Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Teorema do Limite Central para Arranjos de Variáveis Aleatórias Linearmente Negativamente Dependente e Aplicações ao Bootstrap Dependente

por

Andrey Barbosa Guimarães

Brasília

2009

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Teorema do Limite Central para Arranjos de Variáveis Aleatórias Linearmente Negativamente Dependente e Aplicações ao Bootstrap Dependente

Por

Andrey Barbosa Guimarães*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de dezembro de 2009

Comissão Examinadora:

Prof. Ary Vasconcelos Medino - MAT/UnB (Orientador)

Profª. Daniele da Silva Baratela Martins Neto - MAT/UnB (Membro)

Profª. Viviane Simioli Medeiros Campos - MAT/UFRN (Membro)

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e CAPES.

Aos meus pais João e Neuraci, minha irmã Christina,

minha esposa Juliana e a minha filha Júlia

que ainda não nasceu mas que ja faz parte da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom supremo da vida. À todos os meus familiares, especialmente meus pais João e Neuraci, minha irmã Christina, minha esposa Juliana e minha sogra Terezinha, que me deram apoio em todos os momentos.

Ao meu orientador Ary Vasconcelos Medino, por sua disponibilidade, paciência e ajuda.

Aos professores da banca examinadora: Daniele da Silva Baratela Martins Neto e Viviane Simioli Medeiros Campos pelas correções e sugestões, que fizeram, enriquecendo este trabalho.

Aos colegas de graduação, Tiago, Jair, Jairo, Valdivino, Rogerio. Aos colegas de curso de verão: Tiago, Renato, pelo companherismo e amizade apesar de pouco tempo de convivência durante a seleção de mestrado.

Aos colegas do departamento de matemática da UnB e a galera do futebol da matemática: Nilton, Abilio, Walter, Fabiano, Robson (Robgol), Henrique, Gardel, Hudson, Tarcisio, Weseley, Marcelo, Jorge, Ricardo (gaucho). Ao meu amigo, Renato Ferreira, pelo companheirismo durante este período da pós-graduação e pelos assuntos variados de nossas conversas.

Aos professores da UFMT: Carlos Rodrigues, Marcos Donizete, Adilson Berlato e Daniel Guimarães, com quem troquei as primeiras palavras sobre o mestrado, pelo incentivo e presença amiga em todos os momentos.

Ao CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível manter-me em Brasília durante a elaboração deste trabalho.

À todos que, com um pensamento positivo, uma palavra amiga, alimentaram meus sonhos e contribuiram para esta grande conquista da minha vida.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de Dependência Negativa e algumas de suas propriedades. Mostramos o Teorema do Limite Central para arranjos de variáveis aleatórias Linearmente Negativamente Dependente e a normalidade assintótica para o método de reamostragem chamado de bootstrap dependente.

Palavras-chave: Teorema do Limite Central, Dependência Negativa, Bootstrap Dependente, Arranjos.

Abstract

In this work, we studied the concept of negative dependence and some of its properties. We show the Central Limit Theorem for arrays of random variables dependent negative linear and asymptotic normality for the method called bootstrap resampling dependent.

Key-words: Central Limit Theorem, Dependency Negative, Dependent Bootstrap, Arrays.

Sumário

Introdução

Na literatura existem várias versões do Teorema do Limite Central para variáveis aleatórias independentes. Uma importante versão é o TLC de Lindeberg (teo.1.16), que dá condições gerais para obter a convergência para uma normal, onde requer a verificação de uma condição, denominada de condição de Lindeberg (condição 1.11).

Neste trabalho baseado em Patterson, Smith, Taylor e Bozorgnia [13] e Smith, Taylor [15], vamos apresentar alguns conceitos de dependência entre variáveis aleatórias. Assim em busca de condições mais gerais para o TLC, estaremos enfraquecendo a hipótese de independência entre as v.a.'s. Uma interessante aplicação destes conceitos de dependência negativa é na obtenção da normalidade assintótica do bootstrap dependente em populações finitas (capítulo 2 e 3).

Entre os vários tipos de dependência temos o de variáveis aleatórias Negativamente Dependente-ND, que foi definido pela primeira vez para o caso bivariado por Lehmann [9] em 1966. O autor definiu que duas variáveis aleatórias são negativamente dependente se,

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y),$$

ou equivalentemente

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y),$$

para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$. Intuitivamente isto siguinifica que é menos provável que X

e Y, assumam conjuntamente valores pequenos ou grandes comparados com X' e Y' onde $X = X'$ em distribuição e $Y = Y'$ em distribuição, sendo que X' e Y' são variáveis aleatórias independentes.

Para uma coleção de três ou mais v.a.'s essas duas condições não são mais equivalentes. Através de exemplos (exemplos 1.2 e 1.3) mostramos que para uma coleção de três ou mais v.a.'s, ao satisfazer uma condição, não implicará na outra condição e vice-versa. Em 1981 Ghosh e Ebrahimi [5], generalizaram o conceito de variáveis aleatórias Negativamente Dependente estendendo para o caso multivariado (definição 1.4).

Variáveis aleátorias ND, quando estão sob combinações lineares a dependência negativa (exemplo 1.12) não é preservada. Isto motivou Newman [11] em 1980 a introduzir o conceito de variáveis aleatórias Linearmente Negativamente Dependente (LiND) (definição 1.13) onde a dependência negativa é preservada sob combinações lineares.

Um outro tipo de dependência mais forte que ND, é o de v.a.'s Negativamente Associadas-NA (definição 1.6), que foi formalmente introduzido por Joag-dev e Proschan [8] 1983, principalmente por razões de aplicações em teoria da confiabilidade, análise estatística multivariada e teoria da percolação.

No capítulo 1 estudaremos estes conceitos de dependências, apresentando algumas propriedades, onde o resultado principal será a obtenção do TLC para v.a's LiND sob certas hipóteses.

No TLC para v.a.'s LiND (teo. 1.17) apresentaremos as seguintes hipóteses,

$$s_n'^2 = Var\left(\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad \frac{1}{s_n'^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n'^2}\sum_{i=1}^{m_n} E(X_{ni}^2 I_{[|X_{ni}|>\epsilon s_n']}) = 0.$$

onde $\{X_{ni} : 1 \leq i \leq m_n, n \geq 1\}$ é um arranjo de variáveis aleatórias $LiND$ em cada linha tal que $EX_{ni} = 0$. A proposição 1.14, juntamente com a hipótese abaixo

$$\frac{1}{s_n^{'2}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) = 0$$

fornecem ferramentas importantes para a demostração do TLC proposto, onde poderemos tomar o arranjo $\{Z_{ni} : 1 \leq i \leq m_n, n \geq 1\}$ de v.a.'s independentes em cada linha e com a mesma distribuição que as v.a.'s LiND, com isso aplicaremos o TLC de Lindeberg para este arranjo, assim pelo lema 1.15 a convergência em distribuição de $\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{m_n} Z_{ni}$ para a $N(0,1)$ implicará na convergência de

$$\frac{1}{s_n^{'}} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

No capítulo 2, vamos aplicar os conceitos de dependências negativa ao bootstrap (bootstrap dependente), em populações finitas. Pode-se definir uma *população* como sendo uma coleção de todos os possíveis elementos, objetos ou medidas de interesse.

Em 1979 Efrom [6] introduziu a técnica de bootstrap (que é uma técnica de reamostragem) como uma ferramenta para estimar o erro padrão de uma estatística. Nas últimas três décadas houveram muitos estudos teóricos e aplicados sobre o bootstrap.

Este bootstrap tradicional é definido como uma amostra de tamanho m extraída com reposição a partir da amostra original, obtendo variáveis aleatórias independentes e identicamentes distribuídas. Assim, em muitas das justificativas teóricas do procedimento de bootstrap tradicional, são fundamentalmente relacionadas com as técnicas que envolvem variáveis aleatórias independentes.

O bootstrap dependente foi definido por Smith e Taylor [14] em 2001, como uma amostra de tamanho m, denotada por $X_{n1}^*, \ldots, X_{nm}^*$, extraída sem reposição a partir de uma coleção de kn itens, composta de k cópias de cada uma das observações amostrais, $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ onde $m \leq kn$. Um resultado muito importante do capítulo 2, é a propriedade de intercambiabilidade (definição 2.2) das $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$, pois será muito útil na obtenção da normalidade assintótica do booststrap dependente dada no capítulo 3.

No capítulo 3 iremos obter o Teorema do Limite Central da seguinte forma,

$$\frac{1}{s^*_n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(X^*_{nj} - \overline{X}_n \right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

onde $s^*_n = \sqrt{Var^* \left(\sum_{j=1}^{m} X^*_{nj} \right)} = \sqrt{m \frac{kn - m}{kn - 1}} S_n$, com a seguinte condição

$$0 < \inf_n \frac{m}{kn} \leq \sup_n \frac{m}{kn} < 1.$$

Smith e Taylor [14], verificaram que as v.a.'s $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ são ND e tem a propriedade de intercambiabilidade (def. 2.2). Além disso Joag-Dev e Proschan [8] mostraram que estas v.a.'s são NA. Será mostrado que em geral, um subconjunto de variáveis aleatórias formado a partir de retiradas sem reposição de um conjunto finito é ND, assim as observações amostrais $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$, extraídas sem reposição de uma população finita são v.a.'s ND.

Capítulo 1

Teorema do Limite Central para arranjos de v.a.'s LiND

1.1 Introdução

Neste capítulo vamos enfraquecer a hipótese de independência entre as variáveis aleatórias, introduzindo ao TLC o conceito de dependência negativa entre variáveis aleatórias. Assim o resultado principal deste capítulo será a obtenção do Teorema do Limite Central para o caso onde as variáveis aleatórias são Linearmente Negativamente Dependente-LiND (definição 1.13), que é mais um tipo de dependência negativa.

Na seção 1.2 vamos apresentar uma forma de dependência (definição 1.1 e 1.4) entre v.a.'s, que é o conceito de v.a.'s Negativamente Dependente-ND, definido pela primeira vez para caso bivariado, por Lehmann [9] em (1966) e multivariado por Ebrahimi e Ghosh [5] em (1981).

Apresentaremos na seção 1.3 o conceito de variáveis aleatórias negativamente associadas (definição 1.6), que foi formalmente introduzido por Joag-dev e Proschan [8] 1983, principalmente por razões de aplicações em teoria da confiabilidade, análise estatística multivariada e teoria da percolação. Observemos que um conjunto de variáveis aleatórias independentes é NA. Variáveis aleatórias NA são também LiND, assim o TLC obtido para o caso LiND também vale para NA, desde que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas (teorema 1.17).

Para finalizar obteremos na seção 1.4 o TLC para v.a.'s LiND em cada linha, com isto estaremos enfraquecendo a hipótese de independência entre v.a.'s.

1.2 Variáveis Aleatórias Negativamente Dependentes (ND)

Nesta seção definiremos o conceito v.a.'s ND para o caso bivariado, que foi definido pela primeira vez por Lehmann [9] em 1966 e multivariado definido por Ebrahimi e Ghosh [5] em 1981. Estes conceitos de dependência negativa serão úteis para o entendimento do restante do trabalho.

Definição 1.1 *Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias, negativamente dependente (ND) se*

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y) \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Além disso, dizemos que uma coleção de variáveis aleatórias são duas a duas negativamente dependente se para cada par de variáveis aleatórias da coleção, satisfaz a condição (1.1).

É importante notar que (1.1) é equivalente a:

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y) \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. De fato, observe que

$$P(X > x, Y > y) \;=\; 1 - P[(X \leq x) \cup (Y \leq y)]$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - (P(X \leq x) + P(Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)) \\
&= P(X > x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x, Y \leq y) \\
&\leq P(X > x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x)P(Y \leq y) \\
&= P(X > x) - P(Y \leq y)(1 - P(X \leq x)) \\
&= P(X > x) - P(Y \leq y)P(X > x) \\
&= P(X > x)P(Y > y).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Analogamente se mostra que a (1.2) implica em (1.1).

Temos então que as condições (1.1) e (1.2) são equivalentes. Além disso qualquer um dos sinais, $\leq$ ou $>$ podem ser substituídos por $<$ ou $\geq$. Ebrahimi e Ghosh [5] mostrou que (1.1) e (1.2) não são equivalentes para uma coleção de três ou mais variáveis aleatórias. Considere os seguintes exemplos.

Exemplo 1.2 Sejam X_1, X_2, e X_3 v.a's assumindo valores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 0)$ com probabilidade $1/4$ cada. Então,

$$P(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0) = 0 < \frac{1}{8} = P(X_1 > 0)P(X_2 > 0)P(X_3 > 0)$$

mas,

$$P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = P(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0).$$

Portanto somente a condição (1.2) foi satisfeita, isto mostra que (1.2) não implica em (1.1).

Exemplo 1.3 Sejam X_1, X_2, e X_3 v.a's assumindo valores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$ com probabilidade $1/4$ cada. Então,

$$P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = 0 < \frac{1}{8} = P(X_1 \leq 0)P(X_2 \leq 0)P(X_3 \leq 0).$$

mas,

$$P(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = P(X_1 > 0)P(X_2 > 0)P(X_3 > 0)$$

Logo a condição (1.1) não implica em (1.2). Assim para uma coleção de três ou mais variáveis aleatórias é exigido uma forma mais forte de dependência negativa que o caso bivariado, isto motivou Ebrahimi e Ghosh [5] a introduzirem a seguinte definição.

Definição 1.4 *Dizemos que $X_1, X_2, X_3, \ldots$ são variáveis aleatórias,*

(a) Negativamente Dependente inferiormente (NDI) se para qualquer $n \geq 2$

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i) \tag{1.3}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(b) Negativamente Dependente Superiormente (NDS) se para qualquer $n \geq 2$

$$P(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i) \tag{1.4}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(c) Negativamente Dependente se satisfazem (a) e (b).

Lema 1.5 *(Taylor, Patteson e Bozorgnia [17]). Se $X_1, X_2, \ldots X_n$ são variáveis aleatórias duas a duas ND, com EX_i, EX_j e EX_iX_j finitas com $i \neq j$. Então, $EX_iX_j \leq EX_iEX_j$ e $Cov(X_i, X_j) \leq 0$, $i \neq j$.*

Na próxima seção daremos a definição de v.a.'s negativamente associadas, que também é mais uma forma de dependência negativa, onde mostraremos que este conceito é mais forte que ND, em termos que NA implica em ND.

