Iowa (2003).
- Carey, V.P., Mollendorf, J.C., The temperature field above a concentrated heat source on a vertical adiabatic surface, *Int. J. Heat Mass Transfer* 20 (1977) 1059–1067.
- Chen, L., Wei, S., Sun, F., Constructal entransy dissipation minimization for ‘volume-point’ heat conduction *J. Phys. D: Appl. Phys.* 41 (2008) 195506 (10pp).
- Chen, Q., Ren, J., Meng, J., Field synergy equation for turbulent heat transfer and its application, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 5334–5339.
- Chen, S., Liu, T., Chan, S., Leung, C., Chan, T., Experimental study of optimum spacing problem in the cooling of simulated electronic package, *Heat Mass Transfer* 37 (2001) 251–257.
- Chen, S., Liu, Y., An optimum spacing problem for three-by-three heated elements mounted on a substrate, *Heat Mass Transfer* 39 (2002) 3–9.
- Dias, T. J., Milanez, L. F., Natural convection due to a heat source on a vertical plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 1227–1232.

- Davis, G. D. V. Natural investigation of natural convection in square cavity: a benchmark numerical solution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 17, p. 474-482, 1996.
- Drude, P., *Annalen der Physik* 1, 306 (1900) 566-613.
- Fan, Z., Zhou, X., Luo, L., Yuan, W., Experimental investigation of the flow distribution of a 2-dimensional constructal distributor, *Experimental Thermal and Fluid Science* 33 (2008) 77–83.
- Fujii, T., Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source, *Int. J. Heat Mass Transfer* 6 (1963) 597–606.
- Guo, Z. Y., Zhu, H. Y., Liang, X. G., Entropy—A physical quantity describing heat transfer ability, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 2545–2556.
- Guo, Z. Y., Chen, Q., Irreversibility and optimization of transfer processes, *The Eighteenth International Symposium on Transport Phenomena*, 27-30 August, 2007, Daejeon, Korea.
- Hatami, N., Bahadorinejad, M., Experimental determination of natural convection heat transfer coefficient in a vertical flat-plate solar air heater, *Solar Energy*, 82 (2008) 903–910.
- Higuera, F.J., Ryazantsev, Y.S., Natural convection flow due to a heat source in a vertical channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45 (1977) 2207–2212.
- Landon, M.D., Campo, A., Optimal shape for laminar natural convective cavities containing air and heated from the side, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 26 (1999) 389–398.

- Liu, Y., Phan-Thien, N., An optimum spacing problem for three chips mounted on a vertical substrate in an enclosure, *Numer. Heat Transfer, Part A* 37 (2000) 613–630.
- Liu, Y., Phan-Thien, N., Leung, C.W., Chan, T.L., An optimum spacing problem for five chips on a horizontal substrate in a vertically insulated enclosure, *Comput. Mech.* 24 (1999) 310–317.
- Maliska, C. R., *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*, LTC, 2^a edição (2004).
- Milanez, L.F., Bergles, A.E., Studies on natural convection heat transfer from thermal sources on a vertical surface, in: *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference 3* (1986) 1347–1352.
- Ostrach, S. ,“Natural convection in enclosures”, *Journal of Heat Transfer*, **110**, 1175-1190 (1988).
- Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, First edition, (1980)
- Prigogine, I., *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*, Wiley, New York, Second edition 76-77 (1967).
- Ravine, T.L., Richards, D.E., Natural convection cooling of a finite-sized thermal source on the wall of a vertical channel, *ASME 84-WA/HT-90* (1990) 1–8.
- Reis, A. H., Miguel, A. F. , Aydin,M., Constructal theory of flow architecture of the lungs *Med. Phys.* 31(5) (2004) 1135-1140.
- Sathe, S., Sammakia, B., A review of recent developments in some practical aspects of air-cooled electronic packages, *Trans. ASME J. Heat Transfer* 120 (1998) 830–839.

Schneider, P.J., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, USA, pp. 338–339, (1955)

Silva, A.K., Lorente, S., Bejan, A., Optimal distribution of discrete heat sources on a wall with natural convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 203–214.

Silva, A.K., Lorenzini, G., Bejan, A., Distribution of heat sources in vertical open channels with natural convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48 (2005) 1462–1469.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ESTUDO DE CASO PELA ENTRÂNSIA