1.3 Variáveis aleatórias Negativamente associadas (NA) e Linearmente Negativamente Dependente (LiND)

O conceito de associação negativa entre v.a.'s foi formalmente definido pela primeira vez por Proschan e Joag-Dev [8] em 1983, motivado por aplicações em teoria de confiabilidade, análise estatística multivariada etc. Definiremos nesta seção v.a.'s NA, onde daremos algumas propriedades básicas que serão utilizadas no decorrer desta dissertação, definiremos também variáveis aleatórias LiND e aplicaremos este conceito de dependência negativa ao Teorema do Limite Central.

Definição 1.6 *Dizemos que $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são variáveis aleatórias Negativamente Associada (NA) se para cada par de subconjuntos disjuntos A_1, A_2 de $\{1, 2, \ldots, k\}$ tem-se*

$$Cov\{f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)\} \leq 0 \tag{1.5}$$

sempre que f_1 e f_2 forem funções não-decrescente em cada coordenada. Uma coleção infinita de v.a.'s é NA se, para cada subcoleção finita de v.a.'s é NA.

Proposição 1.7 *Se $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias negativamente associadas então são duas a duas negativamente dependente.*

Demonstração:

Aplicando $f_1(x) = I_{(\alpha,\infty)}(x)$ e $f_2(x) = I_{(\beta,\infty)}(x)$ em 1.5 vamos ter

$$P(X_i > \alpha, X_j > \beta) - P(X_i > \alpha)P(X_j > \beta) \leq 0.$$

Portando v.a.'s NA são duas a duas ND. ∎

Propriedade 1.8 *Funções não-decrescentes em cada coordenada definidas em subconjuntos disjuntos de um conjunto de variáveis aleatórias NA são NA.*

Demonstração:

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias NA e $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos disjuntos de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$, $f_1, f_2, \ldots f_m$ funções não-decrescentes. Vamos denotar

$$Y_j = f_j(X_i,\ i \in A_j)\ \ para\ \ j = 1, 2, \ldots m.$$

Considere agora B_1 e B_2 dois pares quaisquer de subconjuntos disjuntos de índices, $\{1, 2, \ldots, m\}$. Se g e h são funções não-decrescentes (em cada coordenada), então $g(f_j,\ j \in B_1)$ e $h(f_j,\ j \in B_2)$ são funções não-decrescentes em cada coordenada. Portanto pela definição 1.6, temos

$$Cov[g(Y_j,\ j \in B_1), h(Y_j,\ j \in B_2)] =$$

$$= Cov[g(f_j(X_i,\ i \in A_j)\ j \in B_1), h(f_j(X_i,\ i \in A_j)\ j \in B_2)] \leq 0.$$

Pois as v.a.'s $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são NA. Portanto $f_j(X_i,\ i \in A_j)\ \ para\ \ j = 1, 2, \ldots m$ são NA.

■

Propriedade 1.9 *Sejam $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos disjuntos de índices $\{1, \ldots, n\}$ e $f_1, \ldots, f_m$ funções não-decrescentes (em cada coordenada). Se as variáveis aleatórias, $X_1, \ldots, X_n$, forem NA, então:*

$$E\left[\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{m} E\left[f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)\right].$$

Demonstração:

Segue-se que pela propriedade 1.8, $f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)$ são NA para $1 \leq i \leq m$. Agora defina

$$g[f_1(X_j,\ j \in A_1)] = f_1(X_j,\ j \in A_1)\quad e$$

$$h[f_2(X_j,\ j \in A_2), \ldots, f_m(X_j,\ j \in A_m)] = f_2(X_j,\ j \in A_2) \ldots f_m(X_j,\ j \in A_m).$$

Então pela forma que foi definida, as funções g e h são não-decrescentes em cada coordenada, logo aplicando a definição 1.6 temos

$$Cov\left[g(f_1(X_j,\ j\in A_1)), h(f_2(X_j,\ j\in A_2),\dots,f_m(X_j,\ j\in A_m))\right] =$$

$$= E\left[g(f_1(X_j,\ j\in A_1))h(f_2(X_j,\ j\in A_2),\dots,f_m(X_j,\ j\in A_m))\right] \ -$$

$$-\ \ E\left[g(f_1(X_j,\ j\in A_1))\right] E\left[h(f_2(X_j,\ j\in A_2),\dots,f_m(X_j,\ j\in A_m))\right] \leq 0.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)\right] &= E\left[f_1(X_j,\ j\ \in\ A_1)\dots f_m(X_j,\ j\ \in\ A_m)\right] \leq \\ &\leq E\left[f_1(X_j,\ j\ \in\ A_1)\right] \times \\ &\times E\left[(f_2(X_j,\ j\ \in\ A_2)\dots f_m(X_j,\ j\ \in\ A_m)\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para o termo de (1.6) usa-se o mesmo argumento, definindo-se analogamente novas funções e aplicando novamente a definição 1.6, assim repetindo este procedimento vamos ter

$$E\left[\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{m} E\left[f_i(X_j,\ j\ \in\ A_i)\right].$$

■

Propriedade 1.10 *Se $X_1,\dots,X_n$ forem variáveis aleatórias negativamentes associadas então $X_1,\dots,X_n$ são v.a.'s ND.*

Demonstração:

Sejam $f_1(x) = I_{(a_1,\infty)}(x),\dots,f_n(x) = I_{(a_n,\infty)}(x)$, onde $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. Considere $A_1,\dots,A_n$ subconjuntos disjuntos de índices, $\{1,2,\dots,n\}$ e suponha sem perda de generalidade que os índices $1\in A_1,\ 2\in A_2, 3\in A_3,\dots,n\in A_n$ assim temos,

$f_1(X_1,\ 1 \in A_1), \ldots, f_n(X_n,\ n \in A_n)$. Então pela propriedade (1.9) segue-se que

$$P(X_1 > a_1, \ldots, X_n > a_n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > a_i)$$

Vamos provar que estas v.a.'s são NDI. Basta considerar $f_1(x) = I_{(\infty,a_1]}(x), \ldots, f_n(x) = I_{(\infty,a_n]}(x)$ onde $a_1, \ldots, a_n \ \in \mathbb{R}$, assim usando argumento análogo ao anteriormente e pela propriedade 1.9, temos

$$P(X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq a_i).$$

Portanto v.a.'s NA são também ND.

■

Na propriedade 1.10 vimos que NA implica em ND, mas a recíproca em geral não é verdadeira, no exemplo abaixo temos variáveis negativamente dependentes, que não satisfazem a condição de NA.

Exemplo 1.11 (Joag-Dev e Proschan [8]). Seja o vetor aleatório $\widetilde{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ onde cada variável aleatória X_i possui distribuição de Bernoulli com $P(X_i = 1) = 0,5$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Considere os pares (X_1, X_2) e (X_3, X_4) possuindo a mesma distribuição bivariada. A função de probabilidade conjunta de (X_1, X_2, X_3, X_4) é dada pela Tabela 1.1.

Podemos mostrar de acordo com a tabela 1.1, que (X_1, X_2, X_3, X_4) são variáveis aleatórias ND. Porém

$$P(X_i = 1,\ i = 1, 2, 3, 4) = 0,0577 > 0,0576 = P(X_1 = X_2 = 1)P(X_3 = X_4 = 1)$$

viola o conceito de NA.

		(X_1, X_2)	(X_1, X_2)	(X_1, X_2)	(X_1, X_2)	
		$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	marginal
(X_3, X_4)	$(0,0)$	$0,0577$	$0,0623$	$0,0623$	$0,0577$	0.24
(X_3, X_4)	$(0,1)$	$0,0623$	$0,0677$	$0,0677$	$0,0623$	0.26
(X_3, X_4)	$(1,0)$	$0,0623$	$0,0677$	$0,0677$	$0,0623$	0.26
(X_3, X_4)	$(1,1)$	$0,0577$	$0,0623$	$0,0623$	$0,0577$	0.24
	marginal	$0,24$	$0,26$	$0,26$	$0,24$	

Tabela 1.1: Distribuição conjunta (X_1, X_2, X_3, X_4) e suas marginais.

Considere agora o sequinte exemplo, onde mostra que variáveis aleátorias ND, não preservam a dependência negativa quando estão sob combinações lineares. Isto motivou Newman [11] em 1980 a introduzir o conceito de variáveis aleatórias linearmente negativamente dependente (LiND), definição 1.13.

Exemplo 1.12 (Patterson, Smith e Taylor [16]). Seja $\Omega = [0,1]$ com medida de Lebesgue sobre $[0,1]$. Consideremos os conjuntos $A_1 = [0, 1/2]$, $A_2 = [3/10, 9/10]$ $A_3 = [4/10, 6/10] \cup (8/10, 1]$ e seja $X_i = I_{A_i}$. Podemos mostrar que,

$$P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, X_3 \leq a_3) \leq \prod_{i=1}^{3} P(X_i \leq a_i) \tag{1.7}$$

e

$$P(X_1 > a_1, X_2 > a_2, X_3 > a_3) \leq \prod_{i=1}^{3} P(X_i > a_i). \tag{1.8}$$

Para todo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, assim as v.a.'s X_1, X_2, X_3 são ND. Por outro lado

$$P(X_1 + X_2 \leq 1, X_3 \leq 0) = \frac{5}{10} \; e \; P(X_1 + X_2 \leq 1)(X_3 \leq 0) = \frac{8}{10}\frac{6}{10}.$$

Portanto temos que,

$$P(X_1 + X_2 \leq 1, X_3 \leq 0) > P(X_1 + X_2 \leq 1) P(X_3 \leq 0).$$

Temos então que $X_1 + X_2$ e X_3 não são v.a's negativamente dependente.

Definição 1.13 *Dizemos que $X_1, X_2, X_3, \ldots$ são v.a's Linearmente Negativamente Dependente $(LiND)$ se para quaisquer subconjuntos disjuntos de índices A, B e constantes positivas λ_j's, temos que $\sum_{k\in A}\lambda_k X_k$ e $\sum_{l\in B}\lambda_l X_l$ são ND.*

Segue-se pela propriedade 1.9 que variáveis aleatórias negativamente associadas são também LiND.

1.4 T.L.C para arranjos de v.a.'s LiND

Nesta seção demostraremos o Teorema do Limite Central para arranjos de v.a.'s LiND em cada linha, mas primeiramente precisaremos de alguns resultados importantes para a demostração do teorema.

Para a proposição 1.14, vamos precisar do seguinte resultado conhecido como Identidade de Hoeffding e de sua generalização. Portanto de acordo com Lemamm [9], temos

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{XY} - F_X F_Y]dxdy \tag{1.9}$$

onde F_{XY} é a função de distribuição conjunta e F_X, F_Y são as marginais de X e Y. Assim temos de acordo com Nooghabi e Azarnoosh [12], que sua generalização é dada por,

$$Cov(f(X), g(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(y)[F_{XY} - F_X F_Y]dxdy \tag{1.10}$$

onde f, g são funções complexas de classe C^1 com f' e g' limitadas.

A proposição 1.14 é usada na demostração do resultado principal deste capítulo, teorema 1.17.

Proposição 1.14 *Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_m$ são v.a´s LiND. então*

$$\left|\Phi(r_1,\ldots,r_m) - \prod_{j=1}^{m}\Phi_j(r_j)\right| \leq \sum_{\substack{l,n=1\\ l<n}}^{m} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)|$$

onde $\Phi(r_1,\ldots,r_m) = E\left(e^{i\sum_{j=1}^{m} r_j X_j}\right)$, $\Phi_j(r_j) = E\left(e^{ir_jX_j}\right)$.

Demonstração:

Vamos provar por indução. O resultado é verdadeiro para $m = 1$ (trivial), agora para $m = 2$ segue-se por (1.9) e (1.10)

$$\begin{aligned}
\left|E\left(e^{ir_1X+ir_2Y}\right) - E\left(e^{ir_1X}\right)E\left(e^{ir_2Y}\right)\right| &= \left|Cov\left(e^{ir_1X}, e^{ir_2Y}\right)\right| = \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ir_1e^{ir_1x}ir_2e^{ir_2y}H_{X,Y}(x,y)dxdy\right| \leq \\
&= -|r_1r_2|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_{X,Y}(x,y)dxdy = \\
&= -|r_1r_2|\,Cov(X,Y) = \\
&= |r_1r_2Cov(X,Y)|
\end{aligned}$$

onde $H_{X,Y}(x,y) = [F_{XY} - F_XF_Y] \leq 0$, pois X e Y são v.a's ND.

Suponha que seja verdade para $m \leq M$. Assim para $m = M+1$ (por rearranjamento de índices se necessário), assuma que para algum $\epsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, e $m' \in \{1,\ldots,M\}$, $\epsilon r_l \geq 0$ para $1 \leq l \leq m'$ enquanto $\delta r_l \geq 0$ para $m'+1 \leq l \leq M+1$. Definimos,

$$X = \sum_{l=1}^{m'} \epsilon r_l X_l, \qquad Y = \sum_{l=m'+1}^{M+1} \delta r_l X_l.$$

Veja que $\sum_{l=1}^{m} r_l X_l = \epsilon X + \delta Y$ onde X e Y são v.a's ND, logo nós temos

$$\left|Ee^{i\sum_{l=1}^{m} r_l X_l} - \prod_{l=1}^{m} Ee^{ir_l X_l}\right| \leq$$

$$\leq \left|E\left(e^{i(\epsilon X+\delta Y)}\right) - E\left(e^{i\epsilon X}\right)E\left(e^{i\delta Y}\right)\right| +$$

$$+\left|E\left(e^{i\epsilon X}\right)E\left(e^{i\delta Y}\right) - E\left(e^{i\epsilon X}\right)\prod_{l=m'+1}^{M+1} E\left(e^{ir_l X_l}\right)\right| +$$

$$+\left|E\left(e^{i\epsilon X}\right)\prod_{l=m'+1}^{M+1} E\left(e^{ir_l X_l}\right) - \prod_{l=1}^{m'} E\left(e^{ir_l X_l}\right)\prod_{l=m'+1}^{M+1} E\left(e^{ir_l X_l}\right)\right| \leq$$

$$\leq |\epsilon\delta Cov(X,Y)| + \left|E\left(e^{i\delta Y}\right) - \prod_{l=m'+1}^{M+1} E\left(e^{ir_l X_l}\right)\right| +$$

$$+\left|E\left(e^{i\epsilon X}\right) - \prod_{l=1}^{m'} E\left(e^{ir_l X_l}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|Cov\left(\sum_{l=1}^{m'} \epsilon r_l X_l, \sum_{n=m'+1}^{M+1} \delta r_n X_n\right)\right| + \sum_{\substack{l,n=m'+1\\ l<n}}^{M+1} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| +$$

$$+\sum_{\substack{l.n=1\\ l<n}}^{m'} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| \leq \sum_{l=1}^{m'}\sum_{n=m'+1}^{M+1} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| +$$

$$+\sum_{\substack{l,n=m'+1\\ l<n}}^{M+1} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| + \sum_{\substack{l,n=1\\ l<n}}^{m'} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| =$$

$$= \sum_{\substack{l,n=1\\ l<n}}^{m} |r_l r_n Cov(X_l, X_n)| \qquad \blacksquare$$

Segue-se abaixo o lema e o Teorema do Limite Central para arranjos de v.a.'s independentes que serão utilizados na demostração do teorema 1.17.

Lema 1.15 *Seja* $(a_n,\ n \geq 1)$ *e* $(b_n,\ n \geq 1)$ *duas sequências numéricas com* $a_n \longrightarrow a$ *e* $b_n \longrightarrow b$ *quando* $n \longrightarrow \infty$*, onde* a *e* b *são finitas constantes, e seja* $X, X_1, X_2 \ldots$ *v.a.'s tais que* $X_n \longrightarrow X$ *em distribuição, então*

$$a_n X_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b.$$

Demonstração: Veja [4] página 273. ∎

Teorema 1.16 *(Teorema do Limite Central para arranjo de v.a.'s independentes). Seja* $\{X_{nk},\ 1 \leq k \leq r_n,\ n \geq 1\}$ *um arranjo de v.a.´s independente em cada linha e suponha que* $E(X_{nk}) = 0$*,* $\sigma^2_{nk} = E(X_{nk})^2$ *e* $s^2_n = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma^2_{nk}$*, se*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s^2_n} \int_{|X_{nk}| \geq \epsilon s_n} X^2_{nk} dP = 0 \tag{1.11}$$

(condição de Lindeberg). Então

$$\frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{r_n} X_{nk} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{1.12}$$

Teorema 1.17 *(Teorema do Limite Central para arranjos v.a.´s LiND)*

Seja $\{X_{ni} : 1 \leq i \leq m_n, n \geq 1\}$ *um arranjo de variáveis aleatórias LiND em cada linha tal que* $EX_{ni} = 0$*,*

$$s'^2_n = Var(\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}) \longrightarrow \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s'^2_n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s'^2_n} \sum_{i=1}^{m_n} E(X^2_{ni} I_{\left[|X_{ni}| > \epsilon s'_n\right]}) = 0.$$

Então, $\dfrac{1}{s'_n} \displaystyle\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}$ *converge em distribuição para uma v.a com distribuição normal padrão.*

Demonstração:

Temos que

$$s_n'^2 = \sum_{i=1}^{m_n} Var(X_{ni}) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{s_n'^2}{s_n'^2} = \frac{1}{s_n'^2} \sum_{i=1}^{m_n} Var(X_{ni}) + 2\frac{1}{s_n'^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 - 2\frac{1}{s_n'^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) = \frac{s_n^2}{s_n'^2},$$

onde $s_n^2 = \sum_{i=1}^{m_n} Var(X_{ni})$. Passando o limite com $n \to \infty$ teremos,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{s_n'^2} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - 2\frac{1}{s_n'^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \right) = \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{s_n'^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) = \\ &= 1 + 0 = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_n'} = 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{s_n'} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni} = \frac{s_n}{s_n'} \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}$ e $\frac{s_n}{s_n'} \longrightarrow 1$ quando $n \longrightarrow \infty$, para mostrar-mos que $\frac{1}{s_n'} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}$ converge em distribuição para a normal padrão, pelo lema 1.15, basta mostrar que o mesmo ocorre com $\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}$. Pela proposição 1.14 temos que

$$\begin{aligned} \left| Ee^{its_n^{-1} \sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}} - \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1} X_{ni}} \right| &\leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} \left| \frac{t}{s_n} \frac{t}{s_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \right| = \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m_n} \left| \frac{t^2}{s_n^2} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \right| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m_n} -\frac{t^2}{s_n^2} Cov(X_{ni}, X_{nj}) =$$

$$= -\frac{t^2}{s_n^2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m_n} Cov(X_{ni}, X_{nj}) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \left| Ee^{its_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}} - \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1}X_{ni}} \right| = 0. \tag{1.13}$$

Agora seja $\{Z_{ni} : 1 \leq i \leq m_n, n \geq 1\}$ um arranjo de variáveis aleatórias independente em cada linha, tal que Z_{ni} tem a mesma distribuição de X_{ni} para cada n e para cada i. Vamos verificar que este arranjo satisfaz a condição de Linderberg. De fato como Z_{ni} tem a mesma distribuição que X_{ni} para todo n e para todo i, então

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{m_n} Var(Z_{ni}) = \sum_{i=1}^{m_n} Var(X_{ni}) \geq s_n'^2.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{m_n} \int_{[|Z_{ni}|>\epsilon s_n]} Z_{ni}^2 dP = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{m_n} E(Z_{ni}^2 I_{[|Z_{ni}|>\epsilon s_n]}) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n'^2} \sum_{i=1}^{m_n} E(X_{ni}^2 I_{[|X_{ni}|>\epsilon s_n']}) = 0.$$

Além disso, $E(Z_{ni}) = 0$, $Var(Z_{ni}) = E(Z_{ni}^2)$ e $s_n^2 = \sum_{i=1}^{m_n} Var(Z_{ni})$. Logo pelo teorema 1.16, $\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{m_n} Z_{ni}$ converge em distribuição para $N(0,1)$.

Agora

$$\lim_{n\to\infty} Ee^{its_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}} = \lim_{n\to\infty} \left(Ee^{its_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}} - \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1}X_{ni}} + \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1}Z_{ni}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(Ee^{its_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}} - \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1}X_{ni}} \right) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m_n} Ee^{its_n^{-1}Z_{ni}} = 0 + e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Portanto, pelo Teorema de Continuidade de Lévy, $\dfrac{1}{s_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{m_n} X_{ni}$ converge em distribuição para uma normal padrão.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Bootstrap Dependente em Populações Finitas

2.1 Introdução

Em 1979 Efrom [6] introduziu a técnica de bootstrap como uma ferramenta para estimar o erro padrão de uma estatística e nas últimas três décadas houveram muitos estudos teóricos e aplicados sobre o bootstrap. Embora grande parte destes estudos tenham sido adaptações metodológicas, uma quantidade considerável de pesquisa tem sido direcionada para as deficiências e melhorias possíveis para a técnica básica de bootstrap.

O bootstrap tradicional é definido como uma amostra de tamanho n extraída com reposição a partir da amostra original. Nesta técnica de reamostragem (bootstrap), são obtidos variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Assim em muitas das justificativas teóricas do procedimento de bootstrap, são fundamentalmente relacionadas com as técnicas que envolvem variáveis aleatórias independentes.

O bootstrap dependente foi definido por Smith e Taylor [14] em 2001, como uma amostra de tamanho m, denotada por $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$, extraída sem reposição a partir de uma coleção de kn itens, composta de k cópias de cada uma das observações amostrais, $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ onde $m \leq kn$. Smith e Taylor [14], verificaram que as v.a.'s $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ são ND e tem a propriedade de intercambiabilidade (def. 2.2). Além disso Joag-Dev e Proschan [8] mostraram que estas v.a.'s são NA.

Em Estatística o termo *população* é denominado como o conjunto de todos os elementos que se deseja estudar. Note-se que o termo *população* é usado num sentido amplo e não significa, em geral, conjunto de pessoas. Pode-se definir uma *população* como sendo uma coleção de todos os possíveis elementos, objetos ou medidas de interesse.

Neste capítulo aplicaremos está técnica de bootstrap dependente em uma amostragem de populações finitas extraída sem reposição, cujos observações amostrais serão denotadas por $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$. Mostraremos que em geral, um subconjunto de variáveis aleatórias formado a partir de v.a.'s retiradas sem reposição de um conjunto finito é ND. Assim as observações amostrais $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$, extraídas sem reposição de uma população finita são v.a.'s ND.

Na seção 2.2 apresentaremos alguns resultados preliminares e propriedades básicas que serão importantes para o capítulo 3.

2.2 Conceito de Bootstrap Dependente

Normalmente assume-se que as observações amostrais $X_1, \ldots, X_n$ de uma amostra são variáveis aleatórias i.i.d, exceto quando for uma amostragem de uma população finita, pois na extração com reposição as diversas retiradas serão independentes, mas no processo sem reposição haverá dependência entre as retiradas, isto é, o fato de não recolocar o elemento retirado afeta a probabilidade do elemento seguinte ser retirado da população. A amostragem sem reposição é mais eficiente que a amostragem com reposição pois reduz a variabilidade, uma vez que não é possível retirar elementos extremos mais do que uma vez.

O Bootstrap dependente é definido como uma amostra de tamanho m, denotada por $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$, extraída sem reposição a partir de uma coleção de kn itens, composto de k cópias de cada uma das observações amostrais, $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ onde $m \leq kn$. Nesta seção vamos obter alguns resultados básicos de bootstrap dependente em populações finitas. Para analisar os resultados de amostragem de populações finitas é necessário considerar estruturas de arranjos, pois não é possível o limite com $n \longrightarrow \infty$ a partir de uma população finita. Portanto as observações amostrais $\{X_{ni} :\ 1 \leq i \leq n,\ n \geq 1\}$ serão um arranjo de valores aleatórios onde $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ são observações amostrais (extraídas sem reposição) de uma população finita P_n de tamanho N_n, onde assumiremos que $N_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Seja

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ni}, \qquad \overline{X}^*_{nm} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X^*_{nj}, \quad e \quad S^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ni} - \overline{X}_n\right)^2.$$

Além disso, definimos $E^*, \ \ Var^*, \ \ P^* \ \ e \ \ Cov^*$ como sendo a esperança , variância, probabilidade e covariância condicionais dado $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$.

Segue-se abaixo algumas propriedades que iremos utilizar no decorrer desta dissertação.

Propriedade 2.1

(a) $E^*\overline{X}^*_{nm} = \overline{X}_n$.

(b) $Var^*\left(X^*_{nj}\right) = S^2_n, \quad j = 1, \ldots, m.$

(c) $Cov^*\left(X^*_{ni}, X^*_{nj}\right) = \dfrac{-S^2_n}{kn-1} \ \ para \ \ cada \ \ 1 \leq j \neq i \leq n.$

(d) $Var^*\left(\overline{X}^*_{nm}\right) = \dfrac{kn-m}{kn-1}\dfrac{S^2_n}{m}$

Demonstração: (de **(a)**)

Observe que

$$P^*\left(X^*_{nj} = X_{ni}\right) = P\left(X^*_{nj} = X_{ni} | X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}\right) = \frac{1}{n}.$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Temos então

$$\begin{aligned} E^*(X^*_{nj}) &= \sum_{i=1}^{n} X_{ni} P^*(X^*_{nj} = X_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} X_{ni} \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ni} = \overline{X}_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E^*(\overline{X}^*_{nm}) &= E^*\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X^*_{nj}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E^*\left(X^*_{nj}\right) = \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_n = \frac{1}{m} m \overline{X}_n = \overline{X}_n. \end{aligned}$$

■

Demonstração: (de **(b)**)

Temos que

$$Var^*(X^*_{nj}) = E^*(X^*_{nj} - E^*(X^*_{nj}))^2 = E^*(X^*_{nj})^2 - (E^*(X^*_{nj}))^2, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Agora vamos encontrar a $E^*(X^*_{nj})^2$, visto que $P^*(X^*_{nj} = X_{ni}) = \frac{1}{n}$, para $j = 1, \ldots, m$. $i = 1, \ldots, n.$. Assim,

$$E^*(X^*_{nj})^2 = \sum_{i=1}^{n} X^2_{ni} P^*(X^*_{nj} = X_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} X^2_{ni} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2_{ni}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Var^*(X^*_{nj}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2_{ni} - (\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X^2_{ni} - \overline{X}^2_n) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X^2_{ni} - \overline{X}^2_n - 2X_{ni}\overline{X}_n + 2X_{ni}\overline{X}_n + \overline{X}^2_n - \overline{X}^2_n) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni}-\overline{X}_n)^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2X_{ni}\overline{X}_n-2\overline{X}_n^2)= \\
&= S_n^2+2\overline{X}_n^2-2\overline{X}_n^2= \\
&= S_n^2.
\end{aligned}
$$

■

Demonstração: (de **(c)**)

Primeiro note o seguinte. Podemos ter

$$(X_{n1}^*-E^*(X_{n1}^*))(X_{n2}^*-E^*(X_{n2}^*))=(X_{ni}-\overline{X}_n)^2,$$

com probabilidade

$$p_1^*=P^*\left((X_{n1}^*-\overline{X}_n)(X_{n2}^*-\overline{X}_n)=(X_{ni}-\overline{X}_n)^2\right)=\frac{k}{kn}\frac{(k-1)}{(kn-1)},\quad 1\leq i\leq n,$$

onde $\frac{k}{kn}$ é a probabilidade de se retirar $X_{n1}^*=X_{ni}$ para algum $1\leq i\leq n$, sabendo que cada X_{ni} com $1\leq i\leq n$, tem k cópias, dando um total de kn elementos no conjunto e $\frac{(k-1)}{(kn-1)}$ é a probabilidade de retirada de $X_{n2}^*=X_{ni}$, visto que X_{ni} para algum $1\leq i\leq n$, é cópia do primeiro elemento retirado, lembrando que as retiradas são sem reposição.