Considere o sistema térmico abaixo

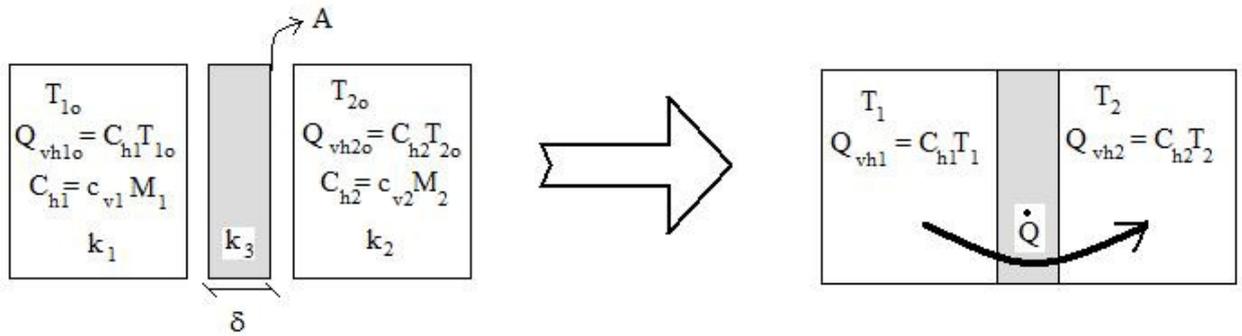


Figura A.1 – Diagrama do sistema térmica analisado

Conservação de energia térmica, ou cargas térmicas, é dado por

$$\dot{Q}_h = \frac{dQ_h}{dt} = -\frac{dQ_{vh1}}{dt} = \frac{dQ_{vh2}}{dt} \quad (A.1)$$

Pensando sobre entrância, a variação entrância no capacitor térmico 1 é igual, mas com o sinal oposto, a variação de entrância no capacitor térmico 2 somado a dissipação na resistência térmica 3.

$$\begin{aligned} \frac{d(E_{\dot{v}h1})}{dt} + \frac{d(E_{\dot{v}h2})}{dt} + \dot{Q}_h^2 R_h &= 0 \\ \frac{d(E_{\dot{v}h1})}{dT_1} \frac{dT_1}{dt} + \frac{d(E_{\dot{v}h2})}{dT_2} \frac{dT_2}{dt} + \dot{Q}_h^2 R_h &= 0 \\ Q_{vh1} \frac{dT_1}{dt} + Q_{vh2} \frac{dT_2}{dt} + \dot{Q}_h^2 R_h &= 0 \end{aligned} \quad (A.2)$$

Usando (A.1)

$$\dot{Q}_h = C_{h2} \frac{dT_2}{dt} = -C_{h2} \frac{dT_1}{dt} \quad (A.3)$$

O sinal negativo no terceiro membro da equação acima deve-se ao fato de que $dT_1/dt \leq 0$ e $\dot{Q}_h \geq 0$.

$$C_{h2}dT_2 = -C_{hl}dT_1 \rightarrow C_{h2}(T_2 - T_{2o}) = -C_{hl}(T_1 - T_{1o}) \quad (\text{A.4})$$

Integrando por quadratura (A.3) e usando em (A.2)

$$C_{hl}T_1 \frac{dT_1}{dt} - C_{h2}T_2 \frac{dT_2}{dt} + C_{hl}^2 \left(\frac{dT_1}{dt} \right) R_h = 0 \quad (\text{A.5})$$

Com (A.4) temos

$$\begin{aligned} T_1 + \frac{C_{hl}}{C_{h2}}T_1 - \frac{C_{hl}}{C_{h2}}T_{1o} - T_{2o} + C_{hl}R_h \frac{dT}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{\overset{\circ}{C}_h R_h}T_1 + \frac{dT_1}{dt} - \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl}C_{h2}} \frac{1}{R_h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

em que

$$\overset{\circ}{C}_h = \frac{C_{hl}C_{h2}}{C_{hl} + C_{h2}} \quad (\text{A.7})$$

Usando o fator integrante,

$$\mu = e^{\int \frac{1}{\overset{\circ}{C}_h R_h} dt} = e^{\frac{t}{\overset{\circ}{C}_h R_h}} \quad (\text{A.8})$$

na equação (A.6) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[T_1 e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} \right] &= \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl}C_{h2}} \frac{1}{R_h} e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} \\ \int_{T_{1o}}^{T_1 e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h}} d \left(T_1 e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} \right) &= \int_0^t \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl}C_{h2}} \frac{1}{R_h} e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} dt \\ -T_{1o} + T_1 e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} &= \frac{C_{hl}C_{h2}R_h}{C_{hl} + C_{h2}} \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl}C_{h2}R_h} \left(e^{t/\overset{\circ}{C}_h R_h} - 1 \right) \\ T_1 &= \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl} + C_{h2}} - \frac{C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o}}{C_{hl} + C_{h2}} e^{-t/\overset{\circ}{C}_h R_h} + T_{1o} e^{-t/\overset{\circ}{C}_h R_h} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Definindo a constante

$$\overset{\circ}{B}_1 = \frac{C_{hl}(C_{hl}T_{1o} + C_{h2}T_{2o})}{C_{hl} + C_{h2}} = \frac{C_{hl}(Q_{hl0} + Q_{vh2o})}{C_{hl} + C_{h2}} \quad (\text{A.10})$$

podemos reescrever (A.9)

$$T_1 = \frac{\dot{B}_1}{C_{hl}} + \frac{\dot{C}_h}{C_{hl}} (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\dot{C}_h R_h} \quad (\text{A.11})$$

Portanto

$$Q_{vh1} = C_{hl} T_1 = \dot{B}_1 + \dot{C}_h (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\dot{C}_h R_h} \quad (\text{A.12})$$