Ou também podemos ter

$$(X_{n1}^*-E^*(X_{n1}^*))(X_{n2}^*-E^*(X_{n2}^*))=(X_{ni}-\overline{X}_n)(X_{nj}-\overline{X}_n).$$

com probabilidade

$$p_2^*=P^*\left((X_{n1}^*-\overline{X}_n)(X_{n2}^*-\overline{X}_n)=(X_{ni}-\overline{X}_n)(X_{nj}-\overline{X}_n)\right)=\frac{k}{kn}\frac{k}{(kn-1)},$$

para $1\leq i\neq j\leq n$. Onde $\frac{k}{kn}$ é a probabilidade de se retirar um $X_{n1}^*=X_{ni}$ para $1\leq i\leq n$ e $\frac{k}{kn-1}$ é a probabilidade de se obter um $X_{n2}^*=X_{nj}$ para $1\leq i\neq j\leq n$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
Cov^*(X^*_{n1}, X^*_{n2}) &= E^*\left((X^*_{n1} - E^*(X^*_{n1}))(X^*_{n2} - E^*(X^*_{n2}))\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 p^*_1 + \sum_{i \neq j}(X_{ni} - \overline{X}_n)(X_{nj} - \overline{X}_n)p^*_2 = \\
&= \frac{k}{kn}\frac{(k-1)}{(kn-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 + \\
&+ \frac{k}{kn}\frac{k}{(kn-1)}\sum_{i \neq j}(X_{ni} - \overline{X}_n)(X_{nj} - \overline{X}_n) \\
&= \frac{k^2}{kn(kn-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 + \sum_{i \neq j}(X_{ni} - \overline{X}_n)(X_{nj} - \overline{X}_n)\right] - \\
&- \frac{k}{kn(kn-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 = \\
&= \frac{k^2}{kn(kn-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)\right)^2 - \frac{1}{kn-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 = \\
&= 0 - \frac{1}{kn-1}S^2_n = \frac{-S^2_n}{kn-1}.
\end{aligned}$$

Visto que

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)^2 + \sum_{i \neq j}(X_{ni} - \overline{X}_n)(X_{nj} - \overline{X}_n)\right] = \left(\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \overline{X}_n)\right)^2,$$

pelo teorema multinomial. Além disso, $Cov^*(X^*_{n1}, X^*_{n2}) = Cov^*(X^*_{ni}, X^*_{nj})$ para todo $i \neq j$.

■

Demonstração: (de **(d)**)

$$\begin{aligned}
Var^*\left(\overline{X}^*_{nm}\right) &= Var^*\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}X^*_{nj}\right) = \frac{1}{m^2}Var^*\left(\sum_{j=1}^{m}X^*_{nj}\right) = \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m}Var^*\left(X^*_{nj}\right) + \frac{1}{m^2}\sum_{i \neq j}Cov^*\left(X^*_{ni}, X^*_{nj}\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m} S_n^2 + \frac{1}{m^2}\sum_{i\neq j}\frac{-S_n^2}{kn-1} =$$
$$= \frac{1}{m}S_n^2 - m(m-1)\frac{1}{m^2}\frac{S_n^2}{kn-1} =$$
$$= \frac{knS_n^2 - S_n^2 - S_n^2 m + S_n^2}{m(kn-1)} = \frac{(kn-m)}{kn-1}\frac{S_n^2}{m}$$

■

Na proposição 2.3 e 2.4 mostraremos que as variáveis aleatórias do bootstrap dependente são negativamente dependente e possuem a propriedade de intercambiabilidade. Mas antes enunciaremos a seguinte definição.

Definição 2.2 *Dizemos que uma coleção de variáveis aleatórias* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *é intercambiável se para qualquer permutação* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *de* $(1, 2, \ldots, n)$*, a distribuição conjunta de* $(X_{i_1}, X_{i_2} \ldots, X_{i_n})$ *é a mesma que a de* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$*. Uma sequência de v.a.'s* $\{X_i,\ i \geq 1\}$ *é dita ser intercambiável, se para qualquer* n *finito, a coleção* $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ *é intercambiável.*

Proposição 2.3 *As variáveis aleatórias* $X^*_{n1}, X^*_{n2}, \ldots, X^*_{nm}$*, que resultaram de uma amostragem sem reposição do conjunto,*

$$\left\{\underbrace{X_{n1}, X_{n1}, \ldots, X_{n1}}_{k\ \text{cópias}}, \underbrace{X_{n2}, X_{n2}, \ldots, X_{n2}}_{k\ \text{cópias}}, \ldots, \underbrace{X_{nn}, X_{nn}, \ldots, X_{nn}}_{k\ \text{cópias}}\right\}$$

são variáveis aleatórias negativamente dependentes.

Demonstração:

Seja $\tau(x_i) = \sum_{j=1}^{n} I_{[X_{nj} \leq x_i]}$, onde $\tau(x_i)$ conta o número de observações amostrais menores ou iguais a x_i e $\mu(x_i) = \sum_{j=1}^{n} I_{[X_{nj} > x_i]}$, onde $\mu(x_i)$, conta o número de observações amostrais maiores que x_i. Pela definição 1.4 temos que mostrar que

$$P^*\left[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m\right] \leq \prod_{j=1}^{m} P^*\left[X^*_{nj} \leq x_j\right]. \tag{2.1}$$

e

$$P^*\left[X^*_{n1} > x_1, \ldots, X^*_{nm} > x_m\right] \leq \prod_{j=1}^{m} P^*\left[X^*_{nj} > x_j\right]. \tag{2.2}$$

Para uma sequência finita $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de números reais, denotemos

$$\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(m)}\right\}$$

seu rearranjo não-decrescente, que é $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(m)}$ e para qualquer $1 \leq j \leq m$ existem $1 \leq i \leq m$ tal que $x_i = x_{(j)}$.

Primeiramente vamos mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 1. Se $k\tau(x_{(j)}) \geq j$ para $1 \leq j \leq m$, então

$$P^*\left[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m\right] = \prod_{j=1}^{m} \frac{k\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{kn - (j-1)}$$

se $k\tau(x_{(j)}) < j$ para ao menos um $1 \leq j \leq m$ então esta probabilidade é 0.

Prova. Seja π a reordenação de $\{1, 2, \ldots m\}$ tal que $\pi(j) = i$ para $x_i = x_{(j)}$. Usando o Teorema da Probabilidade Composta (veja [7] página 16) temos

$$P^*\left[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m\right] =$$

$$= P^*\left[X^*_{n\pi(1)} \leq x_{(1)}, \ldots, X^*_{n\pi(m)} \leq x_{(m)}\right] =$$

$$= P^*[X^*_{n\pi(1)} \leq x_{(1)}]P^*[X^*_{n\pi(2)} \leq x_{(2)}|X^*_{n\pi(1)} \leq x_{(1)}]\times$$

$$\times \ldots \times P^*[X^*_{n\pi(m)} \leq x_{(m)}|X^*_{n\pi(1)} \leq x_{(1)}, \ldots X^*_{n\pi(m-1)} \leq x_{(m-1)}] =$$

$$= \frac{k\tau(x_{(1)})}{kn} \frac{k\tau(x_{(2)}) - 1}{kn - 1} \frac{k\tau(x_{(3)}) - 2}{kn - 2} \cdot \ldots \cdot \frac{k\tau(x_{(m)}) - (m-1)}{kn - (m-1)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \frac{k\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{kn - (j-1)}$$

Se $k\tau(x_{(j)}) < j$ para ao menos um $1 \leq j \leq m$, então no termo acima, ao menos uma dessas probabilidades calculadas será negativa, logo essa probabilidade é 0.

Agora observe que pela afirmação 1 temos

$$\begin{aligned} P^*\left[X_{n1}^* \leq x_1, \ldots, X_{nm}^* \leq x_m\right] &= \prod_{j=1}^{m} \frac{k\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{kn-(j-1)} \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^{m} \frac{k\tau(x_{(j)})}{kn} = \prod_{j=1}^{m} P^*[X_{nj}^* \leq x_j] \end{aligned}$$

Portanto estabelecemos (2.1). Para (2.2) usaremos argumento similar,

Afirmação 2. Se $k\mu(x_i) \geq m-i$ para todo $1 \leq i \leq m$, então,

$$P^*\left[X_{n1}^* > x_1, \ldots, X_{nm}^* > x_m\right] = \prod_{i=1}^{m} \frac{k\mu(x_{(i)}) - (m-i+1)}{kn-(m-i+1)}.$$

Se $k\mu(x_i) < m-i$ para ao menos um $1 \leq i \leq m$, então esta probabilidade é 0.

Prova. Usando o Teorema da Probabilidade Composta,

$$P^*\left[X_{n1}^* > x_1, \ldots, X_{nm}^* > x_m\right] =$$

$$\begin{aligned} & P^*\left[X_{n\pi(m)}^* > x_{(m)}, \ldots, X_{n\pi(1)}^* > x_{(1)}\right] = \\ & = P^*[X_{n\pi(m)}^* > x_{(m)}] P^*[X_{n\pi(m-1)}^* > x_{(m-1)} | X_{n\pi(m)}^* > x_{(m)}] \times \\ & \times \ldots \times P^*[X_{n\pi(1)}^* > x_{(1)} | X_{n\pi(m)}^* > x_{(m)}, \ldots X_{n\pi(2)}^* > x_{(2)}] = \\ & = \frac{k\mu(x_{(m)})}{kn} \frac{k\mu(x_{(m-1)}) - 1}{kn-1} \frac{k\mu(x_{(m-2)}) - 2}{kn-2} \cdot \ldots \cdot \frac{k\mu(x_{(1)}) - (m-1)}{kn-(m-1)} = \\ & = \prod_{j=1}^{m} \frac{k\mu(x_{(m-j+1)}) - (j-1)}{kn-(j-1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{k\mu(x_i) - (m-i+1)}{kn-(m-i+1)}. \end{aligned}$$

Veja que a probabilidade é 0 se $k\mu(x_i) < m-i$ para ao menos um $1 \leq i \leq m$.

Pela afirmação 2 segue-se que

$$\begin{aligned} P^*\left[X_{n1}^* > x_1, \ldots, X_{nm}^* > x_m\right] &= \prod_{i=1}^{m} \frac{k\mu(x_i) - (m-i+1)}{kn-(m-i+1)} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^{m} \frac{k\mu(x_i)}{kn} = \prod_{i=1}^{m} P^*[X_{nj}^* > x_j] \end{aligned}$$

Portanto por (2.1) e (2.2) temos que $X_{n1}^*, X_{n2}^*, \ldots, X_{nm}^*$ são variáveis aleatórias ND.

■

Em geral um subconjunto de variáveis aleatórias formado a partir de retiradas sem reposição de um conjunto finito é negativamente dependente. Portanto as observações amostrais $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ extraídas sem reposição de uma população finita P_n de tamanho N_n, são variáveis aleatórias negativamentes dependentes para cada n.

Proposição 2.4 *As variáveis aleatórias $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ do bootstrap dependente, são v.a.'s intercambiáveis.*

Demonstração:

Seja $\tau(x_i) = \sum_{j=1}^{n} I_{[X_j \leq x_i]}$, onde $\tau(x_i)$ conta o número de observações amostrais menor ou igual a x_i. Devemos mostrar que,

$$P^*[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m] = P^*[X^*_{ni_1} \leq x_1, \ldots, X^*_{ni_m} \leq x_m], \tag{2.3}$$

para qualquer permutação $(i_1, \ldots, i_m)$ de $(1, \ldots, m)$. Pela prova da afirmação 1 da proposição 2.3 temos que,

$$\begin{aligned} P^*\left[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m\right] &= \prod_{j=1}^{m} \frac{k\tau(x_{(j)}) - (j-1)}{kn - (j-1)} \\ &= P^*[X^*_{ni_1} \leq x_1, \ldots, X^*_{ni_m} \leq x_m], \end{aligned}$$

se $k\tau(x_{(j)}) \geq j$ para $1 \leq j \leq m$, e

$$P^*\left[X^*_{n1} \leq x_1, \ldots, X^*_{nm} \leq x_m\right] = 0 = P^*[X^*_{ni_1} \leq x_1, \ldots, X^*_{ni_m} \leq x_m],$$

se $k\tau(x_{(j)}) < j$ para ao menos um $1 \leq j \leq m$. Portanto $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ são v.a's intercambiáveis.

■

Vimos que $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ são variáveis aleatórias ND. Além disso Joag-Dev e Proschan [8] página 292, mostraram que ao considerar uma população finita formada por

N valores $x_1, \ldots, x_N$, as v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ onde $n \leq N$, representantes dos valores amostrais, no qual foram obtidas por amostragem aleatória sem reposição são NA. Assim em particular $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ são variáveis aleatórias negativamente associadas, pois foram extraídas sem reposição de um conjunto finito de tamanho kn onde $m < kn$. Logo estão valendo os resultados de v.a.'s NA que foram estabelecidos no capítulo 1.

O objetivo da próximo capítulo será a obtenção da normalidade assintótica do bootstrap dependente para populações finitas.

Capítulo 3

Normalidade Assintótica para o Bootstrap Dependente

3.1 Introdução

Vamos obter neste capítulo a normalidade assintótica de alguns estimadores de bootstrap dependentes, onde a principal aplicação é para amostragem de populações finitas.

Como no capítulo 2, o bootstrap dependente $X_{n1}^*, \ldots, X_{nm}^* \quad (m = m_n)$ é obtido através da extração sem reposição de uma coleção de kn itens composta por k cópias de cada uma das observação amostrais, $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$.

Na seção 3.2, o objetivo principal será a obtenção do Teorema do Limite Central da seguinte forma,

$$\frac{1}{s_n^*} \sum_{j=1}^{m_n} \left(X_{nj}^* - \overline{X}_n \right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

onde $s_n^* = \sqrt{Var^* \left(\sum_{j=1}^{m} X_{nj}^* \right)} = \sqrt{m \dfrac{kn - m}{kn - 1}} S_n$, com a seguinte condição

$$0 < \inf_n \frac{m}{kn} \leq \sup_n \frac{m}{kn} < 1. \tag{3.1}$$

A condição (3.1) fornece leve restrições para aplicação onde m deve ser menor que kn devida a natureza dos procedimentos dependentes de amostragem. De acordo com Smith e Taylor [15], se $m << kn$ resultaria em muita pouca reamostragem e consequentemente não seria realista a utilização da técnica de bootstrap dependentes.

Neste capítulo a partir do lema 3.4, iremos usar a seguinte notação, seja $Y_{ni} = X^*_{ni} - \overline{X}_n$ onde $X^*_{n1}, \ldots, X^*_{nm}$ é a amostra de bootstrap dependente definida como anteriormente. Além disso, para simplificar a notação, a esperança condicional de $f(X^*_{ni} - \overline{X}_n)$ dado $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ ($E^* f(X^*_{ni} - \overline{X}_n)$), será denotado por $Ef(Y_{ni})$.

3.2 Normalidade Assintótica para o Bootstrap Dependente

A prova do Teorema do Limite Central será realizada com oito lemas preliminares e um teorema. O primeiro lema será uma lei forte dos grandes números para v.a.'s ND, mas antes enunciaremos a seguinte definição.

Definição 3.1 *Seja* $\{X_n; n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias. Dizemos que* $\{X_n; n \geq 1\}$ *converge para* 0 *completamente se para todo* $\varepsilon > 0$*, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty.$$

É possível mostrar que a convergência completa implica em convergência quase-certa utilizando o lema de Borel-Cantelli. A recíproca é verdadeira quando as v.a.'s forem duas a duas independentes. Para as demostrações, ver [3] p.224.

Lema 3.2 *Seja* $\{X_{ni}; 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ *um arranjo de variáveis aleatórias negativamente dependente em cada linha tal que* $\sup_{ni} E|X_{ni}|^{2p+\delta} < \infty$*, para algum* $\delta > 0$*,*

$0 < p < 2$. *Então*

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} X_{ni} \longrightarrow 0 \quad \textit{completamente} \tag{3.2}$$

Demonstração: Para a demostração consulte [16] teorema 3.1 e observação (2).

■

O lema 3.2 fornece resultado importante na obtenção de (3.3) e (3.4) , que será utilizado no lema seguite, conduzindo ao T.L.C. desejado.

Lema 3.3 *Seja* $\{|X_{ni}|\,;\ 1 \le i \le n,\ n \ge 1\}$ *um arranjo de variáveis aleatórias ND em cada linha tal que* $\sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$ *para algum* $\delta > 0$ *e* $EX_{ni} = 0$ *para* $1 \le i \le n$. *Então para* $d \ge 3$

$$\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n} |X_{ni}|^d \longrightarrow 0 \quad q.c. \tag{3.3}$$

e

$$\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n} \left|X_{ni} - \overline{X}_n\right|^d \longrightarrow 0 \quad q.c. \tag{3.4}$$

onde $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{ni}$.

Demonstração:

Assuma que $\delta < 4$, e escolha um $\gamma \in (0,1)$ tal que $\dfrac{4+\delta/2}{1-\gamma/2} \le 4 + \dfrac{3\delta}{4}$ e $\dfrac{d-\gamma}{2+\delta/4} > 1$. Então

$$\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n} |X_{ni}|^d = \frac{n^{\frac{d-\gamma}{2+\delta/4}}}{n^{d/2}}\frac{1}{n^{\frac{d-\gamma}{2+\delta/4}}}\sum_{i=1}^{n} |X_{ni}|^d \longrightarrow 0 \quad q.c. \tag{3.5}$$

pelo lema 3.2, quando $0 < \dfrac{2+\delta/4}{d-\gamma} < 1$ visto que,

$$\begin{aligned}\sup_{n,i} E|X_{ni}|^{d\left(2\left(\frac{2+\delta/4}{d-\gamma}+\epsilon\right)\right)} &= \sup_{n,i} E|X_{ni}|^{\frac{4+\delta/2}{1-\gamma/d}+\frac{\delta}{4}} \le \\ &\le 1 + \sup_{n,i} E|X_{ni}|^{\frac{4+\delta/2}{1-\gamma/2}+\frac{\delta}{4}} \le 2 + \sup_{n,i} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty,\end{aligned}$$

onde tomamos $\epsilon = \delta/8d$, portanto (3.3) está provado. Para (3.4), observe que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}-\overline{X}_n|^d \leq \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(|X_{ni}|+|\overline{X}_n|\right)^d \leq \\
&\leq \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{d}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|X_{nj}|^s|\overline{X}_n|^{d-s} \leq \\
&\leq \sum_{s=0}^{d-1}\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|X_{nj}|^s|\overline{X}_n|^{d-s} + \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{nj}|^d.
\end{aligned}$$

Onde $\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{nj}|^d$ converge para 0 por (3.3). Para $s = 0, \ldots, d-1$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|X_{nj}|^s|\overline{X}_n|^{d-s} \leq \\
&\leq \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}\left(1+|X_{nj}|^d\right)|\overline{X}_n|^{d-s} = \\
&= \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|\overline{X}_n|^{d-s} + \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|\overline{X}_n|^{d-s}\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{nj}|^d = \\
&= \frac{1}{n^{(d-2)/2}}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|\overline{X}_n|^{d-s} + \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}|\overline{X}_n|^{d-s}\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{j=1}^{n}|X_{nj}|^d,
\end{aligned}$$

converge para 0 q.c. por (3.3) pois $d \geq 3$ e $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{ni} = \overline{X}_n \longrightarrow 0$ pelo lema 3.2, pois tomando $p = 1$ temos $\sup_{ni} E|X_{ni}|^{2+\delta} \leq 1 + \sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$.

Portanto para $d \geq 3$

$$\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}-\overline{X}_n|^d \quad \textit{converge para } 0 \quad \textit{q.c.}$$

■

Afirmação: Podemos também aplicar o lema 3.2 mostrando que,

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{nj} - \overline{X}_n)^2 \ \ limitado \ \ q.c. \tag{3.6}$$

Demonstração:

De fato, seja $\{X_{ni}^2 : \ 1 \leq i \leq n, \ \ n \geq 1\}$ um arranjo de v.a.'s ND em cada linha e $\sup_{n,i} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$ para algum $\delta > 0$, logo $\sup_{n,i} E|X_{ni}|^{4+\delta} = M < \infty$, isso implica que $EX_{ni}^2 \leq 1 + \sup_{n,i} E|X_{ni}|^{4+\delta} = 1 + M < \infty$. Temos então

$$\begin{aligned}
E(X_{n1}^* - EX_{n1}^*)^2 &\leq EX_{n1}^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ni}^2 = \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ni}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}^2\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_{ni}^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni}^2 - EX_{ni}^2) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+M) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni}^2 - EX_{ni}^2) + (1+M) \longrightarrow (1+M) \ \ q.c.
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$, pelo lema 3.2. Visto que, para $p = 1$ e tomando $\epsilon = \delta/2$ obtemos

$$\sup_{ni} E(X_{ni}^2)^{2+\epsilon} = \sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+2\epsilon} = \sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty.$$

Portanto

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{nj} - \overline{X}_n)^2 = E|X_{n1}^* - EX_{n1}^*|^2 \ \ limitado \ \ q.c.$$

∎

O lema abaixo é uma extenção de (3.3) e (3.4), onde os $l_i^{\prime}s$ são inteiros não negativos. Agora vamos usar a seguinte notação, seja $Y_{ni} = X_{ni}^* - \overline{X}_n$, logo $EY_{ni} = 0$ para todo n e i.

Lema 3.4 *Se* $\sup_{ni} E\left|X_{ni}\right|^{4+\delta} < \infty$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(t-j)/2}k^{-j/2}} E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^{l_i}\right) = 0 \ q.c \tag{3.7}$$

onde $t = \sum_{i=1}^{d}(l_i - 2)^+ \geq 1$ *e* j *é o número de* $l_i^{\prime}s$ *tais que* $l_i = 1$.

Demonstração:

Primeiro note que $|Y_{n1}|, |Y_{n2}|, \ldots, |Y_{nd}|$ são NA onde $|Y_{ni}|$ pode ser considerada como o i-ésima amostra retirada sem reposição do conjunto,

$$\left\{ \underbrace{|X_{n1} - \overline{X}_n|, \ldots, |X_{n1} - \overline{X}_n|}_{k \text{ itens}}, \ldots, \underbrace{|X_{nn} - \overline{X}_n|, \ldots, |X_{nn} - \overline{X}_n|}_{k \text{ itens}} \right\}.$$

Portanto $|Y_{n1}|^{l_1}, |Y_{n2}|^{l_2}, \ldots, |Y_{nd}|^{l_d}$ são NA. Vamos provar (3.7) pelo método de indução.

Assim para $j = 0$, temos

$$0 \leq \frac{\left| E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^{l_i}\right)\right|}{n^{t/2}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{E\,|Y_{ni}|^{l_i}}{n^{\frac{1}{2}(l_i-2)^+}} \right) \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

quando $n \longrightarrow \infty$, visto que para $0 \leq l_i \leq 2$, $E\,|Y_{ni}|^{l_i} \leq max\left\{1, S_n^2, |S_n|\right\}$ e para $l_i \geq 3$ temos $\dfrac{E\,|Y_{ni}|^{l_i}}{n^{\frac{1}{2}(l_i-2)^+}} \longrightarrow 0$ por (3.4). Seja $\{z_1, \ldots, z_{kn}\}$ os valores observados do seguinte conjunto

$$\underbrace{X_{n1} - \overline{X}_n, \ldots, X_{n1} - \overline{X}_n}_{k \text{ items}}, \ldots, \underbrace{X_{nn} - \overline{X}_n, \ldots, X_{nn} - \overline{X}_n}_{k \text{ items}}.$$

Assumimos (sem perda de generalidade) que $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_d$. Então para $j = 1$ implica que $l_d = 1$ e $l_j \geq 2$ para $1 \leq j \leq d-1$. Temos

$$EY_{n1} = \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{kn} z_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{nj} - \overline{X}_n) = 0$$

então,

$$E\left[\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i}\right) Y_{nd}\right) |Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{n,d-1} = z_{i_{d-1}}\right] =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^{l_s} E\left(Y_{nd}|Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{n,d-1} = z_{i_{d-1}}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^{l_s} \left[\sum_{j=1}^{kn} z_j - (z_{i_1} + \ldots + z_{i_{d-1}}) \right] \frac{1}{kn-(d-1)} =$$

$$= \frac{-\prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^{l_s}}{kn-(d-1)} (z_{i_1} + \ldots + z_{i_{d-1}}) =$$

$$= \frac{-1}{kn-(d-1)} [z_{i_1}^{l_1+1} z_{i_2}^{l_2} \ldots z_{i_{d-1}}^{l_{d-1}} + \ldots + z_{i_1}^{l_1} z_{i_2}^{l_2} \ldots z_{i_{d-1}}^{l_{d-1}+1}]. \tag{3.9}$$

logo

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^{l_i}\right) &= E\left(E\left[\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i}\right) Y_{nd}\right) | Y_{n1}, \ldots, Y_{n,d-1}\right]\right) = \\ &= E\left(\frac{-1}{kn-(d-1)} \left[Y_{n1}^{l_1+1} Y_{n2}^{l_2} \ldots Y_{n,d-1}^{l_{d-1}} + \ldots + Y_{n1}^{l_1} \ldots Y_{n,d-1}^{l_{d-1}+1}\right]\right) = \\ &= \frac{-1}{kn-(d-1)} \sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i'}\right) \end{aligned}$$

onde $\sum{}'$ é a soma sobre todos os $(l_1', \ldots, l_{d-1}')$ tal que $\sum_{i=1}^{d-1} l_i' = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} l_i = \sum_{i=1}^{d} l_i$. Além disso, como $l_j \geq 2$ para $1 \leq j \leq d-1$ e $l_d = 1$, então $\sum_{j=1}^{d} (l_j - 2)^+ = \sum_{i=1}^{d-1} (l_i - 2)^+$. Segue-se por (3.8),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^{l_i}\right)\right|}{n^{(t-1)/2} k^{-1/2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(kn)^{1/2} E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^{l_i}\right)\right|}{n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}(l_i-2)^+}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(kn)^{1/2} \sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i'}\right)\right|}{(kn-(d-1))\, n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d-1}(l_i-2)}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(k)^{1/2} n \sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i'}\right)\right|}{(kn-(d-1))\, n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d-1}(l_i-2)} n^{1/2}} \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{k^{1/2} n}{(kn-(d-1))} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum{}' \left|E\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^{l_i'}\right)\right|}{n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d-1}(l_i'-2)^+}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que (3.7) é verdadeiro para $j = 0$ e $j = 1$.

Seja $h = d - j$, suponha que (3.7) é verdadeiro para $j = b$ e $j = b - 1$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(t-b)/2}k^{-b/2}} \left(\prod_{i=1}^{h} Y_{ni}^{l_i} \prod_{j=h+1}^{h+b} Y_{nj} \right) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(t-(b-1))/2}k^{-(b-1)/2}} \left(\prod_{i=1}^{h+1} Y_{ni}^{l_i} \prod_{j=(h+1)+1}^{(h+1)+(b-1)} Y_{nj} \right) = 0$$

onde $t = \sum_{i=1}^{h} (l_i - 2)^+$ visto que $l_i = 1$ para $i > h$. Logo para $j = b + 1$,

$$E\left[\left(\prod_{i=1}^{h} Y_{ni}^{l_i} \prod_{j=h+1}^{h+b} Y_{nj} \right) Y_{nd} | Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{n(h+b)=z_{i_{h+b}}} \right] =$$

$$= \prod_{s=1}^{h} z_{i_s}^{l_s} \prod_{s=h+1}^{h+b} z_{i_s} E\left(Y_{nd} | Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{n(h+b)} = Z_{i_{(h+b)}} \right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{h} z_{i_s}^{l_s} \prod_{s=h+1}^{h+b} z_{i_s} \left[\sum_{i=1}^{kn} z_i - \sum_{j=1}^{h+b} z_{i_j} \right] \frac{1}{kn - (d-1)} =$$

$$= \frac{-1}{kn - (d-1)} \prod_{s=1}^{h} z_{i_s}^{l_s} \prod_{s=h+1}^{h+b} z_{i_s} \left(\sum_{j=1}^{h+b} z_{i_j} \right) =$$

$$= \frac{-1}{kn - (d-1)} \left[\prod_{s=1}^{h} z_{i_s}^{l_s} \prod_{s=h+1}^{h+b} z_{i_s} \left(\sum_{j=1}^{h} z_{i_j} \right) + \prod_{s=1}^{h} z_{i_s}^{l_s} \prod_{s=h+1}^{h+b} z_{i_s} \left(\sum_{j=h+1}^{h+b} z_{i_j} \right) \right].$$

Onde $\sum_{j=1}^{kn} z_j = 0$. Então pela propriedade de intercambiabilidade, vamos ter