Para o capacitor térmico 2 o raciocínio é o mesmo.

$$Q_{vh2} = C_{h2} T_2 = \dot{B}_2 - \dot{C}_h (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\dot{C}_h R_h} \quad (\text{A.13})$$

em que

$$\dot{B}_2 = \frac{C_{h2} (C_{hl} T_{10} + C_{h2} T_{20})}{C_{hl} + C_{h2}} = \frac{C_{hl} (Q_{vh1} + Q_{vh2})}{C_{hl} + C_{h2}} \quad (\text{A.14})$$

Retomando a equação (3.3.3)

$$E_{vh} = M c_v T \frac{T}{2} = \frac{Q_{vh} T}{2} \quad (\text{A.15})$$

e tomando sua derivada com relação ao tempo, obteremos a taxa de dissipação de entrância. Para o corpo 1 temos

$$\begin{aligned} \dot{E}_{h1} &= \frac{d}{dt} (E_{vh1}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Q_{vh1} T_1 \right) \\ \dot{E}_{h1} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\dot{B}_1 - \dot{C}_h (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\dot{C}_h R_h} \right)^2 \frac{1}{C_{hl}} \right] \\ \dot{E}_{h1} &= \frac{-(T_{10} - T_{20})}{R_h} \left(\frac{\dot{B}_1}{C_{hl}} e^{-t/\dot{C}_h R_h} - \frac{\dot{C}_h}{C_{hl}} (T_{10} - T_{20}) e^{-2t/\dot{C}_h R_h} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Análogo para o corpo 2

$$\dot{E}_{h2} = \frac{(T_{10} - T_{20})}{R_h} \left(\frac{\dot{B}_2}{C_{h2}} e^{-t/\dot{C}_h R_h} - \frac{\dot{C}_h}{C_{h2}} (T_{10} - T_{20}) e^{-2t/\dot{C}_h R_h} \right) \quad (\text{A.17})$$

Para o corpo 3 temos

$$\dot{E}_\phi = \dot{Q}_h^2 R_h = (T_{10} - T_{20}) e^{-2\alpha / \dot{C}_h R_h} \quad (\text{A.18})$$

A eficiência na transferência de entrância é definida como a razão entre a variação de entrância no corpo 2 e no corpo 1

$$\eta = \frac{\dot{E}_{h2}}{\dot{E}_{h1}} = \frac{\dot{E}_{h1} - \dot{E}_h \phi}{\dot{E}_{h1}} = 1 - \frac{\dot{Q}_h^2 R_h}{T_1 \dot{Q}_h} = 1 - \frac{\dot{Q}_h R_h}{T_1} \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE UM METAL

Introdução

Os metais estão numa categoria especial no estudo de sólidos. Eles são excelentes condutores de calor e eletricidade; são ductíveis e maleáveis e apresentam brilho característico em suas superfícies quando pouco expostas com o ar. O estado metálico representa um dos estados fundamentais da matéria. Cerca de dois terços dos elementos são metais. O estudo dos metais também é importante para explicar os não-metais, por exemplo, a razão do cobre conduzir bem, enquanto sal comum, não.

No fim do século XIX, os físicos tentaram construir modelos simples do estado metálico e suas propriedades tanto qualitativa como quantitativamente. Apesar dos modelos pioneiros se mostrarem errados em certos aspectos, a contribuição deles para a "física do estado sólido" atual é grande.

Modelo de Drude

O modelo apresentado aqui foi construído logo após a descoberta do elétron em 1897 por J.J. Thomson. Tal descoberta teve impacto imediato nas teorias da estrutura da matéria, e acreditava-se que os elétrons estariam por trás do mecanismo de condução nos metais. O modelo de Drude, microscópico, baseava-se na teoria cinética de gases considerando o metal como um gás de elétrons neutro e diluído.

A simplicidade do modelo considera as moléculas do gás como esferas sólidas, que se deslocavam em linha reta até colidirem umas com as outras. O tempo envolvido numa única colisão é desprezível.

A figura C.1 traz o esquema imaginado por Drude para um átomo isolado(a), e para um metal(b), com átomos condensados.

A teoria de gases se baseia em apenas um tipo de partícula/molécula. No metal, imaginavam-se dois tipos: os de carga negativa, os elétrons, e os de carga positiva de mesmo módulo – compensando para neutralidade elétrica. Drude considerou que o íon positivo estaria preso (partícula mais pesada), imaginando-as imóveis. A dinâmica do modelo microscópico assim estaria nos elétrons: quando átomos de um elemento metálico se reuniam para formar um metal, os elétrons de valência, fracamente ligados com o íon, se

despediam de seus átomos de origem assumindo caráter itinerante, livre, tomando novo nome, elétrons de condução.