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} Y_{ni}^{l_i} \prod_{j=h+1}^{h+b+1} Y_{nj} \right) =$$

$$= E\left[E\left(\left(\prod_{i=1}^{n} Y_{ni}^{l_i} \prod_{j=h+1}^{h+b} Y_{nj} \right) Y_{n,(h+b+1)} | Y_{n1}, \ldots, Y_{n(h+b)} \right) \right] =$$

$$= \frac{-1}{kn - (d-1)} \sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{h} Y_{ni}^{l_i'} \prod_{j=h+1}^{h+b} Y_{nj} \right) +$$

$$+\frac{-b}{kn-(d-1)}E\left(\prod_{i=1}^{(h+1)} Y_{ni}^{l_i}\prod_{j=(h+1)+1}^{(h+1)+(b-1)} Y_{ni}\right). \quad (pela\ \ intercambiabilidade)$$

Novamente $\sum'$ e a soma sobre todos $\{l_1^{'},\dots,l_h^{'}\}$ tal que $t^{'}=\sum_{i=1}^{h}(l_i^{'}-2)^+=1+\sum_{i=1}^{h}(l_i-2)^+=t+1$. Agora para o último termo observemos que a potência l_{h+1} cresce de 1 para 2, logo $\sum_{i=1}^{h+1}(l_i-2)^+=\sum_{i=1}^{h}(l_i-2)^+=t$. Então pela hipótese de indução, temos

$$\frac{1}{n^{(t-(b+1))}k^{-(b+1)}}E\left(\prod_{i=1}^{h}Y_{ni}^{l_i}\prod_{j=h+1}^{h+b+1}Y_{nj}\right)=$$

$$=\frac{-1}{n^{(t+1-b-2)/2}k^{-(b+1)/2}(kn-(d-1))}\sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{n}Y_{ni}^{l_i^{'}}\prod_{j=h+1}^{h+b}Y_{nj}\right)+$$

$$+\frac{-b}{(kn-(d-1))}\frac{1}{n^{(t+1-b-2)/2}k^{-(b+1)/2}}E\left(\prod_{i=1}^{h+1}Y_{ni}^{l_i}\prod_{j=(h+1)+1}^{(h+1)+(b-1)}Y_{nj}\right)=$$

$$=\frac{-k^{1/2}n}{(kn-(d-1))}\frac{1}{n^{(t^{'}-b)}k^{-b/2}}\sum{}' E\left(\prod_{i=1}^{h}Y_{ni}^{l_i^{'}}\prod_{j=h+1}^{h+b}Y_{nj}\right)\to 0 \quad +$$

$$+\frac{-bnk}{(kn-(d-1))}\frac{1}{n^{(t-(b-1))/2}k^{-(b-1)/2}}E\left(\prod_{i=1}^{h+1}Y_{ni}^{l_i}\prod_{j=(h+1)+1}^{(h+1)+(b-1)}Y_{nj}\right)\to 0$$

quando $n\to\infty$.

Assim (3.7) é verdadeiro para $j=b+1$. Portanto pelo princípio de indução temos o resultado desejado.

■

Usaremos o lema 3.4 e a propriedade de intercabiabilidade para provar o lema 3.5, que será importante na demostração do lema 3.6.

Lema 3.5 *Se* $\sup_{ni}E\left|X_{ni}\right|^{4+\delta}<\infty$, *então para* $d\geq 1$

$$E(Y_{n1}^2\dots Y_{nd}^2)=\frac{(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\dots(nk-d+1)}+r_n \quad q.c. \tag{3.10}$$

onde $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Demonstração:

Novamente para a demostração usaremos o método de indução aplicando a mesma técnica do lema anterior nas esperanças.

Primeiro observe que para $d = 1$, temos

$$E(Y_{n1)}^2 = S_n^2 = S_n^2 \frac{(nk)}{(nk)}.$$

Agora vamos assumir que (3.10) seja verdadeiro para d. Então vamos provar que também vale para $d + 1$. Assim,

$$E\left(Y_{n1}^2 \dots Y_{nd}^2 Y_{n,d+1}^2 | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{nd} = z_{i_d}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2 E\left(Y_{n,d+1}^2 | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{nd} = z_{i_d}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2 \left[\sum_{j=1}^{kn} z_j^2 - (z_{i_1}^2 + \dots + z_{i_d}^2)\right] \frac{1}{kn - d} =$$

$$= \frac{\prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2}{kn - d} \frac{kn}{kn} \sum_{j=1}^{kn} z_j^2 + \frac{-\prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2}{kn - d}\left(z_{i_1}^2 + \dots + z_{i_d}^2\right) =$$

$$= \frac{kn}{kn - d} S_n^2 \prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2 + \frac{-\prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2}{kn - d}\left(z_{i_1}^2 + \dots + z_{i_d}^2\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E\left(Y_{n1}^2 \dots Y_{nd}^2 Y_{n,d+1}^2\right) &= E\left(E\left(Y_{n1}^2 \dots Y_{nd}^2 Y_{n,d+1}^2\right) | Y_{n1}, \dots, Y_{nd}\right) = \\ &= \frac{kn}{kn - d} S_n^2 E\left(Y_{n1}^2 \dots Y_{nd}^2\right) + \\ &+ \frac{-1}{kn - d} E\left(\prod_{i=1}^{d} Y_{ni}^2 (Y_{n1}^2 + \dots + Y_{nd}^2)\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando a propriedade de intercambiabilidade em (3.11), vamos ter

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{kn-d}E\left(\prod_{i=1}^{d}Y_{ni}^2(Y_{n1}^2+\ldots+Y_{nd}^2)\right) =& \\
&= \frac{-1}{kn-d}\left[E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)+\ldots+E(Y_{n1}^2Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^4)\right] = \\
&= \frac{-1}{kn-d}\left[E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)+\ldots+E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)\right] = \\
&= \frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2).
\end{aligned}
$$

Portanto pela hipótese de indução, temos

$$
\begin{aligned}
E\left(Y_{n1}^2\ldots Y_{nd}^2Y_{n,d+1}^2\right) &= \frac{kn}{kn-d}S_n^2E\left(Y_{n1}^2\ldots Y_{nd}^2\right)+\frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2). \\
&= \frac{kn}{kn-d}S_n^2\left(\frac{(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\ldots(nk-d+1)}+r_n\right)+ \\
&+ \frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2) = \\
&= \frac{(kn)^{d+1}(S_n^2)^{d+1}}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+1)+1)}+\frac{kn}{kn-d}S_n^2r_n+ \\
&+ \frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2) = \\
&= \frac{(kn)^{d+1}(S_n^2)^{d+1}}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+1)+1)}+r_n^{'}.
\end{aligned}
$$

Onde

$$
\lim_{n\to\infty}r_n^{'} = \lim_{n\to\infty}\frac{kn}{kn-d}S_n^2r_n+\lim_{n\to\infty}\frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)=0,
$$

visto que S_n^2 é limitado, assim $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{kn}{kn-d}S_n^2r_n=0$, e

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{-d}{kn-d}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{-d}{k-d/n}\frac{1}{n}E(Y_{n1}^4Y_{n2}^2\ldots Y_{nd}^2)=0 \quad (lema\ 3.4)
$$

Portanto por indução, (3.10) é verdadeiro para todo $d\geq 1$.

■

Os lemas 3.3-3.6 fornecem ferramentas importantes para o cálculo da $E((\sum_{i=1}^{m}Y_{ni})^{2d})/s_n^{2d}$ que é feito no lema 3.7, que por sua vez é utilizado na obtenção do TLC.

Lema 3.6 *Se* $\sup_{ni} E\,|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$*, então para* $d \geq 1,\ 1 \leq j \leq d$*,*

$$E\left(\prod_{i=1}^{d-j} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-j+1}^{d+j} Y_{ni}\right) = \frac{(-1)^j(2j-1)(2j-3)\cdots(3)(1)(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\cdots(nk-(d+j)+1)} + r_n \quad q.c. \tag{3.12}$$

onde $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n^{-j}k^{-j}} = 0.$

Demonstração:

Vamos provar por indução. Assim para $j = 1$, segue-se

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^2 Y_{nd}\right) Y_{n,d+1}|Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{nd} = z_{i_d}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 z_{i_d} E\left(Y_{n,d+1}|Y_{n1} = z_{i_1}, \ldots, Y_{nd} = z_{i_d}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 z_{i_d}\left(\sum_{j=1}^{kn} z_j - (z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_d})\right)\frac{1}{kn-d} =$$

$$= \frac{-\prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 z_{i_d}}{kn-d}(z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_d}) =$$

$$= \frac{-\prod_{s=1}^{d} z_{i_s}^2}{kn-d} + \frac{-\prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 z_{i_d}}{kn-d}(z_{i_1} + z_{i_2} + \ldots + z_{i_{d-1}}).$$

Pelo lema 3.4, 3.5 e propriedade de intercambiabilidade, vamos ter

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^2 \prod_{i=1}^{d+1} Y_{ni}\right) &= E\left(E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^2 Y_{nd}\right) Y_{n,d+1}|Y_{n1}, \ldots, Y_{nd}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)E\left(Y_{n1}^2 \ldots Y_{nd}^2\right)}{kn-d} + \frac{-(d-1)E\left(Y_{n1}^3 Y_{n2}^2 \ldots Y_{n,d-1}^2 Y_{nd}\right)}{kn-d} =\\
&= \frac{(-1)^1(2(1)-1)(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+1)+1)} + \frac{r_{n_1}}{nk-d} + \quad (lema\ 3.5)\\
&+ \frac{-(d-1)E\left(Y_{n1}^3 Y_{n2}^2 \ldots Y_{n,d-1}^2 Y_{nd}\right)}{kn-d} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^1(2(1)-1)(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\dots(nk-(d+1)+1)} + r_{n_2}.$$

Onde

$$r_{n_2} = \left(\frac{r_{n_1}}{nk-d} + \frac{-(d-1)E\left(Y_{n1}^3 Y_{n2}^2 \dots Y_{n,d-1}^2 Y_{nd}\right)}{kn-d} \right),$$

tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_{n_2}}{n^{-1}k^{-1}} = 0$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n_1} = 0$ (lema 3.5) e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-(d-1)}{kn-d} \frac{1}{n^{-1}k^{-1}} E\left(Y_{n1}^3 Y_{n2}^2 \dots Y_{n,d-1}^2 Y_{nd}\right) = 0, \quad (\textit{lema}\ \ 3.4).$$

Logo (3.12) é verdadeiro para $j = 1$.

Agora assuma que (3.12) seja verdadeiro para $j = b$. Então vamos provar que também é válido para $j = b + 1$. Usando a mesma técnica anterior, segue-se que,

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni} \right) Y_{n,d+(b+1)} | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{n,d+b} = z_{i_{d+b}} \right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s} E\left(Y_{n,d+(b+1)} | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{n,d+b} = z_{i_{d+b}}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s} \left(\sum_{j=1}^{kn} z_j - (z_{i_1} + \dots + z_{i_{d+b}}) \right) \frac{1}{kn-(d+b)} =$$

$$= \frac{- \prod\limits_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod\limits_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s}}{kn-(d+b)} (z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_{d+b}}) =$$

$$= \frac{- \prod\limits_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod\limits_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s}}{kn-(d+b)} \sum_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s} + \frac{- \prod\limits_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod\limits_{s=d-b}^{d+b} z_{i_s}}{kn-(d+b)} \sum_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}.$$

Logo pela hipótese de indução e propriedade de intercambiabilidade, segue-se

$$E\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+(b+1)} Y_{ni} \right) =$$

$$= E\left(E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right) Y_{n,d+(b+1)}|Y_{n1},\ldots,Y_{n,d+b}\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)(2(b+1)-1)E\left(\prod_{i=1}^{d-b} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b+1}^{d+b} Y_{ni}\right)}{nk-(d-(b+1)+2b+1)} +$$

$$+ \frac{(-1)(d-(b+1))E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right)}{nk-(d+b)} =$$

$$= \frac{(-1)(-1)^b(2(b+1)-1)(2b-1)\ldots(3)(1)(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+b+1)+1)} +$$

$$+ \frac{r_n}{nk-(d+b)} + \frac{(-1)(d-(b+1))E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right)}{nk-(d+b)} =$$

$$= \frac{(-1)^{b+1}(2(b+1)-1)(2b-1)\ldots(3)(1)(nk)^d(S_n^2)^d}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+b+1)+1)} + r_{n_3}.$$

Com $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_{n_3}}{n^{-(b+1)}k^{-(b+1)}} = 0$, onde

$$r_{n_3} = \frac{r_n}{nk-(d+b)} + \frac{(-1)(d-b)E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right)}{nk-(d+b)}.$$

De fato, primeiro note que pela hipótese de indução, temos

$$\frac{1}{nk-(d+b)}\frac{r_n}{n^{-(b+1)}k^{-(b+1)}} = \frac{1}{(1-(d+b)/nk)}\frac{r_n}{n^{-b}k^{-b}} \longrightarrow 0 \ \ quando \ \ n\to\infty.$$

Agora para o segundo termo, pelo lema 3.4, obtemos

$$\frac{(-1)(d-b)}{nk-(d+b)}\frac{E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right)}{n^{-(b+1)}k^{-(b+1)}} =$$

$$= \frac{(-1)(d-b)}{(k^{1/2}-(d+b)/nk^{1/2})} \frac{E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right)}{n^{(1-(2b+1))/2}k^{-(2b+1)/2}} \longrightarrow 0 \ \textit{quando} \ \ n \longrightarrow \infty.$$

Assim temos que (3.12) também é verdadeiro para $j = b+1$. Portanto pelo método de indução temos o resultado desejado.

■

Lema 3.7 *Se* $\sup_{ni} E\left|X_{ni}\right|^{4+\delta} < \infty$, *então para* $d \geq 1$

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d} \longrightarrow \frac{(2d)!}{d!2^d}, \ \textit{q.c. quando } n \longrightarrow \infty \tag{3.13}$$

Demonstração:

Para o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d}$ usa-se o teorema multinomial observando que ao aplicar a esperança, as variáveis aleatórias tem a propriedade de intercambiabilidade. Assim vamos ter o seguinte.