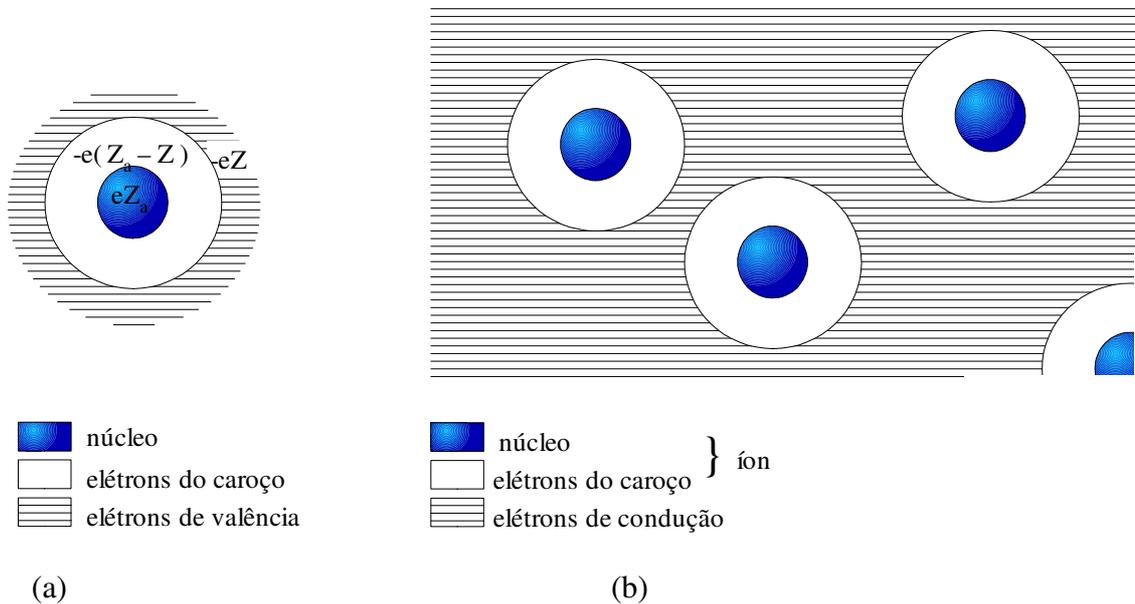


Figura B.1 – Representação do modelo de Drude

Considerações básicas do modelo de Drude:

1. Entre colisões, a interação de um certo elétron com os outros e os ions é desprezada. Resultando assim num movimento uniforme em linha reta de cada elétron quando na ausência de campos eletromagnéticos aplicados. Na presença deles, o comportamento é determinado pelas leis de Newton normalmente.
2. Colisões no modelo de Drude representam eventos instantâneos que abruptamente mudam a velocidade do elétron. Essa mudança acontece durante o processo de espalhamento do elétron com os caroços (ions), impenetráveis.
3. O elétron sofre uma colisão com probabilidade por unidade de tempo $1/\tau$, onde τ representa o tempo de relaxação, tempo de colisão, ou a média de tempo livre. Ou seja, um elétron tomado aleatoriamente num certo momento irá, em média, viajar por um tempo τ antes de sua próxima colisão. O modelo de Drude toma τ independente da posição e da velocidade do elétron.
4. Elétrons atingem equilíbrio térmico com o que os cerca apenas por meio de colisões. A direção final após a colisão é randômica e a velocidade depende da temperatura

no local onde houve a colisão. Mais quente o lugar de ocorrência da colisão, mais rápido um elétron típico irá sair.

Condutividade Térmica de um Metal

O modelo de Drude possibilitou explicar importantes aplicações de metais, como o estudo da condutividade elétrica contínua (DC) e alternada (AC), efeito Hall e magnetoresistência. Mas o resultado mais expressivo do modelo de Drude na época foi a explicação da lei empírica de Wiedemann e Franz (1853). Tal lei é baseada na razão entre a condutividade térmica e a elétrica κ/σ , que para um grande número de metais é diretamente proporcional à temperatura (T). A constante de proporcionalidade é praticamente igual para todos os metais quando submetidos à mesma temperatura.

A idéia de Drude foi tratar a corrente térmica que atravessa um metal intimamente relacionada com os elétrons de condução. Tal consideração baseia-se simplesmente no fato empírico que metais conduzem melhor que isolantes, de maneira que a condução térmica pelos íons, presente em ambos, é bem menor que a dos elétrons de condução, presente apenas em metais. A condução térmica pelo íon deve-se à sua pequena vibração em torno de sua posição de equilíbrio. Essa vibração é transmitida por toda rede cristalina metálica, criando ondas elásticas definidas como quasi-partículas conhecidas como fônons.

A definição de condutividade térmica provém do simples exemplo de uma barra metálica por onde a temperatura varia devagar espacialmente. Se não existissem fontes/dissipação de calor nas extremidades da barra para manter o gradiente de temperatura, então a extremidade quente iria esfriar, enquanto a fria esquentaria. O fluxo de energia térmica (cedida) é do mais quente ao mais frio e o gradiente de temperatura toma sentido oposto, a temperatura aumenta na região mais fria.

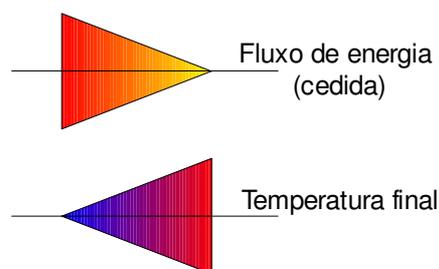


Figura B.2 – Relação do fluxo de energia e do gradiente de temperatura entre duas extremidades (quente e fria) de uma barra metálica

Logo, fornecendo-se calor para a extremidade na mesma velocidade em que o fluxo de energia é cedido, pode-se criar um estado de equilíbrio na qual o gradiente de temperatura e um fluxo uniforme de energia térmica existam. Define-se a densidade de corrente térmica \vec{j}_q , como um vetor paralelo à direção do fluxo de calor, cujo módulo representa a energia térmica por unidade de tempo que atravessa uma unidade de área perpendicular ao fluxo. Para gradientes de temperatura pequenos, a corrente térmica é proporcional à $-\nabla T$ (**Lei de Fourier**):

$$\vec{j}_q = -\kappa \nabla T \quad (\text{B.1})$$

Onde a constante de proporcionalidade κ é conhecida como condutividade térmica, e é definida positivamente, de maneira que a corrente térmica flua no sentido oposto ao gradiente de temperatura.

Considerando-se o caso mais simples unidimensional, onde a queda de temperatura é uniforme no sentido positivo do eixo x , no estado de equilíbrio a corrente térmica também irá fluir na direção x , com o módulo:

$$j_q = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad (\text{B.2})$$

O modelo de Drude atesta que depois de cada colisão um elétron aparece com velocidade referente à temperatura local, em outras palavras, quanto mais quente for o local de colisão, mais enérgico o elétron sairá. Por esta razão, mesmo que a média da velocidade eletrônica no ponto de origem de colisão seja nula, elétrons chegando em um ponto do lado de alta temperatura terão energias mais altas do que aqueles provenientes do lado de baixa temperatura. Assim, o fluxo resultante de energia térmica irá para o lado de baixa temperatura.

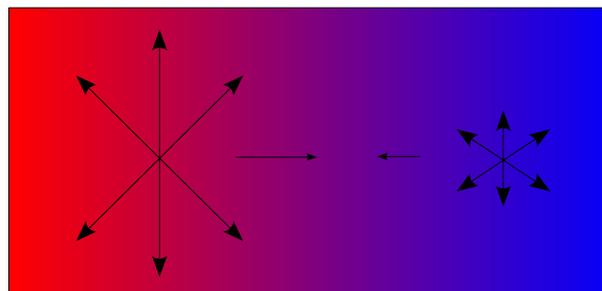


Figura B.3 – Representação dos elétrons provenientes da extremidade quente, à esquerda, e da fria, à direita.

Nesse quadro, pode-se estimar quantitativamente a condutividade térmica. Considerando-se o caso unidimensional, no qual os elétrons podem apenas se mover sobre o eixo x , de maneira que no ponto x , metade dos elétrons vem do lado de alta temperatura, e a outra metade, do lado de baixa. Se $\mathcal{E}(T)$ é a energia térmica por elétron num metal em equilíbrio à temperatura T , então um elétron cuja última colisão foi no ponto x' irá, em média, ter uma energia térmica dado por $\mathcal{E}(T(x'))$. Elétrons do lado de alta temperatura chegando em x terão, em média, tido suas últimas colisões na posição $x - v\tau$, e portanto, carregam energia térmica por elétron dada por $\mathcal{E}(T(x - v\tau))$. A contribuição desses elétrons para a densidade de corrente térmica em x será o número desses elétrons por unidade de volume, $n/2$, multiplicada por sua velocidade v , e por sua energia: $\frac{n}{2} \cdot v \cdot \mathcal{E}(T(x - v\tau))$. Os elétrons chegando em x pelo lado de baixa temperatura, por sua vez, contribuirão com $\frac{n}{2} \cdot (-v) \cdot \mathcal{E}(T(x + v\tau))$, pois estes elétrons estarão vindo do sentido positivo do eixo x , e se deslocando no sentido negativo. Adicionando ambas contribuições, tem-se:

$$j_q = \frac{n}{2} v [\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau))] \quad (\text{B.3})$$

Considerando que a variação da temperatura durante o percurso médio livre $l = v\tau$ é muito pequena, pode-se fazer a expansão em torno de x :

$$\mathcal{E}(T(x - v\tau)) \simeq \mathcal{E}(T(x)) + (x - v\tau - x) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{E}(T(x + v\tau)) \simeq \mathcal{E}(T(x)) + (x + v\tau - x) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dx} \quad (\text{B.5})$$

Assim,

$$j_q = n v^2 \tau \frac{d\mathcal{E}}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right) \quad (\text{B.6})$$