Seja $L = \left\{(l_1, \ldots, l_{2d}) : \sum_{i=1}^{2d} l_i = 2d, \ \ l_1 \geq \ldots \geq l_{2d} \geq 0\right\}$ e $g_i = \#\left\{l_j = i\right\}, \ i = 1, \ldots, l_1$. Para $m \geq 2d$ tem-se

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d} =$$

$$= \left(\frac{1}{s_n^*}\right)^{2d} \sum_{l \in L} \frac{(2d)!}{l_1! \ldots l_{2d}!} \begin{pmatrix} m \\ g_{l_1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} m - \sum_{i=2}^{l_1} g_i \\ g_1 \end{pmatrix} E\left(Y_{n1}^{l_1} \ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d} \frac{1}{(S_n^2 m)^d} \sum_{l \in L} \frac{(2d)!}{l_1! \ldots l_{2d}!} \begin{pmatrix} m \\ g_{l_1} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} m - \sum_{i=2}^{l_1} g_i \\ g_1 \end{pmatrix} E\left(Y_{n1}^{l_1} \ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d} \frac{1}{(S_n^2 m)^d} \sum_{l \in L} \frac{(2d)!}{l_1! \ldots l_{2d}!} \frac{m \ldots \left(m - \left(\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1\right)\right)}{g_1! \ldots g_{l_1}!} E\left(Y_{n1}^{l_1} \ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d} \sum_{l\in L} \frac{(2d)!\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right) m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i}}{l_1!\ldots l_{2d}! g_1!\ldots g_{l_1}! m^d} E\left(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d} \left[\sum_{l\in L_1} \frac{(2d)!\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right) m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i} E\left(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right)}{l_1!\ldots l_{2d}! g_1!\ldots g_{l_1}! m^{d-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d}(l_i-2)^+} m^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d}(l_i-2)^+}}\right] +$$

$$+ \quad \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d} \sum_{l\in L_2} \frac{(2d)!}{2^{g_2}} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right)}{g_1! g_2!} \frac{m^{g_1+g_2}}{m^d} \times$$

$$\times E\left[\prod_{i=1}^{g_2} Y_{ni}^2 \prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1} Y_{ni}\right]. \tag{3.14}$$

Onde

$L_1 = \left\{(l_1,\ldots,l_{2d}) : \sum_{i=1}^{2d} l_i = 2d,\ l_1 \geq 3,\ l_1 \geq \ldots \geq l_{2d}\right\}$

$L_2 = \left\{(l_1,\ldots,l_{2d}) : \sum_{i=1}^{2d} l_i = 2d,\ 2 \geq l_1 \geq \ldots \geq l_{2d}\right\}$

Agora para o primeiro termo de (3.14) tem-se

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d} \left[\sum_{l\in L_1} \frac{(2d)!\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right) m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i} E\left(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right)}{l_1!\ldots l_{2d}! g_1!\ldots g_{l_1}! m^{d-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d}(l_i-2)^+} m^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d}(l_i-2)^+}}\right] =$$

$$= \left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{1-\frac{m}{kn}}\right)^d \frac{(2d)!}{(S_n^2)^d} \sum_{l\in L_1} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right)}{l_1!\ldots l_{2d}! g_1!\ldots g_{l_1}!} \times$$

$$\times \left(\frac{n}{m}\right)^{t'/2} \left(\frac{m}{kn}\right)^{g_1/2} \frac{1}{\left(n^{(t'-g_1)/2} k^{-g_1/2}\right)} E\left(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d}^{l_{2d}}\right) \longrightarrow 0 \qquad \textbf{(I)}$$

quando $n \longrightarrow \infty$ pelo lema 3.4, visto que $m < kn$ e $\dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{\delta}$, para $0 < \delta < \inf \dfrac{m}{n}$ onde $\displaystyle\sum_{i=1}^{l_1} g_i - d + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d}(l_i - 2)^+ = \frac{g_1}{2}$ e $\displaystyle t' = \sum_{i=1}^{2d}(l_i-2)^+$.

Aplicando o lema 3.6 para o segundo termo de (3.14),

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l\in L_2}\frac{(2d)!}{2^{g_2}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1}{m}\right)}{g_1!g_2!}\frac{m^{g_1+g_2}}{m^d}E\left[\prod_{i=1}^{g_2}Y_{ni}^2\prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1}Y_{ni}\right]=$$

$$=\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l=0}^{d}\frac{(2d)!}{2^{d-l}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{(2l)!(d-l)!}\frac{m^{d+l}}{m^d}\times$$

$$\times\left[\frac{(-1)^l(2l-1)(2l-3)\ldots(3)(1)(nk)^d(S_n)^d}{nk(nk-1)\ldots(nk-(d+l-1))}+r_n\right],\ \textit{onde}\ \lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n^{-l}k^{-l}}=0 \qquad (3.15)$$

Considere agora o segundo termo de (3.15) observando que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n^{-l}k^{-l}} = 0$ e $m < kn$, assim

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l=0}^{d}\frac{(2d)!}{2^{d-l}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{(2l)!(d-l)!}\frac{m^{d+l}}{m^d}r_n=$$

$$=\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l=0}^{d}\frac{(2d)!}{2^{d-l}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{(2l)!(d-l)!}\frac{m^{d+l}}{m^d}\frac{r_n}{(nk)^l n^{-l}k^{-l}}=$$

$$=\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l=0}^{d}\frac{(2d)!}{2^{d-l}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{(2l)!(d-l)!}\left(\frac{m}{kn}\right)^l\frac{r_n}{n^{-l}k^{-l}}\longrightarrow 0 \quad (\mathbf{II})$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Para o primeiro termo de (3.15), temos

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \frac{1}{(S_n^2)^d}\sum_{l=0}^{d}\frac{(2d)!}{2^{d-l}}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{(2l)!(d-l)!}\frac{m^{d+l}}{m^d}\times$$

$$\times \frac{(-1)^l(2l-1)(2l-3)\dots(3)(1)(nk)^d(S_n)^d}{nk(nk-1)\dots(nk-(d+l-1))} =$$

$$= \frac{(2d)!}{d!2^d}\left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \sum_{l=0}^{d} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{\left(1-\frac{1}{kn}\right)\dots\left(1-\frac{d+l-1}{kn}\right)} \frac{m^l}{n^l} \frac{(2l-1)\dots3.1}{(2l)!2^{-l}} \frac{l!}{l!} \frac{d!}{(d-l)!}(-1)^l k^{d-l} =$$

$$= \frac{(2d)!}{d!2^d}\left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{k-\frac{m}{n}}\right)^d \sum_{l=0}^{d} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{d+l-1}{m}\right)}{\left(1-\frac{1}{kn}\right)\dots\left(1-\frac{d+l-1}{kn}\right)} \begin{pmatrix} d \\ l \end{pmatrix} \left(-\frac{m}{n}\right)^l k^{d-l} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{(2d)!}{d!2^d}\left(\frac{1}{k-1}\right)^d \sum_{l=0}^{d} \begin{pmatrix} d \\ l \end{pmatrix} (-1)^l k^{d-l} = \frac{(2d)!}{d!2^d}, \quad \textit{quando } \; n \to \infty, \qquad \textbf{(III)}$$

onde $(2l-1)(2l-3)\dots3.1.l! = (2l)!2^{-l}$, e $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 1$ $(m = m_n)$.

Portanto por **(I)**, **(II)** e **(III)**, obtemos

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d} \longrightarrow \frac{(2d)!}{d!2^d}, \; \textit{q.c. quando } n \longrightarrow \infty.$$

■

Lema 3.8 *Se* $\sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$*, então para* $d \geq 1,\; 1 \leq j \leq d$*,*

$$\frac{1}{n^{-(2j-1)/2}k^{-j}} E\left(\prod_{i=1}^{d-j} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-j+1}^{d+j-1} Y_{ni}\right) \longrightarrow 0, \quad \textit{q.c. quando } n \longrightarrow \infty \tag{3.16}$$

Demonstração:

Vamos provar por indução. Primeiramente observe que para $j = 1$,

$$E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1} Y_{ni}^2\right) Y_{nd} | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{n,d-1} = z_{i_{d-1}}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 E\left(Y_{nd} | Y_{n1} = z_{i_1}, \dots, Y_{n,d-1} = z_{i_{d-1}}\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2 \left(\sum_{j=1}^{kn} z_j - (z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_{d-1}})\right) \frac{1}{kn-(d-1)} =$$

$$= \frac{-\prod_{s=1}^{d-1} z_{i_s}^2}{kn-(d-1)}(z_{i_1}+z_{i_2}+\ldots+z_{i_{d-1}}).$$

Temos então, pela propriedade de intercambiabilidade e pelo lema 3.4

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{-1/2}k^{-1}}E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1}Y_{ni}^2\right)Y_{nd}\right) &= \frac{E\left(E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1}Y_{ni}^2\right)Y_{nd}|Y_{n1},\ldots,Y_{n,d-1}\right)\right)}{n^{-1/2}k^{-1}} = \\
&= \frac{-(d-1)}{kn-(d-1)}\frac{1}{n^{-1/2}k^{-1}}E\left(Y_{n1}^3\prod_{i=2}^{d-1}Y_{ni}^2\right) = \\
&= \frac{-(d-1)}{(1-(d-1)(kn)^{-1})}\frac{1}{n^{1/2}}E\left(Y_{n1}^3\prod_{i=2}^{d-1}Y_{ni}^2\right) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Temos então que (3.16) é verdadeiro para $j = 1$.

Agora assuma que (3.16) seja verdadeiro para $j = b$, então vamos provar que também é válido para $j = b + 1$. Primeiramente observe que,

$$\begin{aligned}
&E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)}Y_{ni}^2\prod_{i=d-b}^{d+b-1}Y_{ni}\right)Y_{n,d+b}|Y_{n1}=z_{i_1},Y_{n2}=z_{i_2},\ldots,Y_{n,d+b-1}=z_{i_{d+b-1}}\right) = \\
&\quad= \prod_{s=1}^{d-(b+1)}z_{i_s}^2\prod_{s=d-b}^{d+b-1}z_{i_s}E\left(Y_{n,d+b}|Y_{n1}=z_{i_1},\ldots,Y_{n,d+b-1}=z_{i_{d+b-1}}\right) = \\
&\quad= \frac{-\prod_{s=1}^{d-(b+1)}z_{i_s}^2\prod_{s=d-b}^{d+b-1}z_{i_s}}{kn-(d+b-1)}\left(\sum_{j=1}^{kn}z_j-(z_{i_1}+z_{i_2}+\ldots+z_{i_{d+b-1}})\right) = \\
&\quad= \frac{-\prod_{s=1}^{d-(b+1)}z_{i_s}^2\prod_{s=d-b}^{d+b-1}z_{i_s}}{kn-(d+b-1)}(z_{i_1}+z_{i_2}+\ldots+z_{i_{d+b-1}}) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\prod_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod_{s=d-b}^{d+b-1} z_{i_s}}{kn-(d+b-1)} \sum_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s} + \frac{-\prod_{s=1}^{d-(b+1)} z_{i_s}^2 \prod_{s=d-b}^{d+b-1} z_{i_s}}{kn-(d+b-1)} \sum_{s=d-b}^{d+b-1} z_{i_s}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{n^{-(2(b+1)-1)/2}k^{-(b+1)}} E\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b} Y_{ni}\right) =$$

$$= \frac{E\left(E\left(\left(\prod_{i=1}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b-1} Y_{ni}\right) Y_{n,d+b} | Y_{n1}\ldots, Y_{n,d+b-1}\right)\right)}{n^{-(2(b+1)-1)/2}k^{-(b+1)}} =$$

$$= \frac{-(d-(b+1))}{(nk-(d+b-1))} \frac{1}{n^{-(2(b+1)-1)/2}k^{-(b+1)}} E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b-1} Y_{ni}\right) + \qquad (I)$$

$$+ \frac{-2b}{(nk-(d+b-1))} \frac{1}{n^{-(2(b+1)-1)/2}k^{-(b+1)}} E\left(\prod_{i=1}^{d-b} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b+1}^{d+b-1} Y_{ni}\right) = \qquad (II)$$

$$= \frac{-(d-(b+1))}{(1-(d+b-1)(nk)^{-1})} \frac{1}{n^{(1-2b)/2}k^{-b}} E\left(Y_{n1}^3 \prod_{i=2}^{d-(b+1)} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b}^{d+b-1} Y_{ni}\right) \to 0 \ + \qquad (III)$$

$$+ \frac{-2b}{(1-(d+b-1)(nk)^{-1})} \frac{1}{n^{-(2b-1)/2}k^{-b}} E\left(\prod_{i=1}^{d-b} Y_{ni}^2 \prod_{i=d-b+1}^{d+b-1} Y_{ni}\right) \to 0. \qquad (IV)$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Onde obtemos os termos (I) e (II) pela propriedade de intercambiabilidade, a convergência de (III) pelo lema 3.4 e finalmente (IV) pela hipótese de indução. Temos então que (3.16) também é verdadeiro para $j = b+1$. Logo pelo princípio de indução temos o resultado.

∎

Lema 3.9 *Se* $\sup_{ni} E|X_{ni}|^{4+\delta} < \infty$, *então para* $d \geq 1$,

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d-1} \longrightarrow 0, \ q.c. \ \textit{quando } n \to \infty \qquad (3.17)$$

Demonstração:

Novamente usa-se o teorema multinomial para o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d-1}$, aplicando a propriedade de intercambiabilidade na esperança. Portanto vamos obter o seguinte.