Para o caso tridimensional, pode-se aproveitar todo o desenvolvimento anterior e substituir v pela componente x da velocidade eletrônica \vec{v} , v_x , fazendo a média sobre todas as direções. Considerando-se o caso isotrópico, $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} v^2$, e como,

$$\begin{aligned} n \frac{d\varepsilon}{dT} &= \frac{N}{V} \frac{d\varepsilon}{dT} \\ &= \frac{1}{V} \frac{d(N\varepsilon)}{dT} \\ &= \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} \\ &\equiv c_v \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde N representa o número de elétrons, E , a energia total e c_v , o calor específico eletrônico, tem-se:

$$\vec{j}_q = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v (-\nabla T) \quad (\text{B.8})$$

Comparando com o resultado inicial,

$$\vec{j}_q = -\kappa \nabla T \quad (\text{B.9})$$

determina-se a condutividade térmica:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{3} v^2 \tau c_v \\ &= \frac{1}{3} l v c_v \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

É importante resaltar que trabalhou-se com situação simples de isotropia. Caso a energia térmica por elétron dependesse da direção em que os elétrons vêm, então a velocidade média também iria. Portanto, a princípio deveria se tomar tanto a contribuição da velocidade v do elétron como a energia térmica dependentes do local de última colisão.

Deve-se lembrar também que apesar dos elétrons serem partículas com carga não-nula, poderia se pensar em corrente elétrica. Mas experimentalmente, as medições da condutividade térmica são obtidas sob condições de circuitos abertos, onde nenhuma corrente elétrica fluiria. A possibilidade de haver corrente elétrica nesse caso seria possível se quantidade suficiente de carga se acumulasse na superfície da amostra de metal, gerando assim, um campo elétrico retardador, que se opusesse ao posterior acúmulo de carga, e logo, cancelando o efeito do gradiente de temperatura para a velocidade média eletrônica. Quando o estado de equilíbrio fosse alcançado, não haveria assim fluxo de corrente elétrica. Portanto, a hipótese de assumir a velocidade eletrônica nula no ponto nessa situação é correta. O fenômeno mencionado é conhecido como **efeito Seebeck**¹: um gradiente de temperatura numa longa e fina barra deve ser acompanhado de um campo elétrico que se opõe diretamente a esse gradiente. Tal campo é por convenção escrito como:

$$\vec{E} = Q \nabla T \quad (\text{B.11})$$

A constante de proporcionalidade Q é conhecida como potência térmica. A estimativa de Q também se baseia no caso unidimensional, relacionando o valor médio da velocidade eletrônica v no ponto x com o gradiente de temperatura:

$$\begin{aligned} v_Q &= \frac{1}{2} [v(x-v\tau) - v(x+v\tau)] = -\tau v \frac{dv}{dx} \\ &= -\tau \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Novamente a passagem para o caso tridimensional, é feito da mesma maneira, $v^2 \rightarrow v_x^2$

e com isotropia, $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} v^2$. Assim, o vetor será:

$$\vec{v}_Q = -\frac{\tau}{6} \cdot \frac{dv^2}{dT} \cdot \nabla T \quad (\text{B.13})$$

onde $\nabla v^2 \equiv \frac{dv^2}{dT} \cdot \nabla T$

¹ O caso análogo com campo magnético é conhecido por efeito Hall.

Enquanto o valor médio da velocidade devido ao campo elétrico é determinado pela interpretação: Considere um típico elétron no tempo zero. Seja t o tempo que se passou desde sua última colisão. Sua velocidade no tempo zero seria \vec{v}_0 imediatamente após sua colisão. A velocidade adicional,

$\frac{-e}{m} \vec{E} t$ proviria do campo elétrico \vec{E} . A equação de movimento é simplesmente:

$$\vec{F} = -e \vec{E} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^v d\vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} \int_0^t dt \quad (\text{B.14})$$

Considerando-se que o elétron assume direção aleatória após a colisão, não haverá contribuição de \vec{v}_0 ao se calcular o valor médio da velocidade eletrônica, restando apenas a contribuição do campo elétrico \vec{E} . A média de t é tomada como o tempo de relaxação τ , assim:

$$\vec{v}_E = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau \quad (\text{B.15})$$

Tal resultado combinado com a densidade de corrente, $\vec{j} = -ne\vec{v}$, leva à condutividade elétrica σ :

$$\vec{j} = \left(\frac{ne^2\tau}{m} \right) \vec{E} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \left(\frac{ne^2\tau}{m} \right) \quad (\text{B.16})$$

Lembrando que a condutividade elétrica é o inverso da resistividade, $\sigma = \frac{1}{\rho}$

Voltando às duas velocidades \vec{v}_Q e \vec{v}_E . Haverá estado de equilíbrio quando $\vec{v}_Q + \vec{v}_E = 0$, chegando à igualdade para o campo elétrico \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{6} \frac{m}{e} \frac{d\overline{v^2}}{dT} \nabla T \\ &= -\left(\frac{1}{3e} \right) \frac{d}{dT} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \nabla T \\ &= Q \nabla T \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Chegando a potência térmica:

$$Q = -\left(\frac{1}{3e}\right) \frac{d}{dT} \left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{c_v}{3ne} \quad (\text{B.18})$$

Resultando numa potência térmica Q também independente do tempo de relaxação. O modelo de Drude baseava-se na mecânica estatística clássica, apoiando-se na teoria cinética clássica de gases. Trabalhando-se com os valores clássicos para o calor específico ($c_v = \frac{3}{2}nk_B$) e energia cinética de um gás ($\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$), o modelo de Drude mostrou-se discrepante com o valor experimental esperado para Q . Embora conseguisse valor em acordo com $\frac{\kappa}{\sigma T}$, a lei de Wiedemann e Franz, havia dois erros inerentes à teoria clássica da ordem de 100 que acabavam se cancelando.

Correção do modelo de Drude

A correção do modelo de Drude e suas discrepâncias veio com o advento da mecânica estatística quântica, no lugar da clássica. O modelo posterior de Drude com correção da teoria quântica de sólidos é conhecida como modelo de Sommerfeld. Basicamente, a distribuição clássica da velocidade eletrônica de Maxwell-Boltzmann, utilizada por Drude, caracterizando o número de elétrons por unidade de volume na faixa entre \vec{v} e $\vec{v}+d\vec{v}$, $f_{MB}(\vec{v})d\vec{v}$, onde:

$$f_{MB}(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T} \quad n = \int d\vec{v} f(\vec{v}) \quad (\text{B.19})$$

foi substituída pela distribuição quântica de Fermi-Dirac,

$$f_{FD}(\vec{v}) = \frac{(m/\hbar)^3}{4\pi^3} \frac{1}{e^{(\frac{1}{2}mv^2 - k_B T_0)/k_B T} + 1} \quad (\text{B.20})$$

onde \hbar representa a constante de Planck h dividida por 2π e k_B , a constante de Boltzmann. Nesse caso, os elétrons são considerados partículas indistinguíveis que obedecem o princípio de exclusão de Pauli. Tal princípio a partir de tratamento probabilístico dos estados de energia que o elétron pode assumir e admissão do spin $1/2$ dos elétrons anuncia que não pode haver elétrons de mesmo estado energético em um mesmo nível de energia atômico.

No estudo quântico, um único elétron pode ser descrito por uma função de onda complexa $\psi(r)$, onde a quantização de energia naturalmente aparece quando descrito pela equação de difusão de Schrödinger sem potencial (livre), determinando um novo espaço, de momento k . Para um gás de elétrons livres e independentes os níveis energéticos de um elétron são especificados por um vetor de onda \vec{k} , dada por:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (\text{B.21})$$

A famosa equação de Schrödinger independente do tempo sem potencial:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r}) \quad (\text{B.22})$$

A interpretação física da função de onda $\psi(r)$ está relacionada com a probabilidade de se encontrar o elétron em um certo lugar dentro de um volume V . Quando integrado o seu quadrado no espaço total, espera-se 1, vínculo real:

$$1 = \int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 \quad (\text{B.23})$$

O extenso desenvolvimento da teoria quântica, com os modelos de Einstein e Debye, permitiu descrever corretamente o comportamento do calor específico dos metais. Para o simples caso do gás de elétrons, a contribuição eletrônica a baixas temperaturas é linear com a temperatura. Porém, com o aumento da temperatura, os graus de liberdade dos ions(fônons) dominam completamente na contribuição para o calor específico. Logo abaixo da temperatura ambiente verificou-se comportamento ao cubo com a temperatura. Enquanto, o resultado clássico de Dulong-Petit, em que o calor específico torna-se constante, é válido somente para altas temperaturas (linha vermelha no gráfico abaixo). As constantes γ e A abaixo são medidas experimentalmente.

$$c_v = \gamma T + AT^3 \quad (\text{B.24})$$

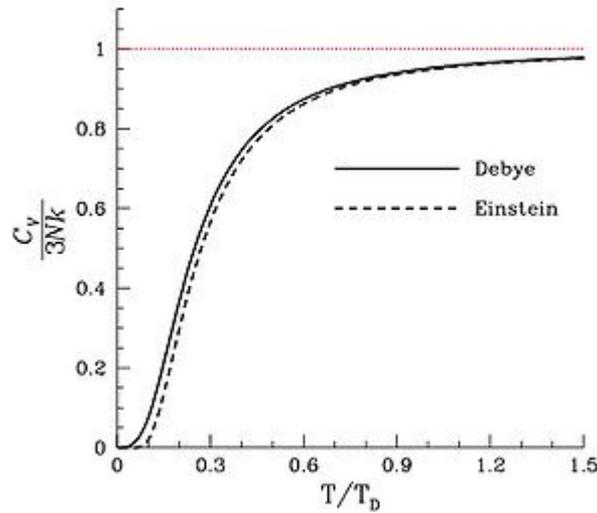


Figura B.4 – Comportamento do calor específico em relação à temperatura, segundo os modelos de Einstein, Debye e Dulong-Petit