Seja

$$\left\{(l_1,\ldots,l_{2d-1}):\ l_i\ inteiros.\ \sum_{i=1}^{2d-1} l_i = 2d-1,\ l_1 \geq \ldots \geq l_{2d-1} \geq 0\right\}$$

e $g_i = \#(l_j = i), i = 1,\ldots,l_1,\ j = 1,\ldots,2d-1$. Para $m \geq 2d-1$, temos

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d-1} =$$

$$= \frac{1}{(s_n^{*2})^{d-1/2}}\sum_{l\in L}\frac{(2d-1)!}{l_1!\ldots l_{2d-1}!}\begin{pmatrix} m \\ g_{l_1}\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} m-\sum_{i=2}^{l_1} g_i \\ g_1\end{pmatrix} E(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}}) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}} m^{d-\frac{1}{2}}}\sum_{l\in L}\frac{(2d-1)!}{l_1!\ldots l_{2d-1}!}\begin{pmatrix} m \\ g_{l_1}\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} m-\sum_{i=2}^{l_1} g_i \\ g_1\end{pmatrix}\times$$

$$\times E(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}}) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}} m^{d-\frac{1}{2}}}\sum_{l\in L}\frac{(2d-1)!}{l_1!\ldots l_{2d-1}!}\frac{m(m-1)\ldots(m-(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{g_1!\ldots g_{l_1}!}\times$$

$$\times E(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}}) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}}\sum_{l\in L}\frac{(2d-1)!}{l_1!\ldots l_{2d-1}!}\frac{(1-\frac{1}{m})\ldots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{g_1!\ldots g_{l_1}!}\frac{m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i}}{m^{d-\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times E(Y_{n1}^{l_1}\ldots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}}) =$$

$$= \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}}\sum_{l\in L_1}\frac{(2d-1)!}{l_1!\ldots l_{2d-1}!}\frac{(1-\frac{1}{m})\ldots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{g_1!\ldots g_{l_1}!}\times$$

$$\times \frac{m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i-(d-\frac{1}{2})}}{n^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+}} \frac{E(Y_{n1}^{l_1}\dots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}})}{n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+}} \quad +$$

$$+ \quad \left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l\in L_2} \frac{(2d-1)!}{2^{g_2}} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{g_1!g_2!} \times$$

$$\times \frac{m^{g_1+g_2}}{m^{d-\frac{1}{2}}} E\left[\prod_{i=1}^{g_2} Y_{ni}^2 \prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1} Y_{ni}\right]. \tag{3.18}$$

Onde

$$L_1 = \left\{(l_1,\dots,l_{2d-1}) : \sum_{i=1}^{2d-1} l_i = 2d-1,\ l_1 \geq 3,\ l_1 \geq \dots \geq l_{2d-1}\right\}$$

e

$$L_2 = \left\{(l_1,\dots,l_{2d-1}) : \sum_{i=1}^{2d-1} l_i = 2d-1,\ 2 \geq l_1 \geq \dots \geq l_{2d-1}\right\}$$

Aplicando o lema 3.4 para o primeiro termo de (3.18) segue-se

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l\in L_1} \frac{(2d-1)!}{l_1!\dots l_{2d-1}!} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{g_1!\dots g_{l_1}!} \times$$

$$\times \frac{m^{\sum_{i=1}^{l_1} g_i-(d-\frac{1}{2})}}{n^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+}} \frac{E(Y_{n1}^{l_1}\dots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}})}{n^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+}} \quad =$$

$$= \left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{1-\frac{m}{kn}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{(2d-1)!}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l\in L_1} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i-1))}{l_1!\dots l_{2d-1}!g_1!\dots g_{l_1}!} \times$$

$$\times \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+} \left(\frac{m}{kn}\right)^{g_1/2} \frac{E(Y_{n1}^{l_1}\dots Y_{n,2d-1}^{l_{2d-1}})}{n^{(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-1}(l_i-2)^+-g_1/2)}k^{-g_1/2}} \longrightarrow 0 \qquad \textbf{(I)}$$

quando $n \to \infty$, visto que $m < kn$ e $\dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{\delta}$, para $0 < \delta < \inf \dfrac{m}{n}$.

Agora note que $2d-1 = 2g_2 + g_1$, então aplicando o lema 3.8 no segundo termo de (3.18), segue-se

$$\left(\frac{k-\frac{1}{n}}{k-\frac{m}{n}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l \in L_2} \frac{(2d-1)!}{2^{g_2}} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1))}{g_1! g_2!} \times$$

$$\times \frac{m^{g_1+g_2}}{m^{d-\frac{1}{2}}} E\left[\prod_{i=1}^{g_2} Y_{ni}^2 \prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1} Y_{ni}\right] =$$

$$= \left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{1-\frac{m}{kn}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l \in L_2} \frac{(2d-1)!}{2^{g_2}} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1))}{g_1! g_2!} \times$$

$$\times \frac{m^{g_1+g_2}}{m^{g_2+\frac{g_1}{2}}} \frac{E\left[\prod_{i=1}^{g_2} Y_{ni}^2 \prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1} Y_{ni}\right]}{n^{-g_1/2} n^{g_1/2} k^{-(g_1+1)/2} k^{(g_1+1)/2}} =$$

$$= \left(\frac{1-\frac{1}{kn}}{1-\frac{m}{kn}}\right)^{d-\frac{1}{2}} \frac{1}{(S_n^2)^{d-\frac{1}{2}}} \sum_{l \in L_2} \frac{(2d-1)!}{2^{g_2}} \frac{(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{l_1} g_i - 1))}{g_1! g_2!} \times$$

$$\times \frac{1}{k^{1/2}} \left(\frac{m}{kn}\right)^{g_1/2} \frac{E\left[\prod_{i=1}^{g_2} Y_{ni}^2 \prod_{i=g_2+1}^{g_2+g_1} Y_{ni}\right]}{n^{-g_1/2} k^{-(g_1+1)/2}} \longrightarrow 0 \quad (lema\ \ 3.8) \qquad \textbf{(II)}$$

quando $n \to \infty$. Portanto por **(I)** e **(II)**, temos

$$E\left(\frac{1}{s_n^*} \sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d-1} \longrightarrow 0,\ q.c.\ \ quando\ n \to \infty.$$

■

Os lema 3.7 e 3.9 são usados na obtenção da normalidade assintótica do bootstrap dependente, mas primeiro precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 3.10 *Seja X uma v.a. com função característica ϕ_X e $E|X|^{n+\delta} < \infty$ para algum inteiro não-negativo n e algum $\delta \in [0,1]$, então ϕ_X tem derivadas contínuas $\phi_X^{(k)}$*

de orden $k \leq n$ *e*

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j EX^j}{j!} + r_n, \qquad |r_n| \leq \frac{2^{1-\delta} E|X|^{n+\delta}|t|^{n+\delta}}{(1+\delta)\ldots(n+\delta)}.$$

Demonstração: Para a demostração consulte [4] página 295. ■

Teorema 3.11 *Se* $\sup_{ni} E\left|X_{ni}\right|^{4+\delta} < \infty$ *para algum* $\delta > 0$ *e* $0 < \inf_n \frac{m}{kn} \leq \sup_n \frac{m}{kn} < 1$ *então*

$$\frac{1}{s_n^*} \sum_{j=1}^{m_n} \left(X_{nj}^* - \overline{X}_n\right) \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{3.19}$$

Demonstração:

Usando a notação anterior temos que $Y_{ni} = X_{ni}^* - \overline{X}_n$. Observe que é suficiente mostrar que $\frac{1}{s_n^*} \sum_{i=1}^{m} Y_{ni}$ converge em distribuição para uma $N(0,1)$.

Seja $t \in \mathbb{R}$, e $\epsilon > 0$. Ecolha um b de tal forma que

$$\sum_{l=b}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^l < \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.20}$$

Observe que a $E\left(\frac{\sum_{u=1}^m Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2b} < \infty$, portanto podemos usar o teorema 3.10, assim tomando $n = 2b-1$ e $\delta = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left|E\left(e^{it\sum_{u=1}^m Y_{nu}/s_n^*}\right) - e^{-t^2/2}\right| &= \left|E\left(e^{it\sum_{u=1}^m Y_{nu}/s_n^*}\right) - \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^l/l!\right| \leq \\
&\leq \left|\sum_{h=0}^{2b-1} \frac{(it)^h}{h!} E\left(\frac{\sum_{u=1}^m Y_{nu}}{s_n^*}\right)^h - \sum_{l=0}^{b-1}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^l/l!\right| + \\
&+ \frac{E|\sum_{u=1}^m Y_{nu}/s_n^*|^{2b}}{(2b)!} t^{2b} + \sum_{l=b}^{\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right)^l/l!.
\end{aligned}$$

Segue-se por (3.20) que o último termo é menor que $\epsilon/4$ além disso pelo lema 3.7 temos que para todo $\epsilon > 0$, existe um $N_1(\epsilon, b)$ tal que se $n \geq N_1(\epsilon, b)$ então

$$\frac{E|\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}/s_n^*|^{2b}}{(2b)!}t^{2b} \leq 2\frac{(2b)!t^{2b}}{b!2^b(2b)!} = 2\frac{t^{2b}}{b!2^b} < 2\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}, \tag{3.21}$$

Vamos desenvolver os seguintes termos

$$\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{2b-1} \frac{(it)^h}{h!} E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^h &= 1 + itE\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right) - \frac{t^2}{2!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^2 - \\
&- \frac{it^3}{6!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^3 + \frac{t^4}{4!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^4 + \ldots + \\
&+ \ldots + \frac{i^{2(b-1)}t^{2(b-1)}}{(2(b-1))!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2(b-1)} + \\
&+ \frac{i^{2b-1}t^{2b-1}}{(2b-1)!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2b-1}.
\end{aligned}$$

E também

$$-\sum_{l=0}^{b-1}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^l/l! = -1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{2!2^2} + \frac{t^6}{3!2^3} - \frac{t^8}{4!2^4} + \ldots + \frac{(-1)^{b-1}t^{2(b-1)}}{(b-1)!2^{b-1}}$$

Note o seguinte, para as potências na forma de $2d$ e $2d-1$ onde $d \geq 1$, obtemos respectivamente pelo lema 3.7 e 3.9

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d} \longrightarrow \frac{(2d)!}{d!2^d},$$

$$E\left(\frac{1}{s_n^*}\sum_{i=1}^{m} Y_{ni}\right)^{2d-1} \longrightarrow 0.$$

Assim pelo lema 3.7 e 3.9, que dado um $\epsilon > 0$, existem $N_2(\epsilon, b)$ tal que

$$\left|\sum_{h=0}^{2b-1} \frac{(it)^h}{h!} E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^h - \sum_{l=0}^{b-1}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^l/l!\right| =$$

$$= |1 + itE\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right) - \frac{t^2}{2!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^2 - \frac{it^3}{6!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m} Y_{nu}}{s_n^*}\right)^3 + \ldots +$$

$$+\ldots+\frac{i^{2(b-1)}t^{2(b-1)}}{(2(b-1))!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2(b-1)}+\frac{i^{2b-1}t^{2b-1}}{(2b-1)!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2b-1}-1\ +$$

$$+\frac{t^2(2.1)!}{2.1!2^1}+\ldots+\frac{i^{2(b-1)}t^{2(b-1)}(2(b-1))!}{(2(b-1))!(b-1)!2^{b-1}}|\leq$$

$$\leq\left|itE\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)\right|+\left|\frac{t^2}{2!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^2-\frac{t^2(2.1)!}{2.1!2^1}\right|+\ldots+$$

$$+\left|\frac{i^{2(b-1)}t^{2(b-1)}}{(2(b-1))!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2(b-1)}-\frac{i^{2(b-1)}t^{2(b-1)}(2(b-1))!}{(2(b-1))!(b-1)!2^{b-1}}\right|\ +$$

$$+\left|\frac{i^{2b-1}t^{2b-1}}{(2b-1)!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^{2b-1}\right|<\frac{\epsilon}{4(2b-1)}+\ldots+\frac{\epsilon}{4(2b-1)}=\frac{\epsilon}{4},$$

$\forall\ \ n\geq N_2(\epsilon,b)=max\{N^{(1)}(\epsilon,b),\ldots,N^{(2b-1)}(\epsilon,b)\}$. Portanto obtemos

$$\left|\sum_{h=0}^{2b-1}\frac{(it)^h}{h!}E\left(\frac{\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}}{s_n^*}\right)^h-\sum_{l=0}^{b-1}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^l/l!\right|<\frac{\epsilon}{4}, \tag{3.22}$$

para todo $n\geq N_2(\epsilon,b)=max\{N^{(1)}(\epsilon,b),\ldots,N^{(2b-1)}(\epsilon,b)\}$.

Logo, combinando (3.20)-(3.22) temos

$$\left|E\left(e^{it\sum_{u=1}^{m}Y_{nu}/s_n^*}\right)-e^{-t^2/2}\right|<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon$$

para qualquer $n\geq N=max\left\{N_1(\epsilon,b),N_2(\epsilon,b)\right\}$.

Portanto, pelo Teorema de Continuidade de Lévy, $\dfrac{1}{s_n^*}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}Y_{ni}$ converge em distribuição para $N(0,1)$.

∎

Referências Bibliográficas

[1] Ahmed, S. E., Li, D., Rosalscky, A., Volodin, A., *On the Asymptotic Probability for the Deviations of Dependent Bootstrap Means from the Sample Mean*, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 18, 3-20, 2005.

[2] Ash, R. B., *Probability end Measure Theory*, 2 edição, Academic Press, 2000.

[3] Athreya, K. B., Lahiri, S. N., *Measure Theory and Probability theory*, Springer Science, 2006.

[4] Chow, Y. S., *Probability Theory: Independence, interchangeability, Martingales*, Springer, New York, 1997.

[5] Ebrahimi, N., Ghosh, M., *Multivariate Negative Dependence*, Comm. Atatist. Theory Methods, A10, 307-337, 1981.

[6] Efron, B., *Bootstrap Methods: Anoth Look at the Jackkinife*, The Annals of Statistics, Vol 7, No 1, 1-26, 1979.

[7] James, B. R., *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, IMPA 2006.

[8] Joag-Dev, K., Proschan. F., *Negative Association of Randon Variables, with Aplications*, The Annals of Statistics, Vol. 11, No. 1. 286-295, 1983.

[9] Lehmann, E. L., *Some Concepts of Dependence*, Ann. Math. Statist., 43, 1137-1153, 1966.

[10] Magalhães, M. N., *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*, 2 edição, Edusp, 2006.

[11] Newman, C. M., *Asymptotic Independence and Limit Theorems for Positively and Negatively Dependent Random Variables*, IMS Lecture Notes, Vol. 5, 127-140, 1984.

[12] Nooghabi, H. J., Azarnoosh, H. A., *Exponential inequality for negatively associated random variables*, Springer-Verlag, 419428, 2007.

[13] Patterson, R. F., Smith. W. D., Taylor, R. L., Bozorgnia, A., *Limit Theorems for Negatively Dependent Random Variables*, Nonlinear Analysis, 47, 1283-1295, 2001.

[14] Smith, W. D., Taylor, R. L., *Consistency of Dependent Bootstrap Estimators*, Amer. J. Math. Management Sci., 21(3-4), 359-382, 2001.

[15] Smith, W. D., Taylor, R. L., *Validity of dependent bootstrapping in finite populations*, Nonlinear Analysis (2009)

[16] Taylor, R. L., Patterson, R. F., Bozorgnia, A., *A Strong Law of Large Numbers for Arrays of Rowwise Negatively Dependent Random Variables*, Stochastic Analysis and Applications, 20(3), 643-656, 2002.

[17] Taylor, R. L., Patterson, R. F., Bozorgnia, A., *Weak Laws of Large Numbers for Arrays of Rowwise Negatively Dependent Random Variables*, J. of Applied Mathe. and Stochastic Analysis, 14:3, 227-236, 2001.