Correção da condutividade térmica κ

E conforme mencionado anteriormente, a condutividade térmica descrita pelo modelo de Drude, como

$$\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v \quad (\text{B.25})$$

considerava os resultados clássicos para a velocidade v e calor específico c_v . Na correção do modelo de Drude trabalha-se com a velocidade de Fermi v_F , máxima velocidade que um elétron pode assumir à temperatura nula, definida por $v_F^2 = 2\varepsilon_F/m$, onde ε_F representa a fronteira/superfície da esfera de energia de Fermi, nível máximo possível para ocupação de um elétron à $T = 0$. Para elétrons livres o novo calor específico provindo da estatística de Fermi-Dirac,

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) n k_B \quad (\text{B.26})$$

quando comparado com o clássico $c_v = 3nk_B/2$, percebe-se um fator de $(\pi^2/3)(k_B T/\mathcal{E}_F)$, que à temperatura ambiente é da ordem de 10^{-2} , explicando-se a ausência de qualquer contribuição observada dos graus de liberdade eletrônicos para o calor específico de um metal à temperatura ambiente.

Substituindo-se os valores de c_v e ν , para a condutividade térmica κ e valendo-se do resultado da condutividade elétrica σ anterior, chega-se ao valor em excelente acordo com os valores experimentais para a lei de Wiedemann e Franz:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,44 \times 10^{-8} \text{ watt-ohm/K}^2 \quad (\text{B.27})$$

Correção da potência térmica Q

A simples substituição do novo calor específico $c_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F} \right) n k_B$ nos leva à:

$$Q = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B}{e} \left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F} \right) = -1,42 \left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F} \right) \times 10^{-4} \text{ volt/K} \quad (\text{B.28})$$

valor menor ao esperado pela estimativa clássica de Drude pelo fator $(k_B T/\mathcal{E}_F) \sim 0,01$ à temperatura ambiente.

Parte dos resultados aqui mencionados na aproximação do gás de elétrons livres são convincentes com os experimentais, sobretudo para os metais alcalinos, porém, por exemplo, para o caso da lei de Wiedemann-Franz, onde a teoria se mostra eficiente à altas e muito baixas temperaturas, incluindo a temperatura ambiente, à temperatura intermediária, ela fracassa, havendo dependência da temperatura T da razão $\frac{\kappa}{\sigma T}$. Tal fato está relacionado com o comportamento do calor específico dependente de T^3 , onde a contribuição dos ions assume papel importante. Conceitos mais complexos foram tomados para a descrição dos elétrons, observando sua interação no efeito de potenciais com diferentes métodos e novas aproximações, corroborando para uma descrição mais fiel.

APÊNDICE C – LINEARIZAÇÃO DO TERMO FONTE

Quando o termo fonte \tilde{S}^ϕ depender de $\tilde{\phi}$ é aconselhável expressá-lo de forma linear.

$$\tilde{S}^\phi = \tilde{S}_p^\phi \tilde{\phi}_p + \tilde{S}_c^\phi \quad (\text{C.1})$$

A escolha por uma relação linear provem do fato de que o objetivo final é transformar as equações diferenciais em aproximações algébricas que constituirão um sistema de equações lineares a ser resolvido computacionalmente. A opção de colocar o termo fonte como uma constante é descartada pois, a depender da equação estudada, o mesmo pode conter termos importantes cuja negligência resultaria na divergência do método.

No processo de linearização é importante que \tilde{S}_p^ϕ seja igual ou menor que zero. Esse cuidado irá garantir que na equação algébrica final todos os coeficientes sejam positivos. Se a dependência do termo fonte for

$$\tilde{S}^\phi = 7\tilde{\phi}_p^3 + 2 \quad (\text{C.2})$$

uma forma de linearizá-lo seria

$$\tilde{S}^\phi = (-3\tilde{\phi}_{p_0}^2)\tilde{\phi}_p + (2 + 10\tilde{\phi}_{p_0}^3) \quad (\text{C.3})$$

forçando a negatividade de \tilde{S}_p^ϕ . Note que o valor de \tilde{S}_p^ϕ foi arbitrário e essas escolhas podem deixar programa com uma convergência muito lenta.

Quando o coeficiente da variável é negativo o método recomendado (Patankar, 1980) consiste em expandir o termo fonte em torno da interação anterior por série de Taylor e adotar somente os dois primeiros termos.

$$\tilde{S}^\phi = \tilde{S}_o^\phi + \left(\frac{\partial \tilde{S}^\phi}{\partial \tilde{\phi}} \right) (\tilde{\phi}_p - \tilde{\phi}_{p_0}) \quad (\text{C.4})$$

Exemplificando, imagine um termo fonte dado por

$$\tilde{S}^\phi = -7\tilde{\phi}_p^3 + 2 \quad (\text{C.5})$$

linearizando

$$\begin{aligned} \tilde{S}^\phi &= -7\tilde{\phi}_{p_0}^3 + 2 - 21\tilde{\phi}_{p_0}^2(\tilde{\phi}_p - \tilde{\phi}_{p_0}) \\ \tilde{S}^\phi &= (-21\tilde{\phi}_{p_0}^2)\tilde{\phi}_p + (2 + 14\tilde{\phi}_{p_0}^3) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$